



ISSN 2077-8708

Проблемы физики, математики и техники

№3 (68) 2026

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:
С.А. Хахомов (Беларусь)

**ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО
РЕДАКТОРА:**
А.В. Рогачёв (Беларусь)
Д.Л. Коваленко (Беларусь)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миروتин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)
М.А. Ярмоленко (Беларусь)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины
ул. Советская, 104,
246028, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

EDITOR-IN-CHIEF:
S.A. Khakhomov (Belarus)

DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:
A.V. Rogachev (Belarus)
D.L. Kovalenko (Belarus)

EDITORIAL BOARD:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)
M.A. Yarmolenko (Belarus)

EXECUTIVE SECRETARY:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

EDITION ADDRESS:
Francisk Skorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246028, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 3 (68) 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

- Ахраменко Н. А.** Гравитационное взаимодействие двух компланарных концентрических колец 7
- Ван Ципин, Му Цзяхао, Пан Мэнъян, Тан Сяосюэ, Чжэн Шанбинь, Лю Синь, Рогачев А. А., Джанг Сяохун.** Композитные аэрогели на основе хитозана и гидроксиапатита, покрытые куркуминовой пленкой, для восстановления дефектов костной ткани 11
- Гиргель С. С.** Пучки Эрмита непрерывного комплексного индекса с переносимой конечной мощностью 18
- Капшай В. Н., Гришечкина А. А.** Аналитическое и численное решение интегральных квазипотенциальных парциальных уравнений для s -состояний двухчастичной системы 23
- Кулак Г. В., Николаенко Т. В., Тозик Л. А.** Акустооптическое взаимодействие в сверхрешетках фотоупругости в условиях полного внутреннего отражения 30
- Ярмоленко М. А., Рогачев А. В., Пилипцов Д. Г., Рогачев А. А., Руденков А. С.** Молекулярная структура и механические свойства композиционных покрытий на основе кремнийорганических соединений, осажденных электроннолучевым диспергированием 35

МАТЕМАТИКА

- Васильев А. Ф., Васильева Т. И.** О насыщенных формациях сверхразрешимых групп, их w -расширениях и некоторых приложениях 41
- Гальмак А. М.** Делители нуля в обобщённых полиадических группоидах 46
- Люксембург И. Л.** Алгебры операторов умножения на разрывные функции 51
- Рудько Я. В.** Существование и единственность решений смешанной задачи для волнового уравнения с разрывом функции скорости во внутренней и граничной точках 56

ТЕХНИКА

- Малютин-Бронская В. В., Нестеренок А. В., Кравченко В. М., Якушев А. В.** Возможность повышения эффективности солнечных модулей при совместной эксплуатации с термоэлектрическими генераторами 65
- Никитюк Ю. В., Марченко Л. Н., Баевич Г. А., Прохоренко В. А., Максименко А. В.** Моделирование качества покрытий, формируемых импульсным лазерным излучением на стали 30XGCH2A с использованием нечетких моделей 72
- Прохоренко В. А., Смородин В. С., Никитюк Ю. В., Соколов С. И.** Разработка метода и средств моделирования задачи управления технологической операцией лазерного термораскалывания силикатных стекол при осуществлении полярископического мониторинга в режиме реального времени 79

ИНФОРМАТИКА

- Курочка К. С., Семенченя Т. С.** Исследование математической модели напряженно-деформированного состояния поясничного отдела позвоночника человека под действием вертикальной нагрузки 86
- Рафалова Е. В.** Сравнительный анализ и верификация математических моделей управления потоками в M2M-сетях IoT 91
- Сукач Е. И., Калинин В. А.** Вероятностно-алгебраическое моделирование надежности электроэнергетических систем с использованием пространственно-временного анализа данных 97

ЛЮДИ НАУКИ

- Виктор Степанович Монахов** 106

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки:

- **технические;**
- **физико-математические.**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21. Приказы Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 31.12.2020 № 338, № 339.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е.А. Ружицкая*
Корректоры *И.А. Хорсун, Т.А. Фицнер*
Дизайн обложки *А.В. Ермаков*

Подписано в печать 09.09.26. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 12,79. Уч.-изд. л. 11,14. Тираж 17 экз. Заказ № 447.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013 г.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий в качестве:
издателя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013 г.;
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017 г.
Ул. Советская, 104, 246028, Гомель.

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2026
© Проблемы физики, математики и техники, 2026
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2026

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December 2009

Released quarterly

№ 3 (68) 2026

CONTENTS

PHYSICS

Akhramenko N. A. Gravitational interaction of two coplanar concentric rings	7
Wang Jiping, Mu Jiahao, Pang Mengyang, Tan Xiaoxue, Zheng Shanbin, Liu Xin, Rogachev A. A., Jiang Xiaohong. Curcumin-film-coated chitosan / hydroxyapatite composite aerogels for periodontal bone defect repair properties	11
Girgel S. S. Hermite beams of a continuous complex index with transferable finite power	18
Kapshai V. N., Grishechkina A. A. Analytical and numerical solution of integral quasipotential partial equations for s -states of a two-particle system	23
Kulak G. V., Nikolaenko T. V., Tozik L. A. Acousto-optic interaction in photoelastic superlattices under total internal reflection	30
Yarmolenko M. A., Rogachev A. V., Pilipitsou D. G., Rogachev A. A., Rudenkov A. S. Molecular structure and mechanical properties of composite coatings based on organosilicon compounds deposited by electron-beam dispersion	35

MATHEMATICS

Vasil'ev A. F., Vasil'eva T. I. On saturated formations of supersoluble groups, their w -extensions and some applications	41
Gal'mak A. M. Zero divisors in generalizing polyadic groupoids	46
Luxemburg I. L. Algebras of operators of multiplication by discontinuous functions	51
Rudzko J. V. Existence and uniqueness of solutions to a mixed problem for the wave equation with a discontinuous velocity function at interior and boundary points	56

TECHNICS

Malyutina-Bronskaya V. V., Nesterenok A. V., Kravchenko V. M., Yakushev A. V. Possibility of increasing the efficiency of solar modules in combination with thermal electric generators	65
Nikityuk Yu. V., Marchenko L. N., Bayevich G. A., Prokhorenko V. A., Maximenko A. V. Fuzzy logic-based modeling of coating quality under pulsed laser radiation on 30X1CH2A steel	72
Prokhorenko V. A., Smorodin V. S., Nikityuk Yu. V., Sokolov S. I. Development of a method and tools for modeling the control problem of the technological operation of laser thermal cleaving of silicate glass under real-time polariscopic monitoring	79

INFORMATION SCIENCE

Kurochka K. S., Semenchina T. S. Investigation of a mathematical model of the stress-strain state of the human lumbar spine under vertical loading	86
Rafalova E. V. Comparative analysis and verification of mathematical models for flow control in M2M networks of IoT	91
Sukach E. I., Kalinichenko V. A. Probabilistic-algebraic modeling of reliability of electric power systems using spatial and temporal data analysis	97

PEOPLE OF SCIENCE

Victor Stepanovich Monakhov	106
--	-----

Founder – Francisk Skorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science:

- Technics;**
- Physics and Mathematics.**

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 531.5

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_7

EDN: ZZNUEE

ГРАВИТАЦИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ КОМПЛАНАРНЫХ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ КОЛЕЦ

Н. А. Ахраменко

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

GRAVITATIONAL INTERACTION OF TWO COPLANAR CONCENTRIC RINGS

N. A. Akhramenko

Belarusian State University of Transport, Gomel

Аннотация. Рассматривается случай распределения массы по двум компланарным концентрическим кольцам без наличия центрального тела и с его наличием. Получены выражения, позволяющие провести оценку величины напряженности гравитационного поля в точках, локализованных на самих кольцах. Проведена оценка возможных орбитальных скоростей в кольцах.

Ключевые слова: *напряженность гравитационного поля, радиус кольца, масса кольца.*

Для цитирования: Ахраменко, Н. А. Гравитационное взаимодействие двух компланарных концентрических колец / Н. А. Ахраменко // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 3 (68). – С. 7–10. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_7. – EDN: ZZNUEE

Abstract. The case of mass distribution across two coplanar concentric rings, with and without a central body, is considered. Expressions are derived for estimating the magnitude of the gravitational field at the points located on the rings themselves. Possible orbital velocities within the rings are estimated.

Keywords: *gravitational field strength, ring radius, ring mass.*

For citation: Akhramenko, N. A. Gravitational interaction of two coplanar concentric rings / N. A. Akhramenko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 3 (68). – P. 7–10. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_7. – EDN: ZZNUEE

Introduction

Planetary ring systems are among the most fascinating and mysterious phenomena in astronomy. For a long time, possessing rings was considered a unique feature of Saturn. Saturn was the first planet found to have rings. The total mass of the debris within the ring system is estimated to exceed 10^{19} kilograms.

However, the development of observational technology and the missions of the Voyager interplanetary probes in the second half of the 20th century revolutionized our understanding. Observations revealed that all the giant planets in the Solar System – without exception – are surrounded by rings.

Images from the Voyager-1 interplanetary probe revealed that Saturn's rings consist of hundreds of narrow ringlets. Subsequent images obtained by probes showed that the rings are actually composed of thousands of rings alternating with gaps.

Planetary rings can be described not merely as beautiful adornments, but as dynamic laboratories that offer insight into the processes of celestial body formation. By studying the structure and composition of these systems, one can infer what the

Solar System looked like billions of years ago, when modern worlds were beginning to form from the protoplanetary disk. It is worth noting that the recent discovery of rings around small bodies such as the asteroid Chariklo and the dwarf planet Haumea demonstrates that such structures are far more common in the Universe than previously thought.

Saturn's rings have been studied by P. Laplace, S. V. Kovalevskaya, J. Maxwell, and M. S. Bobrov [1]–[4]. The gravitational interaction between two coplanar concentric rings is examined below. A two-ring system has actually been observed around the asteroid Chariklo. It is one of the largest Centaurs and the largest asteroid between the Main Belt and the Kuiper Belt discovered in 1997 (Figure 0.1). The existence of a ring system around this asteroid was announced in 2014 (following an occultation of a star by the Centaur in 2013).

An international team of astronomers led by Felipe Braga-Ribas, using seven telescopes in South America, detected not only the primary drop in the star's brightness as it passed behind the asteroid's disk but also two symmetrical secondary drops before and after the main event [5]. This indicated the presence of dense, narrow structures in orbit around the small body.



Figure 0.1 – Rings of the asteroid Chariklo
(source: NASA)

In the model under consideration, we assume the asteroid to be a homogeneous sphere and the rings to be circular.

1 Determination of gravitational field strength

Gravitational field strength of a ring for points in the plane. According to works [6], [7], the gravitational field strength of a ring at points in the plane in which the ring lies can be expressed as

$$g = -\frac{Gm}{\pi R^2} \int_0^\pi \frac{(k - \cos \alpha) d\alpha}{(1 + k^2 - 2k \cos \alpha)^{1.5}}, \quad (1.1)$$

where G – is the gravitational constant, m – is the mass of the ring, R – is the radius of the ring, $k = r/R$, and r – is the distance from the center of the ring to the point under consideration.

For points located inside the ring, the parameter $k < 1$; for points located outside the ring, $k > 1$. At $k = 1$, a logarithmic divergence occurs due to the model's idealization, in which the volumetric mass density tends to infinity (the ring's cross-section is assumed to be zero, and the mass is distributed along the circumference). In [7], it is proposed to use a specific expression to estimate the average gravitational field strength at points belonging to the ring.

$$g = -\frac{5Gm}{2\pi R^2}. \quad (1.2)$$

Gravitational field strength of a two-ring system at the points of their location. Let us consider a system of two rings with radii R_1 and R_2 and masses m_1 and m_2 , respectively (Figure 1.1).

The gravitational field strength of the first ring (of radius R_1) at the points where the second ring (of radius R_2) is located is expressed, according to (1.1), as

$$g_{12} = -\frac{Gm_1}{2\pi R_1^2} \int_0^\pi \frac{\frac{R_2}{R_1} - \cos \alpha}{\left(1 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 2\frac{R_2}{R_1} \cos \alpha\right)^{1.5}} d\alpha. \quad (1.3)$$

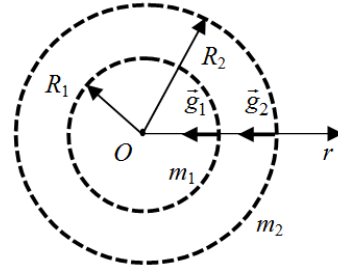


Figure 1.1 – Inner ring of radius R_1 and mass m_1 ,
outer ring of radius R_2 and mass m_2

The gravitational field strength of the second ring (of radius R_2) at the locations of the first ring (of radius R_1) is expressed, according to (1.1), as follows:

$$g_{21} = -\frac{Gm_2}{2\pi R_2^2} \int_0^\pi \frac{\frac{R_1}{R_2} - \cos \alpha}{\left(1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 - 2\frac{R_1}{R_2} \cos \alpha\right)^{1.5}} d\alpha. \quad (1.4)$$

The gravitational field strength of both rings at the points of localization of the first ring is expressed, according to (1.2) and (1.4), as

$$g_1 = -\frac{Gm_2}{2\pi R_2^2} \int_0^\pi \frac{\frac{R_1}{R_2} - \cos \alpha}{\left(1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 - 2\frac{R_1}{R_2} \cos \alpha\right)^{1.5}} d\alpha - \frac{5Gm_1}{2\pi R_1^2}. \quad (1.5)$$

The gravitational field strength of both rings at the points of localization of the second ring is expressed, according to (1.2) and (1.3), as follows:

$$g_2 = -\frac{Gm_1}{2\pi R_1^2} \int_0^\pi \frac{\frac{R_2}{R_1} - \cos \alpha}{\left(1 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 2\frac{R_2}{R_1} \cos \alpha\right)^{1.5}} d\alpha - \frac{5Gm_2}{2\pi R_2^2}. \quad (1.6)$$

Gravitational field strength of the central body and the two-ring system at the points where the rings are located. The gravitational field strength of a central body of mass M at the locations of the first ring of radius R_1 and the second ring of radius R_2 (Figure 1.2) is given by expressions (1.7) and (1.8), respectively.

$$g_{01} = -\frac{GM}{R_1^2}, \quad (1.7)$$

$$g_{02} = -\frac{GM}{R_2^2}. \quad (1.8)$$

Gravitational field strength of the central body and the two-ring system at the locations of the first ring, taking into account (1.5) and (1.7)

$$g_3 = -\frac{Gm_2}{2\pi R_2^2} \int_0^\pi \frac{\frac{R_1}{R_2} - \cos \alpha}{\left(1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 - 2 \frac{R_1}{R_2} \cos \alpha\right)^{1.5}} d\alpha - \frac{5Gm_1}{2\pi R_1^2} - \frac{GM}{R_1^2}. \quad (1.9)$$

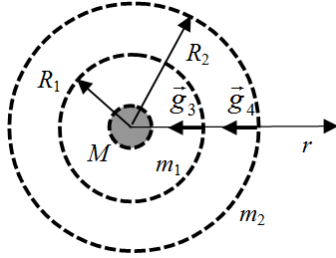


Figure 1.2 – Central body of mass M , inner ring of radius R_1 and mass m_1 , outer ring of radius R_2 and mass m_2

Gravitational field strength of the central body and the two-ring system at the locations of the second ring, taking into account (1.6) and (1.8)

$$g_4 = -\frac{Gm_1}{2\pi R_1^2} \int_0^\pi \frac{\frac{R_2}{R_1} - \cos \alpha}{\left(1 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 2 \frac{R_2}{R_1} \cos \alpha\right)^{1.5}} d\alpha - \frac{5Gm_2}{2\pi R_2^2} - \frac{GM}{R_2^2}. \quad (1.10)$$

2 Estimation of orbital velocities in the rings

Estimation of orbital velocities in the rings without accounting for the central body. The magnitude of the gravitational field intensity produced by both rings at the points where the first ring is located must equal the centripetal acceleration of the points on the first ring, that is,

$$\frac{Gm_2}{2\pi R_2^2} \int_0^\pi \frac{\frac{R_1}{R_2} - \cos \alpha}{\left(1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 - 2 \frac{R_1}{R_2} \cos \alpha\right)^{1.5}} d\alpha + \frac{5Gm_1}{2\pi R_1^2} = \frac{v_1^2}{R_1}. \quad (2.1)$$

The gravitational field strength of both rings at the points where the second ring is located must equal, in magnitude, the centripetal acceleration of the points on the second ring, that is,

$$\frac{Gm_1}{2\pi R_1^2} \int_0^\pi \frac{\frac{R_2}{R_1} - \cos \alpha}{\left(1 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 2 \frac{R_2}{R_1} \cos \alpha\right)^{1.5}} d\alpha + \frac{5Gm_2}{2\pi R_2^2} = \frac{v_2^2}{R_2}. \quad (2.2)$$

The velocity of points on the first ring is determined from relation (2.1).

$$v_1 = \sqrt{\frac{Gm_2}{2\pi R_2^2} R_1 \int_0^\pi \frac{\frac{R_1}{R_2} - \cos \alpha}{\left(1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 - 2 \frac{R_1}{R_2} \cos \alpha\right)^{1.5}} d\alpha + \frac{5Gm_1}{2\pi R_1^2}}. \quad (2.3)$$

The velocity of points on the second ring is determined from relation (2.2).

$$v_2 = \sqrt{\frac{Gm_1}{2\pi R_1^2} R_2 \int_0^\pi \frac{\frac{R_2}{R_1} - \cos \alpha}{\left(1 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 2 \frac{R_2}{R_1} \cos \alpha\right)^{1.5}} d\alpha + \frac{5Gm_2}{2\pi R_2^2}}. \quad (2.4)$$

Substituting the following values for the radii and masses of the rings (data taken from [8]) into relations (2.3) and (2.4) – $R_1 = 390.6$ km, $R_2 = 404.8$ km, $m_1 = 9.8 \cdot 10^{15}$ kg ($9.8 \cdot 10^{18}$ g), $m_2 = 10^{15}$ kg (10^{18} g) – we obtain $v_1 = 0.81$ m/s and $v_2 = 2.86$ m/s. These results indicate that such a scenario is theoretically possible (even in the absence of a central body) and that there is a significant difference in the speeds of the rings despite their proximity. Notably, the speed of the inner ring is lower than that of the outer ring.

Estimation of orbital velocities in rings, accounting for the central body. The gravitational field strength of the central body and the two-ring system at the locations of the first ring must equal, in magnitude, the centripetal acceleration of points on the first ring, that is,

$$\frac{Gm_2}{2\pi R_2^2} \int_0^\pi \frac{\frac{R_1}{R_2} - \cos \alpha}{\left(1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 - 2 \frac{R_1}{R_2} \cos \alpha\right)^{1.5}} d\alpha + \frac{5Gm_1}{2\pi R_1^2} + \frac{GM}{R_1^2} = \frac{v_3^2}{R_1}. \quad (2.5)$$

The gravitational field strength of the central body and the system of two rings at the locations of the second ring must equal the magnitude of the centripetal acceleration of points on the second ring, that is,

$$\frac{Gm_1}{2\pi R_1^2} \int_0^\pi \frac{\frac{R_2}{R_1} - \cos \alpha}{\left(1 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 2 \frac{R_2}{R_1} \cos \alpha\right)^{1.5}} d\alpha + \frac{5Gm_2}{2\pi R_2^2} + \frac{GM}{R_2^2} = \frac{v_4^2}{R_2}. \quad (2.6)$$

The velocity of points on the first ring is determined from relation (2.5).

$$v_3 = \left(\frac{Gm_2}{2\pi R_2^2} R_1 \int_0^\pi \frac{\frac{R_1}{R_2} - \cos \alpha}{\left(1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 - 2 \frac{R_1}{R_2} \cos \alpha\right)^{1.5}} d\alpha + \frac{5Gm_1}{2\pi R_1^2} + \frac{GM}{R_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.7)$$

The velocity of points on the second ring is determined from relation (2.6).

$$v_4 = \left(\frac{Gm_1}{2\pi R_1^2} R_2 \int_0^\pi \frac{\frac{R_2}{R_1} - \cos \alpha}{\left(1 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 - 2 \frac{R_2}{R_1} \cos \alpha\right)^{1.5}} d\alpha + \frac{5Gm_2}{2\pi R_2} + \frac{GM}{R_2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.8)$$

Let us substitute the following values into relations (2.7) and (2.8): $R_1 = 390.6$ km, $R_2 = 404.8$ km, $m_1 = 9.8 \cdot 10^{15}$ kg, $m_2 = 10^{15}$ kg, $M = 7 \cdot 10^{18}$ kg (the estimated mass of the asteroid is $(6-8) \cdot 10^{18}$ kg).

Upon calculation, we obtain $v_3 = 34.58$ m/s and $v_4 = 34.08$ m/s.

The Keplerian velocities for points on the first ring will be

$$v_1^* = \sqrt{\frac{GM}{R_1}} = 34,57 \text{ m/s}. \quad (2.9)$$

The Keplerian velocities for points on the second ring will amount to a value of

$$v_2^* = \sqrt{\frac{GM}{R_2}} = 33,96 \text{ m/s}. \quad (2.10)$$

The difference in particle velocities in the rings, disregarding the gravitational influence of the rings (expressions (2.9) and (2.10)) $v_1^* - v_2^* = 0,61$ m/s.

The difference in particle velocities in the rings, accounting for the gravitational influence of the rings $v_3 - v_4 = 0,5$ m/s, amounts to 82% of $v_1^* - v_2^*$ the difference in Keplerian velocities, which is 18% less.

Conclusion

Thus, by examining cases of mass distribution across two coplanar concentric rings both with and without a central body the expressions were derived to estimate the gravitational field strength at points located on the rings themselves. This enabled an assessment of potential orbital velocities within the rings. The calculations performed for the case without a central body revealed the possibility of the outer ring's velocity exceeding that of the inner ring.

The calculations involving a central body showed that, when the gravitational influence of the rings is taken into account, the velocity difference between the rings is smaller than that predicted by a Keplerian velocity distribution.

REFERENCES

1. *Laplace, P. S.* Mémoire sur la théorie de l'anneau de Saturne / P. S. Laplace // Mémoires de l'Académie Royale des Sciences. – 1787. – P. 201–234.
2. *Maxwell, J. C.* On the stability of the motion of Saturn's Rings / J. C. Maxwell // The Scientific Papers of James Clerk Maxwell. – Cambridge : Cambridge University Press, 2011. – Vol. 1. – P. 288–376.
3. *Kovalevskaya, S. V.* Additions and comments to Laplace's study on the shape of Saturn's ring / S. V. Kovalevskaya // Scientific works. – M. : USSR Academy of Sciences, 1948. – P. 139–152 (in Russian).
4. *Bobrov, M. S.* The Rings of Saturn / M. S. Bobrov. – M. : Nauka, 1970. – 123 p. (in Russian).
5. A ring system detected around the Centaur (10199) Chariklo / F. Braga-Ribas, B. Sicardy, J. L. Ortiz [et al.] // Nature. – 2014. – Vol. 508, № 7494. – P. 72–75.
6. *Akhramenko, N. A.* Force interaction of a massive ring and a material point located inside the ring / N. A. Akhramenko // Mechanics. Research and Innovation. – 2022. – Iss. 15. – P. 5–10.
7. *Akhramenko, N. A.* Movement of a point material object in a massive ring plane. / N. A. Akhramenko // Mechanics. Research and Innovation. – 2023. – Iss. 16. – P. 17–21.
8. *Kondratiev, B. P.* Representation of the potential of a homogeneous circular torus by a series in powers of a geometric parameter / B. P. Kondratiev // Journal of Technical Physics. – 2018. – Vol. 88. – № 3. – P. 323–326 (in Russian).

The article was submitted 01.07.2026.

Информация об авторах

Ахраменко Николай Арсеньевич – к.т.н., доцент

КОМПОЗИТНЫЕ АЭРОГЕЛИ НА ОСНОВЕ ХИТОЗАНА И ГИДРОКСИАПАТИТА, ПОКРЫТЫЕ КУРКУМИНОВОЙ ПЛЕНКОЙ, ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДЕФЕКТОВ КОСТНОЙ ТКАНИ

Цзипин Ван¹, Цзяхао Му¹, Мэнъян Пан^{1,3}, Сяосюэ Тан^{1,3}, Шанбинь Чжэн²,
Синь Лю², А. А. Рогачев³, Сяохун Джанг¹

¹Международная Китайско-Белорусская научная лаборатория физической химии и технологии биоматериалов, Нанкинский университет науки и техники

²Аффилированная больница китайской медицины Нанкинского университета

³Институт химии новых материалов Национальной академии наук Беларуси, Минск

CURCUMIN-FILM-COATED CHITOSAN / HYDROXYAPATITE COMPOSITE AEROGELS FOR PERIODONTAL BONE DEFECT REPAIR PROPERTIES

Jiping Wang¹, Jiahao Mu¹, Mengyang Pang^{1,3}, Xiaoxue Tan^{1,3}, Shanbin Zheng²,
Xin Liu², A. A. Rogachev³, Xiaohong Jiang¹

¹International Chinese-Belarusian Scientific Laboratory of Physical Chemistry and Technology of Biomaterials, Nanjing University of Science and Technology

²The Affiliated Hospital of Nanjing University of Chinese Medicine

³Institute of Chemistry of New Materials of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk

Аннотация. Пародонтит является основной этиологической причиной возникновения дефектов пародонтальных тканей. Однако традиционные материалы для восстановления костных дефектов пародонта обладают ограниченным набором функциональных свойств и не способны эффективно противостоять сложному микроокружению при пародонтите, что приводит к сохранению или рецидиву воспаления и формированию порочного круга репарация – инфицирование – повторная деструкция. Для преодоления этой проблемы в настоящей работе на основе хитозана и наногидроксиапатита, с использованием глутарового альдегида в качестве сшивающего агента, был получен композитный аэрогелевый матрикс хитозан/наногидроксиапатит. Структурно-фазовый анализ, морфологию и элементный состав полученного композитного аэрогеля исследовали с помощью методов ИК-Фурье (инфракрасная спектроскопия) и РЭМ (растровая электронная микроскопия), а также провели тестирование антибактериальной активности, гемостатической способности и остеогенных свойств. Результаты показали, что композитный аэрогель хитозан/наногидроксиапатит обладает превосходной биосовместимостью и антибактериальной активностью. Кроме того, эксперименты *in vitro* продемонстрировали способность данного аэрогеля индуцировать остеогенную дифференцировку мезенхимальных стволовых клеток костного мозга крыс. Таким образом, разработанный композитный аэрогель на основе хитозана и наногидроксиапатита представляет значительный потенциал для применения в регенерации костных дефектов пародонта.

Ключевые слова: хитозан, гидроксиапатит, аэрогель, структура, антибактериальная активность.

Для цитирования: Композитные аэрогели на основе хитозана и гидроксиапатита, покрытые куркуминовой пленкой, для восстановления дефектов костной ткани / Цзипин Ван, Цзяхао Му, Мэнъян Пан, Сяосюэ Тан, Шанбинь Чжэн, Синь Лю, А. А. Рогачев, Сяохун Цзян // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 3 (68). – С. 11–17. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_11. – EDN: VQVPRN

Abstract. Periodontitis is the core cause of periodontal defects. However, the performance of traditional periodontal defect repair materials is single, which is difficult to cope with the complex microenvironment of periodontitis, leading to the persistence or recurrence of inflammation, and easy to form a vicious cycle of repair-infection-re-destruction. In order to solve the problem of single material performance, chitosan (CS) and nano-hydroxyapatite (nHAp) were used as raw materials, and glutaraldehyde (GA) was crosslinked with CS to obtain a chitosan/nano-hydroxyapatite (CS/nHAp) aerogel scaffold material. Curcumin (Cur) film was uniformly deposited on the surface of aerogel by low-power electron beam deposition (EBD) as an antibacterial functional layer to prepare a curcumin-chitosan/nano-hydroxyapatite (Cur-CS/nHAp) composite aerogel scaffold material. FTIR, XRD, XPS, SEM and other characterization methods were used to analyze the composition, structure and morphology of the composite aerogel, as well as the antibacterial, coagulation and osteogenic properties. The results show that it has excellent biocompatibility and antibacterial properties. In addition, *in vitro* experiments showed that Cur-CS/nHAp aerogel scaffolds could induce osteogenic differentiation of rBMSCs. The Cur-CS/nHAp aerogel scaffold prepared in this study has certain application potential in the repair of periodontal bone defects.

Keywords: chitosan, hydroxyapatite, aerogel, structure, antibacterial activity.

For citation: Curcumin-film-coated chitosan/hydroxyapatite composite aerogels for periodontal bone defect repair properties / Jiping Wang, Jiahao Mu, Mengyang Pang, Xiaoxue Tan, Shanbin Zheng, Xin Liu, A. A. Rogachev, Xiaohong Jiang // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 3 (68). – P. 11–17. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_11. – EDN: VQVPRN

1 Introduction

Periodontitis is an oral inflammatory disease caused by periodontal pathogens, affecting more than one billion people worldwide. It is the main cause of alveolar bone resorption, bone defect and tooth loosening in adults, and is associated with diabetes, obesity and depression [1]. The existing basic treatment can only remove plaque and control inflammation. However, surgical bone repair materials lack hemostatic, anti-inflammatory and antibacterial activities, and are difficult to adapt to irregular hemorrhagic defects, which can easily lead to postoperative bleeding, repeated infection and poor bone regeneration. Therefore, multifunctional bone repair materials with rapid hemostasis, anti-inflammatory, antibacterial, morphological adaptability and good biocompatibility are urgently needed.

Aerogel is a lightweight material with a three-dimensional interconnected porous network. It is widely used in bone defect repair due to its high porosity, large specific surface area and degradability [2]. Chitosan aerogel has good biocompatibility, can adsorb platelets to promote wound healing, and has natural antibacterial and hemostatic activities [3], but its mechanical strength is low, and its osteogenic induction and mineralization ability are insufficient. Hydroxyapatite is the main inorganic component of natural alveolar bone. It has excellent bone conduction and biomineralization ability [4]. It is recognized as an inorganic reinforcing material that can make up for the osteogenic defects of pure polymer aerogels [5]-[6]. Curcumin is a natural polyphenol with procoagulant, anti-inflammatory, antioxidant, broad-spectrum antibacterial and osteogenic activities [7]. It is safe to degrade in vivo, has low toxicity and does not produce drug resistance. It is an ideal active factor for full-cycle repair of periodontal defects.

In this study, EBD, a simple and controllable one-step film-forming method, was used to vaporize the target by electron beam under high vacuum to form a uniform, strong adhesion and controllable thickness film-Curcumin film was deposited on the surface of hydroxyapatite-loaded chitosan aerogel. The composite aerogel achieves full-cycle repair of antibacterial, hemostatic and bone regeneration, and provides a new multifunctional material for the clinical treatment of hemorrhagic bone defects caused by periodontitis.

2 Preparation and test method of composite aerogels

Nano-hydroxyapatite is prepared by hydrothermal method using $\text{Ca}(\text{NO}_3)_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ and Na_2HPO_4 under alkaline conditions. The chitosan powder is dissolved in acetic acid solution with a volume fraction of 2%, and then nano-hydroxyapatite suspensions with chitosan mass

fractions of 0%, 5%, 10%, and 15% are added and stirred for 30 minutes. Then, an appropriate amount of glutaraldehyde solution is added to it, stirred for 30 minutes, then the free glutaraldehyde was removed by dialysis. Poured into the mold, and freeze-dried to obtain CS / nHAp aerogels, denoted as CS, CS / 5% nHAp, CS / 10% nHAp, CS / 15% nHAp, respectively. Subsequently, Cur powders with different mass (0.3g, 0.6g, 0.9g) are deposited on the surface of CS/nHAp aerogel by low power electron beam deposition. The final composite aerogels are recorded as 0.3Cur-CS / 10% nHAp, 0.6Cur-CS / 10% nHAp, 0.9Cur-CS / 10% nHAp, 0.6Cur-CS / 5% nHAp, 0.6Cur-CS / 15% nHAp, respectively. Chemical structure and physical structure test methods: The material structure and functional group characteristic peaks of raw materials and composite aerogels were analyzed by Fourier transform infrared spectrometer (FTIR, Thermo Fisher ICO LETIS10, USA). The curcumin film was characterized by infrared spectroscopy using potassium bromide tablets as the substrate. The phase composition and crystallinity of the composite aerogels were analyzed by X-ray diffractometer (XRD, D8ADVANCE-A-25, Germany). The X-ray is Cu-K α , the diffraction wavelength is 0.154 nm, the voltage and current are 40 kV and 40 mA, respectively. The chemical structure and elemental composition of the films were analyzed by X-ray photoelectron spectroscopy (XPS, PHI Quantera II, Japan). Al K α was used as a monochromatic X-ray source ($h\nu = 1486.6$ eV) and was measured on an XPS microprobe. BE correction is performed by the C1s peak (284.8 eV). The photoelectron line is approximated by a Gaussian function. The internal network structure of the aerogels was analyzed by scanning electron microscopy (SEM, Hitachi SU8600, Japan). The mechanical properties were characterized by universal mechanical testing machine (TY8000-A) of Jiangsu Tianyuan Test Equipment Co., Ltd. Each experiment was repeated three times, and the measurement data were presented as the mean $\pm$ standard deviation (Mean $\pm$ SD). In vitro biological performance test: Bone marrow-derived mesenchymal stem cells (rBMSCs) were used to evaluate the biological response of Cur-CS / nHAp aerogels. The sterile aerogel was immersed in complete medium (α -MEM + 10% FBS + 1% penicillin streptomycin) at 0.1 g/mL (w/v), and extracted at 37° C and 60 rpm for 72 h. The supernatant was centrifuged to remove particles to obtain 100% extract, which was immediately used for cell experiments, and the material-free medium under the same conditions was used as a blank control. The cells were cultured under standard conditions (37° C, 5% CO₂) in α -MEM supplemented with 10% fetal bovine serum and 1% gentamicin-penicillin mixture. During osteogenic differentiation experiments, cells were cultured in osteogenic

induction medium containing dexamethasone, β -glycerophosphate and ascorbic acid. The biocompatibility of the aerogels was evaluated by Calcein AM / PI live-dead staining. The sterilized aerogel extract was co-cultured with rBMSCs under standard culture conditions. After incubation, the cells were stained according to the manufacturer's procedures and observed using a fluorescence microscope. The evaluation of osteogenic differentiation is to evaluate the osteogenic differentiation ability of the composite aerogel by detecting the proteins related to bone formation (including transcription factor RunX2 and osteophosphoprotein (OPN)) by immunofluorescence staining. The cells cultured on the aerogel extract were fixed, permeabilized, incubated with specific primary antibodies, and then combined with fluorescent secondary antibodies. The nuclei were counterstained with DAPI, and the fluorescence intensity was semi-quantitatively analyzed. The antibacterial activity of the mineralized scaffold against *Staphylococcus aureus* and *Escherichia coli* was evaluated by agar diffusion method. The sterilized scaffolds were placed on LB agar plates inoculated with bacterial suspension and incubated at 37° C for 24 hours, and then the size of the inhibition zone was analyzed. All quantitative experiments were repeated independently. The data were presented as mean $\pm$ standard deviation (SD). Statistical analysis was performed using one-way analysis of variance (ANOVA), followed by appropriate follow-up tests.

The results of the chemical and physical structure and biological properties of the composite aerogels are shown in Figures 2.1–2.3.

Figure 2.1 shows the chemical structure of Cur-CS / nHAp composite aerogel. The components of CS / nHAp composite aerogels are analyzed by FTIR. As shown in Figure 2.1 (a), both pure CS aerogels and CS / nHAp composite aerogels demonstrate a new characteristic peak at 1638 cm^{-1} , which is due to the Schiff base reaction during the crosslinking process of aerogels. Because the asymmetric stretching vibration peak of phosphate at 1015 cm^{-1} of nano-hydroxyapatite is similar to the asymmetric stretching vibration peak of C – O – C at 1152 cm^{-1} of chitosan, the XRD analysis of CS / nHAp composite aerogel is carried out. As shown in Figure 2.1 (b), the diffraction peak of CS appears at 2θ of 20.35°, and the diffraction peaks of CS / nHAp composite aerogels are similar to those of CS. In addition, the diffraction peaks of nHAp appear in CS / nHAp composite aerogels, which proves that nHAp is successfully loaded in CS / nHAp composite aerogels, and no crystal change occurs after loading. At the same time, FTIR analysis is performed on the curcumin film deposited on the KBr sheet to explore the effect of EBD on the molecular structure of curcumin powder. Figure 2.1 (c) shows the FTIR spectra of

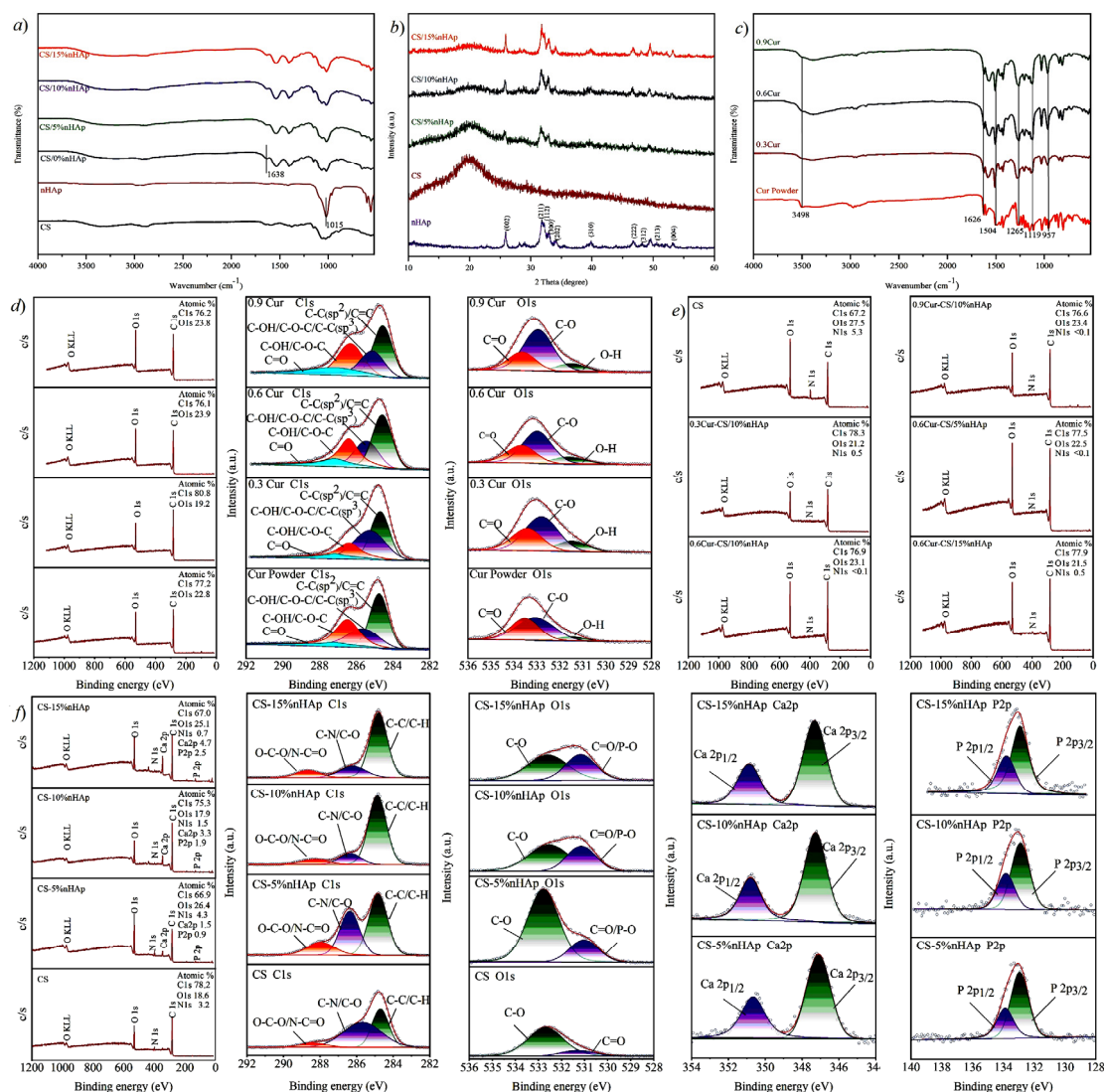
Cur powder and Cur film. The peak of Cur powder at 3498 cm^{-1} corresponds to O – H bending, and the strong peak at 1626 cm^{-1} corresponds to C = O conjugation. In addition, the characteristic peaks at 1504 cm^{-1} , 1265 cm^{-1} , 1119 cm^{-1} , 957 cm^{-1} correspond to C = C vibration, O – CH₃ stretching vibration, C – O – C stretching vibration and C – H out-of-plane bending vibration, respectively. By comparison, it is found that the infrared characteristic peak of the film sample is more obvious and sharper than that of the powder sample. This is because compared with the powder, the Cur molecules in the film may have a certain orientation, thereby enhancing the infrared absorption of certain functional groups. The infrared spectrum of Cur film prepared by EBD method is slightly different from that of powder, but the characteristic functional groups are well preserved, indicating that the biological active components of Cur are basically unaffected.

In order to further verify the effect of EBD on the chemical structure of Cur powder and the successful doping of nHAp in CS / nHAp composite aerogel, XPS analysis is carried out. Figure 2.1 (d) shows the fitting analysis of C1s and O1s spectra of Cur powder and film. The C1s peak is composed of C – C(sp^2) / C – C bonds at 284.69 eV, C – OH / C – O – C / C – C(sp^3) bonds at 285.24 eV, C – OH / C – O – C bonds at 286.39 eV, and C = O bonds at 287.16 eV. The peak at 531.47 eV corresponds to the O – H bond, the peak at 532.79 eV corresponds to the C – O bond, and the peak at 533.42 eV corresponds to the C = O bond. It can be seen that the position and shape of the characteristic peaks of the Cur powder and the film are basically the same, indicating that the chemical structure of the film and the powder is similar. This result corresponds to the results of FTIR analysis, which again verifies that EBD preserves the chemical structure of Cur powder well and does not destroy its biological activity. Figure 2.1 (e) shows the XPS measurement spectra of the surface of blank CS aerogel and CS / nHAp composite aerogels deposited with different mass of Cur powder. The N1s content of CS is 5.3%, and the N1s on the surface of Cur-CS / nHAp composite aerogels is significantly reduced. This indicates that the Cur film successfully covers the aerogel, and as the thickness increases, the N element content almost disappears. In summary, curcumin films are successfully prepared on the surface of aerogels by EBD technology. Figure 2.1 (f) shows the XPS spectra of CS / nHAp composite aerogels doped with different contents of nHAp. It can be seen from the figure that with the increase of doping amount, the content of Ca and P elements gradually increases, and its atomic ratio is about 1.67, which conforms to the characteristic ratio of nHAp. In the C1s spectrum, the proportion of C – C gradually increases with the increase of nHAp content, but

nHAp does not contain C element. This is due to the strong adsorption capacity of nHAp, and the contaminated carbon carried by nHAp is included in C – C. In the O1s spectrum, the proportion of C – O gradually decreases with the increase of nHAp content, which is due to the presence of P – O in nHAp. In the Ca2p spectrum, the 2p orbital of the calcium element consists of two clearly separated double peaks of Ca2p_{3/2} at 347.31 eV and Ca2p_{1/2} at 350.88 eV. In the P2p spectrum, we can see the composition of P2p_{3/2} at 132.94 eV and P2p_{1/2} at 133.88 eV. In summary, nHAp is successfully doped into CS / nHAp composite aerogels, and the content of Ca and P elements gradually increases with the increase of doping amount.

The properties of Cur-CS / nHAp composite aerogels are affected by their surface morphology and internal network structure. Therefore, we observe the surface morphology and internal

network structure of Cur-CS / nHAp composite aerogels. As shown in Figure 2.2 (a), the Cur-CS / nHAp composite aerogels are cylindrical and light in texture. The surface is yellow after being coated with curcumin, and the color increases with the increase of Cur content. Figure 2.2 (b) shows that the CS aerogel has a three-dimensional network structure that is interconnected and highly porous. After the addition of nHAp, the basic morphology of the aerogel remains unchanged, and its microstructure shows no signs of collapse, expansion or degradation. However, it can be observed that the pores of Cur-CS / nHAp aerogels are denser than those of CS aerogels. This is because nHAp is uniformly attached to the chitosan polymer chain, so that the thin-walled structure that is originally easy to collapse is supported, and the overall skeleton is more stable. For further verification, the mechanical properties of



Cur-CS / nHAp aerogels are explored. Figure 2.2 (c) and Figure 2.2 (d) show the compressive stress-strain curve of Cur-CS / nHAp aerogel and the compressive stress and Young's modulus at 80% compressive strain. The results show that with the increase of the proportion of nHAp added to the aerogel, its mechanical properties also increase, which corresponds to the results of SEM. In addition, the appearance of Ca and P elements in the aerogel can be seen by EDS, which once again verifies the successful doping of nHAp.

Figure 2.3 shows the related biological properties of Cur-CS / nHAp composite aerogels. The effect of Cur-CS / nHAp composite aerogel on the viability of rBMSCs and the results of live / dead staining are shown in Figure 2.3 (a). After 24 hours of culture, rBMSCs grow well, and there are almost no dead cells (red) in each group. This is consistent with the results of CCK-8 test, indicating that Cur-CS/nHAp composite aerogel has no cytotoxicity to normal osteoblasts and can be used for in vivo implantation. The hemostatic properties of Cur-CS/nHAp composite aerogels in vitro are shown in Figure 2.3 (b). After the aerogel is exposed to 2 ml of fresh pig blood for 5 minutes, it can be observed that the coagulation effect of each experimental group is better than that of the control group, and 0.9Cur-CS / 10% nHAp has the best effect. Subsequently, its in vitro antibacterial properties are further explored, and the results are shown in Figure 2.3 (c).

Cur-CS / nHAp group has obvious inhibitory effect on *E. coli* and *S. aureus*. Among them, the 0.9Cur-CS / 10% nHAp group has the best effect, and the diameter of the inhibition zone against *E. coli* is about 3.6 cm, and the diameter of the inhibition zone against *S. aureus* is about 4.45 cm (see Table 2.1). It is worth noting that the antibacterial effect of 0.6Cur-CS / nHAp group is also very good, which is due to the fact that the doping amount of nHAp in this group is 15%. Related reports show that nHAp has a good antibacterial effect, especially for *S. aureus*[8]. In summary, the composite aerogel has excellent antibacterial properties and can effectively deal with the complex microenvironment of periodontitis.

Table 2.1 – The inhibition zone size of aerogels against *E. coli* and *S. Aureus*

	A	B	C	D	E	F
<i>E. coli</i>	1.99	2.53	3.24	3.6	2.95	3.4
<i>S. aureus</i>	2.32	2.85	2.95	4.45	2.5	4.24

In order to explore the osteogenic properties of Cur-CS / nHAp composite aerogels in vitro, RunX2 and OPN proteins are immunofluorescence stained and semi-quantitatively analyzed by ImageJ. As shown in Figure 2.3 (d), (e), the levels of RunX2 and OPN protein in the Cur-CS / nHAp group are higher than those in the CS group.

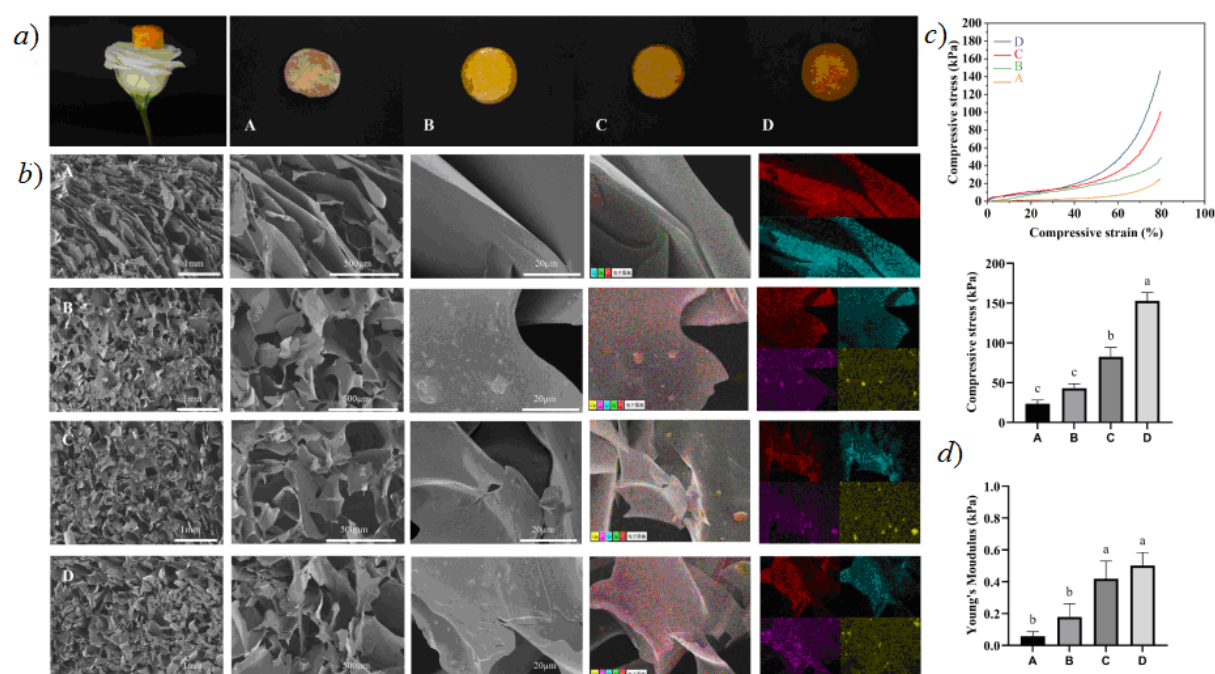


Figure 2.2 – Morphology and mechanical analysis of aerogels (a) Macroscopic morphology of aerogels. (b) The microstructure and EDS element analysis of aerogels. (c) Stress – strain test results of aerogels. (d) Young's modulus of aerogels. (A-CS, B-0.3Cur-CS / 5% nHAp, C-0.6Cur-CS / 10% nHAp, D-0.9Cur-CS / 15% nHAp).

Different lowercase letters indicate significant differences among samples. Values are represented as average $\pm$ standard deviation ($n = 3$)

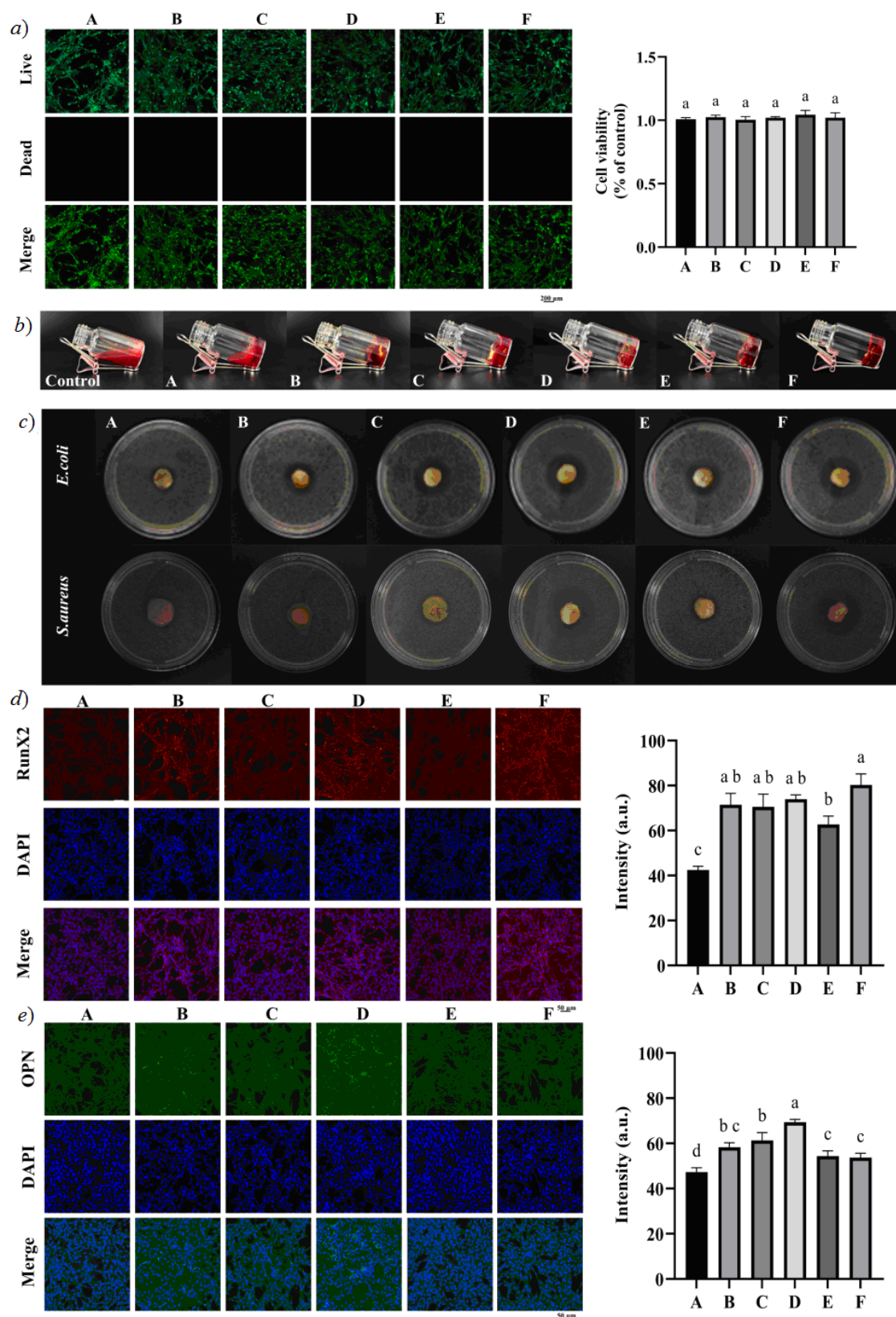


Figure 2.3 – Aerogel biological performance test. (a) Osteoblasts dead or alive. (b) Coagulation performance test. (c) antibiosis. (d) RunX2 fluorescence staining image and intensity. (e) OPN fluorescence staining image and intensity. (A-CS, B-0.3Cur-CS / 10% nHAp, C-0.6Cur-CS / 10% nHAp, D-0.9Cur-CS / 10% nHAp, E-0.6Cur-CS / 5% nHAp, F-0.6Cur-CS / 15% nHAp). Different lowercase letters indicate significant differences among samples. Values are represented as average $\pm$ standard deviation ($n = 3$)

It is worth noting that in Figure 2.3 (e), the OPN protein level decreases when the nHAp doping amount is 15% compared to 10%. This is because RunX2 is usually up-regulated in the early stage of induction, while OPN is a late marker. High levels of nHAp release more calcium and phosphorus ions, which may lead to the inability to effectively transcribe the downstream OPN gene, resulting in a decrease in OPN protein levels. In addition, it can be found from Figure 2.3 (e) that when the nHAp doping amount is constant, the expression level of OPN gradually increases with the increase of curcumin content [9]. In summary, Cur-CS / nHAp composite aerogels can synergistically promote the expression of osteogenic differentiation-related proteins, and the 0.9Cur-CS / 10% nHAp group has the best effect. Compared with the CS group, the RunX2 protein level is increased by 73.8%, and the OPN protein level is increased by 46.4%.

Conclusion

According to in vitro experiments, the Cur-CS / nHAp composite aerogel prepared in this experiment has good biological description performance and meets the basic requirements of bone tissue scaffolds for materials. The Cur film on its surface has excellent hemostatic and antibacterial properties, which can effectively inhibit the proliferation of bacteria around the periodontal tissue. In addition, its internal porous structure allows rBMSCs to adhere to the scaffold. At the same time, it has good biological activity and can promote the osteogenic differentiation of rBMSCs. In summary, the Cur-CS / nHAp aerogel scaffold has the structural characteristics and excellent biological properties, and has the potential to become a periodontal bone defect repair material.

REFERENCES

1. *Hajishengallis, G. Local and systemic mechanisms linking periodontal disease and inflammatory comorbidities* / G. Hajishengallis, T. Chavakis // *Nature Reviews Immunology*. – 2021. – Vol. 21, № 7. – P. 426–440.
2. *Insights into the role of biopolymer aerogel scaffolds in tissue engineering and regenerative medicine* / E. B. Yahya, A. A. Amirul, H. P. S. Abdul Khalil [et al.] // *Polymers*. – 2021. – Vol. 13, № 10. – P. 1612.
3. *Synthesis of hemostatic aerogel of TEMPO-oxidized cellulose nanofibers / collagen / chitosan and in vivo / vitro evaluation* / L. Liu, L. Liu, C. Chen [et al.] // *Materials Today Bio*. – 2024. – Vol. 28. – P. 101204.

4. *Features of alveolar ridge bone tissue regeneration using a hydroxyapatite-based material* / A. Yu. Drobyshchev, N. A. Redko, E. G. Sviridov [et al.] // *Traumatology and Orthopedics of Russia*. – 2021. – Vol. 27, № 1. – P. 9–18 (in Russian).

5. *A chitosan-coated PCL / nano-hydroxyapatite aerogel integrated with a nanofiber membrane for providing antibacterial activity and guiding bone regeneration* / X. Deng, C. Yu, X. Zhang [et al.] // *Nanoscale*. – 2024. – Vol. 16, № 20. – P. 9861–9874.

6. *Synthetic biomaterials based on hydroxyapatite and tricalcium phosphate: an analysis of current clinical trials* / U. F. Mukhametov, D. S. Ivliev, I. F. Gareev [et al.] // *Genij Ortopedii*. – 2024. – Vol. 30, № 1. – P. 76–89 (in Russian)

7. *Astaneh, M. E. Curcumin-loaded scaffolds in bone regeneration* / M. E. Astaneh, F. Noori, N. Fereydouni // *Heliyon*. – 2024. – Vol. 10, № 11. – P. e32566.

8. *Alagl, A. S. Antibacterial performance of biomimetic hydroxyapatite-functionalized titanium surfaces against Staphylococcus aureus and Escherichia coli: an in vitro study* / A. S. Alagl, M. Madi // *Frontiers in Oral Health*. – 2026. – Vol. 7. – P. 1850878.

9. *Effective role of Curcumin on expression regulation of EZH2 histone methyltransferase as a dynamic epigenetic factor in osteogenic differentiation of human mesenchymal stem cells* / M. Ghorbaninejad, M. Khademi-Shirvan, S. Hosseini [et al.] // *BBA – Gene Regulatory Mechanisms*. – 2023. – Vol. 1866, № 1. – P. 194903.

The article was submitted 14.06.2026.

Information about the authors

Wang Jiping – Master's Student of School of Chemical Engineering

Mu Jiaohao – Master's Student of School of Chemical Engineering

Pang Mengyang – Master's Student of Institute of Chemistry of New Materials of the National Academy of Sciences of Belarus

Tan Xiaoxue – Doctor's Student of School of Chemical Engineering

Zheng Shanbin – Doctor's student of the Affiliated Hospital of Nanjing University of Chinese Medicine

Liu Xin – Chief Physician of the Affiliated Hospital of Nanjing University of Chinese Medicine

Rogachev Alexander Alexandrovich – Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, Doctor of Engineering, Professor

Jiang Xiaohong – Professor

ПУЧКИ ЭРМИТА НЕПРЕРЫВНОГО КОМПЛЕКСНОГО ИНДЕКСА С ПЕРЕНОСИМОЙ КОНЕЧНОЙ МОЩНОСТЬЮ

С. С. Гиргель

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

HERMITE BEAMS OF A CONTINUOUS COMPLEX INDEX WITH TRANSFERABLE FINITE POWER

S. S. Girgel

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Предложено новое решение параболического уравнения, описывающее декартовы параксиальные 2D световые пучки. Такие пучки описываются функциями Эрмита комплексного аргумента с двумя свободными параметрами без гауссовой аподизации. Установлены ограничения на параметры, при которых пучки Эрмита переносят конечную мощность и являются физически реализуемыми. Формализм для описания 2D пучков Эрмита обобщен на декартовы 3D пучки Эрмита конечной мощности. Представлены выражения для плотности энергии и потоков энергии для векторных пучков Эрмита с однородной поляризацией. Выполненное графическое моделирование интенсивности и поперечных потоков энергии таких пучков Эрмита подтверждает проведенные аналитические расчеты.

Ключевые слова: параксиальные пучки, пучки Эрмита, квадратичная интегрируемость.

Для цитирования: Гиргель, С. С. Пучки Эрмита непрерывного комплексного индекса с переносимой конечной мощностью / С. С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 3 (68). – С. 18–22. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_18. – EDN: UIYJVT

Abstract. A new solution to the parabolic equation describing Cartesian paraxial 2D light beams is proposed. Such beams are described by Hermite functions of complex argument with two free parameters, without Gaussian apodization. The constraints on the parameters under which Hermite beams carry finite power and are physically realizable are established. The formalism for describing 2D Hermite beams is generalized to Cartesian 3D Hermite beams of finite power. Expressions for the energy density and energy fluxes for vector Hermite beams with uniform polarization are presented. The graphical modeling of the intensity and transverse energy fluxes of such Hermite beams confirms the analytical calculations.

Keywords: paraxial beams, Hermite beams, quadratic integrability.

For citation: Girgel, S. S. Hermite beams of a continuous complex index with transferable finite power / S. S. Girgel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 3 (68). – P. 18–22. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_18 (in Russian). – EDN: UIYJVT

Введение

Обычно [1], [2] для параксиальных пучков используется аподизация соответствующей функции в форме гауссиана, чтобы функция, описывающая такой пучок, была квадратично интегрируема (КИ). Тогда такие волновые поля переносят конечную мощность через поперечное сечение перпендикулярно оси Z пучка. Простейшими примерами являются пучки Гаусса, Эрмита – Гаусса, Лагерра – Гаусса и Бесселя – Гаусса.

В настоящей работе будет показано, что возможен новый тип параксиальных световых пучков, у которых гауссова аподизация отсутствует. Такие пучки описываются функциями Эрмита, которые сами КИ при определенных ограничениях на их параметры.

1 Пучки Эрмита

Для монохроматических волн в безразмерных переменных $\{X = x/x_0, Z = z/z_0\}$

скалярное 2D параболическое уравнение [3]–[5]

$$(\partial_{X,X}^2 + 4i\partial_Z)f = 0 \quad (1.1)$$

после замены переменных $\{X_1 = \sqrt{i/Q_X} \cdot X, Q_X = Z - Q_{0,X}\}$, где комплексный параметр пучка $Q_{0,X} = Q'_{0,X} + iQ''_{0,X}$ в плоскости XZ , сводится к дифференциальному уравнению

$$\partial_{X_1,X_1}^2 f + \frac{4i}{Q_X} X_1 \partial_{X_1} f + 4Q_X \partial_{Q_X} f = 0. \quad (1.2)$$

Здесь и далее $x_0 > 0$, $z_0 = kx_0^2/2$ – некоторые характерные размеры пучка в направлениях, параллельных осям OX и OZ соответственно.

Применяя подстановку

$$f(X_1, Q_X) = f_1(X_1) \cdot f_3(Q_X),$$

где $f_3(Q_X) = \left(\frac{Q_X(Z)}{Q_X(0)} \right)^{\frac{v}{2}}$, получаем уравнение

$$(d_{X,X}^2 - 2X_1 d_X + 2v_X) f_1 = 0. \quad (1.3)$$

В качестве решений уравнения (1.3) обычно [4]–[5] используют 2 типа решений (четное и нечетное)

$$\begin{aligned} f_{1o} &= X_1 \cdot M \left(\frac{1}{2} - \frac{v_X}{2}, \frac{3}{2}, X_1^2 \right); \\ f_{1e} &= M \left(-\frac{v_X}{2}, \frac{1}{2}, X_1^2 \right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь функция Куммера M является конфлюэнтной гипергеометрической функцией ${}_1F_1$ [6]. 2D пучки, описываемые функциями f_{1o} и f_{1e} , описывают пучки Куммера [7], [8]. Функции (1.4) зависят от двух произвольных комплексных параметров Q_X и v_X . Постоянная разделения переменных v является, в общем случае, свободным комплексным параметром: $v_X = v'_X + i v''_X$.

Однако существуют еще и другие решения уравнения (1.3), выражающиеся через функции Эрмита [9], [10], например

$$f_1 = H_{v_X} \left(\sqrt{\frac{i}{Q_X}} X \right). \quad (1.5)$$

Можно показать [10], что функция (1.5) является специальной линейной комбинацией функций f_{1o} и f_{1e} . Поэтому решениями параболического уравнения (1.1) являются функции

$$f_X = H_{v_X} \left(\sqrt{\frac{i}{Q_X}} X \right) \left(\frac{Q_X(Z)}{Q_X(0)} \right)^{\frac{v_X}{2}}, \quad (1.6)$$

которые описывают новый тип параксиальных пучков Эрмита. Существенно, что здесь отсутствует гауссова аподизация функции Эрмита, а сам индекс v_X , как мы покажем ниже, может быть непрерывным комплексным параметром, в отличие от классических пучков Эрмита – Гаусса, где индекс v_X должен быть целочисленным и положительным.

2 Условия физической реализуемости 2D и 3D пучков Эрмита

Наибольший практический интерес представляют физически реализуемые пучки конечной мощности [1], [2]. Амплитуда такого пучка должна быть ограниченной при всех X . Более того, при $X \rightarrow \pm\infty$ амплитуда f должна стремиться к нулю и быть квадратично интегрируемой (КИ).

Анализ показывает, что необходимое условие КИ пучков Эрмита – $Q_{0X}'' > 0$.

А) Если $v'_X < -1/2$, то пучок является КИ.

Б) Если $v'_X \in [-1/2, 0)$, то $|f_X| \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, но пучок – не КИ.

В) Если $v'_X = 0$, то $|f_X| \rightarrow \text{const}$ при $|x| \rightarrow \infty$ и пучок – не КИ.

Г) Если $v'_X > 0$, то $|f_X| \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$ и пучок тем более не КИ.

При этом мнимая часть v''_X комплексного параметра $v_X = v'_X + i v''_X$ не влияет на КИ. Все найденные выше условия КИ для функций, используемых при описании пучков Эрмита, подтверждаются также при графическом моделировании их свойств.

Для 3D пучков Эрмита условия КИ в плоскостях XZ и YZ аналогичны. Отметим, что по своим свойствам пучки Эрмита схожи с пучками Куммера [7], [8]. Так, пучки Эрмита и Куммера в процессе распространения изменяют свой поперечный профиль.

3 Энергетические характеристики 3D векторных пучков Эрмита с однородной поляризацией

Заметим, что трехмерные скалярные решения (2+1)D параболического уравнения

$$(\partial_{X,X}^2 + \partial_{Y,X}^2 + 4i\partial_Z)f = 0 \quad (3.1)$$

для пучков Эрмита можно построить как произведение 2D решений типа (1.6):

$$f(X, Y, Z) = f_X(X, Q_X, v_X) f_Y(Y, Q_Y, v_Y). \quad (3.2)$$

Поэтому, в общем случае, амплитуда 3D скалярного пучка Эрмита зависит от трех координат и четырех свободных комплексных параметров. Это расширяет возможности при конструировании пучков с требуемыми свойствами.

Начнем с обсуждения векторных пучков Эрмита с однородной поляризацией. Векторную амплитуду $\mathbf{E}$ такого пучка можно представить в виде $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_X + i\gamma\mathbf{e}_Y)f + i\theta\mathbf{e}_Z(\partial_X f + i\gamma\partial_Y f)$, где f является некоторым решением параксиального параболического уравнения (3.1).

Плотности энергии, продольного и поперечного потоков энергии электромагнитного поля для параксиальных векторных пучков с однородной поляризацией соответственно равны [11], [12]:

$$w = \frac{\varepsilon |f|^2}{8\pi}; \quad S_z = \frac{c}{n} w;$$

$$S_{\perp} = \frac{c\varepsilon}{8\pi n} \theta \left(\text{Im}(f^* \nabla_{\perp} f) + \text{th } 2\psi'' [\nabla_{\perp}, \mathbf{e}_z] |f|^2 / 2 \right). \quad (3.3)$$

Здесь θ – параметр параксиальности, $\theta \ll 1$. В последнем выражении целесообразно выделить множителем плотность продольного потока

энергии S_z . Получаем [11]

$$\mathbf{S}_\perp = \mathbf{S}_o + \mathbf{S}_s = \theta S_z \left(\operatorname{Im} \left(\frac{\nabla_\perp f}{f} \right) + \operatorname{th} 2\psi'' \left[\operatorname{Re} \left(\frac{\nabla_\perp f}{f} \right), \mathbf{e}_z \right] \right), \quad (3.4)$$

где выражены явно, следуя Берри и Бекшаеву [13]–[15], плотность орбитального $\mathbf{S}_o$ и спинового $\mathbf{S}_s$ потоков энергии.

Если скалярная амплитуда однородно поляризованного пучка Эрмита $f = f_x f_y$, где $f_x = f_x(X)$, $f_y = f_y(Y)$, тогда плотность орбитального и спинового потоков энергии равна

$$\mathbf{S}_o = \frac{S_z}{k} \operatorname{Im} (a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y);$$

$$\mathbf{S}_s = \frac{S_z}{k} \operatorname{Re} (a_x \mathbf{e}_y - a_y \mathbf{e}_x) \operatorname{th} 2\psi'',$$

где введены, для краткости, обозначения $a_x = \frac{\partial_x f_x}{f_x}$; $a_y = \frac{\partial_y f_y}{f_y}$. Например,

$$a_x = \frac{-2iXv_x M \left(\frac{1-v_x}{2}, \frac{3}{2}, \frac{iX^2}{Q_x(Z)} \right)}{M \left(-\frac{v_x}{2}, \frac{1}{2}, \frac{iX^2}{Q_x(Z)} \right)}$$

и аналогично a_y . Здесь использованы преобразования Куммера

$$\partial_u M(a, b, u) = \frac{a}{b} M(a+1, b+1, u)$$

[6] для функции Куммера M .

С помощью системы компьютерной математики «Mathematica» было проведено графическое моделирование интенсивности и поперечных

потоков энергии векторных декартовых пучков Эрмита с однородной поляризацией и переносимой конечной мощностью. Некоторые результаты изображены на рисунках 3.1–3.3 при различных значениях свободных параметров. Выбирались параметры $v'_x \leq -1$; $v'_y \leq -1$, чтобы обеспечить КИ функций f пучков Эрмита и, тем самым, переносимую конечную мощность через поперечное сечение пучка. Последнее обеспечивает необходимые условия для физической реализации таких пучков.

На рисунке 3.1 показаны направления поперечных орбитальных потоков энергии $\mathbf{S}_o$ для пучков Эрмита. Видно, что если $v''_x = v''_y = 0$, то такие потоки строго радиальны. При $v''_x \neq 0$ возникает составляющая орбитального потока энергии, параллельная оси OY потока, однако КИ не нарушается. При увеличении продольного расстояния Z картина немного видоизменяется.

На рисунке 3.2 показаны поперечные спинные потоки энергии $\mathbf{S}_s$ пучков Эрмита для циркулярной поляризации (эллиптичность $\gamma = 1$). В части а) видно, что поток $\mathbf{S}_s$ направлен азимутально. Однако включение мнимой части v''_x свободного параметра v приводит к дополнительной компоненте спинного потока энергии $\mathbf{S}_s$, параллельной оси OX . В части 3.2 с) видно, что возрастание расстояния средств приводит к значительному изменению картины.

На рисунке 3.3 изображена интенсивность в относительных единицах в 3D формате для нескольких значений свободных параметров. Видно, что, при малых значениях параметров v'_x и v'_y и отсутствии мнимых частей v''_x и v''_y свободных параметров v_x и v_y , картина интенсивности представляет собой гауссовоподобную или колоколообразную поверхность, аналогичную поверхности интенсивности гауссова пучка.

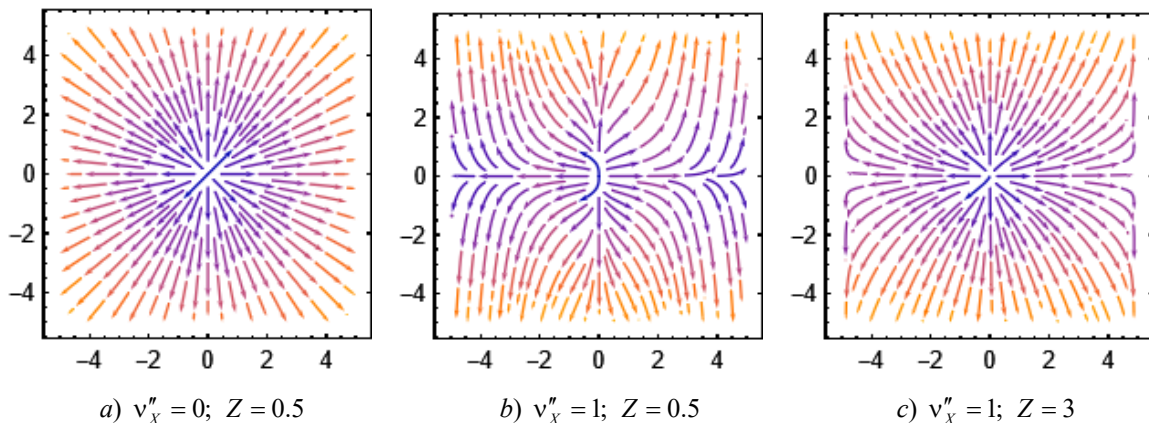


Рисунок 3.1 – Орбитальные потоки энергии $\mathbf{S}_o$ для пучков Эрмита.

Во всех случаях $v'_x = v'_y = -1$; $v''_y = 0$; $Q''_{0x} = Q''_{0y} = 1$

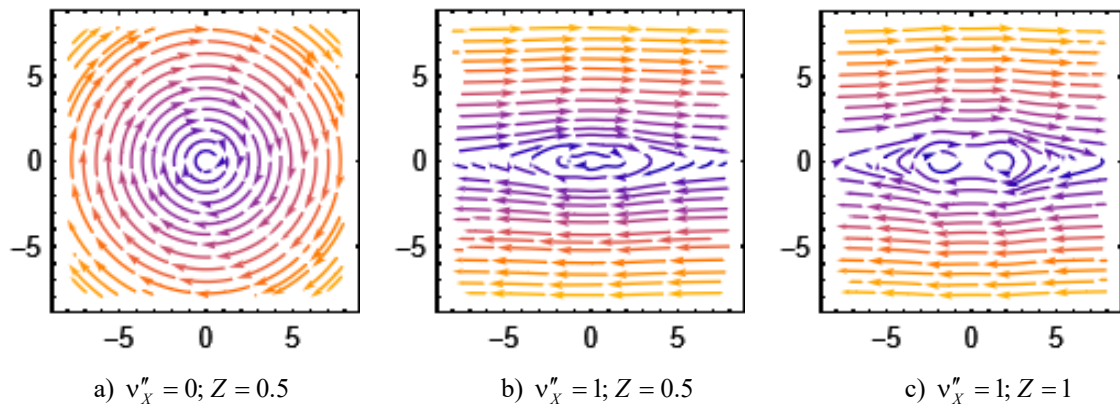


Рисунок 3.2 – Спиновые потоки энергии S_s для пучков Эрмита.

Во всех случаях $v'_x = v'_y = -1$; $v''_y = 0$; $Q''_{0x} = Q''_{0y} = 1$; эллиптичность $\gamma = 1$

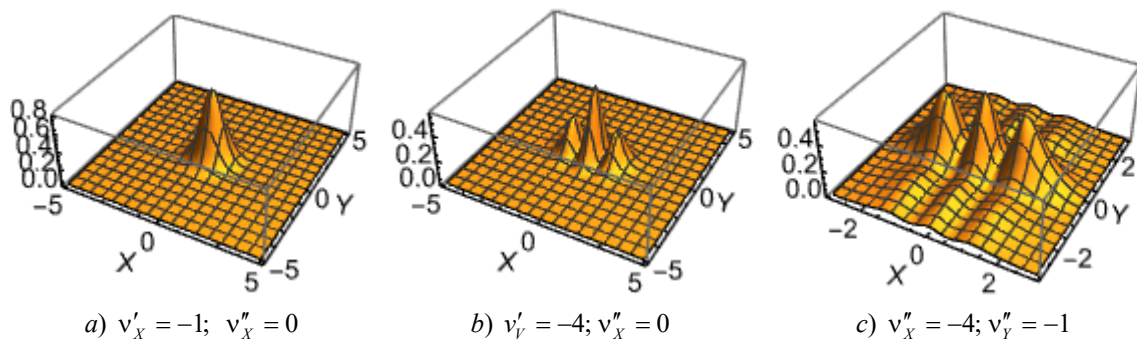


Рисунок 3.3 – 3D интенсивность пучков Эрмита.

Во всех случаях $Q''_{0x} = Q''_{0y} = 1$; $v'_y = -1$; $v''_y = 0$; $Z = 0.5$

Однако уменьшение параметра v'_x приводит к возникновению двух дополнительных максимумов, которые постепенно растут и при $v'_x = -4$ видны уже чёткие три максимума. Появление мнимых частей параметров v''_x и v''_y свободных параметров v_x и v_y приводит к сильной деформации поверхности интенсивности (рисунок 3.3 c), однако КИ по-прежнему сохраняется.

Заключение

В данной работе представлены новые решения скалярного параболического уравнения для параксиальных 2D световых пучков. Такие пучки описываются функциями Эрмита комплексного аргумента с двумя свободными параметрами без гауссовой аподизации. Эти результаты обобщены на 3 пучки Эрмита с непрерывными комплексными индексами v_x и v_y и переносимой конечную мощность.

Найдены ограничения на параметры, при соблюдении которых полученные решения соответствуют параксиальным пучкам с конечной энергией, то есть физически реализуемым. Для классических пучков Эрмита – Гаусса индексы v_x и v_y должны быть дискретными

целочисленными и положительными. Для обсуждаемых пучков Эрмита индексы v_x и v_y являются непрерывными комплексными. Для КИ и физической реализуемости на вещественные части параметров v_x и v_y накладываются ограничения $v'_x \leq -1/2$; $v'_y \leq -1/2$. Картины интенсивности представляют собой несколько пиков.

Фазовая и амплитудная поверхности обсуждаемых пучков Эрмита даже при распространении в свободном пространстве непрерывно трансформируются. Поэтому пучки Эрмита являются пучками с изменяющейся геометрией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ананьев, Ю. А. Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю. А. Ананьев. – М. : Наука, 1990. – 264 с.
2. Абрамочкин, Е. Г. Современная оптика гауссовых пучков / Е. Г. Абрамочкин, В. Г. Волостников. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 184 с.
3. Гиргель, С. С. Физические свойства скалярных 2D пучков Куммера – Гаусса / С. С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 19 – 23.
4. Гиргель, С. С. Скалярные астигматические 3D световые пучки Куммера – Гаусса /

С. С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (14). – С. 19–23.

5. *Bandres, M. A. Cartesian beams* / M. A. Bandres and J. C. Gutierrez-Vega // *Optics Letters*. – 2007. – Vol. 32, № 23. – P. 3459–3461.

6. *Флюгге, З. Задачи по квантовой механике*. Т. 2 / 3. Флюгге. – М. : Мир, 1974. – 418 с.

7. *Гиргель, С. С. Пучки Куммера без гауссовой аподизации с переносимой конечной мощностью* // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 7–9.

8. *Гиргель, С. С. 3D световые пучки Куммера без гауссовой аподизации с переносимой конечной мощностью* / С. С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 18–21.

9. *Лебедев, Н. Н. Специальные функции и их приложения* / Н. Н. Лебедев. – М. : ГИТТЛ, 1953. – 379 с.

10. *Nikiforov, A. F. Special functions of mathematical physics* / A. F. Nikiforov, V. N. Uvarov. – Basel; Boston: Birkhäuser, 1988. – 428 p.

11. *Гиргель, С. С. Энергетические характеристики векторных декартовых пучков Куммера с переносимой конечной мощностью* / С. С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 3 (52). – С. 13–17.

12. *Гиргель, С. С. Энергетические характеристики векторных циркулярных пучков Куммера конечной мощности. I. Однородная поляризация* / С. С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 4 (53). – С. 16–20.

13. *Berry, M. V. Optical currents* / M. V. Berry // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. – 2009. – Vol. 11 (9). – P. 094001.

14. *Bekshaev, A. Y. Transverse energy flows in vectorial fields of paraxial beams with singularities* / A. Y. Bekshaev, M. S. Soskin // *Optics Communications*. – 2007. – Vol. 271. – P. 332–348.

15. *Bekshaev, A. Internal flows and energy circulation in light beams* / A. Bekshaev, K. Bliokh, M. Soskin // *Journal of Optics* – 2011. – Vol. 13 (5). – P. 053001.

Поступила в редакцию 05.08.2026.

Информация об авторах

Гиргель Сергей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор

УДК 539.12.01

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_23

EDN: TSCRYC

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПАРЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ s -СОСТОЯНИЙ ДВУХЧАСТИЧНОЙ СИСТЕМЫ

В. Н. Капшай, А. А. Гришечкина*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

ANALYTICAL AND NUMERICAL SOLUTION OF INTEGRAL QUASIPOTENTIAL PARTIAL EQUATIONS FOR s -STATES OF A TWO-PARTICLE SYSTEM

V. N. Kapshai, A. A. Grishechkina*Francisk Skorina Gomel State University*

Аннотация. Парциальные квазипотенциальные интегральные уравнения Логунова – Тавхелидзе и Кадышевского решены аналитически и численно применительно к связанным состояниям двухчастичной системы с нулевой энергией: найдены собственные значения константы связи и собственные функции. В отношении состояний двухчастичной системы с ненулевой энергией аналогичные результаты получены посредством численных методов.

Ключевые слова: квазипотенциальный подход, импульсное представление, функция Грина, связанные состояния, s -состояние.

Для цитирования: Капшай, В. Н. Аналитическое и численное решение интегральных квазипотенциальных парциальных уравнений для s -состояний двухчастичной системы / В. Н. Капшай, А. А. Гришечкина // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 3 (68). – С. 23–29. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_23. – EDN: TSCRYC

Abstract. The partial quasipotential Logunov – Tavkhelidze and Kadyshevsky integral equations are solved analytically and numerically for the bound states of a two-particle system with zero energy: the eigenvalues of the coupling constant and eigenfunctions are found. Similar results for the states of a two-particle system with nonzero energy are obtained using numerical methods.

Keywords: quasipotential approach, momentum representation, Green's function, bound states, s -state.

For citation: Kapshai, V. N. Analytical and numerical solution of integral quasipotential partial equations for s -states of a two-particle system / V. N. Kapshai, A. A. Grishechkina // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 3 (68). – P. 23–29. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_23 (in Russian). – EDN: TSCRYC

Введение

Основным уравнением, посредством которого реализуется описание релятивистских составных систем в квантовой теории поля, является уравнение Бете – Солпитера, использование которого сопряжено с трудностями – как при его решении, так и при интерпретации результатов. Посредством редукции уравнения Бете – Солпитера удалось получить несколько вариантов квазипотенциальных уравнений, более простых по сравнению с исходным уравнением. При записи квазипотенциальных уравнений используется свободная функция Грина (ФГ). В силу неоднозначности её определения можно сформулировать различные варианты редуцированных уравнений. После анализа таких уравнений и их решений выявлено, что одними из наиболее часто используемых являются уравнения Логунова – Тавхелидзе и Кадышевского.

Первоначально квазипотенциальные уравнения были сформулированы в импульсном представлении. Применяя к ним релятивистский

аналог преобразования Фурье, можно перейти в так называемое релятивистское конфигурационное представление. Если при этом квазипотенциал зависит только от разности векторов в импульсном пространстве Лобачевского, реализованного на верхнем поле массового гиперболоида, то в результате получается уравнение с локальным в конфигурационном представлении потенциалом.

Однако, такой переход возможен не всегда. Существуют такие лобачевско-локальные квазипотенциалы, которые невозможно записать в релятивистском конфигурационном представлении. Вместе с тем уравнения с такими квазипотенциалами возможно рассматривать и решать в исходном импульсном представлении. Решение уравнений в импульсном представлении с одним из таких потенциалов и реализовано в настоящей работе.

Производя разложение всех величин, входящих в квазипотенциальное уравнение в импульсном представлении, в ряды по сферическим

гармоникам, можно перейти от трёхмерных уравнений к парциальным, описывающим состояния систем частиц с определенным значением орбитального квантового числа. В данной статье рассматривается решение квазипотенциальных парциальных интегральных уравнений применительно к s -состояниям двухчастичных систем.

1 Интегральные парциальные квазипотенциальные уравнения в сферически-симметричном случае

В импульсном представлении описание связанных состояний системы двух частиц одинаковой массы $m_1 = m_2 = m$ осуществляется на основе уравнений для волновых функций, формулируемых в системе центра масс в виде [1]

$$\psi(E, \mathbf{p}) = G_0(E, E_p) \int V(E; \mathbf{p}, \mathbf{k}) \psi(E, \mathbf{k}) \frac{m}{E_k} d\mathbf{k}, \quad (1.1)$$

где $2E$ – энергия двухчастичной системы (для связанных состояний $2E < 2m$),

$\mathbf{p}$ – относительный импульс частиц,

$$E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \text{ и } E_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2},$$

$G_0(E, E_p)$ – свободная функция Грина,

$V(E; \mathbf{p}, \mathbf{k})$ – квазипотенциал.

Свободная ФГ в квазипотенциальном подходе определена неоднозначно. Рассмотрим ФГ, которые соответствуют уравнениям Логанова – Тавхелидзе (LT) и Кадышевского (K):

$$G_0^{(LT)}(E, E_p) = \frac{1}{E^2 - E_p^2}, \quad (1.2)$$

$$G_0^{(K)}(E, E_p) = \frac{1}{2E_p(E - E_p)}. \quad (1.3)$$

Ранее уравнение (1.1) рассматривалось с различными квазипотенциалами [2]. Для некоторых квазипотенциалов удалось получить точные решения в частных случаях (например, при $2E = 0$) [2], [3]. В настоящей работе мы хотим обратить внимание на существование ещё одного квазипотенциала, при использовании которого можно получить точные решения при нулевой энергии двухчастичной системы, а именно квазипотенциала

$$V(E; \mathbf{p}, \mathbf{k}) \equiv V(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\lambda}{\sqrt{m(\Delta^0 - m)}}, \quad (1.4)$$

$$\Delta^0 = (E_p E_k - \mathbf{p} \mathbf{k})/m,$$

где λ – константа связи.

Отличительной особенностью этого потенциала является то, что его нельзя записать в релятивистском конфигурационном представлении.

В состояниях с нулевым значением момента импульса (s -состояниях), когда волновая функция $\psi(E, \mathbf{p})$ не зависит от углов, определяющих направление вектора $\mathbf{p}$, уравнение (1.1) можно свести к виду:

$$\psi_0(E, \chi_p) = m G_0(E, m \operatorname{ch} \chi_p) \times \int_0^\infty V_0(E; \chi_p, \chi_k) \psi_0(E, \chi_k) d\chi_k, \quad (1.5)$$

где χ_p и χ_k – быстроты, связанные с импульсами соотношениями

$$|\mathbf{p}| = p = m \operatorname{sh} \chi_p, \quad |\mathbf{k}| = k = m \operatorname{sh} \chi_k,$$

$V_0(E; \chi_p, \chi_k)$ – парциальный потенциал, выражаемый через трехмерный потенциал в соответствии с формулой

$$V_0(E; \chi_p, \chi_k) = 2\pi p k \int_{-1}^1 V(E; \mathbf{p}, \mathbf{k}) d \cos \theta_{pk}, \quad (1.6)$$

θ_{pk} – угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$.

После вычисления интеграла (1.6) с учётом квазипотенциала (1.4) получаем не зависящий от углов парциальный потенциал

$$V_0(\chi_p, \chi_k) = \frac{4\sqrt{2}}{(2\pi)^2} m \lambda \begin{cases} u(\chi_p) v(\chi_k), & \chi_p > \chi_k; \\ u(\chi_k) v(\chi_p), & \chi_p < \chi_k, \end{cases} \quad (1.7)$$

где

$$u(\chi) = \operatorname{ch}(\chi/2), \quad v(\chi) = \operatorname{sh}(\chi/2). \quad (1.8)$$

В уравнении (1.5) представим неизвестную функцию в виде

$$\psi_0(E, \chi_p) = G_0(E, m \operatorname{ch} \chi_p) \phi_0(E, \chi_p). \quad (1.9)$$

С учётом выражения (1.7) запишем парциальные уравнения для s -состояний в импульсном представлении в терминах функции $\phi_0(E, \chi_p)$:

$$\phi_0(E, \chi_p) = \sqrt{2} \left(\frac{m}{\pi} \right)^2 \lambda \times \left[\int_0^{\chi_p} u(\chi_p) v(\chi_k) G_0(E, m \operatorname{ch} \chi_k) \phi_0(E, \chi_k) d\chi_k + \int_{\chi_p}^\infty u(\chi_k) v(\chi_p) G_0(E, m \operatorname{ch} \chi_k) \phi_0(E, \chi_k) d\chi_k \right]. \quad (1.10)$$

Это интегральное уравнение представляет задачу на собственные значения. Подчеркнём, что если константа связи λ задана, то следует искать собственные значения энергии E . Если же константа связи λ неизвестна, то задачу на собственные

значения можно решать именно относительно её, фиксируя предварительно значение энергии E .

2 Задача Штурма – Лиувилля

Потенциал (1.4) и записанное с его учётом уравнение (1.10) обладают ещё одним важным свойством: из уравнения (1.10) можно получить дифференциальное уравнение для искомой функции. Покажем это, предварительно определяя вторую производную от функции $\phi_0(E, \chi_p)$ по χ_p . Воспользуемся при этом формулой для определения производной от интеграла, в котором один из пределов интегрирования зависит от параметра, по которому ведётся дифференцирование, и получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi_0(E, \chi_p)}{d\chi_p^2} &= \sqrt{2} \left(\frac{m}{\pi} \right)^2 \times \\ &\times \lambda \left(\int_0^{\chi_p} v(\chi_k) \frac{d^2 u(\chi_p)}{d\chi_p^2} G_0(E, E_k) \phi_0(E, \chi_k) d\chi_k + \right. \\ &+ \int_{\chi_p}^{\infty} u(\chi_k) \frac{d^2 v(\chi_p)}{d\chi_p^2} G_0(E, E_k) \phi_0(E, \chi_k) d\chi_k - \\ &\left. - \frac{1}{2} G_0(E, E_p) \phi_0(E, \chi_p) \right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Правую часть равенства (2.1), с учётом явных выражений (1.8) функций $u(\chi)$ и $v(\chi)$, упростим – выделим функцию $\phi_0(E, \chi_p)$ в виде (1.10); в итоге из интегрального уравнения (1.10) получим дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi_0(E, \chi_p)}{d\chi_p^2} &= \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{m}{\pi} \right)^2 \lambda G_0(E, E_p) \right) \phi_0(E, \chi_p). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Анализируя поведение функции (1.10) при $\chi_p \rightarrow 0$ и $\chi_p \rightarrow \infty$, сформулируем граничные условия для $\phi_0(E, \chi_p)$:

$$\begin{aligned} \phi_0(E, \chi_p) \Big|_{\chi_p \rightarrow 0} &= 0; \\ \left(\operatorname{sh} \left(\frac{\chi_p}{2} \right) \phi_0(E, \chi_p) - \right. \\ &\left. - 2 \operatorname{ch} \left(\frac{\chi_p}{2} \right) \frac{d\phi_0(E, \chi_p)}{d\chi_p} \right) \Big|_{\chi_p \rightarrow \infty} = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Дифференциальное уравнение (2.2) совместно с граничными условиями (2.3) представляют формулировку задачи Штурма – Лиувилля (ЗШЛ), эквивалентной интегральному уравнению (1.10).

Рассмотрим аналитическое решение ЗШЛ (2.2)–(2.3) в частном случае, а именно при $2E = 0$. При нулевой энергии двухчастичной системы свободные функции Грина для уравнений Логанова – Тавхелидзе и Кадышевского опережаются выражением:

$$G_0^{(LT)}(0, E_p) = 2G_0^{(K)}(0, E_p) = -\left(m \operatorname{ch} \chi_p\right)^{-2},$$

а соответствующее им уравнение (2.2) преобразуется в уравнение относительно функции $\phi_0(0, \chi_p) \equiv \phi_0(\chi_p)$:

$$\frac{d^2 \phi_0(\chi_p)}{d\chi_p^2} - \left(\frac{1}{4} + \tilde{\lambda} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \chi_p} \right) \phi_0(\chi_p) = 0, \quad (2.4)$$

$$\text{где } \tilde{\lambda} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi^2} \lambda.$$

Уравнение (2.4) по виду совпадает с одномерным уравнением Шрёдингера для модифицированного потенциала Пёшля – Теллера [4], [5]. Аналогичное уравнение получено при решении в релятивистском конфигурационном представлении одномерного квазипотенциального уравнения с другим модельным потенциалом [6].

В уравнении (2.4) перейдём от переменной χ_p к новой переменной $y = \operatorname{th} \chi_p$ и новой функции ($\phi_0(\chi_p) = \Psi(\operatorname{th} \chi_p) = \Psi(y)$):

$$\begin{aligned} (1-y^2) \frac{d^2 \Psi(y)}{dy^2} - 2y \frac{d\Psi(y)}{dy} - \\ - \left(\frac{1}{4(1-y^2)} + \tilde{\lambda} \right) \Psi(y) = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Его общее решение имеет вид

$$\Psi(y) = C_1 P_{K/2-1/2}^{1/2}(y) + C_2 Q_{K/2-1/2}^{1/2}(y),$$

где введено обозначение:

$$K = \sqrt{1-4\tilde{\lambda}}, \quad (2.6)$$

$P_{K/2-1/2}^{1/2}(y)$ и $Q_{K/2-1/2}^{1/2}(y)$ – присоединённые функции Лежандра первого и второго рода соответственно [7].

Возвращаясь к исходной переменной, решение уравнения (2.5) представим в виде

$$\phi_0(\chi_p) = C_1 P_{K/2-1/2}^{1/2}(\operatorname{th} \chi_p) + C_2 Q_{K/2-1/2}^{1/2}(\operatorname{th} \chi_p). \quad (2.7)$$

Применим к решению (2.7) граничные условия (2.3). Если $\chi_p \rightarrow 0$, тогда $\operatorname{th} \chi_p \rightarrow 0$, и для анализа поведения функции (2.7) при таких условиях необходимо использовать формулы для определения функций Лежандра первого и второго рода при нулевом значении аргумента [7].

После применения первого из граничных условий (2.3) получим:

$$\begin{aligned} \phi_0(\chi_p) \Big|_{\chi_p \rightarrow 0} = \\ = C_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\frac{\pi K}{4}\right) - C_2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi K}{4}\right) = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Аргумент функции $\phi_0(\chi_p)$ меняется в пределах от 0 до ∞ . В таком случае аргумент присоединённых функций Лежандра, входящих в выражение для функции (2.7), варьируется в диапазоне $0 \leq \text{th } \chi_p < 1$. Поэтому, применяя второе из граничных условий (2.3), воспользуемся формулами для функций Лежандра на разрезе [7]; в результате получим

$$\begin{aligned} \left(\text{sh}\left(\frac{\chi_p}{2}\right) \phi_0(\chi_p) - 2 \text{ch}\left(\frac{\chi_p}{2}\right) \frac{d\phi_0(\chi_p)}{d\chi_p} \right) \Big|_{\chi_p \rightarrow \infty} = \\ = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} + \frac{C_2 \sqrt{\pi} K}{2} = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Решая систему уравнений (2.8), (2.9) относительно C_1 и C_2 , приходим к выводу, что ЗШЛ (2.2), (2.3) имеет нетривиальное решение только при выполнении условия:

$$\text{tg } \frac{\pi K}{4} = -K, \quad K \neq 0. \quad (2.10)$$

Значения K , удовлетворяющие условию (2.10), соответствуют точкам пересечения графиков функций $f_1(K) = \text{tg}(\pi K/4)$ и $f_2(K) = -K$, изображенных на рисунке 2.1, и являются вещественными. Значения $\tilde{\lambda}$, связанные с K , определяются из формулы (2.6).

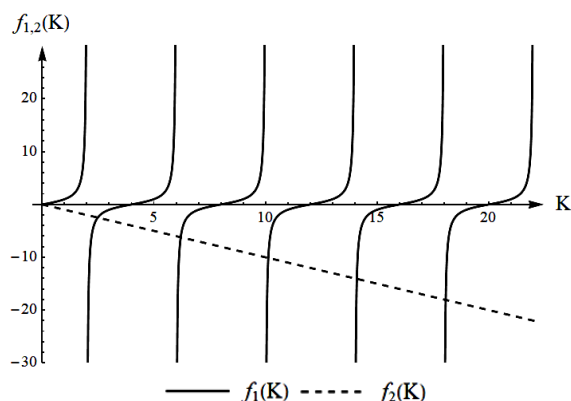


Рисунок 2.1 – Графическое определение корней трансцендентного уравнения (2.10)

Возвращаясь к функции

$$\psi_0(0, \chi_p) \equiv \psi_0(\chi_p),$$

выражаемой через функцию $\phi_0(\chi_p)$ по формуле (1.9), запишем

$$\begin{aligned} \psi_{0n}(\chi_p) = C_{1n} G_0(0, E_p) \times \\ \times \left(P_{K_n/2-1/2}^{1/2}(\text{th } \chi_p) - \frac{2}{\pi K_n} Q_{K_n/2-1/2}^{1/2}(\text{th } \chi_p) \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

В целях численного нахождения коэффициентов C_{1n} воспользуемся условием нормировки волновой функции:

$$\int_0^\infty \frac{m}{E_p} (\psi_0(\chi_p))^2 dp = 1.$$

Графики получаемых в итоге нормированных волновых функций, соответствующих $n = 0, 1, 2$, построены на рисунке 2.2.

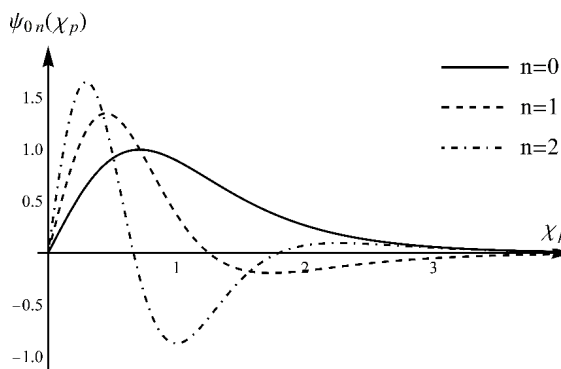


Рисунок 2.2 – Графики первых трёх волновых функций (2.11), соответствующих нулевой энергии двухчастичной системы

Таким образом, при $E = 0$ получено точное аналитическое решение ЗШЛ (2.2)–(2.3).

3 Численное решение интегрального уравнения и эквивалентной ему задачи Штурма – Лиувилля для двухчастичной системы с нулевой энергией

Интегральное уравнение (1.10) для двухчастичной системы в состоянии с нулевой энергией можно представить в виде

$$\begin{aligned} \phi_0(\chi_p) = -\tilde{\lambda} \int_0^\infty \left(\text{sh} \frac{\chi_p + \chi_k}{2} - \text{sh} \frac{|\chi_p - \chi_k|}{2} \right) \times \\ \times \frac{1}{\text{ch}^2 \chi_k} \phi_0(\chi_k) d\chi_k, \end{aligned} \quad (3.1)$$

удобном для его последующего численного решения. Интеграл, содержащийся в правой части (3.1), заменим квадратурной формулой метода прямоугольников и осуществим переход к задаче о собственных значениях системы линейных алгебраических уравнений. К полученным результатам применим уточняющую процедуру Ричардсона [8], [9].

Таблица 3.1 – Сравнение результатов, полученных аналитически и численными методами

	Аналитическое решение	Численное решение ЗШЛ (2.2), (2.3)	$\Delta_{ЗШЛ}$	Численное решение интегрального уравнения (3.1)	$\Delta_{ИУ}$
$\tilde{\lambda}_0$	-1,2960483528	-1,2960490906	$7,4 \cdot 10^{-7}$	-1,2960483580	$5,2 \cdot 10^{-9}$
$\tilde{\lambda}_1$	-9,3708373890	-9,3708377369	$3,5 \cdot 10^{-7}$	-9,3708374572	$6,8 \cdot 10^{-8}$
$\tilde{\lambda}_2$	-25,3806343359	-25,3806345716	$2,3 \cdot 10^{-7}$	-25,3806348239	$4,9 \cdot 10^{-7}$
$\tilde{\lambda}_3$	-49,3835195660	-49,3835193615	$2,0 \cdot 10^{-7}$	-49,3835222999	$2,7 \cdot 10^{-6}$
$\tilde{\lambda}_4$	-81,3847324729	-81,3847321353	$3,4 \cdot 10^{-7}$	-81,3847437032	$1,1 \cdot 10^{-5}$

Задачу Штурма – Лиувилля (2.2)–(2.3), эквивалентную интегральному уравнению (3.1), решим численно методом стрельбы [10].

Значения параметра $\tilde{\lambda}_{0-4}$, полученные аналитически и двумя методами численно, приведены в таблице 3.1. Там же содержатся модули разностей $\Delta_{ИУ}$ значений указанных параметров, полученных аналитически, и значений, полученных при численном решении интегрального уравнения (3.1), а также сведения о различии результатов, полученных при аналитическом и численном решении ЗШЛ (2.2), (2.3), обозначенные символами $\Delta_{ЗШЛ}$.

На основании данных, представленных в таблице 3.1, можно сделать вывод об эффективности выбранных численных методов и возможности их использования для решения аналогичной задачи применительно к состояниям двухчастичной системы, в которых значение её энергии E отлично от нуля.

4 Решение задачи Штурма – Лиувилля и интегрального уравнения для двухчастичной системы, энергия которой отлична от нуля

Рассмотрим теперь численное решение ЗШЛ (2.2), (2.3) и интегрального уравнения (1.10) при отличной от нуля энергии системы. Для этого в свободных ФГ (1.2), (1.3), содержащихся в указанных уравнениях, введём обозначение $E = m \cos w$. При этом свободные функции Грина можно представить в виде:

$$G_0^{(LT)}(E, m \operatorname{ch} \chi_p) = G_0^{(LT)}(m \cos w, m \operatorname{ch} \chi_p) = \frac{1}{m^2 \cos^2 w - m^2 \operatorname{ch}^2 \chi_p},$$

$$G_0^{(K)}(E, m \operatorname{ch} \chi_p) = G_0^{(K)}(m \cos w, m \operatorname{ch} \chi_p) = \frac{1}{2m \operatorname{ch} \chi_p (m \cos w - m \operatorname{ch} \chi_p)}.$$

Варьируя значения w от $\pi/2$ до 0, при каждом из них численно решим интегральное уравнение и соответствующую ему ЗШЛ,

построим графики зависимости $\lambda_{0,1,2}$ от параметра w , определяющего энергию двухчастичной системы, основываясь на уравнении Логунова – Тавхелидзе (рисунок 4.1) и уравнении Кадышевского (рисунок 4.2).

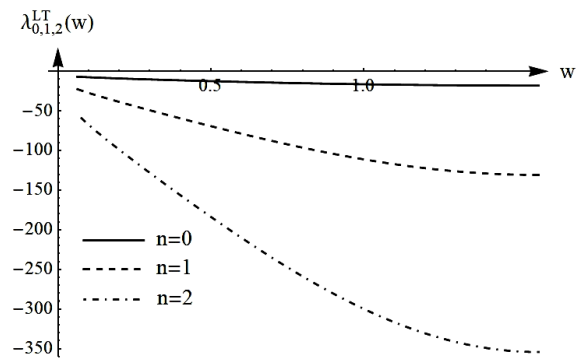


Рисунок 4.1 – Зависимость константы связи λ от параметра w для уравнения Логунова – Тавхелидзе

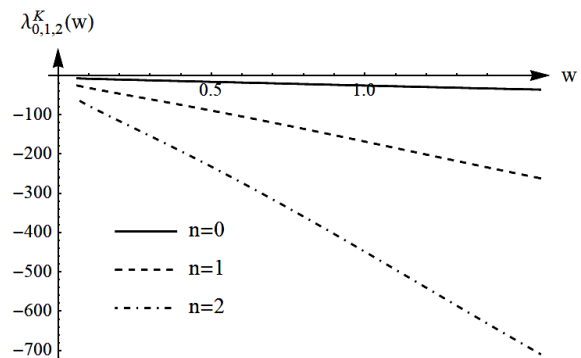


Рисунок 4.2 – Зависимость константы связи λ от параметра w для уравнения Кадышевского

На рисунках 4.3, 4.4 приведены графики волновых функций с $n = 0$, соответствующих уравнениям Логунова – Тавхелидзе и Кадышевского, построенные при значениях параметра $w = 0,15\pi; 0,3\pi; 0,45\pi$ на основании результатов их численного решения.

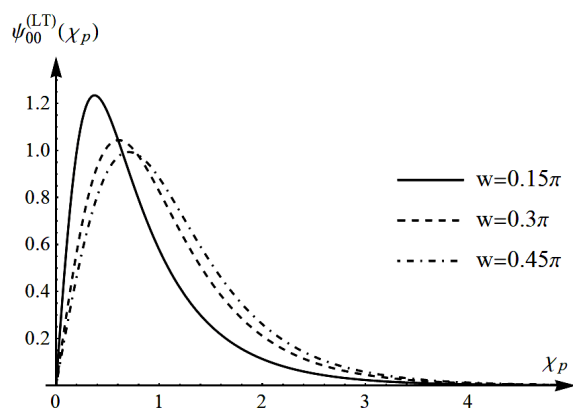


Рисунок 4.3 – Зависимость волновых функций уравнения Логунова – Тавхелидзе от быстроты при различных значениях энергии

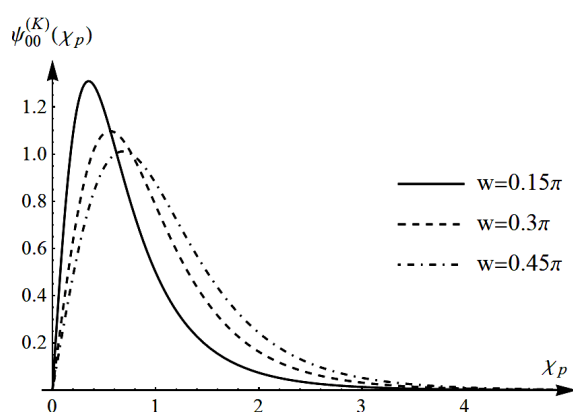


Рисунок 4.4 – Зависимость волновых функций уравнения Кадышевского от быстроты при различных значениях энергии

На рисунках 4.5, 4.6 приведены графики волновых функций основного и первых двух возбужденных состояний ($n = 0, 1, 2$) двухчастичной системы, построенные соответственно на основе результатов численного решения уравнений Логунова – Тавхелидзе и Кадышевского при значениях параметра $w = 0, 3\pi$.

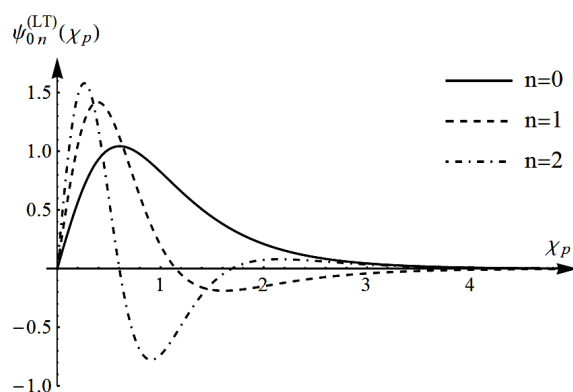


Рисунок 4.5 – Зависимость волновых функций уравнения Логунова – Тавхелидзе от быстроты при различных значениях n

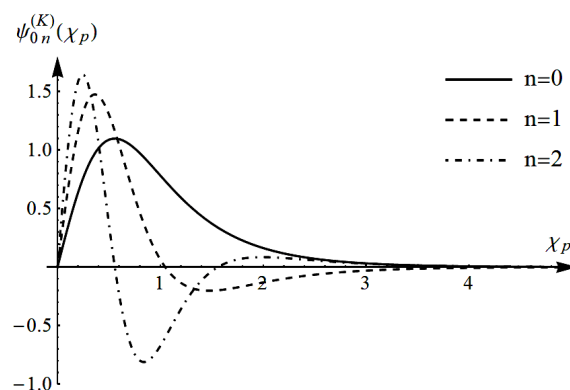


Рисунок 4.6 – Зависимость волновых функций уравнения Кадышевского от быстроты при различных значениях n

Отметим, что волновые функции, соответствующие состояниям с нулевой энергией при различных значениях λ_n , удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_0^\infty \psi_{0n}(\chi_k) \psi_{0m}(\chi_k) \frac{1}{\text{ch}^2 \chi_k} d\chi_k = 0; \quad n \neq m,$$

вытекающему из уравнения (3.1).

Заключение

Таким образом, в настоящей статье решены задачи об определении собственных состояний двухчастичной системы, характеризуемой квазипотенциалом, не представимым в релятивистском конфигурационном представлении, но в импульсном представлении обеспечивающим сведение интегрального уравнения к задаче Штурма – Лиувилля. Сформулированная указанным способом задача Штурма – Лиувилля решена точно применительно к состояниям двухчастичной системы с нулевой энергией: найдены собственные значения константы связи, а также собственные волновые функции. Такие же результаты получены при численном решении задачи Штурма – Лиувилля и интегрального уравнения. Произведен сравнительный анализ собственных значений, полученных аналитически и численно. Сделан вывод об эффективности использованных моделей расчета. Зависимости собственных значений константы связи от параметра w и волновых функций от быстроты, полученные в импульсном представлении численно, иллюстрированы графически.

ЛИТЕРАТУРА

1. Капшай, В. Н. Релятивистские парциальные интегральные уравнения для двухчастичных связанных состояний и задача Штурма – Лиувилля / В. Н. Капшай, С. И. Фиалка // Известия вузов. Физика. – 2015. – Т. 58, № 9. – С. 32–40; Kapshai, V.N. Relativistic Partial Integral Equations

for Two-Particle Bound States and the Sturm-Liouville Problem / V. N. Kapshai, S. I. Fialka // Russ. Phys. Journal. – 2016. – Vol. 58, № 9. – P. 1237–1247.

2. Капшай, В. Н. Об одном классе точных решений квазипотенциальных уравнений / В. Н. Капшай, С. П. Кулешов, Н. Б. Скачков // ТМФ. – 1983. – Т. 55, № 3. – С. 349–360.

3. Капшай, В. Н. Решение релятивистских двухчастичных уравнений с произвольным орбитальным моментом / В. Н. Капшай, С. И. Фиалка // Известия вузов. Физика. – 2017. – Т. 60, № 1. – С. 34–43; Kapshai, V. N. Solution of relativistic two-particle equations with arbitrary orbital angular momentum / V. N. Kapshai, S. I. Fialka // Russ. Phys. Journal. – 2017. – Vol. 60, № 1. – P. 37–49.

4. Флюгге, З. Задачи по квантовой механике: в 2 т. / З. Флюгге. – 3-е изд. – Москва: ЛКИ, 2010. – Т. 1. – 344 с.

5. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика: в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 5-е изд. – М.: Физматлит, 2002. – Т. 3: Квантовая механика: нерелятивистская теория. – 808 с.

6. Гришечкин, Ю. А. Приближенное аналитическое решение одномерного квазипотенциального уравнения с потенциалом $(\rho^2 + \rho_0^2)^{-1}$

в релятивистском конфигурационном представлении / Ю. А. Гришечкин, А. В. Бужан, В. Н. Капшай // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 12–15.

7. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – 2-е изд. – М.: Наука, 1973. – Т. 1: Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. – 296 с.

8. Марчук, Г. И. Повышение точности решений разностных схем / Г. И. Марчук, В. В. Шайдуров. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

9. Вычисления на квазиравномерных сетках / Н. Н. Калиткин, А. Б. Альшин, Е. А. Альшина, Б. В. Рогов. – М.: Физматлит, 2005. – 224 с. 10.

10. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – Санкт-Петербург: БВХ-Петербург, 2011. – 592 с.

Поступила в редакцию 07.07.2026.

Информация об авторах

Капшай Валерий Николаевич – к.ф.-м.н., доцент

Гришечкина Анастасия Александровна – старший преподаватель

АКУСТООПТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В СВЕРХРЕШЕТКАХ ФОТОУПРУГОСТИ В УСЛОВИЯХ ПОЛНОГО ВНУТРЕННЕГО ОТРАЖЕНИЯ

Г. В. Кулак, Т. В. Николаенко, Л. А. Тозик

Мозырский государственный педагогический университет имени И. П. Шамякина

ACOUSTO-OPTIC INTERACTION IN PHOTOELASTIC SUPERLATTICES UNDER TOTAL INTERNAL REFLECTION

G. V. Kulak, T. V. Nikolaenko, L. A. Tozik

Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin

Аннотация. Исследованы особенности отражения дифрагированных на ультразвуке световых волн в структуре: покрытие-модулированный слой-подложка в условиях полного внутреннего отражения от подложки. Для структуры YIG-GaAs-As₂Se₃ рассчитаны коэффициенты отражения дифрагированных волн на длине волны света 1,15 мкм. Показано значительное уменьшение коэффициентов отражения дифрагированных волн нулевого и первого порядка при наличии поглощения слоя при изменении интенсивности ультразвуковой волны и толщины модулированного слоя. Установлено, что рассмотренный режим акустооптического взаимодействия может быть использован для амплитудной модуляции световых волн ближнего инфракрасного диапазона спектра.

Ключевые слова: акустооптическое взаимодействие, инфракрасное излучение, ультразвуковая волна, коэффициент отражения, трехслойная структура, поглощение света, полное внутреннее отражение.

Для цитирования: Кулак, Г. В. Акустооптическое взаимодействие в сверхрешетках фотоупругости в условиях полного внутреннего отражения / Г. В. Кулак, Т. В. Николаенко, Л. А. Тозик // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 3 (68). – С. 30–34. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_30. – EDN: NJNYFK

Abstract. The reflection properties of ultrasonically diffracted light waves in a coating-modulated layer-substrate structure under conditions of total internal reflection from the substrate were studied. For the YIG-GaAs-As₂Se₃ structure, the reflectivity of diffracted waves was calculated for a light wavelength of 1.15 μm. A significant decrease in the reflectivity of zero- and first-order diffracted waves in the presence of layer absorption was demonstrated with changes in the ultrasonic wave intensity and the modulated layer thickness. It was established that the acousto-optic interaction regime under consideration can be used for amplitude modulation of near-infrared light waves.

Keywords: acousto-optic interaction, infrared radiation, ultrasonic wave, reflectivity, three-layer structure, light absorption, total internal reflection.

For citation: Kulak, G. V. Acousto-optic interaction in photoelastic superlattices under total internal reflection / G. V. Kulak, T. V. Nikolaenko, L. A. Tozik // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 3 (68). – P. 30–34. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_30 (in Russian). – EDN: NJNYFK

Введение

В настоящее время проводятся интенсивные исследования искусственных анизотропных структур (классические и квантовые сверхрешетки (СР)) с целью изучения в них различных физических эффектов и возможных технических приложений [1], [2]. Среди физических свойств СР важное место занимают акустооптические (АО) свойства, которые сложным образом зависят от направлений распространения и поляризации световых и акустических волн относительно осей симметрии анизотропной структуры СР (см. [3], [4]) что необходимо учитывать при проектировании различных АО устройств. В работе [4] установлена возможность создания СР с однородными оптическими свойствами, однако чередующимися значениями фотоупругих параметров (СР фотоупругости).

1 Теоретические результаты и обсуждение

Полагалось (см. [4], [5]), что в первом слое вдоль оси симметрии СР ориентирована кристаллографическая ось X_3 кубического кристалла, во втором слое вдоль оси симметрии ориентирована ось X_1 кубического кристалла (например, GaAs) и т. д. В таком случае кристаллографические оси X_2 отдельных слоев СР ориентированы вдоль границ слоев с различными значениями фотоупругих параметров (рисунок 1.1). Падающая под углом Брэгга (φ_B) световая волна дифрагирует на совокупной решетке (ультразвуковой и фотоупругости), причем выполняется условие векторного синхронизма: $\vec{k}_1 = \vec{k}_0 + \vec{K}_s + \vec{K}$, где $\vec{k}_{0,1}$ – волновые векторы дифрагированных волн, $\vec{K}$ – волновой вектор УЗ волны; обратный вектор СР фотоупругости $|\vec{K}_s| = 2\pi / \Lambda_s$, где Λ_s – период СР.

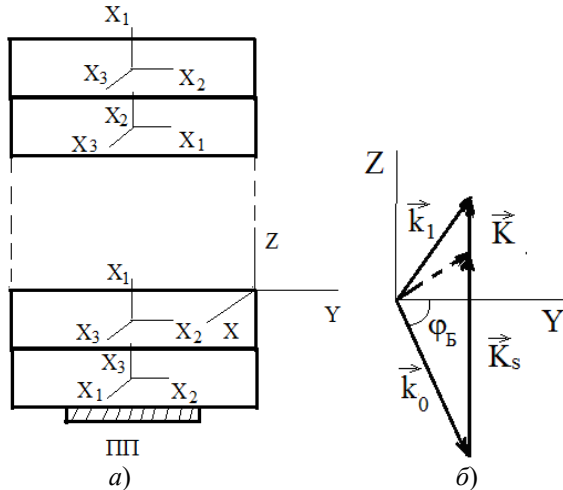


Рисунок 1.1 – а) схема СП с пьезоэлектрическим пьезопреобразователем (ПП) и соответствующей ориентацией кристаллографических осей в каждом слое; б) геометрические соотношения при АО дифракции в СП фотоупругости

($\vec{k}_{0,1}$ – волновые векторы дифрагированных волн,

$\vec{K}$ – волновой вектор УЗ волны;

$|\vec{K}_s| = 2\pi / \Lambda_s$, где Λ_s – период СП)

Положим, что ось Z системы координат XYZ ориентирована вдоль оси симметрии решетки, а ось Y совпадает по направлению с кристаллографической осью X_2 отдельного слоя. При этом плоскость АО дифракции совпадает с плоскостью YZ . Рассмотрим АО дифракцию на продольной УЗ волне, распространяющейся вдоль оси СП, сформированной с использованием кубического кристалла. При этом векторы поляризации падающей и дифрагированной световых волн ориентированы вдоль оси X (s -поляризация), либо расположены в плоскости дифракции YZ (p -поляризация). Следует заметить, что при отсутствии СП фотоупругости угол Брэгга $\varphi'_B \approx K / 2k_1$; при наличии СП угол Брэгга $\varphi_B \approx \arcsin(K + K_s) / 2k_1$. При этом $\varphi'_B \ll \varphi_B$, причем $\varphi'_B \ll 1$, $\varphi_B \leq 1$. Изменение тензора диэлектрической проницаемости для дифрагированных волн s - и p -поляризации можно представить в виде [2]:

$$\Delta \varepsilon_{s,p} = -\varepsilon^2 p_{\text{эф}}^{s,p} \sum_{-\infty}^{+\infty} U_{33} a_m \times \exp\{i[(mK_s + K)z - \Omega t]\}, \quad (1.1)$$

где ε – диэлектрическая проницаемость невозмущенного кристалла, U_{33} – компонента тензора деформаций УЗ волны, $p_{\text{эф}}^s = \frac{1}{3}(p_{12} - p_{11} + 2p_{44})$,

$p_{\text{эф}}^p = \frac{2}{3}(p_{11} - p_{12} - 2p_{44})$ [5], причем p_{11}, p_{12}, p_{44} –

фотоупругая постоянная; коэффициенты a_m даются соотношениями

$$a_m = \begin{cases} -\frac{i}{\pi m}, & \text{при } m - \text{нечетных,} \\ 0, & \text{при } m - \text{четных.} \end{cases}$$

Пусть при неколлинеарном АО взаимодействии в слое из СП фотоупругости УЗ волна распространяется вдоль границ слоя. Плоская УЗ волна с вектором смещения

$$\vec{U} = \vec{U}_0 \exp[i(\vec{K}z - \Omega t)]$$

($\vec{K}$ – волновой вектор, модуль которого

$K = \frac{\Omega}{v} = \frac{2\pi}{\Lambda}$ выражается через циклическую частоту Ω и фазовую скорость v или длину волны Λ) возбуждается в направлении оси Z и заключена в пределах слоя, локализованного в пространстве между плоскостями $y = 0$ и $y = h$ (рисунок 1.2). Продольная УЗ волна индуцирует периодическое в пространстве и времени изменение тензора диэлектрической проницаемости $\Delta \varepsilon_{ij}$, которое связано с упругими деформациями

$$U_{ik} = \frac{1}{2}(\nabla_k U_i + \nabla_i U_k)$$

и фотоупругими постоянными материала p_{ijkl} известными соотношениями: $\Delta \varepsilon_{ij} = -\varepsilon_2^2 p_{ijkl} U_{kl}$, где ε_2 – диэлектрическая проницаемость вещества плоскопараллельного слоя. Начало системы координат XYZ расположено на левой границе слоя, а ось X перпендикулярна плоскости падения.

Предположим, что плоская световая волна, частота которой $\omega \gg \Omega$ и волновой вектор $\vec{k}_1 = \vec{e}_x k_{1x} + \vec{e}_y k_{1y}$ ($\vec{e}_x \parallel OX$, $\vec{e}_y \parallel OY$ – единичные векторы, $k_{1y} = kn_1 \cos \varphi_1$, $k_{1z} = kn_1 \sin \varphi_1$, $k = 2\pi / \lambda$ (λ – длина световой волны в вакууме), $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}$ имеет линейную s - или p -поляризацию по отношению к плоскости дифракции YZ и падает на грань $y = 0$ под углом φ_1 к её нормали. Угол преломления $\varphi_2 = \arcsin(\sqrt{\varepsilon_1 / \varepsilon_2}) \sin \varphi_1$ равен углу Брэгга, то есть $\varphi_2 = \varphi_B = \arcsin(K / 2k_2)$, где $k_2 = kn_2$ ($n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$). Плоскопараллельный слой толщиной h с показателем преломления n_2 расположен между однородными прозрачными средами с показателями преломления n_1 и n_3 . Начало системы координат XYZ расположено на входной границе слоя $y = 0$, а ось X перпендикулярна плоскости падения. Схема отражения света от модулированного ультразвуком плоскопараллельного слоя в условиях полного внутреннего отражения (ПВО) от подложки ($\varphi_3 \approx 90^\circ$) представлена на рисунке 1.2.

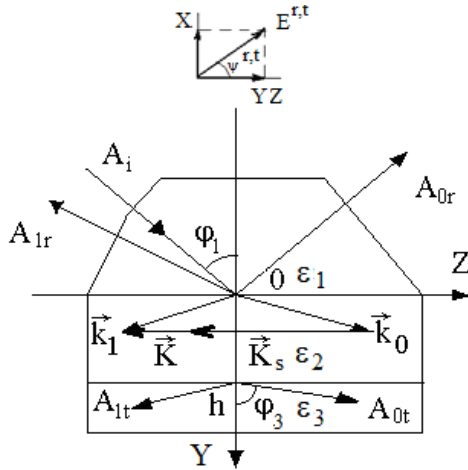


Рисунок 1.2 – Схема отражения световых волн от плоскопараллельного слоя (ϵ_2), расположенного между покрытием (ϵ_1) и подложкой (ϵ_3) (структура: YIG-GaAs-As₂Se₃ [6], A_i – амплитуда падающей световой волны, $A_{0,1r}$ – амплитуды отраженных дифрагированных волн, $A_{0,1t}$ – амплитуды прошедших дифрагированных волн)

Волновое уравнение, описывающее поведение световой волны, приведено в [3]. Решение волнового уравнения для поля дифрагированных в слое электромагнитных волн можно записать в виде [7], [8]:

$$E = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} A_p(y) \exp \left[i \left(k_{pz} z - \omega_p t + \frac{\pi p}{2} \right) \right], \quad (1.2)$$

где

$$k_{pz} = k_{0z} + p(K + mK_s), \quad \omega_p = \omega + p\Omega, \\ p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

При $k_{0z} \approx (K + mK_s) / 2$ из совокупности световых волн (1.2) в брэгговском режиме дифракции основной вклад в поле дифрагированных волн вносят две составляющие, соответствующие дифракционным порядкам $p = 0$ и $p = -1$ [7]. Брэгговский режим дифракции возможен при значении параметра Клейна – Кука $Q \geq 1$ ($Q \approx \lambda h / n_2 (\Lambda_s + \Lambda)$), где Λ_s – период СР [6], [8]. С учётом этого, для s -поляризованных световых волн, систему уравнений связанных волн запишем в виде [7], [8]:

$$\frac{d^2 A_{0s}}{dy^2} + k_{0y}^2 A_{0s} - ik_2^2 \eta_s A_{-1s} = 0, \\ \frac{d^2 A_{-1s}}{dy^2} + k_{-1y}^2 A_{-1s} + ik_2^2 \eta_s A_{0s} = 0, \quad (1.3)$$

где

$$k_{0y} = (k_2^2 - k_{0z}^2)^{1/2}; \quad k_{-1y} = (k_2^2 - k_{-1z}^2)^{1/2}, \\ k_{0z} = k_2 \sin \varphi_2, \quad k_{-1z} \approx k_2 \sin \varphi_2;$$

$$\eta_s = n_2^2 p_{\text{эф}}^s U / (2 \cos \varphi_2),$$

$p_{\text{эф}}^s$ – эффективная фотоупругая постоянная, ответственная за рассеяние s - поляризованной волны; U – амплитуда деформации YZ волн. При дифракции p - поляризованной волны в выражениях (1.3) следует величину η_s заменить величиной $\eta_p = n_2^2 p_{\text{эф}}^p U / (2 \cos \varphi_2)$, где $p_{\text{эф}}^p$ – эффективная фотоупругая постоянная, ответственная за рассеяние p -поляризованной волны. Постоянные, характеризующие распространение дифрагированных волн в слое, находим, решая характеристическое (дисперсионное) уравнение системы уравнений (1.3). Решение этого уравнения представимо в виде:

$$k_{ys}^{\pm} = k_2 \sqrt{(1 - n_1^2 / n_2^2 \sin^2 \varphi_1) \pm \eta_s}.$$

Для падающей световой волны s -поляризации амплитудные коэффициенты отражения ($r_{0s,1s}$) и пропускания ($t_{0s,1s}$) дифрагированных волн даются соотношениями:

$$r_{0s,1s} = \Delta_{0,1}^r / \Delta, \quad t_{0s,1s} = \Delta_{0,1}^t / \Delta, \quad (1.4)$$

где

$$\Delta = 4e_{3+}e_{3-}(\alpha_{1+}^-\alpha_{1+}^+\alpha_{3+}^-\alpha_{3+}^+e_{2+}^*e_{2-}^* + \\ + \alpha_{1-}^-\alpha_{1-}^+\alpha_{3-}^-\alpha_{3-}^+e_{2+}^*e_{2-}^* - \\ - \alpha_{1+}^-\alpha_{1-}^+\alpha_{3+}^-\alpha_{3-}^+e_{2+}^*e_{2-}^* - \alpha_{1-}^-\alpha_{1+}^+\alpha_{3-}^-\alpha_{3+}^+e_{2+}^*e_{2-}^*), \\ \Delta_0^r = 2e_{3+}e_{3-}[(\alpha_{1-}^-\alpha_{1+}^+ + \alpha_{1+}^-\alpha_{1-}^+) \times \\ \times (\alpha_{3+}^+\alpha_{3+}^-e_{2-}^*e_{2+}^* + \alpha_{3-}^-\alpha_{3-}^+e_{2+}^*e_{2-}^*) - \\ - (\alpha_{1-}^-\alpha_{1-}^+ + \alpha_{1+}^-\alpha_{1+}^+)(\alpha_{3+}^-\alpha_{3+}^+e_{2+}^*e_{2-}^* + \alpha_{3-}^-\alpha_{3-}^+e_{2+}^*e_{2-}^*)], \\ \Delta_1^r = 4e_{3+}e_{3-}[(b_1^+ - b_1^-)(\alpha_{3-}^-\alpha_{3-}^+e_{2+}^*e_{2-}^* - \alpha_{3+}^+\alpha_{3+}^-e_{2+}^*e_{2-}^*) - \\ - (b_1^+ + b_1^-)(\alpha_{3-}^-\alpha_{3-}^+e_{2+}^*e_{2-}^* - \alpha_{3+}^+\alpha_{3+}^-e_{2+}^*e_{2-}^*)], \\ \Delta_{0,1}^t = \pm 8e_{3+}[b_3^+(\alpha_{1+}^-\alpha_{3+}^-e_{2-}^* - \alpha_{1-}^-\alpha_{3-}^-e_{2-}^*) \pm \\ \pm b_3^-(\alpha_{1+}^+\alpha_{3+}^+e_{2+}^* - \alpha_{1-}^+\alpha_{3-}^+e_{2+}^*)].$$

Здесь введены обозначения:

$$\alpha_{(1,3)\pm}^{\pm} = (1 \pm b_{1,3}^{\pm}), \quad b_{1,3}^{\pm} = k_{ys}^{\pm} / (kn_{1,3} \cos \varphi_{1,3}), \\ e_{2\pm}^{s,p} = \exp(ik_{ys,p}^{\pm} h), \quad e_{3\pm} = \exp(ik_{3y}^{0,-1} h), \\ k_{3y}^{0,-1} = (k^2 n_3^2 - k_{0z,-1z}^2)^{1/2}.$$

Звездочка (“*”) обозначает комплексное сопряжение. При исследовании дифракции волн p -поляризации в (1.4) следует выполнить замены: $\eta_s \rightarrow \eta_p$, $n_{1,2,3} \cos \varphi_{1,2,3} \rightarrow 1 / n_{1,2,3} \cos \varphi_{1,2,3}$. Энергетические коэффициенты пропускания ($T_0^{s,p}, T_1^{s,p}$) и отражения ($R_0^{s,p}, R_1^{s,p}$) находятся из соотношений [9]:

$$R_{0,1}^{s,p} = |r_{0,1}^{s,p}|^2, \quad T_{0,1}^{s,p} = \frac{n_3 \cos \varphi_3}{n_1 \cos \varphi_1} |r_{0,1}^{s,p}|^2.$$

При отсутствии ультразвука ($\Delta n = 0$) выражения (1.1), (1.2) для коэффициентов пропускания $T_0^{s,p}$ и отражения $R_0^{s,p}$ приводят к формулам Эйри [9] и дифрагированные волны первого порядка отсутствуют ($T_1^{s,p} = R_1^{s,p} = 0$). При условии: $n_1 = n_2 = n_3$ (согласованный слой) следует полагать, что [10]

$$\begin{aligned} R_0^{s,p} &= R_1^{s,p} = 0, \quad T_0^s = \cos^2(kn_2\eta_s/2), \\ T_0^p &= \cos^2(kn_2\eta_p/2), \quad T_1^s = \sin^2(kn_2\eta_s/2), \\ T_1^p &= \sin^2(kn_2\eta_p/2). \end{aligned}$$

Коэффициенты отражения ($R_{0,1}$) и пропускания ($T_{0,1}$) дифрагированных волн при произвольном азимуте поляризации падающего на слой света (ψ_0) находим из соотношений [9]:

$$R_{0,1} = R_{0,1}^p \cos^2 \psi_{0,1}^r + R_{0,1}^s \sin^2 \psi_{0,1}^r, \quad (1.5)$$

где $\psi_{0,1}^r = \arctg(|r_{0,1}^s/r_{0,1}^p|) \tan \psi_0$.

2 Численные расчеты

Численные расчеты проводились для плоскопараллельного слоя из СР фотоупругости, модулированного продольной УЗ волной. Исследовалась АО дифракция поляризованного излучения с длиной волны $\lambda = 1,15$ мкм на продольной

УЗ волне при больших углах дифракции на комбинированной фазовой решетке: СР фотоупругости и УЗ – решетке. Предполагалось, что слой материала из кристалла арсенида галлия (GaAs) ($n_2 = 3,37$) граничит с покрытием из кристалла иттрий-железный гранат (YIG) ($n_1 = 2,89$) и подложкой их кристалла селенида мышьяка (As_2Se_3) ($n_3 = 2,22$) [5], [10]. Амплитуда тензора деформаций выражается через интенсивность I_a УЗ волны, фазовую скорость v_L продольной УЗ волны и плотность кристалла ρ в соответствии с соотношением: $U = (2I_a / \rho v_L^3)^{1/2}$; эффективные фотоупругие постоянные имеют следующие значения: $p_{\text{эф}}^s = -0,0396$, $p_{\text{эф}}^p = 0,079$ [5], [10]. При наличии поглощения слоя в выражениях (1.1)–(1.5) следует показатель преломления n_2 заменить на $n_2 + i\alpha / 2n_2k$ (α – коэффициент поглощения света).

На рисунке 2.1 представлены зависимости коэффициентов отражения дифрагированных волн нулевого (R_0) и первого (R_1) порядка в отсутствие поглощения среды (a , b) и при наличии поглощения (b , z) от амплитуды деформации U (интенсивности ультразвука) при различных толщинах слоя h в условиях полного внутреннего отражения от подложки.

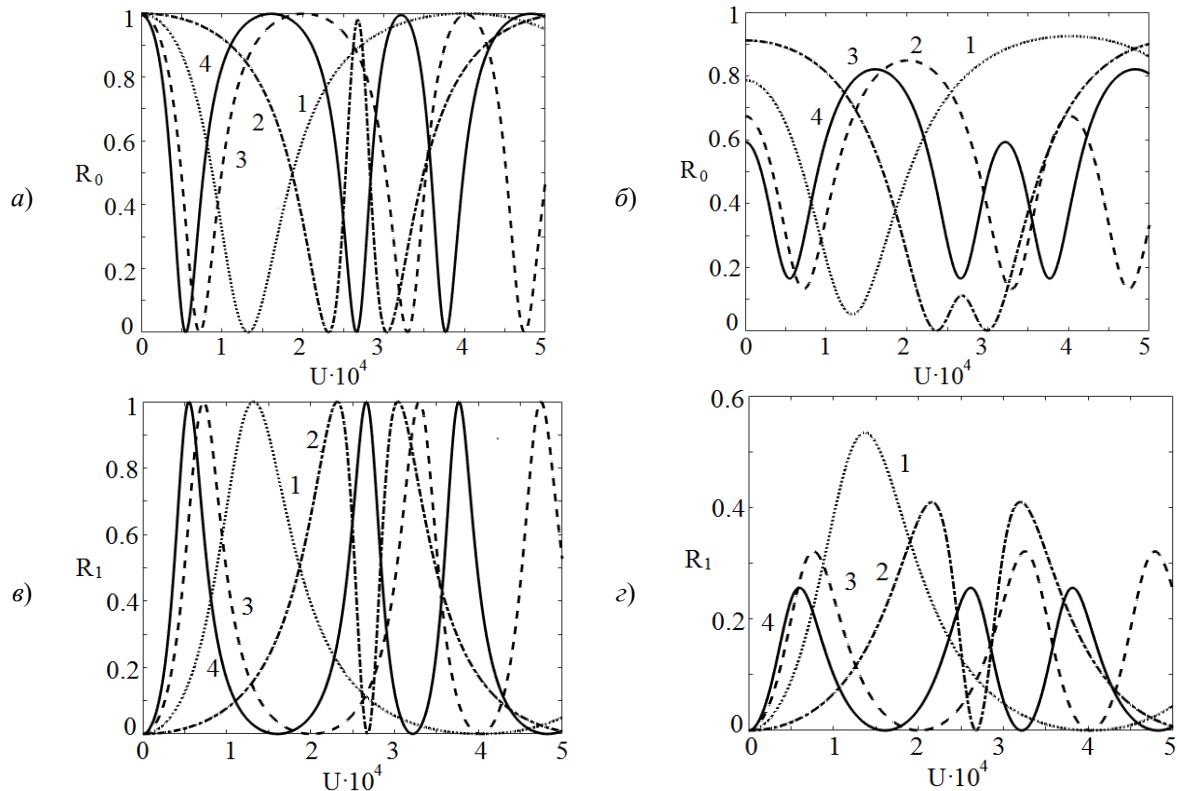


Рисунок 2.1 – Зависимость коэффициента отражения $R_{0,1}$ дифрагированной волны нулевого (a , b) и первого (c , z) дифракционного порядка от амплитуды деформации УЗ волны U при различных толщинах слоя h : 1-2, 2-3, 3-4, 4-5 мм (структура: YIG-GaAs-As₂Se₃, $\lambda = 1,15$ мкм, $n_1 = 2,89$, $n_2 = 3,37$, $n_3 = 2,22$, $\alpha = 0$ (a , c), $\alpha = 1 \text{ см}^{-1}$ (b , z), $\varphi_1 = 50,1925^\circ$, $\psi_0 = 0$)

Из рисунка 2.1 следует, что при отсутствии поглощения слоя ($\alpha = 0$) коэффициент отражения $R_{0,1}$ достигает максимального значения $R_{0,1} = 1$ при любых толщинах слоя $h = 2 \div 5$ мм. При наличии поглощения ($\alpha = 1 \text{ см}^{-1}$) коэффициент отражения R_0 уменьшаются на 10–15% при увеличении амплитуды деформации (U) УЗ волны (интенсивности ультразвука I_a). Для падающих световых волн s -поляризации ($\psi_0 = 90^\circ$) имеют место аналогичные зависимости, однако, вследствие того, что $p_{\text{эф}}^s < p_{\text{эф}}^p$, максимальное значение коэффициента отражения достигается при меньших интенсивностях ультразвука. При изменении азимута поляризации падающего света ψ_0 , при заданной толщине слоя h и интенсивности ультразвука I_a , коэффициенты отражения $R_{0,1}$ осциллируют, причем азимут поляризации отраженной волны нулевого (первого) дифракционного порядка $\psi_{0,1}'$ остается неизменным при изменении азимута поляризации падающего света ψ_0 для любых толщин слоя и интенсивностей ультразвука. При наличии поглощения слоя ($\alpha = 1 \text{ см}^{-1}$) коэффициенты отражения R_1 уменьшаются на 55–75% при изменении толщины слоя $h = 2 \div 5$ мм.

Заключение

Таким образом, для акустооптической модуляции света в плоскопараллельном слое в условиях ПВО от подложки возможно использование слоистой структуры из СР фотоупругости на основе кубического кристалла с различной ориентацией кристаллографических направлений в каждом слое. При этом для умеренных частот ультразвука $\sim 1\text{--}10$ МГц достижима значительная эффективность АО дифракции при минимальном поглощении световых волн в слое. В такой геометрии АО взаимодействия интенсивности световых волн в прошедших дифракционных порядках незначительны по сравнению с интенсивностями волн в отраженных порядках и рассмотренный режим АО дифракции может быть использован для амплитудной модуляции световых волн в режиме отражения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Басс, Ф. Г. Высоочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками / Ф. Г. Басс, А. А. Булгаков, А. П. Тетеревов. – М. : Наука, 1989. – 287 с.
2. Херман, М. Полупроводниковые сверхрешетки / М. Херман. – М. : Мир, 1989. – 240 с.
3. Вакуленко, А. В. Акустооптические свойства сверхрешеток в длинноволновом приближении / А. В. Вакуленко, Л. А. Черозатонский // ФТТ. – 1988. – Т. 30, В. 6. – С. 1641–1645.
4. Черозатонский, Л. А. Акустооптические процессы переброса в сверхрешетке / Л. А. Черозатонский // ФТТ. – 1987. – Т. 29, В. 10. – С. 3142–3143.
5. Кулак, Г. В. Обратное брэгговское рассеяние света на фазовых сверхрешетках фотоупругости / Г. В. Кулак, П. А. Хило // Известия НАН Беларуси. Сер. Физ.-мат. наук. – 1997. – № 1. – С. 105–107.
6. Акустические кристаллы. Справочник / А. А. Блистанов, В. С. Бондаренко, В. В. Чирков [и др.]; под ред. М. П. Шаскольской. – М. : Наука, 1986. – 629 с.
7. Kong, J. A. Second-order coupled-mode equations for spatially periodic media / J. A. Kong // J. Opt. Soc. Am. – 1977. – Vol. 67, № 6. – P. 825–829.
8. Кулак, Г. В. Дифракция света на ультразвуке в условиях френелевского отражения / Г. В. Кулак // Оптика и спектроскопия. – 1994. – Т. 76. – № 6. – С. 1027–1029.
9. Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М. : Наука, 1973. – 721 с.
10. Балакий, В. И. Физические основы акустооптики / В. И. Балакий, В. Н. Парыгин, Л. Е. Чирков. – М. : Радио и связь, 1985. – 279 с.

Поступила в редакцию 16.06.2026.

Информация об авторах

Кулак Геннадий Владимирович – д.ф.-м.н., профессор
Николаенко Татьяна Викторовна – к.ф.-м.н., доцент
Тозик Людмила Александровна – аспирант

МОЛЕКУЛЯРНАЯ СТРУКТУРА И МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОМПОЗИЦИОННЫХ ПОКРЫТИЙ НА ОСНОВЕ КРЕМНИЙОРГАНИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ, ОСАЖДЕННЫХ ЭЛЕКТРОННОЛУЧЕВЫМ ДИСПЕРГИРОВАНИЕМ

М. А. Ярмоленко¹, А. В. Рогачев¹, Д. Г. Пилипцов¹, А. А. Рогачев², А. С. Руденков¹

¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

²Институт химии новых материалов Национальной Академии Наук Беларуси, Минск

MOLECULAR STRUCTURE AND MECHANICAL PROPERTIES OF COMPOSITE COATINGS BASED ON ORGANOSILICON COMPOUNDS DEPOSITED BY ELECTRON-BEAM DISPERSION

M. A. Yarmolenko¹, A. V. Rogachev¹, D. G. Piliptsov¹, A. A. Rogachev², A. S. Rudenkov¹

¹Francisk Skorina Gomel State University

²Institute of Chemistry of New Materials of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk

Аннотация. Объектом исследования явились молекулярная структура и механические свойства наноразмерных трехслойных покрытий на основе кремнийорганических соединений К-42 и ПМС-400 с внешним слоем цинка, сформированные электроннолучевым диспергированием (испарением) в вакууме, их изменения при отжиге до 600° С. Показано, что молекулярная структура покрытий ПМС-400 соответствует структуре, химическому составу исходной кремнийорганической жидкости и ее заметные изменения, в отличие от покрытий К-42, регистрируются при температуре отжига выше 200° С и при нагреве до 600° С покрытие представляет собой шпильный SiO₂ слой. Отжиг покрытий К-42 + ПМС-400 + Zn при такой температуре не приводит к формированию кварцоподобной структуры, характерной для покрытий К-42 + ПМС-400, К-42, ПМС-400, что объясняется химическим взаимодействием цинка с кислородсодержащими фрагментами кремнийорганических макромолекул. Методом наноиндентирования установлены механические свойства покрытий, их значения на различных расстояниях от поверхности в зависимости от температуры отжига. Показано, что при нагреве покрытия 600° С К-42 + ПМС-400 + Zn, в отличие от однокомпонентных покрытий, регистрируется существенное снижение твердости и модуля упругости, что согласуется с результатами исследования молекулярной структуры.

Ключевые слова: кремнийорганические покрытия, электроннолучевое диспергирование, термическая обработка, молекулярная структура, механические свойства.

Для цитирования: Молекулярная структура и механические свойства композиционных покрытий на основе кремний-органических соединений, осажденных электроннолучевым диспергированием / М. А. Ярмоленко, А. В. Рогачев, Д. Г. Пилипцов, А. А. Рогачев, А. С. Руденков // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 3 (68). – С. 35–40. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_35. – EDN: NPJTON

Abstract. The object of the study was the molecular structure and mechanical properties of nanosized three-layer coatings based on organosilicon compounds K-42 and PMS-400 with an outer zinc layer, formed by electron beam dispersion (evaporation) in a vacuum, their changes during annealing up to 600° C. It is shown that the molecular structure of the PMS-400 coatings corresponds to the structure and chemical composition of the original organosilicon liquid and its noticeable changes, unlike K-42 coatings, are recorded at annealing temperatures above 200° C, and when heated to 600° C, the coating is a cross-linked SiO₂ layer. Annealing the K-42 + PMS-400 + Zn coating at this temperature does not result in the formation of the quartz-like structure characteristic of K-42 + PMS-400, K-42, and PMS-400 coatings. This is explained by the chemical interaction of zinc with oxygen-containing fragments of organosilicon macromolecules. Nanoindentation was used to determine the mechanical properties of the coatings and their values at various distances from the surface, depending on the annealing temperature. It was shown that when heating the K-42 + PMS-400 + Zn coating to 600° C, in contrast to single-component coatings, a significant decrease in hardness and elastic modulus is recorded, which is consistent with the results of molecular structure studies.

Keywords: organosilicon coatings, electron beam dispersion, heat treatment, molecular structure, mechanical properties.

For citation: Molecular structure and mechanical properties of composite coatings based on organosilicon compounds deposited by electron-beam dispersion / M. A. Yarmolenko, A. V. Rogachev, D. G. Piliptsov, A. A. Rogachev, A. S. Rudenkov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 3 (68). – P. 35–40. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_35 (in Russian). – EDN: NPJTON

Введение

Использование метода электроннолучевого диспергирования при осаждении кремнийорга-

нических покрытий открывает широкие возможности их легирования различными соединениями независимо от их теплофизических свойств, что

позволяет значительно расширить область практического использования [1]. Реализация данного метода имеет целый ряд технологических особенностей, обусловленных процессами взаимодействия потока электронов с материалом мишени, протекающими при этом изменениями химического состава и молекулярной структуры. Кинетические параметры данных процессов в значительной степени зависят от природы кремнийорганического соединения, режима и условий последующей, эффективно применяемой для регулирования свойств покрытий термической обработки.

Так, установлено, что высокотемпературный отжиг (более 400°С) инициирует отщепление углеводородных фрагментов кремнийорганических соединений, что в итоге сопровождается образованием кварцеподобной структуры [2]. Воздействие электронного луча на кремнийорганическую мишень вызывает не только образование летучих продуктов диспергирования, но и сопровождается образованием на ее поверхности сшитого слоя, устойчивого к термическому и радиационному воздействию. Химические реакции в мишени между продуктами разложения компонентов в значительной степени влияют на реакционную активность летучих продуктов диспергирования и способны снижать скорость нанесения. Данные особенности создают проблемы с достоверным прогнозированием структуры осаждаемого покрытия, их свойств. При этом состав, химическая активность летучих продуктов изменяется в процессе диспергирования, что определяет формирование покрытия с неоднородной молекулярной структурой. В [3] с целью повышения гомогенности осаждаемого слоя предлагается диспергированию подвергать мишень с малым, периодически восстанавливающим объемом диспергируемого материала. Следует отметить, что присутствие в объеме покрытия низкомолекулярных соединений, образующихся при осаждении продуктов диспергирования смесевых мишеней, особенно содержащих металлоорганические соединения, а также в результате полимеризации адсорбированных фрагментов, способствует образованию пор и снижению их плотности, является важной технологической проблемой.

Одним из вариантов снижения пористости покрытий и, соответственно, повышения их механических свойств является формирование слоистой структуры путем последовательного осаждения кремнийорганических соединений с несколько отличающимися кинетическими параметрами полимеризации, обеспечивающими выход низкомолекулярных соединений из объема покрытия при термообработке.

Формирование многослойных покрытий позволяет реализовать их полифункциональность. Так, использование в качестве внешнего слоя

металлосодержащих органических и неорганических соединений, металлов и оксидов позволяет придать им антибактериальные свойства, более высокую отражательную способность, радиационную стойкость. Такой технологический прием может быть реализован на примере трехслойного покрытия, содержащего слои из продуктов диспергирования кремнийорганического соединений К-42, смолы ПМС-400 и слоя Zn, толщиной соответственно 3000 Гц, 1000 Гц, 500 Гц.

Средний слой на основе ПМС-400 выбран с учетом того, что его высокотемпературный отжиг, в отличие от покрытий на основе К-42, не сопровождается образованием сшитого слоя, что облегчает диффузию образующихся при полимеризации К-42 низкомолекулярных продуктов и снижение в результате пористости покрытия. При этом присутствие в составе ПМС-400 достаточно легко отщепляющихся при нагреве метильных групп $-CH_3$ способствует повышению адгезионного взаимодействия между металлосодержащим и кремнийорганическим слоями. Установление молекулярной структуры, механических свойств такого покрытия, их изменений при нагревании является основной целью настоящей работы.

1 Методика эксперимента

Покрытия на основе кремнийорганических соединений формировали из летучих продуктов электроннолучевого диспергирования смолы К-42 (олигометилфенилсилоксана), кремнийорганической жидкости ПМС-400 по методике, приведенной в [1], при использовании потока электронов с энергией 800–1600 эВ и плотностью 0,01–0,03 А/см². Осаждение внешнего слоя осуществлялось путем испарения порошка цинка потоком электронов в едином технологическом цикле. В качестве подложек для нанесения покрытий при проведении ИК-спектроскопических исследований в проходящем излучении были использованы пластины NaCl, при оценке механических свойств – кварцевые пластины. Сформированные покрытия подвергались термообработке в атмосфере воздуха при температуре до 600°С в течение 60 минут.

Исследование молекулярной структуры нанесенных покрытий производили на ИК-Фурье спектрофотометре Vertex-70 (Bruker) с использованием стандартной МНПВО приставки (многократное нарушенное полное внутреннее отражение). Сканирование проводили в диапазоне (4000÷500) см⁻¹ с разрешением 4 см⁻¹. В качестве отражающей призмы применяли кристалл KRS-5 (угол при основании равен 45°). Для проведения МНПВО спектроскопических исследований покрытия осаждались на пленки металлизированного лавсана. Обработку полученных спектров проводили по стандартной методике с помощью программы OPUS.

Измерение механических параметров покрытий проводили с использованием наноиндентора «НаноСкан 4D» производства ФГБНУ «ТИСНУМ» (г. Троицк, РФ). В качестве индентора использовали алмазную трехгранную пирамидку Берковича. Выбор в качестве индентора пирамиды Берковича определяется минимальным влиянием геометрии индентора на достоверность получаемых результатов, а также простотой калибровки податливости системы и формы индентора, в отличие от использования инденторов другой формы. Измерения проводили в режиме динамического механического анализа (DMA), в процессе которого на поступательное внедрение индентора накладываются гармонические колебания с частотой 20 Гц и амплитудой колебаний порядка 3 нанометров. Это вызывает формирование множества циклов нагрузки-разгрузки, в каждом из которых вычисляются значения модуля упругости и твердости. Максимальная нагрузка составляла 200 мН. С помощью данного метода определялось изменение твердости и модуля упругости с разрешением по глубине 3 нм.

Методом наноиндентирования определены значения твердости и модуля упругости. Приведенные значения твердости H (ГПа) и модуля упругости E (ГПа) представляют собой усредненные значения, полученные в результате 15 независимых экспериментов при индентировании в режиме с линейной разверткой прикладываемой силы нагружения.

В качестве дополнительных параметров выбраны коэффициент упругого восстановления, характеризующий относительный вклад в изменение формы отпечатка (глубины и линейных размеров) упругих свойств материала, а также стойкость к упругой деформации (индекс пластичности, H/E) и стойкость к пластической деформации (H^3/E^2) [62], [63].

2 Результаты и их обсуждение

Особенности молекулярной структуры покрытий на основе К-42 представлены в [2], [4]. Показано, что в сравнении со структурой исходной кремнийорганической смолы макромолекулы покрытия имеют меньшую концентрацию метильных заместителей. При этом молекулярная структура однокомпонентных покрытий, сформированных в условиях плазменной обработки летучих фрагментов разрушения смолы, характеризуются более высоким содержанием углеводородных заместителей. Отжиг кремнийорганических покрытий при температуре 200°С сопровождается формированием кварцеподобной структуры.

Анализ молекулярной структуры покрытий ПМС-400 методом ИК-спектроскопии показал ее соответствие в значительной степени структуре, химическому составу исходной

кремнийорганической жидкости. В ИК-спектре покрытий на основе ПМС-400 присутствуют следующие полосы поглощения: 1260 см^{-1} – симметричные деформационные колебания Si – CH₃ групп (Si – (CH₃)₂); 850, 800 и 767 см^{-1} – Si – (CH₃)₂ [5], Si – CH₃ [6] и Si – C [7], соответственно. Поглощение при 1087 и 1020 см^{-1} можно соотнести с присутствием в тонком слое SiO₂-подобных структур и Si – O – Si сшивок [6], [7]. Валентные асимметричные C – H колебания метильных групп в ИК-спектре проявляются при 2960 см^{-1} .

При нагреве покрытия до температуры 200°С регистрируется незначительное непрерывное снижение оптической плотности полос поглощения и ИК-спектр покрытия после отжига полностью совпадает с ИК-спектром покрытия до термообработки. Наиболее заметные изменения структуры покрытия проявляются при дальнейшем его нагреве (рисунок 2.1).

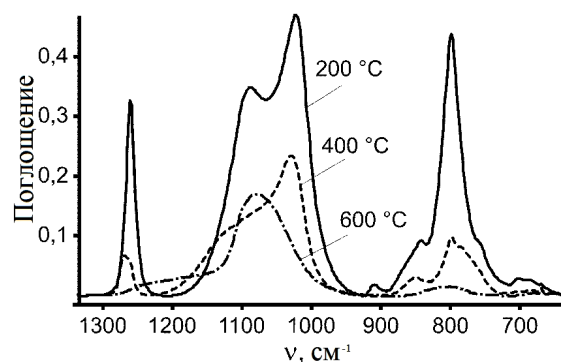


Рисунок 2.1 – ИК-спектры покрытия на основе ПМС-400 после высокотемпературного отжига (60 мин)

Согласно данным ИК-спектроскопии такой нагрев кремнийорганического тонкого слоя сопровождается отщеплением метильных заместителей, трансформацией сшитой сетчатой структуры в кварцеподобную. После отжига при 600°С покрытие представляет собой сшитый SiO₂ слой, практически полностью лишенный углеводородных заместителей.

Количественные параметры, характеризующие изменения молекулярной структуры при отжиге покрытий К-42, ПМС-400 и К-42 + ПМС-400 + Zn, представлены в таблице 2.1. В качестве внутреннего стандарта была выбрана полоса поглощения при 1135 см^{-1} (O – Si – O).

Провести ИК-анализ не термообработанной слоевой системы К-42 + ПМС-400 + Zn не представляется возможным, так как внешний металлический слой является непрозрачным для ИК-излучения. После отжига при 450°С цинк окисляется и становится прозрачным. Согласно ИК-исследованиям, нагрев слоевой системы не приводит к росту доли O – Si – O сшивок.

Таблица 2.1 – Результаты ИК-анализа кремнийорганических покрытий

Тип покрытия	Тип химических связей					
	Si – O – Si cage (1100 см ⁻¹)	SiO ₂ -like structure (1065 см ⁻¹)	Si – O – Si network (1025 см ⁻¹)	Si – O – C (997 см ⁻¹)	Si – (CH ₃) ₂ (850 см ⁻¹)	Si – CH ₃ (800 см ⁻¹)
К-42	1,74	1,80	1,78	0,90	0,29	0,94
К-42 + отжиг	1,14	1,96	3,29	0,50	0,30	0,69
ПМС-400	3,05	3,14	4,94	0,64	0,83	3,88
ПМС-400 + отжиг	0,80	2,22	2,02	0,19	0,23	0,32
К-42 + ПМС-400 + Zn (отжиг, 450° C)	1,28	1,83	1,80	0,90	0,11	0,34
К-42 + ПМС-400 + Zn (отжиг, 600° C)	0,87	1,72	–	3,80	1,03	–

Таблица 2.2 – Механические характеристики покрытий

Тип покрытия	H_{cp} , ГПа	E_{cp} , ГПа	H/E	H^3/E^2	η_{IT} , %		
					P_1 , мН	P_2 , мН	P_3 , мН
К-42 (450° C)	3,98	54,3	0,073	0,021	37,5	38,6	39,5
К-42 + ПМС + Zn	3,11	56,2	0,055	0,009	29,7	30,5	32,3
К-42 + ПМС + Zn (450° C)	2,45	34,7	0,071	0,012	14,5	31,3	27,3
К-42 + ПМС + Zn (600° C)	1,23	28,1	0,043	0,002	27,8	27,1	20,2

В слоевой системе снижено и содержание углеводородных фрагментов в сравнении с покрытиями на основе кремнийорганической смолы и жидкости после отжига. Более высокая температура отжига сопровождается дополнительным разрушением O – Si – O сшивок. В молекулярной структуре кремнийорганической составляющей трех-слойного покрытия отсутствуют сшивки типа «сетка». Наблюдается рост содержания Si – O – C и Si – OH (967 см⁻¹) связей. В ИК-спектре происходит смещение поглощения в область более низких значений волновых чисел (рисунок 2.2).

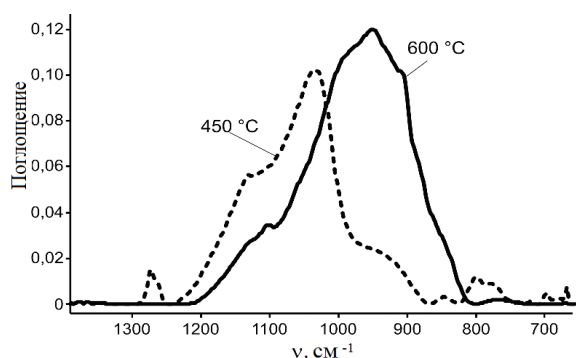


Рисунок 2.2 – Влияние температуры отжига на ИК-спектр трехслойного покрытия К-42 + ПМС-400 + Zn

Таким образом, отжиг покрытия К-42 + ПМС-400 + Zn не приводит к формированию кварцеподобной структуры, характерной для покрытий К-42 + ПМС-400, К-42, ПМС-400. Наиболее вероятным объяснением данного эффекта является проявление химического взаимодействия цинка с кислородсодержащими фрагментами кремнийорганических макромолекул

и разрушение сшитой структуры кремнийорганического соединения.

Данные структурные особенности покрытий после термообработки сказываются на их механических свойствах, определенных методом наноиндентирования (рисунки 2.3, 2.4, таблица 2.2). Установленные зависимости изменения глубины индентирования от приложенной нагрузки (кривые нагружения-разгружения) для покрытий при различных нагрузках использовались для определения величины максимальной глубины индентирования h_{max} и остаточной глубины отпечатка Δh при трех различных значениях максимальной нагрузки, согласно которых рассчитывали коэффициент упругого восстановления. Данные нагрузки на индентор обеспечивали максимальные глубины вдавливания порядка 40 нм, 100 нм и 150 нм, что позволило определить упругие свойства в различных поверхностных слоях.

Однокомпонентные покрытия на основе кремнийорганической смолы и кремнийорганической жидкости перед измерением подвергались отжигу при 450° C. Твердость покрытия на основе кремнийорганической смолы К-42 в среднем составляет 3,98 ГПа (рисунок 2.3, а). Твердость покрытий на основе ПМС не определялась, так как его толщина соизмерима с глубиной внедрения индентора.

Анализ представленных зависимостей твердости и модуля упругости (рисунки 2.3 и 2.4) показывает, что для них, независимо от состава покрытия, характерно монотонное снижение значений в слое толщиной до 30..60 нм и в объемных слоях регистрируются относительно незначительные их изменения.

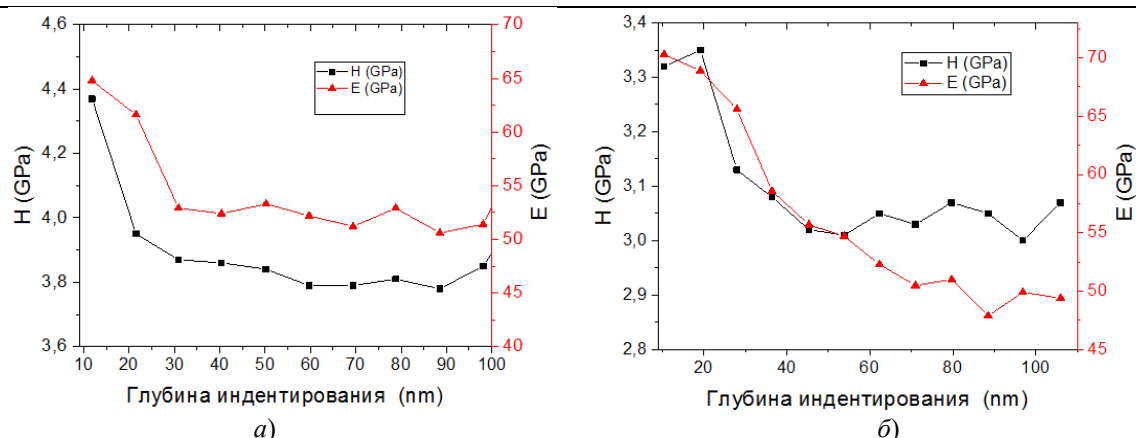


Рисунок 2.3 – Зависимость твердости и модуля упругости от глубины индентирования покрытия К-42 после отжига при 450° С (а), К-42 + ПМС-400 + Zn до отжига (б)

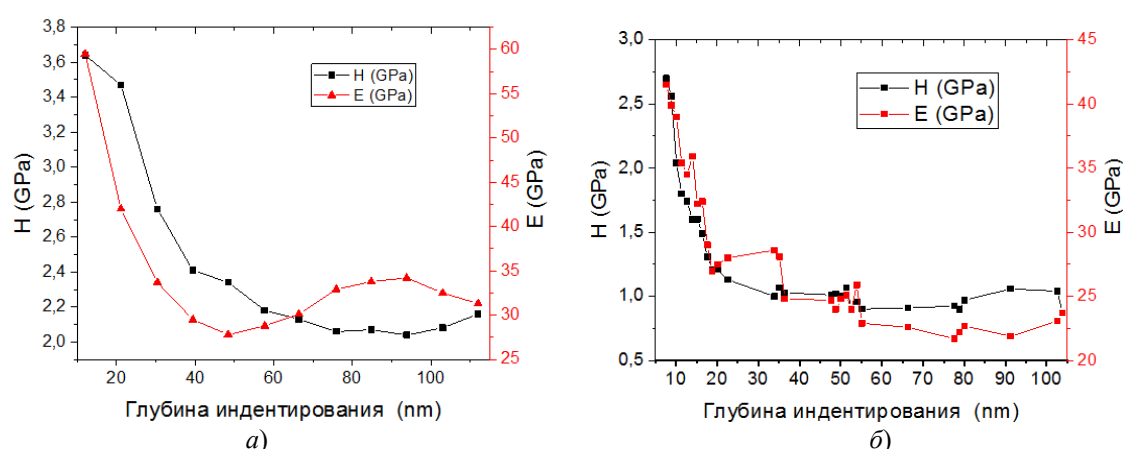


Рисунок 2.4 – Зависимость твердости и модуля упругости трехслойного покрытия К-42 + ПМС-400 + Zn от глубины индентирования после отжига при 450° С (а), 600° С (б)

Снижение модуля упругости в объемных слоях покрытия свидетельствует о повышении их эластичности, а заметные немономонные изменения его значения обусловлены неоднородностью и пористостью объемных слоев [8].

Твердость покрытия, сформированного последовательным нанесением слоев на основе К-42, ПМС и Zn и не подвергнутого отжигу, заметно ниже твердости покрытия на основе кремнийорганической смолы (рисунок 2.3, б). Снижение твердости обусловлено присутствием в покрытии среднего слоя на основе кремнийорганической жидкости ПМС-400. Отжиг при 450° С сопровождается снижением твердости трехслойного покрытия до 2,45 ГПа (рисунок 2.4, а). При этом, согласно результатам ИК-исследования, термообработка не приводит к формированию сшитой структуры. Снижение доли сшитых структур в кремнийорганическом компоненте трехслойного покрытия, образование структурных дефектов и является основной причиной снижения твердости.

При температуре отжига покрытия 600° С регистрируется дальнейшее существенное

снижение твердости и модуля упругости (рисунок 2.4, б), что подтверждает установленное при анализе молекулярной структуры методом ИК-спектроскопии влияние термически инициируемых взаимодействий цинка с кремнийорганическими фрагментами и вызванные этими процессами затруднения в формировании кварцеподобных структур.

Исследованные тонкие слои характеризуются индексом пластичности H/E , лежащим в диапазоне от 0,05 до 0,08, характерном для мелкокристаллических и наноразмерных структур [9], [10]. С ростом температуры отжига трехслойных покрытий наблюдается нелинейное изменение этого отношения. Это связано со структурными превращениями, обусловленными химическим межслойным взаимодействием, процессами окисления компонентов покрытия кислородом воздуха. Установленные высокие значения H , E , H/E и коэффициента упругого восстановления η_L анализируемых кремнийорганических покрытий дают основание прогнозировать их высокую износостойкость при трении [11].

Заключение

Определены особенности молекулярной структуры и механические свойства композиционных кремнийорганических покрытий К-42 + ПМС-400 + Zn, их изменения при нагревании. Методом ИК-спектроскопии показано, что молекулярная структура покрытий, осажденных электроннолучевым диспергированием ПМС-400, соответствует структуре и химическому составу исходной кремнийорганической жидкости. Заметные изменения структуры покрытий ПМС-400, в отличие от покрытий К-42, регистрируются при температуре отжига выше 200° С, и при нагреве до 600° С покрытие представляет собой сшитый SiO₂ слой, практически полностью лишенный углеводородных заместителей. Отжиг покрытия К-42 + ПМС-400 + Zn при такой температуре не приводит к формированию кварцеподобной структуры, характерной для покрытий К-42 + ПМС-400, К-42, ПМС-400. Наиболее вероятным объяснением данного эффекта является проявление химического взаимодействия цинка с кислородсодержащими фрагментами кремнийорганических макромолекул и возникающие при этом ограничения в формировании сшитой структуры кремнийорганического соединения.

Методом наноиндентирования установлены механические свойства покрытий, их значения по толщине слоя и зависимость от температуры отжига. Установлено, что при температуре отжига 600° С покрытия К-42 + ПМС-400 + Zn, в сравнении с однокомпонентными покрытиями К-42 и ПМС-400, регистрируется существенное снижение твердости и модуля упругости, что согласуется с результатами ИК-спектроскопии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Микро- и нанокомпозиционные полимерные покрытия, осаждаемые их активной газовой фазы / М. А. Ярмоленко, А. А. Рогачев, П. А. Лучников [и др.]. – М. : Радиотехника, 2016. – 424 с.
2. Влияние плазменной обработки покрытий на основе кремнийорганических полимеров, осажденных методом электроннолучевого диспергирования, на их структуру и морфологию / М. А. Ярмоленко, О. А. Саркисов, Имин Лю, А. В. Рогачев // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 1 (46). – С. 38–43.
4. Способ получения полимерного покрытия : а. с. 1695568 СССР : МПК B05D 1/02 / А. В. Рогачев, В. П. Казаченко, В. П. Михайлов, Б. А. Камарицкий, В. Н. Спектор ; заявитель Гомельский государственный университет. – № 4690382 ; заявл. 10.05.1989 ; опубл. 15.11.1991, Бюл. № 42.
4. Особенности деградации полимерных материалов при воздействии коротковолнового лазерного излучения / М. А. Ярмоленко, А. А. Рогачев,

Имин Лю [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 1 (50). – С. 49–54.

5. *Polysiloxane-Modified Mesoporous Materials* / K. Noble, M. L. P. M. A. S. Seddon, A. B. Seddon, K. M. K. Swamy // *Journal of Sol-Gel Science and Technology*. – 2000. – Vol. 19. – P. 807–810.

6. *Handke, M. Siloxane and silsesquioxane molecules – Precursors for silicate materials* / M. Handke, A. Kowalewska // *Spectrochimica Acta Part A: Molecular and Biomolecular Spectroscopy*. – 2011. – Vol. 79. – P. 749–757.

7. *The role of organoclay on the properties of Polymethylsilsesquioxane: A systematic study* / A. S. Alex, A. K. Mohanty, A. K. Bhowmick, S. K. Nayak // *Journal of Macromolecular Science, Part A: Pure and Applied Chemistry*. – 2017. – Vol. 54, № 12. – P. 885–893.

8. СТБ 2495-2017. *Контроль неразрушающий. Определение физико-механических характеристик конструкционных материалов методами индентирования*. – Введ. 01.09.2017. – Минск : БелГИСС : Госстандарт, 2017. – 40 с. – (Государственный стандарт Республики Беларусь).

9. *Lawn, B. R. Elastic recovery at hardness indentations* / B. R. Lawn, V. R. Howes // *Journal of Materials Science*. – 1981. – Vol. 16. – P. 147–151.

10. *Горбань, В. Ф. Идентификация структурного состояния материалов методом автоматического индентирования* / В. Ф. Горбань, Э. П. Печковский, С. А. Фирстов // *Наноструктурные материалы : сборник докладов Харьковской нанотехнологической ассамблеи*. – Харьков, 2007. – Т. 1. – С. 52–55.

11. *Nanoindentation measurements on modified diamond-like carbon thin films* / N. Dwivedi, S. Kumar, S. A. R. Hashmi, C. M. S. Rauthan // *Applied Surface Science*. – 2011. – Vol. 257. – P. 9953–9959.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках НИР 26-18/1 «Разработка основ плазмохимической технологии формирования и состава наноразмерных композиционных гидрофобных покрытий на основе кремнийорганических полимеров с высокими антибактериальными и механическими свойствами», комплексное задание 2.9.1 ГПНИ «Современное материаловедение, перспективные материалы и новые технологии».

Поступила в редакцию 15.06.2026.

Информация об авторах

Ярмоленко Максим Анатольевич – д.т.н., профессор
Рогачев Александр Владимирович – чл.-корр. НАН Беларуси, д.х.н., профессор
Пилипцов Дмитрий Геннадьевич – д.т.н., доцент
Рогачев Александр Александрович – чл.-корр. НАН Беларуси, д.т.н., профессор
Руденков Александр Сергеевич – к.т.н., доцент

О НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЯХ СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ ГРУПП, ИХ w -РАСШИРЕНИЯХ И НЕКОТОРЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

А. Ф. Васильев¹, Т. И. Васильева²

¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

²Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

ON SATURATED FORMATIONS OF SUPERSOLUBLE GROUPS, THEIR w -EXTENSIONS AND SOME APPLICATIONS

A. F. Vasil'ev¹, T. I. Vasil'eva²

¹Francisk Skorina Gomel State University

²Belarusian State University of Transport, Gomel

Аннотация. Пусть t – некоторое натуральное число. Подгруппа H группы G называется $K-P_t$ -субнормальной в G , если существует цепь подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{n-1} \leq H_n = G$ такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $|H_i : H_{i-1}|$ является некоторым простым числом p и $p-1$ не делится на $(t+1)$ -ые степени простых чисел для каждого $i = 1, \dots, n$. Через $\mathfrak{U}_t^0$ и $w\mathfrak{U}_t^0$ обозначаются класс сверхразрешимых групп, соответственно класс всех групп, в которых каждая силовская подгруппа является $K-P_t$ -субнормальной. В работе доказаны критерии принадлежности группы этим классам, найдены приложения $w\mathfrak{U}_t^0$ к группам, являющимися произведениями $K-P_t$ -субнормальных подгрупп.

Ключевые слова: насыщенная формация, сверхразрешимая группа, $K-P_t$ -субнормальная подгруппа.

Для цитирования: Васильев, А. Ф. О насыщенных формациях сверхразрешимых групп, их w -расширениях и некоторых приложениях / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 3 (68). – С. 41–45. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_41. – EDN: OGDMSN

Abstract. Let t be a chosen positive integer. A subgroup H of G is said to be $K-P_t$ -subnormal in G if there exists a chain of subgroups $H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{n-1} \leq H_n = G$ such that either $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$ or $|H_i : H_{i-1}|$ is some prime p and $p-1$ is not divisible by $(t+1)$ st powers of primes for each $i = 1, \dots, n$. By $\mathfrak{U}_t^0$ and $w\mathfrak{U}_t^0$ we denote the class of supersoluble groups, respectively, the class of all groups in which every Sylow subgroup is $K-P_t$ -subnormal. In this paper, we prove criteria for a group to belong to these classes and find applications of $w\mathfrak{U}_t^0$ to groups that are products of $K-P_t$ -subnormal subgroups.

Keywords: saturated formation, supersoluble group, $K-P_t$ -subnormal subgroup.

For citation: Vasil'ev, A. F. On saturated formations of supersoluble groups, their w -extensions and some applications / A. F. Vasil'ev, T. I. Vasil'eva // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 3 (68). – P. 41–45. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_41 (in Russian). – EDN: OGDMSN

Введение

В работе все группы предполагаются конечными. Среди насыщенных формаций наряду с формацией всех нильпотентных групп в теории групп и их приложениях важную роль играет формация $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп (см., например, [1]). В работах [2], [3] был разработан метод изучения сверхразрешимых групп и их обобщений путем введения понятий P -субнормальности и $K-P$ -субнормальности. Подгруппа H группы G называется: P -субнормальной в G , если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{n-1} \leq H_n = G \quad (0.1)$$

такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ является простым числом для каждого $i = 1, \dots, n$; $K-P$ -субнормальной в G ,

если существует цепь подгрупп (0.1) такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $|H_i : H_{i-1}|$ является простым числом для каждого $i = 1, \dots, n$.

Субнормальная подгруппа разрешимой группы является P -субнормальной, в произвольной группе это не всегда верно. Очевидно, что субнормальная подгруппа любой группы является $K-P$ -субнормальной.

В последние годы понятия P -субнормальной и $K-P$ -субнормальной подгрупп нашли приложения в работах многих авторов к решению различных задач теории групп (см., например, [4]–[10]).

В работе [11] рассматривалась задача исследования вложений подгрупп в группу, занимающих промежуточное положение между

субнормальными и K - P -субнормальными подгруппами и обладающих общими с ними свойствами (инвариантность при гомоморфизмах, транзитивность и др.).

Определение 0.1 [11]. Пусть t – фиксированное натуральное число. Подгруппа H группы G называется K - P_t -субнормальной в G , если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{n-1} \leq H_n = G$$

такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $|H_i : H_{i-1}|$ является некоторым простым числом p и $p-1$ не делится на $(t+1)$ -ые степени простых чисел для каждого $i = 1, \dots, n$.

Любая K - P_t -субнормальная подгруппа группы является K - P -субнормальной. Обратное утверждение в общем случае не всегда справедливо. Например, пусть $t = 7$ и $G = G_1 G_2$ – группа, где $G_1 \cong Z_{257}$ и $G_2 \cong \text{Aut}(Z_{257}) \cong Z_{256}$. В G существует цепь подгрупп $H_0 \trianglelefteq H_1 < G$, где $|H_0| = 2$. Тогда H_0 является K - P -субнормальной и P -субнормальной в G , но H_0 не является K - P_7 -субнормальной в G , поскольку $|G : H_1| = 257$, $257-1 = 2^8$.

Определение 0.2 [11]. Через $\mathcal{U}_t^0$ обозначается класс всех сверхразрешимых групп, в которых каждая силовская подгруппа является K - P_t -субнормальной, через $w\mathcal{U}_t^0$ – класс всех групп, в которых каждая силовская подгруппа является K - P_t -субнормальной.

В [11] найдены свойства классов $\mathcal{U}_t^0$ и $w\mathcal{U}_t^0$.

В настоящей работе получен критерий принадлежности группы классу $\mathcal{U}_t^0$. Найдены эквивалентные утверждения принадлежности группы классу $w\mathcal{U}_t^0$. Также установлены приложения формации $w\mathcal{U}_t^0$ к группам, которые представимы произведениями своих K - P_t -субнормальных подгрупп.

1 Предварительные сведения

В работе используются обозначения и определения из [12], [13]. Напомним некоторые важные для статьи понятия.

Для группы G через $|G|$ обозначается ее порядок; $\pi(G)$ – множество всех различных простых делителей $|G|$; $\text{Syl}(G)$ – множество всех силовских подгрупп из G ; $F(G)$ – подгруппа Фиттинга из G ; $F_p(G)$ – p -нильпотентный радикал из G , p – некоторое простое число. Если H – подгруппа из G , то $|G : H|$ – индекс H в G ; $\pi(G : H)$ – множество всех различных простых делителей $|G : H|$; $\text{Core}_G(H) = \bigcap H^x$ для всех $x \in G$; Z_n – циклическая группа порядка n ; $\mathfrak{S}$ –

класс всех разрешимых групп; $\mathcal{U}$ – класс всех сверхразрешимых групп; $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп; $\mathfrak{N}_p$ – класс всех p -групп, p – некоторое простое число; $\mathcal{A}(p-1)$ – класс всех абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$. Для непустой формации $\mathfrak{F}$ через $\mathcal{M}(\mathfrak{F})$ обозначается класс всех минимальных не $\mathfrak{F}$ -групп, т. е. всех групп $G \notin \mathfrak{F}$, все собственные подгруппы которых принадлежат $\mathfrak{F}$; группа Шмидта – это группа из $\mathcal{M}(\mathfrak{N})$.

Приведем необходимые в работе свойства K - P_t -субнормальных подгрупп из [11].

Лемма 1.1. Если G – группа, H – ее подгруппа и $N \trianglelefteq G$, то справедливы следующие утверждения:

- 1) если H K - P_t -субнормальна в G , то H^x K - P_t -субнормальна в G для всех $x \in G$;
- 2) если $H \leq R \leq G$, H K - P_t -субнормальна в R и R K - P_t -субнормальна в G , то H K - P_t -субнормальна в G ;
- 3) если H K - P_t -субнормальна в G , то $(H \cap N)$ K - P_t -субнормальна в N ;
- 4) подгруппа HN K - P_t -субнормальна в G тогда и только тогда, когда HN/N K - P_t -субнормальна в G/N .

Если G – разрешимая группа, то справедливы следующие утверждения:

- 5) если H K - P_t -субнормальна в G , то $(H \cap U)$ K - P_t -субнормальна в U для любой подгруппы U из G ;
- 6) если H и U – K - P_t -субнормальные в G подгруппы, то $(H \cap U)$ – K - P_t -субнормальная в G подгруппа.

Теорема 1.1 [11]. Справедливы следующие утверждения:

- 1) класс групп $\mathcal{U}_t^0$ является наследственной насыщенной формацией и определяется локальной функцией X такой, что $X(p) = \mathfrak{N}_p \mathcal{A}(p-1)$, если $p-1$ не делится на $(t+1)$ -ые степени простых чисел; $X(p) = \mathfrak{N}_p$, если $p-1$ делится на $(t+1)$ -ую степень некоторого простого числа;
- 2) класс групп $w\mathcal{U}_t^0$ является наследственной насыщенной формацией, состоит из дисперсивных по Оре групп и определяется локальной функцией F такой, что

$$F(p) = (G \in \mathfrak{S} \mid \text{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{N}_p \mathcal{A}(p-1)),$$

если $p-1$ не делится на $(t+1)$ -ые степени простых чисел; $F(p) = \mathfrak{N}_p$, если $p-1$ делится на $(t+1)$ -ую степень некоторого простого числа.

Теорема 1.2 [11]. Группа принадлежит $\mathcal{U}_t^0$ тогда и только тогда, когда её можно предста-

вить в виде произведения двух своих нильпотентных $K\text{-}\mathcal{P}_r$ -субнормальных подгрупп.

Теорема 1.3 [14, теорема 5.4, IV]. Пусть в группе G все собственные подгруппы являются p -нильпотентными, а сама G таковой не является. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) G – группа Шмидта;
- 2) $|G| = p^a q^b$ для некоторого простого q ;
- 3) G имеет нормальную силовскую p -подгруппу, которая для $p > 2$ имеет экспоненту p и для $p = 2$ имеет экспоненту не более 4;
- 4) в G силовская q -подгруппа является циклической.

2 Основные результаты

Теорема 2.1. Группа $G \in \mathcal{U}_t^0$ тогда и только тогда, когда G метанильпотентна и любая ее силовская подгруппа является $K\text{-}\mathcal{P}_r$ -субнормальной в G .

Доказательство. Если $G \in \mathcal{U}_t^0$, то в G все силовские подгруппы являются $K\text{-}\mathcal{P}_r$ -субнормальными. Метанильпотентность G следует из того, что G сверхразрешима, а значит, имеет нильпотентный коммутант. Необходимость доказана.

Предположим теперь, что G – группа наименьшего порядка такая, что G метанильпотентна, любая ее силовская подгруппа является $K\text{-}\mathcal{P}_r$ -субнормальной в G , но G не принадлежит $\mathcal{U}_t^0$. Выберем в G минимальную нормальную подгруппу N . Из выбора G следует, что $G/N \in \mathcal{U}_t^0$. Так как $\mathcal{U}_t^0$ является насыщенной формацией, N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $\Phi(G) = 1$. Тогда в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = NM$, $\text{Core}_G(M) = 1$, $N \cap M = 1$ и $N = C_G(N)$.

Пусть p – наибольший простой делитель $|G|$. Так как $\mathcal{U}_t^0 \subseteq w\mathcal{U}_t^0$ и $w\mathcal{U}_t^0$ состоит из дисперсивных по Оре групп, заключаем, что в G силовская p -подгруппа G_p нормальна. Из $N \leq G_p$ и $O_p(M) = 1$ следует, что $N = G_p$ и M является p' -группой.

Пусть S – силовская q -подгруппа группы M . Если $G = NS$, то по теореме 1.2 $G \in \mathcal{U}_t^0$; противоречие с выбором G .

Предположим, что $G \neq NS$ для любого $q \in \pi(M)$. Обозначим $H = NS$. Из $N = C_G(N)$ следует, что $N = F_p(H)$. Из $H \in \mathcal{U}_t^0$ по лемме 4.5 [12] и 1) теоремы 1.1 имеем $S \cong H / F_p(H) \in X(p)$. Если $p-1$ делится на $(t+1)$ -ю степень некоторого простого числа, то $S \in X(p) = \mathfrak{N}_p$, что противоречит с $p \neq q$. Значит, $p-1$ не делится на

$(t+1)$ -ые степени простых чисел и $S \in X(p) = \mathfrak{N}_p \mathcal{A}(p-1)$. Откуда следует, что $S \in \mathcal{A}(p-1)$. Так как G метанильпотентна и $N = F(G)$, из $G/N \cong M$ следует нильпотентность M . Тогда $M \in \mathcal{A}(p-1)$. Поскольку $N = F_p(G)$, имеем $G / F_p(G) \cong M \in \mathcal{A}(p-1)$. Таким образом, G сверхразрешима. Получили противоречие с выбором G . $\square$

Лемма 2.1. Любая минимальная не $w\mathcal{U}_t^0$ -группа является бипримарной не $\mathcal{U}_t^0$ -группой.

Доказательство. Пусть $G \in \mathcal{M}(w\mathcal{U}_t^0)$ и q – наименьший простой делитель $|G|$. Так как $w\mathcal{U}_t^0$ состоит из дисперсивных по Оре групп, в G любая собственная подгруппа q -нильпотентна. Из $\mathfrak{N} \subseteq w\mathcal{U}_t^0$ следует, что $|\pi(G)| \geq 2$.

1. Предположим, что G q -нильпотентна. Тогда G имеет нормальную q' -холлову подгруппу S . Так как S дисперсивна по Оре и G/S – q -группа, заключаем, что G разрешима.

Рассмотрим случай, когда $\Phi(G) = 1$. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в G . Тогда $\pi(N) = \{p\}$ для некоторого простого p и в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = NM$. Из $M \in w\mathcal{U}_t^0$ следует, что $G/N \cong M / M \cap N \in w\mathcal{U}_t^0$. Так как $w\mathcal{U}_t^0$ – формация, N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G .

Пусть R – любая силовская r -подгруппа из G для $r \in \pi(G)$. Ввиду $G/N \in w\mathcal{U}_t^0$ в G/N силовская r -подгруппа RN/N является $K\text{-}\mathcal{P}_r$ -субнормальной. Тогда по 4) леммы 1.1 RN $K\text{-}\mathcal{P}_r$ -субнормальна в G .

Если $RN \neq G$, то из $RN \in w\mathcal{U}_t^0$ следует, что R $K\text{-}\mathcal{P}_r$ -субнормальна в RN . Тогда по 2) леммы 1.1 R $K\text{-}\mathcal{P}_r$ -субнормальна в G и $G \in w\mathcal{U}_t^0$. Получили противоречие.

Предположим, что $RN = G$. Возьмем в G любую собственную подгруппу T . Тогда T метанильпотентна и $T \in w\mathcal{U}_t^0$. По теореме 2.1 $T \in \mathcal{U}_t^0$. Ввиду $\mathcal{U}_t^0 \subseteq w\mathcal{U}_t^0$, группа $G \notin \mathcal{U}_t^0$. Итак, $G \in \mathcal{M}(\mathcal{U}_t^0)$ и G бипримарна.

Рассмотрим случай, когда $\Phi = \Phi(G) \neq 1$. Из насыщенности $w\mathcal{U}_t^0$ следует, что $G/\Phi \notin w\mathcal{U}_t^0$. В G/Φ любая собственная подгруппа $L/\Phi \in w\mathcal{U}_t^0$, так как $L \in w\mathcal{U}_t^0$. Значит, $G/\Phi \in \mathcal{M}(w\mathcal{U}_t^0)$. Так как $\Phi(G/\Phi) = 1$, по доказанному выше $G/\Phi \in \mathcal{M}(\mathcal{U}_t^0)$ и G/Φ – бипримарная группа. Ввиду того, что Φ состоит из необразующих элементов, G – бипримарная группа. Заметим,

что $G \notin \mathcal{U}_t^0$ и в G каждая собственная подгруппа $H \in \mathcal{U}_t^0$, так как $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{U}_t^0 \subseteq w\mathcal{U}_t^0$. $\square$

Теорема 2.2. Для группы G следующие утверждения эквивалентны.

- (1) $G \in w\mathcal{U}_t^0$.
- (2) В G любая бипримарная подгруппа принадлежит $\mathcal{U}_t^0$.
- (3) В G любая метанильпотентная подгруппа принадлежит $\mathcal{U}_t^0$.

Доказательство. Обозначим следующие классы групп:

$\mathcal{X} = \{G \mid \text{любая бипримарная подгруппа из } G \text{ принадлежит } \mathcal{U}_t^0\}$,

$\mathcal{Y} = \{G \mid \text{любая метанильпотентная подгруппа из } G \text{ принадлежит } \mathcal{U}_t^0\}$.

Докажем, что из (1) следует (2). Пусть $G \in w\mathcal{U}_t^0$ и H – ее бипримарная подгруппа. Тогда в H найдутся силовская p -подгруппа p и силовская q -подгруппа q такие, что $H = PQ$. Ввиду наследственности $w\mathcal{U}_t^0$ имеем $H \in w\mathcal{U}_t^0$. Поэтому p и q являются $K\text{-}\mathbb{P}_t$ -субнормальными в H . По теореме 2.1 $H \in \mathcal{U}_t^0$. Итак, $G \in \mathcal{X}$ и (1) $\Rightarrow$ (2) доказано.

Установим, что из (2) следует (3). Пусть G – группа наименьшего порядка такая, что $G \in \mathcal{X}$ и G не принадлежит $\mathcal{Y}$. Тогда в G найдется метанильпотентная подгруппа A , которая не принадлежит $\mathcal{U}_t^0$. Если $A \neq G$, то из $A \in \mathcal{X}$ следует, что $A \in \mathcal{Y}$. Но тогда получаем противоречие $A \in \mathcal{U}_t^0$. Значит, $A = G$, т. е. G метанильпотентна и G не принадлежит $\mathcal{U}_t^0$. Ввиду теоремы 2.1 для некоторого $r \in \pi(G)$ в G найдется силовская r -подгруппа R , которая не является $K\text{-}\mathbb{P}_t$ -субнормальной. Рассмотрим два случая.

1. $\Phi = \Phi(G) \neq 1$. Пусть T/Φ – любая бипримарная подгруппа из G/Φ и пусть $\pi(T/\Phi) = \{q_1, q_2\}$. Из разрешимости T/Φ и нильпотентности Φ следует разрешимость T . Тогда в T существует $\{q_1, q_2\}$ -холлова подгруппа L . Из $G \in \mathcal{X}$ следует, что $L \in \mathcal{U}_t^0$. Откуда следует, что $T/\Phi = L\Phi/\Phi \cong L/L \cap \Phi \in \mathcal{U}_t^0$. Это означает, что $G/\Phi \in \mathcal{X}$. Тогда $G/\Phi \in \mathcal{U}_t^0$ по выбору G . Из насыщенности $\mathcal{U}_t^0$ следует, что $G \in \mathcal{U}_t^0$; противоречие.

2. $\Phi(G) = 1$. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа из G . Тогда $G = NM$ для некоторой максимальной в G подгруппы M . Из $M \in \mathcal{X}$ и $|M| < |G|$ заключаем, что $M \in \mathcal{Y}$. Так как M метанильпотентна, $M \in \mathcal{U}_t^0$. Поэтому

$G/N \cong M/M \cap N \in \mathcal{U}_t^0$. Ввиду того, что $\mathcal{U}_t^0$ – формация, заключаем следующее: N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G , $\text{Core}_G(M) = 1$. Отметим, что $\pi(N) = \{p\}$ для некоторого простого p и $N = C_G(N)$. Из метанильпотентности G и $N = F(G)$ следует, что $M \cong G/N \in \mathcal{N}$. Если P – силовская p -подгруппа из G , то $N \leq P$ и $P = N(P \cap M)$ по тождеству Дедекинда. По теореме Силова $P \cap M$ содержится в некоторой силовской p -подгруппе из M . Ввиду нильпотентности M заключаем, что $P \cap M \leq O_p(M) = 1$. Значит, $N = P$ – силовская p -подгруппа из G . Ввиду нормальности N в G имеем $p \neq r$.

Из $G \in \mathcal{X}$ следует, что $|\pi(G)| \geq 3$. Так как M является p' -группой, $r \in \pi(M)$. По теореме Силова R^x является силовской r -подгруппой в M . Из бипримарности NR^x и $G \in \mathcal{X}$ следует, что $NR^x \in \mathcal{U}_t^0$. Поэтому R^x $K\text{-}\mathbb{P}_t$ -субнормальна в NR^x . Ввиду нильпотентности M имеем $R^x \trianglelefteq M$. Тогда $NR^x \trianglelefteq NM = G$. Таким образом, R^x $K\text{-}\mathbb{P}_t$ -субнормальна в G . Тогда по 1) леммы 1.1 R является $K\text{-}\mathbb{P}_t$ -субнормальной в G . Получили противоречие. Итак, (2) $\Rightarrow$ (3) доказано.

Докажем, что из (3) следует (1). Пусть G – группа наименьшего порядка такая, что $G \in \mathcal{Y}$ и $G \notin w\mathcal{U}_t^0$. Очевидно, что в G любая собственная подгруппа принадлежит $\mathcal{Y}$, а значит, принадлежит $w\mathcal{U}_t^0$ по выбору G . Тогда $G \in \mathcal{M}(w\mathcal{U}_t^0)$. По лемме 2.1 $G \in \mathcal{M}(\mathcal{U}_t^0)$ и $|\pi(G)| = 2$.

Если G сверхразрешима, то G метанильпотентна. Из $G \in \mathcal{Y}$ следует, что $G \in \mathcal{U}_t^0 \subseteq w\mathcal{U}_t^0$. Получили противоречие с выбором G .

Предположим, что G не является сверхразрешимой. Из $G \in \mathcal{M}(\mathcal{U}_t^0)$ заключаем, что в G любая собственная подгруппа принадлежит $\mathcal{U}_t^0 \subseteq \mathcal{U}$. Поэтому $G \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$. По теореме 26 (4) из [12] G имеет нормальную силовскую подгруппу. Тогда G метанильпотентна и принадлежит $\mathcal{U}_t^0 \subseteq w\mathcal{U}_t^0$. Получили противоречие. Таким образом, (3) $\Rightarrow$ (1) доказано. $\square$

Далее приведем одно из приложений формации $w\mathcal{U}_t^0$ к группам, представимым произведениями своих подгрупп. Нами будет использоваться известный результат о том, что если A и B – подгруппы группы G , причем

$$(|G : A|, |G : B|) = 1,$$

то $G = AB$.

Теорема 2.3. Если группа G имеет подгруппы $A \in w\mathfrak{U}_t^0$ и $B \in w\mathfrak{U}_t^0$ такие, что

$$(|G:A|, |G:B|) = 1,$$

A и B являются K - $\mathbb{P}_t$ -субнормальными в G , то $G \in w\mathfrak{U}_t^0$.

Доказательство. Обозначим через A_p , B_p , G_p такие силовские p -подгруппы из A , B и G соответственно, что $G_p = A_p B_p$. Пусть $|A| = |A_p| m_1$, $|B| = |B_p| m_2$ и $|G| = |G_p| m_3$, где $(p, m_i) = 1$ для $i = 1, 2, 3$. Тогда из

$$|G| = |A_p| m_1 |G:A| = |B_p| m_2 |G:B| = \frac{|A_p| |B_p| m_3}{|A_p \cap B_p|}$$

следует, что

$$m_1 |G:A| = \frac{|B_p| m_3}{|A_p \cap B_p|}, \quad m_2 |G:B| = \frac{|A_p| m_3}{|A_p \cap B_p|}.$$

Откуда заключаем, что либо $G_p = A_p$, либо $G_p = B_p$.

Пусть $G_p = A_p$. Из $A \in w\mathfrak{U}_t^0$ следует, что G_p является K - $\mathbb{P}_t$ -субнормальной в A . По условию A K - $\mathbb{P}_t$ -субнормальна в G . По 2) леммы 1.1 заключаем, что G_p является K - $\mathbb{P}_t$ -субнормальной в G . Аналогичные рассуждения справедливы для $G_p = B_p$. Итак, $G \in w\mathfrak{U}_t^0$. $\square$

Заключение

В работе получен критерий, при котором группа принадлежит формации $\mathfrak{U}_t^0$ всех сверхразрешимых групп с K - $\mathbb{P}_t$ -субнормальными силовскими подгруппами. Доказаны эквивалентные утверждения принадлежности группы w -расширению этой формации, а именно, $w\mathfrak{U}_t^0$. Также найдены приложения формации $w\mathfrak{U}_t^0$ к группам, которые являются произведениями K - $\mathbb{P}_t$ -субнормальных подгрупп.

Заметим, что $\bigcup_{t=1}^{\infty} \mathfrak{U}_t^0 = \mathfrak{U}$. Это позволяет расширять результаты, полученные для формации $\mathfrak{U}$.

Следствие 1 [2]. Группа $G \in \mathfrak{U}$ тогда и только тогда, когда G метанильпотентна и любая ее силовская подгруппа является $\mathbb{P}$ -субнормальной в G .

Следствие 2 [3]. Если группа G имеет подгруппы $A \in w\mathfrak{U}$ и $B \in w\mathfrak{U}$ такие, что $(|G:A|, |G:B|) = 1$, A и B являются K - $\mathbb{P}$ -субнормальными в G , то $G \in w\mathfrak{U}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев, А. Ф. Проблемы теории классов конечных групп через призму приложений. I / А. Ф. Васильев, В. И. Мурашко, В. Г. Сафонов //

Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 2 (67). – С. 7–16. – EDN: QCYRRH

2. Васильев, А. Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов // Сибирский математический журнал. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

3. Васильев, А. Ф. О K - $\mathbb{P}$ -субнормальных подгруппах конечных групп / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов // Математические заметки. – 2014. – Т. 95, № 4. – С. 517–528.

4. Kniahina, V. On supersolvability of finite groups with $\mathbb{P}$ -subnormal subgroups / V. Kniahina, V. Monakhov // Internat. J. of Group Theory. – 2013. – Vol. 2, № 4. – P. 21–29.

5. Мурашко, В. И. Свойства класса конечных групп с $\mathbb{P}$ -субнормальными циклическими примарными подгруппами / В. И. Мурашко // Доклады НАН Беларуси. – 2016. – Т. 58, № 1. – С. 5–8.

6. On Factorised Finite Groups / A. Ballester-Boliches, Y. Li, M. C. Pedraza-Aguilera, N. Su // Mediterr. J. Math. – 2020. – Vol. 17, № 2. – P. 65.

7. On Certain Products of Permutable Subgroups / A. Ballester-Boliches, S. Y. Madanha, T. M. Mudziiri Shumba, S. Y. Pedraza-Aguilera // Bull. Aust. Math. Soc. – 2022. – Vol. 105, № 2. – P. 278–285.

8. Chen, R. $\mathbb{P}$ -Subnormal Subgroups and the Structure of Finite Groups / R. Chen, X. Zhao, X. Li // Ric. Mat. – 2023. – Vol. 72. – P. 771–778.

9. Murashka, V. I. Formations of finite groups in polynomial time: $\mathfrak{F}$ -residuals and $\mathfrak{F}$ -subnormality / V. I. Murashka // Journal of Symbolic Computation. – 2024. – Vol. 122. – P. 102271.

10. Ёи, С. Конечные группы с $\mathbb{P}$ -субнормальными подгруппами Шмидта / С. Ёи, Ч. Сюй, С. Ф. Каморников // Тр. ИММ УрО РАН. – 2024. – Т. 30, № 1. – С. 100–108.

11. Васильев, А. Ф. Подгрупповые вложения в конечную группу: между субнормальностью и K - $\mathbb{P}$ -субнормальностью / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева // Математические заметки. – 2025. – Т. 118, № 2. – С. 177–190.

12. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

13. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

14. Huppert, B. Endliche Gruppen. I. / B. Huppert. – Berlin: Springer, 1967. – 795 s.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования Республики Беларусь (грант № 20262141 «Конвергенция-2030»).

Поступила в редакцию 23.06.2026.

Информация об авторах

Васильев Александр Федорович – д.ф.-м.н., профессор
Васильева Татьяна Ивановна – к.ф.-м.н., доцент

ДЕЛИТЕЛИ НУЛЯ В ОБОБЩЁННЫХ ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППОИДАХ

А. М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв

ZERO DIVISORS IN GENERALIZING POLYADIC GROUPOIDS

A. M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev

Аннотация. В статье доказывается, что в обобщённых полиадических группоидах все элементы являются делителями нуля.

Ключевые слова: группоид, l -арная операция, l -арный группоид, делитель нуля.

Для цитирования: Гальмак, А. М. Делители нуля в обобщённых полиадических группоидах / А. М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 3 (68). – С. 46–50. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_46. – EDN: PRVDBM

Abstract. It is proved that in the generalizing polyadic groupoids all elements are zero divisors.

Keywords: groupoid, l -ary operation, l -ary groupoid, zero divisor.

For citation: Gal'mak, A. M. Zero divisors in generalizing polyadic groupoids / A. M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 3 (68). – P. 46–50. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_46 (in Russian). – EDN: PRVDBM

Введение

В [1] для любого целого $l \geq 2$, любого группоида A и любого непустого множества J на декартовом произведении $S_J \times A^J$ была определена l -арная операция $[\]_{l, S_J, J}$, где S_J – симметрическая группа всех биекций (подстановок) множества J , A^J – множество всех функций с областью определения J и со значениями в A . Частными случаями этой l -арной операции являются изучавшиеся автором ранее l -арные операции $[\]_{l, \sigma, k}$ [2], $[\]_{l, \sigma, J}$ [3] и $[\]_{l, S_k, k}$ [4]. В свою очередь, частными случаями l -арной операции $[\]_{l, \sigma, k}$ являются две полиадические операции Э. Поста, которые он определил [5] на упорядоченных наборах подстановок и упорядоченных наборах матриц соответственно. Основным результатом данной статьи является теорема, в которой описывается ситуация, когда в обобщённом полиадическом группоиде все элементы являются делителями нуля. Под обобщённым полиадическим группоидом понимается l -арный группоид $\langle S_J \times A^J, [\]_{l, S_J, J} \rangle$.

1 Предварительные сведения

Напомним определение l -арной операции $[\]_{l, S_J, J}$. Пусть A – группоид, J – произвольное непустое множество, σ – подстановка из S_J . Определим на A^J бинарную операцию $\overset{\sigma}{\circ}$ $\mathbf{x}$, полагая

$$(\mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{y})(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(\sigma(j)), j \in J.$$

Далее для любого целого $l \geq 2$ определим на множестве

$$S_J \times A^J = \{(\sigma, \mathbf{a}) \mid \sigma \in S_J, \mathbf{a} \in A^J\}$$

l -арную операцию $[\]_{l, S_J, J}$ следующим образом:

$$[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{x}_l)]_{l, S_J, J} = (\sigma, \mathbf{y}), \quad (1.1)$$

где

$$\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_l, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 \overset{\sigma_1}{\circ} (\mathbf{x}_2 \overset{\sigma_2}{\circ} (\dots (\mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma_{l-2}}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma_{l-1}}{\circ} \mathbf{x}_l)) \dots)). \quad (1.3)$$

Умножение подстановок в правой части (1.2) осуществляется по правилу

$$\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_l(j) = \sigma_l(\dots \sigma_2(\sigma_1(j)) \dots).$$

Теорема 1.1 [1]. Функция $\mathbf{y}$, определяемая равенством (1.3), принимает в каждой точке $j \in J$ значение

$$\mathbf{y}(j) = \mathbf{x}_1(j)(\mathbf{x}_2(\sigma_1(j))(\mathbf{x}_3(\sigma_1 \sigma_2(j))(\dots (\mathbf{x}_{l-1}(\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(j))\mathbf{x}_l(\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(j))) \dots))).$$

Считая в определении операции $[\]_{l, S_J, J}$ $J = \{1, 2, \dots, k\}$, $k \geq 2$, получим определённую на множестве $S_k \times A^k$ l -арную операцию $[\]_{l, S_k, k}$:

$$[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{x}_l)]_{l, s_k, k} = \\ = (\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_l, \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k)),$$

где все компоненты y_j определяются, согласно теореме 1.1, формулой

$$y_j = x_{1j} (x_{2\sigma_1(j)} (\dots \\ \dots (x_{(l-1)\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(j)} x_{l\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(j)}) \dots)). \quad (1.4)$$

Для полугруппы A операция $[\]_{l, s_k, k}$ определена в [4].

Считая в определении операции $[\]_{l, s_j, j}$ $J = N$, получим определённую на множестве $S_N \times A^N$ l -арную операцию $[\]_{l, s_N, N}$:

$$[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{x}_l)]_{l, s_N, N} = \\ = (\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_l, \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k, \dots)),$$

где все компоненты y_j ($j \in N$) определяются, согласно теореме 1.1, формулой (1.4).

Считая в определении операции $[\]_{l, s_j, j}$ $J = Z$, получим определённую на множестве $S_Z \times A^Z$ l -арную операцию $[\]_{l, s_Z, Z}$:

$$[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{x}_l)]_{l, s_Z, Z} = \\ = (\sigma, \mathbf{y} = (\dots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \dots)),$$

где все компоненты y_j ($j \in Z$) определяются, согласно теореме 1.1, формулой (1.4).

Определим на множестве S_J l -арную операцию $(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_l)_l = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_l$, которая, как не сложно заметить, является ассоциативной. Другими словами, $\langle S_J, (\)_l \rangle$ – l -арная полугруппа. Так как S_J – группа, то $\langle S_J, (\)_l \rangle$ – l -арная группа.

Предложение 1.1 [1]. Если подмножество $T \subseteq S_J$ замкнуто относительно l -арной операции $(\)_l$, то множество $T \times A^J$ замкнуто относительно l -арной операции $[\]_{l, s_J, J}$, то есть $\langle T \times A^J, [\]_{l, s_J, J} \rangle$ – l -арный подгруппоид l -арного группоида $\langle S_J \times A^J, [\]_{l, s_J, J} \rangle$.

Замечание 1.1. Если T – подполугруппа группы S_J , то множество T замкнуто относительно l -арной операции $(\)_l$, то есть $\langle T, (\)_l \rangle$ – l -арная подполугруппа l -арной группы $\langle S_J, (\)_l \rangle$.

Из предложения 1.1, ввиду замечания 1.1, вытекает

Следствие 1.1. Если T – подполугруппа группы S_J , то множество $T \times A^J$ замкнуто относительно l -арной операции $[\]_{l, s_J, J}$, то есть $\langle T \times A^J, [\]_{l, s_J, J} \rangle$ – l -арный подгруппоид l -арного группоида $\langle S_J \times A^J, [\]_{l, s_J, J} \rangle$.

Если для подстановки $\sigma \in S_J$ выполняется условие $\sigma^l = \sigma$, то $\langle \{\sigma\}, (\)_l \rangle$ – l -арная подгруппа l -арной группы $\langle S_J, (\)_l \rangle$. Поэтому из предложения 1.1 при $T = \{\sigma\}$ вытекает

Теорема 1.2. [1]. Если A – группоид, подстановка $\sigma \in S_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle \{\sigma\} \times A^J, [\]_{l, \{\sigma\}, J} \rangle$ – l -арный группоид.

Следующая лемма позволяет отождествить l -арную операцию $[\]_{l, \{\sigma\}, J}$ и l -арную операцию $[\]_{l, \sigma, J}$ из [3].

Лемма 1.1. Если A – группоид, подстановка $\sigma \in S_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то отображение $\varphi: (\sigma, \mathbf{a}) \rightarrow \mathbf{a}$ является изоморфизмом l -арного группоида $\langle \{\sigma\} \times A^J, [\]_{l, \{\sigma\}, J} \rangle$ на l -арный группоид $\langle A^J, [\]_{l, \sigma, J} \rangle$.

2 Основной результат

Напомним, что элемент a l -арного группоида $\langle A, [\] \rangle$ называется его нулем, если для всех $x_1, \dots, x_l \in A$ верно

$$[ax_2 \dots x_l] = [x_1 ax_3 \dots x_l] = \dots \\ \dots = [x_1 \dots x_{l-2} ax_l] = [x_1 \dots x_{l-1} a] = a.$$

Понятно, что l -арный группоид не может иметь более одного нуля.

Элемент a l -арного группоида $\langle A, [\] \rangle$ с нулем 0 называют его i -ым делителем нуля, где $i \in \{1, \dots, l\}$, если существуют $b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_l \in A$, отличные от нуля, такие, что

$$[b_1 \dots b_{i-1} a b_{i+1} \dots b_l] = 0.$$

Если элемент a является i -ым делителем нуля для каждого $i \in \{1, \dots, l\}$, то a называют делителем нуля в $\langle A, [\] \rangle$.

Понятно, что сам нуль является делителем нуля.

Теорема 2.1. Если θ – нуль l -арной подполугруппы $\langle T, (\)_l \rangle$ l -арной группы $\langle S_J, (\)_l \rangle$, 0 – нуль группоида A , то пара $(\theta, 0) \in T \times A^J$, где $0(j) = 0$ для любого $j \in J$, является нулем l -арного группоида $\langle T \times A^J, [\]_{l, s_J, J} \rangle$. Если к тому же $l \geq 3$, каждое из множеств J и A содержит более одного элемента, то в $\langle T \times A^J, [\]_{l, s_J, J} \rangle$ все элементы являются делителями нуля.

Доказательство. Пусть $i \in \{1, 2, \dots, l\}$,

$$(\sigma_1, \mathbf{a}_1), \dots, (\sigma_{i-1}, \mathbf{a}_{i-1}), \\ (\sigma_{i+1}, \mathbf{a}_{i+1}), \dots, (\sigma_l, \mathbf{a}_l) \in T \times A^J$$

и положим

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1) \dots (\sigma_{i-1}, \mathbf{a}_{i-1})(\theta, 0) \\ (\sigma_{i+1}, \mathbf{a}_{i+1}) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, s_J, J_j} = (\sigma, \mathbf{y}).$$

Тогда

$$\sigma_1 \dots \sigma_{i-1} \theta \sigma_{i+1} \dots \sigma_l = \sigma, \\ \mathbf{y}(j) = \mathbf{a}_1(j) \mathbf{a}_2(\sigma_1(j)) \dots \mathbf{a}_{i-1}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-2}(j)) \\ \mathbf{0}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}(j)) \mathbf{a}_{i+1}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1} \theta(j)) \\ \mathbf{a}_{i+2}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1} \theta \sigma_{i+1}(j)) \dots \\ \dots \mathbf{a}_l(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1} \theta \sigma_{i+1} \dots \sigma_{l-1}(j)), j \in J.$$

Так как θ является нулём в $\langle T, ()_l \rangle$, то из первого равенства следует $\sigma = \theta$, а так как $\theta(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}(j)) = 0$ – нуль группоида A , то из второго равенства следует $y(j) = 0$ для любого $j \in J$. Таким образом, $(\sigma, y) = (\theta, 0)$ и верно равенство

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1) \dots (\sigma_{i-1}, \mathbf{a}_{i-1})(\theta, 0) (\sigma_{i+1}, \mathbf{a}_{i+1}) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, s_j, J_j} = (\theta, 0).$$

Следовательно, $(\theta, 0)$ – нуль l -арного группоида $\langle T \times A^J, []_{l, s_j, J} \rangle$.

Далее, как и в приведенных выше вычислениях, для сокращения записей мы не будем в длинных произведениях элементов из A расставлять скобки, указывающие порядок выполнения бинарной операции в группоиде A , считая, что элементы перемножаются последовательно справа налево.

Пусть $l \geq 3$, $i \in \{1, \dots, l\}$; $(\tau, \mathbf{c})$ – произвольный элемент из $T \times A^J$. Так как группоид A содержит более одного элемента, то в A имеются элементы, отличные от 0 . Зафиксируем $k \in J$ и рассмотрим три случая.

1) Если $i \geq 3$, то положим:

$\sigma_1 = \theta, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_l$ – любые из T ;

$\mathbf{a}_1(k) \neq 0, \mathbf{a}_1(j) = 0, j \in J, j \neq k$;

$\mathbf{a}_2 \neq 0, \mathbf{a}_2(\sigma_1(k)) = 0$;

$\mathbf{a}_s \neq 0, s \in \{3, \dots, i-1, i+1, \dots, l\}$.

Тогда, полагая

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1) \dots (\sigma_{i-1}, \mathbf{a}_{i-1})(\tau, \mathbf{c}) (\sigma_{i+1}, \mathbf{a}_{i+1}) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, s_j, J_j} = (\rho, \mathbf{z}),$$

получим: во-первых,

$$\begin{aligned} \rho &= \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{i-1} \tau \sigma_{i+1} \dots \sigma_l = \\ &= \theta \sigma_2 \dots \sigma_{i-1} \tau \sigma_{i+1} \dots \sigma_l = \theta; \end{aligned}$$

во-вторых, для $j \in J, j \neq k$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(j) &= \mathbf{a}_1(j) \mathbf{a}_2(\sigma_1(j)) \dots \mathbf{a}_{i-1}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-2}(j)) \\ &\quad \mathbf{c}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}(j)) \mathbf{a}_{i+1}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}(j)) \\ &= \mathbf{a}_{i+2}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1} \tau \sigma_{i+1}(j)) \dots \mathbf{a}_l(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1} \tau \sigma_{i+1} \dots \sigma_{l-1}(j)) = \\ &= 0 \mathbf{a}_2(\sigma_1(j)) \dots \mathbf{a}_{i-1}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-2}(j)) \\ &\quad \mathbf{c}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}(j)) \mathbf{a}_{i+1}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1} \theta \tau(j)) \\ &= \mathbf{a}_{i+2}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1} \tau \sigma_{i+1}(j)) \dots \mathbf{a}_l(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1} \tau \sigma_{i+1} \dots \sigma_{l-1}(j)) = 0, \end{aligned}$$

а для $j = k$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(k) &= \mathbf{a}_1(k) \mathbf{a}_2(\sigma_1(k)) \mathbf{a}_3(\sigma_1 \sigma_2(k)) \dots \mathbf{a}_{i-1}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-2}(k)) \\ &\quad \mathbf{c}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}(k)) \mathbf{a}_{i+1}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}(k)) \\ &= \mathbf{a}_{i+2}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1} \tau \sigma_{i+1}(k)) \dots \mathbf{a}_l(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1} \tau \sigma_{i+1} \dots \sigma_{l-1}(k)) = \\ &= \mathbf{a}_1(k) 0 \mathbf{a}_3(\sigma_1 \sigma_2(k)) \dots \mathbf{a}_{i-1}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-2}(k)) \\ &\quad \mathbf{c}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}(k)) \mathbf{a}_{i+1}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}(k)) \\ &= \mathbf{a}_{i+2}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1} \tau \sigma_{i+1}(k)) \dots \mathbf{a}_l(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1} \tau \sigma_{i+1} \dots \sigma_{l-1}(k)) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, если $i \geq 3$, то $\rho = \theta, \mathbf{z} = 0$. Следовательно,

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1) \dots (\sigma_{i-1}, \mathbf{a}_{i-1})(\tau, \mathbf{c}) (\sigma_{i+1}, \mathbf{a}_{i+1}) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, s_j, J_j} = (\theta, 0),$$

где все $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_l$ отличны от 0 , а значит и все

$$(\sigma_1, \mathbf{a}_1), \dots, (\sigma_{i-1}, \mathbf{a}_{i-1}), (\sigma_{i+1}, \mathbf{a}_{i+1}), \dots, (\sigma_l, \mathbf{a}_l)$$

отличны от нуля $(\theta, 0)$ l -арного группоида $\langle T \times A^J, []_{l, s_j, J} \rangle$.

2) Если $i = 2$, то положим:

$\sigma_1 = \theta, \sigma_3, \dots, \sigma_l$ – любые из T ;

$\mathbf{a}_1$ – таким же, как и в случае $i \geq 3$; в $\mathbf{a}_3 \neq 0$ компонента $\mathbf{a}_3(\sigma_1 \tau(k))$ равна нулю группоида A ; элементы $\mathbf{a}_4, \dots, \mathbf{a}_l$ отличны от 0 . Тогда, полагая

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1)(\tau, \mathbf{c})(\sigma_3, \mathbf{a}_3) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, s_j, J_j} = (\rho, \mathbf{z}),$$

получим: во-первых,

$$\rho = \sigma_1 \tau \sigma_3 \dots \sigma_l = \theta \tau \sigma_3 \dots \sigma_l = \theta;$$

во-вторых, для $j \in J, j \neq k$ снова имеем $\mathbf{z}(j) = 0$, а для $j = k$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(k) &= \mathbf{a}_1(k) \mathbf{c}(\sigma_1(k)) \mathbf{a}_3(\sigma_1 \tau(k)) \\ &\quad \mathbf{a}_4(\sigma_1 \tau \sigma_3(k)) \dots \mathbf{a}_l(\sigma_1 \tau \sigma_3 \dots \sigma_{l-1}(k)) = \\ &= \mathbf{a}_1(k) \mathbf{c}(\sigma_1(k)) 0 \mathbf{a}_4(\sigma_1 \tau \sigma_3(k)) \dots \mathbf{a}_l(\sigma_1 \tau \sigma_3 \dots \sigma_{l-1}(k)) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, если $i = 2$, то $\rho = \theta, \mathbf{z} = 0$. Следовательно,

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1)(\tau, \mathbf{c})(\sigma_3, \mathbf{a}_3) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, s_j, J_j} = (\theta, 0),$$

где все $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_l$ отличны от 0 , а значит и все

$$(\sigma_1, \mathbf{a}_1), (\sigma_3, \mathbf{a}_3), \dots, (\sigma_l, \mathbf{a}_l)$$

отличны от нуля $(\theta, 0)$ l -арного группоида $\langle T \times A^J, []_{l, s_j, J} \rangle$.

3) Если $i = 1$, то положим:

$\sigma_2 = \theta, \sigma_3, \dots, \sigma_l$ – любые из T ;

$\mathbf{a}_2(\tau(k)) \neq 0, \mathbf{a}_2(\tau(j)) = 0, j \in J, j \neq k$;

в $\mathbf{a}_3 \neq 0$ компонента $\mathbf{a}_3(\tau \sigma_2(k))$ равна нулю группоида A ; элементы $\mathbf{a}_4, \dots, \mathbf{a}_l$ отличны от 0 . Тогда, полагая

$$[(\tau, \mathbf{c})(\sigma_2, \mathbf{a}_2)(\sigma_3, \mathbf{a}_3) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, s_j, J_j} = (\rho, \mathbf{z}),$$

получим: во-первых,

$$\rho = \tau \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_l = \tau \theta \sigma_3 \dots \sigma_l = \theta;$$

во-вторых, для $j \in J, j \neq k$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(j) &= \mathbf{c}(j) \mathbf{a}_2(\tau(j)) \mathbf{a}_3(\tau \sigma_2(j)) \dots \mathbf{a}_l(\tau \sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j)) = \\ &= \mathbf{c}(j) 0 \mathbf{a}_3(\tau \sigma_2(j)) \dots \mathbf{a}_l(\tau \sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j)) = 0, \end{aligned}$$

а для $j = k$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(k) &= \mathbf{c}(k) \mathbf{a}_2(\tau(k)) \mathbf{a}_3(\tau \sigma_2(k)) \\ &\quad \mathbf{a}_4(\theta \tau \sigma_2 \sigma_3(k)) \dots \mathbf{a}_l(\theta \tau \sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j)) = \end{aligned}$$

$$= \mathbf{c}(k)\mathbf{a}_2(\tau(k))\mathbf{0}\mathbf{a}_4(\tau\sigma_2\sigma_3(k)) \dots \mathbf{a}_l(\tau\sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j)) = 0.$$

Таким образом, если $i = 1$, то $\rho = \theta$, $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Следовательно,

$$[(\tau, \mathbf{c})(\sigma_2, \mathbf{a}_2) \dots (\sigma_b, \mathbf{a}_l)]_{l, s_j, j} = (\theta, \mathbf{0}),$$

где все $\mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_l$ отличны от $\mathbf{0}$, а значит и все

$$(\sigma_2, \mathbf{a}_2), \dots, (\sigma_b, \mathbf{a}_l)$$

отличны от нуля $(\theta, \mathbf{0})$ l -арного группоида $\langle T \times A^J, [\]_{l, s_j, j} \rangle$.

Так как для любого $i \in \{1, \dots, l\}$ существуют такие

$$(\sigma_1, \mathbf{a}_1), \dots, (\sigma_{i-1}, \mathbf{a}_{i-1}), \\ (\sigma_{i+1}, \mathbf{a}_{i+1}), \dots, (\sigma_l, \mathbf{a}_l) \in T \times A^J,$$

отличные от $(\theta, \mathbf{0})$, что

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1) \dots (\sigma_{i-1}, \mathbf{a}_{i-1})(\tau, \mathbf{c}) \\ (\sigma_{i+1}, \mathbf{a}_{i+1}) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, s_j, j} = (\theta, \mathbf{0}),$$

то $(\tau, \mathbf{c})$ – делитель нуля l -арного группоида $\langle T \times A^J, [\]_{l, s_j, j} \rangle$. $\square$

Замечание 2.1. В доказательстве теоремы 2.1 функция $\mathbf{a}_2$ (пункт 3)) определена корректно, так как для биекции τ из $j \neq k$ всегда следует $\tau(j) \neq \tau(k)$.

Замечание 2.2. Теорема 2.1 останется верной, если в её формулировке l -арную подполугруппу $\langle T, (\)_l \rangle$ l -арной группы $\langle S_J, (\)_l \rangle$ заменить подполугруппой T группы S_J .

Полагая в теореме 2.1 $J = N$, получим

Следствие 2.1. Если θ – нуль l -арной подполугруппы $\langle T, (\)_l \rangle$ l -арной группы $\langle S_N, (\)_l \rangle$, $\mathbf{0}$ – нуль группоида A , то элемент

$$(\theta, (0_0 = 0, \dots, 0_j = 0, \dots)) \in T \times A^N$$

является нулем l -арного группоида $\langle T \times A^N, [\]_{l, s_N, N} \rangle$. Если к тому же $l \geq 3$, группоид A содержит более одного элемента, то в $\langle T \times A^N, [\]_{l, s_N, N} \rangle$ все элементы являются делителями нуля.

Полагая в теореме 2.1 $J = Z$, получим

Следствие 2.2. Если θ – нуль l -арной подполугруппы $\langle T, (\)_l \rangle$ l -арной группы $\langle S_Z, (\)_l \rangle$, $\mathbf{0}$ – нуль группоида A , то элемент

$$(\theta, (\dots, 0_{-j} = 0, \dots, 0_0 = 0, \dots, 0_j = 0, \dots)) \in T \times A^Z$$

является нулем l -арного группоида $\langle T \times A^Z, [\]_{l, s_Z, Z} \rangle$. Если к тому же $l \geq 3$, группоид A содержит более одного элемента, то в $\langle T \times A^Z, [\]_{l, s_Z, Z} \rangle$ все элементы являются делителями нуля.

Если подстановка $\sigma \in S_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то σ – нуль одноэлементной l -арной подполугруппы $\langle T = \{\sigma\}, (\)_l \rangle$ l -арной

группы $\langle S_J, (\)_l \rangle$. Поэтому из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.3. Если подстановка $\sigma \in S_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{0}$ – нуль группоида A , то элемент $(\sigma, \mathbf{0}) \in \{\sigma\} \times A^J$, где $\mathbf{0}(j) = 0$ для любого $j \in J$, является нулем l -арного группоида $\langle \{\sigma\} \times A^J, [\]_{l, \{\sigma\}, J} \rangle$. Если к тому же $l \geq 3$, каждое из множеств J и A содержит более одного элемента, то в $\langle \{\sigma\} \times A^J, [\]_{l, \{\sigma\}, J} \rangle$ все элементы являются делителями нуля.

Следствие 2.3 и лемма 1.1, позволяют сформулировать ещё одно

Следствие 2.4. Если подстановка $\sigma \in S_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{0}$ – нуль группоида A , то элемент $\mathbf{0} \in A^J$ такой, что $\mathbf{0}(j) = 0$ для любого $j \in J$, является нулем l -арного группоида $\langle A^J, [\]_{l, \sigma, J} \rangle$. Если к тому же $l \geq 3$, каждое из множеств J и A содержит более одного элемента, то в $\langle A^J, [\]_{l, \sigma, J} \rangle$ все элементы являются делителями нуля.

В следствии 2.4 условие $\sigma^l = \sigma$ излишне, так как имеет место

Теорема 2.2 [3, теорема 2.8.1]. Если $\mathbf{0}$ – нуль группоида A , то функция $\mathbf{0} \in A^J$ такая, что $\mathbf{0}(j) = 0$ для любого $j \in J$, является нулем l -арного группоида $\langle A^J, [\]_{l, \sigma, J} \rangle$. Если к тому же $l \geq 3$, каждое из множеств J и A содержит более одного элемента, то в $\langle A^J, [\]_{l, \sigma, J} \rangle$ все элементы являются делителями нуля.

Замечание 2.3. Доказательство теоремы 2.1 ценно своей независимостью от соответствующих результатов об операциях $[\]_{l, \sigma, k}$, $[\]_{l, \sigma, J}$ и $[\]_{l, s_k, k}$, являющихся частными случаями l -арной операции $[\]_{l, s_j, j}$. В этом доказательстве используются только определение делителя нуля l -арного группоида и определение l -арной операции $[\]_{l, s_j, j}$. Если же воспользоваться результатами об операциях $[\]_{l, \sigma, k}$, $[\]_{l, \sigma, J}$ и $[\]_{l, s_k, k}$, то доказательство теоремы 2.1 можно значительно сократить. Приведём пример такого доказательства, воспользовавшись теоремой 2.8.1 из [3] об операции $[\]_{l, \sigma, J}$.

Второе доказательство теоремы 2.1. Пусть $(\sigma, \mathbf{a})$ – произвольный элемент из $T \times A^J$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $i \in \{1, 2, \dots, l-1\}$. По теореме 2.8.1 из [3] в l -арном группоиде $\langle A^J, [\]_{l, \sigma, J} \rangle$ все элементы являются делителями нуля, то есть для любого $i \in \{1, \dots, l\}$ существуют

$$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_l \in A^J,$$

отличные от нуля, такие, что

$$[\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{i-1} \mathbf{a} \mathbf{a}_{i+1} \dots \mathbf{a}_l]_{l, \sigma, J} = \mathbf{0}.$$

Это равенство, в силу определения l -арной операции $[\]_{l, \sigma, J}$, переписывается в виде

$$\begin{aligned} & \mathbf{a}_1 \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{a}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\dots (\mathbf{a}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{a} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{a}_{i+1} \overset{\sigma}{\circ} \dots \\ & \dots (\mathbf{a}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{a}_l) \dots))) \dots)) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Для элементов

$$(\sigma, \mathbf{a}_1), \dots, (\sigma, \mathbf{a}_{l-1}), (\sigma, \mathbf{a}), (\sigma, \mathbf{a}_{i+1}), \dots, (\sigma, \mathbf{a}_{l-1}), (\theta, \mathbf{a}) \in T \times A^J$$

положим:

$$[(\sigma, \mathbf{a}_1) \dots (\sigma, \mathbf{a}_{l-1})(\sigma, \mathbf{a})(\sigma, \mathbf{a}_{i+1}) \dots (\sigma, \mathbf{a}_{l-1})(\theta, \mathbf{a})]_{l, s_j, j} = (\rho, \mathbf{b}).$$

Тогда, в силу определения l -арной операции $[\]_{l, s_j, j}$, имеем

$$\sigma^{l-1}\theta = \rho$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned} & \mathbf{a}_1 \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{a}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\dots (\mathbf{a}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{a} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{a}_{i+1} \overset{\sigma}{\circ} \dots \\ & \dots (\mathbf{a}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{a}_l) \dots))) \dots)) = \mathbf{b}, \end{aligned}$$

Так как θ является нулём в l -арном группоиде $\langle T, (\)_l \rangle$, то из первого равенства следует $\rho = \theta$, а из второго равенства и из (2.1) вытекает $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Следовательно,

$$[(\sigma, \mathbf{a}_1) \dots (\sigma, \mathbf{a}_{l-1})(\sigma, \mathbf{a})(\sigma, \mathbf{a}_{i+1}) \dots (\sigma, \mathbf{a}_{l-1})(\theta, \mathbf{a})]_{l, s_j, j} = (\theta, \mathbf{0}).$$

А так как все элементы

$$(\sigma, \mathbf{a}_1), \dots, (\sigma, \mathbf{a}_{l-1}), (\sigma, \mathbf{a}_{i+1}), \dots, (\sigma, \mathbf{a}_{l-1}), (\theta, \mathbf{a})$$

отличны от нуля $(\theta, \mathbf{0})$ l -арного группоида $\langle T \times A^J, [\]_{l, s_j, j} \rangle$, то элемент $(\sigma, \mathbf{a})$ является i -ым делителем нуля этого l -арного группоида для любого $i \in \{1, 2, \dots, l-1\}$.

2) Пусть теперь $i = l$. По теореме 2.8.1 из [3] в l -арном группоиде $\langle A^J, [\]_{l, \theta, j} \rangle$ все элементы являются делителями нуля. В частности, для $i = l$ существуют

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{l-1} \in A^J,$$

отличные от нуля, такие, что

$$[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_{l-1} \mathbf{a}]_{l, \theta, j} = \mathbf{0}.$$

Это равенство, в силу определения l -арной операции $[\]_{l, \theta, j}$, переписывается в виде

$$\mathbf{a}_1 \overset{\theta}{\circ} (\mathbf{a}_2 \overset{\theta}{\circ} (\dots (\mathbf{a}_{l-1} \overset{\theta}{\circ} \mathbf{a}) \dots)) = \mathbf{0}. \quad (2.2)$$

Для элементов

$$(\theta, \mathbf{a}_1), (\theta, \mathbf{a}_2), \dots, (\theta, \mathbf{a}_{l-1}), (\sigma, \mathbf{a}) \in T \times A^J$$

положим:

$$[(\theta, \mathbf{a}_1)(\theta, \mathbf{a}_2) \dots (\theta, \mathbf{a}_{l-1})(\sigma, \mathbf{a})]_{l, s_j, j} = (\tau, \mathbf{c}).$$

Тогда, в силу определения l -арной операции $[\]_{l, s_j, j}$, имеем

$$\theta^{l-1}\sigma = \tau$$

и, кроме того,

$$\mathbf{a}_1 \overset{\theta}{\circ} (\mathbf{a}_2 \overset{\theta}{\circ} (\dots (\mathbf{a}_{l-1} \overset{\theta}{\circ} \mathbf{a}) \dots)) = \mathbf{c},$$

Так как θ является нулём в l -арном группоиде $\langle T, (\)_l \rangle$, то из первого равенства следует $\tau = \theta$, а из второго равенства и из (2.2) вытекает $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Следовательно,

$$[(\theta, \mathbf{a}_1)(\theta, \mathbf{a}_2) \dots (\theta, \mathbf{a}_{l-1})(\sigma, \mathbf{a})]_{l, s_j, j} = (\theta, \mathbf{0}).$$

А так как все элементы

$$(\theta, \mathbf{a}_1), (\theta, \mathbf{a}_2), \dots, (\theta, \mathbf{a}_{l-1})$$

отличны от нуля $(\theta, \mathbf{0})$ l -арного группоида $\langle T \times A^J, [\]_{l, s_j, j} \rangle$, то элемент $(\sigma, \mathbf{a})$ является l -ым делителем нуля этого l -арного группоида.

Из 1) и 2) вытекает, что элемент $(\sigma, \mathbf{a})$ является делителем нуля l -арного группоида $\langle T \times A^J, [\]_{l, s_j, j} \rangle$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А. М. Об операции $[\]_{l, T, j}$ / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2014. – № 1. – С. 5–13.
2. Гальмак, А. М. Многоместные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Мн. : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
3. Гальмак, А. М. Полиадические операции на множествах функций / А. М. Гальмак, Ю. И. Кулаженко. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2013. – 192 с.
4. Гальмак, А. М. Обобщённые полиадические операции / А. М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 2 (15). – С. 50–57.
5. Post, E. L. Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

Поступила в редакцию 07.08.2026.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор

АЛГЕБРЫ ОПЕРАТОРОВ УМНОЖЕНИЯ НА РАЗРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

И. Л. Люксембург

*Институт математики НАН Беларуси, Минск**Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск*

ALGEBRAS OF OPERATORS OF MULTIPLICATION BY DISCONTINUOUS FUNCTIONS

I. L. Luxemburg

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk;**Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk*

Аннотация. В работе рассматривается банахова алгебра $SD[0;1]$, состоящая из функций на отрезке, допускающих разрывы разве лишь первого рода, и алгебры операторов умножения на функции из $SD[0;1]$, действующих в пространствах $L_p([0;1], \mu)$, где μ – заданная непрерывная мера. Показано, что все эти алгебры изоморфны подалгебре $T[0;1] \subset SD[0;1]$, состоящей из функций, непрерывных в 0 и непрерывных слева в остальных точках и что пространства максимальных идеалов рассматриваемых алгебр операторов гомеоморфны неметризуемому компакту «две стрелки» Александра – Урысона.

Ключевые слова: разрывная функция, разрыв 1-го рода, алгебра операторов, функциональная алгебра, непрерывная мера, фактор-алгебра.

Для цитирования: Люксембург, И. Л. Алгебры операторов умножения на разрывные функции / И. Л. Люксембург // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 3 (68). – С. 51–55. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_51. – EDN: QIDNBE

Abstract. This paper considers the Banach algebra $SD[0;1]$ consisting of functions on the interval that admit only simple discontinuities, and the algebras of multiplication operators by functions from $SD[0;1]$ acting on the spaces $L_p([0;1], \mu)$, where μ is a given continuous measure. It is shown that all these algebras are isomorphic to the subalgebra $T[0;1] \subset SD[0;1]$, consisting of functions continuous at 0 and left-continuous at all other points, and that the maximal ideal spaces of the operator algebras under consideration are homeomorphic to the Aleksandrov – Urysohn non-metrizable “two arrows” space.

Keywords: discontinuous function, simple discontinuity, operator algebra, function algebra, continuous measure, quotient algebra.

For citation: Luxemburg, I. L. Algebras of operators of multiplication by discontinuous functions / I. L. Luxemburg // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 3 (68). – P. 51–55. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_51 (in Russian). – EDN: QIDNBE

1 Постановка задачи

Согласно теории И. М. Гельфанда [1], каждая алгебра $\mathcal{A}(X)$, состоящая из ограниченных функций, определённых на множестве X , вкладывается в алгебру непрерывных функций на компактном пространстве $\mathfrak{M}(\mathcal{A}(X))$, которое является ее пространством максимальных идеалов. Топологическая структура пространства $\mathfrak{M}(\mathcal{A}(X))$ тесно связана со структурой исходной алгебры $\mathcal{A}(X)$, и свойствами ее элементов. Некоторые из таких связей установлены, например, в работах [2]–[7].

Если на исходном множестве X задана топология, то алгебра $\mathcal{A}(X)$ может включать разрывные функции. В такой ситуации пространство максимальных идеалов содержит информацию о виде допустимых разрывов.

Одним из направлений, в которых возникают такие алгебры, является исследование уравнений с разрывными коэффициентами. При построении математических моделей различных физических, химических и биологических процессов обычно используются дифференциальные и интегральные уравнения, коэффициенты которых описывают состояние внешней среды, в которой протекает исследуемый процесс. Эти коэффициенты отражают такие параметры, как температура, давление, плотность, химический состав или другие факторы, определяющие состояние среды. В классических подходах к моделированию обычно предполагается, что коэффициенты уравнений являются непрерывными функциями, что значительно упрощает их анализ.

Однако при моделировании процессов, протекающих в средах с резкими изменениями

параметров, например, при моделировании турбулентности, фазовых переходов или других явлений с резкими градиентами, возникают уравнения, коэффициенты которых могут иметь разрывы. Такие уравнения устроены существенно сложнее, их исследование требует новых подходов, и результаты получены только для некоторых конкретных классов. Например, сингулярные интегральные уравнения, коэффициенты которых имеют разрывы первого рода, рассматривались в работах [8], [9]. Некоторые уравнения типа свертки, коэффициенты которых имеют особенности, рассматривались в [10]. Теория псевдодифференциальных операторов с символами, имеющими разрывы специального вида, разработана в [11], [12].

С операторной точки зрения в уравнения с разрывными коэффициентами входят операторы умножения на разрывные функции, поэтому на свойства этих уравнений оказывает влияние структура алгебры, порожденной такими операторами, и, соответственно, топология пространства максимальных идеалов соответствующей алгебры.

Одной из наиболее часто используемых алгебр разрывных функций является алгебра $SD[0;1]$, состоящая из всех комплекснозначных функций на отрезке $[0;1]$, допускающих разрывы только первого рода (Simple Discontinuity). Это означает, что каждая функция f при $x \in (0;1]$ имеет предел слева:

$$f^-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$$

и при $x \in [0;1)$ имеет предел справа:

$$f^+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x).$$

Из стандартных свойств пределов следует, что всякая функция из этой алгебры имеет не более чем счётное множество точек разрыва, и алгебра $SD[0;1]$ является полной в равномерной норме $\|f\| = \sup_{x \in [0;1]} |f(x)|$ и является C^* -алгеброй. Отку-

да, согласно теореме Гельфанда – Наймарка [1], $SD[0;1]$ изометрически изоморфна алгебре непрерывных функций на пространстве максимальных идеалов.

Пусть $\mathcal{A}(\mu)$ есть алгебра операторов умножения на функции из $SD[0;1]$, действующих в $L_p([0;1], \mu)$, где μ – заданная непрерывная (т. е. $\mu(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in [0;1]$) борелевская мера. Для определенности будем считать, что мера нормирована, т. е. $\mu([0;1]) = 1$. Далее будет показано, что при заданных условиях на меру алгебры $\mathcal{A}(\mu)$ изоморфны.

Целью настоящей работы является исследование структуры алгебр операторов $\mathcal{A}(\mu)$,

в зависимости от свойств заданной непрерывной меры μ . Обнаружено, что алгебры, соответствующие разным мерам μ , изоморфны, а их пространства максимальных идеалов гомеоморфны известному топологическому пространству «две стрелки». Это пространство было сконструировано П. С. Александровым и П. С. Урысоном в [13] и используется как универсальный контрпример в общей топологии. Установлен ряд свойств рассматриваемых алгебр. В работе приведены лишь формулировки теорем. В дальнейшем планируется публикация расширенной версии статьи с доказательствами.

2 Основные результаты

Пусть $S = \text{supp} \mu$ – носитель меры μ , без ограничения общности будем считать, что $0, 1 \in S$, (но может быть, что $S \neq [0;1]$). Обозначим $SD(S)$ алгебру функций, являющихся ограничениями на S функций из $SD[0;1]$. S есть компакт, содержащийся в $[0;1]$. В силу непрерывности μ , S является совершенным множеством (не содержит изолированных точек), его дополнение есть счётное семейство непересекающихся интервалов. Концы этих интервалов, а также точки 0 и 1 будем называть крайними точками множества S , а остальные точки – внутренними (здесь определение внутренних точек отличается от стандартного топологического). Определим подалгебру $T(S) \subset SD(S)$, состоящую из функций, непрерывных в крайних точках множества S и непрерывных слева во внутренних. В частности, если $S = [0;1]$, то $T[0;1]$ состоит из непрерывных в 0 и 1 и непрерывных слева на $(0;1)$ функций.

Пусть I_S – идеал алгебры $SD[0;1]$, состоящий из принадлежащих этой алгебре функций, μ -почти всюду равных нулю. Рассмотрим фактор-алгебру $SD[0;1]/I_S$. Согласно [1] (см. §2), норма класса $X = f + I_S$ эквивалентных функций определяется как инфимум их норм: $\|X\| = \inf_{f \in X} \|f\|$.

Теорема 2.1. Если μ непрерывная мера с носителем $S \subset [0;1]$, то алгебра $\mathcal{A}(\mu)$ изометрически изоморфна:

- 1) фактор-алгебре $SD[0;1]/I_S$;
- 2) подалгебре $T(S) \subset SD(S)$.

Первый изоморфизм $\mathcal{A}(\mu) \cong SD[0;1]/I_S$ является следствием теоремы о гомоморфизме алгебр, так как ядро естественного отображения состоит из функций, равных нулю μ -почти всюду (идеал I_S).

Для доказательства второго изоморфизма показывается, что у всех функций из одного класса эквивалентности $X \in SD[0;1]/I_S$ совпадают односторонние пределы во внутренних

точках S . Это позволяет выбрать в каждом классе эквивалентности единственного канонического представителя из алгебры $T(S)$. Изометричность следует из однозначности нормы на C^* -алгебрах.

Из сформулированной теоремы следует, что структура исследуемой алгебры $A(\mu)$ не зависит от вида конкретной меры μ , а зависит лишь от её носителя S .

Известно, что всякая борелевская мера μ на отрезке задается монотонно возрастающей функцией. Обозначим эту функцию m , также для определённости положим $m(0) = 0$. Поскольку рассматриваемая мера непрерывна, то и функция, ее порождающая, также непрерывна, следовательно $\text{Im}(m) = [0; 1]$. Функция m постоянна на любом интервале, имеющем меру нуль, поэтому ее ограничение $\pi = m|_S$ на носитель обладает свойством: $\text{Im}(\pi) = \text{Im}(m) = [0; 1]$. Отображение π также может быть определено как фактор-отображение, склеивающее концы интервалов из дополнения $(a_i \sim b_i)$. Полученное фактор-пространство есть связный, сепарабельный, упорядоченный компакт; по утверждению 6.3.2 (b) из [14], $S/\sim$ гомеоморфно отрезку. Для отображения π построим правое обратное отображение $g: [0; 1] \rightarrow S$, по правилам: $g(x) = \pi^{-1}(x)$, если x является образом внутренней точки множества S и $g(x) = a_i$, если $\pi(a_i) = x$, где a_i – левый конец интервала из дополнения.

Напомним, что полной вариацией функции f на упорядоченном множестве S называется величина

$$\text{Var}_S(f) = \sup \sum_i |f(x_{i+1}) - f(x_i)|,$$

где супремум берется по всем конечным упорядоченным наборам точек $x_i \in S$. Обозначим через $BV(S)$ пространство функций ограниченной вариации на S . Это пространство является банаховой алгеброй относительно нормы $\|f\|_{BV} = \|f\|_\infty + \text{Var}_S(f)$. В следующей теореме изометрия в пункте 4 понимается именно в смысле этой нормы.

Теорема 2.2. Введенное отображение π порождает:

1) отображение меры μ на меру Лебега на $[0; 1]$, по формуле $\lambda(E) = \mu(\pi^{-1}(E))$ для всякого борелевского E ;

2) изометрический изоморфизм

$$\Pi: L_p(S, \mu) \rightarrow L_p[0; 1],$$

действующий по правилу: $\Pi(f) = f \circ g$;

3) изометрический изоморфизм

$$\Pi: T(S) \rightarrow T[0; 1],$$

действующий по правилу: $\Pi(f) = f \circ g$;

4) изометрический изоморфизм

$$\Pi: BV(S) \cap T(S) \rightarrow BV[0; 1] \cap T[0; 1],$$

действующий по правилу: $\Pi(f) = f \circ g$.

Доказательство базируется на свойствах функции распределения непрерывной меры $m(x) = \mu([0; x])$. Изометричность в пространствах L_p обеспечивается теоремой о замене переменных в интеграле, поскольку π переводит меру μ в меру Лебега. Изоморфизм подалгебр $T(S)$ и $T[0; 1]$ (а также сохранение полной вариации для пространств BV) гарантируется тем, что отображение g монотонно. Благодаря этому свойству композиция с g корректно переводит функции с заданными односторонними пределами на S в функции с соответствующими односторонними пределами на $[0; 1]$.

Замечание 2.1. Важной особенностью построенного изоморфизма $\Pi: T(S) \rightarrow T[0; 1]$ является то, что он порожден отображением π , сохраняющим порядок точек, ввиду чего он обладает рядом дополнительных свойств. Как было отмечено, Π сохраняет полную вариацию функции. Кроме того, сохранение порядка гарантирует инвариантность интеграла Римана – Стильтьеса. Для любой функции $u \in T(S)$ и функции ограниченной вариации $v \in T(S)$ выполняется равенство:

$$\int_S u(t) dv(t) = \int_0^1 (\Pi(u))(\tau) d(\Pi(v))(\tau).$$

Данные факты имеют принципиальное значение для приложений к дифференциальным уравнениям с обобщенными коэффициентами и импульсным системам. Решения таких уравнений записываются через интегралы Стильтьеса и изоморфизм Π позволяет сводить исследование дифференциальных уравнений на сложном носителе S к эквивалентным задачам на отрезке $[0; 1]$ с сохранением оценок устойчивости и норм возмущений.

Замечание 2.2. Если вместо операторов умножения на функции из $SD[0; 1]$, рассмотреть операторы умножения на функции из $C[0; 1]$, то соответствующая алгебра операторов будет изоморфна $C(S)$ – алгебре непрерывных функций на носителе меры μ . Отметим, что алгебры $C(S)$ изоморфны лишь в случае гомеоморфности соответствующих носителей S .

Ранее автором было построено пространство максимальных идеалов алгебры $T(S)$ в случае, когда S есть отрезок $[0; 1]$ (соответствующая статья принята к печати во «Владикавказском математическом журнале»). Оказалось, что это пространство гомеоморфно известному топологическому пространству «две стрелки» (рисунок 2.1),

сконструированному ранее П. С. Александровым и П. С. Урысоном в их классической работе [13] в качестве примера компактного пространства, обладающего многими свойствами метрических пространств, но не метризуемого. В последующем пространство «две стрелки» изучалось с разных точек зрения и стало универсальным примером компакта с экзотическими свойствами. В качестве следствия свойств пространства «две стрелки» получено, что всякий чистый идеал в алгебре $T[0;1]$ является проективным и порождённым не более чем счётным множеством идемпотентов. Замкнутость чистого идеала эквивалентна тому, что он является главным, порождённым одним идемпотентом. В силу теоремы 2.2 все алгебры $T(S)$ имеют аналогичные свойства.

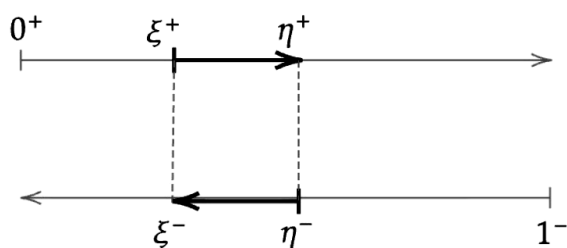


Рисунок 2.1 – Пространство «две стрелки» с выделенным элементом из стандартной базы, являющимся окрестностью точек ξ^+ и η^-

Заключение

В настоящей работе исследована структура банаховых алгебр операторов умножения на функции с разрывами первого рода, действующих в пространствах Лебега с произвольной непрерывной мерой.

Установлено, что все рассматриваемые алгебры операторов $\mathcal{A}(\mu)$ изометрически изоморфны, то есть не зависят от конкретной непрерывной меры μ и даже от топологической структуры носителя $\text{supp} \mu$ этой меры.

Построены изометрические изоморфизмы, позволяющие сводить изучение пространств функций на сложном носителе S и действующих в них операторов к эквивалентным объектам на отрезке $[0;1]$ с сохранением интеграла Римана – Стильтеса и полной вариации.

Показано, что пространства максимальных идеалов рассматриваемых алгебр гомеоморфно неметризуемому компакту «две стрелки» Александрова – Урысона.

Отметим, что полученные результаты допускают естественное обобщение. Поскольку основную роль в построении изоморфизмов играет тождество $\|M_a\| = \|a\|_{L^\infty(\mu)}$, вытекающее из свойства монотонности нормы, выводы работы остаются справедливыми для широкого класса функциональных пространств.

В частности, результаты без труда переносятся на шкалу пространств Лоренца $L^{p,q}$ (см. [15]), играющих важную роль в интерполяционной теории операторов. Более того, учитывая свойства однородности и монотонности квазинорм, аналогичные изоморфизмы алгебр имеют место и для пространств типа Харди – Лоренца $\mathcal{H}^{p,q}$ (подробно свойства таких пространств, определяемых через некасательные максимальные операторы, изложены в [16], [17]). Наконец, изометричность построенных отображений и структура пространства максимальных идеалов полностью сохраняются при переходе к пространствам Орлича L^Φ [18], которые, в частности, используются при исследовании интегральных уравнений со степенными нелинейностями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд, И. М. Коммутативные нормированные кольца / И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилев. – М. : Физматгиз, 1960. – 315 с.
2. Вечтомов, Е. М. Кольца непрерывных функций. Алгебраические аспекты / Е. М. Вечтомов // Итоги науки и техники. Серия Алгебра. Топология. Геометрия. – 1991. – Т. 29. – С. 119–191.
3. Вечтомов, Е. М. Подалгебры в полукольцах непрерывных частичных действительных функций / Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина // Фундаментальная и прикладная математика. – 2022. – Т. 24, № 1. – С. 125–140.
4. Gillman, L. Rings of Continuous Functions / L. Gillman, M. Jerison. – New York : Springer, 1976. – 300 p.
5. Келли, Дж. Л. Общая топология / Дж. Л. Келли. – М. : Наука, 1981. – 432 с.
6. Myers, S. B. Normed Linear Spaces of Continuous Functions / S. B. Myers // Annals of Mathematics. – 1950. – Vol. 51, № 3. – P. 528–540.
7. Агеев, С. М. Функциональные методы в теории абсолюта / С. М. Агеев // УМН. – 1983. – Т. 38, № 5. – С. 177–178.
8. Крупник, Н. Я. Банаховы алгебры с символом и сингулярные интегральные операторы / Н. Я. Крупник. – Кишинев : Штиинца, 1984. – 138 с.
9. Karlovich, Y. I. Algebras of Convolution-Type Operators with Piecewise Slowly Oscillating Data on Weighted Lebesgue Spaces / Y. I. Karlovich // Mediterranean Journal of Mathematics. – 2017. – Vol. 14, art. № 182. – DOI: 10.1007/s00009-017-0979-6.
10. Авсянкин, О. Г. Парные интегральные операторы с однородными ядрами, возмущенные операторами мультипликативного сдвига / О. Г. Авсянкин, А. М. Ковальчук // Владикавказский математический журнал. – 2018. – Т. 20, № 1. – С. 10–20. – DOI: 10.23671/VNC.2018.1.11392.

-
11. Пламеневский, Б. А. Алгебры псевдодифференциальных операторов / Б. А. Пламеневский. – М. : Наука, 1986. – 296 с.
12. Пламеневский, Б. А. Разрешимость алгебры псевдодифференциальных операторов с кусочно гладкими коэффициентами на гладком многообразии / Б. А. Пламеневский // Алгебра и анализ. – 2009. – Т. 21, № 2. – С. 214–263.
13. Александров, П. С. Мемуар о компактных топологических пространствах / П. С. Александров, П. С. Урысон. – М. : Наука, 1971. – 144 с.
14. Энгелькинг, Р. Общая топология / Р. Энгелькинг. – М. : Мир, 1986. – 752 с.
15. Grafakos, L. Classical Fourier Analysis / L. Grafakos. – 3rd ed. – New York : Springer, 2014. – 655 p. (Graduate Texts in Mathematics; № 249).
16. Кротов, В. Г. Интерполяционная теорема Марцинкевича для пространств типа Харди / В. Г. Кротов // Математические заметки. – 2023. – Т. 113, № 2. – С. 311–315.
17. Кротов, В. Г. Интерполяция операторов в пространствах типа Харди / В. Г. Кротов // Труды Математического института имени В. А. Стеклова РАН. – 2023. – Т. 323. – С. 181–195.
18. Красносельский, М. А. Выпуклые функции и пространства Орлича / М. А. Красносельский, Я. Б. Рutiцкий. – М. : Физматгиз, 1958. – 271 с.
- Работа выполнена при финансовой поддержке НАН Беларуси в рамках государственной программы «Конвергенция – 2030» (задание 1.08.1) и поддержке БРФФИ (№ Ф26М-025).*
- Поступила в редакцию 09.07.2026.*
-
- Информация об авторах**
Люксембург Иосиф Леонович – аспирант

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВОМ ФУНКЦИИ СКОРОСТИ ВО ВНУТРЕННЕЙ И ГРАНИЧНОЙ ТОЧКАХ

Я. В. Рудько

*Институт математики НАН Беларуси, Минск;
Белорусский государственный университет, Минск*

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS TO A MIXED PROBLEM FOR THE WAVE EQUATION WITH A DISCONTINUOUS VELOCITY FUNCTION AT INTERIOR AND BOUNDARY POINTS

J. V. Rudzko

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk;
Belarusian State University, Minsk*

Аннотация. Изучается смешанная задача в первом квадранте плоскости для волнового уравнения с условиями Коши и условием Дирихле. Условие Коши на производную по временной переменной имеет разрыв первого рода в одной точке. Предложены различные способы определения решения. Построены решения исследуемой задачи в явном аналитическом виде. Выведены необходимые и достаточные условия гладкости для существования решений. Доказана единственность решений. Установлены условия сопряжения, которым удовлетворяют построенные решения.

Ключевые слова: волновое уравнение, смешанная задача, негладкие начальные условия, условия согласования, условия сопряжения.

Для цитирования: Рудько, Я. В. Существование и единственность решений смешанной задачи для волнового уравнения с разрывом функции скорости во внутренней и граничной точках / Я. В. Рудько // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 3 (68). – С. 56–64. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_56. – EDN: QNPSSD

Abstract. We study a mixed problem in the first quadrant of the plane for the wave equation with the Cauchy conditions and the Dirichlet boundary condition. The Cauchy condition for the time-derivative has a discontinuity of the first kind at a single point. Various approaches to defining a solution are proposed. Explicit analytical representations of solutions to the problem under consideration are constructed. Necessary and sufficient smoothness conditions for the existence of solutions are derived. The uniqueness of solutions is proved. The matching conditions satisfied by the constructed solutions are established.

Keywords: wave equation, mixed problem, nonsmooth initial conditions, compatibility conditions, matching conditions.

For citation: Rudzko, J. V. Existence and uniqueness of solutions to a mixed problem for the wave equation with a discontinuous velocity function at interior and boundary points / J. V. Rudzko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 3 (68). – P. 56–64. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_56 (in Russian). – EDN: QNPSSD

Введение

Корректная постановка задачи для дифференциального уравнения с частными производными зависит от области, в которой задается уравнение, а также от условий, которые присоединяются к заданному уравнению. Гладкость решения зависит от гладкости заданных функций, но, как показывают последние исследования [1], [2], [9], она также существенно зависит от условий согласования для заданных функций, а те взаимно однозначным образом связаны с условиями сопряжения (см., например, [8]). Поэтому в случае плохих заданных условий постановка задачи получается с использованием условий сопряжения на характеристиках.

Продemonстрируем вышесказанное на примере. Следуя [3, с. 143–153], рассмотрим смешанную задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = f(t, x),$$

$$(t, x) \in Q = (0, \infty) \times (0, \infty), \quad (0.1)$$

$$u(0, x) = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, \infty), \quad (0.2)$$

$$u(t, 0) = \mu(t), \quad t \in [0, \infty). \quad (0.3)$$

Пусть $f \in C^1(\bar{Q})$, $\phi \in C^2([0, \infty))$, $\psi \in C^1([0, \infty))$,

$\mu \in C^2([0, \infty))$. Как известно [3, с. 143–153], в этом случае задача (0.1)–(0.3) допускает классическое решение u тогда и только тогда, когда для заданных функций f , ϕ , ψ и μ справедливы однородные условия согласования:

$$\begin{aligned} D^2\mu(0) - (a^2 D^2\phi(0) + f(0, 0)) &= 0, \\ D\mu(0) - \psi(0) &= 0, \quad \mu(0) - \phi(0) = 0. \end{aligned} \quad (0.4)$$

Это решение u имеет вид

$$u(t, x) = \begin{cases} u_1(t, x), & (t, x) \in \tilde{Q}^{(1)}, \\ u_2(t, x), & (t, x) \in \tilde{Q}^{(2)}, \end{cases} \quad (0.5)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{Q}^{(1)} &= \{(t, x) : (t, x) \in Q, x - at > 0\}, \\ \tilde{Q}^{(2)} &= \{(t, x) : (t, x) \in Q, x - at < 0\}, \\ u_1(t, x) &= w(t, x) + \frac{\phi(x + at) + \phi(x - at)}{2} + \\ &\quad + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, \\ u_2(t, x) &= w(t, x) - w\left(t - \frac{x}{a}, 0\right) + \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) + \\ &\quad + \frac{\phi(x + at) - \phi(at - x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} \psi(\xi) d\xi, \\ w(t, x) &= \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \tilde{f}(\tau, \xi) d\xi, \\ \tilde{f}(t, x) &= \begin{cases} f(t, 0) + x \partial_x f(t, 0), & x < 0, \\ f(t, x), & x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Замечание 0.1. В формуле (0.5) функция $\tilde{f}$ – это непрерывно дифференцируемое продолжение функции f (это означает, что если $f \in C^1(\bar{Q})$, то $\tilde{f} \in C^1(\bar{Q})$), а функция w является частным решением волнового уравнения (0.1), которое удовлетворяет однородным условиям Коши

$$w(0, x) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}(0, x) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(0, x) = f(0, x).$$

Также следует сказать, что, вообще говоря, в качестве w можно брать любое другое частное классическое решение волнового уравнения (0.1), удовлетворяющее однородным условиям Коши, и независимо от выбранного решения w представление (0.5) будет определять одну и ту же функцию в силу теоремы существования и единственности классического решения задачи (0.1)–(0.3) [3, с. 153].

Однородные условия согласования (0.4) сильно ограничивают выбор заданных функций. Также в случае моделирования имеются погрешности, и эти условия однородности нарушаются. В этом случае мы можем рассматривать задачу в случае неоднородных условий согласования:

$$\begin{aligned} D^2\mu(0) - (a^2 D^2\phi(0) + f(0, 0)) &= \delta_2, \\ D\mu(0) - \psi(0) &= \delta_1, \quad \mu(0) - \phi(0) = \delta_0. \end{aligned}$$

В этом случае аналитическое представление решения остается тем же самым, а только на прямой $x = at$ следует вычислить предельные значения функций u_1 и u_2 и их частных производных до второго порядка включительно и затем рассмотреть их разность. Проведя эти несложные вычисления, мы получим

$$(u_1 - u_2)(t, at) = \phi(0) - \mu(0) = -\delta_0, \quad (0.6)$$

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)(t, at) = \psi(0) - D\mu(0) = -\delta_1, \quad (0.7)$$

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x}\right)(t, at) = \frac{D\mu(0) - \psi(0)}{a} = \frac{\delta_1}{a}, \quad (0.8)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\right)(t, at) &= \\ &= a^2 D^2\phi(0) + f(0, 0) - \mu(0) = -\delta_2, \end{aligned} \quad (0.9)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)(t, at) &= \\ &= \frac{a^2 D^2\phi(0) + f(0, 0) - \mu(0)}{a^2} = -\frac{\delta_2}{a^2}, \end{aligned} \quad (0.10)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial x}\right)(t, at) &= \\ \frac{D^2\mu(0) - (a^2 D^2\phi(0) + f(0, 0))}{a} &= \frac{\delta_2}{a}. \end{aligned} \quad (0.11)$$

Соотношения (0.6)–(0.11) можно рассматривать как условия сопряжения. Поэтому в задаче (0.1)–(0.3) из формул (0.6)–(0.11) следует взаимно-однозначное соответствие между условиями сопряжения и условиями согласования.

В случае неоднородных условий согласования

$$\delta_0^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 \neq 0$$

постановка задачи такова: требуется найти кусочно-гладкое решение

$$u(t, x) = \begin{cases} u_1(t, x), & (t, x) \in \tilde{Q}^{(1)}, \\ u_2(t, x), & (t, x) \in \tilde{Q}^{(2)}, \end{cases}$$

уравнения (0.1), такое что $u_j \in C^2(\tilde{Q}^{(j)})$, $j = 1, 2$,

функция u_1 удовлетворяет условиям Коши

$$u_1(0, x) = \phi(x), \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}(0, x) = \psi(x), \quad x \in (0, \infty),$$

функция u_2 – граничному условию

$$u_2(t, 0) = \mu(t), \quad t \in (0, \infty),$$

и на характеристике $\gamma = \{(t, x) \in \bar{Q} : x = at\}$, которая проходит через угловую точку $(0, 0)$ множества $\bar{Q}$, выполняются условия сопряжения (0.6)–(0.11).

Как видно, гладкость решения зависит не только от гладкости заданных функций, но и от выполнения условий сопряжения. Подобно работе [4], в данной статье мы будем рассматривать задачи с негладким условием Коши. Согласно [4], если в условии Коши $u(0, x) = \phi(x)$ имеется разрыв (т. е. если функция ϕ разрывная), то решение получается, в общем случае, только разрывным кусочно-гладким. Возникает вопрос, что будет с гладкостью решения, если разрыв допускает функция ψ второго условия Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi(x),$$

а функция ϕ непрерывно дифференцируема до второго порядка включительно на множестве своего задания.

1 Первая смешанная задача с разрывом функции во внутренней точке множества задания

Рассмотрим вначале задачу, где разрыв допускает функция ψ второго условия Коши (0.2) во внутренней точке множества своего задания, а именно: рассмотрим задачу (0.1)–(0.3) в случае

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x), & x \in [0, x^*), \\ \psi_2(x), & x \in (x^*, \infty), \end{cases} \quad (1.1)$$

где $x^* > 0$.

Считаем, что функции f , ϕ , ψ_1 , ψ_2 и μ задачи (0.1)–(0.3) и (1.1) достаточно гладкие, а именно:

$$f \in C^1(\bar{Q}), \quad \phi \in C^2([0, \infty)), \quad \mu \in C^2([0, \infty)), \\ \psi_1 \in C^1([0, x^*]), \quad \psi_2 \in C^1([x^*, \infty)). \quad (1.2)$$

Задача (0.1)–(0.3) и (1.1) моделирует следующую задачу из теории поперечного удара [3, с. 82–84], [5, с. 126, 134]. Пусть полуограниченная струна, левая граница $x = 0$ которой движется по определенному закону $\mu(t)$, подвергается

в начальный момент $t = 0$ удару молоточком, сообщаящим ее точкам $x \in [0, x^*)$ дополнительную скорость, которая задается функцией v . Мы также полагаем, что в начальный момент времени $t = 0$ профиль струны описывается функцией ϕ , скорости точек струны задаются функцией $\tilde{\psi}$, и в струне отсутствуют ударные волны. Тогда, функция u , задающая вертикальное (поперечное) смещение точек струны, удовлетворяет смешанной задаче (0.1)–(0.3) и (1.1), где $\psi_1 = \tilde{\psi}|_{[0, x^*]} + v$, $\psi_2 = \tilde{\psi}|_{[x^*, \infty)}$, $a = \sqrt{T\rho}^{-1}$, $T > 0$ – сила натяжения струны, $\rho > 0$ – погонная плотность струны (масса на единицу длины). Функция f – это плотность внешней силы, деленная на ρ .

Вообще говоря, из физических свойств струны (непрерывность профиля струны) должно выполняться условие согласования

$$\mu(0) = \phi(0). \quad (1.3)$$

Однако мы будем рассматривать смешанную задачу (0.1)–(0.3) и (1.1) в общем случае, не предполагая истинности (1.3). В связи с этим величины $\mu(0)$ и $\phi(0)$ понимаются как $\mu(0) = u(0+0, 0)$ и $\phi(0) = u(0, 0+0)$. Величина $\psi(0)$ в этой задаче также понимается как $\psi(0) = \partial_t u(0, 0+0)$.

Невыполнение условия (1.3) может иметь место в случае резкого рывка, например: конец $x = 0$ струны жестко закреплен на вибраторе, который за пренебрежимо малое время сместился к положению $\mu(0)$, что, в некотором приближении, сгенерировало ударную волну.

Слабое решение. Как известно, если задача (0.1)–(0.3) и (1.1), допускает классическое решение, то оно представляется в виде (0.5). Однако представление (0.5) корректно задает кусочно-гладкую функцию u , даже если не выполняются необходимые условия согласования и гладкости, обеспечивающие существование классического решения. Достаточно потребовать

$$f \in C^1(\bar{Q}), \quad \phi \in C([0, \infty)), \\ \psi \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty)), \quad \mu \in C([0, \infty)), \quad (1.4)$$

чтобы формула (0.5) задавала функцию u из класса $C(\bar{Q} \setminus \gamma)$. Докажем это. Перепишем формулу (0.5) при (1.1) в следующем виде

$$u(t, x) = u^{(1)}(t, x) = w(t, x) + \frac{\phi(x+at) + \phi(x-at)}{2} + \\ + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}_1(\xi) d\xi, \quad (t, x) \in Q^{(1)}, \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u^{(2)}(t, x) = \\ &= w(t, x) + \frac{\phi(x+at) + \phi(x-at)}{2} + \\ &+ \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}_2(\xi) d\xi, \quad (t, x) \in Q^{(2)}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u^{(3)}(t, x) = \\ &= w(t, x) + \frac{\phi(x+at) + \phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x^*-at}^{x^*} \tilde{\psi}_1(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{1}{2a} \int_{x^*}^{x^*+at} \tilde{\psi}_2(\xi) d\xi, \quad (t, x) \in Q^{(3)}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u^{(4)}(t, x) = \\ &= w(t, x) - w\left(t - \frac{x}{a}, 0\right) + \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) + \\ &+ \frac{\phi(x+at) - \phi(at-x)}{2} + \\ &+ \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} \tilde{\psi}_1(\xi) d\xi, \quad (t, x) \in Q^{(4)}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u^{(5)}(t, x) = \\ &= w(t, x) - w\left(t - \frac{x}{a}, 0\right) + \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) + \\ &+ \frac{\phi(x+at) - \phi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x^*} \tilde{\psi}_1(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{1}{2a} \int_{x^*}^{at+x} \tilde{\psi}_2(\xi) d\xi, \quad (t, x) \in Q^{(5)}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} u^{(6)}(t, x) &= w(t, x) - w\left(t - \frac{x}{a}, 0\right) + \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) + \\ &+ \frac{\phi(x+at) - \phi(at-x)}{2} + \\ &+ \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} \tilde{\psi}_2(\xi) d\xi, \quad (t, x) \in Q^{(6)}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

На рисунке 1.1 показано разделение области Q характеристиками $x-at=0$, $x+at=x^*$, $x-at=x^*$ и $x-at=-x^*$ на шесть подобластей $Q^{(j)}$, $j=1, 2, \dots, 6$:

$$\begin{aligned} Q^{(1)} &= Q \cap \{(t, x) : x+at < x^*, x-at < x^*, x-at > 0\}, \\ Q^{(2)} &= Q \cap \{(t, x) : x+at > x^*, x-at > x^*, x-at > 0\}, \\ Q^{(3)} &= Q \cap \{(t, x) : x+at > x^*, x-at < x^*, x-at > 0\}, \\ Q^{(4)} &= Q \cap \{(t, x) : x+at < x^*, x-at < x^*, x-at < 0\}, \\ Q^{(5)} &= Q \cap \{(t, x) : x+at > x^*, x-at > -x^*, x-at < 0\}, \end{aligned}$$

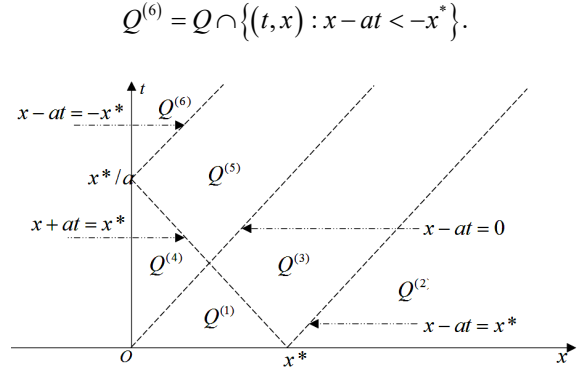


Рисунок 1.1 – Разделение области Q

Значит, чтобы было верно $u \in C(\bar{Q} \setminus \gamma)$ должны выполняться условия

$$\begin{aligned} u^{(5)}(t, x=at-x^*) &= u^{(6)}(t, x=at-x^*), \\ u^{(4)}(t, x=x^*-at) &= u^{(5)}(t, x=x^*-at), \\ u^{(1)}(t, x=x^*-at) &= u^{(3)}(t, x=x^*-at), \\ u^{(2)}(t, x=x^*+at) &= u^{(3)}(t, x=x^*+at). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Непосредственной подстановкой выражений (1.5)–(1.10) в (1.11) убеждаемся в истинности условий (1.11) без каких-либо дополнительных условий.

Определение 1.1. Функцию u , определяемую формулой (0.5), назовем слабым решением задачи (0.1)–(0.3).

Согласно вышесказанному, имеет место утверждение.

Утверждение 1.1. Пусть выполняются условия гладкости (1.4). Тогда задача (0.1)–(0.3) и (1.1) имеет единственное слабое решение из класса $C(\bar{Q} \setminus \gamma)$.

Повысим гладкость слабого решения.

Утверждение 1.2. Пусть выполняются условия гладкости (1.4). Тогда задача (0.1)–(0.3) и (1.1) имеет единственное слабое решение из класса $C(\bar{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (1.3).

Доказательство. Для того чтобы функция u принадлежала классу $C(\bar{Q})$ достаточно потребовать условий

$$\begin{aligned} u^{(1)}(t, x=at) &= u^{(4)}(t, x=at), \\ u^{(5)}(t, x=at) &= u^{(3)}(t, x=at). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Подставив выражения (1.5) и (1.7)–(1.9) в равенства (1.12), получим, что условия (1.12) верны при $\mu(0) = \phi(0)$.

Необходимость условия $\mu(0) = \phi(0)$ следует из того, что

$$u(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} u(t,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \mu(t) = \mu(0)$$

и

$$u(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} u(0,x) = \lim_{x \rightarrow 0} \phi(x) = \phi(0). \quad \square$$

Кусочно-гладкое решение. Заметим, что если выполняются условия (1.2), то из формул (1.5)–(1.10) следует, что $u^{(j)} \in C^2(\bar{Q}^{(j)})$, $j=1,2,\dots,6$.

Это влечет $u \in C^2(\bar{Q} \setminus \mathcal{M})$, где

$$\mathcal{M} = \{(t,x) : x-at=0, x-at=\pm x^*, x+at=x^*\}.$$

Представления (1.5)–(1.10) также влекут, что в этом случае слабое решение u задачи (0.1)–(0.3) и (1.1) удовлетворяет в обычном смысле волновому уравнению (0.1) на множестве $\bar{Q} \setminus \mathcal{M}$, первому условию Коши из (0.2) на множестве $(0,\infty)$, второму условию Коши из (0.2) на множестве $(0,\infty) \setminus \{x^*\}$, граничному условию (0.3) на множестве $(0,\infty)$ и условиям сопряжения:

$$[(u)^+ - (u)^-](t, at - x^*) = 0, t \in (a^{-1}x^*, \infty),$$

$$[(u)^+ - (u)^-](t, x^* + at) = 0, t \in (0, \infty),$$

$$[(u)^+ - (u)^-](t, x^* - at) = 0, t \in \left(0, \frac{x^*}{a}\right) \setminus \left\{\frac{x^*}{2a}\right\},$$

$$[(u)^+ - (u)^-](t, at) = \phi(0) - \mu(0), t \in (0, \infty). \quad (1.13)$$

Здесь было использовано обозначение $(u)^\pm$ – предельные значения функции u с разных сторон на характеристиках вида $x=r(t)$, т. е.

$$(u)^\pm(t, r(t)) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} u(t, r(t) \pm \Delta x),$$

где r – функция действительного переменного.

Формулы (1.13) следуют из представлений (1.5) – (1.10). Докажем это. В самом деле,

$$\begin{aligned} & [(u)^+ - (u)^-](t, at - x^*) = \\ & = (u^{(5)} - u^{(6)})(t, at - x^*), t \in (a^{-1}x^*, \infty), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [(u)^+ - (u)^-](t, x^* + at) = \\ & = (u^{(2)} - u^{(3)})(t, x^* + at), t \in (0, \infty), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [(u)^+ - (u)^-](t, x^* - at) = \\ & = (u^{(3)} - u^{(1)})(t, x^* - at), t \in \left(0, \frac{x^*}{2a}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [(u)^+ - (u)^-](t, x^* - at) = \\ & = (u^{(5)} - u^{(4)})(t, x^* - at), t \in \left(\frac{x^*}{2a}, \frac{x^*}{a}\right), \end{aligned}$$

$$[(u)^+ - (u)^-](t, at) = (u^{(1)} - u^{(4)})(t, at), t \in \left(0, \frac{x^*}{2a}\right),$$

$$[(u)^+ - (u)^-](t, at) = (u^{(3)} - u^{(4)})\left(\frac{x^*}{2a}, \frac{x^*}{2}\right), t = \frac{x^*}{2a},$$

$$\begin{aligned} & [(u)^+ - (u)^-](t, at) = \\ & = (u^{(3)} - u^{(5)})(t, at), t \in \left(\frac{x^*}{2a}, \infty\right), \end{aligned} \quad (1.14)$$

Вычисляем величины, входящие в правые части равенств (1.14)

$$\begin{aligned} & u^{(1)}(t, x=at) = \\ & = \frac{1}{2a} \int_0^{2at} \psi_1(\xi) d\xi + w(t, at) + \frac{1}{2}(\phi(0) + \phi(2at)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & u^{(4)}(t, x=at) = \frac{1}{2a} \int_0^{2at} \psi_1(\xi) d\xi + w(t, at) + \\ & + \frac{1}{2}(\phi(2at) - \phi(0)) + \mu(0) - w(0,0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & u^{(3)}(t, x=at) = \frac{1}{2a} \int_0^{x^*} \psi_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_{x^*}^{2at} \psi_2(\xi) d\xi + \\ & + w(t, at) + \frac{\phi(0) + \phi(2at)}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & u^{(3)}(t, x=at+x^*) = \frac{1}{2a} \int_{x^*}^{2at+x^*} \psi_2(\xi) d\xi + \\ & + w(t, at+x^*) + \frac{\phi(x^*) + \phi(2at+x^*)}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & u^{(2)}(t, x=at+x^*) = \frac{1}{2a} \int_{x^*}^{2at+x^*} \psi_2(\xi) d\xi + \\ & + w(t, at+x^*) + \frac{\phi(x^*) + \phi(2at+x^*)}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & u^{(1)}(t, x=x^*-at) = \frac{1}{2a} \int_{x^*-2at}^{x^*} \psi_1(\xi) d\xi + \\ & + w(t, x^*-at) + \frac{\phi(x^*) + \phi(x^*-2at)}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u^{(3)}(t, x = x^* - at) &= \frac{1}{2a} \int_{x^* - 2at}^{x^*} \psi_1(\xi) d\xi + \\
 &+ w\left(t, x^* - at\right) + \frac{\phi(x^*) + \phi(x^* - 2at)}{2}, \\
 u^{(4)}(t, x = x^* - at) &= \\
 &= \frac{1}{2a} \int_{x^* - 2at}^{x^*} \psi_1(\xi) d\xi + w\left(t, x^* - at\right) - \\
 &- w\left(2t - \frac{x^*}{a}, 0\right) + \mu\left(2t - \frac{x^*}{a}\right) + \frac{\phi(x^*) - \phi(2at - x^*)}{2}, \\
 u^{(5)}(t, x = x^* - at) &= \\
 &= \frac{1}{2a} \int_{x^* - 2at}^{x^*} \psi_1(\xi) d\xi + w\left(t, x^* - at\right) - \\
 &- w\left(2t - \frac{x^*}{a}, 0\right) + \mu\left(2t - \frac{x^*}{a}\right) + \frac{\phi(x^*) - \phi(2at - x^*)}{2}, \\
 u^{(6)}(t, x = at - x^*) &= \\
 &= \frac{1}{2a} \int_{x^*}^{2at - x^*} \psi_2(\xi) d\xi + w\left(t, at - x^*\right) - w\left(\frac{x^*}{a}, 0\right) + \\
 &+ \mu\left(\frac{x^*}{a}\right) + \frac{\phi(2at - x^*) - \phi(x^*)}{2},
 \end{aligned}$$

и подставляем их в (1.14), что в результате дает (1.11).

Согласно вышесказанному, при условиях (1.2) слабое решение можно рассматривать как решение задачи с условиями сопряжения. Сформулируем такую задачу.

Задача (0.1)–(0.3) и (1.1) с условиями сопряжения на характеристиках. Требуется найти классическое решение уравнения (0.1) на множестве $\bar{Q} \setminus M$, удовлетворяющее первому условию Коши из (0.2) на множестве $(0, \infty)$, второму условию Коши из (0.2) на множестве $(0, \infty) \setminus \{x^*\}$ и граничному условию (0.3) на множестве $(0, \infty)$ и условиям сопряжения (1.13).

Согласно вышеописанному, классическое решение задачи (0.1)–(0.3) и (1.1) с условиями сопряжения (1.13) существует при условиях гладкости (1.2) и определяется формулой (0.5). Докажем единственность такого решения. Для этого воспользуемся тем фактом, что решение задачи (0.1)–(0.3) и (1.1) с условиями сопряжения (1.13) представляет собой совокупность решений задач Коши на множествах $\bar{Q}^{(1)}$ и $\bar{Q}^{(2)}$, Гурса на множествах $\bar{Q}^{(3)}$ и $\bar{Q}^{(5)}$ и Пикара на множествах $\bar{Q}^{(4)}$ и $\bar{Q}^{(6)}$. Классические решения этих

подзадач определяются единственным образом (см. [3, с. 138–142] для задачи Коши, [6] для задачи Гурса, а решение задачи Пикара построено в работе [7]).

Введем определение кусочно-гладкого решения задачи (0.1)–(0.3) и (1.1).

Определение 1.2. Кусочно-гладким решением задачи (0.1)–(0.3) и (1.1) будем считать классическое решение задачи (0.1)–(0.3) и (1.1) с условиями сопряжения (1.13).

Согласно проведенным рассуждениям, имеет место следующая теорема.

Теорема 1.1. Пусть выполняются условия гладкости (1.4). Тогда задача (0.1)–(0.3) и (1.1) имеет единственное кусочно-гладкое решение из класса $C^2(\bar{Q} \setminus M)$. Это решение определяется формулой (0.5).

Заметим, что при условиях (1.4) кусочно-гладкое решение задачи (0.1)–(0.3) и (1.1) является слабым и, наоборот, поскольку они определяются одним и тем же выражением (0.5), и единственным.

Имеет место утверждение.

Утверждение 1.3. Пусть выполняются условия гладкости (1.4). Тогда задача (0.1)–(0.3) и (1.1) имеет единственное кусочно-гладкое решение из класса $C^2(\bar{Q} \setminus M) \cup C(\bar{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (1.3).

Доказательство следует из утверждения 1.2 и теоремы 1.1, а также эквивалентности слабого и кусочно-гладкого решения.

2 Первая смешанная задача с разрывом функции в граничной точке множества задания

Рассмотрим теперь задачу (0.1)–(0.3) в случае

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1, & x = 0, \\ \psi_2(x), & x \in (0, \infty), \end{cases} \quad (2.1)$$

где ψ_1 не обязательно равно $\psi_2(0)$.

Считаем, что функции f , ϕ , ψ_2 и μ задачи (0.1)–(0.3) и (2.1) достаточно гладкие, а именно:

$$\begin{aligned}
 f &\in C^1(\bar{Q}), \quad \phi \in C^2([0, \infty)), \\
 \mu &\in C^2([0, \infty)), \quad \psi_2 \in C^1([0, \infty)). \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

Логично рассматривать задачу (0.1)–(0.3) и (2.1) как предельный случай задачи (0.1)–(0.3) и (1.1), т. е. понимать решение задачи (0.1)–(0.3) и (2.1) как предел решений задачи (0.1)–(0.3) и (1.1). При этом предел можно брать только по классическим решениям, что существенно упрощает построение.

Определение 2.1. Предельным кусочно-гладким решением задачи (0.1)–(0.3) и (2.1) назовем функцию u , которая определяется формулой

$$u(t, x) = \lim_{x^* \rightarrow 0} u_{x^*}(t, x), \quad (2.3)$$

где предел поточечный и u_{x^*} – классическое решение задачи

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_{x^*}(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in Q,$$

$$u_{x^*}(0, x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x < \infty,$$

$$\frac{\partial u_{x^*}}{\partial t}(0, x) = \tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \tilde{\psi}_1(x), & x < x^*, \\ \tilde{\psi}_2(x), & x \geq x^*, \end{cases}$$

$$u_{x^*}(t, 0) = \mu(t), \quad 0 \leq t < \infty,$$

где $x^* > 0$, $\tilde{\psi}_1(0) = \psi_1$, $\tilde{\psi}_2 = \psi_2|_{[x^*, \infty)}$,

$$\|\tilde{\psi}_1\|_{C([0, x^*])} \leq \|\psi_2\|_{C([0, x^*])} + |\psi_1 - \psi_2(0)|$$

и $\tilde{\psi} \in C^1([0, +\infty))$.

Согласно [3, с. 153], если выполняются условия гладкости (2.2), то функция $u_{x^*} \in C^2(\bar{Q})$ корректно определена, если и только если выполняются условия согласования

$$D^2\mu(0) - (a^2 D^2\phi(0) + f(0, 0)) = 0,$$

$$D\mu(0) - \tilde{\psi}(0) = D\mu(0) - \psi_1 = 0,$$

$$\mu(0) - \phi(0) = 0. \quad (2.4)$$

При этом функция u_{x^*} определяется формулой (0.5) со значением

$$\psi(x) = \tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \tilde{\psi}_1(x), & x < x^*, \\ \tilde{\psi}_2(x), & x \geq x^*. \end{cases}$$

Для предельного перехода по формуле (2.3), нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Утверждение 2.1. Пусть $l > 0$. Тогда

$$\lim_{x^* \rightarrow 0} \int_0^l \tilde{\psi}(\xi) d\xi = \int_0^l \psi_2(\xi) d\xi.$$

Доказательство. Функция $\tilde{\psi}$ сходится поточечно к функции ψ . В силу условий, наложенных на функцию $\tilde{\psi}_1$ в определении 2.1, имеет место неравенство

$$\|\tilde{\psi}_1\|_{C([0, x^*])} \leq \|\psi_2\|_{C([0, x^*])} + |\psi_1 - \psi_2(0)|.$$

Таким образом, число $\|\psi_2\|_{C([0, x^*])} + |\psi_1 - \psi_2(0)|$ равномерно ограничивает семейство функций $\tilde{\psi}$. Следовательно, по теореме Лебега о мажорируемой

сходимости можем записать

$$\lim_{x^* \rightarrow 0} \int_0^l \tilde{\psi}(\xi) d\xi = \int_0^l \left(\lim_{x^* \rightarrow 0} \tilde{\psi}(\xi) \right) d\xi = \int_0^l \psi(\xi) d\xi.$$

Поскольку $\psi(x) = \psi_2(x)$ почти всюду на отрезке $[0, l]$, то имеет место равенство

$$\lim_{x^* \rightarrow 0} \int_0^l \tilde{\psi}(\xi) d\xi = \int_0^l \psi(\xi) d\xi = \int_0^l \psi_2(\xi) d\xi. \quad \square$$

Вычислив предел (2.3), получим выражение

$$u(t, x) = w(t, x) + \frac{\phi(x + at) + \phi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_2(\xi) d\xi, \quad (t, x) \in \tilde{Q}^{(1)}, \quad (2.5)$$

$$u(t, x) = w(t, x) - w\left(t - \frac{x}{a}, 0\right) + \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{\phi(x + at) - \phi(at - x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} \psi_2(\xi) d\xi, \quad (t, x) \in \tilde{Q}^{(2)}, \quad (2.6)$$

а функция w определена во введении. Заметим, что если не выполняется хотя бы одно из условий согласования (2.4), то функция u не определена, поскольку в таком случае функции u_{x^*} не существуют.

Легко видеть, что $u \in C^2(\bar{Q} \setminus \gamma)$, если выполняются условия гладкости (2.2). Более того, из (2.5) и (2.6) следует

$$\begin{aligned} u(t, x = at + 0) &= \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^{2at} \psi_2(\xi) d\xi + w(t, at) + \frac{1}{2} (\phi(0) + \phi(2at)), \\ u(t, x = at - 0) &= \frac{1}{2a} \int_0^{2at} \psi_2(\xi) d\xi + w(t, at) + \\ &+ \frac{1}{2} (\phi(2at) - \phi(0)) + \mu(0) - w(0, 0), \end{aligned}$$

что влечет $[(u)^+ - (u)^-](t, at) = \phi(0) - \mu(0) = 0$

для всех $t \in (0, \infty)$. Таким образом, $u \in C(\bar{Q})$.

При этом, вообще говоря, $\partial_t u \notin C(\bar{Q})$ и $\partial_x u \notin C(\bar{Q})$, поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x = at + 0) &= \\ &= \frac{\psi_2(0) + \psi_2(2at)}{2} + \frac{a\phi'(2at) - a\phi'(0)}{2} + \frac{\partial w}{\partial t}(t, at), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x = at + 0) &= \\ &= \frac{\psi_2(2at) - \psi_2(0)}{2a} + \frac{\phi'(0) + \phi'(2at)}{2} + \frac{\partial w}{\partial x}(t, at), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t, x = at) &= \frac{\psi_2(2at) - \psi_2(0)}{2} + \\ &+ \mu'(0) + \frac{a\phi'(2at) - a\phi'(0)}{2} + \frac{\partial w}{\partial t}(t, at), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, x = at) &= \frac{\psi_2(0) + \psi_2(2at)}{2a} - \\ &- \frac{\mu'(0)}{a} + \frac{\phi'(0) + \phi'(2at)}{2} + \frac{\partial w}{\partial x}(t, at), \end{aligned}$$

что влечет

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^+ - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^- \right](t, at) &= \psi_2(0+) - D\mu(0), \\ \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^+ - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^- \right](t, at) &= \frac{D\mu(0) - \psi_2(0+)}{a}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали запись

$$\frac{\partial^{p+k} w}{\partial t^p \partial x^k}(f_1(t, x), f_2(t, x)),$$

которая понимается как

$$\frac{\partial^{p+k} w}{\partial \tau^p \partial \xi^k}(\tau = f_1(t, x), \xi = f_2(t, x)),$$

где k и p это целые числа. Следовательно, имеет место теорема.

Теорема 2.1. Пусть выполняются условия гладкости (2.2). Тогда задача (0.1)–(0.3) и (2.1) имеет единственное предельное кусочно-гладкое решение из класса $C^2(\bar{Q} \setminus \gamma) \cap C(\bar{Q})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (2.4). Это решение определяется формулами (2.5) и (2.6).

Из формул (2.5) и (2.6) следует, что кусочно-гладкое решение u задачи (0.1)–(0.3) и (2.1) удовлетворяет в обычном смысле волновому уравнению (0.1) на множестве $\bar{Q} \setminus \gamma$, первому условию Коши из (0.2) на множестве $[0, \infty)$, второму условию Коши из (0.2) на множестве $(0, \infty)$, граничному условию (0.3) на множестве $[0, \infty)$ и условию сопряжения

$$[(u)^+ - (u)^-](t, at) = 0.$$

Может показаться, что решение задачи (0.1)–(0.3) и (2.1) в смысле определения 2.1 не зависит от константы ψ_1 . Однако, это не так.

Если мы рассмотрим две задачи (0.1)–(0.3) и (2.1), в которых все данные, кроме числа ψ_1 , совпадают, то только одна из них может иметь решение: та, в которой $\psi_1 = D\mu(0)$ – если это условие не выполнено в обеих этих задачах, то обе эти задачи не имеют решения.

Решение задачи (0.1)–(0.3) и (2.1) можно построить и в случае, когда $\mu(0) \neq \phi(0)$.

Определение 2.2. Обобщенным предельным кусочно-гладким решением задачи (0.1)–(0.3) и (2.1) назовем функцию u , которая определяется формулой

$$u(t, x) = \theta(at - x)(\phi(0) - \mu(0)) + \lim_{x^* \rightarrow 0} u_{x^*}(t, x),$$

где предел поточечный, θ – функция Хэвисайда и u_{x^*} – классическое решение задачи

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_{x^*}(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in Q,$$

$$u_{x^*}(0, x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x < \infty,$$

$$\frac{\partial u_{x^*}}{\partial t}(0, x) = \tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \tilde{\psi}_1(x), & x < x^*, \\ \tilde{\psi}_2(x), & x \geq x^*, \end{cases}$$

$$u_{x^*}(t, 0) = \tilde{\mu}(t) = \mu(t) + \phi(0) - \mu(0), \quad 0 \leq t < \infty,$$

$$\text{где } x^* > 0, \quad \tilde{\psi}_1(0) = \psi_1, \quad \tilde{\psi}_2 = \psi_2|_{[x^*, \infty)},$$

$$\|\tilde{\psi}_1\|_{C([0, x^*])} \leq \|\psi_2\|_{C([0, x^*])} + |\psi_1 - \psi_2(0)|$$

$$\text{и } \tilde{\psi} \in C^1([0, +\infty)).$$

Повторив рассуждения, которые привели нас к теореме 2.1, получим, что при условиях (2.2) обобщенное предельное кусочно-гладкое решение задачи u определяется по формулам (2.5) и (2.6) и существует тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$D^2\mu(0) - (a^2 D^2\phi(0) + f(0, 0)) = 0,$$

$$D\mu(0) - \psi_1 = 0. \quad (2.7)$$

Следовательно, предельное кусочно-гладким решением задачи (0.1)–(0.3) и (2.1) – это частный случай обобщенного предельного кусочно-гладкого решения.

Теорема 2.2. Пусть выполняются условия гладкости (2.2). Тогда задача (0.1)–(0.3) и (2.1) имеет единственное обобщенное предельное кусочно-гладкое решение из класса $C^2(\bar{Q} \setminus \gamma)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (2.7). Это решение определяется формулами (2.5) и (2.6).

Из формул (2.5) и (2.6) следует, что кусочно-гладкое решение u задачи (0.1)–(0.3) и (2.1) удовлетворяет в обычном смысле волновому уравнению (0.1) на множестве $\bar{Q} \setminus \gamma$, первому условию Коши из (0.2) на множестве $(0, \infty)$, второму условию Коши из (0.2) на множестве $(0, \infty)$, граничному условию (0.3) на множестве $(0, \infty)$ и условию сопряжения

$$\left[(u)^+ - (u)^- \right] (t, at) = \phi(0) - \mu(0).$$

Можно также построить решение задачи (0.1)–(0.3) и (2.1) без каких-либо условий согласования. Для этого заметим, что формулы (2.5) и (2.6) определяют классическое решение задачи (0.1)–(0.3) и (2.1), если таковое существует. Однако, формулы (2.5) и (2.6) имеют смысл при более слабых условиях гладкости и согласования, чем те, которые требуются для существования классического решения.

Определение 2.3. Слабым решением задачи (0.1)–(0.3) и (2.1) назовем функцию u , определяемую формулами (2.5) и (2.6).

Выражения (2.5) и (2.6) корректно определены при

$$\begin{aligned} f &\in C^1(\bar{Q}), \quad \phi \in C([0, \infty)), \\ \mu &\in C([0, \infty)), \quad \psi_2 \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty)). \end{aligned} \quad (2.8)$$

При этом $u \in C(\bar{Q} \setminus \gamma)$. Таким образом, имеет место утверждение.

Утверждение 2.2. Пусть выполняются условия гладкости (2.8). Тогда задача (0.1)–(0.3) и (2.1) имеет единственное слабое решение из класса $C(\bar{Q} \setminus \gamma)$.

При этом слабое решение задачи (0.1)–(0.3) и (2.1) не зависит от константы ψ_1 . Более того, такое решение не зависит от поведения функции ψ на множестве меры нуль.

При условиях (2.2) и (2.4) слабое и предельное кусочно-гладкое решения задачи (0.1)–(0.3) и (2.1) эквивалентны, поскольку они представляются одной формулой и единственны. По тем же причинам, при условиях (2.2) и (2.7) слабое и обобщенное предельное кусочно-гладкое решения задачи (0.1)–(0.3) и (2.1) эквивалентны.

Заключение

В настоящей работе изучена первая смешанная задача в четверти плоскости для волнового уравнения со вторым негладким условием Коши. Введены различные определения решения: слабое решение, кусочно-гладкое решение, предельное кусочно-гладкое решение и обобщенное предельное кусочно-гладкое решение. Выведены необходимые и достаточные условия

согласования для существования и единственности трех последних решений. При определенных условиях показана эквивалентность слабого решения и кусочно-гладкого решения. Установлено, что предельное кусочно-гладкое решение является частным случаем обобщенного предельного кусочно-гладкого решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корзюк, В. И. Решение смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока с интегральными условиями в случае неоднородных условий согласования / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Доклады НАН Беларуси. – 2019. – Т. 63, № 2. – С. 142–149.
2. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши / В. И. Корзюк, И. С. Козловская, С. Н. Наумовец // Известия НАН Беларуси. Серия физико-математических наук. – 2015. – № 1. – С. 7–21.
3. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики / В. И. Корзюк. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: URSS, 2021. – 480 с.
4. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанных задач для одномерного волнового уравнения с негладкими условиями Коши / В. И. Корзюк, С. И. Пузырный // Известия НАН Беларуси. Серия физико-математических наук. – 2016. – Т. 52, № 2. – С. 22–31.
5. Кошляков, Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М.: «Высшая школа», 1970. – 712 с.
6. Корзюк, В. И. Решения задач для волнового уравнения с условиями на характеристиках / В. И. Корзюк, О. А. Ковнацкая // Известия НАН Беларуси. Серия физико-математических наук. – 2021. – Т. 57, № 2. – С. 148–155.
7. Корзюк, В. И. Задачи для одномерного волнового уравнения с условиями на характеристиках и нехарактеристических линиях / В. И. Корзюк, О. А. Ковнацкая, В. П. Сериков // Труды Ин-та математики. – 2021. – Т. 29, № 1–2. – С. 106–112.
8. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока с неоднородными условиями согласования / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Доклады НАН Беларуси. – 2019. – Т. 63, № 1. – С. 7–13.
9. Корзюк, В. И. Классическое решение произвольной гладкости первой смешанной задачи для полулинейного уравнения типа Клейна – Гордона – Фока / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2025. – Т. 15, № 3. – С. 66–77.

Поступила в редакцию 29.07.2026.

Информация об авторах

Рудько Ян Вячеславович – магистр наук (математика и компьютерные науки)

ВОЗМОЖНОСТЬ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ СОЛНЕЧНЫХ МОДУЛЕЙ ПРИ СОВМЕСТНОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ С ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ГЕНЕРАТОРАМИ

В. В. Малютина-Бронская, А. В. Нестеренок, В. М. Кравченко, А. В. Якушев

ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника», Минск

POSSIBILITY OF INCREASING THE EFFICIENCY OF SOLAR MODULES IN COMBINATION WITH THERMAL ELECTRIC GENERATORS

V. V. Malyutina-Bronskaya, A. V. Nesterenok, V. M. Kravchenko, A. V. Yakushev

SSPA "Optics, Optoelectronics and Laser Technology", Minsk

Аннотация. Представлены результаты исследования параметров солнечного модуля, в составе которого использованы термоэлектрические генераторы и кремниевые солнечные элементы. Экспериментально установлено, что при нагреве экспериментального образца солнечного модуля до 70°С и температуре окружающей среды 23°С вырабатываемое удельное напряжение термоэлектрическими генераторами по отношению к эффективной площади образца солнечного модуля составляет 2,2 мВ/см². Создание такого гибридного солнечного модуля позволит увеличить эффективность фотовольтаического преобразования до 1,5%.

Ключевые слова: солнечный модуль, термоэлектрический генератор, эффект Зеебека, эффективность.

Для цитирования: Возможность повышения эффективности солнечных модулей при совместной эксплуатации с термоэлектрическими генераторами / В. В. Малютина-Бронская, А. В. Нестеренок, В. М. Кравченко, А. В. Якушев // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 3 (68). – С. 65–71. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_65. – EDN: KNNDZY

Abstract. The results of a study of the parameters of a hybrid solar module utilizing thermoelectric generators and silicon solar cells are presented. It was experimentally determined that when the experimental solar module sample is heated to 70°С and the ambient temperature is 23°С, the specific voltage generated by the thermoelectric generators relative to the effective area of the solar module sample is 2.2 mV/cm². The development of such a hybrid solar module will increase photovoltaic conversion efficiency to 1.5%.

Keywords: solar module, thermoelectric batteries, Seebeck effect, efficiency.

For citation: Possibility of increasing the efficiency of solar modules in combination with thermal electric generators / V. V. Malyutina-Bronskaya, A. V. Nesterenok, V. M. Kravchenko, A. V. Yakushev // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 3 (68). – P. 65–71. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_65 (in Russian). – EDN: KNNDZY

Введение

Современные тенденции в развитии возобновляемых источников энергии требуют новых подходов к повышению их эффективности. Перспективы использования термоэлектрических генераторов (ТЭГ) в солнечной энергетике очень многообещающие, особенно с учётом активного развития материалов и технологий. Интеграция ТЭГ с солнечными панелями может существенно повысить эффективность выработки электроэнергии, снизить эксплуатационные затраты и сделать возобновляемые источники энергии более доступными. В будущем, по мере улучшения термоэлектрических материалов и удешевления технологий, такие гибридные системы могут стать важным элементом энергетической инфраструктуры.

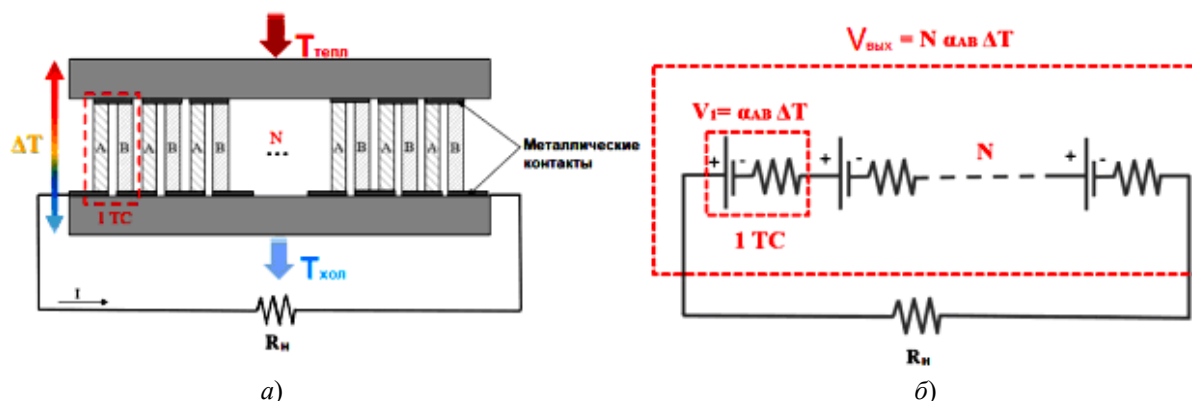
В основе ТЭГ лежит эффект Зеебека, который используется для генерации электричества

при наличии температурного градиента [1]. Типичный ТЭГ состоит из 10–100 термоэлектрических элементов *n*-типа и *p*-типа, соединённых электрически последовательно и термически параллельно и размещённых между двумя керамическими слоями. Структурная и эквивалентная схемы ТЭГ представлены на рисунке 0.1.

Термоэлектрическая эффективность материала ТЭГ выражается через безразмерный термоэлектрический показатель эффективности (ZT), который зависит от транспортных свойств материала, как показано в уравнении (0.1) [1]:

$$ZT = \frac{S^2 \sigma \Delta T}{\kappa}, \quad (0.1)$$

где *S* – коэффициент Зеебека (μВ/К), *σ* – электропроводность (1/Ом·м), *ΔT* – разность температур, *κ* – теплопроводность (Вт/м·К).



$T_{\text{хол}}$ – температура холодной стороны, $T_{\text{тепл}}$ – температура теплой стороны,
 TC – термическая система, N – число термических систем,
 $V_{\text{вых}}$ – общее выходное напряжения ТЭГ, V_1 – выходное напряжение единичной TC,
 ΔT – разность температур, α_{AB} – коэффициент термо-ЭДС

Рисунок 0.1 – Принцип работы (а) и эквивалентная схема (б) термоэлектрического генератора

Для генерации электричества с помощью ТЭГ необходимо, чтобы между его горячей и холодной поверхностями существовала разница температур ΔT . В качестве источника тепла, при использовании ТЭГ с солнечными элементами (СЭ), выступает солнечное излучение. Поэтому в солнечной энергетике появилось направление по разработке и исследованию солнечных термоэлектрических генераторов (СТЭГ). СТЭГ – это система, предназначенная для утилизации тепла от солнечного излучения и преобразования его в электричество с помощью ТЭГ, коммутируемых с солнечным модулем [2]–[10]. Эффективность СТЭГ определяется суммой максимальных мощностей, производимых отдельно фотоэлектрическими и термоэлектрическими системами [6].

СТЭГ классифицируются в зависимости от наличия или отсутствия оптической концентрации солнечного излучения СЭ модуля. Концентрационные СЭ обычно представляют собой цилиндрические линзы, линзы Френеля, параболические зеркала, плоские зеркала или параболические концентраторы [4]–[9]. Оптические концентраторы могут использоваться в сочетании с трубами для отвода тепла для улучшения эффективности СТЭГ [4]. Как пример, СТЭГ, состоящий из тонкоплёночного термоэлектрического модуля и фотогальванического модуля, пропускает свет через инфракрасный фильтр (горячее зеркало), который способствует фотоэлектрическому преобразованию, а отражённый от зеркала свет фокусируется на горячей стороне ТЭГ с помощью линзы. Было установлено, что напряжение холостого хода такого СТЭГ увеличилось на 1.3% по сравнению с солнечным модулем без ТЭГ [8]. Из анализа литературы установлено, что при одновременном использовании параболических концентраторов СЭ и ТЭГ возможно увеличение выходной мощности СТЭГ до

35% по сравнению с традиционными системами без концентрации солнечного излучения [9]. Однако использование оптических концентраторных элементов значительно увеличивает стоимость СТЭГ. Поэтому основная проблема СТЭГ заключается в разработке их оптимальной конструкции.

В данной работе представлены результаты разработки и исследования СТЭГ, в основе которой используются промышленно выпускаемые ТЭГ и кремниевые СЭ и без использования концентраторов солнечного излучения.

1 Разработка СТЭГ

При нормальных условиях солнечные лучи, падающие на защитное стекло солнечного модуля, приводят к отражению и преломлению из-за его оптических свойств. Поглощение солнечной энергии солнечным модулем зависит от материала СЭ, входящих в его состав. Вследствие того, что солнечные модули обычно находятся под постоянным воздействием солнечных лучей под фиксированным углом, происходит их нежелательный нагрев, который может в дальнейшем вызывать деградацию СЭ и привести к ухудшению параметров солнечного модуля. Поэтому для утилизации нежелательного тепла предлагается система «СЭ / ТЭГ / охладитель». Использование охладителя является ценным дополнением при использовании ТЭГ, увеличивая общую выходную мощность разработанного СТЭГ. В качестве охладителя предлагается использовать алюминиевые радиаторы. В работе исследовались радиаторы с геометрическими размерами: $20 \times 20 \times 6$ мм (эффективная площадь радиатора на 1 элемент ТЭГ 1680 мм^2) – радиатор 1 и $22 \times 22 \times 10$ (эффективная площадь радиатора на 1 элемент ТЭГ 4160 мм^2) – радиатор 2. Для более эффективного отвода тепла от СЭ к ТЭГ

дополнительно предлагается использовать медную пластину толщиной 1 мм, поскольку медь обладает коэффициентом теплопроводности $389,6 \text{ Вт/м} \cdot ^\circ\text{C}$, в то время как у алюминия $209,3 \text{ Вт/м} \cdot ^\circ\text{C}$. Таким образом, медь почти в два раза лучше рассеивает тепло, чем алюминий. Конструкция разработанного СТЭГ приведена на рисунке 1.1, а. В состав модуля были включены: поликристаллические кремниевые солнечные элементы размерами $4 \times 4 \text{ см}^2$ в количестве 12 штук, соединенные параллельно-последовательно; медная пластина размерами $210 \times 150 \times 1 \text{ мм}$; ТЭГ в количестве 12 штук; термопрокладка ЭТМ-0,5 толщиной 1 мм; алюминиевые радиаторы в количестве 6 штук; для защиты полученного модуля от механических и природных воздействий использовалось оргстекло и рамки корпуса из пластика ABS, как показано на рисунке 1.1.

Из измеренных с помощью Photon RT спектров пропускания и отражения установлено, что защитное оргстекло пропускает в диапазоне длин волн $400\text{--}1600 \text{ нм}$ от 70 до 84 % падающего излучения, при этом коэффициент отражения составляет менее 10%. Поэтому использование в солнечных модулях защитных стекол обуславливают падение КПД СЭ, входящих в состав модуля, при его корпусировании до 5% от исходного значения.

Для стыковки ТЭГ и охладителя были выбраны теплопроводящие прокладки ЭТМ-СТ производства Беларусь [11]. ЭТМ – эластичный керамико-полимерный материал, армированный стеклотканью. Благодаря армирующему слою материал имеет отличные прочностные характеристики на разрыв. Наполнитель из нанодисперсного керамического порошка обеспечивает хорошую теплопроводность. Термостойкая силиконовая связка придает материалу эластичность мягкой резины, что способствует заполнению шероховатостей микрорельефа сопрягаемых поверхностей, снижая тепловое сопротивление между ними, что особенно важно при сборке СТЭГ, поскольку наличие воздуха между рабочими слоями может ухудшить теплопроводящие свойства системы. Теплопроводность прокладок ЭТМ-0,5 составляет не менее $2,2\text{--}2,5 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$.

Проведены исследования эффективности работы экспериментальной структуры «ТЭГ/охладитель» в зависимости от толщины теплопроводящей прокладки ЭТМ-0,5 на ТЭГ марки ТЕР1-42Т300 (размер $40 \times 40 \text{ мм}$, Китай), внешний вид которых показан на рисунке 1.2. Теплопроводящие прокладки ЭТМ-0,5 использовались с толщиной 0,2 и 1 мм. Для сравнения был собран экспериментальный образец ТЭГ с алюминиевым радиатором без теплопроводящей прокладки ЭТМ-0,5.

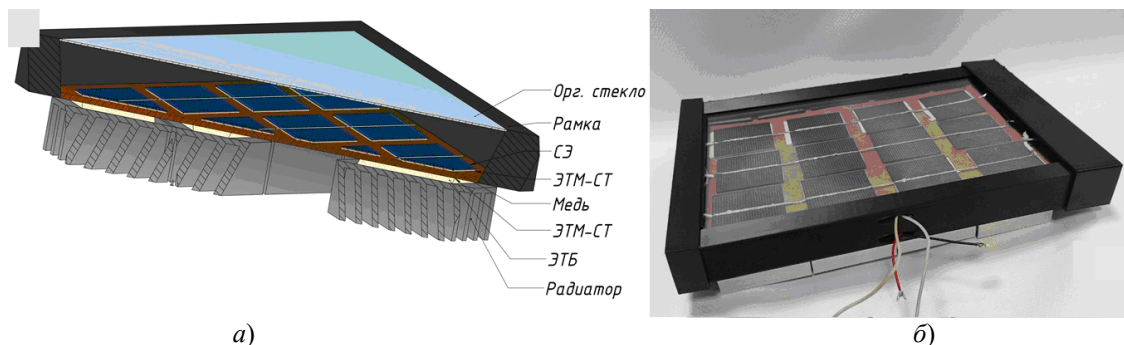


Рисунок 1.1 – Структура (сечение) (а) и внешний вид экспериментального образца (б) СТЭГ

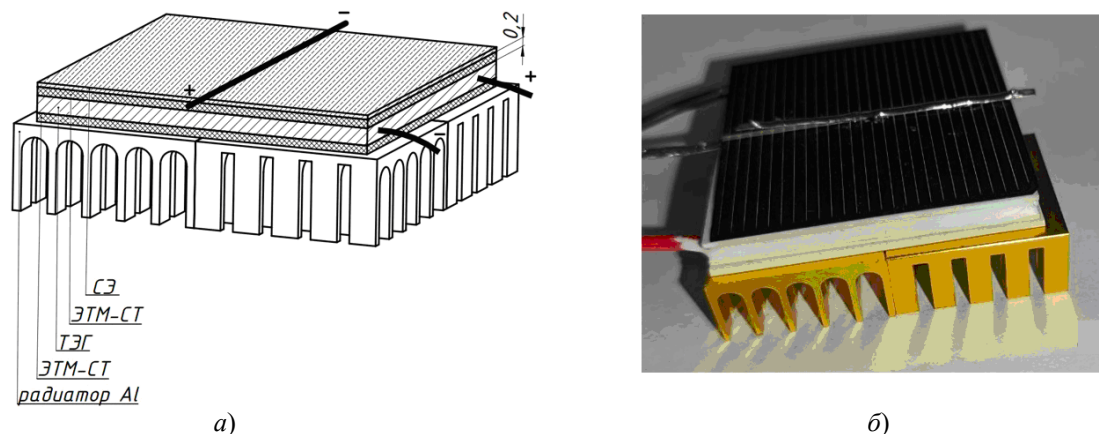


Рисунок 1.2 – Структурная схема (а) и внешний вид экспериментального образца (б) одиночного СТЭГ элемента

Для оценки выработки напряжения ТЭГ был собран исследовательский стенд, схема которого показана на рисунке 1.3. В состав стенда входят: термостоллик, вольтметр, персональный компьютер (ПК), термопара с тестером для контроля температуры термостоллика и дополнительный контроль температуры исследуемых образцов с помощью ИК-камеры InfiRay M620.

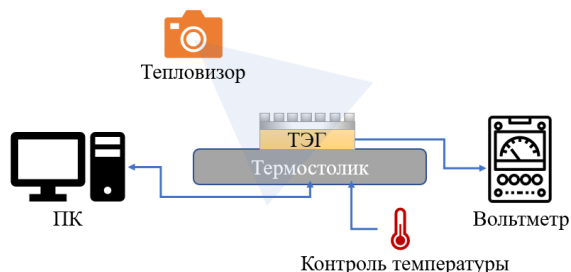


Рисунок 1.3 – Схема исследовательского стенда для оценки выработки напряжения ТЭГ

Методика измерения выходного напряжения от ТЭГ включала в себя следующие шаги: установка на термостоллике исследуемого экспериментального образца алюминиевым радиатором вверх; установка температуры (в диапазоне 40–60° С, шаг 10° С) горячей стороны ТЭГ от термостоллика с помощью персонального компьютера; стабилизация температуры термостоллика и измерение напряжения ТЭГ с помощью мультиметра марки Арра 98 II.

Результаты измерения вырабатываемого напряжения ТЭГ с различными комбинациями толщины теплопроводящей прокладки ЭТМ–0,5 и размеров алюминиевых радиаторов представлены в таблице 1.1. Исходя из полученных результатов, толщина слоя ЭТМ–0,5 в 1 мм и использование алюминиевых радиаторов 22×22×10 мм позволяет увеличить вырабатываемое ТЭГ напряжение до 207% относительно ТЭГ без радиатора. Толщина в 0,2 мм позволяет увеличить вырабатываемое ТЭГ напряжение до 190% относительно ТЭГ без радиатора.

Использование радиаторов с большей высотой гребней и теплопроводящей прокладки ЭТМ–0,5 с большей толщиной обеспечивает лучший отвод тепла от ТЭГ. При использовании ЭТМ–0,5 толщиной 1 мм замена радиатора 1 на радиатор 2 при температуре горячей стороны ТЭГ в 400° С приводит к увеличению вырабатываемого ТЭГ напряжения $U_{ТЭГ}$ с 65 мВ до 85 мВ. Данный эффект может быть обусловлен тем, что ТЭГ состоит из большого количества термоэлектрических элементов *n*-типа и *p*-типа проводимостей, соединенных электрически последовательно и термически параллельно и размещенных между двумя керамическими слоями, создающих таким образом периодическую

структуру тепловых полей, которая приводит к неравномерному нагреву ТЭГ по его площади [12], [13]. А изменение толщины ЭТМ–0,5 позволяет регулировать равномерность распределения теплового поля на радиаторе для его эффективного отвода. Как видно из таблицы 1, увеличение толщины пленки ЭТМ–0,5 до 1 мм позволяет тепловым полям перекрываться и таким образом более равномерно распределяться по площади радиатора для эффективного отвода тепла от ТЭГ, что приводит к увеличению $U_{ТЭГ}$.

Таблица 1.1 – Результаты исследования влияния толщины теплопроводящей прокладки ЭТМ–0,5 от параметров радиатора на вырабатываемое напряжение ТЭГ

Температура термостоллика, °С	Вырабатываемое напряжение ТЭГ, $U_{ТЭГ}$, мВ					
	без радиатора	Алюминиевый радиатор, размер, мм				
		радиатор 1		радиатор 2		
		толщина ЭТМ–0,5, мм		толщина ЭТМ–0,5, мм		
		0,2	1	0,2	1	1
40	45	55	65	50	75	85
50	75	85	90	85	145	155
60	100	115	120	110	210	225

Также было проведено исследование $U_{ТЭГ}$ марок ТЕР1-142Т300 и ТМГ-127-1,4-0,8 от полезной площади алюминиевых радиаторов. Полученные значения $U_{ТЭГ}$ экспериментальных образцов в зависимости от температуры и типа радиатора представлены в таблице 1.2. Анализ таблицы 1.2, показывает, что при увеличении полезной площади алюминиевого радиатора в 2,5 раза, при неизменной площади ТЭГ и СЭ и при росте температуры горячей стороны ТЭГ от 40 до 60° С, $U_{ТЭГ}$ увеличивается в 2 раза.

Таблица 1.2 – Зависимость напряжения, вырабатываемого ТЭГ от температуры горячей стороны и типа радиатора

Структура ТЭГ / радиатор	Температура, °С		
	40	50	60
	Напряжение ТЭГ, мВ		
ТЕР1-142Т300 / радиатор 1	30	35	55
ТЕР1-142Т300 / радиатор 2	60	69	102
ТМГ-127-1,4-0,8 / радиатор 1	22	32	43
ТМГ-127-1,4-0,8 / радиатор 2	41	60	84

С учетом полученных выше результатов был собран экспериментальный образец СТЭГ со структурой «СЭ / ЭТМ–0,5 / медь / ЭТМ–0,5 / ТЭГ / алюминиевый радиатор» размером 150×210 мм

и фоточувствительной площадью 168 см^2 . Соединение ТЭГ между собой обеспечивало последовательное включение для суммирования $U_{\text{ТЭГ}}$ от каждого отдельного элемента ТЭГ. Экспериментальный образец СТЭГ, показанный на рисунке 1.1, б включает в себя: 12 штук кремниевых поликристаллических СЭ размером $4 \times 4 \text{ см}^2$; 12 штук ТЭГ (TGM-127-1,4-0,8); медную пластину размером $150 \times 210 \times 1 \text{ мм}$; 2 термопрокладки ЭТМ-0,5 толщиной 1 мм; оргстекло размером $160 \times 220 \times 3 \text{ мм}$; рамку из ABS пластика.

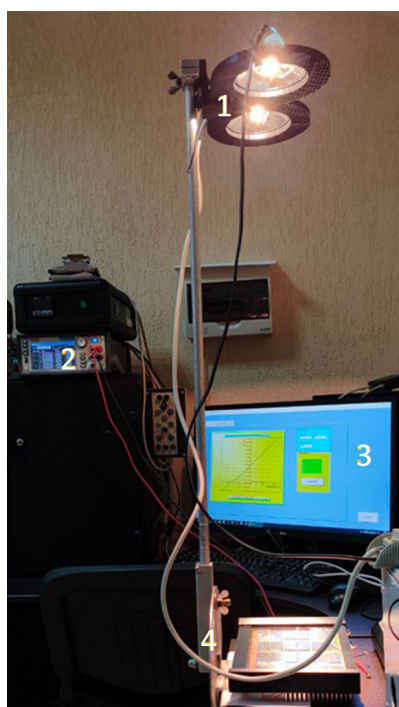
2 Исследование и анализ характеристик СТЭГ

Для исследования экспериментального образца СТЭГ был собран измерительный стенд, который состоит из двух галогеновых ламп с отражателем Osram HALOSPOT 4185 SP, (мощностью 100 Вт, напряжение питания 12 В) и единым трансформаторным блоком для питания от сети 220 В. Измерение вольт-амперных характеристик (ВАХ) СЭ экспериментального образца СТЭГ проводилось с помощью цифрового мультиметра Keithley 2450. Контроль температуры осуществлялся термопарой и цифровым мультиметром DT 838, помещенными внутрь модуля. Нагрев экспериментального образца СТЭГ от 30 до 60°C происходил за счет инфракрасного спектра излучения галогеновых ламп. Измерение напряжения на ТЭГ осуществлялось с помощью мультиметра марки APPA98 II. Дополнительный

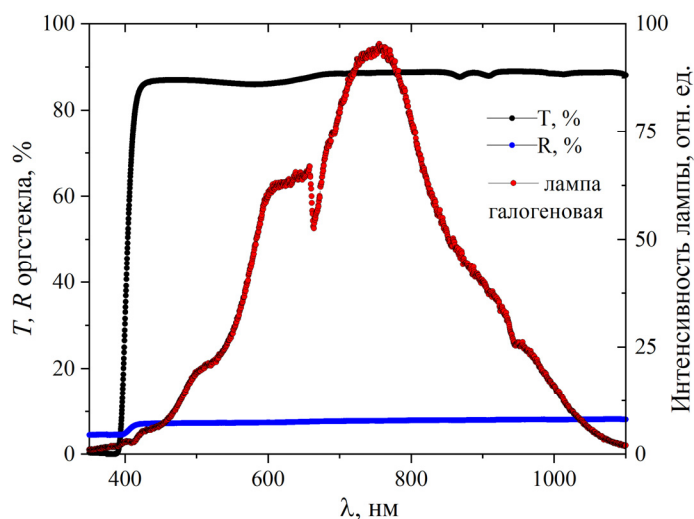
контроль распределения температуры в образце СТЭГ проводилось с помощью тепловизора FLIR i40 (Китай). Внешний вид стенда для измерения фотоэлектрических характеристик экспериментального образца СТЭГ представлен на рисунке 2.1, а.

Спектр излучения галогеновых ламп, входящих в состав стенда, измеренный с помощью компактного широкодиапазонного спектрометра Solar S100 (Беларусь) и спектры пропускания и отражения защитного оргстекла представлены на рисунке 2.1, б. Как видно, для галогеновых ламп максимум спектра излучения находится в районе 750 нм. С помощью детектора мощности BIM 7102U (BroLight, Китай) излучения и нейтрального фильтра HC-9 была измерена интенсивность излучения галогеновой лампы, падающей на СТЭГ, которая составила 31 мВт/см^2 . А оргстекло пропускает оптическое излучение с длиной волны более 400 нм на уровне более 80%, при этом коэффициент отражения составляет порядка 8%.

Измерения ВАХ СЭ проводилось под действием освещения галогеновыми лампами при температуре поверхности экспериментального образца СТЭГ от 30 до 60°C . Из анализа ВАХ СЭ были определены такие фотоэлектрические параметры как напряжение холостого хода ($U_{\text{ХХ}}$), ток короткого замыкания ($I_{\text{КЗ}}$) и КПД, значения которых представлены в таблице 2.1.



а)



б)

1 – галогеновые лампы, 2 – измеритель Keithley 2450, 3 – персональный компьютер, 4 – СТЭГ

Рисунок 5 – Стенд для исследования фотоэлектрических характеристик экспериментальных образцов СТЭГ (а) и спектр излучения галогеновой лампы Osram HALOSPOT 4185 SP и спектров пропускания и отражения защитного оргстекла (б)

Таблица 2.1 – Фотоэлектрические параметры СТЭГ системы при различных температурах

Температура, °C	Напряжение ТЭГ ($U_{\text{ТЭГ}}$), мВ	Фотоэлектрические параметры СЭ		
		$I_{\text{КЗ}}$, А	$U_{\text{ХХ}}$, В	КПД, %
30	199	0,21	7,5	8,6
40	350	0,20	7,4	7,2
50	426	0,18	7,2	4,8
60	459	0,15	6,4	3,6

Параллельно-последовательная сборка 12 штук СЭ в СТЭГ обеспечила значение $U_{\text{ХХ}}$ в 10,7 раз больше по сравнению с одним СЭ. Под действием освещения галогеновыми лампами при росте температуры от 30 до 60° С происходит смещение ВАХ СЭ в сторону меньших $U_{\text{ХХ}}$ от 7,5 В до 6,4 В при изменении $I_{\text{КЗ}}$ в диапазоне от 17,5 до 21,5 мА. КПД СЭ также падает с ростом температуры от 8,6% до 3,6 %. Низкое значение КПД обусловлено исходным низким значением КПД СЭ (от 8 до 11 %) при измерении фотоэлектрических характеристик без использования защитного оргстекла.

Для экспериментального образца СТЭГ наблюдается нелинейная зависимость общего напряжения ТЭГ элементов от температуры. При росте температуры от 30 до 60° С общее напряжение ТЭГ элементов экспериментального образца СТЭГ увеличивается с 199 до 459 мВ. Таким образом, вырабатываемое удельное напряжение ТЭГ э по отношению к общей площади солнечного модуля СТЭГ составляет 1,46 мВ/см²,

а по отношению к эффективной фоточувствительной площади образца солнечного модуля – 2,73 мВ/см².

С помощью тепловизора FLIR i40 была проведена оценка распределения тепла в экспериментальном образце СТЭГ при нагреве от 30 до 60° С в зависимости от наличия или отсутствия корпуса. Полученные результаты представлены на рисунке 2.2.

Из рисунка 2.2 видно, что как в случае отсутствия корпуса и оргстекла, так и при их наличии, при нагреве поверхности модуля температурой порядка 60° С на радиаторах наблюдается температура порядка 40° С, что говорит об эффективном теплоотводе.

Максимальная эффективность преобразования энергии ТЭГ определяется его техническими параметрами. При нагреве СТЭГ с градиентом температуры более 40° С вырабатываемое удельное напряжение ТЭГ элементами по отношению к общей площади солнечного модуля составляет 1,46 мВ/см² (при использовании ТЭГ марки TMG-127-1,4-0,8). При замене ТЭГ на марку TER1-142T300 данное значение может быть увеличено на 20% и тогда значение, вырабатываемое ТЭГ элементами модуля, составит 1,75 мВ/см². Установлено, что ТЭГ марки TER1-142T300 вырабатывает удельное напряжение к общей площади солнечного модуля близкое по значению характерное для ТЭГ марки TEC1-12706 – 1,79 мВ/см² [14]–[16].

Для практического применения разработанного модуля следует отметить, что динамические тепловые и экологические аспекты, такие как

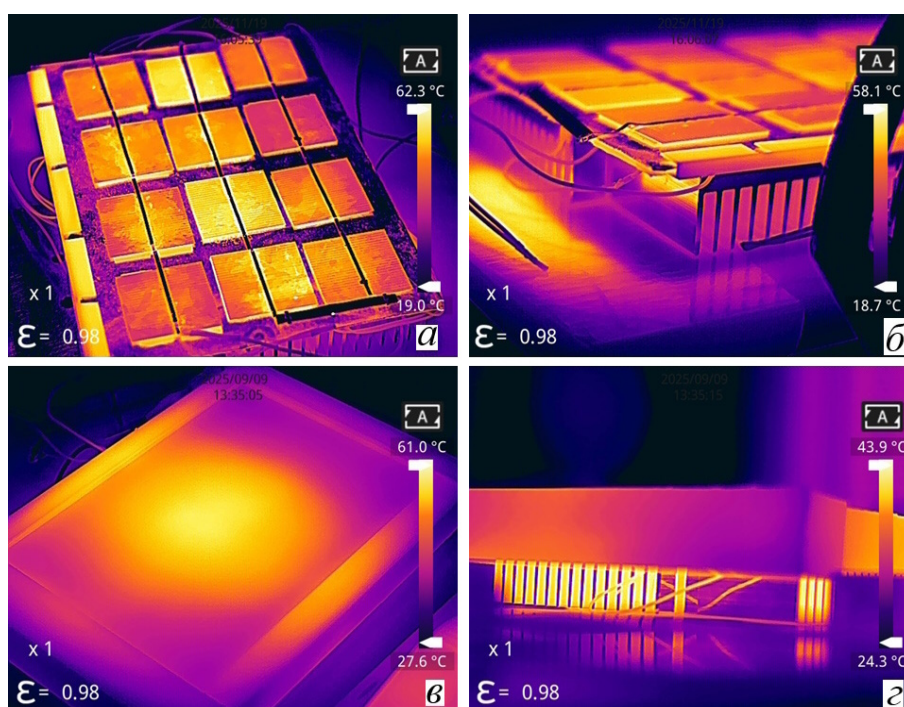


Рисунок 2.2 – Тепловизионное изображение экспериментального образца СТЭГ вид сверху (а, в) и сбоку (б, г): без корпуса и защитного оргстекла (а, б) и в корпусе с оргстеклом (в, г)

солнечное излучение и атмосферные ветры, являются основными причинами резких изменений напряжения на ТЭГ элементах [14], [17]. Поэтому рекомендуется для соединения фотоэлектрических систем и термоэлектрических генераторов с различными уровнями напряжения использовать многопортовые преобразователи с регулируемым напряжением.

Заключение

Представлены результаты исследования параметров разработанного экспериментального образца СТЭГ на основе структур «СЭ / ЭТМ-0,5 / медь / ЭТМ-0,5 / ТЭГ / ЭТМ-0,5 / алюминиевый радиатор» размером 150×210 мм, в составе которого использованы термоэлектрические батареи и кремниевые солнечные элементы. Повышение эффективности такого устройства обусловлено утилизацией тепла нагретых солнечных элементов с помощью ТЭГ (элементы Зеебека), и, как результат, выработкой электроэнергии самими ТЭГ элементами.

Для экспериментального образца СТЭГ наблюдается нелинейная зависимость вырабатываемого общего напряжения ТЭГ элементами от температуры. При росте температуры от 30 до 60°С удельное суммарное напряжение ТЭГ элементов по отношению к общей площади солнечного модуля составляет 1,46 мВ/см², а по отношению к эффективной фоточувствительной площади образца солнечного модуля – 2,73 мВ/см². Дополнительный отвод тепла за счет использования радиаторов позволит продлить срок службы солнечного модуля, так как избыточный нагрев солнечных элементов является одним из факторов, существенно влияющих на деградацию их характеристик. Дополнительный вклад ТЭГ в вырабатываемую электроэнергию модулем повысит энергоэффективность до 1,5%, что в перспективе может повысить окупаемость солнечных модулей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Terasaki, I. Introduction to thermoelectricity / I. Terasaki // *Materials for Energy Conversion Devices*. – 2005. – P. 339–357.
2. Zoui, M. A. The Potential of Solar Thermoelectric Generator STEG for Implantation in the Adrar Region / M. A. Zoui, S. Bentouba, M. Bourouis // *Algerian J. Renew. Energy Sustain.* – 2020. – Vol. 2. – P. 17–27.
3. Gopinath, M. PV–TEG output: comparison with heat sink and graphite sheet as heat dissipators / M. Gopinath, R. Marimuthu // *Case Stud. Therm. Eng.* – 2023. – P. 102935.
4. Evaluation of solar thermal system configurations for thermoelectric generator applications: A critical review / K. Karthick, S. Suresh, Mohammed Muaaz M. D. Hussain [et al.] // *Sol. Energy*. – 2019. – Vol. 188. – P. 111–142.

5. A study on incorporation of thermoelectric modules with evacuated-tube heat-pipe solar collectors. *Renew* / W. He, Y. Su, Y. Q. Wang [et al.] // *Energy*. – 2012. – Vol. 37, № 1. – P. 142–149.

6. Lossless hybridization between photovoltaic and thermoelectric devices / K.-T. Park, S.-M. Shin, A.S. Tazebay [et al.] // *Sci. Rep.* – 2013. – Vol. 3. – P. 2123.

7. Miljkovic, N. Modeling and optimization of hybrid solar thermoelectric systems with thermosyphons / N. Miljkovic, E. N. Wang // *Sol. Energy*. – 2011. – Vol. 85. – P. 2843–2855.

8. Fan, H. Electric Power Generation from Thermoelectric Cells Using a Solar Dish Concentrator / H. Fan, R. Singh, A. Akbarzadeh // *J. Electron. Mater.* – 2011. – Vol. 40. – P. 1311–1320.

9. Mizoshiri, M. Thermal-Photovoltaic Hybrid Solar Generator Using Thin-Film Thermoelectric Modules / M. Mizoshiri, M. Mikami, K. Ozaki // *Jpn. J. Appl. Phys.* – 2012. – Vol. 51. – P. 6–7.

10. The performance of a combined solar photovoltaic (PV) and thermoelectric generator (TEG) system / R. Bjørk, K. K. Nielsen // *Solar Energy*. – 2015. – Vol. 120. – P. 187–194.

11. ООО «Производственная компания „Спецрезинотехника“»: офиц. сайт. [Электронный ресурс]. – URL: <https://specrezina.by/catalog/elastichnyie-teploprovodyashhie-materialyi/termoprokladki-marki-etm-st.html/> (дата доступа 15.09.2024).

12. Searcy, A. W. Chemical and Mechanical Behavior of Inorganic Materials / A. W. Searcy, D. V. Ragone // New York : Wiley – Interscience. – 1970. – P. 33–56.

13. Kubachewski, O. Materials Thermochemistry / O. Kubachewski, C. B. Alcock, P. J. Spencer. – 6th Edition. – New York, 1993.

14. Evaluation of a PV-TEG hybrid system configuration for an improved energy output: a review / U. A. Saleh, M. A. Johar, S. A. B. Jumaat [et al.] // *International Journal of Renewable Energy Development*. – 2021. – Vol. 10, № 2. – P. 385–400.

15. Investigation of the photovoltaic cell / thermoelectric element hybrid system performance / D. T. Cotfas, P. A. Cotfas, O. M. Machidon, D. Ciobanu // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. – 2016. – Vol. 133, № 1. – P. 012037.

16. Gopinath, M. Experimental study of photovoltaic-thermoelectric generator with graphite sheet / M. Gopinath, R. Marimuthu // *Case Studies in Thermal Engineering*. – 2024. – Vol. 54. – P. 103982.

17. Babu, Ch. The theoretical performance evaluation of hybrid PV-TEG system / Ch. Babu, P. Ponnambalam // *Energy Conversion and Management*. – 2018. – Vol. 173. – P. 450–460.

Поступила в редакцию 28.05.2026.

Информация об авторах

Малютина-Бронская Виктория Владимировна – зав. лабораторией

Нестеренок Антон Викторович – науч. сотрудник

Кравченко Владимир Михайлович – к.т.н.

Якушев Алексей Викторович – инженер

МОДЕЛИРОВАНИЕ КАЧЕСТВА ПОКРЫТИЙ, ФОРМИРУЕМЫХ ИМПУЛЬСНЫМ ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ НА СТАЛИ 30ХГСН2А С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЧЕТКИХ МОДЕЛЕЙ

Ю. В. Никитюк, Л. Н. Марченко, Г. А. Баевич,
В. А. Прохоренко, А. В. Максименко

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

FUZZY LOGIC-BASED MODELING OF COATING QUALITY UNDER PULSED LASER RADIATION ON 30XGCH2A STEEL

Yu. V. Nikityuk, L. N. Marchenko, G. A. Bayevich,
V. A. Prokhorenko, A. V. Maximenko

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Высокая нелинейность процессов при импульсной лазерной наплавке затрудняет прогнозирование свойств поверхностного слоя, особенно в условиях малых выборок экспериментальных данных. В данной работе предложен подход к моделированию процесса импульсной лазерной наплавки высокопрочной стали 30ХГСН2А нихромом с использованием математического аппарата нечеткой логики. На основе экспериментальных данных построена экспертная система нечеткого вывода типа Мамдани, связывающая параметры лазерного излучения (энергию, длительность и частоту импульсов) с геометрией наплавленного валика, микротвердостью и дефектностью (наличием трещин и пор). Прогностическая ценность модели оценивалась на независимой тестовой выборке. Результаты показали достаточную точность. Использование алгоритмов нечеткой интерполяции с переходом к целочисленным значениям позволило создать физически адекватную систему прогнозирования дефектов. Разработанная модель может применяться в качестве интеллектуального ядра для оптимизации технологических режимов импульсной лазерной наплавки.

Ключевые слова: лазерная наплавка, сталь, нечеткая логика.

Для цитирования: Моделирование качества покрытий, формируемых импульсным лазерным излучением на стали 30ХГСН2А с использованием нечетких моделей / Ю. В. Никитюк, Л. Н. Марченко, Г. А. Баевич, В. А. Прохоренко, А. В. Максименко // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 3 (68). – С. 72–78. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_72. – EDN: LAGKPK

Abstract. The high nonlinearity of pulsed laser cladding processes poses significant challenges for predicting coating quality, particularly when dealing with small experimental datasets. This paper proposes a fuzzy logic-based modeling approach for pulsed laser cladding of high-strength 30XGCH2A steel with nichrome. Using the experimental data, a Mamdani-type fuzzy inference expert system was constructed, linking the laser radiation parameters (pulse energy, duration, and repetition rate) with the geometry of the deposited bead, microhardness, and defectiveness (presence of cracks and pores). The predictive performance of the model was assessed on an independent test dataset, demonstrating satisfactory accuracy. Furthermore, the application of fuzzy interpolation algorithms with integer-valued outputs enabled the development of a physically consistent defect prediction system. The resulting model can serve as an intelligent decision-making core for optimizing process parameters in pulsed laser cladding.

Keywords: laser cladding, steel, fuzzy logic.

For citation: Fuzzy logic-based modeling of coating quality under pulsed laser radiation on 30XGCH2A steel / Yu. V. Nikityuk, L. N. Marchenko, G. A. Bayevich, V. A. Prokhorenko, A. V. Maximenko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 3 (68). – P. 72–78. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_72. – EDN: LAGKPK

Introduction

High-strength structural steels, such as 30XGCH2A, are extensively employed in the aerospace and power engineering industries for components that operate under cyclic loading and at elevated temperatures. During operation, the surface layers of these components experience severe abrasive wear and corrosion, creating a need for

reliable protective coatings that can improve corrosion resistance and ensure the required surface performance. Pulsed laser cladding has emerged as a highly efficient method for depositing such coatings onto high-strength steels, allowing precise control over coating geometry and physico-mechanical properties [1]–[5].

Producing high-quality coatings on high-strength steels entails several challenges. The high heating and cooling rates inherent in the process give rise to steep thermal gradients within the laser-affected zone, resulting in the development of considerable thermal stresses and, consequently, coating defects. At the same time, the deposited layer thickness and surface microhardness must be maintained at specified levels. These quality attributes exhibit a complex nonlinear dependence on the key laser processing parameters, namely, pulse energy, pulse duration, and repetition rate [6]–[8].

Pulsed laser cladding of high-strength steels thus represents a complex problem in which heat transfer, phase transformations, melt pool hydrodynamics, and thermoelastic stress generation and relaxation all occur concurrently. Finite element simulations for predicting laser processing outcomes are computationally expensive. A viable alternative is the construction of surrogate models (metamodels), i. e., mathematical approximations trained on limited experimental data that capture the underlying input $\rightarrow$ output relationships with sufficient accuracy for practical engineering purposes. The conventional approach to process parameter optimization in laser processing relies on experimental design techniques followed by the construction of regression models. However, second-order polynomial approximations often fail to capture the nonlinear thermophysical phenomena occurring in the melt pool with sufficient accuracy. While modern machine learning techniques, such as Artificial Neural Networks (ANNs), Support Vector Machines (SVMs), and Random Forests, can deliver high predictive accuracy, they often come at the cost of model interpretability. The process engineer is thus left with a “black box” that obscures the underlying physical mechanisms linking the input parameters to the output, thereby hindering informed decision-making, particularly when extrapolating beyond the training data range [9]–[12].

A compelling alternative is fuzzy logic, introduced by L. Zadeh in 1965 and further expanded for control applications by E. Mamdani [13], [14]. Fuzzy models operate with linguistic variables, such as “low energy” or “high frequency”, and IF – THEN rules, which facilitates the seamless integration of expert knowledge. Fuzzy inference systems have been successfully employed for modeling laser processing operations [15]–[20], offering an attractive trade-off between predictive accuracy and transparency of the decision-making logic.

In our earlier research, we explored the application of adaptive neuro-fuzzy inference systems (ANFIS) and Mamdani-type models to describe the laser alloying of 30XГCH2A steel [18]. Nonetheless, the intelligent models in that research were trained on numerically generated data, and the predicted outputs were limited to thermal fields.

While temperature predictions were highly accurate, thermophysical modeling by itself cannot directly assess the resultant physico-mechanical properties of the surface layer or the probability of defect emergence. In contrast to our earlier research, the present study relies exclusively on experimental data from physical experiments. The focus has shifted from computing theoretical temperature fields to directly forecasting actual quality characteristics, and further extends to the challenging task of predictive analytics for discrete macrodefects using a modified fuzzy inference algorithm.

This paper presents the development and experimental validation of a Mamdani-type fuzzy model for predicting the geometry, mechanical properties, and defects of nichrome coatings deposited on 30XГCH2A steel by pulsed laser radiation, providing an effective trade-off between predictive accuracy and result interpretability.

1 Experimental investigation of pulsed laser cladding of nichrome coatings on 30XГCH2A steel

Pulsed laser cladding of nichrome coatings was performed using a TL-400 processing facility equipped with a solid-state Nd:YAG laser. The active medium comprises yttrium aluminum garnet (YAG) crystals doped with trivalent neodymium ions, emitting at a wavelength of $\lambda = 1.064 \mu\text{m}$, with crystal dimensions of $6.3 \times 130 \text{ mm}$. The system delivers an average output power of up to 400 W, and the laser beam diameter at the output is 8 mm.

High-strength structural steel 30XГCH2A blanks served as substrates. Nichrome grade X20H80 was used as the coating material. Metallographic specimens of the clad beads were prepared by sequential grinding and polishing with abrasive papers of decreasing grit size: 60–40 μm , 10–17 μm , 7–5 μm , 1 μm , and 0.1 μm . The procedure persisted until a surface roughness of $R_a \leq 0.2 \mu\text{m}$ was attained. The microstructure of the substrate, the heat-affected zone (HAZ), and the clad layer was revealed by chemical etching in a 3–5% solution of nitric acid in ethanol (nital). Morphological and geometric features of the coatings were examined with an EPIQUANT automatic structure analyzer (Carl Zeiss, Jena) at $\times 100$ magnification. Quantitative measurements of the clad layer thickness and HAZ depth were carried out on digital images using a stage micrometer with a scale division of 0.01 mm. Coating defectiveness was evaluated by counting pores and microcracks in the bead cross-sections. Microhardness of the structural zones was measured by the Vickers method on a Kason-59-HV microhardness tester under an indenter load of 0.4905 N with a dwell time of 10 s. Indentation diagonals were measured at $\times 400$ magnification.

A D-optimal experimental design was employed for the three input parameters: pulse

duration t , pulse energy E , and pulse repetition rate f (Table 1.1). The response parameters measured were h (deposited layer thickness), HV (surface microhardness), Nc (number of cracks), and Np (number of pores).

Table 1.1 – Experimental design and measured responses

N	t , ms	E , J	f , Hz	h , μm	HV , kgf/mm^2	Nc	Np
1	4	6.4	2	40	224	1	0
2	4	12.9	2	200	191	0	3
3	4	12.9	3	220	209	4	0
4	4	6.4	5	50	201	0	4
5	4	12.9	5	250	186	3	0
6	6	4.6	2	30	213	0	0
7	6	12.6	2	220	205	0	1
8	6	9.1	4	130	214	0	0
9	6	4.6	5	40	192	0	0
10	6	12.6	5	260	208	2	3
11	8	9.8	2	30	193	0	0
12	8	12.8	2	120	217	2	3
13	8	12.8	4	130	194	2	3
14	8	9.8	5	40	189	0	0
15	8	12.8	5	140	228	0	1

2 Fuzzy modeling of pulsed laser cladding parameters

The surrogate model was developed in Python using the scikit-fuzzy library. A Mamdani-type fuzzy inference system was implemented. The architecture of the developed fuzzy model is illustrated in Figure 2.1 [21], [22].

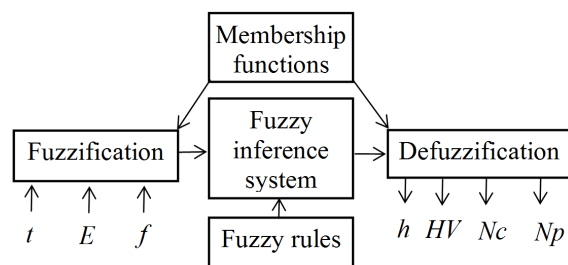


Figure 2.1 – Structure of the fuzzy system used for modeling pulsed laser cladding (h , HV , Nc , Np)

Triangular membership functions with three linguistic terms (Low, Medium, High) were defined for each input variable t , E , and f . This choice reflects the discrete nature of the process parameter settings in the experimental design. For the output variables h , HV , Nc , and Np , Gaussian membership functions with nine terms (T1–T9) were employed (see Figure 2.2), which provide smooth variation of the predicted outputs and improved approximation of the experimental data.

To predict the geometric characteristics, mechanical properties, and defect formation of

nichrome coatings deposited on 30XГCH2A steel by pulsed laser radiation, we constructed four IF-THEN rule bases from the experimental data (Table 2.1). These rule sets were designed to reflect the underlying physical mechanisms governing the coating formation process.

The rule bases for each output parameter are presented below:

```

rules_HV = [
    ctrl.Rule(t['L']&E['L']&f['L'], HV['T8']),
    ctrl.Rule(t['L']&E['H']&f['L'], HV['T2']),
    ctrl.Rule(t['L']&E['H']&f['M'], HV['T6']),
    ctrl.Rule(t['L']&E['L']&f['H'], HV['T4']),
    ctrl.Rule(t['L']&E['H']&f['H'], HV['T1']),
    ctrl.Rule(t['M']&E['L']&f['L'], HV['T7']),
    ctrl.Rule(t['M']&E['H']&f['L'], HV['T5']),
    ctrl.Rule(t['M']&E['L']&f['H'], HV['T2']),
    ctrl.Rule(t['M']&E['H']&f['H'], HV['T6']),
    ctrl.Rule(t['H']&E['M']&f['L'], HV['T2']),
    ctrl.Rule(t['H']&E['H']&f['L'], HV['T7']),
    ctrl.Rule(t['H']&E['H']&f['M'], HV['T3']),
    ctrl.Rule(t['H']&E['M']&f['H'], HV['T2']),
    ctrl.Rule(t['H']&E['H']&f['H'], HV['T9']),
    ctrl.Rule(t['M']&E['M']&f['M'], HV['T7']),
    ctrl.Rule(t['M']&E['H']&f['M'], HV['T4']),
    ctrl.Rule(t['H']&E['M']&f['M'], HV['T3'])
]
  
```

```

rules_NC = [
    ctrl.Rule(t['L']&E['L']&f['L'], NC['T3']),
    ctrl.Rule(t['L']&E['H']&f['L'], NC['T1']),
    ctrl.Rule(t['L']&E['H']&f['M'], NC['T9']),
    ctrl.Rule(t['L']&E['L']&f['H'], NC['T1']),
    ctrl.Rule(t['L']&E['H']&f['H'], NC['T7']),
    ctrl.Rule(t['M']&E['L']&f['L'], NC['T1']),
    ctrl.Rule(t['M']&E['H']&f['L'], NC['T1']),
    ctrl.Rule(t['M']&E['L']&f['H'], NC['T1']),
    ctrl.Rule(t['M']&E['H']&f['H'], NC['T5']),
    ctrl.Rule(t['H']&E['M']&f['L'], NC['T1']),
    ctrl.Rule(t['H']&E['H']&f['L'], NC['T5']),
    ctrl.Rule(t['H']&E['H']&f['M'], NC['T5']),
    ctrl.Rule(t['H']&E['M']&f['H'], NC['T1']),
    ctrl.Rule(t['H']&E['H']&f['H'], NC['T1']),
    ctrl.Rule(t['M']&E['M']&f['M'], NC['T1']),
    ctrl.Rule(t['M']&E['H']&f['M'], NC['T3']),
    ctrl.Rule(t['H']&E['M']&f['M'], NC['T1'])
]
  
```

```

rules_Np = [
    ctrl.Rule(t['L']&E['L']&f['L'], Np['T1']),
    ctrl.Rule(t['L']&E['H']&f['L'], Np['T7']),
    ctrl.Rule(t['L']&E['H']&f['M'], Np['T1']),
    ctrl.Rule(t['L']&E['L']&f['H'], Np['T9']),
    ctrl.Rule(t['L']&E['H']&f['H'], Np['T1']),
    ctrl.Rule(t['M']&E['L']&f['L'], Np['T1']),
    ctrl.Rule(t['M']&E['H']&f['L'], Np['T3']),
    ctrl.Rule(t['M']&E['L']&f['H'], Np['T1']),
    ctrl.Rule(t['M']&E['H']&f['H'], Np['T7']),
    ctrl.Rule(t['H']&E['M']&f['L'], Np['T1']),
    ctrl.Rule(t['H']&E['H']&f['L'], Np['T7']),
    ctrl.Rule(t['H']&E['H']&f['M'], Np['T7']),
    ctrl.Rule(t['H']&E['M']&f['H'], Np['T1']),
    ctrl.Rule(t['H']&E['H']&f['H'], Np['T3']),
    ctrl.Rule(t['M']&E['M']&f['M'], Np['T1']),
    ctrl.Rule(t['M']&E['H']&f['M'], Np['T5']),
    ctrl.Rule(t['H']&E['M']&f['M'], Np['T5'])
]
  
```

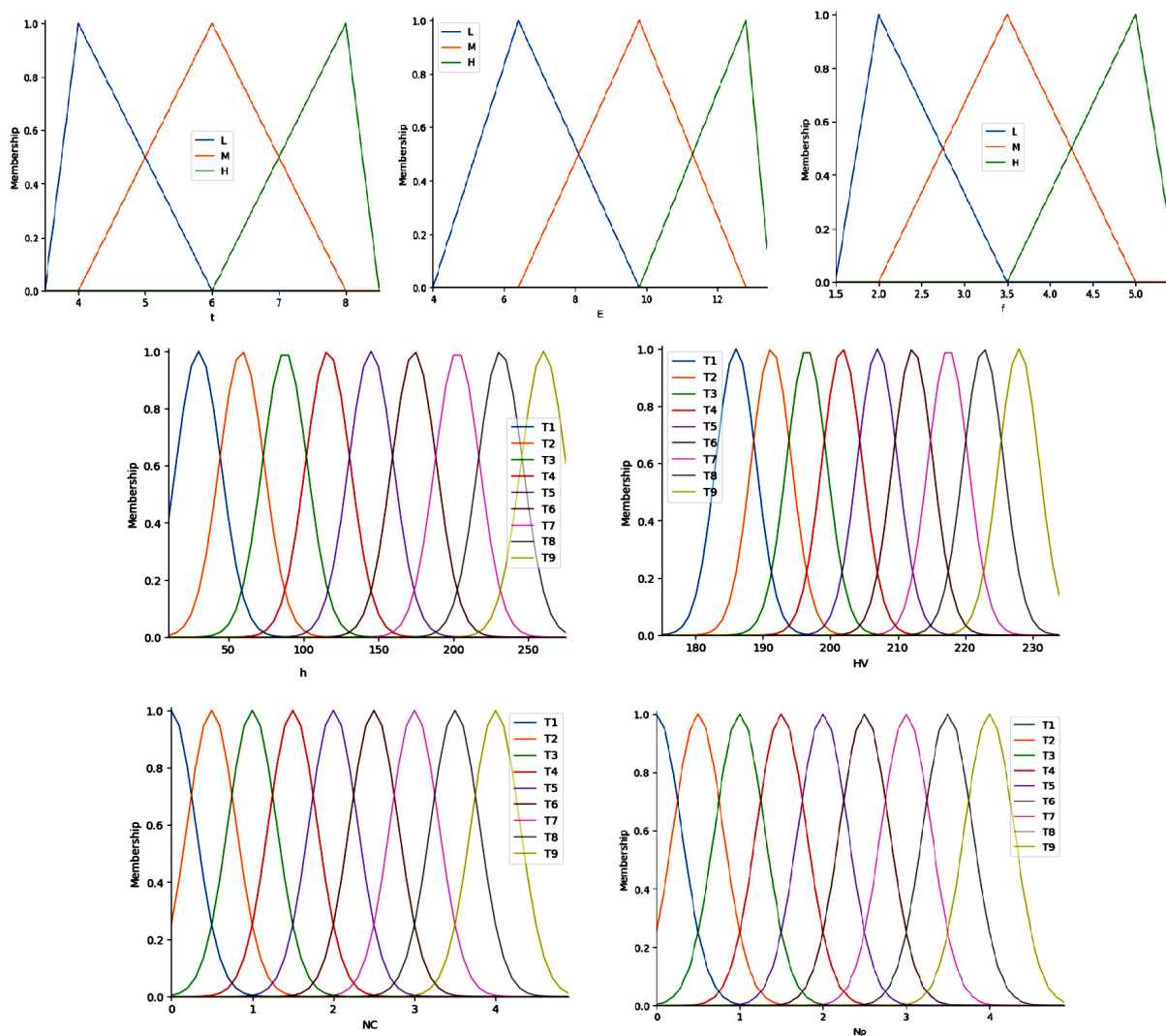


Figure 2.2 – Membership functions of the input and output linguistic variables

```

rules_h = [
    ctrl.Rule(t['L']&E['L']&f['L'], h['T1']),
    ctrl.Rule(t['L']&E['H']&f['L'], h['T7']),
    ctrl.Rule(t['L']&E['H']&f['M'], h['T8']),
    ctrl.Rule(t['L']&E['L']&f['H'], h['T2']),
    ctrl.Rule(t['L']&E['H']&f['H'], h['T9']),
    ctrl.Rule(t['M']&E['L']&f['L'], h['T4']),
    ctrl.Rule(t['M']&E['H']&f['L'], h['T8']),
    ctrl.Rule(t['M']&E['L']&f['H'], h['T1']),
    ctrl.Rule(t['M']&E['H']&f['H'], h['T9']),
    ctrl.Rule(t['H']&E['M']&f['L'], h['T1']),
    ctrl.Rule(t['H']&E['H']&f['L'], h['T4']),
    ctrl.Rule(t['H']&E['H']&f['M'], h['T4']),
    ctrl.Rule(t['H']&E['M']&f['H'], h['T1']),
    ctrl.Rule(t['H']&E['H']&f['H'], h['T5']),
    ctrl.Rule(t['M']&E['M']&f['M'], h['T4']),
    ctrl.Rule(t['M']&E['H']&f['M'], h['T6']),
    ctrl.Rule(t['H']&E['M']&f['M'], h['T3'])
]

```

To finalize the fuzzy modeling process, defuzzification was carried out to produce quantitative values for the output variables. Since defect formation, specifically, the number of pores and cracks, is inherently discrete and expressed as

integer counts, a rounding function was applied to the defuzzified outputs for N_c and N_p to ensure physically meaningful predictions.

The three-dimensional response surfaces shown in Figure 2.3 illustrate the influence of pulse energy and pulse duration on the geometric characteristics, hardness, and defect formation of the clad bead at a fixed pulse repetition rate of $f = 3$ Hz. The response surfaces for macroscale geometry and hardness (Figure 2.3 *a, b*) are smooth and indicate that the maximum coating thickness is obtained at high pulse energies and short pulse durations, whereas microhardness is strongly governed by the laser exposure time. In contrast, the response surfaces for defect prediction (Figure 2.3 *c, d*) exhibit a pronounced step-like behavior, which is associated with the integer values of the defect counts.

The performance, adequacy, and predictive capability of the developed fuzzy model were evaluated on an independent test dataset (Table 2.2).

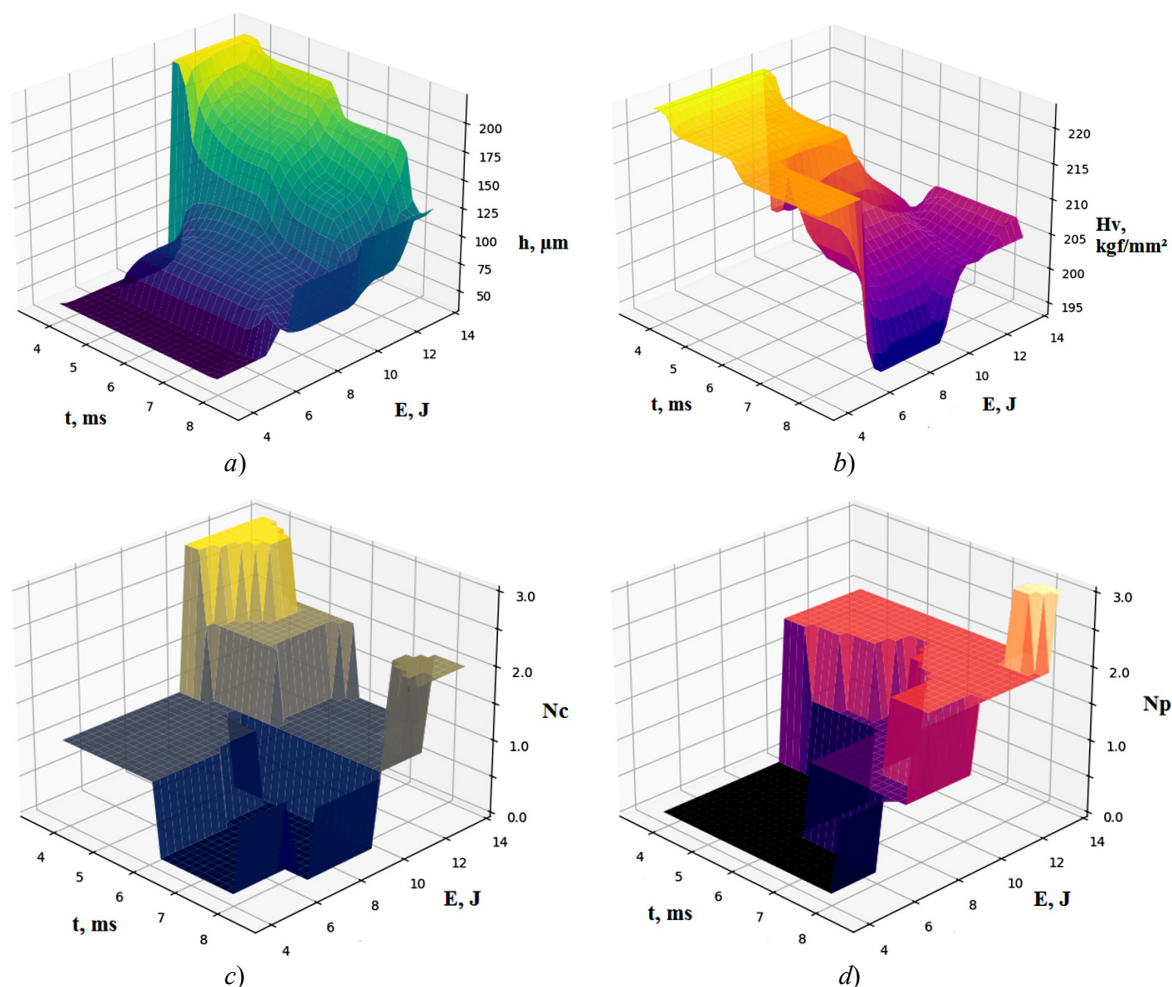


Figure 2.3 – Response surfaces of the fuzzy model showing the effect of pulse energy (E) and pulse duration (t) at $f = 3$ Hz on: (a) coating thickness (h), (b) microhardness (HV), (c) number of cracks (Nc), and (d) number of pores (Np)

Table 2.2 – Test dataset

№	t , ms	E , J	f , Hz	h , μm	HV , kgf/mm^2	Nc	Np
1	5.0	8.0	3.0	90	222	2	0
2	7.0	11.5	4.0	130	207	1	2
3	5.0	12.5	2.0	230	202	0	2
4	7.0	6.0	4.0	40	179	0	0
5	8.0	11.0	3.0	90	214	1	3

The predictive performance of the developed fuzzy model was assessed using the following metrics:

– coefficient of determination

$$R^2 = 1 - \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d_i - y_i)^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2},$$

– mean absolute error (MAE)

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |d_i - y_i|,$$

– root mean square error ($RMSE$)

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d_i - y_i)^2},$$

where d_i and y_i denote the observed and model-predicted response values, respectively.

The evaluation results for the fuzzy model are summarized in Table 2.3.

Table 2.3 – Performance evaluation results for the fuzzy model

Criterion	h	HV	Nc	Np
$RMSE$	7.9	7.8	0.5	0.5
MAE	7.3	6.1	0.2	0.2
R^2	0.9845	0.7160	0.6429	0.8611

The model exhibits good predictive accuracy for the output parameters. On the test dataset, it reproduces the geometric response and pore count satisfactorily, whereas the predictions for microhardness and, particularly, the number of microcracks are subject to higher relative uncertainty. The obtained performance metrics confirm that fuzzy modeling is capable of delivering sufficiently accurate predictions for laser cladding processes even when experimental data are limited.

Conclusion

A multi-output Mamdani-type fuzzy model was developed based on the results of a full-scale *D*-optimal experiment. The model directly relates the pulsed laser processing parameters t , E , and f to the final quality characteristics of nichrome coatings on 30XГCH2A steel, namely coating thickness h , microhardness HV , number of cracks N_c , and number of pores N_p . The model was validated against five process regimes not included in the training dataset, demonstrating satisfactory interpolation performance, particularly for coating thickness and pore count.

The proposed model can serve as an interpretable decision-support tool for preliminary parameter selection and multi-criteria ranking of process regimes in pulsed laser cladding of nichrome coatings on 30XГCH2A steel.

REFERENCES

1. Grigoryants, A. G. Technological processes of laser processing / A. G. Grigoryants, I. N. Shiganov, A. I. Misyurov. – Moscow : MGTU Bauman Publ., 2006. – 664 p. (in Russian)
2. Technology of formation of wear-resistant coatings on the iron base by laser processing methods / O. G. Devoino, M. A. Kardapolova, A. S. Kalinichenko [et al.]. – Minsk : Belorusskii natsional'nyi tekhnicheskii universitet, 2020. – 280 p. (in Russian)
3. Maksimenka, A. V. Technology of restoration of details surfaces of aviation technics pulsing laser weld deposit : abstract of Ph. D. thesis / A. V. Maksimenka. – Minsk, 2011. – 27 p. (in Russian).
4. Toyserkani, E. Laser Cladding / E. Toyserkani, A. Khajepour, S. F. Corbin. – Boca Raton : CRC Press, 2005. – 260 p.
5. Additive manufacturing of metallic components – Process, structure and properties / T. DebRoy, H. L. Wei, J. S. Zuback [et al.] // Progress in Materials Science. – 2018. – Vol. 92. – P. 112–224.
6. Dowden, J. M. The Theory of Laser Materials Processing: Heat and Mass Transfer in Modern Technology / J. M. Dowden (Ed.). – 2nd ed. – Dordrecht : Springer, 2009. – 394 p. – (Springer Series in Materials Science, Vol. 119).
7. Heat and mass transfer in laser dissimilar welding of stainless steel and nickel / Y. Hu, X. He, G. Yu [et al.] // Applied Surface Science. – 2012. – Vol. 258, № 15. – P. 5914–5922.
8. Toyserkani, E. 3-D finite element modeling of laser cladding by powder injection: effects of laser pulse shaping on the process / E. Toyserkani, A. Khajepour, S. Corbin // Optics and Lasers in Engineering. – 2004. – Vol. 41, № 6. – P. 849–867.
9. Koziel, S. Surrogate-based modeling and optimization / S. Koziel, L. Leifsson. – New York : Springer Publ., 2013. – 412 p.
10. Jiang, P. Surrogate model-based engineering design and optimization / P. Jiang, Q. Zhou, X. Shao. – Berlin, Heidelberg : Springer Publ., 2020. – 240 p.
11. A review on applications of artificial intelligence in modeling and optimization of laser beam machining / A. N. Bakhtiyari, Z. Wang, L. Wang, H. Zheng // Optics & Laser Technology. – 2021. – Vol. 135. – P. 1–18.
12. Myers, R. H. Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments / R. H. Myers, D. C. Montgomery, C. M. Anderson-Cook. – 4th ed. – Hoboken, NJ : John Wiley & Sons, 2016. – 856 p.
13. Zadeh, L. A. Fuzzy sets / L. A. Zadeh // Information and Control. – 1965. – Vol. 8, No. 3. – P. 338–353.
14. Mamdani, E. H. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller / E. H. Mamdani, S. Assilian // International Journal of Man-Machine Studies. – 1975. – Vol. 7, № 1. – P. 1–13.
15. Fuzzy Logic Approach for the Prediction of Dross Formation in CO₂ Laser Cutting of Mild Steel / M. Madić [et al.] // Journal of Engineering Science & Technology Review. – 2015. – Vol. 8, № 3. – P. 143–150.
16. Fuzzy MCDM Methodology for Analysis of Fibre Laser Cutting Process / M. Trifunović, M. Madić, G. Petrović [et al.] // Applied Sciences. – 2025. – Vol. 15. – P. 7364. – DOI: 10.3390/app15137364.
17. Determination of parameters for controlled laser cleaving of silicate glasses using regression, neural network and fuzzy models / Yu. V. Nikitjuk, A. F. Vasilyev, L. N. Marchenko [et al.] // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 2 (59). – P. 32–38.
18. Neuro-fuzzy and fuzzy modeling of laser alloying of steel 30XГCH2A / G. A. Baevich, Yu. V. Nikityuk, L. N. Marchenko, A. V. Maksimenko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 3 (64). – P. 37–42.
19. Nikityuk, Yu. V. Study and optimization of laser cleaving of crystalline quartz using genetic algorithm, neural network and neuro-fuzzy models / Yu. V. Nikityuk, L. N. Marchenko, A. N. Serdyukov //

Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 4 (65). – P. 29–34.

20. *Simulation of laser polishing for fused quartz* / Yu. V. Nikityuk, L. N. Marchenko, A. N. Serdyukov, Iu. V. Bruttan // Computer Research and Modeling. – 2026. – Vol. 18, № 2. – P. 399–421.

21. *Shtovba, S. D. Fuzzy System Design Using MATLAB* / S. D. Shtovba. – Moscow : Hotline Publishing, 2007. – 284 p.

22. *Rutkovskaya, D. Neural Networks, Genetic Algorithms and Fuzzy Systems* / D. Rutkovskaya,

M. Pilinsky, L. Rutkovsky. – Moscow : Hotline Publishing, 2013. – 384 p.

The article was submitted 29.07.2026.

Информация об авторах

Никитюк Юрий Валерьевич – к.ф.-м.н., доцент
Марченко Лариса Николаевна – к.т.н., доцент
Баевич Георгий Александрович – старший преподаватель
Прохоренко Владислав Александрович – ст. преподаватель
Максименко Александр Васильевич – к.ф.-м.н., доцент

**РАЗРАБОТКА МЕТОДА И СРЕДСТВ МОДЕЛИРОВАНИЯ
ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ОПЕРАЦИЕЙ
ЛАЗЕРНОГО ТЕРМОРАСКАЛЫВАНИЯ СИЛИКАТНЫХ СТЕКОЛ
ПРИ ОСУЩЕСТВЛЕНИИ ПОЛЯРИСКОПИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА
В РЕЖИМЕ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ**

В. А. Прохоренко, В. С. Смородин, Ю. В. Никитюк, С. И. Соколов

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

**DEVELOPMENT OF A METHOD AND TOOLS FOR MODELING
THE CONTROL PROBLEM OF THE TECHNOLOGICAL OPERATION
OF LASER THERMAL CLEAVING OF SILICATE GLASS
UNDER REAL-TIME POLARISCOPIIC MONITORING**

V. A. Prokhorenko, V. S. Smorodin, Yu. V. Nikityuk, S. I. Sokolov

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Разработаны метод и программные средства нейросетевого моделирования задачи адаптивного управления технологической операцией лазерного термораскалывания силикатных стекол при наличии внешних управляющих воздействий, ограниченной наблюдаемости состояния зоны обработки и случайных возмущений. Физические эксперименты выполнялись на лазерном станке с ЧПУ AEON Mira 7 с реализацией полярископического одномодального видеомониторинга зоны обработки CMOS-камерой. В качестве наблюдаемых классов состояния процесса рассматривались отсутствие старта трещины, опережение вершины трещины относительно лазерного пятна, ветвление трещины, а также устойчивое термораскалывание. Для синтеза корректирующих воздействий разработана стохастическая имитационная среда, в которой Transformer-регулятор построен методами обучения с подкреплением. Обратная связь реализована как контур коррекции технологического режима по текущему видеонаблюдению. Алгоритмической основой являлся Proximal Policy Optimization в actor-critic постановке с Generalized Advantage Estimation, что позволило получить эффективный нейросетевой регулятор.

Ключевые слова: лазерное термораскалывание, силикатное стекло, полярископический мониторинг, имитационное моделирование, обратная связь, обучение с подкреплением, PPO, нейросетевой регулятор.

Для цитирования: Разработка метода и средств моделирования задачи управления технологической операцией лазерного термораскалывания силикатных стекол при осуществлении полярископического мониторинга в режиме реального времени / В. А. Прохоренко, В. С. Смородин, Ю. В. Никитюк, С. И. Соколов // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 3 (68). – С. 79–85. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_79. – EDN: LKVDSY

Abstract. A method and software tools have been developed for neural-network modeling of adaptive control of the technological operation of laser thermal splitting of silicate glass under external control actions, limited observability of the processing-zone state, and random disturbances. Physical experiments were carried out on an AEON Mira 7 CNC laser machine using single-mode polariscopic video monitoring of the processing zone with a CMOS camera. The observed process-state classes included failure of crack initiation, advancement of the crack tip ahead of the laser spot, crack branching, and stable thermal splitting. To synthesize corrective control actions, a stochastic simulation environment was developed in which a Transformer-based controller was constructed using reinforcement learning methods. Feedback was implemented as a process-parameter correction loop based on current video observations. The algorithmic framework was based on Proximal Policy Optimization in an actor-critic formulation with Generalized Advantage Estimation, which made it possible to obtain an effective neural-network controller.

Keywords: laser thermal cleaving, silicate glass, polariscopic monitoring, simulation modeling, feedback, reinforcement learning, PPO, neural-network regulator.

For citation: Development of a method and tools for modeling the control problem of the technological operation of laser thermal cleaving of silicate glass under real-time polariscopic monitoring / V. A. Prokhorenko, V. S. Smorodin, Yu. V. Nikityuk, S. I. Sokolov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 3 (68). – P. 79–85. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_79 (in Russian). – EDN: LKVDSY

Введение

Технологические операции лазерной обработки материалов относятся к классу сложных

управляемых процессов, для которых существенное значение имеют стохастические факторы, ограниченность наблюдения и необходимость

принятия решений по текущему состоянию обработки и заготовки. Поэтому при осуществлении имитационного моделирования динамики функционирования реальных производственных систем необходимо учитывать ее вероятностную природу, принимая во внимание случайные возмущения, отказы, конкуренцию ресурсов и управляющие воздействия [1].

В развитие ранее предложенного подхода [2] к нейросетевому моделированию управления технологической операцией лазерной полировки, где базовый контур определяет штатные значения переменных, а адаптивный контур вырабатывает коррекцию на основе данных мониторинга, в данной работе предлагается распространение указанной логики на операцию лазерного термораскалывания силикатного стекла без использования хладагента, при этом корректирующее воздействие интерпретируется как дискретная микротехнологическая операция, инициируемая по результатам полярископического видеомониторинга в режиме реального времени [3].

Актуальность задачи определяется тем, что лазерное термораскалывание позволяет выполнять бесконтактное разделение стекла путем управляемого распространения трещины в поле термоупругих напряжений, но качество процесса существенно зависит от согласования энерговода, скорости перемещения лазерного пятна, геометрии пятна, начального дефекта и локальных свойств стеклянной заготовки. В отличие от задач, где качество можно оценить только после завершения обработки, при термораскалывании признаки нестарта, опережающего ухода трещины или ветвления, могут быть выявлены по текущему состоянию зоны обработки. Поэтому научно-практический интерес представляет построение программной среды, в которой имитируется не только физическое развитие процесса, но и микротехнологическая операция мониторинга, используемая в контуре обратной связи.

1 Обзор предметной области

Лазерное термораскалывание стекла является одним из перспективных промышленных способов разделения хрупких неметаллических материалов, поскольку в отличие от механического скрайбирования с последующим разломом, алмазной резки и гидроабразивной обработки оно реализует бесконтактное формирование трещины термоупругими напряжениями без существенного удаления материала из зоны реза [4]–[6]. Основные технологические преимущества такого подхода состоят в уменьшении сколов и краевых микротрещин, снижении загрязнения продуктами обработки и охлаждающими жидкостями, отсутствии износа режущего инструмента, возможности формирования узкой зоны разделения и получении более высокой прочности кромки при последующей эксплуатации изделия [4], [5].

При этом сравнительные исследования современных методов обработки стекла показывают, что лазерные технологии становятся промышленно привлекательной альтернативой традиционным методам за счет сочетания высокой скорости, качества и точности обработки, хотя для термораскалывания принципиально важной остается задача управления траекторией распространения трещины и распределением термоупругих напряжений [6].

Вопросы управления инициацией и распространением трещины в стекле рассматривались в работах по управляемой лазерной резке и лазерному разделению хрупких материалов. В частности, способы управления инициацией и распространением трещины при лазерной резке стекла изучались в [7], наблюдение распространения трещины и анализ напряжений в реальном времени выполнялось в [8], а также лазерное разделение стеклянных подложек жидкокристаллических индикаторов исследовалось в [9]. Показано, что качество разделения определяется не только заданной мощностью и скоростью, но и динамикой взаимного положения лазерного пятна, фронта трещины и области максимальных термоупругих напряжений. Следовательно, для построения обратной связи по управлению технологической операцией лазерного термораскалывания требуется учитывать текущий наблюдаемый режим развития трещины.

Общепринятым подходом к управлению процессами лазерной обработки материалов является использование многоуровневого контура, включающего сенсорный мониторинг зоны обработки, извлечение признаков или нейросетевое распознавание состояния, а затем корректировку мощности, скорости, фокуса, траектории или времени воздействия. Для лазерной сварки такие исследования уже стали общепринятыми: используются системы управления мощностью и фокусом по признакам полного проплавления [10], управление мощностью по изображению отверстия проплавления [11], а также стабилизация глубины проплавления по данным оптического контроля плазмы [12]. Обзоры предметной области подчеркивают переход от отдельных сенсорных решений к интеллектуальным системам мониторинга и управления, основанным на обработке сигналов, извлечении признаков, моделировании, принятии решений и машинном обучении [13], [14].

В аддитивных лазерных методах и наплавке близкими к рассматриваемой задаче являются работы по управлению температурой или площадью ванны расплава. В лазерной наплавке применялось управление температурой melt pool [15], в Directed Energy Deposition было реализовано closed-loop управление температурой ванны по пирометрическим данным [16], а для SLM / LPBF показана обратная связь по площади

melt pool с управлением мощностью лазера [17]. Наблюдается общий переход от мониторинга дефектов к adaptive quality enhancement и zero-defect autonomous manufacturing, где ML-модели, мультимодальные датчики и корректирующие воздействия рассматриваются как единый контур [18]. Поэтому использование имитационной среды и нейросетевого регулятора для синтеза управляющей политики до переноса на реальное оборудование обосновано.

Отдельно следует выделить исследования, где нейросети включены непосредственно в feedback-loop лазерной обработки. В работе [19] предложена система лазерной микромеханической обработки, где сигнал лазерно-индуцированной плазмы используется для online-оценки глубины отверстия нейросетью, после чего система выполняет компенсационную обработку. Для лазерного термораскалывания стекла применялась мультимодальная визуально-акустическая сеть мониторинга состояния процесса LITP [20], а затем multi-scale hybrid attention aggregation network для мониторинга laser-induced thermal-crack processing [21]. Полученные результаты важны для текущей задачи, поскольку показывают возможность использования нейросетей не только как offline-классификаторов, но и как агрегаторов состояния процесса, пригодных для последующей обратной связи.

С точки зрения построения нейросетевого регулятора технологическая операция лазерного термораскалывания является частично наблюдаемым процессом: истинные температура, напряжения, энергия разрушения и положение вершины трещины наблюдаются косвенно через видео- или мультимодальный сигнал. Поэтому выбор в качестве нейросетевого регулятора рекуррентной нейросети типа GRU или LSTM является целесообразным для рассматриваемого класса POMDP-задач [22]. При этом перспективным является также использование архитектур типа Transformer как альтернативы рекуррентным сетям [23]. В качестве алгоритмической основы синтеза нейросетевой политики корректирующих воздействий целесообразно использовать методы обучения с подкреплением: алгоритм PPO был предложен как устойчивый вариант policy optimization [24], а GAE – как способ уменьшить дисперсию оценки преимуществ действия [25]. Для промышленных процессов это согласуется с обзором предметной области [26], где RL рассматривается как перспективный метод offline-синтеза политик управления перед внедрением в реальный управляющий контур технологической системы.

2 Проведение натурных экспериментов

Натурные эксперименты по лазерному термораскалыванию выполнялись на лазерном станке с ЧПУ AEON Mira 7 при обработке заготовок

из силикатного стекла. Лазерное воздействие формировалось перемещающейся по заданной траектории головкой CO_2 -лазера, а разделяющая трещина инициировалась перед началом прохода путем создания локального дефекта – микротрещины на краю заготовки. Для регистрации состояния зоны обработки реализован полярископический видеомониторинг: под стеклянной заготовкой размещался источник света с пленочным поляризатором, поляризованное излучение проходило через область термоупругих напряжений в стекле, после чего регистрировалось CMOS-камерой с пленкой анализатора, установленной перед объективом. Угол ориентации анализатора подбирался таким образом, чтобы в видеопотоке наблюдались контрастные полосы, обусловленные изменением напряженно-деформированного состояния материала в зоне температурного градиента. Таким образом, экспериментальная установка обеспечивала одновременную реализацию технологической операции лазерного термораскалывания и микротехнологической операции одномодального оптического мониторинга ее текущего состояния. Общая схема размещения лазерной головки, стеклянной заготовки, источника поляризованного света, поляризатора, анализатора и CMOS-камеры представлена на рисунке 2.1.

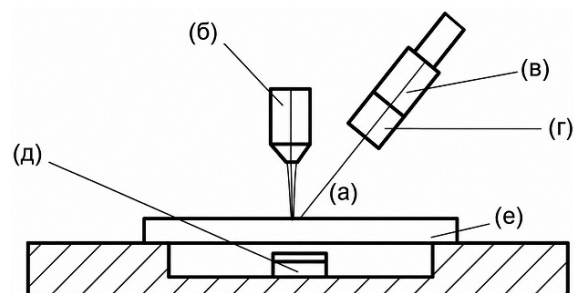


Рисунок 2.1 – Схема размещения оборудования при проведении натурных экспериментов по лазерному термораскалыванию силикатных стекол:

- (а) – зона лазерной обработки,
- (б) – лазерная головка,
- (в) – камера оптического диапазона, сфокусированная на зоне обработки,
- (г) – пленка анализатора, установленная перед объективом камеры под требуемым углом,
- (д) – источник поляризованного света с пленкой поляризатора,
- (е) – обрабатываемая заготовка из силикатного стекла

При планировании и интерпретации экспериментов учитывалось, что задаваемая на контроллере ЧПУ команда мощности в процентах является управляющим параметром лазерной установки, но не тождественна оптической мощности, непосредственно подводимой к поверхности стекла. Для исследуемого экземпляра станка

была выполнена калибровка, показавшая нелинейную зависимость между процентом мощности, задаваемым на контроллере, и током газоразрядной цепи CO_2 -лазера. Поэтому в качестве непосредственно фиксируемых параметров режима использовались: команда мощности контроллера, скорость перемещения лазерной головки, высота установки головки относительно заготовки, а также наблюдаемый результат термораскалывания по данным видеомониторинга. Мощность в зоне обработки в дальнейшем рассматривалась не как явно измеренная величина, а как расчетно-сценарная характеристика, зависящая от передаточных свойств энергетического и оптического трактов установки.

Дополнительно при проведении исследования учитывались случайные возмущения, возникающие при реализации технологической операции на оборудовании. К таким возмущениям относились флуктуации эффективного энерго ввода, возможные отклонения действительной геометрии лазерного пятна от расчетной, вариации локальных свойств стеклянной заготовки, погрешности задания высоты установки головки, а также шумы и нестабильность видеорегистрации полярископической картины. При моделировании эти факторы рассматривались как совокупность неопределенностей, влияющих на переход от заданных параметров режима к фактическому температурно-напряженному состоянию стекла и, следовательно, к классу наблюдаемого развития трещины.

3 Подготовка экспериментальных данных

Исходный набор данных представлял собой серию из 66 видеозаписей экспериментов по лазерному термораскалыванию стеклянных пластин, снятых на CMOS-камеру. На каждой видеозаписи выделялся активный участок: от момента, когда лазерный луч достигал края стеклянной заготовки, до выключения лазера. Для сопоставимости изображений выделялась единая область интереса, содержащая стеклянную пластину. Разметка класса выполнялась по визуальном анализу исходных кадров. Для каждого опыта назначался один из четырех базовых классов: отсутствие старта трещины, опережение вершины трещины относительно лазерного пятна, ветвление или формирование нескольких трещин, а также стабильное термораскалывание. Такой подход позволил сохранить физическую интерпретируемость разметки, поскольку выбранные классы соответствуют описанным в литературе стадиям и режимам лазерного разделения хрупких материалов: зарождению трещины у края образца, устойчивому распространению трещины под действием локальных термонапряжений, изменению взаимного положения вершины трещины и лазерного пятна, а также неустойчивому распространению и образованию

дополнительных трещин [7]–[9]. На рисунке 3.2 приведены примеры кадров зоны обработки, зафиксированные камерой.

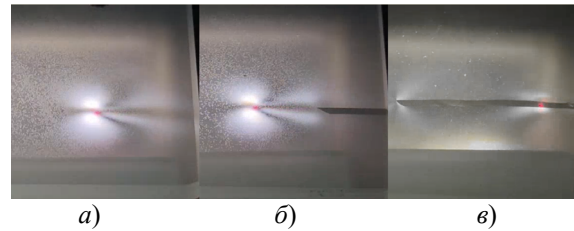


Рисунок 3.2 – Примеры развития трещины при лазерном термораскалывании силикатного стекла:

- а) отсутствие инициации трещины;
- б) нормальное развитие трещины;
- в) пример аномального развития трещины

4 Имитационная модель и алгоритм обратной связи

Алгоритм обратной связи реализован на языке Python как вычислительная среда, в которой технологическая операция лазерного термораскалывания представлена последовательностью дискретных шагов мониторинга, оценки состояния и возможной коррекции режима. На каждом шаге имитируется классификация полярископического видеопотока, наблюдающего состояние зоны обработки, после чего нейросетевой регулятор формирует корректирующее воздействие: сохранение текущего режима, изменение команды мощности либо изменение скорости перемещения лазерной головки. Такая постановка является развитием подхода, предложенного ранее для лазерной полировки, где базовый контур задавал штатные значения переменных управления U операции, а адаптивный контур управления формировал корректирующее управление ΔU на основе результатов мониторинга [2]. В отличие от непрерывного регулирования одного параметра, управление рассматривается как выбор допустимой микротехнологической операции, активируемой в требуемый момент времени.

Для задачи управления технологической операцией лазерного термораскалывания штатный режим интерпретируется как устойчивое распространение трещины за перемещающейся зоной лазерного нагрева без опережающего ухода фронта и без ветвления. Нежелательными состояниями считаются отсутствие старта трещины после допустимого начального интервала, опережение вершины трещины относительно лазерного пятна и ветвление. Поэтому корректирующий контур должен формировать надзорные корректирующие воздействия по текущему классу состояния и оценке риска перехода к нештатному режиму.

В программной реализации обратная связь используется как контур коррекции технологического режима по данным текущего наблюдения.

Имитационная модель учитывает случайные возмущения энерговода и вариативность условий обработки, а нейрорегулятор обучается в среде методами обучения с подкреплением.

5 Результаты вычислительного эксперимента

В качестве метода обучения с подкреплением использовался алгоритм Proximal Policy Optimization в actor-critic постановке с оцениванием преимущества действия по Generalized Advantage Estimation и использованием нейросетевой архитектуры Transformer [22]–[24]. Эффективность реализуемого агентом правила выбора действий оценивается по способности удерживать процесс в штатном режиме и предотвращать переход в критические технологические состояния. В среде осуществляется дискретный набор корректирующих воздействий, включающий отсутствие коррекции, изменение команды мощности и изменение скорости перемещения лазерной головки. Нейросетевой регулятор получает на вход окно истории наблюдений, содержащее параметры режима, вероятностную оценку класса состояния процесса и признаки неопределенности наблюдений.

В вычислительном эксперименте в качестве нейросетевого регулятора использовалась архитектура Transformer с окном истории из 16 последовательных наблюдений. Для нее сравнивались два варианта синтеза политики при неизменной стохастической имитационной модели: обучение методом PPO с расписанием изменения параметров обучения и предварительное обучение по действиям эвристического регулятора с последующим постепенным уменьшением его влияния и дообучением методом PPO. Используемая эвристика задавала направленную коррекцию режима: при отсутствии старта трещины увеличивала эффективный энерговод, при опережении фронта трещины или ветвлении уменьшала его, а при устойчивом термораскалывании преимущественно сохраняла текущий режим. Проверка выполнялась для пяти независимых инициализаций обучения на общем наборе из 1000 стохастических реализаций, не использовавшемся для выбора весов нейросетевого регулятора. Базовая политика отсутствия коррекции обеспечила долю успешных реализаций 0,362,

эвристическая политика – 0,482, а PPO только с расписанием обучения – $(0,403 \pm 0,034)$.

Предварительное обучение по действиям эвристического регулятора с последующим PPO-дообучением повысило среднюю долю успешных реализаций до $(0,569 \pm 0,051)$. Результат превысил эвристическую политику во всех пяти независимых запусках обучения. Среднее абсолютное рассогласование положения фронта трещины относительно зоны лазерного воздействия уменьшилось с 1,353 мм для эвристической политики до $(1,076 \pm 0,089)$ мм, а интегральная оценка качества увеличилась с 31,77 до $(33,04 \pm 2,91)$. Таким образом, в разработанной имитационной среде предварительное формирование начальной политики с последующим обучением с подкреплением позволяет получить нейросетевой регулятор, превосходящий исходную эвристику по основному критерию успешного протекания процесса. Результаты сравнения политик корректирующего управления по метрикам Success, Score, phys_st, lead, branch, |lag|, late_act приведены в таблице 5.1.

Метрика Success характеризует долю успешных реализаций процесса, т. е. случаев, когда трещина сформировалась и устойчиво последовала за зоной лазерного воздействия. Score есть интегральная оценка качества управления, объединяющая показатели успешности и устойчивости процесса со штрафами за нежелательные режимы, при этом чем больше значение, тем лучше. Метрика phys_st (physical stability) показывает долю времени моделирования, в течение которого физическое состояние процесса соответствовало устойчивому термораскалыванию, lead – долю времени, в течение которого вершина трещины опережала зону лазерного воздействия; branch (branching) – долю времени, в течение которого наблюдалось ветвление трещины; late_act (late action) – доля запоздалых корректирующих воздействий, выполненных после наиболее подходящего момента для коррекции. Показатель |lag| (absolute lag) – это среднее абсолютное рассогласование положения фронта трещины относительно зоны лазерного воздействия, мм.

Динамика сходимости примененного алгоритма обучения с подкреплением показана на рисунке 5.1.

Таблица 5.1 – Результаты сравнительной оценки политик корректирующего управления

Политика	Success	Score	phys st	lead	branch	late act	lag , мм
Без коррекции (NOOP)	0,362	23,33	0,722	0,110	0,0765	0	1,605
Эвристическая	0,482	31,77	0,774	0,0868	0,0683	0,047	1,353
Transformer H = 16, PPO + schedule	$0,403 \pm 0,034$	$23,74 \pm 2,66$	$0,725 \pm 0,013$	$0,103 \pm 0,011$	$0,0742 \pm 0,0044$	$0,148 \pm 0,051$	$1,763 \pm 0,024$
Transformer H = 16, BC/kickstart + PPO	$0,569 \pm 0,051$	$33,04 \pm 2,91$	$0,780 \pm 0,011$	$0,0900 \pm 0,0084$	$0,0684 \pm 0,0030$	$0,086 \pm 0,027$	$1,076 \pm 0,089$

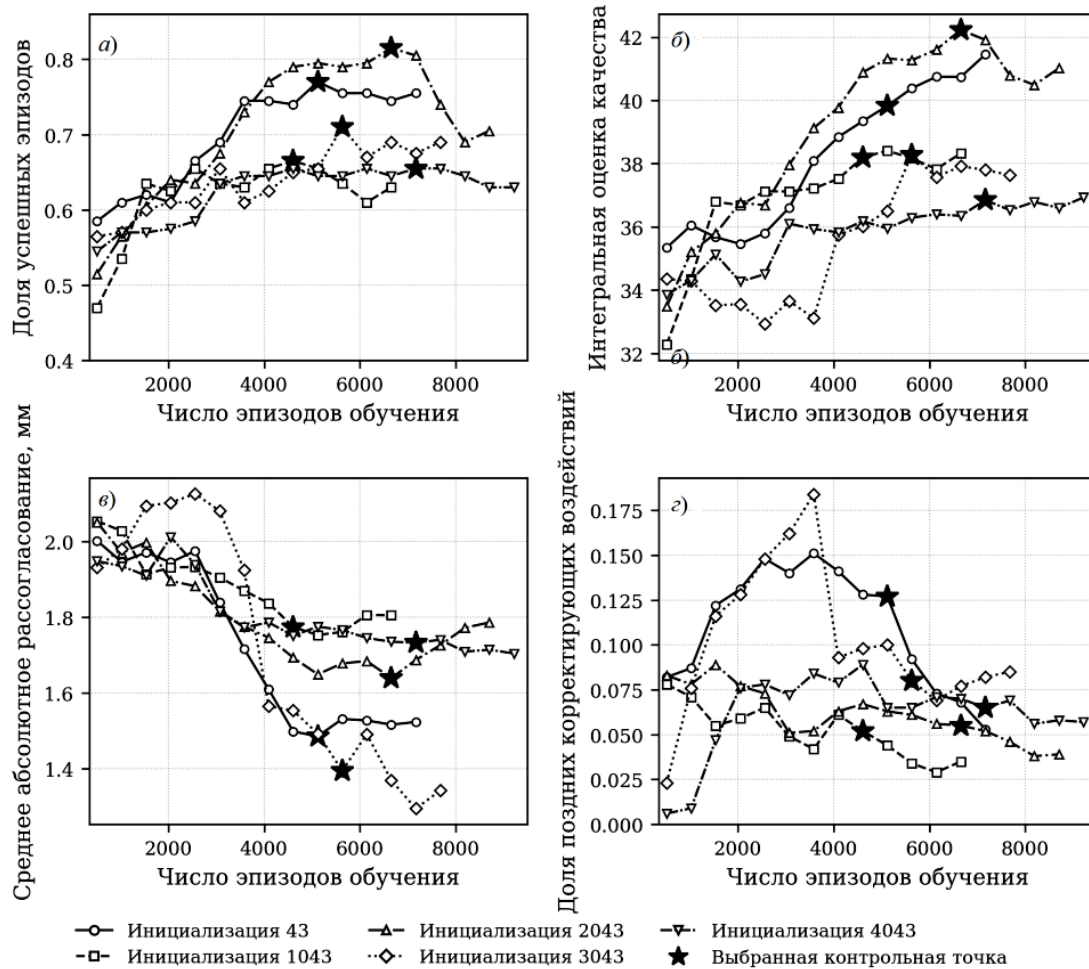


Рисунок 5.1 – Динамика основных метрик при обучении Transformer-регулятора с окном из 16 наблюдений по схеме предварительное обучение + PPO

Заключение

Предложен метод нейросетевого моделирования задачи адаптивного управления технологической операцией лазерного термораскалывания силикатных стекол при наличии внешних управляющих воздействий и случайных возмущений. Процесс построения обратной связи основан на данных физического эксперимента, выделении наблюдаемых классов состояния процесса, построении стохастической имитационной среды с имитацией микротехнологической операции полярископического видеомониторинга и обучении нейросетевого регулятора для выбора корректирующих воздействий.

Реализована имитационная модель и обучение нейрорегулятора, обеспечивающие физическую интерпретируемость технологического процесса. Управляющими параметрами в численных экспериментах выступали команда мощности контроллера и скорость перемещения лазерной головки, а распознаваемыми классами – отсутствие старта трещины, опережение вершины трещины, ветвление и устойчивое термораскалывание. Разработанный алгоритм обратной

связи используется как контур коррекции технологического режима, что позволяет согласовать программную реализацию с реальными ограничениями экспериментальной установки. Предварительное формирование начальной политики с последующим обучением с подкреплением позволило получить эффективный Transformer-регулятор.

Дальнейшие исследования планируется связать с калибровкой стохастической имитационной модели по расширенной серии натурных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Максимей, И. В. Разработка имитационных моделей сложных технических систем / И. В. Максимей, В. С. Смородин, О. М. Демиденко. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2014. – 298 с.
2. Метод и средства нейросетевого моделирования задачи управления технологической операцией лазерной полировки / В. А. Прохоренко, Ю. В. Никитюк, В. С. Смородин [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 2 (67). – С. 93–98. – EDN: NDCHVJ.

3. Разработка средств мониторинга в режиме реального времени технологической операции лазерной полировки кварцевых стекол / В. А. Прохоренко, Ю. В. Никитюк, В. С. Смородин [и др.] // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2026. – № 3 (156). – С. 64–70.
4. Nisar, S. Laser glass cutting techniques: a review / S. Nisar, L. Li, M. A. Sheikh // Journal of Laser Applications. – 2013. – Vol. 25, № 4. – Art. 042010. – DOI: 10.2351/1.4807895.
5. Effect of thermal stresses on chip-free diode laser cutting of glass / S. Nisar, M. A. Sheikh, L. Li, S. Safdar // Optics & Laser Technology. – 2009. – Vol. 41, № 3. – P. 318–327.
6. In-depth comparison of conventional glass cutting technologies with laser-based methods by volumetric scribing using Bessel beam and rear-side machining / J. Dudutis, J. Pipiras, R. Stonys [et al.] // Optics Express. – 2020. – Vol. 28, № 21. – P. 32133–32151. – DOI: 10.1364/OE.402567.
7. Study on a controlling method for crack nucleation and propagation behavior in laser cutting of glass / Y. Miyashita, M. Mogi, H. Hasegawa [et al.] // Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering. – 2008. – Vol. 2, № 12. – P. 1555–1566. – DOI: 10.1299/jmmp.2.1555.
8. Real-time observation of crack propagation and stress analysis during laser cutting of glass / K. Ogata, K. Nagato, Y. Ito [et al.] // Journal of Laser Applications. – 2019. – Vol. 31, № 4. – Art. 042008. – DOI: 10.2351/1.5097733.
9. Kurobe, T. Precision breaking of a liquid crystal display panel (STN type) by YAG laser / T. Kurobe, T. Matsumoto // Journal of the Japan Society for Precision Engineering. – 1997. – Vol. 63, № 7. – P. 1018–1022.
10. Closed-loop power and focus control of laser welding for full-penetration monitoring / F. Bardin, A. Cobo, J. M. Lopez-Higuera [et al.] // Applied Optics. – 2005. – Vol. 44, № 1. – P. 13–21.
11. Closed-loop control of laser power using the full penetration hole image feature in aluminum welding processes / A. Blug, D. Carl, H. Höfler [et al.] // Physics Procedia. – 2011. – Vol. 12. – P. 720–729.
12. Closed loop control of penetration depth during CO₂ laser lap welding processes / T. Sibillano, D. Rizzi, F. P. Mezzapesa [et al.] // Sensors. – 2012. – Vol. 12, № 8. – P. 11077–11090.
13. Application of sensing techniques and artificial intelligence-based methods to laser welding real-time monitoring: a critical review / W. Cai, J. Wang, P. Jiang [et al.] // Journal of Manufacturing Systems. – 2020. – Vol. 57. – P. 1–18.
14. Intelligent welding system technologies: state-of-the-art review and perspectives / B. Wang, S. J. Hu, L. Sun, T. Freiheit // Journal of Manufacturing Systems. – 2020. – Vol. 56. – P. 373–391.
15. Song, L. Feedback control of melt pool temperature during laser cladding process / L. Song, J. Mazumder // IEEE Transactions on Control Systems Technology. – 2011. – Vol. 19, № 6. – P. 1349–1356. – DOI: 10.1109/TCST.2010.2093901.
16. Closed-loop control of meltpool temperature in directed energy deposition / Z. Smoqi, B. D. Bevans, A. Gaikwad [et al.] // Materials & Design. – 2022. – Vol. 215. – Art. 110508.
17. Feedback control of melt pool area in selective laser melting additive manufacturing process / S. Z. Hussain, Z. Kausar, Z. U. Koreshi [et al.] // Processes. – 2021. – Vol. 9, № 9. – Art. 1547.
18. In-situ process monitoring and adaptive quality enhancement in laser additive manufacturing: a critical review / L. Chen, G. Bi, X. Yao [et al.] // Journal of Manufacturing Systems. – 2024. – Vol. 74. – P. 527–574.
19. Feedback-control based laser micromachining with real-time plasma detection and neural networks / Y.-J. Chang, C.-S. Wang, Y.-H. Hsiao, S. D. M. Gurajala // Optics & Laser Technology. – 2025. – Vol. 180. – Art. 111500.
20. A multimodal information fusion method for real-time monitoring of glass cutting with laser-induced thermal-crack propagation / C. Zhao, J. Sun, Z. Ma, [et al.] // Optics & Laser Technology. – 2025. – Vol. 180. – Art. 111457.
21. Multi-scale hybrid attention aggregation networks for multi-modal monitoring in laser-induced thermal-crack processing / C. Zhao, J. Sun, J. Fang [et al.] // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2025. – Vol. 223. – Art. 111883.
22. Ni, T. Recurrent model-free RL can be a strong baseline for many POMDPs / T. Ni, B. Eysenbach, R. Salakhutdinov // Proceedings of the 39th International Conference on Machine Learning. – 2022. – Vol. 162. – P. 16691–16723.
23. Decision Transformer: reinforcement learning via sequence modeling / L. Chen, K. Lu, A. Rajeswaran [et al.] // Advances in Neural Information Processing Systems. – 2021. – Vol. 34. – P. 15084–15097.
24. Proximal policy optimization algorithms / J. Schulman, F. Wolski, P. Dhariwal [et al.] // arXiv:1707.06347. – 2017.
25. High-dimensional continuous control using generalized advantage estimation / J. Schulman, P. Moritz, S. Levine [et al.] // Proceedings of the International Conference on Learning Representations. – 2016. – DOI: 10.48550/arXiv.1506.02438.
26. Nian, R. A review on reinforcement learning: introduction and applications in industrial process control / R. Nian, J. Liu, B. Huang // Computers & Chemical Engineering. – 2020. – Vol. 139. – Art. 106886.

Поступила в редакцию 18.06.2026.

Информация об авторах

Прохоренко Владислав Александрович – ст. преподаватель
Смородин Виктор Сергеевич – д.т.н., профессор
Никитюк Юрий Валерьевич – к.ф.-м.н., доцент
Соколов Сергей Иванович – к.т.н., доцент

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОЯСНИЧНОГО ОТДЕЛА ПОЗВОНОЧНИКА ЧЕЛОВЕКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЕРТИКАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

К. С. Курочка, Т. С. Семенченя

Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого

INVESTIGATION OF A MATHEMATICAL MODEL OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THE HUMAN LUMBAR SPINE UNDER VERTICAL LOADING

K. S. Kurochka, T. S. Semenchena

Sukhoi State Technical University of Gomel

Аннотация. В статье предлагается исследование анатомически точной математической модели напряженно-деформированного состояния поясничного отдела позвоночника человека под действием различной нагрузки. Предлагаемая математическая модель на основе анализа изображений компьютерной томографии и методика её исследования могут быть использованы в практической деятельности медучреждений для анализа состояния сегмента позвоночника в норме, при нестандартных нагрузках и патологических изменениях.

Ключевые слова: поясничный отдел позвоночника, КТ-изображения, напряженно-деформированное состояние, патология.

Для цитирования: Курочка, К. С. Исследование математической модели напряженно-деформированного состояния поясничного отдела позвоночника человека под действием вертикальной нагрузки / К. С. Курочка, Т. С. Семенченя // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 3 (68). – С. 86–90. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_86. – EDN: KCMEAI

Abstract. This article proposes a study of an anatomically accurate mathematical model of the stress-strain state of the human lumbar spine under various loads. The proposed mathematical model, based on CT image analysis, and the methodology for its study can be used in medical practice to analyze the condition of the spinal segment under normal conditions, abnormal loads, and pathological changes.

Keywords: lumbar spine, CT images, stress-strain state, pathology.

For citation: Kurochka, K. S. Investigation of a mathematical model of the stress-strain state of the human lumbar spine under vertical loading / K. S. Kurochka, T. S. Semenchena // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 3 (68). – P. 86–90. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_86 (in Russian). – EDN: KCMEAI

Введение

Заболевания позвоночника являются весьма распространенной патологией и постоянно требуют развития новых технологий для их лечения и возможного прогнозирования результатов хирургического вмешательства. Диагностические задачи затруднены сложным анатомическим строением позвоночника, нередко тяжёлым состоянием пострадавшего, проблемами правильных укладок и т. п. Компьютерная томография – один из основных методов комплексного обследования. Правильное распознавание характера заболевания позвоночника имеет подчас решающее значение для выбора того или иного метода лечения, а также для решения вопроса о характере операции при показаниях к оперативному лечению. Однако КТ-снимки не являются в достаточной степени наглядными и не всегда можно по ним выявить определённые особенности

строения и (или) дефектов и повреждений. Для усовершенствования методик лечения и хирургических вмешательств целесообразно использовать математическое моделирование.

Математическая модель может дать значительно больше информации о состоянии позвоночника, чем можно получить современными средствами измерений [3], [4]. При анализе поведения модели поясничного отдела позвоночника человека варьирование значений параметров структур позвоночного столба дает возможность определить влияние каждого из них на проявление синдрома и оценить возможные последствия хирургических вмешательств [5].

Исследования математической модели напряженно-деформированного состояния поясничного отдела позвоночника человека необходимы для:

– анализа состояния позвоночника в норме, при нестандартных нагрузках и патологических изменениях;

- выбора обоснованного метода коррекции;
- разработки новых методов коррекции;
- разработки конструкций имплантатов [6].

1 Экспериментальная часть

Для построения модели поясничного отдела позвоночника человека было разработано программное средство, которое выполняет анатомически точную 3D-реконструкцию поясничного отдела позвоночника человека на основе анализа КТ-изображений методами машинного обучения [7].

Для реализации основных функций предлагается следующая технология:

1. Обработка КТ-изображений, в результате которой генерируем 3D-модель поясничного отдела позвоночника в формате STL.

2. Дискретизация, полученной модели в формате STL, конечными элементами в форме тетраэдров.

3. Задаются физические свойства элементам системы (позвонкам и межпозвонковым дискам в виде модуля Юнга и коэффициента Пуассона).

4. Определяются граничные условия, в качестве которых принимает нулевые перемещения в зоне крепления поясничного отдела позвоночника к тазовым костям.

5. Определяем воздействующие усилия, исходя из веса пациента.

6. Далее осуществляется конечно-элементный расчёт полученной модели и определяются деформации.

Схема взаимодействия этапов работы представлена на рисунке 1.1.

Основными элементами позвоночника являются позвонки и межпозвонковые диски. Здоровый позвоночник содержит и позвонки, и межпозвонковые диски, которые не имеют дефектов. Они могут проявляться из-за болезней, больших нагрузок и многих других факторов. На позвоночник действует нагрузка, которая заставляет его деформироваться, особенно в вертикальном положении. В зависимости от приложенной массы и положения позвоночника нагрузки могут действовать различными способами и тем самым влиять на его положение. Поэтому важно исследовать состояния сегмента позвоночника в норме, при нестандартных нагрузках и патологических изменениях.

Для сравнения напряженно-деформированного состояния провели исследования на двух

моделях поясничного отдела позвоночника человека – с межпозвонковыми дисками и с отсутствием одного межпозвонкового диска.

Для исследования построенной математической модели использовался один из конечноэлементных CAD.

При исследовании напряженно-деформированного состояния в сгенерированных программным средством конечноэлементных моделях предполагалось, что позвонки представляют собой линейноупругое тело, а межпозвонковые диски – упругопластическое тело [8].

Чтобы корректно рассчитать, как распределяются напряжения и деформации в позвоночнике, необходимо знать свойства материалов, из которых состоят позвонки и межпозвонковые диски. Для упрощения моделирования предполагается, что эти материалы ведут себя как однородные (то есть их свойства одинаковы по всему объему) и изотропные (их свойства не зависят от направления). Значения модуля упругости и коэффициента Пуассона представлены в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Физические характеристики материалов, используемые при построении конечно-элементной модели поясничного отдела позвоночника человека

Материал	Модуль упругости Юнга, МПа	Коэффициент Пуассона
Кость	100	0,2
Межпозвонковый диск	5	0,49

После формирования сетки необходимо задать ограничения:

– масса, представляющая собой давление на позвоночник человека в вертикальном положении;

– закрепление, необходимое для обеспечения корректности математической модели, которое не позволяет модели смещаться под действием приложенных усилий. В данном случае следует зафиксировать нижнюю поверхность позвоночника в области крестца.

При учете этих ограничений модель будет имитировать настоящий позвоночник в упрощенном виде.

Полученная модель представлена на рисунке 1.2.



Рисунок 1.1 – Схема взаимодействия этапов работы приложения

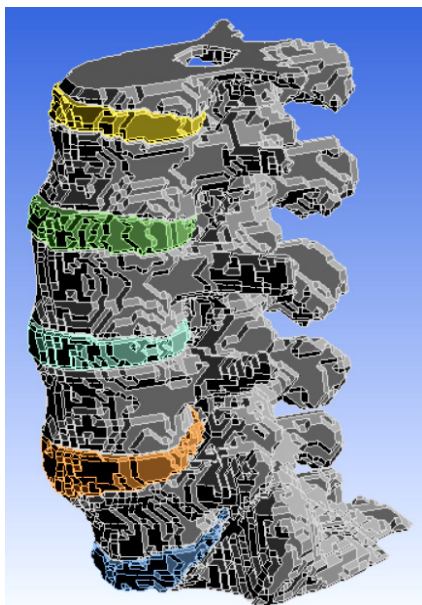


Рисунок 1.2 – Модель поясничного отдела позвоночника человека

2 Результаты и их обсуждения

В ходе экспериментов были проанализированы серии компьютерных томограмм поясничного отдела позвоночника, снятые при различных нагрузках и различными вариантами моделей, которые включают модель с межпозвонковыми дисками и без них.

Результаты напряженно-деформированного анализа позволили определить значения напряжений, действующих на поверхности позвонка. Эти данные представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Результаты напряженно-деформированного анализа поясничного отдела позвоночника человека

Нагрузка (кг)	Максимальное напряжение модели без межпозвонкового диска (МПа)	Максимальное напряжение модели с межпозвонковыми дисками (МПа)
40	3,95	0,88
50	4,94	1,11
65	6,42	1,44
75	7,41	1,66
85	8,4	1,88
100	9,88	2,22
120	11,85	2,66
150	14,81	3,33
200	19,755	4,44

Проведенный напряженно-деформированный анализ поясничного отдела позвоночника человека продемонстрировал линейную зависимость между уровнем напряжения и величиной приложенной нагрузки. Сравнительный анализ

двух моделей (с межпозвонковыми дисками и без них) выявил существенное (в несколько раз) превышение максимального напряжения в последнем случае. Данный факт подтверждает адекватность трехмерной модели, а также её высокую степень соответствия полученных расчетных данных к реальному поведению позвоночника.

На рисунке 2.1 представлен график зависимости деформации (напряжений) от нагрузки для модели с межпозвонковыми дисками и без них.

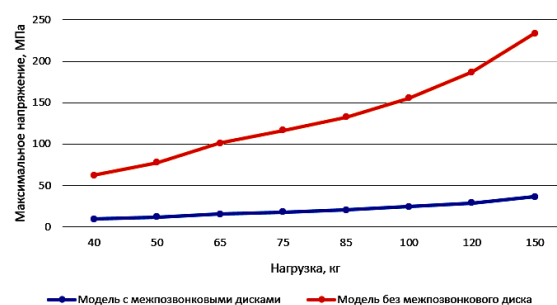


Рисунок 2.1 – График зависимости напряжений от нагрузки

Распределение напряжений в модели поясничного отдела позвоночника без одного межпозвонкового диска является достаточно предсказуемым, так как диски выполняют роль амортизатора, который смягчает и рассеивает нагрузку равномерно между всеми касающимися позвонками. Поэтому при отсутствии одного, например, в следствие травмы, болезни или операции, позвоночный столб будет принимать нагрузку совсем иначе, что может привести еще к более печальным последствиям, так как даже 15% разница в напряжении очень существенна и для массы человека равной 100 кг эта разница будет как дополнительные 15 кг постоянного веса, что приведет к болевым ощущениям. При этом, скорее всего будет затруднено движение человека. И это без учета более сложных параметров, которые могут изменить результат в большую сторону до нескольких раз.

Исследование НДС поясничного отдела позвоночника человека с межпозвонковыми дисками представлено на рисунке 2.2.

Проведенный анализ показал, что максимальные напряжения концентрируются в области ножек дуг позвонков. Детальное распределение напряжений и их величины в зонах повышенной концентрации напряжений представлены на рисунке 2.3.

На рисунке 2.4 показана трехмерная модель с распределением напряжения в случае отсутствия одного межпозвонкового диска.

Модель наглядно демонстрирует участки позвоночника, подверженные повышенному напряжению, в частности, зона отсутствия межпозвонкового диска.

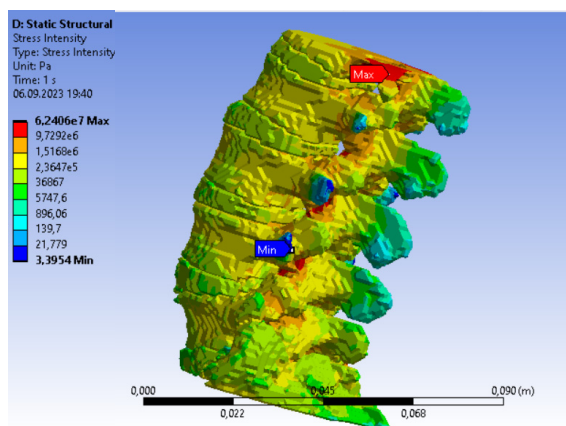


Рисунок 2.2 – Распределение напряжения в модели поясничного отдела позвоночника с межпозвонковыми дисками

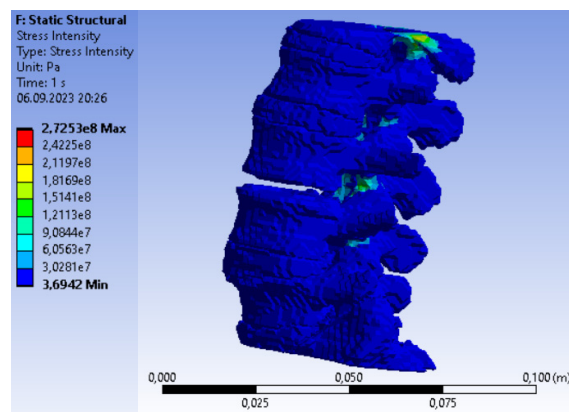
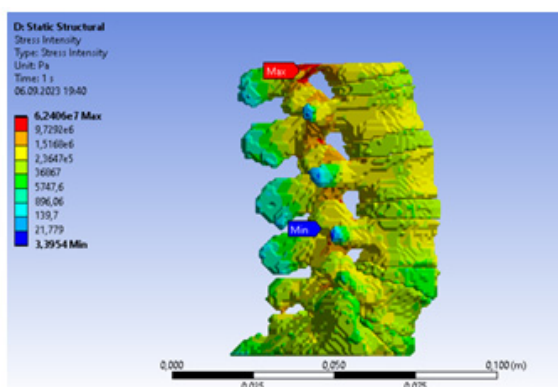
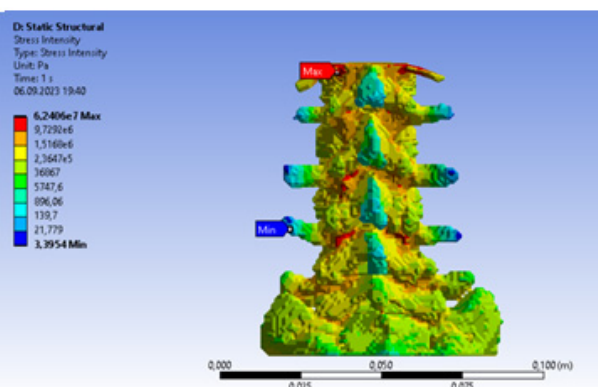


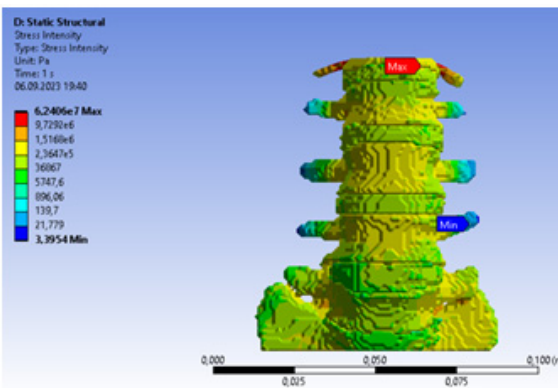
Рисунок 2.4 – Распределение напряжения в модели поясничного отдела позвоночника с отсутствием одного межпозвонкового диска



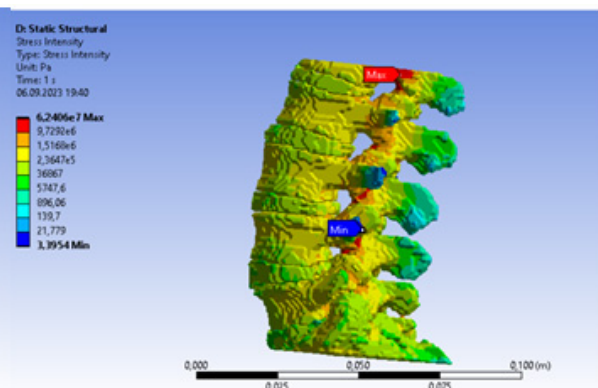
а) боковая проекция



б) прямая проекция, вид сзади



в) прямая проекция, вид спереди



г) области ножек дуги позвонков

Рисунок 2.3 – Распределение напряжения в модели поясничного отдела позвоночника человека

Это знание критически важно при подготовке к операции по установке протеза. Проведение предварительного анализа позволяет не только предсказать влияние имплантации на биомеханику позвоночника, но и заблаговременно выявить потенциальные риски и определить ключевые моменты для оптимизации хирургического подхода.

Заключение

На основании результатов численного моделирования установлено, что применение конечно-элементной модели поясничного отдела позвоночника позволяет провести дифференцированную оценку влияния морфологических структур (отдельных элементов позвонков и межпозвонкового диска) на параметры напряженно-деформированного состояния его сегментов.

Верификация метода конечных элементов подтверждает его достоверность для исследования изменений биомеханического состояния позвоночника, индуцированных установкой имплантатов.

Разработанная модель и предложенная методика ее исследования позволяет повысить значимость расчетов. Конечно-элементную модель поясничного отдела позвоночника человека можно использовать для исследования напряженно-деформированного состояния при имитировании влияния разнообразных патологий на распределение напряжений в поясничном отделе позвоночника человека, а также при моделировании различных хирургических вмешательств, тестировании и оптимизации дизайна искусственных позвонков и устройств для фиксации костей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чуйко, А. Н. Приближенный анализ анатомии, механических характеристик и напряженно-деформированного состояния позвоночника человека / А. Н. Чуйко // Травма. – 2014. – № 6. – С. 100–109.
2. Рентгенометрическая оценка кинематики пояснично-крестцового отдела позвоночника при остеохондрозе с помощью программного средства «ВОЛИОТ» / Е. Л. Цитко, К. С. Курочка, Н. Н. Масалитина [и др.] // Проблемы здоровья и экологии. – 2017. – № 4. – С. 35–41.
3. *Developing of a Mathematical Model to Perform Measurements of Axial Vertebral Rotation on Computer-Aided and Automated Diagnosis Systems, Using Raimondi's Method* // J. Hurtado-Aviles, J. Roca-Gonzalez, K. S. Kurochka [et al.] // Radiology Research and Practice. – 2021. – Vol. 2021. – P. 1–9.
4. Kurachka, K. Automation of primary diagnostics of diseases of the human lumbar spine using intelligent analysis of CT images / K. Kurachka, X. Wang // Open semantic technologies for designing intelligent systems: Research Papers Collection. – Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics. – 2025. – № 9. – P. 355–360.
5. Цурова, Н. Х. Биомеханическое моделирование и исследование сегмента поясничного отдела позвоночника / Н. Х. Цурова // Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ». – 2008. – № 3. – С. 73–78.
6. *Исследование напряженно-деформированного состояния конечно-элементной модели фрагмента позвоночного столба при сочетанном использовании транспедикулярных имплантов и вертебропластики* / Л. А. Бублик, А. Н. Лихолетов, Я. Е. Бейгельзимер, Р. Ю. Кулагин // Нейрохирургия и неврология Казахстана. – 2013. – № 3. – С. 3–7.
7. Semenchenia, T. S. Construction of individual geometric 3D model of the lumbar spine of a person based on the analysis of medical images / T. S. Semenchenia, K. S. Kurochka // Открытые семантические технологии проектирования интеллектуальных систем (OSTIS-2020). – 2020. – Вып. 4. – С. 291–296.
8. Напряженно-деформированное состояние поясничного отдела позвоночника в III стадии дегенеративного процесса / Е. Л. Цитко, К. С. Курочка, В. И. Сильвистрович [и др.] // Мультидисциплинарный подход к диагностике и лечению коморбидной патологии. – 2018. – С. 506–509.

Поступила в редакцию 27.04.2026.

Информация об авторах

Курочка Константин Сергеевич – к.т.н., доцент
Семенченя Татьяна Сергеевна – старший преподаватель

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ВЕРИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЕНИЯ ПОТОКАМИ В M2M-СЕТЯХ IoT

Е. В. Рафалова

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

COMPARATIVE ANALYSIS AND VERIFICATION OF MATHEMATICAL MODELS FOR FLOW CONTROL IN M2M NETWORKS OF IoT

E. V. Rafalova

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. В статье решена задача выбора оптимальной математической модели для управления информационными потоками в сетях типа «машина-машина» (M2M) Интернета вещей (IoT). Актуальность исследования обусловлена отсутствием методического аппарата для сравнительного анализа множества существующих моделей управления сетевыми потоками в условиях ограниченных ресурсов IoT-устройств. Цель исследования – разработка и апробация критериального аппарата для выбора оптимальной модели и её последующая программная верификация. Методология включает формализацию трёх основных классов математических моделей – графовых, основанных на теории очередей, и SDN-ориентированных; разработку пятикритериального вектора для сравнительного анализа; реализацию выбранной оптимальной модели на языке Java; экспериментальную верификацию на синтетических и реалистичных сценариях. В результате SDN-ориентированная модель показала наивысшую комплексную оценку, значительно опережая альтернативы. Её реализация подтвердила высокую точность прогнозирования задержки и способность снижать задержку для критического трафика при высокой нагрузке сети. Разработанный критериальный аппарат и методика верификации представляют практическую ценность для проектировщиков IoT-систем.

Ключевые слова: интернет вещей, M2M-коммуникации, математическое моделирование, программно-конфигурируемые сети (SDN), качество обслуживания (QoS), сравнительный анализ, алгоритмическая реализация, верификация моделей.

Для цитирования: Рафалова, Е. В. Сравнительный анализ и верификация математических моделей управления потоками в M2M-сетях IoT / Е. В. Рафалова // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 3 (68). – С. 91–96. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_91. – EDN: DZZTSK

Abstract. The paper solves the problem of choosing the optimal mathematical model for information flow control in machine-to-machine (M2M) networks of the Internet of Things (IoT). The relevance of the study is due to the lack of a methodological apparatus for comparative analysis of existing network flow control models under constrained resources of IoT devices. The aim of the study is to develop and test a criteria-based apparatus for selecting the optimal model and its subsequent software verification. The methodology includes formalization of three main classes of mathematical models – graph-based, queueing theory-based and SDN-oriented; development of a five-criteria vector for comparative analysis; implementation of the selected optimal model in Java; experimental verification on synthetic and realistic scenarios. As a result, the SDN-oriented model showed the highest comprehensive score, significantly outperforming the alternatives. Its implementation confirmed high accuracy of delay prediction and the ability to reduce delay for critical traffic under high network load. The developed criteria apparatus and verification methodology are of practical value for IoT system designers.

Keywords: Internet of Things, M2M communications, mathematical modeling, software-defined networking (SDN), quality of service (QoS), comparative analysis, algorithmic implementation, model verification.

For citation: Rafalova, E. V. Comparative analysis and verification of mathematical models for flow control in M2M networks of IoT / E. V. Rafalova // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 3 (68). – P. 91–96. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_91 (in Russian). – EDN: DZZTSK

Введение

Развитие Интернета вещей (IoT) и автономных M2M-коммуникаций привело к созданию сложных распределенных систем, эффективность которых критически зависит от управления информационными потоками. Ключевыми показателями здесь выступают задержка, надежность и энергоэффективность [1], [2]. Теоретической основой для построения таких систем служат математические модели, описывающие поведение

сети. В литературе представлен широкий спектр моделей – от классических графовых до стохастических – на основе теории массового обслуживания [3], [4]. Современные исследования также активно развивают подходы к управлению потоками в динамических IoT-сетях с использованием SDN-архитектур [8]–[12]. Однако отсутствует систематизированный подход к выбору оптимальной модели для конкретных условий эксплуатации IoT-систем, что зачастую приводит

к вопросу: простая модель не дает нужной точности, а сложная – вычислительно нереализуема на ресурсограниченных устройствах.

Цель работы – разработка методики сравнительного анализа математических моделей управления потоками в M2M-сетях и верификация оптимальной модели через ее программную реализацию. Для достижения цели решаются следующие задачи:

1. Формализация трех основных классов математических моделей (графовой, на основе теории очередей и SDN-ориентированной).
2. Разработка пятикритериального аппарата для их сравнительной оценки.
3. Выбор оптимальной модели и ее реализация на языке Java.
4. Экспериментальная верификация модели на различных сценариях.

Научная новизна работы заключается в разработке пятикритериального вектора для сравнительного анализа математических моделей M2M-сетей и методики их программной верификации, обеспечивающей воспроизводимость результатов.

1 Классы математических моделей управления M2M-потоками

Для сравнительного анализа выделены три класса моделей управления потоками в M2M-сетях, различающиеся степенью учета динамики сети и семантики трафика.

Графовая модель (G) представляет сеть в виде взвешенного орграфа $G = (V, E)$ где каждому ребру $e \in E$ сопоставлены пропускная способность $B(e)$, задержка $d(e)$ и коэффициент потерь $L(e)$. Задача управления сводится к поиску оптимального пути P^* между источником и приемником при ограничениях на пропускную способность и число переходов [5]. Преимущества модели – наглядность и низкая вычислительная сложность, недостатки – отсутствие учета динамики и приоритизации трафика [6].

Модель на основе теории очередей (Q) использует аппарат систем массового обслуживания для описания стохастической природы трафика [6]. Каждый узел рассматривается как СМО типа $M / M / 1$ со средним временем ожидания:

$$W = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)},$$

где λ – интенсивность входного потока (пакетов/с), μ – интенсивность обслуживания (пакетов/с). Общая задержка в сети вычисляется как сумма задержек на всех узлах. Модель учитывает вероятностный характер трафика, но обладает высокой вычислительной сложностью и требует точной параметризации для гетерогенных IoT-потоков.

SDN-ориентированная модель (S) является ключевой разработкой и учитывает семантику передаваемых данных [7]. Поток F_k описывается кортежем:

$$F_k = (S_k, R_k, T_k, \Theta_k),$$

где $S_k, R_k \in V$ – источник и приемник, $T_k = (\tau_k, v_k, \pi_k)$ – тип трафика (критичность, интенсивность, допустимая доля потерь), $\Theta_k = (D_{\max}, J_{\max})$ – требования QoS (максимальная задержка и джиттер).

Класс обслуживания $C(F_k)$ определяется через максимизацию функции полезности:

$$C(F_k) = \arg \max_{C \in \mathcal{C}} \sum_i \omega_i(t) U_i(C, F_k, \rho(t)),$$

где $\omega_i(t)$ – адаптивные весовые коэффициенты, обновляемые в зависимости от загрузки сети $\rho(t)$, U_i – функции частичной полезности, $\mathcal{C}$ – множество всех классов обслуживания.

Задача оптимизации размещения потока класса C формулируется как поиск пути P , минимизирующего задержку:

$$P^* = \arg \max_{P \in \mathcal{P}} \sum_{e \in P} d(e),$$

при ограничениях на пропускную способность для класса:

$$\sum_{F \in J(e, C)} v_F \leq \beta(C) B(e),$$

и на задержку:

$$\sum_{e \in P} d(e) \leq D_{\max_k},$$

где $J(e, C)$ – потоки класса C на ребре e , $\beta(C) \in (0, 1]$ – коэффициент резервирования для класса, $\mathcal{P}$ – множество всех путей, $D_{\max_k}$ – максимально допустимая задержка для потока F_k .

Адаптация весовых коэффициентов осуществляется по правилу:

$$\omega_i(t+1) = \omega_i(t) + \gamma(\rho_{opt} - \rho(t)),$$

где γ – коэффициент адаптации, ρ_{opt} – оптимальная загрузка сети.

Преимущества модели S : учет семантики данных, изоляция классов трафика и адаптивность к изменениям состояния сети. Актуальность SDN-ориентированного подхода подтверждается работами [8]–[12], в которых рассматриваются вопросы оптимизации, масштабируемости и безопасности в IoT-сетях. Недостатки: повышенная вычислительная сложность и необходимость централизованного контроллера.

2 Критериальный аппарат и выбор оптимальной модели

Для сравнительного анализа моделей вводится критериальный вектор оценки $K = (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)$, включающий следующие показатели.

Точность прогнозирования задержки (k_1) – способность модели предсказывать реальную задержку передачи данных. Оценивается как нормированный коэффициент детерминации R^2 между предсказанными и измеренными значениями.

Масштабируемость (k_2) – способность модели работать с сетями различного размера. Оценивается через максимальное количество узлов $N_{\max}$, при котором время вычислений не превышает 1 с.

Учёт разнородности трафика (k_3) – способность модели различать и обрабатывать потоки с разными требованиями QoS. Оценивается как доля правильно классифицированных потоков в тестовом наборе.

Вычислительная сложность (k_4) – обратная оценка, основанная на асимптотической сложности алгоритма, чем меньше сложность, тем выше оценка.

Адаптивность к изменениям (k_5) – способность модели адаптироваться к изменению состояния сети. Оценивается по скорости сходимости при изменении топологии сети.

Итоговая оценка модели вычисляется как взвешенная сумма критериев:

$$K_{total} = \sum_{i=1}^5 \omega_i k_i,$$

где весовые коэффициенты ω_i отражают важность критериев для типичных IoT-сценариев $\omega = (0,30; 0,20; 0,25; 0,15; 0,10)$.

Результаты сравнительного анализа моделей представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Сравнительные характеристики математических моделей

Критерий	Модель G	Модель Q	Модель S
Точность прогнозирования задержки (k_1)	0,65	0,78	0,92
Масштабируемость (k_2)	0,95 (1000 узлов)	0,30 (100 узлов)	0,67 (500 узлов)
Учёт разнородности трафика (k_3)	0,40	0,60	0,95
Вычислительная сложность (k_4)	0,90 ($O(n \log n)$)	0,20 ($O(n^3)$)	0,70 ($O(n^2)$)
Адаптивность к изменениям (k_5)	0,30	0,50	0,90
Итого	0,65	0,72	0,87

Наглядное представление сравнительного анализа моделей приведено на рисунке 2.1.

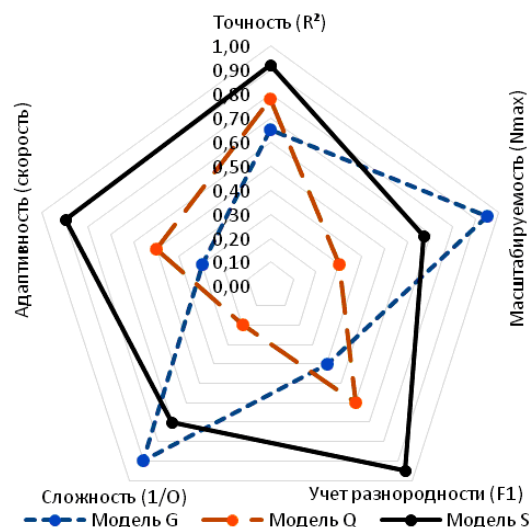


Рисунок 2.1 – Сравнительная характеристика классов математических моделей

Радарная диаграмма демонстрирует сильные и слабые стороны каждой модели. Модель G (графовая) показывает наилучшие результаты по масштабируемости (0,95) и вычислительной сложности (0,9), но значительно уступает по учету разнородности трафика (0,4) и адаптивности (0,3). Модель Q (теория очередей) демонстрирует среднюю точность (0,78), но плохо масштабируется (0,3) и имеет высокую вычислительную сложность (0,2). Модель S (SDN-ориентированная) показывает сбалансированные характеристики: высокую точность (0,92), хороший учет разнородности (0,95) и адаптивность (0,9) при приемлемых показателях масштабируемости (0,67) и сложности (0,7).

Гистограмма, представленная на рисунке 2.2, показывает, что модель S получила наивысшую комплексную оценку $K_{total} = 0,87$, значительно опережая модель G (0,65) и модель Q (0,72). На основании полученных результатов модель S выбрана для дальнейшей программной реализации и экспериментальной верификации.

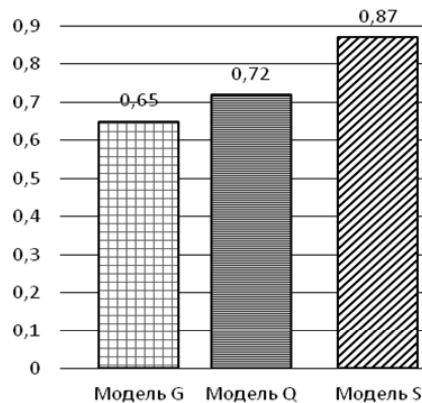


Рисунок 2.2 – Гистограмма итоговых оценок математических моделей

3 Реализация и верификация модели S

Программный модуль реализован на языке Java с использованием библиотек JGraphT для работы с графами и Apache Commons Math для статистических расчётов. Архитектура модуля включает следующие ключевые компоненты, которые отображены на рисунке 3.1 в виде UML-диаграммы.

TrafficFlow описывает информационный поток с параметрами QoS (источник, приёмник, тип трафика, требования к задержке и джиттеру).

FlowClassifier классифицирует потоки на основе семантики данных и текущей загрузки сети.

QueueModel моделирует узлы сети как системы массового обслуживания.

NetworkGraph и Edge представляют сетевую топологию в виде взвешенного графа.

PathFinder реализует алгоритм поиска оптимального пути с учётом ограничений QoS.

AdaptiveWeightsManager отвечает за адаптивное обновление весовых коэффициентов.

SDNOrientedModel интегрирует все компоненты и реализует основной алгоритм оптимизации.

ModelValidator осуществляет автоматизированную верификацию модели по пяти критериям.

Верификация модели проводилась на трёх типах сетевых топологий, имитирующих реальные сценарии IoT.

Сценарий А (Умный город): 50 узлов, 3 класса трафика (критический, нормальный, фоновый), топология «звезда-кольцо», 500 потоков;

Сценарий В (Промышленный IoT): 100 узлов, 4 класса трафика, случайный граф с вероятностью связи 0.2, 1000 потоков;

Сценарий С (Транспортная система): 200 узлов, 5 классов трафика, граф с высокой связностью (вероятность связи 0.4), 2000 потоков.

Интервалы прибытия пакетов моделировались экспоненциальным распределением, интенсивность обслуживания на узлах составляла $\mu = 1000$ пакетов/с. Все эксперименты проводились по 10 независимых запусков для каждого сценария.

Результаты верификации.

Эксперимент 1: точность прогнозирования задержки.

Для оценки точности модели использовался коэффициент детерминации R^2 между предсказанными и фактическими значениями задержки. Было сгенерировано 1000 тестовых потоков с известными параметрами трафика и требованиями QoS. Результаты эксперимента представлены на рисунке 3.2.

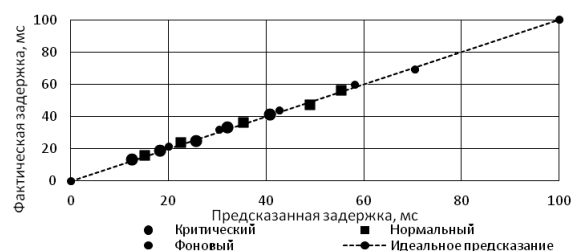


Рисунок 3.2 – Сравнение предсказанной и фактической задержки

Коэффициент детерминации составил $R^2 = 0,94$, что подтверждает высокую точность прогнозирования модели S и согласуется с теоретической оценкой, полученной в разделе 2 (таблица 2.1).

Эксперимент 2: масштабируемость и производительность.

Для оценки масштабируемости модели S исследовалась зависимость времени выполнения алгоритма поиска оптимального пути от размера сети. Эксперимент проводился на сетях размером от 10 до 500 узлов. Для каждого размера сети выполнялось по 10 независимых запусков, результаты усреднялись. Для обеспечения воспроизводимости результатов использовался бенчмаркинг-фреймворк JMH (Java Microbenchmark Harness). Результаты измерения времени выполнения алгоритма для различных размеров сети представлены в таблице 3.1.

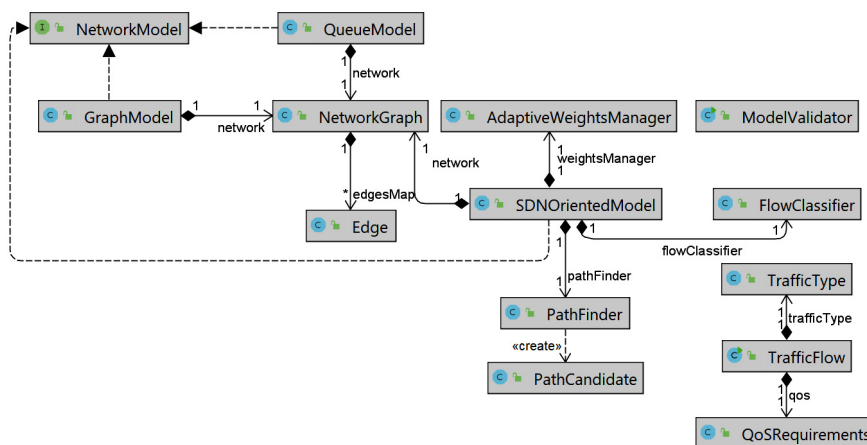


Рисунок 3.1 – UML-диаграмма классов программной реализации

Таблица 3.1 – Время поиска оптимального пути в зависимости от размера сети

Размер сети (узлов)	Время выполнения (мс)	Теоретическая сложность
10	$2,1 \pm 0,3$	$O(100)$
50	$18,5 \pm 1,2$	$O(2500)$
100	$75,3 \pm 3,8$	$O(10000)$
200	$310,2 \pm 12,5$	$O(40000)$
500	$1920,5 \pm 45,7$	$O(250000)$

Для наглядного представления зависимости времени выполнения от размера сети построен логарифмический график, представленный на рисунке 3.3.

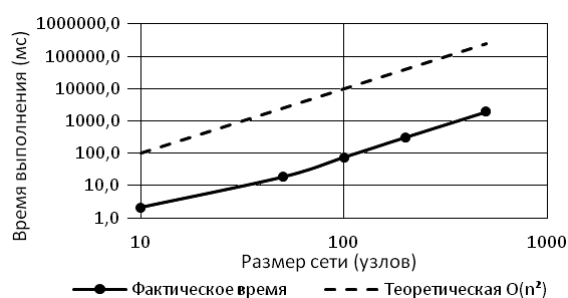


Рисунок 3.3 – Зависимость времени выполнения от размера сети

Экспериментально подтверждена квадратичная сложность алгоритма $O(n^2)$. Коэффициент детерминации между фактическими значениями и теоретической оценкой составил $R^2 = 0,998$. Для сетей размером до 500 узлов время поиска пути не превышает 2 с, что приемлемо для большинства IoT-приложений.

Эксперимент 3: эффективность при различной нагрузке.

Для оценки эффективности модели S в условиях различной загрузки сети исследовалось влияние нагрузки на качество обслуживания трёх классов трафика: критического, нормального и фонового. Эксперимент проводился при нагрузке сети от 0 до 100% с шагом 20%. Для каждого уровня нагрузки генерировалось 1000 потоков смешанного трафика. Для наглядного представления результатов построен график зависимости средней задержки от нагрузки сети для каждого класса трафика (рисунок 3.4).

При нагрузке сети 80% модель S обеспечивает задержку критического трафика на 28% ниже по сравнению с графовой моделью (G). Задержка нормального и фонового трафика также остаётся на приемлемом уровне, что подтверждает способность модели S эффективно обрабатывать разнородный трафик в условиях высокой загрузки сети.

Эксперимент 4: адаптивность к изменениям сети.

Для оценки адаптивности модели S исследовалась способность алгоритма перестраивать маршруты при изменении топологии сети. Эксперимент проводился на сети из 50 узлов.

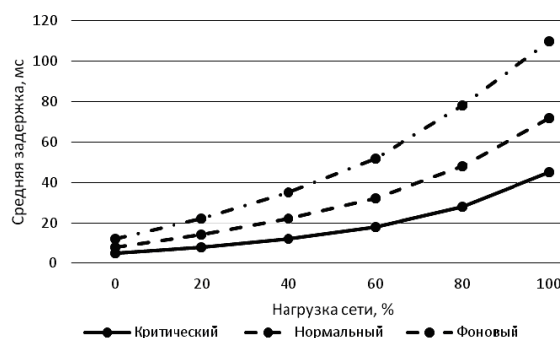


Рисунок 3.4 – Зависимость задержки от нагрузки сети для различных классов трафика

Результат: модель S адаптируется к изменению топологии в среднем за 45–60 мс с сохранением 98% правильности маршрутизации. Полученные значения демонстрируют высокую скорость перестройки маршрутов и способность модели сохранять работоспособность при отказах отдельных узлов сети, что подтверждает пригодность модели S для использования в динамических IoT-средах.

Заключение

В результате проведённых исследований решена задача выбора оптимальной математической модели для управления информационными потоками в M2M-сетях Интернета вещей.

Разработан пятикритериальный аппарат для сравнительного анализа моделей, включающий критерии точности прогнозирования задержки, масштабируемости, учёта разнородности трафика, вычислительной сложности и адаптивности.

Проведён сравнительный анализ трёх классов моделей: графовой (G), основанной на теории очередей (Q) и SDN-ориентированной (S). Модель S показала наивысшую комплексную оценку ($K_{total} = 0,87$), значительно опережая модель G (0,65) и модель Q (0,72).

Реализована программная версия модели S , включающая механизмы классификации потоков, адаптации весовых коэффициентов и поиска оптимальных путей с учётом ограничений QoS.

Экспериментальная верификация подтвердила высокую точность прогнозирования задержки ($R^2 = 0,94$), квадратичную вычислительную сложность ($O(n^2)$), снижение задержки критического трафика на 28% при нагрузке 80%, время адаптации к изменению топологии 45–60 мс с сохранением 98% правильности маршрутизации.

Полученные результаты согласуются с современными тенденциями в области управления потоками в SDN-сетях IoT [8]–[12].

Практическая значимость. Разработанная методика и программная реализация могут быть использованы при проектировании систем управления для IoT-сетей умных городов, промышленных M2M-сетей [13], а также в учебном процессе при подготовке специалистов в области сетевых технологий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Baktir, A. C.* How Can Edge Computing Benefit from Software-Defined Networking: A Survey, Use Cases, and Future Directions / A. C. Baktir, A. Ozgovde, C. Ersoy // *IEEE Communications Surveys & Tutorials*. – 2017. – Vol. 19, № 4. – P. 2359–2391.
2. *Network Slicing for IoT: A Survey of State-of-the-Art Challenges and Opportunities* / T. Oliveira, R. Pires, C. Marques, [et al.] // *IEEE Internet of Things Journal*. – 2022. – Vol. 9, № 15. – P. 13004–13024.
3. Кузнецов, А. Н. Применение технологий программно-конфигурируемых сетей в инфокоммуникационных системах / А. Н. Кузнецов, А. В. Петров, И. К. Сидоров // *Труды СПИИРАН*. – 2019. – Т. 18, № 6. – С. 1345–1368.
4. *Traffic Management in Software-Defined Networks: A Survey* / A. Mahmood, H. Zen, R. Hill, [et al.] // *Journal of Network and Computer Applications*. – 2023. – Vol. 210. – Art. № 103539.
5. Семенов, М. И. Методы обеспечения качества обслуживания в беспроводных сенсорных сетях Интернета вещей / М. И. Семенов, В. С. Васильев // *Известия высших учебных заведений. Приборостроение*. – 2021. – Т. 64, № 8. – С. 688–697.
6. *Gundall, M.* Integration of 5G with TSN as Prerequisite for a Highly Flexible Future Industrial IoT / M. Gundall, M. Strufe, H. D. Schotten // *IEEE 2nd 5G World Forum (5GWF)*. – Dresden, 2019. – P. 299–304.

7. Шабанов, А. А. Адаптивные алгоритмы управления трафиком в программно-конфигурируемых сетях / А. А. Шабанов, Д. В. Иванов // *Информатика и её применения*. – 2020. – Т. 14, вып. 3. – С. 89–97.

8. *Модели управления процессами сбора данных в сетях интернета вещей с динамической структурой* / М. Т. Аунг, С. А. Аббас, Н. А. Жукова, В. В. Чернокульский // *Computational nanotechnology*. – 2020. – № 3. – С. 62–71.

9. *Huang, Y.* Distributed Cross-Domain Optimization for Software Defined Industrial Internet of Things / Y. Huang, S. Luo, W. Xu // *Information*. – 2023. – Vol. 14, № 2. – Art. № 101.

10. *Houhamdi, Z.* An Optimized SDN Framework for the Internet of Things / Z. Houhamdi, M. R. Athamena, B. Athamena // *11th International Conference on Software Defined Systems (SDS)*. – 2024. – P. 164–169.

11. *Ashraf, U.* ZFort A Scalable Zero-Trust Approach for Trust Management and Traffic Engineering in SDN Based IoTs / U. Ashraf // *Internet of Things*. – 2024. – Vol. 28. – Art. № 101352.

12. *Qi, Jin.* Optimized Transmission of Multi-Path Low-Latency Routing for Electricity Internet of Things / Jin Qi // *PLOS ONE*. – 2025. – Vol. 20, № 2. – Art. № e0314253.

13. Рафалова, Е. В. Особенности проектирования системы интернета вещей / Е. В. Рафалова, У. Д. Мешкова // *Материалы X Республиканской научной конференции студентов, магистрантов и аспирантов «Актуальные вопросы физики и техники», Гомель, 21 апреля 2022 г. / Гомел. гос. ун-т им. Ф. Скорины ; редкол.: [и др.]. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2022. – Ч. 1. – С. 325–326.*

Поступила в редакцию 21.06.2026.

Информация об авторах

Рафалова Елена Владиславовна – аспирант

ВЕРОЯТНОСТНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ

Е. И. Сукач, В. А. Калинин

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

PROBABILISTIC-ALGEBRAIC MODELING OF RELIABILITY OF ELECTRIC POWER SYSTEMS USING SPATIAL AND TEMPORAL DATA ANALYSIS

E. I. Sukach, V. A. Kalinichenko

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Рассматривается способ получения вероятностной оценки надежности электроэнергетической системы по вероятностным характеристикам надежности её структурных элементов. Вероятностные характеристики надежности структурных элементов исследуемых объектов предлагается вычислять с использованием программного комплекса интеллектуального пространственно-временного анализа данных, позволяющего автоматически агрегировать заявки об авариях, поступающие от населения через мессенджер, и проводить ситуационный анализ поступающих данных в режиме реального времени. Рассматривается пример вероятностно-алгебраического моделирования фрагмента электроэнергетической системы, формализованной в виде системы-трехполюсника.

Ключевые слова: электроэнергетические системы, сетевые структуры, вероятностно-алгебраическое моделирование, надежность, энергоснабжение, автоматизация, большие данные, ситуационный анализ, геоинформационные системы, телеграм-бот, кластеризация данных, контейнеризация.

Для цитирования: Сукач, Е. И. Вероятностно-алгебраическое моделирование надежности электроэнергетических систем с использованием пространственно-временного анализа данных / Е. И. Сукач, В. А. Калинин // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 3 (68). – С. 97–105. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_97. – EDN: DKGWKM

Abstract. A method for obtaining a probabilistic assessment of the reliability of an electric power system based on the probabilistic characteristics of the reliability of its structural elements are considered. It is proposed to calculate the probabilistic reliability characteristics of the structural elements of the objects under study using a software package for intelligent spatial and temporal data analysis, which allows automatically aggregating requests for accidents from the public via messenger and conducting situational analysis of incoming data in real time. An example of probabilistic-algebraic modeling of a fragment of an electric power system formalized as a three-pole system is considered.

Keywords: electric power systems, network structures, probabilistic-algebraic modeling, reliability, energy supply, automation, big data, situational analysis, geoinformation systems, telegram bot, data clusterization, containerization.

For citation: Sukach, E. I. Probabilistic-algebraic modeling of reliability of electric power systems using spatial and temporal data analysis / E. I. Sukach, V. A. Kalinichenko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 3 (68). – P. 97–105. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_97 (in Russian). – EDN: DKGWKM

Введение

Электроэнергетические системы, включающие в себя множество структурных элементов, подверженных как естественному износу, так и случайному воздействию факторов внешней среды, относятся к классу потенциально-опасных объектов городской инфраструктуры. Общие принципы и логика подготовки проектного решения при исследовании подобных объектов требуют проведения детального сравнительного анализа вариантов их организации.

В связи с этим возникает актуальная задача применения имеющих практическую ценность и обеспечивающих объективный подход математических моделей и методов анализа вероятностных

характеристик надёжности электросетевых структур с последующей оценкой вероятности их отказа в перспективном периоде, исходя из динамики вероятностного изменения характеристик надёжности их структурных элементов.

Одним из подходов к решению поставленной задачи является применение вероятностно-алгебраического моделирования [1], описание методологии которого для решения типовых задач исследования надежности электроэнергетических систем приводится в [2].

Параметризованные вероятностно-алгебраические модели в составе инструментального средства «ControlSyst» [3] снимают ограничения известных методов на число структурных

составляющих и позволяют учесть эволюционную зависимость элементов при рассмотрении объектов в динамике. Их использование не требует большого объема ресурсов, универсально при исследованиях в различных предметных областях и реализуется с использованием прозрачных простых алгоритмов обработки информации о надёжности структурных элементов исследуемой системы.

Современный уровень цифровизации позволяет использовать краудсорсинговые данные (заявки граждан через мессенджеры и чат-боты, информацию о плановых отключениях электроэнергии) для получения вероятностной оценки надёжности элементов электросетевых структур. Мониторинг состояния сложных электросетевых структур в режиме реального времени требует автоматизации получения, интеллектуальной обработки, пространственной визуализации и кластеризации поступающих больших данных для выявления отказов узлов и линий связи электросети.

В статье приводится описание программного комплекса, обеспечивающего интеллектуальную обработку текстовых и пространственно-временных данных, возникающих в процессе взаимодействия между поставщиками и потребителями электроэнергии. Зафиксированная информация («сигналы» об отсутствии электроэнергии) используется как для оперативного восстановления работоспособности участков сети, так и для долгосрочного анализа и прогноза надёжности всей сети.

Пример расчета надёжности фрагмента электроэнергетической системы по вероятностным оценкам надёжности участков исследуемого объекта, полученным в результате простран-

венно-временного анализа больших данных, демонстрирует пригодность предложенного подхода.

1 Архитектура программного комплекса пространственно-временного анализа данных

Программный комплекс спроектирован как распределенная информационная система, основанная на микросервисном подходе и строгом соблюдении принципа разделения ответственности. Выбранная архитектурная модель позволяет изолировать интерфейсную логику от сложных алгоритмов ситуационного анализа и механизмов хранения данных, что существенно повышает общую отказоустойчивость и упрощает процессы дальнейшей модификации системы. Структурно комплекс представляет собой совокупность взаимосвязанных функциональных узлов, каждый из которых инкапсулирует определенный слой бизнес-логики и взаимодействует с остальными компонентами через стандартизированные протоколы (рисунок 1.1).

Данная схема демонстрирует разделение комплекса на три ключевых логических уровня: слой пользовательского взаимодействия, уровень серверной обработки и прикладной аналитики, а также уровень персистентного хранения данных в реляционной системе управления базами данных (СУБД). Подобная декомпозиция архитектуры на независимые микросервисы, работающие внутри изолированных контейнеров, позволяет эффективно масштабировать каждый узел системы по мере роста количества абонентов и интенсивности потока поступающих аварийных заявок, обеспечивая при этом высокую доступность сервиса в условиях городской энергетической сети.

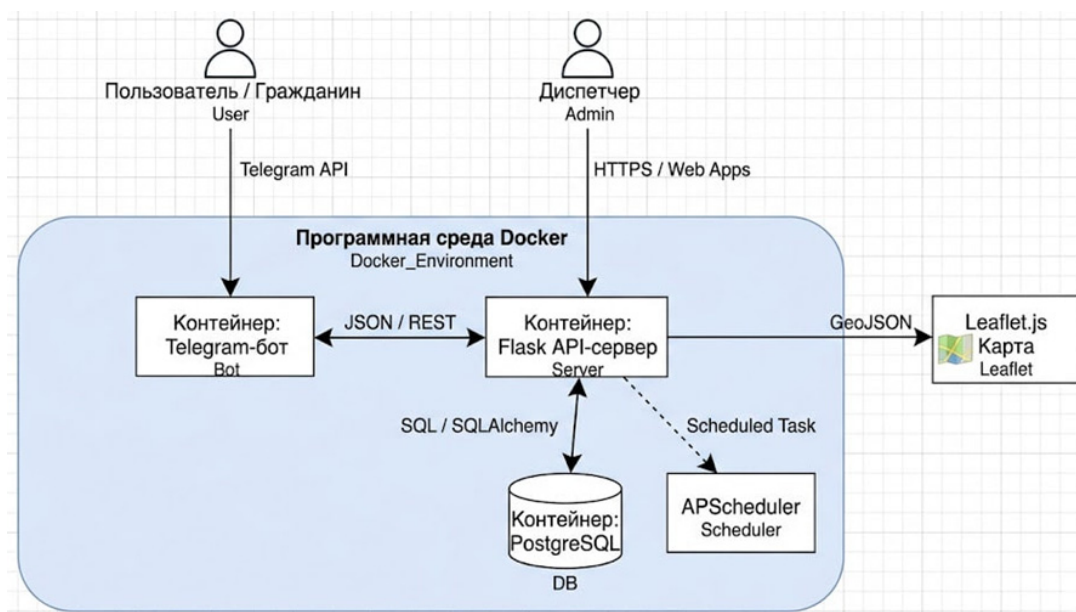


Рисунок 1.1 – Структурная схема программного комплекса пространственно-временного анализа данных

В качестве основного узла взаимодействия с конечными пользователями выступает модуль Telegram-бота, реализованный с применением библиотеки `pyTelegramBotAPI` [4]. Этот сервис функционирует в режиме непрерывного опроса серверов мессенджера и отвечает за управление состояниями диалогов, навигацию по многоуровневому меню и первичный прием текстовых данных от потребителей энергии. Архитектурно бот спроектирован таким образом, чтобы не выполнять ресурсозатратные вычисления внутри своего основного потока, делегируя задачи по обработке инцидентов и запросу статистики внешнему API-серверу, что позволяет сохранять высокую скорость отклика пользовательского интерфейса.

Роль центрального вычислительного ядра и API-шлюза выполняет Flask-сервер, который объединяет в себе функции информационного обмена и аналитического центра [5]. Через набор RESTful-эндпоинтов данный узел обеспечивает асинхронную передачу данных в формате JSON для работы web-панелей диспетчера и панели управления сотрудниками. Внутренняя логика сервера включает программную реализацию интеллектуальных алгоритмов автоматической приоритизации обращений и их пространственной кластеризации для дедупликации инцидентов. Кроме того, серверный модуль управляет изолированным процессом планировщика фоновых задач `APScheduler`, который в автономном режиме контролирует расписание плановых отключений и инициирует массовые рассылки через интеграцию с интерфейсом мессенджера.

Слой хранения и управления информацией представлен реляционной СУБД `PostgreSQL`, которая выступает в качестве единого централизованного хранилища для всех компонентов системы. Выбор данной СУБД продиктован её способностью эффективно обрабатывать параллельные транзакции и поддерживать высокую целостность данных в условиях многопользовательского доступа со стороны бота и web-сервера. Программное взаимодействие с таблицами базы данных абстрагировано через слой объектно-реляционного отображения `SQLAlchemy`, что позволяет описывать модель предметной области в виде классов Python и автоматически обеспечивать защиту от несанкционированных SQL-запросов.

Инфраструктурная целостность и портативность всего программного комплекса достигается путем применения технологий контейнеризации в среде `Docker`. Каждый функциональный узел системы развернут в собственном изолированном контейнере с индивидуально настроенным окружением и переменными конфигурации. Оркестратор `Docker Compose` объединяет данные контейнеры в закрытую виртуальную сеть, обеспечивая безопасную внутреннюю связь

компонентов и гарантируя полную идентичность работы программного обеспечения на этапах разработки, тестирования и развертывания.

2 Алгоритмическое обеспечение ситуационного анализа

Ситуационный анализ является наиболее технологически сложной частью программного комплекса, преобразующей поток разрозненных текстовых сообщений от потребителей в структурированную аналитическую информацию. Ключевая задача данного модуля заключается в автоматизации рутинных процессов диспетчеризации и выявлении скрытых закономерностей, таких как очаги массовых аварий или критические угрозы безопасности. Логика анализа встроена непосредственно в конвейер обработки каждой входящей заявки, что позволяет системе реагировать на изменения обстановки в режиме реального времени (рисунок 2.1)

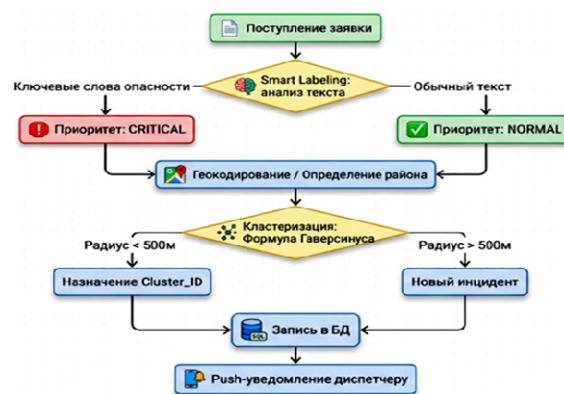


Рисунок 2.1 – Алгоритм автоматизированной обработки входящих заявок

Первым этапом алгоритмической обработки является подсистема интеллектуальной приоритизации, базирующаяся на методах лексического контент-анализа. Программный обработчик производит предварительную очистку и нормализацию текста поступившего обращения, после чего осуществляет сопоставление содержимого с динамическим словарем маркеров критичности. В данный словарь включены термины, указывающие на прямую угрозу жизни и здоровью граждан, а также на обесточивание объектов первой категории надежности электроснабжения, таких как медицинские учреждения и школы. При обнаружении в тексте слов-маркеров, таких как «пожар», «взрыв», «больница» или «искрит», алгоритм мгновенно присваивает заявке статус критического приоритета. Это изменение немедленно отражается в интерфейсе оператора диспетчерской службы энергоснабжения через систему цветовой индикации и звуковых уведомлений, что позволяет перестроить очередь реагирования и направить ресурсы в первую очередь на устранение наиболее опасных аварий.

Параллельно с анализом текстового содержания запускается подсистема геоинформационной обработки и пространственной кластеризации. Данный алгоритм решает проблему дедубликации данных в условиях массовых отключений, когда десятки жителей одного квартала одновременно сообщают об одной и той же неисправности. Математическая модель алгоритма основана на использовании формулы Гаверсинуса, которая позволяет с высокой точностью вычислять кратчайшее расстояние между точками на поверхности сферы по их координатам. При поступлении новой заявки система сканирует массив активных нерешенных инцидентов в базе данных и рассчитывает дистанцию до каждого из них. В случае если в радиусе пятисот метров фиксируется накопление критической массы обращений, стандартно определенной как три и более заявки, система автоматически генерирует уникальный идентификатор кластера и связывает с ним все текущие и последующие обращения из данной локации.

Логическим продолжением процесса кластеризации является визуализация зон аварийности на интерактивной карте. В интерфейсе оператора диспетчерской службы энергоснабжения такие группы заявок отображаются не как отдельные маркеры, а как единые зоны поражения, что позволяет наглядно оценить масштаб технологического нарушения. Такое решение значительно снижает когнитивную нагрузку на пользователя, избавляя его от необходимости вручную сопоставлять адреса и позволяя координировать выезд одной специализированной бригады на весь очаг аварии. Кроме того, алгоритм учитывает временной фактор: если заявка поступает в локацию, где уже зафиксирован активный кластер, она автоматически наследует его параметры и приоритет, что обеспечивает целостность оперативной информации.

Важным аспектом алгоритмического обеспечения является также механизм автоматического геокодирования на основе территориальных справочников. В ситуациях, когда пользовательское устройство не передает точные GPS-координаты, система выполняет трансляцию строковых названий микрорайонов в соответствующие географические точки. Это достигается за счет интеграции с внутренней базой координат центров административных единиц, что гарантирует стопроцентное покрытие всех входящих заявок геоинформационным анализом. Совокупность перечисленных алгоритмов – от лингвистического анализа до тригонометрических расчетов расстояний – формирует интеллектуальную среду, способную эффективно поддерживать принятие управленческих решений в кризисных ситуациях энергоснабжения.

3 Подсистема планирования фоновых задач и реализация оповещений

Реализация подсистемы планирования фоновых задач и оповещений является критически важным компонентом программного комплекса, обеспечивающим переход от реактивной модели управления инцидентами к проактивному информированию населения. Основное назначение данного модуля заключается в автоматизации процесса рассылки уведомлений о плановых регламентных работах на электросетях, что позволяет минимизировать негативные последствия для потребителей и снизить нагрузку на операторов диспетчерской службы энергоснабжения в моменты отключений. Технологической основой для построения этой подсистемы стала библиотека APScheduler, интегрированная непосредственно в структуру Flask-сервера, что позволило реализовать надежный механизм управления временными событиями внутри распределенной архитектуры приложения.

Программная логика подсистемы базируется на использовании планировщика фоновых задач BackgroundScheduler, который функционирует в изолированном потоке исполнения, не блокируя обработку входящих HTTP-запросов и работу основного цикла Telegram-бота. Взаимодействие с данными организовано через специализированную таблицу плановых отключений в базе данных PostgreSQL. Каждая запись в этой таблице содержит исчерпывающую информацию о предстоящем событии, включая детальное описание работ, идентификатор целевого административного района и точную временную метку запланированного начала информирования. Наличие статусного поля, фиксирующего факт успешной отправки сообщения, гарантирует отсутствие повторных нежелательных рассылок и позволяет отслеживать состояние очереди задач в режиме реального времени.

Процесс функционирования подсистемы инициируется при запуске сервера, когда вызывается процедура первичного сканирования базы данных. Алгоритм анализирует все невыполненные задачи и сравнивает текущее системное время со временем, указанным в поле запланированной даты. В ситуациях, когда время оповещения уже наступило или было пропущено из-за временной недоступности сервера, система инициирует немедленную рассылку. Для будущих событий планировщик динамически создает задания в оперативной памяти, закрепляя за каждым уникальным идентификатор и устанавливая триггер на выполнение в строго определенный момент. Такой подход обеспечивает высокую точность информирования и позволяет диспетчерскому составу планировать информационные кампании на несколько дней или недель вперед через административный web-интерфейс.

Центральным звеном в цепочке оповещения является функция массовой трансляции сообщений, которая осуществляет выборку целевой аудитории из общего массива пользователей. Алгоритм фильтрует записи в таблице пользователей, выделяя только тех граждан, чья территориальная привязка совпадает с районом проведения плановых работ. Интеграция с Telegram Bot API позволяет выполнять адресную доставку сообщений в формате Markdown, обеспечивая наглядное форматирование текста и использование специальных символов для привлечения внимания пользователей. Для предотвращения сбоев при возникновении сетевых ошибок или в случаях, когда пользователь заблокировал бота, в код встроены блоки обработки исключений, обеспечивающие непрерывность процесса рассылки для остальных участников списка.

Использование неблокирующего ввода-вывода при реализации оповещений имеет стратегическое значение для производительности всей системы. Благодаря тому, что процесс массовой рассылки выполняется в фоновом режиме, программный комплекс сохраняет высокую скорость отклика для всех категорий пользователей даже в моменты пиковой нагрузки, когда уведомления могут отправляться одновременно тысячам абонентов. По завершении цикла рассылки система автоматически обновляет состояние задачи в базе данных, фиксируя время окончания работ и изменяя флаг исполнения. Это создает прозрачную историю проактивного взаимодействия с населением и формирует фундамент для последующего анализа эффективности информирования в рамках ситуационных отчетов.

4 Информационный обмен между распределенными компонентами программного комплекса

Спецификация REST API и механизмы межсервисного взаимодействия формируют технологический фундамент, на котором базируется информационный обмен между распределенными компонентами программного комплекса. В рамках выбранной архитектуры прикладной интерфейс выступает в роли универсального посредника, связывающего уровень хранения данных в СУБД PostgreSQL с интерфейсным модулем пользователя.

Основным протоколом передачи данных является HTTP, а в качестве универсального формата представления информации выбран JSON, что обеспечивает высокую скорость парсинга и совместимость с современными JavaScript-фреймворками. Спецификация API включает в себя набор специализированных конечных точек, каждая из которых инкапсулирует определенную область бизнес-логики системы. Группа методов получения информации обеспечивает выгрузку списков инцидентов с поддержкой

сортировки по времени создания, что позволяет всегда видеть наиболее актуальные заявки в верхней части списка. При этом серверная часть API выполняет автоматическое обогащение данных, преобразуя идентификаторы пользователей в читаемые строки с указанием района, а также подставляя вычисленные координаты и приоритеты.

Особое значение для функционирования геоинформационного модуля имеет эндпоинт, транслирующий данные в формате GeoJSON. Этот специализированный стандарт представления географических объектов позволяет передавать на сторону клиента не только атрибутивную информацию о заявках, но и их пространственную геометрию. Серверный алгоритм формирует коллекцию объектов, где каждая точка содержит координаты широты и долготы, а также свойства, необходимые для корректной визуализации в библиотеке Leaflet.js, включая цвет маркера в зависимости от статуса и информацию о принадлежности к кластеру массовой аварии. Такой подход позволяет минимизировать объем передаваемого трафика и переложить задачу рендеринга на клиентское устройство, обеспечивая плавность работы интерактивной карты.

Механизмы записи и модификации данных реализованы через POST-запросы, требующие строгой валидации входящих параметров. При обновлении статуса инцидента или создании планового отключения сервер проверяет полноту данных и корректность форматов дат. Интеграция с подсистемой ситуационного анализа происходит прозрачно для внешнего потребителя API: при получении новой заявки сервер автоматически инициирует процедуры лексического анализа и гео-кластеризации до момента фиксации транзакции в базе данных. Кроме того, реализована функциональность экспорта данных, которая генерирует динамические отчеты в формате CSV.

Межсервисное взаимодействие между Flask-сервером и модулем Telegram-бота организовано по гибридной схеме. В то время как сервер обрабатывает запросы от web-интерфейсов, бот выступает в роли исполнительного механизма для доставки уведомлений. Связующим звеном здесь служит общая база данных и событийно-ориентированная модель обмена данными через Telegram Web Apps. Когда пользователь выполняет действие в web-панели, запущенной внутри мессенджера, данные передаются боту через зашифрованный канал, после чего серверный обработчик анализирует тип действия и при необходимости вызывает методы планировщика или рассылки. Такая многоуровневая система интерфейсов обеспечивает целостность логики управления и позволяет программному комплексу функционировать как единая интеллектуальная среда ситуационного анализа.

5 Организация геоинформационного модуля

Центральное место в структуре ситуационного анализа занимает геоинформационный модуль. С помощью библиотеки Leaflet.js на интерактивной подложке местности отображаются точные координаты всех зафиксированных инцидентов.

Система автоматически окрашивает маркеры в соответствии с их состоянием, где серый цвет соответствует новым обращениям, а жёлтый – заявкам, принятым в работу. Особое значение для выявления аварийных очагов имеет визуализация кластеров. В ситуациях, когда в радиусе пятисот метров фиксируется накопление заявок, система отрисовывает вокруг них полупрозрачную красную зону, сигнализирующую о массовом характере аварии.

Для проведения углубленного анализа плотности инцидентов и выявления наиболее уязвимых участков анализируемой энергосети в модуле предусмотрен режим тепловой карты. При переключении на этот слой точечные маркеры заменяются градиентными областями, интенсивность цвета которых напрямую зависит от концентрации заявок в конкретной локации. Такой подход позволяет видеть общую картину нагрузки на сеть и принимать предиктивные меры по модернизации оборудования в районах с традиционно высокой частотой отказов. Весь процесс визуализации опирается на серверный API, отдающий данные в формате GeoJSON, что гарантирует высокую производительность карты даже при наличии сотен активных записей.

6 Модуль аналитики и поддержки принятия управленческих решений

Аналитическая составляющая программного комплекса сосредоточена в специализированном разделе дашбордов, где с помощью библиотеки Chart.js накопленная информация преобразуется в наглядные диаграммы, сравнивающие

аварийность различных участков контролируемого электроэнергетического объекта.

Система в автоматическом режиме рассчитывает ключевые показатели эффективности, такие как:

- среднее время реакции на аварию (от момента подачи заявки до изменения её статуса на значение «В работе»);
- среднее время устранения неисправности по различным категориям проблем;
- сводная статистика аварийности по каждому участку электросети.

Полученная статистика, обработанная с использованием подсистемы программного комплекса «ControlSyst», определяет исходные данные для проведения вероятностно-алгебраического моделирования исследуемой электроэнергетической системы.

7 Оценка надёжности электроэнергетической системы

На рисунке 7.1 представлен фрагмент электроэнергетической сети районного центра. Система может быть формализована как в виде графа-трёхполюсника так, и в виде графа-четырёхполюсника [6].

В качестве характеристик надёжности элементов при оценке надёжности организации участков электроэнергетической системы рассматриваются вероятности отказов, возникающих в ходе доставки электроэнергии, которые описываются векторами:

$$P^i = (p_0^i, p_1^i), \sum_{j=0}^1 p_j^i = 1, i = \overline{1, m}. \quad (7.1)$$

Первые составляющие p_0^i векторов (7.1) определяют вероятность надёжной работы i -ых элементов, выделенных в процессе формализации. Вторые составляющие p_1^i векторов (7.1) определяют вероятность отказа работы i -ых элементов системы.

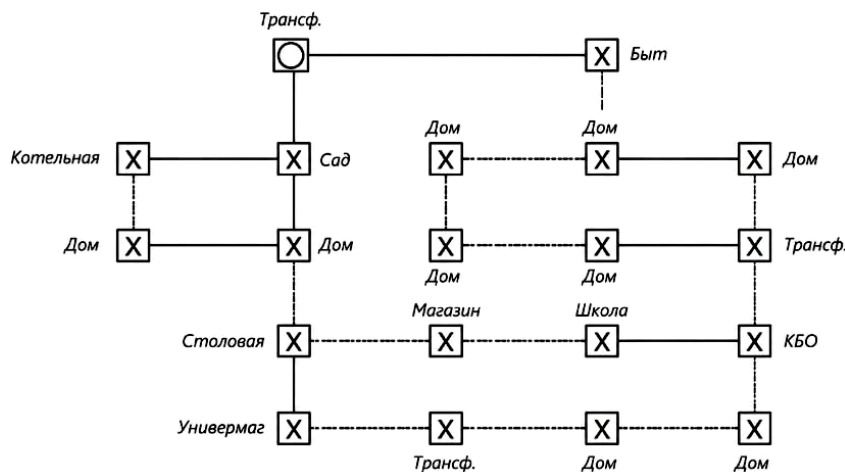


Рисунок 7.1 – Схема фрагмента электроэнергетической сети

Формализуем фрагмент в виде графа-трёхполюсника. При исследовании системы с тремя терминальными вершинами ставится задача определения вектора вероятностей состояний надёжности, который имеет вид:

$$P^s = (p_1^s, p_2^s, \dots, p_5^s), \sum_{j=1}^5 p_j^s = 1.$$

На рисунке 7.2 фрагмент сети представлен в виде графа $G(N, K)$, где $N = \{N_v\}$, $v = \overline{1, 20}$, $K = \{K_i\}$, $i = \overline{1, 23}$. В качестве терминальных вершин выступают два входа $N_2, N_4 \in N$ и один выход $N_{18} \in N$.

Исходные данные (7.1) выбраны в рабочей точке области определения параметров элементов, выделенных в процессе формализации объекта исследования (таблица 7.1).

Для элементов графа, представленного на рисунке 7.2, использовались исходные данные вероятностей работы элементов электроэнергетической сети (рисунок 7.1), приведенные в таблице 7.2.

Таблица 7.1– Показатели надежности элементов электроэнергетической системы

Элемент электроэнергетической системы	Вероятностный показатель работы элемента	Вероятностный показатель отказа элемента
Трансформатор	0,9000	0,1000
Потребитель электроэнергии 1 типа	0,8730	0,1270
Потребитель электроэнергии 2 типа	0,9685	0,0315
Потребитель электроэнергии 3 типа	0,9000	0,1000
Линия электропередачи воздушная	0,9625	0,0375
Линия электропередачи подземная	0,9910	0,0090

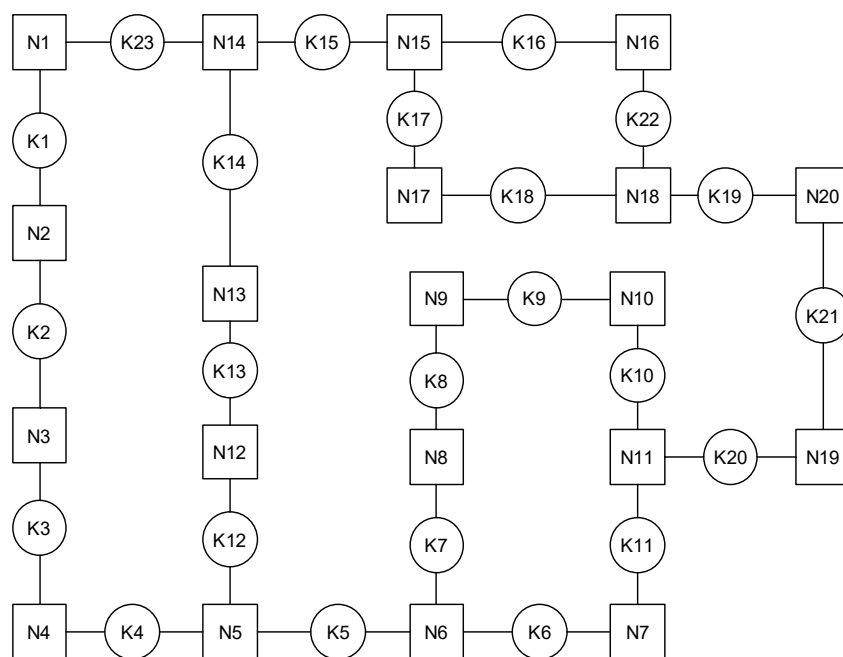


Рисунок 7.2 – Граф модели фрагмента электроэнергетической сети, формализованной в виде графа-трёхполюсника

Таблица 7.2 – Показатели надежности элементов-вершин графа модели электроэнергетической системы

Элемент	Надежность	Элемент	Надежность	Элемент	Надежность	Элемент	Надежность
N_1	0,8730	N_6	0,9000	N_{11}	0,9000	N_{16}	0,9000
N_2	0,9000	N_7	0,8730	N_{12}	0,8730	N_{17}	0,8730
N_3	0,9685	N_8	0,9000	N_{13}	0,8730	N_{18}	0,9000
N_4	0,9000	N_9	0,9685	N_{14}	0,9000	N_{19}	0,8730
N_5	0,9685	N_{10}	0,9000	N_{15}	0,8730	N_{20}	0,8730

Таблица 7.3 – Показатели надежности элементов-ребер графа модели электроэнергетической системы

Элемент	Надежность	Элемент	Надежность	Элемент	Надежность	Элемент	Надежность
K_1	0,9625	K_7	0,9625	K_{13}	0,9625	K_{19}	0,9910
K_2	0,9625	K_8	0,9625	K_{14}	0,9625	K_{20}	0,9910
K_3	0,9625	K_9	0,9625	K_{15}	0,9625	K_{21}	0,9910
K_4	0,9625	K_{10}	0,9625	K_{16}	0,9625	K_{22}	0,9910
K_5	0,9910	K_{11}	0,9910	K_{17}	0,9910	K_{23}	0,9910
K_6	0,9910	K_{12}	0,9910	K_{18}	0,9910		

Вероятностные показатели надежности приведены для вершин, что в свою очередь означает оценку надежности электроэнергетической системы со схемой формализации «элементы-вершины» [1].

В таблице 7.3 приведены вероятности надежной работы линий связи (ребер графа модели электроэнергетической системы), которые использовались для оценки надежности электроэнергетической системы, формализованной по схеме «элементы – ребра».

Результаты моделирования фрагмента электроэнергетической системы для двух схем формализации представлены в таблице 7.4 (схема формализации «элементы – вершины») и таблице 7.5 (схема формализации «элементы – ребра»).

Таблица 7.4 – Результаты моделирования фрагмента электроэнергетической системы для схемы формализации «элементы – вершины»

Состояния системы	Вероятностные оценки
Состояние S_1	0,0000067579689588000
Состояние S_2	0,0000276652821192000
Состояние S_3	0,0000165545896312000
Состояние S_4	0,0306100042564110000
Состояние S_5	0,9693390179028800000

Таблица 7.5 – Результаты моделирования фрагмента электроэнергетической системы для схемы формализации «элементы – ребра»

Состояния системы	Вероятностные оценки
Состояние S_1	0,0000423908958435058
Состояние S_2	0,0002661804612979000
Состояние S_3	0,0024654047857418900
Состояние S_4	0,0081481095264200000
Состояние S_5	0,9890779143307000000

Полученные оценки вероятностей resultирующих состояний надёжности фрагмента электроэнергетической системы представляют собой целый вектор вероятностей состояний надёжности объекта исследования, что является более информативным при выборе проектного решения для электроэнергетических объектов ограни-

ченной размерности. При рассмотрении систем большой размерности, полученные результаты моделирования могут служить исходными данными, позволяющими реализовать вероятностно-алгебраическое умножение структур (n -полусников) [7].

Закключение

Для выбора надёжного варианта организации электроэнергетического объекта предлагается воспользоваться вероятностно-алгебраическим моделированием, позволяющим построить модели с учетом числа элементов, структурной организации объекта и числа входов / выходов.

Объединение программного комплекса пространственно-временного анализа данных и инструментария вероятностно-алгебраического моделирования при исследовании надёжности электроэнергетических объектов позволит распределить все элементы по иерархическим уровням и интегрировать их в единую систему сбора, обработки и анализа данных, тем самым повысить эффективность управления объектами исследования и обеспечить решение следующих задач:

- организацию и автоматизацию оперативного мониторинга за состоянием надёжности структурных элементов объекта;
- классификацию состояний и формирования вероятностных оценок надёжности как отдельных элементов, так и всего объекта;
- определение оптимального сочетания параметров надёжности элементов объекта, обеспечивающих заданный уровень надёжности организации электросети без изменения её структурной организации;
- оценки вариантов модификации структуры объекта по заданному критерию с использованием приемлемых по вычислительной сложности алгоритмов.

Кроме этого программный комплекс пространственно-временного анализа данных может использоваться и как самостоятельное инструментальное средство, позволяющее существенно сократить время реакции диспетчерских служб поставщиков электроэнергии на критические аварии и повысить уровень информированности граждан о состоянии энергоснабжения. Использование интерактивных тепловых карт и

аналитических дашбордов в составе комплекса позволит реализовать переход от реактивной модели фиксации аварий к проактивному управлению ресурсами восстановления работоспособности аварийных участков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сукач, Е. И. Вероятностно-алгебраическое моделирование сложных систем графовой структуры / Е. И. Сукач. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2012. – 224 с.
2. Анализ надёжности электроэнергетических систем на основе вероятностно-алгебраического моделирования / О. М. Демиденко, Е. И. Сукач, Д. В. Ратобильская, Ю. В. Жердецкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 2 (13). – С. 87–94.
3. Программно-технологический комплекс автоматизации проектного моделирования систем управления технологическими процессами производства с элементами потенциальной опасности «ControlSyst»: свидетельство о регистрации компьютерной программы № 773 / Е. И. Сукач, Ю. В. Жердецкий. – Мн. : НЦИС, 2015. – Заявка № С20150031. – Дата подачи: 15.04.15.

4. Калиниченко, В. А. Управление оповещениями об отключениях электроэнергии с использованием TELEGRAM-БОТА / В. А. Калиниченко // «Творчество Молодых – 2025»: сб. науч. работ студентов и аспирантов УО «ГГУ им. Ф. Скорины». – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины. – 2025. – Ч. 1. – С. 183–186.

5. Гринберг, М. Разработка приложений с использованием Flask / М. Гринберг. – М. : ДМК Пресс, 2014. – 272 с.

6. Об одном подходе к оценке надёжности сетевых структур / Е. И. Сукач, Д. В. Ратобильская, С. Ф. Маслович, Т. Я. Каморникова // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 4 (13). – С. 87–94.

7. Сукач, Е. И. Метод вероятностно-алгебраического моделирования надёжности структурно-сложных систем большой размерности / Е. И. Сукач // Математические машины и системы. – 2014. – № 1. – С. 195–200.

Поступила в редакцию 29.06.2026.

Информация об авторах

Сукач Елена Ивановна – к.т.н., доцент

Калиниченко Вячеслав Александрович – студент

ВИКТОР СТЕПАНОВИЧ МОНАХОВ

(к 80-летию со дня рождения)



22 августа 2026 года исполнилось 80 лет советскому и белорусскому математику, доктору физико-математических наук, профессору В. С. Монахову.

Виктор Степанович родился в городе Орске, Чкаловской области, СССР. В 1965–1970 гг. учился на физико-математическом факультете Орского государственного педагогического института. На третьем курсе стал заниматься научной работой под руководством В. А. Ведерникова, который в 1968 году закончил в Гомеле аспирантуру у академика С. А. Чунихина. Итогом таких интенсивных занятий по индивидуальному плану явился тот факт, что в год окончания института Виктором Степановичем в журнале ДАН БССР была опубликована первая научная работа, и в этом же году его зачисляют стажером-исследователем Гомельской лаборатории теории конечных групп Института математики АН БССР. Через год выходит вторая работа, а затем третья уже в московском журнале «Математические заметки». В мае 1971 года занятие наукой пришлось прервать на один год службы в рядах Советской Армии. После возвращения из армии Виктор Степанович завершает кандидатскую диссертацию под руководством профессора Л. А. Шеметкова и успешно защищает ее в марте 1974 года в Институте математики АН УССР. Официальные оппоненты – член-корреспондент АН УССР С. Н. Черников и Д. И. Зайцев, оппонирующая организация – Институт математики Сибирского отделения АН СССР в лице В. Д. Мазурова, являющегося ныне членом-корреспондентом РАН.

С 1974 г. В.С. Монахов начал совмещать работу в Институте математики АН БССР с преподаванием в Гомельском государственном университете. С 1986 г. штатный сотрудник университета: заведующий кафедрой алгебры и геометрии 1985–1996 гг., а с 1996 г. по настоящее время – профессор этой кафедры. В 1992 году В. С. Монахову присвоено звание профессора, а в 1997 году защищена докторская диссертация «Бипримарные подгруппы конечных групп». Результаты диссертации получили высокую оценку в отзывах академика В. П. Платонова и члена-корреспондента А. Е. Залесского. В отзыве официального оппонента профессора Л. С. Казарина отмечалось, что: «... многие из результатов В. С. Монахова, вошедшие в диссертацию, послужили отправной точкой исследований других авторов, дав жизнь целому ряду направлений в теории конечных групп».

В. С. Монахов автор более 150 научных статей и многих научных сообщений и учебных пособий. Два учебных пособия изданы с Грифом Министерства образования Республики Беларусь. С 1980 г. руководит аспирантурой, им подготовлено 17 кандидатов физ.-матем. наук, два его ученика стали докторами наук.

Является членом двух Белорусских советов по защите докторских и кандидатских диссертаций по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел: с 1995 по 2000 гг. – ученый секретарь, а с 2000 по н.в. – заместитель председателя Совета Д 02.12.01 при ГГУ имени Ф. Скорины; с 2005 по н.в. – член Совета Д 01.02.01 при Институте математики НАН Беларуси. Выступал оппонентом в диссертационных Советах Минска, Гомеля, Москвы, Ярославля, Киева. В. С. Монахов член редколлегий журналов: ПФМТ, Вестник Брестского государственного университета им. А. С. Пушкина, Труды ИММ УрО РАН.

Виктор Степанович Лауреат Скорининских чтений (1994), «Выдатнік адукацыі» Республики Беларусь (2007), Почетный профессор Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины (2014), Почетный доктор Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина (2024). Награжден Юбилейной медалью «У гонар 80-годдзя Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі» (2013), медалью «За трудовые заслуги» (2022), а в 2025 г. ему объявлена Благодарность Премьер министра Республики Беларусь.

Редколлегия журнала поздравляет Виктора Степановича Монахова с юбилеем и желает крепкого здоровья и новых научных свершений!

Поступила в редакцию 04.04 2026

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfint@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfint.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;
- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;
- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e. g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).