



ISSN 2077-8708

**Проблемы  
физики,  
математики  
и техники**

**№4 (33) 2017**

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ЖУРНАЛ  
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,  
МАТЕМАТИКИ  
И ТЕХНИКИ»**

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:**  
**С.А. Хахомов** (Беларусь)

**ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО  
РЕДАКТОРА:**  
**А.В. Рогачёв** (Беларусь)  
**О.М. Демиденко** (Беларусь)

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:**  
**В.Е. Агабеков** (Беларусь)  
**П.Н. Богданович** (Беларусь)  
**А.Ф. Васильев** (Беларусь)  
**Го Вэньбинь** (Китай)  
**С.С. Гиргель** (Беларусь)  
**В.И. Громак** (Беларусь)  
**А.Н. Дудин** (Беларусь)  
**В.А. Еровенко** (Беларусь)  
**А.И. Калинин** (Беларусь)  
**Матс Ларссон** (Швеция)  
**В.Д. Мазуров** (Россия)  
**Н.В. Максименко** (Беларусь)  
**Ю.В. Малинковский** (Беларусь)  
**А.Р. Миротин** (Беларусь)  
**В.В. Можаровский** (Беларусь)  
**В.С. Монахов** (Беларусь)  
**Н.К. Мышкин** (Беларусь)  
**Ю.М. Плескачевский** (Беларусь)  
**М.В. Селькин** (Беларусь)  
**И.В. Семченко** (Беларусь)  
**А.Н. Сердюков** (Беларусь)  
**А. Сихвола** (Финляндия)  
**А.Н. Скиба** (Беларусь)  
**С.А. Третьяков** (Финляндия)

**ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:**  
**Е.А. Ружицкая** (Беларусь)

**АДРЕС РЕДАКЦИИ:**  
Гомельский государственный  
университет им. Ф. Скорины  
ул. Советская, 104,  
246019, г. Гомель, Беларусь  
Тел. +375(232)60-30-02  
+375(232)60-74-82  
E-mail: [pfmt@gsu.by](mailto:pfmt@gsu.by)  
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL  
JOURNAL  
«PROBLEMS OF PHYSICS,  
MATHEMATICS  
AND TECHNICS»**

**EDITOR-IN-CHIEF:**  
**S.A. Khakhomov** (Belarus)

**DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:**  
**A.V. Rogachev** (Belarus)  
**O.M. Demidenko** (Belarus)

**EDITORIAL BOARD:**  
**V.E. Agabekov** (Belarus)  
**P.N. Bogdanovich** (Belarus)  
**A.F. Vasilyev** (Belarus)  
**Guo Wenbin** (China)  
**S.S. Girgel** (Belarus)  
**V.I. Gromak** (Belarus)  
**A.N. Dudin** (Belarus)  
**V.A. Erovenko** (Belarus)  
**A.I. Kalinin** (Belarus)  
**Mats Larsson** (Sweden)  
**V.D. Mazurov** (Russia)  
**N.V. Maksimenko** (Belarus)  
**Yu.V. Malinkovsky** (Belarus)  
**A.R. Mirotin** (Belarus)  
**V.V. Mozharovsky** (Belarus)  
**V.S. Monakhov** (Belarus)  
**N.K. Myshkin** (Belarus)  
**Yu.M. Pleskachevsky** (Belarus)  
**M.V. Selkin** (Belarus)  
**I.V. Semchenko** (Belarus)  
**A.N. Serdyukov** (Belarus)  
**A. Sihvola** (Finland)  
**A.N. Skiba** (Belarus)  
**S.A. Tretyakov** (Finland)

**EXECUTIVE SECRETARY:**  
**E.A. Ruzhitskaya** (Belarus)

**EDITION ADDRESS:**  
F. Scorina Gomel State University  
Sovetskaya Str., 104,  
246019, Gomel, Republic of Belarus  
Ph. +375(232)60-30-02  
+375(232)60-74-82  
E-mail: [pfmt@gsu.by](mailto:pfmt@gsu.by)  
Website: <http://pfmt.gsu.by>

# ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

## НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 4 (33) 2017

### СОДЕРЖАНИЕ

#### ФИЗИКА

- Гиргель С.С.** Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. II. Неоднородная поляризация . . . . . 7
- Дей Е.А., Тюменков Г.Ю.** Свойства неидеального газа в модели Исикавы – Чанга – Лу . . . . . 11
- Митюрин Г.С., Лебедева Е.В., Сердюков А.Н.** Фототермическое преобразование бесселевых световых пучков в плотном слое хиральных и ахиральных углеродных нанотрубок . . . . . 17
- Пилипцов Д.Г., Рогачев А.В., Руденков А.С., Джанг Сянь Хун, Федосенко Н.Н.** Механические свойства углеродных покрытий, легированных карбидообразующими металлами . . . . . 25
- Шершнев Е.Б., Никитюк Ю.В., Соколов С.И., Шершнев А.Е.** Исследование лазерного макро- и микроформообразования хрупких неметаллических материалов методом полного факторного эксперимента . . . . . 30

#### МАТЕМАТИКА

- Антоневич А.Б., Кот М.Г.** Нормальная форма и резонансы матрично-значных функций двух переменных . . . . . 33
- Белубекян В.М., Оганян С.К., Казарян К.Б., Можаровский В.В., Марьяна Н.А.** Распространение сдвиговых волн в плоском изотропном слое с тонкими покрытиями . . . . . 40
- Бородич Р.В., Бородич Е.Н., Селькин М.В.** О пересечении  $A$ -допустимых  $\Theta$ -подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга . . . . . 44
- Воробьев Н.Н., Титова А.И.** Стоуновы решетки кратно  $\omega$ -локальных классов Фиттинга . . . . . 48
- Захарчук Ю.В.** Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем . . . . . 53
- Каморников С.Ф., Шеметкова О.Л.** О дополнении корадикала конечной группы . . . . . 58
- Мегралиев Я.Т., Гейдарзаде Н.А.** Об одной обратной краевой задаче для эллиптического уравнения второго порядка с интегральным условием второго рода . . . . . 65
- Пыпка А.А.** О числовых характеристиках членов центральных рядов и их связях в некоторых алгебраических структурах . . . . . 71
- Сафонов В.Г., Сафонова И.Н.** Отделимость решетки  $\tau$ -замкнутых тотально  $\omega$ -насыщенных формаций конечных групп . . . . . 76
- Синица Д.А., Скиба А.Н., Го В., Чжан Чи.** Конечные группы с  $H_\sigma$ -субнормально вложенными подгруппами . . . . . 84

#### ИНФОРМАТИКА

- Головнич А.К.** Адаптивные алгоритмы реконструкции технологических процессов на трехмерных моделях технических систем . . . . . 89
- Демиденко О.М.** Методика адаптации вычислительного процесса под рабочую нагрузку на узлах ЛВС . . . . . 96
- Кучеров А.И., Воруев А.В., Демиденко О.М., Левчук В.Д.** Архитектура программного инструментария по обеспечению надежности узла ЛВС . . . . . 100
- Судаков С.С., Аземша С.А., Маслович С.Ф., Галушко В.Н.** Повышение эффективности деятельности ГАИ г. Гомеля на основе web-сервисов . . . . . 104

**Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»**

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь  
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

**Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):**  
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**  
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

---

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*  
Корректоры *Г. Н. Петухова, Т. А. Фицнер*  
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 18.12.17. Формат 60×84  $\frac{1}{8}$ . Бумага офсетная. Гарнитура Times.  
Усл. печ. л. 12,78. Уч.-изд. л. 11,14. Тираж 100 экз. Заказ № 937.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования  
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.  
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013  
ул. Советская, 104, 246019, Гомель

---

© Учреждение образования  
«Гомельский государственный  
университет имени Франциска Скорины», 2017  
© Проблемы физики, математики и техники, 2017  
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2017

# PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

*Published since December, 2009*

There are 4 times a year

№ 4 (33) 2017

## CONTENTS

### PHYSICS

- Girgel S.S.** Polarizing and power properties of vectorial Gaussian-like beams. II. Non-homogeneous polarization . . . . . 7
- Dey E.A., Tyumenkov G.Yu.** Properties of non-ideal gas in the Ishikawa – Chung – Lu model . . . 11
- Mityurich G.S., Lebedeva E.V., Serdyukov A.N.** Photothermal transformation of Bessel light beams in the dense layer of chiral and achiral carbon nanotubes . . . . . 17
- Piliptsov D.G., Rogachev A.V., Rudenkov A.S., Jiang Xiaohong, Fedosenko N.N.** Mechanical properties of carbon coatings, doped by carbide-forming metals . . . . . 25
- Shershnev E.B., Nikitjuk Y.V., Sokolov S.I., Shershnev A.E.** Investigation of laser macro- and microform formation of brittle nonmetallic materials by the method of full factor experiment . . . . . 30

### MATHEMATICS

- Antonevich A.B., Kot M.G.** Normalized form and resonances of matrix-valued functions of two variables . . . . . 33
- Belubekyan V.M., Ohanyan S.K., Ghazaryan K.B., Mozharovsky V.V., Maryina N.A.** The propagation of shear waves in the flat isotropic layer with thin coatings . . . . . 40
- Borodich R.V., Borodich E.N., Selkin M.V.** On intersection of  $A$ -admissible  $\Theta$ -subgroups that do not contain Fitting subgroup . . . . . 44
- Vorob'ev N.N., Titova A.I.** Stone lattices of multiply  $\omega$ -local Fitting classes . . . . . 48
- Zakharchuk Yu.V.** Deformation of the circular three-layer plate with a compressible filler . . . . . 53
- Kamornikov S.F., Shemetkova O.L.** On complement of residual of finite group . . . . . 58
- Mehraliev Y.T., Heydarzade N.A.** On an inverse boundary value problem for the second-order elliptic equation with integral condition of the second kind . . . . . 65
- Pypka A.A.** On the numerical characteristics of the factors of the central series and their relationships in some algebraic structures . . . . . 71
- Safonov V.G., Safonova I.N.** Separability of the lattice of  $\tau$ -closed totally  $\omega$ -saturated formations of finite groups . . . . . 76
- Sinitsa D.A., Skiba A.N., Guo W., Zhang Chi.** Finite groups with  $H_\sigma$ -subnormally embedded subgroups . . . . . 84

### INFORMATION SCIENCE

- Golovnich A.K.** Adaptive algorithms of reconstruction technological processes on 3d-models of technical systems . . . . . 89
- Demidenko O.M.** Techniques of adapting a calculating process to operating load in nodes of a local area network . . . . . 96
- Kucharau A.I., Varuyeu A.V., Demidenko O.M., Liauchuk V.D.** The architecture of software toolkit for lan node secure . . . . . 100
- Sudakov S.S., Azemsha S.A., Maslovich S.F., Halushko V.N.** Increase of the efficiency of the road police service of the city of Gomel on the basis of web-services . . . . . 104

**Founder – Francisk Scorina Gomel State University**

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus  
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

**The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):**

- Technics (Informatics, Computer Science and Control);**
- Physics and Mathematics.**

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 535.42

## ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЕКТОРНЫХ ГАУССОВОПОДОБНЫХ ПУЧКОВ. II. НЕОДНОРОДНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

## POLARIZING AND POWER PROPERTIES OF VECTORIAL GAUSSIAN-LIKE BEAMS. II. NON-HOMOGENEOUS POLARIZATION

S.S. Girgel

F. Scorina Gomel State University

Формализм для описания векторных параксиальных световых пучков распространен на гауссовоподобные пучки с неоднородной поляризацией, включая общие ТМ и ТЕ моды. Предложены простые выражения для поляризации и плотности потока энергии электромагнитного поля таких пучков. Проведенное графическое моделирование поляризационных и энергетических свойств векторных гауссовоподобных ТМ пучков подтверждает и дополняет аналитические расчеты.

**Ключевые слова:** параксиальные пучки, векторные пучки, гауссовоподобные пучки, поляризационные свойства, энергетические свойства, ТЕ моды, ТМ моды, неоднородная поляризация.

The formalism for the description of vector paraxial light beams is extended to Gaussian-like with non-homogeneous polarization, including the general TM and TE modes. Simple expressions for polarization and the energy flux density of an electromagnetic field of such beams are discovered. The carried-out graphic modeling of polarizing and power properties of vector Gaussian-like TM beams confirms and calculations supplements analytical.

**Keywords:** paraxial beams, vector beams, Gaussian-like beams, polarizable properties, energy properties, TE modes, TM modes, non-homogeneous polarization.

**Введение**

Часто нужно учитывать векторный характер световых полей. Нами был предложен формализм и найдены [1]–[3] выражения для плотности потока энергии электромагнитного поля  $\mathbf{S}$  векторных параксиальных пучков. В [4] обсуждены векторные однородно поляризованные гауссовоподобные пучки. В настоящей работе этот формализм распространен на векторные параксиальные гауссовоподобные пучки с неоднородной поляризацией. В разделе 2 найдены выражения для плотности потока энергии электромагнитного поля  $\mathbf{S}$  векторных гауссовоподобных ТЕ и ТМ мод. В разделе 3 проведены аналитические расчеты и графическое моделирование поляризационных и графических свойств для определенного типа ТМ мод.

**1 Общий формализм для описания векторных гауссовоподобных параксиальных пучков**

Под гауссовоподобным пучком мы понимаем пучок, амплитуда которого аподизирована гауссианом для того, чтобы пучок переносил конечную мощность. Комплексная амплитуда  $\mathbf{E}_\perp = G\mathbf{h}_\perp$  содержит гауссиан  $G = \frac{1}{q} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2q}\right)$  и является некоторым решением параксиального параболического уравнения

$$(\nabla_\perp^2 + 2ik\partial_z)\mathbf{E}_\perp = 0. \quad (1.1)$$

Обобщая результаты [1]–[4] находим, что полные векторы электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей гауссовоподобного пучка имеют вид

$$\mathbf{E} = G \left( \mathbf{h}_\perp + \left( \frac{i\nabla_\perp \mathbf{h}_\perp}{k} - \frac{\mathbf{r}_\perp \mathbf{h}_\perp}{k} \right) \cdot \mathbf{e}_z \right);$$

$$\mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{n} G \left( [\mathbf{e}_z, \mathbf{h}_\perp] + \left( -\frac{i}{k} [\nabla_\perp, \mathbf{h}_\perp] + \frac{[\mathbf{r}_\perp, \mathbf{h}_\perp]}{q} \right) \right).$$

Всегда можно разложить произвольный вектор  $\mathbf{E}_\perp$  по ортогональному базису ( $\mathbf{E}_\perp = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y$ ) и ввести комплексный параметр поляризации соотношением  $\eta = \eta' + i\eta'' = E_y / E_x$ . Сейчас, согласно Федорову [5], можно ввести комплексный угол ( $\psi' + i\psi''$ ) соотношением  $\eta = \operatorname{tg}(\psi' + i\psi'')$ , тогда азимут эллипса поляризации световой волны относительно оси абсцисс равен  $\psi'$ , а ее эллиптичность  $\gamma$  выражается как  $\gamma = \operatorname{th} \psi''$ . При численных расчетах удобно пользоваться формулами [6]:

$$\operatorname{tg} 2\psi' = \frac{2\eta'}{1 - |\eta|^2}; \quad \operatorname{th} 2\psi'' = \frac{2\eta''}{1 + |\eta|^2}.$$

Если параметр  $\eta$  является константой, то имеем однородно поляризованные пучки. Такие пучки обладают поляризацией, однородной по сечению пучка, и изучались нами в [4].

Плотность энергии электромагнитного поля и плотность потока энергии светового гауссовоподобного пучка можно записать, как [7]

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi} |G\mathbf{h}_\perp|^2; \quad S_z = \frac{c}{n} w = \frac{c\varepsilon}{8\pi n} |G\mathbf{h}_\perp|^2;$$

$$\mathbf{S}_\perp = -\frac{c}{8\pi n} \operatorname{Re}(\varepsilon \mathbf{E}_\perp^* \cdot \mathbf{E}_z + \mu \mathbf{H}_\perp^* \cdot H_z),$$

где символ  $\operatorname{Re}$  означает вещественную часть выражения,  $*$  – комплексное сопряжение.

## 2 Векторные гауссовоподобные ТМ и ТЕ моды

Простейшими примерами неоднородно поляризованных мод являются ТЕ и ТМ моды векторного гауссова пучка [3], имеющие соответственно азимутальную и радиальную поляризацию и обладающие орбитальным потоком энергии. В общем случае, однако, у ТЕ и ТМ мод векторы поляризации имеют и азимутальную, и радиальную составляющие. Поперечные потоки энергии таких мод также содержат одновременно и азимутальные, и радиальные компоненты.

Рассмотрим теперь векторные гауссовоподобные ТЕ и ТМ моды. Решения векторного параболического уравнения (1.1) возьмем в форме  $\mathbf{E}_\perp = G\mathbf{h}_\perp$ , где

$$\mathbf{h}_\perp = \frac{ik\mathbf{r}_\perp}{q} + \nabla_\perp f. \quad (2.1)$$

Заметим, что сама функция  $f$  не удовлетворяет уравнению (1.1). Теперь можно воспользоваться общими выражениями для векторных гауссовоподобных пучков раздела 1. Поляризация векторов поля гауссовоподобных ТЕ и ТМ мод следующая:

$$\mathbf{E}^{(TM)} = G \left( \mathbf{h}_\perp + \left( \frac{i\nabla_\perp \mathbf{h}_\perp}{k} - \frac{\mathbf{r}_\perp \mathbf{h}_\perp}{k} \right) \cdot \mathbf{e}_z \right);$$

$$\mathbf{H}^{(TM)} = \frac{\varepsilon}{n} \mathbf{E}^{(TE)}; \quad (2.2)$$

$$\mathbf{E}^{(TE)} = G [\mathbf{e}_z, \mathbf{h}_\perp]; \quad \mathbf{H}^{(TE)} = -\frac{\varepsilon}{n} \mathbf{E}^{(TM)}.$$

Усредненные по времени плотности энергии  $w$  и потока энергии  $\mathbf{S}$  электромагнитного поля обоих пучков ТЕ и ТМ мод соответственно равны:

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi} |G|^2 |\mathbf{h}_\perp|^2; \quad S_z = \frac{c}{n} w;$$

$$\mathbf{S}_\perp = -\frac{c\varepsilon}{8\pi n} |G|^2 \operatorname{Re} \left( \mathbf{h}_\perp^* \cdot \left( -\frac{\mathbf{r}_\perp \mathbf{h}_\perp}{q} + \frac{i\nabla_\perp \mathbf{h}_\perp}{k} \right) \right).$$

ТЕ и ТМ моды для круговых гауссовых пучков обсуждались нами в [8]. Здесь, в качестве примера, возьмем  $f = x/q$  в (2.1) и обсудим более общие ТЕ и ТМ моды. Для упрощения анализа целесообразно перейти к безразмерным переменным [4]. Используя характерные продольный масштаб  $q_0''$  и поперечный масштаб  $w_0$ , введем безразмерные нормированные переменные

$$X = \frac{x}{w_0}; \quad Y = \frac{y}{w_0}; \quad Z = \frac{z}{q_0''}; \quad \mathbf{R}_\perp = \frac{\mathbf{r}_\perp}{w_0}.$$

В безразмерных величинах комплексный параметр пучка  $Q$  и гауссиан  $G$ :

$$Q = Z - i; \quad G = \frac{1}{Q} \exp \left( \frac{i\mathbf{R}_\perp^2}{Q} \right);$$

$$|G|^2 = \frac{1}{|Q|^2} \exp \left( \frac{-\mathbf{R}_\perp^2}{|Q|^2} \right).$$

Векторы поля рассматриваемых гауссовоподобных ТЕ и ТМ мод равны

$$\mathbf{E}^{(TM)} = \frac{G}{Q} \left[ \frac{2iX\mathbf{R}_\perp}{Q} + \mathbf{e}_x - \frac{2X\theta}{Q} \left( 2 + \frac{i\mathbf{R}_\perp^2}{Q} \right) \cdot \mathbf{e}_z \right];$$

$$\mathbf{H}^{(TM)} = \frac{\varepsilon}{n} \mathbf{E}^{(TE)}; \quad (2.3)$$

$$\mathbf{E}^{(TE)} = \frac{G}{Q} \left[ \frac{2iX[\mathbf{e}_z, \mathbf{R}_\perp]}{Q} + \mathbf{e}_y \right];$$

$$\mathbf{H}^{(TE)} = -\frac{\varepsilon}{n} \mathbf{E}^{(TM)}. \quad (2.4)$$

$\mathbf{E}^{(TM)}$  можно рассматривать как когерентную суперпозицию гауссового линейно поляризованного и радиально поляризованного вихревого гауссового пучков.

Выразим плотность потока энергии поля светового пучка в безразмерной форме

$$\mathbf{S} = S_z \mathbf{e}_z + \mathbf{S}_\perp,$$

где

$$S_z = \frac{c\varepsilon}{8\pi n} \frac{|G|^2}{|Q|^4} 4X^2 \left( (\mathbf{R}_\perp^2 - 1) + |Q|^2 \right); \quad (2.5)$$

$$\mathbf{S}_\perp = \frac{c\varepsilon}{8\pi n} \frac{|G|^2}{|Q|^6} 40XY \times$$

$$\times \left( \mathbf{e}_x \left( \mathbf{R}_\perp^2 (X^2 - 1) + |Q|^2 \right) + \mathbf{e}_y XY \mathbf{R}_\perp^2 \right).$$

Здесь введен параметр параксиальности  $\theta = w_0 / q_0'' \leq 10^{-3}$ .

## 3 Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков ТМ мод

Для ТМ мод (2.2) выражения (1.1) для поляризационных характеристик принимают вид:

$$\operatorname{tg} 2\psi' = \frac{4XY(2X^2 - 1)}{(2X^2 - 1)^2 + Z^2 - 4X^2 Z^2};$$

$$\operatorname{th} 2\psi'' = \frac{4XYZ}{(2X^2 - 1)^2 + Z^2 + 4X^2 Z^2}.$$

С помощью СКМ Mathematica и Maple проводилось графическое моделирование поляризации и потоков энергии для ТМ мод (2.2) (рисунки 3.1 и 3.2).

Анализируя (2.3)–(2.6) и рисунки 3.1 и 3.2, приходим к следующим выводам.

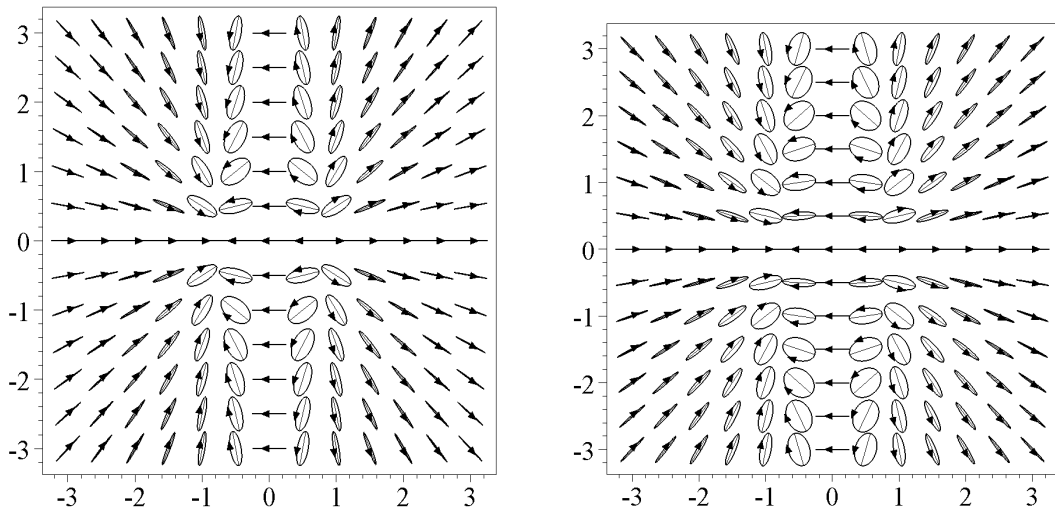


Рисунок 3.1 – Эллипсы поляризации для ТМ мод при  $Z = 1$  и  $Z = 2$

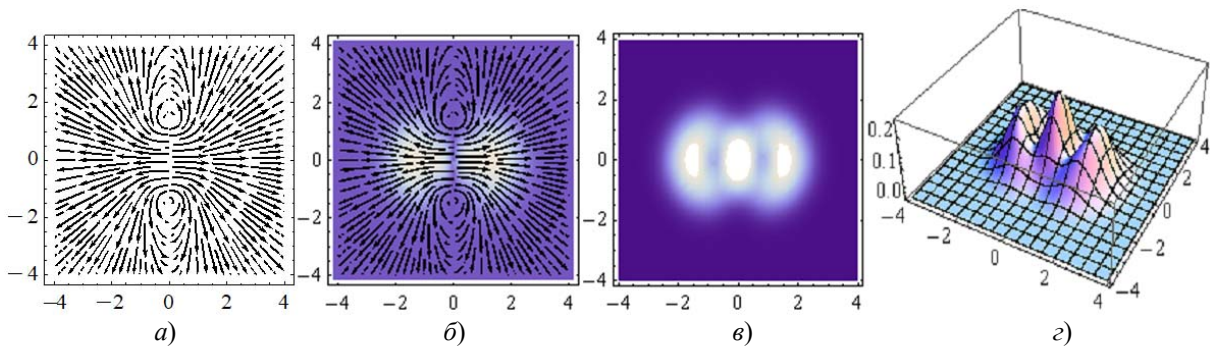


Рисунок 3.2 – Поперечный поток энергии и интенсивность ТМ мод при  $Z = 1$ :  
 а) – поперечный поток энергии; б) – поперечный поток энергии вместе с его интенсивностью;  
 в) и г) – 2D и 3D графики полной интенсивности ТМ моды

В общем случае поляризация рассматриваемых ТМ-мод (по вектору  $\mathbf{E}$ ) – эллиптическая, неоднородная по сечению пучка. Направления вращения эллипсов поляризации изменяются на противоположные при пересечении осей координат  $OX$  и  $OY$ . Поэтому при  $X = 0$  и при  $Y = 0$  поляризация становится линейной, вдоль оси  $OX$ . При  $Z = 0$  поляризация линейна во всем поперечном сечении пучка. Циркулярной поляризации соответствуют 4 точки

$$\left( X = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; Y = \pm \frac{\sqrt{2}Z}{2} \right)$$

в поперечном сечении.

При возрастании расстояния от оси  $OZ$  поляризация стремится к линейной радиальной. Исключение составляет область  $|X| \leq 2$  с эллиптической поляризацией. Заметим [3], что у ТМ мод гауссовых пучков вектор  $\mathbf{E}$  имеет строго радиальную поляризацию.

Эллипсы поляризации для ТЕ мод ортогональны эллипсам поляризации для ТМ мод, т. е. повернуты на  $90^\circ$ . С увеличением  $Z$  пучок постепенно расходится (рисунок 3.1).

Существует также поперечный  $\mathbf{S}_\perp$  поток энергии, который значительно меньше

$$(S_z / |\mathbf{S}_\perp| \approx \theta = w_0 / q_0'' \leq 10^{-3})$$

продольного  $S_z$  потока энергии. Картины эллипсов поляризации и плотности поперечных потоков энергии обладают одинаковой точечной группой симметрии:  $2_2\ m$ . Вдали от оси пучка, исключая область  $|X| \leq 2$ , направления поперечных потоков энергии становятся радиальными. Как известно [3], у ТМ и ТЕ гауссовых мод поперечные потоки энергии всегда радиальны.

Интенсивность ТМ пучка (2.3) имеет три максимума интенсивности, как хорошо видно на рисунке 3.2 г. Интенсивности поперечного и продольного потоков энергии обладают, естественно, различными пространственными конфигурациями (рисунки 3.2 б и 3.2 в).

### Заключение

Для описания физических характеристик векторных парааксиальных гауссовоподобных световых пучков с неоднородной поляризацией предложен соответствующий векторный формализм.

Найдены простые выражения для поляризации и плотности потока энергии электромагнитного поля  $\mathbf{S}$  векторных гауссовоподобных световых пучков с неоднородной поляризацией, включая общие ТМ и ТЕ моды. Проведенное графическое моделирование поляризационных и энергетических свойств векторных гауссовоподобных ТМ пучков (2.3) наглядно продемонстрировало справедливость выполненных аналитических расчетов.

Следует отметить, что исследований закономерностей распространения поперечных потоков энергии векторных пучков с неоднородной поляризацией пока проведено мало, например: пучки гауссовы [3], Бесселя – Гаусса [7], Лагерра – Гаусса [8], Гельмгольца – Гаусса [9]. Формализм рассматриваемых нами векторных гауссовоподобных пучков пригоден для всех этих и некоторых других типов пучков.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Гиргель, С.С.* Свойства векторных параксиальных световых пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 20–24.
2. *Гиргель, С.С.* Свойства векторных параксиальных световых пучков. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1 (10). – С. 11–14.
3. *Гиргель, С.С.* Поляризационные и энергетические свойства векторных параксиальных гауссовых световых пучков / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 3 (12). – С. 19–24.
4. *Гиргель, С.С.* Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 1 (26). – С. 1–5.
5. *Федоров, Ф.И.* Оптика анизотропных сред / Ф.И. Федоров. – Мн.: Изд-во АН БССР, 1976. – 380 с.
6. *Борн, М.* Основы оптики / М. Борн, Е. Вольф. – М.: Наука, 1970. – 587 с.
7. *Гиргель, С.С.* Поляризационные и энергетические свойства векторных бессель-гауссовых световых пучков / С.С. Гиргель // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2006. – № 6 (39). – Ч. 1. – С. 49–52.
8. *Bandres, M.A.* Vector Helmholtz-Gauss and vector Laplace-Gauss beams / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2005. – Vol. 30, № 16. – P. 2155–2157.
9. *Allen, L.* The Poynting vector in Laguerre-Gaussian beams and the interpretation of their angular momentum density / L. Allen, M. I. Padgett // Opt. Commun. – 2000. – Vol. 184, № 1–4. – P. 67–71.

*Поступила в редакцию 06.09.17.*

УДК 530.1; 536.7; 544.2

## СВОЙСТВА НЕИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В МОДЕЛИ ИСИКАВЫ – ЧАНГА – ЛУ

Е.А. Дей, Г.Ю. Тюменков

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

## PROPERTIES OF NON-IDEAL GAS IN THE ISHIKAWA – CHUNG – LU MODEL

E.A. Dey, G.Yu. Tyumenkov

F. Scorina Gomel State University

В рамках термодинамического метода исследованы свойства неидеального газа, описываемого уравнением состояния Исикавы – Чанга – Лу. Параметры уравнения выражены через характеристики критического состояния и получена приведенная форма уравнения. Выполнен вывод аналитических соотношений для физических параметров, энтропии и термодинамических потенциалов газа. Рассмотрен процесс Джоуля–Томсона, определена форма кривой инверсии знака эффекта в приведенных переменных. Найдены выражения для параметров уравнения, обеспечивающие совпадение кривой инверсии для аргона с результатами эксперимента.

**Ключевые слова:** неидеальный газ, критические параметры, уравнение состояния Исикавы – Чанга – Лу, приведенные переменные, процесс Джоуля – Томсона, кривая инверсии, критический коэффициент сжимаемости.

In the framework of thermodynamic method the properties of non-ideal gas are considered in the paper, using the Ishikawa – Chung – Lu equations of state. The parameters of the equation are expressed by characteristics of critical state and reduced form of the equation is found as well. Analytical relations are derived for physical parameters, entropy, and thermodynamic potentials of gas. The Joule-Thomson process is considered, the shape of the inversion curve of the sign of the effect in the reduced variables is determined. Expressions for the parameters of the equation are found ensuring the coincidence of the argon inversion curve with the experimental results.

**Keywords:** non-ideal gas, critical parameters, Ishikawa – Chung – Lu equation of state, reduced variables, Joule – Thomson process, inversion curve, critical compressibility coefficient.

## Введение

Для термодинамического описания свойств неидеальных газов используются полуэмпирические уравнения состояния. Классическим примером такого рода уравнений является уравнение Ван-дер-Ваальса [1], [2], на основании которого были предсказаны метастабильные состояния переохлажденной жидкости и пересыщенного пара. В настоящее время на практике, наряду с уравнением Ван-дер-Ваальса, используются и другие уравнения состояния [3]–[8], точнее описывающие реальные газы в определенных областях значений термодинамических параметров.

Одним из лучших вариантов уравнения состояния неидеального газа вплоть до настоящего времени остается уравнение Редлиха – Квонга [5], в котором явным образом была введена зависимость слагаемого, учитывающего межмолекулярное отталкивание, от температуры вида  $1/\sqrt{T}$ . Такой подход стимулировал развитие нового направления в создании и применении уравнений состояния с температурно-зависимыми параметрами. Так, в уравнениях Соаве – Редлиха – Квонга [6] и Пенга – Робинсона [7] температурная зависимость уже введена в параметр  $a(T, \omega)$ , связанный с межмолекулярным притяжением, и имеет линейный по температуре вид. Кроме того, этот параметр считается зависящим от ацентрического фактора Питцера  $\omega$  [3], что позволяет

учесть свойства газов, молекулы которых не являются сферически-симметричными. Параметр  $b$  во всех перечисленных уравнениях состояния считается постоянным.

Использование температурно-зависимых параметров получило дальнейшее развитие в работах Т. Исикавы, У.К. Чанга и Б. Лу [8], [9], в которых было предложено уравнение с новой формой «отталкивательного» слагаемого и двумя температурно-зависимыми параметрами. Для одного моля газа это уравнение записывается в виде

$$P = \frac{RT(2V + b(T))}{V(2V - b(T))} - \frac{a(T)}{\sqrt{TV}(V + b(T))} \quad (0.1)$$

с параметрами, имеющими структуру

$$a(T) = \Omega_a \alpha(\tilde{T}) \frac{R^2 T_k^{5/2}}{P_k}, \quad b(T) = \Omega_b \beta(\tilde{T}) \frac{RT_k}{P_k}, \quad (0.2)$$

$$\alpha(1) = \beta(1) = 1,$$

где  $T_k, P_k$  – температура и давление критического состояния,  $\tilde{T} = T/T_k$  – безразмерная приведенная температура.

Функции  $\alpha(\tilde{T}), \beta(\tilde{T})$  в работе [8] представлялись в виде полиномов

$$\alpha(\tilde{T}) = \sum_{k=0}^3 a_k \tilde{T}^k, \quad \beta(\tilde{T}) = \sum_{k=0}^3 b_k \tilde{T}^k, \quad (0.3)$$

коэффициенты которых для каждого вещества подбирались по критерию наилучшего совпадения

с экспериментальными данными о давлении насыщенного пара, теплоте парообразования, значении второго вириального коэффициента. Диапазон рассматриваемых значений приведенной температуры составлял  $0,6 \leq \tilde{T} \leq 1,6$ .

В другой работе этих же авторов [9] для описания свойств газа в сверхкритической области зависимость параметров уравнения (0.1) от температуры была выбрана в ином виде, а именно:

$$\alpha(\tilde{T}) = \sum_{k=0}^2 c_k \tilde{T}^{-k}, \quad \beta(\tilde{T}) = \sum_{k=0}^2 d_k \tilde{T}^{-k}. \quad (0.4)$$

В статье [10] уравнение Исакавы – Чанга – Лу [8] было проанализировано с точки зрения PVT критерия и отмечены его достоинства и недостатки. В [11] было проведено сравнение одиннадцати уравнений состояния по их способности описывать экспериментальные параметры жидкой и газовой фаз в двухфазных системах и показано, что уравнение Исакавы – Чанга – Лу с параметрами (0.4) по большинству критериев превосходит уравнение Редлиха – Квонга и может рассматриваться как одно из лучших.

Дальнейшим развитием уравнений состояния типа Исакавы – Чанга – Лу можно считать уравнение, предложенное в работе [12], в которой введены отдельные параметры для числителя и знаменателя «отталкивательного» слагаемого.

Следует отметить, что в упомянутых работах основное внимание уделялось анализу уравнений состояния с точки зрения химической технологии и в меньшей мере рассматривались вытекающие из них физические свойства неидеальных газов.

В настоящей работе для уравнения состояния Исакавы – Чанга – Лу найдена связь параметров уравнения с критическими параметрами газа, выведены теоретические соотношения для важных физических характеристик газа, уравнение выражено в безразмерных приведенных переменных. Получены расчетные формулы и численно построена кривая инверсии эффекта Джоуля – Томсона в приведенных переменных для аргона, выполнено графическое сопоставление ее с кривыми для других уравнений состояния и усредненными экспериментальными данными. Предложены новые выражения для температурно-зависимых параметров уравнения, обеспечивающие хорошее согласие кривой инверсии с усредненной экспериментальной кривой.

### 1 Критическое состояние и параметры уравнения

Одним из элементов сопоставления уравнений состояния с экспериментальными данными является рассмотрение критического состояния вещества, при котором исчезают различия в физических свойствах жидкости и пара. На графике изотермы при критической температуре этому состоянию соответствует единственная точка,

являющаяся одновременно точкой перегиба и точкой схождения экстремумов изотермы. Математически это означает, что

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{T_{кр}} = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_{T_{кр}} = 0. \quad (1.1)$$

Условия (1.1) образуют систему уравнений, решение которой с учетом (0.1) позволяет выразить характеристики критического состояния газа (критическую температуру  $T_k$ , критическое давление  $P_k$  и критический объем  $V_k$ ) через параметры  $a, b$  уравнения состояния

$$V_{кр} = \chi b, \quad T_{кр} = \sigma^2 \left(\frac{a}{bR}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad P_{кр} = \varphi \left(\frac{a^2 R}{b^5}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad (1.2)$$

где использованы обозначения для коэффициентов

$$\chi = 2,89812008, \quad \sigma = \frac{2\chi - 1}{2\chi + 2} = 0,61519913,$$

$$\varphi = \frac{3}{(\chi + 1)^2 (2\chi - 1)} = 0,04116327.$$

В формулах (1.2) введен параметр  $\chi = V_{кр} / b$ , имеющий смысл коэффициента критического объема. В случае уравнения состояния (0.1) численное значение этого параметра является корнем кубического уравнения

$$8\chi^3 - 12\chi^2 - 30\chi - 7 = 0$$

и определяется выражением

$$\chi = \sqrt{6} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right) + \frac{1}{2} = 2,89812008.$$

Соотношения (1.2) позволяют вычислить такую важную характеристику феноменологического уравнения состояния газа как критический коэффициент сжимаемости

$$Z_{кр} = \frac{P_{кр} V_{кр}}{RT_{кр}} = \frac{2\chi}{6\chi + 1} = 0,31520628.$$

Такое значение  $Z_{кр}$  близко к наблюдаемым значениям  $0,27 \div 0,30$  для большинства реальных газов и точнее соответствующих значений, полученных из уравнения Ван-дер-Ваальса ( $Z_{кр} = 3/8 = 0,375$ ) и уравнения Редлиха – Квонга ( $Z_{кр} = 1/3$ ).

Соотношения (1.2) также используются для получения численных значений параметров уравнения состояния по экспериментальным значениям критических температур и давлений газов

$$\Omega_a = \frac{8(\chi + 1)^3}{3(6\chi + 1)^2} = 0,46712311,$$

$$\Omega_b = \frac{2}{6\chi + 1} = 0,10876233.$$

Критические параметры во многих случаях удобно использовать в качестве единиц измерения термодинамических величин. Это означает переход в соотношениях к приведенным, то есть, относительным безразмерным переменным

$$\tilde{P} = \frac{P}{P_{кр}}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{T_{кр}}, \quad \tilde{V} = \frac{V}{V_{кр}}.$$

В приведенных переменных уравнение Исикавы – Чанга – Лу (0.1) принимает вид

$$\tilde{P} = \frac{\tilde{T}(2\chi\tilde{V} + \beta(\tilde{T}))}{\Omega_b\chi\tilde{V}(2\chi\tilde{V} - \beta(\tilde{T}))} - \frac{\Omega_a\alpha(\tilde{T})}{\Omega_b^2\sqrt{\tilde{T}}\chi\tilde{V}(\chi\tilde{V} + \beta(\tilde{T}))}. \quad (1.3)$$

### 2 Некоторые физические параметры газа

На основании уравнения состояния получают аналитические выражения для многих физических параметров реального газа, имеющих технические приложения. Например, для коэффициента изотермического сжатия получаем

$$k_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T^{-1} = V \left[ \frac{RT(4V^2 + 4Vb(T) - b^2(T))}{(2V - b(T))^2} - \frac{a(T)(2V + b(T))}{\sqrt{T}(V + b(T))^2} \right]^{-1}.$$

Аналогичным образом находим соотношение для разности изобарной и изохорной молярных теплоемкостей. При этом учитываем главные слагаемые и пренебрегаем величинами старших порядков малости с учетом физических условий применимости уравнения состояния ( $V \gg b$ )

$$c_p - c_v = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_P^{-1} \approx R \left\{ 1 + \frac{3}{RVT^{3/2}} \left[ a(T) - 2T \frac{da}{dT} \right] \right\}.$$

Несомненный интерес также представляет так называемая температурная точка Бойля, удовлетворяющая условию

$$\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = 0; \quad P_B \equiv P(T_B, V_B) = 0.$$

Соответствующее значение  $T_B$  является верхней температурной границей для состояния растянутой жидкости, характеризующегося отрицательным давлением [1], [2]. Для уравнения (0.1) получаем соотношения, определяющие эту точку

$$T_B = \left[ \frac{2\sqrt{6}a(T_B)}{(5\sqrt{6} + 12)Rb(T_B)} \right]^{2/3} = 0,344 \left( \frac{a(T_B)}{Rb(T_B)} \right)^{2/3},$$

$$V_B = \frac{\sqrt{6} + 1}{2} b(T_B) = 1,725b(T_B).$$

### 3 Энтропия и термодинамические потенциалы

Определим вначале полный дифференциал энтропии, соответствующий уравнению состояния (0.1):

$$dS = \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV =$$

$$= \frac{c_v(T)}{T} dT + \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dV = \frac{c_v(T)}{T} dT + \left\{ \frac{R}{V} \left[ \frac{2V + b(T)}{2V - b(T)} \right] + \frac{4RT}{(2V - b(T))^2} \cdot \frac{db}{dT} \right\} dV + \left\{ \frac{1}{\sqrt{TV}(V + b(T))} \left[ a(T) \left( \frac{1}{2T} + \frac{1}{(V + b(T))} \cdot \frac{db}{dT} \right) - \frac{da}{dT} \right] \right\} dV. \quad (3.1)$$

Пренебрегая возможной слабой температурной зависимостью молярной изохорной теплоемкости и полагая  $c_v$  постоянной, после интегрирования полного дифференциала (3.1) получаем выражение для самой энтропии

$$S(T, V) = c_v \ln T + \frac{1}{b(T)} \left[ \frac{a(T) - 2T \frac{da}{dT}}{2T^{3/2}} + \frac{a(T)}{\sqrt{T}b(T)} \frac{db}{dT} \right] \ln \frac{V}{V + b(T)} + 2R \ln \frac{2V - b(T)}{\sqrt{V}} + \frac{db}{dT} \left[ \frac{a(T)}{\sqrt{T}b(T)(V + b(T))} - \frac{2RT}{2V - b(T)} \right] + C_1,$$

$$C_1 = S_0 - c_v \ln T_0 - \frac{1}{b(T_0)} \left[ \frac{a(T_0) - 2T_0 \frac{da}{dT} \Big|_{T_0}}{2T_0^{3/2}} + \frac{a(T_0)}{\sqrt{T_0}b(T_0)} \frac{db}{dT} \Big|_{T_0} \right] \times$$

$$\times \ln \frac{V_0}{V_0 + b(T_0)} - 2R \ln \frac{2V_0 - b(T_0)}{\sqrt{V_0}} + \frac{db}{dT} \Big|_{T_0} \left[ \frac{a(T_0)}{\sqrt{T_0}b(T_0)(V_0 + b(T_0))} - \frac{2RT_0}{2V_0 - b(T_0)} \right]. \quad (3.2)$$

Здесь нулевыми считаются параметры произвольного фиксированного состояния.

Найдем внутреннюю энергию газа Исикавы – Чанга – Лу. Используя дифференциальную форму первого начала термодинамики

$$dU = TdS - PdV$$

и само уравнение, для полного дифференциала внутренней энергии получаем

$$dU = c_v dT + \frac{1}{2\sqrt{TV}(V + b(T))} \left( 3a(T) - 2T \frac{da}{dT} \right) dV + \frac{db}{dT} \left[ \frac{4RT^2}{(2V - b(T))^2} + \frac{a(T)\sqrt{T}}{V(V + b(T))^2} \right] dV. \quad (3.3)$$

После интегрирования (3.3) внутренняя энергия представляется в виде

$$U = U(T, V) = c_v T +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{b(T)} \left[ \frac{3a(T) - 2T \frac{da}{dT}}{2\sqrt{T}} + \frac{a(T)\sqrt{T}}{b(T)} \frac{db}{dT} \right] \ln \frac{V}{V+b(T)} + \\
 & + \frac{db}{dT} \left[ \frac{a(T)\sqrt{T}}{b(T)(V+b(T))} - \frac{2RT^2}{2V-b(T)} \right] + C_2, \\
 & C_2 = U_0 - c_v T_0 - \\
 & - \frac{1}{b(T_0)} \left[ \frac{3a(T_0) - 2T_0 \frac{da}{dT}|_{T_0}}{2\sqrt{T_0}} + \frac{a(T_0)\sqrt{T_0}}{b(T_0)} \frac{db}{dT}|_{T_0} \right] \times \\
 & \times \ln \frac{V_0}{V_0+b(T_0)} - \\
 & - \frac{db}{dT}|_{T_0} \left[ \frac{a(T_0)\sqrt{T_0}}{b(T_0)(V_0+b(T_0))} - \frac{2RT_0^2}{2V_0-b(T_0)} \right]. \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

Явное выражение для энтальпии  $W$  получаем на основании ее определения  $W = U + PV$  и с учетом (3.4) и (0.1),

$$\begin{aligned}
 W(T, V) &= U(T, V) + PV = \\
 &= c_v T + \frac{1}{b(T)} \left[ \frac{3a(T) - 2T \frac{da}{dT}}{2\sqrt{T}} + \frac{a(T)\sqrt{T}}{b(T)} \frac{db}{dT} \right] \times \\
 & \times \ln \frac{V}{V+b(T)} + \frac{a(T)}{\sqrt{T}(V+b(T))} \left[ \frac{T}{b(T)} \frac{db}{dT} - 1 \right] + \\
 & + \frac{RT}{2V-b(T)} \left[ 2V+b(T) - 2T \frac{db}{dT} \right] + C_2. \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

Полученные выше выражения для  $S$ ,  $U$  и  $W$  позволяют также найти явный вид свободной энергии  $F$  и термодинамического потенциала Гиббса  $\Phi$ , что несложно сделать, используя их определения

$$\begin{aligned}
 F &= U - TS, \\
 \Phi &= U - TS + PV = W - TS = F + PV
 \end{aligned}$$

и полученные в работе формулы (3.2), (3.4) и (3.5).

#### 4 Изэнтальпическое охлаждение газа

Применим уравнение Исикавы – Чанга – Лу для исследования изэнтальпического подсистемно-равновесного процесса прокачки реального газа сквозь пористую перегородку. При этом процессе наблюдается изменение температуры газа (эффект Джоуля – Томсона). Математически это изменение характеризуется коэффициентом Джоуля – Томсона

$$\mu_{JT} = \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_W = \frac{1}{c_p} \left[ T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P - V \right] = -\tilde{\lambda} \frac{P_\kappa}{C_p} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T,$$

где приведенный коэффициент определяется аналогично [13], [14]

$$\tilde{\lambda} = \tilde{T} \left( \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{T}} \right)_{\tilde{V}} + \tilde{V} \left( \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{V}} \right)_{\tilde{T}}. \quad (4.1)$$

Для выполнения расчетов удобно ввести параметр  $x = \chi \tilde{V}$ , тогда уравнение в приведенных переменных (1.3) примет вид

$$\tilde{P} = \frac{(6\chi + 1)\tilde{T}(2x + \beta(\tilde{T}))}{2x(2x - \beta(\tilde{T}))} - \frac{2(\chi + 1)^3 \alpha(\tilde{T})}{3\sqrt{\tilde{T}}x(x + \beta(\tilde{T}))}. \quad (4.2)$$

Выполняя соответствующие (4.1) дифференцирования с учетом температурной зависимости параметров (0.2), получаем явное выражение для приведенного параметра  $\tilde{\lambda}$  в модели Исикавы – Чанга – Лу. При уменьшении давления по условию протекания процесса  $dP < 0$  возможны два варианта изменения температуры в зависимости от знака параметра:

$$\tilde{\lambda} > 0 \Rightarrow dT < 0, \quad \tilde{\lambda} < 0 \Rightarrow dT > 0.$$

Первый вариант соответствует положительному эффекту Джоуля – Томсона (газ остывает), второй – отрицательному (газ нагревается). Условием же  $\tilde{\lambda} = 0$  задаются точки инверсии (состояния газа, в которых изменяется знак эффекта).

$$\begin{aligned}
 \tilde{\lambda} &= \frac{3(6\chi + 1)}{(\chi + 1)^3} x(x + \beta(\tilde{T}))^2 \left[ \tilde{T}^2 \left( \frac{d\beta}{d\tilde{T}} \right) - \tilde{T}\beta(\tilde{T}) \right] + \\
 & + (2x - \beta(\tilde{T}))^2 (x + \beta(\tilde{T})) \left[ \frac{3\alpha(\tilde{T})}{2\sqrt{\tilde{T}}} - \sqrt{\tilde{T}} \left( \frac{d\beta}{d\tilde{T}} \right) \right] + \\
 & + (2x - \beta(\tilde{T}))^2 \left[ \sqrt{\tilde{T}}\alpha(\tilde{T}) \left( \frac{d\beta}{d\tilde{T}} \right) + \frac{x}{\sqrt{\tilde{T}}}\alpha(\tilde{T}) \right] = 0.
 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Из формулы (4.3) следует, что при заданной температуре  $\tilde{T}$  условие  $\tilde{\lambda} = 0$  приводит к кубическому уравнению по параметру  $x$ .

В частном случае постоянных параметров

$$a = \Omega_a \frac{R^2 T_k^{5/2}}{P_k}, \quad b = \Omega_b \frac{RT_k}{P_k} \quad (4.4)$$

из (4.3) для температуры инверсии получаем

$$\tilde{T}_i(x) = \left[ \frac{(\chi + 1)^3 (2x - 1)^2 (5x + 3)}{6(6\chi + 1)x(x + 1)^2} \right]^{2/3}.$$

Численное нахождение точек кривой инверсии для параметров (0.2) выполнялось следующим образом. В заданном диапазоне приведенных температур выбирался массив значений и для каждого значения  $\tilde{T}$  на основании уравнения (4.3) вычислялось значение корня уравнения  $x$  и соответственно значения  $\tilde{V} = \chi/x$  и  $\tilde{P}$  по формуле (4.2). Для сопоставления свойств различных уравнений состояния при описании кривой инверсии эффекта Джоуля – Томсона для аргона аналогичные расчеты были выполнены для уравнений Редлиха – Квонга [13], Соаве – Редлиха – Квонга и Пенга – Робинсона при значении ацентрического фактора  $\omega = 0$ . Графики кривых инверсии в приведенных переменных для всех рассмотренных уравнений показаны на рисунке 4.1. Кроме того, на рисунке 4.1 приведена обобщенная экспериментальная кривая инверсии,

полученная при обработке данных для ряда простых веществ, в том числе аргона [15]. Полиномиальная аппроксимация обобщенной кривой имеет вид  $\tilde{P} = \sum_{k=0}^6 \beta_k \tilde{T}^k$ . Значения параметров

аппроксимации:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= -32.5209374, \quad \beta_1 = 65.6922312, \\ \beta_2 &= -39.738430, \quad \beta_3 = 12.9300299, \\ \beta_4 &= -2.46176904, \quad \beta_5 = 0.25378553, \\ \beta_6 &= -0.0109865. \end{aligned}$$

Область положительного эффекта ограничивается сверху кривой инверсии, а снизу осью приведенных температур, что очевидно из поведения  $\tilde{\lambda}$  при больших значениях  $\tilde{T}$  и  $\tilde{P}$ .

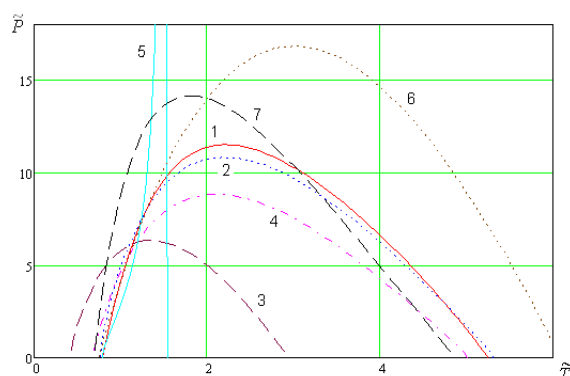


Рисунок 4.1 – Графики кривых инверсии для аргона: 1 – по результатам обработки экспериментальных данных [15];

- 2 – для уравнения Редлиха – Квонга;
- 3 – для уравнения Соаве – Редлиха – Квонга;
- 4 – для уравнения Пенга – Робинсона;
- 5 – для уравнения Исакавы – Чанга – Лу с параметрами (0.3);
- 6 – для уравнения Исакавы – Чанга – Лу с параметрами (0.4);
- 7 – для уравнения Исакавы – Чанга – Лу с постоянными параметрами (4.4).

Анализ поведения кривых инверсии для наиболее часто используемых уравнений состояния показывает, что за исключением уравнения Редлиха – Квонга, все остальные уравнения не дают приемлемых результатов. В связи с этим возникает задача нахождения таких температурно-зависимых параметров уравнения состояния, при которых точки инверсионной кривой наиболее близки экспериментальным данным.

Эта задача была решена в данном случае для уравнения Исакавы – Чанга – Лу. Наилучшее согласие с экспериментальными данными было получено при выборе следующей параметризации

$$\begin{aligned} \alpha(\tilde{T}) &= 0,94162 + 0,48023\tilde{T} - \frac{0,42185}{\tilde{T}}; \\ \beta(\tilde{T}) &= 0,83056 + 0,21595\tilde{T} - 0,04651\tilde{T}^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

На рисунке 4.2 показана кривая инверсии знака эффекта Джоуля – Томсона для уравнения Исакавы – Чанга – Лу, полученная с использованием параметров (4.5).

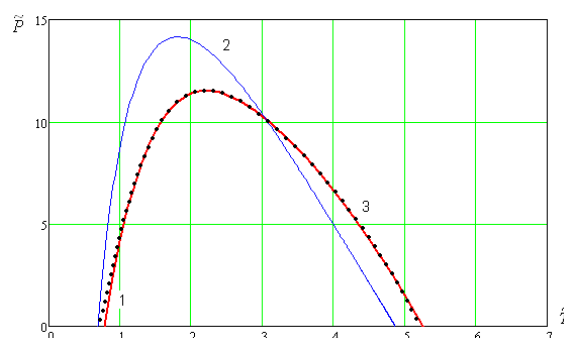


Рисунок 4.2 – Графики кривых инверсии для аргона: 1 – по результатам обработки экспериментальных данных (сплошная линия) [15]; 2 – для уравнения Исакавы – Чанга – Лу с постоянными параметрами (4.4); 3 – для уравнения Исакавы – Чанга – Лу с параметрами (4.5).

### Заключение

Таким образом, в работе определены параметры критического состояния и получен явный вид уравнения Исакавы – Чанга – Лу в приведенной форме. Выполнен вывод соотношений, определяющих энтропию, внутреннюю энергию, энтальпию и другие параметры газов, подчиняющихся данному уравнению состояния. Получено уравнение для расчета кривой инверсии эффекта Джоуля – Томсона в приведенных переменных, выполнен расчет и построены графики кривых инверсии эффекта для аргона при использовании уравнения Исакавы – Чанга – Лу и других популярных уравнений состояния. Впервые найдены параметры уравнения, обеспечивающие хорошее согласие расчетных результатов с экспериментальными данными. Важно отметить, что предложенная аналитическая форма и значения коэффициентов температурно-зависимых параметров уравнения Исакавы – Чанга – Лу обеспечивают также и корректные значения характерных точек кривой инверсии: минимальной и максимальной приведенной температуры инверсии и максимального приведенного давления.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Румер, Ю.Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика / Ю.Б. Румер, М.Ш. Рывкин. – Новосибирск: Издательство Новосибирского университета, 2000. – 608 с.
2. Кудинов, В.А. Техническая термодинамика и теплопередача: учебник для академического бакалавриата / В.А. Кудинов, Э.М. Карташов, Е.В. Стефанюк. – М.: Издательство Юрайт, 2016. – 442 с.

3. Уэйлес, С. Фазовые равновесия в химической технологии / С. Уэйлес – М.: Мир, 1989. – 304 с.
4. Рид, Р. Свойства газов и жидкостей: справочное пособие / Р. Рид, Дж. Праусниц, Т. Шервуд. – Л.: Химия, 1982. – 592 с.
5. Redlich, O. On the thermodynamics of solutions V. equation of state: fugacity of gaseous solutions / O. Redlich, J.N.S. Kwong // Chemical Reviews. – 1949. – Vol. 44. – P. 233–244.
6. Soave, G. Equilibrium constants from a modified Redlich – Kwong equation of state / G. Soave // Chem. Eng. Sci. – 1972. – Vol. 27. – P. 1197–1203.
7. Peng, D.Y. A new two-constant equation of state / D.Y. Peng, D.B. Robinson // Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals. – 1976. – Vol. 15. – № 1. – P. 59–64.
8. Ishikawa, T. A Cubic Perturbed, Hard Sphere Equation of State for Thermodynamic Properties and Vapor – Liquid Equilibrium Calculations / T. Ishikawa, W.K. Chung, B.C.Y. Lu // AIChE Journal. – 1980. – Vol. 26. – P. 372–378.
9. Ishikawa, T. Simple and generalized Equation of State for Vapor – Liquid Equilibrium Calculations / T. Ishikawa, W.K. Chung, B.C.Y. Lu // Advances in Cryogenic Engineering. – 1980. – Vol. 25. – P. 671–681.
10. Martin, J.J. PVT Analysis of a New Cubic–Perturbed, Hard–Sphere Equation of State / J.J. Martin // AIChE Journal. – 1983. – Vol. 29. – P. 369–372.
11. Adachi, Y. Evaluation of cubic Equation of State / Y. Adachi, H. Sugie, B.C.Y. Lu // J. Chem. Eng. of Japan. – 1984. – Vol. 17. – № 6. – P. 624–631.
12. Farrokh-Niae, A.H. A three-parameter cubic equation of state for prediction of thermodynamic properties of fluids / A.H. Farrokh-Niae, H. Moddarress, M. Mohsen-Nia // J. Chem. Thermodynamics. – 2008. – Vol. 40. – P. 84–95.
13. Дей, Е.А. Расчет параметров изоэнтальпического охлаждения газов Редлиха – Квонга / Е.А. Дей, О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2012. – № 6 (75). – С. 39–42.
14. Дей, Е.А. Кривые инверсии эффекта Джоуля – Томсона для обобщенного уравнения Ван-дер-Ваальса / Е.А. Дей, Г.Ю. Тюменков // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2015. – № 6 (93). – С. 117–120.
15. Hendricks, R.C. Joule–Thomson Inversion Curves and Related Coefficients for Several Simple Fluids / R.C. Hendricks, I.C. Peller, A.K. Baron // NASA Technical Note TN D-6807. – NASA, 1972. – 59 p.

Поступила в редакцию 02.08.17.

УДК 535.16:534.341

## ФОТОТЕРМИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЕССЕЛЕВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В ПЛОТНОМ СЛОЕ ХИРАЛЬНЫХ И АХИРАЛЬНЫХ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК

Г.С. Митюрин<sup>1</sup>, Е.В. Лебедева<sup>2</sup>, А.Н. Сердюков<sup>1</sup><sup>1</sup>Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины<sup>2</sup>Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации, Гомель

## PHOTOTHERMAL TRANSFORMATION OF BESSEL LIGHT BEAMS IN THE DENSE LAYER OF CHIRAL AND ACHIRAL CARBON NANOTUBES

G.S. Mityurich<sup>1</sup>, E.V. Lebedeva<sup>2</sup>, A.N. Serdyukov<sup>1</sup><sup>1</sup>F. Scorina Gomel State University<sup>2</sup>Belarusian Trade and Economics University of Consumer Cooperatives, Gomel

Развита теория формирования фотодефлекционного отклика в слоях хиральных и ахиральных углеродных нанотрубок при облучении их поляризованными модами бесселевых световых пучков. В рамках исследований получено решение системы уравнений теплопроводности с использованием интегральных преобразований Фурье – Бесселя и Лапласа для трехслойной структуры.

**Ключевые слова:** фототермическое преобразование, фотодефлекционная спектроскопия, хиральные и ахиральные углеродные нанотрубки, бесселевый световой пучок, диссипация энергии, функция Бесселя, уравнение теплопроводности, преобразование Фурье – Бесселя, угол фотодефлекции.

The theory of formation of photodeflection signal in the dense layer of chiral and achiral carbon nanotubes by irradiation of polarized modes of Bessel light beams was investigated. For the first time the solution of the heat equation was obtained using integral transforms Fourier – Bessel and Laplace for a three-layer medium, which is irradiated with light polarization modes Bessel beams with an intensity distribution in space.

**Keywords:** photothermal transformation, photodeflection spectroscopy, chiral carbon nanotubes, Bessel light beam, energy dissipation, Bessel function, heat equation, Fourier – Bessel transformation, angle of photodeflection.

### Введение

Перспективным материалом в различных областях науки и техники являются углеродные нанотрубки (УНТ). Одним из главных достоинств этих структур является возможность управления свойствами создаваемых слоев УНТ путем изменения геометрических размеров и конфигурации нанообъектов. Классическая теория электродинамики не всегда может быть применена для описания нанотрубок и, следовательно, требуется поиск новых квазиклассических теоретических подходов и исследований, которые позволяли бы решать задачи микро- и макроскопической электродинамики [1], лежащие в основе теоретической базы современной фотоакустической спектроскопии.

Целью данной работы являлось построение теории фототермического преобразования энергии бесселевых световых пучков в плотных слоях хиральных и ахиральных углеродных нанотрубок, находящихся на диэлектрической подложке, для случая трансверсальной геометрии взаимодействия падающего и пробного пучков (рисунок 0.1). Заметим, что не составляет трудности рассмотрение случая коллинеарной геометрии взаимодействия световых пучков.

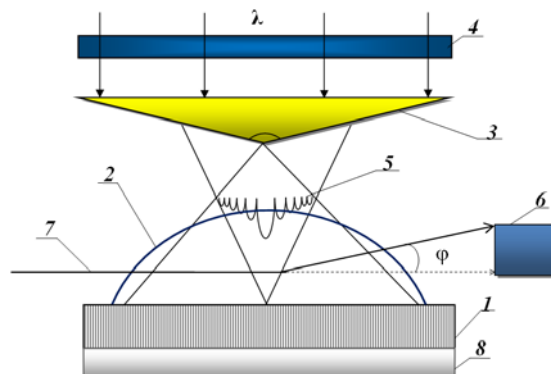


Рисунок 0.1 – Схема регистрации фотодефлекционного сигнала:

- 1 – слой углеродных нанотрубок;
- 2 – «термическая» линза;
- 3 – аксикон;
- 4 – модулятор;
- 5 – ТЕ-мода БСП;
- 6 – позиционно-чувствительный фотодетектор;
- 7 – зондирующий луч;
- 8 – подложка

### 1 Расчет проводимости ахиральных и хиральных нанотрубок

Электронные свойства графена будем описывать на основе закона дисперсии [2]

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \quad (1.1)$$

$$= \pm \gamma_0 \sqrt{1 + 4 \cos(ap_x) \cos\left(\frac{a}{\sqrt{3}} p_y\right) + 4 \cos^2\left(\frac{a}{\sqrt{3}} p_y\right)},$$

в котором учтено взаимодействие только трёх соседних атомов гексагональной структуры. В выражении (1.1)  $\gamma_0 \approx 2,7$  эВ – интеграл перекрытия,  $a = 3b / 2\hbar$ ,  $b$  – расстояние между соседними атомами углерода в графеновой плоскости ( $b = 0,142$  нм),  $p_x, p_y$  – проекции квазиимпульса вектора  $\mathbf{p}$ ,  $\hbar$  – приведенная постоянная Планка, знак «плюс» соответствует зоне проводимости, а знак «минус» – валентной зоне. Законы дисперсии для углеродных нанотрубок типов zigzag и armchair можно легко получить, выполняя соответственно в соотношении (1.1) замены  $\{p_x \rightarrow p_z, p_y \rightarrow p_\phi\}$  и  $\{p_x \rightarrow p_\phi, p_y \rightarrow p_z\}$  соответственно:

$$\varepsilon(\mathbf{p}) =$$

$$= \pm \gamma_0 \sqrt{1 + 4 \cos(ap_z) \cos\left(\frac{a}{\sqrt{3}} p_\phi\right) + 4 \cos^2\left(\frac{a}{\sqrt{3}} p_\phi\right)},$$

$$\varepsilon(\mathbf{p}) =$$

$$= \pm \gamma_0 \sqrt{1 + 4 \cos(ap_\phi) \cos\left(\frac{a}{\sqrt{3}} p_z\right) + 4 \cos^2\left(\frac{a}{\sqrt{3}} p_z\right)}.$$

Нанотрубки типа armchair обладают металлической проводимостью при всех значениях  $m$ , а нанотрубки типа zigzag являются металлами только при  $m = 3q$ , где  $q$  – целое число. Как отмечено в [1], одной из важных особенностей углеродных нанотрубок является то, что при помещении УНТ в продольное магнитостатическое поле меняется характер их электрической проводимости, и, следовательно, изменяя величину намагниченности можно управлять проводимостью нанотрубок.

Далее рассмотрим уравнение Больцмана, описывающее движение  $\pi$ -электронов по цилиндрической поверхности однослойной нанотрубки в полуклассическом приближении [1]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + eE_z \frac{\partial f}{\partial p_z} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} = J(F(\mathbf{p}); f(\mathbf{p}, z, t)), \quad (1.2)$$

где  $e$  – заряд электрона;  $v_z = \partial \varepsilon(\mathbf{p}) / \partial p_z$  – скорость электрона;  $J(F, f)$  – интеграл столкновений;  $F(\mathbf{p}) = [1 + \exp\{\varepsilon(\mathbf{p}) / k_B T\}]^{-1}$  – равновесная функция распределения Ферми;  $T$  – температура;  $k_B$  – постоянная Больцмана.

Для вычисления интеграла столкновений воспользуемся приближением времени релаксации, в соответствии с которым

$$J(F(\mathbf{p}); f(\mathbf{p}, z, t)) \cong \nu [F(\mathbf{p}) - f(\mathbf{p}, z, t)],$$

где  $\nu = 1 / \tau$  – частота релаксации;  $\tau$  – среднее время свободного пробега электрона.

Ограничение, которое накладывается на полуклассическую модель описания движения электрона по поверхности УНТ со стороны высоких частот, можно записать следующим образом:

$$\omega < \omega_l,$$

где  $\omega_l = 2v_F / R_n$  соответствует металлическим нанотрубкам,  $\omega_l = 2v_F / 3R_{cn}$  – полупроводниковым нанотрубкам;  $v_F = a \cdot \gamma_0$  – скорость  $\pi$ -электронов на уровне Ферми;  $R_{cn}$  – радиус нанотрубки.

Далее полуклассическая модель применяется для вычисления аксиального тока в прямой, бесконечно длинной нанотрубке, который возникает под действием электрического поля бегущей волны  $E_z = \text{Re}[E_z^0 \exp\{i(hz - \omega t)\}]$ , где  $h$  – константа распространения.

Найдём малое возмущение  $\delta f$  из уравнения (1.2) путем линейного по полю приближения с учётом того, что  $E_z = F + \text{Re}[\delta f \exp\{i(hz - \omega t)\}]$ :

$$\delta f = -i \frac{\partial F}{\partial p_z} \frac{eE_z^0}{\omega - hv_z + i\nu}.$$

Тогда плотность поверхностного аксиального тока  $j_z = \text{Re}[j_z^0 \exp\{i(hz - \omega t)\}]$  может быть определена в результате интегрирования следующего равенства

$$j_z = \frac{2e}{(2\pi\hbar)^2} \iint v_z f d^2 \vec{p}. \quad (1.3)$$

Выражение (1.3) можно представить в более компактном виде

$$j_z^0 = \sigma_{zz}(h, \omega) E_z^0,$$

где  $\sigma_{zz}$  – аксиальная проводимость нанотрубки, которая может быть определена следующим образом:

$$\sigma_{zz}(h, \omega) = \frac{2e}{(2\pi\hbar)^2} \iint \frac{\partial F}{\partial p_z} \frac{v_z d^2 \vec{p}}{\omega - hv_z + i\nu}. \quad (1.4)$$

Интегрирование в равенстве (1.4) выполняется по первой зоне Бриллюэна. При скоростях электронов много меньших скорости света ( $v_e \ll c$ ,  $c$  – скорость света) электрическая проводимость может быть описана соотношением:

$$\sigma_{zz}(\omega) =$$

$$= -\frac{2i w_{cn} e^2}{3\pi \hbar (mb)} \frac{1}{(\omega + i\nu)} \sum_{s=1}^m \int_{-P_0}^{P_0} v_z^2(p_z, S) \frac{\partial F}{\partial E} dP_z, \quad (1.5)$$

где  $p_z$  – проекция импульса электрона проводимости на ось нанотрубки,

$$P_0 = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{3b\sqrt{n^2 + nm + m^2}}};$$

$\nu = 1 / \tau$  – частота релаксации неравновесных электронов.

Выражения для проводимости углеродных нанотрубок типов zigzag и armchair соответственно имеют вид:

$$\sigma_{zz}(\omega) = -\frac{i w_{cn} e^2}{\sqrt{3} \pi \hbar R (\omega + i\nu)} \sum_{s=1}^m \int_{-p_0}^{p_0} v_z^2(P_z, S) \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} dP_z, \quad (1.6)$$

$$\sigma_{zz}(\omega) = -\frac{i w_{cn} e^2}{\pi \hbar R (\omega + i\nu)} \sum_{s=1}^m \int_{-p_0}^{p_0} v_z^2(P_z, S) \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} dP_z. \quad (1.7)$$

Очевидно, что радиус  $R_{cn}$  определяет размер нанотрубки ( $R_{cn} \sim mb, m \sim 100$ ).

Допустим, что для обоих нанотрубок известен закон дисперсии электронов в виде зависимости энергии от квазиимпульса  $\varepsilon(\vec{p})$ . Используется приближение  $\pi$ -электронов (без спина) и сильной связи электронов в атомах. Заметим, что структура является гексагональной:

$$\varepsilon(p_z, s) = \pm \gamma_0 \sqrt{1 + 4 \cos(a p_z) \cos\left(\frac{\pi S}{m}\right) + 4 \cos^2\left(\frac{\pi S}{m}\right)}; \quad (1.8)$$

$$\varepsilon(p_z, s) = \pm \gamma_0 \sqrt{1 + 4 \cos(ap_\varphi) \cos\left(\frac{\pi p_z}{\sqrt{3}}\right) + 4 \cos^2\left(\frac{\pi p_z}{\sqrt{3}}\right)}, \quad (1.9)$$

где  $p_\varphi = \pi S/R$  – проекция квазиимпульса на ось  $O\varphi$  в цилиндрической системе координат.

Выражения (1.8), (1.9) представляют законы дисперсии для нанотрубок типов zigzag и armchair соответственно. Для углеродных нанотрубок (графен) знаки «плюс» и «минус» определяются аналогично выражению (1.1).

Отдельно рассмотрим хиральные углеродные нанотрубки. Запишем закон дисперсии [3], [4]:

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \pm \gamma_0 \left( 3 + 2 \cos(\mathbf{k} \mathbf{a}_1) + 2 \cos(\mathbf{k} \mathbf{a}_2) + 2 \cos(\mathbf{k}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)) \right)^{1/2} = \pm \gamma_0 \left( 1 + 4 \cos\left(\mathbf{k} \frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2}{2}\right) \cos\left(\mathbf{k} \frac{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2}{2}\right) + 4 \cos^2\left(\mathbf{k} \frac{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2}{2}\right) \right)^{1/2}, \quad (1.10)$$

где  $\mathbf{k}$  – волновой вектор,  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$  – вектора трансляций гексагональной решетки.

При переходе в выражении (1.10) от волнового вектора  $\mathbf{k}$  к вектору квазиимпульса  $\mathbf{p}$  можно получить

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \pm \gamma_0 \left( 1 + 4 \cos\left(\mathbf{p} \frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2}{2\hbar}\right) \cos\left(\mathbf{p} \frac{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2}{2\hbar}\right) + 4 \cos^2\left(\mathbf{p} \frac{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2}{2\hbar}\right) \right)^{1/2}. \quad (1.11)$$

С учетом (1.11) и модуля вектора хиральности

$$|\mathbf{C}_h| = a \sqrt{n^2 + nm + m^2},$$

получим закон дисперсии в цилиндрической системе координат ( $p_x \rightarrow p_\varphi, p_y \rightarrow p_z$ )

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \pm \gamma_0 \left[ 1 + 4 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + nm + m^2}} \times \left( \frac{3\pi q(n+m)}{2\sqrt{n^2 + nm + m^2}} + \frac{\sqrt{3}a(n-m)}{4\hbar} p_z \right) \right) \times \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + nm + m^2}} \left( \frac{\pi q(n-m)}{2\sqrt{n^2 + nm + m^2}} + \frac{\sqrt{3}a(n+m)}{4\hbar} p_z \right) \right) + 4 \cos^2\left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + nm + m^2}} \times \left( \frac{\pi q(n-m)}{2\sqrt{n^2 + nm + m^2}} + \frac{\sqrt{3}a(n+m)}{4\hbar} p_z \right) \right) \right]^{1/2}. \quad (1.12)$$

Проекция вектора скорости электрона на ось  $z$  есть частная производная дисперсии по соответствующей проекции квазиимпульса [5]

$$v(p_z) = \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial p_z}. \quad (1.13)$$

С учетом соотношения (1.12) и (1.13) получим выражение для проекции вектора скорости электрона

$$v(p_z) = \left[ \pm \sqrt{3} \gamma_0 a \left[ m \sin(\psi_1 - \psi_2) - n \sin(\psi_1 + \psi_2) - (n+m) \sin 2\psi_2 \right] / \left[ \hbar \sqrt{n^2 + nm + m^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times 1 + 4 \cos \psi_1 \cos \psi_2 + 4 \cos^2 \psi_2 \right] \right], \quad (1.14)$$

где

$$\psi_1(p_z) = \frac{1}{\sqrt{n^2 + nm + m^2}} \times \left( \frac{3\pi q(n+m)}{2\sqrt{n^2 + nm + m^2}} + \frac{\sqrt{3}a(n-m)}{4\hbar} p_z \right); \\ \psi_2(p_z) = \frac{1}{\sqrt{n^2 + nm + m^2}} \times \left( \frac{\pi q(n-m)}{2\sqrt{n^2 + nm + m^2}} + \frac{\sqrt{3}a(n+m)}{4\hbar} p_z \right).$$

Подставив в выражение (1.5) соотношение для проекции вектора скорости электрона, получим

$$\sigma_{zz}(\omega) = -\frac{ie^2}{\pi \hbar \sqrt{n^2 + nm + m^2} (\omega + i\nu)} \times \sum_{s=1}^m \int_{-p_0}^{p_0} v_z^2(p_z, s) \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} dp_z. \quad (1.15)$$

Будем считать, что носителями тока являются электроны, а не дырки, так как их подвижность  $\mu_n \ll \mu_p$ . Тогда в формулах (1.11), (1.12) и (1.14) следует оставить знак «плюс». Так как нанотрубки типов armchair и zigzag не обладают хиральностью, то при расчетах диссипации

световой энергии следует ограничиваться линейно поляризованным излучением.

Содержащаяся в выражениях (1.6), (1.7) и (1.15) величина  $\partial F/\partial \varepsilon$  определяется по формуле [5]

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = \frac{\exp(\varepsilon/k_B T)}{k_B T [1 + \exp(\varepsilon/k_B T)]^2}, \quad (1.16)$$

где  $F(\bar{p}) = [1 + \exp\{\varepsilon(\bar{p})/k_B T\}]^{-1}$  – равновесная функция распределения Ферми;  $T$  – температура;  $k_B$  – постоянная Больцмана.

Используя теорему о среднем

$$P_0 = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{3w_{cn}b}},$$

$$\int_{-P_0}^{P_0} f(x) dx \approx f(P_0)(P_0 - (-P_0)) = 2P_0 f(P_0),$$

получим выражения для аксиальных проводимостей углеродных нанотрубок трех типов:

– zigzag:

$$|\sigma_{zz}(\omega)| = \frac{2w_{cn}e^2P_0}{\sqrt{3}\pi^2R_{cn}\sqrt{(\omega^2 + v^2)}k_B T} \times \sum_{s=1}^m \frac{\exp(\varepsilon_0/k_B T)}{[1 + \exp(\varepsilon_0/k_B T)]^2}, \quad (1.17)$$

– armchair:

$$|\sigma_{zz}(\omega)| = \frac{2w_{cn}e^2P_0}{\pi^2R_{cn}\sqrt{(\omega^2 + v^2)}k_B T} \times \sum_{s=1}^m \frac{\exp(\varepsilon_0/k_B T)}{[1 + \exp(\varepsilon_0/k_B T)]^2}, \quad (1.18)$$

– chiral:

$$\sigma_{zz}(\omega) = \frac{2P_0ie^2}{\pi\hbar\sqrt{n^2 + nm + m^2}(\omega + iv)} \times \sum_{s=1}^m v_z^2(p_z, s) \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}. \quad (1.19)$$

Ряды, содержащиеся в (1.17)–(1.19), можно просуммировать численно.

Таким образом, полученные выражения дают возможность рассчитать проводимость углеродных поглощающих нанотрубок. Объёмная плотность тепловых источников, содержащая  $|\sigma_{zz}|$ , позволяет определить решение тепловой задачи и в последующем определить амплитудно-фазовые характеристики фотоакустического сигнала, возникающего в массиве углеродных нанотрубок.

## 2 Построение модели возбуждения фотодефлекционного сигнала в слое хиральных и ахиральных углеродных нанотрубок под действием бесселевых световых пучков

Воздействие бесселевого светового пучка приводит к периодическому изменению температурного поля в поглощающем слое углеродных

нанотрубок, окружающей среде и подложке. При этом изменения температур может быть описано на основе системы уравнений теплопроводности

$$\begin{cases} \nabla^2 T_1 - \sigma_1 T_1 = 0, & z < 0, \\ \nabla^2 T - \sigma_s T = -Q^{TE} \exp(1 + \cos \Omega t), & 0 \leq z \leq l, \\ \nabla^2 T_2 - \sigma_2 T_2 = 0, & z > l, \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $T_1, T, T_2$  – значения температуры соответственно в окружающей среде, слое углеродных нанотрубок и подложке;  $\sigma_i = (i\Omega/\beta_i)^{1/2}$ ,  $\beta_i$  – коэффициенты температуропроводности в окружающей среде, слое углеродных нанотрубок и подложке,  $\beta_s = k_{cn}/\rho_0 C$ ,  $k_{cn}$  – коэффициент теплопроводности в слое УНТ,  $\rho_0$  – плотность,  $c_v$  – удельная теплоемкость. Согласно [6], двумерный коэффициент квантовой теплопроводности для области температур, ниже температуры Дебая, определяется следующим образом

$$k_{cn} = G_0 N_{phonon} L/L_0,$$

где  $G_0 = \pi^2 k_B^2 T/3h$  – универсальный квант тепла,  $N_{phonon} = 4N(n^2 + nm + m^2)/d_R$  – полное число фононных каналов в УНТ,  $N$  – число шестиугольников в элементарной ячейке нанотрубки,  $d_R$  – наибольший общий делитель для чисел  $(2n + m)$  и  $(2m + n)$ ,  $L$  – длина нанотрубки,  $L_0 = 2\pi R$  – длина поперечной границы нанотрубки, перпендикулярной тепловому потоку.

Объёмная плотность тепловых источников  $Q$ , записанная в системе уравнений (2.1), связана с аксиальной проводимостью слоя УНТ следующим выражением:

$$Q = \sigma_{cn} |E|^2, \quad (2.2)$$

где  $|\sigma_{cn}| = 2\pi|\sigma_{zz}|/\lambda$  – проводимость слоя УНТ.

Учитывая выражение для интенсивности волны

$$I = 1/2 n\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} |E|^2,$$

выражение для скорости диссипации энергии можно представить в виде

$$Q = 2\alpha_{eff} I_0 e^{-2\alpha_{eff} z} = \frac{2\sigma_{cn}}{c\sqrt{\varepsilon'}\varepsilon_0} I_0 e^{-2\alpha_{eff} z}, \quad (2.3)$$

где  $\alpha_{eff}$  – коэффициент поглощения, который может быть определен следующим образом:

$$\alpha_{eff} = \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon''}{\sqrt{\varepsilon'}} = \frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon''}{n}.$$

В свою очередь, проводимость связана с мнимой частью диэлектрической проницаемости формулой

$$\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon'', \quad \varepsilon'' = \sigma_{cn}/\omega\varepsilon_0$$

$$(\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{12} \text{ ф/м}).$$

Скорость диссипации энергии  $TE$ -моды бесселевых световых пучков в слое поглощающих углеродных нанотрубок удобно записать в цилиндрических координатах [7], [8]:

$$Q^{TE} = \frac{2|\sigma_{cn}|I_0}{c\sqrt{\epsilon'}\epsilon_0} \frac{c}{4\pi} k_0 \epsilon_\alpha (n_1^2 + n_2^2) \times \left[ \frac{m^2}{(qr)^2} J_m^2(qr) + J_m'^2(qr) \right] \exp(-\alpha_{eff} z). \quad (2.4)$$

С учетом выражения для скорости диссипации энергии (2.4) перепишем уравнение для временной части, описывающее распределение температуры в исследуемом образце

$$\nabla^2 T - \sigma_S T = -A_0 B^{TE} e^{-\alpha_{eff} z - r^2/w_0^2}, \quad (2.5)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{k_{cn}} \frac{2|\sigma_{cn}|I_0}{c\sqrt{\epsilon'}\epsilon_0} \frac{c}{4\pi} k_0 \epsilon_\alpha (n_1^2 + n_2^2),$$

$$B^{TE} = \frac{m^2}{(qr)^2} J_m^2(qr) + J_m'^2(qr), \quad \sigma_S^2 = i\Omega/\beta_S.$$

Решение уравнения (2.5) ищем в виде

$$T(r, z) = T^u(r, z) + T^o(r, z),$$

где  $T^u(r, z)$  – частное решение уравнения (2.5), а  $T^o(r, z)$  – общее решение соответствующего (2.5) однородного дифференциального уравнения второго порядка. Частное решение уравнения теплопроводности (2.5) ищем в виде

$$T^u(r, z) = \int_0^\infty p C(p) J_0(rp) e^{-\alpha_{eff} z} dp, \quad (2.6)$$

где  $p$  – параметр преобразования Фурье – Бесселя.

Вычислив частные производные первого и второго порядка (2.6) по переменным  $r$  и  $z$  и подставив их в (2.5), получим

$$\int_0^\infty p C(p) (\alpha_{eff}^2 - p^2 - \sigma_S^2) J_0(rp) e^{-\alpha_{eff} z} dp = -A_0 B^{TE} e^{-\alpha_{eff} z - r^2/w_0^2}.$$

Пусть  $\bar{f}(p) = C(p) (\alpha_{eff}^2 - p^2 - \sigma_S^2) e^{-\alpha_{eff} z}$ . Тогда параметр  $C(p)$  может быть определен следующим равенством

$$C(p) = \frac{\bar{f}(p) e^{\alpha_{eff} z}}{(\alpha_{eff}^2 - p^2 - \sigma_S^2)}. \quad (2.7)$$

Согласно (2.7), выражение для  $f(r)$  примет вид

$$f(r) = \int_0^\infty p J_0(rp) \bar{f}(p) dp = -A_0 B^{TE} e^{-\alpha_{eff} z - r^2/w_0^2}.$$

Основываясь на свойствах преобразования Фурье – Бесселя и вычислив получившийся интеграл [см. приложение], несложно записать для  $\bar{f}(p)$

$$\bar{f}(p) = \int_0^\infty r J_0(pr) f(r) dr = -A_0 e^{-\alpha_{eff} z} \int_0^\infty B^{TE} r J_0(pr) dr = -A_0 e^{-\alpha_{eff} z} I, \quad (2.8)$$

$$\text{где } I = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} q w_0 \right)^{2m} \left[ \frac{m^2}{q^2} R_1(p) + \frac{1}{4} q^2 w_0^4 R_2(p) \right],$$

$$a(p) = \frac{1}{4} p^2 w_0^2, \quad b = \frac{1}{4} q^2 w_0^2,$$

$$R_1(p) = \left( \frac{1}{(m+1)!} - \frac{a(p)(m+2)!}{(m+1)!(m+1)!} \right) b^2 + 2 \left( \frac{a(p)}{m!} - \frac{1}{(m+1)!} \right) b + \frac{(m-1)!}{m!m!} - \frac{a(p)}{m!},$$

$$R_2(p) = \left( \frac{(m+3)!}{(m+2)!(m+2)!} - \frac{a(p)(m+4)!}{(m+2)!(m+2)!} \right) b^2 + 2 \left( \frac{a(p)(m+3)!}{(m+1)!(m+2)!} - \frac{1}{(m+1)!} \right) b + \frac{1}{(m+1)!} - \frac{a(p)(m+2)!}{(m+1)!(m+1)!}.$$

С учетом (2.7) и (2.8) можно представить частное решение уравнения теплопроводности

$$T^u = \int_0^\infty p J_0(pr) \left[ \frac{A_1 [N_1 R_1(p) + N_2 R_2(p)] e^{-\alpha_{eff} z}}{\alpha_{eff}^2 - \sigma_S^2 - p^2} \right] dp, \quad (2.9)$$

$$\text{где } A_1 = \frac{1}{2} A_0 \left( \frac{1}{2} q w_0 \right)^{2m}, \quad N_1 = \frac{m^2}{q^2}, \quad N_2 = \frac{1}{4} q^2 w_0^4.$$

Решение соответствующего (2.5) однородного дифференциального уравнения второго порядка  $\nabla^2 T - \sigma_S T = 0$  ищем в виде

$$T^o(r, z) = \int_0^\infty p J_0(rp) [A(p) e^{\xi_{cn} z} + B(p) e^{-\xi_{cn} z}] dp,$$

$$\text{где } \xi_{cn}^2 = p^2 + \sigma_S^2.$$

Учитывая стандартные граничные условия получены выражения для температур в трехслойной системе «окружающая среда – образец – подложка»

$$\left\{ \begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty p J_0(pr) E(p) e^{\xi_1 z} e^{-r^2/w_0^2} dp, \\ T &= \int_0^\infty p J_0(pr) \times \\ &\times [A(p) e^{\xi_{cn} z} + B(p) e^{-\xi_{cn} z} + C(p) e^{-\alpha_{eff} z}] dp, \\ T_2 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty p J_0(pr) D(p) e^{-\xi_2(z-1)} e^{-r^2/w_0^2} dp, \end{aligned} \right.$$

$$\text{где } C(p) = \frac{A_1 [N_1 R_1(p) + N_2 R_2(p) - N_3 R_3(p)]}{\alpha_{eff}^2 - \sigma_S^2 - p^2};$$

$$A(p) = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{b_1 a_2 - b_2 a_1} \cdot C(p);$$

$$B(p) = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{b_1 a_2 - b_2 a_1} C(p);$$

$$E(p) = \frac{2k_s \xi_{cn} c_2 - a_2 d_1 - b_2 d_2}{b_1 a_2 - b_2 a_1} C(p);$$

$$D(p) = \frac{d_1 \left( a_1 e^{-l(\alpha_{eff} + \xi_{cn})} + b_1 e^{-l(\alpha_{eff} - \xi_{cn})} \right) - 2k_{cn} \xi_{cn} c_1}{b_1 a_2 - b_2 a_1} C(p);$$

$$a_1 = k_{cn} \xi_{cn} - k_1 \xi_1, \quad a_2 = (k_{cn} \xi_{cn} + k_2 \xi_2) e^{\xi_{cn} l};$$

$$b_1 = k_{cn} \xi_{cn} + k_1 \xi_1, \quad b_2 = (k_{cn} \xi_{cn} - k_2 \xi_2) e^{-\xi_{cn} l};$$

$$c_1 = k_{cn} \alpha_{eff} + k_1 \xi_1, \quad c_2 = (k_{cn} \alpha_{eff} - k_2 \xi_2) e^{-\alpha_{eff} l};$$

$$d_1 = k_{cn} \alpha_{eff} - k_{cn} \xi_{cn}, \quad d_2 = k_{cn} \alpha_{eff} + k_{cn} \xi_{cn};$$

$$\xi_{1,2, cn}^2 = p^2 + \sigma_{1,2, S}^2.$$

Тогда полное решение уравнения теплопроводности можно записать следующим образом

$$T = \frac{1}{2} \int_0^\infty p J_0(pr) \times$$

$$\times \left[ A(p) e^{\xi_{cn} z} + B(p) e^{-\xi_{cn} z} + C(p) e^{-\alpha_{eff} z} \right] e^{-r^2/w_0^2} dp.$$

С учетом соотношения для скорости диссипации энергии (2.4), и выражения для угла дефлексии пробного лазерного пучка (случай трансверсальной геометрии взаимодействия)

$$\Phi^T = \frac{1}{n_{eff}} \frac{dn_{eff}}{dT} \int \frac{dT(x, y, z, t)}{dx} dy, \quad (2.10)$$

несложно получить величину фотодефлекционного отклика, возникающего вследствие воздействия бesselового светового пучка на слой хиральных или ахиральных углеродных нанотрубок.

Выражение для усредненной по пространству температуры будет иметь вид

$$\bar{T} = 2\pi \left[ \frac{b_1^0 c_2^0 - b_2^0 c_1^0}{b_1^0 a_2^0 - b_2^0 a_1^0} e^{\sigma_s l} + \frac{a_1^0 c_2^0 - a_2^0 c_1^0}{b_1^0 a_2^0 - b_2^0 a_1^0} e^{-\sigma_s l} + e^{-\alpha_{eff} l} \right] \times$$

$$\times \frac{A_1 [N_1 R_1(0) + N_2 R_2(0)]}{\alpha_{eff}^2 - \sigma_s^2} B^{TE} e^{-r^2/w_0^2},$$

где

$$a_1^0 = k_{cn} \sigma_s - k_1 \sigma_1, \quad a_2^0 = (k_{cn} \sigma_s + k_2 \sigma_2) e^{\sigma_s l};$$

$$b_1^0 = k_{cn} \sigma_s + k_1 \sigma_1, \quad b_2^0 = (k_{cn} \sigma_s - k_2 \sigma_2) e^{-\sigma_s l};$$

$$c_1^0 = k_{cn} \alpha_{eff} + k_1 \sigma_1, \quad c_2^0 = (k_{cn} \alpha_{eff} - k_2 \sigma_2) e^{-\alpha_{eff} l}.$$

Таким образом, амплитуда фотодефлекционного сигнала, определяемая выражением (2.10), сложным образом зависит от диссипативных, геометрических и теплофизических параметров слоя углеродных нанотрубок, окружающей среды и подложки, а также энергетически-временных и поляризационных свойств БСП.

### 3 Результаты и их обсуждение

В связи с громоздкостью выражения (2.10), а также сложной функциональной зависимостью угла фотодефлексии от параметров среды и свойств возбуждающего излучения, был проведен численный и графический анализ.

На рисунке 3.1 представлена зависимость амплитуды фотодефлекционного сигнала, возникающего при воздействии на слой вертикально ориентированных УНТ поляризационных мод БСП. Анализ амплитуды фотодефлекционного сигнала показывает, что величина результирующего отклика осциллирует спадая по экспоненте с увеличением радиальной координаты  $\rho$ . Следует отметить, что амплитуда фотоакустического сигнала для металлических УНТ ( $n - m = 3q, q \in \mathbb{N}$ ) оказалась выше, чем у полупроводниковых ( $n - m \neq 3q, q \in \mathbb{N}$ ).

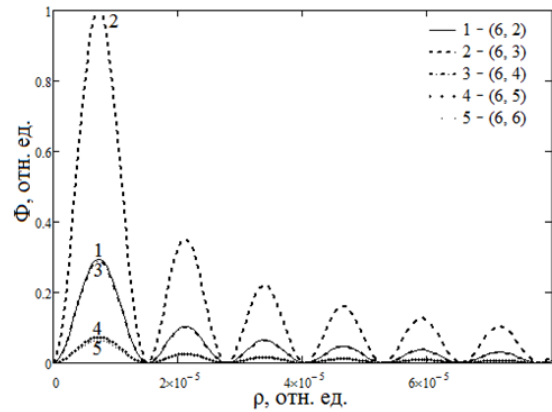


Рисунок 3.1 – Зависимость фотодефлекционного отклика от радиальной координаты  $\rho$  для разных УНТ

Амплитуда фотодефлекционного сигнала является симметричной функцией относительной координаты  $x/w_0$  (рисунок 3.2). Причем максимальное значение амплитуды ФД сигнала для слоя металлических УНТ с параметрами (6,3) приблизительно в 20 раз выше результирующего отклика для полупроводниковых нанотрубок (6,6).

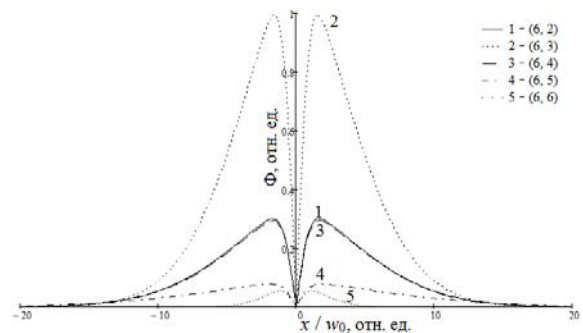


Рисунок 3.2 – Зависимость фотодефлекционного отклика от относительной координаты для разных УНТ

В результате произведенного графического анализа показано, что угол фотодефлексии является симметричной функцией нормированной координаты  $x/w_0$  (рисунок 3.3). При увеличении частоты модуляции  $\Omega$  приблизительно от 50 Гц до 150 Гц величина фотодефлекционного отклика  $\Phi(x/w_0)$  уменьшается. Это может быть связано с

тем, что исследуемый образец не успевает реагировать на изменения его теплофизических свойств из-за термоинерции.

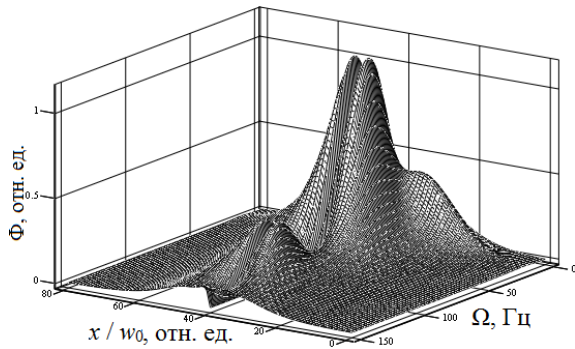
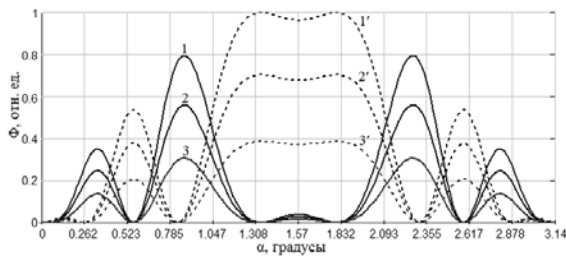


Рисунок 3.3 – Зависимость фотодефлекционного отклика от относительной координаты и частоты модуляции

На рисунке 3.4 представлена зависимость амплитуды фотодефлекционного сигнала от угла конусности  $\alpha$  для слоёв углеродных нанотрубок с различными индексами хиральности. При определенном значении параметра конусности и в зависимости от порядка моды бesselевых световых пучков ( $m = 0, m = 1$ ) может наблюдаться максимум или минимум амплитуды фотодефлекционного отклика, чем обусловлена возможность управления величиной фотодефлекционного сигнала при варьировании угла конусности аксикона.



$m = 0$ : 1 – (2; 1), 2 – (3; 1), 3 – (4; 1);  
 $m = 1$ : 1' – (2; 1), 2' – (3; 1), 3' – (4; 1)

Рисунок 3.4 – Зависимость фотодефлекционного отклика от угла конусности при облучении УНТ различной хиральности ТЕ-модами БСП

### Заключение

Таким образом, в работе построена теоретическая модель описания фотодефлекционного отклика, возбуждаемого в слоях ахиральных и хиральных углеродных нанотрубок, локализованных на подложке, при воздействии БСП.

Установлено, что величина результирующего фотодефлекционного сигнала определяется параметром хиральности однослойных углеродных нанотрубок. Показано, что амплитуда фотодефлекционного отклика существенным образом зависит от угла конусности бesselевого светового пучка; при определённом значении параметра  $\alpha$  может наблюдаться максимум или минимум

амплитудного значения фотодефлекционного отклика – в зависимости от порядка используемой ТЕ-моды БСП.

Продемонстрирована возможность эффективного управления амплитудой фотодефлекционного отклика путем изменения угла конусности БСП, что позволяет воздействовать на скорость диссипации энергии поляризационных мод квазибездифракционного пучка и соответствующее распределение поля температур в исследуемом низкоразмерном образце, локализованном на диэлектрической подложке. Механизм управления может быть реализован на базе электрооптических кристаллов, обладающих эффектом Поккельса или применением оптических схем, включающих элементы, которые позволяют осуществлять перестройку конусности бездифракционного излучения.

### Приложение

Выпишем интеграл

$$I = \int_0^{\infty} r J_0(pr) \left[ \left( \frac{m}{qr} \right)^2 J_m^2(qr) + J_m'^2(qr) \right] e^{-r^2/w_0^2} dr = I_1 + I_2, \quad (П.1)$$

где

$$I_1 = \left( \frac{m}{q} \right)^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{r} J_0(pr) J_m^2(qr) e^{-r^2/w_0^2} dr, \quad (П.2)$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} r J_0(pr) J_m'^2(qr) e^{-r^2/w_0^2} dr. \quad (П.3)$$

Перейдем в интеграле (П.2) к переменной  $t = r^2$ :

$$I_1 = \left( \frac{m}{q} \right)^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{r} J_0(pr) J_m^2(qr) e^{-r^2/w_0^2} dr = \frac{1}{2} \left( \frac{m}{q} \right)^2 \int_0^{\infty} J_0(p\sqrt{t}) J_m^2(q\sqrt{t}) e^{-t/w_0^2} dt.$$

Для взятия интеграла воспользуемся преобразованием Лапласа [9]

$$\int_0^{\infty} t^{\nu-1} J_{2\mu_1}(2\alpha_1^{1/2} t^{1/2}) \dots J_{2\mu_n}(2\alpha_n^{1/2} t^{1/2}) \exp(-p_0 t) dt = \frac{\Gamma(\nu + M) p_0^{-\nu-M} \alpha_1^{\mu_1} \dots \alpha_n^{\mu_n}}{\Gamma(2\mu_1 + 1) \dots \Gamma(2\mu_n + 1)} \times \Psi_2 \left( \nu + M; 2\mu_1 + 1, \dots, 2\mu_n + 1; -\frac{\alpha_1}{p_0}, \dots, -\frac{\alpha_n}{p_0} \right), \quad (П.4)$$

где  $\text{Re } p > 0, M = \mu_1 + \dots + \mu_n, \text{Re}(M + \nu) > 0,$

$$\Psi_2(\alpha; \gamma_1, \dots, \gamma_n; z_1, \dots, z_n) = \sum \frac{(\alpha)_{m_1 + \dots + m_n} \cdot z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}}{(\gamma)_{m_1} \dots (\gamma)_{m_n} \cdot m_1! \dots m_n!}$$

– вырожденный гипергеометрический ряд многих переменных,  $(\alpha)_m = \Gamma(\alpha + m)/\Gamma(\alpha), \Gamma(n) = (n-1)!$  – гамма-функция.

Учитывая (П.2)–(П.4) и подставляя в (П.1) получим конечное соотношение для искомого интеграла

$$I = \frac{1}{2} b^m \left[ \frac{m^2}{q^2} R_1(p) + w_0^2 b R_2(p) \right],$$

где

$$R_1(p) = \left( \frac{1}{(m+1)!} - \frac{a(p)(m+2)!}{(m+1)!(m+1)!} \right) b^2 + 2 \left( \frac{a(p)}{m!} - \frac{1}{(m+1)!} \right) b + \frac{(m-1)!}{m!m!} - \frac{a(p)}{m!},$$

$$R_2(p) = \left( \frac{(m+3)!}{(m+2)!(m+2)!} - \frac{a(p)(m+4)!}{(m+2)!(m+2)!} \right) b^2 + 2 \left( \frac{a(p)(m+3)!}{(m+1)!(m+2)!} - \frac{1}{(m+1)!} \right) b + \frac{1}{(m+1)!} - \frac{a(p)(m+2)!}{(m+1)!(m+1)!}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Максименко, С.А. Электродинамика углеродных нанотрубок / С.А. Максименко, Г.Я. Слепня // Радиотехника и электроника. – 2002. – Т. 47. – С. 261–280.
2. *The band theory of graphite* / P.R. Wallace [et al.] // Physical Review. – 1947. – Vol. 71, № 9. – P. 622–634.
3. Saito, R. Physical properties of carbon nanotubes / R. Saito, M.S. Dresselhaus, G. Dresselhaus. – London: Imperial College Press, 1999. – 251 p.

4. Конобеева, Н.Н. Динамика предельно коротких электромагнитных импульсов в хиральных углеродных нанотрубках в присутствии внешнего поля / Н.Н. Конобеева, М.Б. Белоненко // Журнал технической физики. – 2014. – Т. 84, вып. 12. – С. 13–16.

5. Ландау, Л.Д. Физическая кинетика / Л.Д. Ландау, Е. М Лифшиц. – М.: Наука, 1979. – 528 с.

6. Браже, Р.А. Теплопроводность планарных и нанотубулярных супракристаллических структур при температурах ниже температуры Дебая / Р.А. Браже, В.С. Нефёдов // ФТТ. – 2014. – Т. 56, вып. 3. – С. 602–606.

7. Особенности распределения потоков энергии при распространении квазибездифракционных световых пучков в поглощающих средах / В.Н. Белый [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 3 (12). – С. 7–14.

8. Митюрин, Г.С. Фотодефлекционный сигнал, генерируемый бесселевым световым пучком в плотном слое углеродных нанотрубок / Г.С. Митюрин, Е.В. Черненко, А.Н. Сердюков // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 4 (25). – С. 20–26.

9. Бейтман, Г. Таблицы интегральных преобразований: в 2 т. / Г. Бейтман, А. Эрдейи; пер. Н.Я. Виленкина. – М.: Наука, 1969. – Т. 1: Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. – 344 с.

Поступила в редакцию 09.11.17.

УДК 669.14.018.8: 621.45.038.72

## МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА УГЛЕРОДНЫХ ПОКРЫТИЙ, ЛЕГИРОВАННЫХ КАРБИДООБРАЗУЮЩИМИ МЕТАЛЛАМИ

Д.Г. Пилипцов<sup>1</sup>, А.В. Рогачев<sup>1</sup>, А.С. Руденков<sup>1</sup>, Джанг Сянь Хун<sup>2</sup>, Н.Н. Федосенко<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

<sup>2</sup>Нанкинский университет науки и технологии

## MECHANICAL PROPERTIES OF CARBON COATINGS, DOPED BY CARBIDE-FORMING METALS

D.G. Pilipstov<sup>1</sup>, A.V. Rogachev<sup>1</sup>, A.S. Rudenkov<sup>1</sup>, Xiaohong Jiang<sup>2</sup>, N.N. Fedosenko<sup>1</sup>

<sup>1</sup>F. Scorina Gomel State University

<sup>2</sup>Nanjing University of Science and Technology

Определены микротвердость, модуль упругости, внутренние механические напряжения, триботехнические свойства легированных хромом и титаном углеродных покрытий. Показано, что легирование карбидообразующими металлами углеродных покрытий позволяет сохранить высокую микротвердость, приводит к снижению в 1,2 ... 3,2 раза внутренних напряжений, обеспечивает высокие значения прочности адгезионного соединения (ее максимальное значение регистрируется при легировании хромом) и снижает более чем в 2 раза коэффициент трения в сравнении с однокомпонентными углеродными покрытиями.

**Ключевые слова:** углеродные покрытия, легирование, хром, титан, микротвердость, внутренние напряжения, коэффициент трения.

Microhardness, modulus of elasticity, internal mechanical stresses, tribotechnical properties of chromium and titanium-doped carbon coatings are determined. It is shown that doping with carbide-forming metals of carbon coatings allows preserving high microhardness, leads to a decrease in internal stresses in 1.2 ... 3.2 times, decays high strengths of the adhesive compound (its maximum value is recorded with chromium alloying) and reduces in more than 2 times Coefficient of friction in comparison with single-component carbon coatings.

**Keywords:** carbon coatings, doped, titanium, chromium, microhardness, internal stress, coefficient of friction.

### Введение

Углеродные алмазоподобные покрытия, легированные металлами, характеризуются особенностями фазового и структурного состояний: в зависимости от природы металла происходит возрастание либо уменьшение содержания  $sp^3$  гибридных атомов углерода, изменяется степень упорядоченности  $sp^2$  кластеров [1]–[3]. При введении в объем углеродного слоя карбидообразующих металлов помимо карбидов возможно образование однофазных систем – твердых растворов, а при высокой концентрации металла – их наночастиц [3]–[5]. Данные фазовые изменения оказывают влияние на свойства покрытий. Известно, что при легировании имеет место разрыхление структуры, что снижает внутренние механические напряжения [2], [5], [6], формирующиеся твердые фазы из карбида металла способствуют сохранению высокой твердости покрытия и, что особенно важно, повышают их термостойкость.

Более сложные процессы протекают при трении легированных углеродных слоев. В [7] показано, что в зоне фактического контакта при трении однокомпонентных углеродных покрытий происходит графитизация поверхности, что и определяет в значительной степени низкие значения

коэффициента трения и относительно высокий износ при температуре контактной зоны выше 600 К в окислительной среде. При трении легированных пленочных систем на основе углерода на процессы контактного взаимодействия оказывают влияние образующиеся термостойкие твердые карбидные наночастицы, наночастицы металла, которые при определенных условиях и режимах контактного взаимодействия могут формировать на поверхности трения пленки переноса, определяющие параметры трения. При этом не исключается каталитическое или ингибирующее воздействие атомов наполнителя на протекающие в зоне контакта трибохимические процессы [8].

Основной целью настоящей работы является определение закономерностей влияния легирования углеродных покрытий хромом и титаном на их механические, триботехнические свойства.

### 1 Методика эксперимента

Нанесение углеродной компоненты покрытия осуществляли из плазмы, формируемой методом импульсного распыления графитового катода (чистотой 99,9 %) искровым разрядом с напряжением 350 В и током в импульсе около 3500 А с помощью установки вакуумного напыления по методике, приведенной в [1]. Легирование

углеродных покрытий металлами осуществляли путем их электродугового испарения (ток дуги 60–100 А, напряжение 50 В) в процессе нанесения углеродного слоя. В качестве подложек для нанесения покрытий использовали полированную нержавеющую сталь и пластины монокристалла кремния с предварительно нанесенным слоем титана, хрома и без них. Толщину покрытия определяли по величине ступеньки с помощью профилограф-профилометра Ambios Tech. XP-2.

Морфологию поверхности покрытий исследовали методами атомно-силовой микроскопии (АСМ) в полуконтактном режиме, размер поля сканирования составлял 10×10 мкм и скорость сканирования 1,0 мкм/с.

Микротвердость определяли методом Кнупа (AFFRI DM-8) при нагрузке на индентор 491 мН в течение 10 с. В связи с тем, что толщина покрытий не превышает 500 мкм, измеренная микротвердость рассматривается как параметр, характеризующий систему «пленка – подложка».

Внутренние напряжения в покрытиях определяли по изменению радиуса кривизны кремниевой подложки до и после осаждения покрытий в соответствии с методикой, приведенной в [9]–[11].

Адгезионная прочность соединения покрытия с подложкой оценивалась методом склерометрии (WS-2005, Китай) при динамической нагрузке на индентор, лежащей в диапазоне от 0 до 30 Н со скоростью изменения 1 Н/с. Длина траектории разрушения составляла 3 мм. Морфологию царапины после проведения склерометрических исследований регистрировали оптическим методом с помощью металлографического микроскопа 4ХСЕ (Китай).

Модуль упругости покрытий определяли методом наноиндентирования (G200, Agilent) с зондом марки ТБ22192ISO при нагрузке 0,3 мН. Результат измерения устанавливался на основании значений десяти независимых испытаний.

Триботехнические испытания проводили по схеме «сфера-плоскость» (UMT 2-ЕС, Bruker). В качестве контртела использовали шарик из Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> диаметром 5/32". Трение осуществляли при нагрузке 0,5 Н и скорости скольжения 0,1 м/с в воздушной среде при относительной влажности 42 ÷ 45% и температуре 22 °С. После проведения триботехнических испытаний профиль дорожки трения исследовали методами профилометрии.

## 2 Результаты и их обсуждение

Как следствие фазовых и структурных изменений, связанных с введением в состав углеродного слоя хрома и титана, следует рассматривать приведенные в таблице 2.1 данные определения шероховатости покрытий и их внутренних напряжений. Как видно из таблицы, легирование покрытий металлами сопровождается повышением для некоторых слоев более чем в 2 раза шерохо-

ватости, однако при этом внутренние механические напряжения значительно, в 1,2...3,2 раза снижаются. Наиболее высокий уровень напряжений сохраняется при легировании покрытия титаном. При этом для слоев с толщиной ~300 нм проявляется явно выраженная зависимость напряжений от природы материала подложки. Наиболее высокие напряжения формируются при осаждении покрытия на поверхности кремния, имеющего кристаллографическую структуру, значительно отличающуюся от структуры покрытия.

В [12]–[14] показано, что в однокомпонентных углеродных покрытиях повышение концентрации Csp<sup>3</sup> связей способствует возрастанию уровня внутренних напряжений. В случае легированных слоев данное влияние, как показывают данные таблицы 2.1, не является доминирующим. Так, в соответствии с [1] хром и титан оказывают различное влияние на фазовый состав покрытия: введение хрома в углеродную матрицу приводит к росту содержания атомов углерода с sp<sup>3</sup> гибридизацией, легирование же титаном способствует снижению количества атомов углерода sp<sup>3</sup> фазы, увеличению размера и упорядоченности Csp<sup>2</sup> кластеров. Вместе с тем при введении данных металлов, особенно при легировании хромом, наблюдается снижение внутренних напряжений. По-видимому, на процессы дефектообразования в углеродной матрице и, соответственно, внутренние напряжения определяющее влияние оказывают высокодисперсные фазы карбида металлов.

Таблица 2.1 – Параметры шероховатости и внутренние напряжения в покрытиях

Покрытие	Толщина покрытия, нм	R <sub>MS</sub> , нм	Внутреннее напряжение, ГПа
Si/a-C	305	17,7	0,73
Cr/a-C	312	21,7	0,32
Si /a-C:Cr	302	28,7	0,48
Cr/a-C:Cr	315	27,1	0,23
Si /a-C:Ti	322	38,4	0,61
Ti/a-C:Ti	303	33,5	0,28

Важным параметром, определяющим в значительной степени функциональные свойства покрытий, является прочность адгезионного соединения. Склерометрические испытания (морфология зоны разрушения представлена на рисунке 2.1) показали, что образование и развитие микротрещин, радиально направленных относительно перемещения индентора, происходит при нагрузке намного меньшей нагрузки разрушения покрытия.

Значения адгезионной прочности сцепления покрытия и подложки, оцениваемые по критической нагрузке L<sub>c</sub>, при которой начинается отрыв

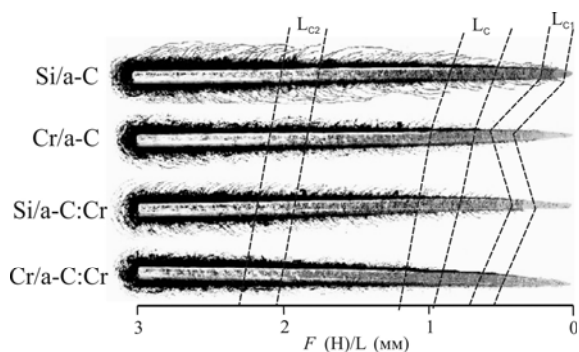


Рисунок 2.1 – Морфология царапин после проведения склерометрии:  $F$  – нагрузка ( $N$ ),  $L$  – расстояние ( $\times 10^{-1}$  мм)

покрытия от подложки [15], для Si/a-C, Cr/a-C, Si/a-C:Cr, Cr/a-C:Cr покрытий составляют 6,8 Н, 9,0 Н, 10,5 Н и 11,1 Н, соответственно. Способность покрытия образовывать трещины может быть оценена по минимальному значению нагрузки  $L_{c1}$ , при которой происходит зарождение и рост трещины [16]: чем выше  $L_{c1}$ , тем труднее инициировать развитие трещины в покрытии. Для оценки механических свойств покрытия в [16], [17] используется параметр СРЦ (сопротивление распространению царапины), значение которого определяется соотношением

$$СРЦ = L_c(L_{c2} - L_{c1}), \quad (2.1)$$

где  $L_{c2}$  – значение нагрузки, при которой происходит полное отслоение покрытия от подложки.

Расчет значений СРЦ для различных типов покрытий показал, что самое высокое значение характерно для покрытий Cr/a-C:Cr и составляет 88,5. Из-за высоких остаточных напряжений и хрупкости а-C покрытий, после проведения склерометрических испытаний, в области царапины наблюдается большое количество микротрещин (рисунок 2.2), которые характеризуют низкую адгезию Fe/a-C покрытия к подложке из нержавеющей стали.

Для покрытий Si/a-C:Cr и Cr/a-C характерно уменьшение длины и количества трещин, наличие

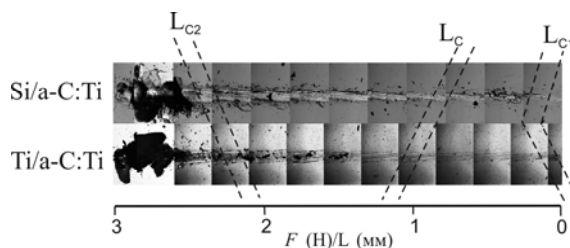


Рисунок 2.2 – Морфология царапин после проведения склерометрии:  $F$  – нагрузка ( $N$ ),  $L$  – расстояние ( $\times 10^{-1}$  мм)

легирующих элементов и подслоя приводит к увеличению адгезии и прочности соединения системы покрытие – подложка. Для покрытия Cr/a-C:Cr характерно отсутствие отдельных трещин, сочетаются особенности, установленные для а-C:Cr и Cr/a-C покрытий.

Для покрытий, содержащих подслои титана, характерно высокое значение СРЦ (порядка 76), но при этом происходит быстрое разрушение покрытия при достижении нагрузки некоторого критического значения.

На рисунке 2.3 приведены значения микротвердости ( $H$ , ГПа) и модуля упругости ( $E$ , ГПа) легированных слоев. Установлено, что микротвердость для Cr/a-C:Cr и Si/a-C:Cr покрытий выше, чем у Cr/a-C и для аналогичных покрытий, содержащих в своем составе титан, что согласуется с результатами работы [18], в которой отмечается при легировании хромом более высокое содержание  $sp^3$  фазы. Некоторое снижение твердости покрытия при их осаждении на мягкий подслои хрома или титана согласуется с данными работ [19].

Для анализа упругих свойств тонких покрытий часто используется так называемый индекс пластичности, определяемый как отношение значений твердости и модуля упругости ( $H/E$ ) [20]. Величина отношения  $H/E$  в некоторой степени характеризует износостойкость покрытия. Отметим, что индекс пластичности  $H/E$  для всех исследуемых покрытий лежит в диапазоне значений, характерных для эластичных покрытий [21].

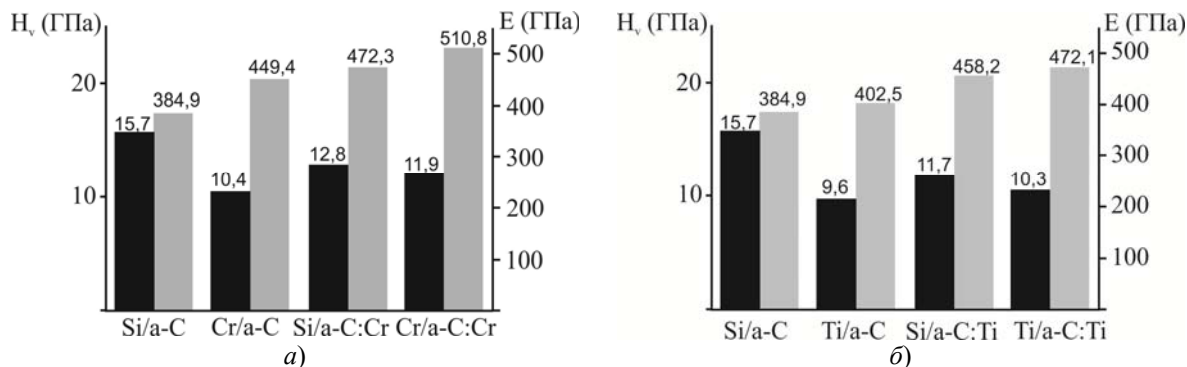


Рисунок 2.3 – Микротвердость и модуль упругости углеродных покрытий, легированных хромом (а) и титаном (б)

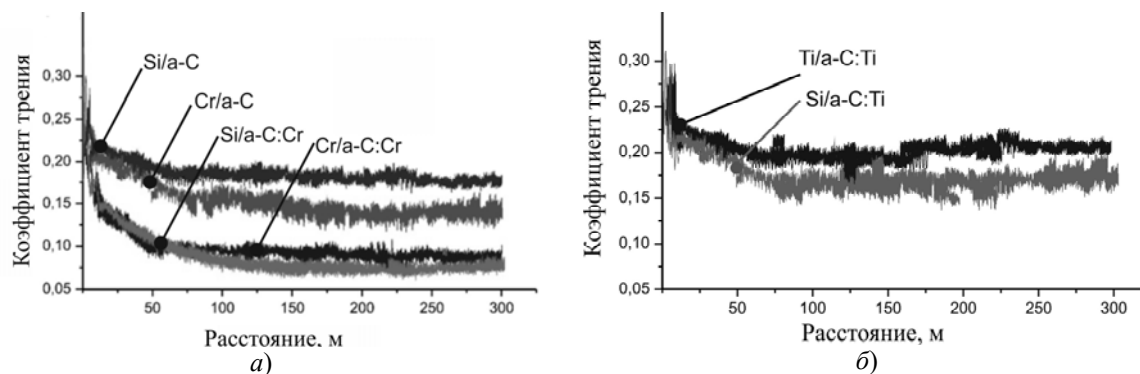


Рисунок 2.4 – Кинетические кривые трения а-С покрытий, содержащих хром (а), титан (б)

Триботехнические испытания показали, что кинетические зависимости коэффициента трения легированных покрытий являются монотонными и их характер практически не зависит от их состава (рисунок 2.4).

Видно, что в процессе трения на его начальном этапе регистрируется значительное снижение коэффициента трения, которое, как показано в [2], [4], [5], связано с протеканием графитизации поверхностного слоя, накоплением частиц графита, выполняющих роль смазки. Наличие подслоев хрома и титана оказывает влияние на значение коэффициента трения: Cr/a-C:Cr и Ti/a-C:Ti покрытия показывают самый низкий коэффициент трения.

### Выводы

Определены микротвердость, модуль упругости, внутренние механические напряжения, триботехнические свойства легированных хромом и титаном углеродных покрытий, осаждаемых из импульсной катодной плазмы на различные подложки. Установлено, что легирование металлами углеродных покрытий приводит к снижению в 1,2 ... 3,2 раза напряжений, особенно при осаждении на слой хрома. На основании полученных результатов и данных об изменении фазового состава углеродных слоев при легировании сделан вывод об определяющем влиянии на внутренние напряжения высокодисперсной фазы карбида металлов.

Показано, что для хромсодержащих углеродных покрытий наиболее высокие значения прочности адгезионного соединения и стойкости к распространению царапины достигаются при их осаждении на подслоу хрома. Легирование хромом позволяет также сохранить более высокую микротвердость и снизить более чем в 2 раза коэффициент трения в сравнении с однокомпонентными углеродными покрытиями.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Влияние природы карбидообразующих металлов на фазовый состав и структуру легированных

углеродных покрытий / А.С. Руденков, А.В. Рогачев, Д.Г. Пилипцов, Джанг Сянь Хун, Н.Н. Федосенко // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 2 (31). – С. 24–31.

2. Рогачев, А.В. Триботехнические свойства композиционных покрытий, осаждаемых вакуумно-плазменными методами / А.В. Рогачев // Трение и износ. – 2008. – Т. 29, № 3. – С. 285–592.

3. Donnet, C. Recent progress on the tribology of doped diamond-like and carbon alloy coatings: a review / C. Donnet // Surface and Coatings Technology. – 1998. – Vol. 100–101. – P. 180–186.

4. Grill, A. Tribology of diamond-like carbon and related materials: an updated review // Surface and Coatings Technology. – Elsevier Science, 1997. – Vol. 95. – P. 507–513.

5. Donnet, C. Tribology of Diamond-like Carbon Films: Fundamentals and Applications / C. Donnet, A. Erdemir. – Springer Science & Business Media, 2007. – 680 p.

6. Mechanical properties and performance of magnetron-sputtered graded diamond-like carbon films with and without metal additions / C. Bauer [et al.] // Diamond and Related Materials. – 2002. – Vol. 11. – P. 1139–1142.

7. Влияние природы подложки и термообработки алмазоподобных покрытий на их триботехнические свойства / Н.И. Саян, А.В. Рогачев, А.Н. Попов, В.П. Казаченко // Трение и износ. – 2005. – Т. 26, № 2, С. 182–186.

8. Characterization of metal-containing amorphous hydrogenated carbon films / M. Wang [et al.] // J. Mater. Res. – 1992. – Vol. 7. – P. 667–675.

9. Zhang, S. Toughening of hard nanostructural thin films: a critical review / S. Zhang, D. Sun, Y. Fu, H. Du // Surface and Coatings Technology. – 2005. – Vol. 198. – P. 2–8.

10. Robertson, J. Hard amorphous (diamond-like) carbons / J. Robertson // Progress in Solid State Chemistry. – 1991. – Vol. 21. – P. 199–333.

11. Bull, S. Failure modes in scratch adhesion testing / S. Bull // Surface and Coatings Technology. – 1991. – Vol. 50. – P. 25–32.

12. Study of mechanical properties and stress of tetrahedral amorphous carbon films prepared by

*pulse biasing* / Y.B. Zhang [et al.] // *Surface and Coatings Technology*. – 2005. – Vol. 195. – P. 338–343.

13. Grill, A. Diamond-like carbon: state of the art / A. Grill // *Diamond and Related Materials*. – 1999. – Vol. 8. – P. 428–434.

14. *Effect of vacuum arc deposition parameters on the properties of amorphous carbon thin films* / S. Anders [et al.] // *Surface and Coatings Technology*. – 1994. – Vol. 68–69. – P. 388–393.

15. Богданович, П.Н. Трение и износ в машинах / П.Н. Богданович, В.Я. Прушак. – Минск: Вышэйшая школа. – 1999. – 256 с.

16. Дубравин, А.М. АСМ анализ дорожек трения на углеродном покрытии / А.М. Дубравин // 4-й Белорусский семинар по сканирующей зондовой микроскопии: сб. докладов. – Гомель, 2000. – С. 103–106.

17. Wang, A.Y. Structure and mechanical properties of W incorporated diamond-like carbon films prepared by a hybrid ion beam deposition technique / A.Y. Wang, K.R. Lee, J.P. Ahn, J.H. Han // *Carbon*. – 2006. – Vol. 44. – P. 1826–1832.

18. Dai, W. Microstructure and property evolution of Cr-DLC films with different Cr content deposited by a hybrid beam technique / W. Dai, P. Ke, A. Wang // *Vacuum*. – 2011. – Vol. 85. – P. 792–797.

19. *Influence of Cr content on the microstructural and tribological properties of PLD grown nanocomposite DLC-Cr thin film* / S. Gayathri [et al.] // *Materials Chemistry and Physics*. – 2015. – Vol. 167. – P. 194–200.

20. Dwivedi, N. Nanoindentation testing on copper/diamond-like carbon bi-layer films / N. Dwivedi, S. Kumar // *Current Applied Physics*. – 2011. – Vol. 12. – P. 247–253.

21. *Effects of Cr concentrations on the microstructure, hardness, and temperature-dependent tribological properties of Cr-DLC coatings* / C. Zou [et al.] // *Applied Surface Science*. – 2013. – Vol. 286. – P. 137–141.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках договора № Т16МС-017 «Синтез, структура и свойства многослойных покрытий на основе углерода, содержащих наноразмерные, каталитически активные слои металлов».*

*Поступила в редакцию 20.07.17.*

УДК 539.12

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЛАЗЕРНОГО МАКРО- И МИКРОФОРМООБРАЗОВАНИЯ ХРУПКИХ НЕМЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ МЕТОДОМ ПОЛНОГО ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Е.Б. Шершнев, Ю.В. Никитюк, С.И. Соколов, А.Е. Шершнев

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*

## INVESTIGATION OF LASER MACRO- AND MICROFORM FORMATION OF BRITTLE NONMETALLIC MATERIALS BY THE METHOD OF FULL FACTOR EXPERIMENT

E.B. Shershnev, Y.V. Nikitjuk, S.I. Sokolov, A.E. Shershnev

*F. Scorina Gomel State University*

Проведены экспериментальные исследования по лазерной полировке кварцевого стекла с помощью полного факторного эксперимента первого порядка типа ПФЭ  $2^n$  с двухуровневым варьированием факторов. Составлена регрессионная модель полировки кварцевого стекла излучением лазера с учетом вычисленных значащих факторов с помощью дисперсионного анализа.

**Ключевые слова:** лазерная обработка, полный факторный эксперимент, кварцевое стекло.

Experimental studies on the laser polishing of quartz glass with the help of a full-order first-order phase-effect experiment of the PFE  $2^n$  type with a two-level variation of the factors are carried out. A regression model of polishing of quartz glass by laser radiation is calculated taking into account the calculated significant factors using the analysis of variance.

**Keywords:** laser treatment, full factor experiment, quartz glass.

### Введение

Синтетические и природные алмазы, кристаллический и аморфный кварц обладают рядом уникальных физических свойств. Физические свойства кристаллов алмаза обеспечивают стабильную работу в критических условиях устройств, созданных на его основе, и делают перспективным его применение при создании новой техники [1]. Свойства кварцевого стекла обеспечивают его применение в качестве материала для изготовления окон фотоприемников и колб газоразрядных ламп, из него производятся линзы для передачи ультрафиолетового излучения и призмы для монохроматоров и спектрофотометров [2].

Одним из важных направлений развития современных технологий обработки хрупких неметаллических материалов являются технологии лазерного макро- и микроформообразования. Примером эффективного использования лазерного излучения для формообразования поверхности хрупких неметаллических материалов является лазерная полировка кварцевого стекла [3]–[6].

Для оптимизации задачи изучения влияния параметров лазерного макро- и микроформообразования можно использовать метод полного факторного эксперимента. Он позволяет получить зависимость влияния различных факторов на выходной параметр при ограниченном числе опытов.

### 1 Методика эксперимента

При планировании опытов использовали методику полного факторного эксперимента первого порядка типа ПФЭ  $2^n$  с двухуровневым варьированием факторов (скорость обработки  $V$ , шаг сканирования  $h$ , радиус лазерного пучка  $r$ ), с выходным параметром шероховатости поверхности  $R_a$ . Статистической моделью объекта исследования являлась функция отклика (шероховатость поверхности  $R_a$ ), связывающая выходной параметр с факторами ( $V$ ,  $h$ ,  $r$ ), которые менялись в некоторых пределах при проведении опытов [7].

После преобразования независимых переменных в натуральном масштабе к безразмерным переменным с кодируемыми значениями:  $-1$ ,  $+1$  была получена следующая таблица 1.1.

Таблица 1.1 – Значения независимых переменных в кодированном виде

Факторы в безразмерной системе координат	-1	+1
Факторы		
Скорость обработки, мм/с	1	2
Шаг сканирования, мм	0,1	0,2
Радиус лазерного пучка, мм	1	2

После преобразования была построена матрица планирования эксперимента, соответствующая полному факторному эксперименту, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов.

При лазерной полировке использовались кварцевые стекла толщиной 3 мм. Лазерная обработка проводилась с помощью установки, схема которой приведена в [8].

Скорость обработки кварцевого стекла варьировалась в пределах от 1 до 2 мм/с, шаг сканирования от 0,1 до 0,2 мм, а радиус лазерного пятна от 1 до 2 мм.

Соответствующее уравнение регрессии при полном факторном эксперименте имеет следующий общий вид:

$$R_a = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3. \quad (1.1)$$

## 2 Результаты эксперимента

В таблице 2.1 представлены результаты эксперимента по лазерной полировке кварцевого стекла, приведенные при всех значениях факторов.

По результатам, представленным в таблице 2.1, была построена математическая модель полировки кварцевого стекла, показывающая зависимость шероховатости кварцевого стекла от параметров обработки (скорость обработки  $V$ , шаг сканирования  $h$ , радиус лазерного пучка  $r$ ). Для этого были вычислены коэффициенты регрессии  $b_i$  (таблица 2.2) в уравнении (1.1), где  $i$  – индекс, указывающий на соответствующий фактор. Результаты расчетов представлены в таблице 2.2.

Для проверки адекватности математической модели были высчитаны оценка дисперсии и критерий Кохрена по стандартной методике, описанной в [7]. Для полученных результатов критерий Кохрена составил 0,154 при критическом значении 0,68, что говорит об однородности серии экспериментов.

Рассчитанный критерий Фишера 7,811 меньше критического значения 8,7, что говорит о том, что регрессионная модель оказалась адекватна полученным экспериментальным данным.

Для оценки влияния факторов  $V$ ,  $h$ ,  $r$  проведен трехфакторный дисперсионный анализ.

Независимые факторы  $V$ ,  $h$ ,  $r$  имеют соответственно по 2 уровня, при каждом сочетании которых получено по 5 значений шероховатости  $R_a$ . Тогда число всевозможных сочетаний уровней этих факторов равно  $2 \cdot 2 \cdot 2$ , а общее число наблюдаемых значений признака  $N = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$ .

Таблица 2.2 – Коэффициенты регрессии

Коэффициент регрессии	Значение коэффициента
$b_0$	0,447
$b_1$	0,185
$b_2$	0,0875
$b_3$	-0,00193
$b_{12}$	0,0628
$b_{13}$	-0,0507
$b_{23}$	-0,0693
$b_{123}$	-0,0176

Совокупность наблюдаемых значений приведены в таблице 2.1.

В случае трехфакторного дисперсионного анализа имеем следующие источники изменчивости значений шероховатости  $R_a$ : фактор  $V$ ; фактор  $h$ ; фактор  $r$ ; взаимодействие факторов  $V$  и  $h$ ; взаимодействие факторов  $V$  и  $r$ ; взаимодействие факторов  $h$  и  $r$ ; взаимодействие факторов  $V$ ,  $h$  и  $r$ ; неучтенные случайные причины.

Вследствие того, что вычисленная оценочная дисперсия  $S_z^2$  оказалась очень мала, за дисперсию шума бралось значение в соответствии с параметрами точности использованного прибора для измерения шероховатости Surtronic S-100. Методика математической обработки данных дисперсионного анализа предполагает использование в качестве дисперсии шума параметра  $S_z^2$ , однако в данном случае это не представляется корректным. Предлагаемая методика оценки значимости основывается на предположении о том, что установка значений координат факторного пространства не содержит погрешностей. В то же время ее значение обеспечивается конструктивными особенностями прибора. Равно, как и оценка получаемых значений функции отклика в точках измерения. Поэтому приборная погрешность должна с неизбежностью учитываться в качестве составляющей дисперсии шума. В данном случае неопределенность, обусловленная погрешностями прибора, является превалирующей. Проверка значимости влияния факторов по критерию Фишера позволила выделить в качестве влияющих факторов скорость  $V$  и шаг сканирования  $h$ .

Таблица 2.1 – Результаты эксперимента

Номер комбинации факторов, $n$	Факторы			Шероховатость				
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$R_{a1}$ , мкм	$R_{a2}$ , мкм	$R_{a3}$ , мкм	$R_{a4}$ , мкм	$R_{a5}$ , мкм
1	-1	-1	-1	0,211	0,226	0,231	0,234	0,202
2	+1	-1	-1	0,412	0,421	0,428	0,442	0,426
3	-1	+1	-1	0,291	0,321	0,301	0,327	0,319
4	+1	+1	-1	0,839	0,821	0,842	0,837	0,854
5	-1	-1	+1	0,247	0,237	0,259	0,265	0,267
6	+1	-1	+1	0,551	0,543	0,522	0,524	0,549
7	-1	+1	+1	0,244	0,271	0,274	0,257	0,267
8	+1	+1	+1	0,712	0,722	0,732	0,731	0,734

Таблица 2.3 – Дисперсионный анализ данных

Источник изменчивости	Сумма квадратов эффектов	Число степеней свободы	Исправленная дисперсия	Критерий $F$ Фишера
$V$	$Q_V = 1,352$	$\nu_V = 1$	$S_V^2 = \frac{Q_V}{\nu_V} = 1,352$	$F_V = \frac{S_V^2}{S_Z^2} = 1502,259$
$h$	$Q_h = 0,299$	$\nu_h = 1$	$S_h^2 = \frac{Q_h}{\nu_h} = 0,299$	$F_h = \frac{S_h^2}{S_Z^2} = 331,776$
$r$	$Q_r = 0,00384$	$\nu_r = 1$	$S_r^2 = \frac{Q_r}{\nu_r} = 0,00384$	$F_r = \frac{S_r^2}{S_Z^2} = 0,427$
$Vh$	$Q_{Vh} = 0,155$	$\nu_{Vh} = 1$	$S_{Vh}^2 = \frac{Q_{Vh}}{\nu_{Vh}} = 0,155$	$F_{Vh} = \frac{S_{Vh}^2}{S_Z^2} = 171,948$
$Vr$	$Q_{Vr} = 0,000774$	$\nu_{Vr} = 1$	$S_{Vr}^2 = \frac{Q_{Vr}}{\nu_{Vr}} = 0,000774$	$F_{Vr} = \frac{S_{Vr}^2}{S_Z^2} = 0,86$
$hr$	$Q_{hr} = 0,607$	$\nu_{hr} = 1$	$S_{hr}^2 = \frac{Q_{hr}}{\nu_{hr}} = 0,607$	$F_{hr} = \frac{S_{hr}^2}{S_Z^2} = 67,427$
$Vhr$	$Q_{Vhr} = 0,0154$	$\nu_{Vhr} = 1$	$S_{Vhr}^2 = \frac{Q_{Vhr}}{\nu_{Vhr}} = 0,0154$	$F_{Vhr} = \frac{S_{Vhr}^2}{S_Z^2} = 17,161$
$Z$	$Q_Z = 0,0001$	$\nu_Z = 32$	$S_Z^2 = \frac{Q_Z}{\nu_Z} = 0,009$	

Кроме того, влияющим оказалось опосредованное воздействие радиуса пучка при изменении скорости и шага сканирования. Самостоятельного влияния данного фактора не выявлено. Данное обстоятельство позволило предположить о целесообразности построения регрессионной модели функции отклика с использованием четырех составляющих. Совместное влияние радиуса пучка со скоростью и шагом сканирования позволяет сделать вывод о замене такого фактора как радиус на плотность мощности.

После вычислений и проверки уравнение (1.1) выглядит следующим образом:

$$R_a = 0,447 + 0,185x_1 + 0,0875x_2 + 0,0628x_1x_2 - 0,0693x_2x_3 - 0,0176x_1x_2x_3.$$

При переходе к реальным значениям уравнение регрессии получается:

$$R_a = 0,447 + 0,185V + 0,0875h + 0,0628Vh - 0,0693hr - 0,0176Vhr.$$

#### Заключение

В работе составлена регрессионная модель полировки кварцевого стекла излучением лазера с учетом вычисленных значащих факторов с помощью дисперсионного анализа. Полученное уравнение адекватно экспериментальным данным. Планируется применение методики полного факторного эксперимента для исследования лазерного макро- и микроформообразования синтетических алмазов и других хрупких неметаллических материалов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Митягин, А.Ю. Технология и оборудование для обработки алмазных материалов современной техники / А.Ю. Митягин, А.А. Алтухов, А.Б. Митягина // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. – 2009. – № 1. – С. 53–58.
2. Арбузов, В.И. Основы радиационного оптического материаловедения / В.И. Арбузов. – СПб: СПб ГУ ИТМО, 2008. – 284 с.
3. Многопрофильная лазерная технология обработки кварцевого стекла / В.К. Сысоев // Электронный научный журнал «Исследовано в России» [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2003/053.pdf>. – Дата доступа: 25.01.2009.
4. Sysoev, V.K. Laser etching and polishing of quartz tubes / V.K. Sysoev // Glass and Ceramics. – 2003. – Vol. 60. – P. 106–107.
5. Laser Beam Polishing of Quartz Glass Surfaces / J. Hildebrand [et al.] // Physics Procedia. – 2011. – № 12. – P. 452–461.
6. Advanced analysis of laser beam polishing of quartz glass surfaces / J. Hildebrand [et al.] // Physics Procedia. – 2012. – № 39. – P. 277–285.
7. Адлер, Ю.П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю.П. Адлер, Е.В. Маркова, Ю.В. Грановский. – М.: Наука, 1976. – 278 с.
8. Исследование процесса лазерной полировки кварцевого стекла / Е.Б. Шершнев, Ю.В. Никитюк, А.Е. Шершнев, С.И. Соколов // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 4 (25). – С. 45–49.

Поступила в редакцию 16.10.17.

УДК 517.9

## НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА И РЕЗОНАНСЫ МАТРИЧНО-ЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

А.Б. Антоневиц<sup>1</sup>, М.Г. Кот<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет, Минск

<sup>2</sup>Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина

## NORMALIZED FORM AND RESONANCES OF MATRIX-VALUED FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

A.B. Antonevich<sup>1</sup>, M.G. Kot<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Belarusian State University, Minsk

<sup>2</sup>A.S. Pushkin Brest State University

Исследуются матрицы-функции, которые появляются при решении систем дифференциальных уравнений с дельта-образными коэффициентами. Рассмотрен процесс приведения к нормальной форме матрицы-функции  $F(\mu, \varepsilon)$ , зависящей от двух переменных, с помощью матриц-функций  $G$  и  $T$ , элементы которых принадлежат более широкому кольцу, чем элементы исходной матрицы-функции  $F(\mu, \varepsilon)$ . Найден в явном виде главный член разложения  $[F(\mu, \varepsilon)]^{-1}$  в случае матриц размерности 2. Выявлены случаи резонанса для систем с дельта-образными коэффициентами.

**Ключевые слова:** матрица-функция, нормальная форма, резонанс, кольцо, главный член разложения.

Matrix-functions that arise when solving systems of differential equations with Delta-shaped coefficients are investigated. The process of reducing the matrix-function  $F(\mu, \varepsilon)$  is considered depending on two variables to the normal form by means of the matrix functions  $G$  and  $T$  such that their elements belong to a ring wide then the ring containing elements of  $F(\mu, \varepsilon)$ . The explicit form of the main term of expansion  $[F(\mu, \varepsilon)]^{-1}$  in the case of matrices of dimension 2 is found explicitly. The cases of resonance for systems with delta-coefficients are revealed.

**Keywords:** matrix-function, normalized form, resonance, ring, main term of expansion.

### Введение

Пусть  $F(\mu, \varepsilon)$  есть матрично-значная функция, разлагающаяся в ряд по степеням малого параметра  $\varepsilon$  и обратимая при  $\varepsilon \neq 0$ :

$$F(\mu, \varepsilon) = \sum_{k=k_0}^{\infty} F_k(\mu) \varepsilon^k,$$

где коэффициенты  $F_k(\mu)$  – матрично-значные функции, аналитические в области  $\Omega \subset \mathbb{C}$  и  $F_{k_0} \neq 0$ .

В ряде приложений [1]–[2], в частности, при исследовании систем уравнений с дельта-образными коэффициентами [3], возникает вопрос о поведении обратных матриц  $[F(\mu, \varepsilon)]^{-1}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В первую очередь это нахождение предела

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [F(\mu, \varepsilon)]^{-1} := S(\mu) \quad (0.1)$$

и получение условий, когда этот предел ненулевой. Такие условия называются *условиями резонанса*.

В скалярном случае ответ очевиден. Разложение функции  $\frac{1}{F}$  легко строится и оно начинается с члена  $\frac{1}{F_{k_0} \varepsilon^{k_0}}$ , поэтому ненулевой конечный предел существует только в случае, когда  $k_0 = 0$  и тогда  $S(\mu) = \frac{1}{F_0(\mu)}$ .

Если  $\det F_{k_0}(\mu) \neq 0$ , то в матричном случае разложение  $[F(\mu, \varepsilon)]^{-1}$  имеет аналогичный вид и начинается с  $\frac{1}{\varepsilon^{k_0}} [F_{k_0}(\mu)]^{-1}$ . Но если  $\det F_{k_0}(\mu) \equiv 0$ , то задача о разложении обратной матрицы-функции становится более сложной, так как это разложение начинается с члена, содержащего  $\frac{1}{\varepsilon^v}$ , где  $v$  отлично от  $k_0$ . В связи с этим возникает задача о построении такого разложения и, в частности, нахождении главного члена в нем, т. е. вычислении показателя  $v$  и коэффициента при  $\frac{1}{\varepsilon^v}$ .

Вырожденным случаем (когда семейство матриц зависит только от одного параметра) рассматриваемой задачи является исследование резольвенты оператора  $A$  (т. е. матрицы) в пространстве  $\mathbb{C}^n$ . Как известно, в окрестности точки  $\lambda_0$ , которая является собственным значением для  $A$ , резольвента  $R(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$  допускает разложение

$$\begin{aligned} -R(\lambda) = & \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^r} D^{r-1} + \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^{r-2}} D^{r-2} + \dots \\ & + \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^2} D + \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)} P + \dots, \end{aligned}$$

где  $r$  есть наибольшая из размерностей клеток Жордана, соответствующих  $\lambda_0$ ,  $P$  есть проектор и  $D$  – нильпотентная матрица ( $D^r = 0$ ) [4].

Другой подробно исследованный случай возникает в теории возмущений, когда рассматривается семейство матриц, зависящее от двух параметров, имеющее вид  $A(\varepsilon) - \lambda I$  [4].

Основной задачей в данной работе является исследование матриц-функций, которые появляются при решении систем дифференциальных уравнений с дельта-образными коэффициентами. Поскольку умножение на дельта-функцию не определено в классической теории обобщенных функций, для такой системы не определено понятие решения. Поэтому рассматриваются аппроксимации формального дифференциального выражения семейством операторов  $L_\varepsilon$ , зависящих от малого параметра  $\varepsilon$ , и формальному выражению ставится в соответствие оператор  $L_0$  – предел аппроксимирующего семейства в смысле резольвентной сходимости. Здесь особенностью задачи является то, что в общем случае оператор  $L_0$  не определяется однозначно по исходному формальному выражению, а зависит от выбранного способа аппроксимации.

В выражении для резольвенты аппроксимирующего оператора  $L_\varepsilon$  входят матрицы-функции  $[F(\mu, \varepsilon)]^{-1}$ , где  $F(\mu, \varepsilon)$  имеет специальный вид

$$F(\mu, \varepsilon) = R(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} B(\varepsilon\mu). \quad (0.2)$$

Размерность такой матрицы-функции равна числу уравнений системы; матрица-функция  $R(\varepsilon)$  есть матрица, обратная к матрице  $A(\varepsilon)$ , составленной из коэффициентов уравнения; матрица-функция  $B(z)$ , зависящая аналитически от одной переменной, определяется способом аппроксимации  $\delta$ -функции; переменная  $\mu$  связана со спектральным параметром  $\lambda$  равенством  $\mu^2 = -\lambda$  и рассматриваемые функции определены при  $Re \mu > 0$ .

В этих приложениях резольвента предельного оператора  $L_0$  строится с помощью матрицы  $S(\mu)$  из (0.1) [1]–[3]. Случай, когда  $S(\mu) \equiv 0$ , соответствует тому, что оператор  $L_0$  (и соответственно, решения системы уравнений с дельта-образными коэффициентами в указанном смысле) не зависит от слагаемых, содержащих в качестве коэффициента  $\delta$ -функцию. В случае резонанса, когда  $S(\mu) \neq 0$ , указанные слагаемые существенно влияют на вид оператора  $L_0$ . При этом точки, в которых матрица-функция  $S(\mu)$  имеет особенности, есть точки спектра предельного оператора  $L_0$ .

Таким образом, в указанных приложениях к системам уравнений с дельта-образными коэффициентами условия резонанса позволяют найти те коэффициенты, при которых слагаемые, содержащиеся в качестве коэффициента  $\delta$ -функцию, влияют на вид решения, матрица  $S(\mu)$  позволяет построить резольвенту оператора, т. е. получить формулу решения соответствующей системы, а информация об особенностях матрицы-функции  $S(\mu)$  позволяет найти спектр оператора  $L_0$ .

Отметим, что в случае одного уравнения (которому соответствует скалярная функция  $F(\mu, \varepsilon)$ ) содержательные результаты имеют место только при бесконечно малых коэффициентах вида

$$a(\varepsilon) = a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots,$$

когда

$$R(\varepsilon) = \frac{1}{a(\varepsilon)} = \frac{1}{a_1} \frac{1}{\varepsilon} + \frac{a_2}{a_1^2} + \dots$$

Так как

$$\frac{1}{\varepsilon} B(\varepsilon\mu) = \frac{1}{\varepsilon} [b_0 + b_1\varepsilon\mu + b_2\varepsilon^2\mu^2 + \dots],$$

функция  $F(\mu, \varepsilon)$  имеет разложение

$$F(\mu, \varepsilon) = \frac{1}{a(\varepsilon)} + \frac{1}{\varepsilon} B(\varepsilon\mu) = \left[ \frac{1}{a_1} + b_0 \right] \frac{1}{\varepsilon} + \left[ \frac{a_2}{a_1^2} + b_1\mu \right] + \dots,$$

из которого ответ получается просто: условие резонанса есть равенство  $a_1 = -\frac{1}{b_0}$ ; при этом условии

$$S(\mu) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{F(\mu, \varepsilon)} = \frac{1}{\frac{a_2}{a_1^2} + b_1\mu}. \quad (0.3)$$

Здесь функция  $S(\mu)$  имеет особенность только в одной точке, откуда следует, что в скалярном случае оператор  $L_0$  имеет только одно собственное значение.

### 1 О нормальной форме матрицы

Как и многие другие задачи, сформулированная выше общая задача упрощается, если рассматриваемую матрицу-функцию предварительно (нормальному) виду.

Приведение к нормальной форме полиномиальных матриц входит в учебные курсы алгебры [5]–[6]. Для матриц-функций, аналитически зависящих от одного параметра  $\varepsilon$ , такое приведение рассматривалось, например, в [2], [3], [7]. Особенностью данной работы является то, что рассматриваются матрицы-функции, зависящие от двух переменных, что приводит к некоторому усложнению задачи.

Пусть  $\mathcal{A}(\Omega)$  есть кольцо функций, аналитических в области  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Интересующие нас

матрицы-функции есть матрицы с элементами из кольца  $K$ , состоящего из функций, представимых при достаточно малых  $\varepsilon$  в виде ряда

$$K = \left\{ f(\mu, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\mu) \varepsilon^k \right\}, \quad (1.1)$$

где  $f_k \in \mathcal{A}(\Omega)$ . Сформулированные ниже утверждения справедливы также в случае кольца формальных рядов (для которых не требуется сходимость).

Через  $M(n, K)$  обозначим кольцо квадратных матриц размерности  $n$  с элементами из произвольного коммутативного кольца  $K$ . Обычно приведение к нормальной форме матрицы  $F \in M(n, K)$  производится с помощью так называемых элементарных преобразований.

Элементарными преобразованиями называются преобразования вида:

1. Умножение какой-либо строки на элемент  $c$  из  $K$ .
2. Прибавление к строке с номером  $i$  строки с номером  $j$ , предварительно умноженной на элемент  $d \in K$ .
3. Перестановка местами строки с номером  $i$  со строкой с номером  $j$ .

Данные операции над строками эквивалентны умножению матрицы-функции слева соответственно на квадратные матрицы

$$G' = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \dots & & \\ & & c & \\ & & & \dots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix},$$

где число  $c$  принадлежит  $i$ -й строке и  $i$ -му столбцу;

$$G'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & & & & \\ & & 1 & \dots & d \\ & & \dots & & \dots \\ & & 0 & \dots & 1 \\ & & & & & 0 \\ 0 & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где элемент  $d$  принадлежит  $i$ -й строке и  $j$ -му столбцу;

$$G''' = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \dots & & & \\ & & 0 & \dots & 1 \\ & & & \dots & \\ & & 1 & & 0 \\ & & & & & \dots \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

где элемент 0 стоит на местах  $(i, i)$ ,  $(j, j)$ , элемент 1 стоит на местах  $(i, j)$  и  $(j, i)$ .

Аналогичные операции производятся над столбцами матрицы. Такие элементарные преобразования эквивалентны умножению справа на матрицы вида

$$T'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & & & & \\ & & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ & & d & \dots & 1 \\ & & & & & 0 \\ 0 & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где элемент  $d$  принадлежит  $i$ -й строке и  $j$ -му столбцу.

В результате ряда таких преобразований матрица  $F$  преобразуется в матрицу  $GFT$ , где  $G$  и  $T$  представляются в виде произведения матриц указанного выше вида.

Задача заключается в нахождении таких матриц  $G$  и  $T$ , при которых матрица  $GFT$  имеет наиболее простой вид, обычно диагональный.

Для приведения к диагональному виду надо построить преобразования, при которых внедиагональные члены обращаются в нуль. После преобразования вида  $G''$  в полученной матрице на месте с номером  $(i, k)$  получаем элемент  $f_{ik} - df_{jk}$ .

Подобрать такое значение  $d$ , при котором  $f_{ik} - df_{jk} = 0$ , можем только в том случае, когда  $f_{ik}$  представляется в виде  $f_{ik} = f_{jk}g$ ,  $g \in K$ . С алгебраической точки зрения последнее равенство есть условие, что  $f_{ik}$  принадлежит главному идеалу, порожденному элементом  $f_{jk}$ . Поэтому результат при приведении к нормальной форме зависит от вида идеалов кольца  $K$ .

Напомним, что в случае  $K = \mathbb{C}$  произвольную матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к каноническому диагональному виду

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix},$$

где число единиц на диагонали равно рангу  $r$  матрицы.

В классическом случае, когда  $K$  есть кольцо полиномов, матрица приводится к диагональному виду

$$\begin{pmatrix} e_1(\lambda) & & & 0 \\ & e_2(\lambda) & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & e_n(\lambda) \end{pmatrix},$$

где полином  $e_i(\lambda)$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$  нацело делится на полином  $e_{i-1}(\lambda)$  и старший коэффициент у  $e_i(\lambda)$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$  равен единице.

В случае, когда  $K = \{\sum a_k \varepsilon^k\}$  есть кольцо функций, аналитических в окрестности нуля, матрица приводится к виду

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^{v_1} & & & 0 \\ & \varepsilon^{v_2} & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & \varepsilon^{v_n} \end{pmatrix},$$

где, аналогичным образом, каждый диагональный элемент матрицы делится на предыдущий, т. е.  $v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_n$  [5]–[7].

Эти отличия нормальной формы возникают ввиду разной структуры системы идеалов соответствующих колец. Здесь  $\mathbb{C}$  есть поле и не имеет собственных идеалов; в кольце полиномов каждый идеал является главным и задается конечным набором чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  – нулей соответствующих многочленов; в случае кольца функций, аналитически зависящих от  $\varepsilon$  в окрестности нуля, каждый идеал является главным и порожден функцией вида  $\varepsilon^p$ .

## 2 Нормальная форма матрицы-функции, зависящей от двух переменных

В рассматриваемом случае кольца функций (1.1) ситуация более сложная, так как, если рассматривать преобразования указанного вида с  $d \in K$ , в общем случае невозможно привести матрицу к диагональному виду. Описанный ниже способ приведения к нормальной форме фактически повторяет известные вычисления для классических случаев, но они содержат в себе переход к рассмотрению более широкого кольца  $\tilde{K}$ , зависящего от рассматриваемой матрицы-функции  $F$ , что позволяет построить диагональную нормальную форму матрицы, элементы которой принадлежат  $\tilde{K}$ .

**Теорема 2.1.** Для любой матрицы-функций  $F \in M(n, K)$  существуют матрицы-функции  $G(\mu, \varepsilon)$  и  $T(\mu, \varepsilon)$ , приводящие  $F(\mu, \varepsilon)$  к диагональному виду:

$$G(\mu, \varepsilon)F(\mu, \varepsilon)T(\mu, \varepsilon) = \text{diag}\{\varepsilon^{v_1} f_1(\mu), \varepsilon^{v_2} f_2(\mu), \dots, \varepsilon^{v_n} f_n(\mu)\},$$

где функции  $f_k(\mu)$  являются элементами кольца  $\tilde{A}(\Omega)$ , полученного присоединением к  $A(\Omega)$  некоторой функции вида  $\frac{1}{h}$ ,  $h \in A(\Omega)$ .

При этом элементы матриц  $G(\mu, \varepsilon)$  и  $T(\mu, \varepsilon)$  есть ряды по степеням  $\varepsilon$  с коэффициентами из более широкого кольца  $\hat{A}(\Omega)$ , полученного присоединением к  $\tilde{A}(\Omega)$  еще одной функции вида  $\frac{1}{h_1}$ , где  $h_1 \in \tilde{A}(\Omega)$ .

В разложениях

$$G(\mu, \varepsilon) = \sum_0 G_k(\mu)\varepsilon^k, \quad F(\mu, \varepsilon) = \sum_0 T_k(\mu)\varepsilon^k,$$

выполнено

$$\det G_0(\mu) = \text{const} \neq 0, \quad \det T_0(\mu) = \text{const} \neq 0.$$

Доказательство проведем для случая матриц размерности 2. В общем случае рассуждения аналогичны, но более громоздки.

Пусть

$$F(\mu, \varepsilon) = \begin{pmatrix} f_{11}(\mu, \varepsilon) & f_{12}(\mu, \varepsilon) \\ f_{21}(\mu, \varepsilon) & f_{22}(\mu, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где  $f_{ij} \in K$ . Разложение каждой из этих функций начинается с некоторой степени  $\varepsilon$ :

$$f_{ij}(\mu, \varepsilon) = \sum_{k=v_{ij}}^{\infty} f_{ij}^{(k)}(\mu)\varepsilon^k, \quad (2.2)$$

где  $f_{ij}^{(v_{ij})}(\mu) \neq 0$ . Переставляя, если понадобится, строки и столбцы матрицы  $F(\mu, \varepsilon)$ , можно перевести в правый нижний угол элемент, разложение которого начинается со степени  $\varepsilon$  с наименьшим показателем  $v_0$ . В силу предположения, что  $F_0 \neq 0$ , имеем  $v_0 = 0$ .

Умножим вторую строку матрицы на функцию

$$d(\mu, \varepsilon) = \frac{f_{12}(\mu, \varepsilon)}{f_{22}(\mu, \varepsilon)}$$

и вычтем результат из первой строки.

Это преобразование соответствуют умножению слева матрицы  $F(\mu, \varepsilon)$  на матрицу

$$G_1(\mu, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & -d(\mu, \varepsilon) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

После этого преобразования получаем, что

$$G_1(\mu, \varepsilon)F(\mu, \varepsilon) = \begin{pmatrix} f_1(\mu, \varepsilon) & 0 \\ f_{21}(\mu, \varepsilon) & f_2(\mu, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

где

$$f_1(\mu, \varepsilon) = f_{11}(\mu, \varepsilon) - \frac{f_{12}(\mu, \varepsilon)f_{21}(\mu, \varepsilon)}{f_{22}(\mu, \varepsilon)},$$

$$f_2(\mu, \varepsilon) = f_{22}(\mu, \varepsilon).$$

Далее из первого столбца полученной матрицы вычтем второй, умноженный на функцию

$$d_1(\mu, \varepsilon) = \frac{f_{21}(\mu, \varepsilon)}{f_{22}(\mu, \varepsilon)},$$

то есть умножим справа матрицу  $G_1(\mu, \varepsilon)F(\mu, \varepsilon)$  на матрицу

$$T_1(\mu, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -d_1(\mu, \varepsilon) & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате получаем диагональную матрицу:

$$G_1(\mu, \varepsilon)F(\mu, \varepsilon)T_1(\mu, \varepsilon) = \begin{pmatrix} f_1(\mu, \varepsilon) & 0 \\ 0 & f_2(\mu, \varepsilon) \end{pmatrix} := N_1(\mu, \varepsilon).$$

**Лемма 2.1.** Пусть

$$f(\mu, \varepsilon) = \sum_{k=k_0}^{\infty} f_k(\mu)\varepsilon^k,$$

где  $f_{k_0}(\mu) \neq 0$ . Тогда имеет место представление  $f(\mu, \varepsilon) = f_{k_0}(\mu)\varepsilon^{k_0}\phi(\mu, \varepsilon)$ , где

$$\phi(\mu, \varepsilon) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(\mu), \quad \phi_k(\mu) = \frac{f_{k-k_0}(\mu)}{f_{k_0}(\mu)},$$

откуда следует, что функция  $\psi(\mu, \varepsilon) = \frac{1}{\phi(\mu, \varepsilon)}$  допускает разложение

$$\psi(\mu, \varepsilon) = \frac{1}{\phi(\mu, \varepsilon)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(\mu) \varepsilon^k, \quad (2.3)$$

коэффициенты которого также имеют вид дробей, содержащих в знаменателе  $f_{k_0}(\mu)$ .

Продолжим доказательство теоремы. Пусть  $f_1(\mu, \varepsilon) = f_1(\mu) \varepsilon^{\nu_1} \varphi_1(\mu, \varepsilon)$ ,  $f_2(\mu, \varepsilon) = f_2(\mu) \varphi_2(\mu, \varepsilon)$  есть представление диагональных элементов матрицы  $N_1(\mu, \varepsilon)$ , описанное в лемме 2.1. Умножив  $N_1(\mu, \varepsilon)$  на диагональную матрицу

$$D(\mu, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \phi_1(\mu, \varepsilon)^{-1} & 0 \\ 0 & \phi_2(\mu, \varepsilon)^{-1} \end{pmatrix},$$

получаем, что матрица приведена к диагональному виду:

$$D(\mu, \varepsilon)G(\mu, \varepsilon)F(\mu, \varepsilon)T(\mu, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon^{\nu} f_1(\mu) & 0 \\ 0 & f_2(\mu) \end{pmatrix} := N(\mu, \varepsilon).$$

Здесь число  $\nu$  есть номер первого ненулевого члена в разложении функции  $f_1(\mu, \varepsilon)$ .

Для завершения доказательства отметим, что здесь функция  $f_2(\mu)$  принадлежит кольцу  $\mathcal{A}(\Omega)$ , а функция  $f_1(\mu)$  принадлежит кольцу  $\tilde{\mathcal{A}}(\Omega)$ , полученному присоединением к  $\mathcal{A}(\Omega)$  функции  $\frac{1}{f_2(\mu)}$ . Элементы матриц  $G_1(\mu, \varepsilon)$  и  $T_1(\mu, \varepsilon)$  представляются в виде рядов, у которых коэффициенты принадлежат кольцу  $\tilde{\mathcal{A}}(\Omega)$ , а элементы матрицы  $D(\mu, \varepsilon)$ , согласно формуле (2.2) представляются в виде рядов, у которых коэффициенты принадлежат еще более широкому кольцу  $\hat{\mathcal{A}}(\Omega)$ , полученному присоединением к  $\tilde{\mathcal{A}}(\Omega)$  функции  $\frac{1}{f_1(\mu)}$ .  $\square$

### 3 Главный член разложения $[F(\mu, \varepsilon)]^{-1}$

Для матрицы-функции, имеющей нормальную форму

$$N(\mu, \varepsilon) = \text{diag}\{\varepsilon^{\nu_1} f_1(\mu), \varepsilon^{\nu_2} f_2(\mu), \dots, \varepsilon^{\nu_n} f_n(\mu)\},$$

где  $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_n$ , поведение обратной матрицы-функции описывается очевидным образом. В частности, главный член  $\widehat{N(\mu, \varepsilon)^{-1}}$  разложения  $N(\mu, \varepsilon)^{-1}$  есть

$$\widehat{N(\mu, \varepsilon)^{-1}} = \frac{1}{\varepsilon^{\nu}} \text{diag}\left\{\frac{1}{f_1(\mu)}, \frac{1}{f_2(\mu)}, \dots, 0, \dots, 0\right\},$$

где  $\nu = \nu_1$  и нули стоят на местах  $k$ , для которых  $\nu_k < \nu$ .

Ниже для упрощения записи у матриц-функций опущены аргументы  $\mu$  и  $\varepsilon$ .

**Теорема 3.1.** *Главный член  $\widehat{[F(\mu, \varepsilon)]^{-1}}$  в разложении обратной матрицы-функции  $[F(\mu, \varepsilon)]^{-1}$  есть произведение главных частей разложений соответствующих матриц-функций:*

$$\widehat{atF^{-1}} = \widehat{T} \widehat{N^{-1}} \widehat{DG}. \quad (3.1)$$

*Доказательство.* Так как  $DGFT = N$ , матрица-функция  $F^{-1}$  представляется в виде произведения  $F^{-1} = TN^{-1}DG$ .

Как легко проверить, если произведение главных членов разложений сомножителей отлично от нуля, то главный член в разложении произведения матриц-функций есть произведение главных членов разложений сомножителей. Здесь условие, что произведение главных членов разложений сомножителей отлично от нуля, существенно. В рассматриваемом случае главные члены разложений  $\widehat{T}$ ,  $\widehat{D}$  и  $\widehat{G}$  не содержат  $\varepsilon$  и являются невырожденными матрицами, поэтому произведение (3.1) отлично от нуля и главный член разложения произведения имеет вид произведения  $\frac{1}{\varepsilon^{\nu}}$  на матрицу, зависящую от  $\mu$ .  $\square$

Полученные утверждения дают общий ответ на поставленный вопрос, но для получения явных результатов требуются достаточно громоздкие вычисления. В конкретных примерах бывает проще непосредственно построить обратную матрицу-функцию и найти главный член ее разложения. В частности, в случае матриц размерности 2 вида (2.1) имеем

$$[F(\mu, \varepsilon)]^{-1} = \frac{1}{\det F(\mu, \varepsilon)} \begin{pmatrix} f_{22}(\mu, \varepsilon) & -f_{12}(\mu, \varepsilon) \\ -f_{21}(\mu, \varepsilon) & f_{11}(\mu, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

где  $f_{ij}(\mu, \varepsilon)$  имеют разложения (2.2).

Определитель  $\det F(\mu, \varepsilon)$  разлагается по степеням  $\varepsilon$ :

$$\det F(\mu, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k(\mu) \varepsilon^k, \quad (3.2)$$

где функции  $\Delta_k(\mu)$  могут быть найдены в явном виде:

$$\begin{aligned} \Delta_0(\mu) &= \det F^{(0)}(\mu) = f_{11}^{(0)}(\mu) f_{22}^{(0)}(\mu) - f_{12}^{(0)}(\mu) f_{21}^{(0)}(\mu), \\ \Delta_1(\mu) &= f_{11}^{(0)}(\mu) f_{22}^{(1)}(\mu) - f_{12}^{(0)}(\mu) f_{21}^{(1)}(\mu) + \\ &\quad + f_{11}^{(1)}(\mu) f_{22}^{(0)}(\mu) - f_{12}^{(1)}(\mu) f_{21}^{(0)}(\mu), \\ \Delta_2(\mu) &= f_{11}^{(0)}(\mu) f_{22}^{(2)}(\mu) + f_{11}^{(1)}(\mu) f_{22}^{(1)}(\mu) + \\ &\quad + f_{11}^{(2)}(\mu) f_{22}^{(0)}(\mu) - f_{12}^{(0)}(\mu) f_{21}^{(2)}(\mu) - \\ &\quad - f_{12}^{(1)}(\mu) f_{21}^{(1)}(\mu) - f_{12}^{(2)}(\mu) f_{21}^{(0)}(\mu). \end{aligned}$$

**Теорема 3.2.** *Если в разложении (3.2)*

$$\Delta_0(\mu) \equiv \Delta_1(\mu) \equiv \dots \equiv \Delta_{\nu-1}(\mu) \equiv 0$$

*и  $\Delta_{\nu}(\mu) \neq 0$ , то главный член разложения  $[F(\mu, \varepsilon)]^{-1}$  имеет вид*

$$\frac{1}{\varepsilon^{\nu}} \frac{1}{\Delta_{\nu}(\mu)} \begin{pmatrix} f_{22}^{(0)}(\mu) & -f_{12}^{(0)}(\mu) \\ -f_{21}^{(0)}(\mu) & f_{11}^{(0)}(\mu) \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Заметим, что некоторые из функций  $f_{ij}^{(0)}(\mu)$  могут быть равными нулю, но в силу условия, что  $F^{(0)} \neq 0$ , хотя бы одна из этих функций отлична от нуля.

В общем случае разложение (3.2) может начинаться с любой степени  $\varepsilon$  и для разных матриц-функций число  $\nu$  может быть любым.

#### 4 Случай резонанса для систем с дельта-коэффициентами

Применим полученный результат к матрицам-функциям вида (0.2), возникающим при исследовании систем с дельта-образными коэффициентами. Как уже отмечалось, задача заключается в получении условий на коэффициенты системы (т. е. на матрицу  $R(\varepsilon)$ ), при которых существует ненулевой предел (0.1).

Здесь возникает ряд качественно различных случаев системы уравнений.

1. Пусть разложение  $R(\varepsilon)$  начинается с  $\frac{1}{\varepsilon}$ :

$$R(\varepsilon) = R^{(-1)} \frac{1}{\varepsilon} + R^{(0)} + R^{(1)} \varepsilon + \dots$$

и

$$F_1(\mu, \varepsilon) = R(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} B(\varepsilon \mu).$$

Тогда

$$F_1(\mu, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} F(\mu, \varepsilon),$$

где

$$F(\mu, \varepsilon) = \sum_0^{\infty} F^{(k)}(\mu) \varepsilon^k$$

– матрица-функция, рассмотренного выше вида. Так как

$$[F_1(\mu, \varepsilon)]^{-1} = \varepsilon [F(\mu, \varepsilon)]^{-1},$$

предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [F_1(\mu, \varepsilon)]^{-1} := S(\mu)$$

будет ненулевым только в том случае, когда главный член разложения  $[F(\mu, \varepsilon)]^{-1}$  содержит  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

Матричные коэффициенты в разложении  $F(\mu, \varepsilon)$  имеют специальный вид:

$$F^{(0)} = R^{(-1)} + B^{(-1)}; \\ F^{(1)}(\mu) = R^{(0)} + B^{(0)}\mu.$$

Поэтому при разложении определителя

$$\Delta_0(\mu) = \det[R^{(-1)} + B^{(-1)}] = \\ = R_{11}^{(-1)} R_{22}^{(-1)} - R_{12}^{(-1)} R_{21}^{(-1)} + R_{11}^{(-1)} B_{22}^{(-1)} - \\ - R_{12}^{(-1)} B_{21}^{(-1)} + B_{11}^{(-1)} B_{22}^{(-1)} - B_{12}^{(-1)} B_{21}^{(-1)}$$

и не зависит от  $\mu$ . Согласно теореме 3.2, необходимым условием резонанса является  $\Delta_0 = 0$ . При заданной матрице  $B^{(-1)}$  всегда существуют

матрицы  $R^{(-1)}$ , при которых это условие выполнено.

Для рассматриваемой матрицы-функции  $F(\mu, \varepsilon)$  имеем

$$\Delta_1(\mu) = R_{11}^{(-1)} R_{22}^{(0)} - R_{12}^{(-1)} R_{21}^{(0)} + R_{11}^{(0)} R_{22}^{(-1)} - R_{21}^{(-1)} R_{12}^{(0)} + \\ + R_{22}^{(0)} B_{11}^{(-1)} - R_{21}^{(0)} B_{12}^{(-1)} + R_{11}^{(0)} B_{22}^{(-1)} - R_{12}^{(0)} B_{21}^{(-1)} + \\ + (R_{11}^{(-1)} B_{22}^{(0)} - R_{12}^{(-1)} B_{21}^{(0)} + R_{22}^{(-1)} B_{11}^{(0)} - R_{21}^{(-1)} B_{12}^{(0)}) \mu + \\ + (B_{11}^{(-1)} B_{22}^{(0)} - B_{12}^{(-1)} B_{21}^{(0)} + B_{11}^{(0)} B_{22}^{(-1)} - B_{21}^{(-1)} B_{12}^{(0)}) \mu.$$

Поэтому, если  $\Delta_1(\mu)$  отлично от 0, то разложение  $[F(\mu, \varepsilon)]^{-1}$  начинается с

$$\frac{1}{\varepsilon \Delta_1(\mu)} \begin{pmatrix} R_{22}^{(-1)} + B_{22}^{(-1)} & -R_{12}^{(-1)} - B_{12}^{(-1)} \\ -R_{21}^{(-1)} - B_{21}^{(-1)} & R_{11}^{(-1)} + B_{11}^{(-1)} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, если  $\Delta_0 = 0$  и  $\Delta_1(\mu) \neq 0$ , то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [F_1(\mu, \varepsilon)]^{-1} = \frac{1}{\Delta_1(\mu)} \begin{pmatrix} R_{22}^{(-1)} + B_{22}^{(-1)} & -R_{12}^{(-1)} - B_{12}^{(-1)} \\ -R_{21}^{(-1)} - B_{21}^{(-1)} & R_{11}^{(-1)} + B_{11}^{(-1)} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что здесь функция  $\Delta_1(\mu)$ , является многочленом первой степени относительно  $\mu$  и, следовательно, имеет один корень.

Описанный случай будем называть основным резонансом. Он имеет место при выполнении одного скалярного условия на матрицу коэффициентов.

Если выполнено более сильное условие

$$R^{(-1)} + B^{(-1)} = 0,$$

то разложение начинается с члена

$$R^{(0)} + B^{(0)}\mu,$$

не содержащего  $\varepsilon$  и тогда главный член разложения обратной матрицы есть

$$[R^{(0)} + B^{(0)}\mu]^{-1}.$$

Здесь

$$\det[R^{(0)} + B^{(0)}\mu]$$

есть многочлен второй степени, имеющий два корня. Это есть случай двойного резонанса, который имеет место при выполнении матричного равенства, т.е. четырех скалярных условий.

2. Вырожденные резонансы. Пусть разложение начинается  $\frac{1}{\varepsilon^2}$ :

$$R(\varepsilon) = R^{(-2)} \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} R^{(-1)} + R^{(0)} + \dots,$$

где  $R^{(-2)} \neq 0$  и

$$F_2(\mu, \varepsilon) = R(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} B(\varepsilon \mu).$$

Тогда

$$F_2(\mu, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} F(\mu, \varepsilon),$$

где  $F(\mu, \varepsilon)$  – матрица-функция, рассмотренного выше вида. Так как

$$[F_2(\mu, \varepsilon)]^{-1} = \varepsilon^2 [F(\mu, \varepsilon)]^{-1},$$

предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [F_2(\mu, \varepsilon)]^{-1}$$

будет ненулевым только в том случае, когда главный член разложения  $[F(\mu, \varepsilon)]^{-1}$  содержит  $\frac{1}{\varepsilon^2}$ .

Это имеет место, если разложение определителя (3.2) начинается с  $\varepsilon^2$ . Таким образом, в этом случае для существования резонанса должно быть выполнено два условия:

$$\Delta_0(\mu) \equiv 0, \quad \Delta_1(\mu) \equiv 0.$$

Матричные коэффициенты в этом разложении имеют специальный вид:

$$\begin{aligned} F^{(0)} &= R^{(-2)}; \\ F^{(1)} &= R^{(-1)} + B^{(-1)}; \\ F^{(2)}(\mu) &= R^{(0)} + B^{(0)}\mu. \end{aligned}$$

Поэтому  $\Delta_0$  и  $\Delta_1$  для данного случая не зависят от  $\mu$  и существуют матрицы  $R(\varepsilon)$ , при которых условия резонанса  $\Delta_0 = 0, \Delta_1 = 0$  выполнены.

Эти утверждения согласуются с полученным в [9] описанием резонансов для некоторых систем дифференциальных уравнений с дельта-образными коэффициентами, имеющих специальный вид.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вишик, М.И. Решения некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений / М.И. Вишик, Л.А. Люстерник // Успехи матем. наук. – 1960. – Т. 15, № 3 (93). – С. 3–80.
2. Романчук, Т.А. Явление резонанса для матрично-значных функций / Т.А. Романчук // Вестні НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 8–16.
3. Антоневиц, А.Б. Уравнения с дельта-образными коэффициентами: метод конечномерных аппроксимаций / А.Б. Антоневиц, Т.А. Романчук // LAP LAMBERT, 2012.
4. Като, Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
5. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1965. – 431 с.
6. Винберг, Э.Б. Курс алгебры. 2-е изд., испр. и доп. / Э.Б. Винберг. – М.: Изд-во Факториал Пресс, 2001. – 544 с.
7. Борухов, В.Т. Критерии обратимости линейных стационарных многомерных систем / В.Т. Борухов // Автоматика и телемеханика. АН СССР. – 1978. – № 11. – С. 5–11.
8. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – 5-е изд. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с.
9. Кот, М.Г. О резольвентной сходимости операторов, аппроксимирующих систему уравнений с  $\delta$ -образными коэффициентами / М.Г. Кот // Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика. – 2015. – С. 111–117.

Поступила в редакцию 02.10.17.

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ СДВИГОВЫХ ВОЛН В ПЛОСКОМ ИЗОТРОПНОМ СЛОЕ С ТОНКИМИ ПОКРЫТИЯМИ

В.М. Белубекян<sup>1</sup>, С.К. Оганян<sup>1</sup>, К.Б. Казарян<sup>1</sup>, В.В. Можаровский<sup>2</sup>, Н.А. Марьяна<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Институт механики НАН Армении, Ереван

<sup>2</sup>Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

<sup>3</sup>Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

## THE PROPAGATION OF SHEAR WAVES IN THE FLAT ISOTROPIC LAYER WITH THIN COATINGS

V.M. Belubekyan<sup>1</sup>, S.K. Ohanyan<sup>1</sup>, K.B. Ghazaryan<sup>1</sup>, V.V. Mozharovsky<sup>2</sup>, N.A. Maryina<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Institute of Mechanics of NAS of Armenia

<sup>2</sup>F. Scorina Gomel State University

<sup>3</sup>Belarusian State University of Transport, Gomel

Предлагается простая модель для исследования влияния свойств тонких покрытий на характеристики упругого волновода. Установлено, что выбором упругих свойств покрытий можно увеличить или уменьшить фазовые скорости сдвиговых волн.

**Ключевые слова:** упругий волновод, тонкое покрытие, фазовая скорость, сдвиговые волны.

A simple model to study the effect of properties of thin coatings on the characteristics of elastic waveguide is considered. It was established that the choice of the elastic properties of the coatings can increase or decrease the phase velocity of shear waves.

**Keywords:** elastic waveguide, thin coating, phase velocity, shear waves.

### Введение

Многослойные структуры находят широкое применение в различных областях механики для решения многих инженерных задач, связанных с защитой от коррозии, теплоизоляционными свойствами, повышенными прочностными характеристиками, а также в ряде случаев слоистый композит является волноводной структурой. Имеется большое количество литературы, касающейся исследований вопросов распространения волн в слоистых телах. Так в работе [1] исследуется плоская волна в вязкоупругом слое среды, установлен характер изменения дисперсионной зависимости скорости волны от частоты. В статьях [2], [3] исследуется распространение волн в упругом изотропном слое в зависимости от граничных условий. Содержательный обзор по упругим волноводам приводится в статье В.В. Мелешко и др. [3].

В настоящей статье предлагается простая модель для исследования влияния свойства тонких покрытий на характеристики упругого волновода. Установлено, что выбором упругих свойств покрытий можно увеличить или уменьшить фазовые скорости сдвиговых волн.

### 1 Постановка задачи

Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат  $(x, y, z)$  бесконечный трёхслойный волновод, который занимает область

$$\begin{aligned} -\infty < x < \infty, \\ -h_2 - 0,5h \leq y \leq 0,5h + h_1, \\ -\infty < z < \infty. \end{aligned}$$

Толщины верхних слоёв равны  $h_1, h_2$  соответственно (рисунок 1.1), считаем, что выполняется условие антиплоской деформации

$$\bar{u} = (0, 0, w(x, y, t)).$$

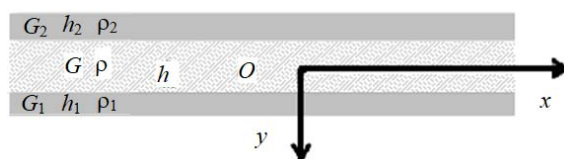


Рисунок 1.1 – Схема расчета

Уравнение распространения волн во внутреннем слое запишем в виде [4]

$$c_i^2 \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{для } -0,5h < y < 0,5h, \quad (1.1)$$

где  $c_i^2 = G/\rho$ ,  $G$  – модуль сдвига,  $\rho$  – плотность материала слоя,  $\Delta$  – двумерный оператор Лапласа.

Соответствующие уравнения для внешних слоёв удобно представить следующим образом:

$$G_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(i)}}{\partial y} = \rho_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2). \quad (1.2)$$

Здесь индекс  $i = 1$  относится к области  $0,5h < y \leq 0,5h + h_1$ , индекс  $i = 2$  – к области

$-h_2 - 0,5h \leq y < -0,5h$ ,  $\sigma_{23}^{(i)}$  – касательные напряжения,  $G_i$  – модули сдвига,  $\rho_i$  – плотности материалов.

Внешние границы волновода считаются свободными

$$\begin{aligned} \sigma_{23}^{(2)} &= 0 \text{ при } y = -0,5h, \\ \sigma_{23}^{(1)} &= 0 \text{ при } y = 0,5h + h. \end{aligned} \quad (1.3)$$

На стыке слоёв принимаются условия непрерывности перемещений и напряжений:

$$\begin{aligned} w &= w_2, \sigma_{23} = \sigma_{23}^{(2)} \text{ при } y = -0,5h, \\ w &= w_1, \sigma_{23} = \sigma_{23}^{(1)} \text{ при } y = 0,5h. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Найдем решения уравнения (1.1) для слоя, у которых отлична от нуля была компонента  $w$  и не зависела от  $z$ , что дает возможность построить дисперсионное уравнение для поперечной волны.

### 2 Дисперсионное уравнение

Будем искать решения краевой задачи в форме таких решений, которые гармонически зависят от времени, т. е.  $w = f(y) \exp ik \left( x - \frac{\omega}{k} t \right)$ , здесь  $k$  – волновое число,  $i$  – мнимая единица,  $V = \frac{\omega}{k}$  – неизвестная фазовая скорость в упругом слое.

Уравнения (1.2) интегрируются по  $y$  в пределах  $(-h_2 - 0,5h; -0,5h)$ ,  $(0,5h; 0,5h + h_1)$  соответственно. Ввиду малости толщин  $h_1, h_2$  принимается, что перемещения  $w_1, w_2$  не меняются по толщине слоёв [5]. После чего используются граничные условия (1.3) и (1.4). В результате, уравнения (1.2) приводятся к следующим граничным условиям для уравнения (1.1)

$$\begin{aligned} G_2 h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + G \frac{\partial w}{\partial y} &= \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \text{ при } y = -0,5h, \\ G_1 h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - G \frac{\partial w}{\partial y} &= \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \text{ при } y = 0,5h. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Таким образом, рассматриваемая задача волновода приводится к решению уравнения (1.1) с граничными условиями (2.1). Эта задача отличается от классических антиплоских задач плоского волновода [4] лишь усложнением граничных условий.

Общее решение уравнения (1.1) в виде гармонических волн известно

$$\begin{aligned} w &= \left[ A \sin(k\sqrt{\eta-1}y) + B \cos(k\sqrt{\eta-1}y) \right] \times \\ &\times \exp ik \left( x - \frac{\omega}{k} t \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\eta = \omega^2 / (k^2 C_i^2)$ ,  $C_i^2 = G/\rho$  – безразмерный параметр, характеризующий квадрат искомой фазовой скорости.

Требование, чтобы решение (2.2) удовлетворяло граничным условиям (2.1), приводит к следующей однородной системе алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных  $A, B$ .

$$\begin{aligned} &A \left( \sqrt{\eta-1} + \operatorname{tg} \left( \frac{\sqrt{\eta-1}}{2} kh \right) \right) \gamma_1 (1 - \eta \theta_1) \xi_1 - \\ &- B \left( \sqrt{\eta-1} \operatorname{tg} \left( \frac{\sqrt{\eta-1}}{2} kh \right) - \gamma_1 (1 - \eta \theta_1) \xi_1 \right) = 0, \\ &A \left( \sqrt{\eta-1} + \operatorname{tg} \left( \frac{\sqrt{\eta-1}}{2} kh \right) \right) \gamma_2 (1 - \eta \theta_2) \xi_2 + \\ &+ B \left( \sqrt{\eta-1} \operatorname{tg} \left( \frac{\sqrt{\eta-1}}{2} kh \right) - \gamma_2 (1 - \eta \theta_2) \xi_2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В (2.3) приняты обозначения

$$\theta_i = \frac{C_i^2}{C_{ii}^2}, C_{ii}^2 = \frac{G_i}{\rho_i}, \xi_i = kh_i, \gamma_i = \frac{G_i}{G} \quad (i=1,2). \quad (2.4)$$

Условие равенства нулю детерминанта системы (2.3) после ряда преобразований приводится к удобному виду

$$\begin{aligned} &[\xi_1 \xi_2 \gamma_1 \gamma_2 (\theta_1 \eta - 1)(\theta_2 \eta - 1) + 1 - \eta] \operatorname{tg}(\sqrt{\eta-1} kh) - \\ &- \sqrt{\eta-1} [(\theta_2 \eta - 1) \gamma_2 \xi_2 + (\theta_1 \eta - 1) \gamma_1 \xi_1] = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Дисперсионное уравнение задачи однослойного волновода со свободными от нагрузок границами получается из (2.5) либо при  $G_1 = G_2 = 0$ , либо при  $h_1 = h_2 = 0$ .

В частном случае слоя с одним покрытием [6] ( $h_2 = 0$ ) дисперсионное уравнение (2.5) упрощается

$$\sqrt{\eta-1} \operatorname{tg}(kh\sqrt{\eta-1}) + (\theta_1 \eta - 1) \gamma_1 \xi_1 = 0. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) в длинноволновом приближении ( $kh \ll 1$ ) имеет решение

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{Gh + G_1 h_1}{\rho h + \rho_1 h_1}. \quad (2.7)$$

Из (2.7) следует, что наличие покрытия приводит к увеличению фазовой скорости волны.

Уравнение (2.6) в коротковолновом приближении ( $kh \gg 1$ ) имеет решение, удовлетворяющее условию  $\eta < 1$ , если  $\theta_1 > 1$ . Это утверждение следует из уравнения (2.6) в приближении  $\operatorname{th}(\sqrt{1-\eta} kh) \approx 1$

$$\sqrt{1-\eta} - (\theta_1 \eta - 1) \gamma_1 \xi_1 = 0. \quad (2.8)$$

Дисперсионное уравнение (2.8) есть уравнение поверхностных волн Лява в случае, когда слой, покрывающий полупространство, тонкий. Из (2.8) при пренебрежении величиной сдвиговой жёсткости покрытия ( $G_1 h_1$ ) получается решение известной задачи о поверхностных волнах в полупространстве при наличии инерционной

массы на поверхности [6], [7]. Если же в (2.8) пре-  
небречь инерционной массой, то решение, удов-  
летворяющее условию  $\eta < 1$ , не существует.

### 3 Асимптотические зависимости и чис- ленные результаты

Исследуем дисперсионное уравнение (2.5),  
численно в программном модуле определим за-  
висимость фазовой скорости волновода от пара-  
метров  $kh$ ,  $h_1$ ,  $\gamma_i$  и получим некоторые асим-  
птотические формулы. Для плоских слоистых  
волноводов волноводный эффект возникает то-  
гда, когда скорость волны в покрытиях меньше  
скорости волны в основном волноводе. Возника-  
ет вопрос: при каких условиях для покрытий с  
разными свойствами появляются волны с фазо-  
выми скоростями, удовлетворяющими условию  
 $\eta < 1$ ? Уравнение (2.5) имеет частный корень  
 $\eta = 1$ . Если разделить это уравнение на  $\sqrt{\eta - 1}$  и  
потом взять предел  $\eta \rightarrow 1$ , то получится уравнение

$$\xi_1 \xi_2 \gamma_1 \gamma_2 (\theta_1 - 1)(\theta_2 - 1)kh -$$

$$-(\theta_2 - 1)\gamma_2 \xi_2 - (\theta_1 - 1)\gamma_1 \xi_1 = 0.$$

Преобразуем это уравнение к удобному для  
анализа виду

$$kh = [(\theta_1 - 1)\gamma_1 \xi_1]^{-1} + [(\theta_2 - 1)\gamma_2 \xi_2]^{-1} \quad (3.1)$$

Рассмотрим пример для слоистого волно-  
вода с заданными геометрическими и физическими  
параметрами  $h_2, h_1, \gamma_2, \gamma_1, G_2, G_1, \rho_2 = \rho_1$ . Введем  
соотношения  $\alpha_i = h_i/h$  ( $i = 1, 2$ ), тогда уравнение  
(3.1) можем записать в виде:

$$(kh)^2 = [(\theta_1 - 1)\gamma_1 \alpha_1]^{-1} + [(\theta_2 - 1)\gamma_2 \alpha_2]^{-1}, \quad (3.2)$$

с помощью которого легко определяем условие  
возникновения фазовых скоростей, удовлетво-  
ряющих условию  $\eta < 1$ . Например,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$ ,  
 $\theta_1 = \theta_2 = 1.4$ ,  $h_1 = 0.1$ ,  $h_2 = 0.2$ ,  $h = 1$ , то  $kh > 4,33$ .  
Исследуем поведение фазовой скорости для вол-  
новода при  $kh \rightarrow 0$ . Из уравнения (3.2) имеем

$$\eta = \frac{1 + \gamma_1 \alpha_1 + \gamma_2 \alpha_2}{1 + \gamma_1 \alpha_1 \theta_1 + \gamma_2 \alpha_2 \theta_2}$$

или 
$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{Gh + G_1 h_1 + G_2 h_2}{\rho h + \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}. \quad (3.3)$$

На рисунке 3.1 представлены результаты  
решения дисперсионного уравнения (2.6) при  
различных значениях параметра  $kh$ .

Анализ кривых (1) и (2) показывает, что фа-  
зовая скорость практически не зависит от малых  
величин  $kh$  и из уравнений (3.3) можно найти эти  
величины, при которых появляются исследуемые  
волны. Например, для кривой (2) ( $kh > 3$ ). Пре-  
дельное значение  $\eta$  в случае  $kh \rightarrow \infty$  определя-  
ется из уравнения

$$(\theta_1 \eta - 1)(\theta_2 \eta - 1) = 0. \quad (3.4)$$

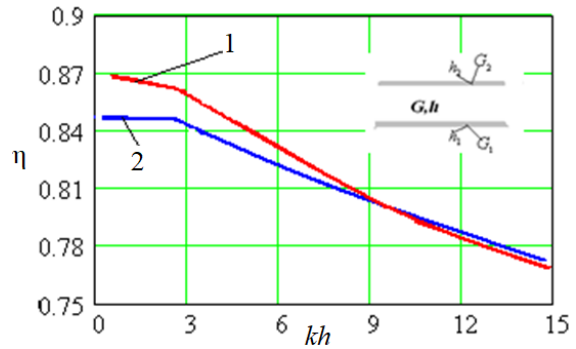


Рисунок 3.1. – Дисперсия фазовой скорости  
распространения волны:

- 1 – расчет для параметров  $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$ ,  
 $\theta_1 = \theta_2 = 1.4$ ,  $h_1 = 0.1$ ,  $h_2 = 0.2$ ,  $h = 1$ ;
- 2 – расчет для параметров  $h_1 = h_2 = 0.2$ ,  $h = 1$ .

Из уравнения (3.4) находим предельное зна-  
чение  $\eta$  для представленного на рисунке 3.1  
примера. Имеем  $\eta = 0,714$ , что подтверждается  
численным решением дисперсионного уравне-  
ния. Если  $kh \rightarrow 0$ , то расчет по уравнению (3.3),  
которое преобразуется в уравнение, независимое  
от  $kh$  дает значение  $\eta = 0,869$ .

Пусть тонкие покрытия обладают одинако-  
выми свойствами:

$$h_2 = h_1, \gamma_2 = \gamma_1, G_2 = G_1, \rho_2 = \rho_1.$$

С учётом (2.4), (2.6) дисперсионное уравне-  
ние (2.5) приводится к виду

$$\left[ \xi_1^2 \gamma_1^2 (\theta_1 \eta - 1)^2 + 1 - \eta \right] \text{tg}(\sqrt{\eta - 1} kh) -$$

$$- 2\gamma_1 \xi_1 \sqrt{\eta - 1} (\theta_1 \eta - 1) = 0. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) имеет решение  $\eta < 1$ , если  
 $\theta_1 > 1$ . Реализован программный модуль для  
численного решения дисперсионных уравнений.  
В частности, при  $\gamma_1 = 2$ ,  $\theta_1 = 1.4$ ,  $\xi_1 = 0.1$ ,  $kh = 1$   
имеем  $\eta = 0.897$ . Уравнение (3.2) может быть  
условием возникновения фазовых скоростей,  
удовлетворяющих условию  $\eta < 1$ .

### Заключение

Разработана механико-математическая модель  
определения сдвиговых волн для слоистого вол-  
новода, проведено теоретическое исследование о  
влиянии свойств тонких покрытий на характери-  
стики упругого волновода. Получены зависимо-  
сти, определяющие фазовые скорости в изотроп-  
ном слое с покрытиями с различными геометри-  
ческими и физическими характеристиками. Построены асимптотические формулы, определяющие зависимость фазовой скорости от частоты, т. е. дисперсию. Например, при задании остальных характеристик из (3.2) определяется  $(kh)_*$ . Следовательно, условием появления указанных

волн будет  $(kh) > (kh)_*$ . Расчеты проводились с помощью разработанного программного модуля. Результаты могут использоваться в производстве и в учебном процессе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кулик, В.М. Плоская волна деформации в изотропном слое вязкоупругого материала / В.М. Кулик // Прикладная механика и техническая физика. – 2006. – Т. 47, № 3. – С. 104–111.

2. Распространение волн в упруго-закрепленном изотропном слое / Л.Ю. Коссович [и др.] // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия: Механика. – 2008. – № 8/2 (67). – С. 78–89.

3. Упругие волноводы: история и современность / В.В. Мелешко [и др.] // Математические методы и физико-механические поля. – 2008. – Т. 51, № 2. – С. 86–104.

4. Miklovitz, J. The theory of elastic wave and waveguides / J. Miklovitz. – Amsterdam: North-Holland, 1978. – 618 p.

5. Белубекян, М.В. О поверхностных волнах Лява в случае композиционного слоя / М.В. Белубекян // Актуальные проблемы неоднородной механики. – Ереван: ЕГУ, 1991. – С. 66–71.

6. Generalized love waves / M.I. Newton [et al.] // Europhysics Letters. – 2002. – Vol. 58, № 6. – P. 818–822.

7. Белубекян, В.М. Резонансные и локализованные сдвиговые колебания в слое с прямоугольным поперечным сечением / В.М. Белубекян, М.В. Белубекян // Докл. НАН Армении. – 2015. – Т. 115, № 1. – С. 40–43.

*Работа выполнена при поддержке БРФФИ – ГКН Армении, грант T17APM-034, AV16-42.*

*Поступила в редакцию 30.10.17.*

## О ПЕРЕСЕЧЕНИИ $A$ -ДОПУСТИМЫХ $\Theta$ -ПОДГРУПП, НЕ СОДЕРЖАЩИХ ПОДГРУППУ ФИТТИНГА

Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич, М.В. Селькин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

## ON INTERSECTION OF $A$ -ADMISSIBLE $\Theta$ -SUBGROUPS THAT DO NOT CONTAIN FITTING SUBGROUP

R.V. Borodich, E.N. Borodich, M.V. Selkin

F. Scorina Gomel State University

Исследовано строение подгруппы, равной пересечению ядер ненильпотентных максимальных  $A$ -допустимых  $\Theta$ -подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга. Установлено влияние соответствующей обобщенной подгруппы Фраттини на строение самой группы.

**Ключевые слова:** конечная группа, абнормальная подгруппа, подгруппа Фиттинга.

The structure of a subgroup equal to the intersection of kernels non-nilpotent maximal  $A$ -admissible  $\Theta$ -subgroups that do not contain Fitting subgroup is considered. The influence of the corresponding generalized Frattini subgroup on the structure of the group itself was found.

**Keywords:** finite group, abnormal subgroup, Fitting subgroup.

### Введение

Все рассматриваемые в статье группы предполагаются конечными. В теории конечных групп центральное место занимают объекты, экстремально расположенные в группе. К таким объектам в первую очередь относятся максимальные подгруппы. Одно из направлений теории пересечений максимальных подгрупп связано с задачей о свойствах пересечений заданных максимальных подгрупп и исследовании влияния этих свойств на подгрупповое и нормальное строение группы. Данное направление берет начало с работы Фраттини [1], установившего нильпотентность пересечения  $\Phi(G)$  всех максимальных подгрупп конечной группы  $G$ . Полученные им результаты в дальнейшем развивались в работах многих авторов (см. монографии [2] и [3]).

В настоящее время одно из направлений развития данной теории связано с исследованием пересечений максимальных подгрупп, не содержащих некоторую нормальную подгруппу конечной группы [4].

Данная работа посвящена разитию указанного направления в группах с операторами.

### 1 Определения и обозначения

Через  $M_G$  обозначают ядро подгруппы  $M$  в группе  $G$  (то есть пересечение всех подгрупп из  $G$ , сопряженных с подгруппой  $M$ ).

Учитывая, что максимальные подгруппы оказывают существенное влияние на строение конечных групп, рассмотрим максимальные

подгруппы среди подгрупп, обладающих общим заданным свойством, и изучим их пересечения и влияние на нормальное строение группы.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой  $G$  и все группы, изоморфные  $G$ .

Пусть даны группа  $G$ , множество  $A$  и отображение  $f: A \rightarrow \text{End}(G)$ , где  $\text{End}(G)$  – гомоморфное отображение группы  $G$  в себя или эндоморфизм группы  $G$ . Подгруппа  $M$  называется  $A$ -допустимой, если  $M$  выдерживает действие всех операторов из  $A$ , то есть  $M^\alpha \subseteq M$  для любого оператора  $\alpha \in A$ .

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им эндоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является  $A$ -допустимой для произвольной группы операторов.

Пусть  $\mathfrak{X}$  произвольный непустой класс групп. Сопоставим со всякой группой  $G \in \mathfrak{X}$  некоторую систему подгрупп  $\tau(G)$ . Согласно [5] будем говорить, что  $\tau$  – подгрупповой  $\mathfrak{X}$ -функтор (подгрупповой функтор на  $\mathfrak{X}$ ), если для всякого эпиморфизма  $\phi: A \rightarrow B$ , где  $A, B \in \mathfrak{X}$ , выполнены включения  $(\tau(A))^\phi \subseteq \tau(B)$ ,  $(\tau(B))^{\phi^{-1}} \subseteq \tau(A)$ , и, кроме того, для любой группы  $G \in \mathfrak{X}$  имеет место  $G \in \tau(G)$ .

Если  $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$  – класс всех групп, то подгрупповой  $\mathfrak{X}$ -функтор называют просто подгрупповым функтором.

В дальнейшем функтор  $\theta$  будем называть абнормально полным, если для любой группы  $G$  среди множества  $\theta(G)$  содержатся все абнормальные подгруппы группы  $G$ .

Через  $M_G$  обозначают ядро подгруппы  $M$  в группе  $G$  (то есть пересечение всех подгрупп из  $G$ , сопряженных с подгруппой  $M$ ).

В дальнейшем для каждой группы  $G$  будем фиксировать некоторую ее группу операторов. Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им автоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является  $A$ -допустимой для произвольной группы операторов.

Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется максимальной  $A$ -допустимой подгруппой в  $G$ , если  $H$  является  $A$ -допустимой и любая собственная  $A$ -допустимая подгруппа из  $G$ , содержащая  $H$ , совпадает с  $H$ .

Введем следующие обозначения:

$$\overline{\Phi}_{\theta_F}(G, A) = \cap \{M_G \mid M \not\supseteq F(G), M \notin \mathfrak{N}, M \in \theta(G),$$

$M$  – максимальная  $A$ -допустимая подгруппа};

$$\Phi_{\theta_F}(G, A) = \cap \{M_G \mid M \not\supseteq F(G), M \in \theta(G),$$

$M$  – максимальная  $A$ -допустимая подгруппа};

$$\Phi_{\theta_p}(G, A) = \cap \{M_G \mid M \supseteq F(G), M \in \theta(G),$$

$M$  – максимальная  $A$ -допустимая подгруппа};

$$\Phi_{\theta}(G, A) = \cap \{M_G \mid M \in \theta(G), M \text{ – максимальная } A\text{-допустимая подгруппа}\}.$$

Всегда полагаем, что пересечение пустого множества подгрупп из  $G$  совпадает с самой группой  $G$ .

В случае, когда  $\theta$  тривиальный функтор, то подгруппа  $\Phi_{\theta}(G, A)$  совпадает с подгруппой  $\Phi(G, A)$ , некоторые свойства которой были описаны Л.Я. Поляковым в [6]. Если функтор  $\theta$  абнормальный, то подгруппу  $\Phi_{\theta}(G, A)$  будем обозначать  $\Delta(G, A)$  (операторный аналог подгруппы Гашюца  $\Delta(G)$ , введенной в [2]). Напомним, что подгруппой Гашюца  $\Delta(G)$  называют подгруппу, равную пересечению всех абнормальных максимальных подгрупп группы  $G$ .

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной  $A$ -допустимой относительно некоторой группы операторов  $A$ , а также не всякая максимальная  $A$ -допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе.

## 2 Вспомогательные результаты

**Лемма 2.1** [6, с. 64]. Пусть группа  $G$  имеет группу операторов  $A$  такую, что  $(|G|, |A|) = 1$ . Если  $G$  обладает свойством  $C_{\pi}$ , то  $G$  содержит  $A$ -допустимую  $S_{\pi}$ -подгруппу.

**Лемма 2.2** [7, с. 26]. Пусть группа  $G$  имеет группу операторов  $A$ . Если  $K$  –  $A$ -допустимая

подгруппа группы  $G$ , то  $N_G(K)$  является  $A$ -допустимой подгруппой группы  $G$ .

**Лемма 2.3** [2, с. 179]. Если подгруппа  $H$  пронормальна в  $G$ , то подгруппа  $N_G(H)$  абнормальна в  $G$ .

**Лемма 2.4.** Пусть группа  $G$  имеет группу операторов  $A$  такую, что  $(|G|, |A|) = 1$ ,  $\Theta$  – абнормально полный подгрупповой функтор. Тогда в произвольной группе подгруппа  $\Phi_{\theta}(G, A)$  нильпотентна.

*Доказательство.* Пусть  $p \in \pi(\Phi_{\theta}(G, A))$ . По лемме 2.1 в  $\Phi_{\theta}(G, A)$  существует  $A$ -допустимая  $p$ -силовская подгруппа  $P$ . По лемме Фраттини

$$G = N_G(P)\Phi_{\theta}(G, A).$$

По лемме 2.2 подгруппа  $N_G(P)$   $A$ -допустима. Если  $N_G(P) = G$ , то  $P$  нормальна в  $G$ , а значит, нормальна и в  $\Phi_{\theta}(G, A)$ . Пусть  $N_G(P) \neq G$ , тогда по лемме 2.3  $N_G(P)$  является абнормальной подгруппой. Следовательно,  $N_G(P)$  содержится в некоторой абнормальной максимальной  $A$ -допустимой  $\Theta$ -подгруппе  $M$ . Из леммы Фраттини и определения  $\Phi_{\theta}(G, A)$  следует, что  $\Phi_{\theta}(G, A) \subseteq M$ , а значит,  $M = G$ . Получили противоречие с предположением. Итак, любая силовская подгруппа из  $\Phi_{\theta}(G, A)$  нормальна в ней. Отсюда заключаем, что подгруппа  $\Phi_{\theta}(G, A)$  нильпотентна.  $\square$

**Лемма 2.5.** Пусть группа  $G$  имеет группу операторов  $A$  такую, что  $(|G|, |A|) = 1$ ,  $\Theta$  – абнормально полный подгрупповой функтор,  $K \subseteq N \triangleleft G$ ,  $K \triangleleft G$ ,  $N$  и  $K$  –  $A$ -допустимые подгруппы группы  $G$  и  $K \subseteq \Phi_{\theta}(G, A)$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

$$1) F_p(N/K) = F_p(N)/K;$$

$$2) F(N/K) = F(N)/K.$$

*Доказательство.* Пусть  $N/K$  имеет нормальную  $p$ -подгруппу  $H/K$ . Так как  $K \subseteq \Phi_{\theta}(G, A)$ , то по лемме 2.4  $K$  нильпотентна. Нетрудно заметить, что  $p'$ -подгруппа  $R$  из  $K$  является  $p'$ -подгруппой в  $H$ . По теореме Силова  $H$  содержит  $p$ -подгруппу  $S$  и любые две такие подгруппы сопряжены в  $H$ . По обобщенной лемме Фраттини  $G = N_G(S)H$ . С учётом того, что  $H = SR$ , получаем,  $G = N_G(S)R$ . Так как  $S$  есть  $p$ -подгруппа в  $N$ , а подгруппа  $N$   $A$ -допустима, то  $S$   $A$ -допустима. Тогда по лемме 2.2 подгруппа  $N_G(S)$   $A$ -допустима и по лемме 2.3 является абнормальной подгруппой группы  $G$ . Следовательно,  $N_G(S)$  содержится в некоторой максимальной  $A$ -допустимой  $\Theta$ -подгруппе  $M$  из  $G$ . Поэтому  $G = MR$ . Так как  $R \subseteq \Phi_{\theta}(G, A) \subseteq M$ , то  $G = M$ . Получили противоречие. Следовательно,  $S$  нормальна в  $G$ .  $\square$

**Лемма 2.6.** Пусть группа  $G$  имеет группу операторов  $A$  такую, что  $(|G|, |A|) = 1$ ,  $\Theta$  – абнормально полный подгрупповой функтор и  $\Phi_0(G, A) \neq G$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1)  $\Phi_0(G, A) \subseteq F(G)$ ;
- 2) если  $G$  – разрешимая неединичная группа, то  $\Phi_0(G, A) \subset F(G)$ .

*Доказательство.* Из леммы 2.3 следует, что  $\Phi_0(G, A)$  является нильпотентной подгруппой. Следовательно,  $\Phi_0(G, A) \subseteq F(G)$ . Пусть  $G$  – разрешимая неединичная группа. Тогда  $G/\Phi_0(G, A)$  разрешима и неединична. Пусть  $B/\Phi_0(G, A)$  – минимальная нормальная подгруппа в  $G/\Phi_0(G, A)$ . Так как  $B/\Phi_0(G, A)$  –  $p$ -группа для некоторого простого  $p$ , то по лемме 2.5  $B$  является нильпотентной, а это значит, что  $B \subseteq F(G)$ . Следовательно,  $\Phi_0(G, A) \subset F(G)$ .  $\square$

### 3 Основные результаты

**Теорема 3.1.** Пусть группа  $G$  имеет группу операторов  $A$  такую, что  $(|G|, |A|) = 1$ ,  $\Theta$  – абнормально полный подгрупповой функтор. Тогда в произвольной неразрешимой группе существуют нильпотентные  $A$ -допустимые  $\Theta$ -подгруппы, причем пересечение ядер всех таких подгрупп нильпотентно.

*Доказательство.* Пусть  $\mathfrak{F}$  – формация всех  $p$ -нильпотентных групп. Так как  $G$  не  $p$ -разрешима, то  $K = G^{\mathfrak{F}} \notin \mathfrak{F}$ . Можно считать, что  $O_p(G) = 1$ . Пусть  $P$  – силовская  $p$ -подгруппа из  $K$ . По теореме Томпсона в  $P$  найдётся такая характеристическая, а, следовательно,  $A$ -допустимая подгруппа  $R \neq 1$ , что  $N_K(R) \notin \mathfrak{F}$ . Так как  $R$  –  $A$ -допустимая подгруппа, то по лемме 2.2  $N_G(R)$  –  $A$ -допустимая подгруппа. Далее  $N_K(R) \subseteq N_G(R)$ , а значит  $N_G(R) \notin \mathfrak{F}$ . В силу того, что  $O_p(G) = 1$ , получаем  $N_G(P) \neq G$ . По лемме 2.3  $N_G(P)$  – абнормальная подгруппа. Из того, что  $N_G(P) \subseteq N_G(R)$ , имеем  $N_G(R)$  – абнормальная подгруппа. Так как любая подгруппа, содержащая  $N_G(R)$  является абнормальной и ненильпотентной, то в качестве ненильпотентной максимальной  $A$ -допустимой  $\Theta$ -подгруппы выберем наибольшую  $A$ -допустимую  $\Theta$ -подгруппу содержащую  $N_G(R)$ .

Пусть  $D$  – пересечение ядер ненильпотентных  $A$ -допустимых  $\Theta$ -подгрупп. Предположим, что  $D \subset \Phi_0(G, A)$ . Тогда существует нильпотентная  $A$ -допустимая  $\Theta$ -подгруппа  $M$ , не содержащая  $D$ . Тогда  $G = DM$ . Отсюда следует, что  $G/D \cong M/M \cap D$  является нильпотентной, в частности, разрешимой группой.

Пусть  $P$  – силовская  $A$ -допустимая  $p$ -подгруппа из  $D$ . По лемме Фраттини  $G = DN_G(P)$ . Если  $N_G(P) = G$ , то  $P \triangleleft G$ . Отсюда и из разрешимости  $G/D$  следует разрешимость группы  $G$ . Получили противоречие.

Будем считать, что  $N_G(P) \neq G$ . Пусть  $R$  – максимальная  $A$ -допустимая подгруппа группы  $G$  такая, что  $N_G(P) \subseteq R$ . Из абнормальности  $N_G(P)$  следует, что  $R \in \Theta(G)$ . Так как  $G = DR$ , то  $R$  нильпотентна. Следовательно,  $N_G(P)$  – нильпотентная группа.

Если  $D$  нильпотентна, то нетрудно видеть, что группа  $G$  разрешима. Противоречие.

Будем считать, что  $D$  ненильпотентна. Тогда найдётся силовская  $p$ -подгруппа  $P^*$  не инвариантная в  $G$ . По обобщенной лемме Фраттини  $G = DN_G(P^*)$ .

Возможны случаи  $N_G(P^*) = G$ , либо  $N_G(P^*)$  нильпотентна. Второй случай невозможен. Остаётся принять, что  $P^* \triangleleft G$ . Противоречие. Следовательно  $D = \Phi_0(G, A) \in N$ .  $\square$

**Теорема 3.2.** Пусть группа  $G$  имеет группу операторов  $A$  такую, что  $(|G|, |A|) = 1$ ,  $\Theta$  – абнормально полный подгрупповой функтор, тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) в разрешимой неединичной группе выполняется равенство  $\Phi_{\theta_F}(G, A) = \Phi_0(G, A)$ ;
- 2) в разрешимой ненильпотентной группе подгруппа  $\Phi_{\theta_F}(G, A) \in \mathfrak{N}^2$ .

*Доказательство.* Подгруппы  $\Phi_{\theta_F}(G, A)$  и  $\Phi_{\theta_F}(G, A)$  являются характеристическими в  $G$  и

$$\Phi_{\theta_F}(G, A) \cap \Phi_{\theta_F}(G, A) = \Phi_0(G, A).$$

Для факторгруппы  $G/\Phi_0(G, A)$  выполняется  $F(G/\Phi_0(G, A)) = F(G)/\Phi_0(G, A)$ .

Поэтому

$$\Phi_{\theta_F}(G/\Phi_0(G, A)) = \Phi_{\theta_F}(G, A)/\Phi_0(G, A).$$

Предположим, что  $\Phi_{\theta_F}(G, A)/\Phi_0(G, A) \neq 1$  и пусть  $K/\Phi_0(G, A)$  – минимальная нормальная подгруппа в  $G/\Phi_0(G, A)$ , содержащаяся в  $\Phi_{\theta_F}(G, A)/\Phi_0(G, A)$ . Так как  $K/\Phi_0(G, A)$  нильпотентна, то по лемме 2.5  $K$  является нильпотентной подгруппой. Следовательно,  $K \subseteq F(G)$ . Тогда

$$K \subseteq \Phi_{\theta_F}(G, A) \cap \Phi_{\theta_F}(G, A),$$

получили противоречие. Значит, допущение не верно и  $\Phi_{\theta_F}(G, A)/\Phi_0(G, A) = 1$ , а, значит,

$$\Phi_{\theta_F}(G, A) = \Phi_0(G, A).$$

Пусть  $G$  – разрешимая ненильпотентная группа. Из того, что  $F(G) \subseteq \Phi_{\theta_F}(G, A)F(G)$  и

$$\Phi_{\theta_F}(G, A) / F(G) = \Phi_{\theta}(G / F(G), A),$$

следует, что подгруппа  $\Phi_{\theta_F}(G, A) \in \mathfrak{N}^2$ .  $\square$

**Следствие 3.2.1.** Пусть группа  $G$  имеет группу операторов  $A$  такую, что  $(|G|, |A|) = 1$ ,  $\Theta$  – абнормально полный подгрупповой функтор. Тогда в разрешимой неединичной группе подгруппа  $\Phi_{\theta_F}(G, A)$  нильпотентна.

Если группа операторов  $A$  является тривиальной, то имеет место следующее

**Следствие 3.2.2.** Пусть  $\Theta$  – абнормально полный подгрупповой функтор. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) в разрешимой неединичной группе выполняется равенство  $\Phi_{\theta_F}(G) = \Phi_{\theta}(G) \in \mathfrak{N}$ ;

2) в разрешимой ненильпотентной группе подгруппа  $\Phi_{\theta_F}(G) \in \mathfrak{N}^2$ .

Если  $\Theta$  подгрупповой функтор, выделяющий в каждой группе все её подгруппы, то получаем

**Следствие 3.2.3.** Пусть  $G$  – разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если  $G \neq 1$ , то  $\Phi_F^p(G) = \Phi^p(G) \in \mathfrak{N}$ ;

2) в любой не  $p$ -нильпотентной группе  $G$  подгруппа  $\Phi_F^p(G) \in \mathfrak{N}^2$ .

**Теорема 3.3.** Пусть группа  $G$  имеет группу операторов  $A$  такую, что  $(|G|, |A|) = 1$ ,  $\Theta$  – абнормально полный подгрупповой функтор,  $G$  – разрешимая группа. Если  $\bar{\Phi}_{\theta_F}(G, A) \neq G$ , то

$$\bar{\Phi}_{\theta_F}(G, A) = \Phi_{\theta}(G, A).$$

*Доказательство.* Пусть  $G$  обладает ненильпотентными максимальными  $A$ -допустимыми  $\Theta$ -подгруппами, не содержащими  $F(G)$ . Не сложно заметить, что

$$\Phi_{\theta}(G, A) \subseteq \bar{\Phi}_{\theta}(G, A) \subseteq \bar{\Phi}_{\theta_F}(G, A)$$

и согласно доказательству теоремы 3.1

$$\Phi_{\theta}(G) = \bar{\Phi}_{\theta}(G, A).$$

Пусть подгруппа  $\bar{\Phi}_{\theta_F}(G, A)$  не совпадает с подгруппой  $\bar{\Phi}_{\theta}(G, A)$ , тогда

$$\bar{\Phi}_{\theta_F}(G, A) / \bar{\Phi}_{\theta}(G, A) \neq 1$$

и пусть  $K / \bar{\Phi}_{\theta}(G, A)$  – минимальная нормальная подгруппа в  $G / \bar{\Phi}_{\theta}(G, A)$ , содержащаяся в  $\bar{\Phi}_{\theta_F}(G, A) / \bar{\Phi}_{\theta}(G, A)$ . Так как  $K / \bar{\Phi}_{\theta}(G, A)$  нильпотентна, то из леммы 2.5 следует, что  $K$   $p$ -нильпотентная подгруппа. Следовательно,  $K \subseteq F(G)$ . Тогда

$$K \subseteq \bar{\Phi}_{\theta_F}(G, A) \cap \bar{\Phi}_{\theta}(G, A),$$

получили противоречие. Значит, допущение не верно и  $\bar{\Phi}_{\theta_F}(G, A) / \bar{\Phi}_{\theta}(G, A) = 1$ , а, значит,  $\bar{\Phi}_{\theta_F}(G, A) = \Phi_{\theta}(G, A)$ .  $\square$

Применяя результат работы [5] и теорему 3.1, получаем следующее

**Следствие 3.3.1.** Пусть группа  $G$  имеет группу операторов  $A$  такую, что  $(|G|, |A|) = 1$ ,  $\Theta$  – абнормально полный подгрупповой функтор,  $G$  – разрешимая группа. Если  $\bar{\Phi}_{\theta_F}(G, A) \neq G$ , то  $\bar{\Phi}_{\theta_F}(G, A)$  – нильпотентная подгруппа группы  $G$ .

В случае, когда группа операторов  $A$  является тривиальной, то из теоремы 3.3 получаем

**Следствие 3.3.2.** Пусть  $G$  – разрешимая группа. Если  $\bar{\Phi}_{\theta_F}(G) \neq G$ , то

$$\bar{\Phi}_{\theta_F}(G) = \Phi_{\theta}(G) \in N.$$

Если функтор  $\Theta$  выделяет только абнормальные подгруппы, то из теоремы 3.3 получаем

**Следствие 3.3.3.** Пусть  $G$  – разрешимая группа. Если в группе  $G$  существуют ненильпотентные абнормальные максимальные подгруппы, не содержащие  $F(G)$ , то пересечение всех таких подгрупп совпадает с  $\Delta(G)$ .

Если функтор  $\Theta$  выделяет в каждой группе все её подгруппы, то получаем

**Следствие 3.3.4.** Пусть  $G$  – разрешимая группа. Если в группе  $G$  существуют ненильпотентные максимальные подгруппы, не содержащие  $F(G)$ , то пересечение всех таких подгрупп совпадает с  $\Phi(G)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Frattini, G. Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.
2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 267 с.
3. Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 144 с.
4. Монахов, В.С. Замечания о максимальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 31–33.
5. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
6. Поляков, Л.Я. О конечных группах с заданной группой операторов / Л.Я. Поляков // Вопросы алгебры. – Мн.: Университетское. – 1987. – Вып. 3. – С. 63–67.
7. Gorenstein, D. Finite groups / D. Gorenstein. – New York: Harper and Row, 1968. – 572 p.

Поступила в редакцию 08.06.17.

СТОУНОВЫ РЕШЕТКИ КРАТНО  $\omega$ -ЛОКАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

Н.Н. Воробьев, А.И. Титова

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова

STONE LATTICES OF MULTIPLY  $\omega$ -LOCAL FITTING CLASSES

N.N. Vorob'ev, A.I. Titova

P.M. Masherov Vitebsk State University

Описываются  $n$ -кратно  $\omega$ -локальные (тотально  $\omega$ -локальные) классы Фиттинга со стоуновой решеткой  $n$ -кратно  $\omega$ -локальных (тотально  $\omega$ -локальных) подклассов Фиттинга.

**Ключевые слова:** класс Фиттинга, полная решетка классов Фиттинга, атом решетки, дистрибутивная решетка, решетка с дополнениями, булева решетка, псевдодополнение, стоунова решетка.

$n$ -Multiply  $\omega$ -local (totally  $\omega$ -local) Fitting classes having a Stone lattice of  $n$ -multiply  $\omega$ -local (totally  $\omega$ -local) Fitting subclasses are described.

**Keywords:** Fitting class, complete lattice of Fitting classes, atom of lattice, distributive lattice, lattice with complements, pseudocomplement, Boolean lattice, Stone lattice.

**Введение**

Все рассматриваемые группы конечны. В дальнейшем символ  $\omega$  означает некоторое непустое множество простых чисел, а  $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$ . Символ  $\pi(G)$  – множество всех различных простых делителей порядка группы  $G$ , а  $\pi(\mathfrak{F})$  является объединением множеств  $\pi(G)$  для всех групп  $G$  из класса групп  $\mathfrak{F}$ . В соответствии со стандартной терминологией,  $\mathfrak{N}$  – класс всех нильпотентных групп,  $\mathfrak{N}_p$  – класс всех  $p$ -групп ( $p$  – фиксированное простое число),  $\mathfrak{S}_{\pi'}$  – класс всех  $\pi'$ -групп,  $\mathfrak{S}_{p'}$  – класс всех  $p'$ -групп,  $\mathfrak{S}_{\omega d}$  – класс всех тех групп, у которых композиционный фактор является  $\omega d$ -группой.  $\omega d$ -Группа – это группа, порядок которой делится хотя бы на одно число из  $\omega$ .

Напомним, что  $\mathfrak{F}$ -корадикал  $G^{\mathfrak{F}}$  группы  $G$  – пересечение всех тех нормальных подгрупп  $T$  из  $G$ , для которых  $G/T \in \mathfrak{F}$ . В частности, символом  $G^{\omega d}$  обозначают наименьшую нормальную подгруппу  $N$  группы  $G$  со свойством  $\omega \cap \pi(H/K) \neq \emptyset$  для каждого композиционного фактора  $H/K$  из  $G/N$  ( $G^{\omega d} = G$ , если  $\omega \cap \pi(\text{Soc}(G/N)) \neq \emptyset$ ). Кроме того, согласно [1] полагают, что  $F^p(G) = G^{\mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_{p'}}$ .

Пусть  $f$  – произвольная функция вида

$$f: \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}, \quad (0.1)$$

где  $f(\omega') \neq \emptyset$ . Следуя [1], сопоставим функции  $f$  класс групп

$$LR_{\omega}(f) = \{G \mid G^{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } F^p(G) \in f(p)\}$$

для всех  $p \in \omega \cap \pi(G)$ .

Если класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$  таков, что  $\mathfrak{F} = LR_{\omega}(f)$  для некоторой функции  $f$  вида (0.1), то  $\mathfrak{F}$  называется  $\omega$ -локальным классом Фиттинга с  $\omega$ -локальной  $H$ -функцией  $f$  [1]. Напомним теперь восходящее к работе [2] понятиекратно  $\omega$ -локального класса Фиттинга. Всякий класс Фиттинга считается  $0$ -кратно  $\omega$ -локальным, а при  $n \geq 1$  класс Фиттинга называется  $n$ -кратно  $\omega$ -локальным, если  $\mathfrak{F} = LR_{\omega}(f)$ , где все непустые значения  $H$ -функции  $f$  являются  $(n-1)$ -кратно  $\omega$ -локальными классами Фиттинга. Класс Фиттинга называется тотально  $\omega$ -локальным, если он  $n$ -кратно  $\omega$ -локален для всех натуральных  $n$ .

Впервые решетки формаций начал изучать в 1986 году А.Н. Скиба [3]. Непустая совокупность классов групп  $\Theta$  называется полной решеткой классов, если пересечение любой совокупности классов из  $\Theta$  снова принадлежит  $\Theta$ , и во множестве  $\Theta$  имеется такой класс  $\mathfrak{F}$ , что  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$  для любого другого класса  $\mathfrak{H} \in \Theta$ . Относительно включения  $\subseteq$  совокупность всех  $n$ -кратно  $\omega$ -локальных классов Фиттинга  $l_{\omega}^n$  и совокупность всех тотально  $\omega$ -локальных классов Фиттинга  $l_{\omega}^{\infty}$  являются полными решетками. Изучению решеток кратного локальных классов Фиттинга и формаций посвящены работы [4]–[7]. В частности, в работе [7] описаны  $n$ -кратно локальные классы Фиттинга со стоуновой решеткой  $n$ -кратно локальных подклассов Фиттинга. В настоящей работе найдены новые семейства стоуновых решеток кратного  $\omega$ -локальных классов Фиттинга.

Доказаны следующие теоремы:

**Теорема 0.1** Пусть  $\mathfrak{F}$  –  $n$ -кратно  $\omega$ -локальный класс Фиттинга. Тогда и только тогда решетка  $L_\omega^n(\mathfrak{F})$  стоунова, если  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$ .

**Теорема 0.2** Пусть  $\mathfrak{F}$  – тотально  $\omega$ -локальный класс Фиттинга. Тогда и только тогда решетка  $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$  стоунова, если  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$ .

Если  $\mathfrak{F}$  –  $n$ -кратно  $\omega$ -локальный (тотально  $\omega$ -локальный) класс Фиттинга, то символом  $L_\omega^n(\mathfrak{F})$  ( $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$ ) обозначается решетка всех его  $n$ -кратно  $\omega$ -локальных подклассов Фиттинга (решетка всех его тотально  $\omega$ -локальных подклассов Фиттинга соответственно).

Мы будем использовать терминологию из [1], [8]–[11].

### 1 Предварительные сведения

Непустой класс групп  $\mathfrak{F}$  называется *классом Фиттинга*, если он замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведений нормальных  $\mathfrak{F}$ -подгрупп.

Напомним теперь понятие прямого произведения классов. *Ортогональной системой классов* называется такая совокупность  $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$  непустых классов групп  $\mathfrak{F}_i$ , что

- 1) либо  $|I|=1$ , либо  $|I|>1$ ;
- 2)  $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$  для любых двух различных  $i, j \in I$ .

Для любой ортогональной системы классов  $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$  символом  $\otimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$  (или иначе  $\mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2 \otimes \dots \otimes \mathfrak{F}_n$  в случае, когда  $I = \{1, \dots, n\}$ ) обозначают совокупность всех групп вида  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_t$ , где  $A_1 \in \mathfrak{F}_1, A_2 \in \mathfrak{F}_2, \dots, A_t \in \mathfrak{F}_t$  для некоторого натурального  $t$  и  $i_1, i_2, \dots, i_t \in I$ .

Если  $|I|=1$  и  $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}$ , то полагают  $\mathfrak{F} = \otimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ .

**Лемма 1.1** [4, лемма 4]. Пусть  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_t$  – ортогональная система классов Фиттинга. Тогда  $\mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2 \otimes \dots \otimes \mathfrak{F}_t$  – класс Фиттинга.

**Лемма 1.2** [11, теорема 3.2.14]. Пусть  $\mathfrak{F} = \otimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ , где  $\mathfrak{F}_i$  – класс Фиттинга. Тогда класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$   $n$ -кратно  $\omega$ -локален в том и только том случае, когда  $n$ -кратно  $\omega$ -локален каждый класс Фиттинга  $\mathfrak{F}_i$ .

**Лемма 1.3** [4, лемма 1]. Пусть  $\mathfrak{F} = \otimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$  и  $\mathfrak{M}$  – непустой подкласс Фиттинга в  $\mathfrak{F}$ . Тогда  $\mathfrak{M} = \otimes_{i \in I} (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_i)$ .

Пусть  $\mathfrak{X}$  – произвольная непустая совокупность групп. Символом  $L_\omega^n \text{fit} \mathfrak{X}$  обозначают пересечение всех тех  $n$ -кратно  $\omega$ -локальных классов

Фиттинга, которые содержат совокупность групп  $\mathfrak{X}$ . Если  $\mathfrak{X} = \{G\}$ , то вместо  $L_\omega^n \text{fit} \{G\}$  пишут  $L_\omega^n \text{fit} G$ . Всякий класс такого вида называется *однопорожденным  $n$ -кратно  $\omega$ -локальным классом Фиттинга* [1].

**Лемма 1.4** [11, лемма 3.2.26]. Пусть  $\mathfrak{F} = L_\omega^n \text{fit} G$  – однопорожденный  $n$ -кратно  $\omega$ -локальный класс Фиттинга. Тогда решетка  $L_\omega^n(\mathfrak{F})$  имеет лишь конечное число атомов.

Напомним, что совокупность классов Фиттинга  $\Theta$  называется *полной решеткой классов Фиттинга* [10], [11], если классы  $\emptyset$  и  $\mathfrak{G}$  принадлежат  $\Theta$  и пересечение любого множества классов из  $\Theta$  снова принадлежит  $\Theta$ . В дальнейшем  $\Theta$  обозначает некоторую полную решетку классов Фиттинга, и если  $\mathfrak{M}, \mathfrak{H} \in \Theta$ , то  $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$  – нижняя грань для  $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{H}\}$  в  $\Theta$ . Символом  $\mathfrak{M} \vee^\ominus \mathfrak{H}$  обозначается точная верхняя грань для  $\mathfrak{M}, \mathfrak{H}$  в решетке  $\Theta$ .

Если  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{H}$  –  $n$ -кратно  $\omega$ -локальные классы Фиттинга, то

$$\mathfrak{M} \vee_\omega^n \mathfrak{H} = L_\omega^n \text{fit}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}).$$

Аналогично, если  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{H}$  – тотально  $\omega$ -локальные классы Фиттинга, то

$$\mathfrak{M} \vee_\omega^\infty \mathfrak{H} = L_\omega^\infty \text{fit}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}).$$

Напомним определение булевой решетки. Решетка  $L$  называется *дистрибутивной*, если для любых  $x, y, z \in L$  выполняется тождество:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

называемое *дистрибутивным законом*.

*Дополнением* элемента  $x$  в решетке с нулем и единицей называется такой элемент  $y$ , что

$$x \wedge y = 0, \quad x \vee y = 1.$$

$n$ -Кратно  $\omega$ -локальный класс Фиттинга  $\mathfrak{M}$  класса  $\mathfrak{F} \in L_\omega^n$  называется *дополняемым* в  $\mathfrak{F}$  [11]–[12], если в  $\mathfrak{F}$  имеется такой  $n$ -кратно  $\omega$ -локальный подкласс Фиттинга  $\mathfrak{H}$  ( $\mathfrak{H}$  – дополнение к  $\mathfrak{M}$  в  $\mathfrak{F}$ ), что  $\mathfrak{F} = L_\omega^n \text{fit}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$ ,  $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$ . *Булевой решеткой* называется дистрибутивная решетка с дополнениями.

**Лемма 1.5** [11, теорема 3.2.29]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – неединичный  $n$ -кратно  $\omega$ -локальный класс Фиттинга. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) решетка  $L_\omega^n(\mathfrak{F})$  булева;
- 2)  $\mathfrak{F} = \otimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ , где  $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$  – набор всех атомов решетки  $L_\omega^n(\mathfrak{F})$ ;
- 3) в  $\mathfrak{F}$  дополняем каждый подкласс Фиттинга, который является атомом решетки  $L_\omega^n(\mathfrak{F})$ .

**Лемма 1.6** [11, следствие 3.2.15]. Пусть  $\mathfrak{F} = \otimes_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ , для некоторых классов Фиттинга  $\mathfrak{F}_i$ .

Тогда в том и только в том случае класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$  тотально  $\omega$ -локален, когда тотально  $\omega$ -локален каждый класс Фиттинга  $\mathfrak{F}_i$ .

Пусть  $L$  – решетка с нулем. Тогда элемент  $a^*$  называется псевдодополнением элемента  $a (\in L)$ , если из  $a \wedge a^* = 0$  и  $a \wedge x = 0$  следует  $x \leq a^*$ . Решетка с нулем называется решеткой с псевдодополнениями, если каждый ее элемент обладает псевдодополнением. Дистрибутивная решетка с псевдодополнениями, каждый элемент которой удовлетворяет тождеству

$$a^* \vee (a^*)^* = 1,$$

называется стоуновой решеткой.

## 2 Доказательство теоремы 0.1

**Лемма 2.1** Пусть  $\mathfrak{F}$  –  $n$ -кратно  $\omega$ -локальный класс Фиттинга. Тогда если класс  $\mathfrak{N}_p$  дополняем в решетке  $L_\omega^n(\mathfrak{F})$  для каждого  $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$ , то  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathfrak{M}$  –  $n$ -кратно  $\omega$ -локальный подкласс Фиттинга класса  $\mathfrak{F}$ . Покажем, что если  $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}$ , то подкласс  $\mathfrak{N}_p$  дополняем в решетке  $L_\omega^n(\mathfrak{M})$ . Действительно, пусть  $\mathfrak{H}$  – дополнение к  $\mathfrak{N}_p$  в решетке  $L_\omega^n(\mathfrak{F})$ .

Согласно лемме 1.1 и 1.2

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \vee_\omega^n \mathfrak{H} = \mathfrak{N}_p \otimes \mathfrak{H}.$$

И поэтому по лемме 1.3

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{N}_p \otimes \mathfrak{H}) = \\ &= (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_p) \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \\ &= \mathfrak{N}_p \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_p \vee_\omega^n (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}), \end{aligned}$$

где  $\mathfrak{N}_p \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = (1)$ . Следовательно,  $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$  – дополнение к  $\mathfrak{N}_p$  в решетке  $L_\omega^n(\mathfrak{M})$  для каждого  $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{M})$ .

Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда  $\mathfrak{F}$  – однопорожденный  $n$ -кратно  $\omega$ -локальный класс Фиттинга. В этом случае, согласно лемме 1.4 можно использовать индукцию по числу атомов в решетке  $L_\omega^n(\mathfrak{F})$ .

Пусть  $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  – дополнение к  $\mathfrak{N}_p$  в решетке  $L_\omega^n(\mathfrak{F})$ , где  $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$ . Тогда  $\mathfrak{N}_p \not\subseteq \mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}$ , поэтому по индукции  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$ .

Вместе с тем  $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \vee_\omega^\infty \mathfrak{H} = \mathfrak{N}_p \otimes \mathfrak{H}$ , где  $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}$  и  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$ . Следовательно,  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$ .  $\square$

*Доказательство теоремы 0.1.* Пусть  $\mathfrak{F}$  –  $n$ -кратно  $\omega$ -локальный класс Фиттинга. Допустим, что  $L_\omega^n(\mathfrak{F})$  – стоунова решетка и пусть  $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$ .

Заметим, что для каждого  $n$ -кратно  $\omega$ -локального подкласса Фиттинга  $\mathfrak{M}$  в  $\mathfrak{F}$  класс

$\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$  является псевдодополнением элемента  $\mathfrak{M}$  в решетке  $L_\omega^n(\mathfrak{F})$ , где  $\pi = \omega \cap \pi(\mathfrak{M})$ . Действительно, для каждого  $n$ -кратно  $\omega$ -локального класса Фиттинга  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$  равенство  $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$  имеет место в том и только в том случае, если  $\pi \cap \pi(\mathfrak{H}) = \emptyset$ . Значит  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$ . Поэтому класс  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$  является псевдодополнением элемента  $\mathfrak{M}$  в решетке  $L_\omega^n(\mathfrak{F})$ . Таким образом,  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$  – псевдодополнение элемента  $\mathfrak{N}_p$  для каждого  $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$  в решетке  $L_\omega^n(\mathfrak{F})$  и  $\mathfrak{N}_p$  – псевдодополнение элемента  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'}$  в решетке  $L_\omega^n(\mathfrak{F})$ .

Вместе с тем, согласно лемме 1.1 и 1.2, по индукции

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \vee_\omega^\infty (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'}).$$

Следовательно, для каждого  $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$  класс  $\mathfrak{N}_p$  дополняем в решетке  $L_\omega^n(\mathfrak{F})$ . Поэтому, согласно лемме 2.1,  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$ .

Пусть  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$ . Пусть  $\mathfrak{M} \in L_\omega^n(\mathfrak{F})$ ,  $\pi_1 = \omega \cap \pi(\mathfrak{M})$  и  $\pi_2 = \omega \cap (\pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi(\mathfrak{M}))$ . Если  $\pi_1 = \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$ , то  $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$  и (1) – дополнение элемента  $\mathfrak{M}$  в решетке  $L_\omega^n(\mathfrak{F})$ . В противном случае  $\mathfrak{N}_{\pi_2}$  – дополнение элемента  $\mathfrak{M}$  в решетке  $L_\omega^n(\mathfrak{F})$ . Согласно лемме 1.5, решетка  $L_\omega^n(\mathfrak{F})$  булева. Следовательно,  $L_\omega^n(\mathfrak{F})$  – стоунова решетка.  $\square$

## 3 Доказательство теоремы 0.2

Следующая лемма очевидна.

**Лемма 3.1** Пусть  $\mathfrak{F}$  – тотально  $\omega$ -локальный класс Фиттинга. Тогда если  $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$ , то  $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$ .

**Лемма 3.2** Пусть  $\mathfrak{F}$  – однопорожденный тотально  $\omega$ -локальный класс Фиттинга. Тогда решетка  $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$  имеет лишь конечное число атомов.

*Доказательство.* Пусть  $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$ . Покажем, что  $\mathfrak{N}_p$  – атом решетки  $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$ . Пусть  $\mathfrak{M}$  – атом решетки  $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$ . Тогда по лемме 3.1  $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}$ . Но  $\mathfrak{M}$  – атом. Поэтому  $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{M}$ .

Поскольку  $G$  – группа конечная, то существует конечное число атомов в решетке  $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$ .  $\square$

**Лемма 3.3** Пусть  $\mathfrak{F}$  – тотально  $\omega$ -локальный класс Фиттинга. Тогда если класс  $\mathfrak{N}_p$  дополняем в решетке  $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$  для каждого  $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$ , то  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathfrak{M}$  – тотально  $\omega$ -локальный подкласс Фиттинга класса  $\mathfrak{F}$ . Покажем,

что если  $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{M}$ , то подкласс  $\mathfrak{N}_p$  дополняем в решетке  $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$ . Действительно, пусть  $\mathfrak{H}$  – дополнение к  $\mathfrak{N}_p$  в решетке  $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$ .

Согласно лемме 1.1 и 1.6

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \vee_\omega^\infty \mathfrak{H} = \mathfrak{N}_p \otimes \mathfrak{H}.$$

И поэтому по лемме 1.3

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{N}_p \otimes \mathfrak{H}) = \\ &= (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_p) \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \\ &= \mathfrak{N}_p \otimes (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{N}_p \vee_\omega^n (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}), \end{aligned}$$

где  $\mathfrak{N}_p \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = (1)$ . Следовательно,  $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$  – дополнение к  $\mathfrak{N}_p$  в решетке  $L_\omega^\infty(\mathfrak{M})$  для каждого  $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{M})$ .

Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда  $\mathfrak{F}$  – однопорожденный тотально  $\omega$ -локальный класс Фиттинга. В этом случае, согласно лемме 3.2 можно использовать индукцию по числу атомов в решетке  $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$ .

Пусть  $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  – дополнение к  $\mathfrak{N}_p$  в решетке  $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$  для каждого  $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$ . Тогда  $\mathfrak{N}_p \not\subseteq \mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}$ , поэтому по индукции  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$ .

Согласно лемме 1.1 и 1.6  $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \vee_\omega^\infty \mathfrak{H} = \mathfrak{N}_p \otimes \mathfrak{H}$ , при этом  $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}$ , и  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$ . Следовательно,  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$ .  $\square$

*Доказательство теоремы 0.2.* Пусть  $\mathfrak{F}$  – тотально  $\omega$ -локальный класс Фиттинга. Допустим, что  $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$  – стоунова решетка и пусть  $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$ .

Заметим, что для каждого тотально  $\omega$ -локального подкласса Фиттинга  $\mathfrak{M}$  в  $\mathfrak{F}$  класс  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$  является псевдодополнением элемента  $\mathfrak{M}$  в решетке  $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$ , где  $\pi = \omega \cap \pi(\mathfrak{M})$ . Действительно, для каждого тотально  $\omega$ -локального класса Фиттинга  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$  равенство  $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$  имеет место в том и только в том случае, если  $\pi \cap \pi(\mathfrak{H}) = \emptyset$ . Значит  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$ . Поэтому класс  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_\pi$  является псевдодополнением элемента  $\mathfrak{M}$  в решетке  $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$ . Таким образом,  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'}$  – псевдодополнение элемента  $\mathfrak{N}_p$  для каждого  $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$  в решетке  $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$  и  $\mathfrak{N}_p$  – псевдодополнение элемента  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'}$  в решетке  $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$ .

Вместе с тем, согласно лемме 1.1 и 1.6, по индукции  $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \vee_\omega^\infty (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'})$ .

Следовательно, для каждого  $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$  класс  $\mathfrak{N}_p$  дополняем в решетке  $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$  (элементом  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{p'}$ ). Поэтому, согласно лемме 3.3,  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$ .

Пусть  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$ ,  $\mathfrak{M} \in L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$ ,  $\pi_1 = \omega \cap \pi(\mathfrak{M})$  и  $\pi_2 = \omega \cap (\pi(\mathfrak{F}) \setminus \pi(\mathfrak{M}))$ . Если  $\pi_1 = \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$ , то  $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$  и (1) – дополнение элемента  $\mathfrak{M}$  в решетке  $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$ . В противном случае  $\mathfrak{N}_{\pi_2}$  – дополнение элемента  $\mathfrak{M}$  в решетке  $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$ . Следовательно, решетка  $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$  булева. Поэтому  $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$  – стоунова решетка.  $\square$

**Следствие 3.4** Следующие утверждения эквивалентны:

1. Класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$   $\omega$ -локален и  $L_\omega^1(\mathfrak{F})$  – стоунова решетка;
2. Класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$  –  $n$ -кратно  $\omega$ -локален и  $L_\omega^n(\mathfrak{F})$  – стоунова решетка;
3. Класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$  – тотально  $\omega$ -локален и  $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$  – стоунова решетка;
4. Класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$   $\omega$ -локален и  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$ .

Если  $\omega = \mathbb{P}$ , мы получаем следующее результаты:

**Следствие 3.5** [11, следствие 3.3.7]. Следующие утверждения эквивалентны:

1. Класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$  локален и  $L_\omega^1(\mathfrak{F})$  – стоунова решетка;
2. Класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$  –  $n$ -кратно локален и  $L_\omega^n(\mathfrak{F})$  – стоунова решетка;
3. Класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$  – тотально локален и  $L_\omega^\infty(\mathfrak{F})$  – стоунова решетка;
4. Класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$  локален и  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Скиба, А.Н. Кратно  $\omega$ -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.
2. Скиба, А.Н. Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины / А.Н. Скиба // Вопросы алгебры. – Минск: изд-во «Университетское», 1987. – Вып. 3. – С. 21–31.
3. Скиба, А.Н. О локальных формациях длины 5 / А.Н. Скиба // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп: труды Гомельского семинара / Ин-т математики АН БССР; под ред. М.И. Салука. – Минск: Наука и техника, 1986. – С. 135–149.
4. Воробьев, Н.Н. О булевых решетках  $n$ -кратно локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба // Сибирский матем. журн. – 1999. – Т. 40, № 3. – С. 523–530.
5. Воробьев, Н.Н. О дистрибутивности решетки разрешимых тотально локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба // Матем. заметки. – 2000. – Т. 67, вып. 5. – С. 662–673.
6. Царев, А.А. О недистрибутивности решетки всех  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционных формаций /

---

А.А. Царев // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 3 (8). – С. 84–88.

7. Skiba, A.N. On Stone sublattices of the lattice of totally local Fitting classes / A.N. Skiba, N.N. Vorob'ev // Algebra and Discrete Mathematics. – 2007. – № 4. – P. 138–146.

8. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков – М. : Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1978. – 272 с.

9. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-матем. лит., 1989. – 256 с.

10. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

11. Воробьев, Н.Н. Алгебра классов конечных групп: монография / Н.Н. Воробьев. – Витебск: ВГУ им. П.М. Машерова, 2012. – 322 с.

12. Скиба, А.Н. О дополняемых подформациях / А.Н. Скиба // Вопросы алгебры. – Гомель: изд-во Гомельского гос. ун-та, 1996. – Вып. 9. – С. 114–118.

*Поступила в редакцию 11.08.17.*

УДК 539.3

## ДЕФОРМИРОВАНИЕ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМОМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Ю.В. Захарчук

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель*

## DEFORMATION OF THE CIRCULAR THREE-LAYER PLATE WITH A COMPRESSIBLE FILLER

Yu.V. Zakharchuk

*Belarusian State University of Transport, Gomel*

Рассмотрена задача о симметричном изгибе несимметричной по толщине упругой круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем. Для тонких несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. В относительно толстом наполнителе учтены поперечный сдвиг, радиальные перемещения и прогиб, который изменяется линейно по толщине. Дифференциальные уравнения равновесия в усилиях получены с помощью вариационного метода Лагранжа. Постановка краевой задачи в перемещениях приведена в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ .

**Ключевые слова:** *круговая трехслойная пластина, упругость, сжимаемый наполнитель.*

The problem of symmetric bending of a three-layer elastic plate with a compressible filler asymmetrical in thickness is considered. Kirchhoff's hypotheses are accepted for thin bearing layers. In a relatively thick aggregate, the transverse shear, radial displacements and deflection, which vary linearly in thickness are taken into account. The differential equations of equilibrium in the effort are obtained using the Lagrange variational method. The setting of the boundary value problem in the displacements is given in the cylindrical coordinate system.

**Keywords:** *circular three-layer plate, elasticity, compressible filler.*

### Введение

В последнее время значительное возрос спрос на использование слоистых тонкостенных элементов конструкций в авиа-, ракето-, машино-, приборо- и судостроении, добыче и транспортировке энергоносителей. Это обуславливает необходимость разработки математических моделей и методов их расчета на различные виды и типы нагрузок. Стержни, пластины и оболочки, имеющие слоистую структуру, обычно набраны из материалов с существенно различными физико-механическими свойствами. Несущие слои из материалов высокой прочности и жесткости предназначены для восприятия основной части механической нагрузки. Связующие слои, служащие для образования монолитной конструкции, обеспечивают перераспределение усилий между несущими слоями. Еще одна группа слоев предназначена для защиты от тепловых, химических, радиационных и других нежелательных воздействий. Такое сочетание слоев позволяет обеспечить надежную работу систем в неблагоприятных условиях окружающей среды, создавать конструкции, сочетающие высокую прочность и жесткость с относительно малой массой.

Деформированию и колебаниям слоистых, в том числе трехслойных элементов конструкций, посвящены многочисленные исследования. Постановки и методы решения соответствующих краевых и начально-краевых задач приведены в монографиях [1]–[4]. Исследования деформирования

слоистых упругопластических систем при циклических нагружениях проведены в публикациях [5]–[8]. Результаты, связанные с колебаниями круговых трехслойных элементов конструкций, в том числе с учетом упругого основания, опубликованы в статьях [9]–[15]. Квазистатическое изотермическое и термопластическое деформирование трехслойных круговых пластин с несжимаемым наполнителем рассмотрено в работах [16]–[19].

Следует отметить, что и деформирование и колебания трехслойных круговых пластин исследовались только в случае несжимаемого наполнителя. Это вызвано определенными математическими трудностями при постановке и решении соответствующих краевых задач. Однако, учет сжимаемости наполнителя в большей степени адекватно описывает деформирование трехслойных элементов конструкций. Поэтому здесь приведена постановка краевой задачи, включающая систему дифференциальных уравнений равновесия и граничные условия, о деформировании круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем.

### 1 Перемещения и деформации

Рассмотрим упругую круговую трехслойную пластину со сжимаемым-растягиваемым наполнителем (рисунок 1.1). Постановку задачи и ее решение проведем в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ . Систему координат свяжем со срединной плоскостью наполнителя. В тонких

несущих слоев с толщинами  $h_1 \neq h_2$  справедливы гипотезы Кирхгофа: нормаль остается несжимаемой, прямолинейной и перпендикулярной к деформированной срединной поверхности. В заполнителе, воспринимающем нагрузку в тангенциальном и вертикальном направлениях, нормаль остается прямолинейной, поворачивается на некоторый дополнительный угол  $\psi(r)$ , обжатие по толщине принимается линейным.

На внешний слой стержня действует симметричная распределенная нагрузка с вертикальной  $q = q(r)$  и горизонтальной  $p = p(r)$  составляющими. На контуре пластинки предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев и обжатию заполнителя ( $\psi = 0, v = 0$  при  $r = r_0$ ). Через  $w(r)$  и  $u(r)$  обозначены прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя,  $v(r)$  – функция, характеризующая сжимаемость заполнителя. Обозначим через  $h_k$  толщину  $k$ -го слоя ( $k = 1, 2, 3$  – номер слоя), при этом  $h_3 = 2c$ .

Продольные и поперечные перемещения в слоях  $u^{(k)}(r, z)$  и  $w^{(k)}(r, z)$  можно выразить через четыре искомые функции  $w(r), u(r), \psi(r)$  и  $v(r)$  следующими соотношениями:

– в несущих слоях 1, 2

$$u_r^{(1)} = u + c\psi - z(w_{,r} + v_{,r}c), \quad w^{(1)} = w(r) + v(r)c, \\ (c \leq z \leq c + h_1),$$

$$u_r^{(2)} = u - c\psi - z(w_{,r} - v_{,r}c), \quad w^{(2)} = w(r) - v(r)c, \\ (-c - h_2 \leq z \leq -c);$$

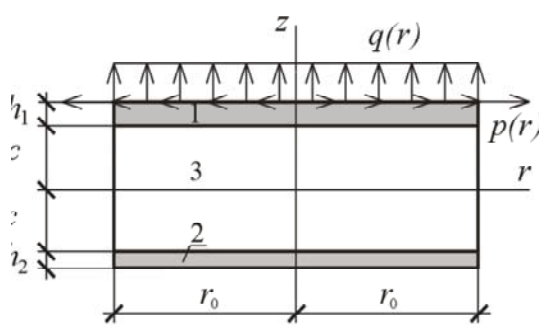
– в заполнителе 3

$$u_r^{(3)} = u + z\psi - z(w_{,r} + v_{,r}z), \\ w^{(3)}(r, z) = w(r) + v(r)z, \quad (-c \leq z \leq c), \quad (1.1)$$

где  $z$  – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной поверхности заполнителя; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Компоненты тензора деформаций в слоях получим из перемещений (1.1), используя соотношения Коши:

$$\varepsilon_r^{(1)} = u_{,r} + c\psi_{,r} - z(w_{,rr} + v_{,rr}c), \\ \varepsilon_\varphi^{(1)} = \frac{1}{r}(u + c\psi - z(w_{,r} + v_{,r}c)), \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0,$$



$$(c \leq z \leq c + h_1), \\ \varepsilon_r^{(2)} = u_{,r} - c\psi_{,r} - z(w_{,rr} - v_{,rr}c), \\ \varepsilon_\varphi^{(2)} = \frac{1}{r}(u - c\psi - z(w_{,r} - v_{,r}c)), \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0, \\ (-c - h_2 \leq z \leq -c), \\ \varepsilon_r^{(3)} = u_{,r} + z\psi_{,r} - z(w_{,rr} + v_{,rr}z), \\ \varepsilon_\varphi^{(3)} = \frac{1}{r}(u + z\psi - z(w_{,r} + v_{,r}z)), \\ \varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{1}{2}(\psi - v_{,r}z), \\ \varepsilon_z^{(3)} = v, \quad (-c \leq z \leq c). \quad (1.2)$$

Таким образом, через введенные четыре искомые функции  $w(r), u(r), \psi(r)$  и  $v(r)$  выражены перемещения (1.1) и деформации (1.2) в круговой пластине со сжимаемым заполнителем.

### 2 Внутренние усилия и уравнения равновесия

Используя компоненты тензора напряжений  $\sigma_\alpha^{(k)}$  ( $\alpha = r, \varphi$ ), введем обобщенные внутренние усилия и моменты в пластине:

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \\ M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \\ S_\alpha^{(3)} = \int_{-c}^c \sigma_\alpha^{(3)} z^2 dz, \quad Q^{(3)} = \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} dz, \quad M_{rz}^{(3)} = \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} z dz, \\ T_z^{(3)} = \int_{-c}^c \sigma_z^{(3)} dz, \quad H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}), \\ D_\alpha = S_\alpha^{(3)} + c(M_\alpha^{(1)} - M_\alpha^{(2)}), \quad (2.1)$$

где интегралы берутся по толщине  $k$ -го слоя.

Уравнения равновесия рассматриваемой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем получим, используя вариационный принцип Лагранжа:

$$\delta A = \delta W,$$

где  $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$  – суммарная вариация работы внешних сил  $\delta A_1$  и контурных усилий  $\delta A_2$ ;  $\delta W$  – вариация работы внутренних сил упругости.

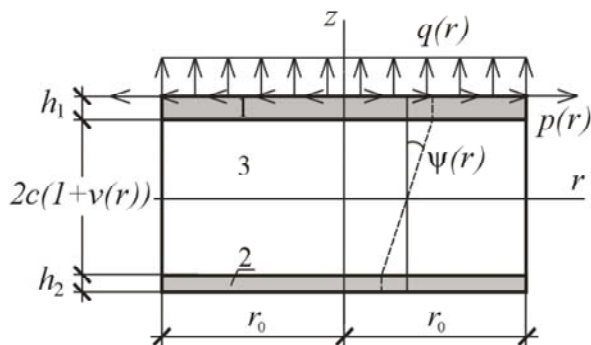


Рисунок 1.1 – Схема деформирования круговой трехслойной пластины

Вариация работы внешней поверхностной нагрузки будет:

$$\delta A_1 = \iint_S (q\delta w + p\delta u) r dr d\varphi. \quad (2.2)$$

Вариация работы контурных усилий  $T_r^0$ ,  $H_r^0$ ,  $M_r^0$ ,  $Q^0$ ,  $D_r^0$ ,  $M_{rz}^0$ :

$$\delta A_2 = \int_0^{2\pi} (T_r^0 \delta u + H_r^0 \delta \psi + M_r^0 \delta w_{,r} + Q^0 \delta w + D_r^0 \delta v_{,r} + M_{rz}^0 \delta v) d\varphi. \quad (2.3)$$

Вариация работы сил упругости:

$$\delta W = \iint_S \left[ \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta \varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\varphi^{(k)} \delta \varepsilon_\varphi^{(k)}) dz + 2 \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} \delta \varepsilon_{rz}^{(3)} dz + \int_{-c}^c \sigma_z^{(3)} \delta \varepsilon_z^{(3)} dz \right] r dr d\varphi, \quad (2.4)$$

где двойной интеграл распространен по срединной поверхности наполнителя  $S$ .

Вариации перемещений в слоях следуют из (1.1), деформаций – из (1.2). Рассмотрим суммарный интеграл по толщине слоев, входящий в виртуальную работу сил упругости (2.4). Для радиальных составляющих будет:

$$\begin{aligned} & \int_{h_1} \sigma_r^{(1)} \delta \varepsilon_r^{(1)} dz = \\ & = \int_{h_1} \sigma_r^{(1)} [\delta u_{,r} + c \delta \psi_{,r} - z (\delta w_{,rr} + \delta v_{,rr} c)] dz = \\ & = T_r^{(1)} \delta u_{,r} + c T_r^{(1)} \delta \psi_{,r} - M_r^{(1)} \delta w_{,rr} - c M_r^{(1)} \delta v_{,rr}, \\ & \int_{h_2} \sigma_r^{(2)} \delta \varepsilon_r^{(2)} dz = \\ & = \int_{h_2} \sigma_r^{(2)} [\delta u_{,r} - c \delta \psi_{,r} - z (\delta w_{,rr} - \delta v_{,rr} c)] dz = \\ & = T_r^{(2)} \delta u_{,r} - c T_r^{(2)} \delta \psi_{,r} - M_r^{(2)} \delta w_{,rr} + c M_r^{(2)} \delta v_{,rr}, \\ & \int_{h_3} \sigma_r^{(3)} \delta \varepsilon_r^{(3)} dz = \\ & = \int_{h_3} \sigma_r^{(3)} [\delta u_{,r} + z \delta \psi_{,r} - z (\delta w_{,rr} + \delta v_{,rr} z)] dz = \\ & = T_r^{(3)} \delta u_{,r} + M_r^{(3)} \delta \psi_{,r} - M_r^{(3)} \delta w_{,rr} - S_r^{(3)} \delta v_{,rr}. \end{aligned}$$

Аналогично получаем интегралы для тангенциальных составляющих. Просуммировав, имеем:

$$\delta W = \iint_S \left[ T_r \delta u_{,r} + H_r \delta \psi_{,r} - M_r \delta w_{,rr} - D_r \delta v_{,rr} + Q^{(3)} \delta \psi - M_{rz}^{(3)} \delta v_{,r} + T_z^{(3)} \delta v + \frac{1}{r} (T_\varphi \delta u + H_\varphi \delta \psi - M_\varphi \delta w_{,r} - D_\varphi \delta v_{,r}) \right] r dr d\varphi, \quad (2.5)$$

где внутренние усилия  $T_\alpha$ ,  $M_\alpha$ ,  $H_\alpha$ ,  $D_\alpha$ ,  $Q^{(3)}$ ,  $M_{rz}^{(3)}$  и  $T_z^{(3)}$  ( $\alpha = r, \varphi$ ) введены соотношениями (2.1).

Вариацию потенциальной энергии проинтегрируем в полярной системе координат. Подынтегральное выражение в (2.5) можно разбить на два интеграла, вынося в первом из них операцию дифференцирования за общую скобку, а во втором – группируя слагаемые при одинаковых виртуальных перемещениях:

$$\delta W = \int_0^{2\pi} \left\{ r T_r \delta u + r H_r \delta \psi - r M_r \delta w_{,r} + \right.$$

$$\left. + [(r M_r)_{,r} - M_\varphi] \delta w - r D_r \delta v_{,r} + [(r D_r)_{,r} - r M_{rz}^{(3)} - D_\varphi] \delta v \right\} d\varphi -$$

$$\begin{aligned} & - \int \int \left\{ [(r T_r)_{,r} - T_\varphi] \delta u + [(r H_r)_{,r} - H_\varphi - r Q^{(3)}] \delta \psi + \right. \\ & \left. + [(r M_r)_{,rr} - M_{\varphi,r}] \delta w + \right. \\ & \left. + [(r D_r)_{,rr} - r T_z^{(3)} - D_{\varphi,r} - (r M_{rz}^{(3)})_{,r}] \delta v \right\} d\varphi dr. \end{aligned}$$

Приравняем полученное выражение к работе внешних и контурных усилий (2.2), (2.3) и потребуем выполнение этого равенства при любых значениях варьируемых перемещений. Это возможно при равенстве нулю коэффициентов при независимых вариациях искомым функций. Отсюда следует система дифференциальных уравнений равновесия в усилиях, описывающая деформирование круглой трехслойной пластинки со сжимаемым наполнителем:

$$\begin{cases} T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = -p, \\ H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) - Q^{(3)} = 0, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) = -q, \\ D_{r,rr} + \frac{1}{r}(2D_{r,r} - D_{\varphi,r} - M_{rz}^{(3)}) - T_z^{(3)} - M_{rz,r} = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

На границе  $r = r_0$  должны выполняться силовые условия:

$$\begin{aligned} T_r &= T_r^0, \quad H_r = H_r^0, \quad M_r = M_r^0, \\ M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) &= Q^0, \\ D_r &= D_r^0; \quad D_{r,r} + \frac{1}{r}(D_r - D_\varphi) - M_{rz}^{(3)} = M_{rz}^0. \end{aligned}$$

### 3 Постановка краевой задачи в перемещениях

Выразим внутренние обобщенные усилия (2.1) через перемещения. Для этого напряжения в слоях рассматриваемой пластины представим через деформации с помощью закона Гука в девиаторно-шаровой форме:

$$\sigma_{ij}^{(k)} = s_{ij}^{(k)} + \sigma^{(k)} \delta_{ij}, \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(k)} &= 2G_k \varepsilon_{ij}^{(k)}, \quad \varepsilon_{ij}^{(k)} = \varepsilon_{ij}^{(k)} - \varepsilon^{(k)} \delta_{ij}, \\ \sigma^{(k)} &= K_k \theta^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)}, \quad \varepsilon^{(k)} = \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)} + \varepsilon_z^{(k)}), \\ & (i, j = r, \varphi, z; k = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Шаровая и девиаторная части тензора деформаций в (3.1) будут

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(k)} &= \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}), \\ \varepsilon_r^{(k)} &= \varepsilon_r^{(k)} - \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}) = \frac{2}{3}\varepsilon_r^{(k)} - \frac{1}{3}\varepsilon_\varphi^{(k)}, \\ \varepsilon_\varphi^{(k)} &= \varepsilon_\varphi^{(k)} - \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}) = \frac{2}{3}\varepsilon_\varphi^{(k)} - \frac{1}{3}\varepsilon_r^{(k)}, \quad (k = 1, 2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(3)} &= \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}), \\ \vartheta_r^{(3)} &= \varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}) = \frac{2}{3}\varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_\varphi^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_z^{(3)}, \\ \vartheta_\varphi^{(3)} &= \varepsilon_\varphi^{(3)} - \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}) = \frac{2}{3}\varepsilon_\varphi^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_z^{(3)}, \\ \vartheta_z^{(3)} &= \varepsilon_z^{(3)} - \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}) = \frac{2}{3}\varepsilon_z^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_\varphi^{(3)}, \\ \vartheta_{rz}^{(3)} &= \varepsilon_{rz}^{(3)}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Компоненты тензора напряжений связаны с деформациями (3.2) законом Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(k)} &= 2G_k \vartheta_r^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)} \delta_{ij} = \\ &= 2G_k \left( \frac{2}{3}\varepsilon_r^{(k)} - \frac{1}{3}\varepsilon_\varphi^{(k)} \right) + 3K_k \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}) = \\ &= \left( K_k + \frac{4}{3}G_k \right) \varepsilon_r^{(k)} + \left( K_k - \frac{2}{3}G_k \right) \varepsilon_\varphi^{(k)} = \\ &= K_k^+ \varepsilon_r^{(k)} + K_k^- \varepsilon_\varphi^{(k)}, \quad (k = 1, 2), \\ \sigma_r^{(3)} &= 2G_3 \left( \frac{2}{3}\varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_\varphi^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_z^{(3)} \right) + \\ &+ 3K_3 \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}) = \\ &= \left( K_3 + \frac{4}{3}G_3 \right) \varepsilon_r^{(3)} + \left( K_3 - \frac{2}{3}G_3 \right) (\varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}) = \\ &= K_3^+ \varepsilon_r^{(3)} + K_3^- (\varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}), \\ \sigma_\varphi^{(k)} &= 2G_k \left( \frac{2}{3}\varepsilon_\varphi^{(k)} - \frac{1}{3}\varepsilon_r^{(k)} \right) + 3K_k \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}) = \\ &= \left( K_k + \frac{4}{3}G_k \right) \varepsilon_\varphi^{(k)} + \left( K_k - \frac{2}{3}G_k \right) \varepsilon_r^{(k)} = \\ &= K_k^+ \varepsilon_\varphi^{(k)} + K_k^- \varepsilon_r^{(k)}, \quad (k = 1, 2), \\ \sigma_\varphi^{(3)} &= 2G_3 \left( \frac{2}{3}\varepsilon_\varphi^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_z^{(3)} \right) + \\ &+ 3K_3 \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}) = \\ &= \left( K_3 + \frac{4}{3}G_3 \right) \varepsilon_\varphi^{(3)} + \left( K_3 - \frac{2}{3}G_3 \right) (\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}) = \\ &= K_3^+ \varepsilon_\varphi^{(3)} + K_3^- (\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}), \\ \sigma_z^{(3)} &= 2G_3 \left( \frac{2}{3}\varepsilon_z^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_r^{(3)} - \frac{1}{3}\varepsilon_\varphi^{(3)} \right) + \\ &+ 3K_3 \frac{1}{3}(\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)} + \varepsilon_z^{(3)}) = \\ &= \left( K_3 + \frac{4}{3}G_3 \right) \varepsilon_z^{(3)} + \left( K_3 - \frac{2}{3}G_3 \right) (\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)}) = \\ &= K_3^+ \varepsilon_z^{(3)} + K_3^- (\varepsilon_r^{(3)} + \varepsilon_\varphi^{(3)}), \\ \sigma_{rz}^{(3)} &= 2G_3 \varepsilon_{rz}^{(3)}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} K_k^+ &= K_k + \frac{4}{3}G_k, \\ K_k^- &= K_k - \frac{2}{3}G_k. \end{aligned}$$

Используя соотношения (3.1), (3.2), (3.3), выразим обобщенные внутренние усилия и моменты через искомые функции  $w(r)$ ,  $u(r)$ ,  $\psi(r)$  и  $v(r)$ . Подставив их в систему дифференциальных уравнений равновесия в усилиях (2.6), получим в итоге систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую перемещения в круглой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r} - a_5 v_{,r}) + 2cK_3^- v_{,r} &= -p, \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r} - a_7 v_{,r}) - 2cG_3 \psi &= 0, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r} - a_8 v_{,r}) &= -q, \\ L_3(a_3 u + a_7 \psi - a_8 w_{,r} - a_9 v_{,r}) &+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \frac{2}{3}c^3 \left( v_{,rr} + \frac{v_{,r}}{r} \right) \left( 2K_3 - \frac{1}{3}G_3 \right) - \\ - 2cK_3^+ v - 2cK_3^- \left( u_{,r} + \frac{u}{r} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь коэффициенты  $a_i$  и дифференциальные операторы  $L_2$  (оператор Бесселя),  $L_3$  определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \\ a_3 &= h_1 \left( c + \frac{1}{2}h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left( c + \frac{1}{2}h_2 \right) K_2^+, \\ a_4 &= c^2 \left( h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3}cK_3^+ \right), \\ a_5 &= c \left[ h_1 \left( c + \frac{1}{2}h_1 \right) K_1^+ + h_2 \left( c + \frac{1}{2}h_2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3}c^2 K_3^+ \right], \\ a_6 &= h_1 \left( c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2 \right) K_1^+ + \\ &+ h_2 \left( c^2 + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3}c^3 K_3^+, \\ a_7 &= c^2 \left[ h_1 \left( c + \frac{1}{2}h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left( c + \frac{1}{2}h_2 \right) K_2^+ \right], \\ a_8 &= c \left[ h_1 \left( c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2 \right) K_1^+ - \right. \\ &\left. - h_2 \left( c^2 + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2 \right) K_2^+ \right], \\ a_9 &= c^2 \left( h_1 \left( c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + \right. \\ &\left. + h_2 \left( c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) K_2^+ + \frac{2}{5}c^3 K_3^+ \right), \\ L_2(g) &\equiv \left( \frac{1}{r}(rg) \right)_{,r}, \quad \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \\ L_3(g) &\equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r}, \quad \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}. \end{aligned}$$

Краевая задача замыкается добавлением к (3.4) кинематических граничных условий. При жесткой заделке контура пластины должны выполняться условия

$$u = \psi = w = v = w_{,r} = 0 \quad \text{при } r = r_0.$$

При шарнирном опирании контура пластины

$$u = \psi = w = v = M_r = 0 \quad \text{при } r = r_0.$$

В случае свободного контура

$$\psi = v = 0, \quad T_r = M_r = M_{r,r} = 0.$$

Следует отметить, что если в системе (3.4) положить  $v(r) \equiv 0$ , то первые три уравнения в ней совпадут с известной системой уравнений равновесия для круговой пластины с несжимаемым наполнителем [1]–[7].

Решение полученной системы уравнений в дальнейшем предполагается проводить с помощью программного комплекса Maple либо приближенным методом.

### Заключение

В данной работе показано, что деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем может быть описано с помощью четырех искоемых функций перемещений.

Для нахождения этих функций получена система дифференциальных уравнений и выписаны граничные условия.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин, В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.

2. Горшков, А.Г. Теория упругости и пластичности / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Тарлаковский. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 416 с.

3. Старовойтов, Э.И. Сопротивление материалов / Э.И. Старовойтов – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.

4. Плещачевский, Ю.М. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю.М. Плещачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.

5. Горшков, А.Г. Гармоническое нагружение слоистых вязкоупругопластических систем / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2000. – № 6. – С. 91–98.

6. Gorshkov, A.G. Cyclic loading of elastic-plastic bodies in neutron flux / A.G. Gorshkov, E.I. Starovoitov, A.V. Yarovaya // Mechanics of Solids. – 2001. – Vol. 36, № 1. – P. 64–69.

7. Москвитин, В.В. Деформация и переменные нагружения двухслойных металлополимерных пластин / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // Механика композитных материалов. – 1985. – № 3. – С. 409–416.

8. Москвитин, В.В. К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях / В.В. Москвитин, Э.И. Старовойтов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 1. – С. 116–121.

9. Kuznetsova, E.L. Natural vibrations of three-layer circular cylindrical shells in an elastic medium / E.L. Kuznetsova, D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. – 2015. – Vol. 5, № 3. – P. 359–366. – DOI: 10.3103/S0025654415030127.

10. Старовойтов, Э.И. Колебания круглых трехслойных пластин, связанных с упругим основанием / Э.И. Старовойтов, В.Д. Кубенко,

Д.В. Тарлаковский // Изв. ВУЗов. Авиационная техника. – 2009. – № 2. – С. 16–19.

11. Leonenko, D.V. Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. – 2012. – Vol. 47. – № 1. – P. 111–118.

12. Starovoitov, E.I. Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // Strength of Materials. – 2003. – Vol. 35, – № 4. – P. 346–352.

13. Starovoitov, E.I. Circular sandwich plates under local impulsive loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Т. 39, № 8. – P. 945–952.

14. Starovoitov, E.I. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46, № 2. – P. 291–298.

15. Деформирование круговой трехслойной пластины на упругом основании / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2005. – № 1. – С. 16–22.

16. Старовойтов, Э.И. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2006. – № 4. – С. 55–62.

17. Starovoitov, E.I. Thermoplastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2008. – Vol. 44, № 9. – P. 1032–1040.

18. Leonenko, D.V. Thermoplastic strain of circular sandwich plates on an elastic base / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. – 2009. – Vol. 44, № 5. – P. 744–755.

19. Леоненко, Д.В. Термопластическое деформирование круговых трехслойных пластин на упругом основании / Д.В. Леоненко, Э.И. Старовойтов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2009. – № 5. – С. 106–119.

Поступила в редакцию 02.10.17.

УДК 512.542

## О ДОПОЛНЕНИИ КОРАДИКАЛА КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

С.Ф. Каморников<sup>1</sup>, О.Л. Шеметкова<sup>2</sup><sup>1</sup>Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины<sup>2</sup>Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, Москва

## ON COMPLEMENT OF RESIDUAL OF FINITE GROUP

S.F. Kamornikov<sup>1</sup>, O.L. Shemetkova<sup>2</sup><sup>1</sup>F. Scorina Gomel State University<sup>2</sup>Plekhanov Russian University of Economics, Moscow

Для GWP-формации  $\mathfrak{F}$  развивается теорема Л.А. Шеметкова о дополняемости  $\mathfrak{F}$ -корадикала конечной группы.

**Ключевые слова:** конечная группа, формация, корадикал, дополняемая подгруппа, GWP-формация.

For a GWP-formation  $\mathfrak{F}$  the L.A. Shemetkov's theorem on the complementability of  $\mathfrak{F}$ -residual of finite group is developed.

**Keywords:** finite group, formation, residual, complement, GWP-formation.

**Введение**

Понятие  $\mathfrak{F}$ -корадикала, характеризующее степень вхождения группы в формацию  $\mathfrak{F}$ , привело к проблеме существования в группе соответствующих дополнений. Центральное место в ее решении занимает следующий результат Л.А. Шеметкова из [1], [2]:

Пусть  $\mathfrak{F}$  – локальная формация,  $G$  – конечная группа. Если для любого простого числа  $p$ , делящего  $|G : G^{\mathfrak{F}}|$ , силовская  $p$ -подгруппа из  $G^{\mathfrak{F}}$  абелева, то подгруппа  $G^{\mathfrak{F}}$  дополняема в  $G$ .

Эта теорема универсальна: она справедлива для любой конечной группы и каждой локальной формации и, кроме того, включает многие известные результаты о дополняемости нормальных подгрупп (в том числе теорему Шура – Цассенхауза о дополняемости нормальной холловой подгруппы; теорему Гашюца о дополняемости абелевого  $\mathfrak{F}$ -корадикала [3]; теорему Ф. Холла о дополняемости коммутанта разрешимой группы с абелевыми силовскими подгруппами [4]; теорему Хуперта [5] о дополняемости  $\mathfrak{N}_p$ -корадикала, обладающего абелевой силовской  $p$ -подгруппой).

Как показывают примеры, условие абелевости соответствующих силовских подгрупп  $\mathfrak{F}$ -корадикала в приведенной теореме Л.А. Шеметкова существенно. Поэтому одним из подходов, направленных на ослабление абелевости, может быть введение дополнительных ограничений либо на группу  $G$ , либо на формацию  $\mathfrak{F}$ . Такой подход, инициированный работой [6], в последнее время получил развитие в работах [7]–[9]. В рамках этого подхода выполнена и данная работа. В ней для произвольной GWP-формации  $\mathfrak{F}$

исследуется существование дополнений к  $\mathfrak{F}$ -корадикалу группы, факторизуемой  $\mathfrak{F}$ -субнормальными подгруппами. Главная цель работы – доказательство следующих двух теорем.

**Теорема 0.1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – GWP-формация и  $G$  – группа, обладающая следующими свойствами:

1)  $G = AB$ , где  $A$  и  $B$  –  $\mathfrak{F}$ -субнормальные подгруппы группы  $G$ ;

2) для некоторого простого числа  $p$  силовские  $p$ -подгруппы из  $A^{\mathfrak{F}}$  и  $B^{\mathfrak{F}}$  абелевы.

Тогда  $\mathfrak{F}$ -корадикал  $G^{\mathfrak{F}}$  группы  $G$  не содержит  $G$ -главных  $\mathfrak{F}$ -центральных  $pd$ -факторов.

**Теорема 0.2.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – некоторая GWP-формация и  $G$  – группа, представляемая в виде произведения  $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп  $A$  и  $B$ . Если подгруппы  $A^{\mathfrak{F}}$  и  $B^{\mathfrak{F}}$   $\pi(\mathfrak{F})$ -разрешимы и для любого простого числа  $p \in \pi(\mathfrak{F})$  силовские  $p$ -подгруппы из  $A^{\mathfrak{F}}$  и  $B^{\mathfrak{F}}$  являются абелевыми, то каждый  $\mathfrak{F}$ -нормализатор группы  $G$  является дополнением  $\mathfrak{F}$ -корадикала  $G^{\mathfrak{F}}$  в группе  $G$ .

**1 Предварительные результаты**

В работе рассматриваются только конечные группы. Используются определения и обозначения, принятые в [10], [11].

Напомним, что формация – это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Если  $\mathfrak{F}$  – непустая формация, то через  $G^{\mathfrak{F}}$  обозначается пересечение всех тех нормальных подгрупп  $N$  группы  $G$ , для которых  $G/N \in \mathfrak{F}$  (подгруппа  $G^{\mathfrak{F}}$  называется  $\mathfrak{F}$ -корадикалом группы  $G$ ).

**Лемма 1.1** [10, лемма 1.2]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустая формация,  $N$  – нормальная подгруппа группы  $G$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1)  $(G/N)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}N/N$ ;
- 2) если  $G = HN$ , то  $H^{\mathfrak{F}}N = G^{\mathfrak{F}}N$ .

Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $\mathfrak{F}$ -субнормальной, если либо  $H = G$ , либо существует максимальная цепь подгрупп

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_n = H$$

такая, что  $H_{i-1}/\text{Core}_{H_{i-1}}(H_i) \in \mathfrak{F}$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Следующие три леммы содержат информацию об общих свойствах  $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп. Доказательство этих лемм можно найти в [12], [13].

**Лемма 1.2.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустая формация. Пусть  $H$  и  $N$  – подгруппы группы  $G$ , причем подгруппа  $N$  нормальна в  $G$ . Тогда:

- 1) если подгруппа  $H$   $\mathfrak{F}$ -субнормальна в группе  $G$ , то подгруппа  $HN/N$   $\mathfrak{F}$ -субнормальна в  $G/N$ , а подгруппа  $HN$   $\mathfrak{F}$ -субнормальна в  $G$ ;
- 2) если  $N \subseteq H$ , то подгруппа  $H$   $\mathfrak{F}$ -субнормальна в  $G$  тогда и только тогда, когда подгруппа  $H/N$   $\mathfrak{F}$ -субнормальна в  $G/N$ .

**Лемма 1.3.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если  $\mathfrak{F}$ -корадикал группы  $G$  содержится в подгруппе  $H$ , то  $H$  –  $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа группы  $G$ ;
- 2) если  $H$  и  $K$  – подгруппы группы  $G$ , причем подгруппа  $H$   $\mathfrak{F}$ -субнормальна в  $G$ , то подгруппа  $H \cap K$   $\mathfrak{F}$ -субнормальна в  $K$ ;
- 3) если подгруппа  $H$   $\mathfrak{F}$ -субнормальна в  $K$  и подгруппа  $K$   $\mathfrak{F}$ -субнормальна в  $G$ , то подгруппа  $H$   $\mathfrak{F}$ -субнормальна в  $G$ ;
- 4) если подгруппы  $H$  и  $K$   $\mathfrak{F}$ -субнормальны в  $G$ , то подгруппа  $H \cap K$   $\mathfrak{F}$ -субнормальна в  $G$ .

**Лемма 1.4.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустая наследственная формация. Если подгруппа  $H$   $\mathfrak{F}$ -субнормальна в  $G$ , то подгруппа  $H^{\mathfrak{F}}$  субнормальна в  $G$ .

Говорят [12], что формация  $\mathfrak{F}$  индуцирует функтор Виландта на  $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгруппах, если  $\langle A, B \rangle^{\mathfrak{F}} = \langle A^{\mathfrak{F}}, B^{\mathfrak{F}} \rangle$  для любых двух  $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп  $A$  и  $B$  каждой группы  $G$ . В книге [13] такая формация называется *формацией, обладающей обобщенным свойством Виландта для корадикалов*, или сокращенно *GWP-формацией (the formation with generalized Wielandt property)*.

Каждая GWP-формация  $\mathfrak{F}$  является наследственной формацией Фиттинга [12], т. е. она замкнута относительно взятия подгрупп и, кроме

того, из  $G = AB$ , где  $A \triangleleft G$ ,  $B \triangleleft G$ ,  $A \in \mathfrak{F}$ ,  $B \in \mathfrak{F}$ , всегда следует  $G \in \mathfrak{F}$ .

Из определения класса Фиттинга следует, что в любой группе  $G$  существует  $\mathfrak{F}$ -радикал  $G_{\mathfrak{F}}$ , т. е. наибольшая нормальная подгруппа из  $G$ , принадлежащая  $\mathfrak{F}$  (она совпадает с произведением всех нормальных  $\mathfrak{F}$ -подгрупп из  $G$ ). В дальнейшем мы будем опираться на следующий результат, устанавливающий связь  $\mathfrak{F}$ -субнормальных  $\mathfrak{F}$ -подгрупп группы  $G$  с ее  $\mathfrak{F}$ -радикалом.

**Лемма 1.5** [12, лемма 3.3.5]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – GWP-формация. Тогда любая  $\mathfrak{F}$ -субнормальная  $\mathfrak{F}$ -подгруппа группы  $G$  содержится в ее  $\mathfrak{F}$ -радикале  $G_{\mathfrak{F}}$ .

В [14] описаны все разрешимые GWP-формации. Достаточно широкие классы неразрешимых GWP-формаций представлены в работах [14], [15]. В общем случае проблема перечисления всех GWP-формаций остается открытой.

В то же время, как следует из [15], любая GWP-формация  $\mathfrak{F}$  является локальной. Кроме того, она *решеточная* [14], т. е. обладает тем свойством, что множество всех  $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп в любой группе образует подрешетку решетки всех подгрупп этой группы. Таким образом, все GWP-формации лежат в классе всех наследственных локальных решеточных формаций, которые описаны в работах [16], [17].

**Лемма 1.6** [16]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – наследственная локальная формация. Тогда и только тогда  $\mathfrak{F}$  является решеточной, когда формация  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $\mathfrak{F} = D_0(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$ ,  $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \emptyset$ ;
- 2) существует такое разбиение  $\{\pi_i \mid i \in I\}$  множества  $\pi(\mathfrak{H})$  на попарно непересекающиеся подмножества, что  $\mathfrak{H} = D_0(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{E}_{\pi_i})$ ;
- 3)  $\mathfrak{M} = \mathfrak{E}_{\pi(\mathfrak{M})}\mathfrak{M}$  – наследственная локальная формация, являющаяся классом Фиттинга, нормальным в  $\mathfrak{M}^2$ ;
- 4) всякая нециклическая критическая группа  $G$  формации  $\mathfrak{M}$ , имеющая единичную подгруппу Фраттини, является примитивной с неабелевым цоколем  $N = G^{\mathfrak{M}}$ , причем  $G/N$  – циклическая примарная группа.

Напомним, что *критической группой формации  $\mathfrak{F}$*  называется группа, не принадлежащая  $\mathfrak{F}$ , все собственные подгруппы которой принадлежат  $\mathfrak{F}$ . Если  $\mathfrak{X}$  – некоторый класс групп, то через  $D_0\mathfrak{X}$  обозначается класс всех групп, представимых в виде  $H_1 \times \dots \times H_t$ , где  $H_i \in \mathfrak{X}$  для всех  $i = 1, 2, \dots, t$ . Если  $\pi$  – некоторое множество простых чисел, то  $\mathfrak{X}_{\pi}$  – это класс всех  $\pi$ -групп из  $\mathfrak{X}$ .

В частности,  $\mathfrak{S}_\pi$  – формация всех разрешимых  $\pi$ -групп.

Пусть  $P$  – множество всех простых чисел. Тогда функция

$$f : P \rightarrow \{\text{формации конечных групп}\}$$

называется *формационной функцией*.

Для формационной функции  $f$  главный фактор  $A/B$  группы  $G$  называется  *$f$ -центральным* ( *$f$ -эксцентральным*), если

$$G/C_G(A/B) \cong \text{Aut}(A/B) \in f(p)$$

для всех простых  $p \in \pi(A/B)$  (соответственно  $G/C_G(A/B)$  не принадлежит  $f(p)$  хотя бы для одного простого числа  $p \in \pi(A/B)$ ). Класс групп  $\mathfrak{F} = LF(f)$  называется *локальной формацией*, если он состоит из всех групп  $G$  таких, что либо  $G = 1$ , либо  $G \neq 1$  и любой главный фактор  $A/B$  группы  $G$  является  $f$ -центральным. При этом говорят, что локальная формация  $\mathfrak{F}$  *определяется с помощью формационной функции  $f$* , а  $f$  – *локальное определение* формации  $\mathfrak{F}$ .

Пусть  $\mathfrak{S}_p$  – класс всех  $p$ -групп,  $f$  – формационная функция и  $\mathfrak{F} = LF(f)$ . Тогда  $f$  называется:

- (а) *внутренней*, если  $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$  для всех  $p \in P$ ;
- (в) *полной*, если  $f(p) = \mathfrak{S}_p f(p)$  для всех  $p \in P$ ;
- (с) *канонической*, если она является полной и внутренней.

Как показано в [11, теорема IV.3.7], для любой локальной формации  $\mathfrak{F}$  существует единственная каноническая формационная функция  $f$  такая, что  $\mathfrak{F} = LF(f)$ . Эта функция называется *каноническим локальным определением* формации  $\mathfrak{F}$ .

Следуя определению 5.5 из [10], главный фактор  $H/K$  будем называть  *$\mathfrak{F}$ -центральным* ( *$\mathfrak{F}$ -эксцентральным*), если  $H/K$   $f$ -централен (соответственно  $f$ -эксцентрален) для некоторого внутреннего локального определения  $f$  формации  $\mathfrak{F}$ .

Нам понадобится следующая информация о главных факторах  $\mathfrak{F}$ -корадикала. При этом под главным  *$pd$ -фактором* группы понимается главный фактор, порядок которого делится на простое число  $p$ .

**Лемма 1.7** [10, теорема 11.6]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – локальная формация. Если для некоторого простого числа  $p$  силовская  $p$ -подгруппа из  $G^\mathfrak{F}$  абелева, то  $\mathfrak{F}$ -корадикал  $G^\mathfrak{F}$  группы  $G$  не содержит  $G$ -главных  $\mathfrak{F}$ -центральных  $pd$ -факторов.

Далее  $\mathfrak{N}$  – формация всех нильпотентных групп.

**Лемма 1.8.** Если группа  $G$  представима в виде  $G = \langle A, B \rangle$ , где  $A$  и  $B$  – субнормальные подгруппы группы  $G$ , и для некоторого простого

числа  $p$  подгруппа  $A^\mathfrak{N}$  не содержит  $A$ -главных центральных  $pd$ -факторов, а подгруппа  $B^\mathfrak{N}$  не содержит  $B$ -главных центральных  $pd$ -факторов, то  $\mathfrak{N}$ -корадикал  $G^\mathfrak{N}$  группы  $G$  не содержит  $G$ -главных центральных  $pd$ -факторов.

*Доказательство.* Предположим, что лемма не верна. Пусть  $G$  – группа, которая удовлетворяет условию леммы, но не удовлетворяет ее заключению, причем для группы  $G$  с такими свойствами число  $t = |G| + |G:A| + |G:B|$  является минимальным. Понятно, что  $t > 3$  и  $G^\mathfrak{N} \neq 1$ .

Если либо  $G = A$ , либо  $G = B$ , то по условию леммы  $\mathfrak{N}$ -корадикал  $G^\mathfrak{N}$  группы  $G$  не содержит  $G$ -главных центральных  $pd$ -факторов, противоречие. Поэтому полагаем далее, что  $G \neq A$  и  $G \neq B$ .

Пусть  $N$  – минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ . Если  $N$  не содержится в  $G^\mathfrak{N}$ , то ввиду леммы 1.1 имеем, что  $(G/N)^\mathfrak{N} = G^\mathfrak{N}N/N \cong G^\mathfrak{N}$ . Отсюда на основании выбора группы  $G$  заключаем, что  $\mathfrak{N}$ -корадикал  $G^\mathfrak{N}$  группы  $G$  не содержит  $G$ -главных центральных  $pd$ -факторов. Противоречие. Значит, любая минимальная нормальная подгруппа группы  $G$  содержится в подгруппе  $G^\mathfrak{N}$ .

Ввиду леммы 1.1 справедливы равенства  $(AN/N)^\mathfrak{N} = A^\mathfrak{N}N/N$  и  $(BN/N)^\mathfrak{N} = B^\mathfrak{N}N/N$ .

Кроме того, группа  $G/N$  представима в виде

$$G/N = \langle AN/N, BN/N \rangle,$$

где  $AN/N$  и  $BN/N$  – субнормальные подгруппы группы  $G/N$ . Значит, ввиду выбора группы  $G$   $\mathfrak{N}$ -корадикал  $G^\mathfrak{N}/N$  группы  $G/N$  не содержит  $G$ -главных центральных  $pd$ -факторов.

Если  $L$  – минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ , отличная от  $N$ , то аналогично показывается, что  $\mathfrak{N}$ -корадикал  $G^\mathfrak{N}/L$  группы  $G/L$  не содержит  $G$ -главных центральных  $pd$ -факторов. Но тогда из изоморфизма  $G^\mathfrak{N} \cong G^\mathfrak{N}/N \cap L$  следует, что  $\mathfrak{N}$ -корадикал  $G^\mathfrak{N}$  группы  $G$  не содержит  $G$ -главных центральных  $pd$ -факторов. Получили противоречие с выбором группы  $G$ .

Итак,  $N$  – единственная минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ . При этом каждый главный  $pd$ -фактор группы  $G$  на участке от  $N$  до  $G^\mathfrak{N}$  является эксцентральным. А так как для группы  $G$  лемма не верна, то минимальная нормальная подгруппа  $N$  группы  $G$  является  $pd$ -подгруппой, которая центральна в  $G$ . Отсюда следует, в частности, что  $N$  – абелева  $p$ -группа.

Предположим, что  $A^\mathfrak{N} = 1$ . Тогда  $A \subseteq F(G)$  и  $G = \langle A, B \rangle = F(G)B$ . Отсюда ввиду леммы 2.3.2 из [12]  $G^\mathfrak{N} = (F(G))^\mathfrak{N}B^\mathfrak{N} = B^\mathfrak{N}$ , а значит, ввиду леммы 1.7 подгруппа  $G^\mathfrak{N}$  не содержит  $G$ -главных

центральных  $pd$ -факторов, противоречие. Поэтому полагаем далее, что  $A^{\mathfrak{N}} \neq 1$  и  $B^{\mathfrak{N}} \neq 1$ .

Обозначим  $D = A^{\mathfrak{N}} \cap N$ . Предположим, что  $D \neq 1$ . Тогда так как  $N \subseteq Z(G)$ , то  $D \subseteq Z(A)$ . Следовательно, все  $A$ -главные факторы подгруппы  $A^{\mathfrak{N}}$  на отрезке  $[1, D]$  являются центральными в  $A$ . Пришли к противоречию с леммой 1.7. Таким образом,  $A^{\mathfrak{N}} \cap N = 1$ . Аналогично показывается, что  $B^{\mathfrak{N}} \cap N = 1$ .

Предположим, что подгруппа  $A$  нормальна в  $G$ . Тогда из характеристичности  $A^{\mathfrak{N}}$  в  $A$  следует, что  $A^{\mathfrak{N}} \triangleleft G$ . Так как  $N$  – единственная минимальная нормальная подгруппа группы  $G$  и  $A^{\mathfrak{N}} \neq 1$ , то  $N \subseteq A^{\mathfrak{N}}$ . Пришли к противоречию с тем, что  $A^{\mathfrak{N}} \cap N = 1$ . Таким образом полагаем далее, что подгруппа  $A$  не нормальна в  $G$ . Аналогично следует, что подгруппа  $B$  не нормальна в  $G$ .

Пусть  $|B| \leq |A|$ . Ввиду теоремы 7.1 из [10] в группе  $G$  существует такой элемент  $x$ , что  $A^x \neq A$ ,  $A^x \subseteq N_G(A)$  и  $A \subseteq N_G(A^x)$ . Отсюда

$$\langle A, A^x \rangle \subseteq N_G(A) \subset G.$$

Обозначим подгруппу  $\langle A, A^x \rangle$  через  $T$ . Так как  $A^{\mathfrak{N}}$  не содержит  $A$ -главных центральных  $pd$ -факторов, то подгруппа  $(A^x)^{\mathfrak{N}}$  также не содержит  $A^x$ -главных центральных  $pd$ -факторов. Кроме того, подгруппы  $A$  и  $A^x$  субнормальны в группе  $\langle A, A^x \rangle$ . Так как

$$|T| + |T : A| + |G : A^x| < t,$$

то ввиду выбора группы  $G$  подгруппа  $T^{\mathfrak{N}}$  не содержит  $T$ -главных центральных  $pd$ -факторов.

Ввиду теоремы Виландта о порождении субнормальных подгрупп  $T$  субнормальна в  $G$ . Так как  $G = \langle T, B \rangle$  и

$$|G| + |G : T| + |G : B| < t,$$

то ввиду выбора группы  $G$  подгруппа  $G^{\mathfrak{N}}$  не содержит  $G$ -главных центральных  $pd$ -факторов. Снова пришли к противоречию.  $\square$

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства факторизуемых групп. Напомним, что для некоторого множества  $\pi$  простых чисел группа называется  $\pi$ -замкнутой, если она обладает нормальной холловой  $\pi$ -подгруппой.

**Лемма 1.9** [18]. Пусть группа  $G = AB$  удовлетворяет свойству  $D_{\pi}$ . Если  $A$  и  $B$  –  $\pi$ -замкнутые подгруппы, то

$$O_{\pi}(G) = (O_{\pi}(G) \cap A)(O_{\pi}(G) \cap B).$$

Конечная группа называется  $p$ -нильпотентной, если она обладает нормальной холловой  $p'$ -подгруппой. Проверка показывает, что множество всех  $p$ -нильпотентных групп образует формацию.

**Лемма 1.10** [19]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – формация всех  $p$ -нильпотентных групп. Если  $A$  и  $B$  –  $\mathfrak{F}$ -субнормальные подгруппы группы  $G$  и  $G = AB$ , то  $G^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}} B^{\mathfrak{F}}$ .

Следуя [10], приведем определение  $\mathfrak{F}$ -нормализатора произвольной конечной группы для случая, когда  $\mathfrak{F}$  – локальная формация.

Нормальная подгруппа  $R$  группы  $G$  называется  $\mathfrak{F}$ -предельной нормальной подгруппой, если  $R/R \cap \Phi(G)$  является  $\mathfrak{F}$ -эксцентральным главным фактором группы  $G$ . Максимальная подгруппа  $M$  группы  $G$  называется  $\mathfrak{F}$ -критической в  $G$ , если в  $G$  найдется такая  $\mathfrak{F}$ -предельная нормальная подгруппа  $R$ , что  $MR = G$ . Подгруппа  $H$  называется  $\mathfrak{F}$ -нормализатором группы  $G$ , если  $H \in \mathfrak{F}$  и существует максимальная цепь

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G \quad (n \geq 0),$$

в которой подгруппа  $H_{i-1}$   $\mathfrak{F}$ -критична в  $H_i$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ . По определению, каждая группа  $G$  обладает по крайней мере одним  $\mathfrak{F}$ -нормализатором.

Для доказательства основных результатов нам понадобится также следующая информация о свойствах  $\mathfrak{F}$ -нормализаторов. Пусть  $H$  – подгруппа, а  $A/B$  – нормальный фактор группы  $G$ . Говорят, что:

- 1)  $H$  покрывает фактор  $A/B$ , если  $HB \supseteq A$ ;
- 3)  $H$  изолирует фактор  $A/B$ , если  $H \cap A \subseteq B$ .

**Лемма 1.11** [10]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – локальная формация,  $G$  – группа с  $\pi(\mathfrak{F})$ -разрешимым  $\mathfrak{F}$ -корадикалом. Если  $F$  –  $\mathfrak{F}$ -нормализатор группы  $G$ , то  $F$  покрывает каждый  $\mathfrak{F}$ -центральный и изолирует каждый  $\mathfrak{F}$ -эксцентральным главный фактор группы  $G$ .

## 2 Доказательство теоремы 0.1

Если  $p$  не принадлежит  $\pi(\mathfrak{F})$ , то утверждение теоремы очевидно. Поэтому полагаем далее, что  $p \in \pi(\mathfrak{F})$ . Предположим, что теорема не верна. Пусть  $G$  – группа, которая удовлетворяет условию теоремы, но не удовлетворяет ее заключению, причем для группы  $G$  с такими свойствами число  $t = |G| + |G : A| + |G : B|$  является минимальным. Понятно, что  $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$ .

Если  $G = A$ , то по условию теоремы силовские  $p$ -подгруппы из  $G^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}$  абелевы, а значит, ввиду леммы 1.7  $\mathfrak{F}$ -корадикал  $G^{\mathfrak{F}}$  группы  $G$  не содержит  $G$ -главных  $\mathfrak{F}$ -центральных  $pd$ -факторов, противоречие. Поэтому полагаем далее, что  $G \neq A$  и  $G \neq B$ .

Пусть  $N$  – минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ . Если  $N$  не содержится в  $G^{\mathfrak{F}}$ ,

то ввиду леммы 1.1 имеем, что  $(G/N)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}N/N \cong G^{\mathfrak{F}}$ . Отсюда на основании выбора группы  $G$  следует, что  $\mathfrak{F}$ -корадикал  $G^{\mathfrak{F}}$  группы  $G$  не содержит  $G$ -главных  $\mathfrak{F}$ -центральных  $pd$ -факторов. Противоречие. Значит, любая минимальная нормальная подгруппа группы  $G$  содержится в подгруппе  $G^{\mathfrak{F}}$ .

Ввиду леммы 1.1 справедливы равенства  $(AN/N)^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}N/N$  и  $(BN/N)^{\mathfrak{F}} = B^{\mathfrak{F}}N/N$ . Поэтому силовские  $p$ -подгруппы из  $(AN/N)^{\mathfrak{F}}$  и  $(BN/N)^{\mathfrak{F}}$  абелевы. Кроме того, группа  $G/N$  представима в виде

$$G/N = (AN/N)(BN/N),$$

где  $AN/N$  и  $BN/N$  –  $\mathfrak{F}$ -субнормальные подгруппы группы  $G/N$  ввиду леммы 1.2. Значит, ввиду выбора группы  $G$   $\mathfrak{F}$ -корадикал  $G^{\mathfrak{F}}/N$  группы  $G/N$  не содержит  $G$ -главных  $\mathfrak{F}$ -центральных  $pd$ -факторов.

Если  $L$  – минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ , отличная от  $N$ , то аналогично показывается, что  $\mathfrak{F}$ -корадикал  $G^{\mathfrak{F}}/L$  группы  $G/L$  не содержит  $G$ -главных  $\mathfrak{F}$ -центральных  $pd$ -факторов. Но тогда ввиду изоморфизма  $G^{\mathfrak{F}} \cong G^{\mathfrak{F}}/N \cap L$  следует, что  $\mathfrak{F}$ -корадикал  $G^{\mathfrak{F}}$  группы  $G$  не содержит  $G$ -главных  $\mathfrak{F}$ -центральных  $pd$ -факторов. Получили противоречие с выбором группы  $G$ .

Итак,  $N$  – единственная минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ , содержащаяся в  $G^{\mathfrak{F}}$ . При этом каждый главный  $pd$ -фактор группы  $G$  на участке от  $N$  до  $G^{\mathfrak{F}}$  является  $\mathfrak{F}$ -эксцентральным. А так как для группы  $G$  теорема не верна, то минимальная нормальная подгруппа  $N$  группы  $G$  является  $pd$ -подгруппой, которая  $\mathfrak{F}$ -центральна в  $G$ . Если  $f$  – каноническое локальное определение формации  $\mathfrak{F}$ , то

$$G/C_G(N) \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Значит,  $G^{\mathfrak{F}} \subseteq C_G(N)$ , а поэтому  $N \subseteq Z(G^{\mathfrak{F}})$ . Отсюда следует, в частности, что  $N$  – абелева  $p$ -группа.

Предположим, что  $A^{\mathfrak{F}} = 1$ . Так как  $\mathfrak{F}$  – GWP-формация, то ввиду  $\mathfrak{F}$ -субнормальности подгруппы  $A$  в  $G$  и того, что  $A \in \mathfrak{F}$ , имеем на основании леммы 1.5  $A \subseteq G_{\mathfrak{F}}$  и  $G = AB = G_{\mathfrak{F}}B$ . Отсюда  $G^{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} = B^{\mathfrak{F}}$ , а значит, ввиду леммы 1.7 подгруппа  $G^{\mathfrak{F}}$  не содержит  $G$ -главных  $\mathfrak{F}$ -центральных  $pd$ -факторов, противоречие. Поэтому полагаем далее, что  $A^{\mathfrak{F}} \neq 1$  и  $B^{\mathfrak{F}} \neq 1$ .

Обозначим  $D = A^{\mathfrak{F}} \cap N$ . Предположим, что  $D \neq 1$ . Ввиду [10, теорема 4.7],  $f(p)$  является наследственной формацией. Поэтому из

$G/C_G(N) \in f(p)$  следует, что

$$AC_G(N)/C_G(N) \in f(p).$$

Значит, ввиду изоморфизма

$$AC_G(N)/C_G(N) \cong A/A \cap C_G(N) = A/C_A(N)$$

имеем, что  $A/C_A(N) \in f(p)$ . Так как  $C_A(N) \subseteq C_A(D)$ , то  $A/C_A(D) \in f(p)$ . Следовательно, все  $A$ -главные факторы подгруппы  $A^{\mathfrak{F}}$  на отрезке  $[1, D]$  являются  $\mathfrak{F}$ -центральными в  $A$ . Пришли к противоречию с леммой 1.7. Таким образом,  $A^{\mathfrak{F}} \cap N = 1$ . Аналогично показывается, что  $B^{\mathfrak{F}} \cap N = 1$ .

Так как  $\mathfrak{F}$  – GWP-формация, то  $G^{\mathfrak{F}} = \langle A^{\mathfrak{F}}, B^{\mathfrak{F}} \rangle$ . Ввиду леммы 1.4 подгруппы  $A^{\mathfrak{F}}$  и  $B^{\mathfrak{F}}$  субнормальны в группе  $G$ . Кроме того, силовские  $p$ -подгруппы из  $(A^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{N}}$  и  $(B^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{N}}$  абелевы, а значит, ввиду леммы 1.7 подгруппа  $(A^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{N}}$  не содержит  $A^{\mathfrak{F}}$ -главных центральных  $pd$ -факторов, а подгруппа  $(B^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{N}}$  не содержит  $B^{\mathfrak{F}}$ -главных центральных  $pd$ -факторов. Поэтому по лемме 1.8  $\mathfrak{N}$ -корадикал  $(G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{N}}$  группы  $G^{\mathfrak{F}}$  не содержит  $G^{\mathfrak{F}}$ -главных центральных  $pd$ -факторов. Следовательно,  $(G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{N}} \cap N = 1$ . Если  $(G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{N}} \neq 1$ , то группа  $G^{\mathfrak{F}}$  содержит минимальную нормальную подгруппу, отличную от  $N$ , противоречие. Поэтому  $(G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{N}} = 1$ , т. е.  $G^{\mathfrak{F}}$  – нильпотентная подгруппа группы  $G$ . А так как  $N$  – единственная минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ , то, в частности,  $G^{\mathfrak{F}}$  –  $p$ -группа.

Так как формация  $\mathfrak{F}$  является решеточной, то на основании леммы 1.6 она обладает следующими свойствами: 1)  $\mathfrak{F} = D_0(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$ ,  $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \emptyset$ ; 2) существует такое разбиение  $\{\pi_i \mid i \in I\}$  множества  $\pi(\mathfrak{H})$  на попарно непересекающиеся подмножества, что  $\mathfrak{H} = D_0(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$ ; 3)  $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{M})}\mathfrak{M}$  – наследственная насыщенная формация, являющаяся классом Фиттинга, нормальным в  $\mathfrak{M}^2$ ; 4) всякая нециклическая критическая группа  $H$  формации  $\mathfrak{M}$ , имеющая единичную подгруппу Фраттини, является монолитической с неабелевым монолитом  $L = H^{\mathfrak{M}}$ , причем  $H/L$  – циклическая примарная группа.

Так как  $p \in \pi(\mathfrak{F})$ , то либо  $p \in \pi(\mathfrak{M})$ , либо  $p \in \pi_i$  для некоторого  $i \in I$ . Рассмотрим оба случая.

1) Пусть  $p \in \pi(\mathfrak{M})$ . Тогда из строения формации  $\mathfrak{F}$  следует, что  $G/G^{\mathfrak{F}} = (S/G^{\mathfrak{F}}) \times (F/G^{\mathfrak{F}})$ , где  $S/G^{\mathfrak{F}}$  – холлова  $\pi(\mathfrak{M})$ -подгруппа группы  $G/G^{\mathfrak{F}}$ , принадлежащая формации  $\mathfrak{M}$ , и  $F/G^{\mathfrak{F}}$  – холлова  $\pi(\mathfrak{H})$ -подгруппа группы  $G/G^{\mathfrak{F}}$ ,

принадлежащая формации  $\mathfrak{F}$ . Так как  $\mathfrak{M} = \mathfrak{E}_{\pi(\mathfrak{M})}\mathfrak{M}$  и  $G^\delta$  –  $p$ -группа, где  $p \in \pi(\mathfrak{M})$ , то  $S \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ .

Рассмотрим подгруппы  $AG^\delta$  и  $BG^\delta$ . Ввиду леммы 1.2 они  $\mathfrak{F}$ -субнормальны в группе  $G$ . Кроме того,  $G = (AG^\delta)(BG^\delta)$ . Так как формация  $\mathfrak{F}$  является GWP-формацией, то

$$(AG^\delta)^\delta = \langle A, G^\delta \rangle^\delta = \langle A^\delta, (G^\delta)^\delta \rangle = A^\delta$$

и  $(BG^\delta)^\delta = B^\delta$ , т. е.  $\mathfrak{F}$ -корадикалы подгрупп  $AG^\delta$  и  $BG^\delta$  являются абелевыми. Если либо  $A \subset AG^\delta$ , либо  $B \subset BG^\delta$ , то  $|G| + |G : AG^\delta| + |G : BG^\delta| < t$  и ввиду выбора группы  $G$  и ее подгрупп  $A$  и  $B$  имеем, что  $\mathfrak{F}$ -корадикал  $G^\delta$  группы  $G$  не содержит  $G$ -главных  $\mathfrak{F}$ -центральных  $pd$ -факторов. Противоречие. Следовательно,  $G^\delta \subseteq A$  и  $G^\delta \subseteq B$ .

Предположим, что  $G^\delta \subset S$ . Рассмотрим группу  $F$  и ее подгруппы  $A_1 = A \cap F$  и  $B_1 = B \cap F$ . Ввиду леммы 1.3 подгруппы  $A_1$  и  $B_1$   $\mathfrak{F}$ -субнормальны в  $F$ . Подгруппы  $S$  и  $F$ , очевидно,  $\mathfrak{F}$ -субнормальны в группе  $G$ . Так как формация  $\mathfrak{F}$  является GWP-формацией и  $S \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ , то  $G^\delta = \langle S, F \rangle^\delta = \langle S^\delta, F^\delta \rangle = F^\delta$ . Так как  $G^\delta \subseteq A$  и  $G^\delta \subseteq B$ , а  $S/G^\delta$  и  $F/G^\delta$  – нормальные холловы подгруппы группы  $G/G^\delta$ , то  $A = (A \cap S)A_1$  и  $B = (B \cap S)B_1$ . При этом подгруппы  $A \cap S$  и  $A_1$   $\mathfrak{F}$ -субнормальны в  $A$ , а  $A \cap S \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ . Поэтому  $A^\delta = \langle A \cap S, A_1 \rangle^\delta = (A_1)^\delta$ . Аналогично  $B^\delta = (B_1)^\delta$ . Отметим еще, что из  $G^\delta \subseteq A$  и  $G^\delta \subseteq B$  ввиду леммы 1.9 справедливо равенство  $F = A_1B_1$ . Так как  $G^\delta \subset S$ , то

$$|F| + |F : A_1| + |F : B_1| < t,$$

а значит, ввиду выбора группы  $G$  подгруппа  $F^\delta = G^\delta$  не содержит  $F$ -главных  $\mathfrak{F}$ -центральных  $pd$ -факторов. Но тогда подгруппа  $G^\delta$  не содержит  $G$ -главных  $\mathfrak{F}$ -центральных  $pd$ -факторов. Пришли к противоречию с выбором группы  $G$ .

Итак,  $S = G^\delta$ , т. е.  $G$  –  $p$ -замкнутая группа. Пусть  $\mathfrak{L}$  – формация всех  $p$ -нильпотентных групп. Тогда из  $p$ -замкнутости группы  $G$  следует, что подгруппы  $A$  и  $B$   $\mathfrak{L}$ -субнормальны в группе  $G$ . Очевидно,  $G^\mathfrak{L} \subseteq G^\delta$ . Предположим, что  $G^\mathfrak{L} \subset G^\delta$ . Тогда  $G/G^\mathfrak{L} = (G^\delta/G^\mathfrak{L}) \times (F_1G^\mathfrak{L}/G^\mathfrak{L})$ , где  $F_1$  – холлова  $\pi(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы  $G$ , принадлежащая  $\mathfrak{F}$ . Так как  $p \in \pi(\mathfrak{F})$ , то  $G^\delta/G^\mathfrak{L} \in \mathfrak{F}$ . Кроме того, из изоморфизма  $F_1G^\mathfrak{L}/G^\mathfrak{L} \cong F_1$  имеем  $F_1G^\mathfrak{L}/G^\mathfrak{L} \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$ . Так как  $\mathfrak{F}$  – формация, то  $G/G^\mathfrak{L} \in \mathfrak{F}$ , а значит,  $G^\delta \subseteq G^\mathfrak{L}$ . Пришли

к противоречию. Следовательно,  $G^\mathfrak{L} = G^\delta$ . Аналогично показывается, что  $A^\mathfrak{L} = A^\delta$  и  $B^\mathfrak{L} = B^\delta$ . Отсюда ввиду леммы 1.10 имеем, что

$$G^\delta = G^\mathfrak{L} = A^\mathfrak{L}B^\mathfrak{L} = A^\delta B^\delta.$$

Так как  $G^\delta \subseteq A \cap B$ , то  $A^\delta \triangleleft G^\delta$  и  $B^\delta \triangleleft G^\delta$ . Теперь ввиду изоморфизма

$$G^\delta / A^\delta = A^\delta B^\delta / A^\delta \cong B^\delta / A^\delta \cap B^\delta$$

и абелевости подгруппы  $B^\delta$  получаем, что коммутант  $[G^\delta, G^\delta]$  группы  $G^\delta$  содержится в  $A^\delta$ . Очевидно,  $[G^\delta, G^\delta]$  – нормальная подгруппа группы  $G$ . Если  $[G^\delta, G^\delta] \neq 1$ , то из единственности в  $G$  минимальной нормальной подгруппы  $N$  имеем, что  $N \subseteq [G^\delta, G^\delta] \subseteq A^\delta$ . Пришли к противоречию с тем, что  $A^\delta \cap N = 1$ . Следовательно,  $[G^\delta, G^\delta] = 1$ , т. е. подгруппа  $G^\delta$  является абелевой. Но тогда по лемме 1.7  $\mathfrak{F}$ -корадикал  $G^\delta$  группы  $G$  не содержит  $G$ -главных  $\mathfrak{F}$ -центральных  $pd$ -факторов. Снова пришли к противоречию с выбором группы  $G$ .

2) Пусть  $p \in \pi_i$  для некоторого  $i \in I$ . Тогда из строения формации  $\mathfrak{F}$  следует, что  $G/G^\delta = (S/G^\delta) \times (F/G^\delta)$ , где  $S/G^\delta$  – разрешимая холлова  $\pi_i$ -подгруппа группы  $G/G^\delta$  и  $F/G^\delta$  – холлова  $\pi_i$ -подгруппа группы  $G/G^\delta$ , принадлежащая формации  $\mathfrak{F}$ . Так как формация  $\mathfrak{E}_{\pi_i}$  замкнута относительно расширений и  $G^\delta$  –  $p$ -группа, где  $p \in \pi_i$ , то  $S \in \mathfrak{E}_{\pi_i} \subseteq \mathfrak{F}$ . Рассуждая далее по схеме случая 1), снова приходим к противоречию.  $\square$

**Следствие 2.1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – GWP-формация и  $G$  – группа, обладающая следующими свойствами:

1)  $G = A_1A_2 \dots A_n$ , где  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – попарно перестановочные  $\mathfrak{F}$ -субнормальные подгруппы группы  $G$ ;

2) для некоторого простого числа  $p$  и каждого  $i = 1, 2, \dots, n$  силовские  $p$ -подгруппы подгруппы  $A_i^\delta$  абелевы.

Тогда  $\mathfrak{F}$ -корадикал  $G^\delta$  группы  $G$  не содержит  $G$ -главных  $\mathfrak{F}$ -центральных  $pd$ -факторов.

**Следствие 2.2.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – GWP-формация и  $G$  – группа, обладающая следующими свойствами:

1)  $G = A_1A_2 \dots A_n$ , где  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – попарно перестановочные  $\mathfrak{F}$ -субнормальные подгруппы группы  $G$ ;

2) для каждого  $i = 1, 2, \dots, n$  подгруппа  $A_i^\delta$  абелева.

Тогда  $\mathfrak{F}$ -корадикал  $G^\delta$  группы  $G$  не содержит  $G$ -главных  $\mathfrak{F}$ -центральных факторов.

### 3 Доказательство теоремы 0.2

Очевидно, множество  $\mathfrak{F}$  всех  $\pi(\mathfrak{F})$ -разрешимых групп является формацией Фиттинга. Так как  $\mathfrak{F}$  – GWP-формация, то  $G^{\mathfrak{F}} = \langle A^{\mathfrak{F}}, B^{\mathfrak{F}} \rangle$ . Ввиду леммы 1.4 подгруппы  $A^{\mathfrak{F}}$  и  $B^{\mathfrak{F}}$  субнормальны в группе  $G$ . Поэтому  $G^{\mathfrak{F}} = \langle A^{\mathfrak{F}}, B^{\mathfrak{F}} \rangle \subseteq G_{\mathfrak{F}}$ , т. е. подгруппа  $G^{\mathfrak{F}}$  является  $\pi(\mathfrak{F})$ -разрешимой.

Пусть  $F$  – некоторый  $\mathfrak{F}$ -нормализатор группы  $G$ . На основании теоремы 0.1 все  $G$ -главные факторы группы  $G^{\mathfrak{F}}$  являются  $\mathfrak{F}$ -эксцентральными в  $G$ .

Пусть

$$1 = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G^{\mathfrak{F}} \quad (3.1)$$

– некоторый  $G$ -главный ряд подгруппы  $G^{\mathfrak{F}}$ . Ввиду леммы 1.11  $\mathfrak{F}$ -нормализатор  $F$  изолирует все факторы ряда (3.1), т. е.  $F \cap H_i \subseteq H_{i-1}$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ . Отсюда следует, что

$$F \cap G^{\mathfrak{F}} = F \cap H_n \subseteq F \cap H_{n-1} \subseteq \dots \subseteq H_0 = 1,$$

т. е.  $F \cap G^{\mathfrak{F}} = 1$ . Кроме того, из определения  $\mathfrak{F}$ -нормализатора следует, что справедливо равенство  $FG^{\mathfrak{F}} = G$ . Значит,  $\mathfrak{F}$ -нормализатор  $F$  является дополнением к  $G^{\mathfrak{F}}$  в группе  $G$ .  $\square$

**Следствие 3.1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – GWP-формация и  $G$  – группа, обладающая следующими свойствами:

- 1)  $G = A_1 A_2 \dots A_n$ , где  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – попарно перестановочные  $\mathfrak{F}$ -субнормальные подгруппы  $G$ ;
- 2) для любого простого числа  $p \in \pi(\mathfrak{F})$  и каждого  $i = 1, 2, \dots, n$  силовские  $p$ -подгруппы подгруппы  $A_i^{\mathfrak{F}}$  абелевы.

Если для каждого  $i = 1, 2, \dots, n$  подгруппа  $A_i^{\mathfrak{F}}$   $\pi(\mathfrak{F})$ -разрешима, то каждый  $\mathfrak{F}$ -нормализатор группы  $G$  является дополнением  $\mathfrak{F}$ -корадикала  $G^{\mathfrak{F}}$  в группе  $G$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. О формационных свойствах конечных групп / Л.А. Шеметков // ДАН СССР. – 1972. – Т. 204, № 6. – С. 1324–1327.
2. Шеметков, Л.А. Ступенчатые формации групп / Л.А. Шеметков // Матем. сб. – 1974. – Т. 94, № 4. – С. 628–648.
3. Gaschütz, W. Zur Erweiterungstheorie endlicher Gruppen / W. Gaschütz // J. Reine Angew. Math. – 1952. – Vol. 190. – P. 93–107.
4. Hall, P. The construction of soluble groups / P. Hall // J. Reine Angew. Math. – 1940. – Vol. 182.
5. Huppert, B. Subnormale Untergruppen und  $p$ -Sylowgruppen / B. Huppert // Acta Sci. Math. – 1961. – Vol. 22. – P. 46–61.

6. Каморников, С.Ф. О дополнениях корадикала конечной группы / С.Ф. Каморников // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2013. – № 6 (81). – С. 17–23.

7. Каморников, С.Ф. О существовании дополнений к корадикалам конечных групп / С.Ф. Каморников, О.Л. Шеметкова // Труды ин-та мат. и мех. УрО РАН. – 2015. – Т. 21, № 1. – С. 122–127.

8. Ведерников, В.А. О дополнениях к корадикалам конечных групп / В.А. Ведерников, М.М. Сорокина // Матем. сб. – 2016. – Т. 207, № 6. – С. 27–52.

9. Ballester-Bolínches, A. On complements of  $\mathfrak{F}$ -residuals of finite groups / A. Ballester-Bolínches, S.F. Kamornikov, V. Perez-Calabuig // Communications in Algebra. – 2017. – Vol. 45, № 2. – P. 878–882.

10. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

11. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

12. Каморников, С.Ф. Подгрупповые факторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск: Беларуская навука, 2003. – 256 с.

13. Ballester-Bolínches, A. Classes of finite groups / A. Ballester-Bolínches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer, 2006. – 385 p.

14. Каморников, С.Ф. Перестановочность подгрупп и  $\mathfrak{F}$ -субнормальность / С.Ф. Каморников // Сиб. мат. журнал. – 1996. – Т. 37, № 5. – С. 1065–1080.

15. Ballester-Bolínches, A. On formations of finite groups with the generalized Wielandt property for residuals / A. Ballester-Bolínches, S.F. Kamornikov, V. Perez-Calabuig // J. Algebra. – 2014. – Vol. 412. – P. 173–178.

16. Васильев, А.Ф. О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и примыкающие к ним алгебраические системы. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. – С. 27–54.

17. Каморников, С.Ф. Достаточный признак разрешимой насыщенности формации / С.Ф. Каморников // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 4 (25). – С. 69–73.

18. Pennington, E. On products of finite nilpotent groups / E. Pennington // Math. Z. – 1973. – Vol. 134, № 1. – P. 81–83.

19. Каморников, С.Ф. Об одном свойстве формации всех  $p$ -нильпотентных групп / С.Ф. Каморников // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2014. – № 6 (87). – С. 156–160.

Поступила в редакцию 22.07.17.

УДК 517.95

## ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ВТОРОГО РОДА

Я.Т. Мегралиев, Н.А. Гейдарзаде

*Бакинский государственный университет*

## ON AN INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE SECOND-ORDER ELLIPTIC EQUATION WITH INTEGRAL CONDITION OF THE SECOND KIND

Y.T. Mehraliev, N.A. Heydarzade

*Baku State University*

Исследована одна обратная нелокальная краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка. Суть задачи состоит в том, что требуется вместе с решением определить неизвестный коэффициент. Задача рассматривается в прямоугольной области. При решении исходной обратной краевой задачи осуществляется переход от исходной обратной задачи к некоторой вспомогательной обратной задаче. С помощью принципа сжатых отображений доказываются существование и единственность решения вспомогательной задачи. Также доказываются существование и единственность классического решения исходной задачи.

**Ключевые слова:** обратная краевая задача, эллиптическое уравнение, метод Фурье, классическое решение.

An inverse problem for the elliptic equation of the second order with periodical boundary conditions is investigated. The definition of a classical solution of the problem is introduced. The essence of the problem is that together with the solution it is required to determine the unknown coefficient. The problem is considered in a rectangular domain. To investigate the solvability of the inverse problem, the conversion from the original problem to the some direct auxiliary problem with trivial boundary conditions is realized. Using the principle of condensed mappings, the existence and uniqueness of the solution of the auxiliary problem are proved. The existence and uniqueness of the classical solution of the original problem are also proved.

**Keywords:** inverse boundary value problem, elliptic equation, Fourier method, classical solution.

### Введение

Известно, что [1] при математическом моделировании различных процессов физики, химии, экологии, биологии часто возникают задачи, когда вместо классических краевых условий задана определенная связь значений искомой функции на границе области и внутри нее. Задачи такого типа называют нелокальными задачами. Исследование таких задач вызвано не только теоретическими интересами, но и практической необходимостью. Впервые систематическое исследование нелокальных начально-краевых задач было проведено в [2]. В частности, были поставлены и исследованы пространственно нелокальные задачи для определенного класса эллиптических уравнений. Впоследствии в [3], [4] задача, сформулированная в [2], была названа задачей Бицадзе – Самарского, и были предложены методы решения задач указанного типа для общих эллиптических уравнений. И наконец, краевые задачи с нелокальными условиями возникают при исследовании некоторых обратных задач.

Обратные краевые задачи для эллиптического уравнения второго порядка исследовались в работах [5]–[10].

В [7] рассмотрена обратная краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка с локальными краевыми условиями, а в работе [8]

в отличие от этой задачи, исследована обратная краевая задача при наличии дополнительного интегрального условия первого рода. Далее, в [9] рассмотрена обратная краевая задача при наличии интегрального условия первого рода, которая сводится к самосопряженной задаче. А в работе [10] исследуется обратная краевая задача при наличии интегрального условия первого рода, которая сводится к несамосопряженной задаче.

Целью данной работы является доказательство существования и единственности решения обратной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка с интегральным краевым условием второго рода.

### 1 Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче

Для уравнения

$$u_t(x, t) + u_{xx}(x, t) = a(t)u(x, t) + f(x, t) \quad (1.1)$$

в области  $D_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$  рассмотрим обратную краевую задачу с граничными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, T) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (1.2)$$

$$u_x(0, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (1.3)$$

интегральным условием второго рода

$$bu(1, t) + \int_0^1 u(x, t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (1.4)$$

и с дополнительным условием

$$u(0, t) = h(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (1.5)$$

где  $b > 0$  – заданное число,  $f(x, t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $h(t)$  – заданные функции, а  $u(x, t)$  и  $a(t)$  – искомые функции.

**Определение.** Классическим решением обратной краевой задачи (1.1)–(1.5) назовем пару  $\{u(x, t), a(t)\}$  функций  $u(x, t) \in C^2(D_T)$  и  $a(t) \in C[0, T]$ , удовлетворяющих уравнению (1.1) в  $D_T$ , условиям (1.2) в  $[0, 1]$ , и условиям (1.3)–(1.5) в  $[0, T]$  в обычном смысле.

Наряду с обратной краевой задачей (1.1)–(1.5) рассмотрим следующую вспомогательную обратную краевую задачу. Требуется определить пару  $\{u(x, t), a(t)\}$  функций  $u(x, t) \in C^2(D_T)$  и  $a(t) \in C[0, T]$  из соотношений (1.1)–(1.4),

$$h''(t) + u_{xx}(0, t) = a(t)h(t) + f(0, t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (1.6)$$

Аналогично [9] можно доказать следующую лемму.

**Лемма 1.1.** Пусть  $\varphi(x), \psi(x) \in C[0, 1]$ ,

$$f(x, t) \in C(D_T), \quad h(t) \in C^2[0, T], \quad h(t) \neq 0$$

при  $t \in [0, T]$ , и выполняются условия согласования

$$\varphi(0) = h(0), \quad \psi(0) = h'(T).$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Каждое классическое решение  $\{u(x, t), a(t)\}$  задачи (1.1)–(1.5) является и решением задачи (1.1)–(1.4), (1.6).

2. Каждое решение  $\{u(x, t), a(t)\}$  задачи (1.1)–(1.4), (1.6) такое, что

$$\frac{1}{2} T^2 \|a(t)\|_{C[0, T]} < 1$$

является классическим решением (1.1)–(1.5).

## 2 Сведения из теории спектральных задач и введение некоторых пространств

Задача на собственные значения [11]

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (2.1)$$

$$y'(0) = 0, \quad y'(1) = b\lambda y(1) \quad (b > 0), \quad (2.2)$$

имеет только собственные функции

$$y_k(x) = \sqrt{2} \cos(\sqrt{\lambda_k} x), \quad k = 0, 1, \dots,$$

с неотрицательными собственными числами  $\lambda_k$  из уравнения  $tg\sqrt{\lambda} = -b\sqrt{\lambda}$ .

Решая однородную задачу, соответствующую задаче (1.1)–(1.4) методом разделения переменных, приходим к спектральной задаче для уравнения (2.1) с граничными условиями

$$y'(0) = 0, \quad by(1) + \int_0^1 y(x) dx = 0 \quad (b > 0). \quad (2.3)$$

Ее решением будет система  $\{y_k(x)\}_{k=1}^\infty$ , т. е. система собственных функций задачи (2.1), (2.2)

без функций, соответствующий собственному значению  $\lambda_0 = 0$ .

Известно [11], что начиная с некоторого номера  $N$  имеют место оценки

$$\left| \sqrt{\lambda_k} - \pi/2 - (k-1)\pi \right| < \frac{1}{(b\pi k)}. \quad (2.4)$$

Сравним систему  $\{y_k(x)\}$  без функции  $y_0(x)$  с известной системой  $\{v_k(x)\}$ ,  $v_k(x) = \sqrt{2} \cos\sqrt{\mu_k} x$ , где  $\sqrt{\mu_k} = \frac{\pi}{2} + \pi(k-1)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , которая является ортонормированным базисом в  $L_2(0, 1)$ . Аналогично [12], для  $k \geq N$ , с учетом (2.4) можно показать, что

$$\|y_k(x) - v_k(x)\|_{L_2(0,1)}^2 < \frac{2}{3(bk\pi)}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=N}^\infty \|y_k(x) - v_k(x)\|_{L_2(0,1)}^2 < \frac{1}{9b^2}, \quad (2.5)$$

откуда следует сходимость ряда из левой части этого неравенства.

Имеет место следующая

**Лемма 2.1** [11]. Биортогонально сопряженная система  $\{z_k(x)\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , определяется формулой

$$z_k(x) = \frac{\sqrt{2} \cos(\sqrt{\lambda_k} x) - \cos(\sqrt{\lambda_k})}{1 + b \cos^2(\sqrt{\lambda_k})}. \quad (2.6)$$

**Теорема 2.2** [11]. Система  $\{y_k(x)\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , образует базис Рисса в пространстве  $L_2(0, 1)$ .

Теперь, пусть

$$\eta_k(x) = \sqrt{2} \sin(\sqrt{\lambda_k} x),$$

$$\xi_k(x) = \sqrt{2} \sin(\sqrt{\mu_k} x), \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда, аналогично (2.5), имеем:

$$\sum_{k=N}^\infty \|\eta_k(x) - \xi_k(x)\|_{L_2(0,1)}^2 < \frac{1}{9b^2}. \quad (2.7)$$

Предположим, что  $g(x) \in L_2(0, 1)$ . Тогда, соответственно с учетом (2.5), (2.7), получаем:

$$\left( \sum_{k=1}^\infty \left( \int_0^1 g(x) y_k(x) dx \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq M \|g(x)\|_{L_2(0,1)}, \quad (2.8)$$

$$\left( \sum_{k=1}^\infty \left( \int_0^1 g(x) \eta_k(x) dx \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq M \|g(x)\|_{L_2(0,1)}, \quad (2.9)$$

где

$$M = \left( N(1+N) + 2 + \frac{1}{9b^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.10)$$

Пусть  $g(x) \in W_2^1(0, 1)$  и

$$J(g) = bg(1) + \int_0^1 g(x) dx = 0.$$

Тогда имеем:

$$g_k = (g(x), z_k(x)) = \frac{\sqrt{2}}{\alpha_k} \int_0^1 g(x) (\cos(\sqrt{\lambda_k} x) - \cos(\sqrt{\lambda_k})) dx = -\frac{\sqrt{2}}{\alpha_k} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^1 g'(x) \sin(\sqrt{\lambda_k} x) dx, \quad (2.11)$$

где  $\alpha_k = 1 + b \cos^2(\sqrt{\lambda_k}) > 1$ .

Отсюда, в силу (2.9), находим:

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{\lambda_k} |g_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq M \|g'(x)\|_{L_2(0,1)}. \quad (2.12)$$

Предположим, что

$$g(x) \in W_2^2(0,1), J(g) = 0, g'(0) = 0.$$

Тогда из (2.11) получаем:

$$g_k = \frac{\sqrt{2}}{\alpha_k} \frac{1}{\lambda_k} \times \left( g'(1) \cos(\sqrt{\lambda_k}) - \int_0^1 g''(x) \cos(\sqrt{\lambda_k} x) dx \right). \quad (2.13)$$

В силу (2.8), из (2.13) находим:

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |g_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2m_0 |g'(1)| + \sqrt{2} M \|g''(x)\|_{L_2(0,1)}, \quad (2.14)$$

где

$$m_0 = \frac{1}{b} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь, пусть  $g(x) \in W_2^3(0,1)$ ,

$$J(g) = 0, g'(0) = 0, g'(1) + bg''(1) = 0.$$

Тогда из (2.13) имеем:

$$g_k = \frac{\sqrt{2}}{\alpha_k} \frac{1}{\lambda_k} \int_0^1 g'''(x) \sin(\sqrt{\lambda_k} x) dx. \quad (2.15)$$

Отсюда, с учетом (2.9), находим:

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \sqrt{\lambda_k} |g_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq M \|g'''(x)\|_{L_2(0,1)}. \quad (2.16)$$

Теперь, с целью исследования задачи (1.1)–(1.4), (1.6) рассмотрим следующие пространства:

1. Обозначим через  $B_{2,T}^{\frac{3}{2}}$  совокупность всех функций  $u(x,t)$  вида

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) y_k(x),$$

рассматриваемых в  $D_T$ , где каждая из функций  $u_k(t)$  непрерывна на  $[0, T]$  и

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \sqrt{\lambda_k} \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Норму в этом множестве определим так:

$$\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{\frac{3}{2}}} = \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \sqrt{\lambda_k} \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогично [9] доказывается, что  $B_{2,T}^{\frac{3}{2}}$  является банаховым пространством.

2. Через  $E_T^{\frac{3}{2}}$  обозначим пространство, состоящее из топологического произведения

$$B_{2,T}^{\frac{3}{2}} \times C[0, T].$$

Норма элемента  $z = \{u, a\}$  определяется формулой

$$\|z\|_{E_T^{\frac{3}{2}}} = \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{\frac{3}{2}}} + \|a(t)\|_{C[0,T]}.$$

Очевидно, что  $E_T^{\frac{3}{2}}$  является банаховым пространством.

### 3 Исследование существования и единственности классического решения обратной краевой задачи

Первую компоненту  $u(x,t)$  решения  $\{u(x,t), a(t)\}$  задачи (1.1)–(1.4), (1.6) будем искать в виде:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) y_k(x), \quad (3.1)$$

где

$$u_k(t) = \int_0^1 u(x,t) z_k(x) dx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

причем

$$y_k(x) = \sqrt{2} \cos(\sqrt{\lambda_k} x), \\ z_k(x) = \frac{\sqrt{2} \cos(\sqrt{\lambda_k} x) - \cos(\sqrt{\lambda_k})}{1 + b \cos^2(\sqrt{\lambda_k})}.$$

Применив метод разделения переменных для определения искомым функций  $u_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), из (1.1) и (1.2) имеем:

$$u''_k(t) - \lambda_k u_k(t) = F_k(t; a, u) \quad (k = 1, 2, \dots; 0 \leq t \leq T), \quad (3.2)$$

$$u_k(0) = \varphi_k, u'_k(T) = \psi_k \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (3.3)$$

где

$$F_k(t; u, a) = f_k(t) + a(t) u_k(t),$$

$$f_k(t) = \int_0^1 f(x,t) z_k(x) dx,$$

$$\varphi_k = \int_0^1 \varphi(x) z_k(x) dx,$$

$$\psi_k = \int_0^1 \psi(x) z_k(x) dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Решая задачу (3.2), (3.3) находим:

$$u_k(t) = \frac{ch(\sqrt{\lambda_k}(T-t))}{ch(\sqrt{\lambda_k} T)} \varphi_k + \frac{sh(\sqrt{\lambda_k} t)}{\sqrt{\lambda_k} ch(\sqrt{\lambda_k} T)} \psi_k + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^T G_k(t, \tau) F_k(\tau; u, a) d\tau, \quad (3.4)$$

где

$$G_k(t, \tau) = \begin{cases} -\frac{1}{2ch(\sqrt{\lambda_k}T)} \left[ sh(\sqrt{\lambda_k}(T+t-\tau)) - sh(\sqrt{\lambda_k}(T-(t-\tau))) \right], & t \in [0, \tau]; \\ -\frac{1}{2ch(\sqrt{\lambda_k}T)} \left[ sh(\sqrt{\lambda_k}(T-(t+\tau))) - sh(\sqrt{\lambda_k}(T-(t-\tau))) \right], & t \in [0, \tau]. \end{cases}$$

После подстановки (3.4) в (3.1), для определения компоненты  $u(x, t)$  классического решения задачи (1.1)–(1.4), (1.6), получаем:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{ch(\sqrt{\lambda_k}(T-t))}{ch(\sqrt{\lambda_k}T)} \Phi_k + \frac{sh(\sqrt{\lambda_k}t)}{\sqrt{\lambda_k}ch(\sqrt{\lambda_k}T)} \Psi_k + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^T G_k(t, \tau) F_k(\tau, u, a) d\tau \right\} y_k(x). \quad (3.5)$$

Теперь из (1.6), с учетом (3.1), имеем:

$$a(t) = h^{-1}(t) \left\{ h''(t) - f(0, t) - \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k(t) \right\}. \quad (3.6)$$

Для того, чтобы получить уравнение для второй компоненты  $a(t)$  решения  $\{u(x, t), a(t)\}$  задачи (1.1)–(1.4), (1.6) подставим выражение (3.4) в (3.6):

$$a(t) = h^{-1}(t) \left\{ h''(t) - f(0, t) - \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left( \frac{ch(\sqrt{\lambda_k}(T-t))}{ch(\sqrt{\lambda_k}T)} \Phi_k + \frac{sh(\sqrt{\lambda_k}t)}{\sqrt{\lambda_k}ch(\sqrt{\lambda_k}T)} \Psi_k + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^T G_k(t, \tau) F_k(\tau, u, a) d\tau \right) \right\}. \quad (3.7)$$

Таким образом, решение задачи (1.1)–(1.4), (1.6) свелось к решению системы (3.5), (3.7) относительно неизвестных функций  $u(x, t)$  и  $a(t)$ .

Для изучения вопроса единственности решения задачи (1.1)–(1.4), (1.6) важную роль играет следующая

**Лемма 3.1.** Если  $\{u(x, t), a(t)\}$  – любое решение задачи (1.1)–(1.4), (1.6), то функции

$$u_k(t) = \int_0^1 u(x, t) z_k(x) dx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

удовлетворяют на  $[0, T]$  системе (3.4).

**Доказательство.** Пусть  $\{u(x, t), a(t)\}$  – любое решение задачи (1.1)–(1.4), (1.6). Тогда очевидно, что

$$2 \int_0^1 u_{xx}(x, t) z_k(x) dx = \frac{d^2}{dt^2} \left( 2 \int_0^1 u(x, t) dx \right) = u''_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots),$$

причем  $u_k(t) \in C^2[0, T]$ .

Далее, интегрируя по частям дважды, с учетом (1.3), (1.4), имеем:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 u_{xx}(x, t) z_k(x) dx = \\ & = \frac{\sqrt{2}}{\alpha_k} \int_0^1 u_{xx}(x, t) \left( \cos(\sqrt{\lambda_k}x) - \cos(\sqrt{\lambda_k}) \right) dx = \\ & = -\frac{\sqrt{2}}{\alpha_k} \left( b \lambda_k u(1, t) \cos(\sqrt{\lambda_k}) + \right. \\ & \quad \left. + \lambda_k \int_0^1 u_{xx}(x, t) \cos(\sqrt{\lambda_k}x) dx \right) = \\ & = -\frac{\sqrt{2}}{\alpha_k} \left[ \lambda_k \left( bu(1, t) + \int_0^1 u(x, t) dx \right) \cos(\sqrt{\lambda_k}) + \right. \\ & \quad \left. + \lambda_k \int_0^1 u(x, t) \left( \cos(\sqrt{\lambda_k}x) - \cos(\sqrt{\lambda_k}) \right) dx \right] = \quad (3.9) \\ & = -\lambda_k u_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

где  $\alpha_k = 1 + b \cos^2(\sqrt{\lambda_k}) > 1$ .

Теперь, умножив обе части уравнения (1.1) на функцию  $z_k(x)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), интегрируя полученное равенство по  $x$  от 0 до 1 и пользуясь соотношениями (3.8), (3.9) получаем, что удовлетворяется уравнение (3.2).

Аналогично, из (1.2) получаем, что выполняется условие (3.3).

Таким образом,  $u_k(t)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) является решением задачи (3.2), (3.3). А отсюда непосредственно следует, что функции  $u_k(t)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) удовлетворяют на  $[0, T]$  системе (3.4).  $\square$

Очевидно, что если

$$u_k(t) = \int_0^1 u(x, t) z_k(x) dx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

является решением системы (3.4), то пара  $\{u(x, t), a(t)\}$  функций  $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) y_k(x)$  и  $a(t)$  является решением системы (3.5), (3.7).

Из леммы 3.1 следует, что имеет место следующее

**Следствие.** Пусть система (3.5), (3.7) имеет единственное решение. Тогда задача (1.1)–(1.4), (1.6) не может иметь более одного решения, т. е. если задача (1.1)–(1.4), (1.6) имеет решение, то оно единственно. Отсюда следует, что для доказательства единственности решения задачи (1.1)–(1.4), (1.6) достаточно доказать единственность решения системы (3.5), (3.7).

Рассмотрим в пространстве  $E_T^{\frac{3}{2}}$  оператор

$$\Phi(u, a) = \{\Phi_1(u, a), \Phi_2(u, a)\},$$

где

$$\Phi_1(u, a) = \tilde{u}(x, t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k(t) \sin \lambda_k x,$$

$$\Phi_2(u, a) = \tilde{a}(t),$$

а  $\tilde{u}_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) и  $\tilde{a}(t)$  равны соответственно правым частям (3.4) и (3.7). Теперь с помощью нетрудных преобразований находим:

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \sqrt{\lambda_k} \|\tilde{u}_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \sqrt{\lambda_k} |\varphi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & + 2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |\psi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{T} \left( \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |f_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & + 2T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \sqrt{\lambda_k} \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.10) \\ & \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \left\{ \|h''(t) - f(0,t)\|_{C[0,T]} + \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \sqrt{\lambda_k} |\varphi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |\psi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{T} \left( \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |f_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right] + \right. \\ & \quad \left. + T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \sqrt{\lambda_k} \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (3.11) \end{aligned}$$

Предположим, что данные задачи (1.1)–(1.4), (1.6) удовлетворяют следующим условиям:

- 1)  $\varphi(x) \in W_2^{(3)}(0,1)$ ,  $b\varphi(1) + \int_0^1 \varphi(x) dx = 0$ ,  
 $\varphi'(0) = 0$ ,  $\varphi'(1) + b\varphi''(1) = 0$ ;
- 2)  $\psi(x) \in W_2^{(2)}(0,1)$ ,  $b\psi(1) + \int_0^1 \psi(x) dx = 0$ ,  
 $\psi'(0) = 0$ ;
- 3)  $f(x,t), f_x(x,t) \in C(D_T)$ ,  $f_{xx}(x,t) \in L_2(D_T)$ ,  
 $b f(1,t) + \int_0^1 f(x,t) dx = 0$ ,  
 $f_x(0,t) = 0$  ( $0 \leq t \leq T$ );
- 4)  $h(t) \in C^2[0,T]$ ,  $h(t) \neq 0$  ( $0 \leq t \leq T$ ).

Тогда из (3.10) и (3.11), с учетом (2.14) и (2.16), соответственно, получаем:

$$\begin{aligned} & \|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^{\frac{3}{2}}} \leq \\ & \leq A_1(T) + B_1(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq \\ & \leq A_2(T) + B_2(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.13) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_1(T) &= 2M \|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ & + 2 \left( 2m_0 \psi'(1) + \sqrt{2}M \|\psi''(x)\|_{L_2(0,1)} \right) + \\ & + 2\sqrt{T} \left( 2m_0 \|f_x(1,t)\|_{C[0,T]} + \sqrt{2}M \|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} \right), \end{aligned}$$

$$B_1(T) = 2T,$$

$$\begin{aligned} A_2(T) &= \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \left\{ \|h''(t) - f(0,t)\|_{C[0,T]} + \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ M \|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + 2m_0 \psi'(1) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sqrt{2}M \|\psi''(x)\|_{L_2(0,1)} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left. \left. + \sqrt{T} \left( m_0 \|f_x(1,t)\|_{C[0,T]} + \sqrt{2}M \|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} \right) \right\},$$

$$B_2(T) = \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} T.$$

Из неравенств (3.12), (3.13) заключаем:

$$\begin{aligned} & \|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^{\frac{3}{2}}} + \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq \\ & \leq A(T) + B(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.14) \end{aligned}$$

где

$$A(T) = A_1(T) + A_2(T),$$

$$B(T) = B_1(T) + B_2(T).$$

Итак, можно доказать следующую теорему:

**Теорема 3.1.** Пусть выполнены условия 1)–4) и

$$(A(T) + 2)^2 B(T) < 1. \quad (3.15)$$

Тогда задача (1.1)–(1.4), (1.6) имеет в шаре

$$K = K_R \left( \|z\|_{E_T^{\frac{3}{2}}} \leq R = A(T) + 2 \right)$$

пространства  $E_T^{\frac{3}{2}}$  единственное решение.

**Замечание.** Неравенство (3.15) выполняется при достаточно малых значениях  $T$ .

**Доказательство.** В пространстве  $E_T^{\frac{3}{2}}$  рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \quad (3.16)$$

где  $z = \{u, a\}$ , компоненты  $\Phi_i(u, a)$  ( $i = 1, 2$ ) оператора  $\Phi(u, a)$  определены правыми частями уравнений (3.5), (3.7) соответственно.

Рассмотрим оператор  $\Phi(u, a)$  в шаре

$$K = K_R \left( \|z\|_{E_T^{\frac{3}{2}}} \leq R = A(T) + 2 \right) \text{ из } E_T^{\frac{3}{2}}.$$

Аналогично (3.14) получаем, что для любых  $z, z_1, z_2 \in K_R$  справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E_T^{\frac{3}{2}}} \leq A(T) + B(T) T \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} & \|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E_T^{\frac{3}{2}}} \leq \\ & \leq B(T) R \left( \|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0,T]} + \right. \\ & \quad \left. + \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (3.18) \end{aligned}$$

Тогда из оценок (3.17) и (3.18), с учетом (3.15), следует, что оператор  $\Phi$  действует в шаре  $K = K_R$  и является сжимающим. Поэтому в шаре  $K = K_R$  оператор  $\Phi$  имеет единственную неподвижную точку  $\{u, a\}$ , которая является единственным решением уравнения (3.16), т. е. является единственным в шаре  $K = K_R$  решением системы (3.5), (3.7).

Функция  $u(x,t)$ , как элемент пространства  $B_{2,T}^{\frac{3}{2}}$ , непрерывна и имеет непрерывные производные  $u_x(x,t)$  и  $u_{xx}(x,t)$  в  $D_T$ .

Из (3.2) нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sqrt{\lambda_k} \|u''_k(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \sqrt{3} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \left( m_{k=1}^{\infty} \left( \lambda_k \sqrt{\lambda_k} \|u_k(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\ & \left. + \|f_x(x,t)\|_{C[0,T]} \|L_2(0,1)\| + \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2T}^{\frac{3}{2}}} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $u_{tt}(x,t)$  непрерывна в  $D_T$ .

Легко проверить, что уравнение (1.1) и условия (1.2)–(1.4) и (1.6) удовлетворяются в обычном смысле.

Следовательно,  $\{u(x,t), a(t)\}$  является решением задачи (1.1)–(1.4), (1.6). В силу следствия леммы 3.1 оно единственно в шаре  $K = K_R$ . □

С помощью леммы 1.1, из последней теоремы вытекает однозначная разрешимость исходной задачи (1.1)–(1.5).

**Теорема 3.2.** Пусть выполняются все условия теоремы 3.1, выполнены условия согласования

$$\varphi(0) = h(0), \quad \psi(0) = h'(T)$$

и

$$\frac{1}{2}(A(T)+2)T^2 < 1.$$

Тогда задача (1.1)–(1.5) имеет в шаре

$$K = K_R \left( \|z\|_{E_T^{\frac{3}{2}}} \leq R = A(T)+2 \right) \text{ из } E_T^{\frac{3}{2}}$$

единственное классическое решение.

### Заключение

В работе доказано существование и единственность решения одной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка с интегральным краевым условием второго рода.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Гордезиани, Д.Г. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды / Д.Г. Гордезиани, Г.А. Авалишвили // Мат. моделирование. – 2000. – № 12 (1). – С. 94–103.
2. Бицадзе, А.В. О некоторых простейших обобщенных линейных эллиптических задач / А.В. Бицадзе, А.А. Самарский // ДАН СССР. – 1969. – № 85 (4). – С. 739–740.
3. Гордезиани, Д.Г. Об одном методе решения краевой задачи Бицадзе – Самарского / Д.Г. Гордезиани // Докл. семинара ИПМ Тбилисского государственного университета. – 1970. – № 2. – С. 38–40.

4. Гордезиани, Д.Г. О разрешимости одной краевой задачи для нелинейного уравнения эллиптического типа / Д.Г. Гордезиани, Д.З. Джуаев // Сообщения АН ГССР. – 1972. – № 68 (4). – С. 289–292.

5. Соловьев, В.В. Обратные задачи определения источника для уравнения Пуассона на плоскости / В.В. Соловьев // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2004. – Т. 44, № 5. – С. 862–871.

6. Соловьев, В.В. Обратные задачи для эллиптических уравнений на плоскости / В.В. Соловьев // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 8. – С. 1106–1114.

7. Мегралиев, Я.Т. Обратная краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка / Я.Т. Мегралиев // Вестник Бакинского Университета. Серия физико-математических наук. – 2011. – № 2. – С. 31–39.

8. Мегралиев, Я.Т. Обратная краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка с дополнительным интегральным условием / Я.Т. Мегралиев // Вестник Удмуртского Университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2012. – Вып. 1. – С. 32–40.

9. Мегралиев, Я.Т. О разрешимости одной обратной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка / Я.Т. Мегралиев // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. – 2011. – № 23. – С. 25–38.

10. Мегралиев, Я.Т. Об одной обратной краевой задаче для эллиптического уравнения второго порядка с интегральным условием первого рода / Я.Т. Мегралиев // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 44, № 1. – С. 226–235.

11. Моисеев, Е.И. Об особенностях корневого пространства одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии / Е.И. Моисеев, Н.Ю. Капустин // Докл. РАН. – 2002. – № 385 (1). – С. 20–24.

12. Капустин, Н.Ю. О сходимости спектральных разложений функций из класса Гельдера для двух задач со спектральным параметром в граничном условии / Н.Ю. Капустин, Е.И. Моисеев // Дифференциальные уравнения. – 2000. – № 36 (8). – С. 1069–1074.

Поступила в редакцию 09.02.17.

УДК 512.542, 512.554

## О ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ЧЛЕНОВ ЦЕНТРАЛЬНЫХ РЯДОВ И ИХ СВЯЗЯХ В НЕКОТОРЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

А.А. Пыпка

Днепропетровский национальный университет им. Олеса Гончара

### ON THE NUMERICAL CHARACTERISTICS OF THE FACTORS OF THE CENTRAL SERIES AND THEIR RELATIONSHIPS IN SOME ALGEBRAIC STRUCTURES

А.А. Pypka

Oles Honchar Dnipro National University

Исследуются связи между некоторыми числовыми характеристиками членов и факторов верхнего и нижнего центральных рядов в группах и алгебрах Ли.

**Ключевые слова:** теорема Шура, теорема Бэра, специальный ранг, секционный  $p$ -ранг, верхний (нижний) центральный ряд алгебры Ли.

The relationships between some numerical characteristics of the members and factors of the upper and lower central series in groups and Lie algebras are investigated.

**Keywords:** Schur's theorem, Baer's theorem, special rank, section  $p$ -rank, upper (lower) central series of Lie algebra.

#### Введение

Изучение всевозможных связей между верхним и нижним центральными рядами в различных алгебраических структурах является одной из старейших задач в алгебре. Корни этих исследований лежат в изучении влияния таких важных подгрупп, как центр и коммутант, на структуру группы. Очевидно, что если группа  $G$  совпадает со своим центром  $\zeta(G)$ , то она абелева. Это, естественно, означает, что коммутант  $[G, G]$  группы  $G$  является единичной подгруппой. Иными словами, если центральная фактор-группа  $G/\zeta(G)$  единична, то единичной будет и подгруппа  $[G, G]$ . Этот тривиальный факт стал отправной точкой в исследовании связей между фактор-группой  $G/\zeta(G)$  и подгруппой  $[G, G]$ . В 1951 г. Б. Нейман в своей работе [1] доказал следующий важный и широко используемый результат теории бесконечных групп.

**Теорема 0.1** [1]. Пусть  $G$  – группа. Предположим, что фактор-группа  $G/\zeta(G)$  конечна. Тогда подгруппа  $[G, G]$  также конечна.

Этот результат был доказан Б. Нейманом, но парадокс состоит в том, что многие алгебраисты называют ее теоремой Шура [2].

Б. Нейман в этой же статье сформулировал следующий естественный вопрос: существует ли такая функция  $f$ , что  $|[G, G]| \leq f(|G/\zeta(G)|)$ ?

Более того, он же получил первые оценки для порядка подгруппы  $[G, G]$  в терминах порядка центральной фактор-группы  $G/\zeta(G)$ .

Среди всех последующих оценок наилучшая была получена в работе Дж. Вайголда [3]. Он получил следующий результат.

**Теорема 0.2** [3]. Пусть  $G$  – группа. Предположим, что фактор-группа  $G/\zeta(G)$  конечна и имеет порядок  $t$ . Тогда

$$(i) |[G, G]| \leq w(t), \text{ где } w(t) = t^m,$$

$$m = \frac{1}{2}(\log_2 t - 1);$$

$$(ii) \text{ если } t = p^n \text{ (} p \text{ – простое число), то}$$

$$|[G, G]| \leq p^{\frac{1}{2}n(n-1)};$$

(iii) для каждого простого числа  $p$  и каждого натурального  $n > 1$  существует  $p$ -группа  $G$ , для которой  $|G/\zeta(G)| = p^n$  и  $|[G, G]| = p^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ .

Как видно из этой теоремы, для  $p$ -групп эта оценка достигается, но в общем случае ситуация оказалась очень непростой. С момента публикации работы Дж. Вайголда прошло более 50 лет, но за это время оценка для этой функции не была улучшена. Поэтому естественно возникает вопрос о том, насколько точно функция  $w(t)$  отражает реальную картину. Возникла идея найти реальные порядки фактор-группы  $G/\zeta(G)$  и подгруппы  $[G, G]$  для различных конкретных конечных групп и сравнить их с теми значениями, которые дает функция Вайголда. Эта работа была проделана для огромного массива конечных групп. В работе [4] были приведены некоторые примеры конечных групп, для которых значения функции Вайголда довольно далеки от реальной картины. Приведем здесь некоторые

наиболее показательные из этих результатов. Но прежде отметим, что через  $(m, n)$  будем обозначать  $n$ -ю группу порядка  $m$  из библиотеки групп малых порядков *SmallGroup* системы компьютерной алгебры GAP (Groups, Algorithms and Programming).

Таблица 0.1 – Связь между  $|G/\zeta(G)|$ ,  $|[G, G]|$  и значениями функции  $w(t)$

Группа	$ G/\zeta(G) $	$ [G, G] $	$w(t)$
$(2^8, 10338)$	64	4	32768
$(3^7, 4349)$	729	27	14348907
$(5^5, 27)$	625	25	15625
$(7^5, 32)$	2401	343	117649
$(11^4, 7)$	1331	121	1331
$(13^4, 7)$	2197	169	2197

Как мы видим, значения функции Вайголда превышают даже порядок самой группы, что свидетельствует о ее несостоятельности.

Напомним, что *верхним центральным рядом* группы  $G$  называется ряд подгрупп

$$\langle 1 \rangle = \zeta_0(G) \leq \zeta_1(G) \leq \zeta_2(G) \leq \dots \leq \zeta_\alpha(G) \leq \dots \leq \zeta_{\alpha+1}(G) \leq \dots \leq \zeta_\delta(G),$$

члены которого определяются по такому правилу:  $\zeta_1(G) = \zeta(G)$  – центр группы,  $\zeta_{\alpha+1}(G)/\zeta_\alpha(G) = \zeta(G/\zeta_\alpha(G))$  для всех порядковых чисел  $\alpha$ , и

$$\zeta_\lambda(G) = \bigcup_{\mu < \lambda} \zeta_\mu(G)$$

для каждого предельного числа  $\lambda$ .

*Нижним центральным рядом* группы  $G$  мы будем называть ряд подгрупп

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \dots \geq \gamma_\alpha(G) \geq \gamma_{\alpha+1}(G) \geq \dots \geq \gamma_\nu(G),$$

члены которого определяются по такому правилу:  $\gamma_2(G) = [G, G]$  – коммутант группы,  $\gamma_{\alpha+1}(G) = [\gamma_\alpha(G), G]$  для всех порядковых чисел  $\alpha$ , и

$$\gamma_\lambda(G) = \bigcap_{\mu < \lambda} \gamma_\mu(G)$$

для каждого предельного числа  $\lambda$ .

В 1952 г. Р. Бэр в работе [5] обобщил теорему Б. Неймана, доказав такой результат.

**Теорема 0.3** [5]. Пусть  $G$  – группа. Предположим, что фактор-группа  $G/\zeta_k(G)$  конечна. Тогда подгруппа  $\gamma_{k+1}(G)$  также конечна.

Как и для теоремы Б. Неймана естественно возникает следующий вопрос: *существует ли такая функция  $g$ , что  $|\gamma_{k+1}(G)| \leq g(|G/\zeta_k(G)|, k)$ ?*

Ответ на этот вопрос был получен сравнительно недавно в работе [6].

**Теорема 0.4** [6]. Пусть  $G$  – группа. Предположим, что фактор-группа  $G/\zeta_k(G)$  конечна и имеет порядок  $t$ . Тогда существует такая функция  $g$ , что  $|\gamma_{k+1}(G)| \leq g(t, k)$ .

Отметим, что функция  $g(t, k)$  из теоремы 0.4 определяется рекуррентно:

$$g(t, 1) = w(t), g(t, 2) = w(w(t)) + t \cdot w(t),$$

$$g(t, k) = w(g(t, k-1)) + t \cdot g(t, k-1),$$

где  $w(t)$  – это функция Вайголда.

В данной работе будет проведен анализ, иллюстрирующий насколько значения функции  $g(t, k)$  близки к реальным.

Для теорем Б. Неймана и Р. Бэра были получены различные важные обобщения (см., напр., [7], [8]). Среди них имеются работы, исследующие связи между рангами фактор-группы  $G/\zeta(G)$  и подгруппы  $[G, G]$ . Напомним здесь некоторые определения.

Будем говорить, что группа  $G$  имеет *конечный специальный ранг*  $r(G) = r$ , если любая конечно порожденная подгруппа группы  $G$  может быть порождена  $r$  элементами, и  $r$  – это наименьшее натуральное число с этим свойством.

Пусть  $p$  – простое число. Будем говорить, что группа  $G$  имеет *конечный секционный  $p$ -ранг*  $sr_p(G) = r$ , если любая элементарная абелева  $p$ -секция группы  $G$  имеет конечный порядок, не превышающий  $p^r$ , и существует такая элементарная абелева  $p$ -секция  $A/B$  группы  $G$ , что  $|A/B| = p^r$ .

В работах [9] и [10] были доказаны ранговые аналоги теорем Б. Неймана и Р. Бэра для специального ранга, а в статьях [11] и [12] – ранговые аналоги теорем Б. Неймана и Р. Бэра для секционного  $p$ -ранга. В данной работе на примере некоторых конечных групп будет проведен анализ, показывающий, насколько значения функций, полученных в этих статьях, отличаются от реальных значений специальных рангов (секционных  $p$ -рангов) подгрупп  $[G, G]$  и  $\gamma_{k+1}(G)$ .

Отметим, что данная тематика актуальна не только для групп, но и для других алгебраических структур. В частности, в работе [13] были доказаны аналоги теорем Б. Неймана и Р. Бэра для алгебр Ли, а в статьях [14] и [15] были получены соответствующие функции, ограничивающие размерность подалгебр  $[L, L]$  и  $\gamma_{k+1}(L)$ , где  $L$  – это алгебра Ли. Для этой алгебраической структуры мы также проведем подобные исследования, как и для групп.

### 1 Теорема Р. Бэра и функция $g(t, k)$

Как было сказано выше, порядок  $(k+1)$ -го члена нижнего центрального ряда ограничен некоторой функцией от порядка фактор-группы по  $k$ -му члену верхнего центрального ряда и номера  $k$ . Мы приведем лишь пару наиболее показательных примеров конечных групп, которые довольно хорошо и наглядно демонстрируют, насколько сильно значения функции  $g(t, k)$  отличаются от реальной картины. В других группах ситуация

не лучше. Как и ранее, через  $(m, n)$  будем обозначать  $n$ -ю группу порядка  $m$  из библиотеки групп малых порядков *SmallGroup* системы компьютерной алгебры GAP.

Таблица 1.1 – Связь между  $|G/\zeta_k(G)|$ ,  $|\gamma_{k+1}(G)|$  и значениями функции  $g(t, k)$

Группа – (128,161)		
$ G/\zeta_1(G) =64$	$ \gamma_2(G) =32$	$g(64,1)=32768$
$ G/\zeta_2(G) =32$	$ \gamma_3(G) =16$	$g(32,2) > 35 \cdot 10^{12}$
$ G/\zeta_3(G) =16$	$ \gamma_4(G) =8$	$g(16,3) > 63 \cdot 10^{30}$
$ G/\zeta_4(G) =8$	$ \gamma_5(G) =4$	$g(8,4) > 88 \cdot 10^{34}$
$ G/\zeta_5(G) =4$	$ \gamma_6(G) =2$	$g(4,5) > 75 \cdot 10^{17}$
$ G/\zeta_6(G) =1$	$ \gamma_7(G) =1$	$g(1,6) > 10$
Группа – (384,538)		
$ G/\zeta_1(G) =64$	$ \gamma_2(G) =16$	$g(64,1)=32768$
$ G/\zeta_2(G) =32$	$ \gamma_3(G) =8$	$g(32,2) > 35 \cdot 10^{12}$
$ G/\zeta_3(G) =16$	$ \gamma_4(G) =4$	$g(16,3) > 63 \cdot 10^{30}$
$ G/\zeta_4(G) =4$	$ \gamma_5(G) =2$	$g(4,4) > 2721$
$ G/\zeta_5(G) =1$	$ \gamma_6(G) =1$	$g(1,5)=6$

## 2 Ранговые аналоги теорем Б. Неймана и Р. Бэра

В 2013 г. Л.А. Курдаченко и П. Шумяцкий [9] доказали ранговый аналог теоремы Б. Неймана для специального ранга.

**Теорема 2.1** [9]. Пусть  $G$  – конечная группа. Предположим, что фактор-группа  $G/\zeta(G)$  имеет специальный ранг  $r$ . Тогда подгруппа  $[G, G]$  имеет специальный ранг, не превосходящий  $\nu_1(r)$ , то есть  $r([G, G]) \leq \nu_1(r)$ , где

$$\nu_1(r) = \frac{r(r+1)}{2} + r^2 \alpha(\log_2 r) + r^2.$$

Отметим, что  $\alpha(x)$  обозначает наименьшее натуральное число, которое не меньше действительного числа  $x$ .

В следующей таблице приведены результаты для специального ранга. Приведем лишь некоторые примеры конечных групп, в других группах ситуация идентичная.

Таблица 2.2. – Связь между  $sr_p(G/\zeta(G))$ ,  $sr_p([G, G])$  и значениями функции  $\nu_2(r)$

Группа	(12,3)	(18,4)	(32,49)	(48,38)	(48,50)	(54,14)	(64,32)
$sr_2(G/\zeta(G))$	2	0	4	3	4	0	3
$sr_2([G, G])$	2	0	1	1	4	0	3
$\nu_2(r)$	11	0	58	33	58	0	33
$sr_3(G/\zeta(G))$	0	2	0	1	0	3	0
$sr_3([G, G])$	0	2	0	1	0	3	0
$\nu_2(r)$	0	11	0	2	0	33	0

Таблица 2.1 – Связь между  $r(G/\zeta(G))$ ,  $r([G, G])$  и значениями функции  $\nu_1(r)$

Группа	$r(G/\zeta(G))$	$r([G, G])$	$\nu_1(r)$
(6,1)	2	1	11
(12,3)	2	2	11
(18,4)	3	2	33
(32,49)	4	1	58
(48,38)	3	1	33
(48,50)	4	4	58
(54,14)	4	3	58

Как видим, по сравнению с задачей о порядках, ситуация значительно лучше, но объясняется лишь разной природой этих числовых характеристик. Более конкретно, очевидно, что при увеличении порядка группы специальный ранг далеко не всегда также увеличивается.

В 2013 г. А. Баллестер-Болинше, С. Камп-Мора, Л.А. Курдаченко и Х. Отал доказали ранговый аналог теоремы Б. Неймана для секционного  $p$ -ранга [11].

**Теорема 2.2** [11]. Пусть  $G$  – конечная группа,  $p$  – простое число. Предположим, что фактор-группа  $G/\zeta(G)$  имеет секционный  $p$ -ранг  $r$ . Тогда подгруппа  $[G, G]$  имеет секционный  $p$ -ранг, не превосходящий  $\nu_2(r)$ , то есть  $sr_p([G, G]) \leq \nu_2(r)$ , где  $\nu_2(r) = \frac{r(3r+1)}{2} + r^2 \alpha(\log_2 r)$ .

Функция  $\alpha(x)$  снова обозначает наименьшее натуральное число, которое не меньше действительного числа  $x$ .

В следующей таблице приведены результаты для секционного  $p$ -ранга.

Как видим, ситуация с секционным  $p$ -рангом в целом похожа на аналогичные расчеты для специального ранга.

Теперь перейдем к ранговым аналогам теоремы Р. Бэра.

В 2013 г. Л.А. Курдаченко и Х. Отал доказали ранговый аналог теоремы Р. Бэра для специального ранга [10].

**Теорема 2.3** [10]. Пусть  $G$  – конечная группа. Предположим, что фактор-группа  $G/\zeta_k(G)$  имеет специальный ранг  $r$ . Тогда подгруппа

$\gamma_{k+1}(G)$  имеет специальный ранг, не превосходящий  $\nu_3(r, k)$ , то есть  $r(\gamma_{k+1}(G)) \leq \nu_3(r, k)$ , где

$$\begin{aligned} \nu_3(r, 1) &= \nu_1(r), \\ \nu_3(r, 2) &= \nu_1(\nu_1(r)) + r \cdot \nu_1(r), \dots, \\ \nu_3(r, k) &= \nu_1(\nu_3(r, k-1)) + r \cdot \nu_3(r, k-1). \end{aligned}$$

В следующей таблице представлены результаты для тех же групп, что были приведены в таблице 1.1.

Таблица 2.3 – Связь между  $r(G/\zeta_k(G))$ ,  $r(\gamma_{k+1}(G))$  и значениями функции  $\nu_3(r, k)$

Группа – (128,161)		
$r(G/\zeta_1(G)) = 2$	$r(\gamma_2(G)) = 1$	$\nu_3(2, 1) = 11$
$r(G/\zeta_2(G)) = 2$	$r(\gamma_3(G)) = 1$	$\nu_3(2, 2) = 693$
$r(G/\zeta_3(G)) = 2$	$r(\gamma_4(G)) = 1$	$\nu_3(2, 3) = 5539853$
$r(G/\zeta_4(G)) = 2$	$r(\gamma_5(G)) = 1$	$\nu_3(2, 4) > 7 \cdot 10^{14}$
$r(G/\zeta_5(G)) = 2$	$r(\gamma_6(G)) = 1$	$\nu_3(2, 5) > 28 \cdot 10^{30}$
$r(G/\zeta_6(G)) = 0$	$r(\gamma_7(G)) = 0$	–
Группа – (384,538)		
$r(G/\zeta_1(G)) = 4$	$r(\gamma_2(G)) = 3$	$\nu_3(4, 1) = 58$
$r(G/\zeta_2(G)) = 3$	$r(\gamma_3(G)) = 2$	$\nu_3(3, 2) = 8283$
$r(G/\zeta_3(G)) = 3$	$r(\gamma_4(G)) = 2$	$\nu_3(3, 3) > 10^9$
$r(G/\zeta_4(G)) = 2$	$r(\gamma_5(G)) = 1$	$\nu_3(2, 4) > 10^{19}$
$r(G/\zeta_5(G)) = 0$	$r(\gamma_6(G)) = 0$	–

Как видим, для теоремы Р. Бэра ситуация становится уже критически несопоставимой с реальными значениями рангов. Отчасти это обусловлено тем, что формула рекуррентна и значения функции увеличиваются без какого-либо контроля.

Рассмотрим последнюю задачу для групп.

В 2014 г. Л.А. Курдаченко, Н.Н. Семко и А.А. Пыпка доказали ранговый аналог теоремы Р. Бэра для секционного  $p$ -ранга [12].

**Теорема 2.4** [12]. Пусть  $G$  – конечная группа,  $p$  – простое число. Предположим, что фактор-группа  $G/\zeta_k(G)$  имеет секционный  $p$ -ранг  $r$ . Тогда подгруппа  $\gamma_{k+1}(G)$  имеет секционный  $p$ -ранг, не превосходящий  $\nu_4(r, k)$ , то есть  $sr_p(\gamma_{k+1}(G)) \leq \nu_4(r, k)$ , где

$$\begin{aligned} \nu_4(r, 1) &= \nu_2(r), \\ \nu_4(r, 2) &= \nu_2(\nu_2(r)) + (\nu_2(r))^2 + \frac{r\nu_2(r)(5r+1)}{2}, \dots, \\ \nu_4(r, k) &= \nu_2(\nu_4(r, k-1)) + \\ &+ (\nu_4(r, k-1))^2 + \frac{r\nu_4(r, k-1)(5r+1)}{2}. \end{aligned}$$

Приведем лишь одну группу для примера. Рассмотрим 2-группу. В остальных случаях картина такая же.

Таблица 2.4 – Связь между  $sr_p(G/\zeta_k(G))$ ,  $sr_p(\gamma_{k+1}(G))$  и значениями функции  $\nu_4(r)$

Группа – (128,161)		
$sr_2(G/\zeta_1(G)) = 2$	$sr_2(\gamma_2(G)) = 1$	$\nu_4(2, 1) = 11$
$sr_2(G/\zeta_2(G)) = 2$	$sr_2(\gamma_3(G)) = 1$	$\nu_4(2, 2) = 913$
$sr_2(G/\zeta_3(G)) = 2$	$sr_2(\gamma_4(G)) = 1$	$\nu_4(2, 3) > 10^7$
$sr_2(G/\zeta_4(G)) = 2$	$sr_2(\gamma_5(G)) = 1$	$\nu_4(2, 4) > 28 \cdot 10^{14}$
$sr_2(G/\zeta_5(G)) = 2$	$sr_2(\gamma_6(G)) = 1$	$\nu_4(2, 5) > 4 \cdot 10^{32}$
$sr_2(G/\zeta_6(G)) = 0$	$sr_2(\gamma_7(G)) = 0$	–

### 3 Лиевы аналоги теорем Б. Неймана и Р. Бэра

Как уже было указано выше, в алгебрах Ли был доказан аналог теоремы Б. Неймана, который можно сформулировать в таком виде.

**Теорема 3.1** [14]. Пусть  $L$  – алгебра Ли над полем  $F$ . Предположим, что фактор-алгебра  $L/\zeta(L)$  имеет конечную размерность  $d$ . Тогда производный идеал  $[L, L]$  также имеет конечную размерность. Более того,

$$\dim_F([L, L]) \leq \eta_1(d) = \frac{d(d+1)}{2}.$$

Ниже приведена таблица, которая является аналогом выше приведенных результатов, для алгебр Ли. Рассматривать для примера будем только нильпотентные алгебры Ли. Через  $L_i^d(f)$  будем обозначать  $i$ -ю алгебру Ли размерности  $d$  над конечным полем из  $f$  элементов библиотеки алгебр Ли *liealgdb* системы компьютерной алгебры GAP.

Таблица 3.1 – Связь между  $\dim(L/\zeta(L))$ ,  $\dim([L, L])$  и значениями функции  $\eta_1(d)$

Алгебра Ли	$\dim(L/\zeta(L))$	$\dim([L, L])$	$\eta_1(d)$
$L_2^3(3)$	2	1	3
$L_2^3(5)$	2	1	3
$L_2^4(3)$	2	1	3
$L_3^4(3)$	3	2	6
$L_4^4(3)$	4	1	10
$L_5^4(3)$	4	2	10
$L_6^4(3)$	4	3	10

Как видим, с размерностями алгебр Ли ситуация уже не очень хорошая даже на малых размерностях, уже есть отличия на один порядок.

Последней задачей, которую мы рассмотрим, является анализ результатов для лиевского аналога теоремы Р. Бэра. Отметим, что понятия верхнего и нижнего центральных рядов алгебр Ли вводятся аналогично группам.

**Теорема 3.2** [15]. Пусть  $L$  – алгебра Ли над полем  $F$ . Предположим, что фактор-алгебра  $L/\zeta_k(L)$  имеет конечную размерность  $d$ . Тогда идеал  $\gamma_{k+1}(L)$  также имеет конечную размерность. Более того

$$\dim_F(\gamma_{k+1}(L)) \leq \eta_2(d, k) = \frac{d^{k-1}(d-1)}{2}.$$

Таблица 3.2 – Связь между  $\dim(L/\zeta_k(L))$ ,  $\dim(\gamma_{k+1}(L))$  и значениями функции  $\eta_2(d, k)$

Алгебра Ли – $L_{50}^7(5)$		
$\dim(L/\zeta_2(L)) = 4$	$\dim(\gamma_3(L)) = 4$	$\eta_2(4, 2) = 6$
$\dim(L/\zeta_3(L)) = 3$	$\dim(\gamma_4(L)) = 3$	$\eta_2(3, 3) = 9$
$\dim(L/\zeta_4(L)) = 2$	$\dim(\gamma_5(L)) = 2$	$\eta_2(4, 2) = 4$
$\dim(L/\zeta_5(L)) = 0$	$\dim(\gamma_6(L)) = 0$	$\eta_2(0, 5) = 0$

Снова-таки, как видим, уже на небольших размерностях значения функции  $\eta_2(d, k)$  в несколько раз больше реальных значений.

#### Заключение

Анализ, проведенный в данной работе, показывает, что все функции, ограничивающие либо порядки, либо ранги, либо размерности, требуют значительных улучшений, что свидетельствует об актуальности этой тематики. Более того, очевидно, что для улучшения этих функций необходимо использовать иные техники по сравнению с теми, что были использованы в теоремах 0.4, 2.1–2.4, 3.1 и 3.2.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Neumann, B.H.* Groups with finite classes of conjugate elements / B.H. Neumann // Proc. London Math. Soc. – 1951. – Vol. 1. – P. 178–187.
2. *Kurdachenko, L.A.* A brief history of an important classical theorem / L.A. Kurdachenko, I.Ya. Subbotin // Advances in Group Theory and Applications. – 2016. – Vol. 2. – P. 121–124.
3. *Wiegold, J.* Multiplicators and groups with finite central factor-groups / J. Wiegold // Math. Z. – 1965. – Vol. 89 (4). – P. 345–347.
4. *Pyрка, A.A.* On Wiegold's function / A.A. Pyрка, D.Yu. Storozhenko // 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th

anniversary of V.V. Kirichenko, July 3–7. – 2017. – P. 110.

5. *Baer, R.* Endlichkeitskriterien für Kommutatorgruppen / R. Baer // Math. Ann. – 1952. – Vol. 124. – P. 161–177.

6. *Kurdachenko, L.A.* On some properties of the upper and lower central series / L.A. Kurdachenko, I.Ya. Subbotin // Southeast Asian Bull. Math. – 2013. – Vol. 37 (4). – P. 547–554.

7. *Dixon, M.R.* The theorems of Schur and Baer: a survey / M.R. Dixon, L.A. Kurdachenko, A.A. Pyрка // International Journal of Group Theory. – 2015. – Vol. 4 (1). – P. 21–32.

8. *Kurdachenko, L.A.* On the relationships between the factors of upper and lower central series in groups and other algebraic structures / L.A. Kurdachenko, I.Ya. Subbotin // Noti di Math. – 2016. – Vol. 36 (1). – P. 35–50.

9. *Kurdachenko, L.A.* The ranks of central factor and commutator groups / L.A. Kurdachenko, P. Shumyatsky // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 2013. – Vol. 154. – P. 63–69.

10. *Kurdachenko, L.A.* The rank of the factor-group modulo the hypercenter and the rank of the same hypocenter of a group / L.A. Kurdachenko, J. Otal // Central European Journal of Mathematics. – 2013. – Vol. 11. – P. 1732–1741.

11. *Ballester-Bolinches, A.* Extension of a Schur theorem to groups with a central factor with a bounded section rank / A. Ballester-Bolinches, S. Camp-Mora, L.A. Kurdachenko, J. Otal // Journal Algebra. – 2013. – Vol. 393. – P. 1–15.

12. *Kurdachenko, L.A.* On some relationships between the upper and lower central series in finite groups / L.A. Kurdachenko, N.N. Semko, A.A. Pyрка // Proceedings of the F. Scorina Gomel State University. – 2014. – Vol. 3 (84). – P. 66–71.

13. *Stewart, I.N.* Verbal and marginal properties of non-associative algebras / I.N. Stewart // Proc. Lond. Math. Soc., III Ser. – 1974. – Vol. 28. – P. 129–140.

14. *Vaughan-Lee, M.R.* Metabelian BFC  $p$ -groups / M.R. Vaughan-Lee // J. Lond. Math. Soc., II Ser. – 1972. – Vol. 5. – P. 673–680.

15. *Kurdachenko, L.A.* Relationships between factors of canonical central series of Leibniz algebras / L.A. Kurdachenko, J. Otal, A.A. Pyрка // Eur. J. Math. – 2016. – Vol. 2. – P. 565–577.

Поступила в редакцию 30.10.17.

## ОТДЕЛИМОСТЬ РЕШЕТКИ $\tau$ -ЗАМКНУТЫХ ТОТАЛЬНО $\omega$ -НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова

Белорусский государственный университет, Минск

## SEPARABILITY OF THE LATTICE OF $\tau$ -CLOSED TOTALLY $\omega$ -SATURATED FORMATIONS OF FINITE GROUPS

V.G. Safonov, I.N. Safonova

Belarusian State University, Minsk

Пусть  $\mathfrak{X}$  – некоторый непустой класс конечных групп. Полную решетку формаций  $\theta$  называют  $\mathfrak{X}$ -отделимой, если для любого термина  $v(x_1, \dots, x_n)$  сигнатуры  $\{\cap, \vee, \theta\}$ , любых  $\theta$ -формаций  $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n$  и любой группы  $A \in \mathfrak{X} \cap v(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n)$  найдутся такие  $\mathfrak{X}$ -группы  $A_1 \in \mathfrak{F}_1, \dots, A_n \in \mathfrak{F}_n$ , что  $A \in v(\theta \text{form} A_1, \dots, \theta \text{form} A_n)$ . В частности, если  $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$  – класс всех конечных групп, то решетку формаций  $\theta$  называют  $\mathfrak{G}$ -отделимой или, кратко, отделимой. Доказано, что для любого подгруппового функтора  $\tau$  решетка  $I_{\omega_\tau}^\tau$  всех  $\tau$ -замкнутых totally  $\omega$ -насыщенных формаций является  $\mathfrak{G}$ -отделимой.

**Ключевые слова:** формация конечных групп,  $\tau$ -замкнутая формация, totally  $\omega$ -насыщенная формация, решетка формаций,  $\mathfrak{G}$ -отделимая решетка формаций.

Let  $\mathfrak{X}$  be a non-empty class of finite groups. A complete lattice  $\theta$  of formations is said to be  $\mathfrak{X}$ -separable if for every term  $v(x_1, \dots, x_n)$  of signature  $\{\cap, \vee, \theta\}$ ,  $\theta$ -formations  $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n$ , and every group  $A \in \mathfrak{X} \cap v(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n)$  exists  $\mathfrak{X}$ -groups  $A_1 \in \mathfrak{F}_1, \dots, A_n \in \mathfrak{F}_n$ , such that  $A \in v(\theta \text{form} A_1, \dots, \theta \text{form} A_n)$ . In particular, if  $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$  is the class of all finite groups then the lattice  $\theta$  of formations is said to be  $\mathfrak{G}$ -separable or, briefly, separable. It is proved that the lattice  $I_{\omega_\tau}^\tau$  of all  $\tau$ -closed totally  $\omega$ -saturated formations is  $\mathfrak{G}$ -separable for any subgroup functor  $\tau$ .

**Keywords:** formation of finite groups,  $\tau$ -closed formation, totally  $\omega$ -saturated formation, lattice of formations,  $\mathfrak{G}$ -separated lattice of formations.

### Введение

В работе рассматриваются только конечные группы. Мы придерживаемся терминологии принятой в [1], [2].

Как было показано А.Н. Скибой [2, с. 159], для любого подгруппового функтора  $\tau$  решетка  $I_n^\tau$  всех  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно насыщенных формаций является  $\mathfrak{G}$ -отделимой, а решетка разрешимых totally насыщенных формаций  $\mathfrak{S}$ -отделима. Там же был поставлен вопрос о  $\mathfrak{G}$ -отделимости решетки  $I_\infty^\tau$  [2, вопрос 4.1.17]. Положительный ответ на данный вопрос был получен В.Г. Сафоновым [3], [4]. Указанные результаты получили свое развитие в теории частично насыщенных формаций. Так, в совместной работе Л.А. Шеметкова, А.Н. Скибы и Н.Н. Воробьева [5] была установлена  $\mathfrak{G}$ -отделимость решетки  $I_{\omega_n}^\tau$  всех  $\tau$ -замкнутых  $n$ -кратно  $\omega$ -насыщенных формаций. Позднее, в работе [6] была анонсирована  $\mathfrak{G}$ -отделимость решетки  $I_\infty^\omega$  всех totally  $\omega$ -насыщенных формаций.

В данной статье мы докажем, что для любого подгруппового функтора  $\tau$  решетка  $I_{\omega_\tau}^\tau$  всех

$\tau$ -замкнутых totally  $\omega$ -насыщенных формаций является  $\mathfrak{G}$ -отделимой.

### 1 Определения и обозначения

Пусть  $\omega$  – непустое подмножество простых чисел,  $\omega'$  – дополнение к  $\omega$  во множестве всех простых чисел. Всякую функцию вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$$

называют  $\omega$ -локальным спутником. Для произвольного  $\omega$ -локального спутника  $f$  полагают

$$LF_\omega(f) = \{G \mid G/G_{\omega d} \in f(\omega') \text{ и } G/F_p(G) \in f(p)\}$$

$$\text{для всех } p \in \omega \cap \pi(G),$$

где  $G_{\omega d}$  – наибольшая нормальная в  $G$  подгруппа, у которой каждый композиционный фактор является  $\omega d$ -группой. Если формация  $\mathfrak{F}$  такова, что  $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ , то говорят, что она  $\omega$ -локальна, а  $f$  –  $\omega$ -локальный спутник этой формации. Формацию  $\mathfrak{F}$  называют  $\omega$ -насыщенной, если ей принадлежит всякая группа  $G$  с  $G/L \in \mathfrak{F}$ , где  $L \subseteq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$ . Как известно [1] формация  $\mathfrak{F}$  является  $\omega$ -насыщенной тогда и только тогда, когда она  $\omega$ -локальна.

Всякую формацию считают 0-кратно  $\omega$ -насыщенной. При  $n \geq 1$  формацию  $\mathfrak{F}$  называют  $n$ -кратно  $\omega$ -насыщенной, если  $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ , где все значения  $f$  являются  $(n-1)$ -кратно  $\omega$ -насыщенными формациями. Формацию  $\mathfrak{F}$  называют тотально  $\omega$ -насыщенной, если она  $n$ -кратно  $\omega$ -насыщенна для всех  $n$ .

Подгрупповым функтором называют отображение  $\tau$  сопоставляющее каждой группе  $G$  такую систему ее подгрупп  $\tau(G)$ , что: 1)  $G \in \tau(G)$ ; 2) для любых групп  $H \in \tau(A)$  и  $T \in \tau(B)$  и любого эпиморфизма  $\varphi: A \rightarrow B$  имеет место  $H^\varphi \in \tau(B)$  и  $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$ .

Тотально  $\omega$ -насыщенную формацию  $\mathfrak{F}$  называют  $\tau$ -замкнутой, если  $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$  для любой группы  $G \in \mathfrak{F}$ . Через  $I_{\omega_x}^\tau$  обозначают множество всех  $\tau$ -замкнутых тотально  $\omega$ -насыщенных формаций. Формации из  $I_{\omega_x}^\tau$  называют  $I_{\omega_x}^\tau$ -формациями. Для любого множества групп  $\mathfrak{X}$  через  $I_{\omega_x}^\tau \text{form} \mathfrak{X}$  обозначают пересечение всех  $I_{\omega_x}^\tau$ -формаций, содержащих  $\mathfrak{X}$ . Для любых  $\tau$ -замкнутых тотально  $\omega$ -насыщенных формаций  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{H}$  через  $\mathfrak{M} \vee_{\omega_x}^\tau \mathfrak{H}$  обозначают пересечение всех тотально  $\omega$ -насыщенных формаций, содержащих  $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H}$ , т. е.  $\mathfrak{M} \vee_{\omega_x}^\tau \mathfrak{H} = I_{\omega_x}^\tau \text{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$ . Относительно операций  $\vee_{\omega_x}^\tau$  и  $\cap$  множество  $I_{\omega_x}^\tau$ , частично упорядоченное по включению, образует полную решетку формаций.

$\omega$ -Локальный спутник все значения которого –  $I_{\omega_x}^\tau$ -формации называют  $I_{\omega_x}^\tau$ -значным спутником. Для произвольной  $\tau$ -замкнутой тотально  $\omega$ -насыщенной формации  $\mathfrak{F}$  через  $\mathfrak{F}_{\omega_x}^\tau$  обозначают ее минимальный внутренний  $I_{\omega_x}^\tau$ -значный спутник.

Пусть  $\mathfrak{X}$  – произвольная совокупность групп,  $p$  – простое число. Тогда полагают

$$\mathfrak{X}(F_p) = \text{form}(G / F_p(G) \mid G \in \mathfrak{X}),$$

если  $p \in \pi(\mathfrak{X})$  и  $\mathfrak{X}(F_p) = \emptyset$ , если  $p \notin \pi(\mathfrak{X})$ .

Полную решетку формаций  $\theta$  называют индуктивной, если для любого набора  $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$  формаций  $\mathfrak{F}_i \in \theta^\omega$  и для всякого набора  $\{f_i \mid i \in I\}$  внутренних  $\theta$ -значных  $\omega$ -локальных спутников, где  $f_i$  –  $\omega$ -локальный спутник формации  $\mathfrak{F}_i$ , имеет место

$$\vee_{\theta^\omega}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = LF_\omega(\vee_\theta(f_i \mid i \in I)).$$

Пусть  $\mathfrak{X}$  – некоторый непустой класс групп. Полную решетку формаций  $\theta$  называют  $\mathfrak{X}$ -отделимой, если для любого термина  $\vee(x_1, \dots, x_n)$

сигнатуры  $\{\cap, \vee_\theta\}$ , любых  $\theta$ -формаций  $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n$  и любой группы  $A \in \mathfrak{X} \cap \vee(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n)$  найдутся такие  $\mathfrak{X}$ -группы  $A_1 \in \mathfrak{F}_1, \dots, A_n \in \mathfrak{F}_n$ , что

$$A \in \vee(\theta \text{form} A_1, \dots, \theta \text{form} A_n).$$

## 2 Вспомогательные результаты

**Лемма 2.1** [1]. Если  $\mathfrak{F} = \theta^\omega \text{form}(\mathfrak{X})$  и  $f$  – минимальный  $\omega$ -локальный  $\theta$ -значный спутник формации  $\mathfrak{F}$ , то справедливы следующие утверждения:

$$1) f(\omega') = \theta \text{form}(G / G_{\omega'} \mid G \in \mathfrak{X});$$

$$2) f(p) = \theta \text{form}(\mathfrak{X}(F_p)) \text{ для всех } p \in \omega;$$

3) если  $\mathfrak{F} = LF_\omega(h)$ , спутник  $h$   $\theta$ -значен и  $p$  – некоторое фиксированное число из  $\omega$ , то  $\mathfrak{F} = LF_\omega(f_1)$ , где  $f_1(a) = h(a)$  при любом  $a \in (\omega \setminus \{p\}) \cup \{\omega'\}$  и  $f_1(p) = \theta \text{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1)$ , кроме того,  $f_1(p) = f(p)$ ;

4)  $\mathfrak{F} = LF_\omega(h)$ , где  $h(\omega') = \mathfrak{F}$  и  $h(p) = f(p)$  при всех  $p \in \omega$ .

**Лемма 2.2** [1]. Пусть формация  $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ , где  $\mathfrak{H} = LF_\omega(h)$ ,  $\mathfrak{M} = LF_\omega(m)$  и спутники  $h$  и  $m$  являются внутренними. Тогда формация  $\mathfrak{F}$   $\omega$ -локальна и  $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ , где  $f(\omega') = \mathfrak{F}$  и

$$f(p) = \begin{cases} m(p)\mathfrak{H}, & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{M}) \cap \omega, \\ h(p), & \text{если } p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{M}). \end{cases}$$

**Лемма 2.3** [7]. Пусть  $\mathfrak{M}$  – непустая наследственная формация,  $\mathfrak{F}$  – непустая  $\tau$ -замкнутая формация. Тогда  $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$  –  $\tau$ -замкнутая формация.

**Лемма 2.4** [8]. Всякая частичная алгебра формаций и всякая частичная алгебра классов Фиттинга, содержащая все классы Локетта, являются индуктивными решетками.

**Лемма 2.5** [2, с. 162]. Пусть  $\theta$  – индуктивная решетка формаций,  $\vee(x_1, \dots, x_m)$  – терм сигнатуры  $\{\cap, \vee_\theta\}$ ,  $f_i$  – внутренний  $\theta$ -значный спутник формации  $\mathfrak{F}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Тогда

$$\vee(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m) = LF(\overline{\vee}(f_1, \dots, f_m)).$$

**Лемма 2.6** [1]. Если  $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$  и  $G/O_p(G) \in \mathfrak{F} \cap f(p)$  для некоторого  $p \in \omega$ , то  $G \in \mathfrak{F}$ .

**Лемма 2.7** [2]. Решетка  $I_n^\tau \mathfrak{G}$ -отделима, а решетка разрешимых тотально насыщенных формаций  $\mathfrak{S}$ -отделима.

**Лемма 2.8** [2, с. 152]. Пусть  $N_1 \times \dots \times N_{i-1} \times \dots \times N_{i+1} \times \dots \times N_k = \text{Soc}(G)$ , где  $k > 1$  и  $G$  – группа с  $O_p(G) = 1$ . Пусть  $M_i$  – наибольшая нормальная в  $G$  группа, содержащая  $N_1 \times \dots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \dots \times N_k$ , но не содержащая  $N_i$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) для любого  $i \in \{1, \dots, k\}$  факторгруппа  $G/M_i$  монолитична и ее монолит  $N_i M_i / M_i$   $G$ -изоморфен  $N_i$  и  $O_p(G/M_i) = 1$ ;

$$2) M_1 \cap \dots \cap M_k = 1.$$

### 3 Основной результат

**Лемма 3.1.** Пусть  $\mathfrak{F} = I_{\omega_\pi}^\tau \text{form}(\mathfrak{X})$ , где  $\mathfrak{X}$  – непустой класс групп. Тогда если  $f$  – минимальный  $I_{\omega_\pi}^\tau$ -значный спутник формации  $\mathfrak{F}$ , то справедливы следующие утверждения:

$$1) f(\omega') = I_{\omega_\pi}^\tau \text{form}(G/G_{\text{од}} \mid G \in \mathfrak{X});$$

$$2) f(p) = I_{\omega_\pi}^\tau \text{form}(\mathfrak{X}(F_p)) \text{ для всех } p \in \omega;$$

3) если  $h$  – произвольный  $I_{\omega_\pi}^\tau$ -значный спутник формации  $\mathfrak{F}$  и  $p$  – некоторое фиксированное число из  $\omega$ , то  $\mathfrak{F} = LF_\omega(f_1)$ , где  $f_1(a) = h(a)$  для всех  $a \in (\omega \setminus \{p\}) \cup \{\omega'\}$ ,

$$f_1(p) = I_{\omega_\pi}^\tau \text{form}(G \mid G \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1),$$

кроме того,  $f_1(p) = f(p)$ .

*Доказательство.* Утверждение леммы 3.1 является следствием леммы 2.1, поскольку  $I_{\omega_\pi}^\tau$  образует полную решетку формаций и, очевидно,  $(I_{\omega_\pi}^\tau)^\omega = I_{\omega_\pi}^\tau$ .  $\square$

**Лемма 3.2** [3]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустая  $\tau$ -замкнутая формация,  $\pi$  – такое множество простых чисел, что  $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega \subseteq \pi$ . Тогда произведение  $\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F}$  является  $\tau$ -замкнутой тотально  $\omega$ -насыщенной формацией.

*Доказательство.* Покажем прежде, что формация  $\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F}$  является тотально  $\omega$ -насыщенной. Пусть  $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F}$  и  $G/L \in \mathfrak{M}$ , где  $L \subseteq \Phi(G) \cap O_\omega(G)$ . Поскольку  $\pi(G/\Phi(G)) = \pi(G)$ , то  $\pi(G/L) = \pi(G)$  и  $\pi(L) \subseteq \pi(G/L) \cap \omega \subseteq \pi(\mathfrak{M}) \cap \omega$ . Понятно, что  $\pi(\mathfrak{M}) = \pi \cup \pi(\mathfrak{F})$ . Поэтому, а также ввиду условия  $\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega \subseteq \pi$ , имеем

$$\begin{aligned} \pi(\mathfrak{M}) \cap \omega &= (\pi \cup \pi(\mathfrak{F})) \cap \omega = \\ &= (\pi \cap \omega) \cup (\pi(\mathfrak{F}) \cap \omega) = \pi \cap \omega. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\pi(L) \subseteq \pi$ . Значит,  $G^{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{N}_\pi$ . Но тогда  $G \in \mathfrak{N}_\pi \mathfrak{M}$ . Однако,  $\mathfrak{N}_\pi \mathfrak{M} = \mathfrak{N}_\pi(\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F}) = \mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F} = \mathfrak{M}$ . Поэтому  $G \in \mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{M}$  –  $\omega$ -насыщенная формация. Так как  $\mathfrak{N}_\pi$  – тотально насыщенная формация, то она является тотально  $\omega$ -насыщенной формацией. Согласно лемме 3.1 формация  $\mathfrak{N}_\pi$  имеет такой  $\omega$ -локальный спутник  $t$ , что  $t(\omega') = \mathfrak{N}_\pi$ ,  $t(p) = (1)$  при  $p \in \omega \cap \pi$  и  $t(p) = \emptyset$  при  $p \in \omega \setminus \pi$ .

Поскольку  $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_\pi \mathfrak{M}$ , то по лемме 2.2 формация  $\mathfrak{M}$  имеет такой  $\omega$ -локальный спутник  $t$ ,

что  $t(\omega') = \mathfrak{M}$  и  $t(p) = t(p)\mathfrak{M} = (1)\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$  при  $p \in \omega \cap \pi$  и  $t(p) = \emptyset$  при  $p \in \omega \setminus \pi$ . Поэтому  $\mathfrak{M}$  –  $n$ -кратно  $\omega$ -насыщенная формация для любого натурального  $n$ . Следовательно,  $\mathfrak{M}$  – тотально  $\omega$ -насыщенная формация.  $\tau$ -Замкнутость формации  $\mathfrak{S}_\pi \mathfrak{F}$  получаем, применяя лемму 2.3.  $\square$

**Лемма 3.3.** Пусть  $\mathfrak{F}_i \in I_{\omega_\pi}^\tau$ , где  $i \in I$ . Тогда  $f = \bigvee_{i \in I}^\tau (\mathfrak{F}_{i\omega_\pi}^\tau \mid i \in I)$  – минимальный  $I_{\omega_\pi}^\tau$ -значный спутник формации  $\mathfrak{F} = \bigvee_{i \in I}^\tau (\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathfrak{X} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ . Тогда по лемме 3.1 имеем

$$\mathfrak{F}_{\omega_\pi}^\tau(\omega') = I_{\omega_\pi}^\tau \text{form}(G/G_{\text{од}} \mid G \in \mathfrak{X}) \text{ и}$$

$$\mathfrak{F}_{\omega_\pi}^\tau(p) = I_{\omega_\pi}^\tau \text{form}(\mathfrak{X}(F_p)) \text{ для всех } p \in \omega.$$

Покажем, что  $f(a) = \mathfrak{F}_{\omega_\pi}^\tau(a)$  при любом  $a \in \omega \cup \{\omega'\}$ . Пусть  $p \in \pi(\mathfrak{F}) \cap \omega$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{\omega_\pi}^\tau(p) &= I_{\omega_\pi}^\tau \text{form}(G/F_p(G) \mid G \in \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i) = \\ &= I_{\omega_\pi}^\tau \text{form}(\bigcup_{i \in I} I_{\omega_\pi}^\tau \text{form}(G/F_p(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i)) = \\ &= I_{\omega_\pi}^\tau \text{form}(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_{i\omega_\pi}^\tau(p)) = f(p). \end{aligned}$$

Пусть теперь  $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{F})$ . Тогда  $\mathfrak{F}_{\omega_\pi}^\tau(p) = \emptyset$ . Кроме того, поскольку  $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$ , то для любого  $i \in I$  имеем  $p \notin \pi(\mathfrak{F}_i)$ . Поэтому  $\mathfrak{F}_{i\omega_\pi}^\tau(p) = \emptyset$ . Следовательно,  $f(p) = \emptyset$ .

Покажем теперь, что  $\mathfrak{F}_{\omega_\pi}^\tau(\omega') = f(\omega')$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{\omega_\pi}^\tau(\omega') &= I_{\omega_\pi}^\tau \text{form}(G/G_{\text{од}} \mid G \in \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i) = \\ &= I_{\omega_\pi}^\tau \text{form}(\bigcup_{i \in I} I_{\omega_\pi}^\tau \text{form}(G/G_{\text{од}} \mid G \in \mathfrak{F}_i)) = \\ &= I_{\omega_\pi}^\tau \text{form}(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_{i\omega_\pi}^\tau(\omega')) = f(\omega'). \end{aligned}$$

Таким образом,  $\mathfrak{F}_{\omega_\pi}^\tau = f$ .  $\square$

**Лемма 3.4.** Решетка  $I_{\omega_\pi}^\tau$  всех  $\tau$ -замкнутых тотально  $\omega$ -насыщенных формаций является частичной алгеброй формаций.

*Доказательство.* Пусть  $p$  – произвольное простое число,  $\mathfrak{H}$  –  $\tau$ -замкнутая тотально  $\omega$ -насыщенная формация. По лемме 2.3 формация  $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_p \mathfrak{H}$  также является  $\tau$ -замкнутой формацией. Покажем, что формация  $\mathfrak{M}$  является тотально  $\omega$ -насыщенной.

Пусть  $p \in \omega$ . Тогда согласно лемме 3.1 формация  $\mathfrak{N}_p$  имеет такой внутренний  $\omega$ -локальный спутник  $t$ , что  $t(p) = (1)$ ,  $t(\omega') = (1)$  и  $t(q) = \emptyset$  для всех  $q \in \omega \setminus \{p\}$ . Ввиду леммы 2.2 формация  $\mathfrak{M}$  имеет  $\omega$ -локальный спутник  $f$ , удовлетворяющий условиям:  $f(p) = \mathfrak{H}$ ,  $f(\omega') = \mathfrak{M}$  и  $f(q) = h(q)$  для любого  $q \in \omega \setminus \{p\}$ . Поскольку

$\mathfrak{H} \in I_{\omega_x}^{\tau}$ , то  $\mathfrak{M}$  является  $n$ -кратно  $\omega$ -насыщенной для любого натурального  $n$ . Следовательно,  $\mathfrak{M}$  – тотально  $\omega$ -насыщенная формация.

Пусть теперь  $p \notin \omega$ . По лемме 3.1 формация  $\mathfrak{N}_p$  имеет такой  $\omega$ -локальный спутник  $m$ , что  $m(q) = \emptyset$  для всех  $q \in \omega$  и  $m(\omega') = \mathfrak{N}_p$ . Тогда, согласно лемме 2.2 формация  $\mathfrak{M}$  имеет  $\omega$ -локальный спутник  $f$ , такой, что  $f(q) = h(q)$  для любого  $q \in \omega$  и  $f(\omega') = \mathfrak{M}$ . Следовательно,  $\mathfrak{M}$  – тотально  $\omega$ -насыщенная формация.  $\square$

Из лемм 2.4 и 3.4 вытекает

**Лемма 3.5.** Решетка  $I_{\omega_x}^{\tau}$  индуктивна.

Из лемм 2.5 и 3.5 следует

**Лемма 3.6.** Пусть  $\nu(x_1, \dots, x_n)$  – терм сигнатуры  $\{\cap, \vee_{\omega_x}^{\tau}\}$ ,  $f_i$  – внутренний  $I_{\omega_x}^{\tau}$ -значный спутник формации  $\mathfrak{F}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тогда

$$\nu(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n) = LF_{\omega}(\nu(f_1, \dots, f_n)).$$

**Лемма 3.7.** Пусть  $\nu(x_1, \dots, x_n)$  – терм сигнатуры  $\{\cap, \vee_{\omega_x}^{\tau}\}$ . Тогда для любых  $\tau$ -замкнутых тотально  $\omega$ -насыщенных формаций  $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n$  и всякого непустого подмножества простых чисел  $\pi \subseteq \omega$  имеет место равенство

$$\nu(\mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{F}_n) = \mathfrak{N}_{\pi}\nu(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n).$$

*Доказательство.* Проведем индукцию по числу  $t$  вхождений символов  $\{\cap, \vee_{\omega_x}^{\tau}\}$  в терм  $\nu$ . Утверждение леммы очевидно, если  $t = 0$ . Пусть  $t = 1$ ,  $\mathcal{L}_1 = \mathfrak{N}_{\pi}(\mathfrak{M} \vee_{\omega_x}^{\tau} \mathfrak{H})$ ,  $\mathcal{L}_2 = \mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{M} \vee_{\omega_x}^{\tau} \mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{H}$ . Поскольку  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{H}$  содержатся в  $\mathfrak{M} \vee_{\omega_x}^{\tau} \mathfrak{H}$ , то  $\mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_{\pi}(\mathfrak{M} \vee_{\omega_x}^{\tau} \mathfrak{H}) = \mathcal{L}_1$ , откуда следует  $\mathcal{L}_2 = \mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{M} \vee_{\omega_x}^{\tau} \mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{H} \subseteq \mathcal{L}_1$ .

Допустим, что  $\mathcal{L}_1 \setminus \mathcal{L}_2 \neq \emptyset$  и пусть  $A$  – группа минимального порядка из  $\mathcal{L}_1 \setminus \mathcal{L}_2$ . Тогда  $A$  –  $\tau$ -минимальная монолитическая группа и  $P = \text{Soc}(A) = A^{\mathcal{L}_2}$ .

Если  $P$  – неабелева группа или абелева  $p'$ -группа, то  $A \in \mathfrak{M} \vee_{\omega_x}^{\tau} \mathfrak{H} \subseteq \mathcal{L}_2$ . Противоречие. Значит,  $P$  – абелева  $p$ -группа, где  $p \in \pi$ . Так как  $\mathcal{L}_2$  –  $\omega$ -насыщенная формация и  $p \in \omega$ , то  $P \not\subseteq \Phi(A)$ . Поэтому  $P = F_p(A) = O_p(A)$ .

Согласно лемме 3.1 формация  $\mathfrak{N}_{\pi}$  имеет такой внутренний  $\omega$ -локальный спутник  $n$ , что  $n(q) = (1)$  для любого  $q \in \pi$ . Тогда по лемме 2.2 формации  $\mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{H}$  и  $\mathcal{L}_1$  имеют такие  $\omega$ -локальные спутники  $m$ ,  $h$  и  $l_1$  соответственно, что  $m(q) = \mathfrak{M}$ ,  $h(q) = \mathfrak{H}$  и  $l_1(q) = \mathfrak{M} \vee_{\omega_x}^{\tau} \mathfrak{H}$  для всякого  $q \in \pi$ . Ввиду леммы 3.5 формация  $\mathcal{L}_2$  имеет

такой  $I_{\omega_x}^{\tau}$ -значный  $\omega$ -локальный спутник  $l_2$ , что  $l_2(q) = m(q) \vee_{\omega_x}^{\tau} h(q) = \mathfrak{M} \vee_{\omega_x}^{\tau} \mathfrak{H}$ , где  $q \in \pi$ . Следовательно,  $l_1(q) = l_2(q)$  для любого  $q \in \pi$ . Поскольку  $A \in \mathcal{L}_1$  и  $p \in \pi$ , то  $A/O_p(A) = A/F_p(A) \in l_1(p)$ . Значит,  $A/O_p(A) \in l_2(p) \subseteq \mathcal{L}_2$ . Но тогда ввиду леммы 2.6 имеем  $A \in \mathcal{L}_2$ . Получили противоречие.

Положим теперь  $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{N}_{\pi}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$  и  $\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{H}$ . Так как  $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}$ , то  $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{N}_{\pi}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{N}_{\pi}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{H}$ , значит,  $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_2$ .

Допустим теперь, что  $\mathfrak{X}_2 \setminus \mathfrak{X}_1 \neq \emptyset$  и  $B$  – группа минимального порядка из  $\mathfrak{X}_2 \setminus \mathfrak{X}_1$ . Тогда  $B$  –  $\tau$ -минимальная монолитическая группа и  $P = \text{Soc}(B) = B^{\mathfrak{X}_1}$ .

Если  $P$  – неабелева группа или абелева  $p'$ -группа, то из  $B \in \mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{H}$  следует,  $B \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ . Поэтому  $B \in \mathfrak{X}_1$ . Противоречие. Значит,  $P$  – абелева  $p$ -группа, где  $p \in \pi$ . Поскольку  $\mathfrak{X}_1$  –  $\omega$ -насыщенная формация и  $p \in \pi \subseteq \omega$ , то  $P \not\subseteq \Phi(A)$ . Поэтому  $P = F_p(B)$  и  $B = [P]H$  для некоторой максимальной подгруппы  $H$  из  $B$ . Так как  $B \in \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{H}$  и  $P = \text{Soc}(B)$ , то  $H \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$ . Отсюда  $B^{\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}} \in \mathfrak{N}_{\pi}$ . Тогда  $B \in \mathfrak{N}_{\pi}(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{X}_1$ . Получили противоречие. Значит,  $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2$ .

Пусть теперь  $t > 1$  и предположим, что лемма верна для всякого терма с меньшим числом символов из  $\{\vee_{\omega_x}^{\tau}, \cap\}$ . Пусть  $\nu$  имеет вид

$$\nu_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}) \Delta \nu_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_s}),$$

где  $\Delta \in \{\vee_{\omega_x}^{\tau}, \cap\}$  и  $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\} \cup \{x_{j_1}, \dots, x_{j_s}\} = \{x_1, \dots, x_n\}$ . По индуктивному предположению для термов  $\nu_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$  и  $\nu_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_s})$  утверждение леммы верно. Поэтому

$$\nu_1(\mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{F}_{i_r}) = \mathfrak{N}_{\pi}\nu_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_r}),$$

$$\nu_2(\mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{F}_{j_s}) = \mathfrak{N}_{\pi}\nu_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_s}).$$

Значит,

$$\begin{aligned} \nu(\mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{F}_n) &= \\ &= \nu_1(\mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{F}_{i_r}) \Delta \nu_2(\mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{N}_{\pi}\mathfrak{F}_{j_s}) = \\ &= \mathfrak{N}_{\pi}\nu_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_r}) \Delta \mathfrak{N}_{\pi}\nu_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_s}) = \\ &= \mathfrak{N}_{\pi}(\nu_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_r}) \Delta \nu_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_s})) = \\ &= \mathfrak{N}_{\pi}\nu(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n). \end{aligned} \quad \square$$

**Лемма 3.8.** Пусть  $\nu(x_1, \dots, x_n)$  – терм сигнатуры  $\{\cap, \vee_{\omega_x}^{\tau}\}$ ,  $\mathfrak{X}_i$  и  $\mathfrak{F}_i$  – такие  $I_{\omega_x}^{\tau}$ -формации, что  $\mathfrak{X}_i \subseteq \mathfrak{F}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тогда

$$\nu(\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_n) \subseteq \nu(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n).$$

*Доказательство.* Проведем индукцию по числу  $t$  вхождений символов  $\{\cap, \vee_{\omega_x}^{\tau}\}$  в терм  $\upsilon$ . Утверждение леммы очевидно, если  $t = 0$  или  $1$ .

Пусть  $t > 1$  и лемма верна для всякого терма с меньшим числом символов из  $\{\cap, \vee_{\omega_x}^{\tau}\}$ . Пусть терм  $\upsilon$  имеет вид  $\upsilon_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}) \Delta \upsilon_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_s})$ , где  $\Delta \in \{\cap, \vee_{\omega_x}^{\tau}\}$  и  $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\} \cup \{x_{j_1}, \dots, x_{j_s}\} = \{x_1, \dots, x_n\}$ .

Положим

$$\mathfrak{M}_1 = \upsilon_1(\mathfrak{X}_{i_1}, \dots, \mathfrak{X}_{i_r}), \mathfrak{M}_2 = \upsilon_2(\mathfrak{X}_{j_1}, \dots, \mathfrak{X}_{j_s}),$$

$$\mathfrak{H}_1 = \upsilon_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_r}), \mathfrak{H}_2 = \upsilon_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_s}).$$

По индуктивному предположению для термов  $\upsilon_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$  и  $\upsilon_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_s})$  утверждение леммы верно, тогда  $\mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{H}_i$ ,  $i = 1, 2$ . Если  $\Delta = \cap$ , то  $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2$ . Аналогично, если  $\Delta = \vee_{\omega_x}^{\tau}$ , то  $\mathfrak{M}_1 \vee_{\omega_x}^{\tau} \mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{H}_1 \vee_{\omega_x}^{\tau} \mathfrak{H}_2$ . Поэтому  $\mathfrak{M}_1 \Delta \mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{H}_1 \Delta \mathfrak{H}_2$ . Значит, выполняются включения

$$\begin{aligned} \upsilon_1(\mathfrak{X}_{i_1}, \dots, \mathfrak{X}_{i_r}) \Delta \upsilon_2(\mathfrak{X}_{j_1}, \dots, \mathfrak{X}_{j_s}) &\subseteq \\ &\subseteq \upsilon_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_r}) \Delta \upsilon_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_s}), \\ \upsilon(\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_n) &\subseteq \upsilon(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n). \quad \square \end{aligned}$$

**Теорема 3.9.** Решетка  $I_{\omega_x}^{\tau}$  всех  $\tau$ -замкнутых тотально  $\omega$ -насыщенных формаций является  $\mathfrak{E}$ -отделимой.

*Доказательство.* Предположим противное, и пусть группа  $G$  – контрпример минимального порядка. Тогда найдутся терм  $\upsilon(x_1, \dots, x_n)$  сигнатуры  $\{\cap, \vee_{\omega_x}^{\tau}\}$  и  $I_{\omega_x}^{\tau}$ -формации  $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n$ , такие, что  $G \in \upsilon(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n)$ , но нет групп  $A_1, \dots, A_n$  таких, что  $A_i \in \mathfrak{F}_1, \dots, A_n \in \mathfrak{F}_n$  и

$$G \in \upsilon(I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } A_1, \dots, I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } A_n).$$

Заметим, что  $\Phi(G) \cap O_{\omega}(G) = 1$ . Действительно, если  $\Phi(G) \cap O_{\omega}(G) \neq 1$ , то в силу индуктивного предположения для группы  $G / (\Phi(G) \cap O_{\omega}(G))$  утверждение теоремы верно. Поскольку  $G \in \upsilon(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n)$  и  $\upsilon(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n)$  – формация, то  $G / (\Phi(G) \cap O_{\omega}(G)) \in \upsilon(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n)$ . Значит, найдутся такие группы  $B_1 \in \mathfrak{F}_1, \dots, B_n \in \mathfrak{F}_n$ , что

$$G / (\Phi(G) \cap O_{\omega}(G)) \in \upsilon(I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } B_1, \dots, I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } B_n).$$

В силу  $\omega$ -насыщенности формации

$$\upsilon(I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } B_1, \dots, I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } B_n)$$

имеет место  $G \in \upsilon(I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } B_1, \dots, I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } B_n)$ .

Противоречие. Таким образом,  $\Phi(G) \cap O_{\omega}(G) = 1$ .

Пусть  $\mathfrak{M} = \upsilon(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n)$ . Покажем, что утверждение теоремы верно, если в терм  $\upsilon$  входит всего один символ. Действительно, если  $G \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$ , то  $G \in \mathfrak{F}_i$ ,  $i = 1, 2$ . Значит,

$$G \in I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } G \cap I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } G.$$

Пусть  $G \in \mathfrak{F}_1 \vee_{\omega_x}^{\tau} \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{M}$ . Предположим, что  $G$  – монолитическая группа.

Пусть  $P = \text{Soc}(G)$  – абелева группа или абелева  $\omega'$ -группа. Тогда ввиду леммы 3.2 формация  $\mathfrak{S}_{\pi} \tau \text{ form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) \in I_{\omega_x}^{\tau}$  и  $G \in \mathfrak{F}_1 \vee_{\omega_x}^{\tau} \mathfrak{F}_2 \subseteq \subseteq \mathfrak{S}_{\pi} \tau \text{ form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$ . Из последнего включения следует, что  $G \in \tau \text{ form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) = \mathfrak{F}_1 \vee^{\tau} \mathfrak{F}_2$ . По лемме 2.7 найдутся такие группы  $A_1 \in \mathfrak{F}_1$  и  $A_2 \in \mathfrak{F}_2$ , что  $G \in \tau \text{ form } A_1 \vee^{\tau} \tau \text{ form } A_2 \subseteq I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } A_1 \vee_{\omega_x}^{\tau} I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } A_2$ .

Пусть теперь  $P$  – абелева  $p$ -группа для некоторого простого числа  $p \in \omega$ . Поскольку  $\Phi(G) \cap O_{\omega}(G) = 1$ , то  $P \not\subseteq \Phi(G)$  и  $P = C_G(P) = = O_p(G) = F_p(G)$ . Так как  $G \in \mathfrak{M}$ , в силу леммы 3.1 имеем  $G / P = G / F_p(G) \in \mathfrak{M}_{\omega_x}^{\tau}(p)$ . По лемме 3.3 справедливо равенство  $\mathfrak{M}_{\omega_x}^{\tau}(p) = \mathfrak{F}_{1\omega_x}^{\tau}(p) \vee_{\omega_x}^{\tau} \mathfrak{F}_{2\omega_x}^{\tau}(p)$ . Поскольку  $|G / F_p(G)| < |G|$ , то по индукции для группы  $G / F_p(G)$  теорема верна. Поэтому найдутся такие группы  $D_1 \in \mathfrak{F}_{1\omega_x}^{\tau}(p)$  и  $D_2 \in \mathfrak{F}_{2\omega_x}^{\tau}(p)$ , что

$$G / F_p(G) \in I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } D_1 \vee_{\omega_x}^{\tau} I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } D_2.$$

Пусть  $C_i = D_i / O_p(D_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Тогда

$$I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } D_i \subseteq \mathfrak{N}_p I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } C_i, \quad i = 1, 2, \text{ и}$$

$$\begin{aligned} I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } D_1 \vee_{\omega_x}^{\tau} I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } D_2 &\subseteq \\ &\subseteq \mathfrak{N}_p I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } C_1 \vee_{\omega_x}^{\tau} \mathfrak{N}_p I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } C_2. \end{aligned}$$

По лемме 3.7 имеет место равенство

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_p I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } C_1 \vee_{\omega_x}^{\tau} \mathfrak{N}_p I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } C_2 &= \\ = \mathfrak{N}_p (I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } C_1 \vee_{\omega_x}^{\tau} I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } C_2). \end{aligned}$$

Значит,

$$G / P = G / F_p(G) \in \mathfrak{N}_p (I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } C_1 \vee_{\omega_x}^{\tau} I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } C_2).$$

Так как  $P = O_p(G)$ , то  $O_p(G / P) = 1$ . Поэтому  $G / P \in I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } C_1 \vee_{\omega_x}^{\tau} I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } C_2$ .

Пусть  $R_i = Z_p \wr C_i = [K_i]C_i$ , где  $Z_p$  – группа порядка  $p$ ,  $K_i$  – база сплетения групп  $Z_p$  и  $C_i$ ,  $i = 1, 2$ . Понятно, что  $O_p(R_i) = F_p(R_i) = K_i$ . Так как  $R_i / O_p(R_i) \simeq C_i \in I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } D_i \subseteq \mathfrak{F}_{i\omega_x}^{\tau}(p)$ , в силу леммы 2.6 имеем  $R_i \in \mathfrak{F}_i$ . Пусть далее  $\mathfrak{X}_i = I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } R_i$ ,  $i = 1, 2$  и  $\mathcal{L} = \mathfrak{X}_1 \vee_{\omega_x}^{\tau} \mathfrak{X}_2$ . По лемме 3.3  $\mathcal{L}_{\omega_x}^{\tau} = \mathfrak{X}_{1\omega_x}^{\tau} \vee_{\omega_x}^{\tau} \mathfrak{X}_{2\omega_x}^{\tau}$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\omega_x}^{\tau}(p) &= \mathfrak{X}_{1\omega_x}^{\tau}(p) \vee_{\omega_x}^{\tau} \mathfrak{X}_{2\omega_x}^{\tau}(p) = \\ &= I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form}(R_1 / F_p(R_1)) \vee_{\omega_x}^{\tau} I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form}(R_2 / F_p(R_2)) = \\ &= I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } C_1 \vee_{\omega_x}^{\tau} I_{\omega_x}^{\tau} \text{ form } C_2. \end{aligned}$$

Значит,  $G / O_p(G) = G / P \in \mathcal{L}_{\omega_x}^{\tau}(p)$ . В силу леммы 3.2

$$G \in \mathcal{L} = I_{\omega_x}^\tau \text{ form } R_1 \vee_{\omega_x}^\tau I_{\omega_x}^\tau \text{ form } R_2.$$

Пусть теперь  $G$  не является монолитической группой и  $\text{Soc}(G) = N_1 \times \dots \times N_k$ , где  $N_i$  – минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ ,  $i = 1, \dots, k$  ( $k \geq 2$ ). Обозначим через  $M_i$  наибольшую нормальную подгруппу группы  $G$ , содержащую  $N_1 \times \dots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \dots \times N_k$  и не содержащую  $N_i$ . В силу леммы 2.8 группа  $B_i = G/M_i$  является монолитической и ее монолит  $N_i M_i / M_i$   $G$ -изоморфен  $N_i$  и  $M_1 \cap \dots \cap M_k = 1$ . Поскольку  $B_i \in \mathfrak{M} = \mathfrak{F}_1 \vee_{\omega_x}^\tau \mathfrak{F}_2$  и  $|B_i| < |G|$ , то по индукции для группы  $B_i$  найдутся такие группы  $S_{i1} \in \mathfrak{F}_1$  и  $S_{i2} \in \mathfrak{F}_2$ , что

$$B_i \in I_{\omega_x}^\tau \text{ form } S_{i1} \vee_{\omega_x}^\tau I_{\omega_x}^\tau \text{ form } S_{i2}, i \in I = \{1, 2, \dots, k\}.$$

Положим  $S_1 = S_{11} \times S_{21} \times \dots \times S_{k1}$  и  $S_2 = S_{12} \times S_{22} \times \dots \times S_{k2}$ . Поскольку  $S_{i1} \in \mathfrak{F}_1$  и  $S_{i2} \in \mathfrak{F}_2$  при любом  $i \in I$ , то  $S_1 \in \mathfrak{F}_1$  и  $S_2 \in \mathfrak{F}_2$ . Так как  $S_{i1} \in I_{\omega_x}^\tau \text{ form } S_1$  и  $S_{i2} \in I_{\omega_x}^\tau \text{ form } S_2$  для любого  $i \in I$ , то  $I_{\omega_x}^\tau \text{ form } S_{i1} \subseteq I_{\omega_x}^\tau \text{ form } S_1$  и  $I_{\omega_x}^\tau \text{ form } S_{i2} \subseteq I_{\omega_x}^\tau \text{ form } S_2$ . Поэтому для всякого  $i \in I$  имеет место включение

$$\begin{aligned} I_{\omega_x}^\tau \text{ form } S_{i1} \vee_{\omega_x}^\tau I_{\omega_x}^\tau \text{ form } S_{i2} &\subseteq \\ &\subseteq I_{\omega_x}^\tau \text{ form } S_1 \vee_{\omega_x}^\tau I_{\omega_x}^\tau \text{ form } S_2. \end{aligned}$$

Из  $B_i \in I_{\omega_x}^\tau \text{ form } S_{i1} \vee_{\omega_x}^\tau I_{\omega_x}^\tau \text{ form } S_{i2}$  в силу леммы 2.8 вытекает, что  $G \in I_{\omega_x}^\tau \text{ form } S_1 \vee_{\omega_x}^\tau I_{\omega_x}^\tau \text{ form } S_2$  как подпрямое произведение групп, изоморфных группам  $B_1, \dots, B_k$ . Противоречие.

Таким образом, мы можем считать, что число  $t$  вхождений символов из  $\{\cap, \vee_{\omega_x}^\tau\}$  в терм  $\nu(x_1, \dots, x_n)$  больше 1 и при  $t-1$  утверждение теоремы верно.

Допустим, что группа  $G$  монолитична. Пусть сначала  $P = \text{Soc}(G)$  – абелева  $p$ -группа, где  $p \in \omega$ . Поскольку  $\Phi(G) \cap O_\omega(G) = 1$ , то  $P \not\subseteq \Phi(G)$  и  $P = C_G(P) = O_p(G) = F_p(G)$ . В силу леммы 3.6  $m = \nu(\mathfrak{F}_{1\omega_x}^\tau, \dots, \mathfrak{F}_{n\omega_x}^\tau)$  –  $I_{\omega_x}^\tau$ -значный спутник формации  $\mathfrak{M} = \nu(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n)$ . Ввиду того, что  $G \in \mathfrak{M}$ , из леммы 3.1 вытекает

$$G/P = G/F_p(G) \in m(p) = \nu(\mathfrak{F}_{1\omega_x}^\tau(p), \dots, \mathfrak{F}_{n\omega_x}^\tau(p)).$$

Так как  $|G/F_p(G)| < |G|$ , то для группы  $G/F_p(G)$  утверждение теоремы верно. Поэтому найдутся такие группы  $T_1 \in \mathfrak{F}_{1\omega_x}^\tau(p), \dots, T_n \in \mathfrak{F}_{n\omega_x}^\tau(p)$ , что  $G/F_p(G) \in \nu(I_{\omega_x}^\tau \text{ form } T_1, \dots, I_{\omega_x}^\tau \text{ form } T_n)$ .

Положим  $L_i = T_i/O_p(T_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тогда  $I_{\omega_x}^\tau \text{ form } T_i \subseteq \mathfrak{N}_p I_{\omega_x}^\tau \text{ form } L_i$  для любого  $i = 1, \dots, n$ .

В силу леммы 3.8 справедливо включение

$$\begin{aligned} \nu(I_{\omega_x}^\tau \text{ form } T_1, \dots, I_{\omega_x}^\tau \text{ form } T_n) &\subseteq \\ &\subseteq \nu(\mathfrak{N}_p I_{\omega_x}^\tau \text{ form } L_1, \dots, \mathfrak{N}_p I_{\omega_x}^\tau \text{ form } L_n). \end{aligned}$$

По лемме 3.7 имеет место равенство

$$\begin{aligned} \nu(\mathfrak{N}_p I_{\omega_x}^\tau \text{ form } L_1, \dots, \mathfrak{N}_p I_{\omega_x}^\tau \text{ form } L_n) &= \\ &= \mathfrak{N}_p \nu(I_{\omega_x}^\tau \text{ form } L_1, \dots, I_{\omega_x}^\tau \text{ form } L_n). \end{aligned}$$

Значит,  $G/P \in \nu(\mathfrak{N}_p I_{\omega_x}^\tau \text{ form } L_1, \dots, \mathfrak{N}_p I_{\omega_x}^\tau \text{ form } L_n)$ .

Поскольку  $P = O_p(G)$ , то  $O_p(G/P) = 1$  и

$$G/P \in \nu(I_{\omega_x}^\tau \text{ form } L_1, \dots, I_{\omega_x}^\tau \text{ form } L_n).$$

Обозначим через  $R_i$  регулярное сплетение  $Z_p \wr L_i$  группы  $Z_p$  порядка  $p$  и группы  $L_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тогда  $R_i = [K_i]L_i$ , где  $K_i$  – база сплетения. Имеет место  $K_i = F_p(R_i) = O_p(R_i)$ . Ввиду того, что  $R_i/O_p(R_i) \cong L_i \in \mathfrak{F}_{i\omega_x}^\tau(p)$ , по лемме 2.6 имеем  $R_i \in \mathfrak{F}_i$ . Пусть  $\mathfrak{X}_i = I_{\omega_x}^\tau \text{ form } R_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Обозначим через  $\mathcal{L}$  формацию  $\nu(\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_n)$ . По лемме 3.6  $l = \nu(\mathfrak{X}_{1\omega_x}^\tau, \dots, \mathfrak{X}_{n\omega_x}^\tau)$  –  $I_{\omega_x}^\tau$ -значный спутник формации  $\mathcal{L}$ . Поскольку  $\mathfrak{X}_{i\omega_x}^\tau(p) \subseteq \mathfrak{X}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , то в силу леммы 3.8 имеет место  $l(p) = \nu(\mathfrak{X}_{1\omega_x}^\tau(p), \dots, \mathfrak{X}_{n\omega_x}^\tau(p)) \subseteq \nu(\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_n)$ . Поэтому спутник  $l$  является внутренним. Поскольку

$$l(p) = \nu(\mathfrak{X}_{1\omega_x}^\tau(p), \dots, \mathfrak{X}_{n\omega_x}^\tau(p)) =$$

$$\begin{aligned} &= \nu(I_{\omega_x}^\tau \text{ form}(R_1/F_p(R_1)), \dots, I_{\omega_x}^\tau \text{ form}(R_n/F_p(R_n))) = \\ &= \nu(I_{\omega_x}^\tau \text{ form } L_1, \dots, I_{\omega_x}^\tau \text{ form } L_n), \end{aligned}$$

то  $G/O_p(G) = G/P \in l(p)$ . По лемме 2.6

$$G \in \mathcal{L} = \nu(I_{\omega_x}^\tau \text{ form } R_1, \dots, I_{\omega_x}^\tau \text{ form } R_n).$$

Противоречие.

Пусть теперь  $P = \text{Soc}(G)$  – неабелева группа или абелева  $\omega'$ -группа и терм  $\nu$  имеет вид

$$\nu_1(x_1, \dots, x_r) \Delta \nu_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_s}),$$

где  $\Delta \in \{\cap, \vee_{\omega_x}^\tau\}$  и

$$\{x_1, \dots, x_r\} \cup \{x_{j_1}, \dots, x_{j_s}\} = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Если  $\Delta = \cap$ , то  $G \in \nu_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_r}) \cap \nu_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_s})$ .

По индуктивному предположению для термов  $\nu_1$  и  $\nu_2$  утверждение теоремы верно, следовательно, найдутся группы  $A_i \in \mathfrak{F}_{i_1}, \dots, A_r \in \mathfrak{F}_{i_r}$  и  $B_1 \in \mathfrak{F}_{j_1}, \dots, B_s \in \mathfrak{F}_{j_s}$ ,

$$G \in \nu_1(I_{\omega_x}^\tau \text{ form } A_1, \dots, I_{\omega_x}^\tau \text{ form } A_r)$$

$$\text{и } G \in \nu_2(I_{\omega_x}^\tau \text{ form } B_1, \dots, I_{\omega_x}^\tau \text{ form } B_s).$$

Пусть  $\Omega = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\} \cap \{x_{j_1}, \dots, x_{j_s}\}$ . Положим  $R_{i_m} = A_m$ , если  $x_{i_m} \notin \Omega$ ,  $R_{i_m} = P_{j_k} = A_m \times B_k$ , если  $x_{i_m} = x_{j_k} \in \Omega$  и  $P_{j_k} = B_k$ , если  $x_{j_k} \notin \Omega$ ,  $m = 1, \dots, r$ ,  $k = 1, \dots, s$ . Ясно, что  $R_{i_m} \in \mathfrak{F}_{i_m}$  и  $P_{j_k} \in \mathfrak{F}_{j_k}$ .

Обозначим через  $\mathfrak{M}_{i_m}$  формацию  $I_{\omega_x}^\tau \text{ form } R_{i_m}$ , а через  $\mathfrak{M}_{j_k}$  – формацию  $I_{\omega_x}^\tau \text{ form } P_{j_k}$ ,  $m = 1, \dots, r$ ,  $k = 1, \dots, s$ . Поскольку для любых  $m = 1, \dots, r$ ,  $k = 1, \dots, s$  справедливы включения  $I_{\omega_x}^\tau \text{ form } A_m \subseteq \mathfrak{M}_{i_m}$  и  $I_{\omega_x}^\tau \text{ form } B_k \subseteq \mathfrak{M}_{j_k}$ , в силу леммы 3.8 имеем:

$$\begin{aligned} \cup_1(I_{\omega_x}^\tau \text{ form } A_1, \dots, I_{\omega_x}^\tau \text{ form } A_r) &\subseteq \cup_1(\mathfrak{M}_{i_1}, \dots, \mathfrak{M}_{i_r}), \\ \cup_2(I_{\omega_x}^\tau \text{ form } B_1, \dots, I_{\omega_x}^\tau \text{ form } B_s) &\subseteq \cup_2(\mathfrak{M}_{j_1}, \dots, \mathfrak{M}_{j_s}). \end{aligned}$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\begin{aligned} G \in \cup_1(\mathfrak{M}_{i_1}, \dots, \mathfrak{M}_{i_r}) \cap \cup_2(\mathfrak{M}_{j_1}, \dots, \mathfrak{M}_{j_s}) &= \\ = \cup(\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_n), \end{aligned}$$

где  $\mathfrak{M}_i$  – однопорожденная  $\tau$ -замкнутая тотально  $\omega$ -насыщенная подформация формации  $\mathfrak{F}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Пусть  $\Delta = \vee_{\omega_x}^\tau$ . Тогда

$$G \in \cup_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_r}) \vee_{\omega_x}^\tau \cup_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_s}).$$

Положим  $\mathfrak{H}_1 = \cup_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_r})$  и  $\mathfrak{H}_2 = \cup_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_s})$ .

Тогда  $G \in \mathfrak{H}_1 \vee_{\omega_x}^\tau \mathfrak{H}_2$  и по доказанному существуют такие группы  $H_1 \in \mathfrak{H}_1$  и  $H_2 \in \mathfrak{H}_2$ , что

$$G \in I_{\omega_x}^\tau \text{ form } H_1 \vee_{\omega_x}^\tau I_{\omega_x}^\tau \text{ form } H_2.$$

По индуктивному предположению найдутся такие группы  $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, \dots, A_r \in \mathfrak{F}_{i_r}$  и  $B_1 \in \mathfrak{F}_{j_1}, \dots, B_s \in \mathfrak{F}_{j_s}$ , что

$$\begin{aligned} H_1 &\in \cup_1(I_{\omega_x}^\tau \text{ form } A_1, \dots, I_{\omega_x}^\tau \text{ form } A_r), \\ H_2 &\in \cup_2(I_{\omega_x}^\tau \text{ form } B_1, \dots, I_{\omega_x}^\tau \text{ form } B_s). \end{aligned}$$

Пусть теперь  $\Omega = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\} \cap \{x_{j_1}, \dots, x_{j_s}\}$ . Положим  $R_{i_m} = A_m$ , если  $x_{i_m} \notin \Omega$ ,  $R_{i_m} = P_{j_k} = A_m \times B_k$ , если  $x_{i_m} = x_{j_k} \in \Omega$  и  $P_{j_k} = B_k$ , если  $x_{j_k} \notin \Omega$ ,  $m = 1, \dots, r$ ,  $k = 1, \dots, s$ . Очевидно, что  $R_{i_m} \in \mathfrak{F}_{i_m}$  и  $P_{j_k} \in \mathfrak{F}_{j_k}$ . Положим  $\mathfrak{M}_{i_m} = I_{\omega_x}^\tau \text{ form } R_{i_m}$ ,  $\mathfrak{M}_{j_k} = I_{\omega_x}^\tau \text{ form } P_{j_k}$ ,  $m = 1, \dots, r$ ,  $k = 1, \dots, s$ . Поскольку для любых  $m = 1, \dots, r$ ,  $k = 1, \dots, s$  справедливы включения  $I_{\omega_x}^\tau \text{ form } A_m \subseteq \mathfrak{M}_{i_m}$  и  $I_{\omega_x}^\tau \text{ form } B_k \subseteq \mathfrak{M}_{j_k}$ , то в силу леммы 3.8 имеем:

$$\begin{aligned} \cup_1(I_{\omega_x}^\tau \text{ form } A_1, \dots, I_{\omega_x}^\tau \text{ form } A_r) &\subseteq \cup_1(\mathfrak{M}_{i_1}, \dots, \mathfrak{M}_{i_r}), \\ \cup_2(I_{\omega_x}^\tau \text{ form } B_1, \dots, I_{\omega_x}^\tau \text{ form } B_s) &\subseteq \cup_2(\mathfrak{M}_{j_1}, \dots, \mathfrak{M}_{j_s}). \end{aligned}$$

Значит, выполняется включение

$$\begin{aligned} \cup_1(I_{\omega_x}^\tau \text{ form } A_1, \dots, I_{\omega_x}^\tau \text{ form } A_r) \vee_{\omega_x}^\tau \\ \cup_2(I_{\omega_x}^\tau \text{ form } B_1, \dots, I_{\omega_x}^\tau \text{ form } B_s) &\subseteq \\ \subseteq \cup_1(\mathfrak{M}_{i_1}, \dots, \mathfrak{M}_{i_r}) \vee_{\omega_x}^\tau \cup_2(\mathfrak{M}_{j_1}, \dots, \mathfrak{M}_{j_s}). \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} I_{\omega_x}^\tau \text{ form } H_1 \vee_{\omega_x}^\tau I_{\omega_x}^\tau \text{ form } H_2 &\subseteq \\ \subseteq \cup_1(I_{\omega_x}^\tau \text{ form } A_1, \dots, I_{\omega_x}^\tau \text{ form } A_r) \vee_{\omega_x}^\tau \end{aligned}$$

$$\cup_2(I_{\omega_x}^\tau \text{ form } B_1, \dots, I_{\omega_x}^\tau \text{ form } B_s),$$

то справедливо включение

$$\begin{aligned} I_{\omega_x}^\tau \text{ form } H_1 \vee_{\omega_x}^\tau I_{\omega_x}^\tau \text{ form } H_2 &\subseteq \\ \subseteq \cup_1(\mathfrak{M}_{i_1}, \dots, \mathfrak{M}_{i_r}) \vee_{\omega_x}^\tau \cup_2(\mathfrak{M}_{j_1}, \dots, \mathfrak{M}_{j_s}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} G \in \cup_1(\mathfrak{M}_{i_1}, \dots, \mathfrak{M}_{i_r}) \vee_{\omega_x}^\tau \cup_2(\mathfrak{M}_{j_1}, \dots, \mathfrak{M}_{j_s}) &= \\ = \cup(\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_n), \end{aligned}$$

где  $\mathfrak{M}_i$  – однопорожденная  $\tau$ -замкнутая тотально  $\omega$ -насыщенная подформация формации  $\mathfrak{F}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Снова получили противоречие.

Предположим теперь, что группа  $G$  не является монолитической и  $\text{Soc}(G) = N_1 \times \dots \times N_k$ , где  $N_i$  – минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ ,  $i = 1, \dots, k$  ( $k \geq 2$ ). Обозначим через  $M_i$  наибольшую нормальную подгруппу группы  $G$ , содержащую  $N_1 \times \dots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \dots \times N_k$  и не содержащую  $N_i$ . Ввиду леммы 2.8  $B_i = G / M_i$  – монолитическая группа с монолитом  $N_i M_i / M_i$ ,  $G$ -изоморфным  $N_i$ , и  $M_1 \cap \dots \cap M_k = 1$ . Имеем  $B_i \in \cup(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n)$ . Поскольку  $|B_i| < |G|$ , то по индукции для группы  $B_i$  найдутся такие группы  $S_{i1} \in \mathfrak{F}_1, \dots, S_{in} \in \mathfrak{F}_n$ , что

$$\begin{aligned} B_i &\in \cup(I_{\omega_x}^\tau \text{ form } S_{i1}, \dots, I_{\omega_x}^\tau \text{ form } S_{in}), \\ i \in I &= \{1, \dots, k\}. \end{aligned}$$

Положим  $\mathfrak{X}_{ij} = I_{\omega_x}^\tau \text{ form } S_{ij}$ ,  $i \in I$ ,  $j \in J = \{1, \dots, n\}$ , и пусть

$$\mathfrak{X}_j = I_{\omega_x}^\tau \text{ form}(S_{1j} \times \dots \times S_{kj}) = I_{\omega_x}^\tau \text{ form } S_j,$$

где  $S_j = S_{1j} \times \dots \times S_{kj}$ . Так как  $S_{ij} \in \mathfrak{F}_j$  при любом  $i \in I$ , то  $S_j \in \mathfrak{F}_j$ . Поскольку  $S_{ij} \in \mathfrak{X}_j$  для любого  $i \in I$ , то  $\mathfrak{X}_{ij} \subseteq \mathfrak{X}_j$ . Поэтому для всякого  $i \in I$  в силу леммы 3.8 имеет место включение

$$\cup(\mathfrak{X}_{i1}, \dots, \mathfrak{X}_{in}) \subseteq \cup(\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_n).$$

Поскольку  $B_i \in \cup(\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_n)$  для любого  $i \in I$ , то в силу леммы 2.8 группа  $G$  принадлежит формации  $\cup(\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_n)$  как подпрямое произведение групп, изоморфных группам  $B_1, \dots, B_k$ . Противоречие.  $\square$

Если  $\omega = \mathbb{P}$  – множество всех простых чисел, то из теоремы 3.9 получаем

**Следствие 3.10** [4]. Решетка  $I_\infty^\tau$  всех  $\tau$ -замкнутых тотально насыщенных формаций является  $\mathfrak{G}$ -отделимой.

В случае когда  $\tau$  – тривиальный подгрупповой функтор из теоремы 3.9 вытекает

**Следствие 3.11** [6]. Решетка  $I_\infty^\omega$  всех тотально  $\omega$ -насыщенных формаций является  $\mathfrak{G}$ -отделимой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скиба, А.Н. Кратно  $\omega$ -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.
2. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Мн., Беларуская навука, 1997.
3. Сафонов, В.Г. К теории totally насыщенных формаций конечных групп / В.Г. Сафонов. – Гомель, 2008. – 34 с. (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф.Скорины; № 15).
4. Сафонов В.Г.,  $\mathfrak{G}$ -отделимость решетки  $\tau$ -замкнутых totally насыщенных формаций / В.Г. Сафонов // Алгебра и логика. – 2010. – Т. 49, № 5. – С. 692–704.
5. Shemetkov, L.A. On laws of lattices of partially saturated formations / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba, N.N. Vorob'ev // Asian-European Journal of Mathematics. – 2009. – Vol. 2, № 1. – P. 155–169.
6. Safonov, V.G. On  $\mathfrak{G}$ -separability of the lattice  $L_{\infty}^{\omega}$  of totally  $\omega$ -saturated formations / V.G. Safonov, V.V. Shcherbina // The 8th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 60th anniversary of Professor Vitaliy Mikhaylovich Usenko, July 5–12, 2011. – Luhansk Ukraine. – P. 125.
7. Сафонов, В.Г. Характеризация разрешимых однопорожденных totally насыщенных формаций конечных групп / В.Г. Сафонов // Сиб. матем. журнал. – 2007. – Т. 48, № 1. – С. 185–191.
8. Воробьев, Н.Н., Об индуктивных решетках формаций и классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев // Докл. НАН Беларуси. – 2000. – Т. 44, № 3. – С. 21–24.

Поступила в редакцию 14.11.17.

УДК 512.542

## КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С $H_\sigma$ -СУБНОРМАЛЬНО ВЛОЖЕННЫМИ ПОДГРУППАМИ

Д.А. Синица<sup>1</sup>, А.Н. Скиба<sup>1</sup>, В. Го<sup>2</sup>, Чи Чжан<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

<sup>2</sup>Университет науки и технологии Китая, Хэфэй

## FINITE GROUPS WITH $H_\sigma$ -SUBNORMALLY EMBEDDED SUBGROUPS

D.A. Sinita<sup>1</sup>, A.N. Skiba<sup>1</sup>, W. Guo<sup>2</sup>, Chi Zhang<sup>2</sup>

<sup>1</sup>F. Scorina Gomel State University

<sup>2</sup>University of Science and Technology of China, Hefei

Пусть  $G$  – конечная группа. Пусть  $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$  – разбиение множества всех простых  $\mathbb{P}$  и  $n$  целое. Обозначим  $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ ,  $\sigma(G) = \sigma(|G|)$ . Множество  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}(G)$  подгрупп группы  $G$  называется *полным холловым  $\sigma$ -множеством* группы  $G$ , если каждый член  $H \in \mathcal{H}$  является холловой  $\sigma_i$ -подгруппой группы  $G$  для некоторого  $\sigma_i \in \sigma$ , и  $\mathcal{H}$  содержит точно одну холлову  $\sigma_i$ -подгруппу  $G$  для каждого  $\sigma_i \in \sigma(G)$ . Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  *$\sigma$ -холловой подгруппой*  $G$ , если  $\sigma(|H|) \cap \sigma(|G:H|) = \emptyset$ . Подгруппа  $A$  группы  $G$  называется  *$H_\sigma$ -субнормально вложенной* в  $G$ , если  $A$  является  $\sigma$ -холловой подгруппой некоторой  $\sigma$ -субнормальной подгруппы группы  $G$ .

**Ключевые слова:** конечная группа,  $\sigma$ -субнормальная подгруппа,  $\sigma$ -перестановочная подгруппа,  $\sigma$ -холлова подгруппа,  $H_\sigma$ -субнормально вложенная подгруппа.

Let  $G$  be a finite group. Let  $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$  be a partition of the set of all primes  $\mathbb{P}$  and  $n$  an integer. We write  $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ ,  $\sigma(G) = \sigma(|G|)$ . A set  $\mathcal{H}$  of subgroups of  $G$  is said to be a *complete Hall  $\sigma$ -set* of  $G$  if every member of  $\mathcal{H} \setminus \{1\}$  is a Hall  $\sigma_i$ -subgroup of  $G$  for some  $\sigma_i$  and  $\mathcal{H}$  contains exact one Hall  $\sigma_i$ -subgroup of  $G$  for every  $\sigma_i \in \sigma(G)$ . A subgroup  $A$  of  $G$  is called a  *$\sigma$ -Hall subgroup* of  $G$  if  $\sigma(|A|) \cap \sigma(|G:A|) = \emptyset$ . We say that a subgroup  $A$  of  $G$  is  *$H_\sigma$ -subnormally embedded* in  $G$  if  $A$  is a  $\sigma$ -Hall subgroup of some  $\sigma$ -subnormal subgroup of  $G$ .

**Keywords:** finite group,  $\sigma$ -subnormal subgroup,  $\sigma$ -permutable subgroup,  $\sigma$ -Hall subgroup,  $H_\sigma$ -subnormally embedded subgroup.

### Введение

На протяжении всей работы все группы конечны и  $G$  всегда обозначает конечную группу. Более того,  $\mathbb{P}$  – множество всех простых чисел,  $\pi \subseteq \mathbb{P}$  и  $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$ . Если  $n$  – целое число, символ  $\pi(n)$  обозначает множество всех простых чисел, делящих  $|n|$ ; как обычно,  $\pi(G) = \pi(|G|)$  – множество всех простых чисел, делящих порядок  $G$ .

В дальнейшем,  $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$  – некоторое разбиение  $\mathbb{P}$ , такое что,  $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$  и  $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$  для всех  $i \neq j$ .

Пусть  $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$  и  $\sigma(G) = \sigma(|G|)$ . Тогда  $G$  является  $\sigma$ -*примарной* [1], [2], если  $G$  –  $\sigma_i$ -группа для некоторого  $\sigma_i \in \sigma$ .

Множество  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}(G)$  подгрупп группы  $G$  называется *полным холловым  $\sigma$ -множеством*  $G$  [3], если каждый член  $H \in \mathcal{H}$  является холловой  $\sigma_i$ -подгруппой группы  $G$  для некоторого  $\sigma_i \in \sigma$  и

$\mathcal{H}$  содержит точно одну холлову  $\sigma_i$ -подгруппу  $G$  для каждого  $\sigma_i \in \sigma(G)$ . Если группа  $G$  обладает полным холловым  $\sigma$ -множеством, то  $G$  является  $\sigma$ -полной. На протяжении всей работы  $G$  всегда должна быть  $\sigma$ -полной группой.

Подгруппа  $A$  группы  $G$  называется [1], [2]:

(i)  $\sigma$ -холловой подгруппой  $G$ , если

$$\sigma(|A|) \cap \sigma(|G:A|) = \emptyset;$$

(ii)  $\sigma$ -субнормальной в  $G$ , если существует цепь подгрупп  $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G$  такая, что либо  $A_{i-1}$  является нормальной в  $A_i$  или  $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$  является  $\sigma$ -примарной для всех  $i = 1, \dots, t$ .

**Определение.** Подгруппа  $A$  группы  $G$  называется  *$H_\sigma$ -субнормально вложенной* (соответственно  *$H_\sigma$ -перестановочно вложенной*) в  $G$ , если  $A$  является  $\sigma$ -холловой подгруппой некоторой

$\sigma$ -субнормальной подгруппы (соответственно  $\sigma$ -перестановочной подгруппы) группы  $G$ .

Напомним, что  $G$   $\sigma$ -нильпотентна [4], если  $G = H_1 \times \dots \times H_t$ , для некоторых  $\sigma$ -примарных групп  $H_1, \dots, H_t$ . Символ  $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$  обозначает  $\sigma$ -нильпотентный корадикал группы  $G$ , т. е. пересечение всех нормальных подгрупп  $N$  группы  $G$  с  $\sigma$ -нильпотентным фактором  $G/N$ .

Группа  $G$  называется  $\sigma$ -разрешимой [1], [2], если каждый главный фактор  $G$   $\sigma$ -примарен.

Пусть  $\mathfrak{F}$  – класс групп. Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $\mathfrak{F}$ -проектором  $G$  [5, VI, определение 7.8], если  $H \in \mathfrak{F}$  и для каждой подгруппы  $E$  группы  $G$  такой, что  $H \leq E$  и  $E/N \in \mathfrak{F}$  следует, что  $E = NH$ . Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $\sigma$ -картеровой подгруппой  $G$ , если  $H$  является  $\mathfrak{N}_\sigma$ -проектором группы  $G$ , где  $\mathfrak{N}_\sigma$  – класс всех  $\sigma$ -нильпотентных групп.

Говорят, что группа  $G$  имеет силовскую башню, если  $G$  имеет нормальный ряд  $1 = G_0 < G_1 < \dots < G_{t-1} < G_t = G$ , где  $|G_i/G_{i-1}|$  – порядок некоторой силовской подгруппы группы  $G$  для каждого  $i \in \{1, \dots, t\}$ . Главный фактор группы  $G$  называется  $\sigma$ -центральным (в  $G$ ) [1], если полупрямое произведение  $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$  является  $\sigma$ -примарным. В противном случае,  $H/K$  называется  $\sigma$ -эксцентральным (в  $G$ ).

Группа  $G$  называется  $H\sigma E$ -группой, если  $G$  является группой вида  $G = D \rtimes M$ , где  $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$  –  $\sigma$ -холловская подгруппа группы  $G$  с  $|\sigma(D)| = |\pi(D)|$  таким, что  $D$  имеет силовскую башню и каждый главный фактор группы  $G$  ниже  $D$  является  $\sigma$ -эксцентральным,  $M$  является  $\sigma$ -картеровой подгруппой группы  $G$  и  $M$  действует неприводимо на каждой  $M$ -инвариантной силовской подгруппе группы  $D$ .

Нами получены следующие результаты:

**Теорема 0.1.** Любые два из следующих условий эквивалентны:

(i) Каждая подгруппа группы  $G$  является  $H_\sigma$ -субнормально вложенной в  $G$ .

(ii) Каждая  $\sigma$ -субнормальная подгруппа  $H$  группы  $G$  является группой вида  $H = D \rtimes M$ , где  $D = H^{\mathfrak{N}_\sigma}$  и  $M$  –  $\sigma$ -картерова подгруппа группы  $H$ .

(iii) Каждая  $\sigma$ -субнормальная подгруппа группы  $G$  является  $H\sigma E$ -группой.

**Теорема 0.2.** Пусть  $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_t\}$  – полное холлово  $\sigma$ -множество группы  $G$  и  $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ . Тогда любые два из следующих условий эквивалентны:

(i)  $G$  имеет  $H_\sigma$ -перестановочно вложенную подгруппу порядка  $|A|$  для каждой подгруппы  $A$  группы  $G$ .

(ii)  $D$  – циклическая группа порядка свободного от квадратов и  $|\sigma_i \cap \pi(G)| = 1$  для каждого  $\sigma_i \in \sigma(D)$ .

(iii) Для каждого множества  $\{A_1, \dots, A_t\}$ , где  $A_i$  – подгруппа (соответственно нормальная подгруппа) группы  $H_i$  для всех  $i = 1, \dots, t$ ,  $G$  имеет  $H_\sigma$ -перестановочно вложенную (соответственно  $H_\sigma$ -нормально вложенную) подгруппу порядка  $|A_1| \cdots |A_t|$ .

Отметим, что поскольку  $\sigma$ -нильпотентна группа  $G$  обладает нормальной подгруппой порядка  $n$  для каждого целого  $n$  делителя порядка  $|G|$ , в случае когда  $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$ , теорема 0.2 покрывает теорему 11 в [6], теорему 2.7 в [7], теоремы 3.1 и 3.2 в [8] и теорему в [9]. Также, из теорем 0.1 и 0.2, в случае когда  $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$ , следует теорема 3.4 в [7].

**Теорема 0.3.** Любые два из следующих условий эквивалентны:

(i) Каждая подгруппа группы  $G$  является  $H_\sigma$ -перестановочно вложенной в  $G$ .

(ii)  $G = G^{\mathfrak{N}_\sigma} \rtimes M$  –  $H\sigma E$ -группа, где  $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$  – циклическая группа порядка свободного от квадратов.

(iii)  $G = D \rtimes M$ , где  $D$  –  $\sigma$ -холлова циклическая подгруппа группы  $G$  порядка свободного от квадратов с  $|\sigma(D)| = |\pi(D)|$  и  $M$   $\sigma$ -нильпотентна.

В случае когда  $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$  теорема 1 в [10] является следствием теоремы 0.3.

## 1 Доказательство теоремы 0.1

Мы даем набросок доказательства теоремы.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Предположим, что это не так, и пусть  $G$  – контрпример минимального порядка. Тогда некоторая  $\sigma$ -субнормальная подгруппа  $V$  группы  $G$  не является  $H\sigma E$ -группой. Более того,  $D = G^{\mathfrak{N}_\sigma} \neq 1$ , так что  $|\sigma(G)| > 1$ .

(1) Если  $K \trianglelefteq H \leq G$  и либо  $K \neq 1$ , либо  $H \neq G$ , тогда утверждение (ii) верно для  $H/K$ . Следовательно,  $V = G$  (это прямо следует из леммы 2.7 (1) (2) в [11] и выбора  $G$ ).

(2) Если  $|G:H| = \sigma_i$ -число и  $H$  не является  $\sigma$ -холловой подгруппой группы  $G$ , то  $H$   $\sigma$ -субнормальна в  $G$  и  $\sigma_i$ -дополнение  $E$  группы  $H$  нормально в  $G$ .

Действительно, поскольку  $H$  является  $H_\sigma$ -субнормально вложенной в  $G$  по условию, это следует из лемм 2.7 (4) и 2.8 в [11].

(3)  $G$   $\sigma$ -разрешима и  $D$  разрешима.

Сначала покажем, что  $G$   $\sigma$ -разрешима. Ввиду утверждения (1) и [11, Лемма 2.5], достаточно показать, что  $G$  не проста. Предположим, что это не так. Тогда для силовской  $p$ -подгруппы

$P$  группы  $G$ , где  $p$  – наименьший простой делитель  $|G|$ , мы имеем  $|P| > p$  по [5, IV, 2.8]. Пусть  $V$  – максимальная подгруппа группы  $P$ . Тогда  $V$  не является  $\sigma$ -холловой подгруппой группы  $G$ . С другой стороны,  $V$   $H_\sigma$ -субнормально вложена в  $G$  и, следовательно,  $G$  имеет такую  $\sigma$ -субнормальную подгруппу  $A$ , что  $V$  –  $\sigma$ -холлова подгруппа группы  $A$ . Тогда существует такая цепь подгрупп  $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G$ , что либо  $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ , либо  $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$  является  $\sigma$ -примарной для всех  $i = 1, \dots, t$ . Пусть  $M = A_{t-1}$ . Поскольку  $V$  не является  $\sigma$ -холловой подгруппой группы  $G$ ,  $1 < A < G$ . Следовательно, мы можем предположить, не теряя общности, что  $M < G$ . Но  $G$  проста, таким образом,  $G/M_G = G/1 = G$   $\sigma$ -примарна и, следовательно,  $G$  является  $\sigma$ -разрешимой. Это противоречие показывает, что  $G$   $\sigma$ -разрешима.

Аналогично доказывается, что  $D$  разрешима. Следовательно (3) верно.

Проверка показывает, что справедливо следующее утверждение:

(4)  $D$  – холлова подгруппа группы  $G$ . Следовательно,  $D$  имеет дополнение  $M$  в  $G$ .

(5) Если  $M \leq E < G$ , то  $E$  не является  $\sigma$ -субнормальной в  $G$  и, следовательно,  $E$  –  $\sigma$ -холлова подгруппа группы  $G$ .

Предположим, что  $E$  является  $\sigma$ -субнормальной в  $G$ . Тогда существует такая цепь подгрупп  $E = E_0 \leq E_1 \leq \dots \leq E_r = G$ , где либо  $E_{i-1} \trianglelefteq E_i$ , либо  $E_i / (E_{i-1})_{E_i}$  является  $\sigma$ -примарной для всех  $i = 1, \dots, r$ . Пусть  $V = E_{r-1}$ . Мы можем предположить, не теряя общности, что  $V \neq G$  поскольку  $E < G$ .

Предположим, что  $V$  является нормальной подгруппой группы  $G$ . Поскольку  $G$   $\sigma$ -разрешима по утверждению (3),  $G$  имеет такую нормальную подгруппу  $K$ , что  $E \leq V \leq K$  и  $G/K$   $\sigma$ -примарна. Но тогда  $D \leq K$  и, следовательно,  $G = MD = ED \leq K < G$ , противоречие. Таким образом,  $V$  не является нормальной в  $G$ , значит  $G/V_G$  является  $\sigma$ -примарной и, следовательно,  $D \leq V_G$ . Но тогда  $G = MD = ED \leq V < G$ , противоречие.

Следовательно,  $E$  не является  $\sigma$ -субнормальной в  $G$ . По условию,  $G$  имеет такую  $\sigma$ -субнормальную подгруппу  $W$ , что  $E$  является  $\sigma$ -холловой подгруппой группы  $W$ . Но тогда  $W = G$ , как и выше, следует, что  $E$  является  $\sigma$ -холловой подгруппой группы  $G$ . В частности,  $M$  является  $\sigma$ -холловой подгруппой группы  $G$  и, значит,  $D$  является  $\sigma$ -холловой подгруппой группы  $G$ .

(6)  $|\sigma(D)| = |\pi(D)|$  и  $M$  действует неприводимо на каждой  $M$ -инвариантной силовской подгруппе группы  $D$ .

Пусть  $p \in \sigma_i \in \sigma(D)$ . Тогда из [11, Лемма 2.6] и утверждений (3) и (4) следует, что для некоторой силовской  $p$ -подгруппы  $P$  группы  $G$  мы имеем  $PM = MP$ . Более того,  $MP$  –  $\sigma$ -холлова подгруппа группы  $G$  по утверждению (5). Следовательно,  $|\sigma_i \cap \pi(G)| = 1$ , для всех таких  $i$ , что  $\sigma_i \cap \pi(D) \neq \emptyset$  и, значит,  $|\sigma(D)| = |\pi(D)|$ . Таким образом, поскольку  $D$  разрешима по утверждению (3),  $M$  действует неприводимо на каждой  $M$ -инвариантной силовской подгруппе группы  $D$  по утверждению (5).

Также проверка показывает, что справедливо (7)  $M$  –  $\sigma$ -картерова подгруппа группы  $G$  и  $D$  обладает силовской башней.

(8) Каждый главный фактор группы  $G$  ниже  $D$  является  $\sigma$ -эксцентральным.

Пусть  $H/K$  – главный фактор группы  $G$  ниже  $D$ . Тогда  $H/K$  –  $p$ -группа для некоторого простого  $p$  по утверждению (6). По аргументу Фратинни, существует такая силовская  $p$ -подгруппа  $P$  и такое  $p$ -дополнение  $E$  группы  $D$ , что  $M \leq N_G(P)$  и  $M \leq N_G(E)$ . Тогда

$$M \leq N_G(P \cap K) \text{ и } M \leq N_G(P \cap H).$$

Следовательно,  $P \cap K = 1$  и  $P \cap H = P$  по утверждению (6), поэтому  $H = K \rtimes P$ . Пусть  $V = EM$ . Тогда  $K \leq V$  и  $HV = G$ , значит  $V$  – максимальная подгруппа группы  $G$ . Следовательно,  $G/V_G \cong (H/K) \times (G/C_G(H/K))$  по [11, Лемма 2.9]. Следовательно, если  $H/K$   $\sigma$ -центральна, тогда  $D \leq V_G$ , что невозможно, поскольку, очевидно,  $p$  не делит  $|V|$ . Таким образом мы имеем (8).

Из утверждений (4)–(8) следует, что  $G$  является  $H\sigma E$ -группой, вопреки нашему предположению, что  $G = V$ . Следовательно, (i)  $\Rightarrow$  (ii).

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Эта импликация очевидна.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) По условию,  $G = D \rtimes M$ , где  $D = G^{\sigma_0}$  –  $\sigma$ -холлова подгруппа группы  $G$ ,  $|\sigma(D)| = |\pi(D)|$  и  $M$  действует неприводимо на каждой  $M$ -инвариантной силовской подгруппе группы  $D$ .

Несложно показать, что следующее утверждение верно:

(\*) Каждая подгруппа  $A$  группы  $G$  содержащая  $M$  является  $\sigma$ -холловой подгруппой группы  $G$ .

Теперь, пусть  $A$  – подгруппа группы  $G$ . Сначала, предположим, что  $DA < G$ . По лемме 2.1 (6) в [11],  $DA$   $\sigma$ -субнормальна в  $G$ . Таким образом, каждая  $\sigma$ -субнормальная подгруппа группы  $DA$  также является  $\sigma$ -субнормальной в  $G$ . Следовательно, условие (iii) верно для  $DA$ , так что  $A$   $H_\sigma$ -субнормально вложена в  $DA$  по индукции. Но тогда  $A$   $H_\sigma$ -субнормально вложена в  $G$  по лемме 2.1 (2) в [11].

Наконец, предположим что  $DA = G$ . Тогда, поскольку  $G$  является  $\sigma$ -разрешимой, для некоторого  $x$  мы имеем  $M \leq A^x$  по [11, Лемма 2.6]. Следовательно,  $A^x$  –  $\sigma$ -холлова подгруппа группы  $G$  по утверждению (\*), значит  $A^x$  –  $H_\sigma$ -субнормально вложенная подгруппа группы  $G$ . Но тогда  $A$  –  $H_\sigma$ -субнормально вложенная подгруппа группы  $G$ . Следовательно, импликация (iii)  $\Rightarrow$  (i) верна.  $\square$

## 2 Доказательство теоремы 0.2

Дадим набросок доказательства теоремы. Не теряя общности, мы можем предположить, что  $H_i$  –  $\sigma_i$ -группа для всех  $i = 1, \dots, t$ .

(i), (iii)  $\Rightarrow$  (ii) Предположим, что это неверно. Тогда  $D \neq 1$  и поэтому  $t > 1$ .

Несложной проверкой можно показать, что справедливо следующее утверждение:

(\*) Если  $p \in \sigma_i \cap \pi(G)$ , то  $G$  имеет  $\sigma$ -перестановочную подгруппу  $E$  с  $|E| = |G|_{\sigma_i} p$ .

Теперь пусть  $p \in \sigma_i \cap \pi(D)$  и пусть  $P$  – силовская  $p$ -подгруппа группы  $D$ . Тогда, по утверждению (\*),  $G$  обладает  $\sigma$ -перестановочной подгруппой  $E$  такой, что  $|E| = |G|_{\sigma_i} p$ . Из леммы 2.2 (4) в [11] следует, что  $E$  является  $\sigma$ -субнормальной в  $G$ . Пусть  $i \neq j$ . Тогда  $H_j^x \cap E$  является холловой  $\sigma_j$ -подгруппой группы  $E$  по лемме 2.1 (4) в [11], поэтому  $|E : H_j^x \cap E|$  является  $\sigma_j$ -числом. Но  $|H_j^x|$  делит  $|E|$  и, следовательно,  $|H_j^x|$  делит  $|H_j^x \cap E|$ . Следовательно,  $H_j^x \leq E$ . Таким образом,  $H_j^G \leq E$  и, следовательно,  $G/E_G$  –  $\sigma_i$ -группа. Поэтому  $|E/E_G| = p$ , поскольку  $|E| = |G|_{\sigma_i} p$ . С другой стороны, очевидно,  $D \leq E_G \leq E$  и поэтому  $|P| = p$ . Таким образом, все силовские подгруппы из  $D$  являются группами простого порядка, а значит – циклическими и поэтому каждый главный фактор группы  $G$  ниже  $D$  является циклическим. Следовательно,  $D$  нильпотентна по [11, Лемма 2.4], поэтому  $D$  является циклической группой порядка свободного от квадратов.

Наконец, предположим, что  $|\sigma_i \cap \pi(G)| > 1$  и пусть  $q \in \sigma_i \cap \pi(G) \setminus \{p\}$ . Тогда, по утверждению (\*),  $G$  обладает  $\sigma$ -перестановочной подгруппой  $F$  такой, что  $|F| = |G|_{\sigma_i} q$ . Тогда  $D \leq F_G \leq F$ . Таким образом,  $D \leq E \cap F$  и поэтому  $p$  не делит  $|D|$ . Это противоречие завершает доказательство импликаций (i)  $\Rightarrow$  (ii) и (iii)  $\Rightarrow$  (ii).

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Сначала мы покажем, что для каждого  $i$  и для каждой подгруппы (соответственно

каждой нормальной подгруппы)  $A_i$  группы  $H_i$ , существует  $H_\sigma$ -перестановочно вложенная (соответственно  $H_\sigma$ -нормально вложенная) подгруппа  $E_i$  группы  $G$  такая, что  $|E_i| = |A_i| |G|_{\sigma_i}$ . Поскольку  $G$ , очевидно, является  $\sigma$ -разрешимой, то она имеет  $\sigma_i$ -дополнение  $E$  по [11, Лемма 2.6]. Таким образом, достаточно рассмотрим случай, когда  $A_i \neq 1$ , так как всякая  $\sigma$ -холлова подгруппа группы  $G$  является  $H_\sigma$ -нормально вложенной в  $G$ , а, значит,  $H_\sigma$ -перестановочно вложенной в  $G$ .

Предположим сначала, что  $D \leq E$ . Тогда  $E/D$  нормальна в  $G$ , так как  $G/D$  является  $\sigma$ -нильпотентной. Таким образом,

$$(E/D) \times (A_i D/D) = EA_i/D$$

является  $\sigma$ -перестановочной (соответственно нормальной) в  $G/D = (E/D) \times (H_i D/D)$ . Следовательно,  $E_i = EA_i$  является  $\sigma$ -перестановочной (соответственно нормальной) в  $G$  по лемме 2.2 (3) в [11] и  $|E_i| = |A_i| |G|_{\sigma_i}$ .

Предположим теперь, что  $D \not\leq E$ . Тогда  $D \cap H_i \neq 1$ , поэтому  $H_i$  является  $p$ -группой для некоторого простого  $p$ , так как для каждого  $\sigma_i \in \sigma(D)$  имеем  $|\sigma_i \cap \pi(G)| = 1$  по условию. Следовательно,  $H_i$  имеет нормальную подгруппу  $A$  такую, что  $D_p \leq A$  и  $|A| = |A_i|$ , где  $D_p$  – силовская  $p$ -подгруппа группы  $D$ . Тогда  $D \leq AE$ . Более того,  $AE/D = (DA/D) \times (ED/D)$ , так как  $ED/D$  является холловой  $\sigma_i$ -подгруппой группы  $G/D$ . Таким образом,  $E_i = AE$  является  $\sigma$ -перестановочной (соответственно нормальной) в  $G$  по лемме 2.2 (3) в [11] и  $|E_i| = |A_i| |G|_{\sigma_i}$ .

Пусть  $E = E_1 \cap \dots \cap E_t$ . Тогда  $|E| = |A_1| \dots |A_t|$ , поскольку  $(|G : E_i|, |G : E_j|) = 1$  для всех  $i \neq j$ . Отметим, что  $E_i$  либо  $\sigma$ -холлова подгруппа группы  $G$ , либо  $\sigma$ -перестановочна (соответственно нормальна) в  $G$ . Действительно, пусть  $V$  –  $\sigma$ -перестановочная (соответственно нормальная) подгруппа группы  $G$  такая, что  $E_i$  является  $\sigma$ -холловой подгруппой группы  $V$ . Предположим, что  $E_i$  не  $\sigma$ -перестановочна (соответственно не нормальна) в  $G$ . Тогда  $E_i < V$ . Поскольку  $|G : E_i|$  является  $\sigma_i$ -числом,  $|V : E_i|$  является  $\sigma_i$ -числом. Но  $E_i$  является  $\sigma$ -холловой подгруппой группы  $V$ . Следовательно,  $E_i = V$  является  $\sigma$ -холловой подгруппой группы  $G$ .

Предположим, что  $E_1, \dots, E_r$  являются  $\sigma$ -перестановочными (соответственно нормальными)

в  $G$  и  $E_i$  является  $\sigma$ -холловой подгруппой группы  $G$  для всех  $i > r$ . Тогда  $E^0 = E_1 \cap \dots \cap E_r$  является  $\sigma$ -перестановочной (соответственно нормальной) в  $G$  по лемме 2.2 (5) в [11] и  $E^* = E_{r+1} \cap \dots \cap E_t$  является  $\sigma$ -холловой подгруппой группы  $G$ , так как

$$|G : E^*| = |H_{r+1}| \cdots |H_t|.$$

Теперь,  $E = E^0 \cap E^*$  –  $\sigma$ -холлова подгруппа группы  $E^0$  по леммам 2.1 (4) и 2.2 (4) в [11], так что  $E$  является  $H_\sigma$ -перестановочно (соответственно  $H_\sigma$ -нормально) вложенной в  $G$ . Следовательно (ii)  $\Rightarrow$  (iii).

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Поскольку  $G$  является  $\sigma$ -разрешимой,  $H$   $\sigma$ -разрешима. Следовательно,  $H$  имеет  $\sigma$ -базис  $\{L_1, \dots, L_r\}$  такой, что  $L_i \leq H_i$  для всех  $i = 1, \dots, r$  по [11, Лемма 2.6]. Таким образом, из импликации (ii)  $\Rightarrow$  (iii) мы получаем, что  $G$  имеет  $H_\sigma$ -перестановочно вложенную подгруппу порядка  $|L_1| \cdots |L_r| = |H|$ .  $\square$

### 3 Доказательство теоремы 0.3

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Эта импликация следует из леммы 2.2 (4) в [11] и теорем А и В.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Данная импликация очевидна.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Пусть  $A$  – произвольная подгруппа группы  $G$ . Тогда  $DA$  –  $\sigma$ -перестановочная подгруппа группы  $G$  по лемме 2.2 (3) в [11], поскольку  $G$   $\sigma$ -разрешима. С другой стороны, поскольку  $|\sigma(D)| = |\pi(D)|$  и  $D$  – циклическая  $\sigma$ -холлова подгруппа группы  $G$  порядка свободного от квадратов, то  $A$  –  $\sigma$ -холлова подгруппа группы  $DA$ . Следовательно,  $A$  является  $H_\sigma$ -перестановочно вложенной в  $G$ . Таким образом, импликация (iii)  $\Rightarrow$  (i) верна.  $\square$

### ЛИТЕРАТУРА

1. Skiba, A.N. On  $\sigma$ -subnormal and  $\sigma$ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
2. Skiba, A.N. On some results in the theory of finite partially soluble groups / A.N. Skiba // Commun. Math. Stat. – 2016. – Vol. 4, № 3. – P. 281–309.
3. Skiba, A.N. A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and its Appl. – 2015. – Vol. 15, № 4. – P. 21–36.
4. Guo, W. Finite groups with permutable complete Wielandt sets of subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2015. – Vol. 18. – P. 191–200.
5. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1967.
6. Li, S. On Hall normally embedded subgroups of finite groups / S. Li, J. He, G. Nong, L. Zhou // Comm. Algebra. – 2009. – Vol. 37. – P. 3360–3367.
7. Li, S. On Hall subnormally embedded and generalized nilpotent groups / S. Li, J. Liu // J. Algebra. – 2013. – Vol. 388. – P. 1–9.
8. Li, S. CLT-groups with Hall  $S$ -quasinormally embedded subgroups / S. Li, J. Lio // Ukrain. Math. Journal. – 2014. – Vol. 66. – P. 1281–1287.
9. Ballester-Bolinches, A. On a problem posed by S. Li and J. Liu / A. Ballester-Bolinches, Shou Homg Qiao // Arch. Math. – 2014. – Vol. 102. – P. 109–111.
10. Sinitisa, D.A. A note on Hall  $S$ -permutable embedded subgroups of finite groups / D.A. Sinitisa // Algebra and discrete mathematics. – 2017. – Vol. 23, № 2. – P. 305–311.
11. Go, W. On  $H_\sigma$ -permutable embedded and  $H_\sigma$ -subnormally embedded subgroups of finite groups / W. Guo, C. Zhang, A.N. Skiba, D.A. Sinitisa. – 2017. – P. 15. – (Preprint / arXiv:1701.05134).

Поступила в редакцию 08.10.17.

УДК 004.42:001.891.573:658.512

## АДАПТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕКОНСТРУКЦИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ТРЕХМЕРНЫХ МОДЕЛЯХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.К. Головнич

*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель*

## ADAPTIVE ALGORITHMS OF RECONSTRUCTION TECHNOLOGICAL PROCESSES ON 3D-MODELS OF TECHNICAL SYSTEMS

A.K. Golovnich

*Belarusian State University of Transport, Gomel*

Рассматривается принципиальный подход к моделированию технологических процессов систем как последовательности вычисляемых связанных физических состояний объектов, изменяемых при воздействии внешних сил. Эти воздействия определяются через некоторые промежутки времени, зависящие от конкретных условий выполнения технологических операций. Механизм backtracking'a позволяет проверить корректность модельного развития реконструируемого процесса по критериальным признакам за период времени, охватывающий несколько рассчитываемых состояний. При несоблюдении установленных критериев вырабатывается дополнительное воздействие, имитирующее управляющий стимул с целью возврата модельной системы в зону нормального исполнения операции. Прошедшие проверку расчетные состояния визуализируются в соответствующей 3D-модели.

**Ключевые слова:** моделирование, динамика, адаптивные алгоритмы, технические системы, физические процессы.

A new approach to modeling of technological processes of systems in the form of a sequence of connected physical states of objects is considered. These objects are changed under the influence of external forces, which are determined after some time intervals. This period of time includes several calculated states. If the established criteria aren't met, an additional impact is produced. It simulates control stimulus in order to return the model system to the zone of normal execution of the operation. The calculated states that have passed the test are visualized in the corresponding 3D model.

**Keywords:** modeling, dynamics, adaptive algorithms, technical systems, physical processes.

### Введение

Сложность модельной реконструкции технологии работы реальной технической системы заключается в необходимости учета большого числа факторов, непосредственно и косвенно влияющих на выполнение конкретных операций, которые реализуются с колебаниями значений зависимых параметров. Например, циклично повторяющиеся на железнодорожной станции операции расформирования составов на горке происходят в различных интервалах изменений скоростей надвига и роспуска, отличаются координатами мест останова отцепов в сортировочном парке, вариациями начала и длительности срабатывания тормозных замедлителей и др. Существенное влияние на такое рассеяние характеристик оказывают условия выполнения операций (температура наружного воздуха, влажность, состояние пути и подвижного состава, масса каждого отцепа и ее распределение по отдельным вагонам, человеческий фактор). Анализ работы объектов технических систем показывает, что любая технологическая операция выполняется в устойчивом режиме при постоянных колебаниях параметров в некоторых пределах [1].

### 1 Основные модели реконструкции технологии работы технических систем

Наиболее простая модельная схема описания технологии работает только с детерминированными значениями исходных параметров, которые оказываются неизменными в каждом последующем цикле технологической операции (модель нулевого уровня). Так как вариации действующих сторонних сил и факторов носят колебательный характер, то их влияние приводит к отклонению состояний объектов в ту или иную сторону относительно некоторых средних значений. Поэтому можно предположить, что за достаточный большой период времени их накапливаемые влияния взаимно компенсируются, и модельная интерпретация корректно репродуцирует реальный технологический процесс. Однако переменность внешних воздействий не случайна. Действующие на объект силы в момент времени  $t$  зависят не только от предыдущего состояния, но и от положения объекта на временной оси развертывания данного технологического процесса. Таким образом, в модель нулевого уровня можно вводить учитывающие эти особенности корректирующие параметры, вычисляемые по фазовому портрету достигнутого состояния объекта. Тем не менее, такие поправки носят условный характер, формируют модельные правила абстрактного характера и могут быть не связаны

с физическими процессами реальных технологических операций, выполняемых с объектами технической системы.

Уровень реалистичного воспроизведения технологической операции должен иметь особую логику связей зависимых параметров взаимодействующих объектов, определенным образом интерпретируя объективные закономерности развития реальных процессов. В таких модельных правилах используются алгоритмы, реконструирующие действие физических законов. Для моделирования технических систем особо важным оказывается корректное прототипирование сил гравитации и электромагнетизма. На железнодорожной станции эти силы используются в соответствующих технических устройствах (локомотивах, перегрузочных машинах, лебедках, сортировочных горках и пр.), обеспечивающих передвижение вагонов, а также определяющие деструктивные действия в виде сопротивления движению, деформации частей железнодорожного пути и подвижного состава и др. Так как усилия от устройств, сообщающих движение и влияющих на состояние объектов дополняются действием сопутствующих факторов и условий, то воспроизведение аналогичного адекватного модельного образа поведения системы объектов оказывается весьма трудной задачей в силу высокой размерности множества параметров и колебаний их значений.

Поэтому рассматривается возможность аналитико-эмпирического моделирования процессов технической системы с разделением на два этапа расчета состояний объектов: определение характеристик состояния объектов по их взаимодействию согласно существующим канонам механики и дополнительный расчет с использованием динамической компоненты, учитывающей конкретные условия протекания операции. Данная поправка в грубом приближении является некоторым коэффициентом, корректирующим значение расчетного параметра, характеризующего состояние объекта, что приближает подобную реконструкцию к модели нулевого уровня. В общем случае предлагаемый вариационный механизм позволяет формировать группы адаптивных модельных правил, развивая которые можно создать динамический образ прототипируемой технической системы, функционирующей в достаточном соответствии с реальностью в течение некоторого времени выполнения операций. Многообразие и взаимодействие объектов друг с другом и окружающей среды в таком случае может передаваться в модели соответствующими рекуррентными соотношениями изменяющихся состояний, дополненными эмпирическими компонентами в виде ряда аппроксимированных выражений, связанных между собою некоторыми зависимостями, обусловливаемыми характером реальных процессов.

## 2 Прототипирование технологических операций в модели с контурами обратной связи

Рассмотрим возможность воспроизведения реалистичного развития технологического процесса в модели с колебаниями зависимых параметров операций. Пусть некоторая технологическая операция  $T_i$  определяется состоянием  $i$ -го объекта с  $j$ -м свойством в момент времени  $t$  как  $F_{ij}^*(t)$ . Состояние  $i$ -го объекта определяется некоторым характерным для данной операции набором  $\Omega_i$  значений  $j$ -х параметров (массы  $m_i$ , скорости  $V_i$ , координат положения  $D_i(X, Y, Z)$ , внутреннего напряжения  $\lambda_i$ , деформации  $b_i$  и др.). Данное состояние может изменяться по причине влияния различных внешних воздействий  $\delta_{ij}(t)$ , способных варьироваться в некоторых пределах значений. Например, модельная схема расформирования состава на сортировочной горке в момент времени  $t = 60$  сек после начала операции может иметь значение координатного параметра

$$D_i(X, Y, Z) = F_{i(j=\text{коорд})}^* \left( t = 60, \sum_{k=1}^n \delta_{ij}(t_k) \right),$$

где  $\sum \delta_{ij}(t_k)$  – накопленное влияние различных факторов, которое приводит к новому координатному положению  $F_{i(j=\text{коорд})}^*$  через одну минуту ( $n$  циклов) после начала операции расформирования.

Модельная операция активируется через некоторый дискретный квантованный процесс последовательного расчёта значений характерных параметров с последующей визуализацией достигаемого координатного положения объекта (для примера сортировочной станции – положение вагонов на путях виртуальных парков и горловин станции через  $t = 5, 10, \dots, 60$  сек). Квант определяется как некоторый промежуток времени  $t_q$ , через который происходит следующий расчетный этап определения состояния  $i$ -го объекта системы моделирования. Так как результаты модельного расчета визуализируются в изменяющихся позициях объектов, то длительность расчетного кванта должна быть достаточно короткой ( $t_q = 1-5$  сек), чтобы впоследствии наглядно реконструируемый процесс был плавным, похожим на видеосъемку реального технологического процесса. Принимаем, что в течение кванта  $t_q$  изменений с модельным объектом не происходит или они таковы, что оказываются меньше вариаций  $\delta_{ij}(t)$ .

По каждому кванту расчётов состояния объекта  $F_{ij}^*(t)$  переменная поправка  $\delta_{ij}(t)$  рассматривается как интегральное совокупное влияние различных факторов, а также результат их взаимодействия. Длительность кванта может различаться от одного расчетного шага к другому, так как зависит от скорости протекания конкретного технологического процесса и ряда других причин (рисунок 2.1).

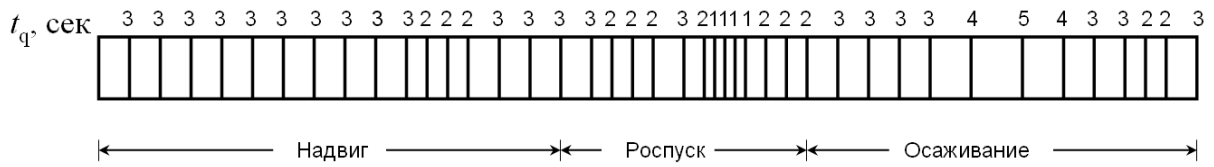


Рисунок 2.1 – Общая схема моделирования квантованного процесса расформирования составов на горке

Согласно приведенной схеме квантование операции надвига производится в основном через 3 секунды. Роспуск вагонов с горки обеспечивается с повышенной скоростью благодаря наличию значительных уклонов на спускной части, поэтому длина кванта  $t_q$  на данном расчетном элементе уменьшается до 2–1 сек. Осаживание представляет собой относительно медленный процесс, и длина кванта может увеличиваться до 4–5 сек.

Различные поправки  $\delta_{ij}(t)$  способны привести к изменению траектории некоторого фазового состояния объектов. При этом возможно наступление ситуации, при которой отклонения конкретного достигаемого состояния  $F^*_{ij}(t)$  от некоторого среднего будут настолько значительны, что может потребоваться введение поправки  $\delta_{критij}(t)$ , которая окажется больше разрешенной  $\delta_{ij}(t)$ . Поэтому следует на каждом шаге развития модельной ситуации оценивать степень приближения к критической (деконструктивной) зоне, вступление в которую приведет к нарушению технологического равновесия технической системы в целом.

### 3 Применение программного backtracking'a в модели реконструкции технологических процессов

Динамику развития некоторого технологического процесса можно рассматривать как расчёт величин воздействий  $\delta_{ij}(t)$  на модельные объекты и их отклика на эти воздействия в виде соответствующих перемещений (изменений координат положения вагонов на железнодорожном пути, деформации рельсов и шпал, просадок земляного полотна) через промежуток времени, равный расчётному кванту. Соответствующий моделирующий алгоритм может использовать программный backtracking, заключающийся в том, что на некотором  $k$ -м шаге производится предварительный расчёт на  $(n + 1)$ -шагов (квантов) ( $n > k$ ) с оценкой последовательных состояний системы модельных объектов [2]. Если все  $n$  шагов расчётных состояний указывают на достижения разрешённых модельных состояний  $F_{ij}(t)$ , то предварительный расчёт завершается принятием результатов расчетов на  $k$ -м шаге и визуализацией достигаемого состояния объекта. Рассмотрим две принципиальные позиции исхода данного расчета.

1. На  $m$ -м шаге backtracking'a ( $m < n + 1$ ) по расчетному влиянию  $\delta_{ij}(t)$  модельное состояние некоторого объекта оказывается критичным, не допускающим дальнейшего изменения  $F_{ij}(t)$ . Поэтому на некотором предыдущем  $s$ -м шаге ( $s < m$ ) необходимо ввести такое дополнительное корректирующее воздействие  $\pm\Delta_{ij}(t)$ , что при общем влиянии  $\delta_{ij}(t) \pm \Delta_{ij}(t)$  система выйдет из опасной зоны, и новый предварительный расчёт с началом в  $s$ -м шаге на  $(n + 1)$  шагов backtracking'a приведет к положительному результату с нормальным достигаемым состоянием. Как следствие, станет возможной фиксация текущего состояния объекта с соответствующей визуализацией его достигнутого положения в 3D-модели.

2. На  $(n + 1)$ -м шаге оценочный расчёт указывает на приближение значений некоторых  $j$ -х расчетных параметров к зоне критичных состояний. В этом случае результаты расчета принимаются, текущее состояние объекта 3D-модели визуализируется, но следующий этап расчётов начинается с введения дополнительной («усиленной») коррекции внешних воздействий  $\pm\Delta_{ij}(t)$ . В общем случае возможны следующие схемы модельных состояний объектов (рисунок 3.1).

На рисунке 3.1 приведена динамика развития реконструкции некоторого модельного процесса по  $j$ -му характерному параметру набора  $\Omega_i$  состояний  $F_{ij}(t)$   $i$ -го объекта. Согласно иллюстрациям, зона разрешённых состояний  $F_{ij}(t)$  представляет собой достаточно широкий диапазон изменений характеристических параметров набора  $\Omega_i$ .

По мере развертывания модельной технологической операции ширина зоны изменяется, а на некотором шаге реконструкции достигаемое состояние объекта  $F^*_{ij}(t)$  может оказаться критическим. Например, при расформировании поездов зона координат остановки отцепов в сортировочном парке варьируется в более широких пределах, чем зона координат, фиксирующих положение вагонов при скатывании с горки по скоростным уклонам. В этом случае текущее состояние вагона  $F^*_{ij}(t)$  может выйти в область критических скоростей.

Кроме зоны разрешённых состояний  $F_{ij}(t)$  устанавливаются зоны критических состояний  $f^{\text{up}}_{критij}(t)$  и  $f^{\text{down}}_{критij}(t)$ , ограничивающих зону допускаемых  $F_{ij}(t)$  снизу и сверху. Эти зоны также варьируются по ширине диапазона на каждом

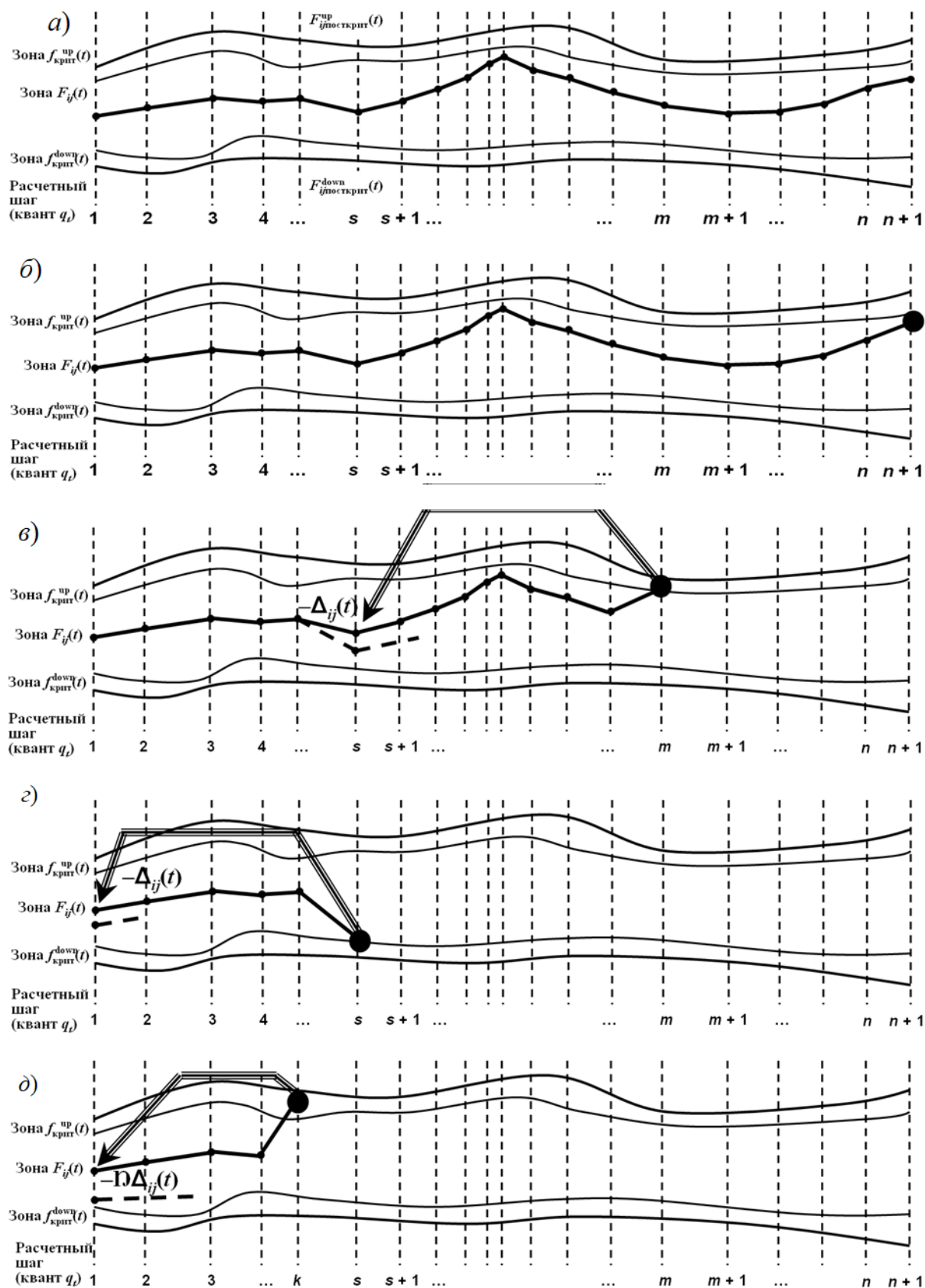


Рисунок 3.1 – Схемы развития модельной ситуации при выполнении технологической операции: а) – нормальная, б) –  $(n + 1)$ -критичная, в) –  $m$ -критичная, г) –  $s$ -критичная, д) – исключительная

расчетном  $q_i$  и указывают на значение некоторого опасного, но в сложных условиях выполнения технологической операции разрешенного значения параметра состояния  $F_{ij}(t)$ .

Вхождение в данную зону сигнализирует о необходимости принятия соответствующих мер, способствующих возврату технологического процесса в зону штатного исполнения операции. Чем глубже проникновения текущего состояния объекта в зоны  $f_{критij}$ , тем эффективнее и действеннее должны быть управляющие стимулы  $\Delta_{ij}(t)$ , обращающие вектор развития операции в сторону разрешенных  $F_{ij}^*(t)$ .

При приближении  $F_{ij}^*(t)$  к зоне критических значений в модельной системе (по аналогии с реальной) нарастает некоторое внутреннее сопротивление дальнейшему продвижению  $F_{ij}^*(t)$  в сторону  $f_{крит}^{up}$  или  $f_{крит}^{down}$ . Это сопротивление формирует силовой стимул с обратным вектором действия, определяя в конечном итоге величину  $\Delta_{ij}(t)$ . Зоны критических состояний  $f_{крит}^{up,down}$ , не являясь запрещенными для  $F_{ij}^*(t)$ , обладают свойством порождения и усиления действия силового стимула с обратным влиянием на дальнейшее развитие технологического процесса. Области  $F_{ij}(t)$  и  $f_{крит}^{up,down}$  рассчитываются на момент каждого кванта  $q_i$  в

соответствии со складывающейся общей ситуацией совокупного действия факторов и достигнутого состояния объекта. Для типового процесса можно разрабатывать некоторую среднюю комбинативную структуру фазовых линий  $F_{ij}(t)$ , ограничивающих зоны  $f_{крит}^{up,down}$  и определяющих область развития прототипируемого технологического процесса (рисунок 3.1). По всей вероятности, каждый конкретный технологический процесс будет иметь свою, только ему присущую фазовую траекторию изменения состояний. Однако наиболее эффективную линию  $F_{ij}^*(t)$  необходимо конструировать по текущей ситуации модельного образа. Величины зон значений параметров  $F_{ij}(t)$  и  $f_{критij}$  в каждом конкретном случае характеризуют возможные ситуации и интегральное воздействие других сторонних факторов. Такое совокупное влияние всех сил и воздействий приводит к особым траекториям  $F_{ij}(t)$ , отклоняющимся в ту или иную сторону по мере развертывания данной операции.

Области  $f_{крит}^{up,down}$  не идентичны друг другу, так как определяются различными условиями выполнения операции с низким и высоким значениями зависимых характеристик. Следует отметить, что по любому расчётному кванту  $q_i$  все  $f_{крит}^{up,down}$  всегда имеют ряд ненулевых разрешённых

Таблица 3.1 – Условия развития модельных ситуаций воспроизведения технологических операций

Схема развития модельной ситуации	Характеристика ключевых позиций	Способ разрешения ситуации
Нормальная (рисунок 3.1, а)	Все достигаемые значения $F_{ij}^*(t)$ находятся в рабочей зоне состояний объектов, которые изменяются по квантам $t_q$	–
$(n + 1)$ -критичная (рисунок 3.1, б)	На конечном расчётном $(n+1)$ -м шаге $F_{ij}^*(t_{n+1}) = F_{критij}^*(t_{n+1})$ , находящиеся в зоне $f_{критij}^{up}(t)$ или $f_{критij}^{down}(t)$	Состояние по текущему расчётному кванту визуализируется, но следующий этап расчётов начинается с введения дополнительного управляющего воздействия $\Delta_{ij}(t)$
$m$ -критичная (рисунок 3.1, в)	На шаге $m$ $F_{ij}^*(t_m) = F_{критij}^*(t_m)$ , находящиеся в зоне $f_{критij}^{up}(t)$ или $f_{критij}^{down}(t)$	Дальнейший предварительный расчёт останавливается, расчётная цепочка возвращается на $s$ -й шаг ( $m > s$ ) и производится корректировка воздействий $F_{ij}^*(t_s) = F_{ij}^*(t_s) - \Delta_{ij}(t_s)$ или $F_{ij}^*(t_s) = F_{ij}^*(t_s) + \Delta_{ij}(t_s)$
$s$ -критичная (рисунок 3.1, г)	На шаге $s$ $F_{ij}^*(t_s) = F_{критij}^*(t_s)$ , находящиеся в зоне $f_{критij}^{up}(t)$ или $f_{критij}^{down}(t)$	Предварительный расчёт прекращается на $s$ -м шаге, расчётная цепочка состояний полностью обрывается и на повторном цикле backtracking'a а $q_i=1$ вводятся поправочные воздействия $F_{ij}(0) \pm \Delta_{ij}(0)$
Исключительная (рисунок 3.1, д)	На некотором $k$ -м шаге backtracking'a достигается выход $F_{ij}(t_k)$ за пределы зоны нормального функционирования системы	На $k$ -м шаге расчёт прекращается, анализируется достигнутое состояние $F_{ij}^*(t_{k-1})$ . Если $F_{ij}^*(t_{k-1})$ достаточно близко подходит к зоне предельных состояний, то рассматривается возможность сведения ситуации к $(n + 1)$ -, $m$ - или $s$ -критичным, в противном случае вся цепочка обрывается и расчёт производится с с начальным положением объекта и введением «усиленного» стимула $\Omega \Delta_{ij}(t)$ . Здесь $\Omega$ – индексирующий показатель, зависящий от глубины проникновения процесса в зону предельных состояний

позиций до выхода к запредельным  $f_{\text{посткрит}ij}^{up}(t)$  и  $f_{\text{посткрит}ij}^{down}(t)$ , недопустимым на практике. Характеристика рассматриваемых ситуаций рисунка 3.1 приведена в таблице 3.1.

Достижимые состояния рассчитываются для каждого объекта или его элемента (в модели железнодорожной станции – для вагона, конкретной точки воздействия колеса на рельс, шпалы), и по каждому сравнивается расчетное  $F_{ij}^*(t)$  с разрешенным.

Если  $F_{\text{крит}ij}^*(t)$  возникает на  $p$ -м шаге, где  $p < k < s$ , то  $\Delta_{ij}$  могут быть особо значительными по величине и весь процесс backtracking'a может быть связан с использованием цепочки некоторых  $\max(\Delta_{ij})$ , нейтрализующих сильное влияние  $F_{\text{крит}ij}^*(t)$  на небольшом удалении от начального расчётного цикла состояния модельных объектов.

При нормальном развитии модельной ситуации  $\Delta_{ij}(t)$  могут представлять собой случайные флуктуационные колебания модельного конструктора технологических операций.

Таким образом, зоны потенциальных состояний объектов разделяются на области нормальных  $\mathcal{A}$ , предкритичных  $\mathcal{B}_1$  и  $\mathcal{B}_2$ , критичных  $\mathcal{C}_1$  и  $\mathcal{C}_2$  и закритичных  $\mathcal{D}_1$  и  $\mathcal{D}_2$  (рисунок 3.2).

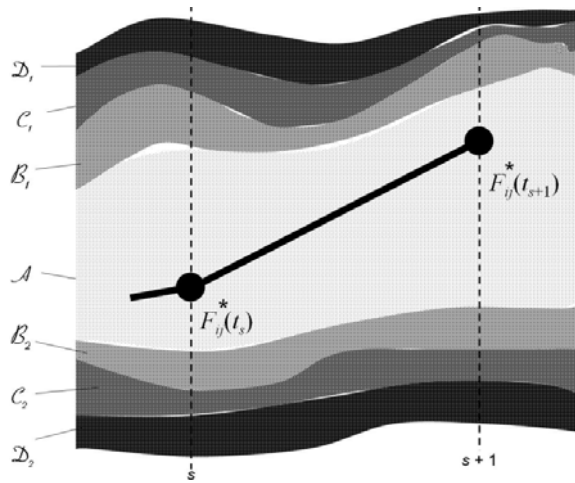


Рисунок 3.2 – Фазовая траектория состояний объекта моделирования в пространстве допустимых и запрещенных областей

Достижимые состояния объекта  $F_{ij}^*(t)$  являются разрешенными по технологическим канонам, если

$$F_{ij}^*(t) \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2.$$

Переход к следующему расчетному ( $s+1$ )-у шагу осуществляется по результату воздействия  $\delta_{ij}$  на предыдущее состояние данного объекта:

$$F_{ij}^*(t_{s+1}) = F_{ij}^*(t_s) + \delta_{ij}(t).$$

Согласно рисункам 3.1 и 3.2

$$f_{\text{крит}ij}^{*up}(t) \in \mathcal{C}_1, f_{\text{крит}ij}^{*down}(t) \in \mathcal{C}_2, \\ f_{\text{посткрит}ij}^{*up}(t) \in \mathcal{D}_1, f_{\text{посткрит}ij}^{*down}(t) \in \mathcal{D}_2.$$

Если на некотором  $m$ -м шаге (рисунок 3.1, в)  $F_{ij}^*(t_m) \in \mathcal{C}_1 \vee F_{ij}^*(t_m) \in \mathcal{C}_2$ , то происходит возврат на  $s$ -й шаг и формируется такое  $\Delta_{ij}(t_s)$ , что при повторном моделировании развития технологического процесса с  $s$ -го до  $m$ -го шага

$$F_{ij}^*(t_m) = F_{ij}^*(t_{m-1}) \pm \delta_{ij}(t_m) \pm \Delta_{ij}(t_m) \in \mathcal{A}$$

Вывод состояний объектов из областей  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{C}$  различается величинами корректирующих значений  $\Delta_{ij}(t)$  и числом квантов отката от достигнутого модельного времени развертывания технологической операции. Нахождение состояния объекта в областях  $\mathcal{D}_1$  или  $\mathcal{D}_2$  являются фатальными для дальнейшей работоспособности данного объекта и рассматриваются как исключительные, обусловленные форс-мажорными обстоятельствами.

С этих позиций  $\delta_{ij}(t)$  можно рассматривать как воздействие на объект в следствие взаимодействие с окружением, приводящее к изменению его  $j$ -го свойства, а  $\Delta_{ij}(t)$  – квалифицировать как управляющее воздействие от технических средств или человека в следствие влияния адаптивных контуров системы, корректирующих дальнейшее развитие процесса. Если рассматривать  $\delta_{ij}(t)$  как регулярные воздействия, являющиеся итогом совокупного влияния множественных сил, как правило, физического происхождения, то  $\Delta_{ij}(t)$  следует определять как нерегулярные воздействия, возникающие только в случае нарастающих деконструктивных для системы внешних усилий.

Процедура backtracking'a разбивает процесс моделирования на предварительный расчет с оценкой достижимых состояний через множество временных квантов по горизонту удаления ( $n + 1$ ) и верифицированную реконструкцию процесса с визуализацией пространственного положения модельных объектов по каждому кванту (рисунок 3.3).

Данный алгоритм используется многократно для расчета и визуализации различных  $j$ -х оценочных характеристик  $i$ -го объекта.

### Заключение

Таким образом, модель реконструкции технологических операций ненулевого, продуцирующего уровня способна верифицировать и прототипировать структурные изменения в состояниях модельных объектов на основе некоторых правил, действие которых близко к результатам влияния реальных физических процессов. Эмпирическая компонента в модели рассчитывается по каждому квантованному состоянию как интегрирующее совокупное воздействие множественных пассивных факторов, не включенных в основной аналитический этап моделирования технологических процессов реальной технической системы.

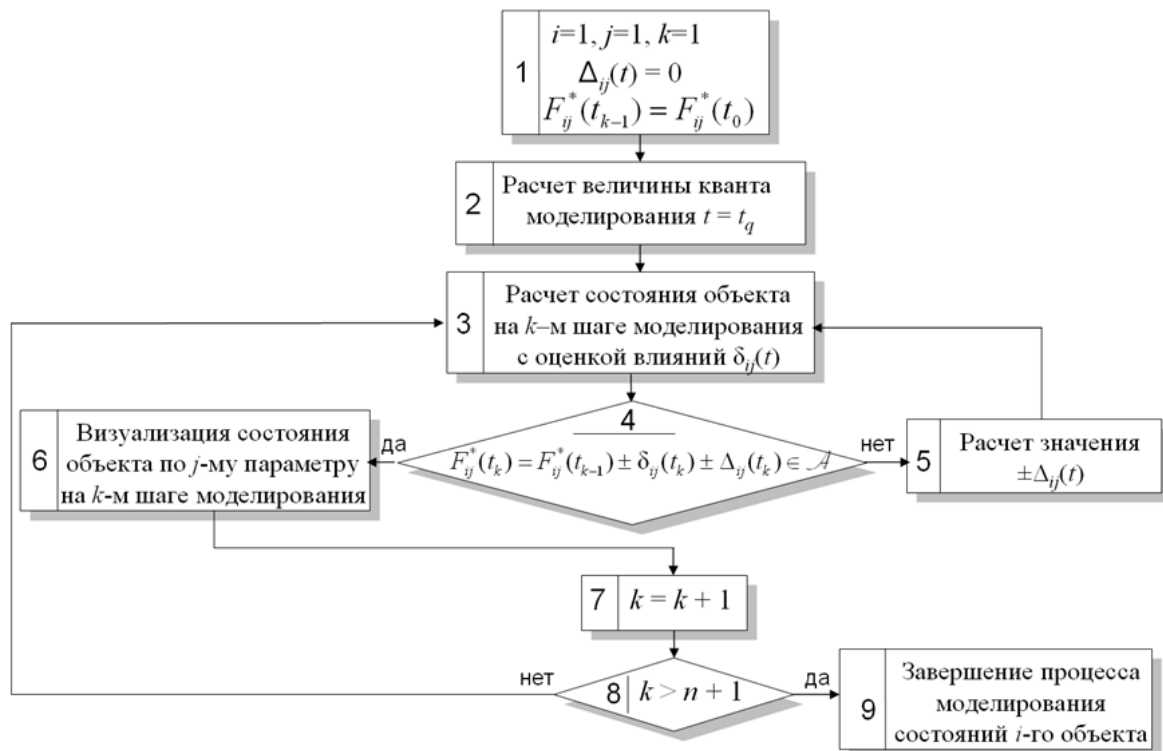


Рисунок 3.3 – Алгоритм расчёта и визуализации состояния  $i$ -го объекта моделирования с  $j$ -м контрольным параметром

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Головнич, А.К. Моделирование состояний объектов технической системы с реконструкцией физических процессов / А.К. Головнич // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 86–89.

2. Шень, А. Программирование: теоремы и задачи / А. Шень. – М.: МЦНМО, 2014

Поступила в редакцию 07.06.17.

## МЕТОДИКА АДАПТАЦИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПОД РАБОЧУЮ НАГРУЗКУ НА УЗЛАХ ЛВС

О.М. Демиденко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

## TECHNIQUES OF ADAPTING A CALCULATING PROCESS TO OPERATING LOAD IN NODES OF A LOCAL AREA NETWORK

O.M. Demidenko

F. Scorina Gomel State University

Предлагается пошаговая последовательность действий при проведении имитационных экспериментов, которая позволяет отказаться от выполнения натуральных экспериментов.

**Ключевые слова:** имитационный эксперимент, натуральный эксперимент, локальная вычислительная сеть.

A step-by-step succession of activities implemented in the course of simulation experiments which allows to give up performing natural experiments is suggested.

**Keywords:** simulation experiment, natural experiment, local area network.

При адаптации вычислительного процесса под рабочую нагрузку на узлах локальной вычислительной сети возможны два варианта исследований: управляемый натуральный эксперимент и имитационный эксперимент. Имитационный эксперимент – это многошаговая процедура, которая на начальных этапах проводится на основе результатов управляемого натурального эксперимента, а затем, при исчерпании возможностей варьирования имеющимся составом ресурсов реальной локальной вычислительной сети, продолжается с помощью серии имитационных экспериментов.

В статье предлагается определенная последовательность выполнения действий при проведении имитационных экспериментов.

**Шаг 1.** Поиск рабочей области параметров узла ЛВС и рабочей нагрузки. Данный шаг не является обязательным. Значения интенсивностей поступления запросов могут быть получены системой мониторинга из реальной рабочей нагрузки. На этом шаге решается задача поиска диапазонов изменения интенсивностей поступления транзитных, фоновых и диалоговых запросов  $(\lambda_{\Phi}^-, \lambda_{\Phi}^0, \lambda_{\Phi}^+)$ ;  $(\lambda_{\Gamma}^-, \lambda_{\Gamma}^0, \lambda_{\Gamma}^+)$ ;  $(\lambda_{Д}^-, \lambda_{Д}^0, \lambda_{Д}^+)$ , в пределах изменения которых имеет место линейный характер функции зависимости отклика  $(Y_j)$  от вектора параметров  $\lambda_i$ :

$$Y_j = \varphi_j(\lambda_{\Phi}, \lambda_{\Gamma}, \lambda_{Д}).$$

Если зависимости  $\varphi_j$  близки к линейным, то это позволяет поставить полный факторный эксперимент для вычисления коэффициентов линейной регрессионной зависимости.

**Шаг 2.** Поиск определяющего фактора внешней среды  $X_i$ . На этом шаге оценивается определяющее влияние между парами факторов. В качестве исходной информации используются диапазоны изменения компонент вектора  $X_i$ :  $[\lambda_{\Phi}^-, \lambda_{\Phi}^+]$ ,  $[\lambda_{Д}^-, \lambda_{Д}^+]$ ,  $[\lambda_{\Gamma}^-, \lambda_{\Gamma}^+]$ . Для этого составляются отношения приращений диапазонов при попарном сравнении параметров друг с другом, которые по своему физическому смыслу соответствуют тангенсам углов линий пересечения плоскостей  $(\lambda_{\Phi}, \lambda_{Д})$ ,  $(\lambda_{\Gamma}, \lambda_{Д})$  и  $(\lambda_{\Phi}, \lambda_{\Gamma})$  и координат изменения  $\lambda_{\Phi}$  и  $\lambda_{\Gamma}$ :

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\Delta \lambda_{\Phi}}{\Delta \lambda_{Д}} = \frac{\lambda_{\Phi}^+ - \lambda_{\Phi}^-}{\lambda_{Д}^+ - \lambda_{Д}^-};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\Delta \lambda_{\Gamma}}{\Delta \lambda_{Д}} = \frac{\lambda_{\Gamma}^+ - \lambda_{\Gamma}^-}{\lambda_{Д}^+ - \lambda_{Д}^-};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{\Delta \lambda_{\Phi}}{\Delta \lambda_{\Gamma}} = \frac{\lambda_{\Phi}^+ - \lambda_{\Phi}^-}{\lambda_{\Gamma}^+ - \lambda_{\Gamma}^-}.$$

В случае равенства  $\operatorname{tg} \varphi_1$ ,  $\operatorname{tg} \varphi_2$  и  $\operatorname{tg} \varphi_3$  можно говорить о примерно равном влиянии соответственно параметрам факторов  $(\lambda_{\Phi}$  и  $\lambda_{Д})$ ,  $(\lambda_{\Gamma}$  и  $\lambda_{Д})$  и  $(\lambda_{\Phi}$  и  $\lambda_{\Gamma})$ . Если  $\operatorname{tg} \varphi_1 < 1$ , то это говорит о преобладающем влиянии фактора  $\lambda_{Д}$  над  $\lambda_{\Phi}$ , которое тем сильнее, чем ближе к нулю величина  $\operatorname{tg} \varphi_1$ . И, наоборот, чем больше единицы  $\operatorname{tg} \varphi_1$ , тем сильнее влияние на вектор отклика фактора  $(\lambda_{\Phi})$  над фактором  $(\lambda_{Д})$ .

С учетом вышеизложенного, предлагается для каждого  $k$ -го варианта организации вычислительного процесса и рабочей нагрузки вычислять

значения  $\text{tg } \varphi_{1k}$ ,  $\text{tg } \varphi_{2k}$  и  $\text{tg } \varphi_{3k}$ . Одновременно с этим необходимо вычислять для каждого отклика  $Y_{jk}$  (под  $j$  понимаем соответственно  $\eta_{ЦП}$ ,  $\eta_{ВЛ}$ ,  $\Gamma_{\Phi}$ ,  $\Gamma_{Д}$ ,  $\Gamma_{Т}$  и  $\Delta_{нл}$ ) величину относительного приращения отклика  $Y_j$ , при переходе от точки  $(\lambda_{\Phi}^-, \lambda_{Д}^-, \lambda_{Т}^-)$ , что соответствует  $(Y_j^-)$ , к точке  $(\lambda_{\Phi}^+, \lambda_{Д}^+, \lambda_{Т}^+)$ , что соответствует  $(Y_j^+)$ .

Расчеты необходимо вести по следующим формулам:

$$\delta_1 = \frac{2(\eta_{ЦП}^+ - \eta_{ЦП}^-)}{\eta_{ЦП}^+ + \eta_{ЦП}^-}; \quad \delta_2 = \frac{2(\Gamma_{\Phi}^+ - \Gamma_{\Phi}^-)}{\Gamma_{\Phi}^+ + \Gamma_{\Phi}^-};$$

$$\delta_3 = \frac{2(\Gamma_{Т}^+ - \Gamma_{Т}^-)}{\Gamma_{Т}^+ + \Gamma_{Т}^-}; \quad \delta_4 = \frac{2(\Gamma_{Д}^+ - \Gamma_{Д}^-)}{\Gamma_{Д}^+ + \Gamma_{Д}^-};$$

$$\delta_5 = \frac{2(\eta_{ВЛ}^+ - \eta_{ВЛ}^-)}{\eta_{ВЛ}^+ + \eta_{ВЛ}^-}.$$

Потом составляется таблица, в которой для  $k$ -го варианта вычислительного процесса (в  $k$ -й строке) указывается следующая информация: номер варианта  $k$ ,  $\text{tg } \varphi_{1k}$ ,  $\text{tg } \varphi_{2k}$ ,  $\text{tg } \varphi_{3k}$ ,  $\eta_{ЦПk}^0$ ,  $\delta_{1k}$ ,  $\eta_{ВЛk}^0$ ,  $\delta_{5k}$ ,  $\Gamma_{\Phi k}^0$ ,  $\delta_{2k}$ ,  $\Gamma_{Тk}^0$ ,  $\delta_{3k}$ ,  $\Gamma_{Дk}^0$ ,  $\delta_{4k}$ . Здесь под  $\eta_{ЦПk}^0 - \Gamma_{Дk}^0$  понимается значение соответствующего отклика в серединной точке диапазона рабочей области исследований. Ранжируя  $X_{ik}$  по  $\text{tg } \varphi_{ik}$  по приращению откликов  $Y_{ik}$  по  $\delta_{1k}$ ,  $\delta_{2k}$ ,  $\delta_{3k}$  и  $\delta_{4k}$  судят о том, какой из факторов  $X_i$  является определяющим.

**Шаг 3.** Оценка степени загрузки процессора обслуживанием запросов пользователей при обращении к информационной базе данных узла локальной вычислительной сети. Для этой цели необходимо суммировать  $\eta_{mj}$  модулей, обслуживающих запросы информационной базы данных.

Можно выделить четыре таких модуля:

МОБ – обработка процессором информации, содержащейся в информационной базе данных ( $\eta_{МОБ}$ );

МКО – корректировка процессором информации в информационной базе данных ( $\eta_{МКО}$ );

МУД – удаление информации из информационной базы данных ( $\eta_{МУД}$ );

МОТ – формирование отчета процессора об обработке информации из информационной базы данных ( $\eta_{МОТ}$ ).

Вычислив суммарную загрузку этих модулей

$$\eta_{ИБД} = \eta_{МОБ} + \eta_{МКО} + \eta_{МУД} + \eta_{МОТ};$$

находим удельный вес этих модулей в общей загрузке процессора:

$$\Theta = \frac{\eta_{ИБД}}{\eta_{ЦП\Sigma}}, \text{ где } \eta_{ЦП\Sigma} = \sum_{j=1}^7 \eta_{mj}.$$

Абсолютное значение  $\eta_{ИБД}$  показывает, сколько ресурса времени работы процессора требуется

для обслуживания числа диалоговых ( $N_{Д}$ ) и числа транзитных ( $N_{Т}$ ) запросов пользователей. Затем находим расход ресурса процессора на одного пользователя (диалогового или транзитного) для  $k$ -го варианта организации вычислительного процесса и рабочей нагрузки:

$$\varpi_k = \frac{\Theta_k}{N_{Д} + N_{Т}}.$$

Далее можно говорить о наличии запаса мощности процессора у узла локальной вычислительной сети при  $k$ -м варианте организации вычислительного процесса и рабочей нагрузки. Эта сторона организации вычислительного процесса оценивается возможным количеством дополнительного подключения к узлу пользователей ( $\Delta n_{Дk}$ ), которое вычисляется по формуле

$$\Delta n_{Дk} = \frac{1 - \eta_{ЦП\Sigma}}{\varpi_k}.$$

Рассматривая изменение величин откликов  $k$ -го варианта вычислительного процесса и рабочей нагрузки при варьировании вектора интенсивностей  $(\lambda_{\Phi}, \lambda_{Т}, \lambda_{Д})$  в диапазоне их изменения от максимального до минимального значения, можно судить об устойчивости организации вычислительного процесса по обслуживанию запросов информационной базы данных и об сбалансированности этой стороны вычислительного процесса в узле локальной вычислительной сети.

Для анализа необходимо исследовать влияние фактора  $\lambda_{Д}$ , варьируемого в пяти точках – от максимального до минимального значений, при фиксированных значениях остальных факторов в серединной точке  $(\lambda_{\Phi}^0, \lambda_{Т}^0)$  интервала их изменения. Зависимости вида  $\eta_{ИБД} = \Psi_1(\lambda_{Д})$  и  $\Delta n_{Дk} = \Psi_2(\lambda_{Д})$  позволят установить характер изменения коэффициента использования процессора заказами информационной базы данных и запаса мощности узла локальной вычислительной сети при  $k$ -м варианте организации вычислительного процесса и рабочей нагрузки.

**Шаг 4.** Оценка качества обслуживания узлом локальной вычислительной сети запросов пользователей разных типов осуществляется по статистике среднего времени цикла их обслуживания, которая вычисляется в ходе моделирования  $k$ -го варианта организации вычислительного процесса и рабочей нагрузки:

$\Gamma_{Тk}$  и  $\Gamma_{\Phi k}$  – среднее время обслуживания заказа фонового и транзитного пользователей;

$\Gamma_{Дk}$  – среднее время цикла взаимодействия пользователя с узлом локальной вычислительной сети в диалоговом режиме.

**Шаг 5.** Анализ зависимости компонент вектора откликов от скорости работы процессора узла локальной вычислительной сети.

Зафиксировав значение двух параметров вектора интенсивностей  $X_i$  в области рабочей точки  $(\lambda_\phi^0, \lambda_T^0)$  значение фактора  $\lambda_d$  варьируем значения в пяти точках от max до min. Для каждого варианта будет изменяться значение скорости работы процессора узла локальной вычислительной сети  $(\vartheta_p)$ . В ходе исследований определяется вектор откликов  $Y_j$  и составляются таблицы для каждого отклика. Мы можем задать значение отклика для соответствующего варианта рабочей нагрузки. Таблицы составляются для следующих откликов:  $\eta_{цпн}$ ,  $\eta_{впн}$ ,  $T_{\phi}$ ,  $T_T$ ,  $T_d$ . Анализ значений откликов, представленных в таблицах, позволяет установить:

1) характер и диапазоны изменения откликов  $\eta_{цпн}$ ,  $\eta_{впн}$  при варьировании  $\vartheta_{pl}$  в диапазоне от 0,666 до 6,66;

2) характер показателей качества обслуживания пользователей и диапазоны их изменений от  $(T_T, T_\phi, T_d)$  при варьировании  $\vartheta_{pl}$  в тех же диапазонах их изменения.

Дополнительно в ходе имитационного эксперимента при меняющихся значениях скорости работы процессора  $(\vartheta_{pl})$  фиксировалась статистика  $\eta_{mj}$ ,  $l_{очерj}$ ,  $t_{ожj}$  у каждого из семи ПМ<sub>j</sub> ( $j = 1-7$ ). По этой статистике можно дополнительно оценить, как меняется распределение «узких мест» в организации вычислительного процесса и рабочей нагрузки при изменении скорости работы процессора  $(\vartheta_{pl})$ .

**Шаг 6.** Анализ зависимости компонент вектора откликов от размера информационной базы данных.

Для этого используется дополнительный параметр  $V_{ИБдк}$ , означающий размер информационной базы данных локальной вычислительной сети у  $k$ -го варианта организации вычислительного процесса и рабочей нагрузки. Устанавливаем 3 уровня значений  $V_{ИБдк}$ : минимальный ( $V_{ИБдк1}$ ), средний ( $V_{ИБдк2}$ ) и большой ( $V_{ИБдк3}$ ). Необходимо построить зависимость откликов от размера информационной базы данных:

$$Y_{jkl} = \Phi_4(V_{ИБдкс}); s = 1, 2, 3,$$

при следующих условиях постановки имитационного эксперимента:

– фиксированных значениях интенсивностей запросов транзитных и фоновых пользователей в срединной точке области их изменений  $(\lambda_\phi^0, \lambda_T^0)$  для узла локальной вычислительной сети;

– пяти вариациях значения фактора  $\lambda_d$  от максимального до минимального уровня;

– пяти уровнях изменения скорости процессора узла сети в диапазоне от 0,666 до 6,66.

В ходе исследований определяется вектор откликов  $Y_j$  и составляются таблицы для каждого

отклика. В таблице задается значение отклика для соответствующего варианта рабочей нагрузки. Таблицы составляются для следующих откликов:  $\eta_{цпн}$ ,  $\eta_{впн}$ ,  $T_{\phi}$ ,  $T_T$ ,  $T_d$ . Анализ значений откликов, представленных в таблицах, позволяет установить:

– характер и диапазоны изменения откликов  $\eta_{цпн}$ ,  $\eta_{впн}$  при варьировании  $V_{ИБд}$ ;

– характер показателей качества обслуживания пользователей  $(T_\phi, T_T, T_d)$  и зависимость диапазона их изменений от варьирования  $V_{ИБд}$ .

Дополнительно в ходе имитационного эксперимента, также, фиксировались статистики  $\eta_{mj}$ ,  $l_{очерj}$ ,  $t_{ожj}$  у каждого программного модуля. По этой статистике можно дополнительно оценить, как меняется распределение «узких мест» в организации вычислительного процесса и рабочей нагрузки при изменении объема информационной базы данных ( $V_{ИБд}$ ).

**Шаг 7.** Сравнение вариантов организации вычислительного процесса в сети при заданной рабочей нагрузке. Согласно работе [1] для выбора оптимального варианта реализации вычислительного процесса при конкретной рабочей нагрузке необходимо провести комплексную оценку откликов системы. Наиболее удобным средством для этого является метод «свертывания» матриц векторов откликов и параметров системы в матрицу скаляров на основе весовых коэффициентов.

Пусть  $E$  – некоторая матрица, элементы которой  $e_{ij}$  – скаляры состояний системы, которые вычисляются по формуле:

$$e_{ij} = \eta_{CPU}\delta_1 + \eta_{HDD}\delta_2 + \rho_1\delta_3 + \rho_2\delta_4 + \rho_3\delta_5,$$

где  $\rho_i = \frac{q_i}{q_{i\max}}$ ;  $q_i = \frac{1}{T_{ji}}$ ;  $0 \leq \rho_i \leq 1$ ;  $i = \overline{1,6}$ ;  $j = \overline{1,15}$ .

Для вычисления скаляра предлагается шесть основных стратегий.

1. Равновероятная стратегия, где все составляющие вектора откликов сети имеют одинаковый вес:

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \delta_5 = 0,2.$$

2. Стратегия с равнозначно усиленным влиянием откликов качества использования оборудования над остальными откликами вычислительного процесса

$$\delta_1 = \delta_2 = 0,35; \delta_3 = 0,1; \delta_4 = \delta_5 = 0,05.$$

3. Стратегия с сильным влиянием отклика качества обслуживания диалоговых задач  $(T_d)$ :

$$\delta_1 = \delta_2 = 0,1; \delta_3 = 0,4; \delta_4 = \delta_5 = 0,2.$$

4. Стратегия с сильным влиянием отклика загрузки процессора:

$$\delta_1 = 0,6; \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \delta_5 = 0,1.$$

5. Стратегия с усиленным влиянием откликов качества использования процессора при сильном влиянии на вычислительный процесс загрузки жесткого диска:

$$\delta_1 = 0,2; \delta_2 = 0,6; \delta_3 = 0,1; \delta_4 = \delta_5 = 0,05.$$

6. Стратегия с усиленным влиянием загрузки процессора и сильным влиянием качества обслуживания диалоговых задач  $T_d$ :

$$\delta_1 = 0,2; \delta_2 = 0,1; \delta_3 = 0,6; \delta_4 = \delta_5 = 0,05.$$

Существует несколько правил выбора оптимальных вариантов после проведения расчетов. Для этого используем следующие критерии:

1. Усредненная характеристика качества вычислительного процесса

$$\max_j \left( e_{ir} = \frac{1}{2} (\max_i e_{ij} + \min_i e_{ij}) \right); \quad i = \overline{1,5}; \quad j = \overline{1,15}.$$

2. Оптимистическая оценка качества вариантов организации вычислительного процесса

$$\max_j (e_{ir} = (\max_i e_{ij})); \quad i = \overline{1,5}; \quad j = \overline{1,15}.$$

3. Пессимистическая оценка качества организации вычислительного процесса

$$\max_j (e_{ir} = (\min_i e_{ij})); \quad i = \overline{1,5}; \quad j = \overline{1,15}.$$

4. Оценка нейтралитета влияния факторов на организацию вычислительного процесса на локальную вычислительную сеть:

$$\max_j e_{ir} = \frac{1}{5} (\sum_i e_{ij}); \quad i = \overline{1,5}; \quad j = \overline{1,15}.$$

5. Критерий «сожалений» Севиджа от возможного наилучшего варианта

$$\min_j (e_{ir} = (\max_j e_{ij} - e_{ij})); \quad i = \overline{1,5}; \quad j = \overline{1,15}.$$

Сравнив результаты, полученные после проведения всех оценок, можно определить наилучший вариант имитационной модели для реальной системы.

**Шаг 8.** Принятие проектных решений на основе натуральных и имитационных экспериментов.

Для проведения адаптационных работ по реальной системе необходимо использовать вспомогательное специализированное программное обеспечение, которое определяет изменение степени деформации вычислительного процесса в результате изменения характеристик нагрузки либо характеристик аппаратной базы.

В качестве такого программного обеспечения предлагается использовать систему комбинированной имитации, на вход которой подается

рабочая нагрузка в виде таблиц распределений вероятностей переходов, полученных в результате анализа журнала статистики, собранной на данной аппаратной базе, и характеристик системы.

На выходе системы будет сформирован журнал статистики имитационного эксперимента, который можно обрабатывать теми же средствами, что и журнал реальной статистики.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Demidenko, O.M. Tools and technique of monitoring resource distribution for design simulation of organization of information processing / O.M. Demidenko // Journal of automation, mobile robotics & intelligent systems. – 2009. – Vol. 3, № 4. – С. 118–120.

2. Демиденко, О.М. Сравнительный анализ математических методов повышения надежности информационных и технических систем / О.М. Демиденко, А.И. Кучеров // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 1 (22). – С. 92–97.

3. Хобня, А.И. Концептуальная модель механизмов обеспечения качества обслуживания в сетях с коммутацией пакетов / А.И. Хобня, В.Д. Левчук, О.М. Демиденко // Информатика. – 2016. – № 2. – С. 78–87.

4. Расчет надежности и безопасности технологических процессов производства с элементами потенциальной опасности / О.М. Демиденко, В.С. Смородин, Е.И. Сукач, Ю.В. Жердецкий // Математические машины и системы. – 2016. – № 2 (27). – С. 148–155.

5. Автоматизация проектного моделирования систем управления технологическими процессами производства с элементами потенциальной опасности / О.М. Демиденко, В.С. Смородин, Е.И. Сукач, Ю.В. Жердецкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 68–76.

Поступила в редакцию 02.10.17.

## АРХИТЕКТУРА ПРОГРАММНОГО ИНСТРУМЕНТАРИЯ ПО ОБЕСПЕЧЕНИЮ НАДЕЖНОСТИ УЗЛА ЛВС

А.И. Кучеров, А.В. Воруев, О.М. Демиденко, В.Д. Левчук

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*

## THE ARCHITECTURE OF SOFTWARE TOOLKIT FOR LAN NODE SECURE

A.I. Kucharau, A.V. Varuyeu, O.M. Demidenko, V.D. Liauchuk

*F. Scorina Gomel State University*

Рассматривается архитектура программного инструментария по обеспечению надежности узла ЛВС путем сбора и анализа информации о компонентах вычислительной техники и режимах ее функционирования.

**Ключевые слова:** автоматизированное рабочее место (АРМ), Windows Management Instrumentation (WMI), ODBC, SQL Server, ЛВС.

The architecture of software Toolkit for secure LAN node by gathering and analyzing information about components of computers and the modes of its functioning article is discussed.

**Keywords:** automated workplace (AWP), Windows Management Instrumentation (WMI), ODBC, SQL Server, LAN.

### Введение

На данный момент современные вычислительные системы на уровне любого предприятия представляют собой сложный комплекс из автоматизированных рабочих мест (АРМ), взаимодействующих между собой, с серверами приложений и сетевыми устройствами. Взаимодействие обеспечивается подключением всех этих АРМ и серверов в локальную или распределенную корпоративную сеть. Возникает сложная система, в которой правильная настройка и профилактические работы должны проводиться осознанно, т. е. перед выполнением регламентных работ обслуживающий персонал должен представлять, какие проблемы возникли в обслуживаемом оборудовании [1]. Особенно важным фактором можно считать знание персоналом о режимах работы узлов сети. Пользователи постоянно наращивают возможности программного обеспечения на компьютерах, поэтому сначала некоторые компьютеры, а затем и весь какой-то отдельный сегмент сети может оказаться перегруженным и начать работать не эффективно. На данный момент операционные системы компьютеров и серверов оснащены мощным диагностическим программным обеспечением [2], [3]. Это WMI-инструментарий и счетчики производительности, которые собраны в оснастку Performance Logs and Alerts (Журналы и оповещения производительности). На основе этих двух компонент можно собирать информацию о конфигурации компьютеров, режимах работы памяти, процессора, жесткого диска, сетевого адаптера.

Windows Management Instrumentation (WMI), если говорить более развернуто, – это одна из базовых технологий для централизованного

управления и слежения за работой различных частей компьютерной инфраструктуры под управлением платформы Windows.

С помощью оснастки Performance Logs and Alerts (Журналы и оповещения производительности) можно собирать данные о производительности с локальных или удаленных компьютеров. Собранные данные просматриваются в графическом виде с помощью системного монитора или экспортируются в электронные таблицы или базы данных для последующего анализа и создания отчетов.

На основе использования информации этих компонент можно создать программное обеспечение, которое было бы полезно обслуживающему персоналу для качественного выполнения профилактических и регламентных работ на узлах сети. При этом полученная информация в совокупности с информацией об интенсивности и характере использования клавиатуры и манипулятора «мышь», а также используемых программных продуктах тем или иным пользователем узла локальной вычислительной сети (ЛВС), позволит формировать идентификационный портрет пользователя ЛВС. В свою очередь, сравнивая идентификационный портрет пользователя ЛВС с текущими действиями пользователя на узле ЛВС, можно обеспечить большую защищенность узла ЛВС и тем самым увеличить его надежность [4].

### 1 Архитектура проекта

Для описания архитектуры проекта необходимо описать перечень структурных элементов, входящих в проект и отношения между ними.

Центральным элементом структуры проекта является Microsoft SQL Server 2005 (рисунок 1.1). Он выполняет основные функции, обеспечивающие целостность системы. Это управление двумя пользовательскими базами данных: CCWHCU и Counters. Вторая функция – это обеспечение обмена информацией через интерфейс ODBC приложений, работающих с базами данных.

Важным структурным компонентом является журнал производительности сервера приложений, который обеспечивает запись информации, получаемой со счетчиков производительности самого сервера и компьютеров сети, в базу данных.

Описание отношений между данными элементами структуры можно разбить на две группы: описание отношений между элементами через интерфейс ODBC и описание отношений через использование инструментария WMI.

По описанию структуры связей элементов по ODBC видно, что связь элементов WCounters.mdb и CompConfig.exe с SQL сервером возможно описать как связь один ко многим. SQL сервер обеспечивает возможность обращения по ODBC-интерфейсу нескольких приложений к любой базе данных, которая находится под его управлением. Для приложения Usertime.exe тоже возможно сделать несколько экземпляров, но это

нецелесообразно из-за функции, которую это приложение исполняет. Для опроса компьютеров и заполнения базы проще иметь одно такое приложение. Если создавать несколько приложений, то нужно обеспечить разграничение между ними, чтобы эти экземпляры не опрашивали одни и те же компьютеры. Поэтому реализация Usertime.exe предпочтительна в одном экземпляре. Для приложений CompConfig.exe и WCounters.mdb можно выделить несколько экземпляров для работы пользователей (рисунок 1.1).

Программное обеспечение, обеспечивающее работу пользователя и разработанное в соответствии с требованиями проекта, состоит из трех приложений:

1. CompConfig.exe – обеспечивает пользователю выполнение ролей с первой по пятую.
2. Usertime.exe – участвует в выполнении четвертой роли «Время работы». Это приложение выполняет функции по записи в базу данных информации о времени работы компьютеров и пользователей.
3. WCounters.mdb – обеспечивает выполнение седьмой роли «Анализ производительности».

Исходя из данной архитектуры в проекте принят нижеуказанный список ролей (таблица 1.1).

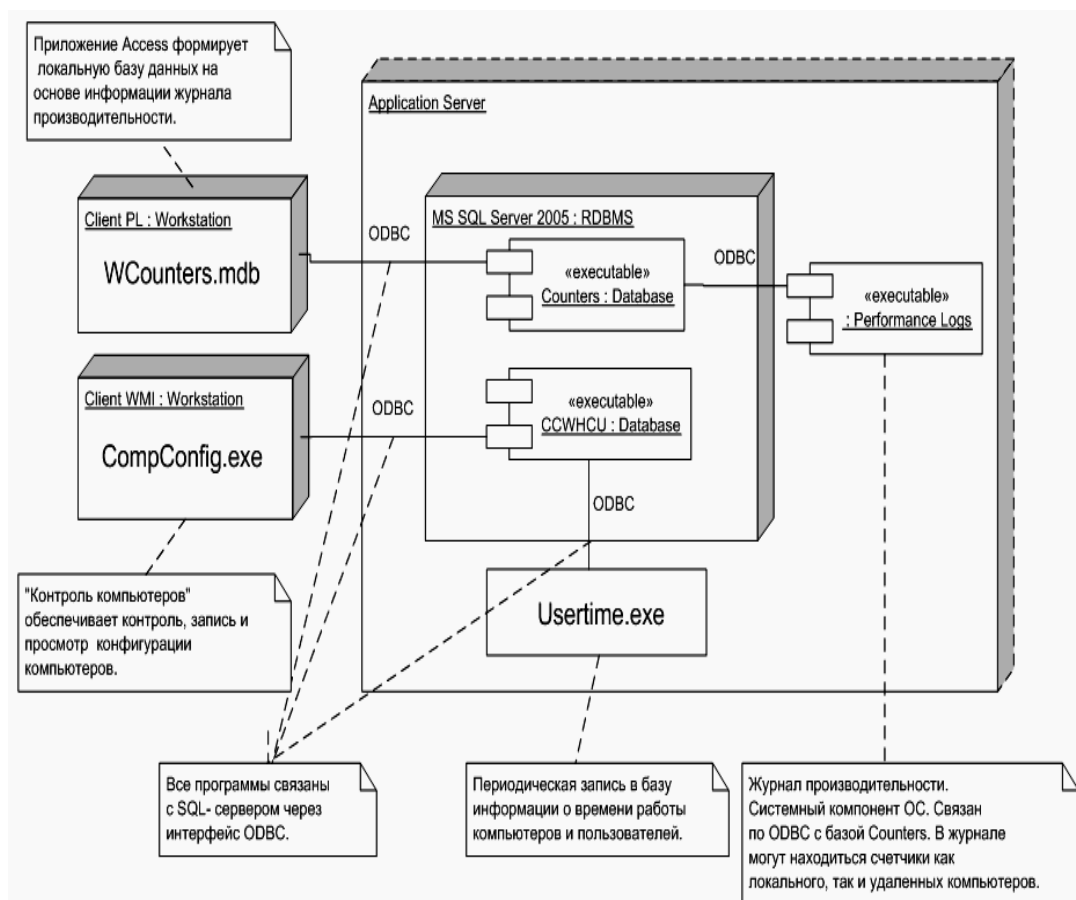


Рисунок 1.1 – Диаграмма архитектуры связей ODBC

Таблица 1.1 – Принятый список ролей

№ п/п	Наименование	Условное обозначение	Описание
1	Администратор	Admin	Ввод и редактирование в системе информации о компьютерах. Эта информация используется системой для связи с компьютерами по сети
2	График профилактик	ServiceComp	Ведение графика профилактик для каждого компьютера; ввод, просмотр и редактирование отчетов о выполненных профилактиках
3	Замена комплектующих	ReplaceParts	Ввод и редактирование информации о проведенных заменах комплектующих в компьютерах
4	Время работы	WorkHours	Просмотр времени работы компьютеров и пользователей
5	Анализ конфигураций	ConfAnalysis	Запрос текущей конфигурации компьютера по сети, запись считанной конфигурации в базу данных, просмотр списка считанных конфигураций в базе данных, чтение из базы конфигурации, выбранной пользователем
6	Журнал производительности	PerfLog	Передача в систему информации со счетчиков производительности, которые пользователь включил в журнал
7	Анализ производительности	PerfAnalysis	Выделение и группирование нужной пользователю информации из журнала производительности, запись и анализ этой информации

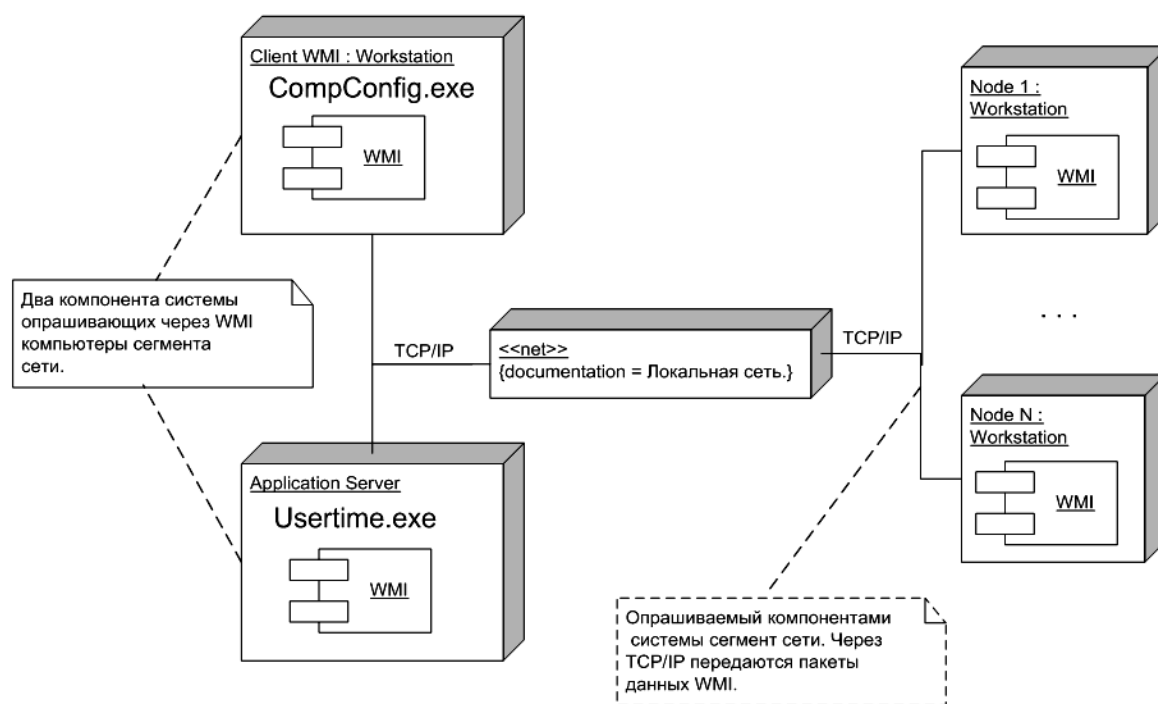


Рисунок 1.2 – Диаграмма архитектуры связи по WMI

С инструментарием WMI работают два приложения CompConfig.exe и Usertime.exe. Чтобы получить информацию о конфигурации ЭВМ сегмента сети, они обращаются к инструментарию WMI, который интегрирован в систему Windows и обеспечивает выполнение запросов к компьютерам через локальную сеть. Работа по сети нескольких экземпляров CompConfig.exe возможна и при рассмотрении работы этого приложения с компьютерами через инструментарий WMI. Если два экземпляра CompConfig.exe попытаются считать конфигурацию одного и того

же компьютера, то этот компьютер выполнит сначала один запрос, а затем второй. Поэтому у двух считанных конфигураций будет разное время регистрации и поэтому обе конфигурации могут быть записаны в базу данных (рисунок 1.2).

На основании рассмотрения архитектуры проекта к реализации проекта можно выдвинуть следующее требование: реализация баз данных и компонент CompConfig.exe и WCounters.exe должна обеспечивать возможность работы с базой данных нескольких экземпляров этих программ.

## 2 Возможности расширения проекта

Программный инструментарий может использоваться обслуживающим персоналом при планировании регламентных работ на узлах компьютерной сети. При этом формируется информация как для контроля действий обслуживающего персонала по выполнению графика профилактик и операций замены комплектующих, так и для анализа вычислительной нагрузки на узлы сети, рабочего времени компьютеров и пользователей.

При работе над проектом сделана попытка обеспечить максимальное удобство для его использования. В базу данных можно вносить не только компьютеры, которые будут опрашиваться по сети, но и вести полный список компьютеров, в том числе и списанных. Для счетчиков производительности тоже не определен жесткий перечень счетчиков, записываемых в базу данных. Любые счетчики, которые пользователь подключит в журнал производительности, могут быть записаны в базу данных для просмотра и анализа. Эти меры должны обеспечить удобство для обслуживающего персонала при работе с разрабатываемым программным обеспечением.

Анализ разрабатываемого программного проекта приводит к выводу, что у проекта есть большие возможности для расширения. Во-первых, проект можно расширять функционально. Даже на имеющейся простой базе данных можно добавлять много различных вариантов форм: по графикам профилактик, по формам статистики замен комплектующих, суммарные и разностные графики для сеансов в группах данных. Во-вторых, проект можно расширять, добавляя новые структурные элементы. Например, для базы данных компьютеров расширить структуру для хранения полной истории компьютера при передачах его от одного подразделения к другому или из одного помещения в другое. Можно расширить базу для комплектующих,

чтобы для них тоже хранилась информация о покупке, установке в компьютер и списании. Для локальной базы анализа информации счетчиков можно ввести дополнительные структурные элементы для расчета и отображения состояния отдельного узла в сети или отображения полного потока данных по сети.

Дальнейшее развитие программного обеспечения проекта может позволить создать качественный и полезный инструмент для обслуживающего персонала и в целом повысить защищенность и надежность узла локальной вычислительной сети.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кучеров, А.И. Методика повышения надежности вычислительных систем / А.И. Кучеров // Известия Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины – 2012. – № 6 (75). – С. 120–123.
2. Кучеров, А.И. Получение информации об интенсивности использовании ЭВМ с целью дальнейшего повышения ее надежности / А.И. Кучеров // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины – 2013. – № 6 (81). – С. 125–129.
3. Кучеров, А.И. Инициализация начального состояния компьютера для реализации экспериментов по надежности узла локальной вычислительной сети / А.И. Кучеров, А.В. Ворув, В.Д. Левчук // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины – 2015. – № 6 (93). – С. 64–68.
4. Демиденко, О.М. Сравнительный анализ математических методов повышения надежности информационных и технических систем / О.М. Демиденко, А.И. Кучеров // Проблемы физики, математики, техники. – 2015. – № 1 (22). – С. 92–97.

Поступила в редакцию 24.10.17.

УДК 622.23.08

## ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ГАИ г. ГОМЕЛЯ НА ОСНОВЕ WEB-СЕРВИСОВ

С.С. Судаков<sup>1</sup>, С.А. Аземша<sup>1</sup>, С.Ф. Маслович<sup>2</sup>, В.Н. Галушко<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

<sup>2</sup>Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

## INCREASE OF THE EFFICIENCY OF THE ROAD POLICE SERVICE OF THE CITY OF GOMEL ON THE BASIS OF WEB-SERVICES

S.S. Sudakov<sup>1</sup>, S.A. Azemsha<sup>1</sup>, S.F. Maslovich<sup>2</sup>, V.N. Halushko<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Belarusian State University of Transport, Gomel

<sup>2</sup>F. Scorina Gomel State University

Рассматриваются разработанные авторами web-сервисы, с помощью которых можно повысить эффективность работы службы ГАИ г. Гомеля.

**Ключевые слова:** web-приложение, web-сервис, служба ГАИ, эффективность.

The Web-services developed by the authors, with the help of which it is possible to increase the efficiency of the road police service in Gomel are considered.

**Keywords:** web-application, web-services, road police service, efficiency.

### 1 Постановка задачи

По заданию ГАИ г. Гомеля авторами был разработан сайт, включающий в себя следующие сервисы: ГИС-сервис, топографический анализ ДТП и мероприятий по повышению безопасности дорожного движения (БДД). Его основными целями являются повышение эффективности информирования граждан, снижение существующей нагрузки на сотрудников службы ГАИ, повышение безопасности дорожного движения. Данный сайт отличается оперативностью и масштабностью подачи информации, обратной online связью, а также удобным интерфейсом для донесения информации до широкого круга заинтересованных пользователей. Разработка является *актуальной*, так как на данный момент для г. Гомеля не существует отдельного сайта, обладающего информацией о структуре ГАИ, приеме обращений, правовому информированию, государственным услугам, статистике аварийности, экстренным ситуациям и другим направлениям деятельности. Информация сайта с доступным инструментарием также может быть использована как водителями, так и работниками ГАИ, дорожными, городскими службами в целях планирования и оценки качества проводимых мероприятий, анализа аварийности и мест концентрации ДТП.

При разработке и наполнении ресурса учитывались мнения специалистов по данному профилю, отечественный и зарубежный опыт – был произведен целевой анализ функционирующих сайтов службы ГАИ Беларуси, России, Армении, Грузии, Азербайджана, Польши, Сингапура и

других государств. В качестве инструментария разработки предлагается использовать современные средства создания web-приложений [1]–[3].

### 2 Описание работы web-сервиса

На основе полученного материала был сформирован информационный базис сайта, структура сайта представлена на рисунке 2.1.

В основе содержимого сайта лежат следующие разделы:

– структура ГАИ г. Гомеля, график работы подразделений, порядок приема граждан, руководство по вопросам, связанным с направлениями деятельности службы;

– сведения об административных процедурах, осуществляемых службой ГАИ: регистрация ТС (содержит необходимые документы, график проведения, стоимость услуг); экзаменационная деятельность (содержит требуемые документы для получения, восстановления, обмена водительского удостоверения, талона к нему, стоимость услуг); предоставление учебного автомобиля (мотоцикла), автодрома для сдачи практического экзамена;

– состояние безопасности и аварийности в г. Гомеле и Гомельской области;

– нормативно-правовая база в области БДД (права и обязанности участников ДД, нормативные акты в данной сфере, ответственность за нарушения ПДД);

– новости и проводимые акции в области БДД, осуществляемые мероприятия по совершенствованию организации движения.

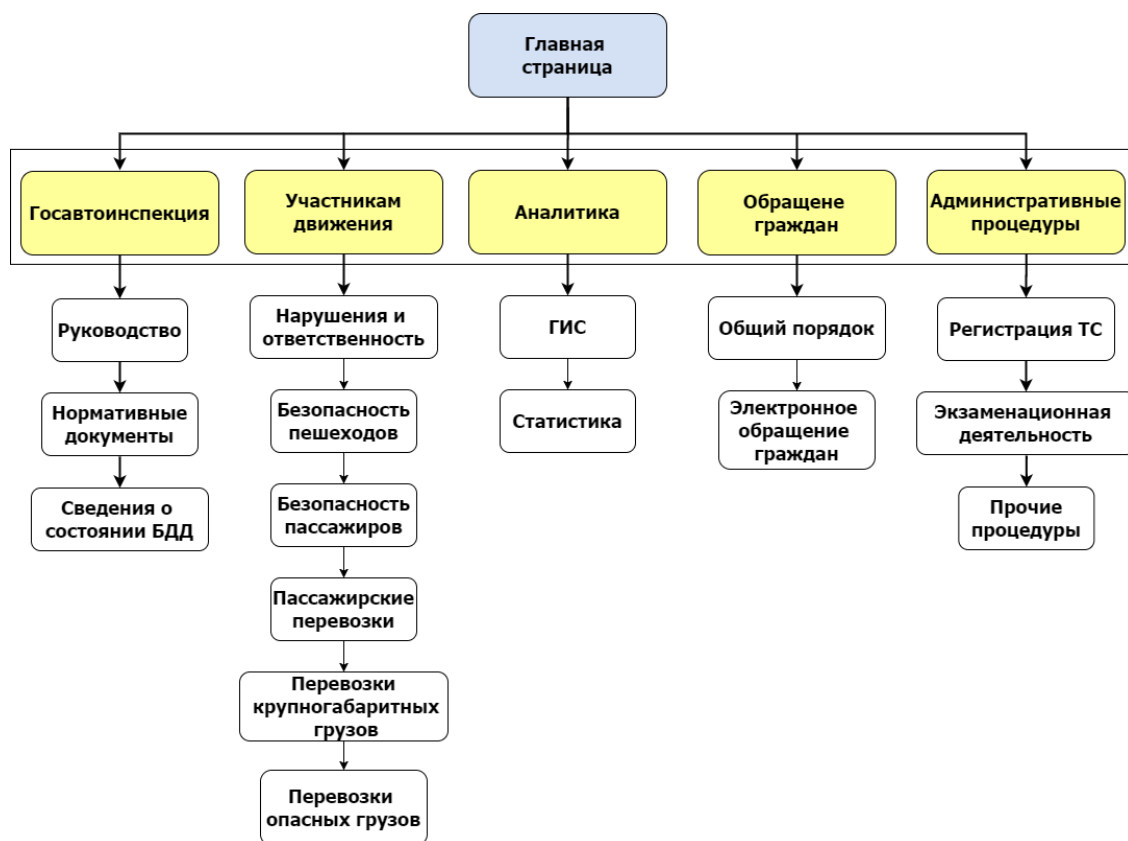


Рисунок 2.1 – Структура сайта

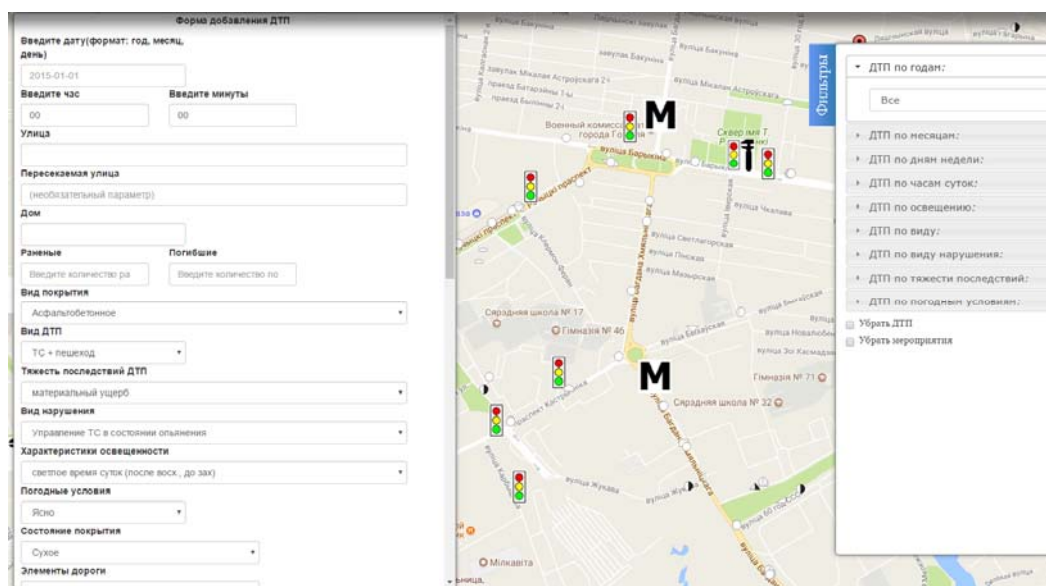


Рисунок 2.2 – Сервис ГИС ГАИ г. Гомеля

Раздел «Госавтоинспекция» включает в себя следующую информацию:

- график приема граждан руководством УГАИ Гомельского облисполкома;
- нормативно-правовые акты в сфере регулирования и организации ДД;
- суточные сводки о состоянии БДД в Гомельской области.

Раздел «Участникам движения» содержит общие сведения о правах, обязанностях и ответственности для различных участников дорожного движения, таких как: пешеходы; пассажиры; лица, осуществляющие пассажирские перевозки; лица, осуществляющие перевозки крупногабаритных грузов; лица, осуществляющие перевозки опасных грузов.

Также можно ознакомиться с информацией об ответственности за правонарушения в сфере дорожного движения.

Раздел «*Аналитика*» осуществляет связь с сервисом геоинформационной системы (ГИС) ГАИ (рисунок 2.2) [4]. Инструментарий позволяет пользователям ознакомиться с аварийностью в г. Гомеле на основании карточек учета ДТП, полученных в соответствующих службах ГАИ. Редактор добавления дорожных нарушений реализован различными способами внесения, редактирования и удаления объектов на карте.

Данное приложение сайта позволяет в достаточной мере оценить сложившуюся ситуацию и указать направления деятельности для ее урегулирования; показателем эффективного использования приложения может являться тенденция снижения количества ДТП и числа пострадавших в них людей; приложение должно стать основой для создания единой системы управления с целью мониторинга общих сведений об аварийности и по основным направлениям аварийности, анализа детского дорожно-транспортного травматизма, анализа мест концентрации ДТП.

Практическая значимость применения ГИС ГАИ состоит в повышении оперативности и обоснованности принимаемых решений, направленных на повышение БДД на основе использования современных информационных технологий. Применительно к деятельности подразделений ГАИ система решает следующие задачи: формируется единое информационно-аналитическое пространство показателей ситуации в сфере обеспечения безопасности дорожного движения; осуществляется мониторинг показателей аварийности, анализ причин, фактов, времени и мест совершения ДТП, а также характеристик участников происшествий; анализ мест концентрации ДТП на дорогах; моделирование и прогнозирование показателей БДД.

Раздел «*Обращение граждан*» предоставляет возможность связаться со структурой ГАИ Гомельской области и задать интересующие вопросы электронным способом. В подразделе «*Общий порядок*» приводится информация о графике работы подразделений УГАИ УВД Гомельского облисполкома и их контактная информация.

В разделе «*Административные процедуры*» предоставляется подробная информация о порядке проведения службой ГАИ административных процедур: регистрация транспортных средств; экзаменационная деятельность; дополнительные услуги гражданам и юридическим лицам.

В левой секции размещена ссылочная информация, позволяющая осуществить быстрый переход на нужную вкладку: о нарушениях и ответственности в области дорожного движения; о времени приема граждан в ГАИ УВД Гомельского облисполкома; ГИС службы ГАИ; Правила дорожного движения; электронное обращение.

Виджет «*Предложения по совершенствованию организации дорожного движения*» позволяет организовать взаимодействие граждан со службой ГАИ Гомельской области. С его помощью любой пользователь может сообщить о несоответствиях и нарушениях в сфере организации ДД.

Под информационным слайдером размещена новостная лента событий, в которой описываются прошедшие события, актуальные сведения в области дорожного движения.

Элемент «*Сообщить о нарушении ПДД*» позволяет гражданам проинформировать службу ГАИ о правонарушении в сфере дорожного движения с помощью заполнения соответствующей формы.

### Заключение

Сайт уже размещен в сети и проходит предварительное рабочее тестирование. Внедрение сайта с расположенными на нем web-сервисами, позволит повысить эффективность информирования граждан, снизит существующую нагрузку на сотрудников службы ГАИ, повысит безопасность движения. Применение разработанного ресурса позволит сформировать информационно-аналитическое пространство со свободным доступом к материалам в сфере обеспечения безопасности дорожного движения. Информация сайта может быть использована как участниками дорожного движения, так и дорожными, городскими службами в целях анализа аварийности и мест концентрации ДТП; планирования, разработки, осуществления и оценки проводимых мероприятий по снижению аварийности. Применение возможностей сайта позволит значительно снизить существующую нагрузку на сотрудников службы ГАИ, тем самым повышая производительность и качество выполнения работы. Также необходимо отметить, что инструментарий приложения не имеет завершенной формы, так как может использоваться для других целей.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Дакетт, Дж.* Основы веб-программирования с использованием HTML, XHTML и CSS / Дж. Дакетт. – Изд-во: «Эксмо», 2010. – 768 с.
2. *МакДональд, М.* Создание Web-сайтов. Основное руководство / М. МакДональд. – Изд-во: «Эксмо», 2010. – 767 с.
3. *Уильямс, Б.* WordPress для профессионалов / Б. Уильямс, Д. Дэмстра, Х. Стэрн. – Изд-во «Питер», 2014. – 464 с.
4. *Разработка сервиса фиксирования дорожных объектов на web-картах* / А.А. Филиппов, С.Ф. Маслович, В.Н. Галушко, С.А. Аземша // Совершенствование организации дорожного движения и перевозок пассажиров и грузов: Сборник научных трудов Международной научно-практической конференции. – Минск, БНТУ, 2016. – С. 360–369.

Поступила в редакцию 10.07.17.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

## GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;

- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).