



ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№1 (30) 2017

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:
С.А. Хахомов (Беларусь)

**ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО
РЕДАКТОРА:**
А.В. Рогачёв (Беларусь)
О.М. Демиденко (Беларусь)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

EDITOR-IN-CHIEF:
S.A. Khakhomov (Belarus)

DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:
A.V. Rogachev (Belarus)
O.M. Demidenko (Belarus)

EDITORIAL BOARD:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

EXECUTIVE SECRETARY:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

EDITION ADDRESS:
F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 1 (30) 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

- Абрамович Н.Д., Дик С.К.** Оптимизация воздействия света на эндогенные порфирины в мягких биотканях 7
- Гиргель С.С.** Бездифракционные асимметричные волновые поля Бесселя непрерывного порядка 13
- Сидский В.В., Семченко А.В., Колос В.В., Петлицкий А.Н., Солодуха В.А., Ковальчук Н.С.** Влияние условий обработки на структуру и сегнетоэлектрические свойства SBTN-плёнок, полученных золь-гель методом 17
- Шершнев Е.Б., Никитюк Ю.В., Соколов С.И., Шершнев А.Е.** Особенности применения лазерного излучения с длинами волн 1064 нм, 532 нм и 266 нм для обработки кристаллов алмаза 22

МАТЕМАТИКА

- Белоконь Л.М.** Нормальная факторизуемость субнормальной в конечной группе подгруппы в связи с локальными формациями и обобщёнными подгруппами Фраттини. Формационные радикалы 25
- Жогаль С.П., Жогаль С.И., Клименко А.В.** Исследование случайных автоколебательных систем с одной степенью свободы методом канонических разложений 37
- Козел А.Г.** Математическая модель деформирования круговой трехслойной пластины на основании Пастернака 42
- Костюкова О.И., Кулагина М.В.** Критерий оптимальности для задач полубесконечного программирования с вполне выпуклыми функциями ограничений 47
- Мироненко В.И., Мироненко В.В.** Возмущения линейных дифференциальных систем, не изменяющие отображение Пуанкаре 54
- Покатилов А.Е., Киркор М.А.** Проблемы исследования механики движения опорно-двигательного аппарата человека 59
- Русаков А.Д.** О неполуассоциативности полиадической операции $\eta_{s, \sigma, k}$ 68
- Сидорцов М.В., Старовойтова Н.А., Старовойтов А.П.** Об асимптотике аппроксимаций Эрмита – Паде второго рода для экспоненциальных функций с комплексными множителями в показателях экспонент 73

ТЕХНИКА

- Бейтюк Ю.Р., Себровская Г.П., Рамазанов В.М.** Программный эмулятор PC-совместимого контроллера ADAM 5510M для компилятора Borland Turbo C++ 3.0 78
- Головнич А.К.** Моделирование состояний объектов технической системы с реконструкцией физических процессов 86

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Г. Н. Петухова, Т. А. Фицнер*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 10.03.17. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 10,93. Уч.-изд. л. 9,52. Тираж 100 экз. Заказ № 178.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246019, Гомель

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2017
© Проблемы физики, математики и техники, 2017
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2017

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 1 (30) 2017

CONTENTS

PHYSICS

- Abramovich N.D., Dick S.K.** Optimization effect of light on endogenous porphyrins in soft biological tissues 7
- Girgel S.S.** Diffraction free asymmetric Bessel wave fields of the continuous order 13
- Sidsky V.V., Semchenko A.V., Kolos V.V., Pyatlitski A.N., Solodukha V.A., Kovalchuk N.S.** Effect of heat treatment conditions on the structure and ferroelectric properties of SBTN-films synthesized by sol-gel method 17
- Shershnev E.B., Nikitjuk Y.V., Sokolov S.I., Shershnev A.E.** Features of laser radiation with 1064 nm, 532 nm, and 266 nm for the treatment of the crystals of diamond 22

MATHEMATICS

- Belokon L.M.** A normal factorization of a subnormal subgroup of some finite group in connection with local formations and generalized Frattini subgroups. Formation radicals 25
- Zhogal S.P., Zhogal S.I., Klimenko A.V.** Investigation of stochastic self-oscillatory systems with one degree of freedom by method of canonical representations 37
- Kozel A.G.** Mathematical model of deformation of the circular three-layer plate on the basis of Pasternak 42
- Kostyukova O.I., Kulahina M.V.** Optimality criterion for semi-infinite programming problems with faithfully convex constraint functions 47
- Mironenko V.I., Mironenko V.V.** The linear systems perturbations, which do not change Poincaré mapping 54
- Pokatilov A.E., Kirkor M.A.** Problems of research of mechanics of locomotion of the locomotor apparatus of the person 59
- Rusakou A.D.** On nonsemiassociativity of polyadic operation $\eta_{s, \sigma, k}$ 68
- Sidortsov M.V., Starovoitova N.A., Starovoitov A.P.** Asymptotics of the type II Hermite – Padé approximation of exponential functions with complex multipliers in the exponent 73

TECHNICS

- Beytuk Yu.R., Sebrovskaya G.P., Ramazanov V.M.** Emulation software of PC-compatible controller ADAM 5510M for the compiler Borland Turbo C ++ 3.0 78
- Golovnich A.K.** Modeling condition of objects of the technical system with the reconstruction of physical processes 86

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

- **Technics (Informatics, Computer Science and Control);**
- **Physics and Mathematics.**

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 535.34; 535.36; 577.344

ОПТИМИЗАЦИЯ ВОЗДЕЙСТВИЯ СВЕТА НА ЭНДОГЕННЫЕ ПОРФИРИНЫ В МЯГКИХ БИОТКАНЯХ

Н.Д. Абрамович, С.К. Дик

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

OPTIMIZATION EFFECT OF LIGHT ON ENDOGENOUS PORPHYRINS IN SOFT BIOLOGICAL TISSUES

N.D. Abramovich, S.K. Dick

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

Смоделированы спектры действия света на хромофоры кожи. В качестве целевых хромофоров выбраны эндогенные порфирины. Реагируя на облучение в ткани, они могут производить синглетный кислород (СК), действуя как естественный фотосенсибилизатор. СК токсичен для раковых клеток. Этот процесс, как известно, широко используются в фотодинамической терапии (ФДТ). Установлено, что облучение на длинах волн в диапазоне от 610 до 630 нм значительно стимулирует выработку СК эндогенными порфиринами по всей толщине дермы (в 2–3 раза в слое дермы на глубине $z < 0.15$ мм; до 10–12 раз в слое дермы $z \geq 0.15$ мм) по сравнению с облучением в абсолютных максимумах поглощения (приблизительно около 501 нм для уропорфирина (UpIII), 495 нм для копропорфирина (CpIII) и 505 нм для протопорфирина (PpIX)). Представленные результаты могут дать новые возможности для выбора длин волн облучения при применении традиционных методов ФДТ.

Ключевые слова: многослойные биологические ткани, кожа, синглетный кислород, эндогенные порфирины, уравнение переноса излучения, спектры действия света.

Light action spectra for skin chromophores are simulated. Endogenic porphyrins (Pp IX, Cp III, and Up III) are selected as target chromophores. They can produce singlet oxygen (SO) under tissue irradiation, which acts as a natural photosensitizer. The SO is toxic for cancer cells. This process is known to be widely used in photodynamic therapy (PDT). The irradiation at wavelengths ranging from 610 to 630 nm is significantly stimulates the production of endogenous porphyrins SO over the entire thickness of the dermis (2–3 times dermis at a depth $z < 0.15$ mm; 10–12 times dermis $z \geq 0.15$ mm) compared with exposure to absolute absorption maxima (at about 501 nm for uroporphyrin (UpIII), 495 nm for coproporphyrin (CpIII) and 505 nm for protoporphyrin (PpIX)). The presented results can provide new opportunities for the selection of the irradiation wavelengths under application of traditional PDT methods.

Keywords: soft biological tissue, singlet oxygen, endogenic porphyrins, radiative transfer equation, light action spectra.

Введение

Одной из центральных проблем фотобиологии и биофизики является выявление фундаментальных основ чувствительности организмов к оптическому излучению различных спектральных диапазонов и интенсивностей, в том числе к повреждающему действию света. Свет может индуцировать протекание как прямых, так и сенсибилизированных деструктивных процессов.

Важной характеристикой воздействия света на биологические объекты является спектр фотобиологического действия – зависимость биологического эффекта от длины волны воздействующего света. Одна из задач при изучении фотобиологических процессов – определение вещества, которое поглощает действующее излучение и, тем самым, участвует в первых стадиях процесса. Для этого изучают спектр фотохимического действия и сравнивают его со спектрами поглощения предполагаемых участников реакции.

Экспериментально обнаружено, что клетки органов организма больного могут накапливать и удерживать некоторое время и находящиеся в организме порфирины [1]–[4]. ФДТ как лечебная

процедура была предложена еще в 1900 году [5]. Известно, что ФДТ активно используется в борьбе с раковой опухолью. Онкологические клетки накапливают фотосенсибилизаторы (ФС) в больших концентрациях и на более длительное время, чем здоровые клетки организма. Однако без светового воздействия на опухоль сам по себе ФС, в нашем случае порфирин, не может летально повлиять на онкологические клетки. Клетки опухоли разрушаются под действием активных форм кислорода, которые образуются в процессе фотохимической реакции. Для получения цитотоксического (фототоксического) эффекта следует насыщать организм специфичными для онкологических клеток порфиринами, после чего поглощение онкологическими клетками света будет проходить более активно.

Порфирины являются фотосенсибилизаторами и поэтому резко усиливают чувствительность организма к действию световых лучей и используются в качестве ФС для эффективного селективного разрушения злокачественных опухолей [6], [7].

Общепризнано, что молекула ФС в триплетном состоянии реагирует с O_2 в основном состоянии и переводит его в возбужденное синглетное состояние, находясь в котором СК является основным активным цитотоксическим агентом для фотодинамической терапии раковых тканей в живом организме. Синглетный кислород (СК) химически очень активен: он окисляет белки и другие биомолекулы и тем самым разрушает внутренние структуры опухолевой клетки [8]. Клетка становится нежизнеспособной, и ее поедают фагоциты. Стоит отметить, что кроме уничтожения раковых клеток есть еще один важный эффект: ФДТ вызывает повреждение внутри опухоли самих кровеносных сосудов, обеспечивающих питание и доставку к ней кислорода. А без питательных веществ опухоль голодает и в результате погибает. Таким образом, воздействие идет с двух сторон – происходит разрушение клетки изнутри без питания снаружи.

ФС на основе порфирина, используются для ФДТ рака мочевого пузыря, легкого, пищевода, желудка, кожи и шейки матки [7]. Максимальное поглощение порфиринов приходится на полосу Сорэ (360–400 нм), четыре меньших пика поглощения располагаются в диапазоне от 500 до 635 нм.

В организм человека порфирины или поступают вместе с пищей (экзогенные) или синтезируются (эндогенные) в нем.

Эндогенными порфиринами у человека и многих животных являются протопорфирин III типа (изомер IX), уропорфирины I и III типов и копропорфирины типа I и III [9].

Протопорфирин образуется в костном мозге (около 300 мг/сут) и почти полностью используется для образования гема в процессе биосинтеза гемоглобина. В нормальных эритроцитах содержится от 2 до 20 мкг % протопорфирина на 100 мл эритроцитов. Особенно богаты протопорфирином ретикулоциты, но еще богаче «флуоресциты», количество которых составляет 0,1% общего числа эритроцитов. Большое количество данного порфирина содержится также в мегалобластах и эритроцитах.

Уропорфирины представляют собой порфирины, возникающие в организме при образовании гема. В дальнейшем они превращаются в копропорфирины.

Эндогенные порфирины разносятся кровью по всему организму и могут служить естественными ФС для фотодинамической терапии. Чем больше фотонов возбуждающего света поглощает порфирин, тем больше образуется число возбужденных молекул сенсibilизатора. ФС передает энергию кислороду, переводя его в низшее синглетное состояние. Чем больше СК образуется, тем больше вероятность победы над опухолью.

Целью данной работы является поиск длины волн, обеспечивающих максимальную генерацию

СК, или, другими словами, обеспечение максимальной поглощенной энергии света. Идея оптимизации заключается в следующем: оптические свойства мягких биотканей, особенно коэффициенты их поглощения, спектрально избирательны, так что ткань действует как спектральный фильтр с комплексным коэффициентом пропускания. Свет поглощается хромофором на определенной глубине z пропорционально произведению плотности мощности на этой глубине и коэффициента поглощения хромофора. Изменяя длину волны излучения, можно изменить фильтр пропускания и, следовательно, плотность потока, чтобы максимизировать указанный эффект. Здесь очевидно, что оптимальная длина волны излучения не обязательно совпадает с максимумом коэффициента поглощения порфирина. Приведенные ниже результаты получены с помощью оптической модели биотканей [10] и аналитических методов [11]–[17] для описания переноса излучения в многослойной биоткани человека.

1 Метод моделирования

Введем понятие дифференциального эффективного показателя поглощения (ДЭП) или дифференциального спектра действия излучения, под которым будем понимать количество молекул кислорода $\alpha(z, \lambda)$, образующихся в единицу времени в единице объема на глубине z , при падении единичной плотности мощности E_0 монохроматического света на поверхность:

$$\alpha(z, \lambda) \approx \frac{\mu_a(\lambda)E(z, \lambda)}{\mu_a(\lambda_{\max})E(z, \lambda_{\max})}. \quad (1.1)$$

Здесь $\mu_a(\lambda)$ – показатель поглощения порфирина, $E(z, \lambda)$ – спектральная плотность излучения или пространственная освещенность в среде, λ_{\max} – длина волны, соответствующая максимуму поглощения конкретного порфирина. По определению,

$$E(\lambda, z) = \int_{4\pi} I(\lambda, z, \vartheta, \phi) d\Omega$$

в Вт/см², где $I(\lambda, z, \vartheta, \phi)$ – интенсивность (яркость) света как функция угловых координат ϑ и ϕ , $d\Omega = \sin(\vartheta)d\vartheta d\phi$ – элементарный телесный угол. Абсолютные (ненормированные) значения ДЭП имеют размерность см⁻³с⁻¹.

На рисунке 1.1 показаны спектры поглощения некоторых эндогенных порфиринов. Они имеют несколько пиков поглощения в видимой области, например, при $\lambda = 495\text{--}510$, $530\text{--}545$, $565\text{--}580$ и $615\text{--}630$ нм [18]–[20]. Полоса Сорэ в сине-фиолетовом диапазоне не приведена, т. к. глубина проникновения света на $\lambda = 400$ нм составляет десятки микрон. Поэтому сине-фиолетовый свет действует на слой ткани вблизи поверхности и не имеет никакого влияния на более глубокие слои дермы.

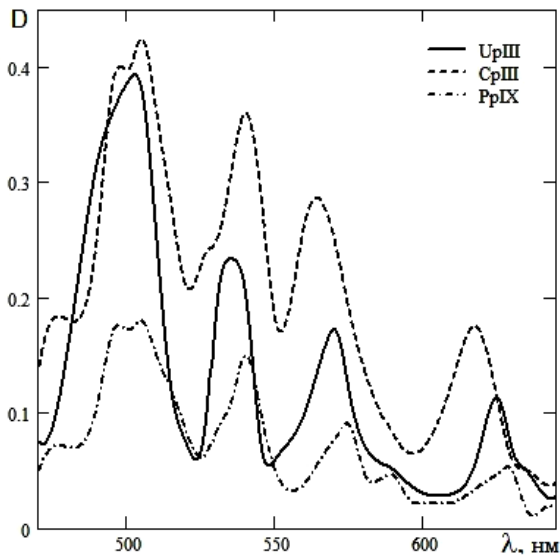


Рисунок 1.1 – Спектры поглощения уропорфирина (UrIII) (сплошной), копорпорфирина (CrIII) (штриховой), и протопорфирина (PrIX) (штрих-пунктирный) в метаноле/H₂O [21, с. 872].

Изменение оптической плотности D от длины волны λ

Проинтегрировав выражение (1.1) по толщине слоя дермы $z_2 - z_1$, получим интегральный эффективный показатель поглощения (ИЭП), характеризующий общее число молекул СК, образованных в слое дермы толщиной $z_2 - z_1$ площадью 1 см^2 за 1 с вследствие поглощения света порфирином:

$$\beta(\lambda) = \frac{\mu_a(\lambda) \int_{z_1}^{z_2} E(z, \lambda) dz}{\mu_a(\lambda_{\max}) \int_{z_1}^{z_2} E(z, \lambda_{\max}) dz}. \quad (1.2)$$

Чтобы смоделировать процесс образования СК необходимо определить плотность потока излучения E на различных глубинах и в дальнейшем рассчитывать ДЭП и ИЭП, используя уравнения (1.1) и (1.2). Световые поля в биоткани, очевидно, зависят от ее биофизических, структурных и оптических характеристик. Мы будем использовать ниже аналитические процедуры, описанные в работах [11] – [15].

Очевидно, что увеличить спектральные значения $\alpha(z, \lambda)$ и $\beta(\lambda)$ можно за счет роста E_0 (единичная плотность мощности). Это – тривиальный подход, который связан с затратами избыточной энергии, приводящей, например, к дополнительному, часто нежелательному нагреву ткани. Мы будем искать длины волн λ , которые обеспечат максимальные значения ДЭП и ИЭП для различных структурных и биофизических параметров ткани при фиксированной плотности мощности облучения поверхности.

2 Структура и оптические характеристики кожи

Исследования базируются на модели структурных и спектральных свойств слоёв в приповерхностных биотканях в диапазоне длин волн от 300 до 1000 нм. Модель была построена путем критической оценки и обобщения различных опубликованных экспериментальных и расчетных данных [11]–[20] и позволяет установить оптические и спектральные характеристики ткани по её известным структурным (толщина слоя) и биофизическим параметрам. К оптическим характеристикам, определяющим закономерности переноса излучения в среде, относятся: $\beta = \sqrt{3k\varepsilon}$ – глубинный показатель ослабления, k и $\varepsilon = \varepsilon'(1 - g)$ – соответственно показатель поглощения и эффективный показатель ослабления, ε' – показатель ослабления, g – средний косинус индикатрисы рассеяния. Спектральные характеристики показывают зависимости рассеивающих свойств слоев и затухания коэффициентов поглощения в каждом слое кожи от длины волны. Биофизическими характеристиками тканей являются: объёмная концентрация меланина C_m в эпидермисе и капилляров C_v в дерме, капиллярный гематокрит H (объёмная доля эритроцитов в капиллярах), фракция C_H объема эритроцитов, занимаемого гемоглобином, степень оксигенации крови S (отношение объема H_bO_2 к общему гемоглобину). В модели кожа состоит из трех слоев: рогового слоя, эпидермиса и дермы. Для двух последних слоев могут варьироваться объёмные концентрации меланина C_m в эпидермисе и капилляров крови C_v в дерме.

Мы будем предполагать далее, что установлены следующие параметры: $S = 0.75$, $H = 0.4$, $C_H = 0.25$. Кроме того, установим толщину рогового слоя и эпидермиса соответственно 0.02 мм и 0.1 мм. Слой дермы будем считать полубесконечным.

3 Оценка глубинной зависимости плотности энергии и спектры действия для крови и биоткани

Поглощение света, как известно, запускает процессы светового воздействия на биологические ткани. Как видно из формул (1.1) и (1.2), спектры действия света зависят от глубины распределения плотности мощности. Рассмотрим сначала зависимости E от z . Плотность потока, по существу, зависит от структуры дермы в верхних слоях кожи при $z < 2 \text{ мм}$. Как показано в [15] для равномерной и слоистой дермы, в соответствии с [17], глубинные профили плотности излучения $E(z)$ в дерме на длинах волн видимого диапазона (меньше 700–800 нм) в однородной и неоднородной по глубине дерме слабо зависят от структуры этого слоя. Поэтому далее дерму будем считать равномерным слоем и рассматривать как однородную по глубине.

Вкратце, аналитическая методика [11]–[15] для расчета световых характеристик поля в ткани включает использование нескольких известных подходов [22] для решения уравнения переноса излучения при многослойном рассеянии и поглощении в среде, имитирующую ткань кожи человека. Подходы включают малоугловое приближения, применяемое к роговому слою и эпидермису при сравнительно небольших оптических толщинах, асимптотическое приближение для оптически толстого слоя дермы и несколько световых переотражений между слоями кожи и поверхности ткани. Методика позволяет связать плотность потока с коэффициентами поглощения и рассеяния и рассеивающие свойства слоев под изображениями.

В свою очередь, модель оптической ткани [10] устанавливает отношения между оптическими параметрами среды и ее биофизическими и структурными характеристиками. Это обеспечивает представление глубины зависимостей плотности мощности в аналитических функциях

последних характеристик. Детали процедуры опубликованы [11]–[15], так что они не обсуждаются ниже.

4 Оценка оптимизации генерации синглетного кислорода при освещении эндогенных порфиринов

Характеристики ДЭП (а) и ИЭП (б) для уропорфирина (рисунок 4.1), копропорфирина (рисунок 4.2) и протопорфирина (рисунок 4.3), нормированы на соответственные значения $\lambda_{\max} = 501, 495$ и 505 нм соответственно (далее – λ_{\max}) (рисунок 1.1). Как видно из рисунков 4.1 а, 4.2 а и 4.3 а, в результате прохождения света на длине волны λ_{\max} , соответствующей максимальному поглощению, в верхних слоях дермы $z \leq 0.15$ мм (кривые 1) хромофором поглощается на определённой глубине больше фотонов возбуждающего света.

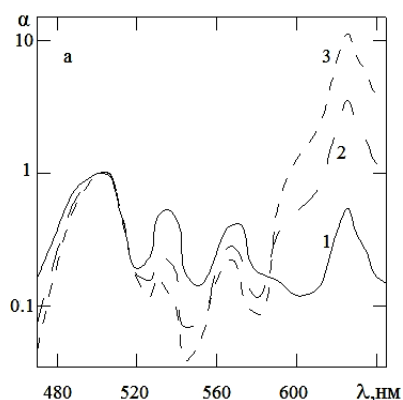


Рисунок 4.1, а)

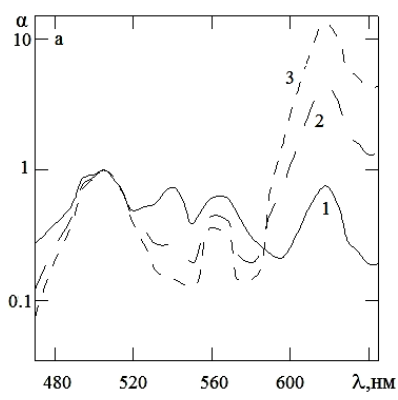


Рисунок 4.2, а)

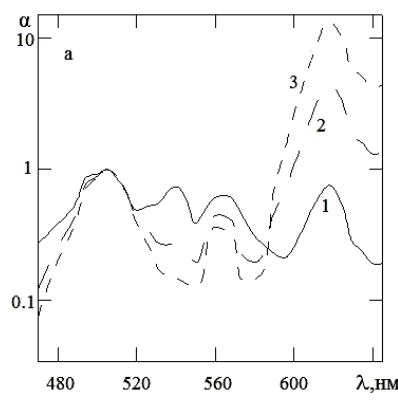


Рисунок 4.3, а)

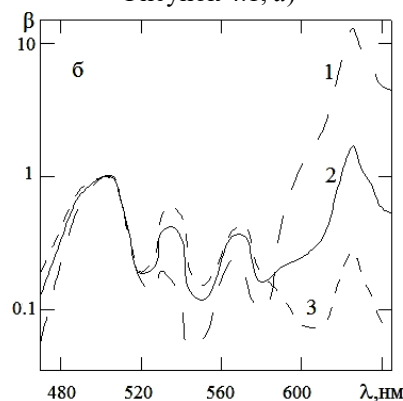


Рисунок 4.1, б)

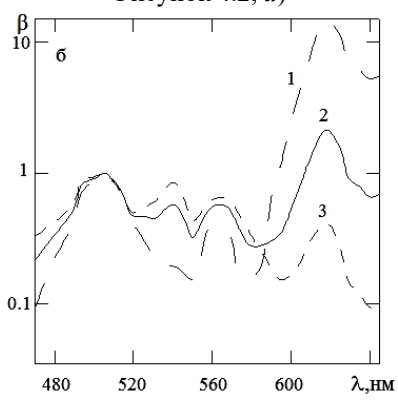


Рисунок 4.2, б)

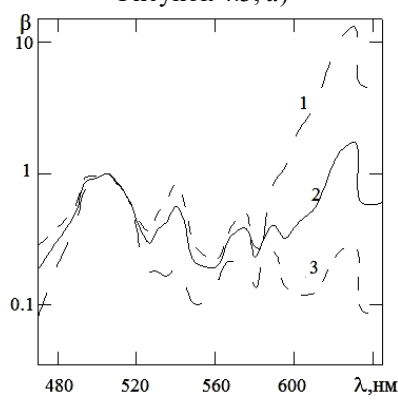


Рисунок 4.3, б)

Нормированные спектры ДЭП (а) и ИЭП (б) для уропорфирина $UрIII$ (рисунок 4.1), копропорфирина $СрIII$ (рисунок 4.2) и протопорфирина $РрIX$ (рисунок 4.3) при $C_v=0.08$, $C_m=0.04$, $S=0.75$.

(а) – $z=0.15$ мм (кривая 1), $z=1$ мм (кривая 2), $z=1.5$ мм (кривая 3);

(б) – $z_1=1$ мм (кривая 1), $z_1=1.2$ мм (кривая 2), $z_2=5$ мм.

Исходный спектр поглощения соответствующего порфирина, нормированный на значения на соответствующей длине волны λ_{\max}

Как результат этого увеличивается число возбужденных молекул сенсibilизатора, который, в свою очередь, передает энергию кислороду, переводит его в синглетное состояние, т. е. увеличивает его концентрацию. Этим обеспечивается наиболее эффективная генерация СК. Однако, в более глубоких слоях дермы (кривые 2 и 3) мы видим существенное увеличение амплитуды поглощения (и соответственно мощности поглощенного света) при облучении красным светом с $\lambda = 615\text{--}630$ нм вблизи локального экстремума спектра поглощения порфирина (рисунок 1.1). Указанное увеличение при $C_v = 0.08$, $C_m = 0.04$, $S = 0.75$ выше в более чем 10 раз (рисунки 4.1 а, 4.2 а и 4.3 а кривая 3), по сравнению с облучением в λ_{\max} (рисунок 1.1).

Спектры ИЭП (рисунок 4.1 б, 4.2 б и 4.3 б) показывают также значительное увеличение амплитуды поглощения при облучении красным светом с $\lambda = 615\text{--}630$ нм. Увеличение амплитуды здесь может достигать, в зависимости от границ слоя $z_2 - z_1$, 10–12 раз (рисунки 4.1 б, 4.2 б и 4.3 б кривая 1) по сравнению с облучением в λ_{\max} . Значения β зависят от структурных и биофизических параметров ткани и, в частности, от объемной концентрации меланина в эпидермисе C_m и капилляров в дерме C_v . Тем не менее, вариации этих концентраций не приводят к существенному смещению максимума ИЭП для данного порфирина.

В связи с тем, что зеленый свет ослабляется больше, то и произведение $\mu_a(\lambda)E(z,\lambda)$ предполагает меньшее значение в этой области спектра, чем возле $\lambda_{\max} = 618$ нм. Отметим также, что увеличение ДЭП при облучении поверхности кожи красным светом может достигать 10 раз и более по сравнению с облучением в 495 нм. Существенное увеличение потребляемой мощности (рисунок 4.2 б кривая 1) также присущи спектрам ИЭП на длине волны 618 нм.

Таким образом, на определенной глубине z у исследуемых эндогенных порфиринов происходит определенное увеличение мощности поглощенного света, т. е. максимумы поглощения ДЭП и ИЭП. Максимум расположен вблизи локального экстремума спектра поглощения порфирина. Увеличение α, β в коротковолновой спектральной области по сравнению с областью 500–510 нм связано с особенностями спектральной глубины проникновения света в ткани [15] и, в частности, из-за спектральной абсорбции производных гемоглобина [10].

Отметим также, что увеличение ДЭП при облучении поверхности кожи красным светом может быть на порядок больше, т. к. произведение $\mu_a(\lambda)E(z,\lambda)$ предполагает большее значение в этой области спектра (рисунки 4.1 а; 4.2 а; 4.3 а) по сравнению с облучением на λ_{\max} . Существенное увеличение потребляемой мощности (рисунки

4.1 б; 4.2 б; 4.3 б) также присущи спектрам ИЭП при облучении на длинах волн $\lambda \approx 615\text{--}630$ нм [23].

Заключение

Для расчета ДЭП и ИЭП света основными хромофорами биоткани, которые позволяют оценить количество СК, производимого порфиринами при облучении кожи лазерным излучением на различных длинах волн, были использованы аналитические методы решения уравнения переноса излучения. Установлено, что облучение на длинах волн в диапазоне от 610 до 630 нм значительно стимулирует выработку СК (т. е. происходит увеличение поглощенной световой энергии) эндогенными порфиринами по всей толщине дермы (в 2–3 раза в слое дермы на глубине $z < 0.15$ мм; до 10–12 раз в слое дермы $z \geq 0.15$ мм) по сравнению с облучением в абсолютных максимумах поглощения (приблизительно около 501 нм для уропорфирина (UрIII), 495 нм для копропорфирина (СрIII) и 505 нм для протопорфирина (PrIX).

Наблюдаемые особенности световых спектров действия для эндогенных порфиринов обусловлены спектральной селективностью оптических характеристик ткани кожи и, в частности, свойствами поглощения. Как уже отмечалось, ткань действует как спектральный фильтр с комплексным коэффициентом пропускания. Например, максимальная поглощенная энергия квантов протопорфирина (PrIX) при 630 нм обеспечивается сложной комбинацией спектров поглощения гемоглобина и порфиринов-сенсibilизатора, а также многократным рассеянием света в среде. Экстремумы ДЭП и ИЭП в красной области спектра имеют то же происхождение.

Таким образом, эндогенные порфирины пригодны к практическому применению для фотодинамических терапевтических процедур. Существенное увеличение поглощенной световой энергии, при контролируемых условиях, по сравнению с традиционным облучением в абсолютных максимумах поглощения порфиринов обеспечивает улучшение максимальной выработки СК эндогенными порфиринами. Полученные результаты могут быть основой для разработки новых методов для улучшения генерации СК в целях инактивации нежелательных образований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дебов, С.С. Биологическая химия: учебник / С.С. Дебов; под ред. акад. АМН СССР С.С. Дебова. – 2-е изд. – М.: Медицина, 1990. – 528 с.
2. Kessel, D. Photodynamic Therapy of Neoplastic Disease / D. Kessel. – Boston: CRC Press, 1990.
3. Moan, J. Porphyrin photosensitization and phototherapy / J. Moan // Photochem. Photobiol. – 1986. – Vol. 43. – P. 681–690.

4. Pass, H.I. Photodynamic therapy in oncology: mechanisms and clinical use / H.I. Pass // J. Natl. Cancer Inst. – 1993. – Vol. 85. – P. 443–456.
5. Raab, O. The effect of fluorescent agents on infusoria / O. Raab // Z. Biol. – 1900. – Vol. 39. – P. 524–526.
6. *Photoradiation therapy for the treatment of malignant tumors* / T.J. Dougherty [et. al.] // Cancer-Res. – 1978. – Vol. 38, № 8. – P. 2628–2635.
7. Миронов, А.Ф. Фотосенсибилизаторы на основе порфиринов и родственных соединений для фотодинамической терапии рака / А.Ф. Миронов // Итоги науки и техники, современные проблемы лазерной физики. – 1990. – Т. 3. – С. 5–60.
8. *Фотогенерация синглетного молекулярного кислорода водорастворимыми порфиринами* / А.А. Красновский [и др.] // Биофизика. – 1987. – Т. XXXII, вып. 6. – С. 982–992.
9. Северина, Е.С. Биохимия: учебник для вузов / Е.С. Северина. – 5-е изд. – М.: ГЭОТАР-Медиа, 2009. – 960 с.
10. *Световое и тепловое воздействие низкоинтенсивного лазерного излучения на биологические ткани. Аналитические подходы* / В.В. Барун [и др.] // Биофизика. – 2004. – Т. 49, № 6. – С. 1125–1133.
11. *Моделирование спекл-структуры светового поля внутри многослойной ткани кожи* / Н.Д. Абрамович, В.В. Барун, С.К. Дик, А.П. Иванов // Инженерно-физический журнал. – 2013. – Т. 86, № 6. – С. 1288–1295.
12. Дик, С.К. Лазерно-оптические методы и технические средства контроля функционального состояния биообъектов / С.К. Дик. – Минск: БГУИР, 2014. – 235 с.
13. *Световые и тепловые поля в многослойной ткани кожи при лазерном облучении* / В.В. Барун [и др.] // Опт. и спектр. – 2006. – Т. 100, № 1. – С. 149–157.
14. Спектры действия внешнего излучения на хромофоры кожного покрова человека / В.В. Барун [и др.] // Журн. прикл. спектр. – 2007. – Т. 74, № 3. – С. 387–394.
15. *Поглощение света кровью при низкоинтенсивном лазерном облучении кожи* / В.В. Барун [и др.] // Квант. электрон. – 2010. – Т. 40, № 4. – С. 371–376.
16. Гуринович, Г.Р. Спектроскопия хлорофилла и родственных соединений / Г.Р. Гуринович, А.Н. Севченко, К.Н. Соловьев. – Минск: Наука и техника, 1968.
17. Меглинский, И.В. Моделирование спектров отражения оптического излучения от случайно-неоднородных многослойных сильно рассеивающих и поглощающих свет сред методом Монте-Карло / И.В. Меглинский // Квант. электроника. – 2001. – Т. 31, № 12. – С. 1101–1107.
18. Process for producing uroporphyrin III: pat. US4370415, USA: IPC C121P 17/18 (19801107) / I. Kojima, K. Maruhashi, Y. Fujiwara; publ. date: 25.01.1983.
19. *Spectroscopic study of the dimerization process of iron protoporphyrin IX* / K. Dziedzic-Kocureka [et al.] // Acta physica polonica. – 2009. – Vol. 115, № 2. – P. 552–555.
20. Smith, K.M. Porphyrins and metalloporphyrins / K.M. Smith. – New York, N.Y.: Elsevier Scientific Publishing Company, 1975. – 910 p.
21. Falk, J.E. Porphyrins and metalloporphyrins / J.E. Falk. – New York: Elsevier. – 1975, 877 p.
22. Иванов, А.П. Перенос изображения в рассеивающей среде / А.П. Иванов, Э.П. Зега, И.Л. Кацев. – Минск: Наука и техника, 1985. – 327 с.
23. *Спектры эффективных показателей поглощения порфиринов в мягких биотканях* / Н.Д. Абрамович [и др.] // Сб. научных статей VIII МНТК «МедЭлектроника-2014: средства медицинской электроники и новые медицинские технологии», Минск. – 2014. – С. 55–57.

Поступила в редакцию 23.02.17.

УДК 535.42

БЕЗДИФРАКЦИОННЫЕ АСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ БЕССЕЛЯ НЕПРЕРЫВНОГО ПОРЯДКА

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

DIFFRACTION FREE ASYMMETRIC BESSEL WAVE FIELDS OF THE CONTINUOUS ORDER

S.S. Girgel

F. Scorina Gomel State University

Предложены новые решения уравнения Гельмгольца, описывающие бездифракционные асимметричные волновые поля Бесселя непрерывного порядка. Они характеризуются пятью свободными непрерывными параметрами и обладают спиральным волновым фронтом. Установлены физические ограничения на возможные значения этих параметров. Проведено графическое моделирование таких пучков.

Ключевые слова: пучки, асимметричные пучки, пучки Бесселя.

The new solutions of the equation of Helmholtz describing diffraction free asymmetric wave fields of Bessel of a continuous order are offered. They are characterized by five continuous parameters and possess a spiral wavefront. Restrictions on these parameters at which explored fractional beams transfer terminating power are discovered. Pictorial modeling of such beams is fulfilled.

Keywords: beams, asymmetric beams, Bessel beams.

Введение

В настоящее время по-прежнему актуальны поиск и исследования новых типов световых пучков [1]–[4]. По-прежнему большой интерес привлекают пучки Бесселя [5]–[9]. Дурнин [5] впервые обратил внимание на то, что пучки Бесселя обладают уникальным свойством бездифракционности, и экспериментально подтвердил это. Впрочем, еще Стрэттон [10] в 1948 году описал решения уравнения Гельмгольца, содержащие функции Бесселя целочисленного порядка. Недавно, Тао и др. [3] ввели непрерывный индекс ν для пучков Бесселя и описывали так называемые фракционные (fractional) пучки Бесселя. В наших работах [11]–[14] исследовались поляризационные и энергетические характеристики векторных пучков Бесселя. Совсем недавно, Ковалев и Котляр [6]–[8] ввели скалярные асимметричные моды Бесселя (аВ-моды) целочисленного индекса, у которых поперечные координаты x и y имеют дополнительные сдвиги (вещественные или комплексные). В [15] нами были введены асимметричные волновые поля непрерывного индекса.

В настоящей работе результаты работ [6]–[9], [15] обобщаются и вместо целочисленного порядка ν вводится непрерывный неотрицательный порядок $\nu \geq 0$ и обсуждается новый тип пучков – бездифракционные асимметричные волновые поля Бесселя непрерывного порядка.

1 Волновые поля Бесселя и их обобщения

Для монохроматического излучения ($E \sim \exp(-i\omega t)$) волновые поля описываются уравнением Гельмгольца, которое, в частности, имеет классическое решение [1], [2], [10]

$$E = A \exp[i(z\sqrt{k^2 - \alpha^2} + n\phi)] J_n(\alpha\rho),$$

выражающиеся через цилиндрические функции 1 рода – функции Бесселя J_ν . С физической точки зрения стандартный пучок Бесселя представляет суперпозицию плоских монохроматических волн, волновые векторы каждой из которых расположены по круговому конусу вокруг оси z . Для физических приложений в теории планарных и цилиндрических волноводов применяются также и цилиндрические функции третьего рода – функции Ханкеля H_n .

Ковалев и Котляр [6]–[8] ввели более общие асимметричные моды Бесселя (аВ-моды) целочисленного индекса, у которых поперечные координаты x и y имеют дополнительные сдвиги

$$E_n(x, y, z) = A \exp(iz\sqrt{k^2 - \alpha^2}) \times \left[\frac{x_1 + iy_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \right]^n J_n(\alpha\sqrt{x_1^2 + y_1^2}). \quad (1.1)$$

где $x_1 = x - x_0$, $y_1 = y - y_0$. Константы x_0 , y_0 – произвольные комплексные параметры комплексных смещений поперечных координат x и y . Вместе с тем, в работах [6]–[9] обсуждаются частные случаи аВ-мод. Практически авторы

применяли вещественный x_0 сдвиг по x и чисто мнимый сдвиг по y , т. е. $y_0 = -ix_0$, чтобы упростить получающиеся выражения. В поперечном сечении аВ-мод (при определенном соотношении между параметрами) распределение интенсивности имеет вид полумесяца [7], [8]. Экспериментально наблюдали острую фокусировку аВ-мод с помощью жидкокристаллического дисплея и зонной пластинки (см. также недавнюю экспериментальную работу [9]).

Сначала [6]–[7] авторы получили аВ-моды путем суперпозиции обычных мод Бесселя. Позже они заметили [8], что выражения для аВ-мод можно также получить путем комплексных смещений поперечных координат x и y . Авторы отметили, что когда $x_1^2 + y_1^2 \rightarrow 0$ в (1.1), тогда одновременно и аргумент функции Бесселя стремится к нулю и неопределенность раскрывается.

Следует заметить, что прием записи набегу комплексной фазы в (1.1), использующий формулу

$$\arctg(t) = \left(-\frac{i}{2}\right) \ln \left[\frac{1+it}{1-it} \right],$$

не нов и использовался ранее в работе [4] для описания 2-D волнового пакета Х-волн Бесселя.

Выражения для асимметричных волновых полей Бесселя (1.1) можно обобщить, если вместо целочисленного индекса n взять непрерывный индекс ν . Какие ограничения следует наложить на свободный параметр ν ? Известно, что, с математической точки зрения, в общем случае, согласно [16], у функции Бесселя 1 рода аргумент u и порядок (или индекс) ν могут быть произвольными комплексными числами. Однако мы ищем физически приемлемые решения. Тогда функция $E_\nu(x, y, z)$ должна быть регулярной функцией комплексной переменной $(\alpha\sqrt{x_1^2 + y_1^2})$.

Известно [16], что при фиксированном ν функция $J_\nu(u)$ является аналитической. Для произвольных порядков ν при $|u| \rightarrow 0$

$$J_\nu(u) = \frac{(u/2)^\nu}{0! \Gamma(\nu+1)} + \frac{(u/2)^{\nu+2}}{1! \Gamma(\nu+2)} + \dots,$$

поэтому функция $J_\nu(u)$ ограничена только при $\text{Re}(u) \geq 0$. Как показывают анализ и графическое моделирование, наличие мнимой части порядка ν приводит к разрывам в графиках интенсивности для функции $E_\nu(x, y, z)$ (1.1), что недопустимо. Отсюда следует, что индекс ν должен быть неотрицательным, т. е. $\nu \geq 0$.

В итоге получаем пяти-параметрические асимметричные бездифракционные непараксиальные волновые поля Бесселя непрерывного порядка [15]

$$E_\nu(x, y, z) = A \exp\left(iz\sqrt{k^2 - \alpha^2}\right) \times \left[\frac{x_1 + iy_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \right]^\nu J_\nu\left(\alpha\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right). \quad (1.2)$$

Итак, следует использовать $\nu \geq 0$. Асимптотическое значение $J_\nu(u)$ при $|u| \rightarrow \infty$

$$J_\nu(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \cos\left(u - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \dots, \\ \arg(u) < \pi.$$

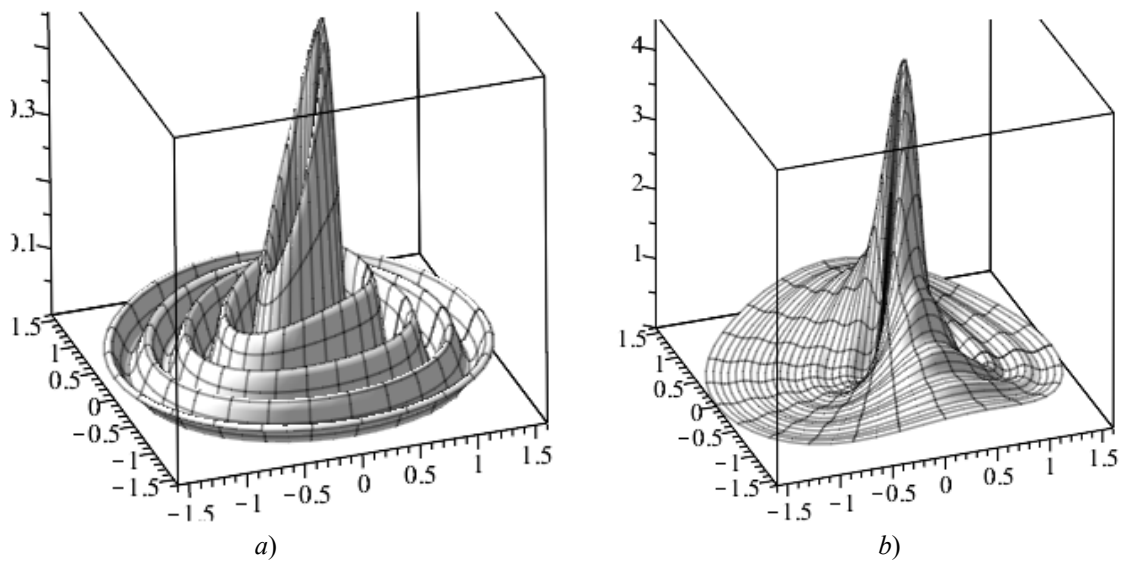
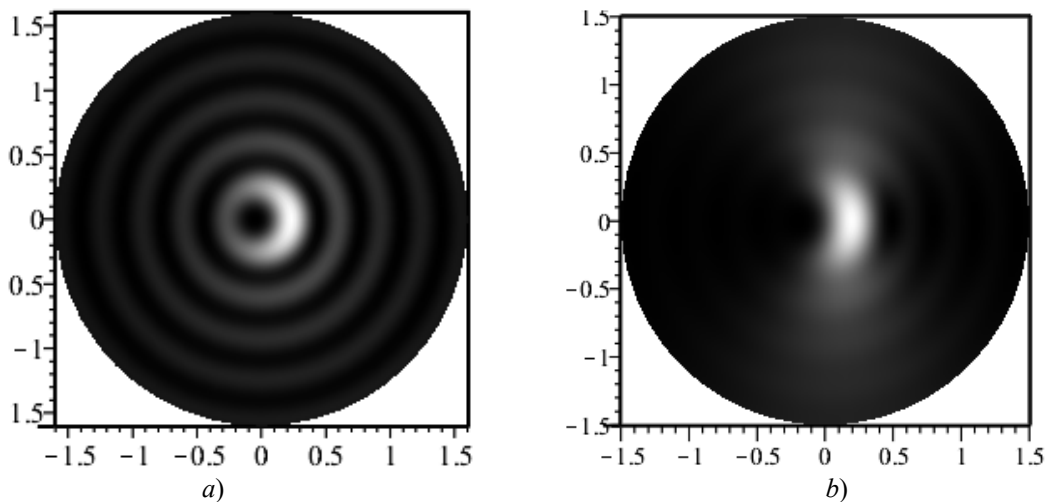
Поскольку индекс ν может принимать непрерывные значения, то фаза при полном обороте вокруг оси пучка также является непрерывной и не обязана быть равной 2π . Пучки, характеризуемые нецелыми индексами ν , называются фракционными [2], [3], [17]. Поэтому обсуждаемые нами пучки являются также фракционными и имеют спиральный волновой фронт.

2 Обсуждение результатов

В давней работе Валдрона [18] использовалась неортогональная спиральная (цилиндрическая вращающаяся) система координат. Для уравнения Гельмгольца получено решение в виде спиральных волновых полей Бесселя. В отличие от обычных световых полей Бесселя индекс (порядок) ν таких полей не обязан быть целым числом, а может пробегать непрерывный спектр значений: $\nu \geq 0$. Согласно интерпретации Оверфельт [19] в таких случаях непрерывный индекс ν связан не только с угловой фазой, но также является функцией шага спирали волнового фронта и продольной фазовой скорости волн Бесселя. Эти аргументы справедливы и для исследуемых нами аВ-мод непрерывного индекса ν .

Бездифракционные аВ-моды (1.2) непрерывного порядка зависят от трех переменных (x, y, z) и пяти параметров $(k, \alpha, x_0, y_0, \nu)$. Нами было проведено графическое моделирование интенсивности в поперечных сечениях асимметричных волновых полей Бесселя непрерывного порядка в зависимости от нескольких свободных параметров в 2D и 3D форматах. Использовались безразмерные параметры и координаты. В качестве примеров на рисунках 2.1 и 2.2 изображены графики интенсивности асимметричных аВ-мод непрерывного порядка в поперечном сечении с общими параметрами: $\nu = 1.5$; $x_0 = 0$; $y_0 = 0.05i$. Интенсивность пучка в каждой точке поперечного сечения рисунка 2.1 пропорциональна ординате пространственной фигуры.

Из рисунков 2.1 и 2.2 видно, что комплексное смещение координаты y приводит к нарушению цилиндрической симметрии волновых полей Бесселя и возникновению асимметрии интенсивности. При увеличении параметра смещения y_0

Рисунок 2.1– 3D графики интенсивности аВ-мод при $\nu = 1.5$, $x_0 = 0$; $\alpha = 10$.Слева *a)* $y_0 = 0.05i$; справа *b)* $y_0 = 0.2i$ Рисунок 2.2 – 2D графики интенсивности аВ-мод при $\nu = 1.5$, $x_0 = 0$; $\alpha = 10$.Слева *a)* $y_0 = 0.05i$; справа *b)* $y_0 = 0.2i$

пик интенсивности относительно увеличивается и картина качественно видоизменяется (рисунки справа).

Основным результатом настоящей работы является выражение (1.2). Непрерывный порядок ν дает основание полученные пучки (1.2) трактовать, как дробные асимметричные волновые поля Бесселя, которые обладают спиральным волновым фронтом. В частных случаях, когда неотрицательный индекс (порядок) ν дробных пучков (1.2) становится целым числом, наши выражения (1.2) эквивалентны выражениям для аВ-мод, обсуждаемых в работах [6]–[9].

Заключение

В работе вводится новый тип пучков (асимметричные волновые поля Бесселя непрерывного

порядка), найдены условия их физической реализуемости. Моды характеризуются пятью свободными непрерывными параметрами: тремя вещественными непрерывными (k , α , ν) и двумя комплексными параметрами (x_0 , y_0). При целочисленных значениях порядка ν введенные здесь моды сводятся к аВ-модам Котляра и Ковалева [6]–[8]. Показано, что физически приемлем непрерывный индекс $\nu \geq 0$. Эти аВ-моды являются дробными волновыми полями непрерывного порядка, обладающими спиральным волновым фронтом.

Варьирование новых свободных параметров таких пучков, несомненно, расширяет и предоставляет новые дополнительные возможности

создания и исследования пучков с заданными свойствами для последующих практических применений.

Проведенное графическое моделирование интенсивности аВ-мод нецелочисленных порядков показало резкую асимметрию таких мод, которая сильно возрастает при увеличении комплексного смещения поперечных координат.

Для экспериментального получения спиральных обобщенных ПБГ могут, в принципе, быть использованы после модернизации некоторые методики получения аВ-мод Бесселя целочисленных порядков и фракционных пучков. Так, в работах Тао и др. рассматривались возможности экспериментального получения и изучения фракционных пучков Бесселя (см., напр., [3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kisелев, А.П.* Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравнения (обзор) / А.П. Киселев // Оптика и спектроскопия. – 2007. – Т. 102, № 4. – С. 661–681.
2. *Gutierrez-Vega, J.C.* Nondiffracting vortex beams with continuous orbital angular momentum order dependence / Julio C. Gutierrez-Vega, C. Lopez-Mariscal // J. Opt. A. Pure Appl. Opt. – 2008. – 10015009 (8 pp.).
3. *Tao, S.H.* Experimental study of holographic generation of fractional Bessel beams / Shao Hua Tao, Woei Ming Lee, Xiacong Yuan // Applied Optics. – 2004. – Vol. 43, № 1. – P. 122–126.
4. *Bessel X waves in two- and three-dimensional bidispersive optical systems* / D.N. Christodoulides, N.K. Efremidis, P.D. Trapani, B.A. Malomed // Opt. Lett. – 2004. – Vol. 29, № 13. – P. 1446–1448.
5. *Durnin, J.* Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory / J. Durnin // JOSA A. – 1987. – Vol. 4, № 4. – P. 651–654.
6. *Kotlyar, V.V.* Asymmetric Bessel modes / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // Optics Letters. – 2014. – Vol. 39, № 8. – P. 2395–2398.
7. *Kotlyar, V.V.* Diffraction-free asymmetric elegant Bessel beams with fractional orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // Computer Optics. – 2014. – Vol. 38 (1). – P. 4–10.
8. *Ковалев, А.А.* Асимметричные моды Бесселя первого и второго типа и их суперпозиции / А.А. Ковалев // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 39, № 1. – С. 5–10.
9. *Observation of the asymmetric Bessel beams with arbitrary orientation using a digital micromirror device* / Lei Gong [et. al.] // Optics Express. – 2014. – Vol. 22, № 22. – С. 26763–26776.
10. *Стрэттон, Дж.А.* Теория электромагнетизма / Дж.А. Стрэттон // М.: ОГИЗ. ГИТТЛ. – 1948. – 539 с.
11. *Girgel, S.S.* Vectorial of Bessel light beams / S.S. Girgel, S.N. Kurilkina // Proc. SPIE. – 2001. – Vol. 4358. – P. 258–264.
12. *Гиргель, С.С.* Поляризационные и энергетические свойства бесселевых волновых полей / С.С. Гиргель // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2001. – № 6 (9). – С. 142–145.
13. *Гиргель, С.С.* Бесселевы световые пучки / С.С. Гиргель // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2005. – № 3 (30). – С. 93–98.
14. *Гиргель, С.С.* Модовые и энергетические характеристики векторных бесселевых световых полей / С.С. Гиргель // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2006. – № 6 (39), ч. 1. – С. 49–52.
15. *Гиргель, С.С.* Асимметричные волновые поля Бесселя непрерывного порядка / С.С. Гиргель // Проблемы взаимодействия излучения с веществом: материалы IV Международной научной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Б.В. Бокутя, Гомель, 9–10 ноября 2016 г. Ч. 1. / Электронное издание. – Гомель, ГГУ им. Ф. Скорины. – С. 18–24.
16. *Янке, Е.* Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш // М.: Наука, 1977. – 342 с.
17. *Berry, M.V.* Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps / M.V. Berry // Journal of Optics. – 2003, № 6. – P. 259–268.
18. *Waldron, R.A.* A helical coordinate system and its applications in electromagnetic theory / R.A. Waldron // Quart. Journ. Mech. and Applied Math. – 1958. – Vol. XI, Pt. 4. – P. 438–461.
19. *Overfelt, P.L.* Scalar optical beams with helical symmetry / P.L. Overfelt // Phys. Rev. A. – 1992. – Vol. 46, № 6. – P. 3516–3522.

Поступила в редакцию 21.02.17.

УДК 661.862

ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ ОБРАБОТКИ НА СТРУКТУРУ И СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА SBTN-ПЛЁНОК, ПОЛУЧЕННЫХ ЗОЛЬ-ГЕЛЬ МЕТОДОМ

В.В. Сидский¹, А.В. Семченко¹, В.В. Колос²,
А.Н. Петлицкий², В.А. Солодуха², Н.С. Ковальчук²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
²ОАО «ИНТЕГРАЛ», Минск

EFFECT OF HEAT TREATMENT CONDITIONS ON THE STRUCTURE AND FERROELECTRIC PROPERTIES OF SBTN-FILMS SYNTHESIZED BY SOL-GEL METHOD

V.V. Sidsky¹, A.V. Semchenko¹, V.V. Kolos²,
A.N. Pyatlitski², V.A. Solodukha², N.S. Kovalchuk²

¹F. Scorina Gomel State University
²JSC "INTEGRAL" Minsk

Представлены исследования восстановительного и кристаллизационного отжига на сегнетоэлектрические свойства SBTN-пленок при массовой концентрации ниобия 10–50 масс. %, полученных золь-гель методом. Проведено исследование влияния восстановительного отжига на содержание кислорода в сегнетоэлектрической плёнке SBTN с учетом массовой концентрации ниобия.

Ключевые слова: сегнетоэлектрики, энергонезависимая память, золь-гель метод, структура перовскита, кристаллизационный и восстановительный отжиг, конденсаторный слой, дефекты, остаточная поляризация, SBTN-пленка.

The study of restorative and crystallization annealing on ferroelectric properties of SBTN-films with concentration of niobium 10–50 wt. % synthesized by the sol-gel method is presents. Effect of recovery annealing on the oxygen content in the SBTN ferroelectric film connected with the mass concentration of niobium is described.

Keywords: ferroelectric, non-volatile memory, sol-gel method, perovskite structure, crystallization and recovery annealing, capacitor layer, defects, residual polarization, SBTN-film.

Введение

При создании сегнетоэлектрических конденсаторов возникает проблема физико-химического и механического взаимодействия сегнетоэлектрической пленки с окружающими материалами, что приводит к ухудшению характеристик сегнетоэлектрического элемента, утечкам тока и деградации транзисторных структур [1]. Особое значение эта проблема приобретает для микро- и наноразмерных структур. Характер взаимодействия при этом зависит не только от внешних параметров, но и от наноструктурных свойств сегнетоэлектрика.

Важным параметром при создании сегнетоэлектрических конденсаторов является температура формирования сегнетоэлектрической фазы. Стехиометрическому составу SBT соответствует формула $\text{SrBi}_2\text{Ta}_2\text{O}_9$ [1]. Нестехиометрический состав SBT может сформироваться в процессе нанесения или в случае преднамеренного изменения концентраций исходных материалов. Отклонения в стехиометрическом составе, связанные с процессом получения, наблюдаются от высокой летучести оксида висмута Bi_2O_3 или из-за взаимодействия висмута с Pt электродом [2].

Известно, что, частично заменяя Ta на Nb, в системах типа танталат-ниобат висмута-стронция $\text{Sr}_{0,8}\text{Bi}_{2,5}\text{Ta}_{1,2}\text{Nb}_{0,9}\text{O}_9$ (SBTN), можно уменьшить температуру отжига до 600°C , улучшить сегнетоэлектрические свойства и достигнуть более высокой остаточной поляризации ($P_{\text{ост}}$) по сравнению с SBT [3], [4].

В работе представлены результаты изменение концентрации вакансий по кислороду посредством измерения концентраций элементов, входящих в состав SBTN-пленки.

1 Методы исследования

Исследования элементного состава полученных образцов проводили на сканирующем электронном микроскопе (СЭМ) высокого разрешения «Mira» фирмы «Tescan» (Чехия), снабженном специальной приставкой AN 10000 фирмы Princeton Gamma-Tech, Inc. Исследование сегнетоэлектрических свойств плёнок танталата (танталата-ниобата) висмута-стронция проводили осциллографическим методом по методике, описанной в [5] в зависимости от напряженности внешнего электрического поля.

2 Результаты и обсуждение

Рассмотрим петли гистерезиса при кристаллизационном отжиге без восстановительного отжига в атмосфере кислорода при 400°C (рисунок 2.1, а) и с восстановительным отжигом в атмосфере кислорода при 400°C (рисунок 2.1 б, в, г).

На рисунке 2.1 представлены типичные петли гистерезиса пленок SBTN (10 масс.% Nb), на Pt-электроре без восстановительного отжига и с восстановительным отжигом при указанных температурах.

Вид петель исследуемых пленок на основе SBTN приближался к сегнетоэлектрическому после низкотемпературного отжига в атмосфере кислорода при температуре 400° С, превышающей температуру Кюри SBT (305° С) [6], что может свидетельствовать об обеднении кислородом после формирования верхнего электрода и восстановлении содержания кислорода после отжига.

Рассмотрим смещение вольт-зарядных петель, а также влияние температуры и времени кристаллизационного отжига на вольт-зарядные и вольт-амперные характеристики пленок SBTN.

Характерной особенностью для петель на рисунке 2.1 является наличие горизонтального (по оси напряжения) и вертикального (по оси заряда) сдвига.

Горизонтальный сдвиг обычно связан с наличием внутреннего поля смещения, вызванного системой полярных дефектов [6], и вызывающего преимущественную ориентацию поляризации [7]. Дефекты кристаллов в значительной мере влияют на поле и время переключения процесса поляризации. Это объясняется закреплением доменных стенок на дефектах (пиннинг). Согласно теории доменных границ, толщина доменных стенок определяется корреляционным радиусом. При температуре отжига 750° С в течение 60 мин (рисунок 2.1, в) узкие доменные стенки эффективно взаимодействуют с дефектами, что приводит к сдвигу по горизонтальной оси (1 мВ), возрастанию остаточной поляризации до 6 мкКл/см². При исследовании смещения вольт-зарядных петель, можно предположить, что сегнетоэлектрические свойства связаны с размером кристаллитов в SBTN пленках. Авторами [7] установлено, что кристаллиты, имеющие размеры близкие к однодоменным (до 8 нм), стабильны под действием внешнего поля, что приводит к ухудшению сегнетоэлектрических свойств в SBTN-пленке. С увеличением температуры отжига кристалличность пленки SBTN увеличивается, как результат – сегнетоэлектрические параметры возрастают.

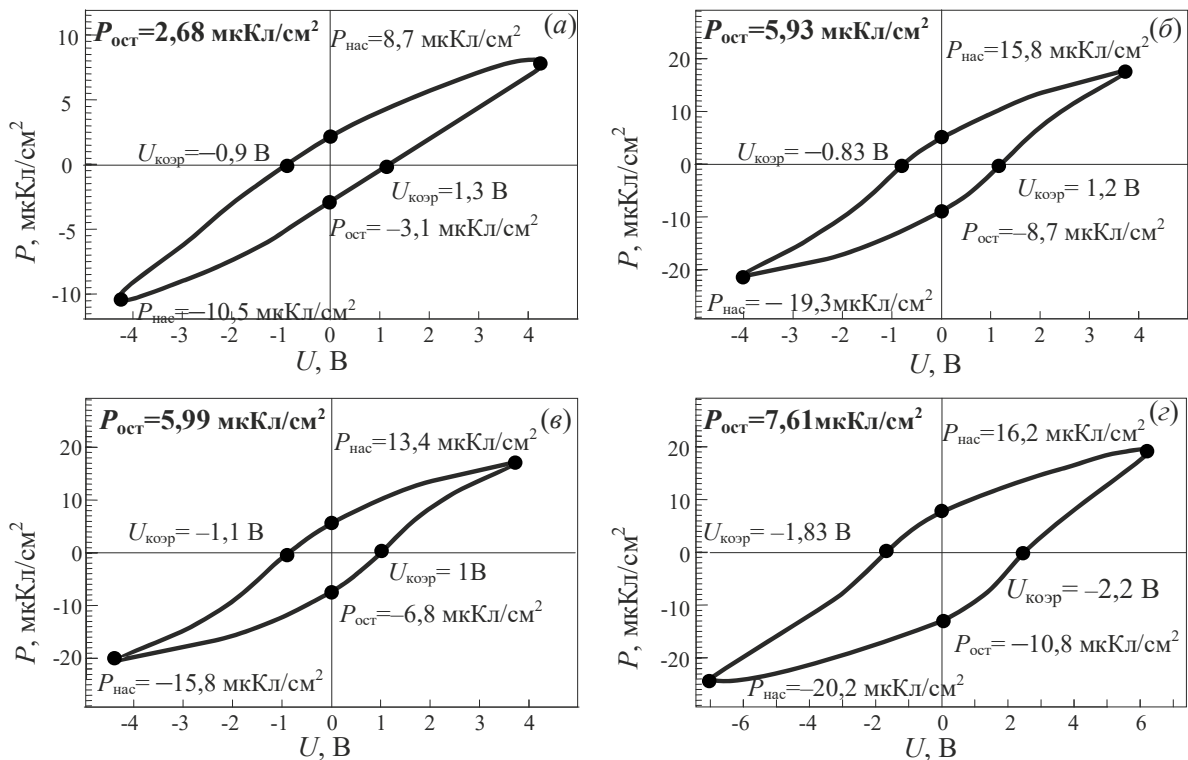


Рисунок 2.1 – Типичные петли гистерезиса с пленкой SBTN (Nb 10 масс. %), сформированной отжигом Pt-электрода и кристаллизационным отжигом при указанных температурах

(а) 750° С после формирования верхнего электрода Pt без восстановительного отжига (400° С);

(б, в, г – с восстановительным отжигом 400° С)

(б) 750° С, 30 мин; (в) 750° С, 60 мин; (г) 780° С, 30 мин

Эксперимент показывает, что величина поля, при которой начинается процесс переключения, перемещение по объему кристалла доменных границ, а также время переключения в значительной мере определяются реальной дефектной структурой кристалла. Это связано с тем, что происходит закрепление доменных стенок на дефектах (так называемый пиннинг). Чем меньше размер кристаллита (до 20 нм), тем больше пиннинг, что приводит к сдвигу по горизонтальной оси (рисунок 2.1 *a, б, в, г*). При кратковременном кристаллизационном отжиге при 780° С в течение 30 мин SBTN-плёнки не обладали током утечки и имели максимальное значение остаточной поляризации около 8 мкКл/см². Таким образом, в процессе отжига необходимо обеспечить сокращение времени отжига и использование, по возможности, быстрых термических обработок для формирования сегнетоэлектрических структур. Более подробно процесс будет описан ниже.

Величина вертикального сдвига отрицательна и минимальна для исходных структур ($\approx -0,5$ мкКл/см² при $U=0$ и $\approx -0,9$ мкКл/см² при максимальном напряжении) (рисунок 2.1, *a*) и зависит от условий отжига. Она составляет $\approx -2,1$ мкКл/см² и $-1,5$ мкКл/см² для $t_{\text{ко}} = 750^\circ \text{C}$, $t_{\text{ко}} = 30$ мин (рисунок 2.1, *б*) и уменьшается до $\approx -1,5$ мкКл/см² и время кислородного отжига 1,3 мкКл/см² для $t_{\text{ко}} = 750^\circ \text{C}$, $t_{\text{ко}} = 60$ мин (рисунок 2.1, *в*).

Вертикальный сдвиг в SBTN-пленках, как и в пленках ЦТС [8], можно связать с наличием «сквозной» проводимости, определяющей величину тока утечки. Следствием такой асимметрии является неравенство величин электрического заряда, переносимого в течение положительного и отрицательного полупериода переменного напряжения. Это приводит к зарядке включенного последовательно с образцом эталонного конденсатора, наличие постоянного напряжения на котором и определяет вертикальный сдвиг вольт-зарядных петель.

Сравнительно небольшое повышение температуры от 750° С до 780° С приводит к изменению насыщения петли гистерезиса (к сглаживанию) и к появлению изломов в окрестности коэрцитивного напряжения вместо гладких участков. Это указывает на появление неоднородностей, участвующих в процессе реверсирования поляризации через явление пиннинга [9]

Исследование влияния кислорода в сегнетоэлектрикой плёнке SBT [9] показало наличие как минимум двух вкладов:

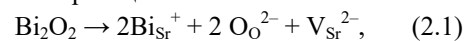
- 1) непосредственного вклада через связь O–Ta–O в перовскитных группах $\{\text{SrTa}_2\text{O}_7\}^{2+}$;
- 2) косвенного вклада от смещений слабо связанного Bi в слоях $\{\text{Bi}_2\text{O}_2\}^2$.

В статье [10] было показано, что SBT свойственно образование «плоскостных» дефектов в

местах нарушения сплошности слоя Bi–O, причем, расстояние между соседними перовскитными блоками Sr–Ta–O в дефектных зонах на 0,12 нм меньше, чем в бездефектных. Из этого следует наличие искривлений псевдоперовскитных блоков на границах между дефектными и бездефектными зонами в окрестности этих дефектов. Эта особенность связана с состоянием кислородной подсистемы, а значит зависит от условий отжига и может одновременно влиять как на величину поляризации, так и на условия пиннинга.

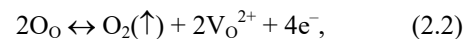
Отмечая роль ионов Bi^{3+} и Ta^{5+} в захвате электронных носителей заряда [11], [12], можно предположить, что в пределах «плоскостных» дефектов в SBT, как и вблизи межзеренных границ перовскитных керамик [13] возможно связывание дефектов кислородной подсистемы.

При повышенных температурах слабо связанный Bi^{3+} может выходить из слоев $\{\text{Bi}_2\text{O}_2\}$ и замещать Sr^{2+} в прилежащих к слоям областях с образованием вакансий (V_{Sr}^{2-}) [10], и избыточного кислорода в местах разрыва слоев $\{\text{Bi}_2\text{O}_2\}$ в соответствии с реакцией



где $\text{Bi}_{\text{Sr}}^{+}$ обозначает Bi^{3+} в позиции Sr^{2+} (А-позиции), O_O^{2-} обозначает O в позиции O^{2-} кислорода. Таким образом, концентрация вакансий V_{Sr}^{2-} оказывает существенное влияние на формирование полярных свойств SBT [10], [11].

Известно, что легирование донорами может облегчать потери кислорода в ходе отжига пленки SrTiO_3 [12] в соответствии с реакцией уравнивания:



где V_{O}^{2+} – вакансия кислорода [13]. Если в SBTN в ходе отжига в результате выхода слабо связанного Bi из слоев $\{\text{Bi}_2\text{O}_2\}$ появляются доноры (V_{O}^{2+}), то это должно приводить к росту числа V_{O}^{2+} в ходе отжига. Это хорошо согласуется с результатами эксперимента приведенных в работе [14]. Действительно, при одном и том же времени кислородного отжига $t_{\text{ко}} = 30$ мин и повышении температуры отжига от 750° С до 780° С приводит к заметному увеличению коэрцитивного напряжения, остаточного заряда и отношения остаточного заряда к максимальному при уменьшении остаточного и максимального заряда. Именно это имеет место в теории в случае увеличения концентрации подвижных доноров от n_1 к n_2, n_3 .

Изменение концентрации вакансий по кислороду подтверждено экспериментально посредством измерения концентраций элементов, входящих в состав SBTN-пленки.

Проведено исследование влияния восстановительного отжига (400° С) на содержание кислорода в сегнетоэлектрической плёнке SBT с учетом массовой концентрации ниобия. Как видно из рисунка 2.2 и таблиц 2.1 и 2.2, влияние восстановительного отжига минимизируется с увеличением концентрации ниобия.

Таблица 2.1 – Элементный состав SBT и SBTN-плёнок, отожжённых при 780° С без восстановительного отжига

Элемент	SBT, Nb 0, Ат. %	SBTN, Nb 10, Ат. %	SBTN, Nb 20, Ат. %	SBTN, Nb 30, Ат. %	SBTN, Nb 40, Ат. %	SBTN, Nb 50, Ат. %
Pt	24,24	18,46	4,05	11,61	13,07	8,02
Ta	14,03	15,71	15,46	10,81	9,84	9,4
Nb	–	1,01	6,45	7,47	7,8	9,83
Bi	13,01	14,04	23,91	18,07	16,57	15,32
O	39,04	40,76	45,33	46,94	47,71	50,42
Sr	9,70	10,02	4,8	5,10	5,01	7,01
Всего	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

Таблица 2.2 – Элементный состав SBT и SBTN-плёнок, отожжённых при 780° С с восстановительным отжигом 400° С в течение 20 мин

Элемент	SBT, Nb 0, Ат. %	SBTN, Nb 10, Ат. %	SBTN, Nb 20, Ат. %	SBTN, Nb 30, Ат. %	SBTN, Nb 40, Ат. %	SBTN, Nb 50, Ат. %
Pt	21,24	17,01	5,05	9,3	12,28	8,06
Ta	7,91	6,72	12,20	10,86	10,75	9,86
Nb	–	1,01	2,90	4,04	6,01	8,21
Bi	12,24	11,92	20,57	17,92	18,29	16,13
O	53,51	55,34	55,26	52,86	48,66	51,24
Sr	5,10	8,00	4,02	5,02	4,01	6,50
Всего	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

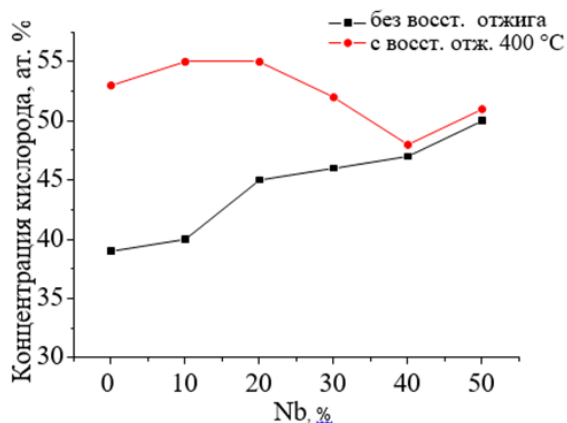


Рисунок 2.2 – Зависимость содержания кислорода в SBTN-пленках от массовой концентрации Nb (пентахлорида ниобия) от количественного содержания пентахлорида тантала)

Выводы

Установлено влияние восстановительного отжига на сегнетоэлектрические свойства SBTN-пленок при массовой концентрации ниобия 10 и 20 масс. %, что свидетельствует об обеднении SBTN-плёнки кислородом на стадии формирования структуры перовскита (отжига при 780° С в течение 30 минут). В результате восстановительного отжига SBTN-пленок с массовой концентрацией ниобия 10 и 20 масс. % при температуре 400° С в течение 20 мин в атмосфере кислорода,

происходит восстановление содержания кислорода. При увеличении концентрации ниобия за счет усиления ковалентной связи в паре «ниобий-кислород» при формировании структуры перовскита эффекта снижения содержания кислорода не происходит.

При кратковременном кристаллизационном отжиге при 780° С в течение 30 мин SBTN-плёнки не обладали током утечки и имели максимальное значение остаточной поляризации около 8 мкКл/см². Таким образом, в процессе отжига необходимо обеспечить сокращение времени отжига и использование, по возможности, быстрых термических обработок для формирования сегнетоэлектрических структур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Preferred Orientation, Phase Formation and the Electrical Properties of Pulsed Laser Deposited SrBi₂Ta₂O₉ Thin Films / N. Fujimura [et al.] // Jpn. J. Appl. Phys. – 1998. – № 37. – P. 5185–5188.
2. Subbarao, E.C. A family of ferroelectric bismuth compounds / E.C. Subbarao // J. Phys. Chem. Solids. – 1962. – Vol. 23, I. 6. – P. 665–676.
3. Chen, T.C. Impedance spectroscopy of SrBi₂Ta₂O₉ and SrBi₂Nb₂O₉ ceramics correlation with fatigue behavior / T.C. Chen, C.L. Thio, S.B. Desu // J. Mater. Res. – 1997. – Vol. 12. – P. 2628–2637.
4. Miura, K. Difference in the Electronic Structure of SrBi₂Ta₂O₉ and SrBi₂Nb₂O₉ / K. Miura, M. Tanaka // Jpn. J. Appl. Phys. – 1998. – Vol. 37. – P. 606–607.

5. Баевич, Г.А. Общая физика: практическое пособие по электричеству и магнетизму для студентов физических специальностей университета / Г.А. Баевич, М.Т. Баранов, И.В. Семченко; М-во образования РБ, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2010. – 148 с.
6. *Dielectric and Piezoelectric Properties of Nonstoichiometric SrBi₂Ta₂O₉ and SrBi₂Nb₂O₉ Ceramics* / J.A. Cho, [etc.] // *Journal of Electroceramics*. – 2004. – Vol. 13, № 1. – P. 515–518.
7. *Darinskii, B.M.* Appearance of internal bias field in ferroelectric growth process / B.M.Darinskii, A.S. Sidorkin, S.D. Milovidova // *Ferroelectrics*. – 1993. – Vol. 142, № 1. – P. 45–50.
8. *Asymmetry of Polarization Reversal and Current-Voltage Characteristics of Pt/PZT-film/Pt:Ti/SiO₂/Si-substrate Structures* / S. Bravina, [etc.] // *Smart Materials Research*. – 2011. – p. 5.
9. *Electronic structure of the ferroelectric layered perovskite SrBi₂Ta₂O₉* / J. Robertson, C.W. Chen, W.L. Warren, C.D. Gutleben // *J. Appl. Phys. Lett.* – 1996. – Vol. 69, № 12. – P. 1704.
10. *Structure determination of a planar defect in SrBi₂Ta₂O₉* / Y. Yan, M.M. Al-Jassim, Z. Xu, X. Lu, D. Viehland, M. Payne, S. J. Pennycook // *J. Appl. Physics*. – 1999. – Vol. 75, № 13. – P. 1961–1963.
11. *Viehland, D.* Random-field model for ferroelectric domain dynamics and polarization reversal / D. Viehland, Y.H. Chen // *J. Appl. Phys.* – 2000. – Vol. 88, № 11. – P. 6966–6707.
12. *Dielectric relaxator behaviour of the system Sr_{1-x}La_xTi_{1-x}Co_xO₃ (x ≤ 0,40)* / O.M. Parkash, C.H. Durga Prasad, D. Kumar // *J. Mater. Sci.* – 1990. – Vol. 25. – P. 487–92.
13. *Vollman, M.* Grain boundary defect chemistry of acceptor-doped titanates: space charge layer with / M. Vollman, R. Waser // *J. Am. Ceram. Soc.* – 1994. – Vol. 77, № 1. – P. 235–243.
14. *Nd-substituted SrBi₂Ta₂O₉ ferroelectric thin films prepared by radio frequency magnetron sputtering* / S.Y. Li, W. Zhang, T. Fei, C.X. Sritharan // *Thin Solid Films*. – 2007. – Vol. 515, № 23. – P. 8371–8375.

Поступила в редакцию 20.02.17.

УДК 539.12

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ДЛИНАМИ ВОЛН 1064 НМ, 532 НМ И 266 НМ ДЛЯ ОБРАБОТКИ КРИСТАЛЛОВ АЛМАЗА

Е.Б. Шершнев, Ю.В. Никитюк, С.И. Соколов, А.Е. Шершнев

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

FEATURES OF LASER RADIATION WITH 1064 NM, 532 NM, AND 266 NM FOR THE TREATMENT OF THE CRYSTALS OF DIAMOND

E.B. Shershnev, Y.V. Nikitjuk, S.I. Sokolov, A.E. Shershnev

F. Scorina Gomel State University

Выполнено моделирование процесса обработки кристаллов алмазов под действием лазерного излучения инфракрасного, зеленого и ультрафиолетового диапазона. Проведен анализ температурных полей и полей термоупругих напряжений, формируемых в кристаллах алмаза в результате лазерного воздействия для трех различных вариантов: анализ воздействия лазерного излучения вдоль осей симметрии второго (L_2), третьего (L_3) и четвертого порядка (L_4).

Ключевые слова: лазерная обработка, алмаз, метод конечных элементов.

Simulated diamond crystals processing by laser infrared, green and ultraviolet range was done. The analysis of temperature fields and thermal stress fields generated in the diamond crystals as a result of laser exposure was carried out for three different options: an analysis of the effect of laser radiation along the axis of symmetry of the second (L_2), third (L_3) and fourth-order (L_4).

Keywords: laser treatment, diamond, finite element method.

Введение

Уникальные физические свойства кристаллов алмаза обеспечивают стабильную работу в критических условиях устройств, созданных на его основе, и делают перспективным его применение при создании новой техники [1]. В ряде работ проведено исследование особенностей лазерной обработки кристаллов алмазов в различных кристаллографических направлениях при воздействии лазерного излучения с длиной волны 1064 нм [2]–[5]. В то же время вызывает интерес изучение особенностей локализации температурных полей и полей термоупругих напряжений, формируемых в кристаллах алмаза при воздействии лазерного излучения с длиной волны 532 нм и 266 нм.

1 Моделирование

Расчет полей термоупругих напряжений, формируемых в кристаллах алмаза при лазерном воздействии, был выполнен с использованием метода конечных элементов в рамках несвязанной задачи термоупругости в квазистатической постановке [6]–[8].

При расчетах плотность, удельная теплоемкость, коэффициент теплопроводности алмаза принимались равными соответственно: $\rho_a = 3520 \text{ кг/м}^3$, $C_a = 854 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$, $\lambda_a = 427 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$ [2].

Для расчетов использовались следующие константы упругой жесткости: $C_{11} = 1079 \text{ ГПа}$, $C_{12} = 124 \text{ ГПа}$, $C_{44} = 578 \text{ ГПа}$ [9].

Расчет термоупругих полей, формируемых в кристаллах алмаза в результате лазерного

воздействия, был выполнен для трех различных вариантов: I – анализ воздействия лазерного излучения вдоль оси симметрии второго порядка (L_2), II – анализ воздействия лазерного излучения вдоль оси симметрии третьего порядка (L_3), III – анализ воздействия лазерного излучения вдоль оси симметрии четвертого порядка (L_4).

Коэффициент объемного поглощения определялся исходя из данных, полученных на спектрофлуориметре СМ 2203. Для длины волны равной 1064 нм расчетный показатель поглощения равен $1,5 \text{ см}^{-1}$, для 532 нм – $3,17 \text{ см}^{-1}$, для 266 нм – $53,87 \text{ см}^{-1}$.

Моделирование процесса лазерного нагрева кристаллов алмаза было выполнено в соответствии со схемой, представленной на рисунке 1.1. Цифрой 1 отмечен лазерный пучок, цифрой 2 – алмазный образец. На рисунке стрелкой указано направление перемещения обрабатываемого изделия относительно лазерного пучка.

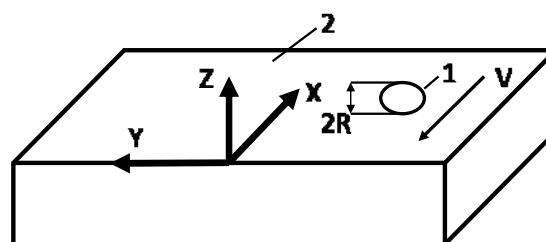


Рисунок 1 – Схема расположения лазерного пучка в зоне обработки

Расчеты были выполнены для образца, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда с геометрическими размерами 2х3х1,5 мм, с использованием следующих значений технологических параметров обработки: плотность мощности лазерного излучения $P_0 = 8 \cdot 10^9$ Вт/м², радиус поперечного сечения лазерного пучка $R = 0,1$ мм. Модуль скорости относительного перемещения лазерного пучка и образца $V = 5$ мм/с.

2 Результаты моделирования

На рисунках 2.1–2.3 приведены результаты расчетов температурных полей.

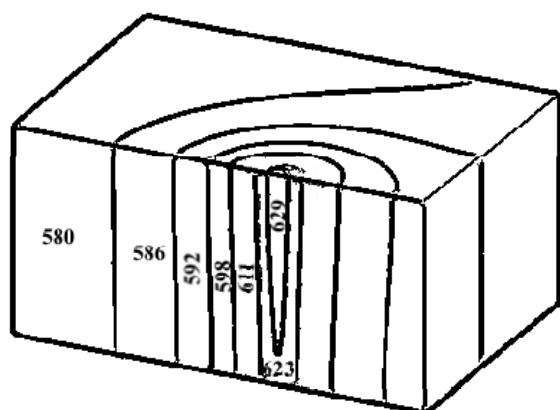


Рисунок 2.1 – Распределение температурных полей при обработке алмаза лазерным излучением с длиной волны 1064 нм

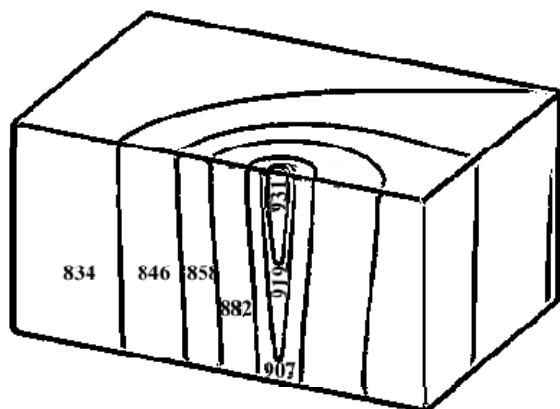


Рисунок 2.2 – Распределение температурных полей при обработке алмаза лазерным излучением с длиной волны 532 нм

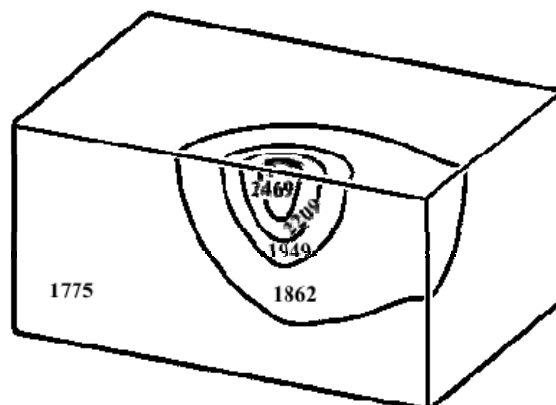


Рисунок 2.3 – Распределение температурных полей при обработке алмаза лазерным излучением с длиной волны 266 нм

Анализ рисунков 2.1–2.3 показывает, что температура в зоне обработки достигает максимального значения при воздействии лазерного излучения с длиной волны 266 нм, а наименьшее значение – при длине волны 1064 нм при одинаковых параметрах обработки. Это объясняется тем, что на длине равной 266 нм поглощение лазерного излучения достигает максимальных значений. Таким образом, использование лазерного излучения с длиной волны 266 нм представляется наиболее эффективным из выбранного диапазона длин волн. Данный вывод находится в хорошем соответствии с экспериментальными данными, приведенными в [10].

Результаты расчетов полей температурных напряжений представлены в таблице 2.1. В таблице 2.1 σ_x обозначены напряжения, действующие вдоль оси X , σ_y – напряжения, действующие вдоль оси Y , σ_z – напряжения, действующие вдоль оси Z (рисунок 2.1).

Анализ данных, приведенных в таблице 2.1, показывает, что наибольших значений напряжения достигают при обработке алмаза лазерным излучением с длинами волн 266 нм и 532 нм и соответственно равны 129 МПа и 126 МПа в случае напряжений растяжения, 140 МПа и 145 МПа в случае напряжений сжатия. Данные значения напряжений не достигают критических значений,

Таблица 2.1 – Результаты расчетов моделирования полей температурных напряжений лазерной обработки кристаллов алмаза при различных длинах волн лазерного излучения

Вариант обработки		$\lambda = 266$ нм			$\lambda = 532$ нм			$\lambda = 1064$ нм		
		I	II	III	I	II	III	I	II	III
σ_x	растяжения	30,4	52,9	47,0	53,7	32,6	30,0	16,0	17,1	15,8
	сжатия	10,1	140,0	134,0	145,0	10,5	9,8	5,0	5,1	4,8
σ_y	растяжения	43,4	129,0	124,0	126,0	39,8	42,1	22,6	19,6	22,0
	сжатия	47,9	133,0	123,0	136,0	47,7	43,9	25,6	25,5	23,5
σ_z	растяжения	1,99	10,8	10,6	11,0	1,41	1,82	1,06	0,72	0,97
	сжатия	5,8	31,5	27,4	28,2	6,2	5,8	3,0	3,3	3,2

соответствующих пределу прочности алмаза. Однако в случае растягивающих напряжений их величина составляет порядка 50 % от критических значений [11].

Кроме этого, нужно отметить, что разница в величинах максимальных напряжений, формируемых при обработке лазерным излучением в исследуемых диапазонах, достигает 93 %, что должно быть принято во внимание при выборе параметров процесса лазерной обработки кристаллов алмаза.

Выводы

Выполнено компьютерное моделирование процесса лазерной обработки кристаллов алмазов под действием лазерного излучения с длинами волн 1064 нм, 532 нм и 266 нм. Выявлены особенности пространственной локализации соответствующих температурных полей. Показана целесообразность использования лазерного излучения с длиной волны 266 нм. Выполнен анализ расчетных значений термоупругих напряжений, который показывает необходимость учета анизотропии свойств алмаза при выборе параметров обработки. Результаты моделирования могут быть использованы для оптимизации процесса лазерной обработки кристаллов алмаза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Митягин, А.Ю. Технология и оборудование для обработки алмазных материалов современной техники / А.Ю. Митягин, А.А. Алтухов, А.Б. Митягина // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. – 2009. – №1. – С. 53–58.
2. Физические основы лазерной обработки алмазов: в 15 кн.: учеб. пособие для ВТУЗов / А.И. Шкадов; под ред. А.М. Бочарова. – Смоленск, 1997. – Кн. 3: Физические основы лазерной обработки алмазов. – 288 с.

3. *Dependence of the diamond laser processing efficiency on crystallographic directions* / S.V. Shalupaev, E.B. Shershnev, Y.V. Nikitjuk, V.V. Sviridova // SPIE. – 2001. – Vol. 4358. – P. 329–333.

4. Шершнев, Е.Б. Моделирование лазерной обработки кристаллов алмаза / Е.Б. Шершнев, Ю.В. Никитюк, А.Е. Шершнев // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2011. – № 6 (69). – С. 164–168.

5. Особенности формирования термоупругих полей при лазерной обработке кристаллов алмаза / Е.Б. Шершнев, Ю.В. Никитюк, А.Е. Шершнев, С.И. Соколов // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 1 (22). – С. 38–40.

6. Шабров, Н.Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей / Н.Н. Шабров. – Л.: Машиностроение, 1983. – 212 с.

7. Коваленко, Л.Д. Основы термоупругости / Л.Д. Коваленко. – Киев: Наукова думка, 1970. – 307 с.

8. Карзов, Г.П. Физико-механическое моделирование процессов разрушения / Г.П. Карзов. – СПб.: Политехника, 1993. – 391 с.

9. Кривцов, А.М. Сравнение микромоделей описания упругих свойств алмаза / А.М. Кривцов, О.С. Лобода, С.С. Хакало // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2012. – №5. – С. 44–52.

10. Ходинский, А.Н. Исследование процесса и разработка установки для лазерной маркировки изделий из монокристаллических сверхтвердых материалов / А.Н. Ходинский, Е.Б. Шершнев, А.Е. Шершнев // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2006. – № 6 (39). – С. 156–159.

11. Резание конструкционных материалов, режущие инструменты и станки / В.А. Кривоухов [и др.]; под ред. проф. П.Г. Петрухи. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: «Машиностроение», 1974. – 616 с.

Поступила в редакцию 14.02.17.

УДК 512.542

НОРМАЛЬНАЯ ФАКТОРИЗУЕМОСТЬ СУБНОРМАЛЬНОЙ В КОНЕЧНОЙ ГРУППЕ ПОДГРУППЫ В СВЯЗИ С ЛОКАЛЬНЫМИ ФОРМАЦИЯМИ И ОБОБЩЁННЫМИ ПОДГРУППАМИ ФРАТТИНИ. ФОРМАЦИОННЫЕ РАДИКАЛЫ

Л.М. Белоконь

Могилёвский государственный университет продовольствия

A NORMAL FACTORIZATION OF A SUBNORMAL SUBGROUP OF SOME FINITE GROUP IN CONNECTION WITH LOCAL FORMATIONS AND GENERALIZED FRATTINI SUBGROUPS. FORMATION RADICALS

L.M. Belokon

Mogilev State University of Food Technologies

Пусть π – некоторое множество простых чисел, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ – локальная формация конечных групп. Исследуются условия факторизуемости субнормальной подгруппы H группы G нормальными в H подгруппами H_1 и H_2 такими, что $H_1 \cap H_2 = O_\pi(H)$, $H_1 \in \mathfrak{F}$, H_2 принадлежит определённой обобщённой подгруппе Фраттини группы G , причём $\pi(H_2/O_\pi(H)) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$. Получены утверждения, эквивалентные утверждениям о соответствующих факторизациях, функторно обобщённые, с вытекающими следствиями для $\pi = \emptyset$. Исследуется строение формационных радикалов факторгрупп субнормальных подгрупп конечных групп в связи с обобщёнными подгруппами Фраттини.

Ключевые слова: локальные и радикальные локальные формации конечных групп, обобщённые подгруппы Фраттини, подгрупповой m -функтор, \mathfrak{F} -радикалы.

Let π be a set of primes, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ – a local formation of finite groups. The conditions of factorability of a subnormal subgroup H of a finite group G by normal subgroups H_1 and H_2 such that $H_1 \cap H_2 = O_\pi(H)$, $H_1 \in \mathfrak{F}$, H_2 belongs to some generalized Frattini subgroup of a group G and $\pi(H_2/O_\pi(H)) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$ are investigated. Statements, equivalent to the statements on the respective factorizations, functorially generalized, with the consequences for $\pi = \emptyset$ are achieved. The structure of formation radicals of factorgroups of subnormal subgroups of finite groups in connection with generalized Frattini subgroups is investigated.

Keywords: local and radical local formations of finite groups, generalized Frattini subgroups, subgroup m -functor, \mathfrak{F} -radicals.

Введение

Рассматриваются только конечные группы и формации конечных групп. Используются определения и обозначения, принятые в монографии [1].

Пусть \mathfrak{F} – локальная формация. Классическая теорема Л.А. Шеметкова [1, теорема 4.2] о том, что нормальная подгруппа H , удовлетворяющая условию $H/H \cap \Phi(G) \in \mathfrak{F}$, представима в виде прямого произведения $H = H_1 \times H_2$, где $H_1 \in \mathfrak{F}$, $\pi(H_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$, $H_2 \subseteq \Phi(G)$, широко используется при изучении формационных свойств групп, связанных с пересечениями максимальных подгрупп. С другой стороны, теоремой 3.1 из [2] было установлено, что субнормальная подгруппа H группы G принадлежит локальной формации \mathfrak{F} , если она содержит $O_{\pi(\mathfrak{F})}(\Phi(G))$ и $H/O_{\pi(\mathfrak{F})}(\Phi(G)) \in \mathfrak{F}$; при дополнительном для \mathfrak{F} условии S_n -замкнутости доказана принадлежность H локальной формации \mathfrak{F} ,

если $H/H \cap O_{\pi(\mathfrak{F})}(\Delta_{\pi(\mathfrak{F})}^\mathfrak{F}(G)) \in \mathfrak{F}$. Теорема 4.2[1] и результаты работы [2] получили развитие в публикациях разных авторов в отношении конкретных случаев для обобщённо нормальных подгрупп H в зависимости от свойств формации \mathfrak{F} и в связи с обобщёнными подгруппами Фраттини группы G . Так, в работах [3], [4] исследовался вопрос о наличии схожих закономерностей в отношении обобщённых подгрупп Фраттини при использовании понятия абнормально полного регулярного m_α -функтора.

Пусть H – субнормальная подгруппа группы G , $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ – локальная S_n -замкнутая формация, подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π . В разделе 2 настоящей работы показано (лемма 2.2), что $H/H \cap \Delta_\pi^\mathfrak{F}(G) \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда факторгруппа $H/O_\pi(H)$ представима в виде

$$H/O_\pi(H) = H_1/O_\pi(H) \times H_2/O_\pi(H),$$

где $H_1 \in \mathfrak{F}$, $\pi(H_2/O_\pi(H)) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$, $H_2 \subseteq \Phi_\pi(G)$. В частности, установлена π' -сверхразрешимость субнормальной подгруппы H группы G с подгруппой $\Phi_\pi(G)$, обладающей свойством C_π , в случае, если π' -сверхразрешима факторгруппа $H/H \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{A}^\pi}(G)$, \mathfrak{A}^π – формация всех π' -сверхразрешимых групп (следствие 2.2.2 леммы 2.2). Кроме того, для субнормальной подгруппы H группы G лемма 2.2 включает (в случае $\pi = \emptyset$) высказывание о равносильности утверждения $H/H \cap \Delta^\mathfrak{F}(G) \in \mathfrak{F}$ утверждению о разложимости группы H в прямое произведение $H = H_1 \times H_2$, где $H_1 \in \mathfrak{F}$, $\pi(H_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$, $H_2 \subseteq \Phi(G)$, \mathfrak{F} – локальная S_n -замкнутая формация (лемма 2.1). Получены функторные обобщения приведенных результатов с использованием \mathfrak{F} -абнормально π' -полного и \mathfrak{F} -абнормально полного подгрупповых m_s -функторов.

В разделе 3 предлагаемой работы исследуется влияние \mathfrak{F} -радикала субнормальной в группе G подгруппы L , содержащей нормальную подгруппу K , $K \subseteq \Phi_\pi(G)$ ($K \subseteq \Phi_\theta(G)$), на строение \mathfrak{F} -радикала факторгруппы L/K , θ – \mathfrak{F} -абнормально π' -полный подгрупповой m_s -функтор, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ – радикальная локальная формация (θ – \mathfrak{F} -абнормально полный подгрупповой m_s -функтор, \mathfrak{F} – радикальная локальная формация, соответственно). Среди приложений полученных результатов для конкретных формаций отметим, в частности, следующее. Если $\theta = \mathfrak{G}_p \mathfrak{A}_p$ – абнормально полный подгрупповой m_s -функтор, p – простое число, то справедливо равенство $F_p(L/K) = F_p(L)/K$ для субнормальной в группе G подгруппы L , если нормальная в L подгруппа K удовлетворяет условию $K \subseteq \Phi_\theta(G)$ (а значит, и в случаях $K \subseteq \Phi_1(G)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, где $\Phi_1(G) = \Phi(G)$, $\Phi_2(G) = \Delta(G)$, $\Phi_3(G) = \Delta^{\mathfrak{G}_p \mathfrak{A}_p}(G)$). Отмеченное приложение нашло применение в исследованиях раздела 4 настоящей работы.

Основной теоремой раздела 4 является теорема 4.1, устанавливающая для локальной формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$, абнормально π' -полного подгруппового m_s -функтора θ и субнормальной подгруппы H группы G с подгруппой $\Phi_\pi(G)$, обладающей свойством C_π , равносильность утверждения $H/H \cap \Phi_\pi(G) \in \mathfrak{F}$ следующему утверждению: факторгруппа $H/O_\pi(H)$ представима в виде прямого произведения

$$H/O_\pi(H) = H_1/O_\pi(H) \times H_2/O_\pi(H),$$

где $H_1 \in \mathfrak{F}$; $\pi(H_2/O_\pi(H)) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$; $H_2 \subseteq \Phi_\pi(G)$.

Следствия 4.1.5 и 4.1.6 теоремы 4.1, рассматриваемые для абнормально полного подгруппового m_s -функтора θ , не предполагают в условии его регулярность. Кроме того, теорема 5.2, как одно из приложений теоремы 4.1, содержит следствие 5.2.4, включающее теорему М.Д. Tomkinson [2, теорема 3.1] как частный случай. В разделе 5 рассматриваются другие приложения теорем 2.1 и 4.1, включая утверждения, усиливающие или обобщающие ранее доказанные и опубликованные результаты.

1 Предварительные сведения

Под подгрупповым m -функтором будем понимать всякое отображение θ , которое ставит в соответствие каждой группе G множество $\theta(G)$, состоящее из группы G и некоторых её максимальных подгрупп. Подгруппы множества $\theta(G)$ называют θ -подгруппами группы G , через $\Phi_\theta(G)$ обозначают пересечение всех θ -подгрупп группы G . Определение подгруппового m -функтора θ , включающее условие $\theta(G^\varphi) = \{H^\varphi \mid H \in \theta(G)\}$ для любого изоморфизма φ группы G , вводилось в [5]; будем называть такой функтор подгрупповым m_i -функтором.

Определение подгруппового m -функтора θ , включающее условие $\theta(G^\alpha) = \{H^\alpha \mid H \in \theta(G)\}$ для любого автоморфизма α группы G , использовалось в [3], [4]. Подгрупповой m -функтор, отвечающий данному условию, будем называть подгрупповым m_α -функтором.

Подгрупповой m_i -функтор θ называют регулярным [5], если для любой нормальной подгруппы N группы G выполняются следующие условия:

1) из $H \in \theta(G)$ всегда следует

$$HN/N \in \theta(G/N);$$

2) из $H/N \in \theta(G/N)$ всегда следует $H \in \theta(G)$.

Подгрупповой m_α -функтор θ , для которого выполнены указанные условия 1) и 2), будем называть регулярным подгрупповым m_α -функтором.

Подгрупповой m -функтор θ назовём подгрупповым m_s -функтором при выполнении условия: если $H \in \theta(G)$, то $H^x \in \theta(G)$ для всех $x \in G$.

Обозначаем через π некоторое множество простых чисел, $\pi' = P \setminus \pi$, где P – множество всех простых чисел, считаем также, что $\pi \neq P$. Пусть \mathfrak{F} – непустая формация, θ – подгрупповой m -функтор. Через $M(G)$ будем обозначать множество всех максимальных подгрупп группы G ;

$M_\theta(G)$ – множество всех максимальных θ -подгрупп группы G ; $M_\pi(G)$ – множество всех максимальных подгрупп группы G , имеющих взаимно простые с числами из π индексы; $M^\delta(G)$ – множество всех \mathfrak{F} -абнормальных максимальных подгрупп группы G ;

$$M_\pi^\delta(G) = M_\pi(G) \cap M^\delta(G);$$

$$M_{\theta_\pi}(G) = M_\theta(G) \cap M_\pi(G).$$

Если в группе G функтор θ выделяет саму группу G и все максимальные (все максимальные \mathfrak{F} -абнормальные) подгруппы в G , то

$$\Phi_{\theta_\pi}(G) = \Phi_\pi(G) = \bigcap H, \quad H \in M_\pi(G)$$

($\Phi_{\theta_\pi}(G) = \Delta_\pi^\delta(G) = \bigcap H, \quad H \in M_\pi^\delta(G)$, соответственно). Для формации всех нильпотентных групп \mathfrak{N} используется обозначение: $\Delta_\pi^{\mathfrak{N}}(G) = \Delta_\pi(G)$. В случае отсутствия в группе G максимальных подгрупп, отвечающих требуемым условиям, соответствующие пересечения полагаем совпадающими с G .

Определение 1.1 [6]. Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Подгрупповой t -функтор θ называется \mathfrak{F} -абнормально π' -полным подгрупповым t -функтором, если $\theta(G) \supseteq M_\pi^\delta(G)$ для любой группы G . В случае $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ функтор θ называется абнормально π' -полным подгрупповым t -функтором.

Определение 1.1 включает понятие \mathfrak{F} -абнормально полного подгруппового t -функтора [7] (случай $\pi = \emptyset$). Заметим, что в случае, когда формация \mathfrak{F} содержит формацию всех нильпотентных групп \mathfrak{N} , $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{N}$, условие: θ – \mathfrak{F} -абнормально π' -полный (\mathfrak{F} -абнормально полный) подгрупповой t -функтор является более слабым, чем условие: θ – абнормально π' -полный (абнормально полный, соответственно) подгрупповой t -функтор. Заметим также, что

$$\{G\} \cup M_\pi(G) \supseteq \theta_\pi(G) \supseteq M_\pi^\delta(G)$$

для всякой группы G и \mathfrak{F} -абнормально π' -полного подгруппового t -функтора θ , а значит, $\Phi_\pi(G) \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G) \subseteq \Delta_\pi^\delta(G)$.

Сформулируем в виде леммы некоторые опубликованные результаты, которые будут использованы в настоящей работе.

Лемма 1.1. *Имеют место следующие утверждения.*

(1) [8, лемма 1]. Пусть подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π . Тогда

$$\Phi_\pi(G)/O_\pi(G) = \Phi(G/O_\pi(G)).$$

(2) [8, лемма 2]. Пусть N – нормальная подгруппа группы G . Если $N \subseteq \Phi_\pi(G)$ ($N \subseteq \Delta_\pi^\delta(G)$),

то $\Phi_\pi(G)/N = \Phi_\pi(G/N)$ ($\Delta_\pi^\delta(G)/N = \Delta_\pi^\delta(G/N)$, соответственно).

(3) [8, теорема 1]. Пусть \mathfrak{F} – локальная формация. Если подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π , то

$$\Delta_\pi^\delta(G)/O_\pi(G) = \Delta^\delta(G/O_\pi(G)).$$

(4) [9, лемма 4]. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ – локальная S_π -замкнутая формация, содержащая класс всех нильпотентных π' -групп $\mathfrak{N}_{\pi'}$. Если подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π , то $\Delta_\pi^\delta(G) \in \mathfrak{F}$.

(5) [7, лемма 1.1]. Пусть \mathfrak{F}_1 и \mathfrak{F}_2 – непустые формации, $\pi(\mathfrak{F}_1) \cap \pi(\mathfrak{F}_2) = \emptyset$, $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2$. Для всякой формации \mathfrak{F}_3 , удовлетворяющей условию $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_3 \subseteq \mathfrak{F}_0$, и максимальной, $\pi(\mathfrak{F}_2)$ -индекса подгруппы H в группе G равносильны условию: подгруппа H \mathfrak{F}_i -абнормальна в G , $i \in \{0, 2, 3\}$.

В частности, учитывая утверждение (4), $\Delta_\pi(G) \in \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_{\pi'}$, если подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π .

(6) [2, следствие 3.3 теоремы 3.1]. Пусть \mathfrak{F} – локальная, замкнутая относительно взятия субнормальных подгрупп, формация, H – субнормальная подгруппа группы G . И пусть $H/H \cap O_{\pi(\mathfrak{F})}(\Delta^\delta(G)) \in \mathfrak{F}$. Тогда $H \in \mathfrak{F}$.

Следствие 3.1.3 теоремы 3.1 настоящей работы включает утверждение, использующее обозначение $\mathfrak{F}_\pi^{\mathfrak{N}}$, которое вводится следующим образом: $\mathfrak{F}_\pi^{\mathfrak{N}} = \bigcap_{\varphi \in \mathfrak{N}} (\mathfrak{F}_\varphi)_{\pi'}$, где $(\mathfrak{F}_\varphi)_{\pi'}$ – формация всех φ -дисперсивных π' -групп, φ пробегает некоторое множество \mathfrak{N} линейных упорядочений множества всех простых π' -чисел. Тогда $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}_\pi^{\mathfrak{N}}$ – радикальная локальная формация, содержащая $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_{\pi'}$ [9]. В случае $\pi = \emptyset$ формацию $\mathfrak{F}_\pi^{\mathfrak{N}}$ обозначаем $\mathfrak{F}^{\mathfrak{N}} = \bigcap_{\varphi \in \mathfrak{N}} \mathfrak{F}_\varphi$. Обозначение $\mathfrak{F}^{\mathfrak{N}}$ присутствует в формулировке следствия 3.2.4 теоремы 3.2.

Заметим, что ввиду леммы 4.2 [1] локальная формация \mathfrak{F} тогда и только тогда содержит формацию всех нильпотентных групп (равносильно – всех нильпотентных π' -групп для локальной формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$), когда $\pi(\mathfrak{F}) = P$ – множество всех простых чисел. Заметим также, что условие нормальной наследственности (S_π -замкнутости) непустой формации \mathfrak{F} равносильно условию субнормальной наследственности, т.е. замкнутости \mathfrak{F} относительно взятия субнормальных подгрупп.

2 Факторизуемость субнормальной подгруппы H группы G нормальными в H подгруппами H_1 и H_2 такими, что $H_1 \cap H_2 = O_\pi(H)$, $H_1 \in \mathfrak{F}$, $\pi(H_2/O_\pi(H)) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$, $H_2 \subseteq \Phi_\pi(G)$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{O}_\pi \mathfrak{F}$ – локальная S_n -замкнутая формация

Лемма 2.1. Пусть \mathfrak{F} – локальная S_n -замкнутая формация, H – субнормальная подгруппа группы G . Тогда следующие утверждения I и II равносильны.

I. $H/H \cap \Delta^\delta(G) \in \mathfrak{F}$.

II. Группа H представима в виде прямого произведения $H = H_1 \times H_2$, где:

- (1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;
- (2) $\pi(H_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$;
- (3) $H_2 \subseteq \Phi(G)$.

Доказательство. Пусть выполняется утверждение I, т. е. $H/H \cap \Delta^\delta(G) \in \mathfrak{F}$. Обозначим $\pi(\mathfrak{F}) = \pi$, $\mathfrak{O}_\pi \times \mathfrak{O}_\pi = \mathfrak{X}$. Так как $\Delta^\delta(G) \subseteq \Delta^x(G)$, ибо $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, то $H/H \cap \Delta^x(G) \in \mathfrak{X}$. А так как $\pi(\mathfrak{X}) = P$, \mathfrak{X} – S_n -замкнутая локальная формация, то по утверждению (6) леммы 1.1 $H = H_1 \times H_2$, $H_1 \in \mathfrak{O}_\pi$, $H_2 \in \mathfrak{O}_\pi$. По теореме 8.7 [1] $\Delta^\delta(G) = A \times B$, где $A \in \mathfrak{F}$, $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$, $B \subseteq \Phi(G)$. Следовательно, $H \cap \Delta^\delta(G) = K \times H_2$, $K = H_1 \cap A$, $H_2 \subseteq B$. Из условия $H_1/K \cong H/H \cap \Delta^\delta(G) \in \mathfrak{F}$ получаем $H_1/H_1 \cap A = H_1/H_1 \cap O_\pi(\Delta^\delta(G)) \in \mathfrak{F}$. По утверждению (6) леммы 1.1 $H_1 \in \mathfrak{F}$. Значит, утверждение II выполняется.

Пусть выполняется утверждение II. Из условия $H = H_1 \times H_2$, где $H_1 \in \mathfrak{F}$, $H_2 \subseteq \Phi(G)$, следует $H/H_2 \cong H_1 \in \mathfrak{F}$, а значит, $H/H \cap \Delta^\delta(G) \in \mathfrak{F}$, так как $\Phi(G) \subseteq \Delta^\delta(G)$. \square

Следствие 2.1.1 [2]. Пусть \mathfrak{F} – локальная S_n -замкнутая формация, H – субнормальная подгруппа группы G . И пусть $H/H \cap \Delta^\delta(G) \in \mathfrak{F}$. Если $\pi(\mathfrak{F}) = P$, то $H \in \mathfrak{F}$.

Следствие 2.1.1 леммы 2.1 непосредственно вытекает из утверждения (6) леммы 1.1 [2, следствие 3.3 теоремы 3.1]. Для случая, когда подгруппа H нормальна в группе G , этот результат доказан Селькиным М.В. [1, теорема 8.12].

Так как $\Phi(G) \subseteq \Phi_\theta(G) \subseteq \Delta^\delta(G)$ для \mathfrak{F} -абнормально полного подгруппового t -функтора θ , то из леммы 2.1 вытекает

Следствие 2.1.2. Пусть \mathfrak{F} – локальная S_n -замкнутая формация. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G . Тогда следующие утверждения (1)–(4) равносильны.

- (1) $H/H \cap \Delta^\delta(G) \in \mathfrak{F}$.

- (2) $H/H \cap \Phi(G) \in \mathfrak{F}$.

- (3) $H/H \cap \Phi_\theta(G) \in \mathfrak{F}$, где θ – \mathfrak{F} -абнормально полный подгрупповой t_s -функтор.

- (4) Группа H представима в виде прямого произведения $H = H_1 \times H_2$, где

$$H_1 \in \mathfrak{F}; \pi(H_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset; H_2 \subseteq \Phi(G).$$

Следствие 2.1.3. Пусть \mathfrak{F} – локальная S_n -замкнутая формация, θ – \mathfrak{F} -абнормально полный подгрупповой t_s -функтор. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G , $H/H \cap \Phi_\theta(G) \in \mathfrak{F}$. Если $\pi(\mathfrak{F}) = P$, то $H \in \mathfrak{F}$.

Лемма 2.2. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{O}_\pi \mathfrak{F}$ – локальная S_n -замкнутая формация. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G , подгруппа $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π . Тогда следующие утверждения I и II равносильны.

I. $H/H \cap \Delta^\delta_\pi(G) \in \mathfrak{F}$.

II. Факторгруппа $H/O_\pi(H)$ представима в виде прямого произведения

$$H/O_\pi(H) = H_1/O_\pi(H) \times H_2/O_\pi(H),$$

где:

- 1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;
- 2) $\pi(H_2/O_\pi(H)) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$;
- 3) $H_2 \subseteq \Phi_\pi(G)$.

Доказательство. Пусть выполнено утверждение I, т. е. $H/H \cap \Delta^\delta_\pi(G) \in \mathfrak{F}$. Введём следующие обозначения:

$$\overline{G} = G/O_\pi(G),$$

$$\overline{H} = H/O_\pi(G)/O_\pi(G).$$

Тогда

$$\Delta^\delta_\pi(G/O_\pi(G)) = \Delta^\delta_\pi(G)/O_\pi(G) = \Delta^\delta(G/O_\pi(G))$$

по утверждениям (2) и (3) леммы 1.1,

$$\Phi_\pi(G)/O_\pi(G) = \Phi(\overline{G})$$

по утверждению (1) леммы 1.1. Далее,

$$\overline{H}/\overline{H} \cap \Delta^\delta(\overline{G}) \cong H/O_\pi(G)/HO_\pi(G) \cap \Delta^\delta_\pi(G) \cong$$

$$\cong H/(H \cap \Delta^\delta_\pi(G))O_\pi(H) = H/H \cap \Delta^\delta_\pi(G) \in \mathfrak{F},$$

ибо подгруппа $O_\pi(H)$ субнормальна в G , а ввиду следствия 7.7.2 теоремы 7.7 [1] $H \cap O_\pi(G) = O_\pi(H)$. Применяя лемму 2.1, получаем: $\overline{H} = N_1/O_\pi(G) \times N_2/O_\pi(G)$, где $N_1/O_\pi(G) \in \mathfrak{F}$, $\pi(N_2/O_\pi(G)) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$, $N_2/O_\pi(G) \subseteq \Phi(\overline{G})$. Пусть $i \in \{1, 2\}$. Так как

$$N_i = N_i \cap H O_\pi(G) = (N_i \cap H) O_\pi(G),$$

то, обозначая $N_i \cap H = H_i$, для каждого $i \in \{1, 2\}$

имеем: H_i – нормальная подгруппа H ,

$$N_i/O_\pi(G) \cong H_i/N_i \cap H \cap O_\pi(G) = H_i/O_\pi(H);$$

$H_1/O_\pi(H) \in \mathfrak{F}$, откуда

$$H_1 \in \mathfrak{U}_\pi \mathfrak{F} = \mathfrak{F}; \quad \pi(H_2/O_\pi(H)) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset;$$

$$H_2 = N_2 \cap H \subseteq \Phi_\pi(G).$$

Следовательно, $H_1 \cap H_2 = O_\pi(H)$. Кроме того, $|H_1/O_\pi(H) \times H_2/O_\pi(H)| = |N_1/O_\pi(G) \times N_2/O_\pi(G)|$, а так как $H_1/O_\pi(H) \times H_2/O_\pi(H) \subseteq H/O_\pi(H) \cong \cong H/O_\pi(G)/O_\pi(G)$, то $H_1/O_\pi(H) \times H_2/O_\pi(H) = H/O_\pi(H)$. Таким образом, утверждение II выполнено.

Пусть $H/O_\pi(H) = H_1/O_\pi(H) \times H_2/O_\pi(H)$, $H_1 \in \mathfrak{F}$, $H_2 \subseteq \Phi_\pi(G)$. Тогда $H/H_2 \cong H_1/O_\pi(H) \in \mathfrak{F}$. А так как $\Phi_\pi(G) \subseteq \Delta_\pi^\mathfrak{F}(G)$, то $H_2 \subseteq H \cap \Delta_\pi^\mathfrak{F}(G)$, а значит, $H/H \cap \Delta_\pi^\mathfrak{F}(G) \in \mathfrak{F}$. \square

Следующий результат обобщает следствие 2.1.1 леммы 2.1.

Следствие 2.2.1. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}_\pi \mathfrak{F}$ – локальная S_n -замкнутая формация, $\pi(\mathfrak{F}) = P$. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G , подгруппа $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π . Если $H/H \cap \Delta_\pi^\mathfrak{F}(G) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.

Следствие 2.2.2. Пусть \mathfrak{A}^π – формация всех π' -сверхразрешимых групп. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G , подгруппа $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π . Если факторгруппа $H/H \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{A}^\pi}(G)$ π' -сверхразрешима, то группа H также π' -сверхразрешима.

В случае $\pi = \emptyset$ из следствия 2.2.2, как и непосредственно из леммы 2.2, вытекает следующий результат.

Следствие 2.2.3 [2, следствие 3.4]. Пусть \mathfrak{A} – формация всех сверхразрешимых групп. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G такая, что $H/H \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{A}}(G)$ сверхразрешима. Тогда H сверхразрешима.

Так как $\Phi_\pi(G) \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G) \subseteq \Delta_\pi^\mathfrak{F}(G)$ для любой группы G и \mathfrak{F} -абнормально π' -полного подгруппового t -функтора θ , то лемма 2.2 может быть функторно обобщена следующей теоремой.

Теорема 2.1. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}_\pi \mathfrak{F}$ – локальная S_n -замкнутая формация, θ – \mathfrak{F} -абнормально π' -полный подгрупповый t_s -функтор. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G , подгруппа $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π . Тогда следующие утверждения I и II равносильны.

I. $H/H \cap \Phi_{\theta_\pi}(G) \in \mathfrak{F}$.

II. Факторгруппа $H/O_\pi(H)$ представима в виде прямого произведения

$$H/O_\pi(H) = H_1/O_\pi(H) \times H_2/O_\pi(H),$$

где: 1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(H_2/O_\pi(H)) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$;

3) $H_2 \subseteq \Phi_\pi(G)$.

Следствие 2.1.1. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}_\pi \mathfrak{F}$ – локальная S_n -замкнутая формация. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G , подгруппа $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π . Тогда следующие утверждения (1)–(4) равносильны.

(1) $H/H \cap \Delta_\pi^\mathfrak{F}(G) \in \mathfrak{F}$.

(2) $H/H \cap \Phi_\pi(G) \in \mathfrak{F}$.

(3) $H/H \cap \Phi_{\theta_\pi}(G) \in \mathfrak{F}$, где θ – \mathfrak{F} -абнормально π' -полный подгрупповый t_s -функтор.

(4) Факторгруппа $H/O_\pi(H)$ представима в виде прямого произведения

$$H/O_\pi(H) = H_1/O_\pi(H) \times H_2/O_\pi(H),$$

где $H_1 \in \mathfrak{F}$; $\pi(H_2/O_\pi(H)) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$; $H_2 \subseteq \Phi_\pi(G)$.

Следствие 2.1.1 теоремы 2.1 включает следствие 2.1.2 леммы 2.1: случай $\pi = \emptyset$.

Следствие 2.1.2. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}_\pi \mathfrak{F}$ – локальная S_n -замкнутая формация, $\pi(\mathfrak{F}) = P$, θ – \mathfrak{F} -абнормально π' -полный подгрупповый t_s -функтор. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G , подгруппа $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π . Если $H/H \cap \Phi_{\theta_\pi}(G) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.

3 Радикальные локальные формации. Формационные радикалы факторгруппы L/K с субнормальной в группе G подгруппой L и нормальной в L подгруппой K из обобщённой подгруппы Фраттини группы G

Теорема 3.1. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}_\pi \mathfrak{F}$ – радикальная локальная формация, θ – \mathfrak{F} -абнормально π' -полный подгрупповый t_s -функтор. И пусть подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π , L – субнормальная подгруппа группы G , K – нормальная подгруппа L , $K \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G)$. Тогда выполняются следующие утверждения.

(1) $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}} K_0 / K$, где K_0 – (нильпотентная) холловская $\pi'(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы K , $O_\pi(K) K_0 \subseteq \Phi_\pi(G)$, причём $L_{\mathfrak{F}} \subseteq N_G(O_\pi(K) K_0)$.

В частности,

$$(L/L \cap \Phi_{\theta_\pi}(G))_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}} L_0 / L \cap \Phi_{\theta_\pi}(G),$$

где L_0 – холловская $\pi'(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы $L \cap \Phi_{\theta_\pi}(G)$, $O_\pi(L \cap \Phi_{\theta_\pi}(G)) L_0 \subseteq \Phi_\pi(G)$, причём $L_{\mathfrak{F}} \subseteq N_G(O_\pi(L \cap \Phi_{\theta_\pi}(G)) L_0)$.

(2) Если $\pi(\mathfrak{F}) = P$, то $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}} / K$; в частности, $(L/L \cap \Phi_{\theta_\pi}(G))_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}} / L \cap \Phi_{\theta_\pi}(G)$.

Доказательство. Докажем утверждение (1). Пусть $K \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G) \cap L$. Обозначим $N/K = (L/K)_{\mathfrak{F}}$. Так как $N/K \in \mathfrak{F}$, $K \subseteq N \cap \Phi_{\theta_\pi}(G)$, то $N/N \cap \Phi_{\theta_\pi}(G) \in \mathfrak{F}$. По теореме 2.1

$$N/O_\pi(N) = N_1/O_\pi(N) \times N_2/O_\pi(N),$$

где $N_1 \in \mathfrak{F}$, $\pi(N_2/O_\pi(N)) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$, $N_2 \subseteq \Phi_\pi(G)$. Заметим, что $\pi(\mathfrak{F})$ -замкнутая группа N обладает нильпотентной холловской $\pi'(\mathfrak{F})$ -подгруппой K_0 , $K_0 \subseteq N_2 \cap K$. Ясно, что $N_1 = N_{\mathfrak{F}}$, $N_{\mathfrak{F}} \subseteq L_{\mathfrak{F}}$, $N = N_{\mathfrak{F}}K_0$. Так как $L_{\mathfrak{F}}K/K \subseteq N/K$ и $L_{\mathfrak{F}}$ субнормальна в G , то $L_{\mathfrak{F}}$ субнормальна в N по следствию 7.3.1 [1], а по следствию 7.7.1 [1] $L_{\mathfrak{F}} \subseteq N_{\mathfrak{F}}$. Значит, $N_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}$, откуда $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}K_0/K$. Кроме того, подгруппа $N_2 \cap K = O_\pi(N)K_0 \cap K = (O_\pi(N) \cap K)K_0 = O_\pi(K)K_0$ нормальна в N , а значит, $L_{\mathfrak{F}} \subseteq N_G(O_\pi(K)K_0)$. Утверждение (1) доказано, утверждение (2) есть следствие утверждения (1). \square

Следствие 3.1.1. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ – радикальная локальная формация. И пусть подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π , L – субнормальная подгруппа группы G , K – нормальная подгруппа L . Тогда выполняются следующие утверждения.

I. Если $K \subseteq \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$, то:

(1) $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}K_0/K$, где K_0 – (нильпотентная) холловская $\pi'(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы K , $O_\pi(K)K_0 \subseteq \Phi_\pi(G)$, причём $L_{\mathfrak{F}} \subseteq N_G(O_\pi(K)K_0)$.

В частности,

$$(L/L \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G))_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}L_0/L \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G),$$

где L_0 – холловская $\pi'(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы $L \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$, $O_\pi(L \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G))L_0 \subseteq \Phi_\pi(G)$, причём $L_{\mathfrak{F}} \subseteq N_G((O_\pi(L \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G))L_0)$.

(2) Если $\pi(\mathfrak{F}) = P$, то $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/K$; в частности, $(L/L \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G))_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/L \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$.

II. Пусть $K \subseteq \Delta_\pi(G)$. Если $\pi(\mathfrak{F}) = P$, то $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/K$; в частности,

$$(L/L \cap \Delta_\pi(G))_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/L \cap \Delta_\pi(G).$$

Утверждения I. (1), I. (2) следствия 3.1.1, вытекающие из теоремы 3.1 в случае, если для \mathfrak{F} -абнормально π' -полного подгруппового t_s -функтора θ и любой группы G положить $\theta(G) = \{G\} \cup M_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$, усиливают лемму 3.1 и её следствие 3.1.1 (соответственно) из [10]. Утверждение II следствия 3.1.1 теоремы 3.1 вытекает из утверждения I.(2) ввиду того, что $\Delta_\pi(G) \subseteq \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$, если \mathfrak{F} содержит все нильпотентные группы.

Следствие 3.1.2. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ – радикальная локальная формация. И пусть подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π , L – субнормальная подгруппа группы G , $K \subseteq L \cap \Phi_\pi(G)$, подгруппа K нормальна в L . Тогда выполняются следующие утверждения.

(1) $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}K_0/K$, где K_0 – (нильпотентная) холловская $\pi'(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы K , причём $L_{\mathfrak{F}} \subseteq N_G(O_\pi(K)K_0)$.

В частности,

$$(L/L \cap \Phi_\pi(G))_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}L_0/L \cap \Phi_\pi(G),$$

где L_0 – холловская $\pi'(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы $L \cap \Phi_\pi(G)$, причём $L_{\mathfrak{F}} \subseteq N_G((L \cap \Phi_\pi(G))K_0)$.

(2) Если $\pi(\mathfrak{F}) = P$, то $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/K$; в частности, $(L/L \cap \Phi_\pi(G))_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/L \cap \Phi_\pi(G)$.

Следствие 3.1.2 получается из теоремы 3.1, если для \mathfrak{F} -абнормально π' -полного подгруппового t_s -функтора θ и любой группы G положить $\theta(G) = \{G\} \cup M(G)$. Утверждение (1) следствия 3.1.2 вытекает также из утверждения I. (1) следствия 3.1.1. Следствие 3.1.2 усиливает лемму 2.1 из [10].

Следствие 3.1.3. Пусть подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π , L – субнормальная подгруппа группы G , подгруппа K – нормальная подгруппа L . Тогда выполняются следующие утверждения.

I. Пусть θ – $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_\pi$ -абнормально π' -полный подгрупповый t_s -функтор, и пусть $K \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G)$ ($K \subseteq \Phi_i(G)$, $i \in \{1, 2, 3\}$), где $\Phi_1(G) = \Phi_\pi(G)$, $\Phi_2(G) = \Delta_\pi(G)$, $\Phi_3(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi}(G)$. Тогда

$$(L/K)_{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_\pi} = L_{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_\pi}/K.$$

В частности:

$$(L/L \cap \Phi_{\theta_\pi}(G))_{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_\pi} = L_{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_\pi}/L \cap \Phi_{\theta_\pi}(G)$$

(и, значит, $(L/L \cap \Phi_i(G))_{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_\pi} = L_{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_\pi}/L \cap \Phi_i(G)$, $i \in \{1, 2, 3\}$).

В частности, если $L/L \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi}(G)$ π -замкнута, то и L π -замкнута.

II. Пусть θ – абнормально π' -полный подгрупповый t_s -функтор, и пусть $K \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G)$ ($K \subseteq \Phi_i(G)$, $i \in \{1, 2\}$), где $\Phi_1(G) = \Phi_\pi(G)$, $\Phi_2(G) = \Delta_\pi(G)$. Тогда $F_\pi(L/K) = F_\pi(L)/K$.

В частности,

$$F_\pi(L/L \cap \Phi_{\theta_\pi}(G)) = F_\pi(L)/L \cap \Phi_{\theta_\pi}(G)$$

(и, значит, $F_\pi(L/L \cap \Phi_i(G)) = F_\pi(L)/L \cap \Phi_i(G)$, $i \in \{1, 2\}$).

В частности, если $L/L \cap \Delta_\pi(G)$ π' -нильпотентна, то и L π' -нильпотентна.

III. Пусть $\theta - \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{S}_\pi^{\mathfrak{M}}$ -абнормально π' -полный подгрупповой m_s -функтор, и пусть $K \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G)$ ($K \subseteq \Phi_i(G)$, $i \in \{1, 2, 3\}$), где $\Phi_1(G) = \Phi_\pi(G)$,

$\Phi_2(G) = \Delta_\pi(G)$, $\Phi_3(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{S}_\pi^{\mathfrak{M}}}(G)$. Тогда

$$(L/K)_{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{S}_\pi^{\mathfrak{M}}} = L_{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{S}_\pi^{\mathfrak{M}}} / K.$$

В частности,

$$(L/L \cap \Phi_{\theta_\pi}(G))_{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{S}_\pi^{\mathfrak{M}}} = L_{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{S}_\pi^{\mathfrak{M}}} / L \cap \Phi_{\theta_\pi}(G)$$

(и, значит, $(L/L \cap \Phi_i(G))_{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{S}_\pi^{\mathfrak{M}}} = L_{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{S}_\pi^{\mathfrak{M}}} / L \cap \Phi_i(G)$, $i \in \{1, 2, 3\}$).

В частности, если $L/L \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{S}_\pi^{\mathfrak{M}}}(G) \in \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{S}_\pi^{\mathfrak{M}}$ то и $L \in \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{S}_\pi^{\mathfrak{M}}$.

Доказательство. I. Пусть $\theta - \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_\pi$ -абнормально π' -полный подгрупповой m_s -функтор. Для случая $K \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G)$ справедливость утверждения I вытекает из утверждения (2) теоремы 3.1. Для случая $K \subseteq \Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi}(G)$ – из утверждения I. (2) следствия 3.1.1 теоремы 3.1, учитывая равенство $\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_\pi}(G)$ согласно утверждению (5) леммы 1.1. Для случая $K \subseteq \Phi_\pi(G)$ утверждение I вытекает из утверждения (2) следствия 3.1.2 теоремы 3.1. А так как, учитывая утверждение (5) леммы 1.1,

$$\Delta_\pi(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{S}_\pi^{\mathfrak{M}}}(G) \subseteq \Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi}(G)$$

для любой группы G , то утверждение I справедливо и для случая $K \subseteq \Delta_\pi(G)$. Справедливость утверждений II и III обосновывается аналогично. \square

Заметим, что частные случаи утверждений следствия 3.1.3 теоремы 3.1 о π -замкнутости L (π' -нильпотентности L , $L \in \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{S}_\pi^{\mathfrak{M}}$), если

$$L/L \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi}(G) \in \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_\pi, \quad (L/L \cap \Delta_\pi(G) \in \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{R}_\pi,$$

$$L/L \cap \Delta_\pi^{\mathfrak{S}_\pi^{\mathfrak{M}}}(G) \in \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{S}_\pi^{\mathfrak{M}},$$

соответственно, вытекают также из следствия 2.2.1 леммы 2.2.

Заметим также, что для подгруппового m -функтора θ в силу утверждения (5) леммы 1.1 условия: $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_\pi$ -абнормально π' -полный (абнормально π' -полный, $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{S}_\pi^{\mathfrak{M}}$ -абнормально π' -полный) равносильны условиям: \mathfrak{G}_π -абнормально π' -полный ($\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{R}_\pi$ -абнормально π' -полный или \mathfrak{R}_π -абнормально π' -полный, $\mathfrak{S}_\pi^{\mathfrak{M}}$ -абнормально π' -полный, соответственно).

Полагая в условии теоремы 3.1 $\pi = \emptyset$, получаем как следствие следующую теорему.

Теорема 3.2. Пусть \mathfrak{F} – радикальная локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, $\theta - \mathfrak{F}$ -абнормально полный подгрупповой m_s -функтор. И пусть $L -$

субнормальная подгруппа группы G , $K -$ нормальная подгруппа L , $K \subseteq \Phi_\theta(G)$. Тогда выполняются следующие утверждения.

$$(1) (L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}} \times O_\pi(K)/K, \quad O_\pi(K) \subseteq \Phi(G).$$

В частности,

$$(L/L \cap \Phi_\theta(G))_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}} \times O_\pi(L \cap \Phi_\theta(G))/L \cap \Phi_\theta(G),$$

$$O_\pi(L \cap \Phi_\theta(G)) \subseteq \Phi(G).$$

$$(2) \text{ Если } \pi(\mathfrak{F}) = P, \text{ то } (L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/K;$$

в частности, $(L/L \cap \Phi_\theta(G))_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/L \cap \Phi_\theta(G)$.

Следствие 3.2.1. Пусть $\mathfrak{F} -$ радикальная локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. И пусть $L -$ субнормальная подгруппа группы G , $K -$ нормальная подгруппа L . Тогда выполняются следующие утверждения.

I. Если $K \subseteq \Delta^{\mathfrak{F}}(G)$, то:

$$(1) (L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}} \times O_\pi(K)/K, \quad O_\pi(K) \subseteq \Phi(G).$$

В частности,

$$(L/L \cap \Delta^{\mathfrak{F}}(G))_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}} \times O_\pi(L \cap \Delta^{\mathfrak{F}}(G))/L \cap \Delta^{\mathfrak{F}}(G),$$

$$O_\pi(L \cap \Delta^{\mathfrak{F}}(G)) \subseteq \Phi(G).$$

$$(2) \text{ Если } \pi(\mathfrak{F}) = P, \text{ то } (L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/K; \text{ в частности,}$$

$$(L/L \cap \Delta^{\mathfrak{F}}(G))_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/L \cap \Delta^{\mathfrak{F}}(G).$$

II. Пусть $K \subseteq \Delta(G)$. Если $\pi(\mathfrak{F}) = P$, то $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/K$; в частности,

$$(L/L \cap \Delta(G))_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/L \cap \Delta(G).$$

Утверждения I. (1) и I. (2) следствия 3.2.1 теоремы 3.2 усиливают следствия 3.1.2 и 3.1.3 леммы 3.1 (соответственно) из [10].

Следствие 3.2.2. Пусть $\mathfrak{F} -$ радикальная локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. И пусть $L -$ субнормальная подгруппа группы G , $K \subseteq L \cap \Phi(G)$, K нормальна в L . Тогда выполняются следующие утверждения.

$$(1) (L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}} \times O_\pi(K)/K.$$

В частности,

$$(L/L \cap \Phi(G))_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}} \times O_\pi(L \cap \Phi(G))/L \cap \Phi(G).$$

(2) Если $\pi(\mathfrak{F}) = P$, то $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/K$; в частности, $(L/L \cap \Phi(G))_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/L \cap \Phi(G)$.

Следствие 3.2.2 теоремы 3.2 усиливает следствие 2 леммы 1 из [9]. Понятно, что утверждение (1) следствия 3.2.2 вытекает как непосредственно из утверждения (1) теоремы 3.2, так и из утверждения I.(1) следствия 3.2.1.

Следствие 3.2.3. Пусть $L -$ субнормальная подгруппа группы G , $K -$ нормальная подгруппа L . Имеют место следующие утверждения.

I. Пусть $\theta - \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_\pi$ -абнормально полный подгрупповой m_s -функтор, и пусть $K \subseteq \Phi_\theta(G)$,

($K \subseteq \Phi_i(G)$, $i \in \{1, 2, 3\}$), где $\Phi_1(G) = \Phi(G)$,

$\Phi_2(G) = \Delta(G)$, $\Phi_3(G) = \Delta^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_\pi}(G)$). Тогда

$$(L/K)_{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_\pi} = L_{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_\pi} / K.$$

В частности,

$$(L/L \cap \Phi_\theta(G))_{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_\pi} = L_{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_\pi} / L \cap \Phi_\theta(G)$$

(и, значит, $(L/L \cap \Phi_i(G))_{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_\pi} = L_{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_\pi} / L \cap \Phi_i(G)$, $i \in \{1, 2, 3\}$).

В частности, если факторгруппа

$$L/L \cap \Delta^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_\pi}(G)$$

π -замкнута, то и L π -замкнута.

II. Пусть θ – $\mathfrak{G}_p \mathfrak{N}_p$ -абнормально полный подгрупповой m_s -функтор, p – простое число. Если $K \subseteq \Phi_\theta(G)$ ($K \subseteq \Phi_i(G)$, $i \in \{1, 2, 3\}$), где $\Phi_1(G) = \Phi(G)$, $\Phi_2(G) = \Delta(G)$, $\Phi_3(G) = \Delta^{\mathfrak{G}_p \mathfrak{N}_p}(G)$, то $F_p(L/K) = F_p(L)/K$.

В частности,

$$F_p(L/L \cap \Phi_\theta(G)) = F_p(L)/L \cap \Phi_\theta(G)$$

(и, значит, $F_p(L/L \cap \Phi_i(G)) = F_p(L)/L \cap \Phi_i(G)$, $i \in \{1, 2, 3\}$).

Доказательство. I. Пусть θ – $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_\pi$ -абнормально полный подгрупповой m_s -функтор. Для случая $K \subseteq \Phi_\theta(G)$ справедливость утверждения I вытекает из утверждения (2) теоремы 3.2. Для случая $K \subseteq \Delta^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_\pi}(G)$ справедливость утверждения I вытекает из утверждения I. (2) следствия 3.2.1 теоремы 3.2. Случай $K \subseteq \Phi(G)$ – приложение для формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_\pi$ утверждения (2) следствия 3.2.2 теоремы 3.2. А так как $\Delta(G) \subseteq \Delta^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_\pi}(G)$ для любой группы G , то утверждение I справедливо и для случая $K \subseteq \Delta(G)$. Утверждение II вытекает из утверждения I, если положить $\pi' = \{p\}$.

Следствие 3.2.3 теоремы 3.2 обобщает лемму 4.4 из [1].

Следствие 3.2.4. Пусть L – субнормальная подгруппа группы G , K – нормальная подгруппа L . Имеют место следующие утверждения.

I. Пусть θ – абнормально полный подгрупповой m_s -функтор, и пусть $K \subseteq \Phi_\theta(G)$ ($K \subseteq \Phi_i(G)$, $i \in \{1, 2\}$), где $\Phi_1(G) = \Phi(G)$, $\Phi_2(G) = \Delta(G)$. Тогда $F(L/K) = F(L)/K$.

В частности,

$$F(L/L \cap \Phi_\theta(G)) = F(L)/L \cap \Phi_\theta(G)$$

(и, значит, $F(L/L \cap \Phi_i(G)) = F(L)/L \cap \Phi_i(G)$, $i \in \{1, 2\}$).

В частности, если $L/L \cap \Delta(G)$ нильпотентна, то и L нильпотентна.

II. Пусть θ – $\mathfrak{F}^{\mathfrak{N}}$ -абнормально полный подгрупповой m_s -функтор, и пусть $K \subseteq \Phi_\theta(G)$ ($K \subseteq \Phi_i(G)$, $i \in \{1, 2, 3\}$), где $\Phi_1(G) = \Phi(G)$,

$\Phi_2(G) = \Delta(G)$, $\Phi_3(G) = \Delta^{\mathfrak{F}^{\mathfrak{N}}}(G)$. Тогда

$$(L/K)_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{N}}} = L_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{N}}} / K.$$

В частности,

$$(L/L \cap \Phi_\theta(G))_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{N}}} = L_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{N}}} / L \cap \Phi_\theta(G)$$

(и, значит, $(L/L \cap \Phi_i(G))_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{N}}} = L_{\mathfrak{F}^{\mathfrak{N}}} / L \cap \Phi_i(G)$, $i \in \{1, 2, 3\}$).

В частности, если $L/L \cap \Delta^{\mathfrak{F}^{\mathfrak{N}}}(G) \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{N}}$ то и $L \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{N}}$.

Следствие 3.2.4 теоремы 3.2 вытекает также из утверждений II и III следствия 3.1.3 теоремы 3.1, случай $\pi = \emptyset$. Частные случаи утверждений следствия 3.2.4 теоремы 3.2 о нильпотентности L (о принадлежности L формации $\mathfrak{F}^{\mathfrak{N}}$), если $L/L \cap \Delta(G) \in \mathfrak{N}$ ($L/L \cap \Delta^{\mathfrak{F}^{\mathfrak{N}}}(G) \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{N}}$, соответственно), вытекают также из следствия 2.1.1[2] леммы 2.1.

Среди других приложений теоремы 3.2 для локальных радикальных формаций, содержащих все нильпотентные группы, можно указать на соответствующие утверждения для формаций $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi$, $\mathfrak{G}_\pi \times \mathfrak{G}_\pi$, $\mathfrak{G}_\pi \times \mathfrak{N}_\pi$, $\mathfrak{G}_\pi \times \mathfrak{F}_\pi^{\mathfrak{N}}$. Отметим, что утверждения II следствия 3.2.3 теоремы 3.2, представляющие собой частный случай ($\pi = p'$) утверждений, вытекающих из теоремы 3.2 для формации $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_\pi$, вытекают из соответствующих утверждений и в отношении формации $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi$.

4 Факторизуемость субнормальной в группе G подгруппы H нормальными в H подгруппами в связи с локальными формациями и обобщёнными подгруппами Фраттини группы G

Теорема 4.1. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ – локальная формация, θ – абнормально π' -полный подгрупповой m_s -функтор. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G , подгруппа $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π . Тогда следующие утверждения I и II равносильны.

I. $H/H \cap \Phi_\pi(G) \in \mathfrak{F}$.

II. Факторгруппа $H/O_\pi(H)$ представима в виде прямого произведения

$$H/O_\pi(H) = H_1/O_\pi(H) \times H_2/O_\pi(H),$$

где: 1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(H_2/O_\pi(H)) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$;

3) $H_2 \subseteq \Phi_\pi(G)$.

Доказательство. Пусть выполняется утверждение I, т. е. $H/H \cap \Phi_\pi(G) \in \mathfrak{F}$. Введём следующие обозначения:

$$\bar{G} = G/O_\pi(G), \quad \bar{H} = H/O_\pi(G)/O_\pi(G).$$

По утверждениям (2) и (3) леммы 1.1 $\Delta_\pi(G/O_\pi(G)) = \Delta_\pi(G)/O_\pi(G) = \Delta(G/O_\pi(G))$, а так как $\Phi_{\theta_\pi}(G) \subseteq \Delta_\pi(G)$, то

$$\overline{H}/\overline{H} \cap \Delta(\overline{G}) \cong H/H \cap \Delta_\pi(G) \in \mathfrak{F}.$$

Обозначая $\pi(\mathfrak{F}) = \tau$, $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}_\tau \times \mathfrak{G}_\tau$, и учитывая $\Delta(\overline{G}) \subseteq \Delta^\times(\overline{G})$, ибо $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$, получаем

$$\overline{H}/\overline{H} \cap \Delta^\times(\overline{G}) \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X},$$

откуда по утверждению (6) леммы 1.1 $\overline{H} \in \mathfrak{X}$, т. е. $\overline{H} = N_1/O_\pi(G) \times N_2/O_\pi(G)$, $N_1/O_\pi(G) \in \mathfrak{G}_\tau$, $N_2/O_\pi(G) \in \mathfrak{G}_\tau$. Обозначая $N_i \cap H = H_i$, для каждого $i \in \{1, 2\}$ имеем: H_i – нормальная подгруппа H , $N_i/O_\pi(G) \cong H_i/O_\pi(H)$; $H_1 \in \mathfrak{G}_\tau$, $\pi(H_2/O_\pi(H)) \cap \tau = \emptyset$. Значит, $H_1 \cap H_2 = O_\pi(H)$. Кроме того, $|H_1/O_\pi(H) \times H_2/O_\pi(H)| = |N_1/O_\pi(G) \times N_2/O_\pi(G)|$, а так как

$$\begin{aligned} H_1/O_\pi(H) \times H_2/O_\pi(H) &\subseteq \\ &\subseteq H/O_\pi(H) \cong H/O_\pi(G)/O_\pi(G), \end{aligned}$$

то $H/O_\pi(H) = H_1/O_\pi(H) \times H_2/O_\pi(H)$. Из условия $H/H \cap \Phi_{\theta_\pi}(G) \in \mathfrak{F}$ следует $H_2 \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G)$. Действительно, ввиду следствия 7.7.2 теоремы 7.7 из [1] $O_\pi(H) \subseteq O_\pi(G) \subseteq \Phi_\pi(G) \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G)$. А так как группа H и её нормальные подгруппы H_2 и $H \cap \Phi_{\theta_\pi}(G)$ τ -замкнуты, то H_2 и $\Phi_{\theta_\pi}(G)$ содержат все холловские τ' -подгруппы группы H , учитывая их сопряжённость в H в связи с теоремой Шура-Цассенхауза.

Покажем, что $H_1 \in \mathfrak{F}$. Так как

$$\overline{H}/\overline{H} \cap \Delta(\overline{G}) \in \mathfrak{F} \text{ и } \overline{H} = N_1/O_\pi(G) \times N_2/O_\pi(G),$$

$$N_1/O_\pi(G) \in \mathfrak{G}_\tau, \quad N_2/O_\pi(G) \in \mathfrak{G}_\tau, \text{ то}$$

$$\overline{H} \cap \Delta(\overline{G}) = K_1/O_\pi(G) \times K_2/O_\pi(G), \quad K_2 = N_2$$

и, следовательно, $\overline{N}_1/\overline{K}_1 \in \mathfrak{F}$, где $\overline{N}_1 = N_1/O_\pi(G)$, $\overline{K}_1 = K_1/O_\pi(G)$. Так как $\overline{K}_1 \subseteq \Delta(\overline{G})$, то $F_p(\overline{N}_1/\overline{K}_1) = F_p(\overline{N}_1)/\overline{K}_1$ для любого простого числа p по утверждению II следствия 3.2.3 теоремы 3.2. Если $K_1 = O_\pi(G)$, то $\overline{N}_1 \in \mathfrak{F}$, а значит, группа $H_1/O_\pi(H)$, изоморфная \overline{N}_1 , принадлежит формации \mathfrak{F} , откуда $H_1 \in \mathfrak{F}$. Поэтому считаем, что $\pi(\overline{K}_1) \neq \emptyset$. Пусть \mathfrak{f} – локальный экран формации \mathfrak{F} , p – произвольное простое из множества $\pi(\overline{K}_1)$. Если $p \in \pi(\overline{N}_1/\overline{K}_1)$, то по лемме 4.5[1] $\overline{N}_1/\overline{K}_1/F_p(\overline{N}_1/\overline{K}_1) \in \mathfrak{f}(p)$, откуда $\overline{N}_1/F_p(\overline{N}_1) \in \mathfrak{f}(p)$. Если $p \notin \pi(\overline{N}_1/\overline{K}_1)$, то $F_p(\overline{N}_1/\overline{K}_1) = \overline{N}_1/\overline{K}_1$, и, значит, $\overline{N}_1 = F_p(\overline{N}_1)$. А так как согласно лемме 4.2 [1] $\mathfrak{f}(p) \neq \emptyset$, то и в этом случае $\overline{N}_1/F_p(\overline{N}_1) \in \mathfrak{f}(p)$.

Применяя лемму 4.5[1] и учитывая $\overline{N}_1/\overline{K}_1 \in \mathfrak{F}$, получаем $\overline{N}_1 \in \mathfrak{F}$. Значит, снова $H_1/O_\pi(H) \in \mathfrak{F}$, а следовательно, и H_1 принадлежит формации \mathfrak{F} . Справедливость утверждения II при условии выполнения утверждения I доказана.

Пусть выполняется утверждение II. Из условия $H = H_1 \times H_2$, где $H_1 \in \mathfrak{F}$, $H_2 \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G)$, следует $H/H \cap \Phi_{\theta_\pi}(G) \in \mathfrak{F}$. Значит, выполняется утверждение I. \square

Следствие 4.1.1. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ – локальная формация, $\pi(\mathfrak{F}) = P$, θ – абнормально π' -полный подгрупповой t_s -функтор. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G , подгруппа $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π . Если $H/H \cap \Phi_{\theta_\pi}(G) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.

Следствие 4.1.2. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ – локальная формация. И пусть подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π , H – субнормальная подгруппа группы G . Тогда следующие утверждения I и II равносильны.

I. $H/H \cap \Phi_\pi(G) \in \mathfrak{F}$.

II. Факторгруппа $H/O_\pi(H)$ представима в виде прямого произведения

$$H/O_\pi(H) = H_1/O_\pi(H) \times H_2/O_\pi(H),$$

где:

- 1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;
- 2) $\pi(H_2/O_\pi(H)) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$;
- 3) $H_2 \subseteq \Phi_\pi(G)$.

Следствие 4.1.3. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ – локальная формация. И пусть подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π , H – субнормальная подгруппа группы G . Тогда следующие утверждения I и II равносильны.

I. $H/H \cap \Delta_\pi(G) \in \mathfrak{F}$.

II. Факторгруппа $H/O_\pi(H)$ представима в виде прямого произведения

$$H/O_\pi(H) = H_1/O_\pi(H) \times H_2/O_\pi(H),$$

где:

- 1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;
- 2) $\pi(H_2/O_\pi(H)) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$;
- 3) $H_2 \subseteq \Delta_\pi(G)$.

Следствие 4.1.4. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ – локальная формация, $\pi(\mathfrak{F}) = P$. И пусть подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π , H – субнормальная подгруппа группы G . Если $H/H \cap \Delta_\pi(G) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.

Полагая $\pi = \emptyset$, из теоремы 4.1 получаем следующий результат.

Следствие 4.1.5. Пусть \mathfrak{F} – локальная формация, θ – абнормально полный подгрупповой t_s -функтор. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G . Тогда следующие утверждения I и II равносильны.

- I. $H/H \cap \Phi_\theta(G) \in \mathfrak{F}$.
- II. Группа H представима в виде прямого произведения $H = H_1 \times H_2$, где:
 - 1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;
 - 2) $\pi(H_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$;
 - 3) $H_2 \subseteq \Phi_\theta(G)$.

Следствие 4.1.5 теоремы 4.1 ослабляет требования, предъявляемые к функтору θ в теореме 2 из [3] (а также в утверждении 1) теоремы 1 из [4]), и дополняет соответствующий результат.

Следствие 4.1.6. Пусть \mathfrak{F} – локальная формация, $\pi(\mathfrak{F}) = P$, θ – абнормально полный подгрупповой t_s -функтор. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G . Если $H/H \cap \Phi_\theta(G) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.

Следствие 4.1.6 теоремы 4.1 приведено в [3, следствие 2.1] и в [4, следствие 1.1] с дополнительным условием регулярности t_α -функтора θ .

Следствие 4.1.7. Пусть \mathfrak{F} – локальная формация, и пусть H – субнормальная подгруппа группы G . Тогда следующие утверждения I и II равносильны.

- I. $H/H \cap \Phi(G) \in \mathfrak{F}$.
- II. Группа H представима в виде прямого произведения $H = H_1 \times H_2$, где:
 - 1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;
 - 2) $\pi(H_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$;
 - 3) $H_2 \subseteq \Phi(G)$.

Следствие 4.1.8. Пусть \mathfrak{F} – локальная формация, и пусть H – субнормальная подгруппа группы G . Тогда следующие утверждения I и II равносильны.

- I. $H/H \cap \Delta(G) \in \mathfrak{F}$.
- II. Группа H представима в виде прямого произведения $H = H_1 \times H_2$, где:
 - 1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;
 - 2) $\pi(H_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$;
 - 3) $H_2 \subseteq \Delta(G)$.

Следствие 4.1.8 включает следствие 2.2 из [3] и следствие 1.2 из [4].

Следствие 4.1.9 [3], [4]. Пусть \mathfrak{F} – локальная формация, $\pi(\mathfrak{F}) = P$. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G . Если $H/H \cap \Delta(G) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.

5 Приложения теоремы 2.1 для локальных S_n -замкнутых формаций. Приложения теоремы 4.1 для локальных формаций

Теорема 5.1. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ – локальная S_n -замкнутая формация, θ – \mathfrak{F} -абнормально π' -полный подгрупповой t_s -функтор. И пусть подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π , H – субнормальная подгруппы группы G . Если $H/H \cap O_{\pi(\mathfrak{F})}(\Phi_{\theta_\pi}(G)) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.

Доказательство. Пусть $H/H \cap O_{\pi(\mathfrak{F})}(\Phi_{\theta_\pi}(G)) \in \mathfrak{F}$.

Ясно, что H – $\pi(\mathfrak{F})$ -группа. Так как

$$H \cap O_{\pi(\mathfrak{F})}(\Phi_{\theta_\pi}(G)) \subseteq H \cap \Phi_{\theta_\pi}(G),$$

то по теореме 2.1

$$H/O_\pi(H) = H_1/O_\pi(H) \times H_2/O_\pi(H),$$

где $H_1 \in \mathfrak{F}$, $\pi(H_2/O_\pi(H)) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$. Значит, $H = H_1$. \square

Следствие 5.1.1. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ – локальная S_n -замкнутая формация, и пусть подгруппа $\Phi_\pi(G)$ группы G обладает свойством C_π , H – субнормальная подгруппа группы G . Если $H/H \cap O_{\pi(\mathfrak{F})}(\Delta_\pi^\mathfrak{F}(G)) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.

В случае $\pi = \emptyset$ из теоремы 5.1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 5.1.2. Пусть \mathfrak{F} – локальная S_n -замкнутая формация, θ – \mathfrak{F} -абнормально полный подгрупповой t_s -функтор. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G . Если $H/H \cap O_{\pi(\mathfrak{F})}(\Phi_\theta(G)) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.

Следствие 5.1.2 теоремы 5.1 включает результат из [2] (утверждение (б) леммы 1.1).

Теорема 5.2. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ – локальная формация, θ – абнормально π' -полный подгрупповой t_s -функтор. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G , подгруппа $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π . Если

$$H/H \cap O_{\pi(\mathfrak{F})}(\Phi_{\theta_\pi}(G)) \in \mathfrak{F}, \text{ то } H \in \mathfrak{F}.$$

Доказательство. Пусть $H/H \cap O_{\pi(\mathfrak{F})}(\Phi_{\theta_\pi}(G)) \in \mathfrak{F}$.

Тогда $H/H \cap \Phi_{\theta_\pi}(G) \in \mathfrak{F}$, и по теореме 4.1

$$H/O_\pi(H) = H_1/O_\pi(H) \times H_2/O_\pi(H), \text{ где } H_1 \in \mathfrak{F},$$

$$\pi(H_2/O_\pi(H)) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset.$$

А так как H – $\pi(\mathfrak{F})$ -группа, то $H = H_1$. \square

Следствие 5.2.1. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$ – локальная формация. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G , подгруппа $\Phi_\pi(G)$ обладает свойством C_π . Если $H/H \cap O_{\pi(\mathfrak{F})}(\Phi_\pi(G)) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.

Следующий результат, вытекающий из теоремы 5.2 в случае, если для абнормально π' -полного подгруппового m_s -функтора θ и любой группы G положить $\theta(G) = \{G\} \cup M_{\pi}^{\text{sk}}(G)$, усиливает следствие 5.2.1 теоремы 5.2 ввиду

$$O_{\pi(\mathfrak{F})}(\Phi_{\pi}(G)) \subseteq O_{\pi(\mathfrak{F})}(\Delta_{\pi}(G)).$$

Следствие 5.2.2. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi} \mathfrak{F}$ – локальная формация. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G , подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} . Если $H/H \cap O_{\pi(\mathfrak{F})}(\Delta_{\pi}(G)) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.

Следствие 5.2.3. Пусть \mathfrak{F} – локальная формация, θ – абнормально полный подгрупповой m_s -функтор. И пусть H – субнормальная подгруппа группы G . Если $H/H \cap O_{\pi(\mathfrak{F})}(\Phi_{\theta}(G)) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.

Следствие 5.2.3 теоремы 5.2 усиливает теорему 1 из [3], доказанную для случая $O_{\pi(\mathfrak{F})}(\Phi_{\theta}(G)) \subseteq H$ и при дополнительном условии, предполагающем: θ – абнормально полный регулярный m_{α} -функтор.

Следствие 5.2.4. Пусть \mathfrak{F} – локальная формация, и пусть H – субнормальная подгруппа группы G . Если $H/H \cap O_{\pi(\mathfrak{F})}(\Phi(G)) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.

В частном случае, когда H содержит $O_{\pi(\mathfrak{F})}(\Phi(G))$, из следствия 5.2.4 вытекает результат М.Д. Томкинсон [2, теорема 3.1]. Следующий результат усиливает следствие 5.2.4 теоремы 5.2.

Следствие 5.2.5. Пусть \mathfrak{F} – локальная формация, и пусть H – субнормальная подгруппа группы G . Если $H/H \cap O_{\pi(\mathfrak{F})}(\Delta(G)) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.

Из следствия 5.2.5 теоремы 5.2 вытекает соответствующий результат для случая $O_{\pi(\mathfrak{F})}(\Delta(G)) \subseteq H$ [3, следствие 1.1 теоремы 1].

В заключение отметим в виде теоремы одно общее, имеющее отношение к теоремам 2.1 и 4.1, свойство представления факторгруппы $H/O_{\pi}(H)$, связанное с обобщёнными подгруппами Фраттини и локальной формацией $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi} \mathfrak{F}$.

Теорема 5.3. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi} \mathfrak{F}$ – локальная формация, и пусть H – подгруппа группы G , подгруппа $\Phi_{\pi}(G)$ обладает свойством C_{π} . Имеют место следующие утверждения.

1. Если θ – абнормально π' -полный подгрупповой m -функтор, то факторгруппа $H/O_{\pi}(H)$ представима в виде прямого произведения

$$H/O_{\pi}(H) = H_1/O_{\pi}(H) \times H_2/O_{\pi}(H),$$

множители которого удовлетворяют условиям:

- 1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;
- 2) $H_2 \subseteq \Phi_{\theta_{\pi}}(G)$,

тогда и только тогда, когда $H/O_{\pi}(H)$ представима в виде прямого произведения

$$H/O_{\pi}(H) = \tilde{H}_1/O_{\pi}(H) \times \tilde{H}_2/O_{\pi}(H),$$

множители которого удовлетворяют условиям:

- 1) $\tilde{H}_1 \in \mathfrak{F}$;
- 2) $\pi(\tilde{H}_2/O_{\pi}(H)) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$;
- 3) $\tilde{H}_2 \subseteq \Phi_{\theta_{\pi}}(G)$.

II. Факторгруппа $H/O_{\pi}(H)$ представима в виде прямого произведения

$$H/O_{\pi}(H) = H_1/O_{\pi}(H) \times H_2/O_{\pi}(H),$$

множители которого удовлетворяют условиям:

- 1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;
- 2) $H_2 \subseteq \Phi_{\pi}(G)$ ($H_2 \subseteq \Delta_{\pi}(G)$),

тогда и только тогда, когда $H/O_{\pi}(H)$ представима в виде прямого произведения

$$H/O_{\pi}(H) = \tilde{H}_1/O_{\pi}(H) \times \tilde{H}_2/O_{\pi}(H),$$

множители которого удовлетворяют условиям:

- 1) $\tilde{H}_1 \in \mathfrak{F}$;
- 2) $\pi(\tilde{H}_2/O_{\pi}(H)) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$;
- 3) $\tilde{H}_2 \subseteq \Phi_{\pi}(G)$ ($\tilde{H}_2 \subseteq \Delta_{\pi}(G)$, соответственно).

Доказательство. I. Пусть факторгруппа $H/O_{\pi}(H)$ представима в виде:

$$H/O_{\pi}(H) = H_1/O_{\pi}(H) \times H_2/O_{\pi}(H),$$

где $H_1 \in \mathfrak{F}$, $H_2 \subseteq \Phi_{\theta_{\pi}}(G)$, θ – абнормально π' -полный подгрупповой m -функтор. Предположим, $\pi(H_2/O_{\pi}(H)) \cap \pi(\mathfrak{F}) \neq \emptyset$. Принимая во внимание утверждение (5) леммы 1.1,

$$\Phi_{\theta_{\pi}}(G) \subseteq \Delta_{\pi}(G) \in \mathfrak{G}_{\pi} \mathfrak{F}_{\pi},$$

а значит, ввиду S-замкнутости формации $\mathfrak{G}_{\pi} \mathfrak{F}_{\pi}$, подгруппа H_2 π' -нильпотентна и, следовательно, учитывая $O_{\pi}(H_2) = O_{\pi}(H)$, имеем:

$$H_2/O_{\pi}(H) = H_0/O_{\pi}(H) \times \tilde{H}_2/O_{\pi}(H),$$

где $H_0/O_{\pi}(H)$ – nilпотентная холловская $\pi(\mathfrak{F}) \cap \pi'$ -подгруппа, а $\tilde{H}_2/O_{\pi}(H)$ – (nilпотентная) холловская $\pi'(\mathfrak{F})$ -подгруппа группы $H_2/O_{\pi}(H)$. Кроме того, так как формация \mathfrak{F} локальна, то по лемме 4.2 из [1] $H_0/O_{\pi}(H) \in \mathfrak{F}$. Имеем:

$$\begin{aligned} H/O_{\pi}(H) &= H_1/O_{\pi}(H) \times (H_0/O_{\pi}(H) \times \tilde{H}_2/O_{\pi}(H)) = \\ &= (H_1/O_{\pi}(H) \times H_0/O_{\pi}(H)) \times \tilde{H}_2/O_{\pi}(H) = \\ &= \tilde{H}_1/O_{\pi}(H) \times \tilde{H}_2/O_{\pi}(H), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1/O_{\pi}(H) &= H_1/O_{\pi}(H) \times H_0/O_{\pi}(H) \in \mathfrak{F}, \\ \tilde{H}_2 &\in \Phi_{\theta_{\pi}}(G), \quad \pi(\tilde{H}_2/O_{\pi}(H)) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset. \end{aligned}$$

Обратное утверждение не требует доказательства. Утверждение II может быть доказано аналогично,

т. к. по утверждениям (1) и (5) леммы 1.1 подгруппы $\Phi_\pi(G)$ и $\Delta_\pi(G)$ π' -нильпотентны; утверждение II следует также из утверждения I: положим в соответствующих случаях для абнормально π' -полного подгруппового t -функтора θ

$$\theta(G) = \{G\} \cup M(G) \text{ и } \theta(G) = \{G\} \cup M_\pi^{\text{gr}}(G). \quad \square$$

Следствие 5.3.1. Пусть \mathfrak{F} – локальная формация, и пусть H – подгруппа группы G . Имеют место следующие утверждения.

I. Если θ – абнормально полный подгрупповой t -функтор, то группа H представима в виде прямого произведения $H = H_1 \times H_2$, множители которого удовлетворяют условиям:

- 1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;
- 2) $H_2 \subseteq \Phi_\theta(G)$,

тогда и только тогда, когда H представима в виде прямого произведения $H = \tilde{H}_1 \times \tilde{H}_2$, множители которого удовлетворяют условиям:

- 1) $\tilde{H}_1 \in \mathfrak{F}$;
- 2) $\pi(\tilde{H}_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$;
- 3) $\tilde{H}_2 \subseteq \Phi_\theta(G)$.

II. Группа H представима в виде прямого произведения $H = H_1 \times H_2$, множители которого удовлетворяют условиям:

- 1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;
- 2) $H_2 \subseteq \Phi(G)$, ($H_2 \subseteq \Delta(G)$),

тогда и только тогда, когда H представима в виде прямого произведения $H = \tilde{H}_1 \times \tilde{H}_2$, множители которого удовлетворяют условиям:

- 1) $\tilde{H}_1 \in \mathfrak{F}$;
- 2) $\pi(\tilde{H}_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$;
- 3) $\tilde{H}_2 \subseteq \Phi(G)$ ($\tilde{H}_2 \subseteq \Delta(G)$, соответственно).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978. – 272 с.

2. Ballester-Bolinches, A. On \mathfrak{F} -subnormal subgroups and Frattini-like subgroups of a finite group / A. Ballester-Bolinches, M.D. Perez-Ramos // Glasgow Math. J. – 1994. – № 36. – P. 241–247.

3. Бородич, Е.Н. Об абнормальных максимальных подгруппах конечных групп / Е.Н. Бородич, М.В. Селькин // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2006. – № 5 (38). – С. 11–13.

4. Бородич, Р.В. К теореме Л.А. Шеметкова / Р.В. Бородич, М.В. Селькин // Вестник БГУ. Серия 1. – 2008. – № 3. – С. 101–107.

5. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Мн.: Беларуская навука, 2003. – 254 с.

6. Белоконь, Л.М. О пересечениях максимальных θ_π -подгрупп конечных групп и \mathfrak{F} -абнормально π' -полный подгрупповой t -функтор / Л.М. Белоконь // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 4 (25). – С. 50–58.

7. Белоконь, Л.М. К вопросу о пересечениях максимальных θ -подгрупп конечных групп / Л.М. Белоконь // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 46–50.

8. Селькин, М.В. Пересечение максимальных подгрупп в конечных группах / М.В. Селькин, В.Н. Семенчук // Вопросы алгебры. – 1985. – Вып. 1. – С. 67–72.

9. Белоконь, Л.М. Пересечения максимальных подгрупп конечных групп и радикальные формации / Л.М. Белоконь // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2013. – № 6 (81). – С. 3–10.

10. Белоконь, Л.М. О пересечениях максимальных подгрупп конечных групп / Л.М. Белоконь // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 46–59.

Поступила в редакцию 30.09.16.

УДК 517.9 + 537.86

ИССЛЕДОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ МЕТОДОМ КАНОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

С.П. Жогаль¹, С.И. Жогаль², А.В. Клименко¹¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины²Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

INVESTIGATION OF STOCHASTIC SELF-OSCILLATORY SYSTEMS WITH ONE DEGREE OF FREEDOM BY METHOD OF CANONICAL REPRESENTATIONS

S.P. Zhogal¹, S.I. Zhogal², A.V. Klimenko¹¹F. Scorina Gomel State University²Belarusian State University of Transport, Gomel

Исследованы установившиеся случайные колебания в автоколебательных системах методом канонических разложений. Получены соотношения для нахождения наиболее вероятных значений амплитуды и фазы установившихся колебаний в системах с аддитивными широкополосными шумами.

Ключевые слова: автоколебательная система, случайные колебания, метод канонических разложений, амплитуда стационарных случайных колебаний.

Random fluctuations in the self-oscillatory systems were investigated by canonical representations. The equations to find the most probable values of the amplitude and phase of the steady-state oscillations in systems with additive wideband noises are obtained.

Keywords: self-oscillatory system, stochastic oscillations, method of canonical representations, amplitude of stationary stochastic oscillations.

Введение

При изучении колебательных систем большое внимание уделяется исследованию случайных колебаний [1]–[3], [5]. В том случае, когда ставится задача проведения качественных аналитических исследований, применение метода марковских диффузионных процессов даже в случае широкополосных шумов может оказаться невозможным из-за неинтегрируемости в квадратурах соответствующих уравнений Колмогорова – Фоккера – Планка (КФП).

Применяя метод канонических разложений в том варианте, который был изложен в [3], на первый взгляд кажется естественным искать математическое ожидание $m_a(t)$ амплитуды случайных колебаний a , исходя из следующего соотношения

$$m_x(t) = m_a(t) \cos(\omega t + m_\theta(t)), \quad (0.1)$$

где $m_x(t)$ – решение соответствующего детерминированного уравнения, $m_\theta(t)$ – математическое ожидание фазы случайных колебаний.

В этом случае можно сделать вывод о том, что математическое ожидание амплитуды случайных колебаний не зависит от интенсивности шумов и совпадает с амплитудой детерминированных колебаний системы. Однако это не так,

например, при возрастании интенсивности аддитивного шума в генераторе Ван-дер-Поля происходит рост как модального значения амплитуды колебаний, так и ее математического ожидания.

1 Влияние интенсивности аддитивных шумов

Покажем, что при возрастании интенсивности аддитивного шума в автоколебательной системе происходит рост как модального значения амплитуды колебаний, так и ее математического ожидания.

Пусть $x(t)$ является решением следующего стохастического квазилинейного дифференциального уравнения:

$$\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \varepsilon f(t, x, \dot{x}) + \sqrt{\varepsilon} g(t, x, \dot{x}) \xi(t), \quad (1.1)$$

где $\xi(t)$ – некоторый широкополосный случайный процесс, ε – малый положительный параметр. Тогда решение уравнения (1.1) можно искать в виде:

$$x(t) = a(t) \cos(\omega t + \theta(t)),$$

где $a(t)$ и $\theta(t)$ – медленно меняющиеся случайные функции.

Поскольку всякий случайный процесс может быть представлен в виде своего канонического разложения, то, с другой стороны, для $x(t)$ имеем:

$$x(t) = m_x(t) + \sum_k V_k x_k(t).$$

Тогда для

$$y(t) = \dot{x}(t) = -\omega a(t) \sin(\omega t + \theta(t))$$

в силу линейности и однородности операции дифференцирования, получаем:

$$y(t) = \dot{m}_x(t) + \sum_k V_k \dot{x}_k(t).$$

Воспользовавшись обратным преобразованием для амплитуды колебаний получаем:

$$\begin{aligned} E\{a^2(t)\} &= \\ &= E\left\{\left(m_x(t) + \dot{X}(t)\right)^2 + \frac{1}{\omega^2}\left(m_y(t) + \dot{Y}(t)\right)^2\right\} = \\ &= E\left\{\left(m_x(t) + \dot{X}(t)\right)^2\right\} + \frac{1}{\omega^2} E\left\{\left(m_y(t) + \dot{Y}(t)\right)^2\right\} = \\ &= m_x^2(t) + \frac{1}{\omega^2} m_y^2(t) + D_x(t) + D_y(t) = \\ &= m_x^2(t) + \frac{1}{\omega^2} m_y^2(t) + \sum_k D_k(x_k^2(t) + \dot{x}_k^2(t)), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \sum_k V_k x_k(t), \\ \dot{Y} &= \sum_k V_k \dot{x}_k(t). \end{aligned}$$

Из (1.2) непосредственно следует, что математическое ожидание $m_a(t)$ амплитуды случайных колебаний не совпадает с амплитудой детерминированных колебаний, а именно, превосходит ее, причем, чем больше интенсивность шумов в системе, тем значительнее прирост и $m_a(t)$ и модального значения амплитуды.

Итак, находить оценку $m_a(t)$, основываясь на соотношении (0.1), где $m_x(t)$ – решение соответствующего системе детерминированного уравнения, не совсем корректно. Поэтому желательно при использовании подхода, основанного на применении метода канонических разложений в сочетании с методом усреднения, при нахождении оценки $m_a(t)$ учесть ее зависимость от интенсивности случайных возмущений.

Рассмотрим квазилинейную колебательную систему, подверженную аддитивному воздействию стационарного широкополосного шума. Математической моделью такой системы может служить уравнение:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \varepsilon f(t, x, \dot{x}) + \sqrt{\varepsilon} \sigma \xi(t), \quad (1.3)$$

где $\xi(t)$ – гауссовский белый шум единичной интенсивности. Так как белый шум является стационарным случайным процессом, то его можно представить в виде канонического разложения [4]

$$\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (V_k \cos v_k t + U_k \sin u_k t), \quad (1.4)$$

где V_k и U_k таковы, что для любых k, i, j ($i \neq j$):

$$E\{V_k\} = E\{U_k\} = E\{V_k U_k\} = 0,$$

$$E\{V_i U_j\} = 0, D\{V_k\} = D\{U_k\} = D_k.$$

Решение уравнения (1.3) будем, как обычно принято, искать в виде:

$$x(t) = a(t) \cos \psi(t),$$

$$y(t) = \dot{x}(t) = -\omega a(t) \sin \psi(t),$$

$$\psi(t) = \omega t + \theta(t),$$

где $a(t)$, $\theta(t)$ – медленно меняющиеся функции времени.

Применяя формулу Ито дифференцирования сложной случайной функции и формулы обратного преобразования, получаем стохастические дифференциальные уравнения (СДУ) Ито в нормальной форме. Используя спектральное представление (1.4) белого шума $\xi(t)$ и канонические разложения амплитуды и фазы колебаний

$$a(t) = m_a(t) + \sum_{k=0}^{\infty} V_k a_k(t),$$

$$\theta(t) = m_\theta(t) + \sum_{k=0}^{\infty} V_k \theta_k(t),$$

после их подстановки в соответствующие СДУ Ито, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{dm_a}{dt} + \sum_{k=0}^{\infty} V_k \frac{da_k}{dt} &= \\ &= -\frac{\varepsilon}{\omega} f\left(t, \left(m_a + \sum_k V_k a_k\right) \cos \psi, \right. \\ &\quad \left. -\omega \left(m_a + \sum_k V_k a_k\right) \sin \psi\right) \sin \psi + \\ &\quad + \frac{\varepsilon \sigma^2}{2\omega^2 \left(m_a + \sum_k V_k a_k\right)} \cos^2 \psi - \\ &\quad - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\omega} \sigma \sin \psi \sum_{k=0}^{\infty} (V_k \cos v_k t + U_k \sin u_k t), \\ \frac{dm_\theta}{dt} + \sum_{k=0}^{\infty} V_k \frac{d\theta_k}{dt} &= \\ &= -\frac{\varepsilon}{a\omega} f\left(t, \left(m_a + \sum_k V_k a_k\right) \cos \psi, \right. \\ &\quad \left. -\omega \left(m_a + \sum_k V_k a_k\right) \sin \psi\right) \cos \psi - \\ &\quad - \frac{\varepsilon \sigma^2}{\omega^2 \left(m_a + \sum_k V_k a_k\right)^2} \sin \psi \cos \psi - \\ &\quad - \frac{\sqrt{\varepsilon} \sigma \cos \psi}{\omega \left(m_a + \sum_k V_k a_k\right)} \sum_{k=0}^{\infty} (V_k \cos v_k t + U_k \sin u_k t). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Для определения оценок математических ожиданий амплитуды и фазы колебаний, игнорируя

влияние членов, содержащих V_k и U_k , получаем следующие детерминированные уравнения:

$$\begin{aligned} m_a(t) \frac{dm_a(t)}{dt} &= \\ &= -\frac{\varepsilon}{\omega} m_a(t) f(t, m_a(t), m_0(t)) \sin \psi + \\ &\quad + \frac{\varepsilon \sigma^2}{2\omega^2} \cos^2 \psi, \\ m_a^2(t) \frac{dm_0(t)}{dt} &= \\ &= -\frac{\varepsilon}{\omega} m_a(t) f(t, m_a(t), m_0(t)) \cos \psi - \\ &\quad - \frac{\varepsilon \sigma^2}{\omega^2} \cos \psi \sin \psi. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Поскольку полученные детерминированные уравнения (1.6) имеют стандартную по Н.Н. Боголюбову форму [5], то их правые части можно подвергнуть процедуре усреднения. Учитывая стационарность случайного воздействия, а также то, что коэффициенты усредненных уравнений (1.6) не будут явно зависеть от времени, представляется возможным исследовать стационарные режимы системы (1.3). Для их исследования, исходя из усредненных уравнений (1.6), получаем:

$$\begin{aligned} m_a(t) M_t [f(t, m_a(t), m_0(t)) \sin \psi] &= \frac{\sigma^2}{4\omega}, \\ M_t [f(t, m_a(t), m_0(t)) \cos \psi] &= 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Рассмотрим несколько примеров конкретных колебательных систем, подверженных непараметрическим широкополосным стационарным случайным воздействиям, и найдем для них оценки математических ожиданий m_a амплитуд установившихся колебаний согласно (1.7).

Пусть требуется определить математическое ожидание амплитуды стационарных колебаний следующей автономной системы Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon [1 - x^2] \dot{x} + \sqrt{\varepsilon} \sigma \xi(t). \quad (1.8)$$

После проведения описанной выше процедуры для получения оценки математического ожидания амплитуды случайных колебаний получаем уравнение

$$m_a(t) \frac{dm_a(t)}{dt} = \frac{\varepsilon}{2} m_a^2(t) - \frac{\varepsilon}{8} m_a^4(t) + \frac{\varepsilon \sigma^2}{4\omega^2}. \quad (1.9)$$

Для нахождения стационарного значения m_a полагаем $\frac{dm_a}{dt} = 0$. Тогда, исходя из (1.9), несложно получить следующую оценку:

$$m_a^2 = 2 + 2 \left(1 + \frac{\sigma^2}{2\omega^2} \right)^{1/2}.$$

Данный результат не вызывал бы никаких сомнений в случае симметричности распределения амплитуды колебаний. Однако, асимметрия

этого распределения отрицательна, и, следовательно, математическое ожидание амплитуды колебаний должно быть меньше ее модального значения. Таким образом, полученная с использованием соотношений (1.7) оценка m_a для системы (1.8) в точности совпала с оценкой модального значения амплитуды, основанной на применении аппарата уравнений КФП. Получение смещенной в сторону увеличения оценки математического ожидания амплитуды стационарных колебаний свидетельствует о неправомерности пренебрежения влиянием диффузионных членов уравнений (1.5) при выписывании соотношений (1.6).

Рассмотрим более сложную систему, подверженную внешнему гармоническому силовому воздействию на основной частоте генерации:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= \varepsilon [1 - \gamma x^2] \dot{x} + \\ &+ \varepsilon P \cos \omega t + \sqrt{\varepsilon} \sigma \xi(t). \end{aligned}$$

Воспользовавшись соотношениями (1.7), получаем для определения математического ожидания амплитуды установившихся колебаний следующее соотношение

$$\begin{aligned} &\left(2\omega^2 m_a - \frac{\gamma}{2} \omega^2 m_a^3 + \frac{\sigma^2}{m_a} + 2P\omega \right) \times \\ &\times \left(2\omega^2 m_a - \frac{\gamma}{2} \omega^2 m_a^3 + \frac{\sigma^2}{m_a} - 2P\omega \right) = 0 \end{aligned}$$

или

$$\left(2\omega^2 m_a - \frac{\gamma}{2} \omega^2 m_a^3 + \frac{\sigma^2}{m_a} \right)^2 = 4P^2 \omega^2.$$

Данное соотношение совпадает с выражением, полученным для определения модального значения амплитуды стационарных колебаний по методу КФП.

Аналогичное совпадение получается и при вычислении оценки математического ожидания стационарной амплитуды колебаний для системы с периодически изменяющейся частотой колебаний:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (\omega^2 + \varepsilon \lambda \cos 2\omega t) x &= \\ &= \varepsilon (h - \gamma x^2) \dot{x} + \varepsilon P \cos \omega t + \sqrt{\varepsilon} \sigma \xi(t). \end{aligned} \quad (1.10)$$

В случае, когда $P = 0$, исходя из соотношений (1.7) для m_a получаем:

$$h m_a - \frac{\gamma}{4} m_a^3 + \frac{\sigma^2}{2\omega^2 m_a} \pm \frac{\lambda}{2\omega} m_a = 0,$$

откуда непосредственно следует соотношение

$$m_a^2 = \frac{2h}{\gamma} - \frac{\lambda}{\omega\gamma} + \left[\left[\frac{2h}{\gamma} - \frac{\lambda}{\omega\gamma} \right]^2 + \frac{2\sigma^2}{\gamma\omega^2} \right]^{1/2}. \quad (1.11)$$

Соотношение (1.11) в точности совпадает с оценкой модального значения амплитуды стационарных колебаний системы (1.10), полученной в [5].

2 Нахождение наиболее вероятных значений характеристик стационарных случайных колебаний

Приведенные выше расчеты для конкретных колебательных систем позволяют утверждать, что при применении приведенной выше методики получены приближенные верхние оценки математического ожидания m_a амплитуды стационарных колебаний систем с аддитивными шумами, совпадающие с наиболее вероятными значениями амплитуды. Основываясь на данном факте, сформулируем следующую теорему.

Теорема. *Наиболее вероятные значения амплитуды a и фазы θ стационарных случайных колебаний в системах вида*

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \varepsilon f(t, x, \dot{x}) + \sqrt{\varepsilon} \sigma \xi(t), \quad (2.1)$$

где $\xi(t)$ – стационарный широкополосный случайный процесс, определяются из следующих соотношений

$$\begin{aligned} a M_t [f(t, a(t), \theta(t)) \sin \psi] &= \frac{\sigma^2}{4\omega}, \\ M_t [f(t, a(t), \theta(t)) \cos \psi] &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Доказательство. Докажем теорему для систем, удовлетворяющих условиям потенциальности соответствующих уравнений КФП. В случае выполнения условия потенциальности решение уравнения КФП может быть записано в виде:

$$W(a, \theta) = C \exp \left\{ 2 \int \frac{K_1}{K_{11}} da + \frac{K_2}{K_{22}} d\theta \right\},$$

где $K_1(a, \theta), K_2(a, \theta), K_{11}(a, \theta), K_{22}(a, \theta)$ определяются из соотношений

$$\begin{aligned} K_1(a, \theta) &= M_t \left[-\frac{1}{\omega} f \sin \psi + \frac{g^2 \cos^2 \psi}{2\omega^2 a} \right], \\ K_2(a, \theta) &= M_t \left[-\frac{1}{a\omega} f \cos \psi + \frac{g^2 \sin 2\psi}{2\omega^2 a^2} \right], \\ K_{11}(a, \theta) &= \frac{\sigma^2}{2\omega^2}, \\ K_{22}(a, \theta) &= \frac{\sigma^2}{2\omega^2 a^2}. \end{aligned}$$

Выписывая условие потенциальности

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{K_1}{K_{11}} \right) = \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{K_2}{K_{22}} \right),$$

получаем

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (K_1) = \frac{\partial}{\partial a} (K_2 a^2). \quad (2.3)$$

Таким образом, соотношение (2.3) является условием потенциальности для систем с непараметрическими широкополосными шумами, спектральная плотность которых изменяется медленно в достаточно большом диапазоне частот, включающем собственные частоты системы.

При выполнении условия (2.3) и в том случае, когда

$$\frac{K_2(0, \theta)}{K_{22}(0)} = 0$$

(а это условие для реальных колебательных систем практически всегда имеет место), решение соответствующего уравнения КФП может быть представлено в виде:

$$W(a, \theta) = C \exp \left\{ \frac{4\omega^2}{\sigma^2} \int K_1(a, \theta) da \right\}.$$

Для нахождения наиболее вероятных значений амплитуды и фазы стационарных колебаний, вычисляя

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} W(a, \theta) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} W(a, \theta) &= 0, \end{aligned}$$

получаем

$$K_1(a, \theta) = 0,$$

$$\int \frac{\partial}{\partial \theta} (K_1(a, \theta)) da = 0.$$

С учетом приведенных соотношений, имеем:

$$K_1(a, \theta) =$$

$$= -\frac{1}{\omega} M_t [f(t, a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi] + \frac{\sigma^2}{4\omega^2 a} = 0,$$

$$\int \frac{\partial}{\partial a} (K_2(a, \theta) a^2) da = K_2(a, \theta) a^2 = 0,$$

или, окончательно,

$$\begin{aligned} a M_t [f(t, a(t), \theta(t)) \sin \psi] &= \frac{\sigma^2}{4\omega}, \\ M_t [f(t, a(t), \theta(t)) \cos \psi] &= 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Несмотря на то, что доказательство теоремы проведено лишь для случая потенциальности соответствующего системе (2.1) уравнения КФП, соотношения (2.2) могут быть использованы для нахождения наиболее вероятных характеристик случайных колебаний и в общем случае, поскольку они получены без учета условий (2.3).

Заключение

Уравнения КФП многих неавтономных колебательных систем не интегрируются в квадратурах [1], [6]. Поэтому задача применения других методов получения оценок характеристик случайных колебаний в подобных системах весьма актуальна. В работе рассмотрены вопросы применения метода канонических разложений для исследования квазилинейных колебательных систем, подверженных непараметрическим стационарным широкополосным шумам, получены соотношения для определения характеристик установившихся колебаний, обобщающие результаты работы [3] на неавтономный случай. Доказана теорема, определяющая соотношения для определения наиболее вероятных

значений амплитуд и фаз установившихся колебательных режимов в неавтономных квазилинейных системах с аддитивными шумами. При применении предложенной методики получены приближенные верхние оценки математического ожидания m_a амплитуды стационарных колебаний систем с аддитивными шумами, совпадающие с ее наиболее вероятными значениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *To, C.W.S.* Nonlinear random vibration. Analytical techniques and applications / Cho W.S.To. – CRC Press, 2012. – 292 p.

2. *Landa, P.S.* Regular and Chaotic Oscillations / P.S. Landa. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2001. – 396 p.

3. *Рубаник, В.П.* Влияние запаздываний в связях на интенсивность шумов в сложных автогенераторах / В.П. Рубаник // Радиофизика. – 1987. – Т. 30, № 10. – С. 1208–1212.

4. *Вентцель, Е.С.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Наука, 1991. – 384 с.

5. *Митропольский, Ю.А.* Нелинейные колебания в системах произвольного порядка / Ю.А. Митропольский, Нгуен Ван Дао, Нгуен Донг Ань. – Киев: Навукова думка, 1992. – 344 с.

6. *Ланда, П.С.* Возбуждение хаотических и стохастических колебаний в различных системах / П.С. Ланда // Изв. вузов «Прикладная нелинейная динамика». – 2010. – Т. 18, № 1. – С. 3–10.

Поступила в редакцию 02.02.17.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ НА ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА

А.Г. Козел

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

MATHEMATICAL MODEL OF DEFORMATION OF THE CIRCULAR THREE-LAYER PLATE ON THE BASIS OF PASTERNAK

A.G. Kozel

Belarusian State University of Transport, Gomel

Приведена постановка краевой задачи об изгибе несимметричной по толщине упругой трёхслойной круговой пластины на основании Пастернака. Получено общее аналитическое решение, которое может служить исходным для исследования любого случая симметричного изгиба трёхслойной круговой пластины, опертой на упругое основание Пастернака.

Ключевые слова: трёхслойная круговая пластина, симметричный изгиб, основание Пастернака.

Statement of a boundary problem about a bend of an elastic three-layer circular plate on the basis of Pasternak is given. General analytical solution for the asymmetrical on thickness plate is obtained. It can serve as a source for the study of any case of symmetric bending a circular three-layer plate, simply supported on an elastic foundation of Pasternak's.

Keywords: three-layer circular plate, symmetric bend, Pasternak's basis.

Введение

Современные тенденции в строительстве диктуют всё новые и новые требования к конструкциям и изделиям. Необходимость повышения прочностных характеристик непрерывно возрастает, а условия эксплуатации становятся всё более жесткими. Широкое применение в технике и строительстве получили многослойные конструкции. Стержни, пластины и оболочки, имеющие слоистую структуру, при относительно малом весе способны обеспечить заданную прочность, жёсткость и противостоять ряду других физических воздействий.

В последнее время значительное распространение получили трёхслойные элементы конструкций, которые состоят из двух несущих слоев и заполнителя, обеспечивающего их совместную работу. В условиях деформации изгиба подобные системы оказываются наиболее рациональными, т. е. близкими оптимальным с точки зрения обеспечения минимума весовых показателей при заданных ограничениях на прочность и жесткость.

Статическое и динамическое деформирование трёхслойных элементов конструкций исследовалось В.В. Болотиним, А.Г. Горшковым, Э.И. Старовойтовым, Д.В. Леоненко, А.В. Яровой, Ю.М. Плещачевским в работах [1]–[5].

Важную роль играет расчёт конструкций, связанных с упругим основанием. Это применимо к таким сооружениям как аэродромные и дорожные покрытия, полы промышленных зданий, днища резервуаров, ленточные фундаменты, треки для испытаний и площадки для запуска

ракет, конструкции зданий, расположенных на сжимаемых грунтах и многим другим.

В настоящее время деформирование круглых трёхслойных пластин изучено при опирании на основание Винклера [6]–[15]. Однако в этом случае учитывается только сжимаемость грунта, а его связность пренебрегается. Таким образом, предлагаемая постановка задачи является более общей, из которой будут следовать предыдущие модели как частные случаи.

1 Постановка краевой задачи в усилиях

Поперечно нагруженная упругая трёхслойная круговая пластина покоится на упругом основании (рисунок 1.1). Для изотропных несущих слоев толщиной h_1, h_2 приняты гипотезы Кирхгофа о несжимаемости, прямолинейности и перпендикулярности нормали к деформированной срединной поверхности. В несжимаемом по толщине заполнителе ($h_3 = 2c$) деформированная нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол ψ . Заполнитель считается легким, т. е. не учитывается его работа в тангенциальном направлении.

Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат r, φ, z . Внешняя вертикальная нагрузка не зависит от координаты φ : $q_0 = q_0(r)$. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительно сдвигу слоев. На нижнюю поверхность пластины действует распределенная по ее площади реакция основания q_r .

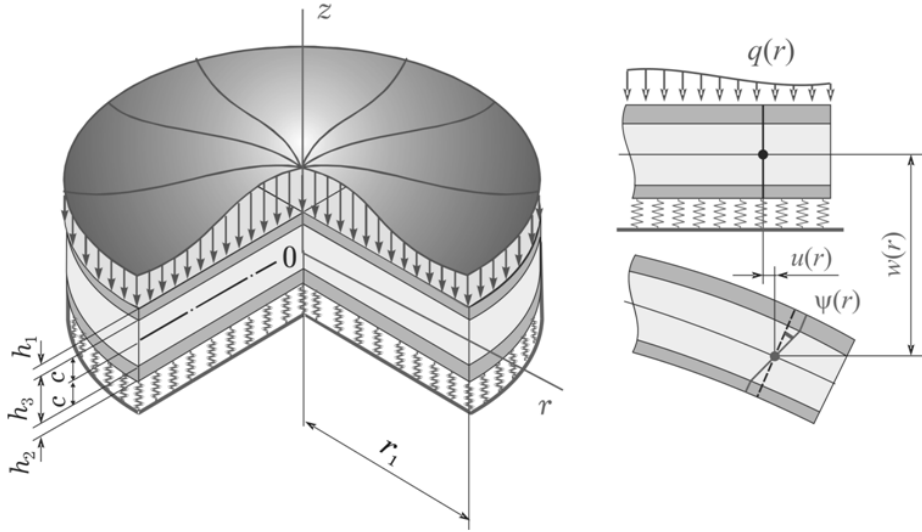


Рисунок 1.1 – Схема деформирования круговой пластины

В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_\varphi(k) = 0$ (k – номер слоя), а прогиб пластины, относительный сдвиг в заполнителе и радиальное перемещение координатной плоскости не зависят от координаты φ , т. е. $u(r)$, $\psi(r)$, $w(r)$. В дальнейшем эти функции считаются искомыми. Через h_k обозначена толщина k -го слоя, реакция основания – q_r .

Используя гипотезу прямолинейности нормали заполнителя $2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_{r,z}^{(3)} + w_{,r} = \psi$, после интегрирования получим выражения радиальных перемещений в слоях $u_r(k)$ через искомые функции:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r} \quad (c \leq z \leq c + h_1), \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r} \quad (-c \leq z \leq c), \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где z – координата рассматриваемого волокна; $(u + c\psi)$ – величина смещения внешнего несущего слоя за счет деформации заполнителя, для второго несущего слоя это смещение $(u - c\psi)$, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Деформации в слоях следуют из (1.1) и соотношений Коши:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(1)} &= u_{,r} + c\psi_{,r} - zw_{,rr}, \\ \varepsilon_\varphi^{(1)} &= \frac{1}{r}(u + c\psi - zw_{,r}), \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0, \\ \varepsilon_r^{(2)} &= u_{,r} - c\psi_{,r} - zw_{,rr}, \\ \varepsilon_\varphi^{(2)} &= \frac{1}{r}(u - c\psi - zw_{,r}), \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0, \\ \varepsilon_r^{(3)} &= u_{,r} + z\psi_{,r} - zw_{,rr}, \\ \varepsilon_\varphi^{(3)} &= \frac{1}{r}(u + z\psi - zw_{,r}), \quad \varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{1}{2}\psi. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Используя компоненты тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha = r, \varphi$), введем обобщенные внутренние силы и моменты в пластине:

$$\begin{aligned} T_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \\ M_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \\ H_\alpha &= M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Уравнения равновесия круговой трехслойной пластины в усилиях получены из вариационного принципа Лагранжа:

$$\begin{aligned} T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) &= -p, \\ H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) &= 0, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) &= -q_0 + q_R. \end{aligned} \quad (1.4)$$

На контуре пластины ($r = r_1$) должны выполняться силовые условия

$$\begin{aligned} T_r &= T_r^1, \quad H_r = H_r^1, \quad M_r = M_r^1, \\ M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) &= Q^1. \end{aligned} \quad (1.5)$$

2 Решение краевой задачи в перемещениях

Предполагается, что связь напряжений и деформаций в слоях описывается соотношениями линейной теории упругости:

$$s_\alpha^k = 2G_k \varepsilon_\alpha^k, \quad \sigma^k = K_k \theta^k. \quad (2.1)$$

Связь между реакцией и прогибом принимаем в соответствии с моделью Пастернака [16], согласно которой:

$$q_r(r) = -\kappa_0 w + t_f \Delta w, \quad (2.2)$$

где κ_0 – коэффициент сжатия, формально совпадающий с коэффициентом жесткости основания Винклера; t_f – коэффициент сдвига материала основания; Δ – оператор Лапласа

$$\Delta w(r) = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}.$$

Используя соотношения (1.2), (1.3), (2.1), (2.2) усилия в уравнениях (1.4) можно выразить через три искомые функции. В результате получим систему дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях, описывающую изгиб круговой трехслойной пластины на упругом основании Пастернака:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= -p, \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) &= 0, \end{aligned}$$

$$L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - \kappa_0 w + t_f \Delta w = -q_0, \quad (2.3)$$

где L_2, L_3 – дифференциальные операторы, a_n – коэффициенты, определяемые через модули упругости материалов и геометрические параметры слоев

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \\ a_3 &= h_1(c + \frac{1}{2}h_1)K_1^+ - h_2(c + \frac{1}{2}h_2)K_2^+, \\ a_4 &= c^2(h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3}c^3 K_3^+), \\ a_5 &= c[h_1(c + \frac{1}{2}h_1)K_1^+ + h_2(c + \frac{1}{2}h_2)K_2^+ + \frac{2}{3}c^2 K_3^+], \\ a_6 &= h_1(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2)K_1^+ + \\ &+ h_2(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2)K_2^+ + \frac{2}{3}c^3 K_3^+, \\ K_k + \frac{4}{3}G_k &\equiv K_k^+, \quad K_k - \frac{2}{3}G_k \equiv K_k^-, \\ L_3(g) &\equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}, \\ L_2(g) &\equiv \left(\frac{1}{r}(rg)_{,r}\right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}. \end{aligned}$$

С помощью первых двух уравнений системы (2.3) в третьем уравнении обнуляем коэффициенты перед функциями u и ψ . После некоторых преобразований выделим дифференциальное уравнение четвертого порядка для определения прогиба $w(r)$:

$$\begin{aligned} w_{,rrrr} + \frac{2}{r}w_{,rrr} - \frac{1}{r^2}w_{,rr} + \frac{1}{r^3}w_{,r} - \\ - t_{f1} \left(w_{,rr} + \frac{1}{r}w_{,r} \right) + \kappa^4 w = q, \end{aligned} \quad (2.4)$$

или

$$\Delta^2 w - t_{f1} \Delta w + \kappa^4 w = q,$$

где

$$\kappa^4 = \kappa_0 D, \quad q = q_0 D, \quad t_{f1} = t_f D,$$

$$D = \frac{a_1(a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}.$$

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее полученному уравнению (2.4), и введем в нем замену переменной $x = \kappa r$. В результате приходим к уравнению вида

$$\begin{aligned} w_{,xxxx} + \frac{2}{x}w_{,xxx} - \frac{1}{x^2}w_{,xx} + \frac{1}{x^3}w_{,x} - \\ - 2t_0^2 \left(w_{,xx} + \frac{1}{x}w_{,x} \right) + w = 0 \end{aligned}$$

или

$$\Delta^2 w - 2t_0^2 \Delta w + w = 0, \quad (2.5)$$

где

$$2t_0^2 = \frac{t_{f1}}{\kappa^2}, \quad \Delta w(x) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Уравнение (2.5) может быть приведено к системе эквивалентных ему двух уравнений второго порядка. Пусть $w = w(x)$ – некоторое частное решение однородного уравнения (2.5), удовлетворяющее в то же время уравнению

$$\Delta w + \lambda w = 0, \quad (2.6)$$

где λ – константа, подлежащая определению.

Исходя из уравнения (2.6), имеем

$$\Delta w = -\lambda w, \quad \Delta^2 w = \lambda^2 w. \quad (2.7)$$

Подставив теперь выражения (2.7) в исходное уравнение (2.5), получим относительно λ характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2t_0^2 \lambda + 1 = 0. \quad (2.8)$$

Значения корней характеристического уравнения (2.8) определяются формулами

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -t_0^2 + \sqrt{(t_0^2)^2 - 1}, \\ \lambda_2 &= -t_0^2 - \sqrt{(t_0^2)^2 - 1}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Следует отметить, что для реальных грунтов значение интегральной характеристики находится в пределах [16] $0 \leq t_0^2 \leq 1$. Случай $t_0^2 = 0$ соответствует отсутствию сил сдвига в упругом основании $t_f = 0$.

Таким образом, корни характеристического уравнения (2.8) можно рассматривать как комплексно сопряженные величины

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a = -a_1 + ib_1, \\ \lambda_2 &= \bar{a} = -a_1 - ib_1, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $a_1 = t_0^2$, $b_1 = \sqrt{1 - (t_0^2)^2}$.

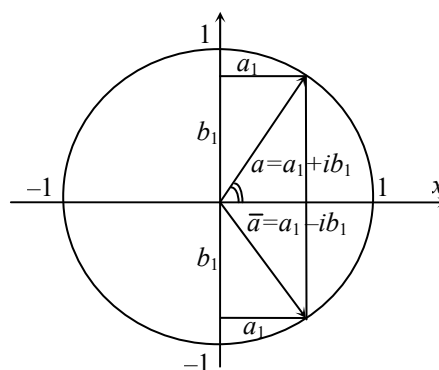


Рисунок 2.1 – Области расположения комплексных величин

Заметим, что комплексные величины (2.9) расположены в областях (рисунок 2.1)

$$\pi > \arg a \geq \frac{\pi}{2}, \quad -\pi < \arg \bar{a} \leq -\frac{\pi}{2} \quad (2.11)$$

и равны по модулю, согласно теореме Виета, свободному члену характеристического уравнения (2.8), т. е. равны единице:

$$|a| = 1, \quad |\bar{a}| = 1. \quad (2.12)$$

Исходя из уравнения (2.5), можно видеть, что двум комплексно сопряженным корням (2.10) соответствуют два линейно независимых уравнения второго порядка

$$\begin{aligned} w_{1,xx} + \frac{1}{x} w_{1,x} + aw_1 &= 0, \\ w_{2,xx} + \frac{1}{x} w_{2,x} + \bar{a}w_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Общий интеграл основного дифференциального уравнения (2.4) может быть теперь представлен в виде

$$w = w_1 + w_2 + w_p, \quad (2.14)$$

где w_1 и w_2 – фундаментальная система частных интегралов, удовлетворяющая дифференциальным уравнениям (2.13), а w_p – частный интеграл, соответствующий неоднородному уравнению (2.4).

Введем новые переменные по формулам:

$$u = \sqrt{ax}, \quad v = \sqrt{\bar{a}x}. \quad (2.15)$$

С введением новых переменных (2.15) преобразуем уравнение (2.13) к уравнениям Бесселя нулевого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{du^2} + \frac{1}{u} \cdot \frac{dw_1}{du} + w_1 &= 0, \\ \frac{dw_2}{dv^2} + \frac{1}{v} \cdot \frac{dw_2}{dv} + w_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Решение системы (2.16), как это следует из теории бесселевых функций, можно записать в виде:

$$\begin{aligned} w_1(x) &= B_1 I_0(\sqrt{ax}) + B_2 H_0^{(1)}(\sqrt{ax}), \\ w_2(x) &= B_3 I_0(\sqrt{\bar{a}x}) + B_4 H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x}), \end{aligned} \quad (2.17)$$

где $I_0(\sqrt{ax})$ и $I_0(\sqrt{\bar{a}x})$ – функции Бесселя первого рода, нулевого порядка, аргументов \sqrt{ax} и $\sqrt{\bar{a}x}$; $H_0^{(1)}(\sqrt{ax})$ и $H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x})$ – функции Ганкеля первого и второго рода, нулевого порядка от тех же аргументов.

Используя решение (2.17), перепишем общий интеграл (2.14) в окончательной форме

$$\begin{aligned} w &= B_1 I_0(\sqrt{ax}) + B_2 H_0^{(1)}(\sqrt{ax}) + \\ &+ B_3 I_0(\sqrt{\bar{a}x}) + B_4 H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x}) + w_p. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Отметим, что для решения практических задач аргумент цилиндрических функций, входящих в выражение (2.18), удобнее представить в показательной или тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} \sqrt{a} &= e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi, \\ \sqrt{\bar{a}} &= e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \cdot \sin \varphi, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где $\varphi = \frac{1}{2} \arg a$, а модуль комплексных чисел

\sqrt{a} и $\sqrt{\bar{a}}$ в соответствии с (2.12) положен равным единице.

Из выражений (2.11) и (2.19) можно видеть, что функции

$$I_0(\sqrt{ax}), \quad I_0(\sqrt{\bar{a}x}), \quad H_0^{(1)}(\sqrt{ax}), \quad H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x})$$

определены в областях

$$\frac{\pi}{2} > \varphi \geq \frac{\pi}{4}, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi \leq -\frac{\pi}{4}.$$

В частном случае, когда характеристика упругого основания на сдвиг t_f равна нулю ($t_f^2 = 0$), эти функции определяются вдоль прямой, наклоненной к действительной оси под углом $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Так как функции $I_0(\sqrt{ax})$, $I_0(\sqrt{\bar{a}x})$, $H_0^{(1)}(\sqrt{ax})$, $H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x})$ являются комплексными, а функция прогибов пластины w должна быть действительной, то постоянные интегрирования B_1, B_2, B_3, B_4 также должны быть комплексными числами. Для того чтобы выразить решение задачи через действительные функции, перепишем интеграл (2.18) в другой форме

$$\begin{aligned} W &= C_1 u_0(\sqrt{ax}) + C_2 v_0(\sqrt{ax}) + \\ &+ C_3 f_0(\sqrt{ax}) + C_4 g_0(\sqrt{ax}) + w_p, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где введены следующие обозначения:

$$u_0(x) = \operatorname{Re} I_0(\sqrt{ax}) = \frac{I_0(\sqrt{ax}) + I_0(\sqrt{\bar{a}x})}{2},$$

$$v_0(x) = \operatorname{Im} I_0(\sqrt{ax}) = \frac{I_0(\sqrt{ax}) - I_0(\sqrt{\bar{a}x})}{2i},$$

$$f_0(x) = \operatorname{Re} H_0^{(1)}(\sqrt{ax}) = \frac{H_0^{(1)}(\sqrt{ax}) + H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x})}{2},$$

$$g_0(x) = \operatorname{Im} H_0^{(1)}(\sqrt{ax}) = \frac{H_0^{(1)}(\sqrt{ax}) - H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x})}{2i}.$$

Из выражений (2.20) следует, что функции $u_0(x)$, $f_0(x)$ представляют собой действительные, а функции $v_0(x)$, $g_0(x)$ – мнимые части функций Бесселя и Ганкеля нулевого порядка. Так как эти функции действительны, то действительными будут и произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 , которые определяются из граничных условий типа (1.5).

Заключение

Полученное в работе общее решение можно использовать для исследования любого случая симметричного изгиба трёхслойной круговой пластины при опирании ее на упругое основание Пастернака.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин, В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.

2. Старовойтов, Э.И. Сопротивление материалов / Э.И. Старовойтов. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.
3. Горшков, А.Г. Гармоническое нагружение слоистых вязкоупругопластических систем / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2000. – № 6. – С. 91–98.
4. Starovoitov, E.I. Circular sandwich plates under local impulsive loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 39, № 8. – P. 945–952.
5. Starovoitov, E.I. Vibration of circular sandwich plates under resonance loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 39, № 12. – P. 1458–1463.
6. Плскачевский, Ю.М. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю.М. Плскачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.
7. Деформирование круговой трехслойной пластины на упругом основании / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2005. – № 1. – С. 16–22.
8. Старовойтов, Э.И. Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Е.П. Доровская // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2006. – № 3. – С. 45–50.
9. Старовойтов, Э.И. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2006. – № 4. – С. 55–62.
10. Starovoitov, É.I. Thermoplastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation / É.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2008. – Vol. 44, № 9. – P. 1032–1040.
11. Starovoitov, E.I. Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2011. – Vol. 47, № 5. – P. 580–589.
12. Leonenko, D.V. Thermoplastic strain of circular sandwich plates on an elastic base / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. – 2009. – Vol. 44, № 5. – P. 744–755.
13. Starovoitov, E.I. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46, № 2. – P. 291–298.
14. Leonenko, D.V. Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. – 2012. – Vol. 47, № 1. – P. 111–118.
15. Kuznetsova, E.L. Natural vibrations of three-layer circular cylindrical shells in an elastic medium / E.L. Kuznetsova, D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. – 2015. – Vol. 5, № 3. – P. 359–366. DOI: 10.3103/S0025654415030127.
16. Власов, В.З. Балки, плиты, оболочки на упругом основании / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960. – С. 226–235.

Поступила в редакцию 18.10.16.

УДК 519.85

КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ВПОЛНЕ ВЫПУКЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ ОГРАНИЧЕНИЙ

О.И. Костюкова¹, М.В. Кулагина²

¹Институт математики НАН Беларуси, Минск

²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

OPTIMALITY CRITERION FOR SEMI-INFINITE PROGRAMMING PROBLEMS WITH FAITHFULLY CONVEX CONSTRAINT FUNCTIONS

O.I. Kostyukova¹, M.V. Kulagina²

¹Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk

²F. Scorina Gomel State University

Рассматриваются выпуклые задачи полубесконечного программирования с многогранным множеством индексов и вполне выпуклыми функциями ограничений. Для указанного класса задач формулируется и доказывается явный критерий оптимальности. Проводится сравнительный анализ данного критерия с известными ранее условиями оптимальности. Приводится иллюстративный пример.

Ключевые слова: полубесконечное программирование, выпуклое программирование, неподвижный индекс, порядок неподвижности, вполне выпуклость.

Convex semi-infinite programming problem with polyhedral index sets and faithfully convex constraint functions are considered. An explicit optimality criterion is formulated and proved for the given class of problems. A comparative analysis of this criterion with known optimality conditions is performed. An illustrative example is presented.

Keywords: semi-infinite programming, convex programming, immobile index, immobility order, faithfully convex function.

Введение

Полубесконечное программирование в последнее время является областью активных исследований [1], [2]. К задачам полубесконечного программирования относятся задачи нахождения экстремума некоторой функции с конечным числом переменных на множестве, заданном бесконечным числом ограничений.

Условия оптимальности являются одним из основных вопросов при исследовании задач полубесконечной оптимизации [3], [4]. Большинство известных условий оптимальности для полубесконечного программирования предполагают выполнение некоторых условий регулярности [5], [6]. Однако хорошо известно, что эти условия могут нарушаться. Поэтому актуальной является проблема получения условий оптимальности при выполнении наиболее слабых условий регулярности либо вообще без них.

В [7] был предложен подход для исследования задач полубесконечной оптимизации, который позволяет свести проверку оптимальности заданного допустимого плана в задаче полубесконечного программирования к его проверке на оптимальность во вспомогательной задаче нелинейного программирования. На основе данного подхода в [8] был сформулирован и доказан неявный критерий оптимальности для выпуклых задач полубесконечного программирования.

В статье рассматривается случай, когда ограничения задачи полубесконечного программирования являются вполне выпуклыми. Понятие вполне выпуклой функции было введено Роккафеллором [9]. Исследуются выпуклые задачи полубесконечного программирования с многогранным множеством индексов. Учитывая вполне выпуклость функции ограничений данной задачи, формулируется явный критерий оптимальности, не требующий выполнения известных условий регулярности. Приводится пример применения данного критерия оптимальности. Анализируется взаимосвязь полученного критерия оптимальности для задачи полубесконечного программирования с вполне выпуклыми функциями ограничений с уже известными условиями оптимальности.

1 Постановка задачи, необходимые определения и обозначения

Рассмотрим задачу полубесконечного программирования вида

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c(x) \quad (1.1)$$

$$f(x, t) \leq 0, \forall t \in T,$$

где

$$T = \{t \in \mathbb{R}^s : h_k^T t \leq \Delta h_k, k \in K\}$$

– ограниченный многогранник, содержащий более одного элемента, K – конечное множество

индексов, вектора $h_k \in \mathbb{R}^s$ и числа $\Delta h_k, k \in K$, заданы, функции $f(x, t)$ для каждого $t \in T$ и $c(x)$ выпуклые по $x \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что функция $f(x, t)$ достаточно гладкая по t и x и функция $c(x)$ достаточно гладкая по x .

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения. Любой вектор – вектор-столбец; если $r(t) \in \mathbb{R}$, то $\frac{\partial r(t)}{\partial t} \in \mathbb{R}^s$ – вектор-столбец;

если $r(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор-столбец, то $\frac{\partial r(t)}{\partial t} \in \mathbb{R}^{s \times m}$,

а $\frac{\partial r^T(t)}{\partial t} \in \mathbb{R}^{m \times s}$. Здесь и далее символ T означает транспонирование.

Обозначим через X множество допустимых планов задачи (1.1):

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x, t) \leq 0, \forall t \in T\}.$$

Для данного $t \in T$ обозначим через $K_a(t) \subset K$ множество активных ограничений в t :

$$K_a(t) = \{k \in K : h_k^T t = \Delta h_k\}$$

и через $L(t)$ – множество допустимых направлений для индекса $t \in T$:

$$L(t) := \{l \in \mathbb{R}^s : h_k^T l \leq 0, k \in K_a(t)\}. \quad (1.3)$$

Для данного $x \in X$ обозначим через $T_a(x) \subset T$ множество активных индексов в x :

$$T_a(x) = \{t \in T : f(x, t) = 0\}.$$

Введем согласно работе [7] следующие определения:

Определение 1.1. Индекс $t \in T$ называется неподвижным в задаче (1.1), если $f(x, t) = 0, \forall x \in X$.

Обозначим через T^* множество всех неподвижных индексов задачи (1.1).

Определение 1.2 Будем говорить, что неподвижный индекс $t \in T^*$ имеет порядок неподвижности $q(t, l) \in \{0, 1, \dots\}$, вдоль допустимого направления $l \in L(t), l \neq 0$, если

$$1^0 \left. \frac{d^i f(x, t + \alpha l)}{d\alpha^i} \right|_{\alpha=0} = 0, \forall x \in X, i = 0, \dots, q(t, l);$$

2^0 существует вектор $\tilde{x} = x(t, l) \in X$ такой,

$$\text{что } \left. \frac{d^{q(t, l)+1} f(\tilde{x}, t + \alpha l)}{d\alpha^{q(t, l)+1}} \right|_{\alpha=0} \neq 0.$$

Здесь предполагаем, что

$$\left. \frac{d^0 f(x, t + \alpha l)}{d\alpha^0} \right|_{\alpha=0} = f(x, t).$$

Предположение 1.1 Предположим, что $X \neq \emptyset$ и $q(t, l) \leq 1, l \in L(t) \setminus \{0\}, \forall t \in T^*$.

Согласно работе [8] из Предположения 1.1 следует, что множество индексов T^* состоит из

конечного числа элементов. Следовательно, множество T^* допускает представление

$$T^* = \{t_j, j \in J_*\},$$

где J_* – некоторое конечное множество индексов.

Для каждого $t \in T$ множество допустимых направлений, определенное в (1.3), может быть представлено в следующем виде:

$$L(t) = \left\{ l \in \mathbb{R}^s : l = \sum_{i \in P(t)} \beta_i b_i(t) + \sum_{i \in I(t)} \alpha_i a_i(t), \alpha_i \geq 0, i \in I(t) \right\},$$

где вектора $b_i(t), i \in P(t)$ – двунаправленные лучи, $a_i(t), i \in I(t)$ – однонаправленные лучи, $P(t)$ и $I(t)$ – конечные множества индексов. В работе [10] изложен алгоритм построения векторов $b_i(t), i \in P(t)$, $a_i(t), i \in I(t)$, и множеств $P(t)$ и $I(t)$ для любого $t \in T$.

В [11] был описан и обоснован алгоритм построения неподвижных точек $T^* = \{t_j, j \in J_*\}$ и их порядков неподвижности для задачи (1.1). Поэтому далее считаем, что известны: множество неподвижных индексов, вектора и множества $a_i(j) := a_i(t_j), i \in I(j) := I(t_j), b_i(j) := b_i(t_j), i \in P(j) := P(t_j), j \in J_*$, и порядки неподвижности $q(t_j, a_i(t_j)), i \in I(t_j), j \in J_*$, вдоль допустимых направлений $a_i(t_j), i \in I(t_j), j \in J_*$.

Обозначим

$$I_0(j) = \{i \in I(j) : q(t_j, a_i(j)) = 1\}, I_*(j) = I(j) \setminus I_0(j),$$

$$L_j^0 = \left\{ l \in \mathbb{R}^s : l = \sum_{i \in P(j)} \beta_i b_i(j) + \sum_{i \in I_0(j)} \alpha_i a_i(j), \alpha_i \geq 0, i \in I_0(j) \right\},$$

$$B(j) = (b_i(j), i \in P(j), a_i(j), i \in I_0(j))^T, j \in J_*.$$

Следующую теорему сформулируем, основываясь на работе [12]:

Теорема 1.1. Пусть для выпуклой задачи (1.1) выполняется Предположение 1.1. Тогда допустимый план $x^0 \in X$ является оптимальным для задачи (1.1) тогда и только тогда, когда существуют конечные наборы активных индексов $\{t_j, j \in J^{**}\} \subset T_a(x^0) \setminus T^*$, и допустимых направлений

$$l_{ji} \in L_j^0, i = 1, \dots, d_j, j \in J_*, |J^{**}| + \sum_{j \in J_*} d_j \leq n,$$

такие, что вектор x^0 является оптимальным для вспомогательной задачи

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c(x), \quad (1.4)$$

$$f(x, t_j) = 0, B(j) \frac{\partial f(x, t_j)}{\partial t} = 0, j \in J_*, x \in G, \quad (1.5)$$

где

$$G = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{\partial f^T(x, t_j)}{\partial t} a_i(j) \leq 0, i \in I_*(j), \right. \\ \left. l_{ji}^T \frac{\partial^2 f(x, t_j)}{\partial t^2} l_{ji} \leq 0, i = \overline{1, d_j}, j \in J_*, \right. \\ \left. f(x, t_j) \leq 0, j \in J^{**} \right\}.$$

Задача (1.4)–(1.5) – задача выпуклого программирования с конечным числом ограничений.

Из данной теоремы следует, что проверку оптимальности некоторого допустимого плана в задаче (1.1) можно свести к проверке оптимальности данного плана в задаче (1.4)–(1.5).

Целью данного исследования является формулировка явного критерия оптимальности для задачи (1.1) в случае, когда функция ограничений вполне выпуклая по $x \in \mathbb{R}^n$.

2 Вполне выпуклость

Согласно работе [9] введем понятие вполне выпуклой функции.

Определение 2.1. *Говорят, что выпуклая функция $g(x)$ является вполне выпуклой по $x \in \mathbb{R}^n$, когда для нее выполняется следующее условие: если она линейна на некотором интервале, то она линейна и на всей прямой, содержащей данный интервал.*

В [9] было показано, что функция $g(x)$ вполне выпукла по $x \in \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда она представима в виде

$$g(x) = \psi(z(x)) + w^T x + \beta, \quad z(x) = Ax + v,$$

где $\psi(z): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ – строго выпуклая по z функция, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $v \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Предположение 2.1. *Предположим, что функция ограничений $f(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in T$ задачи (1.1) допускает представление*

$$f(x, t) = \psi(t, z(x, t)) + w(t)^T x + \beta(t), \quad (2.1) \\ z(x, t) = A(t)x + v(t),$$

где функция $\psi(t, z): \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ является строго выпуклой по z функцией при любом $t \in T$, функции $A(t)$, $v(t)$, $w(t)$, $\beta(t)$, $\psi(t, z)$ достаточно гладкие по t , функция $\psi(t, z)$ достаточно гладкая по z .

Из Предположения 2.1 следует, что функция $f(x, t)$, $t \in T$, будет вполне выпукла по $x \in \mathbb{R}^n$.

Утверждение 2.1. *Пусть выполняется Предположение 2.1, $\tilde{Y} \subset \mathbb{R}^n$ – некоторое выпуклое множество, $\bar{t} \in T$. Тогда условие*

$$f(x, \bar{t}) = 0, \forall x \in \tilde{Y}, \quad (2.2)$$

эквивалентно условию

$$A(\bar{t})x + v(\bar{t}) = \bar{z}, \quad (2.3)$$

$$w(\bar{t})^T x = -\beta(\bar{t}) - \bar{\psi}, \forall x \in \tilde{Y},$$

где

$$\bar{z} = z(\bar{x}, \bar{t}) = A(\bar{t})\bar{x} + v(\bar{t}), \quad (2.4) \\ \bar{\psi} = \psi(\bar{t}, \bar{z}),$$

\bar{x} – некоторый вектор из \tilde{Y} , а условие

$$B \frac{\partial f(x, \bar{t})}{\partial t} = 0, \forall x \in \tilde{Y}, \quad (2.5)$$

при выполнении (2.2), эквивалентно условию

$$B(\bar{Q}^T x + \bar{u}) = 0, \forall x \in \tilde{Y}, \quad (2.6)$$

где B – некоторая матрица размерности $\bar{m} \times s$,

$$\bar{Q} = Q(\bar{t}, \bar{z}) = \sum_{r=1}^m \bar{v}_r \frac{\partial A_r(\bar{t})}{\partial t} + \frac{\partial w^T(\bar{t})}{\partial t}, \\ A_r(\bar{t}) - r\text{-я строка матрицы } A(\bar{t}), \\ \bar{u} = u(\bar{t}, \bar{z}) = \bar{\varphi} + \frac{\partial v(\bar{t})}{\partial t} \bar{v} + \frac{\partial \beta(\bar{t})}{\partial t}, \quad (2.7)$$

$$\bar{\varphi} = \varphi(\bar{t}, \bar{z}) = \frac{\partial \psi(\bar{t}, \bar{z})}{\partial t},$$

$$\bar{v}_r = v_r(\bar{t}, \bar{z}) = \frac{\partial \psi(\bar{t}, \bar{z})}{\partial z_r},$$

$$r = \overline{1, m}, \bar{v} = \bar{v}(\bar{t}, \bar{z}) = (\bar{v}_r, r = \overline{1, m})^T.$$

Доказательство. Докажем вначале эквивалентность соотношений (2.2) и (2.3).

Пусть выполняется соотношение (2.2). Перепишем его в следующем виде

$$\psi(\bar{t}, z(x, \bar{t})) = -(w(\bar{t})^T x + \beta(\bar{t})), \quad (2.8) \\ z(x, \bar{t}) = A(\bar{t})x + v(\bar{t}), \forall x \in \tilde{Y}.$$

Покажем, что $z(x, \bar{t}) = const, \forall x \in \tilde{Y}$. Предположим противное, т. е. $\exists x_1, x_2 \in \tilde{Y}$ такие, что $z(x_1, \bar{t}) \neq z(x_2, \bar{t})$.

Рассмотрим функции $x(\lambda) = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \tilde{Y}$ и

$$z(x(\lambda), \bar{t}) := A(\bar{t})x(\lambda) + v(\bar{t}) = \\ = \lambda z(x_1, \bar{t}) + (1-\lambda)z(x_2, \bar{t}), \lambda \in [0, 1].$$

Учитывая строгую выпуклость функции ψ , имеем

$$\psi(\bar{t}, z(x(\lambda), \bar{t})) < \lambda \psi(\bar{t}, z(x_1, \bar{t})) + \\ + (1-\lambda)\psi(\bar{t}, z(x_2, \bar{t})), \\ \lambda \in (0, 1), z(x_1, \bar{t}) \neq z(x_2, \bar{t}).$$

С учетом соотношения (2.8) получим

$$-(w(\bar{t})^T x(\lambda) + \beta(\bar{t})) < -\lambda(w(\bar{t})^T x_1 + \beta(\bar{t})) - \\ - (1-\lambda)(w(\bar{t})^T x_2 + \beta(\bar{t})), \lambda \in (0, 1) \Rightarrow \\ w(\bar{t})^T x(\lambda) > w(\bar{t})^T x(\lambda), \lambda \in (0, 1).$$

Полученное противоречие доказывает, что $z(x, \bar{t}) = const, \forall x \in \tilde{Y}$.

Поскольку $\bar{x} \in \tilde{Y}$, то в качестве данной константы возьмем значение $\bar{z} = z(\bar{x}, \bar{t})$, тогда имеем

$$A(\bar{t})x + v(\bar{t}) = \bar{z}, \forall x \in \tilde{Y},$$

из чего следует

$$\psi(\bar{t}, z(x, \bar{t})) = \psi(\bar{t}, \bar{z}) := \bar{\psi}, \forall x \in \tilde{Y}.$$

С учетом этого, перепишем соотношение (2.8) в следующем виде

$$\begin{aligned} \bar{\psi} + w(\bar{t})^T x + \beta(\bar{t}) &= 0, \forall x \in \tilde{Y} \Rightarrow \\ w(\bar{t})^T x &= -\beta(\bar{t}) - \bar{\psi}, \forall x \in \tilde{Y}. \end{aligned}$$

Таким образом получили соотношения (2.3).

Пусть выполняются соотношения (2.3). Из условия $A(\bar{t})x + v(\bar{t}) = \bar{z}, \forall x \in \tilde{Y}$ следует, что

$$\psi(\bar{t}, z(x, \bar{t})) = \psi(\bar{t}, \bar{z}) = \bar{\psi}, \forall x \in \tilde{Y}. \quad (2.9)$$

Тогда, учитывая (2.3) и (2.9), получаем

$$\begin{aligned} f(x, \bar{t}) &= \psi(\bar{t}, z(x, \bar{t})) + w(\bar{t})^T x + \beta(\bar{t}) = \\ &= \bar{\psi} - \beta(\bar{t}) - \bar{\psi} + \beta(\bar{t}) = 0, \forall x \in \tilde{Y}. \end{aligned}$$

Таким образом получили соотношение (2.2).

Докажем теперь вторую часть утверждения.

Пусть выполняются соотношения (2.2) и (2.5). С учетом того, что выполняется Предположение 2.1 перепишем соотношение (2.5) в виде

$$B \frac{\partial(\psi(\bar{t}, z(x, \bar{t})) + w(\bar{t})^T x + \beta(\bar{t}))}{\partial t} = 0, \forall x \in \tilde{Y}.$$

С учетом правил дифференцирования по векторному аргументу получим

$$\begin{aligned} B \left(\frac{\partial \psi(\bar{t}, z(x, \bar{t}))}{\partial t} + \left(\frac{\partial A(\bar{t})x}{\partial t} + \frac{\partial v(\bar{t})}{\partial t} \right) x + \right. \\ \left. \times \frac{\partial \psi(\bar{t}, z(x, \bar{t}))}{\partial z} + \frac{\partial w(\bar{t})}{\partial t} x + \frac{\partial \beta(\bar{t})}{\partial t} \right) = 0, \forall x \in \tilde{Y}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Выше было показано, что функция $z(x, \bar{t}) = const, \forall x \in \tilde{Y}$ при выполнении (2.2). Учитывая данный факт, можем утверждать, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(\bar{t}, z(x, \bar{t}))}{\partial t} &= \frac{\partial \psi(\bar{t}, \bar{z})}{\partial t} =: \bar{\varphi}, \\ \frac{\partial \psi(\bar{t}, z(x, \bar{t}))}{\partial z} &= \frac{\partial \psi(\bar{t}, \bar{z})}{\partial z} =: \bar{v}, \forall x \in \tilde{Y}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Учитывая это, перепишем соотношение (2.10) в следующем виде

$$B \left(\bar{\varphi} + \frac{\partial A(\bar{t})x}{\partial t} \bar{v} + \frac{\partial v(\bar{t})}{\partial t} \bar{v} + \frac{\partial w(\bar{t})}{\partial t} x + \frac{\partial \beta(\bar{t})}{\partial t} \right) = 0, \quad \forall x \in \tilde{Y}. \quad (2.12)$$

С учетом обозначений (2.7) последние равенства принимают вид (2.5), что доказывает их справедливость.

Пусть выполняются соотношения (2.2) и (2.6). Тогда, учитывая $z(x, \bar{t}) = const, \forall x \in \tilde{Y}$ и (2.11), получаем

$$\begin{aligned} B \frac{\partial f(x, \bar{t})}{\partial t} &= \\ &= B \left(\bar{\varphi} + \frac{\partial A(\bar{t})x}{\partial t} \bar{v} + \frac{\partial v(\bar{t})}{\partial t} \bar{v} + \frac{\partial w(\bar{t})}{\partial t} x + \frac{\partial \beta(\bar{t})}{\partial t} \right) = \\ &= B(\bar{Q}^T x + \bar{u}) = 0, \forall x \in \tilde{Y}. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

На основании доказанного утверждения можем сделать вывод, что задача (1.4)–(1.5) эквивалентна задаче

$$\min_{x \in Y} c(x), \quad (2.13)$$

где $Y = H \cap G$, G определено согласно (1.6),

$$\begin{aligned} H &= \{x \in \mathbb{R}^n : A(t_j)x + v(t_j) = \bar{z}(j), \\ &w(t_j)^T x = -\beta(t_j) - \bar{\psi}(j), \\ &B(j)(\bar{Q}^T(j)x + \bar{u}(j)) = 0, j \in J_*, \} \\ \bar{z}(j) &:= A(t_j)\bar{x} + v(t_j), \\ \bar{\psi}(j) &= \psi(t_j, \bar{z}(j)), \bar{x} \in Y, \\ \bar{Q}(j) &:= Q(t_j, \bar{z}(j)); \bar{u}(j) := u(t_j, \bar{z}(j)), \\ \bar{\varphi}(j) &:= \frac{\partial \psi(t_j, \bar{z}(j))}{\partial t}, \bar{v}(j) := \bar{v}(t_j, \bar{z}(j)), \end{aligned} \quad (2.14)$$

а функции $Q(\bar{t}, \bar{z}), u(\bar{t}, \bar{z}), \bar{v}(\bar{t}, \bar{z})$ определены согласно (2.7). Поскольку задача (1.4)–(1.5), при выполнении Предположения 2.1, эквивалентна задаче (2.13), следовательно исследование оптимальности некоторого допустимого плана в задаче (1.4)–(1.5) эквивалентно проверке оптимальности этого плана в задаче (2.13), которая является задачей нелинейного программирования с линейными ограничениями равенствами.

Замечание 2.1. Предположение 2.1 можно ослабить, заменив его следующим:

Предположим, что существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любого $j \in J_*$ в окрестности $\Omega_j = \{t \in T : \|t - t_j\| \leq \varepsilon\}$ точки t_j функция $f(x, t), t \in \Omega_j$, допускает представление

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \psi_j(t, z_j(x, t)) + w_j(t)^T x + \beta_j(t), \\ z_j(x, t) &= A_j(t)x + v_j(t), \end{aligned}$$

где функция $\psi_j(t, z_j) : \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{m_j} \rightarrow \mathbb{R}$ является строго выпуклой функцией по z_j для любого $t \in T$.

3 Условия оптимальности

В предыдущем пункте было показано, что задача (1.4)–(1.5) при выполнении Предположения 2.1 эквивалентна задаче (2.13), которая является задачей выпуклого программирования, в которой ограничения-равенства являются линейными.

В [11] было показано, что существует допустимый план $\tilde{x} \in X$, такой, что

$$T^* = T_a(\tilde{x}),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^T(\tilde{x}, t_j)}{\partial t} a_i(j) &< 0, i \in I_*(j), \\ l^T \frac{\partial^2 f(\tilde{x}, t_j)}{\partial t^2} l &< 0, \forall l \in L_j^0, j \in J_*; \\ f(\tilde{x}, t) &< 0, t \in T \setminus \{t_j, j \in J_*\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Из соотношений (3.1), выпуклости множества G и доказанной эквивалентности задач (2.13) и (1.4)–(1.5) следует справедливость следующего критерия оптимальности.

Теорема 3.1. Пусть выполняется Предположение 2.1. Допустимый план $x^0 \in Y$ является оптимальным в задаче (1.4)–(1.5) тогда и только тогда, когда существуют вектора и числа

$$\begin{aligned} \tau_j \in \mathbb{R}^m, \lambda_j \in \mathbb{R}^{\bar{m}_j}, \bar{m}_j = |P(j)| + |I_0(j)|, \\ \eta_{ji} \geq 0, i \in I_*(j), \mu_{ji} \geq 0, i = \overline{1, \bar{d}_j}, \\ \gamma_j, j \in J_*, \xi_j \geq 0, j \in J^{**}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

такие, что

$$\begin{aligned} \nabla_x c(x^0) + \sum_{j \in J_*} \left(A^T(t_j) \tau_j + \gamma_j w(t_j) + \bar{Q}(j) B^T(j) \lambda_j + \right. \\ \left. + \sum_{i \in I_*(j)} \eta_{ji} \nabla_x \left(\frac{\partial f^T(x^0, t_j)}{\partial t} a_i(j) \right) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{d_j} \mu_{ji} \nabla_x \left(l_{ji}^T \frac{\partial^2 f(x^0, t_j)}{\partial t^2} l_{ji} \right) \right) + \\ + \sum_{j \in J^{**}} \xi_j \nabla_x f(x^0, t_j) = 0, \\ \eta_{ji} \frac{\partial f^T(x^0, t_j)}{\partial t} a_i(j) = 0, i \in I_*(j), \\ \mu_{ji} l_{ji}^T \frac{\partial^2 f(x^0, t_j)}{\partial t^2} l_{ji} = 0, i = \overline{1, \bar{d}_j}, j \in J_*, \\ \xi_j f(x^0, t_j) = 0, j \in J^{**}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Основываясь на Теоремах 1.1 и 3.1, можем сформулировать следующий результат для задачи полубесконечного программирования (1.1).

Теорема 3.2. Пусть выполняются Предположения 1.1 и 2.1. Допустимый план $x^0 \in X$ является оптимальным в задаче (1.1) тогда и только тогда, когда существуют вектора и числа (3.2) такие, что выполняются условия (3.3).

4 Сравнительный анализ полученных результатов с известными в литературе

Покажем взаимосвязь полученных выше условий оптимальности с условиями из [4], где был исследован случай, когда функция ограничений $f(x, t)$ при любом $t \in T$ является выпуклой и аналитической по $x \in \mathbb{R}^n$. Приведем далее некоторые уже известные факты из [4], которые будем использовать.

В [4] доказана следующая теорема.

Теорема 4.1. Пусть выполняется Предположение 1.1 и функция $f(x, t)$ является аналитической функцией в $\mathbb{R}^n \times T$. Допустимый план $x^0 \in X$ является оптимальным в задаче (1.1) тогда и только тогда, когда существуют числа $\bar{\eta}_{ji} \geq 0, i \in I_*(j), \bar{\mu}_{ji} \geq 0, i = \overline{1, \bar{d}_j}, j \in J_*, \bar{\xi}_j \geq 0, j \in J^{**}$, такие, что

$$\Phi^T \left(\nabla_x c(x^0) + \sum_{j \in J_*} \left(\sum_{i \in I_*(j)} \bar{\eta}_{ji} \nabla_x \left(\frac{\partial f^T(x^0, t_j)}{\partial t} a_i(j) \right) + \right. \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{d_j} \bar{\mu}_{ji} \nabla_x \left(l_{ji}^T \frac{\partial^2 f(x^0, t_j)}{\partial t^2} l_{ji} \right) \right) + \sum_{j \in J^{**}} \bar{\xi}_j \nabla_x f(x^0, t_j) = 0,$$

$$\bar{\xi}_j f(x^0, t_j) = 0, j \in J^{**},$$

$$\bar{\eta}_{ji} \frac{\partial f^T(x^0, t_j)}{\partial t} a_i(j) = 0, i \in I_*(j),$$

$$\bar{\mu}_{ji} l_{ji}^T \frac{\partial^2 f(x^0, t_j)}{\partial t^2} l_{ji} = 0, i = \overline{1, \bar{d}_j}, j \in J_*,$$

где $\Phi = (\phi_i, i = 1, \dots, r); \{\phi_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, r\}$ – максимальное (по количеству элементов) множество векторов удовлетворяющее соотношениям

$$\text{rank}(\phi_i, i = \overline{1, r}) = r, \quad (4.1)$$

$$M_j^k(\tilde{x}, \phi_i) = 0, k = 1, 2, \dots; i = \overline{1, r}, j \in J_*,$$

$$M_j^1(x, \phi) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x, t_j)}{\partial x} \phi \\ \frac{\partial (B(j) \frac{\partial f(x, t_j)}{\partial t})}{\partial x} \phi \end{pmatrix},$$

$$M_j^k(x, \phi) := \frac{\partial M_j^{k-1}(x, \phi)}{\partial x} \phi, k = 2, 3, \dots, j \in J_*,$$

где \tilde{x} вектор, удовлетворяющий (3.1).

Основываясь на вышеизложенном, можно легко доказать следующее утверждение.

Утверждение 4.1. Предположим, что функция $f(x, t)$ аналитична в $\mathbb{R}^n \times T$ и удовлетворяет Предположению 2.1. Пусть $\bar{\phi}_i, i = 1, \dots, r^*$ – максимально возможное множество векторов, удовлетворяющее условиям

$$\text{rank}(\bar{\phi}_i, i = 1, \dots, r^*) = r^*,$$

$$\begin{pmatrix} A(t_j) \\ w^T(t_j) \\ B(j) \bar{Q}^T(j) \end{pmatrix} \bar{\phi}_i = 0, i = 1, \dots, r^*, j \in J_*. \quad (4.2)$$

Тогда данная система векторов $\bar{\phi}_i, i = 1, \dots, r^*$ удовлетворяет условиям (4.1).

Таким образом, если известно представление (2.1), то систему векторов $\phi_i, i = \overline{1, r}$, необходимую для проверки условий оптимальности из теоремы 4.1, можно найти более удобным способом: найдя все линейно независимые решение однородной линейной системы уравнений (4.2).

Из всего выше изложенного также можем сделать вывод, что если найдены множители $\xi_j, j \in J^{**}, \eta_{ji}, i \in I_*(j), \mu_{ji}, i = \overline{1, \bar{d}_j}, j \in J_*$, удовлетворяющие условиям теоремы 3.2, то они совпадут с множителями

$$\bar{\xi}_j, j \in J^{**}, \bar{\eta}_{ji}, i \in I_*(j), \bar{\mu}_{ji}, i = \overline{1, \bar{d}_j}, j \in J_*$$

из теоремы 4.1.

Замечание 4.1. Выше изложенные утверждения являются справедливыми и для задачи полубесконечного программирования с ограничениями вида

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c(x),$$

$$f_i(x, t) \leq 0, \forall t \in T_i, i = \overline{1, k},$$
 где $0 < k < \infty$, каждое T_i – многогранник.

5 Пример

Рассмотрим задачу

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} x_1^2 + 2x_1 - 4x_3 + (x_4 - 1)^2, \quad (5.1)$$

$$f(x, t) \leq 0, \forall t \in T,$$

где $f(x, t) = -t_1^4 x_1 + 1.5(x_1 + x_2 + 1)^2 t_1^3 - 9t_1^2 - t_2^4 x_4 + 4x_4 t_2^3 - 4x_4 t_2^2 + (x_1 - 1)^2 t_2^2 - x_2 t_2^2 + x_2^2 t_2 + (3t_1 + 2)x_3^2 + t_1 t_2 x_3,$
 $T = \{t \in \mathbb{R}^2 : -t_1 \leq 0, -t_2 \leq 0, t_1 + t_2 \leq 3\},$

и $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4, t = (t_1, t_2)^T \in \mathbb{R}^2$. Требуется проверить, является ли допустимый план $x^0 = (1, 0, 0, 1)$ оптимальным в задаче (5.1).

Легко проверить, что для плана x^0 множество активных индексов имеет вид $T_a(x^0) = \{t^{(1)}, t^{(2)}, t^{(3)}\}$, где $t^{(1)} = (0, 0)^T, t^{(2)} = (0, 2)^T, t^{(3)} = (3, 0)^T$.

Применяя алгоритм [11], убеждаемся, что индексы $T^* = \{t^{(1)}, t^{(2)}\}, J_* = \{1, 2\}$, являются неподвижными в данной задаче. Используя правила построения экстремальных лучей, получим

$$a_1(1) = (1, 0)^T, a_2(1) = (0, 1)^T,$$

$$b_1(2) = (0, 1)^T, a_1(2) = (1, 0)^T.$$

Легко показать, что

$$q(t_j, l) \leq 1, l \in L(t_j) \setminus \{0\}, j \in J_*$$

и $q(t^{(1)}, a_i(1)) = 1, i \in I_0(1) = \{1, 2\};$
 $q(t^{(2)}, a_1(2)) = 1, i \in I_0(2) = \{1\},$

Определим

$$B(1) := (a_1(1), a_2(1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B(2) := (b_1(2), a_1(2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим $J^{**} = \{3\}$. Поскольку

$$l^T \frac{\partial^2 f(x^0, t^{(j)})}{\partial t^2} l < 0, \forall l \in L(t^{(j)}) \setminus \{0\},$$

то можем положить $d_j = 0, j \in J_*$.

Рассмотрим функцию $f(x, t), x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^s$. Она удовлетворяет Предположению 2.1, поскольку для $f(x, t)$ справедливо представление

$$f(x, t) = \psi(t, z(t, x)) + w^T(t)x + \beta(t),$$

$$z(t, x) = A(t)x + v(t),$$

где $w(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -t_2^2 \\ t_1 t_2 \\ -t_1^4 - t_2^4 + 4t_2^3 - 4t_2^2 \end{pmatrix}, \beta(t) = -9t_1^2,$

$$\psi(t, z) = z^T \begin{pmatrix} 1,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} z, z(t, x) = \begin{pmatrix} (x_1 + x_2 + 1)t_1^{\frac{3}{2}} \\ (x_1 - 1)t_2 \\ x_2 t_2^{\frac{1}{2}} \\ x_3(3t_1 + 2)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} t_1^{\frac{3}{2}} & t_2^{\frac{3}{2}} & 0 & 0 \\ t_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (3t_1 + 2)^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}, v(t) = \begin{pmatrix} t_1^{\frac{3}{2}} \\ -t_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 3.2, план x^0 будет оптимальным в задаче (5.1) тогда и только тогда, когда найдутся такие

$$\tau_j \in \mathbb{R}^4, \lambda_j \in \mathbb{R}^2, \gamma_j \in \mathbb{R}, j \in J_*; \quad (5.2)$$

$$\xi_j \geq 0, j \in J^{**},$$

что выполняются следующие соотношения

$$\nabla_x c(x^0) + \sum_{j \in J_*} (A^T(t^{(j)})\tau_j + \gamma_j w(t^{(j)}) + \bar{Q}(j)B^T(j)\lambda_j) + \sum_{j \in J^{**}} \xi_j \nabla_x f(x^0, t^{(j)}) = 0. \quad (5.3)$$

Положив $\bar{x} = (1, 0, 0, 1)$ и используя формулы (2.14), подсчитаем $\bar{Q}(j), j \in J^*$:

$$\bar{Q}(j) = \begin{pmatrix} 6(t_1^{(j)})^2 & 0 \\ 6(t_1^{(j)})^2 & 0 \\ t_2^{(j)} & t_1^{(j)} \\ -4(t_1^{(j)})^3 & -4(t_2^{(j)})^3 + 12(t_2^{(j)})^2 - 8t_2^{(j)} \end{pmatrix}.$$

Для $t^{(1)} = (0, 0)$ имеем

$$A(t^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}, w(t^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{Q}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{Q}(1)B^T(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для $t^{(2)} = (0, 2)$

$$A(t^{(2)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}, w(t^{(2)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{Q}(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{Q}(2)B^T(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для проверки условий (5.2) определим еще следующие значения

$$\nabla_x f(x, t^{(3)}) = \begin{pmatrix} 81(x_1 + x_2 + 1) \\ 81(x_1 + x_2 + 1) \\ 18x_3 \\ -81 \end{pmatrix}, \nabla_x c(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2 \\ 0 \\ -4 \\ 2(x_4 - 1) \end{pmatrix},$$

$$\nabla_x f(x^0, t^{(3)}) = (162, 162, 0, -81)^T,$$

$$\nabla_x c(x^0) = (4, 0, -4, 0).$$

Тогда условие (5.2) и условие (5.3) имеют вид

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tau_1 + \gamma_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_1 + \gamma_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tau_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda_2 + \xi_3 \begin{pmatrix} 162 \\ 162 \\ 0 \\ -81 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\xi_3 = 0, \xi_3 \geq 0.$$

Эти условия выполняются при $\xi_3 = 0, \gamma_1 = \gamma_2 = 0,$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_1 = \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, x^0 – оптимальный план задачи (5.1).

Заключение

В данной работе были рассмотрены задачи полубесконечного программирования с многогранным множеством индексов и вполне выпуклой по x функцией ограничений.

Используя свойство вполне выпуклости функции ограничений, было показано, что задача (1.4)–(1.5) эквивалентна задаче (2.13), которая является задачей выпуклого программирования, ограничения-равенства которой являются линейными. На основе проведенных исследований был сформулирован и доказан критерий оптимальности (см. Теорему 3.2) для задачи (1.1) с вполне выпуклыми функциями ограничений. Приведен пример, иллюстрирующий применение данного критерия. Проведен сравнительный анализ критериев оптимальности для задачи (1.1) с вполне выпуклыми функциями ограничений и аналитическими функциями ограничений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lopez, M. Semi-infinite programming: theory, methods and applications / M. Lopez, G. Still // European Journal of Operational Research. – 2007. – Vol. 180. – P. 491–518.

2. Shapiro, A. Semi-infinite programming, duality, discretization and optimality conditions / A. Shapiro // Optimization. – 2009. – Vol. 58, № 2. – P. 133–161.

3. Stein, O. On optimality conditions for generalized semi-infinite programming problems / O. Stein, G. Still // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2000. – Vol. 104, № 2. – P. 443–458.

4. Kostyukova, O.I. Study of a Special Nonlinear Problem Arising in Convex Semi-Infinite Programming / O.I. Kostyukova, T.V. Tchemisova, S.A. Yermalinskaya // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – Vol. 161, № 6. – P. 878–892.

5. Klatté, D. Stable local minimizers in semi-infinite optimization: regularity and second-order conditions / D. Klatté // J. Comput. Appl. Math. – 1994. – Vol. 56. – P. 137–157.

6. Moldovan, A. On Regularity for Constrained Extremum Problems. Part 2: Necessary Optimality Conditions / A. Moldovan, L. Pellegrini // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2009. – Vol. 142. – P. 165–183.

7. Kostyukova, O.I. On the algorithm of determination of immobile indices for convex SIP problems / O.I. Kostyukova, T.V. Tchemisova, S.A. Yermalinskaya // International Journal on Mathematics and Statistics. – 2008. – Vol. 13, № 8. – P. 13–33.

8. Kostyukova, O.I. Implicit optimality criterion for convex SIP problem with box constrained index set / O.I. Kostyukova, T.V. Tchemisova // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 20. – P. 475–502.

9. Rockafellar, R.T. Some convex programs whole duals are linearly constrained, in “Nonlinear Programming” / R.T. Rockafellar (J.B. Rosen, O.L. Mangasarian, and K. Ritter, Eds.). – Academic Press, New York, 1970. – P. 293–322.

10. Kostyukova, O.I. A constructive algorithm for determination of immobile indices in convex SIP problems with polyhedral index sets / O.I. Kostyukova, T.V. Tchemisova. – Aveiro, 2012. – 17 p. – (Preprint / Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus, Mathematical Department, University of Aveiro).

11. Кулагина, М.В. Алгоритм определения неподвижных индексов в выпуклых задачах полубесконечного программирования с многогранным множеством индексов / М.В. Кулагина // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3 (20). – С. 65–76.

12. Kostyukova, O.I. Convex SIP Problems with Finitely Representable Compact Index Sets: Immobile Indices and the Properties of the Auxiliary NLP Problem / O.I. Kostyukova, T.V. Tchemisova // Set-Valued and Variational Analysis. – 2015. – Vol. 23. – P. 519–546.

Поступила в редакцию 21.10.16.

УДК 517.925

ВОЗМУЩЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ, НЕ ИЗМЕНЯЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПУАНКАРЕ

В.И. Мироненко, В.В. Мироненко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

THE LINEAR SYSTEMS PERTURBATIONS, WHICH DO NOT CHANGE POINCARÉ MAPPING

V.I. Mironenko, V.V. Mironenko

F. Scorina Gomel State University

Полезность теории отражающей функции продемонстрирована на изучении неавтономных линейных дифференциальных систем второго порядка.

Ключевые слова: дифференциальная система, отражающая функция, отображение Пуанкаре.

The advantage of the reflecting function theory have been demonstrated on the study of the linear non-autonomous two-dimensional systems.

Keywords: differential system, Reflecting Function, Poincaré mapping.

Введение

При изучении свойств решений дифференциальных систем важную роль играют вопросы существования и устойчивости периодических решений этих систем. Для изучения этих вопросов Пуанкаре ввел понятие отображения за период, которое является частным случаем оператора сдвига вдоль решений дифференциальных систем [1]. В настоящее время известно и отображение за период для уравнений с частными производными [2, с. 216].

Как отображение Пуанкаре, так и оператор сдвига определяются через общее решение $\varphi(t; t_0, x_0)$ изучаемой дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = X(t; x), \quad t \in R, \quad x \in D \subset R^n. \quad (0.1)$$

Здесь и всюду в дальнейшем считается, что решения изучаемой дифференциальной системы однозначно определяются своими начальными данными.

Оператор сдвига на промежутке $[\alpha; \beta]$ определяется формулой $\varphi(\beta; \alpha, x)$, а отображение Пуанкаре для 2ω -периодической по t системы (0.1) на промежутке $[t_0; t_0 + 2\omega]$ определяется формулой $\varphi(t_0 + 2\omega; t_0, x)$. Эти определения навязывают читателю мысль, что ни отображение за период, ни оператор сдвига нельзя найти, если нельзя найти общего решения дифференциальной системы. Это мнение, однако, как показали исследования первого автора [3], является ошибочным.

В работе [4] было введено понятие отражающей функции. Отражающая функция $F(t, x)$

для системы (0.1) с общим решением в форме Коши $\varphi(t; t_0, x_0)$ также определяется через это решение по формуле $F(t, x) = \varphi(-t; t, x)$. Для этой функции, однако, справедливо

Утверждение 0.1 [3, с. 63]. *Дифференцируемая функция $F(t, x)$ является отражающей функцией для системы (0.1) тогда и только тогда, когда эта функция является решением задачи Коши*

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} X(t, x) + X(-t, F) = 0, \quad F(0, x) \equiv x.$$

Это соотношение называется основным соотношением для отражающей функции.

Приведенное утверждение позволяет иногда найти отражающую функцию системы (0.1) в элементарных функциях даже тогда, когда эта система не интегрируется в квадратурах. Такой случай представляется, например, когда вектор-функция $X(t, x)$ нечетна по t . В этом случае $F(t, x) \equiv x$.

Зная отражающую функцию, мы легко можем определить оператор сдвига на симметричном промежутке $[-\alpha; \alpha]$ по формуле

$$\varphi(\alpha; -\alpha; x) = F(-\alpha; x)$$

и отображение за период $[-\omega; \omega]$ по формуле $F(-\omega, x)$. А это значит, что решение $\varphi(t; -\omega, x_0)$ дифференциальной системы (0.1) с 2ω -периодической по t правой частью будет 2ω -периодическим тогда и только тогда, когда $F(-\omega, x_0) = x_0$. При этом характер устойчивости этого периодического решения совпадает с характером устойчивости неподвижной точки x_0 отображения $x \mapsto F(-\omega, x)$.

Используя эти сведения и другие свойства отражающей функции, изложенные в [3], многие авторы, среди которых А.А. Альсевич, В.А. Бельский, Е.В. Вареникова, О.А. Кастрица, С.В. Майоровская, В.В. Мироненко, Э.В. Мусафиров, Zh. Zhou и другие, получили и опубликовали интересные результаты по качественной теории дифференциальных систем. Итоги исследований китайских математиков по отражающей функции до 2014 года подведены в монографии [5].

Различные дифференциальные системы вида (0.1) могут иметь одну и ту же отражающую функцию. Две системы вида (0.1) одной размерности, отражающие функции которых $F(t, x)$ и $\Phi(t, x)$, $F: G_1 \rightarrow R^n$, $\Phi: G_2 \rightarrow R_n$, названы [3, с. 74] эквивалентными, если их отражающие функции F и Φ совпадают в $G_1 \cap G_2$.

Ограничиваясь рассмотрением этих двух дифференциальных систем на область $G_1 \cap G_2$, мы можем утверждать, что операторы сдвига таких систем на любом симметричном промежутке $[-\omega, \omega]$ совпадают. Если одна из этих систем 2ω -периодична, то ее отображение за период $[-\omega, \omega]$ совпадает с оператором сдвига на промежутке $[-\omega, \omega]$ другой системы. Если обе эти системы 2ω -периодичны, то их отображения за период $[-\omega, \omega]$ совпадают.

Утверждение 0.2 [3, с. 76]. *Дифференциальная система (0.1) и система*

$$\frac{dy}{dt} = Y(t, y), \quad t \in R, y \in D \subset R^n \quad (0.2)$$

эквивалентны, если совместна система

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} X(t, x) + X(-t, F) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} Y(t, x) + Y(-t, F) &= 0, \\ F(0, x) &= x. \end{aligned}$$

При этом $F(t, x)$ является их общей отражающей функцией.

При нахождении этой отражающей функции разумно пользоваться теоремой Фробениуса [6, с. 152].

В работе [7] (см. также [3, с. 171]) доказано, что дифференциальная система (0.2) эквивалентна системе (1) тогда и только тогда, когда ее правая часть $Y(t, x)$ представима в виде

$$Y(t, x) = X(t, x) + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(t) \Delta_i(t, x),$$

где $\alpha_i(t)$ – скалярные нечетные непрерывные функции, а $\Delta_i(t, x)$ есть решения системы

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} + \frac{\partial \Delta}{\partial x} X(t, x) - \frac{\partial X}{\partial x}(t, x) \Delta(t, x) = 0. \quad (0.3)$$

При этом, конечно, всякая дифференциальная система (0.2) с правой частью вида

$$Y(t, x) = X(t, x) + \sum_{i=0}^m \alpha_i(t) \Delta_i(t, x),$$

где $m \in N$, $m < \infty$, эквивалентна системе (0.1).

Недавно профессор Zhou Zhengxin доказала, что всякая дифференциальная система (0.2), эквивалентная системе (0.1), может быть записана в виде

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) + \sum_{i=1}^n \alpha_i(t, U) \Delta_i(t, x),$$

где $\alpha_i(t, U)$ – скалярные нечетные по t функции, а

$$U = (U_1(t, x), U_2(t, x), \dots, U_n(t, x))$$

есть общий интеграл системы (0.1), т. е. $U_1(t, x), U_2(t, x), \dots, U_n(t, x)$ есть базис первых инвариантов дифференциальной системы 0.1.

1 Линейные возмущения линейных систем, не изменяющие отражающих функций

Будем рассматривать дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \quad t \in R, \quad (1.1)$$

с непрерывной матрицей $P(t)$. Отражающая функция всякой такой системы линейна [3, с. 91] и имеет вид $F(t, x) \equiv F(t)x$. Матрица $F(t)$ при этом называется отражающей матрицей.

Нелинейная дифференциальная система может иметь линейную отражающую функцию и тогда ее можно найти.

В этом разделе мы ограничимся только линейными системами. Все линейные системы с отражающей матрицей $F(t)$, и только они могут быть записаны в виде

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2} F(-t) \frac{dF(t)}{dt} x + [F(-t)R(t) - R(-t)F(t)]x,$$

где $R(t)$ – произвольная непрерывная на $(-\infty; +\infty)$ матрица $n \times n$.

Аналогом соотношения (0.3), не позволяющим выйти за пределы множества линейных систем, является соотношение

$$\frac{d\Delta}{dt} = P(t)\Delta - \Delta P(t). \quad (1.2)$$

Общее решение матричного уравнения (1.2), как нетрудно проверить, имеет вид $\Delta(t) = \Phi(t)C\Phi^{-1}(t)$, где $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица системы (1.1), а C есть произвольная постоянная матрица $n \times n$.

Отсюда следует

Утверждение 1.1. *Линейная дифференциальная система $\frac{dx}{dt} = Q(t)x$ имеет такую же отражающую функцию, как и система (1.1) тогда и только тогда, когда она имеет вид*

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + \left[\sum_{i=1}^{n^2} \alpha_i(t) \Delta_i(t) \right] x,$$

где $\alpha_i(t)$ – непрерывные скалярные нечетные функции, а $\Delta_i(t)$ – матрицы, являющиеся решениями уравнения (1.2), для которых матрицы C имеют все свои элементы нулевыми, кроме одного равного единице.

Это утверждение следует из того, что произвольную матрицу C можно представить как линейную комбинацию n^2 матриц $n \times n$, у которых один элемент равен единице, а остальные элементы равны нулю.

Теорема 1.1. Пусть $\Delta(t)$ есть решение уравнения (1.2). Тогда для любого натурального s матрица Δ^s также является решением уравнения (1.2).

Доказательство теоремы проводится методом индукции.

При $s = 2$ мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta^2 &= \frac{d\Delta}{dt} \Delta + \Delta \frac{d\Delta}{dt} = \\ &= [P(t)\Delta - \Delta P] \Delta + \Delta [P(t)\Delta - \Delta P(t)] = \\ &= P(t)\Delta^2 - \Delta^2 P(t). \end{aligned}$$

Можно также заметить, что имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= [\Phi(t)C\Phi^{-1}(t)][\Phi(t)C\Phi^{-1}(t)] = \\ &= \Phi(t)C^2\Phi^{-1}(t). \end{aligned}$$

Замечание 1.1. В силу теоремы Кэли – Гамильтона (Cayley – Hamilton) [8, с. 109] в теореме 1.1 число s разумно изменять лишь в пределах $1 \leq s \leq n$. Поэтому в утверждении 1.1 сумму в соответствующей системе также разумно рассматривать только в пределах от 1 до n .

2 Линейные возмущения линейных двумерных систем, не изменяющие отражающую функцию

В этом разделе мы рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x' &= a(t)x + b(t)y, \\ y' &= c(t)x + e(t)y, \end{aligned} \quad (2.1)$$

с непрерывными на R коэффициентами.

Соотношение (1.2) для нахождения матрицы

$$\Delta(t) = \begin{pmatrix} m(t) & n(t) \\ p(t) & q(t) \end{pmatrix}$$

в этом случае принимает вид системы

$$\begin{aligned} m' &= b(t)p - nc(t), \\ n' &= b(t)(q - m) + (a(t) - e(t))n, \\ p' &= c(t)(m - q) + (e(t) - a(t))p, \\ q' &= c(t)n - b(t)p. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Теорема 2.1. Пусть $s(t)$ есть решение уравнения

$$s' = c(t) - (a(t) - e(t))s - b(t)s^2, \quad (2.3)$$

k – произвольная постоянная, а функция $m(t)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$m' = m \left(bs + \frac{c}{s} \right) + \left(bs - \frac{c}{s} \right). \quad (2.4)$$

Тогда $m(t)$, $n(t) = \frac{k - m(t)}{s(t)}$, $p(t) = (k + m(t))s(t)$,

$q(t) = -m(t)$ есть решение системы (2.2).

Доказательство состоит в проверке подстановкой каждой из функций m, n, p, q в каждое из уравнений системы (2.2).

Замечание 2.1. Система (2.2), что нетрудно проверить, имеет два первых интеграла

$$m + q = c_1 = const,$$

$$mq - np = c_2 = const$$

и решение $q = m = 1, p = n = 0$.

Замечание 2.2. Для любого решения $x(t)$,

$y(t)$ системы (2.1) функция $s(t) := \frac{y(t)}{x(t)}$ является

решением уравнения (2.3).

Действительно,

$$\begin{aligned} s' &= \frac{y'}{x} - \frac{y}{x} \frac{x'}{x} = \\ &= c(t) + e(t) \frac{y}{x} - \frac{y}{x} \left(a(t) + b(t) \frac{x}{y} \right) = \\ &= c(t) - (a(t) - e(t))s - b(t)s^2. \end{aligned}$$

Поэтому, зная хотя бы одно решение $s(t)$ уравнения (2.3), мы сможем полностью проинтегрировать систему 2.1. Для этого из первого уравнения системы (2.1) найдем сначала $x(t)$, предварительно переписав это уравнение в виде

$$x' = a(t)x + b(t)s(t)x.$$

Тогда формулы

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp \int (a(t) + b(t)s(t)) dt, \\ y(t) &= s(t)x(t) \end{aligned}$$

определят частные решения системы (2.1). Остальные решения будут найдены после обычного понижения порядка системы.

Как следует из замечания 2.2, уравнение (2.3) является крайне важным для изучения линейной системы (2.1). Само уравнение (2.3) является уравнением Риккати. Оно хорошо изучено [9]. Изучена также его связь с линейными дифференциальными уравнениями. В [9] можно найти огромное число уравнений Риккати, проинтегрированных в элементарных функциях и квадратурах.

Тем не менее, мы отметим здесь достаточно общие случаи интегрируемого уравнения Риккати в квадратурах, не отмеченные в [9]. Это случаи, когда уравнение Риккати имеет четное или нечетное решение. В самом деле, если уравнение (2.3) имеет четное решение $s(t)$, то его производная $s'(t)$ является нечетной функцией. Поэтому справедливы два тождества

$$\begin{aligned}
 s'(t) &\equiv c(t) - (a(t) - e(t))s(t) - b(t)s^2(t), \\
 -s'(t) &\equiv c(-t) - (a(-t) - e(-t))s(t) - b(-t)s^2(t). \\
 \text{Это значит, что функция } s(t) &\text{ удовлетворяет} \\
 \text{алгебраическому уравнению} & \\
 (c(t) + c(-t)) - & \\
 -(a(t) + a(-t) - e(t) - e(-t))s(t) - & \quad (2.5) \\
 -(b(t) + b(-t))s^2(t) &\equiv 0.
 \end{aligned}$$

Уравнение (2.5) дает возможность найти функцию $s(t)$ без квадратур, если только функции $a(t) - e(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ не все являются нечетными.

В том же случае, когда все они нечетные, все решения $s(t)$ уравнения (2.3) являются четными. Если к тому же функции $a(t) - e(t)$, $b(t)$, $c(t)$ не только нечетны, но и 2ω -периодичны, то все продолжимые на $[-\omega, \omega]$ решения уравнения (2.3) являются 2ω -периодичными.

Аналогичные выводы читатель может сделать самостоятельно для отыскания нечетных решений уравнения (2.3), которые удовлетворяют соотношению

$$\begin{aligned}
 (c(t) - c(-t)) - & \\
 -(a(t) + a(-t) - e(t) - e(-t))s(t) - & \\
 -(b(t) - b(-t))s^2(t) &\equiv 0.
 \end{aligned}$$

Интересен также случай, когда $s'(t) = c(t)$.

Пример 2.1. Найти четные решения уравнения

$$s' = \frac{1 + 2 \sin t}{2 + \cos t} s^2 - 2 - 5 \sin t - \cos t - 2 \sin 2t.$$

В этом случае уравнение (2.5) имеет вид

$$\frac{2}{2 + \cos t} s^2 - 4 - 2 \cos t = 0.$$

Откуда $s(t) = \pm(2 + \cos t)$. Проверка показывает, что решением является только $s(t) = 2 + \cos t$.

Будем рассматривать дифференциальную систему (2.1) и попытаемся выяснить, когда она имеет такую же отражающую функцию, как и некоторая система вида

$$\begin{aligned}
 x' &= B(t)y, \\
 y' &= C(t)x.
 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для системы (2.1) мы имеем два Δ :

$$\Delta_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \Delta_1 = \begin{pmatrix} m & n \\ p & m \end{pmatrix}.$$

Поэтому она, будучи эквивалентной системе (2.6), имеет вид

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} + \alpha_0 E + \alpha_1 \begin{pmatrix} m & n \\ 0 & -m \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

где $\alpha_0(t)$ и $\alpha_1(t)$ – нечетные функции.

Это значит, что для нее

$$\begin{aligned}
 a(t) &= \alpha_0(t) + \alpha_1(t)m(t), \\
 e(t) &= \alpha_0(t) - \alpha_1(t)m(t).
 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Из формул (2.7) мы однозначно определим $\alpha_0(t) \equiv \frac{a(t) + e(t)}{2}$, а нечетную функцию $\alpha_1(t)$ и функцию $m(t)$ с точностью до некоторого четного множителя. Мы, однако, в дальнейшем будем предполагать, что $\alpha_1(t)$ и $m(t)$ из (2.7), т. е. из $a(t) - e(t) = 2\alpha_1(t)m(t)$ определены однозначно и нам известны (при определении $m(t)$ разумно, пользуясь линейностью системы (2.2), считать $m(0)$ наиболее удобным для дальнейших выкладок числом).

Знание $\alpha_1(t)$ и $m(t)$ позволяет нам определить функции $n(t)$ и $p(t)$ с точностью до некоторых постоянных c_1 и c_2 . В самом деле, согласно замечанию 2.1 мы имеем соотношение

$$m(c_1 - m) - np = c_2,$$

из которого найдем

$$p = \frac{-c_2 + mc_1 - m^2}{n}.$$

Тогда из первого уравнения в (2.2) получим уравнение для определения $n(t)$ в виде

$$n^2 c(t) + nm'(t) + b(t)[c_2 - m(t)c_1 + m^2(t)] \equiv 0. \quad (2.8)$$

Отсюда определим c_1 и c_2 . Зная $m(t)$, мы найдем

$$\begin{aligned}
 n(t) &= \frac{-m' + \sqrt{(m')^2 - 4b(t)c(t)(c_2 - c_1 m + m^2)}}{2c(t)}, \\
 p(t) &= \frac{-(c_2 - c_1 m + m^2)}{n(t)}.
 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Подставим $n(t)$, определяемое первой формулой из (2.9), во второе уравнение из (2.2). Если оно превращается в тождество, то наша система эквивалентна системе

$$x' = yB(t), \quad y' = xC(t),$$

$$\text{где } B(t) = \frac{n'(t)}{c_1 - 2m(t)}, \quad C(t) = \frac{p'(t)}{2m(t) - c_1}.$$

Пример 2.2. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}
 x' &= (2 \sin t - \sin^2 t)x + y \sin t, \\
 y' &= (4 \sin^2 t - \sin^3 t - 3 \sin t + \cos t)x + \\
 &\quad + (\sin^2 t - 2 \sin t)y,
 \end{aligned}$$

здесь $a(t) = 2 \sin t - \sin^2 t$, $e(t) = -a(t)$ и, значит, $\alpha_0(t) \equiv 0$, $2\alpha_1(t)m = 2(2 - \sin t)\sin t$. Поэтому естественно считать $\alpha_1(t) = \sin t$ и $m(t) = 2 - \sin t$.

У нас $b(t) = \sin t$,

$$c(t) = 4 \sin^2 t - \sin^3 t - 3 \sin t + \cos t,$$

и для определения $n(t)$ мы имеем уравнение

$$c(t)n^2 + m'n + b(t)(c_2 - mc_1 + m^2) = 0,$$

т. е. уравнение

$$\begin{aligned} & [4\sin^2 t - \sin^3 t - 3\sin t + \cos t]n^2 - n\cos t + \\ & + \sin t [c_1 - (2 - \sin t)c_1 + (2 - \sin t)^2] \equiv 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$(n^2 - n)\cos t + [(c_2 - 2c_1 + 1) + c_1 \sin t] \sin t \equiv 0.$$

И убеждаемся, что при $c_1 = 0$, $c_2 = -1$ мы для определения $n(t)$ имеем уравнение

$$n(t)(n(t) - 1) \equiv 0.$$

Этому уравнению удовлетворяет, в частности, $n(t) \equiv 1$. Тогда из (2.8) имеем

$$p(t) = \frac{-c_2 - c_1(2 - \sin t) + (2 - \sin t)^2}{n(t)} = (2 - \sin t)^2.$$

Второе дифференциальное уравнение из (2.2) для определения $n(t)$ имеет вид

$$n' = (c_1 - 2m)\sin t - 2mn$$

или

$$n' = -2(2 - \sin t)\sin t + 2(2 - \sin t)n$$

и удовлетворяется при $n(t) \equiv 1$. Это значит, что наша система имеет требуемый вид. Действительно, ее можно записать в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cos t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \\ &+ \sin t \begin{pmatrix} 2 - \sin t & 1 \\ (4\sin t - \sin^2 t - 3) \sin t - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Она эквивалентна системе

$$x' = 0, \quad y' = x \cos t$$

с отражающей матрицей $F(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\sin t & 1 \end{pmatrix}$.

Поэтому все ее решения 2π -периодичны.

Заключение

Метод отражающей функции применен к изучению неавтономных линейных дифференциальных систем второго порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красносельский, М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М. А. Красносельский. – М.: Наука, 1966. – 332 с.
2. *Хенри, Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
3. *Мироненко, В.И.* Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем: монография / В.И. Мироненко. – Мин. образ. РБ, УО «ГТУ им. Ф. Скорины». – Гомель, 2004. – 196 с.
4. *Мироненко, В.И.* Отражающая функция и классификация периодических дифференциальных систем / В.И. Мироненко // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. XX, № 9. – С. 1635–1638.
5. *Zhou Zhengxin.* The theory of reflecting function and its application: Monography / Zhou Zhengxin. – China Machine Press, Beijing, 2014 – 218 p.
6. *Хартман, Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
7. *Мироненко, В.В.* Возмущения нелинейных дифференциальных систем, не меняющие временных симметрий / В.В. Мироненко // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 10. – С. 1325–1332.
8. *Хорн, Р.* Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
9. *Камке, Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1971. – 576с.

Поступила в редакцию 29.11.16.

УДК 531.3; 796.01

ПРОБЛЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ МЕХАНИКИ ДВИЖЕНИЯ ОПОРНО-ДВИГАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ЧЕЛОВЕКА

А.Е. Покатилов, М.А. Киркор

Могилевский государственный университет продовольствия

PROBLEMS OF RESEARCH OF MECHANICS OF LOCOMOTION OF THE LOCOMOTOR APPARATUS OF THE PERSON

A.E. Pokatilov, M.A. Kirkor

Mogilev State University of Food Technologies

Проанализирован такой способ создания компактных математических моделей, как использование рекуррентных отношений в кинематических и динамических моделях движения человека, предназначенных для компьютерного моделирования. Рассмотрены задачи анализа и синтеза движения на кинематическом и динамическом уровне. Исследованы существующие методы определения геометрии масс человеческого тела и выполнены расчеты по определению степени статической неопределимости опорно-двигательного аппарата человека. Показаны проблемы в исследовании взаимодействия человека с упругой опорой во время движения биомеханической системы. Предложен новый метод исследования пространственного движения человека.

Ключевые слова: рекуррентные отношения, анализ, синтез, опора, пространственное движение, захват движения, кватернионы.

The method of building of compact mathematical models, as use of recurrent attitudes in the kinematic and dynamic models of locomotion of the person, designed for computer modelling is analysed. Problems of the analysis and locomotion synthesis at the kinematic and dynamic level are surveyed. Existing methods of definition of geometry of masses of a human body are investigated and calculations by definition extents of static indefinability of a locomotorium of the person are executed. Problems in research of interacting of the person with an elastic support are shown during locomotion of biomechanical system. New method of research of a three-dimensional motion of the person are offered.

Keywords: recurrent ratios, analysis, synthesis, elastic leg, three-dimensional motion, motion capture.

Введение

Степень сложности человеческого организма такова, что, по мнению ряда исследователей, постановкой задач и их решением в области биомеханики человека будет занимать не одно поколение ученых [1]. Тем не менее, применяя определенные допущения, т.е. упрощая проблему, уже на сегодняшнем уровне развития науки можно создавать работающие методы и теорию в области механики человека [2].

Одной из важнейших задач является развитие механо-математических моделей движения человека, предназначенных для компьютерного моделирования. Суть проблемы в том, что трудоемкость и объем вычислений в области биомеханики движения такова, что в большинстве задач эту работу может выполнить только компьютер. Но методы механики разрабатывались применительно к техническим объектам, поэтому имеют ту особенность, что в основном предназначены для ручного труда и конкретной постановки задачи. С изменением условий, например, степени подвижности механизма, получается новая задача, для которой необходимо записывать новые уравнения и повторять все расчеты. В области биомеханики движения требуются универсальные модели движения, не зависящие от

поставленной задачи и компьютерные программы, построенные на этих принципах [3].

Особое внимание необходимо уделить задаче определения геометрии масс человека и стоящим тут проблемам. На сегодняшний день существует ряд методов, решающих эту задачу, но все они обладают тем недостатком, что не определяют вес каждой части тела, положение центров масс для них и моменты инерции в прямом измерении прижизненно для конкретного человека. Данные по геометрии масс человеческого тела получены на основе измерений трупов, или по косвенным данным, позволяющим вычислить эти характеристики с той или иной степенью погрешности, как например, по результатам погружения человека в воду или на основании уравнений регрессии полученных, например, в 70-х годах прошлого века с помощью обработки результатов радиоизотопных измерений и по сути носящих статистический характер. А необходимо точное знание геометрии масс, т.к. эти параметры входят во все модели движения на динамическом уровне [1]–[5].

В механике решаются два типа задач: задачи анализа и задачи синтеза. Применительно к биомеханике движения, например, в спорте, это означает анализ закономерностей существующих движений, т.е. техники спортивных упражнений.

Этим занимаются уже давно. Задачи синтеза решаются только с помощью вычислений. И это сравнительно новое и развивающееся направление, имеющее серьезные перспективы в применении. Синтез движения означает возможность проектирования и оптимизации техники выполнения спортивных упражнений под конкретного человека с учетом его геометрии масс. Несмотря на бурный рост и достижения в области компьютеров, а также программного обеспечения, решаемые при синтезе вычислительные задачи имеют такую степень сложности, что не поддаются простым решениям: необходимо создавать специальные методы и алгоритмы для задач синтеза [3]–[5]. Отметим, что трудоемкость задач синтеза движения и его оптимизации требует применения суперкомпьютеров и в этом ничем не отличается от трудоемкости моделирования погоды или расчетов процессов, происходящих в атомных реакторах.

Во многих исследованиях по биомеханике спорта изучается прежде всего движение биомеханической системы (БМС). Взаимодействие БМС со спортивным снарядом не учитывается или учитывается на самом простейшем уровне. В ряде случаев, как, например, в спортивной гимнастике, при выполнении упражнения на перекладине последняя оказывает существенное влияние на технику движения спортсмена. Есть случаи, когда гриф перекладины в динамике прогибается до 300 мм [6]. Несомненно, нужны точные модели на стыке различных наук: сопротивления материалов, теории упругости, теоретической механики, строительной механики, биомеханики движения, анатомии, программирования, различных разделов математики и пр. Другими словами, исследование взаимодействия человека со спортивным снарядом носит междисциплинарный характер, что затрудняет изучение движения и создание работающих моделей в таких случаях [4], [6].



Рисунок 1.1 – Большой оборот назад на перекладине

Еще одной проблемой является сложность исследования пространственного движения человека. Для изучения локомоций при плоском движении разработаны как модели, так и экспериментальные методы, проведены многочисленные вычислительные эксперименты [2], [3], [6]. Пространственное движение сложнее как с точки зрения измерений в натурном эксперименте, так и в плане вычислений. Этап развития методов, методик, измерительных средств и теории для исследования пространственного движения применительно к механике человека по-настоящему наступает только сейчас, в связи с бурным развитием ряда технологий в робототехнике, кинематографе, анимации и компьютерных играх [8]–[9].

1 Математические модели движения биомеханической системы

Рассмотрим наиболее общий и сложный случай моделирования: взаимодействие человека с упругой опорой. В качестве примера возьмем выполнение большого оборота на перекладине из спортивной гимнастики (рисунок 1.1). В этом случае имеет место взаимодействие двух систем: биомеханической, каковой является опорно-двигательный аппарат человека, и механической. В качестве последней выступает спортивный снаряд. Графически модель биомеханической системы представляют в виде незамкнутой кинематической цепи. Упругую опору можно показать или двумя пружинами, совершающими поступательные движения в вертикальном и горизонтальном направлениях, или одной вращающейся пружиной. Модель по последнему варианту представлена на рисунке 1.2. Здесь принято следующее допущение: выполняемое движение является плоским, а сама биомеханическая система показана в виде трехзвенной системы: звено 1 – руки; звено 2 – голова и туловище; звено 3 – ноги.

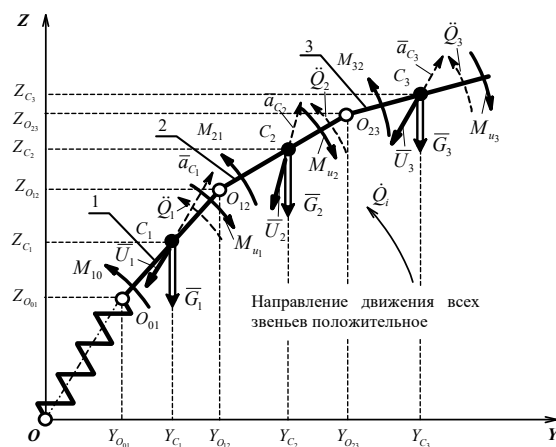


Рисунок 1.2 – Расчетная схема биомеханической системы

Любое искомое уравнение для i -го звена сводится к рекуррентному соотношению типа [3]

$$f_i = f_{i-1} + u_i, \quad (1.1)$$

где f_i – уравнение, описывающее биомеханическое состояние i -го звена;

f_{i-1} – уравнение, описывающее биомеханическое состояние $(i-1)$ -го звена;

u_i – свободный параметр, определяемый массинерционными характеристиками i -го звена и наложенными кинематическими связями.

Достаточно определить структуры f_{i-1} и u_i , а после этого, используя соотношение (1.1), выполнить в программе циклические вычисления по i , от $i=1$ до $i=N$. Таким образом, можно автоматизировать процедуру вывода необходимых уравнений для биомеханических систем с произвольным количеством звеньев.

Биомеханическое состояние всей системы определяется через сумму состояний звеньев биомеханической системы. Формула для биомеханической системы в целом имеет вид

$$f_{БМС} = \sum_{i=1}^N f_i, \quad (1.2)$$

где $f_{БМС}$ – уравнение, описывающее биомеханическое состояние опорно-двигательного аппарата человека в целом.

Для полной системы, т. е. системы, включающей опору и спортсмена, общее состояние можно записать через соотношение (1.2), в которое входит структура f_0 , отражающая состояние именно опоры:

$$f_{ПС} = f_0 + \sum_{i=1}^N f_i = f_{ОП} + f_{БМС}, \quad (1.3)$$

где $f_{ПС}$ – уравнение, описывающее состояние опорно-двигательного аппарата человека вместе с упругой опорой (полная система);

f_0 – уравнение, описывающее состояние упругой опоры. В общем виде его можно записать, как $f_0 = f_{ОП}$;

ПС – полная система;

ОП – упругая опора;

БМС – биомеханическая система.

Необходимо отметить, что в ряде случаев структура f_0 определяется методами, отличными от структур f_i , но в любом случае на величину f_0 оказывает влияние движение всей биомеханической системы.

Для соотношения (1.3) расчет структур f_i ведут в интервале от $i=1$ до $i=N$. Индекс $i=0$ означает опору и относится к структуре f_0 . Данный подход позволяет упростить вывод формул, разделить по индексам факторы влияния опоры и факторы влияния биомеханической системы, а также сохранить форму записи моделей в части, относящейся непосредственно к спортсмену, такой же, как и в случае контакта с жесткой опорой [4].

Придерживаясь единой формы записи в уравнении (1.3), но, учитывая возможность применения при необходимости различных методов для расчета структур f_0 и всех остальных f_i , запишем

$$f_{ПС} = \sum_{i=0}^N f_i. \quad (1.4)$$

В уравнении (1.4) индекс меняется от $i=0$ до $i=N$, отражая влияние как опоры, так и звеньев биомеханической системы.

Те же замечания относятся и к выражению (1.1) для описания состояния i -го звена. При отсчете от $i=0$ происходит также и учет влияния упругой опоры на исследуемое звено.

2 Геометрия масс человеческого тела

К геометрии масс человеческого тела относятся веса звеньев БМС G_i , положения их центров масс S_i , длины звеньев L_i и их центральные моменты инерции массы I_{Ci} (рисунок 1.2) [1]. Проблемой является определение трех из четырех параметров: весов G_i , положений центров масс S_i и моментов инерции I_{Ci} . Подобные задачи решаются, например, в робототехнике, но отличие от человека в роботах то, что последних можно разобрать и выполнить измерения. После сборки техника будет работать, полностью выполняя свои функции. Для человека измерения, особенно прижизненные, выполнить значительно сложнее, т. к. кинематическая цепь, с помощью которой моделируют опорно-двигательный аппарат, является статически неопределимой, и степень неопределимости зависит от принятой в конкретном исследовании модели биомеханической системы.

Таким образом, для каждого звена кинематической цепи необходимо определить 3 неизвестных параметра G_i , S_i и I_{Ci} , а для всей биомеханической системы таких параметров $3n$, где n – число звеньев БМС. В случае прижизненного определения геометрии масс для конкретного человека разделить звенья невозможно. Из статики следует, что для произвольной плоской системы сил в общем случае можно составить максимум три уравнения. В эти уравнения будут входить два параметра: G_i и S_i .

На примере трехзвенной системы БМС рассмотрим проблемы определения неизвестных параметров методами статики (рисунок 2.1) [11]. Здесь цифрами обозначены: 1 – руки; 2 – туловище и голова; 3 – ноги; 4 – доска; 5 – весы. В случае использования уравнений равновесия необходимо свести число неизвестных к минимуму. Это можно сделать, если человека положить на доску и определить давление N_A и N_B на две призматические опоры с помощью весов. Расстояние между призмами известно, известны длины всех звеньев L_i (рисунок 2.2). Необходимо определить вес G_i каждого звена и положение

центра масс S_i на нем. Констатируем, что равновесие биомеханической системы по рисунку 2.1 относится к равновесию сочлененной конструкции под действием плоской системы параллельных сил.

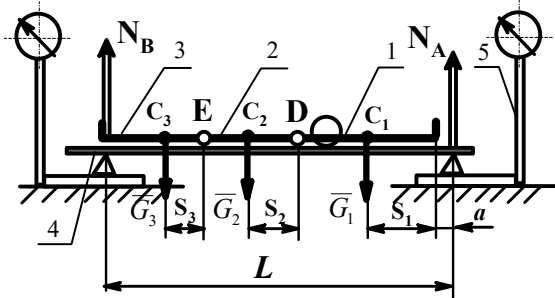


Рисунок 2.1 – Схема взвешивания биомеханической системы

Таким образом, для трехзвенной системы имеем 6 неизвестных, по паре на каждом звене – это вес звена и положение центра тяжести. В общем случае получаем $2n$ неизвестных, относящихся к геометрии масс. Методом рассмотрения равновесия такой системы является расчленение конструкции на отдельные звенья и запись уравнений равновесия для каждого из них. При этом дополнительно появляются реакции в суставах D и E (рисунок 2.2). Поэтому имеем всего $(3n - 1)$ неизвестных для всей БМС. Для одного из крайних звеньев число неизвестных на единицу меньше.

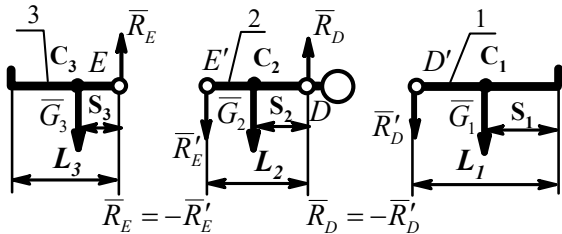


Рисунок 2.2 – Расчетные схемы звеньев биомеханической системы

Так как система сил, приложенных к каждому звену, является параллельной, то для каждого звена можно записать лишь два независимых уравнения равновесия. Всего уравнений для БМС имеем $2n$, так как силы тяжести создают систему параллельных сил

Обозначим степень статической неопределенности как q . Тогда для трехзвенной БМС получим $q = (3n - 1) - 2n = n - 1$. При $n = 3$ имеем $q = 3 - 1 = 2$.

Рассмотрим более сложную модель БМС по рисунку 2.3. Примем допущение, что давление каждого звена на опору измеряемо. Число звеньев (костей) равно $n = 9$, число кинематических пар (суставов) в этом случае $z = 7$.

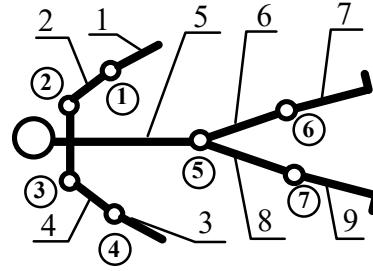


Рисунок 2.3 – Модель БМС при $n = 9$

Число неизвестных равно $[3n - (n - z)]$, где $(n - z)$ – число конечных звеньев, т. е. для которых два, а не три неизвестных параметра, т. к. реакции в суставах уже входят в число неизвестных сил сопряженных звеньев. Это число меньше числа звеньев на число кинематических пар. Как и раньше, для всей системы можно написать $2n$ уравнений. Вычтем из числа неизвестных количество возможных независимых уравнений

$$q = [3n - (n - z)] - 2n = z.$$

Для схемы по рисунку 2.3. имеем $q = z = 7$.

Таким образом, получили, что степень статической неопределенности равно числу кинематических пар. Используя полученное выражение для проверки, пересчитаем для трехзвенной БМС величину q . Имеем $q = z = 2$.

Получим тот же результат, что и ранее, и ответ на вопрос, почему так сложно получить данные по геометрии масс человеческого тела даже для самой простой модели.

3 Взаимодействие БМС с упругой опорой

Рассмотрим особенность уравнений движения БМС на динамическом уровне с учетом взаимодействия со спортивным снарядом. Моменты мышечных сил при целенаправленном движении с учетом упругой опоры относительно кинематических пар (суставов) по рисунку 1.2 имеют вид [4], [5]

$$M_{i,i-1} = g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j - \ddot{L}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin(Q_j - Q_0) + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos(Q_j - Q_0) + \sum_{k=0}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_j - Q_k) + \sum_{k=0}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_j - Q_k). \quad (3.1)$$

Коэффициенты C_{ij} и A_{jk} относятся к геометрии масс тела и для каждого человека определяются экспериментально-расчетными методами исходя из параметров G_i, L_i, S_i и I_{Ci} .

В таком виде уравнение, во-первых, свернуто по одноименным параметрам с использованием рекуррентных отношений и потому имеет

компактный вид. А во-вторых, хорошо структурировано. Представим его в виде суммы моментов от различных силовых факторов

$$M_{i,i-1} = M_{I_j}^{\Sigma} + M_{G_j}^{\Sigma} + M_{a_0}^{\Sigma} + M_{a_j^s}^{\Sigma} + M_{a_j^c}^{\Sigma} + M_{a_j^n}^{\Sigma},$$

где $M_{I_j}^{\Sigma}$ – сумма пар сил инерции во вращательном движении звеньев исследуемой части биомеханической системы;

$M_{G_j}^{\Sigma}$ – сумма моментов от сил тяжести звеньев исследуемой части биомеханической системы;

$M_{a_0}^{\Sigma}$ – сумма моментов от сил инерции звеньев исследуемой части биомеханической системы в поступательном движении при прогибе опоры (растяжении–сжатии пружины);

$M_{a_j^s}^{\Sigma}$ – сумма моментов от кориолисовых сил инерции, прикладываемых к звеньям исследуемой части биомеханической системы;

$M_{a_j^c}^{\Sigma}$ – сумма моментов от касательных сил инерции, прикладываемых к звеньям исследуемой части биомеханической системы во вращательном движении звеньев;

$M_{a_j^n}^{\Sigma}$ – сумма моментов от нормальных (центробежных) сил инерции звеньев биомеханической системы.

На рисунке 3.1 представлен график изменения момента управляющих мышечных сил в зависимости от положения общего центра масс (ОЦМ) спортсмена при выполнении большого оборота назад на перекладине.

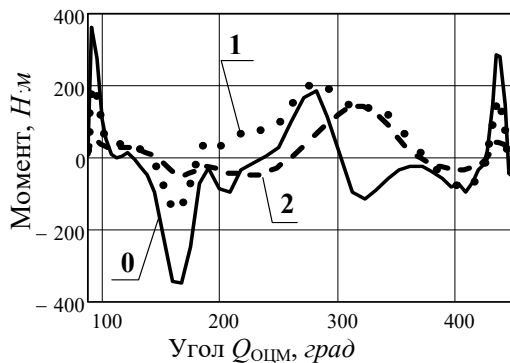


Рисунок 3.1 – Изменение момента управляющих сил по угловому положению ОЦМ:

- 0 – опорный шарнир; 1 – плечевой сустав;
- 2 – тазобедренный сустав

Отметим, что управляющие моменты за время одного оборота спортсмена несколько раз меняют свой знак. Это свидетельствует об изменении направления управляющего момента по отношению к другим моментам сил (меняются движущие силы и силы сопротивления).

В уравнении (3.1) индекс 0 относится к спортивному снаряду, а индексы от 1 до N принадлежат звеньям биомеханической системы.

Разделим по индексам опору и БМС в уравнении (3.1). Для опоры получим

$$M_{i,i-1}^{OP} = \ddot{L}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \sin(Q_0 - Q_j) + 2\dot{L}_0 \dot{Q}_0 \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos(Q_0 - Q_j) +$$

$$+ \sum_{j=i}^N A_{j0} \ddot{Q}_0 \cos(Q_0 - Q_j) - \sum_{j=i}^N A_{j0} \dot{Q}_0^2 \sin(Q_0 - Q_j).$$

Для БМС имеем

$$M_{i,i-1}^{BMC} = g \sum_{j=i}^N C_{ij} \cos Q_j + \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \ddot{Q}_k \cos(Q_k - Q_j) - \sum_{k=1}^N \sum_{j=i}^N A_{jk} \dot{Q}_k^2 \sin(Q_k - Q_j).$$

Такое разделение на механическую $M_{i,i-1}^{OP}$ и биомеханическую $M_{i,i-1}^{BMC}$ системы позволяет представить динамическое уравнение движения (3.1) в виде суммы моментов двух систем

$$M_{i,i-1} = M_{i,i-1}^{OP} + M_{i,i-1}^{BMC}. \quad (3.2)$$

Сравнение этих двух моментов дает возможность исследовать влияние спортивного снаряда на движение человека в динамике.

4 Анализ и синтез движения биомеханической системы

Решение системы уравнений (3.1) относительно левой части, т. е. момента управляющих мышечных сил $M_{i,i-1}$ является задачей анализа. Решение относительно правой части той же системы уравнений уже является задачей синтеза и относится к проектированию наперед заданной техники движения в спорте.

Отметим важный момент: задачи синтеза существуют на двух уровнях – кинематическом и динамическом. На динамическом уровне решаются задачи определения параметров движения по заданным динамическим характеристикам целенаправленного движения, например, управляющим моментам. Более актуальными являются задачи синтеза на кинематическом уровне, когда, например, ставится задача получения определенной траектории движения спортсмена или его скоростных характеристик в определенных точках траектории [3]–[5].

Отдельной и сложной задачей является оптимизация движения по заданным параметрам.

Отметим, что решение задачи синтеза движения осложняется наличием двух взаимодействующих между собой систем: человека и спортивного снаряда [4]. Для исследования такого взаимодействия необходимо использовать математические модели по типу уравнения (3.2). Возможен следующий порядок синтеза движения биомеханической системы в условиях упругой опоры:

1. Синтез и оптимизация движения БМС.

Таблица 4.1 – Управление на кинематическом уровне

Кинематический уровень задания управляющих функций $u(i)$			
Форма $u(i)$	Типы решаемых задач		
	1	2	3
1	По разнице обобщенных координат $u_i = f(Q_{i+1} - Q_i)$	По обобщенным координатам $u_i = f(Q_i)$	По обобщенным координатам и их разнице в сочетании $u_i = f(Q_i, Q_{i+1} - Q_i)$
2	По разнице обобщенных скоростей $\dot{u}_i = f(\dot{Q}_{i+1} - \dot{Q}_i)$	По обобщенным скоростям $\dot{u}_i = f(\dot{Q}_i)$	По обобщенным скоростям и их разнице в сочетании $\dot{u}_i = f(\dot{Q}_i, \dot{Q}_{i+1} - \dot{Q}_i)$
3	По разнице обобщенных ускорений $\ddot{u}_i = f(\ddot{Q}_{i+1} - \ddot{Q}_i)$	По обобщенным ускорениям $\ddot{u}_i = f(\ddot{Q}_i)$	По обобщенным ускорениям и их разнице в сочетании $\ddot{u}_i = f(\ddot{Q}_i, \ddot{Q}_{i+1} - \ddot{Q}_i)$
4	Сочетания из форм 1, 2, 3		

2. Силовой расчет выделенной БМС.
3. Расчет деформации опоры.
4. Расчет кинематики выделенной опоры.
5. Синтез и оптимизация полной БМС.

Под выделенными системами понимаем отдельно спортивный снаряд и отдельно БМС, а полная система – это единая система «снаряд-спортсмен».

В указанной последовательности расчетов принято, что вначале проводится синтез движения БМС, по его результатам выполняется силовой расчет в контакте человека с опорой, а зная силовое взаимодействие можно определить все параметры динамической деформации снаряда. И уже по этим данным корректируется синтез движения БМС в целом.

При расчете деформации опоры встает вопрос о ее моделях. Возможно несколько вариантов: на основе теоретических разработок и на основе экспериментальных данных. Теоретические модели сложны и трудоемки для вычислений, и при этом являются приближительными. Причина в сложности конструкции снаряда, например, перекладины в гимнастике, возможными различиями в конструкции в каждом конкретном случае и необходимости экспериментального уточнения модели на практике для каждого снаряда. Также необходимы допущения, сильно огрубляющие принятые модели. Модели на основе экспериментальных данных более точны, и строить их проще и понятнее.

В таблице 4.1 показаны все возможные способы программного управления движением биомеханической системы на кинематическом уровне [3]–[5].

Всего нами выделено 4 формы функциональных связей на кинематическом уровне.

5 Пространственное движение

При современном уровне развития науки и техники периодически появляются методы и

оборудование в каких-то иных областях науки, промышленности и даже культуры, пригодные для конкретного научного исследования. Подобная ситуация возникла и в области изучения биомеханики пространственного движения человека.

В кинематографе, компьютерной анимации и при создании компьютерных игр широко используется технология, получившая название «motion capture», т. е. «захват движения». Самые современные достижения в области спецэффектов, которые производят колоссальное впечатление на зрителей и игроков, связаны с этим направлением. Здесь тоже решаются проблемы по получению параметров движения человека для последующей обработки и визуализации. В большой степени задачи биомеханики и кинематографа в этой части сходны.

Получили развитие два направления технологии захвата движения: маркерные технологии и безмаркерные, основанные на компьютерном зрении и распознавании образов [8]–[10]. В принципе один из видов маркерной технологии в упрощенном виде давно используется при анализе существующей техники выполнения спортивных упражнений (рисунок 1.1). В этом случае на каждом кадре видеосъемки по цветным маркерам определяют угловые координаты звеньев тела согласно принятой модели БМС (рисунок 1.2). Но в общем эти технологии сложны, дороги, а оборудование для них порой весьма громоздко.

Второе направление в доступном для широкого использования варианте в виде компьютерных программ появилось совсем недавно, лишь в этом десятилетии.

На рисунке 5.1 показана принятая кинематическая модель опорно-двигательного аппарата человека, используемая при получении координат человеческого тела в технологии компьютерного зрения. Кисти рук не указаны, так как эта часть тела в программе показывается условно. Подобная модель применяется во многих

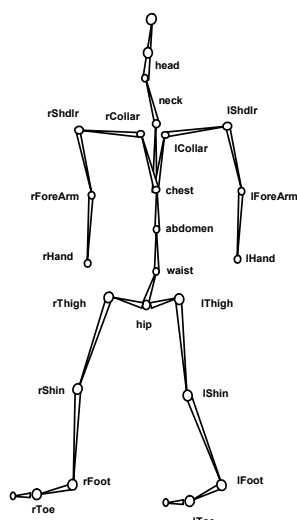


Рисунок 5.1 – Модель биосистемы



Рисунок 5.2 – Видеосъемка 6-ю камерами (с разрешения фирмы iPi Soft)

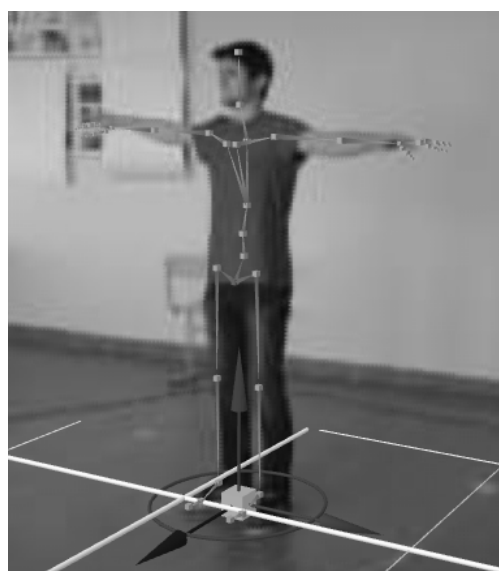


Рисунок 5.3 – Настройка компьютерного зрения



Рисунок 5.4 – Движение человека с автоматическим наложением скелета

графических программах для анимации движения человека, т. е. широко распространена.

На рисунке 5.2 дан фрагмент работы программы при съемке 6-ю видеокамерами. Съемка принадлежит фирме iPi Soft и публикуется с ее разрешения. Такая схема видеосъемки позволяет моделировать движение в пространстве и посмотреть на движение с любой точки пространства. Так как программа компьютерного зрения предназначена для целей кинематографа и анимации движения, то в ней предусмотрена замена реального человека моделью в виде анимационного персонажа, представленного в виде теневой фигуры рядом с человеком. Опыт авторских съемок (рисунок 5.3, рисунок 5.4) и анализ результатов работы программы по видеофрагментам других операторов показывает устойчивость

компьютерного зрения к световым помехам в виде бликов и неоднородного съемочного фона, а также то, что использованная технология разрешает определенную вольность в одежде (рисунок 5.4).

Результатом использования технологии захвата движения является текстовый файл формата *bvh*, имеющий два раздела. Раздел *HiERACHY* (ИЕРАРХИЯ) представляет собой графическое дерево, в нем, на основании графов, записан порядок построения скелета (рисунок 5.1) с указанием начальных координат. Вторым разделом *MOTION* (ДВИЖЕНИЕ) дает по каждому кадру соответствующие координаты скелета.

В файле каждый элемент скелета содержит информацию о смещении и вращении относительно родительского элемента. Вращение представляется в углах Эйлера.

Для отображения движения в *bvh*-файле для каждой кости в каждом кадре рассчитывается ее локальная матрица трансформации [8], [9]:

$$M = T \cdot R \cdot S,$$

где T , R , S – матрицы перемещения (translation), вращения (rotation), масштабирования (scale) соответственно в координатах родительского элемента.

Чтобы получить глобальную матрицу трансформации для конкретного узла скелета, локальную матрицу необходимо умножить на матрицу трансформации родительского элемента, для которого работает этот же принцип [9]. Глобальную матрицу трансформации для каждого элемента скелета можно рассчитать по формуле:

$$M_{\text{глоб}}^n = \prod_{i=0}^n M_{\text{локал}}^i.$$

Отметим следующий важный момент: в файле угловое положение каждого звена (кости) представлено с помощью углов Эйлера. Но в компьютерных технологиях, особенно при расчете видео, критичным является скорость вычислительных процессов. Поэтому расчеты выполняются на основе алгебры кватернионов, т.к. в этом случае для каждого звена получается только одно уравнение связи, в отличие от шести для направляющих косинусов. Кроме того, интегрирование и преобразование координат в углах Эйлера – Крылова связаны с тригонометрическими операциями, которые на самом деле являются специальными компьютерными подпрограммами и потому снижают эффективность применения вычислительной техники.

В работе [12] выполнен сравнительный анализ вычислительной эффективности метода матриц и метода кватернионов в ориентационной задаче применительно к робототехнике. Показано, что аппарат кватернионов не уступает аппарату матриц и при этом имеет преимущество в ориентационных задачах. В общем случае применения кватернионов получаем самый минимальный объем вычислительной работы для компьютера из возможных вариантов, а значит и самую большую скорость вычислений каждого кадра видео.

Представим задачи и порядок их решения для технологии захвата движения на основе компьютерного зрения в следующем виде [9]:

1. Видеосъемка движения БМС.
2. Определение смещения узлов (T_{xyz}) относительно родительских узлов.
3. Запись в файл иерархии основных узлов скелета БМС согласно спецификации *bvh*-файла.
4. Преобразование кватернионов в углы Эйлера.

Задачи биомеханики спорта в области применения технологий захвата движения ограничиваются получением координат БМС, так как не преследуют целей кинематографа и компьютерных

игр. Для анализа исследуемой техники спортивных упражнений достаточно знания координат опорно-двигательного аппарата человека и их изменения во времени. Это исходные данные для расчетов по моделям кинематики и динамики, и с этой точки зрения, полученные с помощью компьютерного зрения результаты, самодостаточны. Тем не менее, в спорте широко распространено использование визуализации, т.е. наглядности. Этот прием используют тренеры при постановке техники спортивных упражнений, он также незаменим в танцах и балете, где широко применяют зеркала. Потому использование анимационных возможностей программы захвата движения на основе компьютерного зрения также весьма полезно в учебно-тренировочном процессе и в исследовательских целях в большинстве спортивных дисциплин.

Заключение

Изложены проблемы и пути их решения в наиболее важных направлениях исследования биомеханики движения человека. Акцент сделан на биомеханику спорта. Показано, что разрабатывая модели движения биомеханической системы на кинематическом и динамическом уровне, необходимо применять специальные алгоритмы, направленные на создание компактных и универсальных систем уравнений для компьютерных вычислений. На основе рекуррентных отношений можно построить модели движения любой степени сложности, при этом включая в них системы, имеющие различную природу и изучаемые в различных разделах механики. Такими системами в данной работе являются опорно-двигательный аппарат человека и спортивный снаряд.

Исследованы проблемы в области измерения и расчета геометрии масс биомеханической системы. Проанализирована трехзвенная биосистема на предмет статической определенности, и показаны причины невозможности прижизненного определения веса и положения центра масс каждого звена на основании уравнений равновесия статики.

В случае взаимодействия биосистемы с упругой опорой, каковой в спорте часто предстает спортивный снаряд, структура уравнений движения на кинематическом и динамическом уровнях имеет четкое разделение на части, относящиеся только к опоре и только к биомеханической системе. Такое разделение позволяет выполнить количественную оценку влияния снаряда на технику выполнения спортивного упражнения. Тем не менее она может быть выполнена лишь приблизительно, т.к. помимо явной части, к которой относятся все параметры с соответствующими индексами в моделях, имеется и неявная часть, выделить которую невозможно. Так, при любом движении упругая опора меняет технику спортивного

упражнения, т. е. изменяются кинематические и динамические характеристики. Для выделения влияния спортивного снаряжения необходимо сравнить выполнение упражнения с жестким и упругим снарядами. Но в ряде видов спорта это теряет смысл, т. к. батут, подкидная доска, шест для прыжков в высоту и пр., должны быть упругими и никак иначе.

Представленный подход к разработке моделей движения по разделению механической и биомеханической систем раскрывает новые возможности при исследовании синтеза и построения оптимальной техники спортивного упражнения. Наиболее перспективным является направление по синтезу движения на кинематическом уровне. Здесь имеется 4 уровня задания управляющих функций. При определении задачи исследования необходимо задавать управление биомеханической системой, рассчитывать параметры деформации упругой опоры и по этим данным корректировать движение биомеханической системы.

В области изучения пространственного движения предложено использовать технологию захвата движения на основе компьютерного зрения. Существующие в этой области программы позволяют достаточно быстро выполнить видеосъемку, расшифровку этой съемки и вычислительный эксперимент в области кинематики и динамики пространственного движения. Показано, что из-за трудоемкости обработки данных по видеосъемке, специфике их хранения в файлах и требованиям к синтезу и оптимизации движения, модели кинематики и динамики пространственного перемещения человека необходимо разрабатывать на основе алгебры кватернионов как наиболее эффективной в вычислительном отношении.

Такой подход позволяет решить следующие задачи при исследовании в биомеханике спорта:

- в десятки раз увеличить число степеней свободы модели скелета;
- изучить пространственное движение человека;
- автоматизировать процесс расшифровки координат человека при его движении, уменьшив время обработки результатов эксперимента на многие порядки – с лет или месяцев до нескольких часов в идеале.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровский, В.И. Биомеханика / В.И. Дубровский, В.Н. Федорова. – М.: ВЛАДОС-ПРЕСС, 2003. – 672 с.
2. Бегун, П.И. Моделирование в биомеханике: учеб. пособие / П.И. Бегун, П.Н. Афонин. – М.: Высш. шк., 2004. – 390 с.

3. Загrevский, В.И. Компьютерный синтез двигательных действий управлением движением по кинематическому состоянию биомеханической системы / В.И. Загrevский // Теория и практика физической культуры. – 2013. – № 6. – С. 10–16.

4. Синтез движения в условиях упругой опоры / А.Е. Показилов, В.И. Загrevский, Д.А. Лавшук, Ю.Ю. Федосеев, Д.В. Ефимов // Техника и технология пищевых производств: тез. докл. IX Междунар. науч. конф. студ. и аспирантов, Могилев, 25–26 апр., 2013 г. / Мог. гос. ун-т прод.; редкол.: А.В. Акулич [и др.]. – Могилев, 2013. – в 2-х ч. – Ч. 2. – С. 51.

5. Управление движением на кинематическом уровне / А.Е. Показилов, В.И. Загrevский, В.Н. Попов, Ю.Ю. Федосеев, Д.А. Лавшук // Техника и технология пищевых производств: тез. докл. IX Междунар. науч. конф. студ. и аспирантов, Могилев, 25–26 апр., 2013 г. / Мог. гос. ун-т прод.; редкол.: А.В. Акулич [и др.]. – Могилев, 2013. – в 2-х ч. – Ч. 2. – С. 50.

6. Показилов, А.Е. Деформация упругой балки при взаимодействии с биомеханической системой / А.Е. Показилов, М.А. Киркор, В.И. Ильенков // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2016. – № 2 (51). – С. 63–70.

7. Гавердовский, Ю.К. Техника гимнастических упражнений. Популярное учебное пособие / Ю.К. Гавердовский. – М.: Терра-Спорт, 2002. – 512 с.

8. Орлова, Ю.А. Обзор современных автоматизированных систем распознавания эмоциональных реакций человека / Ю.А. Орлова, В.Л. Розалиев // Изв. ВолгГТУ. Серия «Актуальные проблемы управления, вычислительной техники и информатики в технических системах». Вып. 10: межвуз. сб. науч. ст. – 2011. – № 3. – С. 68–72.

9. Развитие системы автоматизированного определения эмоций и возможные сферы применения / А.В. Заболеева-Зотова, Ю.А. Орлова, В.Л. Розалиев, А.С. Бобков // Открытое образование. – 2011. – № 2. – С. 59–62.

10. Методы обработки и распознавания изображений лиц в задачах биометрии / Г.А. Кухарев [и др.]. – М.: Политехника, 2013. – 416 с.

11. Смирнов, В.А. Строительная механика: учебник для бакалавров / В.А. Смирнов, А.С. Городецкий; под ред. В.А. Смирнова. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2013. – 423 с.

12. Борисенко, Л.А. Манипуляторы: механика поворотов / Л.А. Борисенко. – Мн.: Техналогия, 2001. – 121 с.

Поступила в редакцию 28.11.16.

УДК 512.548

О НЕПОЛУАССОЦИАТИВНОСТИ ПОЛИАДИЧЕСКОЙ ОПЕРАЦИИ $\eta_{s, \sigma, k}$

А.Д. Русаков

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON NONSEMIASSOCIATIVITY OF POLYADIC OPERATION $\eta_{s, \sigma, k}$

A.D. Rusakou

F. Scorina Gomel State University

Найдены достаточные условия неполуассоциативности полиадической операции $\eta_{s, \sigma, k}$, которая определяется на декартовой степени A^k n -арной полугруппы $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ и n -арной операции η .

Ключевые слова: полиадическая операция, группоид, полугруппа, полуассоциативность, нейтральная последовательность.

Sufficient conditions of nonsemiassociativity of a polyadic operation $\eta_{s, \sigma, k}$ which is determined on a Cartesian power A^k of n -ary $\langle A, \eta \rangle$ semigroup with substitution σ of a range $\{1, \dots, k\}$ and n -ary operation η are found.

Keywords: polyadic operation, groupoid, semigroup, semiassociativity, neutral sequence.

Введение

Полиадическая операция $\eta_{s, \sigma, k}$ была определена в [1] на декартовой степени A^k n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ и n -арной операции η . Частным случаем полиадической операции $\eta_{s, \sigma, k}$ является l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$, которая первоначально была определена в [2] для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки $\sigma \in S_k$ на k -ой декартовой степени A^k полугруппы A . В свою очередь, частными случаями l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$ являются две полиадические операции, которые Э. Пост определил в [3]. Одна из них была определена им на декартовой степени симметрической группы. Вторую операцию Э. Пост определил на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел.

В [1] доказано, что если n -арная операция η – ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то полиадическая операция $\eta_{s, \sigma, k}$ также является ассоциативной. В связи со сказанным возникает естественная задача нахождения достаточных условий неассоциативности полиадической операции $\eta_{s, \sigma, k}$. В данной статье установлено, что одним из таких достаточных условий является наличие в n -арной полугруппе $\langle A, \eta \rangle$, содержащей более одного элемента, левой нейтральной последовательности и выполнимость условия $\sigma^l \neq \sigma$. В качестве следствий основного результата получены результаты из [4] об операции $[]_{l, \sigma, k}$.

Заметим, что l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является частным случаем не только операции $\eta_{s, \sigma, k}$, но и l -арной операции $[]_{l, T, k}$ из [5], где T – фиксированное подмножество подстановок из S_k .

1 Предварительные сведения

Напомним, что n -арную операцию η n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют *ассоциативной*, если в нём для любого $i = 2, \dots, n$ выполняется тождество

$$\begin{aligned} \eta(\eta(x_1 \dots x_n)x_{n+1} \dots x_{2n-1}) &= \\ = \eta(x_1 \dots x_{i-1}\eta(x_i \dots x_{i+n-1})x_{i+n} \dots x_{2n-1}). \end{aligned}$$

Если указанное тождество выполняется для $i = n$, то n -арную операцию η называют *полуассоциативной*. Таким образом, n -арную операцию η n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют полуассоциативной, если в нём выполняется тождество

$$\begin{aligned} \eta(\eta(x_1 \dots x_n)x_{n+1} \dots x_{2n-1}) &= \\ = \eta(x_1 \dots x_{n-1}\eta(x_n \dots x_{2n-1})). \end{aligned}$$

Ясно, что ассоциативная n -арная операция является и полуассоциативной.

Последовательность $e_1 \dots e_{n-1}$ элементов n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют его *левой (правой) нейтральной последовательностью*, если

$$\eta(e_1 \dots e_{n-1}x) = x \quad (\eta(xe_1 \dots e_{n-1}) = x)$$

для любого $x \in A$.

Последовательность $e_1 \dots e_{n-1}$ элементов n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют его *нейтральной последовательностью*, если она является и левой нейтральной и правой нейтральной.

Элемент e n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют его *единицей*, если для любого $x \in A$ и любого $i = 1, 2, \dots, n$ верно

$$\begin{aligned} \eta(\underbrace{xe \dots e}_{n-1}) &= \eta(\underbrace{ex e \dots e}_{n-2}) = \dots \\ \dots &= \eta(\underbrace{e \dots e}_{n-2}xe) = \eta(\underbrace{e \dots e}_{n-1}x) = x. \end{aligned}$$

Элемент e n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют его *левой (правой) единицей*, если

$$\eta(\underbrace{e \dots e}_n x) = x (\eta(\underbrace{x e \dots e}_{n-1})) = x$$

для любого $x \in A$.

Определение 1.1 [1]. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n-1) + 1$, $k \geq 2$, $\sigma \in \mathbf{S}_k$. Определим на A^k вначале n -арную операцию

$$\begin{aligned} & \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) = \\ & = \eta_{1, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{n1}, \dots, x_{nk})) = \\ & = (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \dots \\ & \dots, \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(k)})), \end{aligned} \quad (1.1)$$

а затем l -арную операцию

$$\begin{aligned} & \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) = \\ & = \eta_{s, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{l1}, \dots, x_{lk})) = \\ & = \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{n-1} \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_n \dots \mathbf{x}_{2(n-1)} \\ & \eta_{1, \sigma, k}(\dots \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1} \dots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)} \\ & \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \dots \mathbf{x}_{(n-1)+1})) \dots)). \end{aligned} \quad (1.2)$$

При $s = 1$ l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ совпадает с n -арной операцией $\eta_{1, \sigma, k}$.

Явный вид l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ описывается следующей

Теорема 1.1 [1]. Если

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik}), i = 1, 2, \dots, l, \\ & \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) = (y_1, \dots, y_k), \end{aligned}$$

то для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ j -ая компонента y_j находится по формуле

$$\begin{aligned} & y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \dots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)} \\ & \eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \dots x_{(2(n-1))\sigma^{2(n-1)-1}(j)} \eta(\dots \\ & \dots \eta(x_{(s-1)(n-1)+1} \dots x_{(s-1)(n-1)} \dots \\ & \dots x_{(s(n-1)+1}\sigma^{s(n-1)}(j) \dots))). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Замечание 1.1. Если n -арная операция η ассоциативна, то (1.3) может быть переписано следующим образом

$$\begin{aligned} & y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) = \\ & = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \dots x_{l\sigma^{l-1}(j)}). \end{aligned}$$

Теорема 1.2 [1]. Если n -арная операция η – ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ ассоциативна.

Лемма 1.1 [6]. Пусть A – множество, $k \geq 2$, σ – подстановка из \mathbf{S}_k , f_σ – преобразование декартовой степени A^k по правилу

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \rightarrow (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(k)}).$$

Тогда:

- 1) f_σ – биекция;
- 2) для любого $i \geq 2$ преобразование f_σ^i множества A^k осуществляется по правилу $(x_1, x_2, \dots, x_k) \rightarrow (x_{\sigma^i(1)}, x_{\sigma^i(2)}, \dots, x_{\sigma^i(k)});$
- 3) $f_\sigma^i = f_{\sigma^i}$ для любого $i \geq 2;$
- 4) если $a \in A$, $\mathbf{a} = (\underbrace{a, \dots, a}_k)$, то $\mathbf{a}^{f_\sigma} = \mathbf{a};$

5) если $\langle A, * \rangle$ – группоид, то f_σ – автоморфизм группоида $\langle A^k, * \rangle$ с операцией

$$\begin{aligned} & \mathbf{x} * \mathbf{y} = (x_1, \dots, x_k) * (y_1, \dots, y_k) = \\ & = (x_1 * y_1, \dots, x_k * y_k). \end{aligned}$$

2 Вспомогательные результаты

Приведём пример, показывающий, что если подстановка σ не удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$, определенная с помощью (1.1) и (1.2), может быть неассоциативной даже для ассоциативной n -арной операции η .

Пример 2.1. Положим в определении 1.1: A – множество, содержащее более одного элемента; η – 4-арная операция, производная от операции в полугруппе A с операцией $ab = b$ для любых $a, b \in A;$

$$n = 4, s = 1, l = 4, k = 2, \sigma = (12) \in \mathbf{S}_2.$$

Так как $(12)^4$ – тождественная подстановка, то $(12)^4 \neq (12)$, то есть условие $\sigma^l = \sigma$ не выполняется.

Ясно, что $\langle A, \eta \rangle$ – 4-арная полугруппа с 4-арной операцией

$$\eta(xyzu) = u.$$

Поэтому любая последовательность длины 3, составленная из элементов множества A , является левой нейтральной в 4-арной полугруппе $\langle A, \eta \rangle$.

Определим согласно (1.1) на A^2 4-арную операцию

$$\begin{aligned} & \eta_{1, (12), 2}(\mathbf{xyzu}) = \\ & = \eta_{1, (12), 2}((x_1, x_2)(y_1, y_2)(z_1, z_2)(u_1, u_2)) = \\ & = (\eta(x_1y_{\sigma(1)}z_{\sigma^2(1)}u_{\sigma^3(1)}), \eta(x_2y_{\sigma(2)}z_{\sigma^2(2)}u_{\sigma^3(2)})) = \\ & = (\eta(x_1y_2z_1u_2), \eta(x_2y_1z_2u_1)) = (u_2, u_1). \end{aligned}$$

Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ и \mathbf{u} – те же, что и выше, $\mathbf{v} = (v_1, v_2), \mathbf{w} = (w_1, w_2), \mathbf{p} = (p_1, p_2).$

Согласно определению 1.1,

$$\begin{aligned} & \eta_{1, (12), 2}(\eta_{1, (12), 2}(\mathbf{xyzu})\mathbf{vw}) = \\ & = \eta_{1, (12), 2}((u_2, u_1)\mathbf{vw}) = \\ & = (\eta(u_2v_2w_1p_2), \eta(u_1v_1w_2p_1)) = (p_2, p_1), \\ & \eta_{1, (12), 2}(\mathbf{xyz}\eta_{1, (12), 2}(\mathbf{uvw})) = \\ & = \eta_{1, (12), 2}(\mathbf{xyz}(\eta(u_1v_2w_1p_2), \eta(u_2v_1w_2p_1))) = \\ & = \eta_{1, (12), 2}(\mathbf{xyz}(p_2, p_1)) = \\ & = (\eta(x_1y_2z_1p_1), \eta(x_2y_1z_2p_2)) = (p_1, p_2). \end{aligned}$$

Так как A содержит более одного элемента, то p_1 и p_2 можно выбрать так, что $p_1 \neq p_2$. В этом случае

$$\begin{aligned} & \eta_{1, (12), 2}(\eta_{1, (12), 2}(\mathbf{xyzu})\mathbf{vw}) \neq \\ & \neq \eta_{1, (12), 2}(\mathbf{xyz}\eta_{1, (12), 2}(\mathbf{uvw})). \end{aligned}$$

Из этого неравенства вытекает, что 4-арная операция $\eta_{1, (12), 2}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

В примере 2.1 4-арная полугруппа $\langle A, \eta \rangle$ обладает левой нейтральной последовательностью, и для подстановки (12) верно неравенство $(12)^4 \neq (12)$. Покажем, что неравенство $\sigma^l \neq \sigma$ и

наличие в n -арной полугруппе $\langle A, \eta \rangle$ левой нейтральной последовательности является достаточным условием неассоциативности l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$. Для этого нам понадобятся несколько лемм.

Утверждение 5) леммы 1.1 обобщается следующей леммой.

Лемма 2.1. Если в условиях леммы 1.1 $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид, то f_σ – автоморфизм n -арного группоида $\langle A^k, \eta \rangle$ с n -арной операцией η , которая определяется покомпонентно с помощью операции η :

$$\eta(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) = \eta((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{n1}, \dots, x_{nk})) = (\eta(x_{11} \dots x_{n1}), \dots, \eta(x_{1k} \dots x_{nk})).$$

Доказательство. Так как

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n)^{f_\sigma} &= \\ &= (\eta((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{n1}, \dots, x_{nk})))^{f_\sigma} = \\ &= (u_1 = \eta(x_{11} \dots x_{n1}), \dots, u_k = \eta(x_{1k} \dots x_{nk}))^{f_\sigma} = \\ &= (u_{\sigma(1)} = \eta(x_{1\sigma(1)} \dots x_{n\sigma(1)}), \dots, \\ &\dots, u_{\sigma(k)} = \eta(x_{1\sigma(k)} \dots x_{n\sigma(k)})) = \\ &= \eta((x_{1\sigma(1)}, \dots, x_{1\sigma(k)}) \dots (x_{n\sigma(1)}, \dots, x_{n\sigma(k)})) = \\ &= \eta(\mathbf{x}_1^{f_\sigma} \dots \mathbf{x}_n^{f_\sigma}), \end{aligned}$$

то

$$\eta(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n)^{f_\sigma} = \eta(\mathbf{x}_1^{f_\sigma} \dots \mathbf{x}_n^{f_\sigma}),$$

то есть f_σ – автоморфизм n -арного группоида $\langle A^k, \eta \rangle$. Лемма доказана.

Замечание 2.1. Ясно, что для n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ n -арная операция, определённая на декартовой степени A^k покомпонентно с помощью n -арной операции η и обозначаемая тем же символом η , совпадает с n -арной операцией $\eta_{1, \varepsilon, k}$, где ε – тождественная подстановка. Поэтому, если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, то по теореме 1.2 $\langle A^k, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа.

Лемма 2.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, σ – подстановка из S_k ,

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}) \in A^k, i = 1, 2, \dots, l.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l) &= \\ &= \eta(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \dots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} \mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-1}}) = \\ &= \eta(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \dots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} \mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-1}}). \end{aligned}$$

Доказательство. Так как, ввиду леммы 1.1,

$$\mathbf{x}_i^{f_\sigma^{l-1}} = \mathbf{x}_i^{f_\sigma^{l-1}} = (x_{i\sigma^{l-1}(1)}, \dots, x_{i\sigma^{l-1}(k)}),$$

то, используя замечание 1.1 и определение операции η из формулировки леммы 2.1, получим

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \dots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} \mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-1}}) &= \\ &= \eta(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \dots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} \mathbf{x}_l^{f_\sigma^{l-1}}) = \\ &= \eta((x_{11}, \dots, x_{1k})(x_{2\sigma(1)}, \dots, x_{2\sigma(k)}) \dots \\ &\dots (x_{l\sigma^{l-1}(1)}, \dots, x_{l\sigma^{l-1}(k)})) = \\ &= (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \dots x_{l\sigma^{l-1}(1)}) \dots \end{aligned}$$

$$\dots \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \dots x_{l\sigma^{l-1}(k)})) = \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_l).$$

Лемма доказана.

Лемма 2.3 [6]. Пусть A – множество, состоящее более чем из одного элемента, $k \geq 2$, σ и τ – подстановки из S_k . Если $\mathbf{x}^{f_\sigma} = \mathbf{x}^{f_\tau}$ для любого $\mathbf{x} \in A^k$, то $\sigma = \tau$.

Лемма 2.4. Пусть $e_1 \dots e_{n-1}$ – нейтральная (правая нейтральная, левая нейтральная) последовательность n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (\underbrace{e_1, \dots, e_1}_k), \mathbf{e}_2 = (\underbrace{e_2, \dots, e_2}_k), \dots \\ \dots, \mathbf{e}_{n-1} &= (\underbrace{e_{n-1}, \dots, e_{n-1}}_k). \end{aligned}$$

Тогда $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_{n-1}$ – нейтральная (правая нейтральная, левая нейтральная) последовательность n -арного группоида $\langle A^k, \eta \rangle$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ – произвольный элемент из A^k .

Если $e_1 \dots e_{n-1}$ – левая нейтральная последовательность n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$, то положим

$$\eta(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_{n-1} \mathbf{x}) = (y_1, y_2, \dots, y_k).$$

Так как в n -арном группоиде $\langle A^k, \eta \rangle$ n -арная операция η определена покомпонентно с помощью n -арной операции η n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$, то

$$y_j = \eta(e_1 \dots e_{n-1} x_j),$$

откуда, учитывая левую нейтральность последовательности $e_1 \dots e_{n-1}$, получаем $y_j = x_j$. Следовательно,

$$\eta(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_{n-1} \mathbf{x}) = \mathbf{x},$$

что означает левую нейтральность последовательности $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_{n-1}$.

Если $e_1 \dots e_{n-1}$ – правая нейтральная последовательность n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$, то положим

$$\eta(\mathbf{x} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_{n-1}) = (z_1, z_2, \dots, z_k).$$

Тогда

$$z_j = \eta(x_j e_1 \dots e_{n-1}),$$

откуда, учитывая правую нейтральность последовательности $e_1 \dots e_{n-1}$, получаем $z_j = x_j$. Следовательно,

$$\eta(\mathbf{x} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_{n-1}) = \mathbf{x},$$

что означает правую нейтральность последовательности $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_{n-1}$. Лемма доказана.

3 Основные результаты

Теорема 3.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, содержащая более одного элемента, и обладающая левой нейтральной последовательностью; σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) \mathbf{x}_{l+1} \dots \mathbf{x}_{2l-1}) &= \\ &= \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{l-1} \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_l \dots \mathbf{x}_{2l-1})). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Доказательство. Если предположить выполнимость в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ тождества из условия теоремы, то ввиду леммы 2.2,

$$\eta(x_1 x_2^{f_\sigma} \dots x_l^{f_\sigma^{l-1}} x_{l+1}^{f_\sigma} \dots x_{2l-2}^{f_\sigma^{l-2}} x_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}) = \eta(x_1 x_2^{f_\sigma} \dots x_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} \eta(x_l x_{l+1}^{f_\sigma} \dots x_{2l-2}^{f_\sigma^{l-2}} x_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{l-1}}),$$

откуда

$$\eta(x_1 x_2^{f_\sigma} \dots x_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} x_l^{f_\sigma^{l-1}} x_{l+1}^{f_\sigma} \dots x_{2l-2}^{f_\sigma^{l-2}} x_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}) = \eta(x_1 x_2^{f_\sigma} \dots x_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} x_l^{f_\sigma^{l-1}} x_{l+1}^{f_\sigma} \dots x_{2l-2}^{f_\sigma^{l-2}} (x_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{l-1}}).$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \eta(x_1 x_2^{f_\sigma} \dots x_{s(n-1)}^{f_\sigma^{s(n-1)-1}} x_l^{f_\sigma^{l-1}} \\ & x_{s(n-1)+2}^{f_\sigma} \dots x_{2s(n-1)}^{f_\sigma^{s(n-1)-1}} x_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}) = \\ & = \eta(x_1 x_2^{f_\sigma} \dots x_{s(n-1)}^{f_\sigma^{s(n-1)-1}} x_l^{f_\sigma^{l-1}} \\ & x_{s(n-1)+2}^{f_\sigma^{s(n-1)+1}} \dots x_{2s(n-1)}^{f_\sigma^{2s(n-1)-1}} (x_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{l-1}}). \end{aligned}$$

По условию теоремы в n -арной полугруппе $\langle A, \eta \rangle$ существует левая нейтральная последовательность $e_1 \dots e_{n-1}$. Если положить

$$\begin{aligned} x_1 = x_n = x_{2(n-1)+1} = \dots \\ \dots = x_{(2s-1)(n-1)+1} = e_1 = (\underbrace{e_1, \dots, e_1}_k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 = x_{n+1} = x_{2(n-1)+2} = \dots \\ \dots = x_{(2s-1)(n-1)+2} = e_2 = (\underbrace{e_2, \dots, e_2}_k), \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} x_{n-1} = x_{2(n-1)} = x_{3(n-1)} = \dots \\ \dots = x_{2s(n-1)} = e_{n-1} = (\underbrace{e_{n-1}, \dots, e_{n-1}}_k), \end{aligned}$$

то, в силу утверждения 4) леммы 1.1, последнее равенство принимает вид

$$\begin{aligned} & \eta(\underbrace{e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_{2s} x_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}) = \\ & = \eta(\underbrace{e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_{2s} (x_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{l-1}}). \end{aligned}$$

Так как, согласно лемме 2.4, $e_1 e_2 \dots e_{n-1}$ – левая нейтральная последовательность n -арной полугруппы $\langle A^k, \eta \rangle$, то

$$x_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}} = (x_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}})^{f_\sigma^{l-1}}.$$

А так как f_σ^{l-1} – автоморфизм n -арной полугруппы $\langle A^k, \eta \rangle$, то из этого равенства следует равенство

$$x_{2l-1} = x_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}},$$

которое равносильно равенству

$$x_{2l-1}^{f_\varepsilon} = x_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}},$$

где ε – тождественная подстановка. В свою очередь, из этого равенства, в силу утверждения 3) леммы 1.1, следует

$$x_{2l-1}^{f_\varepsilon} = x_{2l-1}^{f_\sigma^{l-1}}.$$

Так как элемент x_{2l-1} выбран в A^k произвольно, то, применив к полученному равенству лемму 2.3, получим $\varepsilon = \sigma^{l-1}$, то есть $\sigma^l = \sigma$, что невозможно. Теорема доказана.

Теорему 3.1 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 3.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, содержащая более одного элемента, и обладающая левой нейтральной последовательностью; σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

Теорема 3.3. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, содержащая более одного элемента, и обладающая левой нейтральной последовательностью; σ – подстановка из S_k . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной;
- 2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является полуассоциативной;
- 3) подстановка σ^{l-1} – тождественная.

Доказательство.

1) \Rightarrow 2) Следует из определений ассоциативности и полуассоциативности.

2) \Rightarrow 3) Пусть l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является полуассоциативной и предположим нетождественность подстановки σ^{l-1} , что равносильно $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда по теореме 3.2 l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, что невозможно.

3) \Rightarrow 1) Применяется теорема 1.2. Теорема доказана.

Замечание 3.1. Понятно, что утверждения теорем 3.1–3.3 останутся верными, если в их условиях левую нейтральную последовательность заменить нейтральной последовательностью.

Так как для всякой единицы e n -арной полугруппы последовательность $\underbrace{e \dots e}_{n-1}$ является ней-

тральной, то из теорем 3.1–3.3 извлекаются следующие следствия.

Следствие 3.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента; σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество (3.1), то есть l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

Следствие 3.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента; σ – подстановка из S_k . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной;
- 2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является полуассоциативной;
- 3) подстановка σ^{l-1} – тождественная.

Полагая в теоремах 3.1–3.3 или в следствиях 3.1 и 3.2 $n = 2$, получим следующие следствия.

Следствие 3.3. Пусть A – полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента; σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество

$$[[x_1 \dots x_l]_{l, \sigma, k} x_{l+1} \dots x_{2l-1}]_{l, \sigma, k} = [x_1 \dots x_{l-1} [x_l \dots x_{2l-1}]_{l, \sigma, k}]_{l, \sigma, k}, \quad (3.2)$$

то есть l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

Следствие 3.4 [4]. Пусть A – полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента; σ – подстановка из S_k . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной;
- 2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является полуассоциативной;
- 3) подстановка σ^{l-1} – тождественная.

Замечание 3.2. Понятно, что утверждения следствий 3.1–3.4 останутся верными, если в их условиях левую единицу заменить единицей.

Так как полиадические группы обладают нейтральными последовательностями, то теоремам 3.1–3.3 соответствуют следующие теоремы.

Теорема 3.4. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, содержащая более одного элемента; σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество (3.1), то есть l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

Теорема 3.5. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, содержащая более одного элемента; σ – подстановка из S_k . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной;
- 2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является полуассоциативной;
- 3) подстановка σ^{l-1} – тождественная.

Заменяя в следствиях 3.1–3.2 полугруппу группой или полагая в теоремах 3.4–3.5 $n = 2$, получим следующие следствия.

Следствие 3.5. Пусть A – группа, содержащая более одного элемента; σ – подстановка

из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество (3.2), то есть l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

Следствие 3.6. Пусть A – группа, содержащая более одного элемента; σ – подстановка из S_k . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной;
- 2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является полуассоциативной;
- 3) подстановка σ^{l-1} – тождественная.

Замечание 3.3. Ясно, что в теореме 3.1 и во всех утверждениях этого раздела, в формулировках которых присутствует неравенство $\sigma^l \neq \sigma$, подстановка σ не может быть тождественной, а арность l не может быть равной единице, так как и для тождественной подстановки σ и для арности $l = 1$ указанное неравенство неверно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А.М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А.М. Гальмак, А.Д. Русаков / Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 35–40.
2. Гальмак, А.М. Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
3. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
4. Гальмак, А.М. Об ассоциативности полиадических группоидов / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2017. – № 1. – С. 4–11.
5. Гальмак, А.М. Обобщенные полиадические операции / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 2 (15). – С. 50–57.
6. Гальмак, А.М. Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

Поступила в редакцию 09.02.17.

УДК 517.538.52+517.538.53

ОБ АСИМПТОТИКЕ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ПАДЕ ВТОРОГО РОДА ДЛЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ МНОЖИТЕЛЯМИ В ПОКАЗАТЕЛЯХ ЭКСПОНЕНТ

М.В. Сидорцов, Н.А. Старовойтова, А.П. Старовойтов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ASYMPTOTICS OF THE TYPE II HERMITE – PADÉ APPROXIMATION OF EXPONENTIAL FUNCTIONS WITH COMPLEX MULTIPLIERS IN THE EXPONENT

M.V. Sidortsov, N.A. Starovoitova, A.P. Starovoitov

F. Scorina Gomel State University

Установлена асимптотика диагональных многочленов и аппроксимаций Эрмита – Паде 2-го рода для системы экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, в случае, когда числа $\{\lambda_j z\}_{j=1}^k$ являются корнями уравнения $\lambda^k = 1$. Доказанные теоремы дополняют известные результаты Паде, Д. Браесса, А.И. Аптекарева, Г. Шталя, Ф. Вилонского, В. Ван Аше, А.Э. Койэлаарса, А.П. Старовойтова, полученные в случае, когда $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ – различные действительные числа.

Ключевые слова: интегралы Эрмита, многочлены Эрмита – Паде, аппроксимации Эрмита – Паде, асимптотические равенства.

The asymptotic behavior of diagonal Hermite – Padé polynomials and diagonal Hermite – Padé approximations of type II for the system of exponentials $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$, in which $\lambda_0 = 0$, while the rest λ_p are the roots of the equation $\zeta^k = 1$ is determined. The theorems complement known results of H. Padé, D. Braess, A.I. Aptekarev, H. Stahl, F. Wielonsky, W. Van Assche, A. B. J. Kuijlaars, A.P. Starovoitov, obtained for the case, where the $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ – different real numbers.

Keywords: Hermite integrals, Hermite – Padé polynomials, Hermite – Padé approximations, asymptotic equality.

Введение

В последнее десятилетие наблюдается повышенный интерес к аппроксимациям Эрмита – Паде экспоненциальных функций и их обобщениям. Этот интерес особенно заметен в задачах приближения аналитических функций [1]–[3] и аналитического продолжения [4], [5], в приложениях к случайным матрицам [6]–[9], теории операторов [10], [11], диофантовым приближениям, в том числе, для измерения иррациональности [12], [13], в доказательствах трансцендентности [13], [14], в исследованиях алгебраической природы математических констант [15] (подробнее см. обзоры [4], [5], [13], [16]–[18]).

Саму конструкцию таких аппроксимаций предложил Ш. Эрмит в связи с исследованием арифметических свойств числа e . С тех пор аппроксимации Эрмита – Паде экспоненциальных функций привлекали и привлекают внимание как классиков (Д. Гильберт, Ф. Клейн, Ф. Линдеман, К. Малер, К. Зигель), так и известных современных математиков.

Далее будем придерживаться терминологии, принятой в работе [19].

Пусть заданы произвольные целые неотрицательные числа n, m_1, m_2, \dots, m_k . Полагаем

$$m = \sum_{i=1}^k m_i, \quad n_j = n + m - m_j, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Известно [20], что для любого набора $\{f_j\}_{j=1}^k$ голоморфных в нуле функций при $j = 1, 2, \dots, k$ существуют такие многочлены $Q_m, P_{n_j}^j$, $\deg Q_m \leq m, \deg P_{n_j}^j \leq n_j$, для которых

$$R_{n,m}^j(z) = Q_m(z)f_j(z) - P_{n_j}^j(z) = A_j z^{n+m+1} + \dots \quad (0.1)$$

В случае, когда $k = 1$, из теоремы Паде [21, теорема 1.1.1] следует, что многочлены $Q_m, P_n := P_n^1$ определяются с точностью до однородной константы, а их отношение задает единственную рациональную функцию

$$\pi_{n,m}(z) = \pi_{n,m}(z, f_1) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)},$$

которую называют *аппроксимацией Паде* для $f_1(z)$.

При $k \geq 2$ дробь

$$\pi_{n,m}^j(z) = \pi_{n,m}^j(z; f_j) = \frac{P_{n_j}^j(z)}{Q_m(z)}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

условиями (0.1) определяются, вообще говоря, не однозначно. В случае единственности множества

$\{\pi_{n,m}^j\}_{j=1}^k$ его элементы называют *аппроксимациями Эрмита – Паде 2-го рода (совместными аппроксимациями Паде)* для системы функций $\{f_j\}_{j=1}^k$. При этом многочлены $Q_m, P_{n_1}^1, \dots, P_{n_k}^k$ называют многочленами Эрмита – Паде 2-го рода (German polynomials в терминологии К. Малера [19]) для заданной системы функций. При $n = m_1 = m_2 = \dots = m_k$ Q_m и P_{kn}^j называют *диагональными многочленами Эрмита – Паде 2-го рода*, а $\pi_{kn, kn}^j$ – *диагональными аппроксимациями Эрмита – Паде 2-го рода*.

Единственность имеет место, например, для совершенных систем функций (определение и примеры совершенных систем см. в [20]). В частности, если $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные комплексные числа не равные нулю, то система $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$ является совершенной. Без формального определения этот факт был установлен Эрмитом.

Эрмит [22] ввел интегралы, которые после небольших преобразований [20] приводят к решению системы (0.1) для набора $\{f_j(z) = e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$:

$$Q_m(z) = \frac{z^{n+m+1}}{(n+m)!} \int_0^{+\infty} x^n \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i} e^{-zx} dx,$$

$$P_{n_j}^j(z) = \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+m+1}}{(n+m)!} \int_{\lambda_j}^{+\infty} x^n \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i} e^{-zx} dx, \quad (0.2)$$

$$R_{n,m}^j(z) = \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+m+1}}{(n+m)!} \int_0^{\lambda_j} x^n \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i} e^{-zx} dx.$$

В первых двух интегралах (0.2) интегрирование осуществляется по контуру, идущему в $+\infty$ и $Re z > 0$. При $Re z \leq 0$ значения $Q_m(z), P_{n_j}^j(z)$ находятся с помощью аналитического продолжения. В интеграле, определяющем $R_{n,m}^j(z)$, интегрирование проводится по любой кривой, соединяющей точки 0 и λ_j .

Одним из стимулов для изучения свойств интегралов Эрмита стала задача Е.М. Никишина об исследовании сходимости аппроксимаций Эрмита – Паде для системы экспонент [23]. Её полное решение было найдено А.И. Аптекаревым [23], который показал, что при $n + m \rightarrow +\infty$ дроби $\pi_{n_j, m}^j(z; e^{\lambda_j z})$ сходятся равномерно на компактах в \mathbb{C} к $e^{\lambda_j z}$. Ранее при $k = 1$ равномерная сходимость $\pi_{n,m}(z; e^z)$ к e^z была доказана Перроном [24].

Доказательство этой сходимости в работе [23] опирается на следующее асимптотическое равенство, которое является аналогом соответствующего утверждения Перрона: при $n + m \rightarrow +\infty$

$$\tilde{Q}_m(z) = \exp \left\{ - \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i m_i}{n+m} z \right\} \left(1 + O \left(\frac{1}{n+m} \right) \right), \quad (0.3)$$

где оценка $O(1/(n+m))$ равномерна по z на любом компакте из \mathbb{C} .

Вопрос о том, каково асимптотическое поведение многочленов $P_{n_j}^j$ и остаточных функций $R_{n,m}^j$ в общей постановке до сих пор остается открытым, а равенство (0.3) является по существу единственным общим результатом об асимптотике многочленов Эрмита – Паде 2-го рода. Имеется продвижение только в диагональном случае [25]–[29], когда $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ являются либо действительными, либо чисто мнимыми числами (см. также [30], где при $k = 2$ рассматривается также и недиагональный случай). В аналогичной постановке задача об асимптотике остаточной функции и диагональных многочленов Эрмита – Паде 1-го рода подробно исследуется в работах [31], [32].

В данной статье устанавливаются асимптотики остаточных функций $R_{n, kn}^j$, диагональных многочленов P_{kn}^j и аппроксимаций Эрмита – Паде $\pi_{kn, kn}^j$ для системы экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$ при условии, что числа $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ являются корнями уравнения $\lambda^k = 1$, т. е. равномерно распределены на единичной окружности.

1 Формулировка основных результатов

Пусть

$$\lambda_j = e^{i \frac{2\pi(j-1)}{k}}, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (1.1)$$

$$\varphi(\xi) := -\xi(\xi - \lambda_1)(\xi - \lambda_2) \dots (\xi - \lambda_k) = \xi(1 - \xi^k),$$

а x_j – нули φ' , т. е.

$$x_j = \sqrt[k]{\frac{1}{k+1}} e^{i \frac{2\pi(j-1)}{k}}, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

где i – мнимая единица. Рассмотрим однозначную вещественнозначную функцию

$$S(\xi) = \ln \varphi(\xi), \quad \xi \in (0, 1),$$

считая, что выбрана та ветвь логарифма, для которой $\ln e^{-1} = -1$. По определению полагаем, что $S(0) = S(1) = -\infty$.

Справедливы равенства

$$S(x_1) = \ln \frac{k}{\sqrt[k]{(k+1)^{k+1}}},$$

$$S'(\xi) = \frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)}, \quad S''(\xi) = \frac{\varphi''(\xi)\varphi(\xi) - [\varphi'(\xi)]^2}{\varphi^2(\xi)},$$

из которых следует, что

$$S'(x_1) = 0, \quad S''(x_1) = \frac{\varphi''(x_1)}{\varphi(x_1)} = -(k+1)^{(k+2)/k}.$$

Далее считаем, что $n = m_1 = m_2 = \dots = m_k$, а λ_j определяются равенствами (1.1).

Теорема 1.1. При $n \rightarrow +\infty$ равномерно на любом компакте из \mathbb{C}

$$P_{kn}^j(z) \Rightarrow \exp\left\{\left[\lambda_j - \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^k \lambda_i\right]z\right\}, \quad (1.2)$$

$j = 1, 2, \dots, k.$

Теорема 1.2. Для любого фиксированного $j = 1, 2, \dots, k$ при $n \rightarrow +\infty$

$$R_{n, kn}^j(z) = (-1)^n \lambda_j^{n+1} \frac{z^{kn+n+1}}{(kn+n)!} e^{\lambda_j z(1-x_1)} \times$$

$$\times \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_1)}} e^{nS(x_1)} (1+o(1)). \quad (1.3)$$

Теорема 1.3. Для любого фиксированного $j = 1, 2, \dots, k$ при $n \rightarrow +\infty$

$$e^{\lambda_j z} - \pi_{kn, kn}^j(z; e^{\lambda_j \xi}) =$$

$$= (-1)^n \lambda_j^{n+1} \frac{z^{kn+n+1}}{(kn+n)!} e^{\lambda_j z(1-x_1)} \times$$

$$\times \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_1)}} e^{nS(x_1)} e^{\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{k+1} z} (1+o(1)). \quad (1.4)$$

В (1.3) и (1.4) оценка $o(1)$ является равномерной по z на любом компакте из \mathbb{C} .

Следствие 1.1. Если $k = 1$, то при $n \rightarrow +\infty$

$$P_n(z) \Rightarrow e^{z/2}. \quad (1.5)$$

В случае, когда $k \geq 2$, при $n \rightarrow +\infty$

$$P_{kn}^j(z) \Rightarrow e^{\lambda_j z}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Для доказательства следствия 1.1 достаточно заметить, что при $k = 1$ $\lambda_1 = 1$. Далее, если предположить $k \geq 2$, то легко показать, что $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$.

Утверждение (1.5) хорошо известно и доказано Паде.

Следствие 1.2. Если $k = 1$, то при $n \rightarrow +\infty$

$$e^z - \pi_{n, n}(z; e^\xi) =$$

$$= (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n)!} e^z \sqrt{\frac{\pi}{4n}} \frac{1}{4^n} (1+o(1)). \quad (1.6)$$

Напомним, что бесконечно малые (б.м.) последовательности $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$, $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$ называют эквивалентными ($\alpha_n \sim \beta_n$), если $\alpha_n / \beta_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow +\infty$.

С помощью формулы Стирлинга нетрудно показать, что при $n \rightarrow +\infty$

$$\frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}} \frac{1}{4^n}.$$

Поэтому асимптотическое равенство (1.6) является частным случаем хорошо известного в теории аппроксимаций Паде равенства Д. Бресса [33]: при $n \rightarrow +\infty$

$$e^z - \pi_{n, m}(z; e^\xi) = \frac{(-1)^m n! m! e^{2mz/(n+m)}}{(n+m)!(n+m+1)!} z^{n+m+1} (1+o(1)).$$

Следствие 1.3. Если $k = 2$, то $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ и при $n \rightarrow +\infty$

$$e^z - \pi_{2n, 2n}^1(z; e^\xi) =$$

$$= (-1)^n \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} e^{(1-\frac{1}{\sqrt{3}})z} \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n (1+o(1)).$$

$$e^{-z} - \pi_{2n, 2n}^2(z; e^{-\xi}) =$$

$$= -(-1)^n \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} e^{-(1-\frac{1}{\sqrt{3}})z} \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n (1+o(1)).$$

Заметим, что утверждения следствия 1.3 согласуются с результатами работ [26]–[28].

2 Предварительные результаты

Интегралы вида

$$F(\lambda) = \int_I f(x) e^{\lambda S(x)} dx \quad (2.1)$$

называют интегралами Лапласа. Здесь I либо отрезок $[a, b]$, либо интервал (a, b) , λ – большой параметр. Будем считать, что функция $S(x)$ принимает только действительные значения. Функция $f(x)$ может быть комплекснозначной. Считаем также, что $f(x)$ и $S(x)$ непрерывны при $x \in I$. Нас интересует асимптотическое поведение интеграла $F(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$.

Следующее утверждение [34, § 43, п. 1, лемма 1] дает грубую экспоненциальную оценку для интеграла Лапласа.

Утверждение 2.1. Пусть $I = (a, b)$ – конечный или бесконечный интервал, $S(x) \leq c$ при $x \in I$ и интеграл (2.1) сходится абсолютно при некотором $\lambda_0 > 0$. Тогда при $\text{Re} \lambda \geq \lambda_0$

$$|F(\lambda)| \leq c_1 e^{c \text{Re} \lambda},$$

где c_1 – положительная постоянная.

В дальнейшем ограничимся случаем, когда $S(x)$ достигает наибольшего значения на отрезке $I = [a, b]$ в единственной точке, лежащей внутри этого отрезка. Справедливо [34, § 43, п. 4, теорема 2] следующее

Утверждение 2.2. Пусть $S(x) < S(x_0)$, $x \neq x_0$, $a < x_0 < b$, $S''(x_0) \neq 0$ и функции $f(x)$, $S(x)$ бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0 . Тогда при $\lambda \rightarrow +\infty$ и $f(x_0) \neq 0$ справедливо асимптотическое равенство

$$F(\lambda) = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_0)}} e^{\lambda S(x_0)} \{f(x_0) + O(\lambda^{-1})\}. \quad (2.2)$$

3 Доказательства теорем 1.1, 1.2, 1.3

Доказательства теоремы 1.2. Асимптотическое равенство (1.3) достаточно доказать при фиксированном z . Это следует из соотношения (0.3) и равномерной сходимости $\pi_{kn, kn}^j(z; e^{\lambda_j \xi})$ к $e^{\lambda_j z}$ на компактах в \mathbb{C} , которая, как мы уже отметили, доказана в [23].

Докажем вначале (1.3) при $j = 1$. Пусть z – любое отличное от нуля (при $z = 0$ равенство (1.3) очевидно) фиксированное комплексное число. В условиях теоремы

$$R_{n, kn}^1(z) = \frac{e^z z^{kn+n+1}}{(kn+n)!} \int_0^1 [x(x^k - 1)]^n e^{-zx} dx.$$

Обозначим интеграл в правой части последнего равенства через $I_n^1(z)$. Тогда его можно записать в виде

$$I_n^1(z) = (-1)^n \int_0^1 e^{-zx} e^{nS(x)} dx.$$

В интеграле, представляющем $I_n^1(z)$, разобьём область интегрирования на три промежутка: $(0, \tau)$, $[\tau, 1-\tau]$ и $(1-\tau, 1)$, где $0 < \tau < 1$ и выбрано так, чтобы $x_1 \in (\tau, 1-\tau)$. Соответствующие этому разбиению интегралы обозначим через $J_n^p(z)$, $p = 1, 2, 3$.

На отрезке $[\tau, 1-\tau]$ функция $S(x) = \ln[x(1-x^k)]$ принимает наибольшее значение в единственной точке $x = x_1$ и $S''(x_1) \neq 0$. Поэтому асимптотику интеграла

$$J_n^2(z) = \int_{\tau}^{1-\tau} e^{-zx} e^{nS(x)} dx$$

можно найти по формуле (2.2), считая в формулировке утверждения 2.2 $f(x) = e^{-zx}$. В результате таких вычислений получим, что

$$J_n^2(z) = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_1)}} e^{-zx_1} e^{nS(x_1)} (1 + O(1/n)).$$

Поскольку на интервале $(0, 1)$ функция $S(x)$ принимает наибольшее значение в единственной точке $x = x_1$, то, воспользовавшись утверждением 2.1, нетрудно показать, что

$$|J_n^p(z)| \leq c_1 e^{n(S(x_1) - \delta)}, \quad p = 1, 3,$$

где c_1 и δ – положительные постоянные. Это значит, что при $n \rightarrow \infty$ интегралы по первому и третьему промежуткам экспоненциально малы по сравнению с $e^{nS(x_1)}$. Следовательно, основной вклад в асимптотику $I_n^1(z)$ вносит интеграл $J_n^2(z)$. Поэтому при $n \rightarrow \infty$

$$I_n^1(z) = (-1)^n \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_1)}} e^{-zx_1} e^{nS(x_1)} (1 + O(1/n)).$$

Равенство (1.3) при $j = 1$ и фиксированном z доказано.

Пусть теперь $j \geq 2$. Тогда

$$R_{n, kn}^j(z) = \frac{z^{kn+n+1}}{(kn+n)!} e^{\lambda_j z} \int_0^{\lambda_j} [\xi(\xi^k - 1)]^n e^{-z\xi} d\xi.$$

Будем считать, что кривая интегрирования, соединяющая точку 0 с λ_j , задана параметрически уравнением

$$\xi = \xi(t) = te^{i2\pi(j-1)/k}, \quad t \in [0, 1].$$

В интеграле

$$I_n^j(z) := \int_0^{\lambda_j} [\xi(\xi^k - 1)]^n e^{-z\xi} d\xi$$

сделаем замену $\xi = \xi(t)$. Тогда

$$I_n^j(z) := (-1)^n \lambda_j^{n+1} \int_0^1 [t(1-t^k)]^n e^{-z\lambda_j t} dt.$$

Асимптотика интеграла, стоящего в правой части предыдущего равенства, находится также, как и для интеграла $I_n^1(z)$, с той лишь разницей, что $f(x) = e^{-z\lambda_j x}$. В результате аналогичных рассуждений получим, что

$$R_{n, kn}^j(z) = (-1)^n \lambda_j^{n+1} \frac{z^{kn+n+1}}{(kn+n)!} e^{\lambda_j z(1-x_1)} \times \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_1)}} e^{nS(x_1)} (1 + o(1)).$$

Теорема 1.2 доказана.

Теоремы 1.1 и 1.3 являются следствием результатов работы [23] и теоремы 1.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Boyd, J.P.* Chebyshev expansion on intervals with branch points with application to the root of Kepler's equation: a Chebyshev – Hermite – Pade method / J.P. Boyd // J. of Comput. and Appl. Math. – 2009. – Vol. 223, № 2 – P. 693–702.
2. *Beckermann, B.* How well does the Hermite-Pade approximation smooth the Gibbs phenomenon? / B. Beckermann, V. Kalyagin, Ana C. Matos, F. Wielonsky // Math. Comput. – 2011. – Vol. 80, № 274. – P. 931–958.
3. *Сорокин, В.Н.* Циклические графы и теорема Аперри / В.Н. Сорокин // Успехи матем. наук. – 2002. – Т. 57, № 3 – С. 99–134.
4. *Суетин, С.П.* Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда / С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2002. – Т. 57, № 1 – С. 45–142.
5. *Суетин, С.П.* Распределение нулей полиномов Паде и аналитическое продолжение / С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2015. – Т. 70, № 5 (425) – С. 121–174.
6. *Bleher, P.M.* Random matrices with external source and multiple orthogonal polynomials / P.M. Bleher, A.B.J. Kuijlaars // Int. Math. Res. Not. – 2004. – Vol. 3. – P. 109–129.
7. *Aptekarev, A.I.* Large n limit of Gaussian random matrices with external source, Part II / A.I. Aptekarev, P.M. Bleher, A.B.J. Kuijlaars // Comm. Math. Phys. – 2005. – Vol. 259, № 2. – P. 367–389.
8. *Аптекарев, А.И.* Глобальный режим распределения собственных значений случайных матриц с ангармоническим потенциалом и внешним источником / А.И. Аптекарев, В.Г. Лысов, Д.Н. Туляков // ТМФ. – 2009. – Т. 159, № 1. – С. 34–57.
9. *Аптекарев, А.И.* Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно

- ортогональных многочленов / А.И. Аптекарев, В.Г. Лысов, Д.Н. Туляков // Матем. сб. – 2011. – Т. 202, № 2. – С. 3–56.
10. *Калягин, В.А.* Аппроксимации Эрмита – Паде и спектральный анализ несимметричных операторов / В.А. Калягин // Матем. сборник. – 1994. – Т. 185, № 6. – С. 79–100.
11. *Aptekarev, A.I.* Higher-order three-term recurrences and asymptotics of multiple orthogonal polynomials / A.I. Aptekarev, V.A. Kalyagin, E.B. Saff // *Constr. Approx.* – 2009. – Vol. 30, № 2. – P. 175–223.
12. *Chudnovsky, G.V.* Hermite – Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π , in “Lecture Notes in Math” / G.V. Chudnovsky. – New York / Berlin: Springer-Verlag, 1982.
13. *Van Assche, W.* Continued fractions: from analytic number theory to constructive approximation / W. Van Assche // *Contemp. Math., Amer. Math. Soc.* – 1999. – Vol. 236. – P. 325–342.
14. *Mahler, K.* Applications of some formulas by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms / K. Mahler // *Math. Ann.* – 1967. – Vol. 168. – P. 200–227.
15. *Аптекарев, А.И.* Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения. Сборник статей. Совр. пробл. матем. Т. 9 / А.И. Аптекарев (ред.) – М.: МИАН, 2007.
16. *Aptekarev, A.I.* Asymptotics of Hermite – Padé polynomials, in “Progress in Approximation Theory” (A.A. Gonchar and E.B. Saff, Eds.) / A.I. Aptekarev, H. Stahl. – New York / Berlin: Springer-Verlag, 1992.
17. *Аптекарев, А.И.* Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены / А.И. Аптекарев, В.И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С.П. Суетин // *Успехи матем. наук.* – 2011. – Т. 66, № 6 (402) – С. 37–122.
18. *Аптекарев, А.И.* Аппроксимации Эрмита – Паде и ансамбли совместно ортогональных многочленов / А.И. Аптекарев, А.Э. Койэлаарс // *Успехи матем. наук.* – 2011. – Т. 66, № 6 (402). – С. 123–190.
19. *Stahl, H.* Asymptotics for quadratic Hermite – Padé polynomials associated with the exponential function / H. Stahl // *Electronic Trans. Num. Anal.* – 2002. – № 14 – P. 193–220.
20. *Никишин, Е.М.* Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Соколин. – М.: Наука, 1988.
21. *Бейкер, Дж.* Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – М.: Мир, 1986.
22. *Hermite, C.* Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // *C.R. Akad. Sci. (Paris)* – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.
23. *Аптекарев, А.И.* О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент / А.И. Аптекарев // *Вестн. МГУ. Сер.1. Математика. Механика.* – 1981. – № 1. – С. 68–74.
24. *Perron, O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen / O. Perron. – Leipzig-Berlin: Teubner, 1929.
25. *Kuijlaars, A.B.J.* Type II Hermite – Padé approximation to the exponential function / A.B.J. Kuijlaars, H. Stahl, W. Van Assche, F. Wielonsky // *J. of Comput. and Appl. Math.* – 2007. – Vol. 207. – P. 227–244.
26. *Старовойтов, А.П.* Асимптотика аппроксимаций Эрмита – Паде системы экспонент / А.П. Старовойтов // *Доклады Национальной академии наук Беларуси.* – 2013. – Т. 57, № 2. – С. 5–10.
27. *Старовойтов, А.П.* О свойствах аппроксимаций Эрмита – Паде для системы функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов // *Доклады Национальной академии наук Беларуси.* – 2013. – Т. 57, № 1. – С. 5–10.
28. *Старовойтов, А.П.* Аппроксимации Эрмита – Паде для системы функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2013. – № 1 (14). – С. 81–87.
29. *Старовойтов, А.П.* Об асимптотике аппроксимаций Эрмита – Паде для системы функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов // *Известия вузов. Математика.* – 2014. – № 9. – С. 59–68.
30. *Старовойтов, А.П.* Эрмитовская аппроксимация двух экспонент / А.П. Старовойтов // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика.* – 2013. – Т. 13, № 1 (2). – С. 88–91.
31. *Астафьева, А.В.* Асимптотические свойства многочленов Эрмита / А.В. Астафьева, А.П. Старовойтов // *Доклады Национальной академии наук Беларуси.* – 2015. – Т. 59, № 3. – С. 5–11.
32. *Астафьева, А.В.* Аппроксимации Эрмита – Паде экспоненциальных функций / А.В. Астафьева, А.П. Старовойтов // *Матем. сборник.* – 2016. – Т. 207, № 6. – С. 3–26.
33. *Braess, D.* On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^x , II / D. Braess // *J. Approx. Theory.* – 1984. – Vol. 40, № 4. – P. 375–379.
34. *Сидоров, Ю.В.* Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию 01.12.16.

ПРОГРАММНЫЙ ЭМУЛЯТОР РС-СОВМЕСТИМОГО КОНТРОЛЛЕРА ADAM 5510M ДЛЯ КОМПИЛЯТОРА BORLAND TURBO C++ 3.0

Ю.Р. Бейтюк, Г.П. Себровская, В.М. Рамазанов

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

EMULATION SOFTWARE OF PC-COMPATIBLE CONTROLLER ADAM 5510M FOR THE COMPILER BORLAND TURBO C ++ 3.0

Yu.R. Beytuk, G.P. Sebrovskaya, V.M. Ramazanov

Y. Kupala Grodno State University

Предложена структура программного эмулятора РС-совместимого контроллера ADAM 5510M с модулями дискретного и аналогового ввода/вывода ADAM 5050, ADAM 5017, ADAM 5024. Рассмотрена реализация синтаксического анализатора для языка Borland Turbo C++ 3.0 с возможностью использования пользовательских и библиотечных функций Advantech. Приведен пример использования эмулятора для создания виртуальной системы управления двухкоординатным шаговым приводом.

Ключевые слова: РС-совместимый контроллер ADAM 5510M, программный эмулятор, синтаксический анализатор кода Turbo C++, моделирование работы модулей ввода/вывода ADAM 5050, ADAM 5017, ADAM 5024.

The structure of the software emulator of PC-compatible controller ADAM 5510M modules with digital and analog IO ADAM 5050, ADAM 5017, ADAM 5024. The implementation of a parser for the Borland Turbo C ++ 3.0 with the ability to use language and custom library functions Advantech is considered. An example of using the emulator to create a virtual stand equipment XY stepper drive are given.

Keywords: PC-compatible controller ADAM 5510M, software emulator, parser Turbo C ++ code, simulation of IO modules ADAM 5050, ADAM 5017, ADAM 5024.

Введение

Эмулирование работы контроллеров, как однокристалльных, так и со встроенной операционной системой, является неотъемлемой частью технологического цикла разработки и внедрения прикладного программного обеспечения (ППО). Особенно остро эта проблема стоит при использовании контроллеров в системах промышленной автоматизации и встраиваемых системах для управления периферийным оборудованием и устройствами низовой автоматики. Это связано с высокой стоимостью эксплуатационных расходов на устранение последствий потенциальных ошибок выполнения ППО на реальном управляющем контроллере. Причем если ошибки синтаксического характера легко устраняются на этапе компиляции самой средой разработки, то ошибки алгоритмического характера можно устранить только в процессе экспериментальной проверки на реальной системе управления с подключенным управляемым периферийным оборудованием. Ошибки алгоритма могут привести не только к его физическому выходу из строя, но и повлечь за собой катастрофические последствия в технологическом и производственном процессах, которыми управляет контроллер.

Необходимость эмуляции контроллеров возникает и в специализированных учебных лабораториях вузов при проведении лабораторных занятий. Наличие программного эмулятора

контроллера позволяет существенно снизить риск вывода из строя лабораторного оборудования из-за ошибок студентов. Кроме того, подобные оболочки позволяют фактически организовать виртуальную лабораторию для различных видов самостоятельной работы.

На практике выбор конкретной модели и производителя РС-совместимого контроллера определяется множеством факторов, определяющим из которых является область его использования: автоматизация производственных и технологических процессов, научные исследования, учебная деятельность. Поскольку авторами предполагалось использование подобных контроллеров для организации специализированной учебной лаборатории, то в качестве основных параметров при выборе контроллера учитывались следующие:

- невысокая, по сравнению с аналогами стоимость;
- возможность подключения внешних конфигурируемых модулей цифрового и аналогового ввода/вывода с числом каналов не менее 8;
- наличие официальной поддержки производителем как традиционных С-подобных, так и МЭК-совместимых языков программирования, а также универсальных SCADA-систем.

Достаточно подробный пример анализа подобного оборудования представлен в [1]. В результате авторами был выбран контроллер

ADAM 5510M [2] производства AdvantechCo, на основе которого был создан комплекс из 8-ми рабочих мест для учебной лаборатории информационно-управляющих систем и средств автоматизации.

1 Программно-алгоритмическая структура эмулятора

Проблема эмуляции является актуальной при любых технологиях разработки ПО для контроллеров встраиваемых систем управления и промышленной автоматизации. В случае использования PC-совместимых контроллеров серии ADAM 5510M наибольшее распространение получили три технологии, рассматриваемые далее.

К первой группе относится среда Turbo C++ 3.0 [3], рекомендуемая производителем контроллеров семейства ADAM 5510 [2] в качестве основного инструментария разработки ППО для них. В связи с этим разработчики получают в свое распоряжение набор бесплатных библиотек [2] для обслуживания функционала контроллера на уровне встроенной операционной системы (UTILITY*.LIB), на коммуникационном уровне по интерфейсам RS232, 485, Ethernet (COMM*.LIB), а также при работе с модулями дискретного и аналогового ввода-вывода (LIO*.LIB, HIO*.LIB). Ко второй – относятся специализированные среды разработки типа UltraLogik 32, MultiProg, использующие как универсальные, так и языки программирования с поддержкой стандарта IEC 61131-3. К третьей группе относятся средства разработки ППО для контроллеров, включенные в состав SCADA-систем разработки верхнего уровня АСУ ТП.

Следует отметить, что технологии второй и третьей групп содержат гораздо более развитые средства эмуляции аппаратных средств, как контроллеров, так и средств ввода/вывода по сравнению с использованием среды Turbo C++ 3.0. Основной проблемой для разработчика в этом случае является отсутствие механизмов как эмуляции входных сигналов в процессе отладки, так и учета сигналов обратных связей от исполнительных управляемых устройств для модулей ввода. Как следствие, это приводит к невозможности проверки в полном объеме соответствия реальных выходных сигналов контроллера их эталонным значениям, предполагаемым алгоритмом его функционирования. Фактически среда Turbo C++ 3.0 содержит лишь стандартные средства пошаговой отладки и компиляции без средств визуализации результатов в выбранном временном масштабе.

Для решения этой проблемы и предлагается программный эмулятор контроллера, использующий в качестве исходных данных файл C-кода, с возможностью визуализации входных и выходных сигналов в режиме реального времени для наиболее распространенных модулей дискретного

и аналогового ввода/вывода ADAM 5050, 5017, 5024.

Функционально эмулятор контроллера осуществляет следующие операции:

- эмуляцию и считывание значений входных сигналов, подаваемых на входы модулей аналогового и дискретного ввода от пользователя и цепей обратных связей эмуляторов управляемого контроллером оборудования;
- алгоритмическую обработку этих значений в пошаговом режиме в соответствие с C-кодом пользовательского программного обеспечения;
- вычисление результирующих значений выходных сигналов, формируемых на выходах модулей аналогового и дискретного вывода, для подачи их на эмуляторы управляемого оборудования.

На программно-алгоритмическом уровне эмулятор состоит из трех частей, рисунок 1.1.



Рисунок 1.1 – Программно-алгоритмическая структура эмулятора контроллера ADAM 5510M

Рассмотрим их в порядке включения в работу при запуске эмулятора. Анализатор построчно считывает инструкции ППО из текстового C-файла и выполняет их. Из полученных в результате обработки значений переменных выделяются те из них, которые соответствуют сигналам на выходах модулей вывода и помещаются в буфер I/O аргументов. Из этого же буфера анализатор считывает необходимые ему для работы значения входных сигналов, записываемые туда пользователем через элементы управления графического интерфейса эмулятора модульной панели.

Буфер I/O аргументов представляет собой регулярную списочную структуру пар «ключ-значение», поддерживающую операции последовательной записи-чтения. В качестве ключа используется номер контакта модуля ввода-вывода, зависящий от конкретного набора модулей I/O контроллера и номера слота их установки, а в качестве значения – уровень напряжения на этом контакте. Подобный подход позволил реализовать двусторонний обмен данными между анализатором и эмулятором модульной панели, каждый из которых может иметь независимые таблицы перекодировки внутренних переменных. Фактически внутреннее представление модулей ввода/вывода в эмуляторе реализует цепочку «имя переменной – номер контакта модуля в слоте – уровень напряжения на нем – способ его ввода/вывода». Наличие внутреннего буфера значений сигналов с открытым форматом их представления, доступного внешним приложениям, позволяет решить сразу две задачи:

– отделить процедуры алгоритмической обработки сигналов по инструкциям пользовательского ПО от процедур их визуализации и механизмов ввода/вывода эмулятором модульной структуры контроллера;

– обеспечить открытость архитектуры эмулятора контроллера для возможности подключения к нему интерактивных графических эмуляторов реальных систем управления, принципы реализации которых будут рассмотрены ниже.

Эмулятор модульной панели представляет собой приложение с интерактивным графическим интерфейсом, соответствующим конструктивному исполнению контроллера ADAM 5510M с предустановленными модулями ввода/вывода. Интерфейс организует ввод входных сигналов в анализатор пользователем и отображение значений сигналов на выходных контактах модулей. Указанные значения записываются и считываются соответственно из буфера I/O. Это повышает эксплуатационную универсальность эмулятора контроллера в целом, позволяя исследовать реакцию внешних устройств даже при отсутствии самостоятельных программ средств их эмуляции. Их роль в данном случае будет выполнять пользователь в соответствии с известной ему логикой работы периферийного оборудования.

Хотя эмулятор контроллера представляет собой функционально законченное программное средство, наличие файлового буфера позволяет

существенно расширить его имитационные возможности путем добавления внешних эмуляторов периферийного оборудования как показано на рисунке 1.2. При этом на них могут возлагаться задачи алгоритмического и графического моделирования реакции оборудования на выходные воздействия эмулятора контроллера и формирование сигналов обратной связи в таких случаях.



Рисунок 1.2 – Схема моделирования систем управления с использованием внешних эмуляторов управляемого оборудования

В первом случае из буфера I/O считываются рассчитанные анализатором С-кода значения выходных сигналов контроллера, а во втором – записываются входные сигналы после их расчета эмулятором периферии. Особенно актуальным этот подход становится для систем со следящими обратными связями, сервоприводов, систем управления расходом и т. д.

2 Алгоритм функционирования логического анализатора С-кода

Блок-схема алгоритма функционирования анализатора [4] приведена на рисунке 2.1.

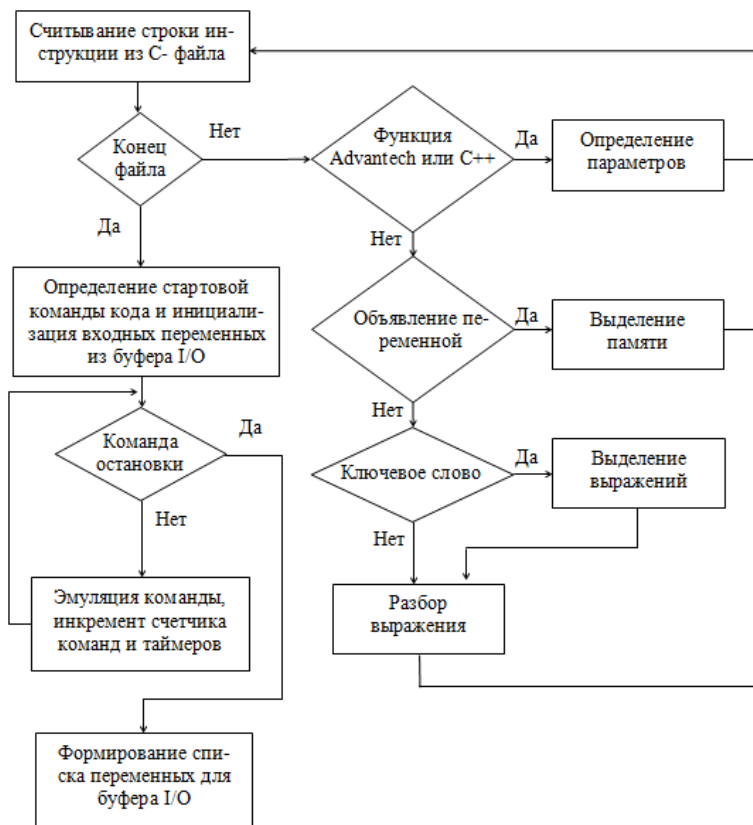


Рисунок 2.1 Блок-схема функционирования анализатора

Анализатор осуществляет построчное считывание инструкций из С-файла, их синтаксический анализ и выполнение, по результатам которого формирует последовательный список значений выходных переменных модулей вывода для их помещения в I/O буфер.

Синтаксический анализ инструкции включает в себя:

- распознавание библиотечных [2] и системных [3] функций с определением численных значений их параметров;

- резервирование памяти для используемых в теле ПО переменных, в зависимости от их типа и в соответствии с типом контактов модулей аналогового и дискретного ввода/вывода;

- выделение исполняемых выражений из ключевых зарезервированных слов и форматов языка С (операторы цикла, условных и безусловных переходов, комментариев, указателей и т. д.).

В тех случаях, когда считанная строка инструкции не удовлетворяет ни одному из рассмотренных синтаксических требований языка C++, она считается пользовательской функцией и подвергается посимвольному разбору считанного выражения. Указанная процедура достаточно громоздка и поэтому ниже рассмотрен лишь ее фрагмент на примере работы с модулем ADAM 5050.

После выполнения каждого из приведенных действий осуществляется считывание следующей строки из С-файла до достижения его конца. В результате выполнения такого анализа анализатор получает совокупность команд контроллера в собственном внутреннем формате, которые, при наличии значений входных переменных, способны вычислять значения выходных переменных, соответствующих выходам модулей вывода реального контроллера.

На заключительном этапе работы анализатора осуществляется выбор стартовой команды и считывание численных значений входных переменных из буфера I/O в текущий момент времени. Вычисление значений выходных переменных происходит циклически до достижения команды остановки контроллера, а для реализации режима реального времени после выполнения каждой из них инкрементируется таймер с периодом 1 мс. Выбор периода работы таймера обусловлен максимальным значением реальной частоты дискретизации модулей аналогового ввода/вывода ADAM 5017, ADAM 5024 и быстродействия модулей дискретного ввода/вывода ADAM 5050 [2]. Внутренний таймер регламентирует также разделение во времени процедур обращения для записи и считывания значений переменных из буфера I/O анализатором инструкций и эмулятором модульной панели. Так решается задача арбитража конфликтов группового доступа к буферу при его локальной реализации и внешнем исполнении эмуляторов периферийного оборудования

[4]. На заключительном этапе анализатор добавляет метку времени к парам «имя переменной – уровень напряжения» и осуществляет их запись (обновление) во внешний буфер I/O.

Следует отметить, что в существующей версии анализатор не допускает режима обращения к буферу с одновременной остановкой таймера, поэтому классические режимы отладки в виде просмотра переменных, исполнения программы по шагам, ввод и использование точки останова не реализованы.

3 Пример реализации синтаксического обработчика выражений

Синтаксический разбор выражений инструкций С-кода проводится после обнаружения анализатором либо одного из ключевых слов языка, либо признаков использования пользовательских функций. Учитывая, что обработчики аналогичного назначения являются обязательным элементом традиционных компиляторов [5], авторами была выбрана модель без возвратов со структурой LR(1) [6], имеющая наиболее простую реализацию. Модель предусматривает одностороннее посимвольное чтение выражения слева направо и сравнение с фиксированным набором грамматических признаков. Предполагая некоммерческий характер использования эмулятора, авторами были установлены следующие ограничения на использование системных Turbo C++ и библиотечных функций Advantech:

- реализовано распознавание параметров только для функций чтения-записи модулей ввода/вывода ADAM 5050, 5017, 5024 из библиотеки LIO*.LIB, функций управления светодиодными индикаторами системного блока контроллера из библиотеки UTILITY*.LIB и функций символьного чтения/записи из библиотеки COMM*.LIB;

- максимально допустимая степень вложенности циклов в теле ППО составляет не более двух, а число параметров пользовательских функций, не должно превышать трех.

Невыполнение приведенных ограничений обработчик считает «синтаксической ошибкой» и формирует соответствующее сообщение с прекращением работы. Введенные ограничения позволили совместить формирование лексем из входного потока символов с проверкой их соответствия набору синтаксических форматов языка C++. Это реализуется за счет использования единой таблицы символов, констант, операндов и условий переходов для генерации значений выходных переменных для буфера I/O. После того как анализатор распознает конкретную синтаксическую конструкцию языка C++, он вызывает семантическую процедуру, которая контролирует эту конструкцию на отсутствие дублирования описания переменных, соответствие их типов и т. п. Такой подход к построению алгоритма синтаксического анализатора позволяет рассматривать

его в качестве детерминированного конечного автомата [6] с прямым логическим анализом лексем и регулярной грамматикой.

В нашем случае структура автомата определяется пятью составляющими: S, Q, Q_0, T, P .

S – множество входных лексем и идентификаторов, представляющих собой совокупность элементов алфавита, ключевых слов Turbo C++ и имен подключаемых функций Advantech.

Q – множество синтаксически правильных состояний автомата, представляющих собой набор типовых правил языка C++ и форматов записи подключаемых функций Advantech, в нашем случае это форматированные строки условных и безусловных переходов, операторов цикла и всех остальных форматов консольных приложений [5] с учетом подключаемых библиотек производителя.

Q_0 – начальное состояние автомата из элементов множества Q . В случае терминального приложения в среде Turbo C++, для инициализации автомата использовались предложения объявления глобальных переменных, либо подключения внешних библиотек.

T – множество конечных состояний автомата, представляющее собой матрицу указателей на вызываемые процедуры обработчиков циклов, системных функций языка и функций производителя. Переход сюда осуществляется с использованием таблиц переходов P .

P – подмножество отображений вида:

$$SQ \rightarrow Q$$

для всех возможных входных лексем S текущих состояний Q автомата и допустимых правил грамматики языка C++.

Элементы этого отображения представляют собой правила переходов, связывающие между собой все возможные отображения $S_i Q_j \rightarrow Q_m$, где Q_j, Q_m – два произвольных состояния автомата, S_i – входная лексема.

Во всех случаях в силу детерминированности автомата предполагается, что $Q_j, Q_m \in Q, S_i \in S$.

Подобная модель синтаксического анализатора приводит к следующему обобщенному алгоритму его реализации.

1. Устанавливается фиксированное исходное состояние автомата Q_0 и осуществляется поэлементное слева направо чтение входной лексемы S_i из множества S .

2. Осуществляется циклическая проверка реализации отображения $S_i Q_j \rightarrow Q_m \in P$.

На этом этапе отбираются правила переходов автомата, которые для считанной лексемы S_i при выполнении правила перехода Q_j приводят к состоянию Q_m , которое для данной грамматики является элементом множества Q .

3. Работа автомата считается нормально законченной, когда он попадает в одно из состояний,

считающихся конечным, при условии считывания последней лексемы или символа конца строки. В нашем случае в качестве таких символов использовались символы точки с запятой и перевода строки.

4. Учитывая, что каждому элементу T_k конечного состояния автомата соответствует порядковый номер k , его можно использовать в качестве индекса элементов матрицы указателей на вызываемые процедуры обработчиков эмулятора.

Алгоритм обработчика имеет линейную структуру, поэтому перечислим лишь его основные шаги в порядке их осуществления при посимвольном считывании содержимого строки и определение считанного элемента. При достижении конца строки осуществляется перемещение всех символов из стека в выходную строку. Считывание происходит до обнаружения знака операции или конца строки с определением типа символа. Варианты определяемых символов и действий при их обнаружении следующие:

– число или переменная, при этом происходит добавление считанного элемента к выходной строке;

– функция или открывающая скобка, при этом считанный элемент помещается в стек;

– закрывающая скобка, при этом до тех пор, пока верхним элементом стека не станет открывающая скобка, элементы перемещаются из стека в выходную строку. Закрывающая скобка удаляется из стека, но в выходную строку не добавляется. Если после этого шага на вершине стека оказывается символ функции, он также сдвигается в выходную строку;

– запятая, при этом до тех пор, пока верхним элементом стека не станет открывающая скобка, элементы выводятся из стека в выходную строку;

– оператор, в этом случае определяется, является ли приоритет считанного оператора ниже приоритета оператора, находящегося на вершине стека или нет. В первом случае верхний элемент стека сдвигается в выходную строку, во втором – считанный оператор помещается в стек.

Подобная структура алгоритма при его реализации на локальной машине имеет значительное число дисковых операций чтения/записи. Например, при реализации процедур чтения элементов множества входных лексем S , число таких операций пропорционально отношению размеров массива и буфера чтения. Остальное время занимают процедуры поиска и сравнения лексем, синтаксических правил и правил переходов.

Повышение суммарного быстродействия работы анализатора достигалось использованием функций Win32 API для разделения указанных процедур со стековой организацией структур хранения идентификаторов.

В таблице 3.1 приведено описание действий обработчика на примере фрагмента исходного кода ППО для ADAM 5510M.

Таблица 3.1 – Примеры реализации синтаксической обработки C-инструкций

Выражение	Действие обработчика
int i	Определяется имя переменной, резервируется переменная с таким же именем
void main()	Обнаружено объявление типа main и открывающая скобка. Определяется количество параметров = 0 и закрывающая скобка. Точка с запятой отсутствует, значит далее идет тело функции
{	Инкрементируется счетчик числа скобок
LED_init()	Обнаружена функция Advantech, осуществляется запись кода ее реализации
for (i=0; i<5; i=i+1)	Обнаружено ключевое слово for. Осуществляется разбор выражения в скобках, вычисление переменных, фиксация счетчика скобок, точек возврата и флага окончания цикла
{	Инкрементируется счетчик числа скобок
LED_ON(RUN)	Обнаружена функция Advantech, определяется набор ее параметров и запись кода ее вызова по дереву шаблонов
ADAMdelay(200)	
LED_OFF(RUN)	
ADAMdelay(200)	
}	Декрементируется счетчик скобок и восстанавливаются значения переменных цикла
}	Декрементируется счетчик скобок. При его равенстве 0 проверяется код возврата из тела функции и для функции main() выполнение кода заканчивается

Код реализует периодическое управление индикатором RUN с использованием переменной i, системной функции main() и библиотечных функций Advantech LED_ON, LED_OFF, ADAMdelay. В результате анализатор C-кода получает значения переменной RUN и, инвертируя ее значение с периодом 200 миллисекунд, помещает это значение в буфер I/O. Таким образом, в буфере (использовался текстовый файл) на фиксированной позиции записывается и обновляется с периодом 1 мс символ 1 или 0. Эмулятор модульной панели, считывая это значение, использует его для управления цветом визуального имитатора светодиода RUN.

4 Практика использования эмулятора

Интерфейс эмулятора имитирует переднюю панель реального контроллера ADAM 5510M с

предустановленными модулями ADAM 5050, 5017 и 5024 соответственно в слоты 0–3 контроллера, а также программно-доступными индикаторами POWER, RUN, COMM и BAT (рисунок 4.1). На рисунке 4.2. приведен внешний вид окна приложения ADAM.exe – эмулятора контроллера.

В зависимости от способа формирования входных сигналов возможны два основных режима работы эмулятора:

- базовый, входные сигналы формируются пользователем через интерфейс эмулятора модульной панели, как показано на рисунке 4.2, при котором не требуется внешних ресурсов;
- расширенный, входные сигналы могут генерироваться не только пользователем, но и внешним эмулятором периферийного оборудования.

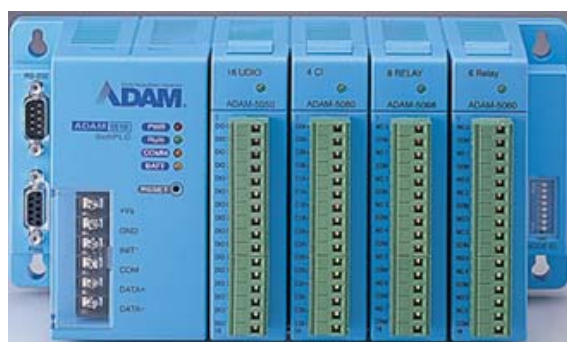


Рисунок 4.1 – Контроллер ADAM 5510M с предустановленными модулями ввода-вывода

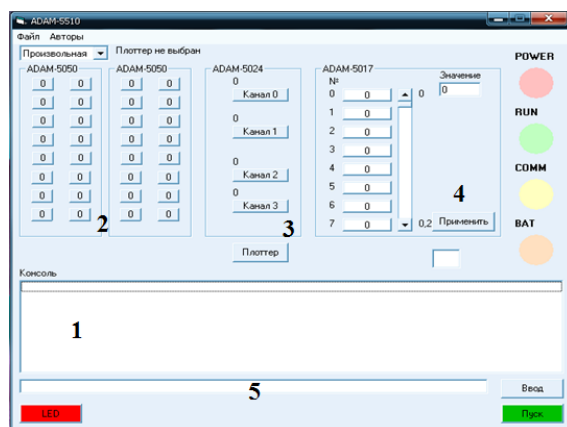


Рисунок 4.2 – Интерфейс эмулятора ADAM 5510M в базовом режиме

В интерфейс эмулятора модульной панели включен элемент управления – консоль 1, он имитирует работу программы ADAM5510M Series Utility, предоставляемой производителем контроллера. Утилита служит для передачи команд контроллеру по интерфейсу RS232. В базовом режиме, после загрузки C-файла через стандартный файловый интерфейс и запуска моделирования, в консоли выводятся ошибки, обнаруженные анализатором C-кода. При их отсутствии эмулятор переходит в режим выполнения

С-инструкций и активизируется визуальная панель эмулятора с контактами модулей ввода-вывода 2, 3, 4.

Визуальные компоненты, созданные на основе класса `CommandButton`, (рассматриваемая версия эмулятора написана в среде Visual BASIC 6.0) отражают уровни сигналов на контактах модулей ADAM 5050. Контакты, сконфигурированные в С-файле как входные, доступны для ручного изменения состояний, а выходные отображают символы 0 или 1 в соответствии со значениями, считанными эмулятором панели из I/O буфера. Для отображения уровней и осциллограмм сигналов на выходах 4-х канального модуля аналогового вывода ADAM 5024 использовались компоненты класса `Label`, вынесенные на отдельную форму. Данные компоненты отражают мгновенное значение сигнала и его график, содержащий 50 последних отсчетов. Формирование статических уровней сигналов на входах 8-ми канального модуля аналогового ввода ADAM 5017 осуществляется компонентами `CommandButton`, `Label` и `TextBox` независимо для каждого из каналов. В процессе эмуляции возможно изменение уровня сигнала, реализуемое компонентом класса `VScrollBar`.

Кроме режима моделирования работы модулей ввода/вывода в эмуляторе реализована возможность моделирования символического обмена для порта COM2 ADAM 5510M по интерфейсу RS485. Для этого используются консоль 5, на которой выводятся сообщения, формируемые анализатором С-кода, и компоненты классов `TextBox` и `CommandButton` для ввода сообщений в эмулятор. При моделировании процессов обмена анализируются лишь функции `com_485_rx` и `com_485_tx` из библиотеки `COMM*.LIB`, без учета функций инициализации и конфигурирования портов.

Эмулятор успешно используется авторами в течение двух лет в процессе выполнения лабораторных работ по курсам «Информационно-управляющие комплексы и системы промышленной автоматизации», «Программирование встраиваемых и мобильных систем» на кафедре информационных систем и технологий ГрГУ им. Я. Купалы для студентов специальности 1-38 02 01 «Информационно-измерительная техника». Эксплуатационная правильность выбранных программно-алгоритмических решений подтверждается путем загрузки проверенных прошивок в реальный контроллер и проверки его функционирования в составе стендового оборудования, примеры которого приведены ниже.

Расширенный режим работы эмулятора контроллера ADAM 5510M, реализованный авторами с использованием внешнего эмулятора периферийного оборудования, рассмотрен на примере системы управления двухкоординатным шаговым приводом.

На рисунке 4.3 показана реальная модель системы управления шаговым приводом. Привод построен на основе шасси плоттера формата A3 и содержит:

- пишущий узел 3 с закрепленным фломастером, управляемый переменной `Work` (логический тип), таким образом, что при `Work = 0` фломастер находится в приподнятом состоянии и не касается поля чертежа с закрепленной бумагой, а при `Work = 1`, фломастер прижимается к бумаге и способен при перемещении рисовать траекторию своего движения;
- каретку движения по горизонтали, перемещающую пишущий узел в горизонтальном направлении, управляемую шаговым двигателем 1 по переменным `A_X`, `B_X`, `C_X`, `D_X` (логический тип);
- каретку движения по вертикали, перемещающую пишущий узел в вертикальном направлении, управляемую шаговым двигателем 2 по переменным `A_Y`, `B_Y`, `C_Y`, `D_Y` (логический тип).



Рисунок 4.3 – Модель системы управления шаговым приводом

Таким образом, включая и останавливая двигатели 1 и 2 а, также опуская и удерживая в нажатом положении перо 3, можно «рисовать» сложные графические объекты, моделируя двухкоординатное управление.

Эмулятор привода (рисунок 4.4) реализован на отдельной форме 2 и использует визуализацию 3 пиксельного перемещения фломастера при `Work = 1` и фиксированных значениях управляющих переменных `A_X`, `B_X`, `C_X`, `D_X` и `A_Y`, `B_Y`, `C_Y`, `D_Y`.

Значения переменных 1, соответствующие сигналам на выходах модулей ADAM5050, установленных в нулевом и первом слотах контроллера, визуализируются условными символами 0 и 1. В случае `Work = 0` визуализация не

осуществляется с сохранением текущего значения координат 4 фломастера во внутренних переменных эмулятора привода. По рисункам 4.3 и 4.4 можно провести сравнение траектории, вычисляемой эмулятором, и реальной траектории пишущего узла на лабораторной модели.

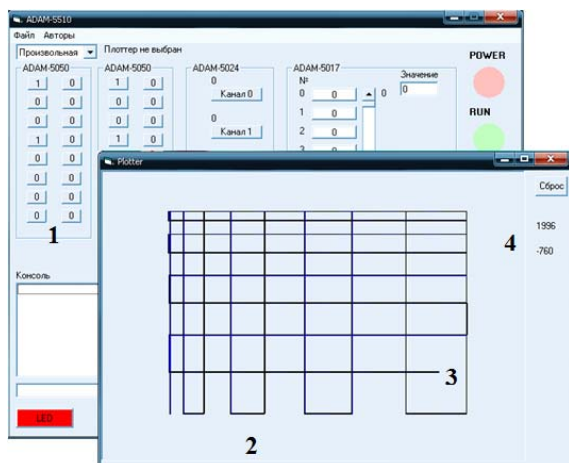


Рисунок 4.4 – Интерфейс эмулятора ADAM 5510M в расширенном режиме работы с эмулятором двухкоординатного шагового привода

Заключение

Рассматриваемый в работе программный эмулятор контроллера ADAM 5510M может быть использован как для решения учебно-методических задач, так и для моделирования типовых звеньев автоматизированных систем управления технологическими процессами [7] для фиксированного набора модулей ввода/вывода, за исключением средств аппаратной поддержки IP протокола. Конфигурация эмулятора поддерживает 32 двунаправленных канала дискретного ввода/вывода для двух модулей ADAM 5050, 4 канала аналогового вывода для модуля ADAM 5024, и 8 каналов аналоговых вводов для модуля ADAM 5017 [8]. Анализатор C кода распознает системные и пользовательские исполняемые выражения из ключевых зарезервированных слов и форматов языка C++, параметры функций чтения/записи модулей ввода/вывода, функций управления светодиодными индикаторами системного блока контроллера, и функций символьного чтения/записи для порта COM2 по интерфейсу

RS485. Открытая архитектура внешнего буфера обмена, содержащая текущие значения сигналов на контактах модулей ввода/вывода, позволяет использовать для эмуляции входных сигналов не только управляемый пользователем встроенный эмулятор передней панели контроллера, но и внешний исполняемый эмулятор периферийного оборудования от сторонних разработчиков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бородкин, А. Лабораторный комплекс для изучения АСУ электроустановок / А. Бородкин, Ю. Гусев, А. Трофимов // СТА. – 2009. – № 4. – С. 76–79.
2. ADAM 5510 Series, PC-based Programmable Controller, User's Manual, 4 Edition, May 2008, Part No. 2001500001. – 516 с.
3. Эллис, М. Справочное руководство по языку C++ с комментариями / М. Эллис, Б. Страуструп. – М.: Мир, 1992. – 445 с.
4. Синкевич, Д.С. Эмулятор PC-совместимого контроллера ADAM 5510M / Д.С. Синкевич // Физика конденсированного состояния: материалы XXIII международной научно-практической конференции аспирантов, магистрантов и студентов, Гродно, 16 апр. 2015 г. / Гродненск. гос. ун-т; редкол.: В.Г. Барсуков [и др.]. – Гродно, 2015. – С. 133–134.
5. Ахо, А. Компиляторы: принципы, технологии и инструменты / А. Ахо, Р. Сети, Дж Ульман. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. – 768 с.
6. Хантер, Р. Основные концепции компиляторов / Р. Хантер – М.: Издательский дом «Вильямс», 2002. – 256 с.
7. Расходомерная АСУ тензометрического типа с пропорционально-дискретным алгоритмом управления на контроллере ADAM 5510TCP / Ю.Р. Бейтюк, В.М. Рамазанов, Г.П. Себровская, О.И. Садовская // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2 (23). – С. 91–98.
8. Эталонная структура расходомерной АСУ с подсистемой TCP/IP диспетчеризации / О.И. Садовская, Г.П. Себровская, В.М. Рамазанов, Ю.Р. Бейтюк // Научный альманах. – 2015. – № 1 (3). – С. 144–152.

Поступила в редакцию 26.12.16.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОСТОЯНИЙ ОБЪЕКТОВ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С РЕКОНСТРУКЦИЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

А.К. Головнич

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

MODELING CONDITION OF OBJECTS OF THE TECHNICAL SYSTEM WITH THE RECONSTRUCTION OF PHYSICAL PROCESSES

A.K. Golovnich

Belarusian State University of Transport, Gomel

Обосновывается возможность разработки модели динамических процессов реальных технических систем с воспроизведением физических эффектов взаимодействия объектов. Представление результатов расчетов изменения состояний модельных объектов в реалистичной трехмерной визуализации раскрывает широкий потенциал практического использования данной модели, позволит решать многие актуальные задачи на качественно новом уровне, заменяя сложные и дорогостоящие натурные испытания адекватными виртуальными физическими симуляциями.

Ключевые слова: моделирование, технические системы, взаимодействие тел, физические процессы.

Ability to develop models of dynamic processes of real technical systems with reproducing the physical effects of the interaction of objects is justified. The results of states calculations are presented in the form of 3D objects. Model reconstruction of physical processes with the 3D image will allow solving many practical problems on a new level of quality. Virtual simulation can replace complex and expensive field tests.

Keywords: modeling, technical systems, interaction bodies physical processes.

Введение

Современный уровень развития информационных технологий позволяет разрабатывать сложные динамические модели функционирования реальных систем. Как правило, такие модели имеют достаточно узкий спектр своего применения и тесно привязаны к определенным, достаточно жестким исходным условиям. Однако их важность и ценность для практики трудно переоценить, так как подобные имитации связаны с реконструкцией процессов действительности, реализующихся на фоне непрерывного действия множества причинно обусловленных внешних и внутренних факторов, сил, взаимокоррелируемых влияний и др.

1 Сложности воспроизведения следствий действия физических законов в математической модели технической системы

Особо привлекательными для практики становятся модельные реконструкции, воспроизводящие технические и циклические технологические процессы некоторой относительно замкнутой системы взаимодействующих объектов [1], [2]. Поведение объектов такой системы предлагается моделировать с учетом действия физических законов реального мира. В качестве конкретного прототипа для разработки подобной модели можно привести железнодорожную станцию, которая эффективно функционирует благодаря активному использованию следствий влияния гравитационных и электромагнитных сил.

Например, наличие сортировочной горки на станции помогает быстро расформировывать поезда, распределяя отдельные вагоны различного назначения по соответствующим путям сортировочного парка. Потенциальная энергия надвигаемых на вершину горки вагонов в дальнейшем эффективно преобразуется в кинетическую энергию их движения по спускной части горки с достаточной скоростью, обеспечивающей перемещение подвижного состава на требуемое расстояние по конкретному пути. Регулирование скоростей движения вагонов по наклонному участку горки производится с помощью вагонных замедлителей, которые благодаря удержанию колес увеличивают силу сопротивления движению и погашают излишнюю скорость, поддерживая ее в определенных диапазонах значений, безопасных для железнодорожного пути, подвижного состава и груза в вагонах.

В настоящее время качественной математической модели, реконструирующей процессы данной технической системы, не создано. Предварительный анализ показывает, что достаточно большая пространственная протяженность железнодорожной станции, располагаемой на территории до 200 га, не приводит к высокой сложности соответствующей информационно-физической модели (так ее можно назвать в первом приближении) [3]. Основными объектами моделирования являются железнодорожные пути, воспринимающие нагрузки от подвижного состава и претерпевающие определенные давления и

деформации, а также вагоны и локомотивы, рассматриваемые как активные мобильные структуры, перемещаемые по железнодорожным путям под действием тяговых сил и противодействием сил сопротивления движению различной природы (основное сопротивление колеса и рельса, сопротивление воздушной среды, от удара в стыках рельсов, при проходе вагонов в кривых) [4]. Многочисленные здания и сооружения, находящиеся на территории железнодорожной станции, являются пассивными статичными объектами, обеспечивающими общий антуражный реалистичный вид при воссоздании модельного образа станции в трехмерной инсталляции.

Сложность представляет воссоздание динамического модельного аналога физической системы «вагон-рельсы», в котором движение вагона под действием сил тяги и сопротивлений приводит к изменению состояния железнодорожного пути, который воспринимает нагрузки от колес вагона и через рельсы, шпалы, балластный слой щебня передает их на земляное полотно, накапливая, распределяя и погашая эти усилия в процессе кратковременной или достаточно длительной нагрузки. В свою очередь, вагон следует рассматривать также как систему жестких, гибких и других связей взаимодействующих элементов кузова, тележки, подвески и др. [5]. Типов вагонов достаточно много, и в каждом из них могут быть конструкционные особенности, влияющие на механику передачи движения.

С другой стороны, все процессы на железнодорожной станции строго регламентированы, имеют достаточно узкий диапазон своих изменений по продолжительности. Количество технологических операций, выполняемых на железнодорожной станции, не превышает 10–15. Работу станции отличает цикличность всех процессов, высокая ригидность составляющих ее объектов, обеспечивающая высокую устойчивость функционирования и уверенную прогнозируемость конечных результатов [6].

2 Практическое применение информационно-физической модели функционирования технической системы

Разработка информационно-физической модели железнодорожной станции позволит успешно решать многие прикладные задачи, существенно повышая общую эффективность работы транспорта. Надежная модель реконструкции физических процессов взаимодействия колеса и рельса с оценкой следствий влияния нагрузок и деформаций на верхнее строение позволит оптимизировать межремонтные периоды текущего содержания пути. Благодаря исследованиям на модели можно оценить динамику усталостных процессов в рельсах при различных температурных и других режимах в более широких диапазонах, условиях, начальных состояниях, чем это

возможно при натурных испытаниях. Верифицированная информационно-физическая модель железнодорожной станции [7], воспроизводящая реальные транспортные процессы своего прототипа, сможет спрогнозировать наступление опасных и конфликтных ситуаций, порождаемых некоторым сочетанием (до сих пор пока не сложившихся в реальности) отдельных факторов и условий, способных стать причиной разрушительных аварий и крушений, приводящих к гибели и увечьям людей [8].

Многие важные для работы железнодорожного транспорта технические задачи в настоящее время не решены или решаются в нерациональных режимах по причине отсутствия полного математического описания и модельной реализации соответствующих физических процессов. В качестве примера можно привести проблему эффективного закрепления вагонов на железнодорожном пути. Наиболее часто для торможения и удержания вагонов используется конструкция искусственной накладке на рельс, именуемой тормозным башмаком. Это устройство достаточно неэкономично (вручную ставится на рельс, опасно в использовании, быстро выходит из эксплуатации из-за значительного износа в результате трения). При наличии информационно-физической модели железнодорожной станции можно было бы сконструировать такую имитационную систему взаимодействия колеса и рельса через вариативную «прокладку», которая позволяла бы достигать эффективного и безопасного торможения вагона с минимальными износами колеса и рельса. Такая прокладка должна иметь специфический клинообразный профиль и, по видимому, быть элементом вагона, а не пути.

Вторая серьезная проблема повышения эффективности работы крупных железнодорожных станций лежит в плоскости качественного функционирования сортировочных горок, обеспечивающих переработку вагонопотоков. Интенсивная эксплуатация этих сложных технических устройств в различных условиях приводит к негативным изменениям профиля скатывания вагонов из-за чрезмерных нагрузок от подвижного состава, движущегося с горки с высокой скоростью и большой массой. Ежегодно затрачиваются значительные материальные и финансовые ресурсы для восстановления рекомендуемого нормативными документами профиля спускного участка железнодорожного пути. Информационно-физическая модель сортировочной горки позволила бы установить критичные режимы ее работы, возникающие при сочетании конкретных условий и факторов, негативно влияющих на устойчивость земляного полотна, не выдерживающего появляющиеся импульсные нагрузки. Использование вариантных закрепляющих структур модельной реконструкции наряду с изменениями в технологии работы горки позволили бы на

основе соответствующих расчетов выбрать наиболее рациональные, комплексные, практически приемлемые и наиболее эффективные технико-технологические решения [9].

Существенно расширяются возможности такой модели, реализующей результаты расчетов состояний отдельных объектов в процессе взаимодействий в виде трехмерного событийного образа [10]. При различной степени детализации

и точности процессного описания модельный 3D-образ системы может быть изоморфен или гомоморфен реальному прототипу (рисунок 1.1), что упрощает алгоритм реализации модели и конкретизирует ее использование (например, в качестве эффективного тренажера, способного обучить и протестировать студента, дежурного по станции, дежурного по горке, диспетчера).

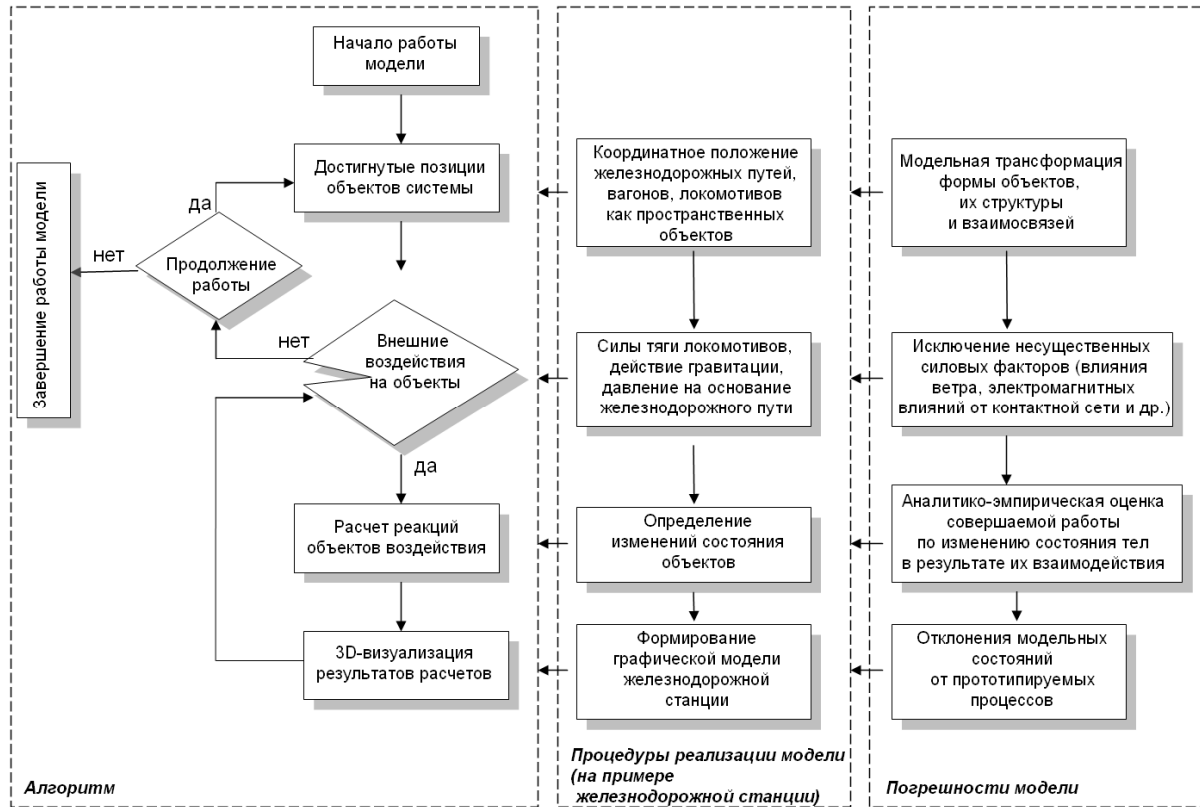


Рисунок 1.1 – Гомоморфизм информационно-физической модели технической системы

Реалистичные имитации технологии работы железнодорожной станции, благодаря эффекту присутствия, легко воссоздают рабочую атмосферу, формируя особые психологические установки с быстрой выработкой специфического мышления инженера-управленца с обостренным чувством ответственности, внимательности, сосредоточенности и уверенности в своих действиях, что оказывается исключительно важным в условиях принятия быстрых и правильных решений в сложной оперативной обстановке.

Реализация информационно-физической модели технической системы представляется достаточно сложной задачей исследования взаимодействий деформируемых твердых тел при их динамическом контакте. Действие множества существенных и опосредованных факторов, взаимная корреляция их влияний при динамическом разворачивании процессов модельной системы приведет к необходимости ранжирования всех внешних воздействий, способных привести к изменению состояний моделируемых объектов

(вагонов, локомотивов и железнодорожного пути – для рассматриваемой локации железнодорожной станции). Из множества всех сил и усилий необходимо выбрать только такие, которые оказываются значимыми (гравитационные, электромагнитные и некоторые другие) для исследуемых процессов, и рассчитывать результатные эффекты их влияния (изменение пространственного положения, появление внутренних напряжений, деформаций и др.) на основе существующих физических теорий. Сравнение достигнутого состояния модельных объектов с аналогичным натурным образом, получившим свое развитие в результате естественных физических процессов, выявит различие, которое можно объяснить неучтенным совокупным влиянием прочих факторов. Посредством введения определенной эмпирической поправки к аналитическим расчетам информационно-физическая модель технической системы может быть приведена в соответствие с ее реальным прототипом.

Заключение

Таким образом, разработка модели динамической системы объектов с воспроизведением следствий действия физических законов позволит в имитационных процессах прогнозировать наступление нештатных ситуаций и упреждать их возникновение в сложных условиях функционирования реальных прототипов, своевременно принимая соответствующие административные и технические меры. Воспроизведение модельных образов в визуализированном трехмерном представлении раскрывает обширные возможности формирования квазифизического мира, в котором реконструкции адекватны реальным процессам, что обеспечивает полное погружение в среду нематериального окружения привычных и узнаваемых цифровых объектов с наблюдаемым действием физических сил. Виртуальная действительность такой эрзац-среды позволит воссоздавать и наблюдать сложные, опасные и запретельные симуляции, не воспроизводимые в реальных условиях и раскрывающие новые возможности технических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Головнич, А.К. Технические и технологические аспекты разработки трехмерных моделей путевого развития и технического оснащения железнодорожных станций // А.К. Головнич // Совершенствование технологии перевозочного процесса: материалы междунар. науч.-практ. конф., Новосибирск, 27 ноября 2014 г. / Сибирский государственный университет путей сообщения Новосибирск; ред.: А.А. Климов (отв. ред.). – Новосибирск, 2015. – С. 35–38.

2. Головнич, А.К. Эффективные решения транспортных задач на инженерной компьютерной модели железнодорожной станции / А.К. Головнич // Наука, технология и инновационные технологии: материалы междунар. науч. конф., Ашхабад, 11–13 июня 2015 г. / Министерство образования Туркменистана; ред.: Б. Башимов [и др.]. – Ашхабад, 2015. – С. 143–145.

3. Головнич, А.К. Концептуальные основы трехмерного проектирования объектов железнодорожных станций / А.К. Головнич // Современные проблемы развития железнодорожного транспорта и управления перевозочным процессом: материалы междунар. науч.-практ. конф. Москва, 16–17 октября 2014 г. / Московский гос. ун-т путей сообщения (МИИТ); редкол.: В.Н. Морозов, Ю.О. Пазойский (общ. ред.) [и др.] – М., 2015. – С. 29–30.

4. Головнич, А.К. Концептуальная основа разработки инженерной модели 3D-станции / А.К. Головнич // Мир транспорта. – 2016. – Т. 14, № 1 (62). – С. 46–53.

5. Головнич, А.К. Физические свойства объектов инженерной модели 3D-станции / А.К. Головнич // Мир транспорта. – 2015. – Т. 13, № 4. – С. 25–34.

6. Головнич, А.К. Особенности разработки динамической модели железнодорожной станции с реконструкцией физических процессов / А.К. Головнич // Транспортные системы: тенденции развития: междунар. науч.-практ. конф., посвященная 120-летию МГУП ПС (МИИТа); редкол.: Б.А. Левин (общ. ред.). – М.; МИИТ, 2016. – С. 370–373.

7. Головнич, А.К. Верификация динамической модели физических процессов виртуальных объектов технической системы / А.К. Головнич // Информационные технологии и системы: материалы междунар. науч. конф., Минск, 28 октября 2015 г. / Белорус. гос. ун-т информатики и радиоэлектроники; редкол.: Л.Ю. Шилин [и др.]. – Минск, 2015. – С. 46–47.

8. Головнич, А.К. Моделирование опасных состояний железнодорожного пути на трехмерных моделях станций / А.К. Головнич // Проблемы безопасности на транспорте: материалы VII междунар. науч.-практ. конф.; редкол.: В.И. Сенько (гл. ред.) [и др.]. – Гомель, БелГУТ, 2015. – С. 236–237.

9. Головнич, А.К. Сферы применения трехмерных моделей железнодорожных станций с реконструкцией физических процессов / А.К. Головнич // Современные информационные и коммуникационные технологии на транспорте, в промышленности и образовании: материалы X междунар. науч.-практ. конф., Днепропетровск, 14–15 декабря 2016 г. / Днепропетровский нац. техн. ун-т железнодорожного трансп.; редкол.: В.В. Скалозуб [и др.]. – Днепропетровск, 2016. – С. 67–68.

10. Головнич, А.К. Технологические свойства объектов инженерной модели 3D-станции / А.К. Головнич // Мир транспорта. – 2016. – Т. 14, № 2 (63). – С. 34–42.

Поступила в редакцию 17.01.17.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;

- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;

- сведения об авторах;

- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;

- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;

- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).