



ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№2 (39) 2019

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:
С.А. Хахомов (Беларусь)

**ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО
РЕДАКТОРА:**
А.В. Рогачёв (Беларусь)
О.М. Демиденко (Беларусь)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

EDITOR-IN-CHIEF:
S.A. Khakhomov (Belarus)

DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:
A.V. Rogachev (Belarus)
O.M. Demidenko (Belarus)

EDITORIAL BOARD:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

EXECUTIVE SECRETARY:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

EDITION ADDRESS:
F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 2 (39) 2019

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЗОРЫ

- Руденков А.С., Ярмоленко М.А.** Углеродные нанотрубки: классификация, особенности синтеза, методы исследования, области применения 7

ФИЗИКА

- Вилья Н., Голосов Д.А., Нгуен Т.Д.** Диэлектрические свойства пленок оксида тантала, нанесенных методом реактивного магнетронного распыления 15
- Имин Лю, Рогачев А.В., Ярмоленко М.А., Рогачев А.А., Сяохун Цзян, Руденков А.С.** Молекулярная структура однослойных и бислойных покрытий, перспективных при их использовании в процессах остеосинтеза 21
- Имин Лю, Рогачев А.В., Ярмоленко М.А., Рогачев А.А., Сяохун Цзян, Руденков А.С.** Биоактивные многослойные покрытия, инициирующие рост костной ткани: структура и свойства 28
- Поляков А.В.** Рециркуляционный метод измерения температуры волоконно-оптическим датчиком 36
- Сердюкова М.А., Сердюков А.Н.** Массивное гравитационное поле в плоском пространстве-времени. I. Калибровочная инвариантность и полевые уравнения 45

МАТЕМАТИКА

- Беняш-Кривец В.В., Юшкевич Я.А.** Об альтернативе Титса для обобщенных тетраэдральных групп типа $(2,2,N,2,2,2)$ 54
- Васильева Т.И.** О пересечениях обобщенных проекторов с произведениями нормальных подгрупп конечных групп 61
- Жогаль С.П., Жогаль С.И.** О непрерывной в среднем квадратическом зависимости от начальных данных решений одной сложной стохастической дифференциальной системы с запаздыванием 66
- Караулова Т.Б.** Инъекторы и подгруппы Фишера конечных π -разрешимых групп 70
- Княгина В.Н., Чирик И.К.** Конечные факторизуемые группы с разрешимыми \mathbb{X} -субнормальными сомножителями 76
- Козлов А.А., Калита К.Д.** Инвариантность свойства положительной отделенности главных ведущих миноров квадратной матрицы при ее преобразовании подобия 81
- Косенок Н.С., Селькин В.М., Мыщик В.Н., Рыжик В.Н.** О конечных полу- π -специальных группах 88
- Старовойтов А.П., Рябченко Н.В., Волков Д.А.** О существовании и единственности многочленов Эрмита – Паде второго рода 92
- Цехан О.Б.** Критерии полной наблюдаемости линейных стационарных систем с запаздыванием по выходу 97

ИНФОРМАТИКА

- Дравица В.И., Решетняк А.В., Якушкин Е.А.** Основы цифрового мониторинга маркированных RFID-метками объектов 105

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Г. Н. Петухова, Т. А. Фицнер*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 14.06.19. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 13,02. Уч.-изд. л. 11,34. Тираж 100 экз. Заказ № 504.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246019, Гомель

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2019
© Проблемы физики, математики и техники, 2019
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2019

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 2 (39) 2019

CONTENTS

REVIEWS

- Rudnikov A.S., Yarmolenko M.A.** Carbon nanotubes: classification, features of synthesis, research methods and applications 7

PHYSICS

- Villa N., Golosov D.A., Nguyen T.D.** Dielectric properties of tantalum oxide thin films deposited by reactive magnetron sputtering 15
- Yiming Liu, Rogachev A.V., Yarmolenko M.A., Rogachev A.A., Xiaohong Jiang, Rudnikov A.S.** Molecular structure of single-layer and bi-layer coatings, which are perspective when used in osteosynthesis processes 21
- Yiming Liu, Rogachev A.V., Yarmolenko M.A., Rogachev A.A., Xiaohong Jiang, Rudnikov A.S.** Bioactive multilayer coatings that initiate bone growth: structure and properties 28
- Polyakov A.V.** Recirculation method for temperature measurement by the fiber optical sensor . . . 36
- Serdyukova M.A., Serdyukov A.N.** A massive gravitational field in flat spacetime. I. Gauge invariance and field equations 45

MATHEMATICS

- Beniash-Kryvets V.V., Yushkevich Y.A.** On the Tits alternative for generalized tetrahedron groups of type $(2,2,N,2,2,2)$ 54
- Vasilyeva T.I.** On the intersections of generalized projectors with the products of normal subgroups of finite groups 61
- Zhogal S.P., Zhogal S.I.** On continuous in the mean square dependence on the initial data of solutions of one complex stochastic differential system with delay 66
- Karaulova T.B.** Injectors and Fischer subgroups of finite π -soluble groups 70
- Kniahina V.N., Chirik I.K.** Finite factored groups with soluble \mathbb{X} -subnormal factors 76
- Kozlov A.A., Kalita K.D.** The invariance of property of principal leading minors' of the square matrix positivity in the similarity transformation 81
- Kosenok N.S., Selkin V.M., Mitsik V.N., Rizhik V.N.** On finite semi- π -special groups 88
- Starovoitov A.P., Ryabchenko N.V., Volkov D.A.** On the existence and uniqueness of type II Hermite – Padé polynomials 92
- Tsekhan V.B.** Complete controllability conditions for linear time-independent system with delay in output 97

INFORMATION SCIENCE

- Dravitsa V.I., Reshetniak A.V., Yakushkin E.A.** Bases of digital monitoring of objects marked with RFID tags 105

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

- Technics (Informatics, Computer Science and Control);**
- Physics and Mathematics.**

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 544.556.1:546.26:620.3

УГЛЕРОДНЫЕ НАНОТРУБКИ: КЛАССИФИКАЦИЯ, ОСОБЕННОСТИ СИНТЕЗА, МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ, ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ

А.С. Руденков, М.А. Ярмоленко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

CARBON NANOTUBES: CLASSIFICATION, FEATURES OF SYNTHESIS, RESEARCH METHODS AND APPLICATIONS

A.S. Rudenkov, M.A. Yarmolenko

F. Scorina Gomel State University

Рассмотрена современная классификация углеродных нанотрубок (УНТ). Выполнен сравнительный анализ методов их синтеза, выделены ключевые технологические параметры, влияющие на тип и архитектуру формируемых УНТ. Установлены наиболее эффективные катализаторы процесса роста УНТ, приведены основные методы детектирования, области применения и перспективные направления внедрения в производство.

Ключевые слова: углеродные нанотрубки, синтез, катализатор, очистка, применение.

Modern classification of carbon nanotubes (CNT) is considered. A comparative analysis of the methods for their synthesis has been carried out; key technological parameters affecting the type and architecture of the formed CNTs have been identified. The most effective catalysts for the growth process of CNT have been established, the main methods of detection, the fields of application, and promising directions of introduction into production are given.

Keywords: carbon nanotubes, synthesis, catalyst, purification, application.

Введение

Принято считать, что впервые углеродные нанотрубки (УНТ) были получены и описаны японским ученым Ииджимой в 1991 году [1]. Однако, существует ряд более ранних работ, посвященных синтезу УНТ [2]–[4]. В частности, в 1952 советскими учеными были получены углеродные волокна диаметром около 100 нм путем термического разложения окиси углерода на железном катализаторе [2]. Тем не менее, в первую очередь из-за недостаточного уровня развития исследовательского оборудования, ранние работы не получили продолжения и научный интерес к проблематике УНТ возрос только в середине 1990-х. Благодаря высокой прочности углерод-углеродных связей, рекордно большой плотности упаковки атомов, отсутствию и малой плотности дефектов структуры УНТ обладают уникальными механическими, электрофизическими и теплофизическими свойствами [5], [6]. Так, модуль Юнга УНТ может варьироваться от 0,45 до 2,0 ТПа [5], [7], а коэффициент теплопроводности достигает 10 000 Вт/(м·К) [8]. Архитектура УНТ, а значит и свойства, зависит от условий и режимов их синтеза. Несмотря на достаточно большой объем накопленных экспериментальных данных, нет общепринятых подходов к классификации, описанию механизма роста УНТ, а отдельные сферы применения до сих пор являются предметом дискуссии мирового научного сообщества.

В настоящей работе приведена современная классификация, выполнен обзор основных методов синтеза, определены основные факторы, влияющие на архитектуру и свойства УНТ, представлены как основные области их промышленного применения, так и наиболее перспективные направления. Одним из перспективных и актуальных научных направлений является разработка методики формирования углеродных покрытий, армированных УНТ. Армирование углеродных слоев наноструктурами позволит снизить уровень внутренних напряжений, повысить их трещиностойкость и износостойкость.

1 Классификация и архитектура

УНТ – аллотропная модификация углерода, представляющая собой полую цилиндрическую структуру диаметром от десятых до нескольких десятков нанометров и длиной от одного микрометра до нескольких сантиметров, состоящую из одной или нескольких свёрнутых в трубку графеновых плоскостей [5]. В зависимости от способа свертывания плоскостей выделяют три формы УНТ [9]: ахиральные типа «armchair» (две стороны каждого гексагона ориентированы перпендикулярно оси УНТ), ахиральные типа «zigzag» (при параллельном положении к оси) и хиральные (любая пара сторон гексагона расположена к оси УНТ под углом, отличным от 0 или 90°) [10].

По количеству графеновых слоев выделяют однослойные углеродные (ОУНТ) и многослойные

нанотрубки (МУНТ). Наименьший и наибольший диаметры ОУНТ составляют соответственно около 0,3 и 5 нм [5]. Отдельно принято выделять двухслойные нанотрубки (ДУНТ), которые являются как бы переходной формой между однослойными и многослойными. Их внешний диаметр варьируется от 1,8 до 7,1 нм. Среди МУНТ выделяют следующие типы: «русская матрешка», «рулон» и «папье-маше» [11], [12].

Внешний диаметр МУНТ – 2,5÷30 нм, длина от 10 нм до 1 мкм [13]. При любых вариантах строения МУНТ межслоевое расстояние близко к расстоянию между слоями графита (0,34 нм), а у дефектных МУНТ может достигать 0,4÷0,5 нм [5].

Необходимо отметить, что общепризнанной классификации углеродных нанотрубок на данный момент не существует, а большое разнообразие их конфигураций часто затрудняет определение типа нанотрубок на практике.

2 Особенности синтеза

В настоящее время существует три основных метода синтеза нанотрубок (рисунок 2.1): дуговой разряд; лазерная абляция; химическое осаждение из газовой фазы (CVD) [5], [7], [13], [14].

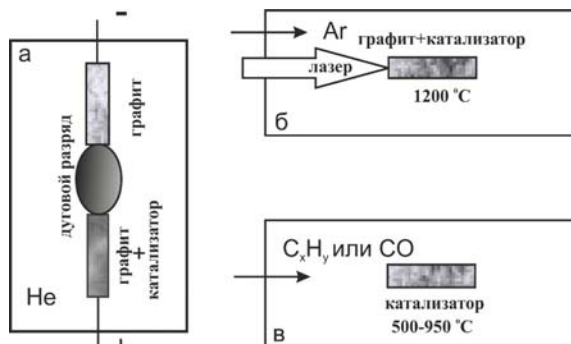


Рисунок 2.1 – Методы синтеза УНТ:
а – дуговой; б – лазерная абляция;
в – химическое осаждение из газовой фазы CVD [13]

Дуговой метод синтеза УНТ представляет собой электродуговое распыление графитового анода в вакуумной камере в потоке инертного газа [1], [15]–[19]. Рост УНТ происходит на поверхности катода. Из-за высокой степени ионизации наиболее часто в качестве рабочего газа используется гелий [16]–[19]. Процесс синтеза УНТ путем дугового распыления графита был впервые описан в 1991 [1]. УНТ диаметром от 4 нм до 30 нм и длиной до 1 мкм были получены на торцевой поверхности графитового катода в потоке аргона (парциальное давление 10^4 Па). Следующим этапом развития дугового синтеза УНТ является введение в состав одного из электродов катализатора. Так в [16] анод содержит переходной металл (Fe, Ni, Co). Если в более ранних работах УНТ росли на поверхности электрода, то в данном случае рост осуществляется вокруг наночастиц металлов. Авторы [16], [19]

утверждают, что при использовании катализатора синтезируются преимущественно ОУНТ диаметром от 1,2 до 1,4 нм и длиной несколько микрометров.

Для производства высококачественных УНТ диаметром 15÷60 нм оптимальными являются следующие параметры: напряжение – 20÷30 В, ток 50÷100 А, плотность тока 90 А/см², давление инертного газа порядка $5 \cdot 10^4$ Па [14]–[20]. Диаметр, длина и тип синтезируемых дуговым методом УНТ зависит от концентрации металла-катализатора, парциального давления и природы инертного газа, плотности тока и геометрии электродов [16], [18].

Основным недостатком дугового метода синтеза УНТ является его нестабильность. Количество УНТ и их размеры непостоянны, следовательно, непостоянно расстояние между электродами, что в свою очередь ведет к неоднородности электрического поля, неравномерному распределению температуры, плотности паров углерода, а значит к нестабильности процесса синтеза. На стабильность процесса синтеза также влияет общее давление в системе, свойства и скорость подачи инертного газа, размеры реакционной камеры, длительность синтеза, наличие и геометрия охлаждающих устройств, природа и чистота материала электродов, соотношение их геометрических размеров [5], [18].

Более стабильным методом синтеза УНТ является лазерная абляция (испарение) [5], [18], [20]–[23]. Процесс представляет собой испарение металл-графитовой мишени (в качестве металл-катализатора используют Co, Ni, Cu, Pt, Nb) в среде аргона (парциальное давление $5 \cdot 10^4$ Па) при температуре 1200 °С. Синтез УНТ осуществляется на поверхности водоохлаждаемого медного коллектора. При более низких температурах качество УНТ заметно снижается [20]. Авторами [22] проведён сравнительный анализ процессов синтеза УНТ при помощи CO₂-лазера (длина волны 10,6 мкм, длительность импульса 20 мкс, полная энергия 2 кВт/см²) и Nd:YAG-лазера (длина волны 532 нм, длительность импульса 5 нс, полная энергия 2,4 кВт/см²). Установлены минимальные значения парциального давления рабочего газа (аргона) и температуры реакционной камеры, при которых происходит синтез ОУНТ, в случае CO₂-лазера – $5 \cdot 10^3$ Па и 30 °С, а для Nd:YAG-лазера – $2 \cdot 10^4$ Па и 900 °С.

Синтез УНТ дуговым методом и лазерным испарением являются энергоёмкими методами. Оба метода характеризуются высоким содержанием побочных форм углерода (аморфный углерод, фуллерены) [18]. Вышеуказанных недостатков лишен метод химического осаждения УНТ из газовой фазы (CVD метод). Процесс представляет собой осаждение вещества на нагретую поверхность в результате химической реакции в газовой фазе [24].

CVD метод синтеза УНТ, по сравнению с дуговым методом и методом лазерного диспергирования, более широко используется в промышленности благодаря следующим преимуществам [24]–[29]: простота и гибкость технологии; дешевый прекурсор углерода – углеродсодержащие газы; выход ОУНТ до 95%; возможность роста УНТ на поверхностях различной формы и размеров; низкое энергопотребление.

Существует множество факторов, влияющих на синтез УНТ методом CVD: выбор газа-прекурсора, геометрия реакционной камеры, скорость потока газа, природа катализатора, время реакции, температура и давление в реакционной камере и т. д. [24]–[26]. Однако, основными являются природа прекурсора углерода и катализатор, температура синтеза. В качестве прекурсоров углерода используется метан, ацетилен, этанол, оксид углерода, этилен, циклогексан, фуллерены [24]–[29]. При использовании в качестве прекурсора линейных углеводородов (метан, этилен, ацетилен) синтезируются полые и прямые УНТ (поскольку прекурсор термически разлагается на атомы углерода, линейные димеры и тримеры), в то время как при использовании циклических углеводородов (бензол, ксилол и циклогексен) получают относительно искривленные УНТ с перегородками внутри [26].

Качество и процент выхода УНТ, независимо от метода синтеза, сильно зависит от выбора катализатора [5], [14], [18], [24], [26]. Для получения ОУНТ наличие наночастиц металла необходимое условие, в то время как формирование МУНТ может происходить и без участия катализатора [14], [17]. Функция катализатора состоит в разложении углеводородов при более низкой температуре, чем температура самопроизвольного разложения, кроме того частицы катализатора являются центрами зародышеобразования УНТ [5], [18], [26].

В настоящее время существуют ряд противоречащих друг другу теорий о роли катализатора в процессе синтеза УНТ [26]. Ряд авторов [5], [30], [31] утверждает, что синтез УНТ происходит в результате поверхностной или объемной диффузии атомов углерода в частице металла. Химические и механические взаимодействия тесно связаны друг с другом на всех этапах синтеза [31]. Высокая эффективность использования переходных металлов (Fe, Ni, Co и др.) в качестве катализаторов определяется следующими причинами [5], [31]:

- при высокой температуре углерод обладает высокой растворимостью в переходных металлах;
- углерод имеет высокую скорость диффузии в этих металлах;
- сочетание относительно низкого давления насыщенных паров и высокой температуры плавления переходных металлов.

В то же время авторы [32] считают, что ключевую роль в синтезе УНТ играет адгезионное взаимодействие частиц катализатора и УНТ. Показано, что продолжение или прекращение роста ОУНТ в значительной степени зависит от прочности связи углерод-металл. Согласно данной гипотезе Fe, Co и Ni характеризуются более высокой адгезией к ОУНТ, чем Cu, Pd и Au и именно по этой причине способствуют формированию более длинных УНТ.

В последнее десятилетие разработаны методы синтеза УНТ, в которых в качестве катализаторов успешно используются Ag, Cu, Pd, Cd, Zn, Mo, Al, Zr, Ce, Mg, их оксиды [33]–[38], и даже алмаз, Ge, SiC, Si, сапфир [39]–[42]. Часто в качестве катализатора активно используются биметаллические и триметаллические смеси, например Cd-Fe-Al, Fe-Mo-Al, Ni-MgO и Ni-Cu-MgO [43]–[46]. Применение каталитических смесей, главным образом, позволяет снизить температуру синтеза, а также повлиять на структуру и диаметр УНТ [43]–[48]. Например, в [47], [48] показано, что введение в состав смеси Mo влияет на кристалличность формируемых УНТ и позволяет существенно увеличить процент их выхода. Mo повышает дисперсность смеси катализаторов, препятствуя спеканию частиц Co, а также способствует образованию ароматических соединений, являющихся структурными блоками УНТ.

Механизмы каталитического образования УНТ делят на «корневой» и «вершинный» [5]. Согласно первому, УНТ растет с поверхности металлической частицы, остающейся в контакте с подложкой. По второму – металлическая частица отрывается от подложки и удерживается на растущей нанотрубке. Причем для синтеза УНТ из дугового разряда и методом лазерного диспергирования более характерен «корневой» механизм [49].

В настоящее время существует несколько моделей роста УНТ: модель роста ОУНТ по слоисто-спиральному механизму [50], [51], модели, описывающие процесс роста УНТ по механизмам «пар – кристалл», «пар – жидкость – кристалл» [5], [49], [52], модели последовательного и параллельного роста МУНТ [53], [54], скручивание графеновых листов [55], [56]. Однако, каждая из них применима только к определенным методам и условиям синтеза УНТ, имеет некоторые недостатки и допущения и не является универсальной.

Очистка от аморфного углерода, частиц катализатора, фуллеренов и других побочных продуктов является обязательным этапом синтеза УНТ [14], [57]–[65]. Методы очистки в зависимости от способа воздействия на УНТ можно разделить на три категории [57], а именно: химический, физический и гибридный.

Принцип действия химического метода основан на селективном окислении: аморфный

углерод окисляется с большей скоростью, чем УНТ, а металлические примеси растворяются кислотами [58]. Однако, эффективность данного метода снижается, если среди побочных продуктов синтеза УНТ присутствует графен или фуллерены [57].

Физические методы (высокотемпературный отжиг, ультразвуковая и магнитная очистка) основаны на различиях размеров, температур испарения, соотношений сторон и магнитных свойств углеродных наноструктур и используются для сепарации УНТ по размерам и очистки, главным образом, от аморфного углерода, графена [61]–[65].

Гибридный метод очистки УНТ является многоступенчатым процессом и сочетает в себе достоинства физического и химического метода [14].

3 Методы исследования

Основными методами детектирования и характеристики УНТ являются: рентгеновская фотоэлектронная спектроскопия (РФЭС), электронная микроскопия, атомно-силовая микроскопия, сканирующая туннельная микроскопия, рентгеновская и нейтронная дифракционная спектроскопия, спектроскопия комбинационного рассеяния [66]–[71].

Средствами РФЭС УНТ определяются по наличию C_{1s} пика в диапазоне $281 \div 290$ эВ, в котором выделяют три составляющих: $284,3 \div 284,6$ эВ соответствует sp^2 -гибридизованному углероду; $285,0 \div 285,3$ эВ – sp^3 -гибридизованному углероду; $288,5 \div 289,0$ – карбоксильным группам [66], [67]. Спектр УНТ, полученный средствами рентгеновской дифракционной спектроскопии, идентичен графиту (0 0 0 2) [68]. Таким образом, по отдельности методы РФЭС и рентгеновской дифракционной спектроскопии, не могут однозначно детектировать УНТ, поскольку спектры идентичны углеродным материалам или наноразмерным покрытиям. Указанные методы необходимо использовать в комплексе с атомно-силовой или сканирующей электронной микроскопией.

Спектры комбинационного рассеяния ОУНТ имеют уникальные особенности, позволяющие отличать их от спектров графита и углеродных покрытий. Помимо E_{2g} (G-пик 1580 см^{-1}) и A_{1g} (D-пик 1350 см^{-1}) мод, возникают (RBM – radial breathing mode) радиальные дыхательные моды около 200 см^{-1} [69, 70] и G' пик в диапазоне $2450 \div 2650 \text{ см}^{-1}$ [14]. Спектры МУНТ не позволяют их однозначно идентифицировать, поскольку имеют только E_{2g} и A_{1g} моды, характерные для углеродных покрытий и материалов.

В [71] приведены данные о детектировании УНТ методами УФ-ВИД спектроскопии. Для ОУНТ характерно появление пика поглощения на длине волны 273 нм и плазмонного пика при 1035 нм. Для МУНТ же характерно появление пика поглощения на длине волны 258 нм.

4 Области применения

Области применения УНТ достаточно разнообразны: производство композитных материалов (бетон, керамика), фотоника и оптика, электроника и медицина [72]–[87].

В автомобилестроении УНТ используются в качестве наполнителя для пластмасс с целью увеличения их удельной электропроводности (до $10\,000 \text{ См/м}$) [72]. Такие пластмассы применяются в топливопроводах и фильтрах автомобилей для рассеивания электростатического заряда. Из-за повышения проводимости при добавлении УНТ стала возможна электростатическая покраска пластмассовых деталей, например, корпусов зеркал в едином цикле со всем корпусом автомобиля [73].

Углеродный наноматериал «Таунит», содержащий МУНТ диаметром $15 \div 40$ нм, используется в качестве антидетонационных присадок для повышения октанового числа, а также в качестве присадки для моторных масел с целью усиления моюще-диспергирующих свойств и повышения антифрикционных свойств [5].

Использование УНТ при синтезе композиционных материалов, содержащих углеродные волокна, позволяет увеличить их прочность на $35\text{--}40\%$ ($4,5 \text{ ГПа}$) и жесткость (463 ГПа) [74]. Такие материалы применяют при производстве лопастей ветряных турбин и судов, деталей автомобилей, в авиационной [73], [74]. Многие производители спортивных товаров (теннисные ракетки, бейсбольные биты, детали велосипедов) добавляют УНТ в состав эпоксидных смол (концентрация УНТ от 1% до 20%) [75].

В настоящее время выдвинуто масса предложений по применению УНТ в микро- и нанoeлектронике благодаря низкому рассеянию электронов и зависимости электрических свойств от диаметра и хиральности [76]. Однако, большинство из них трудно реализовать в промышленных масштабах. Одним из наиболее перспективных предложений является использование УНТ с целью замены индия при производстве процессоров и высокоомощных транзисторов [76], [77]. Кроме этого, весьма перспективно использование тонкопленочных транзисторов на основе УНТ при производстве гибких OLED дисплеев [78]. Полимерные композиты, допированные УНТ, применяются в качестве радиопоглощающих материалов в диапазоне $1 \div 40 \text{ ГГц}$ (радиопередающие антенны, телекоммуникации, экранирование мобильных телефонов, электронные кардиостимуляторы, безэховые камеры) [79], [80]. МУНТ применяются при изготовлении литий-ионных батарей для ноутбуков, планшетов и мобильных телефонов, а также при производстве суперконденсаторов с целью увеличения емкости и срока эксплуатации [76], [81], [82].

УНТ используются при производстве сенсоров для определения CO , NO_2 , NH_3 , CF_4 и H_2

[5], [72], [83]. Принцип действия основан на изменении сопротивления УНТ в результате сорбции детектируемого газа [83]. На основе УНТ разработаны медицинские биодатчики для контроля прогестерона, эстрогена, протенина и тропонина [84]. По поводу применения УНТ in vivo для направленной транспортировки, например докСорубицин [85] (противораковый препарат) до сих пор ведутся дискуссии [72]. Так, в [86] показано, что инъекции большого количества МУНТ в легкие мышей вызывают патологии, схожие с патологиями, вызванными асбестом. Однако авторы [87] опровергают данную гипотезу, утверждая, что при определенных значениях диаметра УНТ в живом организме не возникает патологий.

Выводы

Независимо от метода синтеза УНТ ключевыми технологическими параметрами, влияющими на процент выхода, а также архитектуру УНТ, являются: температура процесса и парциальное давление рабочего газа в реакционной камере. Выбор катализатора, соотношения его компонентов и способа приготовления также является одним из ключевых аспектов процесса синтеза УНТ и оказывает существенное влияние на их тип, структуру, скорость роста, диаметр и хиральность.

Одним из перспективных направлений развития технологии получения УНТ является снижение температуры синтеза, что позволит снизить энергоёмкость процесса, а значит и его стоимость.

Анализ существующих технологических способов получения УНТ показывает, что при помощи вакуумных методов, в частности лазерного диспергирования полимерных материалов, возможна реализация необходимых условий для их низкотемпературного синтеза.

В настоящее время УНТ активно используются при производстве композиционных материалов, применяемых в машиностроении и строительстве. Для применения же в микроэлектронике и медицине существует ряд препятствий. В первую очередь, существенная зависимость проявляемых электрофизических и биоактивных свойств от размеров и хиральности УНТ. В изучении таких эффектов заключается основной потенциал современных научных исследований УНТ.

УО «Гомельский государственный университет» обладает необходимой научно-исследовательской базой для проведения работ по синтезу и детектированию УНТ: экспериментальные вакуумные установки, атомно-силовой микроскоп, оптический микроскоп с системой обработки изображения, КР-, ИК-спектрофотометр, спектрофотометр для получения спектров в видимом и ультрафиолетовом диапазоне.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Iijima, S.* Helical microtubules of graphitic carbon / S. Iijima // *Nature*. – 1991. – Vol. 354. – P. 56–58.
2. *Радушкевич, Л.В.* О структуре углерода, образующегося при термическом разложении окиси углерода на железном контакте / Л.В. Радушкевич, В. М. Лукьянович // *ЖФХ*. – 1952. – Т. 26. – С. 88–95.
3. *Oberlin, A.* High resolution electron microscope observations of graphitized carbon fibers / A. Oberlin, M. Endo, T. Koyama // *Carbon*. – 1976. – Vol. 14. – P. 133 – 135.
4. *Карбидный механизм образования углеродистых отложений и их свойства на железо-хромовых катализаторах дегидрирования* / Р.А. Буянов [и др.] // *Кинетика и катализ*. – 1977. – Т. 18. – С. 1021–1028.
5. *Мищенко, С.В.* Углеродные наноматериалы. Производство, свойства, применение / С.В. Мищенко, А.Г. Ткачев. – М.: Машиностроение, 2008. – 320 с.
6. *Витязь, П.А.* Наноматериаловедение: учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по техническим специальностям / П.А. Витязь, Н.А. Свидуневич, Д.В. Куис. – Минск: Вышэйшая школа, 2015. – 511 с.
7. *Колокольцев, С.Н.* Углеродные материалы. Свойства, технологии, применения / С.Н. Колокольцев. – Долгопрудный: «Интеллект», 2012. – 296 с.
8. *Браже, Р.А.* Теплопроводность углеродных супракристаллических нанотрубок / Р.А. Браже, В.С. Нефёдов // *ФТТ*. – 2012. – Т. 54. – С. 1435–1438.
9. *Fülep, D.* Self-organised formation of nanotubes from graphene ribbons. A molecular dynamics study / D. Fülep, I. Zsoldos, I. László // *Materials Research Express*. – 2016. – Vol. 3. – P. 105044–105055.
10. *Booker, R.* Nanotechnology for dummies / R. Booker, E. Boysen. – Wiley Publishing Inc, 2005. – 366 с.
11. *Reversible sidewall functionalization of buckytubes* / P.J. Boul [et al.] // *Chemical Physics Letters*. – 1999. – Vol. 310. – P. 367–372.
12. *Random networks of single-walled carbon nanotubes* / Z. Zhou [et al.] // *Physics Chemistry*. – 2004. – Vol. B 108. – P. 10751–10753.
13. *Kassing, R.* Functional properties of nanostructured materials / R. Kassing, P. Petkov, W. Kulisch, C. Popov. – Springer Netherlands, 2006. – 460 p.
14. *Carbon nanotubes, science and technology part (I) structure, synthesis and characterization* / A. Aqel [et al.] // *Arabian Journal of Chemistry*. – 2012. – Vol. 5. – P. 1–23.
15. *Ebbesen, T.W.* Large-scale synthesis of carbon nanotubes / T.W. Ebbesen, P. M. Ajayan // *Nature*. – 1992. – Vol. 358. – P. 220–222.

16. Journet, C. Production of carbon nanotubes / C. Journet, P. Bernier // *Applied Physics A – Material Science and Processing*. – 1998. – Vol. 67. – P. 1–9.
17. *Carbon nanotubes with single-layer walls* / C.-H. Kiang [et al.] // *Carbon*. – 1995. – Vol. 33. – P. 903–914.
18. *An overview on methods for the production of carbon nanotubes* / Mubarak [et al.] // *Journal of Industrial and Engineering Chemistry*. – 2013. – Vol. 11. – P. 1–12.
19. *High yield synthesis and growth mechanism of carbon nanotubes* / Z. Shi [et al.] // *Solid State Communications*. – 1996. – Vol. 97. – P. 371–375.
20. *Catalytic growth of single-walled nanotubes by laser vaporization* / T. Guo [et al.] // *Chemical Physics Letters*. – 1995. – Vol. 243. – P. 49–54.
21. *Gas and pressure effects on the production of single-walled carbon nanotubes by laser ablation* / E. Munoz [et al.] // *Carbon*. – 2000. – Vol. 38. – P. 1445–1451.
22. *Formation of Single-Wall Carbon Nanotubes: Comparison of CO₂ Laser Ablation and Nd:YAG Laser Ablation* / M. Yudasaka [et al.] // *Journal of Physical Chemistry B*. – 1999. – Vol. 103. – P. 3576–3581.
23. *Growth dynamics of single-wall carbon nanotubes and nanohorn aggregates by CO₂ laser vaporization at room temperature* / F. Kokai [et al.] // *Applied Surface Science*. – 2002. – Vol. 197–198. – P. 650–655.
24. *Pierson, H.O. Handbook of Chemical Vapor Deposition: Principles, Technology and Applications* / H.O. Pierson. – Elsevier, 1999. – 506 p.
25. *Mubarak, N.M. The production of carbon nanotubes using two-stage chemical vapor deposition and their potential use in protein purification* / N.M. Mubarak, F. Yusof, M.F. Alkhatib // *Chemical Engineering Journal*. – 2011. – Vol. 168. – P. 461–469.
26. *Shah, K.A. Synthesis of carbon nanotubes by catalytic chemical vapour deposition: A review on carbon sources, catalysts and substrates* / K.A. Shah, B.A. Tali // *Materials Science in Semiconductor Processing*. – 2016. – Vol. 41. – P. 67–82.
27. *In-situ formation of carbon nanotubes in an alumina-nanotube composite by spray pyrolysis* / R. Kamalakaran [et al.] // *Carbon*. – 2003. – Vol. 41. – P. 2737–2741.
28. *Braidy, N. Single-wall carbon nanotubes synthesis by means of UV laser vaporization* / N. Braidy, M.A. ElKhakani, G.A. Botton // *Chemical Physics Letters*. – 2002. – Vol. 354. – P. 88–92.
29. *The production and structure of pyrolytic carbon nanotubes (PCNTs)* / M. Endo [et al.] // *Journal of Physics and Chemistry of Solids*. – 1993. – Vol. 54. – P. 1841–1848.
30. *Crystallinopes of metallic carbon nanotubes* / A. Thess [et al.] // *Science*. – 1996. – Vol. 273. – P. 483–487.
31. *Hart, A.J. Rapid growth and flow-mediated nucleation of millimeter-scale aligned carbon nanotube structures from a thin-film catalyst* / A.J. Hart, A.H. Slocum // *The Journal of Physical Chemistry B*. – 2006. – Vol. 110. – P. 8250–8257.
32. *The importance of strong carbon–metal adhesion for catalytic nucleation of single-walled carbon nanotubes* / F. Ding [et al.] // *Nano Letters*. – 2008. – Vol. 8. – P. 463–468.
33. *Yang, W. Catalytic chemical vapor deposition of methane to carbon nanotubes: copper promote defect of Ni/MgO catalysts* / W. Yang, Y. Feng, W. Chu // *Journal of Nanotechnology*. – 2014. – Vol. 8. – P. 547030–547035.
34. *Studies on carbon nanotubes synthesis via methane CVD process using Co catalyst on carbon supports* / M.P. Mendoza [et al.] // *Nanotechnology*. – 2005. – Vol. 16. – P. 224–229.
35. *Low temperature growth of carbon nanotube by thermal CVD with Fe Zr N catalyst* / T. Shiroishi [et al.] // *IEEE Conference*. – 2003. – Vol. 65. – P. 13–14.
36. *Lee, S.Y. Synthesis of carbon nanotubes and carbon nanofilaments over palladium supported catalysts* / S.Y. Lee, M. Yamada, M. Miyake // *Science and Technology of Advanced Materials*. – 2005. – Vol. 6. – P. 420–426.
37. *Selective synthesis combined with chemical separation of single-walled carbon nanotubes for chirality selection* / X. Li [et al.] // *Communication*. – 2007. – Vol. 129. – P. 15770–15775.
38. *Growth Mechanism of Single-Walled Carbon Nanotubes on Iron-Copper Catalyst and Chirality Studies by Electron Diffraction* / M. He [et al.] // *Chemistry Materials*. – 2012. – Vol. 24. – P. 1796–1801.
39. *Carbon nanotube growth from semiconductor nanoparticles* / D. Takagi [et al.] // *Nano Letters*. – 2007. – Vol. 7. – P. 2272–2275.
40. *Carbon nanotube growth from diamond* / D. Takagi [et al.] // *Communication*. – 2009. – Vol. 131. – P. 6922–6923
41. *Han, S. Template-free directional growth of single-walled carbon nanotubes on a-andr-plane sapphire* / S. Han, X. Liu, C. Zhou // *Communication*. – 2005. – Vol. 127. – P. 5294–5295.
42. *Aksak, M. Carbon nanotube diameter tuning using hydrogen amount and temperature on SiO₂/Si substrates* / M. Aksak, Y. Selamet // *Applied Physics A*. – 2010. – Vol. 100. – P. 213–222.
43. *Karima, M. The impact of cadmium loading in Fe/alumina and synthesis temperature on carbon nanotubes growth by chemical vapour deposition method* / M. Karima, A. Badiei, P. Zarabadi-Poor // *Journal of Sciences, Islamic Republic of Iran*. – 2015. – Vol. 26. – P. 17–24.
44. *CVD synthesis of single wall carbon nanotubes* / R.A. Harutyunyan [et al.] // *Nano Letters*. – 2002. – Vol. 2. – P. 525–530.
45. *Lee, E.J. Catalyst effect on carbon nanotubes synthesized by thermal chemical vapour*

- deposition / E.J. Lee, J. Park, J.A. Yu // *Chemical Physics Letters*. – 2002. – Vol. 360. – P. 250–255.
46. Yang, W. Catalytic chemical vapor deposition of methane to carbon nanotubes: copper promote defect of Ni/MgO catalysts / W. Yang, Y. Feng, W. Chu // *Journal of Nanotechnology*. – 2014. – Vol. 8. – P. 547030–547035.
47. *Large scale synthesis and characterization of super-bundle singlewalled carbon nanotubes by water assisted chemical vapour deposition* / Y. Zhao [et al.] // *RSC Advances*. – 2015. – Vol. 5. – P. 30564–30569.
48. *Synthesis of carbon nanotubes by CCVD of natural gas using hydrotreating catalysts* / A.E. Awadallah [et al.] // *Egyptian Journal of Petroleum*. – 2012. – Vol. 21. – P. 101–107.
49. Harris, P.J.F. Solid state growth mechanisms for carbon nanotubes / P.J.F. Harris // *Carbon*. – 2007. – Vol. 45. – P. 229–239.
50. Ding, F. Dislocation theory of chirality-controlled nanotube growth / F. Ding, A.R. Harutyunyan, B.I. Yakobson // *PNAS*. – 2009. – Vol. 106. – P. 2506–2509.
51. Небольсин, В.А. Рост углеродных нанотрубок в процессе каталитического пиролиза углеводородов / В.А. Небольсин, А.Ю. Воробьев, М.Ю. Чайка // *Вестник Воронежского государственного технического университета*. – 2012. – Т. 8. – С. 88–90.
52. Kanzow, H. Formation mechanism of single wall carbon nanotubes on liquid-metal particles / H. Kanzow, A. Ding // *Physics Review B*. – 1999. – Vol. 60. – P. 11180–11186.
53. Ajayan, P.M. Distribution of pentagons and shapes in carbon nanotubes and nanoparticles / P.M. Ajayan, T. Ichihashi, S. Iijima // *Chemical Physics Letters*. – 1993. – Vol. 202. – P. 384–388.
54. *Growth and structure of graphitic tubules and polyhedral particles in arc-discharge* / Y. Saito [et al.] // *Chemical Physics Letters*. – 1993. – Vol. 204. – P. 277–282.
55. Кузнецов, В.П. Общие закономерности формирования углеродных структур и нитевидных кристаллов карбида кремния на поверхности металлического катализатора / В.П. Кузнецов, А.Н. Усольцева, И.Н. Мазов // *Российский химический журнал*. – 2004. – Т. XLVIII. – С. 37–45.
56. *A review of functionalized carbon nanotubes and graphene for heavy metal adsorption from water: Preparation, application, and mechanism* / J. Xu [et al.] // *Chemosphere*. – 2018. – Vol. 195. – P. 351–364.
57. Hou, P.-X. Purification of carbon nanotubes / P.-X. Hou, Ch. Liu, H.-M. Cheng // *Carbon*. – 2008. – Vol. 46. – P. 2003–2025.
58. *Improved fracture toughness of CNTs/SiC composites by HF treatment* / P.Chen [et al.] // *Journal of Alloys and Compounds*. – 2018. – Vol. 730. – P. 42–46.
59. *Microwave-assisted hydrogen releasing from liquid organic hydride over Pt/CNT catalyst: Effects of oxidation treatment of CNTs* / L. Shi [et al.] // *Catalysis Today*. – 2016. – Vol. 276. – P. 121–127.
60. *Correlation of surface treatment, dispersion and mechanical properties of HDPE/CNT nanocomposites* / F.V. Ferreira [et al.] // *Applied Surface Science*. – 2016. – Vol. 389. – P. 921–929.
61. *Reduced diameter distribution of single-wall carbon nanotubes by selective oxidation* / E. Borowiak-Palen [et al.] // *Chemical Physics Letters*. – 2002. – Vol. 363. – P. 567–572.
62. *High-quality single-walled carbon nanotubes from arc-produced soot* / H. Kajiura [et al.] // *Chemical Physics Letters*. – 2002. – Vol. 363. – P. 586–592.
63. *Purification of single-wall carbon nanotubes by ultrasonically assisted filtration* / K.B. Shelimov [et al.] // *Chemical Physics Letters*. – 1998. – Vol. 282. – P. 429–434.
64. *Mechanical purification of single-walled carbon nanotube bundles from catalytic particles* / L. Thien-Nga [et al.] // *Nano Letters*. – 2002. – Vol. 2. – P. 1349–1352.
65. *Purification and characterization of single-wall carbon nanotubes* / I. W. Chiang [et al.] // *The Journal of Physical Chemistry B*. – 2001. – Vol. 105. – P. 1157–1161.
66. Kim, B.-J. Effects of Al interlayer coating and thermal treatment on electron emission characteristics of carbon nanotubes deposited by electrophoretic method / B.-J. Kim, J.-P. Kim, J.-S. Park // *Nanoscale Research Letters*. – 2014. – Vol. 9. – P. 236–242.
67. *Energy gaps in «metallic» single-walled carbon nanotubes* / M. Ouyang [et al.] // *Science*. – 2001. – Vol. 292. – P. 702–706.
68. *Characterization of multiwalled carbon nanotubes prepared by carbon arc cathode deposit* / W.Z. Zhu [et al.] // *Materials Chemistry and Physics*. – 2003. – Vol. 82. – P. 638–647.
69. *Raman spectroscopy of carbon nanotubes* / M.S. Dresselhaus [et al.] // *Physics Reports*. – 2005. – Vol. 409. – P. 47–99.
70. Тимофеев, О.С. Комбинационное рассеяние УНТ, полученных различными методами / О.С. Тимофеев, Н.Г. Чеченин // *Труды XII Межвузовской научной школы молодых специалистов «Концентрированные потоки энергии в космической технике, электронике, экологии и медицине»*, Москва 21–22 ноября 2011. – НИИ-ЯФ МГУ Москва, 2011. – С. 118–123.
71. *Characterization of carbon nanotubes and analytical methods for their determination in environmental and biological samples: A review* / C. Herrero-Latorre [et al.] // *Analytica Chimica Acta*. – Vol. 853. – P. 77–94.
72. Bauhofer, W. A review and analysis of electrical percolation in carbon nanotube polymer

composites / W. Bauhofer, J.Z. Kovacs // *Composites Science and Technology*. – 2009. – Vol. 69. – P. 1486–1498.

73. *Carbon nanotubes: present and future commercial applications* / M.F.L. Volder [et al.] // *Science*. – Vol. 339. – P. 535–539.

74. *Carbon nanotube reinforced small diameter polyacrylonitrile based carbon fiber* / H.G. Chae [et al.] // *Composites Science and Technology*. – 2009. – Vol. 69. – P. 406–413.

75. *Viscoelasticity in carbon nanotube composites* / J. Suhr [et al.] // *Nature Materials*. – 2005. – Vol. 4. – P. 134–137.

76. *Kausar, A. Review of applications of polymer/carbon nanotubes and epoxy / CNT composites* / A. Kausar, I. Rafique, B. Muhammad // *Polymer-plastics Technology and Engineering*. – 2016. – Vol. 55. – P. 1167–1191.

77. *Transparent, conductive carbon nanotube films* / Z. Wu [et al.] // *Science*. – 2004. – Vol. 305. – P. 1273–1276.

78. *Flexible high-performance carbon nanotube integrated circuits* / D.M. Sun [et al.] // *Nature Nanotechnology*. – 2011. – Vol. 6. – P. 156–161.

79. *Magnetic materials based on manganese-zinc ferrite with surface-organized polyaniline coating* / N.E. Kazantseva [et al.] // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. – 2006. – Vol. 301. – P. 155–165.

80. *Thakre, P.R. Electrical and mechanical properties of carbon nanotube / epoxy nanocomposites* / P.R. Thakre, Y. Bisrat, D.C. Lagoudas // *Journal of Applied Polymer Science*. – 2010. – Vol. 116. – P. 191–202.

81. *Carbon nanomaterials for advanced energy conversion and storage* / L. Dai [et al.] // *Small*. – 2012. – Vol. 8. – P. 1130–1166.

82. *Studying the potential release of carbon nanotubes throughout the application life cycle* / A.R. Köhler [et al.] // *Journal of Cleaner Production*. – 2008. – Vol. 16. – P. 927–937.

83. *Nanotube Molecular Wires as Chemical Sensors* / J. Kong [et al.] // *Science*. – 2000. – Vol. 287. – P. 622–625.

84. *Label-free detection of DNA hybridization using carbon nanotube network field-effect transistors* / A. Star [et al.] // *PNAS*. – 2006. – Vol. 103. – P. 921–926.

85. *Filled and glycosylated carbon nanotubes for in vivo radioemitter localization and imaging* / S.Y. Hong [et al.] // *Nature Materials*. – 2010. – Vol. 9. – P. 485–490.

86. *Carbon nanotubes introduced into the abdominal cavity of mice show asbestos-like pathogenicity in a pilot study* / C.A. Poland [et al.] // *Nature Nanotechnology*. – 2008. – Vol. 3. – P. 423–428.

87. *Biocompatible nanoscale dispersion of single-walled carbon nanotubes minimizes in vivo pulmonary toxicity* / G.M. Mutlu [et al.] // *Nano Letters*. – 2010. – Vol. 10. – P. 1664–1670.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках задания 2.64 «Физико-химические основы осаждения и механические свойства углеродных покрытий, содержащих планарные наноструктурные функциональные слои».

Поступила в редакцию 18.03.19.

УДК 533.9.924+621.793.18

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПЛЕНОК ОКСИДА ТАНТАЛА, НАНЕСЕННЫХ МЕТОДОМ РЕАКТИВНОГО МАГНЕТРОННОГО РАСПЫЛЕНИЯ

Н. Вилья, Д.А. Голосов, Т.Д. Нгуен

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

DIELECTRIC PROPERTIES OF TANTALUM OXIDE THIN FILMS DEPOSITED BY REACTIVE MAGNETRON SPUTTERING

N. Villa, D.A. Golosov, T.D. Nguyen

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

Представлены результаты исследований диэлектрических характеристик пленок оксида тантала, нанесенных методом реактивного магнетронного распыления Ta мишени в Ar/O₂ смеси газов. Установлены зависимости диэлектрической проницаемости, тангенса угла диэлектрических потерь, ширины запрещенной зоны, плотности токов утечки от содержания кислорода в Ar/O₂ смеси газов в процессе нанесения пленок. Получены пленки с диэлектрической проницаемостью 12–30 единиц, тангенсом угла диэлектрических потерь 0.01, плотностью токов утечки менее 0.1 А/см² при напряженности электрического поля 2.0×10⁶ В/см и шириной запрещенной зоны 4.5–4.85 эВ.

Ключевые слова: оксид тантала, реактивное магнетронное распыление, МОП структура, диэлектрические свойства.

The article presents the results of studies of the dielectric characteristics of tantalum oxide films deposited by reactive magnetron sputtering of a Ta target in an Ar/O₂ gas mixture. Dependencies of dielectric constant, dielectric loss tangent, band gap, leakage current density on oxygen content in Ar/O₂ gas mixture during film deposition were established. Films with a dielectric constant of 12–30 units, a dielectric loss tangent of 0.01, a leakage current density of less than 0.1 A/cm² at an electric field strength of 2.0×10⁶ V/cm, and band gap of 4.5–4.85 eV, were obtained.

Keywords: tantalum oxide, reactive magnetron sputtering, MOS structure, dielectric properties.

Введение

В последние годы большое внимание уделяется исследованию пленок оксидов переходных металлов с целью поиска новых функциональных материалов для приборов электроники, микроэлектроники, машиностроения и медицины [1]. Среди оксидов переходных металлов особый интерес представляет оксид тантала (Ta₂O₅). Благодаря высокому показателю преломления ($n \approx 2.2$) и низкому оптическому поглощению оксид тантала используется в многослойных интерференционных фильтрах, антиотражающих покрытиях для солнечных элементов и в оптических волноводах [2]. Высокая химическая стойкость, биинертность и возможность создания электретного заряда позволяет использовать пленки оксида тантала в медицине [3]. В частности, весьма эффективно использование оксида тантала в качестве покрытий имплантатов [4]. Оксид тантала обладает сравнительно высокой диэлектрической проницаемостью ($\epsilon \approx 25$), большой шириной запрещенной зоны ($E_g \approx 4.2\text{--}4.5$ эВ) и низкими токами утечки. Поэтому в микроэлектронике оксид тантала считается одной из лучших альтернатив оксиду кремния в приборах металл – оксид – полупроводник (МОП), конденсаторах динамических оперативных запоминающих устройств и радиочастотных идентификационных меток [5].

Для получения пленок оксида тантала применяется ряд методов осаждения, однако наибольшее распространение получил метод реактивного магнетронного распыления [6]–[9]. Метод позволяет без нагрева подложек наносить аморфные и однородные пленки [10] со стабильными электрофизическими свойствами [11]. Исследованию характеристик пленок оксида тантала посвящен ряд статей, однако в данных статьях основное внимание уделяется влиянию процесса нанесения на оптические характеристики пленок [12]–[14]. В тоже время практически отсутствуют статьи, в которых бы анализировалось влияние параметров процесса реактивного магнетронного распыления на диэлектрические характеристики пленок.

Таким образом, целью работы являлось исследование диэлектрических характеристик пленок оксида тантала, нанесенных методом реактивного магнетронного распыления, с целью определения возможности использования данного материала в качестве диэлектрика МОП структур.

1 Эксперимент

Схема экспериментальной установки для нанесения слоев оксида тантала методом реактивного магнетронного распыления приведена на рисунке 1.1. Установка выполнена на базе

вакуумного поста ВУ-2МП. Камера вакуумной установки была оборудована магнетронной распылительной системой (МРС) МАС-80 с мишенью \varnothing 80 мм и ионным источником на основе ускорителя с анодным слоем (ИИ).

Пленки оксида тантала наносились на подложки из высоколегированного монокристаллического кремния ЭКЭС 0.01 (100) и оптического кварца. В ходе экспериментов подложки устанавливались на расстоянии 85 мм от поверхности мишени магнетрона. Камера вакуумной установки откачивалась до остаточного давления 10^{-3} Па и производилась предварительная ионная очистка подложек. Для этого рабочий газ Ar подавался в ионный источник до рабочего давления $2.0 \cdot 10^{-2}$ Па. Время очистки, энергия ионов и ток разряда во всех экспериментах были постоянными и составляли 6 мин (режим вращения подложкодержателя), 500 эВ, 70 мА соответственно.

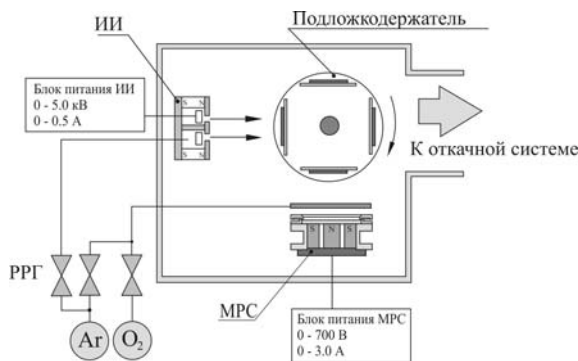


Рисунок 1.1 – Схема экспериментальной установки для нанесения слоев оксида тантала методом реактивного магнетронного распыления

Затем производилось нанесение слоев оксида тантала. Для этого подложки последовательно подводились в зону нанесения. В газораспределительную систему магнетрона подавались рабочие газы. Распыление танталовой мишени (чистота 99.9%) и толщиной 6 мм осуществлялось в Ar/O₂ смеси газов. Содержание кислорода в смеси газов изменялось от 0 до 100% при общем расходе 60 мл/мин. При этом давление в камере составляло 0.05–0.06 Па. Для поддержания заданного расхода газов использовались автоматические регуляторы расхода газа РРГ-1 (РРГ). Питание МРС осуществлялось с помощью источника питания постоянного тока мощностью 1.5 кВт с возможностью работы в режимах стабилизации тока или мощности. Ток разряда магнетрона во всех экспериментах поддерживался постоянным и составлял 1.5 А. При этом напряжение разряда в зависимости от концентрации кислорода изменялось от 280 до 490 В. Толщина нанесенных пленок регулировалась временем нанесения и составляла порядка 100 нм.

Толщина нанесенных слоев определялась с помощью оптического интерферометрического

профилометра ПОИ-08. Диэлектрические характеристики пленок оксида тантала измерялись на тестовых МОП структурах. Для этого на нанесенную пленку оксида тантала методом ионно-лучевого распыления через маску наносился верхний Ni электрод. Площадь обкладок конденсатора составляла 0.096 мм². Емкость и тангенс угла диэлектрических потерь измерены с использованием измерителя иммитанса Е7-20 на частотах 25–10⁶ Гц. Значения диэлектрической проницаемости рассчитывались исходя из толщины диэлектрического слоя и емкости конденсаторной структуры. Ширина оптической запрещенной зоны нанесенных пленок определялась по краю собственного поглощения пленок [15]. Для этого пленки наносились на подложки из оптического кварца. Спектры оптического пропускания в диапазоне 200–900 нм получены с помощью спектрофотометра Проскан МС-121.

2 Результаты и обсуждение

Получены зависимости напряжения разряда МРС от процентного содержания кислорода в Ar/O₂ смеси газов Γ_{O_2} (рисунок 2.1). Характеристики получены в режиме стабилизации тока разряда $I_t = 1.5$ А. Как видно из рисунка, при увеличении содержания кислорода в Ar/O₂ смеси газов напряжение разряда первоначально увеличивалось и достигало максимума 470 В при $\Gamma_{O_2} \approx 55\%$. Далее напряжение разряда снижалось до 300 В при $\Gamma_{O_2} \approx 75\%$ и далее практически не зависело от концентрации кислорода.

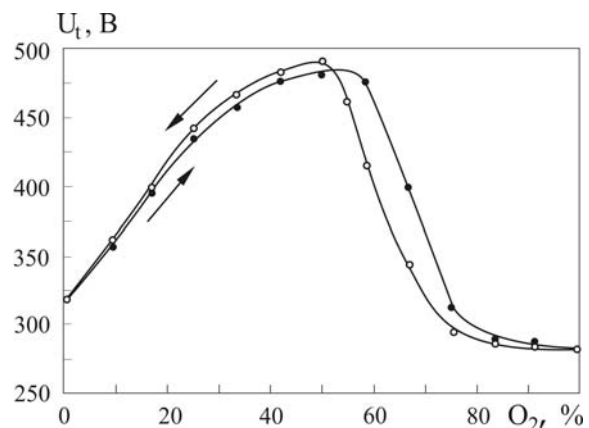


Рисунок 2.1 – Зависимость напряжения разряда от процентного содержания кислорода при распылении тантала в в Ar/O₂ смеси газов

Аналогичное поведение имела зависимость скорости нанесения пленок от концентрации кислорода в Ar/O₂ смеси газов (рисунок 2.2). Первоначально при увеличении Γ_{O_2} скорость нанесения увеличивалась с 0.7 нм/с при распылении в среде Ar до 1.65 нм/с при концентрации кислорода 30%. При дальнейшем увеличении концентрации O₂ скорость нанесения снижалась до 0.18 нм/с при концентрации кислорода 75%

и далее практически не зависела от концентрации кислорода.

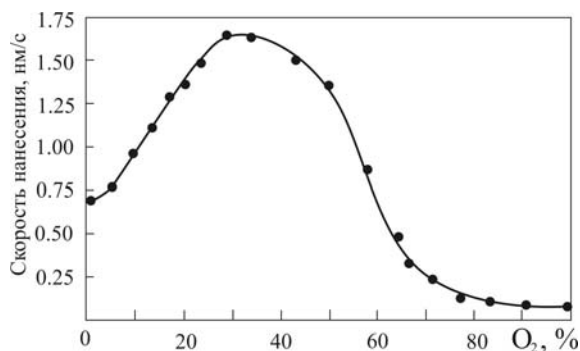


Рисунок 2.2 – Зависимость скорости нанесения пленок оксида тантала от процентного содержания кислорода в Ag/O₂ смеси газов

Анализ зависимостей напряжения разряда и скорости нанесения от G_{O_2} позволяет выделить три моды процесса: металлическую, переходную и реактивную. При этом имеются два процесса, которые влияют на напряжение разряда и скорость нанесения. Это снижение сечения ионизации в плазме магнетронного разряда при увеличении концентрации кислорода в Ag/O₂ смеси газов и изменение коэффициента ионно-электронной эмиссии поверхности мишени при образовании оксидной пленки на ее поверхности.

При первоначальном увеличении содержания кислорода от 0 до 30% происходит увеличение напряжения разряда и скорости нанесения. На данном участке система находится в «металлической» моде. Поверхность мишени свободна от окисной пленки и практически весь кислород поглощается растущей пленкой. Увеличение напряжения связано с уменьшением сечения ионизации при ионизации кислорода. Скорость нанесения увеличивается за счет увеличения коэффициента распыления тантала при увеличении напряжения разряда и увеличения объема пленки при образовании соединения. При дальнейшем увеличении G_{O_2} напряжение разряда продолжает расти, но скорость нанесения начинает снижаться. На данном участке на поверхности мишени начинает образовываться окисная пленка с низким содержанием кислорода. Это приводит к снижению коэффициента распыления даже при повышении напряжения разряда. На втором участке (от 55 до 70% O₂) напряжение разряда практически линейно снижается с 480 В до 300 В. Скорость нанесения также снижается. На зависимости напряжения разряда от концентрации кислорода присутствует гистерезис характеристик. При одном и том же значении потока кислорода система может находиться в двух устойчивых состояниях. На данном участке система находится в переходной моде процесса (переходит от металлической моды к реактивной). Снижение напряжения разряда является следствием

образования оксидной пленки на поверхности мишени, которая имеет более высокий по сравнению с металлическим танталом коэффициент ионно-электронной эмиссии. При этом данный процесс становится доминирующим по сравнению со снижением сечения ионизации. Снижение скорости нанесения также является следствием образования оксидной пленки на поверхности мишени, которая имеет более низкий коэффициент распыления. На третьем участке (более 70% O₂) напряжение разряда и скорость нанесения практически не зависят от концентрации кислорода. На поверхности мишени сформировалась пленка оксида, и система находится в реактивной моде процесса. На данном участке также отсутствует гистерезис характеристик.

Проведены исследования влияния параметров процесса реактивного магнетронного распыления на диэлектрические характеристики пленок оксида тантала. Пленки наносились при различной концентрации кислорода в Ag/O₂ смеси газов в режиме стабилизации тока разряда $I_t = 1.5$ А. Частотные зависимости диэлектрической проницаемости ϵ и тангенса угла диэлектрических потерь $\text{tg}\phi$ представлены на рисунках 2.3 и 2.4. Установлено, что при низких концентрациях кислорода нанесенные пленки имели высокую электрическую проводимость. Формирование диэлектрических пленок наблюдалось при концентрации кислорода более 40%. Диэлектрическая проницаемость нанесенных пленок в диапазоне частот 25–10⁶ Гц практически не зависела от частоты и незначительно снижалась при увеличении частоты (рисунок 2.3). При концентрации кислорода 41.7% получены пленки с диэлектрической проницаемостью более 30 единиц (рисунок 2.3, кривая *a*). Однако данные пленки имели высокие потери на низких частотах (до 1 кГц) и на высоких частотах (более 200 кГц). В среднем диапазоне частот $\text{tg}\phi$ составлял 0.018–0.020.

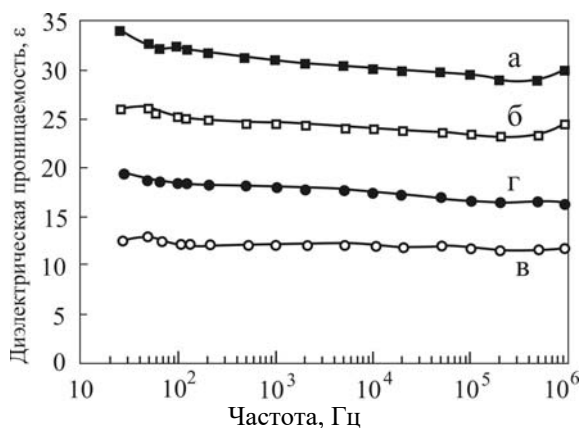


Рисунок 2.3 – Частотные зависимости диэлектрической проницаемости пленок оксида тантала, нанесенных при различном содержании кислорода в Ag/O₂ смеси газов: *a* – 41.7%, *б* – 66.6%, *в* – 83.3%, *г* – 100%

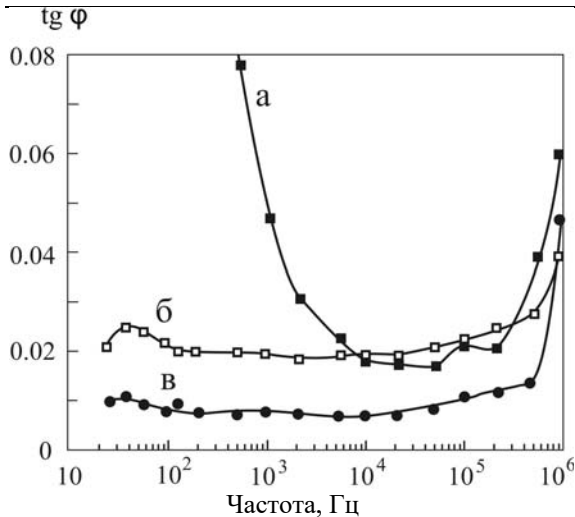


Рисунок 2.4 – Частотные зависимости тангенса угла диэлектрических потерь пленок оксида тантала, нанесенных при различном содержании кислорода в Ar/O₂ смеси газов: а – 41.7%, б – 50%, в – 100%

Увеличение концентрации кислорода приводило к снижению ϵ (рисунок 2.5). При концентрации кислорода 75% диэлектрическая проницаемость пленок достигала минимума $\epsilon = 12$ и далее незначительно увеличивалась до 14 единиц при распылении тантала в атмосфере O₂. Увеличение концентрации кислорода также приводило к снижению уровня диэлектрических потерь пленок (рисунок 2.6). Так при концентрации кислорода более 50% тангенс угла диэлектрических потерь на частоте 1 кГц составлял 0.02 и снижался ниже 0.01 при распылении на чистом кислороде. Однако на высоких частотах (1 МГц) пленки имели более высокие значения диэлектрических потерь ($\text{tg}\phi = 0.04\text{--}0.05$).

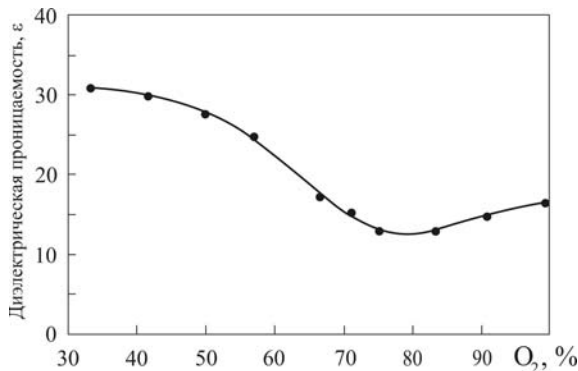


Рисунок 2.5 – Зависимость диэлектрической проницаемости пленок оксида тантала на частоте 1 МГц от содержания кислорода Ar/O₂ смеси газов

Установлено, что оптическая ширина запрещенной зоны E_g пленок, нанесенных при низких концентрациях кислорода (до 30%) и имеющих электрическую проводимость, не превышала

2.5 эВ и резко увеличивалась до 4.5 эВ при концентрации кислорода 40% (рисунок 2.7). При дальнейшем увеличении концентрации кислорода E_g незначительно увеличивалась до 4.85 эВ при нанесении пленок в атмосфере кислорода. Полученные значения ширины запрещенной зоны превышают E_g , сообщаемое для кристаллических фаз оксида тантала, E_g которых находится в пределах 4.2–4.5 эВ [16]–[18]. Данные значения E_g , по-видимому, связаны с аморфной структурой нанесенных пленок. Для аморфных пленок значения ширины запрещенной зоны могут иметь более высокие значения, и чем более аморфен материал, тем больше наблюдаемая ширина запрещенной зоны [16], [19]–[21].

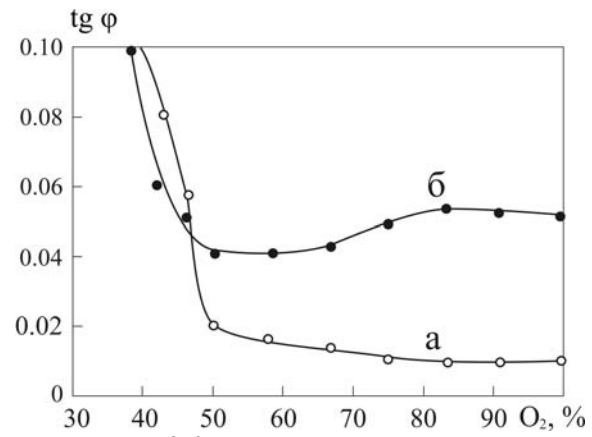


Рисунок 2.6 – Зависимость тангенса угла диэлектрических потерь пленок оксида тантала от концентрации кислорода в Ar/O₂ смеси газов на частоте 1 кГц (а) и 1 МГц (б)

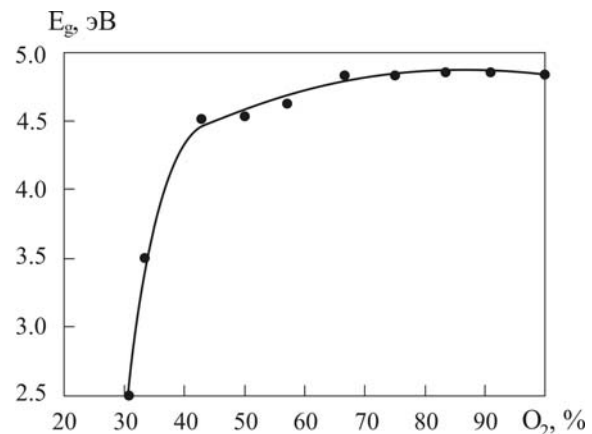


Рисунок 2.7 – Зависимость ширины запрещенной зоны пленок оксида тантала от процентного содержания кислорода в Ar/O₂ смеси газов

Плотность токов утечки J_L пленок также зависела от концентрации кислорода в Ar/O₂ смеси газов (рисунок 2.8). При отсутствии напряжения постоянного смещения, пленки, нанесенные при концентрации кислорода менее 40%, показывали большие токи утечки (более 10^{-3} А/см²). При больших концентрациях кислорода ($\Gamma_{O_2} > 40\%$)

токи утечки снижались до 10^{-7} А/см² и далее при дальнейшем увеличении концентрации кислорода практически не зависели от Γ_{O_2} .

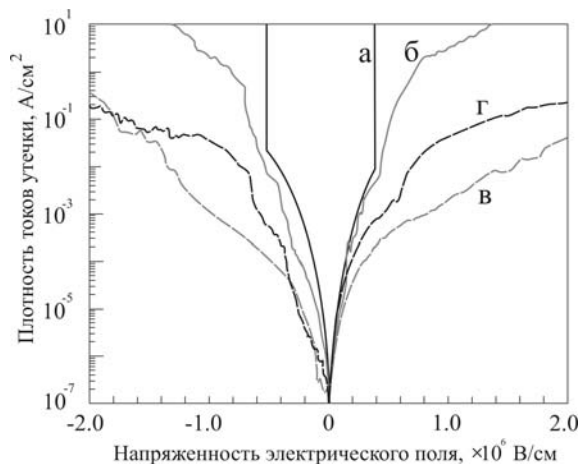


Рисунок 2.8 – Зависимость плотности токов утечки от напряженности электрического поля пленок оксида тантала, нанесенных при различной концентрации кислорода в Ar/O₂ смеси газов: а – 33%, б – 64%, в – 77%, г – 100%

При приложении постоянного смещения, для пленок, нанесенных при Γ_{O_2} менее 40%, токи утечки резко увеличивались и при напряженности электрического поля $(2-10) \cdot 10^5$ В/см происходил пробой диэлектрика. При увеличении концентрации кислорода отмечалось уменьшение J_L при больших напряженностях поля. Пробой диэлектрика не происходил при напряженности электрического поля $E = 2 \cdot 10^6$ В/см. При Γ_{O_2} более 70% токи утечки составили $10^{-2}-10^{-1}$ А/см² при $E = 2 \cdot 10^6$ В/см. При концентрациях кислорода около 100% отмечалось некоторое увеличение J_L . На основе полученных данных можно сделать вывод, что в отличие от ряда переходных металлов [22]–[24] при реактивном распылении тантала образование диэлектрических пленок оксида тантала происходит при сравнительно больших содержаниях кислорода в Ar/O₂ смеси газов (более 40%). Разряд магнетрона устойчиво существует даже при распылении танталовой мишени в атмосфере чистого кислорода. Образование диэлектрических пленок с низкими значениями диэлектрических потерь происходило при содержании кислорода в Ar/O₂ смеси газов более 50%. Т. е. оксид тантала формировался только в переходной или реактивной моде процесса. При увеличении концентрации кислорода в Ar/O₂ наблюдалось снижение ϵ , $\text{tg}\phi$ и увеличение E_g . Однако при переходе в реактивную моду процесса резко уменьшалась скорость нанесения. Поэтому для нанесения пленок оксида тантала более предпочтительными являются переходные режимы процесса (от 50 до 70% O₂), которые совмещают высокие скорости нанесения и высокие диэлектрические характеристики пленок.

Заключение

Проведены исследования диэлектрических свойств пленок оксида тантала, нанесенных методом реактивного магнетронного распыления. Установлено, что в отличие от ряда переходных металлов при реактивном распылении тантала образование диэлектрических пленок происходит при сравнительно больших содержаниях кислорода в Ar/O₂ смеси газов (более 40%). При концентрации кислорода 50–100% получены пленки с диэлектрической проницаемостью 12–30 единиц, тангенсом угла диэлектрических потерь 0.01, плотностью токов утечки при напряженности электрического поля $2.0 \cdot 10^6$ В/см менее 0.1 А/см² и шириной запрещенной зоны 4.5–4.85 эВ. Полученные характеристики позволяют использовать пленки оксида тантала, нанесенные методом реактивного магнетронного распыления, в качестве диэлектрика МОП структур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берлин, Е.В. Получение тонких пленок реактивным магнетронным распылением / Е.В. Берлин, Л.А. Сейдман. – М.: Техносфера, 2014. – 255 с.
2. *Tantalum pentoxide (Ta₂O₅) thin films for advanced dielectric applications* / С. Chaneliere [et al.] // *Materials Science and Engineering: R: Reports*. – 1998. – Vol. 22, № 6. – P. 269–322.
3. *Tantalum pentoxide ceramic coatings deposition on Ti4Al6V substrates for biomedical applications* / N. Donkov [et al.] // *Problems At. Sci. Technol.* – 2011. – P. 131–133.
4. *Влияние имплантатов с отрицательным электретным покрытием Ta₂O₅ на процессы репаративного тендогенеза в эксперименте и первый опыт их клинического применения* / А.Е. Комлев [и др.] // *Военно-медицинский журнал*. – 2009. – Т. 330, Вып. 4. – С. 70–72.
5. *Review and perspective of high-k dielectrics on silicon* / S. Hall [et al.] // *J. of Telecommunications and Information Technology*. – 2007. – Vol. 2. – P. 33–43.
6. *Hollerweger, R. Magnetic field strength influence on the reactive magnetron sputter deposition of Ta₂O₅* / R. Hollerweger // *J. Phys. D: Appl. Phys.* – 2013. – № 46. – P. 1–7.
7. *Jagadeesh Chandra, S.V. Effect of substrate temperature on the structural, optical and electrical properties of dc magnetron sputtered tantalum oxide films* / S.V. Jagadeesh Chandra // *Applied Surface Science*. – 2008. – Vol. 254, № 7. – P. 1953–1960.
8. *Riekkinen, T. Reactively sputtered tantalum pentoxide thin films for integrated capacitors* / T. Riekkinen, J. Molarius // *Microelectronic Engineering*. – 2003. – Vol. 70, № 2–4. – P. 392–397.
9. *Optical properties of amorphous and polycrystalline tantalum oxide thin films measured by spectroscopic ellipsometry from 0.03 to 8.5 eV* / E. Franke [et al.] // *Thin Solid Films*. – 2001. – Vol. 388, № 1–2. – P. 283–289.

10. *Structures and properties of a Ta₂O₅ thin film deposited by dc magnetron reactive sputtering in a pure O₂ atmosphere* / Ch. Guoping [et al.] // *Vacuum*. – 1990. – Vol. 41, № 4–6. – P. 1204–1206.
 11. *Ta–O phonon peaks in tantalum oxide films on Si* / H. Ono [et al.] // *Thin Solid Films*. – 2001. – Vol. 381, № 1. – P. 57–61.
 12. *Частотная дисперсия пленок оксида тантала* / А.А. Барыбин [и др.] // *Письма ЖТФ*. – 2006. – Т. 32, Вып. 2. – С. 61–66.
 13. *Properties of tantalum oxide thin films grown by atomic layer deposition* / K. Kukli [et al.] // *Thin Solid Films*. – 1995. – Vol. 260. – P. 135–142.
 14. *Оптические свойства пленок Ta₂O₅ в коротковолновой области спектра* / О.Д. Вольпьян [и др.] // *Прикладная физика*. – 2012. – Т. 4. – С. 47–53.
 15. *Электрические и оптические свойства пленок оксида цинка, нанесенных методом ионно-лучевого распыления оксидной мишени* / А.П. Достанко [и др.] // *ФТП*. – 2014. – Т. 48, № 9. – С. 1274–1279.
 16. *Structural and Electrical Properties of Ta₂O₅ Grown by the Plasma-Enhanced Liquid Source CVD Using Penta Ethoxy Tantalum Source* / P.A. Murawala [et al.] // *Japanese Journal of Applied Physics*. – 1993. – Vol. 32. – P. 368–375.
 17. *Ramprasad, R. First principles study of oxygen vacancy defects in tantalum pentoxide* / R. Ramprasad // *Journal of Applied Physics*. – 2003. – Vol. 94. – P. 5609–5612.
 18. *Sawada, H. Electronic structure of oxygen vacancy in Ta₂O₅* / H. Sawada, K. Kawakami // *Journal of Applied Physics*. – 1999. – Vol. 86. – P. 956–1001.
 19. *Nashed, R. Unravelling the interplay of crystal structure and electronic band structure of tantalum oxide (Ta₂O₅)* / R. Nashed // *Physical Chemistry Chemical Physics*. – 2013. – Vol. 15. – P. 1352–1357.
 20. *Knausenberger, W.H. Selected Properties of Pyrolytic Ta₂O₅ Films* / W.H. Knausenberger, R.N. Tauber // *J. Electrochem. Soc.* – 1973. – Vol. 120. – P. 927–931.
 21. *Optical Properties of Tantalum Oxide Films on Silicon* / A.G. Revesz [et al.] // *J. Electrochem. Soc.* – 1976. – Vol. 123. – P. 889–894.
 22. *Диэлектрические характеристики пленок оксида гафния* / Д.А. Голосов [и др.] // *Российские нанотехнологии*. – 2017. – Т. 12, № 9–10. – С. 63–68.
 23. *Реактивные методы осаждения пленок оксидов титана (обзор)* / Д.Б. Золотухин [и др.] // *Успехи прикладной физики*. – 2017. – Т. 5, № 5. – С. 442–452.
 24. *Формирование пленок оксида циркония методом реактивного магнетронного распыления* / Н. Вилья [и др.] // *Материалы 12-й международной конференции «Взаимодействие излучений с твердым телом»*: Минск, Беларусь, 19–22 сентября 2017 г. – С. 438–440.
- Исследования выполнены при финансовой поддержке БРФФИ в рамках научного проекта № T18P-092 и РФФИ в рамках научного проекта № 18-58-00004 Бел а.*

Поступила в редакцию 10.04.19.

УДК 544.556.1:546.26:620.3

МОЛЕКУЛЯРНАЯ СТРУКТУРА ОДНОСЛОЙНЫХ И БИСЛОЙНЫХ ПОКРЫТИЙ, ПЕРСПЕКТИВНЫХ ПРИ ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИИ В ПРОЦЕССАХ ОСТЕОСИНТЕЗА

Лю Имин¹, А.В. Рогачев¹, М.А. Ярмоленко^{1,2}, А.А. Рогачев¹,
Цзян Сяохун², А.С. Руденков¹

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

²Нанкинский университет науки и технологий

MOLECULAR STRUCTURE OF SINGLE-LAYER AND BI-LAYER COATINGS, WHICH ARE PERSPECTIVE WHEN USED IN OSTEOSYNTHESIS PROCESSES

Liu Yiming¹, A.V. Rogachev¹, M.A. Yarmolenko^{1,2}, A.A. Rogachev¹,
Jiang Xiaohong², A.S. Rudenkov¹

¹F. Scorina Gomel State University

²Nanjing University of Science and Technology

Определены особенности формирования молекулярной структуры отдельных слоев, входящих в состав многослойной покрытий, обработка которых приводит к формированию гидроксиапатита (ГА). Оценена эффективность использования в качестве отдельного слоя многослойной системы покрытия полиметилсилсесквиоксана (PMSQ). Показано, что обменные процессы между многослойной системой и буферным раствором ответственны за разрушение сшитого кремнийорганического слоя. Установлено образование фосфатов кальция и цинка при взаимодействии этидроната и оксида фосфора (V) с соответствующими металлами.

Ключевые слова: гидроксиапатит, полиметилсилсесквиоксан, этидронат, электронно-лучевое диспергирование.

The features of the formation of the molecular structure of the individual layers that make up the multilayer coatings, the processing of which leads to the formation of hydroxyapatite (HA). The efficiency of using polymethylsilsequioxane (PMSQ) as a separate layer of a multilayer coating system is estimated. It is shown that the exchange processes between the multilayer system and the buffer solution are responsible for the destruction of the crosslinked organosilicon layer. Established the formation of calcium phosphates and zinc in the interaction of etidronate and phosphorus oxide (V) with the corresponding metals.

Keywords: hydroxyapatite, polymethylsilsequioxane, etidronate, electron-beam dispersion.

Введение

В работе [1] впервые показана возможность активации процесса образования гидроксиапатита в тонких многослойных покрытиях, нанесенных из газовой фазы. Покрытие представляло последовательно осажденные слои магния, кальция, оксида фосфора и кремнийорганической смолы. В биологической среде, химический состав которой соответствовал составу крови, многослойная система трансформировалась в ГА. Структура нанесенного слоя ответственна за присущие покрытию черты кальций-магниевых сплавов, биостекло и гидроксиапатита. Следует отметить, что это была первая попытка реализации в одном тонком покрытии преимуществ существующих и сильно различающихся подходов иницирования роста костной ткани. Поэтому многие вопросы технического и санитарно-гигиенического характера (адгезионная прочность, отсутствие токсичности и др.) зачастую опускались. В многослойной системе функцией верхнего кремнийорганического слоя являлась защита нижерасположенных слоев от интенсивного взаимодействия с биологической средой и иницирование зарождения гидроксиапатита.

Следует отметить, что изучению особенностей зарождения частиц гидроксиапатита посвящено значительное количество работ [2]–[5]. Все они отмечают, что отрицательный поверхностный заряд способствует образованию вблизи него кластеров положительно заряженных ионов кальция. По этой причине, на первый взгляд, вполне обоснованным является нанесение полимерного или кремнийорганического покрытия в качестве верхнего слоя. Эффективность использования композиционных полимер – ГА материалов при создании объемных биоматериалов не подвергается сомнению [6], [7]. Полимерному компоненту сравнительно легко можно придать дополнительные антибактериальные свойства [8]. Однако к материалам, наносимым на поверхность интрамедуллярных имплантатов, предъявляется ряд дополнительных требований. В первую очередь высокая стойкость к истиранию [9]. В противном случае при контакте поверхности интрамедуллярного имплантата с костной тканью произойдет полное разрушение нанесенного слоя. Другим требованием является отсутствие токсичности материала покрытия. Недостатком

многослойного покрытия, описанного в работе [1], с кремнийорганическим слоем на основе полиметилфенилсилоксановой смолы K42 является наличие в структуре смолы бензольных колец. Полимерные покрытия, осаждаемые потоком электронов, действительно эффективны для иницирования роста ГА в многослойных системах. Однако в силу относительно низкой молекулярной массы в жидких средах они могут самопроизвольно разрушаться. Низкая износостойкость полимерных покрытий не позволяет рекомендовать их для нанесения на поверхность интрадуральных имплантатов.

В качестве верхнего защитного слоя может быть использован слой фосфата цинка. Следует отметить, что фосфат цинка уже длительное время используется в стоматологии и не является токсичным для организма человека [10]. Соединения цинка характеризуются антибактериальной и антифунгальной активностью, высокой биосовместимостью, биоразлагаемостью, коррозионной стойкостью [11]. При этом многими исследователями отмечено снижение кристалличности ГА в присутствии цинка [12], [13]. Образование фосфата цинка осуществляется самопроизвольно при взаимодействии слоя Zn с ортофосфорной кислотой. Появление ортофосфорной кислотой в многослойной системе является результатом взаимодействия слоя P_2O_5 с атмосферной влагой. Таким образом, формирование многослойной системы с верхним слоем фосфата цинка может осуществляться без использования жидких растворных сред и высокоэнергетического воздействия на имплантат.

Верхний кремнийорганический слой на основе K42 может быть заменен полиметилсилесквиоксаном (PMSQ). Для PMSQ характерно отсутствие в молекулярной структуре бензольных колец, высокие барьерные свойства, биоинертность. Полимер активно используется при изготовлении различных косметологических средств, что связано с его биоинертностью. Однако нанесение покрытий на основе PMSQ с использованием потока энергии является технологически сложной и, как правило, нерешаемой задачей. Это связано с тем, что энергетическое воздействие на полимер сопровождается формированием сшитой, стойкой к деструкции структуры [14]–[16]. Возможность формирования покрытий на основе PMSQ следует из результатов выполненных ранее исследований по формированию магний содержащих кремнийорганических покрытий [17].

Следует отметить, что в работе [1] установлено образование бисфосфоната при взаимодействии кремнийорганического слоя с фосфорсодержащими кислотами. Процесс является крайне интересным, однако сложно прогнозируемым для практической реализации. Бисфосфонаты уже длительное время используются в практической

медицине для повышения плотности костной ткани [18], лечения раковых заболеваний костей [19]. В настоящее время бисфосфонаты вводят непосредственно в зону имплантации, как правило, в составе гидроксипатитовых слоев [20], [21]. В этой связи в качестве одного из слоев многослойной системы предложено использовать этидронат.

Таким образом, первоочередными задачами синтеза покрытий, применяемых при активации процессов остеосинтеза, и составляющих основную задачу данного исследования, являются установление влияния электронно-лучевого диспергирования этидроната на молекулярную структуру осаждаемого слоя, определение влияния P_2O_5 и термообработки на его молекулярную структуру, изучение особенностей его химического взаимодействия с Zn и Ca, установление зависимости молекулярной структуры покрытий на основе PMSQ от параметров нанесения.

1 Методика эксперимента

Покрытия осаждали из газовой фазы по методике, описанной в работе [1]. Тонкослойные слоевые системы формировали в едином технологическом цикле без разгерметизации вакуумной камеры. Эффективная толщина покрытий контролировалась непосредственно в процессе нанесения с помощью кварцевого измерителя толщины (QCM). Сравнительному анализу подвергались только покрытия с одинаковой эффективной толщиной образующих их слоев.

В качестве мишеней были использованы порошки магния (Sigma-Aldrich), цинка (dust, Sigma-Aldrich), гидрида кальция (CaH_2 , Sigma-Aldrich), оксида фосфора (P_2O_5 , Sigma-Aldrich), полиметилсилесквиоксана (XJY Silicones), этидроната (1-Hydroxyethylidene-1,1-diphosphonic acid, Merger). Выбор этидроната был обусловлен его наиболее простой молекулярной структурой.

В качестве подложек при проведении ИК-спектроскопии использовали пластины NaCl. Объектами исследования были однослойные покрытия этидроната, P_2O_5 и дислойные системы этидронат + P_2O_5 , этидронат + Zn, Zn + P_2O_5 , Ca + этидронат, Ca + P_2O_5 , PMSQ. Термообработка покрытий осуществлялась в атмосфере воздуха при температуре 200° С в течение 60 минут. Покрытия, исследуемые в работе, в дальнейшем планируется использовать для нанесения на поверхность металлических и полимерных имплантатов. Температура обработки определяет возможность реализации этого условия на практике. Совмещение температуры термообработки с температурой стандартной стерилизации медицинских изделий позволяет упростить технологию модифицирования имплантатов.

Молекулярную структуру наносимых покрытий исследовали на ИК-Фурье спектрофотометре Vertex-70 (Bruker). Сканирование проводили в диапазоне 4000–300 cm^{-1} с разрешением 4 cm^{-1} .

2 Результаты исследований

Установлено, что тонкий слой этидроната, нанесенный электроннолучевым диспергированием, интенсивно сорбирует влагу из атмосферы. На это указывает интенсивное поглощение в области валентных колебаний ОН групп и деформационных колебаний молекул воды при 1645 см^{-1} (рисунок 2.1). Отжиг сопровождается потерей покрытием адсорбированной влаги. При этом при хранении отожженный слой вновь легко сорбирует молекулы воды из атмосферы воздуха. В ИК спектрах этидроната фиксируется поглощение в диапазоне $(2470\div 2400)\text{ см}^{-1}$, обусловленное валентными колебаниями Р–Н связей. Результат указывает на частичное разложение этидроната под действием потока электронов. Отжиг тонкого слоя, по-видимому, также способен инициировать разложение соединения. На процесс термически инициируемого разложения этидроната указывает рост оптической плотности полосы при 1066 см^{-1} $\nu(\text{PO}_4^{3-})$. Установление степени подобного разложения требует проведения дополнительных исследований. Отжиг сопровождается появлением в ИК спектре выраженных полос при 1225 и 1120 см^{-1} соотносимых с поглощением свободных и ассоциированных Р=О групп соответственно. Одновременно в

области колебаний Р–ОН связей фиксируется практически полное исчезновение полосы поглощения при 998 см^{-1} и интенсивный рост поглощения при 895 см^{-1} . Отмеченные изменения в ИК спектре обусловлены процессами структурообразования в тонком слое. Десорбция молекул воды сопровождается перераспределением водородных связей. Структурные изменения снижают степень упорядоченности тонкого слоя.

Особенности молекулярной структуры покрытий P_2O_5 и ее изменения при отжиге иллюстрируются ИК-спектрами, представленными на рисунке 2.1. Поглощение при 1260 см^{-1} можно соотнести с валентными колебаниями Р=О, при 1080 и 990 см^{-1} – PO_4^{3-} и PO_3^{2-} соответственно, поглощение при 888 (902) см^{-1} – с поглощением Р–ОН связей.

Следует отметить, что в области $(970\text{--}915)\text{ см}^{-1}$ располагаются полосы поглощения РОР связей. Термообработка покрытия не приводит к заметному изменению оптической плотности полосы поглощения при 900 см^{-1} , что имело бы место при образовании пирофосфатов. Таким образом, соотношение полосы при 902 см^{-1} с поглощением Р–ОН связей является верным. Покрытия на основе P_2O_5 интенсивно сорбируют влагу из атмосферы воздуха. В процессе отжига тонкий слой

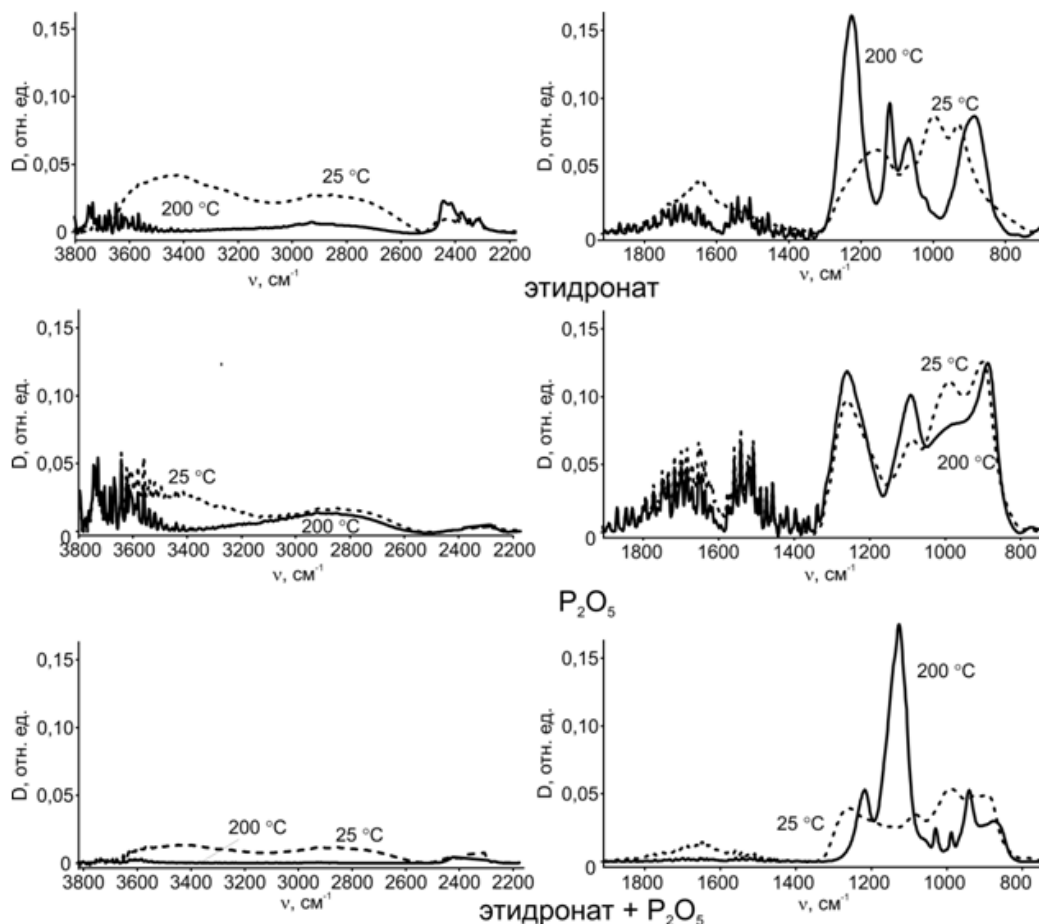
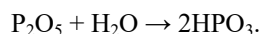
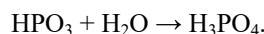


Рисунок 2.1 – ИК-спектры отожженных и неотожженных покрытий на основе оксида фосфора (V) и этидроната

теряет влагу. Это подтверждается снижением оптических плотностей полос поглощения в области $(3600 \div 3000) \text{ см}^{-1}$. В данном диапазоне волновых чисел фиксируются валентные колебания ОН групп. Процессом десорбции влаги может быть объяснено повышение оптической плотности полосы колебаний $\text{P}=\text{O}$. Анализ ИК-спектров позволяет предположить, что при взаимодействии оксида фосфора (V) с атмосферной влагой происходит образование метафосфорной кислоты:



В дальнейшем при нагреве покрытия метафосфорная кислота трансформируется в ортофосфорную:



Следует отметить возможность образования пирофосфорной кислоты при отжиге покрытия:



Однако, в отсутствие продолжительной выдержки при температуре 200°C , данный процесс, как ранее было отмечено, зафиксирован не был. Таким образом, электронно-лучевое воздействие на оксид фосфора не инициирует заметного изменения его структуры.

Термообработка покрытий этидронат + P_2O_5 сопровождается десорбцией влаги из объема тонкого слоя (исчезновение полос поглощения валентных и деформационных колебаний ОН групп молекул воды) (рисунок 2.1). При отжиге двухслойной системы в ИК спектре наблюдается интенсивное снижение оптической плотности полосы при 1250 см^{-1} и рост оптической плотности полосы при 1128 см^{-1} . В низкочастотной области фиксируется резкое снижение оптической плотности полосы при 890 см^{-1} с одновременным расщеплением ее на составляющие при 943 и 875 см^{-1} . При этом для двухслойной системы не характерно появление заметного поглощения при 1080 и 2415 см^{-1} , что свидетельствовало бы о значительном разложении бисфосфоната. Спектроскопические исследования указывают на заметное повышение структурной упорядоченности слоя этидроната в присутствии оксида фосфора (V) в процессе термической десорбции влаги. Это, по-видимому, является основной причиной повышения стойкости этидроната к термодеструкции.

При формировании двухслойной системы $\text{Zn} +$ этидронат основное внимание уделялось исследованию возможности образования фосфата цинка и влияния металла на процессы структурирования и деструкции этидроната. Независимо от термообработки, в ИК спектрах покрытий наиболее интенсивной является полоса поглощения при 1068 см^{-1} ($(\text{PO}_4)^{3-}$) (рисунок 2.2). Данный факт является одним из доказательств образования фосфата цинка. Образование фосфата металла не требует термической активации процесса. Влияние термообработки проявляется

в появлении поглощения при 1215 и 850 см^{-1} . Таким образом, образование фосфата цинка не препятствует процессам структурирования лекарственного соединения.

В отличие от двухслойной системы $\text{Zn} +$ этидронат в ИК спектре $\text{Zn} + \text{P}_2\text{O}_5$ отсутствует выраженное поглощение, указывающее на образование фосфата цинка (рисунок 2.2). Образование фосфата цинка при использовании P_2O_5 является термоиницируемым процессом. Помимо появления интенсивной полосы поглощения при 1100 см^{-1} , отжиг оказывает заметное влияние на значения оптических плотностей полос при 1240 и 1000 см^{-1} . Отмеченное указывает на процессы структурирования оксида фосфора с образованием более упорядоченной структуры. Это происходит на фоне десорбции влаги с объема тонкого слоя.

Установлено, что взаимодействие этидроната с кальциевым слоем приводит к образованию фосфатов (рисунок 2.3). На это указывает присутствие в спектре интенсивной полосы поглощения при 1065 см^{-1} . Интерес представляет сравнение ИК спектров покрытий этидроната, $\text{Zn} +$ этидронат, $\text{Ca} +$ этидронат подвергнутых термической обработке. Установлено, что слой кальция оказывает заметно меньшее влияние на процесс структурирования этидроната, чем цинк. Изменения, фиксируемые при отжиге двухслойной системы $\text{Ca} +$ этидронат и покрытия этидроната, схожи. В частности, отжиг приводит к появлению в ИК спектрах интенсивного поглощения при 1225 см^{-1} .

В отличие от этидроната, слой P_2O_5 на поверхности кальция, не приводит к интенсивному образованию фосфата (рисунок 2.3). В ИК спектре $\text{CaH}_2 + \text{P}_2\text{O}_5$ поглощение, соотносимое с PO_4^{3-} , не является выраженным. Только термообработка сопровождается ростом оптической плотности полосы поглощения при 1090 см^{-1} , указывающей на формирование фосфата. Изменения в ИК спектре аналогичны изменениям ИК спектра при отжиге двухслойной системы $\text{Zn} + \text{P}_2\text{O}_5$.

Нанесение покрытий PMSQ осуществляли с учетом результатов, изложенных в работе [17]. Согласно сделанным в работе выводам, нанесение потоком электронов сшивающихся кремнийорганических слоев возможно только при использовании магния в качестве компонента мишени. Действительно, введение в мишень магния позволило сформировать кремнийорганический слой.

Согласно ИК спектроскопии покрытия в сравнении с исходным порошком PMSQ характеризуются существенно более высоким содержанием сшитых регулярных структур [22]. На это указывают более низкие значения соотношения $D_{1020} / D_{1135} = 2.58$. Это согласуется с выводами об интенсивных процессах сшивки реализуемых в зоне воздействия потока электронов.

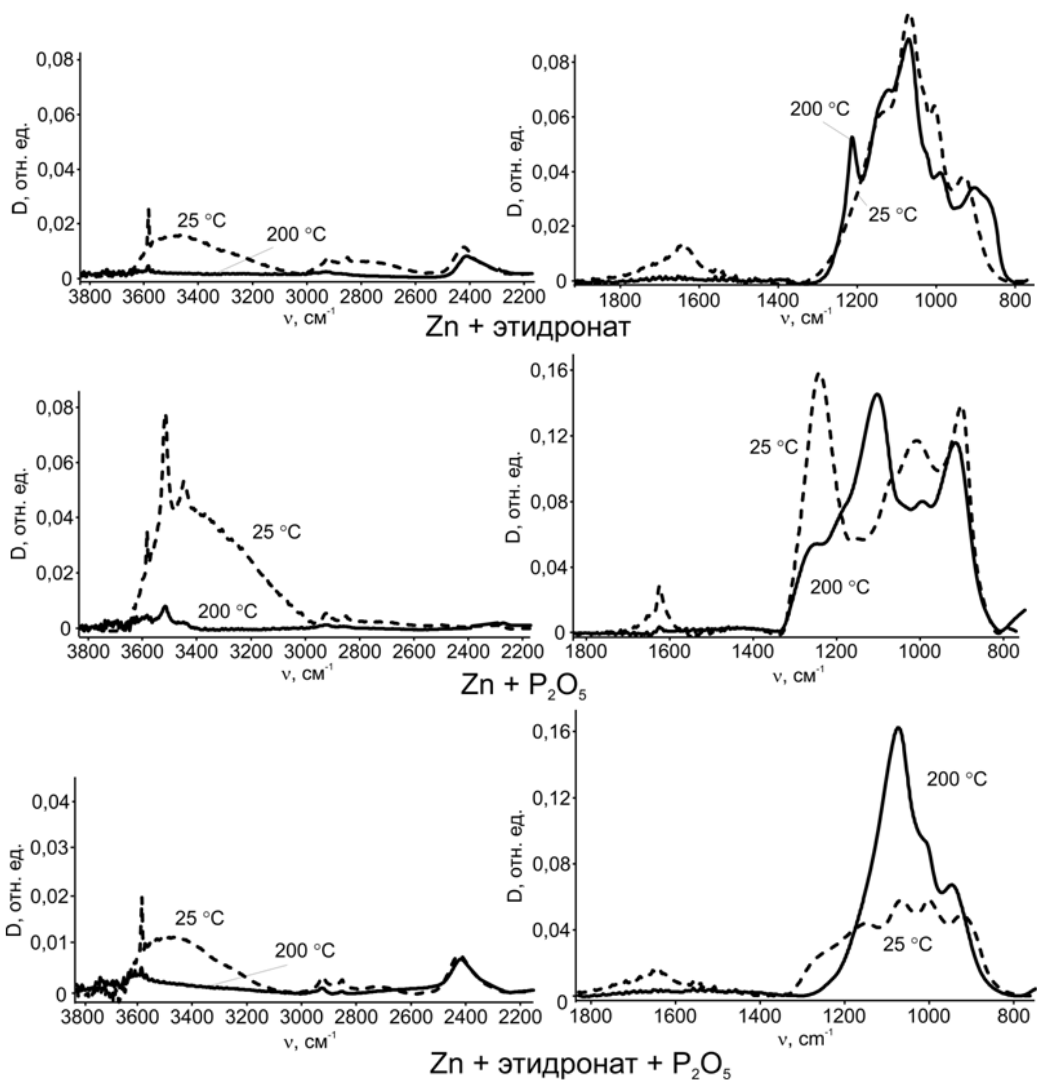


Рисунок 2.2 – ИК-спектры покрытий на цинковом подслое

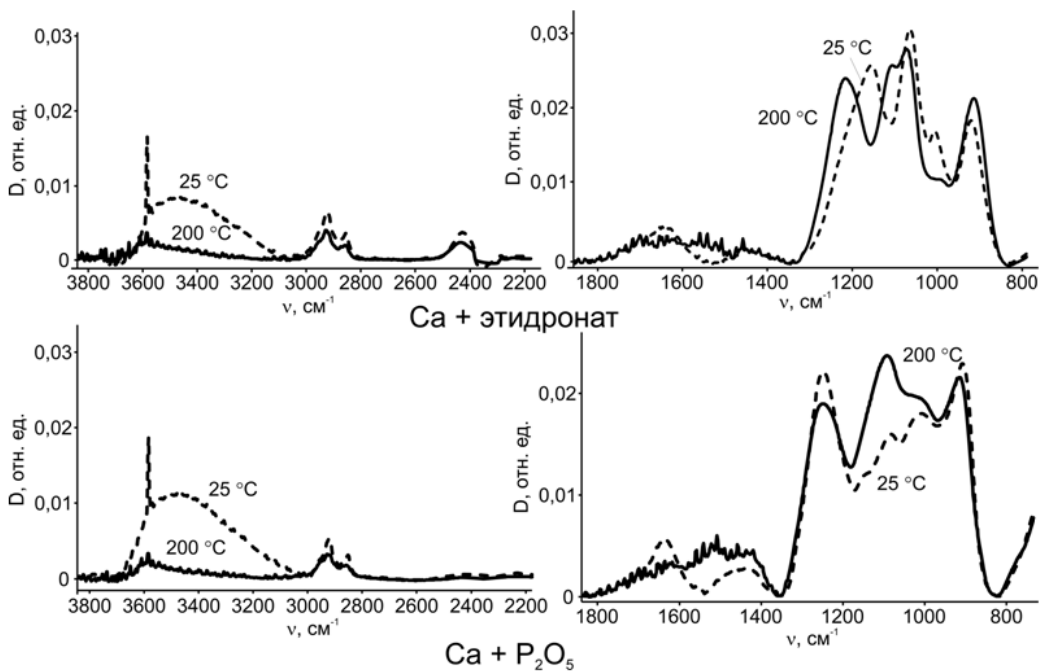


Рисунок 2.3 – ИК-спектры покрытий на кальциевом подслое

В ИК-спектре покрытий, помимо деформационных колебаний Si – CH₃, Si – O – Si, Si – OH связей, присутствуют колебания Si – CH₂ – Si, Si – CH – Si (680 см⁻¹) и Si – H (590 см⁻¹) связей [22], [15]. Полосы поглощения, ответственные за колебания Si – CH₂ – Si, Si – CH – Si связей, зафиксированы для покрытий, сформированных с использованием мишеней с исходным массовым соотношением компонентов – 10:1 и 8:1. Таким образом, низкое содержание металла не способно эффективно препятствовать образованию в поверхностных слоях мишени сшитого слоя. Под действием потока электронов объем таких мишеней в наибольшей степени разогревается. Высокая температура инициирует протекание сшивки молекул с участием углеводородных фрагментов. Отмеченные покрытия характеризуются наиболее высокими значениями отношения оптических плотностей D₁₀₂₀ / D₁₁₃₅ (таблица 2.1).

Таблица 2.1 – Результаты ИК-спектроскопического анализа покрытий на основе PMSQ и магния

Параметр	Соотношение компонентов в мишени (PMSQ:Mg)			
	1:0	4:1	8:1	10:1
D ₁₀₂₀ / D ₁₁₃₅	2,58	1,57	1,62	1,72
D ₁₀₈₀ / D ₁₀₂₀	0,11	0,39	0,38	0,40

С увеличением температуры мишени снижается вероятность перехода в газовую фазу объемно-сшитых упорядоченных структур типа «клетка». Следует отметить, что в ИК спектрах покрытий полоса деформационных колебаний Si – O – Si располагается вблизи 1023 см⁻¹, в ИК спектре порошка – вблизи 1000 см⁻¹. Смещение полосы поглощения в сторону более высоких значений волновых чисел является следствием повышения жесткости структуры [15]. В ИК спектрах покрытий и порошка PMSQ присутствует поглощение при 1080 см⁻¹. Поглощение может быть соотнесено с линейными силоксановыми цепочками. Для осаждаемых покрытий величина D₁₀₈₀ / D₁₀₂₀ более чем в 3 раза превышает аналогичное значение соотношения для исходного порошка (таблица 2.1). Результат может указывать на присутствие в молекулярной структуре осаждаемого слоя, помимо сшитых структур, линейных низкомолекулярных фрагментов.

Выводы

На основании проведенных исследований установлено:

1) воздействие потока электронов на этидронат приводит лишь к частичному разложению соединения;

2) взаимодействие этидроната с цинком и кальцием сопровождается образованием фосфата без дополнительного термического инициирования. При использовании P₂O₅ для образования заметного количества фосфата необходим отжиг;

3) термообработка и присутствие оксида фосфора (V) способствуют упорядочению структуры этидроната;

4) обоснована эффективность использования в качестве верхнего защитного слоя многослойной системы покрытия с исходным соотношением компонентов PMSQ:Mg 10:1. Такие покрытия характеризуются малым содержанием объемно-сшитых структур и магния. Высокое содержание структур типа клетка (cage) повышает неоднородность структуры покрытия, снижая его барьерные свойства. Высокое содержание магния нежелательное явление. Магний в биологической среде подвергается интенсивной коррозии, что может инициировать разрушение кремнийорганического слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Formation features, structure and properties of bioactive coatings based on phosphate-calcium layers, deposited by a low energy electron beam* / Jintao Xiao, A.V. Rogachev, V.A. Yarmolenko, A.A. Rogachev, Yiming Liu, Xiaohong Jiang, Dongping Sun, M.A. Yarmolenko // *Surface & Coatings Technology*. – 2019. – 359. – P. 6–15.

2. *Xue, Zhi-yu. Nucleation of Biomimetic Hydroxyapatite Nanoparticles on the Surface of Type I Collagen: Molecular Dynamics Investigations* / Zhi-yu Xue, Mingli Yang, Dingguo Xu // *J. Phys. Chem. C*. – 2019. – Vol. 123. – P. 2533–2543.

3. *Zhu, Peixin. The effect of surface charge on hydroxyapatite nucleation* / Peixin Zhu, Y. Masuda, K. Koumoto // *Biomaterials*. – 2004. – Vol. 25. – P. 3915–3921.

4. *Control of Calcium Phosphate Nucleation and Transformation through Interactions of Enamel and Amelogenin Exhibits the “Goldilocks Effect”* / J. Tao, A. Fijneman, J. Wan, S. Prajapati, K. Mukherjee, A. Fernandez-Martinez, J. Moradian-Oldak, J.J. De Yoreo // *Cryst. Growth Des.* – 2018. – Vol. 18. – P. 7391–7400.

5. *S.-H. Rhee, J. Tanaka Effect of citric acid on the nucleation of hydroxyapatite in a simulated body fluid* / J. S.-H. Rhee // *Biomaterials*. – 1999. – Vol. 20. – P. 2155–2160.

6. *Polydopamine-induced hydroxyapatite coating facilitates hydroxyapatite / polyamide 66 implant osteogenesis: an in vitro and in vivo evaluation* / Y. Xu, H. Li, J. Wu, Q. Yang, D. Jiang, B. Qiao // *Int. J. Nanomedicine*. – 2018. – Vol. 13. – P. 8179–8193.

7. *Ramesh, N. Hydroxyapatite-polymer biocomposites for bone regeneration: A review of current trends* / N. Ramesh, S. C. Moratti, G. J. Dias // *Journal of Biomedical Materials Research*. – 2018. – Vol. 106. – P. 2046–2057.

8. *Prasanna, A.P.S. Sustained release of amoxicillin from hydroxyapatite nanocomposite for bone infections* / A.P.S. Prasanna, G.D. Venkatasubbu // *Progress in Biomaterials*. – 2018. – Vol. 7. – P. 289–296.

9. *Adhesion and mechanical properties of nanocrystalline hydroxyapatite coating obtained by conversion of atomic layer deposited calcium carbonate on titanium substrate* / I. Avila, K. Pantchev, J. Holopainen, M. Ritala, J. Tuukkanen // *Journal of Materials Science: Materials in Medicine*. – 2018. – Vol. 29. – P. 111.
10. *Olley, R.C.* An up to 50-year follow-up of crown and veneer survival in a dental practice / R.C. Olley, M. Andiappan, P.M. Frost // *J. Prosthet. Dent.* – 2018. – Vol. 119. – P. 935–941.
11. *Zinc-Based Biomaterials for Regeneration and Therapy* / Y. Su, I. Cockerill, Y. Wang, Y-X. Qin, L. Chang, Y. Zheng, D. Zhu // *Trends in Biotechnology*. – 2019. – Vol. 37. – P. 428–441.
12. *Inhibitory Effect of Magnesium and Zinc on Crystallization Kinetics of Hydroxyapatite (0001) Face* / N. Kanzaki, K. Onuma, G. Treboux, S. Tsutsumi, A. Ito // *J. Phys. Chem. B*. – 2000. – Vol. 104. – P. 4189–4194.
13. *Structural and phase analysis of multi-ion doped hydroxyapatite for biomedical applications* / N.C. Reger, A.K. Bhargava, I. Ratha, B. Kundu, V.K. Balla // *Ceramics International*. – 2019. – Vol. 45. – P. 252–263.
14. *The role of organoclay on the properties of Polymethylsilsequioxane: A systematic study* / A.S. Alex, R.S. Rajeev, V. Sekkar, C. Gouri // *Journal of macromolecular science, part a: pure and applied chemistry*. – 2017. – Vol. 54, № 12. – P. 885–893.
15. *Synthesis and structure of ladder polymethylsilsequioxanes from sila-functionalized cyclotetrasiloxanes* / H. Seki, T. Kajiwara, Y. Abe, T. Gunji // *J. Organomet. Chem.* – 2010. – Vol. 695. – P. 1363–1369.
16. *Pyrolysis of Polymethylsilsequioxane* / J. Ma, L. Shi, Y. Shi, S. Luo, J. Xu // *J. Appl. Polym. Sci.* – 2002. – Vol. 85. – P. 1077–1086.
17. *Magnesium containing coatings formed by a low-energy electron beam* / J. Xiao, A.V. Rogachev, V.A. Yarmolenko, A.A. Rogachev, Xiaohong Jiang, Dongping Sun, M.A. Yarmolenko // *Surface & Coatings Technology*. – 2018. – Vol. 349. – P. 61–70.
18. *A comparative study of quality of life, functional and bone outcomes in osteogenesis imperfecta with bisphosphonate therapy initiated in childhood or adulthood* / A.G. Feehan, M.R. Zacharin, A.S. Lim, P.J. Simm // *Bone*. – 2018. – Vol. 113. – P. 137–143.
19. *Sousa, S.* Bone-Targeted Therapies in Cancer-Induced Bone Disease / S. Sousa, P. Clézardin // *Calcified Tissue International*. – 2018. – Vol. 102. – P. 227–250.
20. *Locally delivered bisphosphonate for enhancement of bone formation and implant fixation* / J.D. Bobyn, K. McKenzie, D. Karabasz, J.J. Krygier // *J. Bone Joint Surg. Am.* – 2009. – Vol. 91. – P. 23–31.
21. *Effect of implanted bisphosphonate-enriched cement on the trabecular microarchitecture of bone in a rat model using microcomputed tomography* / L. Matuszewski, K. Turzańska, A. Matuszewska, M. Jabłoński // *Int. Ortho.* – 2013. – Vol. 37. – P. 1187–1193.
22. *Pyrolysis of Polymethylsilsequioxane* / J. Ma, L. Shi, Y. Shi, S. Luo, J. Xu // *Journal of Applied Polymer Science*. – 2002. – Vol. 85. – P. 1077–1086.

Поступила в редакцию 16.04.19.

БИОАКТИВНЫЕ МНОГОСЛОЙНЫЕ ПОКРЫТИЯ, ИНИЦИИРУЮЩИЕ РОСТ КОСТНОЙ ТКАНИ: СТРУКТУРА И СВОЙСТВА

Лю Имин¹, А.В. Рогачев¹, М.А. Ярмоленко^{1,2}, А.А. Рогачев¹,
Цзян Сяохун², А.С. Руденков¹

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

²Нанкинский университет науки и технологий

BIOACTIVE MULTILAYER COATINGS THAT INITIATE BONE GROWTH: STRUCTURE AND PROPERTIES

Liu Yiming¹, A.V. Rogachev¹, M.A. Yarmolenko^{1,2}, A.A. Rogachev¹,
Jiang Xiaohong², A.S. Rudenkov¹

¹F. Scorina Gomel State University

²Nanjing University of Science and Technology

Предложен и обоснован состав многослойного покрытия на основе $Mg + Ca + P_2O_5$, наносимого на поверхность интрамедуллярного имплантата с целью иницирования роста костной ткани. Показано, что термообработанная при $200^\circ C$ многослойная система $Mg + Ca +$ этидронат $+ P_2O_5 + Zn + P_2O_5$ обладает высокой стойкостью к истиранию. В буферном растворе SBF слоевая система трансформируется в ГА. Влияние термообработки проявляется в увеличении структурной упорядоченности отдельных слоев.

Ключевые слова: гидроксипатит, полиметилсилсесквиоксан, этидронат, электронно-лучевое диспергирование.

The composition of a multilayer coating on the basis of $Mg + Ca + P_2O_5$ applied to the surface of the intramedullary implant in order to initiate bone tissue growth has been proposed and substantiated. It is shown that the $Mg + Ca +$ Ethidronate $+ P_2O_5 + Zn + P_2O_5$ multi-layer system, which was heat-treated at $200^\circ C$, has high resistance to abrasion. In SBF buffer solution the layer system is transformed into HA. Influence of heat treatment is manifested in increase of structural order of separate layers.

Keywords: hydroxyapatite, polymethylsilsequioxane, etidronate, electron-beam dispersion.

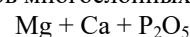
Введение

Синтез биологически активных покрытий с целью снижения имплантант-ассоциированных инфекций, интенсификации процессов остеосинтеза является сложной технологической проблемой, для решения которой предложен ряд приемов [1]–[3]. Предложенное в работе [4] покрытие, представляющее последовательно осажденные слои магния, кальция, оксида фосфора и кремнийорганической смолы, осажденные из газовой фазы, при их размещении в биологической среде, химический состав которой соответствовал составу крови, приобретало структуру и свойства, характерные для биостекол и гидроксипатита.

В [5] определены особенности формирования молекулярной структуры отдельных слоев, входящих в состав многослойной покрытий, обработка которых приводит к формированию гидроксипатита (ГА). Оценена эффективность использования в качестве отдельного слоя многослойной системы покрытия полиметилсилсесквиоксана (PMSQ). Показано, что обменные процессы между многослойной системой и буферным раствором ответственны за разрушение сшитого кремнийорганического слоя. Установлено образование фосфатов кальция и цинка при

взаимодействии этидроната и оксида фосфора с соответствующими металлами.

Основной целью настоящей работы является установление эффективности использования для нанесения на поверхность интрамедуллярных имплантатов многослойных систем



с верхним цинксодержащим или PMSQ слоем, а также возможности использования в таких многослойных системах этидроната.

1 Методика эксперимента

Многослойные покрытия формировали в едином технологическом цикле в вакууме из активной газовой фазы, образованной продуктами электронно-лучевого диспергирования по методике, описанной в работе [4]. Процесс осаждения покрытий производился при начальном давлении остаточных газов в вакуумной камере $\approx 5 \cdot 10^{-3}$ Па.

В качестве мишеней были использованы порошки магния (Sigma-Aldrich), цинка (dust, Sigma-Aldrich), гидрида кальция (CaH_2 , Sigma-Aldrich), оксида фосфора (P_2O_5 , Sigma-Aldrich), полиметилсилсесквиоксана (XJY Silicones), этидроната (1-Hydroxyethylidene-1,1-diphosphonic acid, Merger). Выбор этидроната был обусловлен его наиболее простой молекулярной структурой.

В качестве подложек при проведении ИК-спектроскопии использовали пластины NaCl, при проведении растровой электронной микроскопии (РЭМ), рентгенофотоэлектронной спектроскопии (РФЭС), рентгеноструктурного анализа (РДА), Scratch исследований – пластины монокристалла кремния. Необходимо отметить отсутствие дополнительной активационной обработки подложек перед нанесением покрытий.

Объектами исследования были многослойные покрытия со следующим расположением слоев на подложке:

Mg + Ca + этидронат + P₂O₅ + Zn + P₂O₅
и Mg + Ca + этидронат + P₂O₅ + (PMSQ+Mg) (10:1). Термообработка покрытий осуществлялась в атмосфере воздуха при температуре 200° С в течение 60 минут. Покрытия, исследуемые в работе, в дальнейшем планируется использовать для нанесения на поверхность металлических и полимерных имплантатов. Температура обработки определяет возможность реализации этого условия на практике. Совмещение температуры термообработки с температурой стандартной стерилизации медицинских изделий позволяет упростить технологию модифицирования имплантатов.

Рентгеноструктурный анализ покрытий осуществляли на дифрактометре Bruker D8 с использованием CuKα (λ = 1.54056 Å), 40 kV, 40 mA источника рентгеновского излучения.

РФЭС исследования проводились с использованием рентгеновского спектрометра PHI Quanta (Япония) (XPS) с Al (моно) Kα (hν = 1486,6 eV) излучением мощностью 160 Вт. Образцы подвергались травлению потоком низкоэнергетических ионов Ag⁺: время распыления 15 мин, количество циклов травления – 6. Анализу подвергался верхний поверхностный слой многослойной системы и кальцийсодержащий слой, расположенный в непосредственной близости к подложке.

Исследование морфологии и структуры сколов многослойных систем проводили с использованием сканирующем электронном микроскопе (РЭМ, Quanta 200 F).

Скрейч тесты покрытий проводили с использованием auto-scratch instrument (WS-2005, China). Параметры процесса: длина царапания – 4 mm, нагрузка от 0 до 30 Н, скорость перемещения индентора – 4 мм/мин.

Исследование трансформации многослойных систем в гидроксиапатит выполняли с использованием буферного раствора SBF. Выбор раствора осуществлен согласно рекомендациям, представленным в [6]. Температура раствора соответствовала стандартной температуре человеческого тела – 36,6° С. Время нахождения образцов в SBF растворе – 7, 14 и 30 дней. После этого образцы тщательно промывались в дистиллированной воде и сушились в потоке теплого воздуха.

Для установления кинетических особенностей высвобождения бисфосфонатов в водные среды используют спектрофотометрический анализ [7]. Данный подход не корректен для исследования многослойных систем, содержащих одновременно оксид фосфора и этидронат. Однако методика может быть использована для исследования способности верхнего защитного слоя многослойной системы управлять кинетикой высвобождению в водный раствор фосфорсодержащих соединений. С этой целью образцы помещали в 0,9% водный раствор NaCl (200 мл), находящийся при температуре 36,6° С. Через определенные промежутки времени делали забор жидкости и определяли концентрацию фторсодержащего компонента. Перед забором жидкости емкость с образцами помещали на шейкер и встряхивали в течение 1 минуты. При определении концентрации фторсодержащего компонента учитывалось изменение объема раствора при заборе проб.

2 Результаты исследований

Электронно-микроскопический анализ показал, что поверхностный слой многослойной системы

Mg + Ca + этидронат + P₂O₅ + Zn + P₂O₅ является бездефектным (рисунком 2.1). Выявить с помощью РЭМ размер структурных элементов, образующих верхний цинксодержащий слой, не представляется возможным. Отжиг покрытия не сопровождается заметными морфологическими изменениями структуры слоя. В отличие от цинксодержащего слоя слой на основе PMSQ не является сплошным. Образуется мелкими (менее 50 nm) структурными элементами. Как и в случае с цинксодержащим покрытием, термическая обработка не приводит к заметному изменению структуры покрытия.

Кинетические особенности вымывания оценивались путем определения зависимости скорости изменения концентрации фосфорсодержащих соединений в изотоническом водном растворе от времени (рисунки 2.2 и 2.3). Оценивались барьерные свойства цинксодержащего и кремнийорганического слоя. В течение суток оба покрытия отслаивались от подложки из-за растворения нижнего слоя этидроната. Тонкослойное покрытие

этидронат + P₂O₅ + Zn + P₂O₅ в течение 7 часов характеризуется равномерной и линейной скоростью высвобождения фосфорсодержащих компонентов в раствор. В структуре покрытия с кремнийорганическим слоем отсутствует верхний слой P₂O₅. Поэтому можно было предположить более низкую начальную концентрацию фосфатов в растворе. Однако после 2 часов именно для покрытия с кремнийорганическим слоем характерно наибольшая концентрация фосфата. В дальнейшем снижение

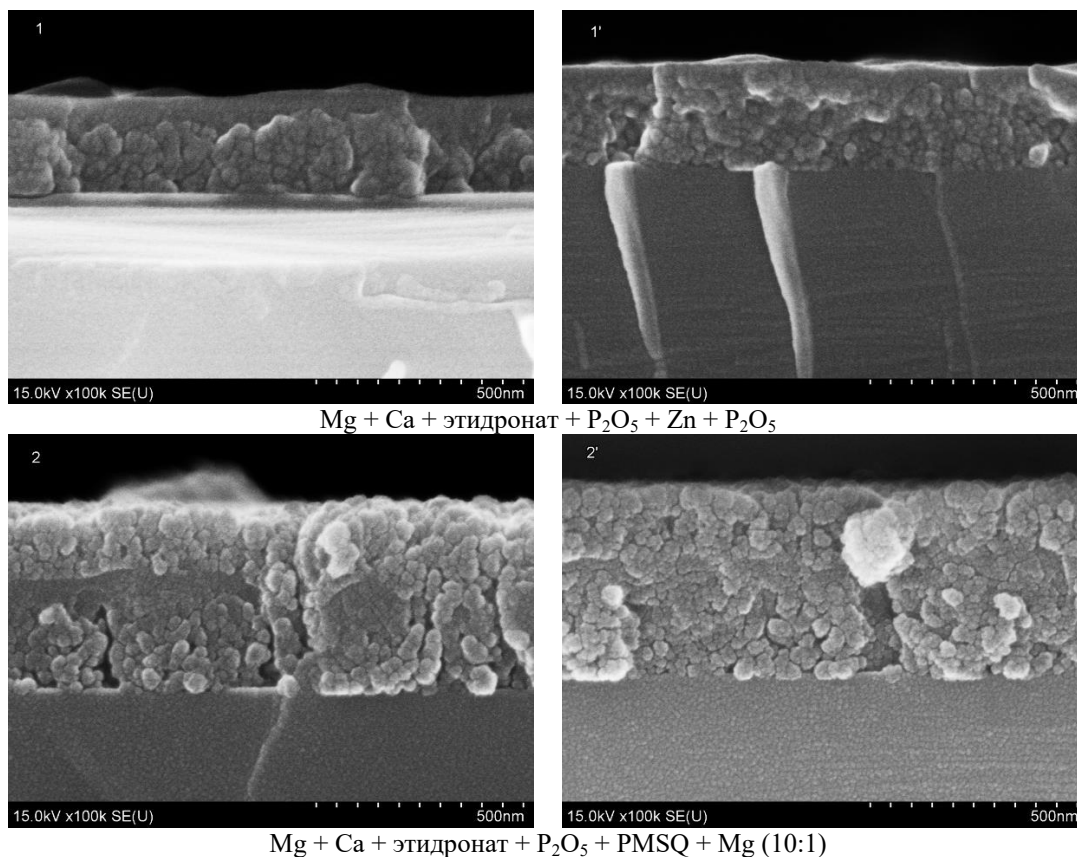
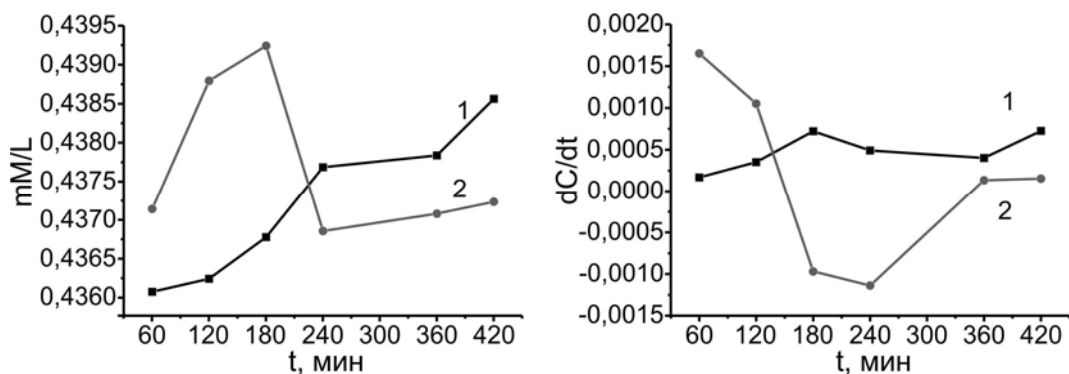
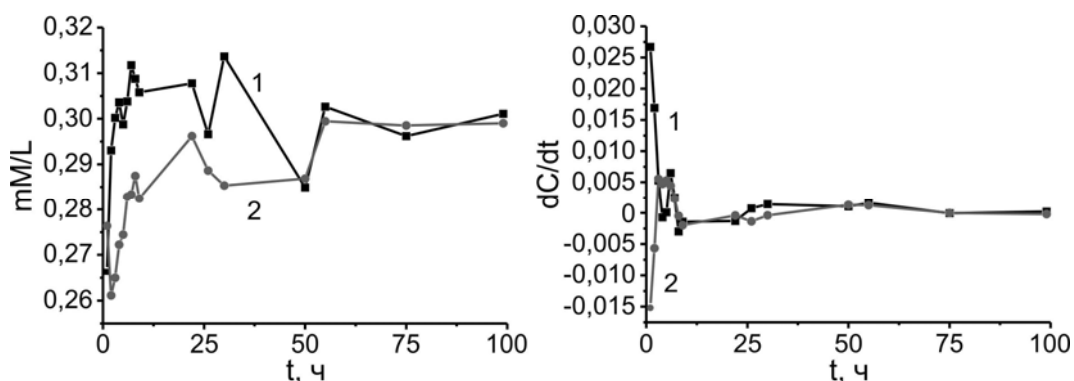


Рисунок 2.1 – Изображения сколов слоевых систем до и после термообработки



1 – этидронат + P₂O₅ + PMSQ + Mg (10:1); 2 – этидронат + P₂O₅ + Zn + P₂O₅.

Рисунок 2.2 – Зависимость концентрации и скорости высвобождения фосфорсодержащих соединений от времени нахождения отожженных покрытий в изотоническом растворе



1 – Mg + Ca + этидронат + P₂O₅ + PMSQ + Mg (10:1); 2 – Mg + Ca + этидронат + P₂O₅ + Zn + P₂O₅.

Рисунок 2.3 – Зависимость концентрации и скорости высвобождения фосфорсодержащих соединений от времени нахождения отожженных покрытий в изотоническом растворе

концентрации объясняется процессом адсорбции его на стенках сосуда. Это может быть устранено при изготовлении емкости из фторопласта. Неравномерность скорости изменения концентрации фосфатов в растворе, высокая первоначальная их концентрация указывают на низкие барьерные свойства кремнийорганического слоя. Отсутствие барьерных свойств инициировало бы быстрое отслаивание кремнийорганического слоя. Отслаивание не фиксировалось в течение первых 7 часов нахождения слоевого покрытия в изотоническом растворе. Полученные результаты исследований полностью согласуются с данными микроскопического анализа.

Несмотря на заметно отличающиеся барьерные свойства цинксодержащего и кремнийорганического верхнего слоя общий характер изменения концентрации фосфатов вблизи многослойных систем одинаков (рисунок 2.3).

Это возможно в случае если многослойная система представляет единое целое, а не простую механическую систему независимых друг от друга слоев. В водной среде в течение первых 7 часов фиксируется непрерывный рост концентрации фосфатов. В дальнейшем происходит стабилизация. После 50 часов концентрация фосфатов в водном растворе не меняется.

Величина адгезионного взаимодействия в системе покрытие – имплантат и когезионной прочности покрытия являются одними из основных факторов, определяющих возможность использования тонкослойных слоев для модифицирования имплантатов, контактирующего с костной тканью [8], [9]. При установлении имплантата в организм человека покрытие может быть полностью удалено с поверхности медицинского изделия. Это является следствием интенсивного механического взаимодействия покрытия с костной тканью. К сожалению, во многих работах данный факт часто опускается.

Несмотря на отсутствие заметного влияния термообработки на структуру покрытия, отжиг оказывает существенное влияние на механические свойства тонкослойных систем. При нагрузке более 3 Н на поверхности термически необработанных покрытий фиксируется появление первых следов частичного разрушения и отслоения (рисунок 2.4).

Слой

Mg + Ca + этидронат + P₂O₅ + PMSQ + Mg (10:1) полностью разрушается и отделяется от подложки при нагрузке превышающей 9 Н. Разрушение цинксодержащего термически необработанного покрытия не сопровождается полным удалением покрытия с подложки. На дорожке трения присутствуют локальные участки неизношенного покрытия. Результат указывает на реализацию в многослойных системах химических межслоевого взаимодействия. Этому способствует сорбирование покрытием атмосферной влаги.

В ходе эксперимента разрушение и отслаивание термообработанных покрытий не происходит. В зоне царапания слоя

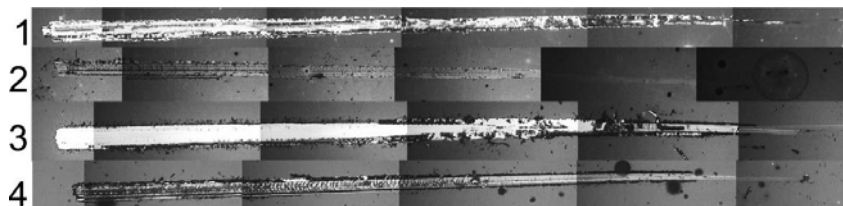
Mg + Ca + этидронат + P₂O₅ + PMSQ + Mg (10:1) при нагрузке более 12 Н появляется значительное количество усталостных трещин. С увеличением нагрузки расстояние между трещинами непрерывно уменьшается. Можно предположить, что при нагрузке более 30 Н взаимодействие трещин приведет к разрушению покрытия. Для цинксодержащей многослойной системы появление отдельных усталостных трещин фиксируется при нагрузке более 18 Н. Однако даже при максимальной нагрузке в зоне царапания плотность трещин заметно ниже плотности трещин, фиксируемой для слоя

Mg + Ca + этидронат + P₂O₅ + PMSQ + Mg (10:1). Согласно проведенным исследованиям покрытие Mg + Ca + этидронат + P₂O₅ + Zn + P₂O₅

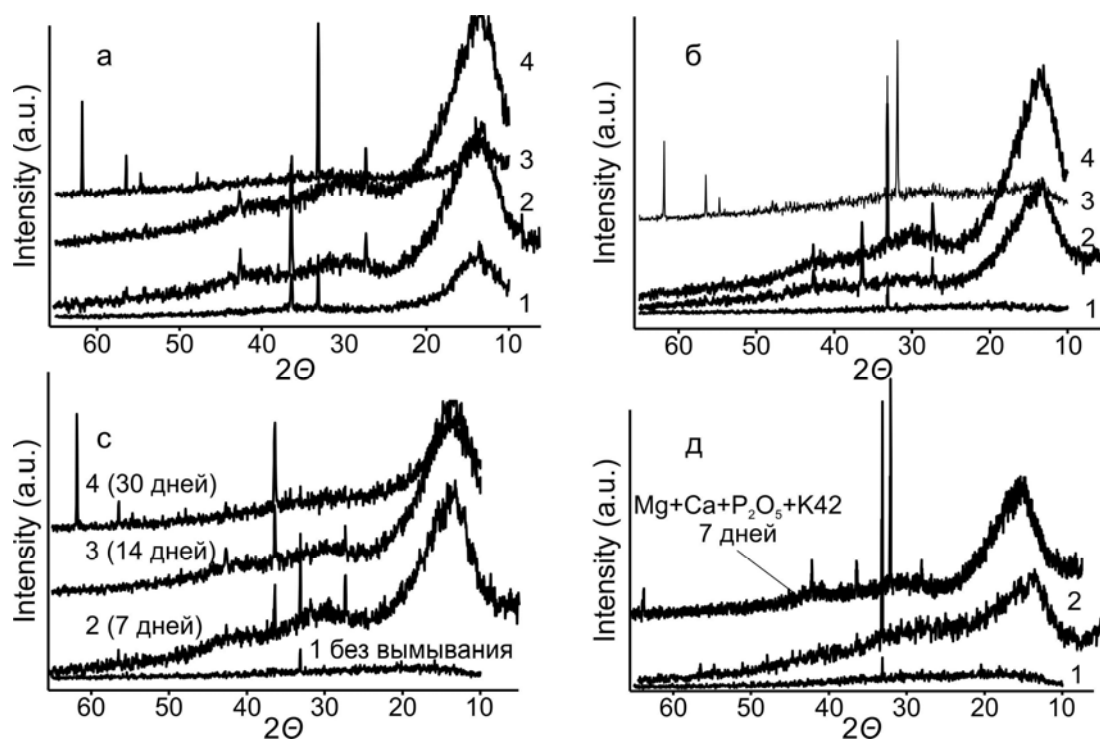
характеризуется наивысшей адгезионной и когезионной прочностью.

Рентгенограммы покрытий характеризуются наличием пика $2\theta = 33.1^\circ$, соотносимого с (300) ориентацией гидроксипатита (рисунок 2.5) [10], [11].

Появление отмеченного пика является следствием межкомпонентного взаимодействия в многослойной системе. Термообработка заметно снижает интенсивность отмеченного пика. Это характерно для цинксодержащих покрытий. Результат легко объясним. Для химического межслоевого взаимодействия необходимо присутствие влаги. Термическая обработка инициирует не только процессы десорбции адсорбированной влаги, но и способствует частичной упорядоченности структуры. Структурные изменения



1 – Mg + Ca + этидронат + P₂O₅ + Zn + P₂O₅ (25°C);
 2 – Mg + Ca + этидронат + P₂O₅ + Zn + P₂O₅ (200°C);
 3 – Mg + Ca + этидронат + P₂O₅ + PMSQ + Mg (10:1) (25°C);
 4 – Mg + Ca + этидронат + P₂O₅ + PMSQ + Mg (10:1) (200°C);
 Рисунок 2.4 – Результаты *Scratch-теста* многослойных покрытий



а – Mg + Ca + этидронат + P₂O₅ + Zn + P₂O₅ (25°C);
 б – Mg + Ca + этидронат + P₂O₅ + Zn + P₂O₅ (200°C);
 с – Mg + Ca + этидронат + P₂O₅ + PMSQ + Mg (10:1) (25°C);
 д – Mg+Ca+этидронат + P₂O₅ + PMSQ + Mg (10:1) (200°C);

Рисунок 2.5 – Рентгенограммы многослойных систем после их выдержки в SBF буферном растворе

проявляются в снижении абсорбирующей способности многослойной системы. Интенсивная абсорбция влаги сопровождается частичным окислением кальциевого слоя с последующим образованием CaCO₃. Результатом является появление на рентгенограмме пика 2θ = 36.4° [12]. Отмеченный процесс реализуется в неотожженном цинксодержащем слое. Интенсивной сорбции атмосферной влаги способствует наличие верхнего слоя P₂O₅. Согласно данным РЭМ исследований структура кремнийорганического слоя является менее сплошной в сравнении со структурой слоя фосфата цинка. При этом именно присутствие кремнийорганического слоя препятствует образованию карбоната кальция. Это может быть обусловлено гидрофобными свойствами кремнийорганического покрытия.

После 7 дней пребывания в SBF рентгенограммы многослойных систем с верхним цинксодержащим слоем формировали пики 2θ = 27.3, 36.4 и 42.6°. Пик 2θ = 27.3° соотносится с CaCO₃, 2θ = 42.6° – MgO [13]. Появление новых пиков CaCO₃ и MgO, рост интенсивности пика 2θ = 36.4° являются следствием проникновения влаги в объем покрытия и окисления слоев магния и кальция. Пребывание в растворе неотожженного покрытия

Mg + Ca + этидронат + P₂O₅ + PMSQ + Mg (10:1) сопровождается возникновением не только карбоната кальция и оксида магния, но и формированием гидроксиапатита. На рентгенограмме отожженного покрытия с верхним кремнийорганическим слоем фиксируется только интенсивный пик гидроксиапатита 2θ = 33.1°. Полученные результаты являются ярким подтверждением существующей зависимости кинетики зарождения и роста гидроксиапатита от структуры покрытия.

Структура кремнийорганического слоя является крайне неоднородной, содержащей сшитые и линейные фрагменты. Такая структура характеризуется наличием внутренних напряжений. Отжиг покрытия способствует повышению внутренних напряжений, так как инициирует дополнительное образование сшитых структур. Проникновение влаги в объем покрытия, зарождение и рост в его объеме новых структур способствуют отслаиванию покрытия от подложки. Установлено, что при нахождении отожженного Mg + Ca + этидронат + P₂O₅ + PMSQ + Mg (10:1) слоя в SBF более 7 дней происходит его полное разрушение. Частичное отслаивание кремнийорганического слоя может быть ответственно за исчезновение пика гидроксиапатита на рентгенограмме неотожженного

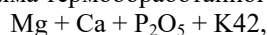
Mg + Ca + этидронат + P₂O₅ + PMSQ + Mg (10:1) покрытия. Таким образом, зарождение и рост гидроксиапатита, как и ожидалось, происходит непосредственно в кремнийорганическом слое.

После 14 дней нахождения цинксодержащего отожженного слоя в SBF на рентгенограмме фиксируется очень интенсивный пик гидроксиапатита (300). На рентгенограмме термически необработанного слоя зафиксировано снижение интенсивностей пиков CaCO₃ и MgO и отсутствие пика гидроксиапатита. Это указывает на непрерывное растворение неотожженного покрытия в водной среде. Таким образом, в отсутствие кремнийорганического слоя образованию гидроксиапатита предшествует образование карбоната кальция.

На рентгенограммах цинксодержащих покрытий после 30 дней нахождения в SBF пики гидроксиапатита являются наиболее интенсивными. При этом структура термообработанного слоя в наибольшей степени способствует росту кристаллов ГА с ориентацией (211) (2θ = 31.9°). Отсутствие пиков ГА на рентгенограмме многослойной системы с верхним кремнийорганическим слоем объясняется непрерывным разрушением покрытия. Процесс разрушения легко фиксируется визуально.

Таким образом, образование ГА на поверхности многослойной цинксодержащей системы происходит после 2 недель пребывания покрытия в SBF растворе. Наличие верхнего кремнийорганического слоя способствует росту ГА уже после 7 дней пребывания в буферном растворе.

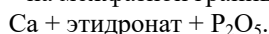
Для сравнения на рисунке представлена рентгенограмма термообработанного покрытия



после 7 дней выдержки в SBF. Согласно рентгенограмме, на поверхности тонкого слоя образуются кристаллы ГА с ориентацией (211) (2θ = 31.8° и 31.7°). Можно предположить, что на ориентацию образующихся в тонком слое кристаллов ГА оказывает влияние этидронат. Подобные вопросы еще предстоит выяснить в дальнейших исследованиях.

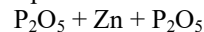
Установлено, что длительное нахождение покрытий с верхним кремнийорганическим в SBF буферном растворе сопровождается их разрушением. Поэтому анализировались только цинксодержащие слоевые системы.

На поверхности покрытий независимо от термообработки зафиксировано наличие гидроксиапатита (рисунок 2.6). Послойный анализ спектров (в работе не приводится) показал, что зарождение НА происходит в объеме тонкослойной системы – на межфазной границе



В образовании гидроксиапатита участвует не весь кальциевый слой. Вблизи подложки кальцийсодержащий слой представлен карбонатом и

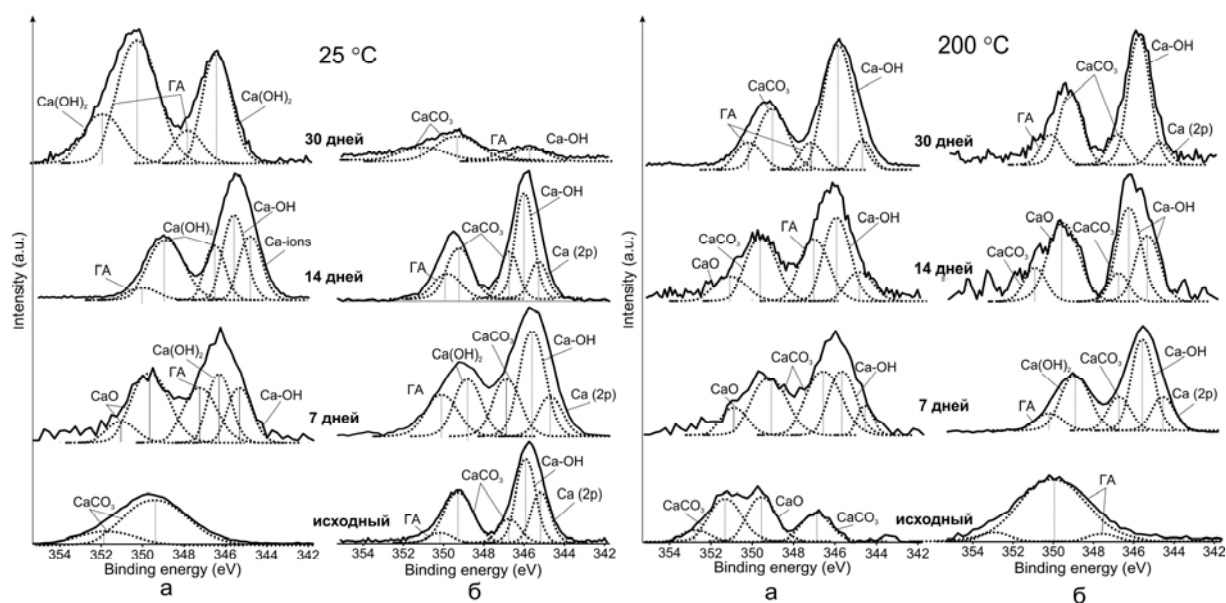
оксидом. Оксид кальция фиксируется только для отожженного покрытия. Это указывает на повышение барьерных свойств всей многослойной системы при отжиге. Даже после 7 дней пребывания в растворе отожженного покрытия не происходит образование НА вблизи подложки. Установлено, что в трехслойной системе



образование фосфата цинка происходит только на границе раздела фаз. Между слоями фосфата цинка располагается слой цинка. При этом термообработка практически не влияет на процесс взаимодействия оксида фосфора и Zn. Это также может способствовать прорастанию гидроксиапатита на поверхность тонкого слоя. После 30 дней выдержки покрытий в SBF присутствие цинка в покрытии выявить не удалось. Таким образом, влияние термообработки проявляется только в снижении скорости проникновения водной среды в объем покрытия.

На рентгенограммах покрытий после 7 дней пребывания в SBF отсутствуют пики НА. На первый взгляд это противоречит данным XPS анализа. Однако отмеченное указывает лишь на то, что структурирование в многослойной системе протекает непрерывно. Росту кристаллов НА предшествуют процессы появления значительного количества разноразмерных зародышей. Процесс образования кристаллов НА осуществляется на фоне непрерывных обменных реакций с компонентами буферного раствора.

Анализ результатов свидетельствует о непрерывном высвобождении химических соединений из многослойной системы при ее размещении в буферном растворе. Одновременно компоненты буферного раствора проникают в объем покрытия и участвуют в процессах зарождения и роста ГА. Поэтому верхний слой должен обладать равномерной проницаемостью по всей поверхности. Интенсивные обменные процессы, локализованные в отдельных местах, могут приводить к разрушению всего слоя. Покрытия на основе PMSQ характеризуются сшитой структурой. При этом в объеме слоя присутствует магний. Взаимодействие магния с водной средой сопровождается выделением водорода. Низкая эластичность кремнийорганического слоя на фоне интенсивных обменных процессов ответственна за относительно быстрое его разрушение. Слой фосфата цинка на поверхности многослойной системы также должен быстро разрушиться. Однако этого не происходит. Разрушению цинксодержащего слоя, по-видимому, препятствует его трехслойная структура: фосфат цинка – цинк – фосфат цинка. Средний слой цинка, с одной стороны, является проницаемым для водной среды [1]. С другой стороны – при взаимодействии с фосфорсодержащими соединениями слой цинка является источником фосфата цинка.



а – слой, расположенный вблизи подложки;
б – поверхностный слой многослойной системы

Рисунок 2.6 – XPS спектры отожженных и не отожженных покрытий
Mg + Ca + этидронат + P₂O₅ + Zn + P₂O₅

Выводы

Определены закономерности химических изменений, особенности образования гидроксипатита в многослойных покрытиях на основе Mg, Ca, P₂O₅, PMSQ, этидроната. Показано, что оптимальным покрытием, осаждаемым на поверхность интрамедуллярного имплантата, является многослойная система

Mg + Ca + этидронат + P₂O₅ + Zn + P₂O₅
отожженная при 200 °С.

Влияние термообработки многослойной системы проявляется в повышении структурной упорядоченности отдельных слоев. Это повышает стойкость всей системы к истиранию и снижает скорость прониновения водной среды в объем покрытия. Термообработка не инициирует образование специфических химических соединений.

Наиболее значимое влияние на процесс зарождения и рост ГА оказывают фосфорсодержащие соединения. При этом этидронат активно влияет на процессы образования фосфатов металлов.

ЛИТЕРАТУРА

- Xue, Zhi-yu. Nucleation of Biomimetic Hydroxyapatite Nanoparticles on the Surface of Type I Collagen: Molecular Dynamics Investigations / Zhi-yu Xue, Mingli Yang, Dingguo Xu // *J. Phys. Chem. C*. – 2019. – Vol. 123. – P. 2533–2543.
- Prasanna, A.P.S. Sustained release of amoxicillin from hydroxyapatite nanocomposite for bone infections / A.P.S. Prasanna, G.D. Venkatasubbu // *Progress in Biomaterials*. – 2018. – Vol. 7. – P. 289–296.

3. *Structural and phase analysis of multi-ion doped hydroxyapatite for biomedical applications* / N.C. Reger, A.K. Bhargava, I. Ratha, B. Kundu, V.K. Balla // *Ceramics International*. – 2019. – Vol. 45. – P. 252–263.

4. *Formation features, structure and properties of bioactive coatings based on phosphate-calcium layers, deposited by a low energy electron beam* / Jintao Xiao, A.V. Rogachev, V.A. Yarmolenko, A.A. Rogachev, Yiming Liu, Xiaohong Jiang, Dongping Sun, M.A. Yarmolenko // *Surface & Coatings Technology*. – 2019. – 359. – P. 6–15.

5. *Молекулярная структура однослойных и би-слойных покрытий, перспективных при их использовании в процессах остеосинтеза* / Лю Имин, А.В. Рогачев, М.А. Ярмоленко, А.А. Рогачев, Цзян Сяохун, А.С. Руденков // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2019. – № 2 (39) – С. 21–27.

6. Kokubo, T. How useful is SBF in predicting in vivo bone bioactivity? / T. Kokubo, H. Takadama // *Biomaterials*. – 2006. – Vol. 27. – P. 2907–2915.

7. *Growth Inhibition of Macrophage-Like and Other Cell Types by Liposome-Encapsulated, Calcium-Bound, and Free Bisphosphonates In Vitro* / J. Monkkonen, M. Taskinen, S.O.K. Auriola, A. Urtti // *J. Drug Target*. – 1994. – Vol. 2. – P. 299–308.

8. *Effect of bioglass addition on the properties of HA/BG composite films fabricated by pulsed laser deposition* / D.G. Wang, C.Z. Chen, X.X. Yang, X.C. Ming, W.L. Zhang // *Ceramics International*. – 2018. – Vol. 44. – P. 14528–14533.

9. *Sol-gel deposition of hydroxyapatite coatings on porous titanium for biomedical applications* /

C. Domínguez-Trujillo, E. Peón, E. Chicardi, H. Pérez, J.A. Rodríguez-Ortiz, J.J. Pavón, J. García-Couce, J.C. Galván, F. García-Moreno, Y. Torres // *Surface and Coatings Technology*. – Vol. 333. – P. 158–162.

10. *Mineralogical transformation during hydroxyapatite dissolution in simple aqueous solutions* / S. Boudia, P. Zuddas, F. Fernane, M. Fiallo, P. Sharrock // *Chemical Geology*. – 2017. – Vol. 477. – P. 85–91.

11. *Effect of Gamma Irradiation on Structural and Biological Properties of a PLGA-PEG-Hydroxyapatite Composite* / S. Shahabi, F. Najafi, A. Majdabadi, T. Hooshmand, M.H. Nazarpak, B. Karimi,

S.M. Fatemi // *The Scientific World Journal*. – 2014. – Article ID 420616, 9 pages.

12. *Costello, M.T. X-ray diffraction of amorphous and crystalline overbased sulphonates* / M.T. Costello // *Lubrication Science*. – 2005. – Vol. 11. – P. 207–212.

13. *A Genovese, A. Structural and thermal interpretation of the synergy and interactions between the fire retardants magnesium hydroxide and zinc borate* / A. Genovese, R.A. Shanks // *Polymer Degradation and Stability*. – 2007. – Vol. 92. – P. 2–13.

Поступила в редакцию 16.04.19.

УДК 681.785:681.7.068

РЕЦИРКУЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКИМ ДАТЧИКОМ

А.В. Поляков

Белорусский государственный университет, Минск

RECIRCULATION METHOD FOR TEMPERATURE MEASUREMENT BY THE FIBER OPTICAL SENSOR

A.V. Polyakov

Belarusian State University, Minsk

Описан новый принцип измерений физических величин, основанный на регистрации изменения частоты рециркуляции одиночных оптических импульсов на различных длинах волн в замкнутом оптоволоконном контуре с их периодическим восстановлением по амплитуде, форме и длительности. Установлено, что относительная долговременная нестабильность частоты рециркуляции не превышает $2 \cdot 10^{-6}$ для волокон длиной более 200 м при времени измерения 1 с и времени наблюдения более 1 часа. С помощью численного моделирования показано, что разрешающая способность датчика температуры составляет $0,15-0,1^\circ \text{C}$ в интервале температур $0-500^\circ \text{C}$ при использовании кварцевого волокна с металлическим покрытием.

Ключевые слова: волоконно-оптический датчик, частота рециркуляции, относительная долговременная нестабильность, температура, разрешающая способность.

A new principle of physical quantities measurement is described, based on recording changes in the frequency of single optical pulses recirculation at different wavelengths in a closed fiber optic loop with their periodic regeneration in amplitude, shape and duration. It was established that the relative long-term instability of the recirculation frequency does not exceed $2 \cdot 10^{-6}$ for fibers longer than 200 m with a measurement time of 1 s and an observation time more than 1 hour. Using numerical simulations, it was shown that the resolution of the temperature sensor is $0.15-0.1^\circ \text{C}$ in the temperature range $0-500^\circ \text{C}$ using quartz fiber with a metallic coating.

Keywords: fiber optic sensor, recirculation frequency, relative long-term instability, temperature, resolution.

Введение

Прорывные достижения в последние несколько десятилетий в области оптоволоконной связи и оптоэлектронного приборостроения предопределили возникновение нового направления измерений на основе волоконно-оптических датчиков (ВОД). Элементы, используемые в волоконно-оптических датчиках, являются абсолютно пассивными по отношению к электричеству (не излучают и не проводят электрический ток), невосприимчивы к электромагнитным помехам. Устойчивость к воздействиям внешней среды является определяющей при использовании ВОД в условиях высокой температуры, а твердотельная структура позволяет им выдерживать предельные уровни вибрационных и ударных нагрузок. К перечисленным выше свойствам можно добавить высокую чувствительность и широкополосность. Весогабаритные характеристики датчиков являются определяющими при их использовании в аэрокосмических областях.

В настоящее время широкое применение находит использование инновационных оптоволоконных технологий на основе концепции так называемых распределенных и квазираспределенных датчиков, позволяющих не только получать данные измерений, но и пространственно

локализовывать воздействие вдоль измерительной трассы, в которых оптические волокна являются одновременно и чувствительным элементом, и каналом передачи данных. Разработаны волоконно-оптические датчики на основе интерференции [1], отражения [2], вынужденного комбинационного рассеяния [3], [4], вынужденного рассеяния Мандельштама – Бриллюэна [5]–[7], с использованием волоконных решеток Брэгга [8]–[10].

Основные способы измерения (амплитудные, поляризационные, фазовые) являются аналоговыми и связаны, как правило, с измерением незначительных изменений интенсивности оптического излучения на фоне шумов. Проведенные оценки показали, что предельно достижимая минимальная относительная погрешность измерений будет не меньше, чем 10^{-4} [11], [12], а реальные же значения этой величины составляют $(1-6) \cdot 10^{-3}$ [13], [14]. Один из путей повышения точности измерений посредством ВОД является переход к регистрации так называемых неоптических параметров. Широкие функциональные возможности имеют ВОД, в которых выходной сигнал формируется в виде временной последовательности оптических импульсов. Любые воздействия на волоконный световод (ВС), приводящие к изменению оптического пути,

а следовательно, временных параметров распространяющейся импульсной оптической последовательности, позволяют создавать системы, способные измерять широкий круг физических величин (механических, электрических, магнитных, тепловых и т. д.). Информационными параметрами импульсной последовательности в этом случае могут быть: само число импульсов; частота следования импульсов; временные интервалы между импульсами.

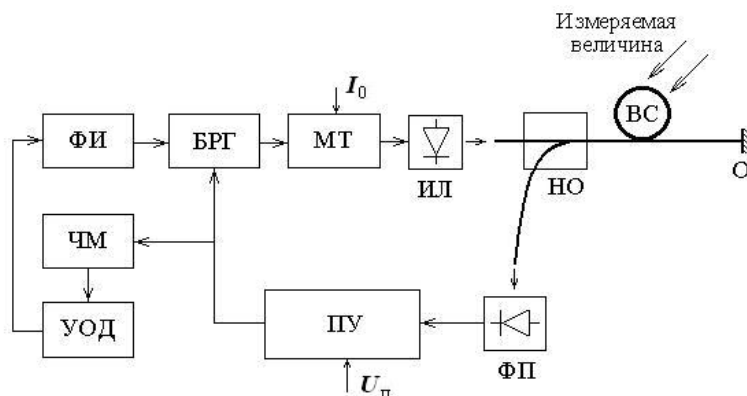
В работах [15], [16] получены автогенерационные (АГ) колебания в замкнутых оптоэлектронных системах с оптоволоконной линией задержки. Особенности автогенерационных систем позволяют реализовать новые методы перестройки частоты автогенератора, связанные с зависимостью частоты автоколебаний от параметров источника излучения и оптоволоконной линии задержки. Используя высокую чувствительность частоты АГ к изменениям задержки распространения излучения в ВС, в [17]–[19] было предложено на этом свойстве создать прецизионные датчики физических величин. Принцип временного (частотного) представления информации был реализован в [18], где в качестве частотного ВОД использовался рециркуляционный оптоэлектронный автогенератор с волоконно-оптической линией задержки (АГ ВОЛЗ) в цепи обратной связи. Была продемонстрирована возможность использования подобных ВОД для измерения температуры, контроля качества соединений оптических элементов, исследования дисперсионных характеристик волоконных световодов. Макет рассматриваемого частотного датчика отличался простотой и надежностью. В [20] теоретически проанализированы фундаментальные источники погрешности измерений частотных датчиков на базе волоконно-оптических автогенераторов, связанные с относительной долговременной нестабильностью частоты рециркуляции (ОДН). Основными причинами являлись: затягивающее действие центральной частоты резонансного усилителя на частоту колебаний волоконно-оптического генератора, вызванная неточным совпадением центральной частоты усилителя и резонатора и обусловленная зависимостью частоты генерации от амплитуды сигнала (т. е. от коэффициента усиления усилителя, пропускания световода и т. д.); разброс момента срабатывания порогового устройства, вызванный шумами фотоприемного устройства; модовая дисперсия, характерная для многомодового световода; субгармонические бифуркации. В работе [21] экспериментально показано, что для того, чтобы избежать погрешностей, связанных с субгармоническими бифуркациями, необходимо поддерживать значение коэффициента усиления с точностью не хуже $\pm 5\%$. Проведенный анализ погрешностей частотного датчика показал, что их сумма не превышает $5 \cdot 10^{-5}$. Данная оценка

учитывает только принципиально неустранимые составляющие погрешности частотных датчиков на основе волоконно-оптических автогенераторов и является оценкой их потенциальной точности. На практике существенный вклад в погрешность измерений вносит также дрейф фазового набег в широкополосном усилителе. Экспериментально для ВС длиной 350 м была достигнута величина ОДН на уровне $7 \cdot 10^{-5}$ [18], что вплотную приближается к теоретически возможной.

1 Рециркуляционный метод измерений

С целью улучшения метрологических характеристик частотных ВОД разработана многофункциональная система измерения физических величин, основанная на регистрации частоты рециркуляции одиночного импульса с его периодическим восстановлением по амплитуде, форме и длительности [22]. Предлагаемая конструкция ВОД позволила уменьшить число источников погрешности измерений, что, как показали экспериментальные исследования, повлекло за собой повышение точности. На рисунке 1.1 представлена функциональная схема волоконно-оптической измерительной системы рециркуляционного типа, реализующей данный метод. Основными оптоэлектронными компонентами являлись многомодовые и одномодовые с распределенной обратной связью InGaAsP/InP-ИЛ типа NEC NDL7701P и NX8504BE с пиковой мощностью излучения 2–10 мВт на длине волны $\lambda = 1,55$ мкм при $I = 1,3 - 1,5 I_n$ (мощность излучения регулировалась величиной тока постоянного смещения I_0); отрезки кварцевого многомодового градиентного ВС типа Corning 50/125CPC6 и Fujikura G50/125 с потерями 0,3 дБ/км и одномодового ступенчатого ВС типа Corning SMF-28 и Alcatel AFC3 с потерями 0,21–0,25 дБ/км длиной 5 м, 25 м, 250 м; в качестве фотоприемников использовались InGaAs-ЛФД типа NEC NR4210, EG&G Optoelectronics C30645E, Mitsubishi PD8042 со спектральной чувствительностью на $\lambda = 1,55$ мкм 0,88–0,94 А/Вт и германиевый лавинный фотодиод ЛФД-2А со спектральной чувствительностью 0,8 А/Вт, быстродействием 2,5 ГГц для коэффициента лавинного умножения $M = 10$.

Принцип действия разработанного ВОД следующий. Формирователь старт-стоповых импульсов ФИ генерировал начальный стартовый импульс и запускал процесс циркуляции. Блок регенерации БРГ по сигналу с ФИ или порогового устройства формировал стандартный по амплитуде, длительности и форме импульс, который после усиления модулятором тока МТ поступал на инжекционный лазер ИЛ. Для исследования особенностей влияния режимов возбуждения ИЛ на стабильность рециркуляции, модулятор тока инжекции ИЛ помимо формирования коротких импульсов с крутыми фронтами должен



ФИ – формирователь старт-стоповых импульсов; БРГ – блок регенерации; МТ – модулятор тока; ИЛ – инжекционный лазер; ВС – волоконный световод; ФП – фотодиод; ПУ – пороговое устройство; ЧМ – частотомер; УОД – устройство обработки данных; НО – направленный ответвитель; О – отражатель

Рисунок 1.1 – Функциональные схемы волоконно-оптической измерительной системы рециркуляционного типа

обеспечивать подачу регулируемого смещения, коррекцию параметров импульсов тока инжекции, осуществление регулировки и стабилизации амплитуды импульсов тока инжекции и т.д. Для реализации перечисленных функций использовали модулятор тока (МТ) инжекционного лазера, обеспечивающий формирование импульсов тока накачки длительностью 3 нс на полувысоте с фронтом $\tau_f = 2$ нс с дискретно меняющейся амплитудой в диапазоне (0-20) мА и плавно регулируемым постоянным смещением I_0 . Величина постоянного смещения ограничена значением порогового тока ИЛ. Использование I_0 позволило уменьшить задержку излучения ИЛ и стабилизировать его частотные параметры. Форма импульса тока инжекции ИЛ контролировалась по падению напряжения на измерительном сопротивлении $R_i = 1$ Ом электронным осциллографом Agilent InfiniiVision MSO-X 2022A. Для стыковки ИЛ и ВС применялись соединительные муфты, обычно используемые для разъемов FC. Импульс излучения ИЛ после некоторой задержки τ_0 , обусловленной временем его распространения по ВС длиной L , через направленный ответвитель НО поступал на фотодиод ФП. Учитывая преимущества применения фотодиодов с внутренним усилением, в качестве фотодиода использовались лавинные фотодиоды с нагрузочным сопротивлением $R_n = 50$ Ом. Это обеспечило устойчивую работу порогового устройства без применения усилительных каскадов. Электрический сигнал с ЛФД направляли прямо на пороговое устройство ПУ, на выходе которого в момент превышения величины сигнала значения порогового уровня возникал импульс, управлявший БРГ. Таким образом, цикл рециркуляции замыкался. Пороговое устройство (ПУ) представляло собой комбинацию компаратора напряжения для сравнения аналоговых величин

типа Am685 и преобразователя уровня эмиттерно-связанная логика (ЭСЛ) – транзисторно-транзисторная логика (ТТЛ) серии F100125. Минимальный пороговый уровень компаратора, обеспечивающий устойчивый процесс рециркуляции, составлял 2 мВ. Цифровой блок электронной части контура собран с использованием технологии ТТЛ, широко распространенной в технике из-за высокой помехоустойчивости, умеренного потребления энергии, хорошей нагрузочной способности и малой стоимости. Регистрация частоты рециркуляции производилась частотомером Agilent Technologies 53132A в диапазоне частот до 225 МГц. Программный пакет Agilent IntuiLink обеспечивал легкий доступ к данным частотомера со стороны компьютера. Обработка полученных данных осуществлялась устройством обработки данных УОД на основе РС с помощью специально разработанного программного обеспечения. Рециркуляцию прекращали поступлением стоп-импульса с ФИ на один из входов БРГ.

Одна из основных причин, влияющих на разрешающую способность ВОД, это относительная долговременная нестабильность частоты рециркуляции, являющаяся результатом наложения целого ряда независимых друг от друга явлений. Наиболее существенное влияние на структуру ОДН оказывают следующие факторы: временной джиттер в инжекционном лазере, возникающий из-за случайных изменений времени задержки между импульсом тока накачки и излучением лазера; нестабильность времени отклика лавинного фотодиода; временной разброс моментов срабатывания порогового решающего устройства, который связан с изменением амплитуды входного сигнала из-за флуктуаций мощности излучения ИЛ, дробовых шумов ЛФД, тепловых шумов нагрузочного сопротивления,

шумов входных каскадов усилителя и т. д. Сложный характер флуктуаций временных параметров требует проведения специальных экспериментальных исследований.

Экспериментально получена относительная долговременная нестабильность частоты рециркуляции χ в зависимости от величины порога срабатывания блока регенерации U_n при времени измерения частотомера 1 с и времени наблюдения 60 мин для различных значений тока постоянного смещения ИЛ. Анализ зависимостей ОДН от величины порога срабатывания ПУ показал, что в интервале $U_n = (0,3-0,8)U_a$, где U_a – максимальная амплитуда сигнала на входе компаратора, величина χ практически не изменяется, поскольку порог срабатывания соответствовал линейному участку фронта импульса. Ухудшение ОДН при дальнейшем увеличении порога обусловлено увеличивающимся влиянием флуктуаций амплитуды циркулирующего импульса на моменты срабатывания блока регенерации на нелинейном участке фронта импульса. Уменьшение величины U_n приводило к эффекту самовозбуждения порогового устройства и срыву рециркуляции. Следовательно, для получения наибольшей стабильности частоты рециркуляции величина срабатывания порога устройства регенерации должна находиться в окрестностях половины амплитуды сигнального импульса. Увеличение тока накачки ИЛ повышало стабильность частоты рециркуляции в ВОД и расширяло диапазон перестройки U_n .

Динамика изменения ОДН частоты рециркуляции при различных длинах ВС представлена на рисунке 1.2. Экспериментальные значения начинали фиксироваться через 20 мин с момента запуска циркуляции, когда система входила в относительно стабильное состояние, при следующих параметрах: $I_0 = 0,9 I_n$; $U_n \approx 0,5 U_a$. В течение одной минуты фиксировалось 10 значений f_i , рассчитывалась величина ОДН. Далее следовала временная пауза, равная 4 мин, затем измерения повторялись. Из анализа данных на рисунке 1.2 следует, что при увеличении частоты рециркуляции относительная долговременная нестабильность нелинейно увеличивается (с $2 \cdot 10^{-6}$ до $4 \cdot 10^{-6}$ при уменьшении длины ВС на порядок (с 250 м до 25 м) и от $4 \cdot 10^{-6}$ до $3 \cdot 10^{-5}$ при уменьшении длины ВС еще более чем на порядок (с 25 м до 5 м)). Очевидно, это связано с тем, что при увеличении частоты рециркуляции за одно и тоже время измерений происходит большее количество срабатываний элементов системы и их разброс во времени увеличивается, т.е. сильнее проявляется свойство ВОД накапливать флуктуации в процессе рециркуляции. Согласно данным рисунка 1.2, еще одним способом повышения стабильности частоты рециркуляции является увеличение длины ВС, что связано с

уменьшением числа актов преобразования информационных сигналов «ток – свет – ток» в единицу времени и, как следствие, различной скоростью накопления ошибок.

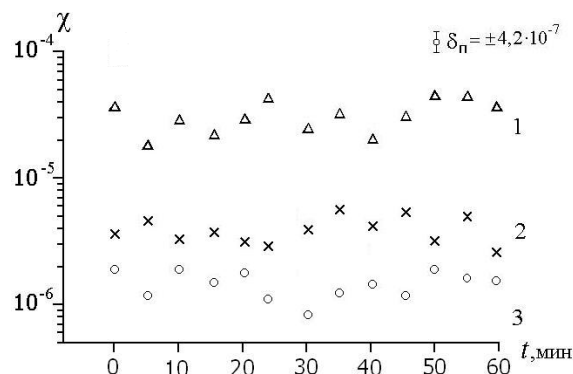


Рисунок 1.2 – Зависимость относительной долговременной нестабильности частоты рециркуляции χ от времени наблюдения t при различных величинах тока постоянного смещения ИЛ и значениях длины ВС ($I_0 = 0,9 I_n$; **1** – $L = 5$ м; **2** – $L = 25$ м; **3** – $L = 250$ м)

Таким образом, для длины ВС порядка нескольких сотен метров максимальная ОДН χ_{\max} не превышает $2 \cdot 10^{-6}$, что более чем на порядок меньше, чем для рециркуляционных ВОД на основе автоколебаний.

2 Разрешающая способность ВОД температуры

Используя результаты измерений, полученные в предыдущем параграфе, в данном параграфе проведена численная оценка разрешающей способности оптоволоконных систем измерения температуры рециркуляционного типа (ВОДТ) [23], [24], в которых чувствительный элемент представлял собой отрезок кварцевого ВС с металлическим покрытием. Под разрешающей способностью будем понимать величину минимального изменения температуры, которую теоретически может достоверно зафиксировать датчик, и определяемую используемыми физическими принципами измерений. При этом считается, что чем меньше эта величина, тем разрешающая способность выше. Разрешающая способность ВОДТ рециркуляционного типа определяется следующим условием: дополнительное относительное приращение (либо уменьшение) частоты рециркуляции импульса $\Delta f/f$ под воздействием температуры должно превышать максимальную величину относительной долговременной нестабильности частоты рециркуляции χ_{\max} , обусловленную влиянием не связанных с измеряемой физической величиной внешних и внутренних дестабилизирующих факторов. Выражение для анализа погрешности ВОДТ в широком температурном диапазоне задается формулой:

$$\Delta\theta_{\min} = \frac{\chi_{\max}}{\left\{ \left(1 - \frac{n^2(\theta)}{2} [p_{12} - \nu(p_{11} + p_{12})] \right) \alpha(\theta) + \frac{1}{n(\theta)} \frac{dn}{d\theta} \right\}} \times \frac{L}{L_0^0(1 - \chi_{\max})},$$

где L – длина волоконно-оптической секции; L_0^0 – начальная длина ВС, подвергающегося температурному воздействию (фиксируемая при начальной температуре); χ_{\max} – максимальная величина относительной долговременной нестабильности частоты рециркуляции для данной длины ВС; $n(\theta)$ – показатель преломления сердцевинки ВС; c – скорость света в вакууме; $\alpha(\theta)$ – температурный коэффициент линейного расширения ВС; $dn/d\theta$ – температурный коэффициент изменения показателя преломления ВС; для кварцевых волокон $p_{11} = 0,113$ и $p_{12} = 0,252$ – коэффициенты Поккельса; ν – отношение Пуассона.

Для температур до 200°C зависимость $n(\theta)$ аппроксимируется, как правило, линейной функцией [25], [26]. Однако, как показывают экспериментальные данные [27], при расширении температурного диапазона измерений зависимость $n(\theta)$ более точно описывается выражением:

$$n(\theta) = n_0 \left[1 + a(\theta - \theta_0) + b(\theta - \theta_0)^2 \right],$$

где a и b – температурные коэффициенты, характеризующие изменение показателя преломления при повышении температуры на 1°C ; и, соответственно,

$$\frac{dn}{d\theta} = n_0 (a + 2b(\theta - \theta_0)).$$

Возрастание $dn/d\theta$ с ростом температуры подтверждается результатами работы [28].

В датчиках температуры, как правило, используются ВС с металлическим покрытием. Это повышает точность датчика и обеспечивает практически полную нечувствительность датчика к давлению. Поэтому результирующий коэффициент линейного теплового расширения ВС в отсутствие проскальзывания между слоями рассчитывается как [29]:

$$\alpha = \frac{\sum_i S_i E_i \alpha_i}{\sum_i S_i E_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где S_i – площадь сечения; E_i – модуль Юнга; $i = 1$ – сердцевина волокна; $i = 2$ – оболочка; $i = 3$ – покрытие ВС.

Поскольку для стандартного ММФ 50/125 мкм эллиптичность сердцевинки не превышает 5%, некруглость оболочки $< 2\%$, а неконцентричность сердцевинки и оболочки < 3 мкм [29], можно моделировать ВС как совокупность концентрических окружностей. Для многомодового

световода диаметр сердцевинки $D_1 = 50$ мкм, диаметр оболочки $D_2 = 125$ мкм, толщина металлического покрытия h_3 может изменяться от 5 мкм до 2 мм. Очевидно, что

$$S_1 = \frac{\pi D_1^2}{4},$$

$$S_2 = \frac{\pi(D_1 + 2h_2)^2}{4} - \frac{\pi D_1^2}{4} = \pi h_2 (D_1 + h_2),$$

где

$$h_2 = \frac{D_2 - D_1}{2}$$

и

$$S_3 = \frac{\pi(D_2 + 2h_3)^2}{4} - \frac{\pi D_2^2}{4} = \pi h_3 (D_2 + h_3).$$

Показатель преломления ВС зависит не только от температурного воздействия, но и от длины волны излучения и способа легирования. Спектральная зависимость показателя преломления стекла наиболее часто описывается трехчленной формулой Селмейера:

$$n = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^3 \frac{A_i \lambda^2}{\lambda^2 - l_i^2}}.$$

Данная формула содержит шесть коэффициентов ($A_1, A_2, A_3, l_1, l_2, l_3$), характеризующих кварцевое стекло в зависимости от типа легирования. Они определяются экспериментально. С помощью этой формулы можно вычислить показатели преломления для любой длины волны в интервале от 365 нм до 2325 нм с относительной точностью около $\pm 5 \cdot 10^{-6}$. Зависимость модуля Юнга от температуры для сердцевинки волокна имеет вид [30]:

$$E_1 = E_0 + A(\theta - \theta_0) - B(\theta - \theta_0)^2,$$

где E_0 – модуль Юнга при температуре калибровки; A и B – параметры аппроксимации экспериментальных зависимостей, индивидуальные для каждого типа волокна. Для наших расчетов были взяты следующие значения: $A = 1,59 \cdot 10^7 \text{ Па} \cdot \text{C}^{-1}$ и $B = 9,97 \cdot 10^3 \text{ Па} \cdot \text{C}^{-2}$. Характеристики ВС для комнатной температуры представлены в таблице 2.1.

Поскольку линейный коэффициент теплового расширения для металлического покрытия больше, чем для кварцевого материала сердцевинки и оболочки ВС, то температурное расширение покрытия вызывает дополнительную деформацию ВС. Коэффициент линейного расширения металла зависит от изменения температурного интервала нагрева, как

$$\alpha_3 = a_0 + b_0(\theta - \theta_0),$$

где a_0 и b_0 – константы, определяемые типом металла (таблица 2.2).

Таблица 2.1 – Значения показателя преломления, температурного коэффициента линейного расширения, коэффициента Пуассона и модуля Юнга кварцевых волокон, легированных различными оксидами

Состав (в мол. %)	$n_0 (\lambda = 1,55 \mu\text{м})$		$\alpha_{1,2} \cdot 10^{-7}, \text{ } ^\circ \text{C}^{-1}$	ν	$E_0, \text{ ГПа}$
	$a, 10^{-6} \text{ } ^\circ \text{C}^{-1}$	$b, 10^{-9} \text{ } ^\circ \text{C}^{-2}$			
SiO ₂	1,4440		5,5	0,1533	65
	6,5	5,1			
13.5% GeO ₂ , 86.5% SiO ₂	1,4655		25,8575	0,159	72
	8	5,9			
9.1% P ₂ O ₅ , 90.9% SiO ₂	1,4589		25,5569	0,1651	75
	4,3	3,8			
13.3% B ₂ O ₃ , 86.7% SiO ₂	1,4386		18,1093	0,1743	77
	9,4	5,9			

Таблица 2.2 – Данные по металлическим оболочкам

Материал покрытия	$a_0 \cdot 10^{-6}, \text{ } ^\circ \text{C}^{-1}$	$b_0 \cdot 10^{-9}, \text{ } ^\circ \text{C}^{-2}$	$E_3, \text{ ГПа}$
Al	22,9	8,9	71
Ni	13,4	5,2	204
Cu	16,5	7,7	110

3 Результаты численного моделирования

Один из путей уменьшения $\Delta\theta_{\min}$ – это увеличение части ВС, которая подвергается температурному воздействию. Однако, в зависимости от условий эксплуатации, оставшаяся часть ВС должна обеспечивать расстояние, достаточное для надежной термоизоляции остальных блоков ВОДТ. При длинах волокна 100–500 м величина L^0 может составлять до 90% от общей длины ВС L . Если провести сравнительные исследования разрешающей способности ВОДТ в зависимости от типа металлического покрытия ВС, в качестве которого выступали такие металлы, как алюминий (Al), никель (Ni) и медь (Cu), то из рисунка 3.1 (а) видно, что наименьшие значения $\Delta\theta_{\min}$ достигаются при использовании волокна, защитное покрытие которого состоит из алюминия, что довольно хорошо согласуется с требованиями доступности, дешевизны и прочности материала. Получено, что при $\theta = 125^\circ \text{C}$ и $L^0/L = 0,8$ значение $\Delta\theta_{\min}$ уменьшается от $0,3^\circ \text{C}$ (полимерная оболочка) до $0,12^\circ \text{C}$ (алюминиевое покрытие). Поскольку важной метрологической характеристикой измерительной системы является изменение разрешающей способности ВОДТ в широком диапазоне измеряемых температур, были проведены сравнительные исследования данной величины в интервале температур от 0°C до плюс 500°C . Благодаря температурной зависимости показателя преломления ВС и коэффициента линейного расширения металлического покрытия при росте температуры разрешающая способность улучшается приблизительно в 1,3–1,5 раза, что и было представлено на рисунке 3.1 (б).

Максимальная измеряемая температура ВОДТ ограничивается не только температурой

плавления металлического покрытия и термическим порогом разрушения самого ВС, но и максимальным напряжением, которое может испытывать ВС при растяжении. Для того чтобы волокно могло выдерживать много циклов измерений в течение продолжительного времени, величина напряжения не должна превышать 1 ГПа. Экспериментальные исследования [31], [32] показали, что при многократных циклах растяжения-сжатия допускается относительное удлинение волокна на величину до 1% при сроке службы в пределах 10 лет без ухудшения его свойств в течение всего времени эксплуатации. Поскольку коэффициент температурного линейного расширения металлического покрытия значительно больше, чем этот коэффициент для кварцевого волокна, было проведено моделирование зависимости относительного удлинения ВС. В результате получено, что для того чтобы $\Delta L/L$ не превышало 1%, измеряемая температура не должна превышать 500°C .

Проведены исследования влияния толщины металлического покрытия на разрешающую способность ВОДТ, поскольку данный параметр напрямую связан со стоимостью и массой ВС. Проведенные расчеты при $\theta = 125^\circ \text{C}$ и 500°C для $L^0/L = 0,8$ показали, что подбором толщины металлического покрытия можно в 2 раза увеличить разрешающую способность, однако в тоже время ее наращивание с целью увеличения разрешающей способности целесообразно до величин не более 1 мм (рисунок 3.2).

Заключение

Таким образом, рассмотрена структура волоконно-оптического датчика, позволяющего реализовать новый метод измерений, основанный на регистрации частоты рециркуляции одиночных оптических импульсов с их периодическим восстановлением по форме, амплитуде и длительности. Проведенные экспериментальные исследования показали, что выбирая соответствующие режимы работы элементов оптоэлектронного контура, можно получить относительно долговременную нестабильность частоты

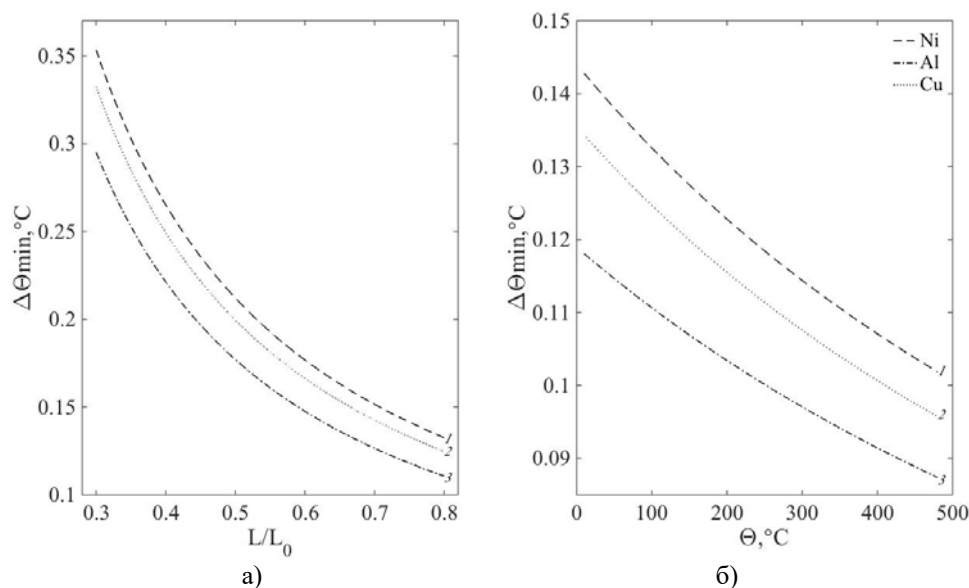


Рисунок 3.1 – Оценки разрешающей способности ВОДТ для волокна с сердцевиной, легированной оксидом германия и защитным покрытием из никеля (1), меди (2) и алюминия (3):
 а) относительно длины участка, подвергающегося температурному воздействию,
 б) в широком температурном диапазоне

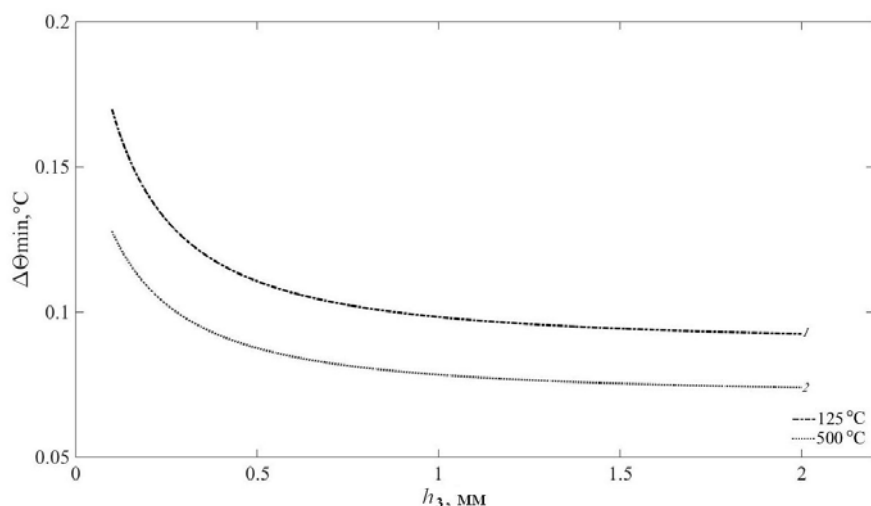


Рисунок 3.2 – Зависимость разрешающей способности ВОДТ от изменения толщины защитного металлического (Al) покрытия

рециркуляции не более $2 \cdot 10^{-6}$ при времени измерения 1 с и времени наблюдения 1 час. Данная величина более чем на порядок меньше, чем ОДН для ВОД на основе автоколебаний. Разработана математическая модель, позволяющая оценить разрешающую способность волоконно-оптических датчиков рециркуляционного типа, использующих ВС с металлическим покрытием в качестве чувствительного элемента, что обеспечивает увеличение относительного изменения оптического пути при изменении температуры на один градус. Использование ВС с металлическим покрытием устраняет также одновременное влияние нескольких факторов, приводящих к изменению периода рециркуляции, например,

температуры и давления. Установлено, что разрешающая способность таких ВОДТ по сравнению с ВОДТ на основе традиционных ВС с кремнийорганическими и пластмассовыми покрытиями увеличивается в 2,5–3 раза в зависимости от толщины алюминиевого покрытия и не превышает 0,12–0,09° С для всего диапазона измерений от 0° С до 500° С. Если сравнивать с наиболее распространенными амплитудными волоконно-оптическими датчиками температуры на основе поглощения света полупроводником, то рециркуляционные ВОДТ могут превосходить их по точности в 1,5–2 раза в области комнатных температур [33] и в 3–4 раз для температур порядка 200–300° С [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Волоконно-оптические датчики / Т. Окуси [и др.]; пер. с япон. – Л.: Энергоатомиздат, 1990. – 256 с.
2. Волоконно-оптические датчики / под ред. Э. Удда. – М.: Техносфера, 2008 – 520 с.
3. *Analysis of distributed temperature sensing based on Raman scattering using OTDR coding and discrete Raman amplification* / G. Bolognini [et al.] // *Measurement Science and Technology*. – 2007. – Vol. 18, № 10. – P. 3211–3218.
4. *Liu, D.* Temperature performance of Raman scattering in data fiber and its application in distributed temperature fiber-optic sensor / D. Liu, S. Liu, H. Liu // *Frontiers of Optoelectronics in China*. – 2009. – Vol. 2, № 2. – P. 159–162.
5. *Minardo, A.* Stimulated Brillouin scattering modeling for high-resolution, time-domain distributed sensing / A. Minardo, R. Bernini, L. Zeni // *Optics Express*. – 2007. – Vol. 15, № 16. – P. 10397–10407.
6. *Distributed fiber temperature and strain sensor using coherent radio-frequency detection of spontaneous Brillouin scattering* / J. Geng [et al.] // *Applied Optics*. – 2007. – Vol. 46, № 23. – P. 5928–5932.
7. *Wang, F.* Using pulse with a dark base to achieve high spatial and frequency resolution for the distributed Brillouin sensor / F. Wang, X. Bao, L. Chen // *Optics Letters*. – 2008. – Vol. 33, № 22. – P. 2707–2709.
8. *Processing and microstructures of fiber Bragg grating sensors embedded in stainless steel* / Xiaochun Li [et al.] // *Metallurgical and Materials Transactions A*. – 2002. – Vol. 33A, № 9. – P. 3019–3024.
9. *Quasi-distributed fiber Bragg grating sensor system based on a Fourier domain mode locking fiber laser* / Y. Wang [et al.] // *Laser Physics*. – 2009. – Vol. 19, № 3. – P. 450–454.
10. *Li, En-bang.* Improving dynamic response of a temperature-only FBG sensor / En-bang Li, Jian-quan Yao, Wei-gang Zhang // *Optoelectronics Letter*. – 2006. – Vol. 2, № 2. – P. 100–103.
11. Демьяненко, П.А. Предельные возможности аналоговых оптических датчиков в составе ВОС / П.А. Демьяненко // *Радиотехника*. – 1988. – № 2. – С. 88–90.
12. Демьяненко, П.А. Измерительные преобразователи на основе волоконно-оптических датчиков / П.А. Демьяненко, Ю.Ф. Зиньковский, М.И. Прокофьев // *Фотон-Экспресс*. – 2005. – № 6. – С. 181–187.
13. *Wang, C.* Fiber loop ringdown for physical sensor development: pressure sensor / C. Wang, S.T. Scherrer // *Applied Optics*. – 2004. – Vol. 43, № 35. – P. 6458–6464.
14. *Highly sensitive and reconfigurable fiber optic current sensor by optical recirculating in a fiber loop* / J. Du [et al.] // *Optics Express*. – 2016. – Vol. 24, № 16. – P. 17980–17988.
15. *Nakazawa, M.* Self-sustained intensity oscillation of a laser diode introduced by a delayed electrical feedback using an optical fiber and an electrical amplifier / M. Nakazawa, M. Tokuda, N. Uchida // *Applied Physics Letters*. – 1981. – Vol. 39, № 5. – P. 379–381.
16. *Генерация радиосигналов в системе лазер-оптическая линия задержки* / В.В. Григорьянц [и др.] // *Квантовая электроника*. – 1984. – Т. 11, № 4. – С. 766–773.
17. *A laser diode with feedback using a fibre delay line as a stable-frequency signal generator and potential fibre sensor* / V.V. Grigor'yants [et al.] // *Optical and Quantum Electronics*. – 1985. – Vol. 17, № 4. – P. 263–267.
18. *Параметрическая стабильность автомодуляционных колебаний в кольцевой системе лазер-волоконно-оптическая линия задержки* / В.В. Григорьянц [и др.] // *Квантовая электроника*. – 1986. – Т. 13, № 12. – С. 2408–2413.
19. Волоконно-оптический датчик давления: а.с. 1506313 СССР, G 01 L 11/00 / Б.Г. Горшков, А.Ю. Кузин. – № 4375126/24-10; заявл. 28.12.87; дата публ.: 07.09.89.
20. *Иванов, В.С.* Волоконно-оптические датчики как перспективные элементы системы дистанционной передачи размеров единиц физических величин и их многофункциональных преобразований / В.С. Иванов, А.Ф. Котюк, А.В. Кузин // *Измерительная техника*. – 1998. – № 10. – С. 22–33.
21. *Кузин, А.Ю.* Переход от упорядоченности к хаосу в волоконно-оптическом датчике на базе нелинейной автоколебательной системы / А.Ю. Кузин, В.Н. Храменков // *Датчики и преобразователи информации систем измерения, контроля и управления: Сб. материалов XII науч.-техн. конф. с участием зарубежных специалистов, Судак, 23–30 мая 2000 г.* / Министерство образования РФ, Российская метрологическая академия, МГИЭМ – Москва, 2000. – С. 8–9.
22. *Поляков, А.В.* Частотная волоконно-оптическая измерительная система / А.В. Поляков // *Датчики и системы*. – 2008. – № 1. – С. 29–32.
23. *Polyakov, A.V.* Quasi-distributed recirculation fiber-optic temperature sensor / A.V. Polyakov, M.A. Ksenofontov // *Optical Memory and Neural Networks*. – 2009. – Vol. 18, № 4. – P. 271–277.
24. *Поляков, А.В.* Квазираспределенная волоконно-оптическая система измерения температуры рециркуляционного типа на основе технологии спектрального мультиплексирования / А.В. Поляков, Т.Д. Прокопенкова // *Приборы и методы измерений*. – 2017. – Т. 8, № 2. – С. 131–141.
25. *Jasny, J.* Wavelength- and temperature-dependent measurement of refractive indices / J. Jasny, B. Nickel, P. Borowicz // *Journal of the Optical Society of America B*. – 2004. – Vol. 21, № 4. – P. 729–738.

26. *Interferometric measurement of the temperature dependence of an index of refraction: application to fused silica* / P.-E. Dupouy [et al.] // *Applied Optics*. – 2010. – Vol. 49, № 4. – P. 678–682.
27. *Wang, Zhi-Yong* Temperature dependence of the refractive index of optical fibers / Zhi-Yong Wang, Qi Qiu, Shuang-Jin Shi // *Chin. Phys. B*. – 2014. – Vol. 23, № 3. – P. 034201-1–034201-1.
28. *Jewell, J.M.* Interferometric method for concurrent measurement of thermo-optic and thermal expansion coefficients / J. M. Jewell, C. Askins, I. D. Aggarwal // *Applied Optics*. – 1991. – Vol. 30, № 25. – P. 3656–3660.
29. *Температуростойкие волоконно-оптические модули* / А.А. Абрамов [и др.] // *Труды ИОФАН*. – 1987. – Т. 5. – С. 72–82.
30. *Лунин, Б.С.* О температурной зависимости модуля Юнга чистых кварцевых стекол / Б.С. Лунин, С.Н. Торбин // *Вестн. Моск. ун-та. Серия 2. Химия*. – 2000. – Т. 41. – С. 172–173.
31. *Бондаренко, О.В.* Выбор конструкции самонесущего оптического кабеля по растягивающим нагрузкам / О.В. Бондаренко, Д.В. Иоргачев, Л.Л. Мурадян // *Технология и конструирование в электронной аппаратуре*. – 2001. – № 1. – С. 18–21.
32. *Возможность увеличения срока службы волоконно-оптических линий связи* / О.И. Косяков [и др.] // *Известия Вузов. Приборостроение*. – 2015. – Т. 58, № 7. – С. 561–563.
33. *Кондрусев, А.В.* Расчет характеристик чувствительного элемента волоконно-оптического датчика температуры / А.В. Кондрусев, С.А. Миронов // *Известия ВУЗов. Приборостроение*. – 2003. – Т. 46, № 6. – С. 49–52.

Поступила в редакцию 28.01.09.

УДК 524.82

**МАССИВНОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ В ПЛОСКОМ
ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ.
I. КАЛИБРОВОЧНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ И ПОЛЕВЫЕ УРАВНЕНИЯ**

М.А. Сердюкова, А.Н. Сердюков

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

**A MASSIVE GRAVITATIONAL FIELD IN FLAT SPACETIME.
I. GAUGE INVARIANCE AND FIELD EQUATIONS**

M.A. Serdyukova, A.N. Serdyukov

F. Scorina Gomel State University

Каноническое линейное массивное бесспиновое поле представлено в качестве калибровочно-инвариантной модели гравитации с квадратичным самодействием в рамках специальной теории относительности.

Ключевые слова: скалярная гравитация, массивный гравитон, масштабная инвариантность, гравитационно-зависимая масса.

The canonical linear theory of a massive spinless field is adapted as special-relativistic gauge-invariant model of gravity with a quadratic self-action.

Keywords: scalar gravity, massive graviton, scale invariance, gravitationally dependent mass.

Introduction

Critically rethinking the mathematical methods and physical content of the general theory of relativity, Anatoly Logunov recalled in [1] a long-standing problem of breaking the strong equivalence principle arising at the intersection of gravity and electromagnetism. The essence of this problem of principle raised by Bondi and Gold in [2] is that, unlike a massive electrically neutral point particle, a very similar but charged particle, freely falling in an arbitrary non-uniform gravitational field, emits electromagnetic radiation and appears therefore to be slowly accelerated in a coordinate frame falling with it, revealing thereby the presence of a local gravitational field to a freely falling observer. The conclusion regarding the emergence of electromagnetic self-action causing a non-geodesic free motion of a charged particle in a static gravitational field is supported by a number of theoretical calculations performed within the gravitationally modified electrodynamics inspired by general relativity (see, for example, the papers by Parrott [3] or Poisson et al. [4]). This indisputable violation by the electromagnetic interaction of one of the conceptual conclusions of Einstein's theory of gravitation indicates the approximate nature of the strong principle of equivalence laying in its basis.

On the other hand, as argued Logunov in [1] starting from the Emmy Noether theorem [6] (see §6), the general theory of relativity with its Riemannian geometry of space-time admits no the formulation of energy conservation law (this fact was established by David Hilbert immediately after the advent

of this theory [5, pp. 16–17]), as well as of all other fundamental special relativistic conservation laws. This fact not only exposes the limited validity of Einstein's theory of gravitation but also makes doubtful its suitability as a fundamental physical theory of one of the fourth existing fundamental interactions. It should be recalled that for this reason, Logunov and his co-authors back in the 1980s proposed to abandon the general theory of relativity replacing it with a suitable special-relativistic theory of force field (see [1], [7]–[10]).

Looking back in time at several decades of unsuccessful attempts to reconcile the general theory of relativity and quantum theory, we do not find gravity in the short list of fundamental interactions unified within the modern Standard Model of particles and fields. Recall in this connection that this was the heroic time of the last century when quantum electrodynamics, electro-weak unification, quantum chromodynamics, and finally the Standard Model of particles that joined together known fundamental interactions except gravitational, were successfully developed. Steven Weinberg is undoubtedly right in his asserting that “the geometrical approach has driven a wedge between general relativity and the theory of elementary particles” (quoted from the Preface in [11]).

It should be added that the absence in general relativity of an unambiguous positive-definite expression of the energy density of the gravitational field significantly limits the effectiveness of this theory in specific physical applications and makes it unsuitable for solving mass-energy problems

presently accumulated in the modern cosmology. Today this circumstance is manifested in the disappointing fact of the absolute helplessness of general relativity in explaining the role of the gravitational interaction in the appearance of so-called “Pioneer anomaly”, in solving the problem of “missing mass”, in clarification of the nature of “dark energy” which astronomers and cosmologists have encountered more than twenty years ago (a brief remark on the last subject see also in [12, pp. 83–84]).

Physically ridiculous conclusions regarding the concept of mass-energy that arise within the framework of general relativity but beyond the domain of its applicability, are fatal to the theory itself. A very striking example of this is a well-known speculation of Misner, Thorne, and Wheeler around the law of energy conservation in the presence of gravity. In their comprehensive book [13], hiding the failures of Einstein’s theory with the laws of energy-momentum conservation under the invented for this case imaginary nonlocalizability of the energy of the gravitational field, we find the conclusion that, if spacetime is not flat at infinity, then, according to general relativity, “one must completely abandon <...> the total mass-energy of the gravitating source”, which in this case “is a limited concept” (see page 463).

But authors of [13] themselves do not notice that if the energy of gravitational field is illusive in reality, then the general theory of relativity itself must be considered as a limited concept. Indeed, the hypothesis of equivalence of two masses, inertial and gravitational, is the starting point of any theoretical model of gravitation. Of course, both concepts of these masses should have a clearly defined physical meaning, whereas in the stipulated case we “must completely abandon” [13] at least one of them. In above-mentioned work [7], Denisov and Logunov speak directly about this fact as an internal contradiction of Einstein’s theory of gravitation. They noted the physically meaningless dependence of the result of calculating the inertial mass of the gravitating physical system on the choice of curvilinear three-dimensional coordinates, demonstrated, for example, in [13]–[17]. This fact surely excludes any reasoning about the relationship between the gravitational mass of any body and its inertial mass whose definition is indistinct or do not appear at all. The peak of this absurdity is a non-zero “energy density” of flat empty space resulting from the use of the metric tensor corresponding to the polar coordinates (see original calculations in [18] that give an infinite total “energy”; their comments can be found in [14, Section 61]).

The experience of the application of Einstein’s theory of gravitation to the universe led the modern cosmology to the unphysical domain of mythical concepts, such as exploding universe, inflaton, dark mass, dark energy, quintessence, and the creation of

universes from nothing. It teaches us that the nature cannot be held hostage to any physical theory, even if it, similar to the general theory of relativity, possesses “the beauty and elegance”, according to Dirac [19], and their equations are considered “the greatest achievements of human genius” in words of Fock [20]. As Feynman reminded us in a different context that, “If we find that certain mathematical assumptions lead to a logically inconsistent description of Nature, we change the assumptions, not Nature” [21, Section 13.3].

The unconventional skeptical opinion of Steven Weinberg on the role of geometric ideas in gravity, expressed by him in [11] (see Preface, pp. vii–viii and Section 6.9), stimulated our resolve, completely abandoning Einstein interpretation of the equivalence principle, to try to construct a model of gravitation capable of solving the dark energy problem in the universe and will allow us to take a fresh look at the other problems accumulated today in cosmology.

In this paper, we propose one of the possible dynamical extensions of Newtonian static gravity developed within the constraints followed from the well-known fundamental principles underlying the majority of modern physical theories. This special-relativistic gauge-invariant generalization of the theory of static gravity coincides with the canonical linear theory of a spinless massive field, but it is characterized by a number of features emerged beyond the standard model of particles and fields, specific only of this, fourth type of fundamental interactions. Fully trusting and relying in this way on the fundamental principles of modern theoretical physics, we will try in this paper again to answer the problem questioned 75 years ago by Hermann Weil: “*How far can one get with a linear field theory of gravitation in flat space-time?*” [22]. In order to do this without the risk of “throwing the baby out with the bath water”, we had first to overcome the doubts associated with very known experimental tests, and, above all, with the displacement of the Mercury’s perihelion and the gravitational deflection of the light beam as it was until now with respect to the scalar and other models of gravitation. We postpone the solution and interpretation of these tests until better times, when we can take into account the cosmological effects associated with the background gravitational field.

In the subsequent parts of this work, relying solely on the proposed gauge-invariant model of a massive scalar gravitational field in combination with the cosmological principle, we arrive at an alternative scenario of the universe evolution, which is in perfect agreement with the old and new astronomical observations. We will also show that the proposed scalar model of gravity rejects the cosmological expansion and clears the science of the universe from the hundred-year layering of *ad hoc* hypotheses that are far from real physics.

1 Nordstrom's mechanics

In our hope to understand the real physics of evolutionary processes in the universe we are faced with a lack of necessary for this a consistent dynamic theory of a coupled to mass attractive field, which, similar to Maxwell's electrodynamics, would be compatible with a clear formulation of the law of conservation of energy *with a positive-definite energy density*. As was explained in detail by Misner, Thorne, and Wheeler [13], the strong equivalence principle, or ultimately the Riemannian geometry of pseudo-Euclidean spacetime, prevents the existence in general relativity of a fully functional energy conservation law in any dynamical system where a gravitational field is taken into account. The disappointing conclusion on the "nonlocalizability" of the energy of the gravitational field tell us that this theory is quite useless to investigate the participation of all the gravitating matter in the universe in the formation of the background energy associated with the collective gravitational field. For this reason, in order to exclude the adjective "dark" from the terms "dark energy" and "dark matter" firmly entrenched in modern cosmology, the replacement of general relativity in future cosmological applications with a field theoretical model of gravity, which would contain a clearly formulated law of energy conservation, and necessarily with positive-definite energy density of the gravitational field, seems to be the only productive recommendation. It turns out that the only way to understand the energetic evolutionary processes of the universe is to develop the theory of the attractive field with a positive definite energy density is to use a scalar field.

In order to prevent in what follows the troubles with the disappearance of the laws of conservation associated with the Poincaré group symmetry, we emphatically assume that the physical space-time is special-relativistic, that is *a priori* flat, both locally and globally. We will use in this case the Minkowski metric tensor $\eta^{\mu\nu}$ with signature $(-, +, +, +)$. Therefore the line element ds will be determined in terms of the four-dimensional coordinate differentials

$$dx^\mu = (cdt, dx^i) = (cdt, d\mathbf{r}), \quad (1.1)$$

corresponding to an infinitesimal displacement in space-time, by the expression

$$ds^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (1.2)$$

We next proceed to derive the equation of motion of classical particles in the presence of a scalar field coupled to their mass. For this purpose we use the Poincare-invariant spatial density of the joined Lagrangian $\mathcal{L}_{\text{matt}} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}$ of gravitationally interacting particles (dustlike matter) given by the expression

$$\mathcal{L}_{\text{matt}} = -c^2 \sum_a m_a \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} \phi^2 \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad (1.3)$$

where the "nominal" mass m_a of individual particle (its gravitational charge) and the primary field vari-

able ϕ are "non-minimally" coupled. For a single particle in the presence of a gravitational field from the density (1.3), it follows the joined Lagrangian, which we shall write down in the form [23]:

$$L_p = -c^2 m \phi^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (1.4)$$

It is to be noted here that the use by Einstein and Fokker in [24] of the conformally flat metric ($g_{\mu\nu} = \phi^4 \eta_{\mu\nu}$ – in our notation) is not quite equivalent to the Lagrangian formalism used below. This is because the metric approach fails when $\phi \rightarrow 0$, so that the Riemannian manifold of spacetime degenerates into a point, if we are talking, for example, about a background metric.

The practice in manipulating a scalar field coupled to the mass each time gave rise different authors to a Lagrangian very similar to (1.4) with multiplicative inclusion of the interaction in the Lagrangian of a free particle. Naturally, in all these cases, the same form of the equation of motion of the test particle in the external gravitational field was reproduced. Thus, independently of the specific definition of the basic field variable and the form of the field equations (usually non-linear) proposed occasionally by different authors, which tried to develop the theory of gravity within the scalar approach, the motion of a test particle in the scalar gravitational field obeys the equation that was obtained for the first time by Nordström in [25]–[27].

Now we can derive Nordström's equation of motion of every individual particle from the principle of least action by varying the appropriate action. Thus, as a result of the using of Lagrangian (1.4), we get a covariant four-dimensional form of the equation of motion of a particle in an arbitrary external gravitational field g^μ :

$$c^2 \frac{d(m\phi^2 u^\mu)}{ds} = m\phi^2 g^\mu. \quad (1.5)$$

In this equation, $u^\mu = dx^\mu / ds$ represents the dimensionless four-vector of the velocity of a particle. We have also introduced here the strength four-vector g_μ of the gravitational field, defined in terms of logarithmic derivatives of ϕ with respect to the space-time coordinates by the connection

$$g_\mu = -2c^2 \frac{1}{\phi} \partial_\mu \phi. \quad (1.6)$$

As a reminder of this circumstance, we will sometimes call the field variable ϕ the *logarithmic potential*.

Along with the initial field variable ϕ , it is convenient to introduce the another dynamical characteristic of the field by means of the equality

$$\phi^2 = e^{\Phi/c^2}. \quad (1.7)$$

Then the strength four-vector g_μ , in agreement with its previous representation in form (1.6), may be

expressed as an ordinary gradient of this new scalar field variable:

$$g_{\mu} = -\partial_{\mu} \Phi. \quad (1.8)$$

So, this relation defines Φ as the *usual potential* of the vector force field g_{μ} , which can be used instead of the logarithmic potential ϕ of this field, determined by (1.6).

The four-dimensional equation (1.5) covers both the Lagrange's equation for momentum \mathbf{p} canonically conjugated to the radius vector \mathbf{r} and the equation for the energy \mathcal{E} of a particle:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{\partial L_p}{\partial \mathbf{r}}, \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{\partial L_p}{\partial t}, \quad (1.9)$$

where as usual,

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L_p}{\partial \mathbf{v}} \quad \text{and} \quad \mathcal{E} = \mathbf{v} \frac{\partial L_p}{\partial \mathbf{v}} - L_p. \quad (1.10)$$

From (1.5), it follows that we deal here with the field-dependent physical quantity

$$\tilde{m} = m\phi^2, \quad (1.11)$$

which appears in this equation simultaneously in two physical meanings: as the inertial mass of the particle (on the left) and as its passive gravitational mass (on the right). Thus, the *actual* inertial mass \tilde{m} , which, in accordance with (1.4) and the second equation in (1.10), determines the gravitationally dependent content of energy

$$\mathcal{E} = c^2 \tilde{m}$$

stored in a particle at rest, is a dynamical variable. Whereas its *nominal* mass m remains the constant which is the measure of as much as possible amount of energy that a given particle or body can accommodate. On the other hand, in the case of elementary particles, the constant parameter m represents the gravitational analogue of charge, which characterizes the individual susceptibility of a certain sort of particles to the influence of the "mass-coupled" field ϕ .

The Lorentz-covariant equation of motion (1.5), expressed for the space and time components separately in the form

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\tilde{m}\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) = \tilde{m} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot \mathbf{g}, \quad (1.12)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\tilde{m}c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) = c\tilde{m} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot Q, \quad (1.13)$$

was first postulated by Nordström in [25]. In these formulas we have introduced the notation

$$\mathbf{g} = -2c^2 \frac{1}{\phi} \nabla \phi, \quad (1.14)$$

$$Q = 2c \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (1.15)$$

for the two three-dimensional force characteristics of the gravitational field, its strengthes: vector \mathbf{g} and scalar Q . These two field observables constitute the

four-vector (1.6) of a field strength:

$$g^{\mu} = (Q, \mathbf{g}). \quad (1.16)$$

We note in passing that, in connection with the discussion of the second Nordström's theory of gravitation, equation (1.12) was also obtained by Einstein in [28] from the principle of least action.

After some simple transformations and elimination of potential by dividing by ϕ^2 , the Nordström's equation (1.5) can be rewritten as the equation, containing the constant nominal mass m only. Indeed, having in mind (1.6), we get in this way the equation

$$c^2 m \frac{du^{\mu}}{ds} = m(\delta_{\nu}^{\mu} + u^{\mu}u_{\nu})g^{\nu}, \quad (1.17)$$

where constant nominal mass m can be canceled. Thus, we arrive at an equation of motion that does not depend on the nominal mass of the particle, as it should.

It must be emphasized that, since the transition from (1.5) to (1.17) is accompanied by the division of the original equation by ϕ^2 , these equations are equivalent with the exception of the cases when ϕ passes through zero. It is clear that if $\phi \rightarrow 0$, then the particle completely loses its inertial mass m^* and accelerates to the speed of light. In this case, similar to photon, the description of its motion by classical equations (1.5) or (1.17) loses the physical meaning.

From (1.17) we see that the necessary condition of orthogonality

$$u_{\mu} \frac{du^{\mu}}{ds} = 0, \quad (1.18)$$

which arises by virtue of the equality

$$u^{\mu}u_{\mu} = -1, \quad (1.19)$$

is satisfied identically.

The spatial part of (1.17) reduces to the equation of motion in the form [23]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(\mathbf{g} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{v} \times \mathbf{g} - \frac{1}{c} \mathbf{v}Q \right), \quad (1.20)$$

which can also be obtained directly from (1.12) by using (1.6) and (1.11). Inspection of this equation shows that, in favor of the principle of equivalence of gravitation and inertia, both the inertia of a moving particle and its susceptibility to the influence of gravitational field are determined by the same factor $m / \sqrt{1-v^2/c^2}$.

By means of some obvious transformations, the relativistic equation of motion (1.20) can be rewritten in the simpler equivalent form:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left(\mathbf{g} - \frac{1}{c} \mathbf{v}Q \right), \quad (1.21)$$

where the first factor in parentheses on the right-hand side restricts the increase of the velocity of a particle making the light velocity insurmountable.

For velocities small compared with the velocity of light, both equations (1.20) and (1.21) go over into the simple Newton's equation of motion of a particle in the external gravitational field, which looks like the equation of an ordinary mass-independent free fall with the acceleration \mathbf{g} :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g}.$$

Thus in the non-relativistic approximation, the three-dimensional vector \mathbf{g} formed by the spatial components of the four-vector (1.16) corresponds to the usual gravitational acceleration of free fall.

It is useful to compare (1.21) with an analogous equation of motion of a test particle in the vector model of gravitation, which reads

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(\mathbf{g} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{h} \right). \quad (1.22)$$

It can be obtained from the known equation of motion for a charged particle in electromagnetic field resolved with respect to acceleration (see, for example, the problem in the end of §17 in [29]) after replacing electric charge e of a particle by its "gravitational charge" m and electromagnetic "six-vector" of strengths (\mathbf{E}, \mathbf{H}) by its gravitational analog (\mathbf{g}, \mathbf{h}) . The difference in relativistic free motion of a test particle in the static gravitational field \mathbf{g} in a scalar model of gravitation and in the Maxwellized gravity is striking. To see this, it suffices to compare two equations: the first, appeared in Nordström mechanics,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \mathbf{g},$$

and the second, associated with the supposed Maxwell – Lorentz-like gravitational force,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(\mathbf{g} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) \right)$$

that follow from (1.21) and (1.22) respectively, if we set $Q = 0$ and $\mathbf{h} = 0$. The similar characteristic difference between the conclusions of the scalar and vector models of gravity was noted earlier by Norton [30].

2 Gauge invariance of the massive scalar field

The equation of the motion of a test particle in an external variable gravitational field, especially expressed in the simple form (1.21), clearly shows that all the components of the four-dimensional strength vector $g^\mu = (\mathbf{g}, Q)$ are the physical characteristics of the field that are accessible to direct measurement. Ignoring almost insurmountable difficulties of certain measurements due to the extreme weakness of the corresponding effects, we shall content ourselves here with the understanding that these measurements can be performed, at least in principle, by measuring the velocity and acceleration of the test particle. This means that both the force

characteristics of the field, its strengths \mathbf{g} and Q , which directly affect the motion of massive particles, are the conditionally measurable, that is, uniquely determined physical quantities.

Unlike the field observables g^μ , the scalar function ϕ , which appeared in Lagrange formalism in (1.4) as original field variable, is not completely unique. This can be easily seen from (1.6), or, equivalently, from (1.14) and (1.15). Indeed, for a given gravitational field comprehensively determined by set of measurable quantities \mathbf{g} and Q , their logarithmic potential ϕ is determined with the help of these relations to within an arbitrary non-zero coefficient. From (1.14) and (1.15) it follows that the generalized scale transformation

$$\phi \rightarrow \phi' = \kappa \phi \quad (2.1)$$

with an arbitrary non-zero, both *positive* or *negative*, constant κ does not change both field observables \mathbf{g} and Q and leaves unchanged the equation of particles motion. This important fact allows us to consider the admissible transformation (2.1) of the field variable ϕ as a *special form of gauge transformations* for the mass-coupled field of zero spin.

Here it is useful to pay special attention to the fact that, in addition to the non-uniqueness of ϕ , the transformation (2.1) also corresponds to a non-unique choice of the usual field potential Φ defined for a given strength four-vector g_μ by (1.8). Indeed, using (1.7), it is easy to see that the multiplicative transformation (2.1) of the field variable ϕ corresponds to the additive transformation of the potential,

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi + \xi, \quad (2.2)$$

with an arbitrary finite constant ξ , as it should in view of equation (1.8). Here it is assumed that by virtue of the relation (1.7) two arbitrary constants, ξ and κ , appearing in (2.1) and (2.2) are related to each other by the equality $\xi = c^2 \ln \kappa^2$.

We recall that a scale transformation of the field variable very closely analogous to (2.1) was established earlier as a special form of the gauge transformation of a scalar field in the refined *second* Nordström's theory of gravitation [26], [27] by Dicke [31], and then by Wellner and Sandri [32]. But much early, this problem was treated in more detail by Bergmann [33], who also operated with a scalar potential, logarithmic in the sense of definition (1.6). The Lorentz-invariant equation for this field variable in [33] is not invariant with respect to its a simple, like (2.1), scale transformation. Bergmann eliminated this non-invariance by a suitable additional re-scaling of the four-dimensional coordinates. Applied together, these two types of scale transformations mutually compensate each other leaving the field equation unchanged. As shown in [33], such joined transformation forms the gauge

group, with respect to which Nordström's second theory of the gravitational field remains invariant. This fact means ultimately that, in accordance with such a combined solution of the gauge problem in Nordström's theory, we need to stretch or shrink the time and distance scales appropriately to the shift in the origin of the ordinary gravitational potential Φ similar to (2.2).

In contrast to the foregoing approach to the problem, we will seek the field equations which are themselves invariant with respect to the scale transformation (2.1) of field function ϕ . Consequently, they will be automatically invariant with respect to the admissible shift transformation (2.2) of the potential Φ . In this case, one would like to hope that there is a way to construct a much more preferable theory of gravity, which would be insensitive to our freedom to redefine the unit of mass. Of course, this possibility should also include changing the units of energy, momentum, force and other related physical quantities along with gravitational and Planck constants. At the same time, unlike the method used by Bergmann in [33], we would not like to associate such transformations with the freedom to choose units of time and distance trying to avoid the geometric interpretation of gravity leading to troubles with conservation laws.

The case of a similar special relativistic scalar field theory, gauge-invariant in the stated sense, but only massless, was considered fairly in detail in [23]. It was established that the implementation of the intention to develop a viable minimal dynamical extension of Newton's static gravity within the restrictions dictated by the standard principles and requirements of the classical field theory is indeed possible. Among them are the principle of least action, the principle of simplicity, the Lorentz covariance and the gauge invariance of the theory, the existence of a clear formulation of the special-relativistic conservation laws of energy, momentum, angular momentum, and center-of-mass motion together with the Maxwell's principle of positive definiteness of field energy density, and finally the Newton's principle of proportionality of the inertial and gravitational masses. Under the conditions, when direct crucial experiments are ineffective, the use of these principles, accumulated by modern theoretical physics beyond the limits of gravitational phenomena themselves, is of decisive importance for constructing a self-consistent theoretical model of gravitational interaction acceptable from the viewpoint of the existing physics of particles and fields.

A characteristic feature of the variational principle in the derivation of the equation of motion of a particle which mass is coupled to a spin-zero field ϕ is the scale transformation $\mathcal{S}_{\text{mattr}} \rightarrow \mathcal{S}'_{\text{mattr}} = \kappa^2 \mathcal{S}_{\text{mattr}}$ of the action (1.3) under the gauge transformation (2.1) of the field. We recall that such transformation of an action is admissible in the general case as one

of the manifestations of the non-uniqueness of the Lagrangian (see, e.g., [34, p. 291], or [35, Section 6.3]). The Euler – Lagrange equations, being linear and uniform with respect to the Lagrangian, are, of course, invariant under this transformation. We also recall that such a non-uniqueness of the definition of the Lagrangian of a free particle corresponds to the natural freedom of choice of a unit of mass and, as a consequence, units of other physical quantities related to the mass (for more details, see [29, §27] and [36, pp. 4–8]).

According to the principle of gauge invariance, the desired equations describing a total system of interacting matter and field must also be invariant with respect to the scale transformation (2.1). In order to satisfy this condition, we must require the fulfillment of the scale transformation of a *total action*,

$$\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}' = \kappa^2 \mathcal{S}, \quad (2.3)$$

under the admissible gauge transformation (2.1) of the logarithmic potential of the field.

The gauge invariance of the action itself is of fundamental importance in the formulation of modern physical theories. Its fulfillment, for example, is the starting point in the proof of Noether's theorem. The absence of this invariance, as shown by equation (2.3), should not be of particular concern, since in the present case this defect is easily eliminated. To do this, it suffices to rewrite the action in absolute units as a dimensionless quantity, dividing it by the Planck constant. (It is interesting that the very existence of a fundamental physical constant with the dimension of action guarantees the invariance of Lagrangian theories with respect to the scale transformations of all physical quantities, thereby ensuring the freedom of choice of their units.)

This possibility becomes obvious if we note that the transformation (2.1) in addition to the change in the unit of measurement of the inertial mass $\tilde{m} = m\phi^2$ entails a change in the numerical values of other physical quantities, including energy, momentum, Lagrangian, and the Planck constant. In all these cases, because of (2.1), the square of the gauge parameter κ plays the role of the conversion factor, so that for the transformation of the numerical value of Planck constant associated with gauge transformation (2.1), we can write

$$\hbar \rightarrow \hbar' = \kappa^2 \hbar. \quad (2.4)$$

Nevertheless, the Planck's quantum of action should be considered as a fundamental true physical constant. But because this constant has a dimension of action, the substitution (2.4) should be considered no more than recalculation of its numerical value. Such a recalculation indeed is necessary, since, according to (1.11), the gauge transformation (2.1) causes the replacement

$$\tilde{m} \rightarrow \tilde{m}' = \kappa^2 \tilde{m},$$

that is, the transition to a new system of units of physical quantities with a new unit of the inertial mass.

3 Gauge-invariant model of a massive spinless gravitational field

It is easy to see that the required property (2.3) of total action $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{matt}} + \mathcal{S}_{\text{field}}$ will be satisfied if, obeying the principle of simplicity, we get the quadratic in the field total Lagrangian density for a system of interacting classical particles and a massive scalar field:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{matt}} - \frac{c^4}{2\pi G_N} (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \varkappa^2 \phi^2). \quad (3.1)$$

Here the spatial density of the Lagrangian of gravitationally interacting classical particles (dustlike matter) is given by the expression (1.3).

We have introduced in (3.1) a coefficient containing usual Newton's gravitational coupling constant G_N , so that the field variable ϕ remains dimensionless and the theory would lead to the Newtonian static limit in conventional notation. These expressions are identical to those presented in [23], except that (3.1) contains a standard term associated with mass $m_g = \hbar \varkappa / c$ of a spinless graviton.

The field equation obtained by varying the action, corresponding to the expressions (3.1) and (1.3), with respect to the field variable $\phi(x)$ is linear and uniform:

$$\left(\square - \varkappa^2 - \frac{2\pi G_N}{c^2} \Theta \right) \phi = 0. \quad (3.2)$$

Here $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ is the D'Alembertian operator. The source density of the field, denoted in this equation by Θ , is connected with the mass of gravitating particles by the relation

$$\Theta = \sum_a m_a \sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a). \quad (3.3)$$

This expression is a four-dimensional scalar, as it should. It is known as the trace (divided by c^2) of the energy-momentum tensor of a non-gravitating dustlike system of free particles (see, e.g., [29, §34]).

As was to be expected, the field equation (3.2) remains unchanged with respect to the gauge (scale) transformation (2.1) of the field variable with constant non-zero parameter \varkappa . It should also be noted that the equation (3.2), being uniform and linear, satisfies the requirement of simplicity.

Using (1.6), equation (3.2) can also be written directly for the field strength vector g_μ . Expressing [in accordance with (1.6)] the four-dimensional gradient of logarithmic potential ϕ in (3.2) in terms of the field g_μ as $\partial_\mu \phi = -(1/2c^2) \phi g_\mu$, and then dividing the resulting equality by ϕ , we obtain

$$\partial_\mu g^\mu = \frac{1}{2c^2} g_\mu g^\mu - 2c^2 \varkappa^2 - 4\pi G_N \Theta. \quad (3.4)$$

Recall also that the vector field g_μ satisfies the potentiality condition (1.8). In view of this fact, we

have additionally the homogeneous linear tensor equation

$$\partial_\mu g_\nu - \partial_\nu g_\mu = 0. \quad (3.5)$$

This equation, like the first pair of Maxwell equations in electrodynamics, is satisfied regardless of the nature of the field source, filtering out physically unacceptable solutions to the basic equation (3.4).

The last two field equations together with equation (1.17) of the motion of a massive particle in a gravitational field constitute a complete system of Lorentz-covariant and gauge-invariant equations that are compatible with the laws of conservation of energy and momentum with a positive gravitational energy density [37]. We will use them in what follows to describe the gravitational field and its interaction with matter in the framework of the special theory of relativity, primarily for cosmological applications. Of course, the field equation (3.2) retains its practical importance: to solve the nonlinear equation (3.4) satisfying the condition (3.5), it is convenient to first obtain a solution of a simpler linear equation (3.2), and then use the relation (1.6), or two relations (1.14) and (1.15) separately.

In the case of resting gravitating masses distributed in space with density $\varrho(\mathbf{r})$, the equation (3.4) reduces to the non-linear relativistic generalization of the equation of Newtonian static gravity,

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = \frac{1}{2c^2} \mathbf{g}^2 - 2c^2 \varkappa^2 - 4\pi G_N \varrho, \quad (3.6)$$

which differs from the equation obtained early in [23] by having the term $-2c^2 \varkappa^2$ associated with the mass m_g of graviton. This equation is accompanied by a supplementary condition, which follows from (3.5), that \mathbf{g} is a potential field, that is, "curl-free":

$$\nabla \times \mathbf{g} = 0. \quad (3.7)$$

We note, incidentally, that in the case of massless field, the same as (3.6) nonlinear equation for the vector field strength \mathbf{g} outside the region where the masses producing this field are located, that is, in space where $\varrho = 0$, was manufactured by Brillouin [38]. In four-dimensional form, like (3.4) but without two last terms, similar equation with quadratic self-action was constructed by Deser and Halpern [39] (see Appendix in their paper).

Somewhat later, almost this equation appeared also in Hooft's lectures [40] (see page 13). (The Hooft's equation is transformed into the Brillouin's equation by a simple replacing $\mathbf{g} \rightarrow -\mathbf{g}$.)

Returning to the equation (3.4) it should be stressed that under the conditions of the evolving universe the restriction $\varkappa = 0$ is not necessary at all, in order to obtain the Newtonian behavior of static field at large distances from a gravitating body. Although the search for solutions of the field equations presented here is beyond the scope of this paper, we note that in a homogeneous non-expanding universe

filled with gravitating dust matter and the background gravitational field created by it, the local post-Newtonian static field is described by equation (3.6) but without the mass term quadratic in \varkappa , even when the mass of gravitation does not vanish in the basic field equation (3.2) and (3.4), from which we start. In this case, a spherically symmetric solution of equation (3.6), (3.7) for a static field outside a central body, as shown in [38] and [23], for large distances has an asymptotic behavior corresponding to the Newtonian inverse square law. As for the role of the mass parameter \varkappa in general equations (3.2) and (3.4), it participates in the formation of a slowly evolving spatially homogeneous background field Q .

Finally, we also note that, in contrast to the Lagrangian formalism of scalar-tensor theories, where, along with the tensor gravitational field, a scalar field is often used to parameterize dark energy, as, for example, in [41]–[43], our total Lagrangian (3.1) is quadratic and homogeneous with respect to the dynamic variable ϕ of the field and its four-dimensional gradient $\partial_\mu\phi$. For this reason, our field equation (3.2) is linear and gauge-invariant in the sense of scale transformation (2.1), as it should. (This circumstance, by the way, makes the usual procedure for quantizing the gravitational field an almost trivial task.) Thus, Lagrangian (3.1) generates an initially linear field equation that clearly does not contain signs of any self-action, the fact that is usually considered self-evident for a gravitational field. Nevertheless, as seen from our considerations, the nonlinear terms quadratic in the components of the field strength g^μ , which can be interpreted as a necessary gravitational “self-action”, appear in the transformed post-Newtonian equation (3.4) (or (3.6) in the static limit), represented in terms of the field strengths $g^\mu = (Q, \mathbf{g})$.

Acknowledgments

We are grateful to V.G. Baryshevski, Yu.P. Vybylyi, Yu.A. Kurochkin, and M.V. Galynskii for their warm attitude to this work and for fruitful critical discussions that contributed to its later development. We are especially grateful to V.I. Mironenko, N.V. Maksimenko, and V.N. Kapshay, with whom we discussed a number of non-trivial mathematical problems that arose from time to time in our cosmological considerations. We thank A.P. Balmakov for a careful reading of the manuscript and helpful comments.

REFERENCES

1. Logunov, A.A. Relativistic Theory of Gravity / A.A. Logunov. – Commack, USA: Nova Science Publishers, 1998. – 319 p.
2. Bondi, H. The field of a uniformly accelerated charge, with special reference to the problem of gravitational acceleration / H. Bondi, T. Gold // Proc. Roy. Soc. – 1955. – Vol. A. – P. 416–424.

3. Parrott, S. Radiation from a Uniformly Accelerated Charge and the Equivalence Principle / S. Parrott // Found. Phys. – 2002. – № 32. – P. 407–440.

4. Poisson, E. The motion of point particles in curved spacetime / E. Poisson, A. Pound, I. Vega // Living Rev. Relativity. – 2011. – № 14. – P. 7–190.

5. Hilbert, D. Relativity, Quantum Theory and Epistemology / D. Hilbert // David Hilbert’s Lectures on the Foundations of Physics, 1915–1927: Eds. T. Sauer, U. Majer. – Heidelberg, Germany: Springer, 2009. – 795 p.

6. Noether, E. Invariant Variation Problems / E. Noether // Transp. Theory Statist. Phys. – 1971. – № 1. – P. 186–207.

7. Denisov, V.I. The inertial mass defined in the general theory of relativity has no physical meaning / V.I. Denisov, A.A. Logunov // Theoret. and Math. Phys. – 1982. – № 51. – P. 421–426.

8. Logunov, A.A. Relativistic theory of gravitation / A.A. Logunov, M.A. Mestvirishvili // Theoret. and Math. Phys. – 1985. – Vol. 61, № 3. – P. 1170–1183.

9. Logunov, A.A. Relativistic theory of gravitation / A.A. Logunov, M.A. Mestvirishvili // Foundations of Physics. – 1986. – № 16. – P. 1–26.

10. Logunov, A.A. Relativistic theory of gravitation and criticism of general relativity / A.A. Logunov, Yu.M. Loskutov, M.A. Mestvirishvili // Theor. Math. Phys. – 1987. – № 73. – P. 1131–1148.

11. Weinberg, S. Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity / S. Weinberg. – New York: Wiley, 1972. – 657 p.

12. Gorbunov, D.S. Introduction to the Theory of Early Universe: Hot Big Bang Theory / D.S. Gorbunov, V.A. Rubakov. – New Jersey: World Scientific, 2011. – 473 p.

13. Misner, C. Gravitation / C. Misner, K. Thorne, J.A. Wheeler. – San Francisco: Freeman & Co, 1973. – 1278 p.

14. Pauli, W. Theory of Relativity / W. Pauli. – London: Pergamon, 1958. – 241 p.

15. Eddington, A.S. The Mathematical Theory of Relativity / A.S. Eddington. – Cambridge: Cambridge University Press, 1930. – 270 p.

16. Zel’manov, A.L. Elements of the General Theory of Relativity / A.L. Zel’manov, V.G. Agakov. – Moscow: Nauka, 1989. – 236 p. (in Russian).

17. Schrödinger, E. Die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes / E. Schrödinger // Phys. Zeitschr. – 1918. – № 19. – S. 4–7.

18. Bauer, H. Über die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes / H. Bauer // Phys. Zeit. XIX. – 1918. – S. 163–165.

19. Dirac, P.A.M. The excellence of Einstein’s theory of gravitation / P.A.M. Dirac // Einstein: the First Hundred Years; Eds. M. Goldsmith, A. MacKay, J. Woudhuysen. – Pergamon, 1980. – P. 41–46.

20. *Fock, V.* The Theory of Space, Time, and Gravitation / V. Fock. – London: Pergamon, 1964. – 448 p.
21. *Feynman Lectures on Gravitation* / R.P. Feynman [et al.]. – Reading, Pennsylvania: Addison-Wesley, 1995. – 232 p.
22. *Weyl, H.* How far can one get with a linear field theory of gravitation in flat space-time? / H. Weyl // Amer. J. Math. – 1944. – № 66. – P. 591–604.
23. *Serdyukov, A.N.* A minimal relativistic model of gravitation within standard restrictions of the classical theory of fields / A. N. Serdyukov // Phys. of Part. and Nucl. Lett. – 2009. – № 6. – P. 190–201.
24. *Einstein, A.* Nordström's Theory of Gravitation from the Point of View of the Absolute Differential Calculus / A. Einstein, A.D. Fokker // The Collected Papers of Einstein. – Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press. – 1995. – Vol. 4. – Doc. 28. – P. 588–597.
25. *Nordström, G.* Relativitätsprinzip und Gravitation / G. Nordström // Phys. Z. – 1912. – № 13. – P. 1126–1129.
26. *Nordström, G.* Träge und schwere Masse in der Relativitätsmechanik / G. Nordström // Ann. Phys. (Leipzig). – 1913. – № 40. – P. 856–878.
27. *Nordström, G.* Zur Theorie der Gravitation vom Standpunkt des Relativitätsprinzips / G. Nordström // Ann. Phys. (Leipzig). – 1913. – № 42. – P. 533–554.
28. *Einstein, A.* On the Present State of the Problem of Gravitation / A. Einstein // The Collected Papers of Einstein. – Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press. – 1995. – Vol. 4. – Doc. 17. – P. 486–503.
29. *Landau, L.D.* The Classical theory of fields. Vol. 2 of Course of Theoretical Physics / L.D. Landau, E.M. Lifshitz. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 1987. – 428 p.
30. *Norton, J.D.* Nordström and the early demise of scalar, Lorentz covariant theories of gravitation / J.D. Norton, A. Einstein // Archive for History of Exact Sciences. – 1992. – № 45. – P. 17–94.
31. *Dicke, R.H.* Mach's principle and invariance under transformation of units / R.H. Dicke // Phys. Rev. – 1962. – № 125. – P. 2163–2167.
32. *Wellner, M.* Scalar gravitation / M. Wellner, G. Sandri // Am. J. Phys. – 1964. – № 32. – P. 36–39.
33. *Bergmann, O.* Scalar field theory as a theory of gravitation. I. / O. Bergmann // Am. J. Phys. – 1956. – № 24. – P. 38–42.
34. *Gel'fand, I.M.* Representations of the Rotation and Lorentz Groups and Their Applications / I.M. Gel'fand, R.A. Minlos, Z.Ya. Shapiro. – Oxford: Pergamon, 1963. – 366 p.
35. *Corinaldesi, E.* Classical mechanics for physics graduate students / E. Corinaldesi. – Singapore: World Scientific, 1998. – 286 p.
36. *Landau, L.D.* Mechanics. Vol. 1. of Course of Theoretical Physics / L.D. Landau, E.M. Lifshitz. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 1976. – 170 p.
37. *Serdyukova, M.A.* The Law of Energy-Momentum Conservation of Massive Spinzero Gravitational Field / M.A. Serdyukova // Problems of Interaction of Radiation with Matter. Proceedings of the V International Scientific Conference Dedicated to Academician B. V. Bokut (Gomel, November 14–16, 2018). – Part 1. – Gomel: F. Skorina Gomel State University, 2018. – P. 193–199.
38. *Brillouin, L.* Relativity Reexamined / L. Brillouin. – New York: Academic Press, 1970. – 111 p.
39. *Deser, S.* Self-coupled scalar gravitation / S. Deser, L. Halpern // Gen. Rel. Grav. – 1970. – № 1. – P. 131–136.
40. *'t Hooft, G.* Introduction to General Relativity / G. 't Hooft. – Utrecht, Netherlands: Utrecht University, 2012. – 71 p.
41. *Wetterich, C.* Modified Gravity and Coupled Quintessence / C. Wetterich // Papantonopoulos E. (eds) Modifications of Einstein's Theory of Gravity at Large Distances Lecture Notes in Physics. – Springer, 2015. – Vol. 892 – P. 57–95.
42. *Dudko, I.G.* Scalar field with the source in the form of the stress-energy tensor trace as a dark-energy model / I.G. Dudko, Yu.P. Vyblyi // Gravitation and Cosmology. – 2016. – № 22. – P. 368–373.
43. *Vyblyi, Yu.P.* Interacting scalar field in the theory of gravity / Yu.P. Vyblyi, A.A. Leonovich // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series. – 2017. – № 4. – P. 98–103.

Поступила в редакцию 14.02.19.

**ОБ АЛЬТЕРНАТИВЕ ТИТСА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ
ТЕТРАЭДРАЛЬНЫХ ГРУПП ТИПА (2,2,N,2,2,2)**

В.В. Беньяш-Кривец¹, Я.А. Юшкевич²

¹Белорусский государственный университет, Минск

²Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка, Минск

**ON THE TITS ALTERNATIVE FOR GENERALIZED
TETRAEDRON GROUPS OF TYPE (2,2,N,2,2,2)**

V.V. Beniash-Kryvets¹, Y.A. Yushkevich¹

¹Belarusian State University, Minsk

²M. Tank Belarusian State Pedagogical University, Minsk

Обобщенные тетраэдральные группы имеют копредставление вида

$$\Gamma = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = R_{12}(x_1, x_2)^l = R_{23}(x_2, x_3)^m = R_{13}(x_1, x_3)^n = 1 \rangle.$$

Существует гипотеза Розенбергера, что каждая обобщенная тетраэдральная группа удовлетворяет альтернативе Титса.

Эта гипотеза открыта для групп вида $\langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = R_{12}(x_1, x_2)^2 = (x_1^\alpha x_3^\beta)^2 = (x_2^\gamma x_3^\delta)^2 = 1 \rangle$, $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \geq \frac{1}{2}$.

В данной работе для групп $\Gamma = \langle a, b, c \mid a^2 = b^n = c^2 = R(a, b)^2 = (b^a c)^2 = (ac)^2 = 1 \rangle$ найден ряд достаточных условий для выполнения альтернативы Титса.

Ключевые слова: обобщенная тетраэдральная группа, альтернатива Титса, свободная группа, почти разрешимая группа.

Generalized tetrahedron groups have a presentation of the form

$$\Gamma = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = R_{12}(x_1, x_2)^l = R_{23}(x_2, x_3)^m = R_{13}(x_1, x_3)^n = 1 \rangle.$$

There exists a Rosenberger's conjecture that the Tits alternative holds for generalized tetrahedron groups. This conjecture is

open for groups of the form $\langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = R_{12}(x_1, x_2)^2 = (x_1^\alpha x_3^\beta)^2 = (x_2^\gamma x_3^\delta)^2 = 1 \rangle$, $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \geq \frac{1}{2}$. In this paper,

a number of sufficient conditions are found for fulfillment the Tits alternative for groups

$$\Gamma = \langle a, b, c \mid a^2 = b^n = c^2 = R(a, b)^2 = (b^a c)^2 = (ac)^2 = 1 \rangle.$$

Keywords: generalized tetrahedron group, Tits alternative, free group, almost solvable group.

1 Альтернативе Титса

Говорят, что группа G удовлетворяет альтернативе Титса, если G содержит либо неабелеву свободную подгруппу, либо разрешимую подгруппу конечного индекса. Винберг [1] ввел в рассмотрение обобщенные тетраэдральные группы, имеющие копредставление вида

$$\Gamma = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} =$$

$$R_{12}(x_1, x_2)^l = R_{23}(x_2, x_3)^m = R_{13}(x_1, x_3)^n = 1 \rangle,$$

где $k_1, k_2, k_3, l, m, n \geq 2$, $R_{ij}(x_i, x_j)$ – циклически редуцированное слово в свободном произведении $\langle x_i \mid x_i^{k_i} = 1 \rangle * \langle x_j \mid x_j^{k_j} = 1 \rangle$, которое не является собственной степенью. Существует гипотеза [2], что каждая обобщенная тетраэдральная группа удовлетворяет альтернативе Титса. К настоящему времени в работах [2]–[6] эта гипотеза доказана для всех обобщенных тетраэдральных групп, кроме групп следующего вида:

$$\langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = R_{12}(x_1, x_2)^2 = (x_1^\alpha x_3^\beta)^2 = (x_2^\gamma x_3^\delta)^2 = 1 \rangle, \quad (1.1)$$

где $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \geq \frac{1}{2}$. Отметим также, что в [4]

гипотеза Розенбергера доказана для групп вида (1.1) в следующих случаях:

- 1) $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_3} < \frac{1}{2}$;
- 2) $\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} < \frac{1}{2}$;
- 3) $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} < \frac{1}{2}$, за исключением случая $k_3 = 2$

и $(k_1, k_2) = (3, 8), (3, 10), (4, 5), (4, 6), (4, 8), (5, 6)$. Случаи, когда $(k_1, k_2) = (3, 10), (4, 5), (5, 6)$, доказаны в [7]. В работах [8]–[10] гипотеза Розенбергера доказана для ряда классов групп в

случае $(k_1, k_2) = (3, 8), (4, 6), (4, 8)$.

В данной работе мы рассмотрим группы с копредставлением

$$\Gamma = \langle a, b, c \mid a^2 = b^n = c^2 = R(a, b)^2 = (b^a c)^2 = (ac)^2 = 1 \rangle, \quad (1.2)$$

где $R(a, b) = ab^{u_1} ab^{u_2} \dots ab^{u_s}$, $1 \leq u_i < n$. Учитывая результаты работы [6], мы можем считать, что $s > 2$.

2 Достаточные условия выполнения альтернативы Титса для групп (1.2)

Справедлива

Теорема 2.1. Пусть Γ – обобщенная тетраэдральная группа с копредставлением (1.2) и пусть s – четно. Тогда если $n \neq 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 16$, то для Γ справедлива альтернатива Титса.

Далее мы будем обозначать через $[A]$ образ матрицы $A \in SL_2(\mathbb{C})$ в $PSL_2(\mathbb{C})$, через $\text{tr } A$ – след матрицы A . Конечно порожденная подгруппа $H \subset PSL_2(\mathbb{C})$ называется неэлементарной, если она не содержит разрешимой подгруппы конечного индекса. Такая подгруппа всегда содержит неабелеву свободную подгруппу. В общем случае H элементарна тогда и только тогда, когда $\text{tr } ABA^{-1}B^{-1} = 2$ для любых двух элементов $[A], [B] \in H$ бесконечного порядка (см., например, [11]). Если $H = \langle [A], [B] \rangle$ – 2-порожденная подгруппа, то H является неэлементарной тогда и только тогда, когда она неприводима, отлична от группы диэдра (т. е. 2 из трех следов $\text{tr } A, \text{tr } B, \text{tr } AB$ отличны от нуля) и бесконечна (т. е. отлична от групп A_4, S_4, A_5). Нетрудно показать, что произвольный элемент $[X] \in PSL_2(\mathbb{C})$ имеет порядок n тогда и только тогда, когда $\text{tr } X = 2 \cos \frac{\pi r}{n}$, где $(r, n) = 1$.

Пусть Γ – группа с копредставлением (1.2) и s четно. Рассмотрим гомоморфизм

$$f: \Gamma \rightarrow C_2 = \langle d \mid d^2 = 1 \rangle, a \mapsto d, b \mapsto 1, c \mapsto 1.$$

Пусть $G = \ker f$. Тогда G – подгруппа индекса 2 в Γ . Используя переписывающий процесс Райдемайстера-Шрайера, найдем копредставление G :

$$G = \langle d, e, h \mid d^n = e^n = h^2 = R_1(d, e)^2 = R_1(e, d)^2 = (d^a h)^2 = (e^a h)^2 = 1 \rangle, \quad (2.1)$$

где $R_1(d, e) = d^{u_1} e^{u_2} \dots d^{u_{s-1}} e^{u_s}$. Идея доказательства теоремы 2.1 состоит в том, чтобы построить представление $\rho: G \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ с неэлементарным образом. В этом случае группа G , а вместе с ней и Γ , будет содержать неабелеву свободную подгруппу.

Мы будем использовать стандартные факты и обозначения из теории характеров Фрике (см., например, [12]–[14]).

Рассмотрим свободную группу $F_k = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$ с k образующими. Для произвольного элемента $w \in F_k$ определим функцию (характер Фрике) $\tau_w: SL_2(\mathbb{C})^k \rightarrow \mathbb{C}$, $\tau_w(A_1, \dots, A_k) = \text{tr } w(A_1, \dots, A_k)$, где $\text{tr } X$ обозначает след матрицы X . В [12] доказано, что если $w = g^{u_1} h^{v_1} \dots g^{u_s} h^{v_s}$ – циклически редуцированное слово в свободной группе $F_2 = \langle g, h \rangle$ и $x = \tau_g, y = \tau_h, z = \tau_{gh}$, то $\tau_w = Q_w(x, y, z)$, где $Q_w \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ – однозначно определенный многочлен с целыми коэффициентами, который называют многочленом Фрике элемента w . Следующие соотношения между характеристиками Фрике легко следуют из теоремы Гамильтона – Кэли: $\tau_{a^{-1}} = \tau_a, \tau_{ab} = \tau_a \tau_b - \tau_{ab^{-1}}$ для любых элементов $a, b \in F_k$.

Рассмотрим многочлены $P_n(x)$, которые удовлетворяют начальным условиям $P_{-1}(x) = 0, P_0(x) = 1$ и рекуррентному соотношению $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x)$ для $n > 0$. Если $n < 0$, то положим $P_n(x) = -P_{|n|-2}(x)$. По индукции легко проверить, что

$$P_n(2 \cos \varphi) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi}.$$

Если $w = g^{u_1} h^{v_1} \dots g^{u_s} h^{v_s} \in F_2, s \geq 1$, – циклически редуцированное слово и $x = \tau_g, y = \tau_h, z = \tau_{gh}$, то многочлен Q_w имеет вид

$$Q_w(x, y, z) = M_s(x, y)z^s + \dots + M_0(x, y), \quad (2.2)$$

где $M_s(x, y) = \prod_{i=1}^s P_{u_i-1}(x)P_{v_i-1}(y)$ [13].

Отметим также следующий факт: пара матриц $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$ порождает приводимую подгруппу тогда и только тогда, когда $\text{tr } ABA^{-1}B^{-1} = 2$, а это равносильно условию

$$(\text{tr } A)^2 + (\text{tr } B)^2 + (\text{tr } AB)^2 - \text{tr } A \text{tr } B \text{tr } AB - 4 = 0. \quad (2.3)$$

Лемма 2.1.

1) Для любой тройки значений $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{C}$ существует пара матриц $A_0, B_0 \in SL_2(\mathbb{C})$ таких, что $\text{tr } A_0 = x_0, \text{tr } B_0 = y_0, \text{tr } A_0 B_0 = z_0$.

2) Для произвольных чисел $a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{23} \in \mathbb{C}$, существуют матрицы $A_1, A_2, A_3 \in SL_2(\mathbb{C})$ такие, что $\text{tr } A_i = a_i, \text{tr } A_i A_j = a_{ij}$ для всех i, j .

Эту лемму нетрудно доказать непосредственным вычислением.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть G – группа с копредставлением (2.1). Положим

$\tau_d = \tau_e = 2 \cos \frac{\pi}{n}$ $\tau_h = \tau_{dh} = \tau_{eh} = 0$ и обозначим

$\tau_{de} = z$. Тогда нетрудно вычислить, что

$$\tau_{d^{\alpha}h} = P_{\alpha-1}(\tau_d)\tau_{dh} = 0, \quad \tau_{e^{\alpha}h} = P_{\alpha-1}(\tau_e)\tau_{eh} = 0.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \tau_{R_1(d,e)} &= Q_{R_1(d,e)}(\tau_d, \tau_e, \tau_{de}) = \\ &= Q_{R_1(d,e)}\left(2 \cos \frac{\pi}{n}, 2 \cos \frac{\pi}{n}, z\right), \\ \tau_{R_1(e,d)} &= Q_{R_1(e,d)}(\tau_e, \tau_d, \tau_{ed}) = \\ &= Q_{R_1(e,d)}\left(2 \cos \frac{\pi}{n}, 2 \cos \frac{\pi}{n}, z\right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\tau_{R_1(d,e)} = \tau_{R_1(e,d)} = g(z) \quad (2.4)$$

для некоторого многочлена $g(z) \in \mathbb{C}[x]$ степени

$$\frac{s}{2} \geq 2.$$

Лемма 2.2. Каждому корню z_0 многочлена $g(z) = \tau_{R_1(d,e)}$ соответствует некоторое представление $\rho_{z_0}: G \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$. Группу $\rho_{z_0}(G)$ будем обозначать $G(z_0)$.

Доказательство. Если z_0 – корень $g(z)$, то по лемме 2.1 существуют матрицы $A, B, C \in SL_2(\mathbb{C})$

такие, что $\text{tr } A = \text{tr } B = 2 \cos \frac{\pi}{n}$, $\text{tr } C = 0$, $\text{tr } AB = z_0$,

$\text{tr } AC = 0$, $\text{tr } BC = 0$ и, следовательно,

$$\text{tr } R_1(A, B) = \text{tr } R_1(B, A) = \text{tr } A^{\alpha}C = \text{tr } B^{\alpha}C = 0.$$

Тогда выполняются соотношения

$$\begin{aligned} [A]^n &= [B]^n = [C]^2 = \\ &= R_1^2([A], [B]) = R_1^2([B], [A]) = \\ &= ([A]^{\alpha}[C])^2 = ([B]^{\alpha}[C])^2 = 1 \end{aligned}$$

и отображение $d \rightarrow [A]$, $e \rightarrow [B]$, $f \mapsto [C]$ задает представление группы G . \square

Лемма 2.3. Если многочлен $g(z)$ имеет корень z_0 , отличный от 2 и $2 \cos \frac{2\pi}{n}$, то группа $G(z_0)$, а вместе с ней и группа G , содержит неабелеву свободную подгруппу.

Доказательство. Пусть z_0 – некоторый корень полинома $g(z)$. Обозначим через K подгруппу в $G(z_0)$, порожденную $[A]$, $[B]$. Если z_0 отличен от 2 и $2 \cos \frac{2\pi}{n}$, то z_0 не является корнем уравнения

$$z^2 - 4 \cos^2 \frac{\pi}{n} z + 8 \cos^2 \frac{\pi}{n} - 4 = 0,$$

поэтому из (2.3) следует, что группа K неприводима. Так как элементы $[A]$, $[B]$ имеют по условию

теоремы 2.1 порядок $n \geq 7$, то группа K отличается от группы диэдра и, следовательно, бесконечна, поскольку в группах A_4, S_4, A_5 нет элементов порядка $n \geq 6$. Значит, K – неэлементарная подгруппа в $PSL_2(\mathbb{C})$ и, следовательно, K , а вместе с ней и $G(z_0)$, содержит неабелеву свободную подгруппу. \square

Для слова $R_1(d, e) = d^{u_1} e^{u_2} \dots d^{u_{s-1}} e^{u_s}$ обозначим через

$$U = u_1 + u_3 + \dots + u_{s-1}, \quad V = u_2 + u_4 + \dots + u_s.$$

Лемма 2.4. Если $2 \cos \frac{U+V}{n} \pi \neq 0$, то мно-

гочлен $g(z)$ не имеет корня $2 \cos \frac{2\pi}{n}$, а если

$2 \cos \frac{U-V}{n} \pi \neq 0$, то многочлен $g(z)$ не имеет

корня 2.

Доказательство. Допустим, что

$$2 \cos \frac{U+V}{n} \pi \neq 0,$$

а $g(z)$ имеет корень $2 \cos \frac{2\pi}{n}$. Тогда

$$g(z) = \left(z - 2 \cos \frac{2\pi}{n}\right) g_1(z).$$

Положим

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ t & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon = \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}$ и t – переменная. Тогда

$\text{tr } A = \text{tr } B = 2 \cos \frac{\pi}{n}$, $\text{tr } AB = t + 2 \cos \frac{2\pi}{n}$ и мы имеем

$$\begin{aligned} \tau_{R_1(d,e)}(A, B) &= \text{tr } R_1(A, B) = \\ &= g\left(t + 2 \cos \frac{2\pi}{n}\right) = \text{tg}_1\left(t + 2 \cos \frac{2\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, $\tau_{R_1(d,e)}(A, B)$ является многочленом от t , свободный коэффициент которого равен нулю. С другой стороны, вычисляя след матрицы $R_1(A, B) = A^{u_1} B^{u_2} \dots A^{u_{s-1}} B^{u_s}$ легко видеть, что он является многочленом от t , свободный коэффициент которого равен

$$\varepsilon^{U+V} + \varepsilon^{-U-V} = 2 \cos \frac{U+V}{n} \pi \neq 0$$

– противоречие. Вторая часть леммы доказывается аналогично, только вместо матрицы B рассматривается матрица $B_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 \\ t & \varepsilon \end{pmatrix}$. \square

Из леммы 2.4 следует

Лемма 2.5. Если $n \geq 7$ нечетно, то многочлен $g(z)$ имеет корень z_0 , отличный от 2 и

$2 \cos \frac{2\pi}{n}$, и по лемме 2.3 группа G содержит неабелеву свободную подгруппу.

Действительно, в этом случае

$$2 \cos \frac{U \pm V}{n} \pi \neq 0,$$

поэтому по лемме 2.4 многочлен $g(z)$ не имеет корней 2 и $2 \cos \frac{2\pi}{n}$ и, следовательно, имеет корень z_0 , отличный от этих чисел.

Лемма 2.6. Если $n = 2^k n_1$, где $k \geq 1$ и $n_1 \geq 7$ – нечетно, то группа G содержит неабелеву свободную подгруппу.

Доказательство. Если $2 \cos \frac{U+V}{n} \pi \neq 0$ и $2 \cos \frac{U-V}{n} \pi \neq 0$, то по леммам 2.3 и 2.4 G содержит неабелеву свободную подгруппу. Поэтому будем считать, что хотя бы одно из этих чисел равно нулю. Пусть, например,

$$2 \cos \frac{U+V}{n} \pi = 0.$$

Тогда n_1 делит $U+V$. Рассмотрим факторгруппу группы G :

$$G_1 = \langle d_1, e_1, h_1 \mid d_1^{n_1} = e_1^{n_1} = h_1^2 = R_1'(d_1, e_1)^2 = R_1'(e_1, d_1)^2 = (d_1^\alpha h_1)^2 = (e_1^\alpha h_1)^2 = 1 \rangle,$$

где $R_1'(d_1, e_1)$ – циклически редуцированное слово в свободном произведении

$$\langle d_1 \mid d_1^{n_1} = 1 \rangle * \langle e_1 \mid e_1^{n_1} = 1 \rangle,$$

сопряженное с $R_1(d_1, e_1)$. Слово $R_1'(d_1, e_1)$ может иметь одну из трех форм:

- 1) $R_1'(d_1, e_1) = d_1^{U_1}$, где $U_1 \equiv U \pmod{n_1}$;
- 2) $R_1'(d_1, e_1) = e_1^{V_1}$, где $V_1 \equiv V \pmod{n_1}$;
- 3) $R_1'(d_1, e_1) = d_1^{\beta_1} e_1^{\gamma_1} \dots d_k^{\beta_k} e_k^{\gamma_k}$, где $k \geq 1$, $1 \leq \beta_i, \gamma_i < n_1$.

Рассмотрим случай 1). Чтобы слово $R_1'(d_1, e_1)$ приняло такой вид, необходимо, чтобы n_1 делило V , а тогда n_1 делит U , а значит и U_1 . Поэтому $R_1'(d_1, e_1) = 1$ и группа G_1 имеет копредставление $G_1 = \langle d_1, e_1, h_1 \mid d_1^{n_1} = e_1^{n_1} = h_1^2 = (d_1^\alpha h_1)^2 = (e_1^\alpha h_1)^2 = 1 \rangle$. Легко построить представление группы G_1 в $PSL_2(\mathbb{C})$ с неэлементарным образом. Для этого рассмотрим матрицы $A, B, C \in SL_2(\mathbb{C})$ такие, что $\text{tr } A = \text{tr } B = 2 \cos \frac{\pi}{n_1}$, $\text{tr } C = 0$, $\text{tr } AB = z_0$, $\text{tr } AC = 0$,

$\text{tr } BC = 0$, где z_0 произвольное число, отличное от 2 и $2 \cos \frac{2\pi}{n_1}$. Отображение

$$d_1 \mapsto [A], e_1 \mapsto [B], h_1 \mapsto [C]$$

является искомым представлением. Следовательно, G_1 , а поэтому и G содержит неабелеву свободную подгруппу

Случай 2) рассматривается аналогично.

В случае 3) по лемме 2.5 группа G_1 , а, следовательно, и G содержит неабелеву свободную подгруппу. \square

Лемма 2.7. Если $n = 2^k n_1$, где $k \geq 2$ и $n_1 = 3$ или $n_1 = 5$, то группа G содержит неабелеву свободную подгруппу.

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 2.6 достаточно рассмотреть случай, когда хотя бы одно из чисел $2 \cos \frac{U \pm V}{n} \pi$ равно нулю.

Пусть $2 \cos \frac{U+V}{n} \pi = 0$. Тогда $U+V = 2^{k-1} n_1 (2h+1)$

для некоторого $h \in \mathbb{Z}$. Следовательно, число $U-V = (U+V) - 2V$ является четным и $2 \cos \frac{U-V}{2n_1} \pi \neq 0$. При этом $2 \cos \frac{U+V}{2n_1} \pi \neq 0$.

Рассмотрим факторгруппу группы G :

$$G_2 = \langle d_1, e_1, h_1 \mid d_1^{2n_1} = e_1^{2n_1} = h_1^2 = R_1'(d_1, e_1)^2 = R_1'(e_1, d_1)^2 = (d_1^\alpha h_1)^2 = (e_1^\alpha h_1)^2 = 1 \rangle,$$

где $R_1'(d_1, e_1)$ – циклически редуцированное слово в свободном произведении

$$\langle d_1 \mid d_1^{2n_1} = 1 \rangle * \langle e_1 \mid e_1^{2n_1} = 1 \rangle,$$

сопряженное с $R_1(d_1, e_1)$. Дальнейшее доказательство полностью аналогично доказательству леммы 2.6.

Следующая лемма завершает доказательство теоремы 2.1.

Лемма 2.8. Если $n = 2^k$, где $k \geq 5$, то группа G содержит неабелеву свободную подгруппу.

Доказательство. Снова достаточно рассмотреть случай, когда хотя бы одно из чисел $2 \cos \frac{U \pm V}{2^k} \pi$ равно нулю. Пусть $2 \cos \frac{U+V}{2^k} \pi = 0$.

Тогда $U+V = 2^{k-1} (2h+1)$ для некоторого $h \in \mathbb{Z}$. Если 2^{k-2} делит $U-V$, то $2 \cos \frac{U \pm V}{2^{k-2}} \pi \neq 0$ и мы рассматриваем факторгруппу группы G :

$$G_3 = \langle d_1, e_1, h_1 \mid d_1^{2^{k-2}} = e_1^{2^{k-2}} = h_1^2 = R_1'(d_1, e_1)^2 = R_1'(e_1, d_1)^2 = (d_1^\alpha h_1)^2 = (e_1^\alpha h_1)^2 = 1 \rangle.$$

Если же 2^{k-2} не делит $U-V$, то

$$2 \cos \frac{U \pm V}{2^{k-1}} \pi \neq 0$$

и мы рассматриваем факторгруппу группы G :

$$G_4 = \langle d_1, e_1, h_1 \mid d_1^{2^{k-1}} = e_1^{2^{k-1}} = h_1^2 = R_1'(d_1, e_1)^2 = R_1'(e_1, d_1)^2 = (d_1^\alpha h_1)^2 = (e_1^\alpha h_1)^2 = 1 \rangle.$$

Теперь, аналогично доказательству леммы 2.6, мы доказываем, что группы G_3 и G_4 содержат неабелеву свободную подгруппу. \square

Теорема 2.2. Пусть

$$\Gamma = \langle a, b, c \mid a^2 = b^n = c^2 = R(a, b)^2 = (b^\alpha c)^2 = (ac)^2 = 1 \rangle$$

– обобщенная тетраэдральная группа, где $R(a, b) = ab^{u_1} ab^{u_2} \dots ab^{u_s}$, $1 \leq u_i < n$, $U = u_1 + \dots + u_s$, $s > 1$ – нечетно и $n = p^k n_1$ для некоторого простого p такого, что $(n_1, p) = 1$, при этом $k \geq 3$ при $p = 2$, $k \geq 2$ при $p = 3, 5$, $k \geq 1$ при $p \geq 7$ (т. е. $n \neq 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 30, 60$). Если выполняется одно из условий:

- 1) $(\alpha, n) \geq 3$;
- 2) $(U, n) = 1$,

то Γ содержит неабелеву свободную подгруппу и, следовательно, удовлетворяет альтернативе Титса.

Доказательство. Рассмотрим эпиморфизм g группы Γ на циклическую группу $C_2 = \langle d \rangle$ порядка 2, $g(a) = g(b) = 1$, $g(c) = d$. Тогда ядро $H = \ker g$ имеет копредставление

$$\langle d, e, f \mid d^2 = e^n = f^n = R^2(d, e) = R^2(d, f) = e^\alpha f^\alpha = 1 \rangle.$$

Рассмотрим случай, когда $(\alpha, n) = h \geq 3$. Рассмотрим факторгруппу H_1 группы H с копредставлением

$$H_1 = \langle d, e, f \mid d^2 = e^h = f^h = R^2(d, e) = R^2(d, f) = e^\alpha f^\alpha = 1 \rangle$$

(чтобы не усложнять обозначения, мы сохранили обозначения d, e, h для образующих). В группе H_1 мы имеем $e^\alpha = f^\alpha = 1$. Слово $R(d, e)$ в свободном произведении $\langle d \mid d^2 = 1 \rangle * \langle e \mid e^h = 1 \rangle$ сопряжено с циклически редуцированным словом вида либо $R_1 = d$, либо $R_2 = de^{a_1} \dots de^{a_m}$, где $m > 1$ и $1 \leq a_i < h$ для всех i . В первом случае группа H_1 имеет копредставление

$$H_1 = \langle d, e, f \mid d^2 = e^h = f^h = 1 \rangle,$$

т. е. является свободным произведением трех циклических групп порядков $2, h$ и h соответственно, а поэтому содержит неабелеву свободную

подгруппу. Во втором случае группа H_1 имеет копредставление

$$H_1 = \langle d, e, f \mid d^2 = e^h = f^h = R_1^2(d, e) = R_2^2(d, f) = 1 \rangle.$$

Придадим следующие значения характеристам Фрике: $\tau_d = 0$, $\tau_e = \tau_f = 2 \cos \frac{\pi}{h}$. Положим $z_1 = \tau_{de}$, $z_2 = \tau_{df}$, $z_3 = \tau_{ef}$. Рассмотрим многочлен

$$g(z_1) = \tau_{R_1(d, e)} \left(0, 2 \cos \frac{\pi}{h}, z_1 \right).$$

Многочлен $g(z_1)$ имеет степень m и пусть z_0 какой-либо его корень. По лемме 2.1 существуют матрицы $A_1, A_2, A_3 \in SL_2(\mathbb{C})$, такие, что $\text{tr } A_1 = 0$, $\text{tr } A_2 = \text{tr } A_3 = 2 \cos \frac{\pi}{h}$, $\text{tr } A_1 A_2 = \text{tr } A_1 A_3 = z_0$, $\text{tr } A_2 A_3 = 3$.

Тогда отображение $d \mapsto [A_1], e \mapsto [A_2], f \mapsto [A_3]$ задает представление группы H_1 в $PSL_2(\mathbb{C})$ с неэлементарным образом, поскольку подгруппа $\langle [A_2], [A_3] \rangle$ неприводима, бесконечна и отлична от группы диэдра. Следовательно, группа H_1 , а поэтому и группы H и Γ содержат неабелеву свободную подгруппу, что доказывает пункт 1) теоремы 2.2.

Рассмотрим факторгруппу H_2 группы H , добавив соотношение $e = f^{-1}$. Группа H_2 имеет копредставление

$$H_2 = \langle d, e \mid d^2 = e^n = R^2(d, e) = R^2(d, e^{-1}) = 1 \rangle.$$

Докажем, что при выполнении условий 2) либо 3) теоремы 2.2 группа H_2 содержит неабелеву свободную подгруппу. Идея доказательства состоит в том, чтобы построить представление группы H_2 в $PSL_2(\mathbb{C})$ с неэлементарным образом.

Рассмотрим сначала случай, когда $(U, n) = 1$. Запишем n в виде $n = p^k n_1$ как в условии теоремы. Пусть r , $1 \leq r < n$, – некоторое число, такое, что $(r, p) = 1$. Положим $\tau_d = 0$, $\tau_e = 2 \cos \frac{r\pi}{n}$, $\tau_{de} = z$ и определим многочлен

$$g_r(z) = \tau_{R(d, e)} \left(0, 2 \cos \frac{r\pi}{n}, z \right).$$

Отметим, что поскольку $d = d^{-1}$ в группе H_2 , то

$$\tau_{R(d, e^{-1})} = \tau_{R(d^{-1}, e^{-1})} = Q_R(\tau_{d^{-1}}, \tau_{e^{-1}}, \tau_{d^{-1}e^{-1}}) = Q_R(\tau_d, \tau_e, \tau_{de}) = \tau_{R(d, e)},$$

где Q_R – полином Фрике слова R . Следовательно,

$$\tau_{R(d, e^{-1})} \left(0, 2 \cos \frac{r\pi}{n}, z \right) = \tau_{R(d, e)} \left(0, 2 \cos \frac{r\pi}{n}, z \right) = g_r(z).$$

Если z_0 – корень многочлена $g_r(z)$, то по лемме 2.1 найдутся матрицы $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$ такие, что

$$\operatorname{tr} A = 0, \operatorname{tr} B = 2 \cos \frac{r\pi}{n}, \operatorname{tr} AB = z_0$$

и отображение $d \mapsto [A], e \mapsto [B]$ задает представление группы H_2 в $PSL_2(\mathbb{C})$. Обозначим $G(z_0) = \langle [A], [B] \rangle$.

Лемма 2.9. *Группа $G(z_0)$ является неэлементарной подгруппой в $PSL_2(\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда z_0 не принадлежит множеству*

$$\left\{ 0, \pm 2 \sin \frac{r\pi}{n} \right\}.$$

Доказательство. Если $z_0 = 0$, то группа $G(z_0)$ – конечная группа диэдра. Если $z_0 = \pm 2 \sin \frac{r\pi}{n}$, то группа $G(z_0)$ приводима, поскольку выполняется равенство (2.3). Если же z_0 не принадлежит указанному в лемме множеству, то группа $G(z_0)$ неприводима, отлична от группы диэдра и бесконечна, поскольку элемент $[B]$ имеет порядок больше 5. Поэтому $G(z_0)$ неэлементарная подгруппа в $PSL_2(\mathbb{C})$. \square

Лемма 2.10. *Многочлен $g_r(z)$ не имеет корней $\pm 2 \sin \frac{r\pi}{n}$.*

Доказательство. Допустим, что $z_0 = 2 \sin \frac{r\pi}{n}$ – корень $g_r(z)$. Тогда $g_r(z) = \left(z - 2 \sin \frac{r\pi}{n} \right) h(z)$ для некоторого многочлена h . Положим

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon^n & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-n} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-2r} & 0 \\ t & \varepsilon^{2r} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

где $\varepsilon = \cos \frac{\pi}{2n} + i \sin \frac{\pi}{2n}$. Тогда

$$\operatorname{tr} A = 0, \operatorname{tr} B = 2 \cos \frac{r\pi}{n},$$

$$\operatorname{tr} AB = t + 2 \cos \frac{(-2r+n)\pi}{2n} = t + 2 \sin \frac{r\pi}{n}$$

и мы имеем равенство

$$\operatorname{tr} R(A, B) = g_r(\operatorname{tr} AB) = \operatorname{th} \left(t + 2 \sin \frac{r\pi}{n} \right). \quad (2.6)$$

Таким образом, свободный член многочлена в правой части (2.6) равен нулю. С другой стороны, свободный член полинома $\operatorname{tr} R(A, B)$ равен

$$\begin{aligned} & 2 \cos \frac{sn - 2rU}{2n} \pi = \\ & = 2 \cos \left(\frac{s}{2} - \frac{rU}{n} \right) \pi = \pm 2 \sin \frac{rU\pi}{n} \neq 0 \end{aligned}$$

в силу выбора числа r и того, что s – нечетное, $(U, n) = 1$ – противоречие.

Аналогично, рассматривая вместо матрицы $B = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-2r} & 0 \\ t & \varepsilon^{2r} \end{pmatrix}$ матрицу $B_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon^{2r} & 0 \\ t & \varepsilon^{-2r} \end{pmatrix}$, получим

что $z_0 = -2 \sin \frac{r\pi}{n}$ не является корнем $g_r(z)$. \square

Из лемм 2.9 и 2.10 получаем

Следствие. *Если многочлен $g_r(z)$ имеет корень z_0 , отличный от нуля, то группа $G(z_0)$, а вместе с ней и группа H_2 , содержит неабелеву свободную подгруппу.*

Лемма 2.11 [14]. *Пусть ε – примитивный корень из 1 степени n ,*

$$L_n = \mathbb{Q}(\varepsilon + \varepsilon^{-1}) = \mathbb{Q} \left(\cos \frac{2\pi}{n} \right),$$

p – простое число. Тогда:

1. Если $(r, p) = 1$, то

$$N_{L_{4p^s}/\mathbb{Q}} \left(2 \sin \frac{r\pi}{p^s} \right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{p-1}{2}} p, & p > 2 \\ 2, & p = 2. \end{cases}$$

2. Если $n > 2$, n не является степенью простого числа и $(r, n) = 1$, то $N_{L_n/\mathbb{Q}} \left(2 \sin \frac{r\pi}{n} \right) = 1$.

Лемма 2.12. *Многочлен $g_r(z)$ при подходящем выборе r имеет корень $z_0 \neq 0$.*

Доказательство. Пусть A и B – матрицы, определенные в (2.5). Допустим, что

$$g_r(z) = M_s \cdot z^s,$$

где (см. [13])

$$\begin{aligned} M_s &= \prod_{i=1}^s P_{u_i-1} \left(2 \cos \frac{r\pi}{n} \right) = \\ &= 2 \sin \left(\frac{r\pi}{n} \right)^{-s} \prod_{i=1}^s 2 \sin \left(\frac{u_i r\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

Тогда $\operatorname{tr} R(A, B) = g_r(\operatorname{tr} AB) = M_s \left(t + 2 \sin \frac{r\pi}{n} \right)^s$.

Поэтому свободный член полинома $\operatorname{tr} R(A, B)$ равен

$$M_s \left(2 \sin \frac{r\pi}{n} \right)^s = \prod_{i=1}^s 2 \sin \left(\frac{u_i r\pi}{n} \right) \quad (2.7)$$

С другой стороны, свободный член $\operatorname{tr} R(A, B)$ равен

$$2 \cos \frac{sn - 2rU}{2n} \pi = (-1)^{(s-1)/2} 2 \sin \frac{rU\pi}{n}.$$

Таким образом, имеем равенство:

$$\prod_{i=1}^s 2 \sin \left(\frac{u_i r\pi}{n} \right) = (-1)^{(s-1)/2} 2 \sin \frac{rU\pi}{n}. \quad (2.8)$$

Предположим вначале, что p^k не делит u_i (напомним, что $n = p^k n_1$ как в условии теоремы)

для всех i . Положим $r = n_i$. Тогда (2.8) примет вид:

$$\prod_{i=1}^s 2 \sin \left(\frac{u_i \pi}{p^k} \right) = (-1)^{(s-1)/2} 2 \sin \frac{U \pi}{p^k}. \quad (2.9)$$

Учитывая лемму 2.11 и то, что $s > 1$, получим, что норма левой части делится на p^s , а норма правой равна $\pm p$ – противоречие.

Далее, пусть существуют такие значения $i \in \{1, \dots, s\}$, что p^k делит u_i .

Для всех таких i запишем: $\frac{u_i}{p^k n_i} = \frac{v_i}{m_i}$, где

$(v_i, m_i) = 1$ и p не делит m_i . Пусть $m_j = p_1 p_2 \dots p_t$ – разложение на простые множители наименьшего из всех таких m_i . Тогда положим $r = p_2 \dots p_t$, если $t > 1$, и $r = 1$ при $t = 1$. Тогда левая часть (2.8) содержит множитель

$$2 \sin \left(\frac{v_j p_2 \dots p_t \pi}{p_1 p_2 \dots p_t} \right) = 2 \sin \left(\frac{v_j \pi}{p_1} \right),$$

норма которого по лемме 2.11 имеет вид $\pm p_1^m$ для некоторого m . С другой стороны, правая часть (2.8) примет вид $(-1)^{(s-1)/2} 2 \sin \left(\frac{U}{p^k p_1 q} \right) \pi$,

где $(U, p^k p_1 q) = 1$ и $p \neq p_1$ – различные простые числа. Таким образом, норма правой части равна ± 1 . Следовательно, нормы левой и правой части (2.8) не совпадают – противоречие. Теорема 2.2 доказана. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Винберг, Э.Б. Группы, задаваемые периодическими попарными соотношениями / Э.Б. Винберг // Математический сборник. – 1997. – Т. 188, № 9. – С. 3–12.
2. Fine, B. Algebraic generalizations of discrete groups. A path to combinatorial group theory through one-relator products / B. Fine, G. Rosenberger – New York: Marcel Dekker. – 315 p.
3. Howie, J. The Tits alternative for generalized tetrahedron groups / J. Howie, N. Kopteva // Journal of Group Theory. – 2006. – Vol. 9. – P. 173–189.
4. Fine, B. The Tits alternative for spherical generalized tetrahedron groups / B. Fine, A. Hulpke,

V. große Rebel, G. Rosenberger // Algebra Colloquium. – 2008. – Vol. 15, № 4. – P. 541–554.

5. Große Rebel, V. The Tits alternative for Tsaranov’s generalized tetrahedron groups / V. große Rebel, M. Hahn, G. Rosenberger // Groups-Complexity-Cryptology. – 2009. – Vol. 1, № 2. – P. 207–216.

6. Fine, B. The Tits alternative for short generalized tetrahedron groups / B. Fine, A. Hulpke, V. große Rebel, G. Rosenberger, S. Schauerte // Scientia. Series A: Mathematical Sciences. – 2011. – Vol. 21. – P. 1–15.

7. Беньяш-Кривец, В.В. О свободных подгруппах в некоторых обобщенных тетраэдральных группах / В.В. Беньяш-Кривец, С. Хуа // Вестник Белорусского государственного университета, сер. 1. – 2008. – № 2. – С. 79–85.

8. Беньяш-Кривец, В.В. Альтернатива Титса для обобщенных тетраэдральных групп специального типа / В.В. Беньяш-Кривец, Я. А. Жуковец // Вестник Белорусского государственного университета, сер. 1. – 2011. – № 1. – С. 46–53.

9. Беньяш-Кривец, В.В. О свободных подгруппах в обобщенных тетраэдральных группах типа (3,8,2,2,2,2) / В.В. Беньяш-Кривец, Я.А. Жуковец // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2011. – № 6 (66). – С. 12–15.

10. Беньяш-Кривец, В.В. О свободных подгруппах в обобщенных тетраэдральных группах типа (4,6,2,2,2,2) / В.В. Беньяш-Кривец, Я.А. Жуковец // Вестник Белорусского государственного университета, сер. 1. – 2012. – № 1. – С. 62–68.

11. Katok, S. Fuchsian groups / S. Katok. – University of Chicago Press: Chicago, IL. – 1992. – 175 p.

12. Horowitz, R. Characters of free groups represented in the two-dimensional special linear group / R. Horowitz // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1972. – Vol. 25. – P. 635–649.

13. Traina, C. Trace polynomial for two generator subgroups of $SL(2, \mathbb{C})$ / C. Traina // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1980. – Vol. 79. – P. 369–372.

14. Беньяш-Кривец, В.В. О свободных подгруппах некоторых обобщенных треугольных групп / В.В. Беньяш-Кривец // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 3. – С. 14–17.

Поступила в редакцию 11.03.19.

УДК 512.542

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ ОБОБЩЕННЫХ ПРОЕКТОРОВ С ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Т.И. Васильева^{1,2}

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
²Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

ON THE INTERSECTIONS OF GENERALIZED PROJECTORS WITH THE PRODUCTS OF NORMAL SUBGROUPS OF FINITE GROUPS

T.I. Vasilyeva^{1,2}

¹F. Scorina Gomel State University
²Belarusian State University of Transport, Gomel

Исследованы факторизационные свойства \mathfrak{F}^{ω} -проектора, введенного В.А. Ведерниковым и М.М. Сорокиной в 2016 году (ω – непустое множество простых чисел и \mathfrak{F} – непустой класс групп). Найлены необходимые и достаточные условия выполнения равенства $N_1N_2 \cap H = (N_1 \cap H)(N_2 \cap H)$ для любого \mathfrak{F}^{ω} -проектора H и любых нормальных ω -подгрупп N_1 и N_2 группы G , где G – расширение ω -группы с помощью \mathfrak{F} -группы.

Ключевые слова: конечная группа, \mathfrak{F}^{ω} -проектор, ω -насыщенная формация, ω -примитивно замкнутый гомоморф.

The factorization properties of the \mathfrak{F}^{ω} -projector introduced by V.A. Vedernikov and M.M. Sorokina in 2016 (ω is a non-empty set of primes and \mathfrak{F} is a non-empty class of groups) were investigated. Necessary and sufficient conditions are found for the equality $N_1N_2 \cap H = (N_1 \cap H)(N_2 \cap H)$ for any \mathfrak{F}^{ω} -projector H and any normal ω -subgroups N_1 and N_2 of G , where G is an extension of the ω -group with the help of an \mathfrak{F} -group.

Keywords: finite group, \mathfrak{F}^{ω} -projector, ω -saturated formation, ω -primitive closed homomorph.

Введение

Все рассматриваемые в работе группы конечные. В разрешимой группе холловы (в частности, силовские) подгруппы, картеровы подгруппы, т.е. самонормализуемые нильпотентные подгруппы, обладают таким важным свойством, как сохранение при гомоморфизмах группы «максимальности» относительно заданного класса групп. Это было замечено Гашюцем [1], [2] и легло в основу следующего понятия.

Для непустого класса групп \mathfrak{F} подгруппа H группы G называется \mathfrak{F} -проектором в G , если HN/N является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой в G/N для любой нормальной подгруппы N из G .

Для класса \mathfrak{S}_p всех p -групп множества силовских p -подгрупп и \mathfrak{S}_p -проекторов совпадают в любой группе. Если \mathfrak{F} есть класс всех разрешимых π -групп \mathfrak{S}_{π} или класс всех нильпотентных групп \mathfrak{N} , а группа G разрешима, то совпадают множества ее π -холловых подгрупп и \mathfrak{S}_{π} -проекторов, множества картеровых подгрупп и \mathfrak{N} -проекторов [3, теорема 15.2]. Гашюц [1] доказал, что для существования \mathfrak{F} -проекторов в любой разрешимой группе достаточно насыщенности формации \mathfrak{F} . Шунк [4] установил, что в каждой

разрешимой группе \mathfrak{F} -проекторы существуют тогда и только тогда, когда \mathfrak{F} – примитивно замкнутый гомоморф (названных позднее классом Шунка). Эрикссон [5] распространил результат Шунка на произвольные группы.

В [6] В.А. Ведерниковым и М.М. Сорокиной было введено одно обобщение понятия \mathfrak{F} -проектора, для которого были изучены такие свойства, как существование, сопряженность, вложение подгрупп, инвариантность относительно заданных гомоморфизмов.

Определение 0.1 [6]. Пусть ω – непустое множество простых чисел и \mathfrak{F} – непустой класс групп. Подгруппа H группы G называется \mathfrak{F}^{ω} -проектором в G , если HN/N является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой в G/N для любой нормальной ω -подгруппы N из G .

Отметим одно важное свойство \mathfrak{F} -проекторов. В классе разрешимых групп Хупперт [7], Ти Ен [8, теорема IV.5.3] доказали, что если \mathfrak{F} – класс Шунка, то

$$N_1N_2 \cap H = (N_1 \cap H)(N_2 \cap H)$$

для любого \mathfrak{F} -проектора H и любых нормальных подгрупп N_1 и N_2 группы G тогда и только тогда, когда \mathfrak{F} – насыщенная формация. В классе всех

групп этот результат доказал Фёрстер [9].

Настоящая работа посвящена нахождению новых свойств \mathfrak{F}^ω -проекторов. В частности, здесь исследуются пересечения \mathfrak{F}^ω -проекторов с произведениями нормальных ω -подгрупп групп и развиваются результаты Хупперта-Ти Ена, Фёрстера в случае, когда \mathfrak{F} – ω -примитивно замкнутый гомоморф или ω -насыщенная формация.

1 Предварительные результаты

Используются стандартные определения и обозначения, при необходимости см. [8], [10].

Для группы G через $|G|$ обозначается ее порядок, через $\pi(G)$ – множество всех простых делителей $|G|$, через $\text{Core}_G(M)$ – ядро подгруппы M в G , т.е. $\text{Core}_G(M) = \bigcap M^x$ для всех $x \in G$, $O_\omega(G)$ – наибольшая нормальная ω -подгруппа из G , где ω – некоторое подмножество множества \mathbf{P} всех простых чисел.

Группа G называется ω -примитивной [6], если в G существует максимальная подгруппа M такая, что $\text{Core}_G(M) \cap O_\omega(G) = 1$, а M называется ω -примитиватором. Нам потребуется следующий результат, вытекающий из [6, теорема 2.1].

Лемма 1.1. Пусть G – ω -примитивная группа, M – ее ω -примитиватор и $O_\omega(G) \neq 1$. Тогда G содержит не более двух минимальных нормальных ω -подгрупп, при этом, если в G имеется только две минимальные нормальные ω -подгруппы N_1 и N_2 , то $G = [N_1]M = [N_2]M$, $N_1 \cong N_2 \cong N_1N_2 \cap M$ и $C_G(N_i) = N_{3-i} \times \text{Core}_G(M)$, $i = 1, 2$.

Класс групп \mathfrak{F} называется: 1) наследственным, если \mathfrak{F} содержит вместе с каждой группой и все ее подгруппы; 2) гомоморфом, если из $G \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$ для любой нормальной подгруппы N из G ; 3) формацией, если \mathfrak{F} – гомоморф, и из $G/A \in \mathfrak{F}$ и $G/B \in \mathfrak{F}$ для любых нормальных подгрупп A и B из G всегда следует, что $G/A \cap B \in \mathfrak{F}$.

Через $\pi(\mathfrak{F})$ обозначается множество всех простых делителей порядков групп из \mathfrak{F} . Группа (подгруппа), принадлежащая \mathfrak{F} , называется \mathfrak{F} -группой (\mathfrak{F} -подгруппой); \mathfrak{F} -подгруппа называется \mathfrak{F} -максимальной в группе, если она не содержится ни в одной собственной \mathfrak{F} -группе группы. Если \mathfrak{F} – формация, то $G^\mathfrak{F}$ – \mathfrak{F} -корадикал группы G , т.е. наименьшая нормальная в G подгруппа, для которой $G/G^\mathfrak{F} \in \mathfrak{F}$.

Зафиксируем следующие обозначения: \mathfrak{E} – класс всех групп, \mathfrak{E}_ω – класс всех ω -групп, \mathfrak{S} – класс всех разрешимых групп, \mathfrak{N} – класс всех нильпотентных групп.

Класс групп $\mathfrak{E}_\omega\mathfrak{F} = (G \mid \text{в } G \text{ существует нормальная } \omega\text{-подгруппа } N \text{ такая, что } G/N \in \mathfrak{F})$. Если группа $G \in \mathfrak{E}_\omega\mathfrak{F}$, то G называется расширением ω -группы с помощью \mathfrak{F} -группы.

Приведем некоторые, наиболее часто встречающиеся свойства \mathfrak{F}^ω -проекторов [6, леммы 3.1 и 3.2].

Лемма 1.2. Пусть \mathfrak{F} – непустой класс групп, N – нормальная ω -подгруппа группы G . Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) Если H – \mathfrak{F}^ω -проектор группы G , то HN/N – \mathfrak{F}^ω -проектор группы G/N .

(2) Если \mathfrak{F} – непустой гомоморф, H/N – \mathfrak{F}^ω -проектор группы G/N и K – \mathfrak{F}^ω -проектор группы H , то K – \mathfrak{F}^ω -проектор группы G .

Непустой класс групп \mathfrak{F} , содержащийся в классе групп \mathfrak{X} , называется: 1) ω -насыщенным в \mathfrak{X} [6], [11], если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ и любой нормальной подгруппы N группы G такой, что $N \leq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$, из $G/N \in \mathfrak{F}$ следует $G \in \mathfrak{F}$; 2) ω -примитивно замкнутым (или, кратко, ω P-замкнутым) в \mathfrak{X} [6], если для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ из $G/\text{Core}_G(M) \cap O_\omega(G) \in \mathfrak{F}$ для любой максимальной подгруппы M группы G следует $G \in \mathfrak{F}$; 3) ω P-гомоморфом в \mathfrak{X} [6], если \mathfrak{F} – гомоморф, который ω P-замкнут в \mathfrak{X} .

Лемма 1.3 [6, лемма 2.1]. Если \mathfrak{X} – непустой класс групп, то любой ω P-гомоморф в \mathfrak{X} является ω -насыщенным в \mathfrak{X} .

Лемма 1.4 [6, теорема 3.1]. Пусть \mathfrak{X} – наследственный гомоморф, \mathfrak{F} – ω P-гомоморф в \mathfrak{X} и группа $G \in \mathfrak{X}$. Если G является расширением ω -группы с помощью \mathfrak{F} -группы, то в G существует \mathfrak{F}^ω -проектор.

Лемма 1.5 [8, лемма A.1.2]. Пусть U, V и W – подгруппы группы G . Тогда и только тогда

$$U \cap VW = (U \cap V)(U \cap W),$$

когда

$$UV \cap UW = U(V \cap W).$$

2 Основные результаты

Пусть G – группа, H – ее подгруппа такая, что,

$$N_1N_2 \cap H = (N_1 \cap H)(N_2 \cap H) \quad (2.1)$$

для любых нормальных ω -подгрупп N_1 и N_2 из G . Будем говорить в этом случае, что H обладает свойством (2.1).

Лемма 2.1. Если подгруппа H группы G обладает свойством (2.1), то HN/N обладает свойством (2.1) для любой нормальной ω -подгруппы N из G .

Доказательство. Возьмем любые нормальные ω -подгруппы N_1 / N и N_2 / N из G / N . Тогда N_1 и N_2 – нормальные ω -подгруппы группы G . По условию H обладает свойством (2.1). Поэтому $N_1 N_2 \cap H = (N_1 \cap H)(N_2 \cap H)$. Используя тождество Дедекинда, имеем

$$\begin{aligned} N_1 N_2 \cap HN &= (N_1 N_2 \cap H) N = \\ &= (N_1 \cap H)(N_2 \cap H) N = (N_1 \cap HN)(N_2 \cap HN). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} N_1 / N \cdot N_2 / N \cap HN / N &= (N_1 N_2 \cap HN) / N = (N_1 \cap HN) \\ &(N_2 \cap HN) / N = (N_1 / N \cap HN / N)(N_2 / N \cap HN / N). \end{aligned}$$

Итак, HN / N обладает свойством (2.1). \square

Лемма 2.2. Пусть \mathfrak{X} – наследственный гомоморф, \mathfrak{F} – ω P-гомоморф в \mathfrak{X} и $G \in \mathfrak{X}$. Если G является расширением ω -группы с помощью \mathfrak{F} -группы и любой \mathfrak{F}^0 -проектор группы G обладает свойством (2.1), то в G / N любой \mathfrak{F}^0 -проектор обладает свойством (2.1), где N – произвольная нормальная ω -подгруппа из G .

Доказательство. Так как \mathfrak{X} – гомоморф, имеем $G / N \in \mathfrak{X}$. По условию в G найдется нормальная ω -подгруппа K такая, что $G / K \in \mathfrak{F}$. Поскольку KN / N – нормальная ω -подгруппа в G / N и $G / N / KN / N \cong G / K / KN / K \in \mathfrak{F}$, заключаем, что $G / N \in \mathfrak{E}_\omega \mathfrak{F}$.

Если $O_\omega(G) = 1$, то $G \in \mathfrak{F}$. Тогда G является своим \mathfrak{F}^0 -проектором и обладает свойством (2.1). Предположим, что $O_\omega(G) \neq 1$. Возьмем любой \mathfrak{F}^0 -проектор S / N группы G / N . Так как $S \in \mathfrak{X}$ и $S \in \mathfrak{E}_\omega \mathfrak{F}$, по лемме 1.4 в S существует \mathfrak{F}^0 -проектор H . По определению 0.1 $S / N = HN / N$. Ввиду лемм 1.2 и 2.1 S / N обладает свойством (2.1). \square

Гомоморф \mathfrak{F} будем называть ω -формацией, если из $G / A \in \mathfrak{F}$ и $G / B \in \mathfrak{F}$ для любых нормальных ω -подгрупп A и B из G всегда следует, что $G / A \cap B \in \mathfrak{F}$.

Ясно, что если $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \omega$, то ω -формация является формацией.

Теорема 2.1. Пусть \mathfrak{X} – наследственная формация, \mathfrak{F} – ω P-гомоморф в \mathfrak{X} , $G \in \mathfrak{X}$ и G является расширением ω -группы с помощью \mathfrak{F} -группы. В группе G всякий \mathfrak{F}^0 -проектор обладает свойством (2.1) тогда и только тогда, когда \mathfrak{F} – ω -насыщенная в \mathfrak{X} ω -формация.

Доказательство. Необходимость. По лемме 1.3 \mathfrak{F} является ω -насыщенным классом в \mathfrak{X} .

Предположим, что если \mathfrak{X} -группа является расширением ω -группы с помощью \mathfrak{F} -группы, то всякий ее \mathfrak{F}^0 -проектор обладает свойством (2.1).

Докажем, что \mathfrak{F} является ω -формацией. Допустим, что это не выполняется. Пусть G – группа наименьшего порядка такая, что $G / A \in \mathfrak{F}$ и $G / B \in \mathfrak{F}$ для нормальных ω -подгрупп A и B из G , а $G / A \cap B \notin \mathfrak{F}$.

Если $K = A \cap B \neq 1$, то $G / K / A / K \cong G / A \in \mathfrak{F}$ и $G / K / B / K \cong G / B \in \mathfrak{F}$. По выбору G заключаем, что $G / K / (A / K \cap B / K) \cong G / A \cap B \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Предположим, $A \cap B = 1$. Пусть N – минимальная нормальная ω -подгруппа группы G , содержащаяся в A . Тогда $G / N / A / N \cong G / A \in \mathfrak{F}$.

Так как \mathfrak{F} – гомоморф, имеем

$$G / N / BN / N \cong G / B / BN / B \in \mathfrak{F}.$$

По выбору G , заключаем, что

$$\begin{aligned} G / N / (A / N \cap BN / N) &\cong G / A \cap BN = \\ &= G / (A \cap B) N = G / N \in \mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Итак, можно считать, что A и B – минимальные нормальные ω -подгруппы группы G .

Поскольку $G / A \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, $G / B \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и \mathfrak{X} – формация, заключаем $G \cong G / A \cap B \in \mathfrak{X}$. Так как G является расширением ω -группы с помощью \mathfrak{F} -группы, по лемме 1.4 в G существует \mathfrak{F}^0 -проектор H . Тогда $G / A = HA / A$ и $G / B = HB / B$. Поэтому $G = HA = HB$. Так как $AB \cap H = (A \cap H)(B \cap H)$, по лемме 1.5 имеем $AH \cap BH = (A \cap B)H$. Откуда $G = H \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, \mathfrak{F} – ω -формация. Необходимость доказана.

Достаточность. Допустим теперь, что \mathfrak{F} является ω -насыщенной в \mathfrak{X} ω -формацией. Пусть G – группа наименьшего порядка такая, что $G \in \mathfrak{X}$, G является расширением ω -группы с помощью \mathfrak{F} -группы, но в G существует \mathfrak{F}^0 -проектор H , который не обладает свойством (2.1). Тогда в G имеются нормальные ω -подгруппы N_1 и N_2 , для которых

$$N_1 N_2 \cap H \neq (N_1 \cap H)(N_2 \cap H).$$

Предположим, что $L = N_1 \cap N_2 \neq 1$. По лемме 1.2 (1) HL / L – \mathfrak{F}^0 -проектор группы G / L . Так как \mathfrak{X} – гомоморф, $G / L \in \mathfrak{X}$. Из $G \in \mathfrak{E}_\omega \mathfrak{F}$ следует, что в G найдется нормальная ω -подгруппа K такая, что $G / K \in \mathfrak{F}$. Тогда $G / L / KL / L \cong G / K / KL / K \in \mathfrak{F}$ и KL / L – нормальная ω -подгруппа в G / L . Поэтому G / L является расширением ω -группы с помощью \mathfrak{F} -группы. По выбору G следует, что HL / L обладает свойством (2.1). Значит,

$$\begin{aligned} (N_1 / L)(N_2 / L) \cap HL / L &= \\ &= (N_1 / L \cap HL / L)(N_2 / L \cap HL / L) = \\ &= (N_1 \cap H)(N_2 \cap H) / L. \end{aligned}$$

Откуда $N_1N_2 \cap HL = (N_1 \cap H)(N_2 \cap H)L$. Поэтому

$$N_1N_2 \cap H = N_1N_2 \cap HL \cap H =$$

$$= (N_1 \cap H)(N_2 \cap H)L \cap H = (N_1 \cap H)(N_2 \cap H),$$
 что противоречит выбору G .

Допустим, что $N_1 \cap N_2 = 1$. Рассмотрим $D = N_1H \cap N_2H$. Ясно, что $N_1D = N_1H$ и $N_2D = N_2H$. Тогда

$$N_iD / N_i \cong D / N_i \cap D \cong H / N_i \cap H \in \mathfrak{F}, i = 1, 2.$$

Ввиду $G \in \mathfrak{X}$ и наследственности \mathfrak{X} , имеем $D \in \mathfrak{X}$. Так как \mathfrak{F} – ω -формація,

$$D / (N_1 \cap D \cap N_2 \cap D) \cong D \in \mathfrak{F}.$$

Из \mathfrak{F} -максимальности H в G и $H \leq D$ следует, что $H = D$. Отсюда $N_1H \cap N_2H = (N_1 \cap N_2)H$. Ввиду леммы 1.5 имеем $N_1N_2 \cap H = (N_1 \cap H)(N_2 \cap H)$. Получили противоречие с выбором G . \square

Определение 2.1. Пусть \mathfrak{X} – гомоморф, \mathfrak{F} – ωP -гомоморф в \mathfrak{X} . Будем обозначать через $b^\omega(\mathfrak{F})$ следующий класс групп: $b^\omega(\mathfrak{F}) = \{G \in \mathfrak{X} \mid O_\omega(G) \neq 1, G \notin \mathfrak{F} \text{ и } G/N \in \mathfrak{F} \text{ для любой неединичной нормальной } \omega\text{-подгруппы } N \text{ из } G\}$.

Теорема 2.2. Пусть \mathfrak{X} – наследственный гомоморф, \mathfrak{F} – ωP -гомоморф, $G \in \mathfrak{X}$ и G является расширением ω -группы с помощью \mathfrak{F} -группы. Группа $G \in \mathfrak{F}$ всякий раз, как в G любой \mathfrak{F}^ω -проектор обладает свойством (2.1), тогда и только тогда, когда $b^\omega(\mathfrak{F})$ состоит из ω -примитивных групп, имеющих только две минимальные нормальные ω -подгруппы.

Доказательство. Необходимость. Пусть \mathfrak{X} -группа, являющаяся расширением ω -группы с помощью \mathfrak{F} -группы, принадлежит \mathfrak{F} всякий раз, как ее любой \mathfrak{F}^ω -проектор обладает свойством (2.1). Пусть $D \in b^\omega(\mathfrak{F})$. Тогда $D \notin \mathfrak{F}$, $O_\omega(D) \neq 1$ и $D / \text{Core}_D(M) \cap O_\omega(D) \in \mathfrak{F}$ для любой максимальной подгруппы M из D с $\text{Core}_D(M) \cap O_\omega(D) \neq 1$. Так как \mathfrak{F} – ωP -гомоморф в \mathfrak{X} и $D \notin \mathfrak{F}$, в D существует максимальная подгруппа M с $\text{Core}_D(M) \cap O_\omega(D) = 1$. Значит, D является ω -примитивной группой с ω -примитиватором M . По лемме 1.1 D содержит не более двух минимальных нормальных ω -подгрупп.

Допустим, что в D существует единственная минимальная нормальная ω -подгруппа N . По выбору D фактор-группа $D/N \in \mathfrak{F}$. Тогда D является расширением ω -группы с помощью \mathfrak{F} -группы. Так как $D \in \mathfrak{X}$ по лемме 1.4 в D существует \mathfrak{F}^ω -проектор. Пусть H – произвольный \mathfrak{F}^ω -проектор из D . Из определения 0.1 следует, что $D = HN$.

Возьмем произвольные нормальные ω -подгруппы N_1 и N_2 из D . Так как N – единственная минимальная нормальная ω -подгруппа в D ,

$N \leq N_1 \cap N_2$ и $N_i = N_i \cap HN = (N_i \cap H)N$ для $i = 1, 2$. Используя тождество Дедекинда, имеем

$$N_1N_2 \cap H = (N_1 \cap H)N(N_2 \cap H)N \cap H =$$

$$= (N_1 \cap H)(N_2 \cap H)(N \cap H) = (N_1 \cap H)(N_2 \cap H).$$

Это означает, в D любой \mathfrak{F}^ω -проектор H обладает свойством (2.1). По условию $D \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с $D \in b^\omega(\mathfrak{F})$.

Таким образом, D имеет только две минимальные нормальные ω -подгруппы. Необходимость доказана.

Достаточность. Допустим, что $b^\omega(\mathfrak{F})$ состоит из ω -примитивных групп, в которых имеется только две минимальные нормальные ω -подгруппы. Пусть G – группа наименьшего такая, что G – \mathfrak{X} -группа, являющаяся расширением ω -группы с помощью \mathfrak{F} -группы, в G любой \mathfrak{F}^ω -проектор обладает свойством (2.1), а $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда в G найдется нормальная ω -подгруппа N такая, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Из $G \notin \mathfrak{F}$ следует, что $O_\omega(G) \neq 1$. Пусть L – нормальная ω -подгруппа группы G и $L \neq N$. Из $G/L \in \mathfrak{X}$, LN/L – нормальная ω -подгруппа в G/L и

$$G/L / LN/L \cong G/N / LN/N \in \mathfrak{F},$$

закключаем, что $G/L \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{E}_\omega \mathfrak{F}$. Если R/L – любой \mathfrak{F}^ω -проектор группы G/L , то ввиду леммы 1.4 и определения 0.1 $R/L = SL/L$ для некоторого \mathfrak{F}^ω -проектора S группы R . По лемме 1.2 (2) S – \mathfrak{F}^ω -проектор группы G . Ввиду леммы 2.1 $R/L = SL/L$ обладает свойством (2.1). По выбору G имеем $G/L \in \mathfrak{F}$.

Следовательно, $G \in b^\omega(\mathfrak{F})$. По предположению в G существуют только две минимальные нормальные ω -подгруппы N_1 и N_2 . Так как $G/N_i \in \mathfrak{F}$, имеем $G = N_iH$, для любого \mathfrak{F}^ω -проектора H группы G , $i = 1, 2$. Тогда с одной стороны $N_1N_2 \cap H = (N_1 \cap H)(N_2 \cap H)$ по выбору G . С другой стороны по лемме 1.1 $N_1 \cap H = N_2 \cap H = 1$ и $N_1N_2 \cap H \cong N_i$, $i = 1, 2$. Отсюда следует противоречие $1 \neq N_i \cong 1$. \square

Заключение

В работе исследована связь \mathfrak{F}^ω -проекторов группы с произведениями нормальных ω -подгрупп. Найден критерий, при котором $N_1N_2 \cap H = (N_1 \cap H)(N_2 \cap H)$ для любого \mathfrak{F}^ω -проектора H группы G и любых нормальных в G ω -подгрупп N_1 и N_2 в расширении ω -группы с помощью \mathfrak{F} -группы. В качестве следствий получаются как известные, так и новые результаты.

Если $\omega = \mathbf{P}$, то ωP -гомоморф является классом Шунка. Для $\omega = \mathbf{P}$ и $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ из теоремы 2.1 получается отмеченная выше теорема Хупперта-Ти Ена.

Следствие 1 [8]. Пусть \mathfrak{F} – класс Шунка. Для группы G , ее любого \mathfrak{F} -проектора H и ее любых нормальных подгрупп N_1 и N_2 выполняется равенство $N_1N_2 \cap H = (N_1 \cap H)(N_2 \cap H)$ тогда и только тогда, когда \mathfrak{F} – насыщенная формация.

Следствие 2. Пусть \mathfrak{F} – непустая ω -насыщенная формация и G – группа, у которой \mathfrak{F} -кордикал является ω -подгруппой. Тогда

$$N_1N_2 \cap H = (N_1 \cap H)(N_2 \cap H) \text{ и } N_1H \cap N_2H = (N_1 \cap N_2)H$$

для любого \mathfrak{F}^ω -проектора H из G и любых нормальных ω -подгрупп N_1 и N_2 из G .

Если $\omega = \mathbf{P}$, то ω -примитивная группа является примитивной группой и $b^\omega(\mathfrak{F}) = b(\mathfrak{F})$ – Q -граница в смысле определения III, 2.1 (с) из [8]. При $\mathfrak{X} = \mathfrak{C}$ из теоремы 2.2 вытекает

Следствие 3 [12]. Пусть \mathfrak{F} – класс Шунка. Группа $G \in \mathfrak{F}$ всякий раз, как $N_1N_2 \cap H = (N_1 \cap H) \cdot (N_2 \cap H)$ для любого \mathfrak{F} -проектора H и любых нормальных подгрупп N_1 и N_2 из G , тогда и только тогда, когда $b(\mathfrak{F})$ состоит из примитивных групп, имеющих только две минимальные нормальные подгруппы.

Результаты работы анонсированы в [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Gaschütz, W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1963. – Bd. 80, № 4. – S. 300–305.
2. Gaschütz, W. Lectures on subgroups of Sylow type in finite soluble groups / W. Gaschütz // Notes on pure mathematics 11. – Australian National University: Canberra, 1979. – 100 p.
3. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

4. Schunck, H. \mathfrak{F} -Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen / H. Schunck // Math. Z. – 1967. – Bd. 97, № 4. – S. 326–330.

5. Erickson, R. Projectors of finite groups / R. Erickson // Commun. Algebra. – 1982. – Vol. 10, № 18. – P. 1919–1938.

6. Ведерников, В.А. \mathfrak{F} -проекторы и \mathfrak{F} -покрывающие подгруппы конечных групп / В.А. Ведерников, М.М. Сорокина // Сиб. матем. журн. – 2016. – Т. 57, № 6. – С. 957–968.

7. Huppert, B. Zur Theorie der Formationen / B. Huppert // Arch. Math. – 1969. – Vol. 19, № 6. – P. 561–574.

8. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 898 p.

9. Förster, P. Subnormal subgroups and formation projectors / P. Förster // J. Austral. Math. Soc. Series A. – 1987. – Vol. 42. – P. 31–47.

10. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов // Вышэйшая школа: Минск, 2006. – 206 с.

11. Скиба, А.Н. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. тр. – 1999. – Т. 2, № 2. – P. 114–147.

12. Васильева, Т.И. Проекторы и решетки нормальных подгрупп конечных групп / Т.И. Васильева, А.И. Прокопенко // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 4. – С. 34–37.

13. Васильева, Т.И. Обобщенные проекторы конечных групп / Т.И. Васильева // Всероссийская конференция по математике, посвященная 140-летию Томского государственного университета и 70-летию механико-математического факультета: сборник тезисов (Томск, 2–4 октября, 2018 г.). – Томск: Издательский дом Томского государственного университета, 2018. – С. 10–11.

Поступила в редакцию 03.04.19.

О НЕПРЕРЫВНОЙ В СРЕДНЕМ КВАДРАТИЧЕСКОМ ЗАВИСИМОСТИ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СЛОЖНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С.П. Жогаль, С.И. Жогаль

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON CONTINUOUS IN THE MEAN SQUARE DEPENDENCE ON THE INITIAL DATA OF SOLUTIONS OF ONE COMPLEX STOCHASTIC DIFFERENTIAL SYSTEM WITH DELAY

S.P. Zhogal, S.I. Zhogal

F. Scorina Gomel State University

Исследованы вопросы непрерывной в среднем квадратическом зависимости от начальных данных решений систем дифференциальных уравнений, содержащих стохастическое дифференциальное уравнение в частных производных гиперболического типа и обыкновенные стохастические дифференциальные уравнения с запаздыванием, связанные между собой запаздывающими связями.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, запаздывание, стохастические дифференциальные уравнения в частных производных, звенья с сосредоточенными параметрами, звенья с распределенными параметрами.

The problems of the continuous in the mean square dependence on the initial data of the solutions of systems of differential equations containing a stochastic differential equation in partial derivatives of a hyperbolic type and ordinary stochastic differential equations with delay, which are connected by delay connections, are investigated.

Keywords: stochastic differential equations, delay, stochastic partial differential equations, units with lumped parameters, units with distributed parameters.

Введение

При исследовании многих сложных систем современной науки и техники, особенно в таких отраслях, как теория управления, радиофизика, радиотехника и электроника, необходимо исследовать динамические системы с учетом случайных возмущений [1]–[3]. Довольно большой класс реальных сложных систем может быть описан математическими моделями в виде систем стохастических дифференциальных уравнений, содержащих уравнения в частных производных и уравнения в обыкновенных производных с отклонением по времени, связанные между собой запаздывающими связями. В монографии [4] исследованы подобные системы, которые описываются системой уравнений, содержащей взаимосвязанные уравнения в частных производных и обыкновенные дифференциальные уравнения с запаздыванием.

1 Постановка задачи

В работе [5] доказана теорема о существовании и единственности с точностью до стохастической эквивалентности непрерывного по своим аргументам с вероятностью единица решения следующей системы стохастических дифференциально-функциональных уравнений, содержащей уравнения в частных производных и уравнения в обыкновенных производных с отклоняющимся

аргументом, связанные между собой запаздывающими связями и краевыми условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(t, \bar{x})}{\partial t^2} = & \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathcal{L}_{ij}(\bar{x})) \frac{\partial u(t, \bar{x})}{\partial x_j} \right\} - \\ & - \beta(\bar{x})u(t, \bar{x}) + \\ & + F \left[t, \bar{x}, u(t - \Delta_r, \bar{x}), y_k(t - \Delta_r), \frac{\partial u(t - \Delta_r, \bar{x})}{\partial x_i}, \right. \\ & \left. \frac{\partial u(t - \Delta_r, \bar{x})}{\partial t}, \frac{dy_k(t - \Delta_r)}{dt}, \varepsilon \right] + \\ & + \sum_{\mu=1}^M \Phi_{\mu} \left[t, \bar{x}, u(t - \Delta_r, \bar{x}), y_k(t - \Delta_r), \frac{\partial u(t - \Delta_r, \bar{x})}{\partial x_i}, \right. \\ & \left. \frac{\partial u(t - \Delta_r, \bar{x})}{\partial t}, \frac{dy_k(t - \Delta_r)}{dt}, \varepsilon \right] \frac{dw_{\mu}(t)}{dt}; \\ \frac{d^2 y_k(t)}{dt^2} = & \sum_{p=1}^K \left\{ \sum_{l=0}^R \left(a_{kpl} y_p(t - \Delta_l) + b_{kpl} \frac{dy_p(t - \Delta_l)}{dt} \right) \right\} + \\ & + f_k \left[t, u(t - \Delta_r, \bar{\zeta}), y_p(t - \Delta_r), \frac{\partial u(t - \Delta_r, \bar{\zeta})}{\partial x_i}, \right. \\ & \left. \frac{\partial u(t - \Delta_r, \bar{\zeta})}{\partial t}, \frac{dy_p(t - \Delta_r)}{dt}, \varepsilon \right] + \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} & + g_{k\eta} \left[t, u(t - \Delta_r, \bar{\zeta}), y_p(t - \Delta_r), \frac{\partial u(t - \Delta_r, \bar{\zeta})}{\partial x_i}, \right. \\ & \left. \frac{\partial u(t - \Delta_r, \bar{\zeta})}{\partial t}, \frac{dy_p(t - \Delta_r)}{dt}, \varepsilon \right] + \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\left. \frac{\partial u(t - \Delta_r, \bar{\zeta})}{\partial t}, \frac{dy_p(t - \Delta_r)}{dt}, \varepsilon \right] \frac{d\xi_{k\eta}(t)}{dt}$$

$$(k, p = \overline{1, K}, r = \overline{0, R}, i = \overline{1, n})$$

с начальными условиями

$$u(t, \bar{x})|_{t \in E_0} = \varphi_0(t, \bar{x}), \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial u(t, \bar{x})}{\partial t} |_{t \in E_0} = \varphi_1(t, \bar{x}), \quad (1.4)$$

$$y_k(t)|_{t \in E_0} = h_{k0}(t), k = \overline{1, K}, \quad (1.5)$$

$$\frac{dy_k(t)}{dt} |_{t \in E_0} = h_{k1}(t), k = \overline{1, K}, \quad (1.6)$$

и краевым условием

$$p_0 u(t, \bar{x}) + p_1 \frac{\partial u(t, \bar{x})}{\partial \nu} |_{\bar{x} \in S} = 0, \quad (1.7)$$

где, согласно [5], $t \in [0, T] \subset R$, $T < \infty$, $\bar{x} - n$ -мерный вектор, принадлежащий ограниченной области $\bar{\Gamma} \subset E_n$, $E_n - n$ -мерное евклидово пространство, $S -$ замыкание области $\bar{\Gamma}$, $u(t, \bar{x}) -$ случайная функция, определенная на множестве $[0, T] \times \bar{\Gamma} \times \Omega$, $y_k(t) -$ случайные функции, определяемые на $[0, T] \times \Omega$, $w_\mu(t)$, $\xi_{k\eta}(t) -$ стохастически независимые между собой винеровские процессы единичной интенсивности, F , Φ_μ , f_k , $g_{k\eta} -$ нелинейные функционалы, $\mathcal{L}_j(\bar{x})$, $\beta(\bar{x}) -$ детерминированные функции, определяемые в области $\bar{\Gamma}$, a_{kpl} , b_{kpl} , p_0 , $p_1 -$ вещественные постоянные, Δ_r , Δ_l , $r, l = 0, 1, \dots, R -$ неотрицательные постоянные ($\Delta_0 = 0$), $\bar{\zeta} \in \bar{\Gamma} -$ некоторое фиксированное значение \bar{x} , $E_0 -$ начальное множество вида $[-\Delta_{max}, 0]$, где $\Delta_{max} = \max\{\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_R\}$, $\varphi_0(t, \bar{x})$, $\varphi_1(t, \bar{x}) -$ случайные функции, определенные на множестве $E_0 \times \bar{\Gamma} \times \Omega$, $h_{k0}(t)$, $h_{k1}(t) -$ случайные функции, определенные на множестве $E_0 \times \Omega$, $\varepsilon > 0 -$ малый параметр, $\nu -$ направление внешней нормали к поверхности S , $\{\Omega, \mathcal{F}, P\} -$ вероятностное пространство с σ -алгеброй \mathcal{F} и вероятностной мерой $P(A)$, в котором выделен некоторый поток (монотонно неубывающее семейство) σ -алгебр (\mathcal{F}_t) . Все вводимые случайные функции, как функции аргумента t , предполагаются подчиненными потоку (\mathcal{F}_t) , т. е. для каждого $t \mathcal{F}_t$ -измеримыми.

Многие сложные системы вида (1.1)–(1.7), содержащие одно звено с распределенными параметрами и K звеньев с сосредоточенными параметрами, могут быть описаны ([5], [6]) с высокой степенью точности следующей системой векторно-матричных уравнений:

$$\frac{dv^m(t, \varepsilon)}{dt} = \mathcal{L}_m v^m(t, \varepsilon) +$$

$$+ F_m[t, v(t - \Delta_r, \varepsilon), z(t - \Delta_r, \varepsilon), \varepsilon] + \Phi_m[t, v(t - \Delta_r, \varepsilon), z(t - \Delta_r, \varepsilon), \varepsilon] \dot{w}(t), m = 1, 2, \dots; \quad (1.8)$$

$$\frac{dz(t, \varepsilon)}{dt} = \sum_{l=0}^R A_l z(t - \Delta_l, \varepsilon) + f[t, v(t - \Delta_r, \varepsilon), z(t - \Delta_r, \varepsilon), \varepsilon] + g[t, v(t - \Delta_r, \varepsilon), z(t - \Delta_r, \varepsilon), \varepsilon] \dot{\xi}(t), \quad (1.9)$$

с начальными условиями

$$v^m(t, \varepsilon)|_{t \in E_0} = \Psi_m(t), m = 1, 2, \dots$$

$$z(t, \varepsilon)|_{t \in E_0} = H(t), \quad (1.10)$$

где

$$z^k(t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} z_1^k \\ z_2^k \end{bmatrix}, v^m(t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} v_1^m \\ v_2^m \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{L}_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_m & 0 \end{bmatrix}, F_m(t, v, z, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{F}_m \end{bmatrix},$$

$$\Phi_m(t, v, z, \varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{\Phi}_{1m} & \tilde{\Phi}_{2m} & \dots & \tilde{\Phi}_{Mm} \end{bmatrix},$$

$$v(t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^m \\ \vdots \end{bmatrix}, f[t, v, z, \varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 \\ f_1 \\ \vdots \\ 0 \\ f_K \end{bmatrix},$$

$$z(t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^K \end{bmatrix}, \dot{w}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dot{w}_1 \\ 0 & \dot{w}_2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dot{w}_M \end{bmatrix},$$

$$g[t, v, z, \varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1M'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_{K1} & g_{K2} & \dots & g_{KM'} \end{bmatrix},$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{110} & b_{110} & a_{120} & \dots & a_{1K0} & b_{1K0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_{K10} & b_{K10} & a_{K20} & \dots & a_{KK0} & b_{KK0} \end{bmatrix},$$

$$H(t) = \begin{bmatrix} h_{10} \\ h_{11} \\ \vdots \\ h_{K0} \\ h_{K1} \end{bmatrix}, \Psi_m(t) = \begin{bmatrix} \varphi_{0m} \\ \varphi_{1m} \end{bmatrix},$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{1li} & b_{1li} & \dots & a_{1Ki} & b_{1Ki} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{Kli} & b_{Kli} & \dots & a_{KKi} & b_{KKi} \end{bmatrix},$$

$$\dot{\xi}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\xi}_{11} & \dots & \dot{\xi}_{K1} \\ 0 & \dot{\xi}_{12} & \dots & \dot{\xi}_{K2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dot{\xi}_{1M'} & \dots & \dot{\xi}_{KM'} \end{bmatrix}.$$

Для вектора $v(t, \varepsilon)$ положим, что

$$|v(t, \varepsilon)|^2 = \max_m \left\{ \max_i |v_i^m(t, \varepsilon)|^2, i = 1, 2, \dots \right\}, \quad (1.11)$$

$$m = 1, 2, \dots$$

2 Основной результат

Для системы (1.8)–(1.10) справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть система (1.8)–(1.10) удовлетворяет следующим условиям:

1) вектор-функционалы F_m, f , матрицы g, Φ_m измеримы по совокупности своих переменных и непрерывны по t, ε ;

2) существуют такие постоянные K_{1m}, K_2, K_{3m} , что справедливы неравенства

$$\begin{aligned} & |F_m(t, v_1, z_1, \varepsilon) - F_m(t, v_2, z_2, \varepsilon)| + \\ & + |\Phi_m(t, v_1, z_1, \varepsilon) - \Phi_m(t, v_2, z_2, \varepsilon)| \leq \\ & \leq K_{1m} \{|v_1 - v_2| + |z_1 - z_2|\}, \\ & |f(t, v_1, z_1, \varepsilon) - f(t, v_2, z_2, \varepsilon)| + \\ & + |g(t, v_1, z_1, \varepsilon) - g(t, v_2, z_2, \varepsilon)| \leq \\ & \leq K_2 \{|v_1 - v_2| + |z_1 - z_2|\}, \\ & |\mathcal{L}_m| \leq K_{3m}, m = 1, 2, \dots; \end{aligned}$$

3) существуют такие постоянные K_{4m}, K_5 , что

$$\begin{aligned} & |F_m(t, v, z, \varepsilon)|^2 + |\Phi_m(t, v, z, \varepsilon)|^2 \leq K_{4m} \{1 + |v|^2 + |z|^2\}, \\ & |f(t, v, z, \varepsilon)|^2 + |g(t, v, z, \varepsilon)|^2 \leq K_5 \{1 + |v|^2 + |z|^2\}, \\ & m = 1, 2, \dots; \end{aligned}$$

4) компоненты вектор-функций $H(t), \Psi_m(t), m = 1, 2, \dots$ непрерывны и ограничены при $t \in E_0$ и некоррелированы между собой и с процессами $\dot{w}(t)$ и $\dot{\xi}(t)$;

5) характеристическое уравнение

$$\text{Det} \left\{ \sum_{l=0}^R A_l e^{-\Delta_l \rho} - E \rho \right\} = 0$$

имеет все корни с вещественной частью, удовлетворяющей неравенству $\text{Re} \rho_j \leq -\gamma < 0$, где $\gamma > 0$.

Тогда решение $\{v(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)\}$ системы (1.8)–(1.10) непрерывно в среднем квадратическом зависит от возмущений на начальном множестве.

Доказательство. В силу теоремы о существовании и единственности с точностью до стохастической эквивалентности непрерывного по своим аргументам с вероятностью единица

решения [5] система (1.8)–(1.10) имеет единственное решение, удовлетворяющее системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} v^m(t, \varepsilon) &= v^m(0, \varepsilon) + \int_0^t [\mathcal{L}_m v^m(\tau, \varepsilon) + \\ & + F_m(\tau, v(\tau - \Delta_r, \varepsilon), z(\tau - \Delta_r, \varepsilon), \varepsilon)] d\tau + \\ & + \int_0^t \Phi_m(\tau, v(\tau - \Delta_r, \varepsilon), z(\tau - \Delta_r, \varepsilon), \varepsilon) d\dot{w}(\tau); \\ z(t, \varepsilon) &= V(t)H(0) + \\ & + \sum_{l=1}^R \int_{-\Delta_l}^0 V(t - \Delta_l - \tau) A_l H(\tau) d\tau + \\ & + \int_0^t V(t - \tau) f(\tau, v(\tau - \varepsilon), z(\tau - \Delta_r, \varepsilon), \varepsilon) d\tau + \\ & + \int_0^t V(t - \tau) g(\tau, v(\tau - \Delta_r, \varepsilon), z(\tau - \Delta_r, \varepsilon), \varepsilon) d\xi(\tau) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$(m = 1, 2, \dots; r = \overline{0, R}),$$

где $V(t)$ – матрица, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{dV(t)}{dt} = \sum_{l=0}^R A_l V(t - \Delta_l) \quad (2.2)$$

с начальным условием

$$V(t) = \begin{cases} \mathbf{0}, & t < 0; \\ E, & t = +0; \end{cases}$$

$\mathbf{0}$ – нулевая матрица, E – единичная матрица.

Введем в рассмотрение случайный вектор-процесс $\{\tilde{v}(t, \varepsilon), \tilde{z}(t, \varepsilon)\}$, являющийся решением системы (1.8)–(1.9) с начальными условиями

$$\begin{aligned} \tilde{v}^m(t, \varepsilon)|_{t \in E_0} &= \tilde{\Psi}_m(t), m = 1, 2, \dots \\ \tilde{z}(t, \varepsilon)|_{t \in E_0} &= \tilde{H}(t), \end{aligned} \quad (2.3)$$

такими, что

$$M \left\{ |\tilde{\Psi}_m(t) - \Psi_m(t)|^2 \right\} \leq \delta, \quad M \left\{ |\tilde{H}(t) - H(t)|^2 \right\} \leq \delta.$$

Рассмотрим квадрат разности решений $\{v(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)\}$ и $\{\tilde{v}(t, \varepsilon), \tilde{z}(t, \varepsilon)\}$. Применяя операцию математического ожидания и используя неравенство Колмогорова – Дуба [7], с учетом условий теоремы, получаем:

$$\begin{aligned} & M \left\{ \sup_{s \leq t} |v^m(s, \varepsilon) - \tilde{v}^m(s, \varepsilon)|^2 \right\} \leq \\ & \leq 3M \left\{ |v^m(0, \varepsilon) - \tilde{v}^m(0, \varepsilon)|^2 \right\} + \\ & + 3M \left[\int_0^t |\mathcal{L}_m(v^m(\tau, \varepsilon) - \tilde{v}^m(\tau, \varepsilon)) + \right. \\ & + F_m(\tau, v(\tau - \Delta_r, \varepsilon), z(\tau - \Delta_r, \varepsilon), \varepsilon) - \\ & \left. - F_m(\tau, \tilde{v}(\tau - \Delta_r, \varepsilon), \tilde{z}(\tau - \Delta_r, \varepsilon), \varepsilon)| d\tau \right]^2 + \\ & + 12M \left[\int_0^t |\Phi_m(\tau, v(\tau - \Delta_r, \varepsilon), z(\tau - \Delta_r, \varepsilon), \varepsilon) - \right. \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
 & -\Phi_m(\tau, \tilde{v}(\tau - \Delta_r, \varepsilon), \tilde{z}(\tau - \Delta_r, \varepsilon), \varepsilon) | dw(\tau) \Big]^2 \leq \\
 & \leq 3M \left\{ |v^m(0, \varepsilon) - \tilde{v}^m(0, \varepsilon)|^2 \right\} + \\
 & + 3TM \left[\int_0^t \mathcal{L}_m(v^m(\tau, \varepsilon) - \tilde{v}^m(\tau, \varepsilon)) + \right. \\
 & + F_m(\tau, v(\tau - \Delta_r, \varepsilon), z(\tau - \Delta_r, \varepsilon), \varepsilon) - \\
 & \left. - F_m(\tau, \tilde{v}(\tau - \Delta_r, \varepsilon), \tilde{z}(\tau - \Delta_r, \varepsilon), \varepsilon) \right]^2 d\tau \Big] + \\
 & + 12M \left[\int_0^t \left| \Phi_m(\tau, v(\tau - \Delta_r, \varepsilon), z(\tau - \Delta_r, \varepsilon), \varepsilon) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \Phi_m(\tau, \tilde{v}(\tau - \Delta_r, \varepsilon), \tilde{z}(\tau - \Delta_r, \varepsilon), \varepsilon) \right|^2 d\tau \leq 3\delta + \right. \\
 & \left. + (6TK_{3m}^2 + 12K_{1m}^2(T+2)) \times \right. \\
 & \left. \times \int_0^t M \left(\sup_{s \leq \tau} [|v(s, \varepsilon) - \tilde{v}(s, \varepsilon)|^2 + |z(s, \varepsilon) - \tilde{z}(s, \varepsilon)|^2] \right) d\tau. \right.
 \end{aligned}$$

Проводя аналогичные выкладки для математического ожидания квадрата разности процессов $z(t, \varepsilon)$ и $\tilde{z}(t, \varepsilon)$, получаем

$$\begin{aligned}
 & M \left\{ \sup_{s \leq t} |z(s, \varepsilon) - \tilde{z}(s, \varepsilon)|^2 \right\} \leq \\
 & \leq 4N\delta + 4N\delta \sum_{l=0}^R \Delta_l^2 |A_l|^2 + \\
 & + (8NK_2^2(T+4)) \int_0^t M \left(\sup_{s \leq \tau} [|v(s, \varepsilon) - \tilde{v}(s, \varepsilon)|^2 + \right. \\
 & \left. + |z(s, \varepsilon) - \tilde{z}(s, \varepsilon)|^2] \right) d\tau, \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

где константа N удовлетворяет неравенству $|V(t)|^2 \leq N$ при любом $t \in [-\Delta_{max}, T]$, существование константы N вытекает из условия 5) теоремы. Складывая неравенства (2.4)–(2.5), получаем

$$\begin{aligned}
 & M \left\{ \sup_{s \leq t} [|v(s, \varepsilon) - \tilde{v}(s, \varepsilon)|^2 + |z(s, \varepsilon) - \tilde{z}(s, \varepsilon)|^2] \right\} \leq \\
 & \leq \delta \left(3 + 4N + 4N \sum_{l=0}^R \Delta_l^2 |A_l|^2 \right) + \\
 & + 2L \int_0^t M \left\{ \sup_{s \leq \tau} [|v(s, \varepsilon) - \tilde{v}(s, \varepsilon)|^2 + |z(s, \varepsilon) - \tilde{z}(s, \varepsilon)|^2] \right\} d\tau,
 \end{aligned}$$

где

$$L = \max \left\{ \max_m [6TK_{3m}^2 + 12K_{1m}^2(T+2)], 8NK_2^2(T+4) \right\}.$$

Применяя к полученному неравенству лемму Гронуолла – Белмана [8], получаем

$$\begin{aligned}
 & M \left\{ \sup_{s \leq t} [|v(s, \varepsilon) - \tilde{v}(s, \varepsilon)|^2 + |z(s, \varepsilon) - \tilde{z}(s, \varepsilon)|^2] \right\} \leq \\
 & \leq \delta \left(3 + 4N + 4N \sum_{l=0}^R \Delta_l^2 |A_l|^2 \right) \exp(2LT).
 \end{aligned}$$

Положив далее

$$\delta(\varepsilon_1) = \frac{\varepsilon_1}{3 + 4N + 4N \sum_{l=0}^R \Delta_l^2 |A_l|^2} \exp(-2LT),$$

приходим к следующему неравенству

$$M \left\{ \sup_{s \leq t} [|v(s, \varepsilon) - \tilde{v}(s, \varepsilon)|^2 + |z(s, \varepsilon) - \tilde{z}(s, \varepsilon)|^2] \right\} \leq \varepsilon_1,$$

которое и доказывает справедливость утвержденного теоремы. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. То, С.В. Nonlinear random vibration. Analytical techniques and applications / С.В. То. – CRC Press, 2012. – 292 p.

2. Жогаль, С.П. Исследование случайных автоколебательных систем с одной степенью свободы методом канонических разложений / С.П. Жогаль, С.И. Жогаль, А.В. Клименко // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 37–41.

3. Жогаль, С.П. Применение метода канонических разложений при исследовании амплитуды установившихся колебаний в системах с одной степенью свободы / С.П. Жогаль, С.И. Жогаль, И.В. Сафонов // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2006. – № 4 (37). – С. 103–109.

4. Рубаник, В.П. Колебания сложных квазилинейных систем с запаздыванием / В.П. Рубаник. – Мн.: Изд-во «Университетское», 1985. – 143 с.

5. Жогаль, С.П. О существовании и единственности решений одной сложной стохастической дифференциальной системы с запаздыванием / С.П. Жогаль, С.И. Жогаль, А.В. Клименко // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 2 (31). – С. 50–54.

6. Акири, И.К. О существовании, единственности и непрерывной зависимости от параметра решений интегро-дифференциальных уравнений в частных производных / И.К. Акири, В.Г. Коломиец. – Киев: Ин-т математики АН УССР, препринт №86.3, 1986. – 19 с.

7. Ватанабэ, С. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / С. Ватанабэ, Н. Икэда. – М.: Наука, 1986. – 448 с.

8. Гихман, И.И. Теория случайных процессов. Т. 3 / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – М.: Наука, 1975. – 496 с.

Поступила в редакцию 18.02.19.

УДК 512.542

ИНЪЕКТОРЫ И ПОДГРУППЫ ФИШЕРА КОНЕЧНЫХ π -РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Т.Б. Караулова

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова

INJECTORS AND FISCHER SUBGROUPS OF FINITE π -SOLUBLE GROUPS

T.B. Karaulova

P.M. Masherov Vitebsk State University

Пусть \mathcal{F} – множество Фиттинга группы G и $L \leq G$. Тогда \mathcal{F} называется *множеством Фишера* G , если из того, что $L \in \mathcal{F}$, $K \trianglelefteq L$ и H/K – p -подгруппа L/K для некоторого простого p , следует $H \in \mathcal{F}$. Подгруппа F группы G называется *\mathcal{F} -подгруппой Фишера* G , если выполняются следующие условия: (1) $F \in \mathcal{F}$; (2) если $F \leq H \leq G$, то $H_{\mathcal{F}} \leq F$. Пусть π – некоторое непустое множество простых чисел. Множество Фиттинга \mathcal{F} группы G называют π -насыщенным, если $\mathcal{F} = \{H \leq G : H/H_{\mathcal{F}} \in \mathcal{E}_{\pi}\}$, где \mathcal{E}_{π} – класс всех π' -групп. В настоящей работе доказано, что если \mathcal{F} – π -насыщенное множество Фишера π -разрешимой группы G , то подгруппа V группы G является \mathcal{F} -инъектором G тогда и только тогда, когда V – \mathcal{F} -подгруппа Фишера G , содержащая π' -холлову подгруппу G .

Ключевые слова: множество Фиттинга, множество Фишера, \mathcal{F} -инъектор, \mathcal{F} -подгруппа Фишера группы G .

Let \mathcal{F} be a Fitting set of a group G and $L \leq G$. Then \mathcal{F} is called a *Fischer set* of G , if $L \in \mathcal{F}$, $K \trianglelefteq L$ and H/K is a p -subgroup of L/K for some prime p , then $H \in \mathcal{F}$. A subgroup F of a group G is said to be *Fischer \mathcal{F} -subgroup* of G if the following conditions are hold: (1) $F \in \mathcal{F}$; (2) if $F \leq H \leq G$, then $H_{\mathcal{F}} \leq F$. Let π be some nonempty set of prime numbers. A Fitting set \mathcal{F} of a group G is said to be π -saturated if $\mathcal{F} = \{H \leq G : H/H_{\mathcal{F}} \in \mathcal{E}_{\pi}\}$, where \mathcal{E}_{π} is the class of all π' -groups. In this paper it is proved that if \mathcal{F} is a π -saturated Fischer set of a π -soluble group G , then a subgroup V of a group G is \mathcal{F} -injector of G if and only if V is a Fischer \mathcal{F} -subgroup of G , which contains Hall π' -subgroup of G .

Keywords: Fitting set, Fischer set, \mathcal{F} -injector, Fischer \mathcal{F} -subgroup of G .

Введение

В работе рассматриваются только конечные группы. В обозначениях мы следуем [1]. В теории формаций разрешимых групп основополагающей является теорема Гашюца [2] о том, что для любой насыщенной формации \mathfrak{F} в разрешимой группе существуют \mathfrak{F} -покрывающие подгруппы и любые две из них сопряжены. Напомним, что если \mathfrak{F} – формация, то подгруппу $E \in \mathfrak{F}$ группы G называют *\mathfrak{F} -покрывающей*, если E покрывает каждый фактор из \mathfrak{F} всякой промежуточной подгруппы между E и G , то есть из $E \leq H \leq G$, $K \trianglelefteq H$ и $H/K \in \mathfrak{F}$ следует $H = EK$. Отметим, что фундаментальные теоремы Холла, Картера и Силова (в универсуме \mathfrak{S} всех разрешимых групп) являются следствиями теоремы Гашюца, если формация $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{\pi}$ классу всех разрешимых π -групп, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ классу всех нильпотентных групп и $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$ классу всех p -групп, соответственно. Напомним, что *классом групп* называется множество групп, которое вместе с каждой группой содержит все изоморфные ей группы.

Фишер в работе [3] дуализирует понятие \mathfrak{F} -покрывающей подгруппы и определяет такую подгруппу группы G , которую в дальнейшем стали называть *\mathfrak{F} -подгруппой Фишера* [1, определение IX.3.1]. Напомним, что *классом Фиттинга* [1] называется класс групп \mathfrak{F} , замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных \mathfrak{F} -подгрупп. Если \mathfrak{F} – непустой класс Фиттинга, то в любой группе G существует максимальная нормальная \mathfrak{F} -подгруппа, которую называют *\mathfrak{F} -радикалом* G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$. Пусть \mathfrak{F} – класс Фиттинга. Тогда \mathfrak{F} -подгруппой Фишера G называется подгруппа F группы G , удовлетворяющая следующим условиям:

- (1) $F \in \mathfrak{F}$;
- (2) если $F \leq H \leq G$, то $H_{\mathfrak{F}} \leq F$.

Фишером [3] было установлено, что в любой разрешимой группе для каждого класса групп, замкнутого относительно взятия подгрупп, существуют \mathfrak{F} -подгруппы Фишера. Кроме того, в [3] было доказано, что если \mathfrak{F} – класс групп, замкнутый относительно подгрупп вида

PN , где P – силовская p -подгруппа G и $N \trianglelefteq G \in \mathfrak{F}$, то G имеет единственный класс сопряженных \mathfrak{F} -подгрупп Фишера.

Если \mathfrak{F} – класс групп, то подгруппа V группы G называется:

1) \mathfrak{F} -максимальной в G , если $V \in \mathfrak{F}$ и $U = V$, при условии, что $V \leq U \leq G$ и $U \in \mathfrak{F}$.

2) \mathfrak{F} -инъектором G , если $V \cap N$ является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой для всякой субнормальной подгруппы N группы G .

В последующем в теории классов разрешимых групп Гашюцом, Фишером и Хартли [4] было получено обобщение классических теорем Силова и Холла в терминах классов Фиттинга: доказано, что для любого класса Фиттинга \mathfrak{F} в каждой разрешимой группе G существуют \mathfrak{F} -инъекторы и любые два из них сопряжены.

Нетрудно показать, что в группе каждый её \mathfrak{F} -инъектор является \mathfrak{F} -подгруппой Фишера этой группы. Однако, как установлено Дарком в [5], существуют классы Фиттинга и разрешимые группы, для которых \mathfrak{F} -подгруппы Фишера не сопряжены и не являются \mathfrak{F} -инъекторами (см. также [1, пример IX.5.19]).

Напомним, что класс Фиттинга \mathfrak{F} называют классом Фишера, если \mathfrak{F} удовлетворяет следующему условию: если $G \in \mathfrak{F}$ и $H \leq G$, которая содержит нормальную подгруппу N группы G такую, что H/N является p -подгруппой для некоторого простого p , то $H \in \mathfrak{F}$. Хартли [6] было доказано, что если \mathfrak{F} – класс Фиттинга и G – разрешимая группа, то \mathfrak{F} -подгруппы Фишера G – это в точности её \mathfrak{F} -инъекторы (см. также [1, VIII. теорема 4.7]).

Шеметковым [7] и в разрешимых группах Андерсоном [8] было определено понятие множества Фиттинга группы. Напомним, что множеством Фиттинга группы G называют такое непустое множество подгрупп группы G , которое замкнуто относительно взятия нормальных подгрупп, их произведений и сопряжений подгрупп.

Заметим, что для множества Фиттинга группы G , понятия \mathcal{F} -инъектора и \mathcal{F} -радикала группы G определяются аналогично понятиям \mathfrak{F} -инъектора и \mathfrak{F} -радикала для класса Фиттинга. Если \mathcal{F} – множество Фиттинга группы G , то множество всех \mathcal{F} -инъекторов группы G обозначим $Inj_{\mathcal{F}}(G)$. Каждому непустому классу Фиттинга \mathfrak{F} в группе G соответствует множество Фиттинга

$$\mathcal{F} = Tr_{\mathfrak{F}}(G) = \{H \leq G : H \in \mathfrak{F}\},$$

которое называется следом класса Фиттинга \mathfrak{F} в группе G , хотя обратное в общем случае неверно (см. [1, пример VIII.2.2.(a)]).

Пусть \mathcal{F} – множество Фиттинга группы G , то подгруппа F группы G называется \mathcal{F} -подгруппой Фишера G , если выполняются следующие условия:

1) $F \in \mathcal{F}$;

2) если L – \mathcal{F} -подгруппа G , нормализуемая F , то $L \leq F$.

Если \mathcal{F} – множество Фиттинга группы G , то множество всех \mathcal{F} -подгрупп Фишера G обозначим $Fisch_{\mathcal{F}}(G)$.

Напомним, что множество Фиттинга группы G называется множеством Фишера [1, с. 554], если из того, что $L \leq G$, $K \trianglelefteq L \in \mathcal{F}$ и H/K – p -подгруппа L/K для некоторого простого p , всегда следует $H \in \mathcal{F}$.

Пусть \mathbb{P} – множество всех простых чисел, $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Произведением $\mathcal{F} \circ \mathfrak{H}$ множества Фиттинга группы G и класса Фиттинга \mathfrak{H} [9] называется множество всех таких подгрупп H группы G , что $H/H_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{H}$, то есть $\mathcal{F} \circ \mathfrak{H} = \{H \leq G : H/H_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{H}\}$.

Пусть $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Множество Фишера группы G называется π -насыщенным, если $\mathcal{F} \circ \mathfrak{E}_{\pi} = \mathcal{F}$, где \mathfrak{E}_{π} – класс всех π' -групп.

Пусть G – группа (в общем случае неразрешимая) и \mathcal{F} – множество Фиттинга группы G . Естественной является постановка следующих вопросов:

Вопрос 0.1. Каковы G и \mathcal{F} , для которых в G существует единственный класс сопряженных \mathcal{F} -подгрупп Фишера?

Вопрос 0.2. Каковы G и \mathcal{F} , для которых $Inj_{\mathcal{F}}(G) = Fisch_{\mathcal{F}}(G)$?

Заметим, что ответы на вопросы 0.1 и 0.2 получены для случая множества Фишера \mathcal{F} и группы $G \in \mathcal{F} \circ \mathfrak{S}$ в [10].

В настоящей работе получены ответы на указанные вопросы 0.1 и 0.2 для случая π -насыщенного множества Фишера π -разрешимой группы G .

Основной результат работы – следующая

Теорема 0.3. Пусть \mathcal{F} – π -насыщенное множество Фишера π -разрешимой группы G . Тогда подгруппа V группы G является \mathcal{F} -инъектором G тогда и только тогда, когда V является \mathcal{F} -подгруппой Фишера G , содержащей холлову π' -подгруппу G .

Следствие 0.4 Пусть G – π -разрешимая группа, \mathcal{F} – π -насыщенное множество Фиттинга G и \mathfrak{F} – класс Фиттинга. Если $\mathcal{F} = Tr_{\mathfrak{F}}(G)$, то справедливы следующие равенства:

$$Inj_{\mathcal{F}}(G) = Inj_{\mathfrak{F}}(G) \text{ и } Fisch_{\mathcal{F}}(G) = Fisch_{\mathfrak{F}}(G).$$

Доказательство. Доказательство леммы вытекает непосредственно из определений \mathcal{F} -подгруппы Фишера и \mathcal{F} -инъектора группы G .

Следствие 0.5. Пусть G – π -разрешимая группа и \mathfrak{F} – π -насыщенный класс Фиттинга. Тогда множество всех \mathfrak{F} -инъекторов группы G совпадает с множеством всех \mathfrak{F} -подгрупп Фишера, содержащих холлову π' -подгруппу G .

Следствие 0.6 (Хартли [6], Фишер [3]). Пусть \mathfrak{F} – разрешимый класс Фишера и $G \in \mathfrak{S}$. Тогда $\text{Fisch}_{\mathfrak{F}}(G) = \text{Inj}_{\mathfrak{F}}(G)$.

Следствие 0.7 [1]. Пусть $G \in \mathfrak{S}$ и \mathcal{F} – множество Фишера группы G . Тогда

$$\text{Fisch}_{\mathcal{F}}(G) = \text{Inj}_{\mathcal{F}}(G).$$

Ввиду теоремы Гашюца – Фишера – Хартли [4] и следствия 0.5 для $\pi = \mathbb{P}$, справедливо

Следствие 0.8. Пусть G – π -разрешимая группа и \mathfrak{F} – π -насыщенный класс Фишера. Тогда любые две \mathfrak{F} -подгруппы Фишера G , содержащие холловы π' -подгруппы G , – это в точности ее \mathfrak{F} -инъекторы.

Следствие 0.9 [4]. В любой разрешимой группе для любого разрешимого класса Фишера \mathfrak{F} существуют \mathfrak{F} -подгруппы Фишера и любые две из них сопряжены.

1 Предварительные сведения

Напомним, что π -разрешимой называется такая конечная группа G каждый главный фактор которой является либо абелевой π -группой, либо π' -группой. Подгруппа H группы G называется холловой π -подгруппой группы G , если $|H|$ – π -число, а ее индекс $|G:H|$ является π' -числом. Пусть \mathcal{F} – множество Фиттинга группы G . Символами $\sigma(\mathcal{F})$ и \mathfrak{S}^{π} будем обозначать множество всех простых делителей всех \mathcal{F} -подгрупп G и класс всех π -разрешимых групп соответственно.

Приведем некоторые основные понятия и леммы, которые в дальнейшем будем использовать для доказательства основного результата.

Лемма 1.1 [9, теорема A(2)]. Пусть $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$ и \mathcal{F} – π -насыщенное множество Фиттинга G . Тогда в группе G существуют \mathcal{F} -инъекторы и любые два из них сопряжены, причем индекс каждого \mathcal{F} -инъектора G в группе G является π -числом.

Лемма 1.2 (Теорема Чунихина) [11]. Пусть $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$. Тогда выполняются следующие условия:

- 1) G имеет холловы π -подгруппы и любые две из них сопряжены;
- 2) каждая π -подгруппа G содержится в некоторой холловой π -подгруппе G .

Лемма 1.3 [12, лемма 3.6]. Пусть $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$, \mathcal{F} – π -насыщенное множество Фиттинга G и V – \mathcal{F} -инъектор G . Если $V \leq H \leq G$, то V является \mathcal{F} -инъектором группы H .

Лемма 1.4 [13, лемма 9]. Пусть $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$ и \mathcal{F} – π -насыщенное множество Фиттинга G . Если $K \trianglelefteq G$ и V – \mathcal{F} -инъектор G , то $N_G(V \cap K)K = G$.

Лемма 1.5 [12, лемма 3.12]. Пусть $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$, \mathcal{F} – π -насыщенное множество Фиттинга G и N – нормальная подгруппа G . Если $G = LN$, где $L \in \mathcal{F}$ и $L \cap N$ является \mathcal{F} -инъектором N , то L – \mathcal{F} -инъектор группы G .

Подгруппа A группы G покрывает фактор H/K группы G , если $H \leq KA$ и изолирует H/K , если $A \cap H \leq K$.

Определение 1.6 [6, с. 196]. Если V – \mathfrak{F} -инъектор группы G , то фактор H/K называется \mathfrak{F} -покрываемым (\mathfrak{F} -изолируемым) в случае, когда V покрывает H/K (изолирует H/K).

Лемма 1.7 [13, теорема 1]. Если $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$ и \mathcal{F} – π -насыщенное множество Фиттинга G , то \mathcal{F} -инъектор G либо покрывает, либо изолирует каждый главный фактор G .

Напомним, что подгруппа U группы G называется p -нормально вложенной в G , если каждая силовская p -подгруппа P из U является силовской p -подгруппой некоторой нормальной подгруппы в G .

Подгруппу U группы G назовем π -нормально вложенной в G , если U p -нормально вложена в G для любого $p \in \pi$.

Подгруппа A группы G называется пронормальной в G (A pr G), если для каждого $g \in G$ подгруппы A и A^g сопряжены в $\langle A, A^g \rangle$.

Лемма 1.8 [12, лемма 3.15]. Если $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$ и \mathcal{F} – π -насыщенное множество Фишера G , то \mathcal{F} -инъекторы G – π -нормально вложенные подгруппы G .

Лемма 1.9 [12, лемма 3.8]. Пусть $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$, \mathcal{F} – π -насыщенное множество Фиттинга группы G и N – нормальная подгруппа G . Тогда каждый \mathcal{F} -инъектор V группы N является пронормальной подгруппой в G .

Лемма 1.10 [6, лемма 5]. Пусть V – пронормальная подгруппа G и H/K – главный фактор группы G централизуемый V . Тогда $N = N_G(V)$ покрывает H/K .

Лемма 1.11. Пусть $G \in \mathfrak{S}^{\pi}$ и \mathcal{F} – π -насыщенное множество Фиттинга G , то все главные факторы G , изолируемые \mathcal{F} -инъекторами G , являются элементарными абелевыми π -группами.

Доказательство. Пусть V – \mathcal{F} -инъектор G . По лемме 1.1 индекс \mathcal{F} -инъектора V в G является π -числом. Следовательно, $G_{\pi} \leq V$. Если $H/K \in \mathfrak{E}_{\pi}$, то

$$H/K = H_{\pi}K/K = (G_{\pi} \cap H)K/K.$$

По лемме 1.2

$$VK/K \geq G_{\pi}K/K \geq (G_{\pi} \cap H)K/K = H/K$$

и $H \leq VK$. Значит, V покрывает каждый π' -фактор G . По лемме 1.7 \mathcal{F} -инъектор группы G либо покрывает, либо изолирует каждый фактор G . Так как $G \in \mathcal{S}^{\pi}$, то изолируемые главные факторы G являются абелевыми π -группами. \square

Ввиду леммы 1.11, приведем следующую модификацию леммы Хартли (см. [6, лемма 4]).

Лемма 1.12. Пусть $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $r \in \pi$, V – r -нормально вложенная подгруппа π -разрешимой группы G и H/K – дополняемый r -фактор группы G , изолируемый V такой, что $C_G(H/K) \leq H$. Тогда каждое дополнение H/K в G содержит подгруппы, сопряженные с V .

Если \mathcal{F} – множество Фиттинга группы G , то $\mathcal{F}^g = \{H^g : H \in \mathcal{F}\}$.

Лемма 1.13 [1, свойство 2.4(a)]. Если \mathcal{F} – множество Фиттинга группы G , то $\mathcal{F} = \mathcal{F}^x$ для любого $x \in G$.

Лемма 1.14 [1, свойство VIII.2.6]. Пусть \mathcal{F} – множество Фиттинга группы G . Если K – субнормальная подгруппа группы G и V – \mathcal{F} -инъектор группы G , то подгруппа $V \cap K$ является \mathcal{F} -инъектором группы K .

2 Доказательство теоремы 0.3

Доказательство теоремы 0.3. Пусть G – π -разрешимая группа, V – \mathcal{F} -инъектор G и F – \mathcal{F} -подгруппа Фишера G , которая содержит холлову π' -подгруппу G . Покажем вначале, что \mathcal{F} -инъектор G является \mathcal{F} -подгруппой Фишера G .

Пусть \mathcal{F} – π -насыщенное множество Фишера G . Тогда по лемме 1.1 в G существует \mathcal{F} -инъектор V и $V \in \mathcal{F}$.

Пусть $L \in \mathcal{F}$ и $V \leq N_G(L)$. Докажем, что $L \trianglelefteq VL$. Возьмем произвольный элемент $x = vl$ группы VL , где $v \in V$, $l \in L$. Тогда

$$(vl)^{-1}L(vl) = l^{-1}v^{-1}Lvl = l^{-1}Ll = L.$$

Следовательно, подгруппа L нормальна в VL . Значит, $L \leq (VL)_{\mathcal{F}}$. Так как $V \leq VL$, то по лемме 1.3, V является \mathcal{F} -инъектором группы VL . Следовательно, $L \leq (VL)_{\mathcal{F}} \leq V$ и V – \mathcal{F} -подгруппа Фишера группы G .

Докажем обратное утверждение. Доказательство проведем индукцией по порядку группы G . Если $G = 1$, то теорема очевидна. Предположим, что теорема верна для всех групп, порядок которых меньше $|G|$.

Предположим, что F не является \mathcal{F} -инъектором G .

Пусть $G_{\mathcal{F}}$ – \mathcal{F} -радикал группы G . Если $G_{\mathcal{F}}$ является \mathcal{F} -инъектором группы G , то по определению \mathcal{F} -подгруппы Фишера получаем, что $V = F$, что противоречит предположению о том, что F не является \mathcal{F} -инъектором группы G . Поэтому $G_{\mathcal{F}}$ не является \mathcal{F} -инъектором группы G .

Следуя Хартли [6, теорема 1*], выберем подгруппу H группы G со следующими свойствами:

а) $G_{\mathcal{F}} \trianglelefteq H \trianglelefteq G$;

б) H – наименьшая из подгрупп, для которой справедливо $G_{\mathcal{F}} \leq V \cap H$.

Пусть $V_0 = V \cap H$ и $N = N_G(V_0)$. Заметим, что $G_{\mathcal{F}} < V \cap H$, $V \leq N < G$ и по лемме 1.4 $G = N_G(V_0)H$.

В дальнейшем разобьем доказательство обратного утверждения теоремы на несколько шагов.

(1) $F \cap H$ не является \mathcal{F} -инъектором H .

Предположим, что подгруппа $F \cap H$ является \mathcal{F} -инъектором H . Тогда по лемме 1.1 $F \cap H$ и $V \cap H$ сопряжены в H . Следовательно, без ограничения общности предположим, что $V_0 = V \cap H = F \cap H$. Поэтому, $F \leq N_G(V_0) < G$. Следовательно, по индукции F и V сопряжены в $N = N_G(V_0)$ и F – \mathcal{F} -инъектор N . Отсюда F и V сопряжены в G , то есть $F = V^g$ для некоторого $g \in G$. Тогда F – \mathcal{F}^g -инъектор G , но по лемме 1.13 $\mathcal{F}^g = \mathcal{F}$ и F – \mathcal{F} -инъектор G . Получили противоречие с тем, что F не является \mathcal{F} -инъектором группы G .

(2) Пусть H/K такой главный фактор группы G , что $G_{\mathcal{F}} \trianglelefteq K \triangleleft H$. Докажем, что H/K – элементарная абелева r -группа для некоторого $r \in \pi$ и K – единственная максимальная подгруппа из множества промежуточных нормальных подгрупп G между $G_{\mathcal{F}}$ и H .

Так как $G_{\mathcal{F}} \leq K$ и $G_{\mathcal{F}} \leq V$, то $G_{\mathcal{F}} \leq V \cap K$. По лемме 1.14 $V \cap K$ является \mathcal{F} -инъектором K . Следовательно,

$$V \cap K \geq K_{\mathcal{F}} \geq G_{\mathcal{F}} \leq KG_{\mathcal{F}} \cap K = G_{\mathcal{F}}.$$

Так как G π -разрешима, то H/K либо π' -группа, либо элементарная абелева r -группа для $r \in \pi$.

Пусть H/K – π' -группа. Поскольку $F \cap H$ содержит холлову π' -группу H , то $H = (F \cap H)K$. Отсюда

$$(F \cap H) \cap K = F \cap (H \cap K) = F \cap K = G_{\mathcal{F}} = V \cap K$$

и подгруппа $F \cap H$ является \mathcal{F} -инъектором K . Следовательно, по лемме 1.5 $F \cap H$ – \mathcal{F} -инъектор H , что противоречит утверждению (1). Пусть H/K – элементарная абелева r -группа

($p \in \pi$) и K_1 и K_2 – максимальные нормальные подгруппы K из множества нормальных подгрупп G между $G_{\mathcal{F}}$ и H . Тогда, по доказанному выше, H/K_i – абелева группа ($i=1,2$) и $V_0(K_1 \cap K_2)/K_1 \cap K_2 \leq H/K_1 \cap K_2$. Поэтому $H \leq N_G(V_0(K_1 \cap K_2))$ и $N \leq N_G(V_0(K_1 \cap K_2))$. Следовательно, подгруппа $V_0(K_1 \cap K_2)$ нормальна в $HN = G$. Ввиду выбора подгруппы H , $H = V_0(K_1 \cap K_2)$ и поэтому $K_i = K_i \cap H = K_i \cap (K_1 \cap K_2)V_0 = (K_1 \cap K_2)G_{\mathcal{F}} = K_1 \cap K_2$. Таким образом, $K_1 = K_2$. Следовательно, K – единственная максимальная подгруппа множества промежуточных нормальных подгрупп между $G_{\mathcal{F}}$ и H .

$$(3) HF = G.$$

Если $HF < G$, то по индукционному предположению F – \mathcal{F} -инъектор HF . Следовательно, $F \cap H$ – \mathcal{F} -инъектор H , что противоречит утверждению (1).

(4) H/K – единственная минимальная нормальная подгруппа G/K .

Предположим, что утверждение (4) неверно. Тогда G/K содержит такую абелеву нормальную подгруппу H_1/K , что $R/K \times H_1/K = H_1/K$, где R/K – минимальная нормальная подгруппа группы G/K , которая отлична от H/K и $H/K < H_1/K$. Так как $HF = G$, то $H_1 = H_1 \cap HF = H(F \cap H_1)$. Пусть H^* – подгруппа группы H_1 такая, что $H^* = K(F \cap H_1)$. Докажем, что H^* – нормальная подгруппа группы G . Так как группа G – π -разрешимая группа, то фактор R/K является либо элементарной абелевой группой для $p \in \pi$, либо π' -группой. Пусть R/K – абелева p -группа ($p \in \pi$) и H_1/K – абелева нормальная подгруппа G/K . Тогда $H/K \leq N_G(H^*/K)$ и $FK/K \leq N_G(H^*/K)$. Следовательно, $(F \cap H_1)K = H^*$ и $H^* \leq F$. Таким образом, $H^*/K \leq FK/K \times H_1/K = G/K$ и $H^* \leq G$.

Предположим, что R/K – π' -группа. Тогда H_1/K – π -разложимая группа. Как показано выше, H^*/K нормализуется FK/K . Так как F содержит холлову π' -подгруппу G , то $(H_1/K)_{\pi'} \leq H^*/K$. Поэтому $R/K \leq H^*/K$ и $R \leq H^*$. Таким образом, ввиду изоморфизма:

$$H_1/R \cong H_1/K/R/K.$$

Так как H^*/R – подгруппа абелевой группы H_1/R , то $H^* \leq H_1$. Следовательно, $H^*/K \leq G/K$, поскольку H^*/K нормализуется $FK/K \times H_1/K = G/K$. Значит, $H^* \leq G$.

Далее покажем, что $F \cap H^* = \mathcal{F}$ -инъектор H^* . Заметим, что фактор H^*/K – нетривиальная подгруппа G/K . Действительно, в противном случае $F \cap H_1 \leq K$ и $H_1 = H$. Это противоречит предположению о том, что $H < H_1$.

Ввиду равенства $H^* = K(F \cap H_1)$, $F \cap H^* = F \cap H_1$. Следовательно, $H^* = K(F \cap H^*)$. Поскольку, $(F \cap H^*) \cap K = F \cap (H \cap K) = F \cap K = G_{\mathcal{F}} = V \cap K$, то $F \cap K$ – \mathcal{F} -инъектор K . Следовательно, по лемме 1.5 $F \cap H^*$ – \mathcal{F} -инъектор H^* .

Ввиду леммы 1.1, получаем $V^* = V \cap H^* = F \cap H^*$. Так как $H < H_1$ и $G_{\mathcal{F}} = F \cap K \leq F \cap H \leq F \cap H_1 = F \cap H^* = V^*$, то $N^* = N_G(V^*) < G$.

Теперь учитывая, что $H^* \leq G$, F и V – подгруппы N^* , по индукционному предположению F и V сопряжены в N^* . Следовательно, F – \mathcal{F} -инъектор G , что невозможно.

(5) N покрывает G/K в точности тогда, когда $G = KN$.

В соответствии с выбором подгруппы H , \mathcal{F} -инъектор V не изолирует главный фактор H/K группы G . Следовательно, по лемме 1.7 V покрывает H/K . Тогда $(V \cap H)K = H$ и по лемме 1.4 $G = HN = (V \cap H)KN = KN$.

Так как $G_{\mathcal{F}} < N < G$, то как показано в (2)–(3), множество главных факторов группы G , находящихся между $G_{\mathcal{F}}$ и K , которые непокрываемы N , непусто. Пусть фактор A/B принадлежит данному множеству и A имеет максимальный порядок. Ввиду π -насыщенности множества Фишера, A/B – элементарная абелева p -группа ($p \in \pi$). Следовательно, $G = AN$ и $B(A \cap N) \leq G$. Тогда, согласно выбору A/B , $A \cap N \leq B$ и поэтому $BN = D$ – дополнение A/B в G .

Так как \mathcal{F} – π -насыщенное множество Фишера группы G , то по лемме 1.8 \mathcal{F} -инъекторы группы G являются π -нормально вложенными подгруппами. Следовательно, по лемме 1.12 каждый фактор группы G является \mathcal{F} -дополняемым в L , где $L \leq G$.

$$(6) A = C_G(A/B).$$

Пусть $C = C_G(A/B)$ – нормальная подгруппа группы G . Если $H \leq C$, то V_0 централизует A/B . По лемме 1.9 V_0 – пронормальная подгруппа G . Следовательно, по лемме 1.10 $N = N_G(V_0)$ покрывает A/B , что невозможно, ввиду выбора главного фактора A/B . Поэтому $C \cap H < H$ и A/B – абелева группа такая, что

$G_{\mathcal{F}} \leq A \leq C$. Тогда $C \cap H$ – нормальная подгруппа группы G , расположенная между $G_{\mathcal{F}}$ и H . По утверждению (2), K – единственная максимальная подгруппа из множества нормальных подгрупп G , между $G_{\mathcal{F}}$ и H . Следовательно, $C \cap H < K$. Поскольку $H/K \cap CK/K = \{1\}$ и H/K – единственная минимальная нормальная подгруппа G/K , справедливо $C \leq K$.

Тогда $G_{\mathcal{F}} \leq A \leq C \leq K$ и по лемме 1.4 $C \cap D \trianglelefteq DA = G$. Таким образом, $C/C \cap D$ – фактор группы G на участке ряда $G_{\mathcal{F}} \leq A \leq C \leq K$, изолируемый подгруппой D , и, следовательно, подгруппой N . Так как A – максимальная из подгрупп A для таких факторов, то $A = C_G(A/B)$.

Рассмотрим теперь подгруппу L группы G такую, что $L = KF$. Так как $K \trianglelefteq G$ и $G_{\mathcal{F}} = F \cap K$ – \mathcal{F} -инъектор K , то по лемме 1.3 F является \mathcal{F} -инъектором L . Тогда по индукционному предположению $L < G$. Так как в L p -фактор A/B самоцентризуем, \mathcal{F} -изолируем ($p \in \pi$), дополняем подгруппой $D \cap L$, по лемме 1.12 $D \cap L$ содержит \mathcal{F} -инъектор L . Без ограничения общности, можно считать, что $F \leq D \cap L$.

Поскольку $V \leq N \leq BN = D$, то V и F – \mathcal{F} -инъекторы подгруппы D и $D \not\leq G$. Таким образом, F – \mathcal{F} -инъектор G . Полученное противоречие завершает доказательство того, что каждая \mathcal{F} -подгруппа Фишера группы G , содержащая холлову π' -подгруппу, является \mathcal{F} -инъектором G . \square

Заключение

В работе получено описание \mathcal{F} -инъекторов π -разрешимой группы G в ее π -насыщенном множестве Фиттинга \mathcal{F} при помощи \mathcal{F} -подгрупп Фишера G . В частности, найдены новые классы сопряженных \mathcal{F} -подгрупп Фишера в G .

ЛИТЕРАТУРА

1. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

2. Gaschütz, W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1963. – Vol. 80. – S. 300–305.

3. Fischer, B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen / B. Fischer – Habilitationsschrift, Universität Frankfurt (M), 1966.

4. Fischer, B. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Vol. 102, Heft 5. – S. 337–339.

5. Dark, R. Some examples in the theory of injectors of finite soluble groups / R. Dark // Math. Z. – 1972. – Bd. 127. – P. 145–156.

6. Hartley, B. On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.

7. Шеметков, Л.А. О подгруппах π -разрешимых групп / Л.А. Шеметков // Конечные группы. – 1975. – С. 207–212.

8. Anderson, W. Injectors in finite soluble groups / W. Anderson // J. Algebra. – 1975. – № 36. – P. 333–338.

9. Yang, N. On \mathcal{F} -injectors of Fitting set of a finite group / N. Yang, W. Guo, N.T. Vorob'ev // Comm. Algebra. – 2018. – Vol. 46, № 1. – P. 217–229.

10. Воробьев, С.Н. Инъекторы и подгруппы Фишера конечных групп / С.Н. Воробьев // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя П.М. Машэрава. – 2013. – Т. 77, № 5. – С. 36–42.

11. Чунихин, С.А. Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Наука и техника. – Минск, 1964.

12. Семенов, М.Г. Формула инъектора конечной π -разрешимой группы / М.Г. Семенов // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 77–88.

13. Караулова, Т.Б. Локальные множества Фиттинга и инъекторы конечной группы / Т.Б. Караулова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2018. – № 3. – С. 29–38.

Исследования выполнены при поддержке БРФФИ (проект Ф17М-064) и Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция» (2016-2020).

Поступила в редакцию 09.02.19.

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ФАКТОРИЗУЕМЫЕ ГРУППЫ С РАЗРЕШИМЫМИ \mathbb{X} -СУБНОРМАЛЬНЫМИ СОМНОЖИТЕЛЯМИ

В.Н. Княгина¹, И.К. Чирик²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

²Университет гражданской защиты МЧС Беларуси, Минск

FINITE FACTORED GROUPS WITH SOLUBLE \mathbb{X} -SUBNORMAL FACTORS

V.N. Kniahina¹, I.K. Chirik²

¹F. Scorina Gomel State University

²University of Civil Protection of the Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus, Minsk

Устанавливаются новые признаки частичной разрешимости конечной факторизуемой группы с ограничениями на индексы в цепях подгрупп от сомножителей до группы. В частности, доказана разрешимость конечной группы $G = AB$ с разрешимыми сомножителями A и B при условии, что существуют цепи от подгрупп A и B до группы G , в которых индексы соседних ненормальных подгрупп либо нечетные, либо равны 2 или 4.

Ключевые слова: конечная группа, разрешимая группа, факторизуемая группа, обобщенно субнормальная подгруппа.

We establish new criteria of partial solubility of a finite factored group with restrictions on indices in chains of subgroups from factors to the group. In particular, it is proved that if A and B are soluble subgroups of a group G such that there exist chains from A and B to G in which indices of neighboring non-normal subgroups are either odd or equal to 2 or 4 and $G = AB$, then G is soluble.

Keywords: finite group, soluble group, factored group, generalized subnormal subgroup.

Введение

Пусть \mathbb{X} – некоторое множество натуральных чисел, замкнутое относительно делителей, т. е. если $x \in \mathbb{X}$ и натуральное число y делит x , то $y \in \mathbb{X}$.

Подгруппа H называется $K\mathbb{X}$ -субнормальной подгруппой группы G , если существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n = G \quad (0.1)$$

такая, что для каждого i либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i , либо $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{X}$, обозначается H $K\mathbb{X}$ sp G . Цепь (0.1) будем называть $K\mathbb{X}$ -субнормальной для подгруппы H .

Если исключить возможность нормальности H_{i-1} в H_i , то получаем понятие \mathbb{X} -субнормальности. Если $\mathbb{X} = \mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, то возникает случай $K\mathbb{P}$ -субнормальности.

Факторизуемые группы с \mathbb{X} -субнормальными и $K\mathbb{P}$ -субнормальными сомножителями исследовались в работах [1]–[8]. В частности, В.Н. Княгина и В.Н. Тютянов [6] получили признаки разрешимости (r -разрешимости) группы $G = AB$ с разрешимыми (r -разрешимыми) \mathbb{X} -субнормальными подгруппами A и B для некоторых конкретных значений множества \mathbb{X} .

В настоящей работе мы переносим результаты работы [6] на случай, когда сомножители $K\mathbb{X}$ -субнормальны.

1 Вспомогательные результаты

Рассматриваются только конечные группы. В отношении терминологии и обозначений будем придерживаться [9].

Множества всех натуральных и простых чисел обозначаются через \mathbb{N} и \mathbb{P} соответственно. Пусть $p \in \mathbb{P}$. Если порядок группы X не делится на p , то X называется p' -группой. Группа, у которой факторы главного ряда либо имеют порядок p^n , $n \in \mathbb{N}$, либо являются p' -группами, называется p -разрешимой. Запись $Y \leq X$ ($Y < X$) означает, что Y – подгруппа (собственная) группы X . Порядок и индекс подгруппы Y в группе X обозначаются через $|Y|$ и $|X : Y|$ соответственно. A_n и S_n – знакопеременная и симметрическая группы степени n соответственно.

Лемма 1.1. Пусть \mathbb{X} – некоторое множество натуральных чисел, замкнутое относительно делителей. Пусть H – подгруппа конечной группы G , N – нормальная в G подгруппа. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) если $H \text{ К}\mathbb{X} \text{ sn } G$, то $(H \cap N) \text{ К}\mathbb{X} \text{ sn } N$ и $HN/N \text{ К}\mathbb{X} \text{ sn } G/N$;
 (2) если $N \leq H$ и $H/N \text{ К}\mathbb{X} \text{ sn } G/N$, то $H \text{ К}\mathbb{X} \text{ sn } G$;
 (3) если $H \leq L \leq G$, $H \text{ К}\mathbb{X} \text{ sn } L$, $L \text{ К}\mathbb{X} \text{ sn } G$, то $H \text{ К}\mathbb{X} \text{ sn } G$;
 (4) если $H \text{ К}\mathbb{X} \text{ sn } G$, то $H^g \text{ К}\mathbb{X} \text{ sn } G$ для любого $g \in G$.

Доказательство. 1. Пусть H – $\text{К}\mathbb{X}$ -субнормальная подгруппа группы G . Тогда существует цепь (0.1) такая, что H_{i-1} нормальна в H_i , либо $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{X}$ для всех i . Рассмотрим следующую цепь в подгруппе N :

$H \cap N = (H_0 \cap N) \leq (H_1 \cap N) \leq \dots \leq (H_n \cap N) = N$.
 Если H_{i-1} нормальна в H_i , то $H_i \cap N$ нормальна в H_i и $H_i \cap N \cap H_{i-1} = H_{i-1} \cap N$ нормальна в H_i . Пусть $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{X}$. Так как

$$|H_i \cap N : H_{i-1} \cap N| = |(H_i \cap N)H_{i-1} : H_{i-1}|,$$

то по лемме об индексах

$$\begin{aligned} &|H_i : H_{i-1}| = \\ &= |H_i : (H_i \cap N)H_{i-1}| \cdot |(H_i \cap N)H_{i-1} : H_{i-1}|. \end{aligned}$$

Поэтому $|H_i \cap N : H_{i-1} \cap N|$ делит $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{X}$. Поскольку \mathbb{X} – множество натуральных чисел, замкнутое относительно делителей, то $|H_i \cap N : H_{i-1} \cap N| \in \mathbb{X}$ и $H \cap N \text{ К}\mathbb{X} \text{ sn } N$.

В фактор-группе G/N рассмотрим цепь подгрупп:

$$\begin{aligned} &HN/N = \\ &= H_0N/N \leq H_1N/N \leq \dots \leq H_nN/N = G/N. \end{aligned}$$

Если H_{i-1} нормальна в H_i , то $H_{i-1}N/N$ нормальна в H_iN/N . Пусть $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{X}$. Поскольку

$$\begin{aligned} &|H_iN/N : H_{i-1}N/N| = |H_iN : H_{i-1}N| = \\ &= \frac{|H_i : H_{i-1}|}{|H_i \cap N : H_{i-1} \cap N|}, \end{aligned}$$

то HN/N то $\text{К}\mathbb{X} \text{ sn } G/N$. Здесь опять использовалось условие, что множество натуральных чисел \mathbb{X} замкнуто относительно делителей.

2. Пусть $N \leq H$ и H/N – $\text{К}\mathbb{X}$ -субнормальная подгруппа группы G/N .

Тогда существует $\text{К}\mathbb{X}$ -субнормальная цепь $H/N = H_0/N \leq H_1/N \leq \dots \leq H_n/N = G/N$.

Следующая цепь будет $\text{К}\mathbb{X}$ -субнормальной цепочкой для подгруппы H :

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n = G.$$

Аналогично проверяются утверждения (3) и (4). \square

Лемма 1.2. Пусть \mathbb{X} – некоторое множество натуральных чисел, замкнутое относительно делителей. Пусть A и B – $\text{К}\mathbb{X}$ -субнормальные подгруппы конечной группы G и $G = AB$. Если

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_{n-1} \leq A_n = G -$$

$\text{К}\mathbb{X}$ -субнормальная цепь, то $A_i \cap B$ $\text{К}\mathbb{X}$ -субнормальная подгруппа в A_i для каждого i .

Доказательство. Поскольку подгруппа B – $\text{К}\mathbb{X}$ -субнормальна в G , то существует $\text{К}\mathbb{X}$ -субнормальная цепь

$$B = B_0 \leq B_1 \leq \dots \leq B_{m-1} \leq B_m = G.$$

По условию $G = AB$, а по тождеству Дедекинда

$$A_i = A(A_i \cap B), A_i \cap B_j = (A \cap B_j)(A_i \cap B), \forall i, j.$$

Понятно, что $A \cap B_j \cap A_i \cap B = A \cap B$, $\forall i, j$. Теперь

$$\begin{aligned} &|A_i \cap B_j : A_i \cap B_{j-1}| = \frac{|A_i \cap B_j|}{|A_i \cap B_{j-1}|} = \\ &= \frac{|A \cap B_j| \cdot |A_i \cap B|}{|A \cap B_j \cap A_i \cap B|} \cdot \frac{|A \cap B_{j-1}| \cdot |A_i \cap B|}{|A \cap B_{j-1} \cap A_i \cap B|} = \\ &= |A \cap B_j : A \cap B_{j-1}|. \end{aligned}$$

Зафиксируем полученное равенство:

$$|A \cap B_j : A \cap B_{j-1}| = |A_i \cap B_j : A_i \cap B_{j-1}|. \quad (1.1)$$

По условию $G = AB$, а по тождеству Дедекинда

$$\begin{aligned} &B_j = (A \cap B_j)B, |B_j| = |A \cap B_j| \cdot |B| \cdot |A \cap B|, \forall j, \\ &|B_j : B_{j-1}| = |A \cap B_j : A \cap B_{j-1}|. \quad (1.2) \end{aligned}$$

Из (1.1) и (1.2) получаем:

$$|A_i \cap B_j : A_i \cap B_{j-1}| = |B_j : B_{j-1}|, \forall i, j. \quad (1.3)$$

Рассмотрим цепь подгрупп для $A_i \cap B$ в подгруппе A_i :

$$\begin{aligned} &A_i \cap B = \\ &= (A_i \cap B_0) \leq (A_i \cap B_1) \leq \dots \leq (A_i \cap B_m) = A_i. \quad (1.4) \end{aligned}$$

Если B_{j-1} нормальна в B_j , то $A_i \cap B_{j-1} \cap B_j = A_i \cap B_{j-1}$ нормальна в $A_i \cap B_j$. Если B_{j-1} не нормальна в B_j , то $|B_j : B_{j-1}| \in \mathbb{X}$, а из (1.3) при $i = t$ следует, что

$$|A_i \cap B_j : A_i \cap B_{j-1}| \in \mathbb{X},$$

т. е. цепь (1.4) является $\text{К}\mathbb{X}$ -субнормальной цепочкой для подгруппы $A_i \cap B$ в A_i . \square

Лемма 1.3. Если $U \leq V \leq G$ и K – субнормальная подгруппа в конечной группе G , то $|V \cap K : U \cap K|$ делит $|V : U|$.

Доказательство. По условию существует цепочка подгрупп

$$G = K_0 \geq K_1 \geq \dots \geq K_m = K,$$

в которой подгруппа K_{i+1} нормальна в K_i для всех i . Так как K_1 – нормальная подгруппа группы G , то $UK_1 \leq VK_1 \leq G$ и

$$U/U \cap K_1 \cong UK_1/K_1 \leq VK_1/K_1 \cong V/V \cap K_1.$$

По теореме Лагранжа существует натуральное число d такое, что

$$d \cdot \frac{|U|}{|U \cap K_1|} = \frac{|V|}{|V \cap K_1|},$$

$$d \cdot |V \cap K_1 : U \cap K_1| = |V : U|.$$

Таким образом, в случае, когда $K = K_1$ нормальна в G , лемма верна. Теперь можно применить индукцию к подгруппам $U \cap K_1 \leq V \cap K_1$ и субнормальной в $V \cap K_1$ подгруппе $V \cap K$. По индукции $|V \cap K : U \cap K|$ делит $|V \cap K_1 : U \cap K_1|$, поэтому $|V \cap K : U \cap K|$ делит $|V : U|$. \square

2 Признак r -разрешимости при $\mathbb{X} = \mathbb{P}_2^2$

Зафиксируем натуральное число t и простое число p . Пусть

$$\mathbb{P}_r^t = \{p^i \mid p \in \mathbb{P} \setminus \{r\}, i \in \{0\} \cup \mathbb{N}\} \cup \{r^j \mid j \in \{0\} \cup \mathbb{N}, j \leq t\}.$$

При $r = t = 2$ получаем множество

$$\mathbb{P}_2^2 = \{p^i \mid p \in \mathbb{P} \setminus \{r\}, i \in \{0\} \cup \mathbb{N}\} \cup \{2^j \mid j \in \{0\} \cup \mathbb{N}, j \leq 2\},$$

которое состоит из чисел 1, 2, 4 и всех натуральных степеней нечетных простых чисел.

Поскольку множество \mathbb{P}_2^2 замкнуто относительно делителей, то при $\mathbb{X} = \mathbb{P}_2^2$ мы можем применять леммы 1.1, 1.2. Нам потребуется еще следующий результат.

Лемма 2.1. [10, теорема 1]. Пусть G – конечная простая неабелева группа, $H < G$ и $|G : H| = p^a$, где p – простое число. Тогда имеет место одно из следующих утверждений:

- (1) $G \simeq A_n$, $H \simeq A_{n-1}$, где $n = p^a$;
- (2) $G \simeq PSL(r, q)$, H – параболическая подгруппа в G ,

$$|G : H| = \frac{q^r - 1}{q - 1} = p^a \text{ и } r - \text{ простое число};$$

- (3) $G \simeq PSL(2, 11)$, $H \simeq A_5$;
- (4) $G \simeq M_{23}$, $H \simeq M_{22}$ или $G \simeq M_{11}$, $H \simeq M_{10}$;
- (5) $G \simeq PSU_4(2) \simeq PSp_4(3)$, H – параболическая подгруппа индекса 27.

В частности, только группа $PSL(2, 7)$ имеет подгруппы двух различных примарных индексов, их индексы равны 7 и 8.

Теорема 2.2. Пусть G – конечная группа и $r \in \pi(G)$. Если A и B – $\mathbb{K}\mathbb{P}_2^2$ -субнормальные r -разрешимые подгруппы G и $G = AB$, то G является r -разрешимой группой.

Доказательство. Пусть G – группа наименьшего порядка такая, что $G = AB$, где A и B – r -разрешимые $\mathbb{K}\mathbb{P}_2^2$ -субнормальные подгруппы, но группа G не является r -разрешимой. Ясно, что $A \neq G \neq B$.

Согласно условию существуют $\mathbb{K}\mathbb{P}_2^2$ -субнормальные цепи

$$A = A_0 < A_1 < \dots < A_{n-1} < A_n = G;$$

$$B = B_0 < B_1 < \dots < B_{m-1} < B_m = G.$$

Подгруппа A $\mathbb{K}\mathbb{P}_2^2$ -субнормальна в A_{n-1} по определению. По тождеству Дедекинда

$$A_{n-1} = A(A_{n-1} \cap B).$$

По лемме 1.2 подгруппа $A_{n-1} \cap B$ является $\mathbb{K}\mathbb{P}_2^2$ -субнормальной в A_{n-1} . Так как $|A_{n-1}| < |G|$, то по индукции A_{n-1} r -разрешима. Если A_{n-1} нормальна в $A_n = G = A_{n-1}B$, то G r -разрешима, противоречие. Значит, $|G : A_{n-1}| \in \mathbb{P}_2^2$. Точно также, используя индукцию, заключаем, что B_{m-1} r -разрешима и $|G : B_{m-1}| \in \mathbb{P}_2^2$. Следовательно, $G = A_{n-1}B_{m-1}$ и подгруппы A и B можно считать максимальными в группе G , т. е. можно считать, что $A = A_{n-1}$ и $B = B_{m-1}$. Из определения \mathbb{P}_2^2 -субнормальности следует, что

$$|G : A| = p^l, |G : B| = q^s,$$

$$\{p, q\} \subseteq \pi(G), l, s \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что $l \leq 2$ при $p = 2$.

Рассмотрим случай, когда $p \neq q$. Предположим, что G – простая неабелева группа. Ввиду леммы 2.1 группа $G \simeq PSL(2, 7)$. Но в этой группе примарные индексы максимальных подгрупп могут быть равными только 7 или 8. Это противоречит определению $\mathbb{K}\mathbb{P}_2^2$ -субнормальной подгруппы. Получили противоречие. Поэтому в группе G имеется собственная минимальная нормальная подгруппа N . В силу леммы 1.1 (1) условия теоремы наследуются фактор-группами группы G , поэтому N не является r -разрешимой группой. Следовательно, N не содержится в A и N не содержится в B . Поскольку A и B максимальны в G , то $G = AN = BN$. Из полученных факторизаций имеем:

$$p^l = |G : A| = |N : (A \cap N)|,$$

$$q^s = |G : B| = |N : (B \cap N)|.$$

Так как

$$(|N : A \cap N|, |N : B \cap N|) = 1,$$

то $N = (A \cap N)(B \cap N)$. По лемме 1.1 (1) подгруппы $(A \cap N)$ и $(B \cap N)$ $\mathbb{K}\mathbb{P}_2^2$ -субнормальны в N . По индукции N r -разрешима, противоречие.

Следовательно, $p = q$. Заметим

$$p^l = |G : A| = |B : A \cap B| > 1,$$

$$p^s = |G : B| = |A : A \cap B| > 1.$$

Используя лемму об индексах получаем:

$$|G : A \cap B| = |G : A| |A : A \cap B| = p^{l+s} > p^l.$$

В силу леммы 2.1 группа G не простая. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в G . Тогда N не является r -разрешимой и

$$N = N_1 \times \dots \times N_k,$$

где N_i – изоморфные простые неабелевы группы. N не содержится в A и N не содержится в B . Применяем лемму 1.3 к цепочке подгрупп

$$A \cap B \leq A \leq G.$$

При $V = G$, $U = A$ и $K = N_1$ получаем, что $1 \neq |N_1 : A \cap N_1|$ делит $|G : A| = p^l$. Аналогично, $1 \neq |N_1 : B \cap N_1|$ делит $|G : B| = p^s$. При

$$V = G, U = A \cap B, K = N_1$$

получаем, что $1 \neq |N_1 : A \cap B \cap N_1|$ делит $|G : A \cap B| = p^{l+s}$. Итак, в простой группе N_1 содержатся подгруппы

$$A \cap N_1, B \cap N_1, A \cap B \cap N_1,$$

индексы которых являются степенями простого числа p . Согласно лемме 2.1

$$|N_1 : A \cap N_1| = |N_1 : B \cap N_1| = |N_1 : A \cap B \cap N_1|,$$

$$A \cap N_1 = A \cap B \cap N_1 = B \cap N_1.$$

Подгруппа $A \cap N_1$ субнормальна в A и $A \cap N_1 = B \cap N_1$ субнормальна в B . Согласно [11] подгруппа $A \cap N_1$ субнормальна в G и p -разрешима. Если $A \cap N_1 \neq 1$, то $(A \cap N_1)^G$ – неединичная нормальная p -разрешимая подгруппа в G , противоречие. Поэтому $A \cap N_1 = 1$. Поскольку $|N_1| = |N_1 : A \cap N_1|$ делит $|G : A| = p^l$, то N_1 – p -группа, что невозможно. \square

3 Множество \mathbb{X} состоит из примарных чисел

Множество

$$\mathbb{P}^\infty = \{p^l \mid p \in \mathbb{P}, l \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$$

состоит из всех примарных чисел. Напомним, что примарным называют число, которое является неотрицательной целой степенью простого числа. Для $\mathbb{K}\mathbb{P}^\infty$ -субнормальных подгрупп выполняются утверждения лемм 1.1 и 1.2, поскольку \mathbb{P}^∞ замкнуто относительно делителей.

Теорема 3.1. Пусть G – конечная группа и $r \in \pi(G) \setminus \{2, 3, 7\}$. Если A и B – $\mathbb{K}\mathbb{P}^\infty$ -субнормальные r -разрешимые подгруппы группы G и $G = AB$, то G является r -разрешимой группой.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна и G – минимальный контрпример. Аналогично доказательству теоремы 2.2 можно доказать, что подгруппы A и B максимальны в G . Если A_{n-1} нормальна в $A_n = G = A_{n-1}B$, или B_{n-1} нормальна в B_n то G r -разрешима, противоречие. Значит, $|G : A| = p^l$, $|G : B| = q^s$, где $\{p, q\} \subseteq \pi(G)$.

Сначала рассмотрим случай, когда $p \neq q$. Если G – простая неабелева группа, то в силу леммы 2.1 она изоморфна $PSL(2, 7)$. Тогда, G – r' -группа. Противоречие с предположением, что

G – контрпример минимального порядка. Поэтому минимальная нормальная подгруппа N в G отлична от G . Подгруппа N не является r -разрешимой и $N = N_1 \times \dots \times N_k$, где N_i – изоморфные простые неабелевы группы. Поэтому $N \not\subseteq A$ и $N \not\subseteq B$. Из полученного условия максимальной подгрупп A и B в G заключаем, что $G = AN = BN$. Из равенств $|G : A| = p^l$, $|G : B| = q^s$ следует, что $G = AP = BQ$ для $P \in \text{Syl}_p(G)$, $Q \in \text{Syl}_q(G)$. Поэтому

$$\frac{|A \parallel N|}{|A \cap N|} = \frac{|A \parallel P|}{|A \cap P|}$$

или

$$\frac{|N|}{|A \cap N|} = \frac{|P|}{|A \cap P|} = p^l, \quad |N : A \cap N| = p^l.$$

Аналогично можно показать, что $|N : B \cap N| = q^s$. Так как

$$(|N : A \cap N|, |N : B \cap N|) = 1,$$

то $N = (A \cap N)(B \cap N)$. По лемме 1.1 (1) подгруппы $(A \cap N)$ и $(B \cap N)$ $\mathbb{K}\mathbb{P}^\infty$ -субнормальны в N . По индукции N r -разрешима, противоречие.

Поэтому $p = q$. Повторяя соответствующую часть доказательства теоремы 2.2, получаем противоречие с тем, что N не является r -разрешимой подгруппой. \square

4 Множество \mathbb{X} состоит из всех нечетных чисел и чисел 2 и 4

Множество

$$\mathbb{L} = \{2, 4\} \cup \{2n-1 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

состоит из всех нечетных чисел и чисел 2 и 4.

Нам потребуется следующий результат.

Лемма 4.1. [12, теорема 3]. Если A и B – разрешимые подгруппы нечетных индексов в конечной группе G и $G = AB$, то G разрешима.

Теорема 4.2. Пусть A и B – $\mathbb{K}\mathbb{L}$ -субнормальные подгруппы конечной группы G и $G = AB$. Если A и B разрешимы, то G разрешима.

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно и пусть группа G – минимальный контрпример к теореме. По условию существует $\mathbb{K}\mathbb{L}$ -субнормальная цепь подгрупп

$$A = A_0 < A_1 < \dots < A_{n-1} < A_n = G.$$

Подгруппа A $\mathbb{K}\mathbb{L}$ -субнормальна в A_{n-1} и $A_{n-1} = A(A_{n-1} \cap B)$ по тождеству Дедекинда. По лемме 1.2 подгруппа $A_{n-1} \cap B$ $\mathbb{K}\mathbb{L}$ -субнормальна в A_{n-1} . По индукции подгруппа A_{n-1} разрешима. Поэтому в факторизации $G = AB$ можно считать, что подгруппа $A = A_{n-1}$ максимальна. Аналогично, без ущерба для доказательства можно считать, что подгруппа B максимальна в G .

Из определения $\mathbb{K}\mathbb{L}$ -субнормальности следует, что подгруппа A либо нормальна в G , либо

$|G:A| \in \mathbb{L}$. Если A нормальна в G , то $|G:A|$ – простое число и G разрешима, противоречие. Если индекс подгруппы A равен 2 или 4, то фактор-группа G/M_G изоморфна подгруппе симметрической группы S_4 степени 4. Здесь $M_G = \bigcap_{x \in G} M^x$ – ядро подгруппы M в группе G . Поскольку $|S_4| = 4! = 24$, то G разрешима. Опять получили противоречие. Следовательно, индекс подгруппы A в группе G нечетный. Аналогично, B – подгруппа нечетного индекса в G . По лемме 4.1 группа G разрешима. \square

Отметим, что теоремы 2.2, 3.1 и 4.2 поглощают результаты работ [1], [4]–[6], [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов, В.С. Факторизуемые группы с разрешимыми факторами нечетных индексов / В.С. Монахов // В кн.: Исследование нормально-го и подгруппового строения конечных групп. – Минск. Наука и техника. – 1984. – С. 105–111.
2. Monakhov, V.S. Finite group with \mathbb{P} -subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniahina // Ricerche di Matematica. – 2013. – Vol. 62, № 2. – P. 307–323.
3. Kniahina, V.N. On supersolvability of finite groups with \mathbb{P} -subnormal subgroups / V.N. Kniahina, V.S. Monakhov // International Journal of Group Theory. – 2013. – Vol. 2, № 4. – P. 21–29.
4. Княгина, В.Н. Конечные факторизуемые группы с разрешимыми \mathbb{P}^2 -субнормальными подгруппами / В.Н. Княгина, В.С. Монахов //

Сибирский математический журнал. – 2013. – Т. 54, № 1. – С. 77–85.

5. Васильев, А.Ф. О $\mathbb{K}\mathbb{P}$ -субнормальных подгруппах конечных группах / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Математические заметки. – 2014. – Т. 95, № 4. – С. 517–528.

6. Тютянов, В.Н. Факторизации конечных групп r -разрешимыми подгруппами с заданными вложениями / В.Н. Тютянов, В.Н. Княгина // Укр. мат. журн. – 2014. – Т. 55, № 10. – С. 1431–1435.

7. Monakhov, V. Finite factorised groups with partially solvable \mathbb{P} -subnormal subgroups / V. Monakhov, V. Kniahina // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2015. – Vol. 36, № 4. – P. 441–445.

8. Чирик, И.К. Конечные факторизуемые группы с разрешимыми $\mathbb{K}\mathbb{P}^2$ -субнормальными подгруппами / И.К. Чирик // Математические заметки. Москва. – 2016. – Т. 99, № 1. – С. 97–101.

9. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

10. Guralnick, R.M. Subgroups of prime power index in a simple group / R.M. Guralnick // J. Algebra. – 1983. – Vol. 81, № 2. – P. 304–311.

11. Wielandt, H. Subnormalität in faktorierten endlichen Gruppen / H. Wielandt // J. Algebra. – 1981. – Vol. 69. – P. 305–311.

12. Казарин, Л.С. Факторизации конечных групп разрешимыми подгруппами / Л.С. Казарин // Укр. мат. журн. – 1991. – Т. 43, 7–8. – С. 947–950.

Поступила в редакцию 20.01.19.

УДК 512.643+517.977

ИНВАРИАНТНОСТЬ СВОЙСТВА ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ОТДЕЛЕННОСТИ ГЛАВНЫХ ВЕДУЩИХ МИНОРОВ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ ПРИ ЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ПОДОБИЯ

А.А. Козлов, К.Д. Калита

Полоцкий государственный университет

THE INVARIANCE OF PROPERTY OF PRINCIPAL LEADING MINORS' OF THE SQUARE MATRIX POSITIVITY IN THE SIMILARITY TRANSFORMATION

A.A. Kozlov, K.D. Kalita

Polotsk State University

Рассматривается множество квадратных матриц с положительными главными ведущими минорами, над которыми осуществляется преобразование подобия с помощью нижнетреугольных матриц с положительными диагональными элементами. Устанавливается критерий сохранения положительности главных ведущих миноров при вышеуказанном преобразовании подобия. Кроме того, получено достаточное условие сохранения свойства положительной отделенности от нуля для квадратных матриц, обладающих таким свойством, при рассматриваемом преобразовании. Полученные в работе результаты в дальнейшем планируется использовать при решении задач управления асимптотическими характеристиками линейных дифференциальных систем.

Ключевые слова: инвариантность, преобразование подобия, главные ведущие (угловые) миноры матрицы, положительная отделенность, законопослушность пары матриц.

The set of square matrices with positive principal leading minors and the similarity transformation of them using lower triangular matrices with positive diagonal elements are discussed. The criterion of the preservation of the principal corner minors' of a matrix positivity in the similarity transformation using the above-stated transformation is established. Moreover a sufficient condition of the preservation of the positive separation property for square above mentioned matrices in the similarity transformation is obtained. The received results are planned to be further used in the theory of controllability of asymptotic invariants of linear systems of ordinary differential equations.

Keywords: invariance, similarity transformation, principal leading (corner) minors of a matrix, positive separation, law-obedience of two matrices.

Введение

Одной из задач линейной алгебры является изучение связанных с матрицами свойств и величин, сохраняющихся при различных матричных преобразованиях (ортогональном, подобия, конгруэнции и др.). Так, уже давно известна [1, с. 471] инвариантность свойства положительности главных ведущих миноров положительно определенной матрицы при ортогональном преобразовании, при этом, очевидно, что несимметрические матрицы таким свойством не обладают. Матрицы и связанные с ними свойства широко используются также и при решении прикладных задач, в частности, задач управления асимптотическими характеристиками линейной динамической системы [2]. Здесь важную роль играют, прежде всего, квадратные матрицы с отделенными от нуля, положительными главными ведущими минорами и их преобразования подобия, сохраняющие такую отделенность. Это связано с тем, что мультипликативное возмущение (см., напр., теорему 27.3 работы [2, с. 289]) матрицы Коши управляемой динамической системы, используемое для решения задачи управления ее

асимптотическими инвариантами, может быть описано в терминах именно таких матриц и их преобразований.

Основным результатом данной работы является теорема о сохранении положительной отделенности главных ведущих миноров квадратных матриц при их преобразовании подобия с помощью нижнетреугольных матриц с положительными диагональными элементами.

1 Критерий сохранения положительности главных ведущих миноров матрицы

Пусть \mathbb{R}^n – n -мерное евклидово векторное пространство с нормой $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ (здесь символ T означает операцию транспонирования вектора или матрицы); e_1, e_2, \dots, e_n – векторы (столбцы) канонического ортонормированного базиса пространства \mathbb{R}^n ; M_m – пространство вещественных матриц размерности $m \times n$ со спектральной (операторной) нормой $\|H\| = \max_{\|x\|=1} \|Hx\|$, т. е. нормой, индуцируемой на M_m евклидовой нормой

в пространствах \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m [1, с. 357]; $M_n := M_{nn}$. Обозначим через $E = [e_1, \dots, e_n] \in M_n$ единичную матрицу. Для произвольного числа $l \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{R}_l \subset M_l$ множество нижнетреугольных матриц порядка l с положительными диагональными элементами.

Определение 1.1. Для любого фиксированного числа $k \in \{1, \dots, n\}$ и всякой матрицы $H = (h_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n$ через $(H)_k \in M_k$ обозначим ее ведущую главную подматрицу порядка k [1, с. 30], т. е.

$$(H)_1 = (h_{11}) \in M_1, \\ (H)_2 = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \in M_2, \dots, (H)_n = H \in M_n.$$

Главными ведущими (угловыми) минорами матрицы $H \in M_n$ будем называть [1, с. 30] определители ее ведущих главных подматриц.

Определение 1.2. При каждом $j = \overline{1, n}$ через $S_j \in M_n$ обозначим матрицу, полученную из матрицы $R \in M_n$ заменой первых j строк соответствующими строками матрицы H , т. е. матрицу

$$S_j := R + \sum_{i=1}^j e_i e_i^T (H - R), \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

В дальнейшем будем говорить [2, с. 283], что матрицы $S_j \in M_n$, $j = \overline{1, n}$, являются промежуточными шагами на пути от R к H .

Определение 1.3. Упорядоченную пару матриц (R, H) из множества $M_n \times M_n$ назовем законопослушной [2, с. 283], если справедливо соотношение $\det R > 0$ и при всех $j \in \{1, \dots, n\}$ для матриц S_j , являющихся промежуточными шагами на пути от R к H , выполнены неравенства $\det S_j > 0$.

Пример 1.1. Рассмотрим следующие матрицы третьего порядка

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } H = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Тогда матрицы S_j , являющиеся промежуточными шагами на пути от R к H , равны

$$S_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \\ S_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = H,$$

и для них, как нетрудно заметить, справедливы соотношения

$$\det S_1 = 13 > 0, \det S_2 = 3 > 0, \det S_3 = 8 > 0.$$

Отсюда и из очевидного равенства $\det R = 4 > 0$ следует, что пара матриц (R, H) законопослушна.

Определение 1.4. Квадратные матрицы M и N n -го порядка называются подобными [1, с. 61], если существует такая невырожденная матрица $S \in M_n$, при которой выполняется соотношение

$$M := S^{-1}NS, \quad (1.2)$$

само же преобразование матрицы N с помощью матрицы S называется преобразованием подобия.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ введем в рассмотрение множество \mathcal{H}_n матриц n -го порядка с положительными главными ведущими (угловыми) минорами, т. е. совокупность матриц

$$\mathcal{H}_n := \{H \in M_n : \det(H)_k > 0, k = \overline{1, n}\}.$$

Замечание 1.1. Легко показать, что при преобразовании подобия матриц, принадлежащих множеству \mathcal{H}_n , положительность их главных ведущих миноров, вообще говоря, не сохраняется, т. е. если имеет место включение $N \in \mathcal{H}_n$, то при некоторой невырожденной матрице $S \in M_n$ выполняется соотношение $S^{-1}NS \notin \mathcal{H}_n$.

Действительно, возьмем, например, матрицы второго порядка

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \text{ и } S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда, очевидно, верны оценки $\det(N)_i > 0$, $i = \overline{1, 2}$, устанавливающие включение $N \in \mathcal{H}_2$.

Кроме того, имеет место равенство $\det S = 1$, означающее, что матрица S обратима, причем для обратной к ней матрицы выполняется легко проверяемое соотношение

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся преобразованием подобия матрицы N при помощи матрицы $S \in M_2$:

$$M = S^{-1}NS = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 33 \\ -17 & 28 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\det(M)_1 = -20 < 0$, то, очевидно, что при преобразовании подобия свойство положительности главных ведущих миноров произвольных матриц из \mathcal{H}_n в общем случае не сохраняется.

Замечание 1.2. Легко видеть, что если правая часть соотношения (1.2) есть преобразование подобия матрицы N , то и соотношение TNT^{-1} также является преобразованием подобия этой матрицы при $T = S^{-1}$. Поэтому в дальнейшем будем считать преобразованием подобия именно выражение TNT^{-1} .

Замечание 1.3. Зафиксируем любое число $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Возьмем произвольные матрицы $A \in M_k$, $B \in M_{kn-k}$, $C \in M_{n-kk}$, $D \in M_{n-k}$, при

этом будем предполагать, что справедливо неравенство $\det D \neq 0$. Тогда для матрицы $F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_n$ имеет место [3, с. 159] соотношение

$$\det F = \det(A - BD^{-1}C) \cdot \det D. \quad (1.3)$$

В данном пункте получен критерий инвариантности свойства положительности главных ведущих миноров матриц из множества \mathcal{H}_n при преобразовании подобия с помощью матриц из совокупности \mathcal{R}_n нижнетреугольных матриц с положительными диагональными элементами, т. е. установлена следующая

Теорема 1.1. Пусть $R \in \mathcal{R}_n, H \in \mathcal{H}_n$. Включение $RHR^{-1} \in \mathcal{H}_n$ выполняется тогда и только тогда, когда пара матриц (R, H) законопослушна.

Замечание 1.4. Теорема 1.1 утверждает, что для сохранения положительности всех главных ведущих миноров матрицы $H \in \mathcal{H}_n$ при ее преобразовании подобия, осуществляемом с помощью некоторой матрицы $R \in \mathcal{R}_n$, необходимо и достаточно, чтобы пара матриц (R, H) была законопослушной.

Доказательство. Возьмем произвольные матрицы $H \in \mathcal{H}_n$ и $R \in \mathcal{R}_n$. Из определения множества \mathcal{R}_n очевидным образом следует, что существует матрица R^{-1} . Пусть $M \in M_n$ – матрица, полученная из H преобразованием подобия с помощью матрицы R , т. е. $M := RHR^{-1}$. Зафиксируем любое число $k \in \{1, \dots, n\}$. Заметим, что при $k = n$ главный ведущий минор n -го порядка матрицы M (совпадающий, очевидно, с определителем этой матрицы) положителен, так как справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} \det(M)_n &= \det M = \det(RHR^{-1}) = \\ &= \det R \cdot \det H \cdot (\det R)^{-1} = \det H > 0. \end{aligned}$$

Матрица S_n , являющаяся n -ым промежуточным шагом на пути от R к H , также имеет положительный определитель, поскольку верно равенство $S_n = H$, и значит, включение $S_n \in \mathcal{H}_n$. Отсюда следует, что случай $k = n$ не налагает никаких условий на связь между законопослушностью пары матриц (R, H) и положительностью главных ведущих миноров матрицы M . Поэтому в дальнейших рассуждениях, при изучении вышеуказанной связи, будем считать, что $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Представим матрицу H в блочном виде

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

где $H_{11} \in H_k, H_{12} \in M_{k, n-k}, H_{21} \in M_{n-k, k}, H_{22} \in M_{n-k}$. Легко заметить, что матрица H_{11} является ведущей главной подматрицей k -го порядка матрицы H , т. е. $H_{11} = (H)_k$. Так как выполняется включение $R \in \mathcal{R}_n$, то матрица $R = (r_{ij})_{i,j=1}^n$ является нижнетреугольной, поэтому она представляется в виде блочной нижнетреугольной матрицы

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & O \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

где R_{11} – нижнетреугольная матрица k -го порядка, O – нулевая матрица размерности $k \times (n-k)$, R_{21} – вещественная матрица размерности $(n-k) \times k$, а R_{22} – нижнетреугольная матрица $(n-k)$ -го порядка. Очевидно, что множество диагональных элементов нижнетреугольных матриц R_{11} и R_{22} совпадает с совокупностью диагональных элементов матрицы R , являющихся положительными числами, ввиду включения $R \in \mathcal{R}_n$. Поэтому справедливы соотношения

$$\det R_{11} = \prod_{i=1}^k r_{ii} > 0 \text{ и } \det R_{22} = \prod_{i=k+1}^n r_{ii} > 0, \quad (1.6)$$

т. е. матрицы R_{11} и R_{22} обратимы. Тогда для матрицы $R^{-1} \in M_n$, существующей в силу очевидных соотношений $\det R = \prod_{i=1}^n r_{ii} > 0$, вытекающих из определения матрицы R , выполняется легко проверяемое равенство

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} R_{11}^{-1} & O \\ -R_{22}^{-1}R_{21}R_{11}^{-1} & R_{22}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

На основании определения матрицы M , формул (1.5), (1.4) и (1.7), используя произведение блочных матриц, имеем равенства

$$\begin{aligned} M &= RHR^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} R_{11} & O \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11}^{-1} & O \\ -R_{22}^{-1}R_{21}R_{11}^{-1} & R_{22}^{-1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} R_{11}H_{11} & R_{11}H_{12} \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11}^{-1} & O \\ -R_{22}^{-1}R_{21}R_{11}^{-1} & R_{22}^{-1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} R_{11}H_{11}R_{11}^{-1} - R_{11}H_{12}R_{22}^{-1}R_{21}R_{11}^{-1} & * \\ * & * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(в представленных равенствах блоки-матрицы, не влияющие на ход дальнейших рассуждений, заменены символом *).

Легко заметить, что ведущая главная подматрица k -го порядка матрицы M равна

$$(M)_k = R_{11}H_{11}R_{11}^{-1} - R_{11}H_{12}R_{22}^{-1}R_{21}R_{11}^{-1}.$$

Тогда, отсюда, для главного ведущего (углового) минора k -го порядка этой матрицы на основании элементарных свойств определителя [3, с. 112] имеем цепочку равенств

$$\det(M)_k = \det(R_{11}H_{11}R_{11}^{-1} - R_{11}H_{12}R_{22}^{-1}R_{21}R_{11}^{-1}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \det R_{11} \cdot \det(H_{11} - H_{12}R_{22}^{-1}R_{21}) \cdot \det R_{11}^{-1} = \\
 &= \det R_{11} \cdot (\det R_{11})^{-1} \cdot \det(H_{11} - H_{12}R_{22}^{-1}R_{21}) = \\
 &= \det(H_{11} - H_{12}R_{22}^{-1}R_{21}). \tag{1.8}
 \end{aligned}$$

Для ранее зафиксированного $k \in \{1, \dots, n-1\}$ рассмотрим матрицу S_k , представляющую собой k -ый промежуточный шаг на пути от R к H , т. е. матрицу

$$S_k = R + \sum_{i=1}^k e_i e_i^T (H - R) \in M_n.$$

Очевидно, что для нее справедливо следующее блочное представление

$$S_k = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Из второго неравенства в формуле (1.6) вытекает, что блоки матрицы S_k удовлетворяют условиям замечания 1.3. На основании формулы (1.3) этого замечания найдем определитель вышеуказанной матрицы:

$$\det S_k = \det(H_{11} - H_{12}R_{22}^{-1}R_{21}) \cdot \det R_{22}.$$

Тогда отсюда и из равенств (1.8) вытекает соотношение

$$\det(M)_k = \det S_k / \det R_{22}. \tag{1.10}$$

Ввиду $\det R_{22} > 0$, из формулы (1.10) следует, что положительность главного ведущего минора k -го порядка матрицы $M = RHR^{-1}$ эквивалентна положительности определителя $\det S_k$. В силу произвольности выбора $k \in \{1, \dots, n-1\}$, а также, ввиду замечания, сделанного вначале доказательства этой теоремы для случая $k = n$, такая эквивалентность справедлива при каждом $k \in \{1, \dots, n\}$. Следовательно, положительность всех главных ведущих (угловых) миноров матрицы M эквивалентна положительности определителей каждой из матриц, являющихся промежуточными шагами на пути от R к H , что, в свою очередь, равнозначно законопослушности упорядоченной пары матриц (R, H) . \square

Пример 1.1 (продолжение). Рассмотрим пару (R, H) матриц, представленных в формуле (1.1), которая, как ранее было установлено, является законопослушной, и убедимся, что все угловые миноры матрицы $M = RHR^{-1}$ положительны, тем самым подтвердив справедливость теоремы 1.1.

Нетрудно установить, что для матрицы M выполняется равенство

$$M = \begin{pmatrix} 13/4 & -3/4 & 1/2 \\ 21/4 & -3/4 & 5/2 \\ 41/4 & -11/4 & 11/2 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что главные ведущие (угловые) миноры матрицы M удовлетворяют соотношениям

$$\det(M)_1 = 13/4 > 0,$$

$$\det(M)_2 = 3/2 > 0, \det(M)_3 = 8 > 0.$$

Замечание 1.5. Ввиду очевидного включения $\mathcal{R}_n \subset \mathcal{H}_n$, возникает вопрос о возможности ослабления условий теоремы 1.1 рассмотрением преобразующих матриц не из множества \mathcal{R}_n , а из более широкого – \mathcal{H}_n . Заметим, что для справедливости последней теоремы нижнетреугольный вид у преобразующей матрицы R играет существенную роль. При отказе от нижнетреугольности матрицы $R \in M_n$ (с сохранением положительности всех ее угловых миноров) в общем случае утверждения теоремы 1.1 (как необходимое, так и достаточное условие) становятся неверными. Покажем вначале, что при таких предположениях из законопослушности пары (R, H) , где $H \in \mathcal{H}_n$, в общем случае не следует включение $RHR^{-1} \in \mathcal{H}_n$. Рассмотрим, например, следующие 2×2 -матрицы

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } \hat{H} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$\det(\hat{R})_1 = 2, \det(\hat{R})_2 = \det \hat{R} = 6 > 0$$

$$\text{и } \det(\hat{H})_1 = 3, \det(\hat{H})_2 = \det \hat{H} = 22,$$

т. е. для рассматриваемых матриц выполняются включения $\hat{R}, \hat{H} \in \mathcal{H}_2$. Так как для матриц \hat{S}_i , $i = 1, 2$, – промежуточных шагов на пути от \hat{R} к \hat{H} – имеют место соотношения

$$\det \hat{S}_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 7 > 0 \text{ и } \det \hat{S}_2 = \det \hat{H} = 22 > 0,$$

то с учетом неравенства $\det \hat{R} > 0$ в силу определения 1.3 пара матриц $(\hat{R}, \hat{H}) \in M_2 \times M_2$ законопослушна. Используя преобразование подобия матрицы \hat{H} при помощи невырожденной матрицы \hat{R} , имеем легко проверяемые равенства

$$\begin{aligned}
 \hat{R}\hat{H}\hat{R}^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5/6 & -1/6 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -12 & 14 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Поскольку $\det(\hat{R}\hat{H}\hat{R}^{-1})_1 = -1 < 0$, то, очевидно, что $\hat{R}\hat{H}\hat{R}^{-1} \notin \mathcal{H}_2$, т. е. свойство положительности главных ведущих миноров рассматриваемой матрицы \hat{H} при преобразовании подобия не сохраняется.

Покажем теперь, что при отказе от нижнетреугольности матрицы R и достаточное условие теоремы 1.1 в общем случае оказывается неверным, т. е. из включений $R, H, RHR^{-1} \in \mathcal{H}_n$ не

всегда следует законопослушность пары (R, H) . Для этого рассмотрим следующие квадратные матрицы

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \tilde{H} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что

$$\det(\tilde{R})_1 = 1, \det(\tilde{R})_2 = \det \tilde{R} = 2 > 0$$

$$\text{и } \det(\tilde{H})_1 = 1, \det(\tilde{H})_2 = \det \tilde{H} = 1,$$

т. е. выполняются включения $\tilde{R}, \tilde{H} \in \mathcal{H}_2$. Кроме того, имеют место легко проверяемые равенства

$$\tilde{R}\tilde{H}\tilde{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -3/2 & 7/2 \end{pmatrix},$$

из которых вытекают соотношения

$$\det(\tilde{R}\tilde{H}\tilde{R}^{-1})_1 = 1/2 \text{ и } \det(\tilde{R}\tilde{H}\tilde{R}^{-1}) = \det \tilde{H} = 1,$$

устанавливающие для преобразованной матрицы $\tilde{R}\tilde{H}\tilde{R}^{-1} \in \mathcal{M}_2$ справедливость включения

$$\tilde{R}\tilde{H}\tilde{R}^{-1} \in \mathcal{H}_2.$$

Таким образом, для рассматриваемых нами матриц выполняются соотношения

$$\tilde{R}, \tilde{H}, \tilde{R}\tilde{H}\tilde{R}^{-1} \in \mathcal{H}_2.$$

Легко видеть, что матрица $\tilde{S}_1 \in \mathcal{M}_2$ – промежуточный шаг на пути от \tilde{R} к \tilde{H} – имеет вид $\tilde{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, и поэтому для нее справедливо соотношение $\det \tilde{S}_1 = -1 < 0$, означающее, ввиду определения 1.3, что пара матриц (\tilde{R}, \tilde{H}) не является законопослушной. Таким образом, для взятых нами матриц из включений

$$\tilde{R}, \tilde{H}, \tilde{R}\tilde{H}\tilde{R}^{-1} \in \mathcal{H}_2$$

не следует законопослушность пары матриц (\tilde{R}, \tilde{H}) .

Теорема 1.1 устанавливает критерий инвариантности свойства положительности главных ведущих (угловых) миноров матрицы $H \in \mathcal{H}_n$ при преобразовании подобия с помощью матрицы $R \in \mathcal{R}_n$. Оказывается, что справедливо более сильное утверждение (достаточное условие) сохранения положительной отделенности от нуля главных ведущих (угловых) миноров матрицы $H \in \mathcal{H}_n$ при преобразовании подобия с помощью нижнетреугольной матрицы $R \in \mathcal{R}_n$ с отделенным от нуля определителем, однако при более жестком, чем законопослушность, условии ρ -законопослушности пары матриц (R, H) . Об этом речь пойдет во втором пункте настоящей статьи.

2 Достаточное условие инвариантности свойства положительной отделенности от нуля главных ведущих миноров матрицы при преобразовании подобия

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения. Для любых вещественных чисел $r \geq 1$ и $\rho \in (0, 1]$ рассмотрим множество $\mathcal{R}_n(r, \rho) \subset \mathcal{R}_n$ нижнетреугольных $n \times n$ -матриц R с положительными диагональными элементами, удовлетворяющих неравенствам $\|R - E\| \leq r$ и $\det R \geq \rho$, т. е. множество матриц

$$\mathcal{R}_n(r, \rho) := \{R \in \mathcal{R}_n : \|R - E\| \leq r, \det R \geq \rho\},$$

а также совокупность матриц $\mathcal{H}_n(r, \rho) \subset \mathcal{H}_n \subset \mathcal{M}_n$, для которых справедлива оценка $\|H - E\| \leq r$ и все главные ведущие главные миноры которых не меньше ρ , т. е. совокупность матриц

$$\mathcal{H}_n(r, \rho) := \{H \in \mathcal{M}_n : \|H - E\| \leq r,$$

$$\det(H)_k \geq \rho, k = \overline{1, n}\}.$$

Определение 2.1. Зафиксируем произвольное число $\rho \in (0, 1]$. Пользуясь определением, введенным в работе [2, с. 283], упорядоченную пару матриц (R, H) из множества $\mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n$ будем называть ρ -законопослушной, если справедливо соотношение $\det R \geq \rho$ и при всех $j \in \{1, \dots, n\}$ для матриц S_j , являющихся промежуточными шагами на пути от R к H , выполнены неравенства $\det S_j \geq \rho$.

Теорема 2.1. Пусть $r \geq 1$ и $\rho \in (0, 1]$. Если пара (R, H) матриц, удовлетворяющих включениям $R \in \mathcal{R}_n(r, \rho)$ и $H \in \mathcal{H}_n(r, \rho)$, является ρ -законопослушной, тогда при $r_1 := r(r+1)^n / \rho$ и $\rho_1 := \rho / (r+1)^n$ справедливо соотношение

$$RHR^{-1} \in \mathcal{H}_n(r_1, \rho_1).$$

Доказательство. Зафиксируем любые числа $r \geq 1$ и $\rho \in (0, 1]$. Возьмем произвольные матрицы $H \in \mathcal{H}_n(r, \rho)$ и $R = (r_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{R}_n(r, \rho)$ такие, что упорядоченная пара (R, H) является ρ -законопослушной, и рассмотрим матрицу $M := RHR^{-1} \in \mathcal{M}_n$, полученную из матрицы H преобразованием подобия, осуществляемым с помощью матрицы R . Покажем, что найдутся такие числа $\rho_1 = \rho_1(r, \rho) \in (0, 1]$ и $r_1 = r_1(r, \rho) \geq 1$, при которых для матрицы M выполняется включение $M \in \mathcal{H}_n(r_1, \rho_1)$. Для этого вначале установим справедливость оценки $\|RHR^{-1} - E\| \leq r_1$ при некотором $r_1 = r_1(r, \rho) \geq 1$. Поскольку выполняется включение $R \in \mathcal{R}_n(r, \rho)$, то имеем неравенства

$$\|R - E\| \leq r, \det R \geq \rho. \quad (2.1)$$

Тогда на основании элементарных свойств нормы для величины $\|R\|$ справедлива оценка

$$\|R\| = \|R - E + E\| \leq \|R - E\| + \|E\| \leq r + 1. \quad (2.2)$$

Так как для любой невырожденной матрицы $D \in M_n$ выполняется (см., напр., замечание 1 работы [4]) неравенство $\|D^{-1}\| \leq \|D\|^{n-1} / \det D$, то для матрицы $R \in \mathcal{R}(r, \rho) \subset M_n$, с учетом формул (2.1) и (2.2), установим соотношения

$$\|R^{-1}\| \leq \|R\|^{n-1} / \det R \leq (r+1)^{n-1} / \rho. \quad (2.3)$$

Из включения $H \in \mathcal{H}_n(r, \rho)$ следует оценка $\|H - E\| \leq r$, используя которую, а также формулы (2.2) и (2.3), на основании элементарных свойств нормы для матрицы M получим цепочку соотношений

$$\begin{aligned} \|M - E\| &= \|RHR^{-1} - E\| \leq \|R\| \cdot \|H - E\| \cdot \|R^{-1}\| \leq \\ &\leq (r+1) \cdot r \cdot (r+1)^{n-1} / \rho = r(r+1)^n / \rho =: r_1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

При этом, ввиду включений $\rho \in (0, 1]$ и $r \in [1, +\infty)$, для величины r_1 выполняется оценка $r_1 \geq 1$.

Теперь рассмотрим главные ведущие (угловые) миноры $\det(M)_k$, $k = \overline{1, n}$, матрицы M и установим справедливость неравенств $\det(M)_k \geq \rho_1$ при некотором числе $\rho_1 = \rho_1(r, \rho) \in (0, 1]$. Пусть $k = n$, тогда с учетом включения $H \in \mathcal{H}(r, \rho)$, очевидно, справедливы соотношения $\det(M)_k = \det(M)_n = \det M = \det(RHR^{-1}) = \det H \geq \rho$, т. е.

$$\det(M)_n \geq \rho. \quad (2.5)$$

Возьмем теперь произвольное число $k \in \{1, \dots, n-1\}$ и рассмотрим матрицу $S_k \in M_n$, являющуюся k -ым промежуточным шагом на пути от R к H . Ввиду ρ -законопослушности матриц R и H , для матрицы S_k справедливы оценка $\det S_k \geq \rho$ и, как легко заметить, блочное представление в виде (1.9), где матрица R_{22} – нижнетреугольная, диагональные элементы которой совпадают с элементами r_{ii} , $i = \overline{k+1, n}$. Тогда на основании верных включений $H \in \mathcal{H}_n(r, \rho) \subset \mathcal{H}_n$ и $R \in \mathcal{R}_n(r, \rho) \subset \mathcal{R}_n$, используя рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве теоремы 1.1 при выводе формулы (1.10), для главного ведущего (углового) минора k -го порядка матрицы M получим оценку $\det(M)_k = \det S_k / \det R_{22} \geq \rho / \det R_{22}$. Поскольку матрица R_{22} – нижнетреугольная с диагональными элементами r_{ii} , $i = \overline{k+1, n}$, то ее определитель равен $\det R_{22} = \prod_{i=k+1}^n r_{ii}$, и, поэтому для $\det(M)_k$ справедливо неравенство

$$\det(M)_k \geq \rho / \prod_{i=k+1}^n r_{ii}, \quad (2.6)$$

В силу включения $R \in \mathcal{R}(r, \rho)$, матрица R имеет положительные диагональные элементы. Тогда на основании элементарных свойств нормы и формулы (2.2) имеют место неравенства $r_{ii} = |r_{ii}| \leq \|R\| \leq (r+1)$. Отсюда и из формулы (2.6) следует оценка

$$\det(M)_k \geq \rho / (r+1)^{n-k-1} \geq \rho / (r+1)^n.$$

Ввиду произвольности выбора $k \in \{1, \dots, n-1\}$, такое неравенство выполняется при всех $k = \overline{1, n-1}$. Тогда, полагая

$$\rho_1 := \min\{\rho, \rho / (r+1)^n\} = \rho / (r+1)^n,$$

из последней оценки и формулы (2.5) получим справедливое при каждом $k = \overline{1, n}$ соотношение

$$\det(M)_k \geq \rho_1, \quad (2.7)$$

в котором $\rho_1 = \rho_1(r, \rho) \in (0, 1]$, ввиду верных оценок $r \geq 1$ и $0 < \rho \leq 1$. Таким образом, в силу формулы (2.7), а также неравенств (2.4) для матрицы $M = RHR^{-1} \in M_n$, выполняется требуемое включение $M \in \mathcal{H}_n(r_1, \rho_1)$ с числами

$$r_1 = r(r+1)^n / \rho \geq 1 \text{ и } \rho_1 = \rho / (r+1)^n \in (0, 1]. \quad \square$$

Пример 2.1. Положим $n = 3$, $r = 4$ и $\rho = 1/2$ и рассмотрим матрицы

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно установить, что спектральные нормы этих матриц равны $\|R\| = 3$ и $\|H\| = 3$, т. е. выполняются оценки

$$\|R - E\| \leq 4 \text{ и } \|H - E\| \leq 4.$$

Кроме того, для ведущих главных ведущих миноров матрицы H имеют место соотношения

$$\det(H)_1 = 2, \quad \det(H)_2 = 2, \quad \det(H)_3 = \det H = 3,$$

а для определителя нижнетреугольной матрицы R с положительными диагональными элементами справедливо равенство $\det R = 12$. Таким образом, выполняются включения

$$H \in \mathcal{H}_3(4, 1/2) \text{ и } R \in \mathcal{R}_3(4, 1/2).$$

При $k = \overline{1, 3}$ рассмотрим матрицы S_k , являющиеся k -ыми промежуточными шагами на пути от R к H :

$$S_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для их определителей, ввиду выбранной величины ρ , справедливы соотношения

$$\det S_1 = 12 \geq \rho,$$

$$\det S_2 = 6 \geq \rho,$$

$$\det S_3 = \det H = 3 \geq \rho,$$

устанавливающие, что пара (R, H) является ρ -законопослушной.

Для чисел $n = 3$, $r = 4$ и $\rho = 1/2$ найдем величины

$$r_1 = r(r+1)^n / \rho = 4 \cdot 5^3 / (1/2) = 1000 \geq 1$$

$$\text{и } \rho_1 = \rho / (r+1)^n = (1/2) / 5^3 = 1/250 \in (0,1].$$

Нетрудно показать, что матрица M , полученная при преобразовании подобия матрицы H с помощью R , имеет вид

$$M = RHR^{-1} = \begin{pmatrix} 5/2 & 0 & 1/2 \\ 1+\sqrt{2} & 1 & 1/6-\sqrt{2} \\ 3/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Тогда для нее, в силу определения числа ρ_1 , как легко видеть, справедливы соотношения

$$\det(M)_1 = 5/2 \geq \rho_1,$$

$$\det(M)_2 = 5/2 \geq \rho_1, \quad (2.8)$$

$$\det(M)_3 = \det H = 3 \geq \rho_1.$$

Оценим сверху спектральную норму матрицы $(M - E) \in M_3$, используя неравенство [1, с. 378] между максимальной строчной и спектральной нормами матрицы. Имеем цепочку соотношений

$$\|M - E\| \leq \sqrt{3} \max\{2, 2\sqrt{2} + 5/6, 2\} =$$

$$= \sqrt{3}(2\sqrt{2} + 5/6) \leq (2 \cdot 3 + 2) = 8 \leq 1000,$$

т. е. $\|M - E\| \leq r_1$ в силу определения r_1 . Из последней оценки и неравенств (2.8) следует включение

$$RHR^{-1} \in \mathcal{H}_3(r_1, \rho_1) = \mathcal{H}_3(1000, 1/250),$$

подтверждающее справедливость теоремы 2.1 настоящей работы.

Заключение

В работе установлена инвариантность свойства положительной отделенности от нуля главных ведущих миноров квадратной матрицы при ее преобразовании подобия с помощью нижнетреугольной матрицы с положительными диагональными элементами. Все результаты являются новыми, ранее неизвестными. Предложенные в работе результаты (теоремы 1.1 и 2.1) могут быть полезны не только специалистам по линейной алгебре и теории матриц. Они также, в дальнейшем, могут найти свое применение в математической теории управления и теории устойчивости динамических объектов при решении задач управления асимптотическими характеристиками линейных дифференциальных систем [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
2. Макаров, Е.К. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем / Е.К. Макаров, С.Н. Попова. – Минск: Беларуская навука, 2012. – 407 с.
3. Бортаковский, А.С. Линейная алгебра в примерах и задачах / А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев. – М.: Высш. шк., 2005. – 591 с.
4. Макаров, Е.К. О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем / Е.К. Макаров, С.Н. Попова // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 97–106.

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция-2020» (подпрограмма 1, задание 1.2.01).

Поступила в редакцию 16.01.19.

О КОНЕЧНЫХ ПОЛУ- π -СПЕЦИАЛЬНЫХ ГРУППАХ

Н.С. Косенок¹, В.М. Селькин², В.Н. Мыщик², В.Н. Рыжик³

¹Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации

²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

³Брянский государственный аграрный университет

ON FINITE SEMI- π -SPECIAL GROUPS

N.S. Kosenok¹, V.M. Selkin², V.N. Mitsik², V.N. Rizhik³

¹Belarusian Trade and Economic University of Consumer Cooperatives

²F. Scorina Gomel State University

³Bryansk State Agrarian University

Конечная группа G называется π -специальной, если $G = O_{p_1}(G) \times \dots \times O_{p_n}(G) \times O_{\pi}(G)$, где $\pi = \{p_1, \dots, p_n\}$. Мы говорим, что конечная группа G является полу- π -специальной, если нормализатор любой ненормальной π -специальной подгруппы группы G является π -специальной. Доказано, что если G не является π -специальной группой, но $N_G(A)$ является π -специальной для каждой подгруппы A в G такой, что A является либо π' -группой, либо p -группой для некоторой $p \in \pi$, тогда справедливы следующие утверждения: (i) $G/F(G)$ является π -специальной группой. Следовательно, G имеет холлову π' -подгруппу H и разрешимую холлову π -подгруппу E . (ii) Если G не является p -замкнутой для каждого $p \in \pi$, то: (1) H нормальна в G и E нильпотентна. (2) $O_{p_1}(G) \times \dots \times O_{p_n}(G) \times H$ является максимальной π -специальной подгруппой в G и каждая минимальная нормальная подгруппа группы G содержится в $F(G)$.

Ключевые слова: конечная группа, π -специальная группа, π -разрешимая группа, силова подгруппа, холлова подгруппа.

A finite group G is called π -special if $G = O_{p_1}(G) \times \dots \times O_{p_n}(G) \times O_{\pi}(G)$, where $\pi = \{p_1, \dots, p_n\}$. We say that a finite group G is semi- π -special if the normalizer of every non-normal π -special subgroup of G is π -special. We prove that if G is not π -special but $N_G(A)$ is π -special for every subgroup A of G such that A is either a π' -group or a p -group for some $p \in \pi$, then the following statements hold: (i) $G/F(G)$ is π -special. Hence G has a Hall π' -subgroup H and a soluble Hall π -subgroup E . (ii) If G is not p -closed for each $p \in \pi$, then: (1) H is normal in G and E is nilpotent. (2) $O_{p_1}(G) \times \dots \times O_{p_n}(G) \times H$ is a maximal π -special subgroup of G and every minimal normal subgroup of G is contained in $F(G)$.

Keywords: finite group, π -soluble group, π -special group, Sylow subgroup, Hall subgroup.

Introduction

Throughout this paper, all groups are finite and G always denotes a finite group. Moreover, \mathbb{P} is the set of all primes, $p \in \pi \subseteq \mathbb{P}$ and $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. If n is an integer, the symbol $\pi(n)$ denotes the set of all primes dividing n ; as usual, $\pi(G) = \pi(|G|)$, the set of all primes dividing the order of G . Throughout this paper, all groups

A group G is called π -special [1]–[3] if

$$G = O_{p_1}(G) \times \dots \times O_{p_n}(G) \times O_{\pi}(G),$$

where $\pi = \{p_1, \dots, p_n\}$.

Recall that the group G is called semi-nilpotent [4] if the normalizer of every non-normal nilpotent subgroup of G is nilpotent. We say, by analogy with it, that G is semi- π -special if the normalizer of every non-normal π -special subgroup of G is π -special.

Remark 0.1. We show that G is semi- π -special if and only if the normalizer of every non-normal

subgroup A of G which is either a p -group for some $p \in \pi$ or a π' -group is π -special. Since every such a subgroup is π -special, it is enough to show that if the normalizer of every non-normal subgroup A of G which is either a p -group for some $p \in \pi$ or a π' -group is π -special, then G is semi- π -special.

Let H be any non-normal π -special subgroup of G . Then

$$H = O_{p_1}(H) \times \dots \times O_{p_n}(H) \times O_{\pi'}(H),$$

where $\pi = \{p_1, \dots, p_n\}$, and

$$N_G(H) =$$

$$= N_G(O_{\pi'}(H)) \cap N_G(O_{p_1}(H)) \cap \dots \cap N_G(O_{p_n}(H)).$$

Moreover, since H is non-normal in G , at least one of the subgroups $O_{\pi'}(H), O_{p_1}(H), \dots, O_{p_n}(H)$ is not normal in G . But then at least one of the subgroups $N_G(O_{\pi'}(H)), N_G(O_{p_1}(H)), \dots, N_G(O_{p_n}(H))$ is π -special and so $N_G(H)$ is π -special.

The structure of semi-nilpotent groups is well-known (see [4] or [5, Chapter 4, Section 7]). In this paper we prove the following

Theorem 0.2. *Suppose that G is not π -special but $N_G(A)$ is π -special for every subgroup A of G such that A is either a π' -group or a p -group for some $p \in \pi$. Then the following statements hold:*

- (i) $G/F(G)$ is π -special. Hence G has a Hall π' -subgroup H and a soluble Hall π -subgroup E .
- (ii) If G is not p -closed for each $p \in \pi$, then:
 - (1) H is normal in G and E is nilpotent.
 - (2) $O_{p_1}(G) \times \dots \times O_{p_n}(G) \times H$ is a maximal π -special subgroup of G and every minimal normal subgroup of G is contained in $F(G)$.

In the case when $\pi = \mathbb{P}$ we get from Theorem 0.2 the following known result.

Corollary 1.3 (Sah [4]). *If G is semi-nilpotent, then $G/F(G)$ is nilpotent.*

In the case when $\pi = \{p\}$ we get from Theorem 1.2 the following known result.

Corollary 0.4 (Adarchenko, Blisnets, Rizhik [6]). *Suppose that $N_G(A)$ is p -decomposable for every subgroup A of G such that either A is either a p -group or a p' -group. If a Sylow p -subgroup P of G is not normal in G , then the following conditions hold:*

- (i) G is p -soluble and G has a normal Hall p' -subgroup H .
- (ii) $G/F(G)$ is p -decomposable.

1 Preliminaries

The first lemma can be proved by direct calculations.

Lemma 1.1. *Let \mathfrak{F} be the class of all π -special groups. Then:*

- (1) If $G \in \mathfrak{F}$, then $G/N \in \mathfrak{F}$ for every normal subgroup N of G .
- (2) If $G \in \mathfrak{F}$, then $E \in \mathfrak{F}$ for every subgroup E of G .
- (3) If $G/N, G/L \in \mathfrak{F}$, then $G/N \cap L \in \mathfrak{F}$.
- (4) If $G/\Phi \in \mathfrak{F}$, then $G \in \mathfrak{F}$.

Lemma 1.2. *Suppose that a group G is π -soluble and let P_i be a Sylow p_i -subgroup of G for all $p \in \pi = \{p_1, \dots, p_n\}$ and C a Hall π' -subgroup of G . If $N_G(C)$ and $N_G(P_i)$ are π -special for all i , then G is π -special.*

Proof. Let R be a minimal normal subgroup of G . Then R is either a p -group for some prime $p \in \pi$ or a π' -group since G is π -soluble by hypothesis. Moreover, $P_i R/R$ is a Sylow p_i -subgroup of G for all $p \in \pi$, CR/R is a Hall π' -subgroup of G/R and

$$N_G(P_i R/R) = N_G(P_i)R/R \cong N_G(P_i)/(N_G(P_i) \cap P_i)$$

and

$$N_G(CR/R) = N_G(C)R/R \cong N_G(C)/(N_G(C) \cap C)$$

are π -special by Lemma 1.1 (1). Hence the hypothesis holds for G/R . Therefore

$$G/R = O_{\pi'}(G/R) \times O_{p_1}(G/R) \times \dots \times O_{p_n}(G/R)$$

is π -special by induction.

Suppose that R is a p_i -group for some $p_i \in \pi$.

Then

$$O_{p_i}(G/R) = O_{p_i}(G)/R = P_i/R$$

is normal in G/R , so P_i is normal in G . But then $G = N_G(P_i)$ is π -special by hypothesis. Similarly one can show that $G = N_G(C)$ is π -special in the case when R is a π' -group. \square

Lemma 1.3 (See [8, Chapter V, Theorem 26.1]). *If G is a Schmidt group, then $G = P \rtimes Q$, where $P = G^{\sigma} = G'$ is a Sylow p -subgroup of G and Q is a Sylow q -subgroup of G for some primes $p \neq q$.*

Lemma 2.4. *If G is a minimal non- π -special group, then G is a Schmidt group.*

Proof. Assume that this is false and let G be a counterexample of minimal order. Then for some $p \in \pi$ we have $p \in \pi(G)$. Moreover, G is p -nilpotent for all $p \in \pi$. Indeed, if G is not p -nilpotent, then G is a minimal non- p -nilpotent group and so G is a Schmidt group by [9, IV, Satz 5.4], contrary to our assumption on G . Thus $G = V \rtimes H$, where V is a normal Hall π' -subgroup of G and H is a nilpotent Hall π -subgroup of G . Moreover, $|\pi(G)| > 2$ since otherwise, every proper subgroup of G is nilpotent and so G is a Schmidt group.

Now let $q \in \pi(V)$, $p \in \pi(H)$ and let Q be a Sylow q -subgroup of V and P the Sylow p -subgroup of H . Then $G = VN_G(Q)$ by the Frattini argument, so for some $x \in G$ we have $P \leq N_G(Q^x)$. But then $Q^x \rtimes P = Q^x \times P$ since $2 = |\pi(Q^x \rtimes P)| < |\pi(G)|$ and every proper subgroup of G is π -special. Therefore $|G : C_G(P)|$ is a q' -number for every $q \in \pi(V)$. Hence $G = V \times H$ is π -special, a contradiction. \square

2 Proof of Theorem 0.2

Assume that this theorem is false and let G be a counter example of minimal order. Then G is not π -special. Hence $D := G^{\mathfrak{F}} \neq 1$, where \mathfrak{F} is the class of all π -special groups.

(1) *Every proper subgroup E of G is semi- π -special. Hence Statement (i) holds for E .*

Let V be a non-normal π -special subgroup of E . Then V is not normal in G , so $N_G(V)$ is π -special by hypothesis. Hence $N_E(V) = N_G(V) \cap E$ is π -special by Lemma 1.1 (2). Hence E is semi- π -special. Hence we have (1) by the choice of G .

(2) Every proper quotient G/N of G (that is, $N \neq 1$) is semi- π -special. Hence Statement (i) holds for G/N .

In view of Remark 0.1 and the choice of G , it is enough to show that if U/N is any non-normal subgroup of G/N such that U/N is either a p -group for some prime $p \in \pi$ or a π' -group, then $N_{G/N}(U/N)$ is π -special. We can assume without loss of generality that N is a minimal normal subgroup of G .

Since U/N is not normal in

$$U/N < G/NU/N < G/N$$

and U is not normal in G . Hence U is a proper subgroup of G , which implies that U is π -soluble by Claim (1). Hence N is either a p -group for some prime $p \in \pi$ or a p' -group. First suppose that N is a π' -group.

If U/N is a π' -group, then U is a π' -group and so $N_G(U)$ is π -special by hypothesis. Hence

$N_{G/N}(U/N) = N_G(U)/N \cong N_G(U)/(N_G(U) \cap N)$ is π -special by Lemma 1.1 (1). Now suppose that U/N is a p -group for some $p \in \pi$. Then N has a complement V in U and every two complements to N in U are conjugate in U since U is π -soluble. Therefore $N_G(U) = N_G(NV) = NN_G(V)$. Since $U = NV$ is not normal in G , V is not normal in G and so $N_G(V)$ is π -special. Hence $N_{G/N}(U/N) = N_G(U)/N$ is π -special.

(3) If A is a minimal non- π -special subgroup of G , then $A = R \rtimes Q$, where $R = A^{\pi_1} = A'$ is a Sylow r -subgroup of A and Q is a Sylow q -subgroup of A for some different primes r and q . Moreover, R is normal in G and so $R \leq O_r(G)$.

The first assertion of the claim directly follows from Lemmas 1.3. Since A is not π -special, R is normal in G by hypothesis. Therefore $R \leq O_r(G)$.

(4) G is π -soluble. Hence G has a Hall π' -subgroup H and a soluble Hall π -subgroup E .

First we show that G is π -soluble. Suppose that this is false. Then G is a non-abelian simple group since every proper section of G is π -soluble by Claims (1) and (2). Moreover, G is not π -special and so it has a minimal non- π -special subgroup A . Claim (3) implies that for some prime r and for some Sylow r -subgroup R of A we have $1 < R \leq O_r(G) < G$. This contradiction shows that G is π -soluble. Hence G has a Hall π' -subgroup H and a soluble Hall π -subgroup E .

(5) Statement (i) holds for G .

In view of Lemma 1.1 (1), it is enough to show that $D = G^{\mathfrak{S}}$ is nilpotent. Assume that this is false. Then $D \neq 1$, and for any minimal normal subgroup R of G we have that

$$(G/R)^{\mathfrak{F}} = RD/R \cong D/D \cap R$$

is nilpotent by Claim (2) and Lemma 1.1 (1). Moreover, R is the unique minimal normal subgroup of G , $R \leq D$ and $R \not\leq \Phi(G)$ by Lemma 1.1 (3, 4).

Since G is not π -special, Claim (3) and [7, Ch. A, 15.6] imply that $R = C_G(R) = O_r(G) = F(G)$ for some prime r .

Then $R < D$ and $G = R \rtimes M$, where M is not π -special, so M has a minimal non- π -special subgroup A . Claim (3) implies that for some prime q dividing $|A|$ and for a Sylow q -subgroup Q of A we have $1 < Q \leq F(G) \cap M = R \cap M = 1$. This contradiction completes the proof of (5).

In what follows, we assume that G is not p -closed for each $p \in \pi$.

(6) A Hall π' -subgroup H of G is normal in G and a Hall π -subgroup E of G is nilpotent. Hence G/H is nilpotent.

Since P_i is not normal in G for all i by hypothesis, $N_G(P_i)$ is π -special for all i . Therefore, since G is not π -special, Lemma 1.2 implies that H is normal in G . By hypothesis, $N_E(P)$ is π -special for every Sylow p -subgroup of E and every $p \in \pi$ by our assumption of G . Therefore E is nilpotent. Hence we have (6).

(7) $H \times O_{p_1}(G) \times \dots \times O_{p_n}(G) = H \times O_{p_1}(V) \times \dots \times O_{p_n}(V)$ for every subgroup V of G containing $H \times O_{p_1}(G) \times \dots \times O_{p_n}(G)$.

Hence $O_{p_1}(G) \times \dots \times O_{p_n}(G) \times H$ is a maximal π -special subgroup of G .

Indeed, since $H = O_{\pi'}(G)$ and $G/H \cong E$ is nilpotent by Claim (6), every subgroup of G containing $H \times O_{p_1}(G) \times \dots \times O_{p_n}(G)$ is subnormal in G .

Therefore V is subnormal in G , so

$$\begin{aligned} O_{\pi'}(G) \times O_{p_1}(G) \times \dots \times O_{p_n}(G) &= \\ &= H \times O_{p_1}(G) \times \dots \times O_{p_n}(G) \leq \\ &\leq O_{\pi'}(V) \times O_{p_1}(V) \times \dots \times O_{p_n}(V) \leq \\ &\leq O_{\pi'}(G) \times O_{p_1}(G) \times \dots \times O_{p_n}(G). \end{aligned}$$

Thus we have (7).

(8) Every minimal normal subgroup of G is contained in $F(G)$.

Let R be any minimal normal subgroup of G . Assume that $R \not\leq F(G)$. From Claim (5) it follows that $D = G^{\mathfrak{S}} \leq F(G)$, so $R \not\leq D$ and hence from the G -isomorphism $RD/D \cong R$ it follows that R is a non-abelian π' -group. Let R_p be a Sylow p -subgroup of R , where $p \in \pi(R)$. Then R_p is not normal in G and so $G = RN_G(R_p)$ by the Frattini argument. But then

$$G/R \cong N_G(R_p)/(N_G(R_p) \cap R)$$

is π -special and hence $R = D$. This contradiction completes the proof of Claim (8)

Final contradiction. From Claims (5)–(8) it follows that the conclusion of the theorem holds for G , contrary to the choice of G . This final contradiction completes the proof of the theorem. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Skiba, A.N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – № 436. – P. 1–16.
2. Skiba, A.N. On some results in the theory of finite partially soluble groups / A.N. Skiba // Comm. Math. Stat. – 2016. – № 4. – P. 281–309.
3. Skiba, A.N. Some characterizations of finite σ -soluble $P\sigma T$ -groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – № 495. – P. 114–129.

4. Sah, Chih-Han. On a generalization of finite nilpotent groups / Chih-Han Sah // Math. Z. – 1957. – Vol. 68, №1. – P. 189–204.

5. *Between Nilpotent and Solvable* / M. Weinstein ed. – Polygonal Publishing House, 1982.

6. Adarchenko, N.M. On finite semi- p -decomposable groups / N.M. Adarchenko, I.G. Blistets, V.N. Rizhik // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2018. – № 1 (34). – P. 41–44.

7. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1992.

8. Shemetkov, L.A. Formations of finite groups / L.A. Shemetkov. – Nauka, Main Editorial Board for Physical and Mathematical Literature, Moscow, 1978.

9. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1967.

Поступила в редакцию 12.04.19.

УДК 517.538.5+517.538.6

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА – ПАДЕ ВТОРОГО РОДА

А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко, Д.А. Волков

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF TYPE II HERMITE – PADÉ POLYNOMIALS

A.P. Starovoitov, N.V. Ryabchenko, D.A. Volkov

F. Scorina Gomel State University

В работе введены новые понятия: вполне нормальный индекс и вполне совершенная система функций. С помощью этих понятий сформулирован и доказан критерий единственности, получены явные детерминантные представления многочленов Эрмита – Паде 2-го рода для произвольной системы степенных рядов. Полученные результаты дополняют и обобщают хорошо известные результаты в теории аппроксимаций Эрмита – Паде.

Ключевые слова: многочлены Эрмита – Паде, нормальный индекс, совершенная система, определитель Адамара, определитель Ганкеля.

New concepts are introduced in the work. They are quite normal index and a quite perfect system of functions. Using these concepts, a uniqueness criterion was formulated and proved, explicit determinant representations of type II Hermite – Padé polynomials for an arbitrary system of power series were obtained. The results obtained complement and generalize the well-known result in the theory of Hermite – Padé approximations.

Keywords: Hermite – Padé polynomials, normal index, perfect system, Hadamard determinant, Hankel determinant.

1 Постановка задачи. Основные определения

Пусть $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ – набор, состоящий из k формальных степенных рядов

$$f_j(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^j}{z^{i+1}}, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (1.1)$$

с комплексными коэффициентами.

Множество k -мерных мультииндексов $n = (n_1, n_2, \dots, n_k)$, т. е. упорядоченных k целых неотрицательных чисел, обозначим \mathbb{Z}_+^k . Порядок мультииндекса $n = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ – это сумма $|n| := n_1 + n_2 + \dots + n_k$. Зафиксируем мультииндекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ и рассмотрим следующую задачу Эрмита – Паде [1; гл. 4, §3]:

Задача ЭП. Найти тождественно не равный нулю многочлен $Q = Q_n$, $\deg Q \leq |n|$, такой, что для некоторых многочленов

$$P_1 = P_n^1, \dots, P_k = P_n^k$$

выполняются равенства

$$R_n^j(z) = Q(z)f_j(z) - P_j(z) = \frac{c_j}{z^{n_j+1}} + \dots, \quad (1.2)$$

$$j = 1, 2, \dots, k.$$

Известно [1], [2], что решение поставленной задачи существует и неединственно. В частности, многочлены Q_n и P_n^j находятся с точностью до мультипликативного множителя: если пара

(Q, P) , где $P = (P_1, \dots, P_k)$ удовлетворяют необходимым требованиям, то, умножая многочлены Q и P_j на любое отличное от нуля комплексное число λ , получим новую пару $(\lambda Q, \lambda P)$, удовлетворяющую поставленным условиям. Эта неединственность может быть и более существенной. Рассмотрим следующий пример.

Пример 1.1. Пусть $k = 2, n = (1, 1)$, а

$$f_1(z) = -f_2(z) = \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \dots$$

Тогда решения задачи представимы в виде $(\lambda Q_2, \lambda P)$, $P = (P_1, P_2)$, где

$$Q_2(z) = (a + bz) - \frac{1}{4}(a + 2b)z^2,$$

$$P_1(z) = -P_2(z) = -\frac{1}{2}(a + \frac{1}{2}(a + 2b)z),$$

а a и b любые действительные числа.

Определение 1.1. Если пара (Q, P) , где $P = (P_1, \dots, P_k)$, является решением задачи Эрмита – Паде с индексом $n \in \mathbb{Z}_+^k$, то многочлены Q, P_1, \dots, P_k называют многочленами Эрмита – Паде 2-го рода для набора (системы) f формальных степенных рядов (1.1).

Центральными в теории таких многочленов являются понятия нормального индекса n и совершенной системы f [1; гл. 4, §3].

Определение 1.2. Индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ называется нормальным для f , если для любого решения (Q, P) с этим индексом $\deg Q = |n|$.

Определение 1.3. Система f называется совершенной, если все индексы $n \in \mathbb{Z}_+^k$ являются нормальными для f .

Хорошо известно (см., например, [1]), что нормальность индекса n является достаточным условием того, что все решения поставленной задачи с этим индексом находятся с точностью до мультипликативного множителя. Поэтому, если индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ является нормальным, то однозначно определяется вектор

$$\pi_n = \left(\frac{P_1}{Q}, \frac{P_2}{Q}, \dots, \frac{P_k}{Q} \right),$$

компоненты которого являются рациональными функциями и называются *диагональными аппроксимациями Эрмита – Паде 2-го рода* (другое название – *совместные диагональные аппроксимации Паде*) для системы f формальных степенных рядов (1.1).

При $k=1$ индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ является нормальным тогда и только тогда [1; гл. 2, §3, утверждение 3.2], когда определитель Ганкеля степенного ряда $f_1(z)$

$$H_n = \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \dots & f_{n-1}^1 \\ f_1^1 & f_2^1 & \dots & f_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-1}^1 & f_n^1 & \dots & f_{2n-2}^1 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1.3)$$

Следующий пример показывает, что уже при $k=1$ нормальность индекса n не является необходимым условием того, чтобы все решения поставленной задачи с этим индексом находились с точностью до мультипликативного множителя.

Пример 1.2. Пусть $k=1, n=2$, а

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + \frac{8}{z^4} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \frac{16}{z^4} + \frac{16}{z^5} + \dots$$

Тогда все решения задачи имеют вид:

$$Q_2(z) = \lambda(z-2), \quad P_2^1 = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda \neq 0,$$

т. е. находятся с точностью до мультипликативного множителя, но при этом индекс $n=2$ не является нормальным: $\deg Q_2 \neq 2, H_2 = 0$.

Естественно возникает задача нахождения необходимых и достаточных условий на индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ и систему f , определяемую равенствами (1.1), при которых все решения задачи Эрмита – Паде с этим индексом находятся с точностью до мультипликативного множителя. При выполнении таких условий принято говорить, что задача Эрмита – Паде имеет единственное решение. Такая постановка вполне оправдана уже тем, что во многих конкретных случаях единственности решения задачи (например, когда функции (1.1) являются марковскими) сами решения

удовлетворяют некоторым условиям ортогональности и их принято называть [1] *полиортогональными* (k -ортогональными) *многочленами 2-го рода*.

2 Вполне совершенные системы

Компонеты вектора $f = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ являются формальными степенными рядами. Уже по этой причине поставленная задача является чисто алгебраической и, следовательно, имеет алгебраическое решение. Это решение будет получено нами в терминах теории линейных алгебраических уравнений, которые определяются через коэффициенты степенных рядов (1.1).

Введем необходимые обозначения. Для мультииндекса $n = (n_1, \dots, n_k)$ и фиксированного $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, в предположении, что $n_j \neq 0$, рассмотрим матрицы-строки порядка $1 \times (|n| + 1)$

$$F_i^j = (f_{i-1}^j \quad f_i^j \quad f_{i+1}^j \quad \dots \quad f_{|n|+i-2}^j \quad f_{|n|+i-1}^j),$$

$$i = 1, \dots, n_j;$$

функциональные матрицы-строки $1 \times (|n| + 1)$

$$E(z) = (1 \quad z \quad z^2 \quad \dots \quad z^{|n|-1} \quad z^{|n|}),$$

$$E_j(z) =$$

$$= \left(0 \quad f_0^j \quad f_0^j z + f_1^j \quad \dots \quad \sum_{p=0}^{|n|-2} f_p^j z^{|n|-p-2} \quad \sum_{p=0}^{|n|-1} f_p^j z^{|n|-p-1} \right);$$

матрицу порядка $n_j \times (|n| + 1)$

$$F^j = [F_1^j \quad F_2^j \quad \dots \quad F_{n_j}^j]^T = \begin{bmatrix} F_1^j \\ F_2^j \\ \vdots \\ F_{n_j}^j \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

и матрицу порядка $|n| \times (|n| + 1)$

$$F_n = [F^1 \quad F^2 \quad \dots \quad F^k]^T,$$

где C^T является матрицей, транспонированной к матрице C (транспонирование определяется также, как и в (2.1)).

Рассмотрим также определители $(|n| + 1)$ -го порядка

$$d_{n,i}^j = \det \left[F^1 \quad F^2 \quad \dots \quad F^k \quad F_{i+n_j}^j \right]^T, \quad i = 1, 2, \dots$$

Определение 2.1. Индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ назовем *вполне нормальным* для f , если ранг матрицы F_n равен $|n|$.

В примере 1.1 индекс $n = (1, 1)$ не является ни нормальным, ни вполне нормальным, а в примере 1.2 индекс $n = 2$ не является нормальным, но является вполне нормальным относительно рассматриваемых в этих примерах систем функций.

Определение 2.2. Систему f назовем *вполне совершенной*, если все индексы $n \in \mathbb{Z}_+^k$ являются *вполне нормальными* для f .

Далее будет доказано, что любая совершенная система f является и вполне совершенной системой. Пример 1.2 показывает, что обратное утверждение, вообще говоря, может быть неверным. Примеры некоторых совершенных систем имеются в [1].

3 Критерий единственности. Детерминантные представления многочленов Эрмита – Паде

В этом разделе сформулируем и докажем основную теорему данной работы.

Теорема 3.1. Для того, чтобы для фиксированного мультииндекса $n \in \mathbb{Z}_+^k$ задача Эрмита – Паде имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы индекс n был вполне нормальным, т. е. $\text{rang}F_n = |n|$.

В случае, если мультииндекс n является вполне нормальным при определенном выборе мультипликативного множителя, справедливы детерминантные представления:

$$Q_n(z) = \det \begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \dots & F^k & E(z) \end{bmatrix}^T, \quad (3.1)$$

$$P_n^j(z) = \det \begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \dots & F^k & E_j(z) \end{bmatrix}^T, \quad (3.2)$$

$$R_n^j(z) = Q_n(z)f_j(z) - P_n^j(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{n,i}^j}{z^{n_j+i}}. \quad (3.3)$$

Доказательство. Пусть

$$Q_n(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_{|n|} z^{|n|}.$$

Запишем в явном виде систему уравнений для определения коэффициентов $b_0, b_1, \dots, b_{|n|}$:

$$\begin{cases} f_0^1 b_0 + f_1^1 b_1 + \dots + f_{|n|}^1 b_{|n|} = 0; \\ f_1^1 b_0 + f_2^1 b_1 + \dots + f_{|n|+1}^1 b_{|n|} = 0; \\ \dots \\ f_{n_1-1}^1 b_0 + f_{n_1}^1 b_1 + \dots + f_{|n|+n_1-1}^1 b_{|n|} = 0; \\ \dots \\ f_0^k b_0 + f_1^k b_1 + \dots + f_{|n|}^k b_{|n|} = 0; \\ f_1^k b_0 + f_2^k b_1 + \dots + f_{|n|+1}^k b_{|n|} = 0; \\ \dots \\ f_{n_k-1}^k b_0 + f_{n_k}^k b_1 + \dots + f_{|n|+n_k-1}^k b_{|n|} = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

В матричной форме система (3.4) принимает вид:

$$F_n \times b^T = \theta^T, \quad (3.5)$$

где b – матрица-строка $b = (b_0, b_1, \dots, b_{|n|})$, а θ – матрица-строка порядка $1 \times (|n| + 1)$, все элементы которой равны нулю. Поскольку система (3.5) является однородной и в ней число неизвестных на единицу больше числа уравнений, то из теоремы Кронекера – Капелли следует, что система (3.5) имеет ненулевое решение. Кроме того, множество всех линейно независимых решений системы (3.5) состоит из одного фундаментального решения тогда и только тогда, когда $\text{rang}F_n = n$. В этом случае все остальные ненулевые

решения получаются домножением этого фундаментального решения на число $\lambda \neq 0$. Тем самым первая часть теоремы 3.1 доказана.

Докажем теперь равенства (3.1)–(3.3). Так как $\text{rang}F_n = |n|$, то при некотором $p \in \{1, 2, \dots, |n| + 1\}$ определитель, полученный в результате вычеркивания в матрице F_n p -го столбца, отличен от нуля. Для определенности предположим, что $p = |n| + 1$. Тогда систему (3.5) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \dots & f_{|n|-1}^1 \\ f_1^1 & f_2^1 & \dots & f_{|n|}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_1-1}^1 & f_{n_1}^1 & \dots & f_{|n|+n_1-2}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0^k & f_1^k & \dots & f_{|n|-1}^k \\ f_1^k & f_2^k & \dots & f_{|n|}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_k-1}^k & f_{n_k}^k & \dots & f_{|n|+n_k-2}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_{n_1-1} \\ \dots \\ b_{|n|-n_k+1} \\ b_{|n|-n_k+2} \\ \dots \\ b_{|n|-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{|n|}^1 \\ f_{|n|+1}^1 \\ \dots \\ f_{|n|+n_1-1}^1 \\ \dots \\ f_{|n|}^k \\ f_{|n|+1}^k \\ \dots \\ f_{|n|+n_k-1}^k \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Обозначим главный определитель системы (3.6) через H_n^k . По предположению $H_n^k \neq 0$. Если бы $b_{|n|} = 0$, то тогда система (3.6) имела бы единственное нулевое решение. Тогда бы и система (3.4) имела только нулевое решение. Поэтому $b_{|n|} \neq 0$. Учитывая, что мы ищем решение с точностью до мультипликативного множителя, можем считать, что $b_{|n|} = 1$. Решаем систему по правилу Крамера. Пренебрегая числовым множителем, результат можно записать в виде:

$$Q_m(z) = \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \dots & f_{|n|}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_1-1}^1 & f_{n_1}^1 & \dots & f_{|n|+n_1-1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0^k & f_1^k & \dots & f_{|n|}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_k-1}^k & f_{n_k}^k & \dots & f_{|n|+n_k-1}^k \\ 1 & z & \dots & z^{|n|} \end{vmatrix} = \det \begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \dots & F^k & E(z) \end{bmatrix}^T. \quad (3.7)$$

Из (3.7) следует, что $b_{|n|} = H_n^k \neq 0$. В случае, если бы, вычеркивая столбец матрицы F_n с номером $p = j \in \{1, 2, \dots, |n|\}$ пришли к определителю отличному от нуля, рассуждая аналогично, получили бы представления (3.7), где отличным от нуля был бы коэффициент b_{j-1} многочлена $Q_n(z)$.

Заметим, что если коэффициенты рядов (1.1) – действительные числа, то и коэффициенты многочлена Q_n также являются действительными числами.

Многочлен $P_n^j(z)$ определяется однозначно как полиномиальная часть ряда $Q_n(z)f_j(z)$. Чтобы найти его явный вид, рассмотрим равенство

$$Q_m(z)f_i(z) = \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \dots & f_{|n|}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_1-1}^1 & f_{n_1}^1 & \dots & f_{|n|+n_1-1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0^k & f_1^k & \dots & f_{|n|}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_k-1}^k & f_{n_k}^k & \dots & f_{|n|+n_k-1}^k \\ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^j}{z^{i+1}} & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^j}{z^i} & \dots & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^j}{z^{i-|n|+1}} \end{vmatrix}. \quad (3.8)$$

В определителе (3.8) выделим блок A_{n_j} (матрицу порядка $n_j \times (|n| + 1)$) вида

$$\begin{pmatrix} f_0^j & f_1^j & \dots & f_{|n|}^j \\ f_1^j & f_2^j & \dots & f_{|n|+1}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_j-1}^j & f_{n_j}^j & \dots & f_{|n|+n_j-1}^j \end{pmatrix}.$$

Далее, вычтем из последней строки определителя первую строку блока A_{n_j} , умноженную на z^{-1} , вторую строку блока A_{n_j} , умноженную на z^{-2} , и так далее вплоть до последней строки блока A_{n_j} , умноженной на z^{-n_j} . В результате вместо определителя (3.8) получим определитель, у которого ряды в последней строке имеют лакуны длиной n_j . Сохраняя начальные строки этих рядов, приходим к определителю

$$P_n^j(z) = \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & f_2^1 & \dots & f_{|n|}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_1-1}^1 & f_{n_1}^1 & f_{n_1+1}^1 & \dots & f_{|n|+n_1-1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0^k & f_1^k & f_2^k & \dots & f_{|n|}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_k-1}^k & f_{n_k}^k & f_{n_k+1}^k & \dots & f_{|n|+n_k-1}^k \\ 0 & f_0^j & f_0^j z + f_1^j & \dots & \sum_{i=0}^{|n|-1} f_i^j z^{|n|-i-1} \end{vmatrix} = (3.9)$$

$$= \det \begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \dots & F^k & E_j(z) \end{bmatrix}^T.$$

Он и будет искомым. Действительно, многочлен $P_n^j(z)$, определенный равенством (3.9) имеет степень не выше $|n| - 1$. Учитывая сделанные преобразования в определителе (3.8), для этого многочлена, получим:

$$Q_n(z)f_j(z) - P_n^j(z) = \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \dots & f_{|n|}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_1-1}^1 & f_{n_1}^1 & \dots & f_{|n|+n_1-1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0^k & f_1^k & \dots & f_{|n|}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_k-1}^k & f_{n_k}^k & \dots & f_{|n|+n_k-1}^k \\ \sum_{i=n_j}^{\infty} \frac{f_i^j}{z^{i+1}} & \sum_{i=n_j}^{\infty} \frac{f_{i+1}^j}{z^{i+1}} & \dots & \sum_{i=n_j}^{\infty} \frac{f_{i+|n|}^j}{z^{i+1}} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{n,i}^j}{z^{n_j+i}}.$$

При преобразованиях мы воспользовались определением суммы степенного ряда и правилом сложения определителей. Заметим, что если среди рядов (1.1) есть, по крайней мере, один формальный ряд, то ряд (3.3) также является формальным.

4 Замечания и следствия

Из полученных явных формул для многочленов Эрмита – Паде 2-го рода следует, что компонента n_j заданного вполне совершенного мультииндекса $n = (n_1, \dots, n_k)$ определяет число коэффициентов ряда $f_j(z)$, которое учитывается при построении многочленов $Q_n(z)$. В частности, если $n_j = 0$, то матрица F_n и рассматриваемые определители, задающие многочлены $Q_n(z)$, не содержат блока A_{n_j} и, следовательно, при их построении формальный ряд $f_j(z)$ не учитывается, а порядок мультииндекса $|n|$ определяется оставшимися компонентами.

В частности, если $n_2 = \dots = n_k = 0$, то

$$n = (n_1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}_+^k$$

и тогда $|n| = n_1$. Если отождествить n_1 с n , то, как и в одномерном случае, получим

$$Q_m(z) = \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \dots & f_n^1 \\ f_1^1 & f_2^1 & \dots & f_{n+1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-1}^1 & f_n^1 & \dots & f_{2n-1}^1 \\ 1 & z & \dots & z^n \end{vmatrix}. \quad (4.1)$$

Легко заметить, что критерий нормальности индекса $n \in \mathbb{Z}_+^k$ (см. (1.3)) согласуется с формулой (4.1).

Следует сказать, что если индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ не является вполне нормальным, то многочлены, определенные равенствами (2.1) и (2.2), не являются решениями задачи Эрмита – Паде. В частности, для функции f_1 из примера 1.1 получаем, что $Q_2(z) = (a + bz) - (a + 2b)z^2 / 4$. Однако, если этот многочлен находить по формуле (4.1), то получим, что $Q_2(z) \equiv 0$.

При $k \geq 1$ критерий нормальности индекса в терминах коэффициентов рядов (1.1) легко получить из доказательства теоремы 1 с помощью тех же рассуждений, что и в одномерном случае [1; гл. 2, §3, утверждение 3.2].

Следствие 4.1. *Индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ является нормальным для системы f тогда и только тогда, когда определитель*

$$H_n^k = \begin{vmatrix} f_0^1 & f_1^1 & \dots & f_{|n|-1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_1-1}^1 & f_{n_1}^1 & \dots & f_{|n|+n_1-2}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0^k & f_1^k & \dots & f_{|n|-1}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_k-1}^k & f_{n_k}^k & \dots & f_{|n|+n_k-2}^k \end{vmatrix} \neq 0.$$

Следующее утверждение можно рассматривать как некоторый многомерный аналог теоремы Кронекера [1, гл. 2, §3, теорема 3.1].

Следствие 4.2. *Пусть $n = (n_1, \dots, n_k)$ – вполне нормальный индекс для $f = \{f_1, \dots, f_k\}$ и $n_j \neq 0$. Тогда для того, чтобы функция $f_j(z)$ была рациональной, необходимо и достаточно, чтобы $d_{n,i}^j = 0$ для всех достаточно больших i .*

Следствие 4.2 вытекает из равенства (3.3).

Следствие 4.3. *Пусть $n = (n_1, \dots, n_k)$ – вполне нормальный индекс для $f = \{f_1, \dots, f_k\}$ и $n_j \neq 0$. Тогда*

$$\deg P_n^j = |n| - 1 \iff H_n^k \cdot f_0^j \neq 0. \quad (4.2)$$

Эквивалентность (4.2) легко получить, если воспользоваться равенством (3.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Никишин, Е.М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М.: Наука, 1988.
2. Бейкер мл., Дж. Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – М.: Мир, 1986.

Поступила в редакцию 15.03.19.

УДК 517.977

КРИТЕРИИ ПОЛНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО ВЫХОДУ

О.Б. Цехан

Гродненский государственный университет им. Янки Купалы

COMPLETE CONTROLLABILITY CONDITIONS FOR LINEAR TIME-INDEPENDENT SYSTEM WITH DELAY IN OUTPUT

V.B. Tsekhan

Yanka Kupala State University of Grodno

Выполнено строгое обоснование и развитие на линейные стационарные системы с запаздыванием в уравнении состояния и в выходе одного подхода к получению условий полной наблюдаемости систем с запаздыванием. Подход основан на сведении задачи полной наблюдаемости системы с запаздыванием к проблеме единственности решения специальной однородной граничной задачи для системы дифференциальных уравнений без запаздывания в расширенном пространстве состояний. Доказаны необходимые и достаточные условия полной наблюдаемости, полной идентифицируемости в смысле однозначного восстановления по известной выходной функции ненаблюдаемого куска траектории на отрезке времени длиной запаздывания. Условия имеют ранговый тип и выражены в терминах матриц исходной системы наблюдения.

Ключевые слова: полная наблюдаемость, полная идентифицируемость, запаздывание, выход, критерий.

Strict justification and extension to the linear stationary system with delay in the equation of state and in the output of one approach to reception of complete observability conditions for systems with delay is executed. The approach is based on the reduction of the problem of complete observability of the system with delay to the problem of uniqueness of the solution of a special homogeneous boundary value problem for a system of differential equations without delay in the extended state space. The necessary and sufficient conditions for complete observability, complete identifiability are proved. Complete observability, identifiability in the sense of unambiguous reconstruction of an unobservable piece of the trajectory on the time period of the delay length by the known output function are proved. The conditions are of rank type and are expressed in terms of matrices of the original observation system.

Keywords: complete observability, complete identifiability, time delay, output, criterion.

1 Постановка задачи

Рассмотрим линейную стационарную дифференциальную систему с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h), \quad t \in [0, t_1], \quad (1.1)$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0], \quad (1.2)$$

и ее выход с запаздыванием в состоянии

$$y(t) = Cx(t) + C_1x(t-h), \quad t \in [0, t_1]. \quad (1.3)$$

Здесь $x \in R^n$, $y \in R^m$, $m \leq n$; A, A_1, C, C_1 – постоянные матрицы соответствующих размеров, $0 < h$ – постоянное запаздывание; $\varphi(t)$ – неизвестная кусочно-непрерывная справа начальная n -вектор-функция, $y(t)$, $t \in [0, t_1]$ – известная m -вектор функция.

Системы вида (1.1)–(1.3) возникают, например, при исследовании линейных стационарных сингулярно возмущенных систем методом расщепляющего преобразования [1].

Решение системы (1.1), (1.2) – непрерывная для $t > 0$ функция, сглаживающаяся с течением времени: на интервале $[jh, (j+1)h]$, $j = 0, 1, 2, \dots$ решение является j раз непрерывно дифференцируемой и $j+1$ раз кусочно-непрерывно дифференцируемой справа функцией.

Определение 1.1. Кусок траектории $x_t \triangleq \{x(\theta); \theta \in [t-h, t]\}$ назовем состоянием системы (1.1) в момент времени t .

Определение 1.2. Система (1.1)–(1.3) называется полностью наблюдаемой (наблюдаемой по конечному состоянию), если для любого выхода (1.3) состояние $x_h(x_t)$ системы (1.1), совместимое в силу (1.3) с этим выходом, можно восстановить однозначно.

Задачу наблюдения по конечному состоянию называют также [2, с. 65] задачей *полной идентификации*. В настоящей работе будем придерживаться этой терминологии.

Полная наблюдаемость (в смысле определения 1.2) наряду со стабилизируемостью гарантирует [3], например, асимптотическую устойчивость оптимального фильтра для систем типа (1.1)–(1.3). Полная идентифицируемость важна при построении управлений по типу обратной связи.

Задача. Определить условия на параметры системы (1.1), (1.3), при которых эта система полностью наблюдаема (полностью идентифицируема).

Замечание 1.1. Полная идентифицируемость системы (1.1), (1.3) следует из ее полной наблюдаемости. Обратное, вообще говоря, не верно, что подтверждает пример (5.1), (5.3), рассмотренный в разделе 5.

Спектральные условия полной идентифицируемости систем типа (1.1)–(1.3) были получены ранее Lee E.B., Olbrot A. в [4], условия полной наблюдаемости (в смысле однозначного восстановления начального условия (1.2)) для системы (1.1)–(1.3) при необходимом условии $\det A_1 \neq 0$ получены Минюком С.А., Метельским А.В. в [5]. Критерии полной наблюдаемости, полной идентифицируемости системы (1.1)–(1.3) при $\det A_1 = 0$, $C_1 = 0_{m \times n}$ доказаны в [6].

Основная цель данной статьи – доказательство эффективных параметрических критериев полной наблюдаемости, полной идентифицируемости (в смысле определения 1.2) системы (1.1)–(1.3) в случае $\det A_1 = 0$, $C_1 \neq 0_{m \times n}$. Условия справедливы также и в случае $\det A_1 \neq 0$ и/или $C_1 = 0_{m \times n}$.

Замечание 1.2. Согласно определению 1.2 система (1.1)–(1.3) полностью наблюдаема (полностью идентифицируема) тогда и только тогда, когда существует взаимно-однозначное соответствие между множеством состояний $x_h(x_i)$ системы (1.1) и множеством выходов (1.3). Для того чтобы это было возможно, необходимо и достаточно, чтобы для тривиального выхода $y(t) \equiv 0, t \in [0, t_1]$, было возможно восстановить только тривиальное состояние $x_h(x_i)$, что непосредственно вытекает из линейности объекта наблюдения (1.1)–(1.3).

2 Преобразование задачи

Утверждение 2.1. Система (1.1)–(1.3) полностью наблюдаема (полностью идентифицируема) на отрезке $T = [0, t_1]$ тогда и только тогда, когда она сохраняет это свойство при $t_1 = nh$.

Доказательство утверждения 2.1 при $C_1 \neq 0_{m \times n}$ несложно выполнить аналогично [5, с. 628], где доказана справедливость утверждения 2.1 для случая $C_1 = 0_{m \times n}$.

Из утверждения 2.1 следует, что без потери общности можно рассматривать случай $t_1 = nh$.

Для решения поставленной выше задачи используем подход, основанный на преобразовании системы (1.1)–(1.3) с запаздыванием к системе без запаздывания в некотором расширенном фазовом пространстве и сведении задачи полной наблюдаемости системы (1.1)–(1.3) к проблеме единственности решения однородной граничной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Ранее такой подход применен

без детального доказательства для систем без запаздываний в выходе в [6].

Процедура сведения основана на идеях метода шагов решения дифференциального уравнения с запаздыванием, при котором решение дифференциального уравнения с запаздыванием заменяется решением серии дифференциальных уравнений без запаздываний.

Пусть $x(t), t \in [0, nh]$ – произвольное решение задачи (1.1), (1.2), $y(t), t \in [0, nh]$ – соответствующая ему выходная функция (1.3). Обозначим

$$x_i(t) = x(t - (i-1)h), \quad (2.1)$$

$$i = \overline{1, n}, t \in T_n \triangleq [(n-1)h, nh].$$

Функции $x_i(t), i = \overline{1, n}$ (2.1) удовлетворяют системе

$$\dot{x}_1(t) = Ax_1(t) + A_1x_2(t), \quad \dots \dots \dots (2.2)$$

$$\dot{x}_{n-1}(t) = Ax_{n-1}(t) + A_1x_n(t),$$

$$\dot{x}_n(t) = Ax_n(t) + A_1\varphi(t - nh), \quad (2.3)$$

$$Cx_1(t) + C_1x_2(t) = y(t), \quad \dots \dots \dots (2.4)$$

$$Cx_{n-1}(t) + C_1x_n(t) = y(t - (n-2)h),$$

$$Cx_n(t) + C_1\varphi(t - nh) = y(t - (n-1)h), t \in T_n. \quad (2.5)$$

Принимая во внимание условие непрерывности $x(t-0) = x(t+0), t > 0$, решения задачи (1.1)–(1.2), имеем следующие граничные условия для системы (2.2)–(2.3):

$$x_i((n-1)h) = x_{i+1}(nh), i = \overline{1, n-1}. \quad (2.6)$$

Таким образом, задача (1.1)–(1.2) для системы с запаздыванием относительно непрерывной на $[0, nh]$ n -вектор-функции $x(t)$ равносильна граничной задаче (2.2)–(2.3), (2.6) для системы без запаздывания относительно n^2 -вектор-функции $col\{x_i(t), i = \overline{1, n}\}$, а выход (1.3) представим в виде (2.4)–(2.5). Относительно системы (2.2)–(2.3), (2.6) это представление доказано в [7, с. 16].

Из построения системы (2.2)–(2.6) следует

Утверждение 2.2. Множество решений системы (1.1)–(1.2) вместе с соответствующими им выходами (1.3) взаимно-однозначно соответствует множеству решений граничной задачи (2.2)–(2.6).

Т.к. решение системы с запаздыванием (1.1), (1.2) с течением времени сглаживается, то из (2.2), (2.6) вытекают граничные условия, которым также удовлетворяют $(n-i)$ раз непрерывно дифференцируемые и $(n+1-i)$ раз кусочно-непрерывно дифференцируемые вектор-функции $x_i(t), i = \overline{1, n}$,

$$x_i^{(k+1)}(nh) = Ax_i^{(k)}(nh) + A_1x_i^{(k)}((n-1)h), \quad (2.7)$$

$$k = \overline{0, n-i+1}, i = \overline{1, n}.$$

Замечание. Так как решение системы с запаздыванием сглаживается с течением времени, то условия (2.7) будут верны также не только для $t = nh$, но и для $t = lh, l > n$.

Утверждение 2.3. Множество решений граничной задачи (2.2)–(2.6) совпадает со множеством решений задачи (2.2)–(2.5), (2.7).

Поскольку начальное состояние (1.2) неизвестно, а значит, не может использоваться при восстановлении по наблюдаемой функции (1.3) состояния системы (1.1)–(1.2), то, используя равенства (2.3), (2.5), связывающие φ с x и y , исключим из (2.2), (2.4) неизвестную начальную функцию $\varphi(t - nh), t \in T_n$, без потери содержащейся в (2.2), (2.4) информации об $x_n(t)$. Для этого определим матрицы: $S \in R^{n \times n}$ – левый делитель нуля максимального ранга матрицы A_1 ; и $\sigma \in R^{m \times m}$ – левый делитель нуля максимального ранга матрицы C_1 [8]:

$$SA_1 = 0_{n \times n}, \quad \sigma C_1 = 0_{m \times m}. \quad (2.8)$$

Примем, что $S = 0$, если $\det A_1 \neq 0$ и $\sigma = 0$, если $\text{rank } C_1 = m$. Умножая слева (2.3) на S и (2.5) на σ , получим

$$S\dot{x}_n(t) = SAx_n(t), \quad (2.9)$$

$$\sigma Cx_n(t) = \sigma y(t - (n-1)h), t \in T_n. \quad (2.10)$$

Утверждение 2.4. При известном $y(t), t \in [0, t_1]$, и неизвестном $\varphi(t), t \in [-h, 0]$, задача однозначного восстановления состояния $x_h(x_i)$ системы (1.1), (1.2) по выходу (1.3) равносильна задаче однозначной разрешимости однородной граничной задачи (2.2), (2.4), (2.7), (2.9), (2.10) относительно $x_n(t) (x_1(t)), t \in T_n$.

Используя следующие обозначения

$$L(\lambda) \triangleq \begin{bmatrix} \lambda E_n - A & -A_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda E_n - A - A_1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda E_n - A & -A_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda S - SA \\ C & C_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma C \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n(n+m) \times n^2},$$

где E_n – единичная $n \times n$ -матрица,

$$\begin{aligned} z(t) &\triangleq \text{col}[x_i(t), i = \overline{1, n}] \triangleq \\ &\triangleq \text{col}[x(t - (i-1)h), i = \overline{1, n}] \in \mathbb{R}^{n^2}, \\ w(t) &\triangleq \text{col}[\underbrace{0, \dots, 0}_{n^2}, y(t - ih), i = \overline{0, n-2}, \\ &\quad \sigma y(t - (n-1)h)] \in \mathbb{R}^{(m+n)n}, t \in T_n, \end{aligned} \quad (2.11)$$

перепишем систему (2.2), (2.9), (2.4), (2.10) в виде

$$L(p)z(t) = w(t), t \in T_n. \quad (2.12)$$

Таким образом, задача однозначного восстановления состояния $x_n(x_i)$ системы (1.1) при неизвестном начальном условии (1.2) по известному выходу (1.3) равносильна задаче однозначной разрешимости однородной граничной задачи (2.7), (2.12) относительно $x_n(t) (x_1(t)), t \in T_n$, откуда с учетом замечания 1.2 имеем.

Утверждение 2.5. Система (1.1)–(1.3) полностью наблюдаема (полностью идентифицируема) тогда и только тогда, когда для однородной граничной задачи (2.7), (2.12), $w(t) \equiv 0, t \in T_n$, возможно только $x_n(t) \equiv 0 (x_1(t) \equiv 0), t \in T_n$.

Утверждение 2.6. Условие $x_n(t) \equiv 0, t \in T_n$, эквивалентно условию $z(t) \equiv 0, t \in T_n$.

Доказательство. Во-первых, очевидно из конструкции (2.11), что справедливо $z(t) \equiv 0 \Rightarrow x_n(t) \equiv 0, t \in T_n$. Покажем, что верно также $x_n(t) \equiv 0 \Rightarrow z(t) \equiv 0, t \in T_n$. Действительно, если $x_n(t) \equiv 0, t \in T_n$, то из (2.2) получим дифференциальное уравнение без запаздывания для нахождения $x_{n-1}(t)$:

$$\dot{x}_{n-1}(t) = Ax_{n-1}(t), t \in T_n, \quad (2.13)$$

а из (2.6) имеем следующее начальное условие

$$x_{n-1}((n-1)h) = x_n(nh) = 0. \quad (2.14)$$

Решая (2.13), (2.14), получаем $x_{n-1}(t) \equiv 0, t \in T_n$. Повторяя аналогично для $i = n-2, n-3, \dots, 1$, окончательно имеем $x_i(t) \equiv 0, t \in T_n, i = \overline{1, n}$, что в соответствии с обозначением (2.11) доказывает утверждение 2.6. \square

3 Полная наблюдаемость системы

Пусть $\lambda_i, i = \overline{1, v}$, различные корни наибольшего общего делителя миноров порядка n^2 матрицы $L(\lambda)$ наибольшей кратности ε . Напомним, что под рангом полиномиальной матрицы понимается наибольший порядок тождественно отличного от нуля минора этой матрицы.

Обозначим \mathbb{C} – поле комплексных чисел.

Теорема 3.1. Система (1.1)–(1.3) полностью наблюдаема тогда и только тогда, когда имеют место следующие условия:

$$1) \text{rank } L(\lambda) = n^2, \quad \exists \lambda \in \mathbb{C}, \quad (3.1)$$

$$2) \text{rank} \begin{bmatrix} \lambda_i E_n - A - A_1 e^{-\lambda_i h} \\ C + C_1 e^{-\lambda_i h} \end{bmatrix} = n \quad (3.2)$$

всякий раз, когда $\text{rank } L(\lambda_i) < n^2$.

Доказательство. Необходимость. Прежде всего, заметим, что условие (3.1) необходимо для того, чтобы система (2.7), (2.12) в которой $w(t) \equiv 0, t \in T_n$, имела только тривиальное решение

относительно $x_n(t), t \in T_n$ (а именно, чтобы решение не зависело от произвольных функций). Это следует из утверждений 2.4 и 2.6 и [9].

Пусть теперь λ_{i_0} таково, что $rank L(\lambda_{i_0}) < n^2$ и предположим, что для этого λ_{i_0} условие (3.2) не выполнено, т. е.

$$rank \begin{bmatrix} C + C_1 e^{-\lambda_{i_0} h} \\ \lambda_{i_0} E_n - A - A_1 e^{-\lambda_{i_0} h} \end{bmatrix} < n.$$

Тогда существует постоянный n -вектор l_0 такой, что

$$\left[C + C_1 e^{-\lambda_{i_0} h} \right] l_0 = 0, \quad (3.3)$$

$$[\lambda_{i_0} E_n - A - A_1 e^{-\lambda_{i_0} h}] l_0 = 0. \quad (3.4)$$

Покажем, что тогда в качестве нетривиального решения однородной граничной задачи (2.7), (2.12), $w(t) \equiv 0, t \in T_h$, можно рассматривать n^2 -вектор $\tilde{z}(t)$ (2.11), где в качестве компоненты $\tilde{x}_n(t)$ взята действительная функция $\text{Re } \tilde{x}(t)$ или $\text{Im } \tilde{x}(t)$:

$$\tilde{x}(t) = l_0 e^{\lambda_{i_0}(t-(n-1)h)}, t \in T_n. \quad (3.5)$$

Действительно, составим вектор $\tilde{z}(t)$ (2.11) из компоненты (3.5) и

$$\tilde{x}_i(t) = l_0 e^{\lambda_{i_0}(t-(i-1)h)}, t \in T_h, i = \overline{1, n}. \quad (3.6)$$

Во-первых, функция (3.5) удовлетворяет граничному условию (2.7), $i = n$. Действительно, подставляя (3.5) в (2.7), $i = n$, имеем

$$\lambda_{i_0}^k [\lambda_{i_0} E_n - A - A_1 e^{-\lambda_{i_0} h}] l_0 e^{\lambda_{i_0} h} = 0, k = 0, 1,$$

что справедливо ввиду справедливости равенства (3.4).

Во-вторых, функция (3.5) удовлетворяет также уравнению (2.12), $w(t) \equiv 0$. Для доказательства этого рассмотрим (2.12) в виде (2.2), (2.9), (2.4), (2.10). Во-первых, подставляя (3.5) в (2.9), получаем равенство

$$S(\lambda_{i_0} E_n - A) l_0 e^{\lambda_{i_0}(t-(n-1)h)} = 0,$$

справедливость которого вытекает из (3.4) с учетом $S A_1 = 0_{n \times n}$.

Далее проверим для (3.6) выполнение равенств (2.2), связывающих \tilde{x}_i и \tilde{x}_{i-1} для $i = \overline{2, n}$. Подставляя (3.6) в (2.2), получаем:

$$\left(\lambda_{i_0} E_n - A + A_1 e^{-\lambda_{i_0} h} \right) l_0 e^{\lambda_{i_0}(t-(i-1)h)} = 0, i = \overline{2, n},$$

что справедливо в силу (3.4). Таким образом, (2.2) для (3.5) также справедливо.

Учитывая (3.3), несложно также убедиться, что для (3.6) справедливо (2.4) при $y(t) \equiv 0$.

Наконец, заметим, что так как верно (3.3), а также $\sigma C_1 = 0_{m \times m}$, то $\sigma C \tilde{x}_n(t) = \sigma C l_0 e^{\lambda_{i_0}(t-(n-1)h)} = 0$ также верно. Таким образом, (2.10) для (3.6) при $y(t) \equiv 0$ также справедливо.

Окончательно получаем, что вектор $\tilde{z}(t)$, определенный в виде (3.5), (3.6), можно рассматривать в качестве нетривиального решения однородной граничной задачи (2.7), (2.12), $w(t) \equiv 0, t \in T_h$. С учетом утверждения 2.6 это противоречит наблюдаемости и доказывает необходимость (3.2).

Достаточность. В силу утверждения 2.1 можно считать, что $t_1 = \max(nh, 1 + \varepsilon(v+1))$. Обозначим $N \triangleq \max(n, 1 + \varepsilon(v+1))$, $T_N \triangleq [(N-1)h, Nh]$ и будем рассматривать систему (2.12) для $t \in T_N$.

Пусть выполнено (3.1), (3.2). Покажем, что тогда из $y(t) \equiv 0, t \in T$ следует, что в решении однородной граничной задачи (2.12), (2.7) компонента $x_N(t) \equiv 0, t \in T_N$.

С этой целью построим решение задачи (2.12), $w(t) \equiv 0, t \in T_N$, (2.7).

Если $rank L(\lambda) = n^2 \forall \lambda \in \mathbb{C}$, т. е. $v = 0$, то из [9] вытекает, что $z(t) \equiv 0, t \in [(N-1)h, Nh]$ – единственное решение системы $L(p)z(t) = 0$, т. е. система (1.1)–(1.3) – полностью наблюдаема.

Пусть $v \neq 0$. Тогда любое решение уравнения $L(p)z(t) = 0$ имеет вид [10]

$$z(t) = \sum_{j=1}^v l_j(t) e^{\lambda_j t} = \sum_{j=1}^v \begin{bmatrix} l_{j1}(t) \\ l_{j2}(t) \\ \vdots \\ l_{jn}(t) \end{bmatrix} e^{\lambda_j t}, \quad (3.7)$$

где $l_{jk}(t) \in \mathbb{R}^n, k = \overline{1, n}$, – векторные полиномы степени не выше $\varepsilon - 1$.

Найдем компоненту $x_1(t), t \in T_N$. Для нахождения коэффициентов полиномов $l_{j1}(t), j = \overline{1, v}$, подставим представление $x_1(t) = \sum_{j=1}^v l_{j1}(t) e^{\lambda_j t}$ в

граничные условия (2.7). В результате получаем, что искомые коэффициенты удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^v \left[\left(\sum_{i=0}^m C_m^i l_{j1}^{(m-i)}(Nh) \lambda_j^i \right) e^{\lambda_j Nh} - \right. \\ & \left. - A \left(\sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^i l_{j1}^{(m-i-1)}(Nh) \lambda_j^i \right) e^{\lambda_j Nh} - \right. \\ & \left. - A_1 \left(\sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^i l_{j1}^{(m-i-1)}(N-1)h \lambda_j^i \right) e^{\lambda_j (N-1)h} \right] = 0, \\ & m = \overline{1, \varepsilon(v+1)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь $C_m^i = \frac{m!}{i!(m-i)!}$. Далее используем свойство коэффициентов $C_m^i = C_{m-1}^{i-1} + C_{m-1}^i$.

Обозначим

$$l_{j1(m)} = l_{j1}^{(m)}(Nh)e^{\lambda_j Nh} + l_{j1}^{(m-1)}(Nh)\lambda_j e^{\lambda_j Nh} - \\ - Al_{j1}^{(m-1)}(Nh)e^{\lambda_j Nh} - \\ - A_1 l_{j1}^{(m-1)}((N-1)h)e^{\lambda_j(N-1)h}, \quad (3.9) \\ j = \overline{1, v}, m = \overline{1, \varepsilon}.$$

Тогда (3.8) можно записать в виде

$$B(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_v) \times \begin{bmatrix} l_{j1(m)} \\ m = \overline{1, \varepsilon} \\ j = \overline{1, v} \end{bmatrix} = 0, \quad (3.10)$$

где

$$B(\lambda_1, \dots, \lambda_v) \triangleq \begin{bmatrix} E_n & 0_n & \dots & 0_n & \dots & E_n & \dots & 0_n \\ \lambda_1 E_n & E_n & \dots & 0_n & \dots & \lambda_v E_n & \dots & 0_n \\ \lambda_1^2 E_n & C_1 \lambda_1 E_n & \dots & 0_n & \dots & \lambda_v^2 E_n & \dots & 0_n \\ \lambda_1^3 E_n & C_3 \lambda_1^2 E_n & \dots & 0_n & \dots & \lambda_v^3 E_n & \dots & 0_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{\varepsilon+1} E_n & C_{\varepsilon+1} \lambda_1^\varepsilon E_n & \dots & C_{\varepsilon+1} \lambda_1^2 E_n & \dots & \lambda_v^{\varepsilon+1} E_n & \dots & C_{\varepsilon+1} \lambda_v^2 E_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \\ \in \mathbb{R}^{\varepsilon(v+1)n \times \varepsilon v n}.$$

Матрица $B(\lambda_1, \dots, \lambda_v)$ имеет структуру матрицы M из [5, с. 630], где доказано, что если $\lambda_j, j = \overline{1, v}$, различны, то $rank M = \varepsilon v n$. Так как $B(\lambda_1, \dots, \lambda_v)$ – матрица полного ранга по столбцам, то условие (3.10) равносильно совокупности равенств

$$l_{j1(m)} = 0, m = \overline{1, \varepsilon}, j = \overline{1, v}.$$

Отсюда, согласно (3.9) получаем, что для функциональных коэффициентов $l_{j1}(t), j = \overline{1, v}$, верны равенства

$$l_{j1}^{(m)}(Nh)e^{\lambda_j Nh} + l_{j1}^{(m-1)}(Nh)\lambda_j e^{\lambda_j Nh} - \\ - Al_{j1}^{(m-1)}(Nh)e^{\lambda_j Nh} - \\ - A_1 l_{j1}^{(m-1)}((N-1)h)e^{\lambda_j(N-1)h} = 0, \quad (3.11) \\ j = \overline{1, v}, m = \overline{1, \varepsilon}.$$

Покажем теперь, что при выполнении (3.2) верно $x_1(t) \equiv 0, t \in T_N$, если $y(t) \equiv 0, t \in T$. Для этого согласно (2.11), (3.7) достаточно показать, что $l_{j1}(t) \equiv 0, j = \overline{1, v}$.

Действительно, поскольку $l_{j1}(t)$ – полином степени не выше $\varepsilon - 1$, то $l_{j1}^{(\varepsilon)}(t) \equiv 0, t \in T_N$, откуда имеем $l_{j1}^{(\varepsilon-1)}(t) \equiv const, t \in T_N$, а значит, верно

$$l_{j1}^{(\varepsilon-1)}(Nh) = l_{j1}^{(\varepsilon-1)}((N-1)h). \quad (3.12)$$

Рассмотрим (3.11) при $m = \varepsilon$:

$$\left[l_{j1}^{(\varepsilon)}(Nh) + l_{j1}^{(\varepsilon-1)}(Nh)\lambda_j - Al_{j1}^{(\varepsilon-1)}(Nh) - \right. \\ \left. - A_1 l_{j1}^{(\varepsilon-1)}((N-1)h)e^{-\lambda_j h} \right] e^{\lambda_j Nh} = 0, j = \overline{1, v}.$$

Отсюда с учетом $l_{j1}^{(\varepsilon)}(t) \equiv 0, t \in T_N$ и (3.12) имеем:

$$\left[\lambda_j - A - A_1 e^{-\lambda_j h} \right] l_{j1}^{(\varepsilon-1)}(Nh)e^{\lambda_j Nh} = 0, \quad (3.13) \\ j = \overline{1, v}.$$

Кроме того, поскольку рассматривается $y(t) \equiv 0, t \in T$, то для $x_1(t)$ верно

$$y(t) = C \sum_{j=1}^v l_{j1}(t)e^{\lambda_j t} + C_1 \sum_{j=1}^v l_{j1}(t-h)e^{\lambda_j(t-h)} = \\ = \sum_{j=1}^v \left[Cl_{j1}(t) + C_1 l_{j1}(t-h)e^{-\lambda_j t} \right] e^{\lambda_j t} \equiv 0.$$

Так как при разных $\lambda_j, j = \overline{1, v}$, функции $e^{\lambda_j t}$ линейно-независимы, то из последнего тождества вытекает

$$Cl_{j1}^{(m)}(t) + C_1 l_{j1}^{(m)}(t-h)e^{-\lambda_j t} \equiv 0, \\ j = \overline{1, v}, m = \overline{0, \varepsilon-1}.$$

Тогда из (3.12) и (3.13) при $t = Nh$ получаем:

$$\begin{bmatrix} \lambda_j - A - A_1 e^{-\lambda_j h} \\ C + C_1 e^{-\lambda_j h} \end{bmatrix} l_{j1}^{(\varepsilon-1)}(Nh)e^{\lambda_j Nh} = 0, j = \overline{1, v},$$

откуда с учетом справедливости (3.2) имеем $l_{j1}^{(\varepsilon-1)}(Nh) = 0$, а с учетом $l_{j1}^{(\varepsilon-1)}(t) \equiv const, t \in T_N$ получаем $l_{j1}^{(\varepsilon-1)}(t) \equiv 0, j = \overline{1, v}$.

Повторяя рассуждения аналогично для $l_{j1}^{(i)}(t), i = \varepsilon - 2, \varepsilon - 3, \dots, 0$, докажем, что $l_{j1}(t) \equiv 0, j = \overline{1, v}$. Таким образом, доказано, что

$$x_1(t) = \sum_{j=1}^v l_{j1}(t)e^{\lambda_j t} \equiv 0, t \in T_N. \quad (3.14)$$

Покажем теперь, что если выполнено (3.1), то и $x_2(t) \equiv 0, t \in T_N$. Из первого уравнения (2.2) и первого уравнения (2.4) с учетом (3.14) имеем

$$A_1 x_2(t) = 0, \\ C_1 x_2(t) = 0. \quad (3.15)$$

Кроме того, для любого $k, k = \overline{1, N}$, «кусочек траектории» $x_k(t), t \in T_N$, системы наблюдения (1.1)–(1.3) с $y(t) \equiv 0, t \in [0, t_1]$, удовлетворяет системе

$$S \dot{x}_k(t) = SAx_k(t), \\ \sigma Cx_k(t) = 0, t \in T_N.$$

Объединяя последние равенства для $x_2(t), t \in T_N$, с (3.16), получаем

$$\begin{bmatrix} -A_1 \\ pS - SA \\ C_1 \\ \sigma C \end{bmatrix} x_2(t) = 0, t \in T_N. \quad (3.16)$$

Из вида последних n столбцов матрицы $L(\lambda)$ следует, что если условия (3.1) верны, то существует комплексное число λ , что

$$\text{rank} \begin{bmatrix} -A_1 \\ \lambda S - SA \\ C_1 \\ \sigma C \end{bmatrix} = n,$$

а значит, из (3.16) имеем $x_2(t) \equiv 0, t \in T_N$.

Продолжая аналогично для $x_k(t) \equiv 0, t \in T_N$, $k = \overline{3, N}$, мы покажем, что $x_N(t) \equiv 0, t \in T_N$.

Таким образом, если выполнено (3.2), то из $y(t) \equiv 0, t \in T$ следует $x_1(t) \equiv 0, t \in T_N$, а если, кроме того, верно (3.1), то и $x_N(t) \equiv 0, t \in T_N$. Согласно утверждению 2.5, система (1.1)–(1.3) вполне наблюдаема. \square

4 Полная идентифицируемость системы

Теорема 4.1. Система (1.1)–(1.3) полностью идентифицируема тогда и только тогда, когда имеет место одно из следующих условий:

- 1) условия теоремы 3.1;
- 2) $\text{rank } L(\lambda) < n^2$, но

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda E - A - A_1 e^{-\lambda h} \\ C + C_1 e^{-\lambda h} \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. Достаточность условия

1) очевидна, достаточность условия 2) следует из теоремы 3.1 и замечания 1.1.

$$\begin{bmatrix} \lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h} & -A_1 & \dots & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ (\lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h}) e^{-\lambda h} & \lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h} & \dots & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ (\lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h}) e^{-\lambda h(n-2)} & (\lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h}) e^{-\lambda h(n-3)} & \dots & \lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h} & -A_1 \\ (\lambda S - SA) e^{-\lambda h(n-2)} & (\lambda S - SA) e^{-\lambda h(n-3)} & \dots & (\lambda S - SA) e^{-\lambda h} & \lambda S - SA \\ (C + C_1 e^{-\lambda h}) e^{-\lambda h} & (C + C_1 e^{-\lambda h}) & \dots & 0_{m \times n} & 0_{m \times n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ \sigma C e^{-\lambda h(n-2)} & \sigma C e^{-\lambda h(n-3)} & \dots & \sigma C e^{-\lambda h} & \sigma C \end{bmatrix}$$

ранг которой равен рангу матрицы $L(\lambda)$, и при выполнении условия 1) теоремы 3.1 равен n^2 . Отсюда, с учетом (2.8), справедливо:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h} \\ (\lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h}) e^{-\lambda h} \\ \dots \\ (\lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h}) e^{-\lambda h(n-2)} \\ S(\lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h}) e^{-\lambda h(n-2)} \\ (C + C_1 e^{-\lambda h}) e^{-\lambda h} \\ \dots \\ \sigma(C + C_1 e^{-\lambda h}) e^{-\lambda h(n-2)} \end{bmatrix} = n.$$

Необходимость любого из условий 1), 2) доказывается как в теореме 3.1, где в качестве нетривиального решения граничной задачи (2.7), (2.12) относительно $x_1(t)$ можно рассматривать действительную функцию $\text{Re } \tilde{x}(t)$ или $\text{Im } \tilde{x}(t)$:

$$\tilde{x}(t) = l_0 e^{\lambda_0 t}, \quad t \in T_n. \quad \square$$

Замечание. Из выполнения условия 1) теоремы 3.1 для фиксированного $\lambda \in \mathbb{C}$ следует выполнение условия 2) теоремы 3.1 для этого $\lambda \in \mathbb{C}$.

Действительно, пусть для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$ верно $\text{rank } L(\lambda) = n^2$. Умножим матрицу $L(\lambda)$ справа на невырожденную $n^2 \times n^2$ -матрицу

$$F(e^{-\lambda h}) = \begin{pmatrix} E_n & 0_{n \times n} & \dots & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ e^{-\lambda h} E_n & E_n & \dots & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ e^{-\lambda(n-2)h} E_n & 0_{n \times n} & \dots & E_n & 0_{n \times n} \\ e^{-\lambda(n-1)h} E_n & e^{-\lambda(n-2)h} E_n & \dots & e^{-\lambda h} E_n & E_n \end{pmatrix}.$$

В результате получим матрицу

Представим последнюю матрицу в виде произведения двух матриц:

$$\text{diag}\{E_{(n-1)n}, S, E_{(m-1)n}, \sigma\} \times \begin{bmatrix} \lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h} \\ (\lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h}) e^{-\lambda h} \\ \dots \\ (\lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h}) e^{-\lambda h(n-2)} \\ (\lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h}) e^{-\lambda h(n-2)} \\ (C + C_1 e^{-\lambda h}) e^{-\lambda h} \\ \dots \\ (C + C_1 e^{-\lambda h}) e^{-\lambda h(n-2)} \end{bmatrix}.$$

Поскольку ранг произведения матриц не больше ранга любого из сомножителей, то справедливо

$$n \leq \text{rank} \begin{bmatrix} \lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h} \\ (\lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h}) e^{-\lambda h} \\ \dots \\ (\lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h}) e^{-\lambda h(n-2)} \\ (\lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h}) e^{-\lambda h(n-2)} \\ (C + C_1 e^{-\lambda h}) e^{-\lambda h} \\ \dots \\ (C + C_1 e^{-\lambda h}) e^{-\lambda h(n-2)} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} \lambda E_n - A - A_1 e^{-\lambda h} \\ C + C_1 e^{-\lambda h} \end{bmatrix},$$

откуда с учетом размеров последней матрицы получаем

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda E - A - A_1 e^{-\lambda h} \\ C + C_1 e^{-\lambda h} \end{bmatrix} = n,$$

что доказывает справедливость замечания.

Замечание подтверждает эквивалентность условий теоремы 4.1 и доказанного ранее в [4] критерия полной идентифицируемости для системы с запаздыванием.

5 Пример

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) + x_1(t-h), \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_2(t-h),$$

$$y(t) = x_1(t) + x_1(t-h), \quad t \in [0, 3h], \quad (5.2)$$

которая в виде (1.1), (1.3) имеет параметры:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = [1, 0, 0], \quad C_1 = [1, 0, 0], \quad n = 3.$$

Проверка условия (3.1) с матрицей $L(\lambda)$ из (2.11), построенной по параметрам системы (5.1), (5.2), показывает, что, например, при $\lambda = 1$ $\text{rank } L(\lambda) = n^2 = 9$, т. е. условие (3.1) выполнено. Более того,

$$\text{rank } L(\lambda) = 9 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq \pm i\sqrt{2}, \quad i^2 = -1.$$

Проверим условие (3.2) для системы (5.1), (5.2). Получаем:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 1 + e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ -e^{-\lambda} & \lambda & -1 \\ 0 & -e^{-\lambda} & \lambda \end{bmatrix} = 3 = n$$

$$\text{для } \lambda = \pm i\sqrt{2}.$$

Таким образом, система (5.1), (5.2) полностью наблюдаемая, а значит, и полностью идентифицируема.

Если вместо выхода (5.2) рассмотреть систему (5.1) с выходом без запаздывания:

$$y(t) = x_1(t), \quad t \in [0, 3h], \quad (5.3)$$

то несложно проверить, что в этом случае $\text{rank } L(\lambda) = 8 < n^2 = 9$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$, т. е. согласно теореме 3.1, система (5.1) с выходом (5.3) не является полностью наблюдаемой. Вместе с тем, используя условие 2) теоремы 4.1 для системы (5.1), (5.3) получаем:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ -e^{-\lambda} & \lambda & -1 \\ 0 & -e^{-\lambda} & \lambda \end{bmatrix} = 3 = n$$

для всех комплексных λ .

Это тождество убеждает нас в том, что система (5.1), (5.3) полностью идентифицируема.

Заключение

Выполнено строгое обоснование и развитие на линейные стационарные системы с запаздыванием в уравнении состояния и в выходе одного подхода к получению условий полной наблюдаемости систем с запаздыванием. Подход основан на сведении задачи полной наблюдаемости системы с запаздыванием к проблеме единственности решения специальной однородной граничной задачи для системы дифференциальных уравнений без запаздывания в расширенном пространстве состояний.

Доказаны необходимые и достаточные условия полной наблюдаемости, полной идентифицируемости в смысле однозначного восстановления ненаблюдаемого куска траектории на отрезке времени длиной запаздывания по известной выходной функции. Условия имеют ранговый тип и выражены в терминах матриц исходной системы наблюдения.

Замечание после теоремы 4.1 подтверждает эквивалентность условий теоремы 4.1 и доказанного ранее в [4] критерия полной идентифицируемости для системы с запаздыванием. Вместе с тем, в отличие от указанных известных ранее условий полной идентифицируемости, проверку полноты ранга функциональной матрицы из (3.2) надо проводить лишь для конечного числа комплексных чисел, для которых не выполнено условие (3.1), что делает предложенные условия конструктивными.

Результаты с очевидными изменениями легко распространить на системы со многими соизмеримыми запаздываниями в (1.1), (1.3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Цехан, О.Б. Расщепляющее преобразование для линейной стационарной сингулярно

возмущенной системы с запаздыванием и его применение к анализу и управлению спектром / О.Б. Цехан // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. – 2017. – Т. 7, № 1. – С. 50–61.

2. Калман, Р. Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. – М., 1971.

3. Manitius, A. F-Controllability and Observability of Linear Retarded Systems / A. Manitius // Appl. Math. Optim. – 1982. – Vol. 20. – P. 3–77.

4. Lee, E.B. Observability and related structural results for linear hereditary systems / E.B. Lee, A. Olbrot // International J. Control. – 1981. – Vol. 34, № 6. – P. 1061–1078.

5. Метельский, А.В. К теории полной наблюдаемости систем с запаздыванием / А.В. Метельский, С.А. Минюк // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14, № 4. – С. 624–633.

6. Minyuk, S. On observability of linear stationary system with time delay / S. Minyuk, O. Tsekhan // Proceedings of the 14th International Conference on Systems Science. Vol. 1. Systems Theory, Control Theory, Wrocław, Poland, 11–14 September 2001 / Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, editors: Bubnicki Z., Grzech A. – Wrocław, 2001. – P. 197–202.

7. Бояринцев, Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Е. Бояринцев; отв. ред. В.М. Матросов; Акад. наук СССР. Сиб. отделение. Сиб. энерг. ин-т. – Новосибирск: Наука, 1980. – 222 с.

8. Буков, В.Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем / В.Н. Буков. – Калуга: Изд-во науч. литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006. – 720 с.

9. Лузин, Н.Н. К изучению матричной теории дифференциальных уравнений / Н.Н. Лузин // Автоматика и телемеханика. – 1940. – № 5. – С. 3–66.

10. Фрезер, Р.А. Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике / Р.А. Фрезер, В. Дункан, А. Коллар; пер. с англ. Л.И. Головиной и А.К. Колосовской. – М.: Изд-во иностр. лит., 1950 (2-я тип. Акад. наук СССР). – 446 с.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция-2020» (задание 1.3.02).

Поступила в редакцию 26.12.18.

УДК 65.012.12

ОСНОВЫ ЦИФРОВОГО МОНИТОРИНГА МАРКИРОВАННЫХ RFID-МЕТКАМИ ОБЪЕКТОВ

В.И. Дравица, А.В. Решетняк, Е.А. Якушкин

Центр Систем Идентификации, Минск

BASES OF DIGITAL MONITORING OF OBJECTS MARKED WITH RFID TAGS

V.I. Dravitsa, A.V. Reshetniak, E.A. Yakushkin

Centre for Identification Systems, Minsk

Описана модель физических событий для обеспечения цифрового мониторинга маркированных RFID-метками объектов в соответствии с требованиями международных стандартов ISO/IEC 19987:2017 Информационная технология. Информационные сервисы EPC (EPCIS) и ISO/IEC 19988:2017 Информационная технология. Словарь основных видов деятельности. Оба указанных стандарта предназначены для совместного применения. Использование стандартизированного словаря CBV имеет решающее значение для обеспечения однозначной идентификации маркированных RFID-объектов с использованием сервисов EPCIS.

Ключевые слова: информационный сервис EPC, основной бизнес-словарь, GS1, прослеживаемость в цепях поставок.

A model of physical events to provide digital monitoring. RFID-objects is described in accordance with the requirements of international standards ISO/IEC 19987: 2017 Information technology - EPC Information Services (EPCIS) Standard and ISO/IEC 19988: 2017 Information technology - Core Business Vocabulary Standard. Both of these standards are designed to be used together. Using standardized vocabulary provided CBV standard, is critical to ensure unambiguous identification of RFID-objects using EPCIS services.

Keywords: EPC Information Services, Core Business Vocabulary, GS1, traceability in supply chains.

Введение

Уникальная идентификация, атрибуция данных, управление процессами, маркировка и другие стандартизированные подходы являются основой для построения интеграционных решений и предоставляют возможность упростить бизнес-операции, повысить их эффективность и снизить риски. Эти подходы позволяют принимать инновации и внедрять современные технологии в существующие практики с наименьшими затратами.

Технологии автоматической идентификации и их стандартизация получили свое развитие с 1973 года, когда был принят первый стандарт по идентификации продукции штриховыми кодами [1]. В 2003 году Международной ассоциацией GS1 была создана отдельная организация – EPCGlobal, которая обеспечивает техническое развитие и стандартизацию EPC/RFID-технологий.

В соответствии с требованиями EPCGlobal, в память чипа RFID-метки, которой маркирован конкретный физический объект, записывается EPC (Electronic Product Code), который позволяет обеспечить идентификацию этого объекта (например единицы товара).

Ряд стандартов, разработанных GS1 и EPCGlobal, принят международной организацией по стандартизации ISO в исходной редакции, что позволяет говорить о признании единых подходов системы GS1 на глобальном уровне.

Главным достоинством стандартов и технологий GS1 и EPCGlobal является возможность уникальной идентификации объектов с обеспечением процессов автоматического считывания информации без участия в них человека с использованием RFID-технологий.

1 Базовые подходы цифрового мониторинга маркированных объектов в соответствии с требованиями стандартов GS1

GS1 назначает уникальные идентификационные ключи, используемые в различных отраслях с возможностью идентификации объектов, включая физические товары, упаковки, логистические единицы, возвратную и обменную тару, локацию участников, документы, сервисы и т. д.

Ключевым элементом идентификации является глобальный уникальный номер предприятия – GCP (Global Company Prefix), на основе которого формируются все нижеперечисленные идентификаторы GS1:

- GTIN – Global Trade Item Number;
- GLN – Global Location Number;
- SSCC – Serial Shipping Container Code;
- GRAI – Global Returnable Asset Identifier;
- GIAI – Global Individual Asset Identifier;
- GSRN – Global Service Relation Number;
- GDTI – Global Document Type Identifier;
- GSIN – Global Shipment Identification

Number;

– GINC – Global Identification Number for Consignment;

– GCN – Global Coupon Number.

Для систем прослеживаемости или мониторинга движения объектов по цепочкам поставки вышеперечисленные ключи однозначно определяют соответствующие им объекты.

По существу, глобальные решения по мониторингу цепочек поставки и системам прослеживаемости должны опираться на стандарты, которыми регламентированы следующие ключевые технологии:

– идентификация контролируемых объектов;

– получение информации о контролируемых объектах;

– разделение информации между участниками цепочки поставок.

Ключевым стандартом, на котором строятся упомянутые выше решения, является ISO/IEC 19987:2017 Information technology – EPC Information Services (EPCIS) Standard, являющийся абсолютно нейтральным по отношению к отрасли применения и выполняемым бизнес-процессам. Работа EPCIS основана на управлении событиями в реальном масштабе времени.

Вторым базовым стандартом, обеспечивающим работу приложений и взаимодействие различных систем на основе единых подходов, является стандарт ISO/IEC 19988:2017 Information technology – Core Business Vocabulary (CBV) Standard. Он описывает все необходимые для работы с технологией EPCIS справочники и классификаторы, на основе которых формируются так называемые мастер-данные о событиях [2]–[5].

Сервисы EPCIS позволяют программным приложениям фиксировать необходимые данные в точках считывания цепочки поставок. В качестве приложений выступают учётные системы участников цепочки поставок (производители товаров, транспортные компании, дистрибутивные центры, информационные системы сети ритейлеров и торговых предприятий).

2 Описание модели цифрового мониторинга маркированных RFID-метками объектов

Определены два типа данных, применяемых в стандарте EPCIS:

– данные по событиям фиксируются в репозитории EPCIS и к ним обеспечивается доступ посредством EPCIS Query Interface. К примеру, данными для фиксации события являются следующие параметры: «в момент времени T, объект X был обнаружен в локации L».

– мастер-данные – это дополнительные данные, которые обеспечивают необходимый контекст для интерпретации событий.

Стандарт EPCIS определяет генерируемое событие. При этом различные типы физических событий, которые охватывают все существующие активности цепочки поставок для любых отраслей деятельности, могут быть описаны моделью, представленной на рисунке 2.1, где:

– EPCISEvent – базовый метакласс, описывающий событие;

– ObjectEvent – представляет событие, которое произошло с одним или более объектами, идентифицированными EPC;

– AggregationEvent – событие, произошедшее с одним или несколькими объектами, идентифицированными EPC, физически объединёнными (объекты, объединённые на паллету и событие зафиксировано с данной агрегацией объектов в одной точке считывания в один момент времени);

– QuantityEvent – событие, относящееся к определённому количеству объектов, имеющих один тип и не имеющими идентификацию каждого объекта (к примеру, событие случилось для 200 упаковок товаров, без идентификации каждой конкретной упаковки);

– TransactionEvent – представляет событие для одного или нескольких объектов, идентифицированных EPC, взаимосвязанных с одной или несколькими бизнес-транзакциями (сообщениями или документами).

Каждое событие фиксируется и регистрируется с использованием RFID-артефактов, имеет четыре информационных измерения и некоторые другие определяющие характеристики:

– What (Что) – указывают центральные характеристики – список EPC для ObjectEvent или EPCClass для QualityEvent по объектам, для которых зафиксировано событие. Этот информационный артефакт отличается для различных типов событий;

– When (Когда) – указывает дату и время, когда произошло событие;

– Where (Где) – указывает бизнес-локацию, идентифицирующую место фиксации события, и так же, где ожидается следующее событие с физическим объектом;

– Why (Почему) – указывает бизнес-контекст, по которому фиксируется событие, к примеру:

– бизнес-шаг или активность в технологической цепочке, соответствующее зафиксированному событию (к примеру, получение товара, продажа товара);

– бизнес-состояние (диспозиция) объекта после того, как совершилось событие («Хранится на складе», «Транзит», «Продан»);

– бизнес-локация – физическое месторасположение, в котором объект находился в конкретный момент времени при фиксации соответствующего события;

– точка считывания – локация, в которой было зафиксировано событие с объектом с помощью считывателя или сканера штрихкода;

– ссылка на бизнес-транзакцию, включая тип транзакции и её конкретный идентификатор, то есть идентификатор документа, конкретного типа, с которым связан контролируемый объект или объекты, к примеру, ЗАКАЗ № 1234567, по которому поставлены товары А, В, С;

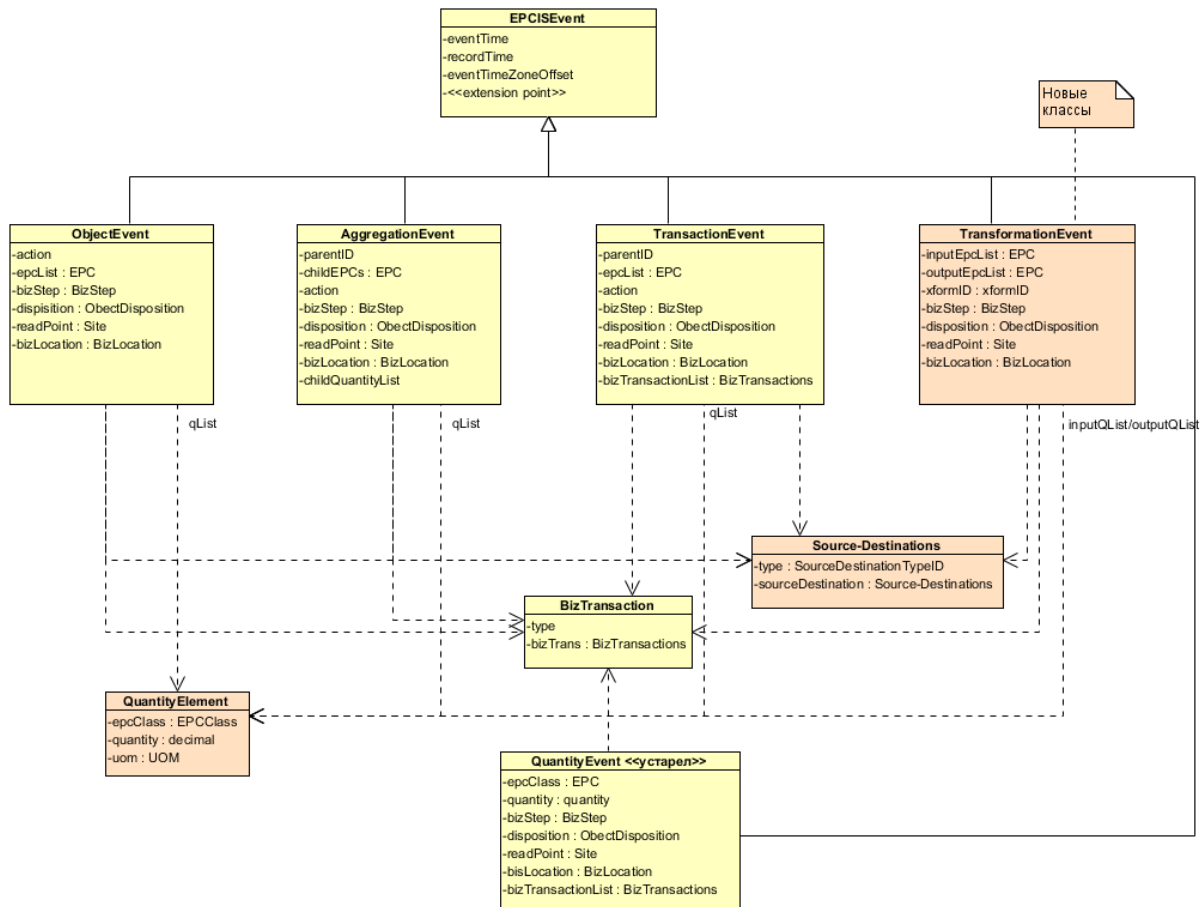


Рисунок 2.1 – Модель физических событий

– ссылки на источник и получатель – ссылки на один или несколько источников, или получателей информации о событиях. Так же, как и транзакции, определяемые типом и конкретным идентификатором, к примеру, идентификатор № 123 определяет владельца товара.

Ключевые типы событий отражают данные, зафиксированные в репозитории EPCIS. В соответствии с содержимым данных, выделяют следующие элементы описания событий:

- типы значения – базовые типы;
- типы события – типы событий EPCIS;
- поля события – описание события;
- типы словаря – типы используемых словарей для описания данных;
- атрибуты основных данных – расширяемые данные, описывающие индустриально выделенные данные объектов;
- элементы словаря – описывают элементы указанного словаря.

В общем случае могут рассматриваться словари бизнес-шагов, расположения и бизнес-транзакций. Базовым словарём является CBV.

Каждое событие формирует несколько утверждений, которые в своей группе определяют семантику события. Некоторые из этих утверждений говорят о том, что было истиной в

определённый момент времени. Другие утверждения говорят об ожидании истинного состояния после события. Такие события называют:

- ретроспективная семантика – говорит о событии, произошедшем ранее;
- ожидаемая семантика – говорит о текущем состоянии объекта.

Например, если: «груз № 23 въехал в здание № 5 через двери № 6 в 11:23», то ретроспективное утверждение говорит о том, что: «груз № 23 был прочитан около дверей № 6 в 11:23». В свою очередь ожидаемое утверждение говорит о том, что: «груз № 23 находится в здании № 5». Ключевая разница заключается в том, что ретроспективное утверждение относится к конкретному времени в прошлом, а ожидаемое утверждение говорит о текущем состоянии объекта. Ожидаемое утверждение предполагает, что если груз № 23 когда-либо покинет здание № 5, то другое сообщение типа EPCIS будет сохранено в хранилище.

В общем случае ретроспективная семантика описывает вещи, которые неоспоримо примут истинное состояние во времени и относятся к тем данным, которые должны быть получены посредством внешних приложений. Ожидаемая семантика должна больше относиться к отношению «что произойдёт», чем «что происходит».

Каждый из ключевых типов событий содержит поля, которые определяют четыре измерения EPCIS-события:

- сущности, являющиеся объектом события;
- дата и время;
- расположение, рядом с которым появилось событие;
- бизнес-контекст.

Данные четыре измерения могут быть представлены как «что, когда, где и почему». Например, измерение «что» изменяется в зависимости от типа события.

Мастер-данные представляют собой элементы словаря CBV. Эти элементы называются элементами словаря и описывают бизнес-шаги, диспозиции объектов, локации, сайты, субсайты, транзакции, источников и получателей события.

Заключение

В цепочках поставок в настоящее время наиболее распространены бумажные технологии и активное участие человека в процессах организации движения, хранения и сбыта продукции. Этот факт является наиболее слабым звеном в борьбе с контрафактом, точности систем прослеживаемости и мониторинга цепочек поставок.

При этом даже продвинутые участники рынка, которые применяют штриховые коды, RFID-идентификацию, EDI-технологии, в основном реализуют свои бизнес-процессы без учёта глобальных стандартов, что не обеспечивает три основных требования стандартов GS1 – видимость объектов в цепочках поставок, трассировку перемещения объектов и прозрачность цепочки поставки для участников и контролёров.

Ещё более проблема усугубляется для крупных торговых сетей, когда появляется необходимость срочного отзыва (возврата) с рынков сбыта некачественной или контрафактной продукции.

Новые подходы и технологии, применяемые для реализации систем прослеживаемости на основе стандартов GS1, значительно изменяют ситуацию и снижают риск продажи контрафактного и некачественного товара в цепочках поставок.

Очевидным решением описанных выше проблем является применение RFID-меток для маркировки контролируемых в цепочке поставок

объектов и обеспечение автоматического считывания информации при движении объектов по цепочке поставок без вмешательства человека.

При этом системы, функционирующие по стандарту EPCIS, обеспечивают (за счёт автоматического считывания RFID-меток) немедленную фиксацию событий в репозитории EPCIS.

При автоматизации цепочки поставок (по всем точкам фиксации событий в локациях), в репозитории EPCIS сохраняется информация по всему жизненному циклу товара (с момента его маркировки и до продажи потребителю).

В этой связи, с учетом глобализации экономики, внедрение единых подходов к реализации систем идентификации имеет определяющую роль, которую и выполняют стандарты GS1.

В Беларуси примерами эффективного применения описанных выше подходов являются:

- Автоматизированная система «Контроль легальности товаров» (<https://kiz.epass.by/>);
- Государственная автоматизированная информационная система идентификации, регистрации, прослеживаемости животных и продукции животного происхождения (<https://www.aits.by/>).

Разработка, внедрение и сопровождение указанных автоматизированных систем обеспечивается Государственным предприятием «Центр систем идентификации» НАН Беларуси.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Презентационные материалы Международной ассоциации GS1 «EPC Gen2v2 Fact Sheet» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.gs1.org/docs/>. – Дата доступа: 26.01.2015.
2. GS1. *The Global Language of Business*. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.gs1.org/>. – Дата доступа: 16.01.2019.
3. GS1. *EPCIS*. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.gs1.org/gsm/kc/epcglobal/epcis/>. – Дата доступа: 02.02.2019.
4. *Международный стандарт ISO/IEC 19987:2017 Information technology – EPC Information Services (EPCIS)*: BS ISO/IEC 19987. – Введ. 04.10.2017.
5. *Международный стандарт ISO/IEC 19988:2017 Information technology – Core Business Vocabulary*: BS ISO/IEC 19988. – Введ. 04.10.2017.

Поступила в редакцию 31.05.19.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;

- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charters top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).