

ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№4 (29) 2016

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:
С.А. Хахомов (Беларусь)

**ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО
РЕДАКТОРА:**
А.В. Рогачёв (Беларусь)
О.М. Демиденко (Беларусь)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

EDITOR-IN-CHIEF:
S.A. Khakhomov (Belarus)

DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:
A.V. Rogachev (Belarus)
O.M. Demidenko (Belarus)

EDITORIAL BOARD:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

EXECUTIVE SECRETARY:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

EDITION ADDRESS:
F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 4 (29) 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

- Афанасьев А.А., Гайда Л.С., Матук Е.В., Свистун А.Ч.** Движение серебряных наночастиц в жидкости с различной вязкостью под действием сил светового давления 7
- Горбадей О.Ю., Зеневич А.О., Новиков Е.В.** Регистрация светового потока с учетом наличия послеимпульсов в одноквантовых лавинных фотоприемниках 13
- Митюрин Г.С., Лебедева Е.В., Сердюков А.Н.** Фотодефлекционная спектроскопия хиральных углеродных нанотрубок 19
- Тюменков Г.Ю., Песенко А.Ю., Богданович Д.А.** Моделирование периодических орбит для тройных систем с ньютоновским гравитационным взаимодействием 27
- Хило П.А., Хило Н.А., Проневич О.И.** Генерация бесселевых световых пучков второй гармоники в кристаллах с радиально-периодической нелинейностью 31
- Ярмоленко М.А., Рогачёв А.А., Рогачёв А.В.** Влияние технологических режимов формирования на структуру и свойства покрытий на основе полимеров, осаждаемых из активной газовой фазы (обзор). 2. Влияние условий и режимов процессов, протекающих на поверхности осаждения 35

МАТЕМАТИКА

- Бородич Р.В., Бородич Е.Н., Селькин М.В.** О строении субнормальных подгрупп в группах с операторами 41
- Воробьев Н.Н., Кузнецова А.Р.** Об отделимых решетках насыщенных формаций 45
- Ковалева В.А.** Конечные группы с заданными обобщенно максимальными подгруппами (обзор). I. Конечные группы с обобщенно нормальными n -максимальными подгруппами 48
- Крук Ю.С., Дудовская Ю.Е.** Инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний открытой сети с неактивными заявками и многорежимными стратегиями обслуживания 59
- Миротин А.Р., Атвиновский А.А.** О некоторых свойствах функционального исчисления замкнутых операторов в банаховом пространстве 63
- Мысловец Е.Н.** J -конструкция композиционных формаций и произведения конечных групп 68

ТЕХНИКА

- Можаровский В.В., Кузьменков Д.С.** Методика определения параметров контакта индентора с ортотропным покрытием на упругом изотропном основании 74

ИНФОРМАТИКА

- Борискевич А.А.** Синтез многокомпонентных генераторов псевдослучайных одномерных и двумерных сигналов 82
- Осипенко А.Н., Осипенко Н.Б., Невдашенко Е.В.** Экспертно-аналитическая оптимизация при формировании социальных групп 89
- Соколов А.В.** Метод синтеза полного класса бент-функций шести переменных 94
- Филипенко А.С., Овсянников К.В., Болотов С.В.** Анализ требований к школьному расписанию с учетом специфики белорусского законодательства 103

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Г. Н. Петухова, Т. А. Фицнер*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 01.12.16. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 12,79. Уч.-изд. л. 11,14. Тираж 100 экз. Заказ № 679.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246019, Гомель

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2016
© Проблемы физики, математики и техники, 2016
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2016

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 4 (29) 2016

CONTENTS

PHYSICS

- Afnas'ev A.A., Gaida L.S., Matuk E.V., Svistun A.Ch.** The movement of silver nanoparticles in liquid with various viscosity under the influence of forces of light pressure 7
- Gorbadey O.Y., Zenevich A.O., Novikov E.V.** Check of the light flux with the availability of afterpulses in single photon avalanche photodetectors 13
- Mityurich G.S., Lebedeva E.V., Serdyukov A.N.** The photodeflection spectroscopy of chiral carbon nanotubes 19
- Tyumenkov G.Yu., Pesenko A.Yu., Bogdanovich D.A.** Simulation of periodic orbits for three-body systems with Newtonian gravitational interaction 27
- Khilo P.A., Khilo N.A., Pronevich O.I.** Generation of Bessel light beams of the second harmonic in crystals with radial-periodically nonlinearity 31
- Yarmolenko M.A., Rogachev A.A., Rogachev A.V.** The impact of technological processes on the properties of polymer-based coatings deposited from active gas phase (Review). 2. Influence of conditions and parameters of the processes proceeding on the deposited surface 35

MATHEMATICS

- Borodich R.V., Borodich E.N., Selkin M.V.** On the structure of subnormal subgroups in groups with operators 41
- Vorob'ev N.N., Kuznetsova A.R.** On separated lattices of saturated formations 45
- Kovaleva V.A.** Finite groups with given generalized maximal subgroups (Review). I. Finite group with generalized normal n -maximal subgroup 48
- Kruk J.S., Dudovskaya Y.E.** Stationary distribution insensitivity of an open queueing network with non-active customers and multimode service strategies 59
- Mirotin A.R., Atvinovskii A.A.** On some properties of a functional calculus of closed operators on Banach space 63
- Myslovets E.N.** J -construction of composition formations and products of finite groups 68

TECHNICS

- Mozharovsky V.V., Kuzmenkov D.S.** The technique for determining the parameters of a contact for indenter with the orthotropic coating on the elastic isotropic substrate 74

INFORMATION SCIENCE

- Boriskevich A.A.** Synthesis of multicomponent generators of pseudorandom one-dimensional and two-dimensional signals 82
- Osipenko A.N., Osipenko N.B., Neudashenko E.V.** Expert-analytical optimization of the formation of social groups 89
- Sokolov A.V.** Synthesis method of a complete class of Bent-functions of six variables 94
- Filipenka A.S., Ausiannikau K.V., Bolotov S.V.** Analysis of school schedule requirements taking into account specificity of the Belarusian legislation 103

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

- Technics (Informatics, Computer Science and Control);**
- Physics and Mathematics.**

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 535.36

ДВИЖЕНИЕ СЕРЕБРЯНЫХ НАНОЧАСТИЦ В ЖИДКОСТИ С РАЗЛИЧНОЙ ВЯЗКОСТЬЮ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ

А.А. Афанасьев¹, Л.С. Гайда², Е.В. Матук², А.Ч. Свистун²

¹Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси
²Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

THE MOVEMENT OF SILVER NANOPARTICLES IN LIQUID WITH VARIOUS VISCOSITY UNDER THE INFLUENCE OF FORCES OF LIGHT PRESSURE

A.A. Afanas'ev¹, L.S. Gaida², E.V. Matuk², A.Ch. Svistun²

¹B.I. Stepanov Institute of Physics of NAS Belarus
²Y. Kupala Grodno State University

Приведены результаты теоретических и экспериментальных исследований действия сил светового давления на движение серебряных наночастиц, находящихся в жидкостях с различным значением вязкости. Получено выражение основного уравнения динамики с учетом градиентной силы, сил поглощения и рассеяния, действующих на металлическую сферическую наночастицу в поле сфокусированного лазерного пучка гауссовой формы. Экспериментально определены скорости движения серебряных наночастиц и их перемещения в средах с различными коэффициентами вязкости.

Ключевые слова: металлическая наночастица, гауссов пучок, градиентная сила, силы рассеяния и поглощения, скорость наночастицы, вязкость жидкости.

The results of theoretical and experimental studies of influence of forces of light pressure upon the movement of the silver nanoparticles which are in liquid environments with various value of viscosity are given. The expression of the main equation of dynamics taking into account the gradient force, forces of absorption and dispersion operating on a metal spherical nanoparticle in the field of the focused laser beam of a Gaussian form are received. The speeds of the movement of silver nanoparticles and their movement in environments with various coefficients of viscosity are experimentally determined.

Keywords: metal nanoparticle, Gaussian beam, gradient force, forces of dispersion and absorption, speed of nanoparticles, liquid viscosity.

Введение

Одним из интересных эффектов взаимодействия лазерного излучения с суспензией наночастиц в жидкости является движение наночастиц в световом поле. Вопросы оптической манипуляции диэлектрических и металлических, микро- и наноразмерных частиц рассматривались в целом ряде теоретических и экспериментальных работ, из которых назовем лишь тематически близкие к рассматриваемой нами задаче [1]–[7].

В работе рассматривается движение серебряных наночастиц, находящихся в жидкостях с различной вязкостью, под действием сил светового давления. Известно, что при воздействии интенсивным лазерным излучением на наночастицы, находящиеся в жидкости, происходит разогрев наночастицы и жидкости вокруг нее. И, как следствие, при изменении температуры меняется вязкость среды, что может оказывать заметное влияние на транспортировку наночастиц. Такой тепловой фактор является весьма интересным в медико-биологических исследованиях. Например, разогретая наночастица может проделывать отверстие в мембране клетки и, тем самым, облегчить доставку лекарств внутрь нее [8], [9]. Как отмечают авторы [9], [10], сильный нагрев наночастиц лазерным излучением применяется в

процедурах фототермолиза раковых клеток. Облучение лазерными импульсами наночастиц приводит к быстрому локальному разогреву наночастиц за счет поглощения лазерного излучения, что в конечном итоге вызывает повреждение раковых клеток, оставляя здоровые неповрежденными. Механизм повреждения в настоящее время является предметом исследований.

Также необходимо отметить, что сила светового давления, действующая на металлическую наночастицу, может существенно возрастать, если частота излучения лазера совпадает с частотой плазмонного резонанса в наночастице [11], [12]. Это позволяет получить значительный отклик металлической наночастицы на излучение, что в свою очередь позволяет более эффективно управлять движением наночастиц в лазерном излучении. Эти и другие обстоятельства определяют интерес к исследованию влияния параметров наночастиц и среды на движение наночастиц в поле лазерного излучения.

Сильное резонансное поглощение наночастиц находит применение в процедурах фотоакустической визуализации. К поверхности наночастиц с помощью физической адсорбции или ковалентной пришивки прикреплены узнающие биомакромолекулы (например, одонитевые

олигонуклеотиды, антитела и т. п.). Такие наноструктуры называют конъюгатами. В результате, молекула-зонд конъюгата используется для уникального связывания с мишенью, а металлическое ядро – для визуализации взаимодействия в случае диагностики с помощью резонансного рассеяния света в темнопольной микроскопии [10].

Несмотря на большое число работ по оптической манипуляции частицами малых размеров, процесс динамики их движения, насколько нам известно, не нашел должного рассмотрения. Поэтому в данной работе нами предпринята попытка устранить данный пробел.

1 Основные соотношения

На металлическую наночастицу сферической формы, находящуюся в пространственно-неоднородном пучке со стороны лазерного излучения, действует сила светового давления, которая способна перемещать наночастицу в разных средах, осуществлять пространственное разделение наночастиц в зависимости от их размеров и оптических свойств.

Сила, с которой электромагнитное поле действует на металлическую наночастицу, условно можно разделить на две составляющие [13]: компоненту силы, действующую вдоль градиента интенсивности поля и отличную от нуля только в неоднородном электрическом поле, т.е. градиентную силу \mathbf{F}^{grad} , и силу, действующую вдоль направления распространения излучения, являющуюся суммой сил поглощения \mathbf{F}^{abs} и рассеяния \mathbf{F}^{scat} . Таким образом, полную силу светового давления можно представить в виде:

$$\mathbf{F}^{light} = \mathbf{F}^{grad} + \mathbf{F}^{abs} + \mathbf{F}^{scat}. \quad (1.1)$$

В случае поглощающей наночастицы [14], [15]:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{grad} &= \frac{|\alpha|}{2} \nabla I, \\ \mathbf{F}^{abs} &= \frac{n_m \sigma_{abs} I}{c}, \\ \mathbf{F}^{scat} &= \frac{n_m \sigma_{scat} I}{c}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где

$$\alpha = \alpha' + i\alpha'' = 3V \frac{n_p^2 - n_m^2}{n_p^2 + 2n_m^2}$$

– поляризуемость металлической наночастицы,

$$\sigma_{abs} = k_m \alpha'' \quad (1.3)$$

– поперечное сечение поглощения наночастицы,

$$\sigma_{scat} = \frac{k_m^4 |\alpha|^2}{4\pi}$$

– сечение рассеяния наночастицы,

где I – интенсивность излучения действующего на наночастицу, ∇ – оператор градиента, $k_m = 2\pi n_m / \lambda$ – волновое число, n_m – показатель преломления жидкости, λ – длина волны в вакууме, c – скорость света в вакууме, V – объем

наночастицы, n_p – показатель преломления материала наночастицы.

Входную амплитуду гауссова пучка, распространяющегося вдоль оси z , в декартовой системе координат (x, y, z) представим в следующем виде [6]:

$$E(x, y, 0) = E_0 \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\rho_0^2}\right), \quad (1.4)$$

где E_0 и ρ_0 – соответственно амплитуда и радиус пучка. Поскольку лазерный пучок в рассматриваемой задаче фокусируется тонкой линзой в кювету с наночастицей, выражение для интенсивности падающего электромагнитного поля имеет вид [16], [17]:

$$\begin{aligned} I(x, y, z) &= \frac{I_0}{\left(1 - \frac{z}{f}\right)^2 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{\rho_0^2 \left[(1 - z/f)^2 + (z/z_0)^2\right]}\right\}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где f – фокусное расстояние линзы, I_0 – входная интенсивность излучения, $z_0 = k\rho_0^2$ – дифракционная длина пучка.

Следует отметить, что в случае нахождения наночастицы на оси пучка ($x = y = 0$) на нее будут действовать сила рассеяния \mathbf{F}^{scat} и поглощения \mathbf{F}^{abs} , а так же и продольная компонента градиентной силы $\mathbf{F}^{grad,z}$, которая имеет вид:

$$\mathbf{F}^{grad,z} = \frac{|\alpha| I_0}{f} \frac{1 - z/z_w}{\left[(1 - z/f)^2 + (z/z_0)^2\right]^2}, \quad (1.6)$$

где $z_w = \frac{f}{1 + (f/z_0)^2}$ – точка перетяжки лазерного луча.

Основное уравнение динамики для наночастицы, находящейся на оси лазерного пучка, можно представить в виде:

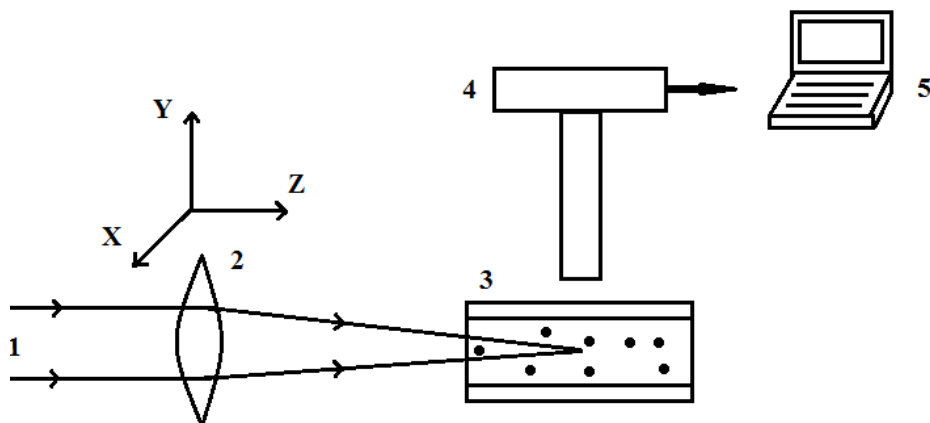
$$m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} + k \cdot \frac{dz}{dt} = \mathbf{F}^{grad,z} + \mathbf{F}^{scat} + \mathbf{F}^{abs}, \quad (1.7)$$

где m – масса наночастицы, $k = 6\pi\eta R$ – коэффициент трения в жидкости с динамической вязкостью η , R – радиус наночастицы.

Для дальнейшего экспериментального исследования движения металлической наночастицы под действием силы светового давления будем рассматривать множество серебряных наночастиц.

2 Определение скорости движения серебряных наночастиц, находящихся в жидкости в поле сфокусированного лазерного луча

Для экспериментальной оценки скорости движения серебряных наночастиц под действием сил светового давления лазерного излучения



1 – излучение лазера ЛТИ-701, 2 – фокусирующая линза,
3 – кювета с серебряными наночастицами, взвешенными в жидкости,
4 – цифровая видеокамера Logitech c920 совмещенная с микроскопом, 5 – компьютер

Рисунок 2.1 – Схема экспериментальной установки по исследованию действия сил светового давления лазерного излучения гауссовой формы на серебряные наночастицы в жидкости

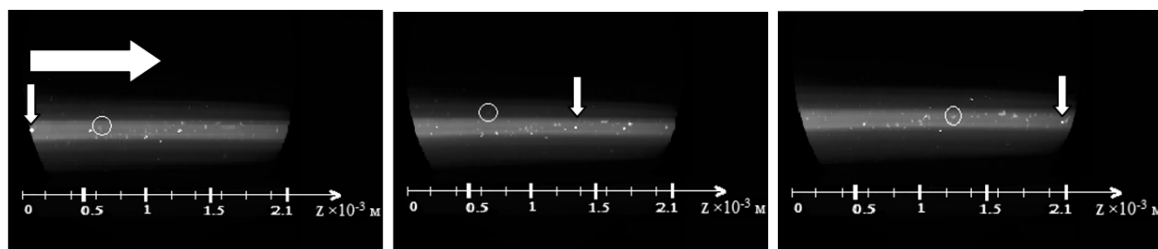


Рисунок 2.2 – Положения серебряных наночастиц в жидкости в поле лазерного излучения в разные промежутки времени: $t = 0$ с (1), 2,5 с (2), 4 с (3) (частица указана стрелкой). Кружками обозначены наночастицы не попавшие в фокус объектива микроскопа

создана лазерная установка, оптическая схема которой изображена на рисунке 2.1. В качестве источника оптического излучения использовался лазер ЛТИ-701 с длиной волны генерации 532 нм, максимальной мощностью до 4 Вт, радиусом пучка $r_0 = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м и интенсивностью $I_0 = 5,1 \cdot 10^6$ Вт/м². Лазерный пучок гауссовой формы фокусировался на кювету собирающей линзой с фокусным расстоянием $f = 0,1$ м. Визуализация за движением наночастиц осуществлялась при помощи компьютера с цифровой видеокамерой Logitech c920, которая была совмещена с микроскопом.

Особое внимание было уделено реализации возможности определения линейных размеров области кюветы, в пределах которой происходило перемещение наночастиц. Твердотельный YAG: Nd лазер с радиусом пучка $0,5 \cdot 10^{-3}$ м использовался в качестве «масштабной линейки», позволяющей измерить размеры той части кюветы, на которую был сфокусированный объектив микроскопа. Для этого лазерный луч направлялся на кювету с наночастицами, расположенными в воде. Зная радиус наблюдаемого в микроскопе лазерного пучка, есть возможность разбить всю область визуализированной части кюветы на равные участки длиной $0,5 \cdot 10^{-3}$ м. В результате

максимальное перемещение наночастиц, которое можно наблюдать в микроскопе, составляет $\approx 2,1 \cdot 10^{-3}$ м (рисунок 2.2).

На рисунке 2.2 показаны результаты действия сил светового давления лазерного излучения на серебряные наночастицы в точках $z < f$. В результате рассеяния лазерного излучения от наночастиц имеется возможность определения положения наночастиц в разный момент времени.

Следует отметить, что в эксперименте преимущественное движение серебряных наночастиц наблюдалось вдоль направления распространения лазерного излучения по сравнению со смещением поперек к направлению пучка. Вследствие того, что размер наночастиц существенно меньше радиуса поперечного сечения лазерного пучка, интенсивность действующего на наночастицу излучения не значительно меняется на расстояниях порядка нескольких размеров наночастицы, что приводит к относительно небольшой по абсолютной величине градиентной силе.

Относительная нечеткость изображений связана с рассеянием света не только на металлических наночастицах, но и на поверхности стекла кюветы [18]. Кроме того, некоторые наночастицы, которые визуализировались в виде

темных пятен на показанных снимках (отмечены кружками), не попали в фокус объектива микроскопа. Светлые точки соответствуют наночастицам находящимся в фокусе объектива.

На рисунках 2.3 и 2.4 представлена теоретическая зависимость скорости движения наночастиц в лазерном пучке от времени, полученная с помощью численного моделирования уравнения (1.7), и экспериментальные результаты изменения скорости движения наночастиц для жидкостей с различной вязкостью. В качестве материальных параметров были взяты следующие: радиус серебряных наночастицы $R = 50$ нм с комплексным показателем преломления

$$n_p = 0,06 + i3,586$$

[19], плотность материала наночастиц $\rho = 10500$ кг/м³ [20]. Длина волны лазерного излучения 532 нм, мощность лазера 4Вт, радиус лазерного пучка $\rho_0 = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м, фокусное расстояние линзы $f = 0,1$ м. Будем рассматривать случаи нахождения наночастиц в трех жидкостях с различными значениями коэффициентов вязкости и показателями преломления: 1 – вода ($n_m = 1,33$, $\eta = 100,4 \cdot 10^{-6}$ кг/(см·с)), 2 – смесь воды и глицерина в соотношении 50:50 ($n_m = 1,34$), 3 – смесь воды и спирта в соотношении 50:50 ($n_m = 1,4$).

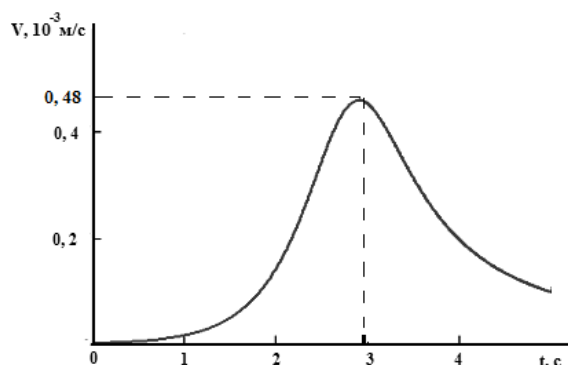


Рисунок 2.3 – Теоретическая зависимость скорости движения серебряных наночастиц в лазерном поле от времени (для случая нахождения наночастиц в воде) на основании численного моделирования уравнения (1.7).

Максимальная скорость в момент $t = 3$ с равна $v = 0,48 \cdot 10^{-3}$ м/с

Максимальная скорость (рисунок 2.3) оказалась равной $v = 0,48 \cdot 10^{-3}$ м/с для момента времени, когда наночастицы находятся в точке перетяжки лазерного луча. Так как в данной точке интенсивность лазерного излучения достигает наибольшего значения, это приводит, согласно выражениям (1.2), (1.5), к увеличению сил рассеяния и поглощения. В области за точкой перетяжки лазерного луча силы, действующие на наночастицы со стороны лазерного излучения, уменьшаются, что приводит к уменьшению их скорости.

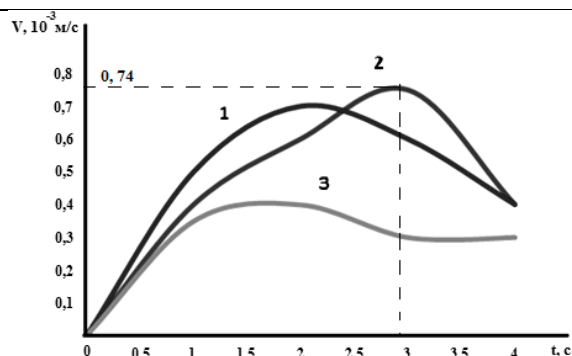


Рисунок 2.4 – Экспериментальная зависимость скорости движения серебряных наночастиц в лазерном поле от времени в жидкостях с различной вязкостью $n_m = 1,34$ (1), 1,33 (2), 1,4 (3)

Кривые, представленные на рисунке 2.4, были получены на основе анализа экспериментальных результатов. Значения скорости рассчитывались путем измерения средних расстояний, пройденных наночастицами для каждого последовательного промежутка времени. Время между отдельными измерениями составляло 0,5 с.

Кривая 1, изображенная на рисунке 2.4, соответствует изменению скорости движения наночастиц, находящейся в растворе спирта с водой ($n_m = 1,34$). Максимальная скорость соответствует значению $0,74 \cdot 10^{-3}$ м/с. Однако, вследствие того, что плотность смеси спирта с водой значительно меньше плотности серебра, наблюдалось оседание наночастиц на дно кюветы. Для предотвращения данного факта перед проведением данного эксперимента необходимо было ультразвуковое воздействие на кювету с суспензией наночастиц в жидкости, для того чтобы больше наночастиц попали на ось лазерного луча. Далее наночастицы помещались в смесь воды с глицерином ($n_m = 1,4$). Результаты представлены на кривой 3. Максимальная скорость движения наночастиц составила $0,41 \cdot 10^{-3}$ м/с. Для сравнения проведены эксперименты по движению наночастиц в дистиллированной воде. Максимальное значение скорости наночастиц (кривая 2 ($n_m = 1,33$)) равно $0,78 \cdot 10^{-3}$ м/с. Полученные результаты подтверждает соответствующее влияние изменения коэффициента вязкости среды на скорость движения наночастиц в поле лазерного луча.

Как видно из рисунков 2.3 и 2.4, форма кривых и максимальные значения скорости наночастиц, находящихся в воде, полученные из теоретических и экспериментальных расчетов, отличается на $\approx 0,26 \cdot 10^{-3}$ м/с. Это объясняется тем, что в эксперименте на движение наночастиц оказывает влияние не только сила светового давления, но и тепловые процессы, возникающие в результате нагрева мощным лазерным излучением металлических наночастиц и жидкости, и,

как следствие, изменяется значение коэффициента вязкости жидкости.

Теоретическая и экспериментальная зависимости перемещения наночастиц от времени представлены на рисунках 2.5 и 2.6.

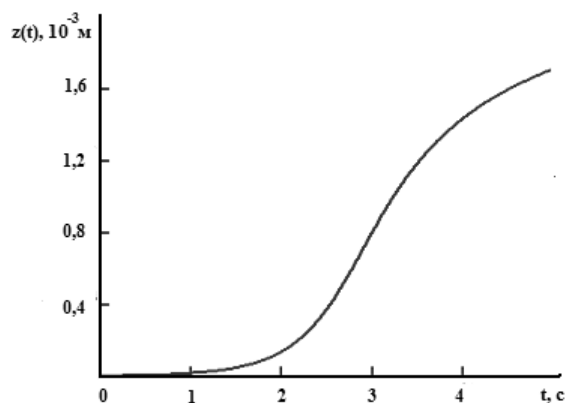


Рисунок 2.5 – Теоретическая зависимость перемещения серебряных наночастиц в воде ($n_m = 1,33$) в поле лазерного излучения от времени на основе численного моделирования формулы (1.7)

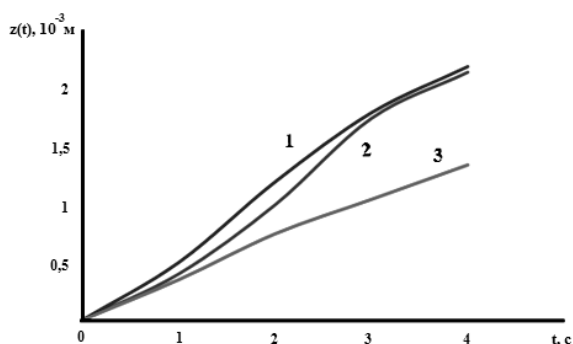


Рисунок 2.6 – Экспериментальная зависимость перемещения серебряных наночастиц в поле лазерного излучения от времени в жидкостях с различной вязкостью $n_m = 1,34$ (1), $1,33$ (2), $1,4$ (3)

Анализируя теоретические и экспериментальные зависимости скорости и перемещения от времени для металлических наночастиц в жидкости под действием сил светового давления можно сделать следующие заключения:

– центральные участки теоретической и экспериментальных зависимостей скорости движения наночастиц от времени имеют совпадения соответствующие интервалу времени $2 \text{ с} < t < 4 \text{ с}$ (рисунки 2.3, 2.4);

– боковые участки теоретической и экспериментальных зависимостей скорости движения наночастиц от времени при $t \leq 2 \text{ с}$ и $t \geq 4 \text{ с}$ имеют отличие (рисунки 2.3, 2.4), которое связано с тем, что в теоретической модели не учитываются процессы образования парового облака (наблюдаемого в эксперименте) в окрестности наночастиц и процессы вскипание жидкости, которые

возникают в результате воздействия лазерным излучением на наночастицу и среду[4];

– перемещение наночастиц в начальный момент времени значительно больше, чем перемещение полученное при численном моделировании уравнения (1.7), как хорошо видно из рисунков 2.5 и 2.6.

В эксперименте визуально наблюдалось также, что относительно «малые» наночастицы перемешаются с большей скоростью, чем более «крупные», что объясняется прямо пропорциональной зависимостью поляризуемости от радиуса наночастиц $\alpha \sim R^3$.

Заключение

В работе теоретически и экспериментально исследовано движение серебряных наночастиц под действием сил светового давления в поле сфокусированного лазерного пучка с гауссовым распределением интенсивности в средах с различной вязкостью.

Теоретически и экспериментально построены зависимости скорости движения и перемещения наночастиц от времени для сред с различной вязкостью. Показано, что для наночастиц радиусом $R = 50 \text{ нм}$ скорость их движения под действием сил светового давления значительно выше при малой вязкости среды.

Показано, что воздействие сил светового давления приводит к преимущественному смещению металлических наночастиц вдоль направления распространения лазерного излучения по сравнению со смещением поперек к направлению пучка.

Получено хорошее согласование экспериментальных и теоретических результатов для серебряных наночастиц размером $\sim 50 \text{ нм}$ на длине волны 532 нм при интенсивности лазерного излучения $I_0 = 5,1 \cdot 10^6 \text{ Вт/м}^2$.

Результаты работы могут стать основой для дальнейших теоретических и экспериментальных исследований по влиянию сил светового давления лазерного излучения гауссовой формы на металлические наночастицы в жидкостях с различными параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ashkin, A.* Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles / A. Ashkin, J.M. Dziedzic, J.E. Bjorkholm, S. Chu // Opt. Lett. – 1986. – Vol. 11. – P. 288–290.
2. *Ashkin, A.* Optical trapping and manipulation of single cells using infrared laser beams / A. Ashkin, J.M. Dziedzic, T. Yamane // Nature. – 1987. – Vol. 330. – P. 769–771.
3. *Гузатов, Д.В.* Теоретическое исследование силы светового давления, действующей на сферические наночастицы в поле лазерного излучения / Д.В. Гузатов, Л.С. Гайда // Вестник БГУ: Серия 1. – 2010. – № 3. – С. 29–33.

4. *Транспортировка металлических наночастиц в вязкой среде с помощью лазерного излучения* / А.А. Афанасьев, Л.С. Гайда, Д.В. Гузатов, И.И. Кургузенкова, Е.В. Матук // *Материалы IX Международной конференции «Лазерная физика и оптические технологии»*, Гродно, 30 мая – 2 июня 2012 г. / Институт физики НАН Беларуси им. Б.И. Степанова. – Минск, 2012. – С. 264–268.
5. *Рубинов, А.Н.* Сортировка микрочастиц градиентным полем / А.Н. Рубинов, В.М. Катаркевич, Т.Ш. Эфендиев // *Журнал прикладной спектроскопии*. – 2003. – № 5 (70). – С. 663–666.
6. *О радиационных силах, действующих на прозрачную наночастицу в поле сфокусированного лазерного пучка* / А.А. Афанасьев, Л.С. Гайда, Д.В. Гузатов, А.Н. Рубинов, А.Ч. Свистун // *Квантовая электроника*. – 2015. – Т. 45. – № 10. – С. 604–607.
7. *Концентрационная нелинейность суспензии прозрачных микросфер под действие градиентной силы в поле периодически модулированного лазерного излучения* / А.А. Афанасьев, Л.С. Гайда, Ю.А. Курочкин, Д.В. Новицкий, А.Ч. Свистун // *Квантовая электроника*. – 2016. – Т. 46. – № 10. – С. 891–894.
8. *Кургузенкова, И.И.* Световое давление на сферическую наночастицу с концентрической оболочкой в поле плоской электромагнитной волны / И.И. Кургузенкова, Д.В. Гузатов, Л.С. Гайда // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2013. – № 2 (15). – С. 11–17.
9. *Vapor bubble generation around gold nanoparticles and its application to damaging of cells* / M. Kitz [et al.] // *Biomed. Opt. Express*. – 2011. – Vol. 2, № 2. – P. 291–304.
10. *Хлебцов, А.Н.* Оптика и биофотоника наночастиц с плазмонным резонансом / А.Н. Хлебцов. – *Квантовая электроника*, 2008. – 504с.
11. *A hybridization model for the Plasmon response of complex nanostructures* / E. Prodan [et al.] // *Science*. – 2003. – Vol. 302. – P. 419–422.
12. *Климов, В.В.* Наноплазмоника / В.В. Климов. – М.: Физматлит, 2009. – 480 с.
13. *Chaumet, P.C.* Time-averaged total force on a dipolar sphere in an electromagnetic field / P.C. Chaumet, M. Nieto-Vesperinas // *Opt. Lett.* – 2000. – Vol. 25, № 15. – P. 1065–1067.
14. *Efficient Optical Trapping and Visualization of Silver Nanoparticles* / L. Bosanac, T. Aabo, P.M. Bendix, L.B. Oddershede // *Nano Letters*. – 2008. – Vol. 8, № 5. – P. 1486–1491.
15. *Матук, Е.В.* Движение металлической наночастицы вблизи поверхности пузырька воздуха в жидкости под действием силы светового давления / Е.В. Матук, Л.С. Гайда, Д.В. Гузатов // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2015. – № 3 (24). – С. 17–20.
16. *Ахманов, С.А.* Физическая оптика / С.А. Ахманов, С.Ю. Никитин. – М.: Наука, 2004. – 654 с.
17. *Транспортировка сферической прозрачной наночастицы радиационными силами в поле гауссова пучка лазерного излучения* / А.А. Афанасьев, Л.С. Гайда, Д.В. Гузатов, Д.В. Новицкий, Е.В. Матук // *Оптика и спектроскопия*. – 2016. – Т. 120. – № 1. – С. 53–57.
18. *Johnson, P.B.* Optical constants of the noble metals / P.B. Johnson, R.W. Christy // *Phys. Rev. B*. – 1973. – Vol. 6, №12. – P. 4370–4379.
19. *Таблицы физических величин*; под ред. И.К. Кикоина. – М.: Атомиздат, 1976 – 1006 с.

Поступила в редакцию 24.07.16.

УДК 621.383

РЕГИСТРАЦИЯ СВЕТОВОГО ПОТОКА С УЧЕТОМ НАЛИЧИЯ ПОСЛЕИМПУЛЬСОВ В ОДНОКВАНТОВЫХ ЛАВИННЫХ ФОТОПРИЕМНИКАХ

О.Ю. Горбадей, А.О. Зеневич, Е.В. Новиков

Белорусская государственная академия связи

CHECK OF THE LIGHT FLUX WITH THE AVAILABILITY OF AFTERPULSES IN SINGLE PHOTON AVALANCHE PHOTODETECTORS

O.Y. Gorbadey, A.O. Zenevich, E.V. Novikov

Belarusian State Academy of Telecommunications

Разработан метод, позволяющий повысить точность измерения светового потока при помощи одноквантовых лавинных фотоприемников путем учета помехи, вносимой темновыми импульсами и послеимпульсами. Предложено устройство для реализации этого метода. Определены условия применимости разработанного метода.

Ключевые слова: одноквантовый лавинный фотоприемник, одноквантовые импульсы, темновые импульсы, послеимпульсы, световой поток.

The developed method allows to increase the accuracy of measurement of luminous flux using single photon avalanche photodetectors by taking into account dark pulses and afterpulses. The device for implementing this method was proposed. The defined for the applicability of the developed method were conditions.

Keywords: single photon avalanche photodetector, single photon pulses, dark pulses, afterpulses, luminous flux.

Введение

В настоящее время метод одноквантовой регистрации находит применение для регистрации сверхслабых оптических излучений. Особенно широко используется этот метод в фотометрии слабо светящихся объектов в астрономии, биологии и медицине. Для реализации метода традиционно использовались такие электровакуумные фотоприемники как фотоэлектронные умножители и диссекторы. Однако эти фотоприемники имеют ряд недостатков, прежде всего низкую механическую прочность, малую чувствительность в ближней инфракрасной области спектра, высокие напряжения питания. Поэтому в последние годы на смену фотоэлектронным умножителям и диссекторам пришли лавинные фотоприемники (ЛФП), которым не свойственны названные выше недостатки [1].

Вместе с тем при проведении фотометрических измерений при помощи ЛФП, работающих в режиме одноквантовой регистрации, необходимо учитывать наличие в этих фотоприемниках темновых импульсов и послеимпульсов. К темновым относят импульсы, которые возникают в ЛФП в отсутствии оптического излучения и вызываются термогенерированными носителями заряда. Послеимпульсы – импульсы, возникающие вслед за темновыми или одноквантовыми импульсами и имеющие с ними корреляционную связь. К одноквантовым импульсам относят импульсы, вызванные квантом регистрируемого оптического излучения.

Темновые импульсы и послеимпульсы являются помеховыми и ухудшают точность фотометрических измерений. Поэтому при проведении таких измерений необходимо учитывать наличие этих помех и принимать соответствующие меры для уменьшения погрешности измерений. В настоящее время, однако, отсутствуют достаточно простые методы, которые позволили бы одновременно учесть при проведении фотометрических измерений наличие помеховых сигналов одной и второй природы – темновых и послеимпульсов.

В связи с этим целью данной работы является разработка метода, повышающего точность фотометрических измерений при помощи ЛФП, работающих в режиме одноквантовой регистрации, путем компенсации погрешностей, вносимых темновыми импульсами и послеимпульсами.

1 Описание метода

Метод применим для источников оптического излучения со статистикой фотонов, соответствующей распределению Пуассона. Отметим, что при времени регистрации числа фотонов ≥ 1 мкс большинство тепловых источников излучения, светодиодов и лазеров удовлетворяют этому требованию [2].

Рассмотрим фотоприемник, работающий в режиме одноквантовой регистрации, на который поступает оптический поток со статистикой фотонов согласно распределению Пуассона. Среднее количество N одноквантовых импульсов на

выходе фотоприемника за некоторый интервал времени измерения t , больший, чем время затухания послеимпульсов, можно определить следующим образом:

$$N = \eta N_\phi + z\eta N_\phi + z^2\eta N_\phi + z^3\eta N_\phi + \dots \approx \eta N_\phi / (1 - z), \quad (1.1)$$

где N_ϕ – среднее число фотонов, поступивших на вход фотоприемника за время t ; z – вероятность образования послеимпульсов; η – квантовая эффективность регистрации фотоприемника.

Напомним, что к возникновению послеимпульсов приводит образование в фотоприемнике темнового или одноквантового импульса. Если за время t в фотоприемнике не образуется ни одного одноквантового или темнового импульса, то не будет и послеимпульсов. Это значит, что в статистическом распределении за интервал времени t числа темновых, одноквантовых импульсов и послеимпульсов вероятность появления нулевого события $P(0)$ будет такой же, как и для фотоприемника без послеимпульсов.

Рассмотрим предварительно случай, когда вероятность образования темнового импульса в фотоприемнике достаточно мала и количеством темновых импульсов, образовавшихся за время измерения t , можно пренебречь.

В этом случае вероятность появления нулевого события будет определяться следующим выражением:

$$P(0) = \exp(-\eta N_\phi). \quad (1.2)$$

Из соотношения (1.2) можно выразить количество фотонов N_ϕ , поступающих на фотоприемник за время t , следующим образом:

$$N_\phi = \frac{\ln P(0)}{-\eta}. \quad (1.3)$$

На основании формулы (1.3) можно определить величину светового потока Φ по формуле:

$$\Phi = \frac{\ln P(0)}{-\eta t} h\nu = \frac{\ln P(0)}{-\eta t} h \frac{c}{\lambda}, \quad (1.4)$$

где h – постоянная Планка, ν – частота оптического излучения, c – скорость света, λ – длина волны оптического излучения.

Таким образом, для регистрации светового потока достаточно провести цикл измерений, включающий многократно повторяемый подсчет количества поступивших импульсов на временных интервалах заданной длительности. Задав для измерения длительность интервала времени, определив за этот интервал вероятность нулевого события, измерив квантовую эффективность регистрации фотоприемника η для длины оптического излучения λ , по формуле (1.4) можно определить значение светового потока Φ . Вероятность $P(0)$ можно оценить на основании данных о количестве m интервалов времени измерений длительностью t , на которых не было зарегистрировано ни одного одноквантового импульса или послеимпульса, и общего числа интервалов

измерения M . Отношение величины m к M и будет являться вероятностью $P(0)$.

В общем случае длительность отдельных интервалов t выбирается близкой к ожидаемому времени появления послеимпульсов, а их общее количество должно быть не менее нескольких сотен, что обеспечит получение допустимой статистической погрешности измерений. Например, для кремнивых лавинных фотоприемников время появления послеимпульсов не превышает 10 мкс [3].

Кроме измерения светового потока, используя оценку вероятности $P(0) = m / M$, полученную рассмотренным методом, и выражение (1.1), можно определить вероятность образования послеимпульсов:

$$z = 1 + \frac{\ln P(0)}{N} = 1 + \frac{\ln(m / M)}{N}.$$

Отметим, что рассмотренный выше случай малой вероятности образования темнового импульса характерен для ЛФП, охлажденных до температуры 78 К и ниже [4].

Теперь проанализируем ситуацию, в которой при определении величины Φ пренебречь учетом темновых импульсов, зарегистрированных за время измерения t , нельзя.

Если в фотоприемнике, работающем в режиме одноквантовой регистрации, отсутствуют послеимпульсы, то статическое распределение темновых импульсов соответствует распределению Пуассона [3]. При появлении в фотоприемнике послеимпульсов, вызванных темновыми импульсами, статистика импульсов на выходе фотоприемника (темновых импульсов и послеимпульсов) будет отличаться от распределения Пуассона. Вместе с тем вероятность появления нулевого события будет такой же, как для статистического распределения темновых импульсов в случае отсутствия послеимпульсов.

В этом случае вероятность нулевого события $P_m(0)$ определяется по формуле, аналогичной выражению (1.2) и имеющей следующий вид:

$$P_m(0) = \exp(-N_m),$$

где N_m – среднее число темновых импульсов, зарегистрированных за время измерения t . Для определения вероятности $P_m(0)$ достаточно провести цикл измерений, включающий многократно повторяемый подсчет количества поступивших импульсов на временных интервалах заданной длительности. Тогда вероятность $P_m(0)$ можно определить как отношение количества m_m интервалов времени измерений длительностью t , на которых не зарегистрировано ни одного темнового импульса или послеимпульса, к общему числу M таких интервалов измерения.

Тогда величину N_m можно определить на основании вероятности нулевого события:

$$N_m = -\ln P(0) = -\ln\left(\frac{m_m}{M}\right). \quad (1.5)$$

Согласно [1], [3], статистическое распределение смеси темновых и одноквантовых импульсов фотоприемника, работающего в режиме одноквантовой регистрации, подчиняется распределению Пуассона при отсутствии послеимпульсов. При появлении в фотоприемнике послеимпульсов статистика сигналов фотоприемника (темновых и одноквантовых импульсов, послеимпульсов) будет отличаться от распределения Пуассона [1], [3]. Вероятность же появления нулевого события будет такой же, как для статистического распределения смеси темновых и одноквантовых импульсов в случае отсутствия послеимпульсов.

С учетом вышеизложенного вероятность нулевого события $P_{см}(0)$ определяется следующим образом: $P_{см}(0) = \exp(-(N_m + \eta N_\phi))$. С другой стороны, вероятность $P_{см}(0)$ можно определить как отношение $m_{см}$ к M , где $m_{см}$ – число интервалов времени измерений длительностью t , на которых не зарегистрировано ни одного темнового, одноквантового импульсов или послеимпульса.

Тогда величину можно определить на основании $P_{см}(0)$ следующим образом:

$$N = -\ln P_{см}(0) = -\ln\left(\frac{m_{см}}{M}\right). \quad (1.6)$$

На основании выражений (1.5) и (1.6) можно получить оценку величины светового потока:

$$\Phi = \frac{-\ln\left(\frac{m_{см}}{M}\right) + \ln\left(\frac{m_m}{M}\right)}{\eta t} h\nu = \frac{\ln\left(\frac{m_m}{m_{см}}\right)}{\eta t} h \frac{c}{\lambda}. \quad (1.7)$$

Таким образом, для определения характеристик светового потока, регистрируемого фотоприемником, работающим в режиме одноквантовой регистрации при наличии темновых импульсов, необходимо выполнить следующую последовательность действий: задать длительность временного интервала t ; определить квантовую эффективность регистрации фотоприемника на длине волны λ ; задать общее количество интервалов измерений M в отсутствие внешней засветки фотоприемника; подсчитать число

интервалов m_m , на которых не зарегистрировано ни одного импульса; направить исследуемый световой поток на фотоприемник; подсчитать число интервалов $m_{см}$; вычислить значение светового потока по формуле (1.7).

Отметим, что при регистрации световых потоков и интенсивности оптического излучения ЛФП, работающими в режиме одноквантовой регистрации при комнатных температурах, приходится учитывать наличие темновых импульсов [1], [3].

При отсутствии темновых импульсов $P_m(0) = 1$ и выражение (1.7) преобразуется в формулу (1.4). Поэтому второй из рассмотренных способов проведения измерений является более общим и может использоваться для измерения светового потока как при наличии темновых импульсов в фотоприемнике, так и при их отсутствии.

2 Устройство для реализации метода

На рисунке 2.1 показана структурная схема устройства, позволяющего реализовать рассмотренные выше способы измерений. В устройстве используется ЛФП с известной квантовой эффективностью регистрации η при заданном напряжении питания. Для определения квантовой эффективности регистрации фотоприемника, работающего в режиме одноквантовой регистрации с послеимпульсами, может быть использован способ, предложенный в работе [5]. Перед началом измерений задают общую длительность цикла регистрации t_u при помощи таймера Т. Этому циклу измерений соответствует определенное и заранее известное количество импульсов тактового генератора Г. Импульсы тактового генератора разделяют цикл измерений t_u на отдельные интервалы равной длительности t . Количество этих интервалов соответствует числу тактовых импульсов генератора Г. Импульсы тактового генератора являются короткими по длительности, но, при этом, достаточными для того, чтобы передать состояние триггера Т через логический элемент И на вход счетчика Сч, а затем перевести в нулевое состояние этот триггер.

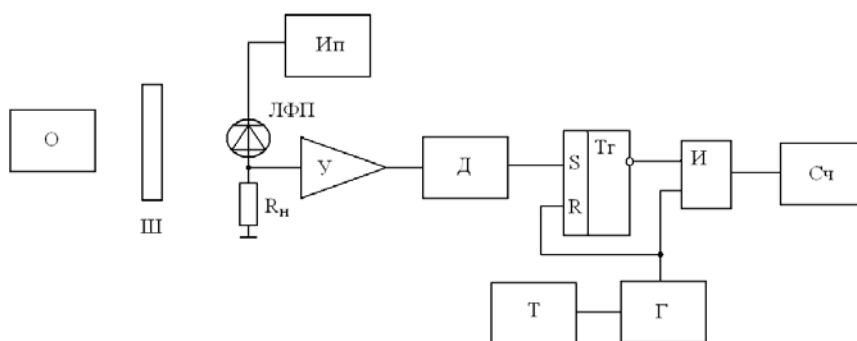


Рисунок 2.1 – Структурная схема устройства регистрации светового потока

О – исследуемый образец, Ш – светонепроницаемая шторка, ЛФП – лавинный фотоприемник, R_n – резистор нагрузки, Ип – источник питания, У – усилитель, Д – дискриминатор, Тг – триггер, И – логическая схема «И», Сч – счетчик импульсов, Г – генератор тактовых импульсов, Т – таймер.

Для реализации режима одноквантовой регистрации на ЛФП от источника питания И подается напряжения смещения, превышающее напряжение его пробоя или близкое к этому напряжению. При этом, если в лавинном фотоприемнике возник термогенерированный свободный носитель заряда или такой носитель появляется под воздействием фотона регистрируемого оптического излучения, то может возникнуть лавинный пробой ЛФП. Во время лавинного пробоя ток, протекающий через ЛФП, возрастает и возрастает падение напряжения на нагрузочном резисторе R_n . В результате напряжение, приложенное к лавинному фотоприемнику, уменьшается и становится ниже напряжения его пробоя и последний прекращается. Все это приводит к формированию импульса напряжения на резисторе R_n , который усиливается усилителем У. После этого он поступает на вход амплитудного дискриминатора Д. Дискриминатор Д осуществляет выделения этого сигнала на фоне шумов усилителя У, а также выполняет его стандартизацию по амплитуде и длительности.

Оптическое излучение от исследуемого образца О поступает на лавинный фотоприемник ЛФП. Между исследуемым образцом и ЛФП располагается светонепроницаемая шторка Ш.

Когда шторка Ш закрыта, оптическое излучения от исследуемого образца не поступает на ЛФП. При этом выполняют измерения среднего числа темновых импульсов. Для заданного цикла измерений t_n определяется число интервалов m_m , на которых не зарегистрировано ни одного импульса. Это осуществляется следующим образом: если за интервал в лавинном фотоприемнике ЛФП не образуется ни одного импульса, то триггер Т находится в таком состоянии, что на его инверсном выходе установлен уровень напряжения, соответствующий логической единице. Этот уровень напряжения подается на один из двух входов логической схемы «И». На выходе логической схемы «И» уровень напряжения, соответствующий логической единице, появляется в том случае, когда на её второй вход поступает импульс напряжения от генератора тактовых импульсов Г. После прекращения импульса на выходе логической схемы И устанавливается логический ноль. Таким образом, формируются импульсы на выходе схемы И, которые подсчитываются счетчиком импульсов Сч. Количество этих импульсов за время t_n соответствует количеству пустых интервалов m_m . Импульс с выхода амплитудного дискриминатора Д поступает на S-вход триггера Т. Это приводит к тому, что на инверсном входе триггер Т устанавливается логический ноль. В этом случае, при поступлении импульса от тактового генератора на вход схемы И, на её выходе импульс не формируется, и, соответственно, счетчик свое состояние не изменяет. После окончания цикла

измерений t_n , вычисляют величину N_m по формуле (1.5).

При открытой шторке выполняют измерения m_{cm} таким же образом, как это делалось для m_m . Затем вычисляется величина Φ по формуле (1.7).

3 Результаты эксперимента и их обсуждение

В качестве объектов исследования использовались кремниевые лавинные фотодиоды серийного изготовления ФД-115Л, а также специально изготовленные кремниевые лавинные фотоприемники со структурой p^+n-v-n^+ .

Определим зависимость вероятности появления нулевого события $P_m(0)$ от величины перенапряжения $\Delta U = U_n - U_{np}$, где U_n – напряжение питания ЛФП, U_{np} – напряжение пробоя ЛФП. Величина перенапряжения используется для сравнения характеристик двух типов лавинных фотоприемников, поскольку они имеют различные напряжения пробоя. Для лавинного фотодиода ФД-115Л напряжения пробоя составляет 51,4 В при температуре 293 К, для ЛФП со структурой p^+n-v-n^+ $U_{np} = 240,5$ В при той же температуре.

Графики зависимости $P_m(0)$ от ΔU представлены на рисунке 3.1. Все результаты представлены для длительности интервала $t = 60$ мкс и $M_m = 400$. Диапазон изменения перенапряжений выбирался таким, для которого значения m_m изменялось от 380 до 20. Диапазон перенапряжений ΔU составлял $-0,1 \div 0,8$ В.

Увеличение перенапряжения приводит к росту скорости счета темновых импульсов, как это видно из рисунка 3.1, что влечет за собой уменьшение вероятности появления нулевого события.

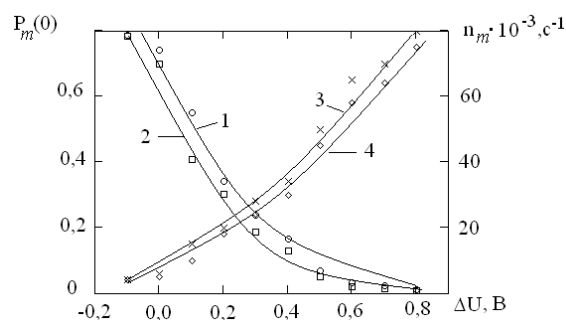


Рисунок 3.1 – Зависимости скорости счета темновых импульсов и вероятности появления нулевого события от величины перенапряжения 1, 2 – вероятность появления нулевого события; 3, 4 – скорость счета темновых импульсов 1, 3 – для p^+n-v-n^+ ; 2, 4 – ФД – 115Л

На рисунке 3.2 представлены зависимости квантовой эффективности регистрации фотоприемников и абсолютной погрешности измерений от величины перенапряжения (кривые 1, 2 и 3, 4 соответственно).

Увеличение перенапряжения вначале приводит к росту квантовой эффективности регистрации, а затем вызывает её снижение. Квантовая эффективность регистрации для лавинных фотодиодов ФД-115Л растет в диапазоне перенапряжений $-0,1$ до $0,7$ В, а для ЛФП со структурой p^+n-v-n^+ – в диапазоне $-0,1$ до $0,65$ В. Максимальное значение квантовой эффективности регистрации $\eta = 0,018$ соответствовало перенапряжению $\Delta U = 0,7$ В для лавинных фотодиодов ФД-115Л, а для ЛФП со структурой p^+n-v-n^+ $\eta = 0,025$ при $\Delta U = 0,65$ В. При данных значениях перенапряжений проводились последующие измерения светового потока для рассматриваемых типов фотоприемников. Длина волны оптического излучения составляла $0,68$ мкм.

В диапазоне перенапряжений $-0,1$ до $0,8$ В вероятность образования послеимпульсов изменялась для ЛФП со структурой p^+n-v-n^+ от $0,03$ до $0,08$, а для лавинных фотодиодов ФД-115Л – от $0,005$ до $0,08$. Полученные зависимости (рисунок 3.2, кривые 3 и 4) абсолютной погрешности измерения светового потока представлены без учета эффекта появления послеимпульсов. Измерения выполнены при постоянном световом потоке $\Phi = 1,5 \cdot 10^{-10}$ Вт с длиной волны $\lambda = 0,68$ мкм и температуре 300 К.

Для ЛФП со структурой p^+n-v-n^+ наблюдался явно выраженный минимум, соответствующий $\Delta U = 0,3$ В (рисунок 3.2). С ростом ΔU увеличивалось значение абсолютной погрешности Δ для лавинных фотодиодов ФД-115Л (кривая 4 на рисунке 3.2 постоянно возрастает). Наличие минимума у зависимости Δ от ΔU для ЛФП со структурой p^+n-v-n^+ можно объяснить тем, что для этого типа фотоприемника значения квантовой эффективности регистрации и вероятности образования послеимпульсов при значениях перенапряжения в диапазоне от $-0,1$ до $0,3$ В были больше, чем для лавинного фотодиода ФД-115Л. Для перенапряжений, превышающих $0,3$ В, эти величины имели близкие значения для обоих типов исследуемых фотоприемников. Максимальные значения квантовой эффективности регистрации фотоприемников достигались при величине $\Delta = 10^{-11}$ Вт для всех типов исследуемых фотоприемников.

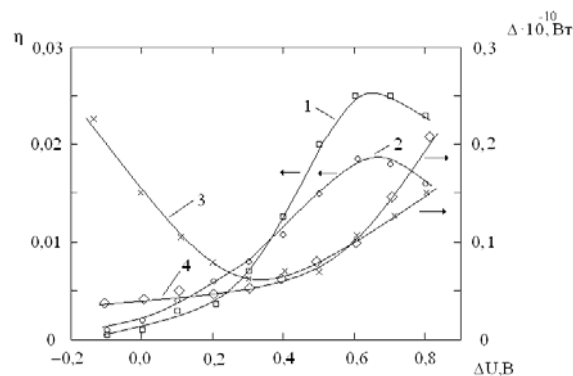


Рисунок 3.2 – Зависимость квантовой эффективности регистрации и абсолютная погрешность от величины перенапряжения 1, 2 – квантовая эффективность регистрации, 3, 4 – абсолютная погрешность, 1, 3 – для p^+n-v-n^+ ; 2, 4 – ФД-115Л

При охлаждении лавинных фотоприемников, работающих в режиме одноквантовой регистрации, увеличивается как квантовая эффективность регистрации так и вероятность образования послеимпульсов. Результаты соответствующих исследований представлены в таблице 3.1.

Так, при охлаждении ЛФП со структурой p^+n-v-n^+ до 195 К их квантовая эффективность регистрации возрастает до $0,25$, а вероятность образования послеимпульсов составляет $0,12$. Охлаждение лавинных фотодиодов ФД-115Л до 195 К позволяет повысить η до $0,3$ и увеличивает вероятность образования послеимпульсов до $0,15$.

В таблице представлены также значения абсолютной погрешности измерения светового потока для разных температур. Понижение температуры приводило к увеличению Δ .

Относительная погрешность измерения без учета послеимпульсов при температуре 300 К для ЛФП со структурой p^+n-v-n^+ равна 6% , а для ФД-115Л – 4% . Понижение температуры приводило к увеличению относительной погрешности измерения. Так при температуре 195 К для ЛФП со структурой p^+n-v-n^+ она равна 14% , а для ФД-115Л – 18% .

Таблица 3.1 – Погрешности измерения светового потока

Лавинный фотоприемник	Температура, К	λ , мкм	Z	Φ , Вт	Δ , Вт
ФД-115Л	300	0,68	0,02	$5 \cdot 10^{-10}$	$1 \cdot 10^{-11}$
p^+n-v-n^+			0,03		$2 \cdot 10^{-11}$
ФД-115Л	195		0,15		$9 \cdot 10^{-11}$
p^+n-v-n^+			0,12		$7 \cdot 10^{-11}$

Заключение

Разработан метод, позволивший повысить точность измерения светового потока при помощи ЛФП, работающих в режиме одноквантовой регистрации, путем учета темновых импульсов и послеимпульсов. Предложено устройство для реализации этого метода. Определены условия применимости разработанного метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гулаков, И.Р. Метод счета фотонов в оптико-физических измерениях / И.Р. Гулаков, С.В. Холондырев. – Минск: Университетское, 1989. – 256 с.

2. Ахматов, С.А. Введение в статистическую радиофизику и оптику / С.А. Ахматов,

Ю.Е. Дьяков, А.С. Чиркин. – М.: Наука, 1981. – 640 с.

3. Гулаков, И.Р. Фотоприемники квантовых систем: монография / И.Р. Гулаков, А.О. Зеневич. – Минск: УО ВГКС, 2012. – 276 с.

4. Ветохин, С.С. Одноэлектронные фотоприемники / С.С. Ветохин, И.Р. Гулаков, А.Н. Перцев. – М.: Атомиздат, 1979. – 192 с.

5. Способ определения квантовой эффективности фотоприемника: пат. 11775 Респ. Беларусь, МПК (2006) G01R 31/00 И.Р. Гулаков, А.О. Зеневич; заявитель Бел. гос. ун-т. – № а20070871; заявл. 11.07.07; опубл. 28.02.08 // Официальный бюл. / Нац. Центр интеллектуал. собственности. – 2009. – № 2. – 6 с.

Поступила в редакцию 09.11.16.

УДК 535.16:534.341

ФОТОДЕФЛЕКЦИОННАЯ СПЕКТРОСКОПИЯ ХИРАЛЬНЫХ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК

Г.С. Митюрин, Е.В. Лебедева, А.Н. Сердюков

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

THE PHOTODEFLECTION SPECTROSCOPY OF CHIRAL CARBON NANOTUBES

G.S. Mityurich, E.V. Lebedeva, A.N. Serdyukov

F. Scorina Gomel State University

Разработана теория возникновения фотодефлекционного сигнала в слое хиральных углеродных нанотрубок при облучении их поляризованными модами бesselевых световых пучков. Впервые получено решение системы уравнений теплопроводности с помощью интегральных преобразований Фурье – Бесселя и Лапласа для трехслойной среды, облучаемой поляризованными модами световых пучков с бesselевым распределением интенсивности в пространстве.

Ключевые слова: фотодефлекционная спектроскопия, хиральные углеродные нанотрубки, бesselевый световой пучок, диссипация энергии, функция Бесселя, уравнение теплопроводности, угол фотодефлекции.

The theory of formation photodeflection signal in the layer of chiral carbon nanotube by irradiation of polarized modes of Bessel light beams was developed. For the first time the solution for the heat equation is obtained using integral transforms Fourier – Bessel and Laplace for a three-layer medium, which is irradiated with light polarization modes of Bessel beams with an intensity distribution in space.

Keywords: photodeflection spectroscopy, chiral carbon nanotubes, Bessel light beam, energy dissipation, Bessel function, heat equation, angles photodeflection.

Введение

Современное развитие многих направлений научных исследований связано с применением углеродных нанообъектов и наноструктур. Наиболее перспективными для новых технологических разработок являются углеродные нанотрубки (УНТ), обладающие целым рядом уникальных свойств, таких как сверхвысокая прочность (модуль Юнга 1–5 ТПа) и высокие показатели электропроводности и теплопроводности.

Особенный интерес вызывает применение УНТ в нанoeлектронике, что требует построения четкой теоретической электродинамической модели [1]–[3].

Это связано с тем, что физические явления, происходящие на наноскопическом масштабе, протекают отлично от широко известных явлений и процессов в макроскопической электродинамике. Классическая теория, относящаяся к трехмерным макрообъектам, не может быть перенесена на нанотрубки и здесь требуются новые фундаментальные исследования, которые решали бы отличные от известных в макроскопической электродинамике задачи [4]–[7].

Увеличение фокусной глубины фотоакустического изображения по сравнению с обычным гауссовым световым пучком можно добиться путем применения в качестве источника возбуждения результирующего сигнала бesselевых световых пучков (БСП), главным достоинством которых является бездифракционность при

распространении в пространстве [8], [9]. В последние годы БСП активно используются в лазерных фотоакустических методах исследования неорганических сред, биологических материалов и живых организмов [10]–[12].

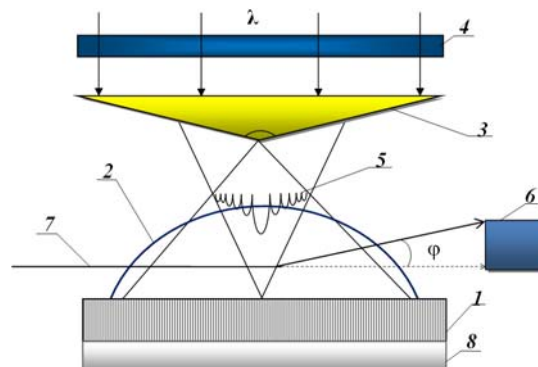


Рисунок 0.1 – Схема регистрации фотодефлекционного сигнала:

- 1 – слой углеродных нанотрубок;
- 2 – «термическая» линза; 3 – аксикон;
- 4 – модулятор; 5 – ТЕ-мода БСП;
- 6 – позиционно-чувствительный фотодетектор;
- 7 – зондирующий луч; 8 – подложка

Целью данной работы являлось построение теории преобразования энергии бesselевых световых пучков в плотных слоях хиральных углеродных нанотрубок для случая трансверсальной геометрии взаимодействия падающего и пробного пучков (рисунок 0.1).

1 Расчет проводимости хиральных нанотрубок

Электронная структура углеродных нанотрубок описывается в π -электронном приближении Хюккеля [13] и, в общем случае, в рамках метода сильной связи в приближении ближайших соседей выражается хорошо известным соотношением [14], [15]:

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \pm \gamma_0 \sqrt{3 + 2\cos(\mathbf{k}\mathbf{a}_1) + 2\cos(\mathbf{k}\mathbf{a}_2) + 2\cos(\mathbf{k}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2))} = \pm \gamma_0 \sqrt{1 + 4\cos\left(\mathbf{k}\frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2}{2}\right)\cos\left(\mathbf{k}\frac{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2}{2}\right) + 4\cos^2\left(\mathbf{k}\frac{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2}{2}\right)},$$

где $\gamma_0 \approx 2.7$ эВ – интеграл перекрытия, \mathbf{k} – волновой вектор, \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 – вектора трансляций гексагональной решетки.

Геометрия углеродных нанотрубок может быть описана с помощью модуля вектора хиральности

$$|\mathbf{C}_h| = a\sqrt{n^2 + nm + m^2}, \quad (1.1)$$

где n и m – индексы хиральности; $a = 3b_0/2\hbar$, $b_0 = 0.142$ нм – постоянная, характеризующая расстояние между двумя соседними атомами в ячейке графена; \hbar – приведенная постоянная Планка.

При переходе от волнового вектора к вектору квазиимпульса получается следующее выражение для распределения энергии

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \pm \gamma_0 \sqrt{1 + 4\cos\left(\mathbf{p}\frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2}{2\hbar}\right)\cos\left(\mathbf{p}\frac{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2}{2\hbar}\right) + 4\cos^2\left(\mathbf{p}\frac{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2}{2\hbar}\right)}, \quad (1.2)$$

Проекция вектора квазиимпульса \mathbf{p} , входящего в (1.2), на оси Ox и Oy для хиральных УНТ с учетом (1.1) можно записать следующим образом

$$\mathbf{p}\frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2}{2\hbar} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + nm + m^2}} \times \left(\frac{3\pi q(n+m)}{2\sqrt{n^2 + nm + m^2}} + \frac{\sqrt{3}a(n-m)}{4\hbar} p_y \right), \quad (1.3)$$

$$\mathbf{p}\frac{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2}{2\hbar} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + nm + m^2}} \times \left(\frac{\pi q(n-m)}{2\sqrt{n^2 + nm + m^2}} + \frac{\sqrt{3}a(n+m)}{4\hbar} p_y \right), \quad (1.4)$$

где $q = 1, 2, \dots, \sqrt{n^2 + nm + m^2}$.

Учитывая (1.3) и (1.4) в выражении (1.2) осуществим переход к цилиндрической системе координат ($p_x \rightarrow p_\phi, p_y \rightarrow p_z$)

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \pm \gamma_0 \left[1 + 4\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + nm + m^2}} \times \left(\frac{3\pi q(n+m)}{2\sqrt{n^2 + nm + m^2}} + \frac{\sqrt{3}a(n-m)}{4\hbar} p_z \right) \right) \times \left(\frac{\pi q(n-m)}{2\sqrt{n^2 + nm + m^2}} + \frac{\sqrt{3}a(n+m)}{4\hbar} p_z \right) \right] \times$$

$$\times \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + nm + m^2}} \times \left(\frac{\pi q(n-m)}{2\sqrt{n^2 + nm + m^2}} + \frac{\sqrt{3}a(n+m)}{4\hbar} p_z \right) \right) + 4\cos^2\left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + nm + m^2}} \times \left(\frac{\pi q(n-m)}{2\sqrt{n^2 + nm + m^2}} + \frac{\sqrt{3}a(n+m)}{4\hbar} p_z \right) \right)^{1/2}. \quad (1.5)$$

Проекция вектора скорости электрона на ось z есть частная производная [16]

$$v(p_z) = \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p})}{\partial p_z}. \quad (1.6)$$

С учетом соотношения (1.5) и (1.6) получим выражение для проекции вектора скорости

$$v(p_z) = \frac{\pm \sqrt{3}\gamma_0 a [m \sin(\psi_1 - \psi_2) - n \sin(\psi_1 + \psi_2) - (n+m) \sin 2\psi_2]}{\hbar \sqrt{n^2 + nm + m^2} (1 + 4\cos\psi_1 \cos\psi_2 + 4\cos^2\psi_2)},$$

где

$$\psi_1(p_z) = \frac{1}{\sqrt{n^2 + nm + m^2}} \times \left(\frac{3\pi q(n+m)}{2\sqrt{n^2 + nm + m^2}} + \frac{\sqrt{3}a(n-m)}{4\hbar} p_z \right),$$

$$\psi_2(p_z) = \frac{1}{\sqrt{n^2 + nm + m^2}} \times \left(\frac{\pi q(n-m)}{2\sqrt{n^2 + nm + m^2}} + \frac{\sqrt{3}a(n+m)}{4\hbar} p_z \right).$$

Выражение для плотности поверхностного аксиального тока можно представить в виде

$$j_z^0 = \sigma_{zz}(h, \omega) E_z^0,$$

где $\sigma_{zz}(h, \omega)$ – аксиальная проводимость углеродной нанотрубки, $E_z = F + \text{Re}[\delta f \exp\{i(hz - \omega t)\}]$ – электрического поля бегущей волны, h – константа распространения, $F(\mathbf{p}) = [1 + \exp(\varepsilon(\mathbf{p})/k_B T)]^{-1}$ – равновесная функция распределения Ферми, T – температура, k_B – постоянная Больцмана.

Аксиальная проводимость нанотрубки имеет вид

$$\sigma_{zz}(h, \omega) = \frac{2e}{(2\pi\hbar)^2} \iint \frac{\partial F}{\partial p_z} \frac{v_z d^2 \bar{p}}{\omega - \hbar v_z + i\nu}. \quad (1.7)$$

Путем интегрирования выражения (1.7) по первой зоне Бриллюэна, можно определить проводимость хиральных углеродных нанотрубок ($v_e \ll c$, c – скорость света):

$$\sigma_{zz}(\omega) = - \frac{ie^2}{\pi\hbar\sqrt{n^2 + nm + m^2}} \frac{1}{(\omega + i\nu)} \times \quad (1.8)$$

$$\times \sum_{s=1}^m \int_{-P_0}^{P_0} v_z^2(p_z, s) \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} dp_z,$$

где $P_0 = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{3b\sqrt{n^2 + nm + m^2}}}$.

Используя теорему о среднем при взятии интеграла, входящего в (1.8),

$$P_0 = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{3W_n b}},$$

$$\int_{-P_0}^{P_0} f(x) dx \approx f(P_0)(P_0 - (-P_0)) = 2P_0 f(P_0)$$

найдено конечное выражение, определяющее аксиальную проводимость в хиральных углеродных нанотрубках

$$\sigma_{zz}(\omega) = -\frac{2P_0 i e^2}{\pi\hbar\sqrt{n^2 + nm + m^2}} \frac{1}{(\omega + i\nu)} \times \sum_{s=1}^m v_z^2(p_z, s) \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}.$$

2 Построение модели возбуждения фотодефлекционного сигнала в слое хиральных углеродных нанотрубок под действием бesselевых световых пучков

Облучение слоя вертикально ориентированных хиральных углеродных нанотрубок лазерным излучением с бesselевым профилем интенсивности приводит к возникновению периодически изменяющегося температурного поля в образце, окружающей среде и подложке, что может быть описано с помощью системы уравнений теплопроводности

$$\begin{cases} \nabla^2 T_1 - \sigma_1 T_1 = 0, & z < 0, \\ \nabla^2 T - \sigma_s T = -Q^{TE} \exp(1 + \cos \Omega t), & 0 \leq z \leq l, \\ \nabla^2 T_2 - \sigma_2 T_2 = 0, & z > l, \end{cases} \quad (2.1)$$

где T_1, T, T_2 – температура соответственно в окружающей среде, слое хиральных углеродных нанотрубок и подложке; $\sigma_i = (i\Omega/\beta_i)^{1/2}$, β_i – коэффициенты теплопроводности в окружающей среде, слое хиральных углеродных нанотрубок и подложке, $\beta_{cn} = k_{cn} / \rho_0 C$, k_{cn} – коэффициент теплопроводности в слое хиральных УНТ, ρ_0 – плотность, c_v – удельная теплоемкость. Согласно [17], двумерный коэффициент квантовой теплопроводности для области температур ниже температуры Дебая определяется следующим образом $k_{cn} = G_0 N_{phonon} L / L_0$, где $G_0 = \pi^2 k_B^2 T / 3\hbar$ – универсальный квант тепла,

$$N_{phonon} = 4N(n^2 + nm + m^2) / d_R$$

– полное число фононных каналов в УНТ, N – число шестиугольников в элементарной ячейке нанотрубки, d_R – наибольший общий делитель для чисел $(2n + m)$ и $(2m + n)$, L – длина нанотрубки,

$L_0 = 2\pi R$ – длина поперечной границы нанотрубки, перпендикулярной тепловому потоку.

В системе уравнений (2.1) Q – объемная плотность тепловых источников:

$$Q = \sigma_{cn} |E|^2,$$

где $|\sigma_{cn}| = 2\pi |\sigma_{zz}| / \lambda$ – проводимость слоя хиральных УНТ.

Учитывая выражение для интенсивности волны $I = 1/2 n \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0} |E|^2$ выражение для скорости диссипации энергии можно представить в виде

$$Q = 2\alpha_{eff} I_0 e^{-2\alpha_{eff} z} = \frac{2\sigma_{cn}}{c\sqrt{\varepsilon'\varepsilon_0}} I_0 e^{-2\alpha_{eff} z},$$

где α_{eff} – коэффициент поглощения, который может быть определен следующим образом:

$$\alpha_{eff} = \frac{\omega \varepsilon''}{c \sqrt{\varepsilon'}} = \frac{\omega \varepsilon''}{c n}.$$

В свою очередь, проводимость связана с мнимой частью диэлектрической проницаемости формулой $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$, $\varepsilon'' = \sigma_{cn} / \omega \varepsilon_0$ ($\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{12}$ ф/м).

Исходя из геометрии задачи, скорость диссипации энергии бesselевых световых пучков в слое поглощающих углеродных нанотрубок удобно записать в цилиндрических координатах

$$Q^{TE} = \frac{2|\sigma_{cn}| I_0 c}{c\sqrt{\varepsilon'\varepsilon_0}} \frac{1}{4\pi} k_0 \varepsilon_\alpha (n_1^2 + n_2^2) \times \left[\frac{m^2}{(qr)^2} J_m^2(qr) + J_m'^2(qr) \right] \exp(-\alpha_{eff} z), \quad (2.2)$$

где $\alpha_{eff} = 2k_{zz}$.

С учетом выражения для скорости диссипации энергии (2.2) перепишем уравнение для временной части, описывающее распределение температуры в исследуемом образце

$$\nabla^2 T - \sigma_s T = -A_0 B^{TE} e^{-\alpha_{eff} z - r^2/w_0^2}, \quad (2.3)$$

где

$$A_0 = \frac{1}{k_s} \frac{2|\sigma_{cn}| I_0 c}{c\sqrt{\varepsilon'\varepsilon_0}} \frac{1}{4\pi} k_0 \varepsilon_\alpha (n_1^2 + n_2^2),$$

$$B^{TE} = \frac{m^2}{(qr)^2} J_m^2(qr) + J_m'^2(qr), \quad \sigma_s^2 = i\Omega / \beta_s.$$

Решение уравнения (2.3) ищем в виде $T(r, z) = T^u(r, z) + T^o(r, z)$, где $T^u(r, z)$ – частное решение уравнения (2.3), а $T^o(r, z)$ – общее решение соответствующего (2.3) однородного дифференциального уравнения второго порядка.

Частное решение уравнения теплопроводности (2.3) ищем в виде

$$T^u(r, z) = \int_0^\infty p C(p) J_0(rp) e^{-\alpha_{eff} z} dp, \quad (2.4)$$

где p – параметр преобразования Фурье – Бесселя.

Вычислив частные производные первого и второго порядка (2.4) по переменным r и z и подставив их в (2.3), получим

$$\int_0^\infty pC(p)(\alpha_{eff}^2 - p^2 - \sigma_S^2)J_0(rp)e^{-\alpha_{eff}z} dp = -A_0 B^{TE} e^{-\alpha_{eff}z - r^2/w_0^2}.$$

Пусть $\bar{f}(p) = C(p)(\alpha^2 - p^2 - \sigma_S^2)e^{-\alpha z}$. Тогда параметр $C(p)$ может быть определен следующим равенством

$$C(p) = \frac{\bar{f}(p)e^{\alpha_{eff}z}}{(\alpha_{eff}^2 - p^2 - \sigma_S^2)}. \quad (2.5)$$

Согласно (2.5), выражение для $f(r)$ примет вид

$$f(r) = \int_0^\infty pJ_0(rp)\bar{f}(p)dp = -A_0 B^{TE} e^{-\alpha_{eff}z - r^2/w_0^2}.$$

Основываясь на свойствах преобразования Фурье – Бесселя и вычислив получившийся интеграл [см. приложение], несложно записать для $\bar{f}(p)$

$$\begin{aligned} \bar{f}(p) &= \int_0^\infty rJ_0(pr)f(r)dr = \\ &= -A_0 e^{-\alpha z} \int_0^\infty B^{TE} rJ_0(pr)dr = -A_0 e^{-\alpha_{eff}z} I, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} q w_0 \right)^{2m} \left[\frac{m^2}{q^2} R_1(p) + \frac{1}{4} q^2 w_0^4 R_2(p) \right], \\ a(p) &= \frac{1}{4} p^2 w_0^2, \quad b = \frac{1}{4} q^2 w_0^2, \\ R_1(p) &= \left(\frac{1}{(m+1)!} - \frac{a(p)(m+2)!}{(m+1)!(m+1)!} \right) b^2 + \\ &+ 2 \left(\frac{a(p)}{m!} - \frac{1}{(m+1)!} \right) b + \frac{(m-1)!}{m!m!} - \frac{a(p)}{m!}, \\ R_2(p) &= \left(\frac{(m+3)!}{(m+2)!(m+2)!} - \frac{a(p)(m+4)!}{(m+2)!(m+2)!} \right) b^2 + \\ &+ 2 \left(\frac{a(p)(m+3)!}{(m+1)!(m+2)!} - \frac{1}{(m+1)!} \right) b + \\ &\frac{1}{(m+1)!} - \frac{a(p)(m+2)!}{(m+1)!(m+1)!}. \end{aligned}$$

С учетом (2.5) и (2.6) можно представить частное решение уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} T^u &= \int_0^\infty pJ_0(pr) \left[A(p)e^{\xi z} + B(p)e^{-\xi z} + \right. \\ &\left. + \frac{A_1 [N_1 R_1(p) + N_2 R_2(p)] e^{-\alpha_{eff}z}}{\alpha_{eff}^2 - \sigma_S^2 - p^2} \right] dp. \end{aligned}$$

$$\text{где } A_1 = \frac{1}{2} A_0 \left(\frac{1}{2} q w_0 \right)^{2m}, \quad N_1 = \frac{m^2}{q^2}, \quad N_2 = \frac{1}{4} q^2 w_0^4.$$

Решение соответствующего (2.3) однородного дифференциального уравнения второго порядка $\nabla^2 T - \sigma_S T = 0$ ищем в виде

$$T^o(r, z) = \int_0^\infty pJ_0(rp) [A(p)e^{\xi z} + B(p)e^{-\xi z}] dp,$$

$$\text{где } \xi^2 = p^2 + \sigma_S^2.$$

Учитывая граничные условия [18]

$$T_1|_{z=0} = T_S|_{z=0}, \quad T_S|_{z=l} = T_2|_{z=l},$$

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = k_{cn} \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad k_{cn} \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=l} = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_{z=l},$$

получены выражения для температур в трехслойной системе «окружающая среда-образец-подложка»

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty pJ_0(pr) E(p) e^{\xi_1 z} e^{-r^2/w_0^2} dp, \\ T = \int_0^\infty pJ_0(pr) [A(p)e^{\xi_{cn}z} + B(p)e^{-\xi_{cn}z} + C(p)e^{-\alpha_{eff}z}] dp, \\ T_2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty pJ_0(pr) D(p) e^{-\xi_2(z-l)} e^{-r^2/w_0^2} dp. \end{cases}$$

$$\text{где } C(p) = \frac{A_1 [N_1 R_1(p) + N_2 R_2(p) - N_3 R_3(p)]}{\alpha^2 - \sigma_S^2 - p^2},$$

$$A(p) = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{b_1 a_2 - b_2 a_1} \cdot C(p),$$

$$B(p) = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{b_1 a_2 - b_2 a_1} C(p),$$

$$E(p) = \frac{2k_S \xi c_2 - a_2 d_1 - b_2 d_2}{b_1 a_2 - b_2 a_1} C(p),$$

$$D(p) = \frac{d_1 (a_1 e^{-l(\alpha_{eff} + \xi_{cn})} + b_1 e^{-l(\alpha_{eff} - \xi_{cn})}) - 2k_{cn} \xi_{cn} c_1}{b_1 a_2 - b_2 a_1} C(p),$$

$$a_1 = k_{cn} \xi_{cn} - k_1 \xi_1, \quad a_2 = (k_{cn} \xi_{cn} + k_2 \xi_2) e^{\xi_{cn} l},$$

$$b_1 = k_{cn} \xi_{cn} + k_1 \xi_1, \quad b_2 = (k_{cn} \xi_{cn} - k_2 \xi_2) e^{-\xi_{cn} l},$$

$$c_1 = k_{cn} \alpha_{eff} + k_1 \xi_1, \quad c_2 = (k_{cn} \alpha_{eff} - k_2 \xi_2) e^{-\alpha_{eff} l},$$

$$d_1 = k_{cn} \alpha_{eff} - k_{cn} \xi_{cn}, \quad d_2 = k_S \alpha_{eff} + k_{cn} \xi_{cn},$$

$$\xi_{cn}^2 = p^2 + \sigma_{cn}^2, \quad \xi_{1,2,cn}^2 = p^2 + \sigma_{1,2,S}^2.$$

С учетом соотношения для скорости диссипации энергии (2.2), и выражения для угла дефлексии пробного лазерного пучка (случай трансверсальной геометрии взаимодействия)

$$\Phi^T = \frac{1}{n_{\text{эф}}} \frac{dn_{\text{эф}}}{dT} \int \frac{dT(x, y, z, t)}{dx} dy,$$

получим величину угла фотодефлексии, возникающего вследствие воздействия бесселевого светового пучка на слой хиральных углеродных нанотрубок (см., например, [16], [18])

$$\Phi(\rho, z, t) = \frac{\pi^2 w_0}{4n_{eff}} \frac{dn_{eff}}{dT} \bar{T} \times \int_0^t \frac{(1 + \cos \Omega t) x}{[w_0^2 + 8\beta_{cn}(t - \tau)]^{3/2}} e^{-\frac{(x^2 + y^2)}{w_0^2 + 8\beta_{cn}(t - \tau)}} e^{-\alpha_{eff}^2 \beta_{cn}(t - \tau)} d\tau, \quad (2.7)$$

где

$$\bar{T} = 2\pi \left[\frac{b_1^0 c_2^0 - b_2^0 c_1^0}{b_1^0 a_2^0 - b_2^0 a_1^0} e^{\sigma_s z} + \frac{a_1^0 c_2^0 - a_2^0 c_1^0}{b_1^0 a_2^0 - b_2^0 a_1^0} e^{-\sigma_s z} + e^{-\alpha_{eff} z} \right] \times \frac{A_1 [N_1 R_1(0) + N_2 R_2(0)]}{\alpha_{eff}^2 - \sigma_s^2} A_0 B^{TE} e^{-r^2/w_0^2},$$

$$a_1^0 = k_{cn} \sigma_{cn} - k_1 \sigma_1, \quad a_2^0 = (k_{cn} \sigma_{cn} + k_2 \sigma_2) e^{\sigma_{cn} l},$$

$$b_1^0 = k_{cn} \sigma_{cn} + k_1 \sigma_1, \quad b_2^0 = (k_{cn} \sigma_{cn} - k_2 \sigma_2) e^{-\sigma_{cn} l},$$

$$c_1^0 = k_{cn} \alpha_{eff} + k_1 \sigma_1, \quad c_2^0 = (k_{cn} \alpha_{eff} - k_2 \sigma_2) e^{-\alpha_{eff} l}.$$

Таким образом, амплитуда фотодефлекционного сигнала, определяемая выражением (2.7), сложным образом зависит от диссипативных, геометрических и теплофизических параметров слоя углеродных нанотрубок, окружающей среды и подложки, а также энергетически-временных и поляризационных свойств БСП.

3 Результаты и их обсуждение

На рисунке 3.1 представлена зависимость амплитуды фотодефлекционного сигнала, возникающего при воздействии на слой вертикально ориентированных УНТ поляризационных мод БСП. Анализ амплитуды фотодефлекционного сигнала показывает, что величина амплитудного сигнала осциллирует, спадая по экспоненте с возрастанием радиальной координаты ρ , причем осцилляции для нулевой и более высоких мод находятся в противофазе (рисунок 3.1). Следует отметить, что амплитуда фотоакустического сигнала для металлических УНТ ($n - m = 3q, q \in \mathbb{N}$) оказалась выше, чем у полупроводниковых ($n - m \neq 3q, q \in \mathbb{N}$).

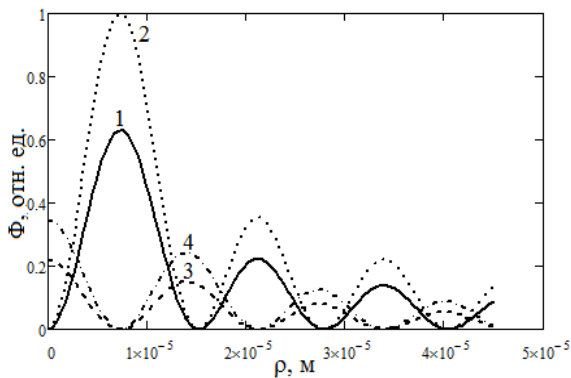


Рисунок 3.1 – Зависимость фотодефлекционного отклика от радиальной координаты ρ для разных мод БСП и параметров УНТ: 1 – $m = 0, (7,5)$; 2 – $m = 0, (7,4)$; 3 – $m = 1, (7,5)$; 4 – $m = 1, (7,4)$

Как видно из рисунка 3.2, с увеличением толщины слоя поглощающих углеродных нанотрубок амплитуда фотодефлекционного отклика экспоненциально спадает, а при определенных значениях L (10 нм – 50 нм) – величина сигнала практически не изменяется.

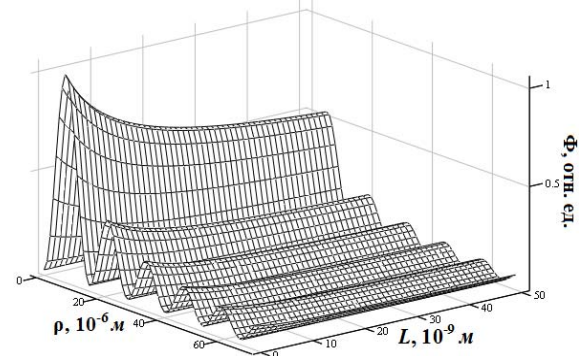


Рисунок 3.2 – Зависимость амплитуды фотодефлекционного сигнала от радиальной координаты и толщины слоя УНТ

На рисунке 3.3 представлена зависимость амплитуды фотодефлекционного сигнала от угла конусности α для слоя УНТ с индексами хиральности (7,1). При определенном значении параметра конусности (например, $\alpha = 1.57^\circ$) и в зависимости от порядка моды БСП ($m = 0, m = 1$) может наблюдаться максимум или минимум амплитудного значения фотодефлекционного отклика, что демонстрирует возможность управления величиной фотодефлекционного сигнала путем изменения угла конусности аксикона.

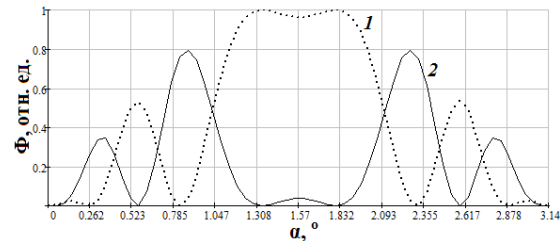


Рисунок 3.3 – Зависимость фотодефлекционного отклика от угла конусности для разных TE-мод БСП: 1 – $m = 0$; 2 – $m = 1$

Из рисунка 3.4 следует, что фотодефлекционный сигнал является симметричным относительно нормированной координаты i , с увеличением частоты модуляции, его величина уменьшается примерно на порядок. По-видимому, это связано с тем обстоятельством, что исследуемый образец не в состоянии быстро реагировать на изменения его теплофизических свойств.

С увеличением времени воздействия беселевого светового пучка на слой хиральных углеродных нанотрубок, как видно из рисунка 3.5, происходит уменьшение результирующего сигнала, что объясняется размыванием поля температур в исследуемом образце вследствие теплообмена с окружающей средой и подложкой.

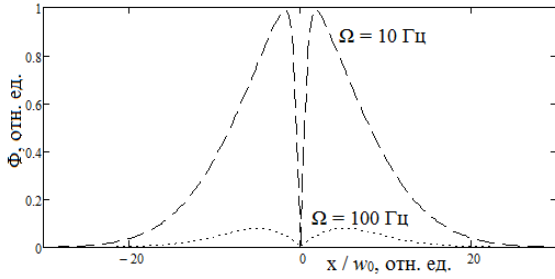


Рисунок 3.4 – Зависимость амплитуды фотодефлекционного сигнала от нормированной координаты x/w_0

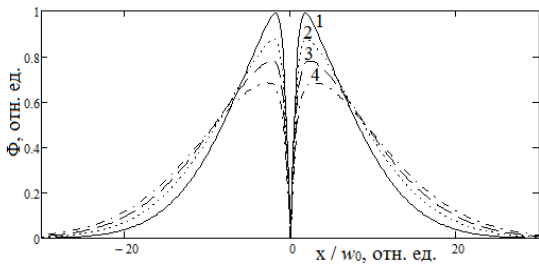


Рисунок 3.5 – Зависимость амплитуды фотодефлекционного сигнала от нормированной координаты x/w_0 для разных значений времени воздействия излучения t :
1 – $t = 0.13$ с; 2 – $t = 0.13$ с;
3 – $t = 0.15$ с; 4 – $t = 0.17$ с

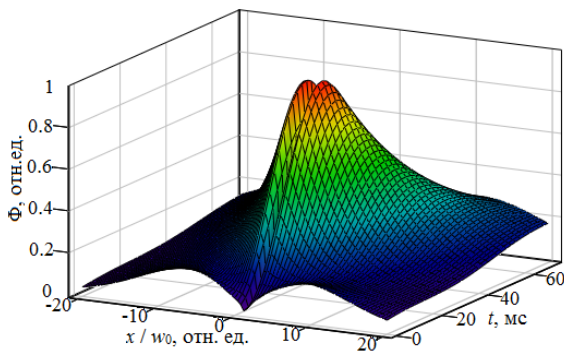


Рисунок 3.6 – Поверхность, описывающая значения фотодефлекционного сигнала в зависимости от нормированной координаты x/w_0 и времени воздействия излучения t

Трёхмерный рисунок 3.6 демонстрирует то обстоятельство, что при определенном значении времени воздействия квазибездифракционного излучения ($t \approx 40$ мс) наблюдается наибольшее значение амплитуды фотодефлекционного сигнала, причем симметрия поверхности, описывающая пространственно-временное распределение результирующего отклика, не нарушается.

Заключение

Таким образом, в работе построена модель возбуждения фотодефлекционного сигнала в слое хиральных углеродных нанотрубок под действием бесселевых световых пучков. Впервые получено решение системы уравнений теплопроводности с

помощью интегральных преобразований Фурье – Бесселя и Лапласа для трехслойной среды, облучаемой поляризационными модами световых пучков с бесселевым распределением интенсивности в пространстве. В результате расчетов фотодефлекционного сигнала для хиральных углеродных нанотрубок и проведенного графического анализа выявлена возможность управления амплитудой фотодефлекционного отклика при изменении угла конусности БСП, что достигается с помощью аксиконов, реализуемых на базе кристаллов, обладающих эффектом Погкельса [19] или применением оптических схем, допускающих перестройку конусности бездифракционного излучения [20].

Авторы выражают огромную благодарность А.Р. Миротину и Н.М. Курносенко за плодотворное обсуждение результатов работы.

Приложение

Выпишем интеграл

$$I = \int_0^{\infty} r J_0(pr) \left[\left(\frac{m}{qr} \right)^2 J_m^2(qr) + J_m^2(qr) \right] e^{-r^2/w_0^2} dr = \quad (\text{П1})$$

$$= I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \left(\frac{m}{q} \right)^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{r} J_0(pr) J_m^2(qr) e^{-r^2/w_0^2} dr, \quad (\text{П2})$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} r J_0(pr) J_m^2(qr) e^{-r^2/w_0^2} dr. \quad (\text{П3})$$

Перейдем в интеграле (П2) к переменной $t = r^2$:

$$I_1 = \left(\frac{m}{q} \right)^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{r} J_0(pr) J_m^2(qr) e^{-r^2/w_0^2} dr =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{m}{q} \right)^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{t} J_0(p\sqrt{t}) J_m^2(q\sqrt{t}) e^{-t/w_0^2} dt.$$

Для взятия интеграла воспользуемся преобразованием Лапласа [21]

$$\int_0^{\infty} t^{\nu-1} J_{2\mu_1}(2\alpha_1^{1/2}t^{1/2}) \dots J_{2\mu_n}(2\alpha_n^{1/2}t^{1/2}) \exp(-pt) dt =$$

$$\frac{\Gamma(\nu+M) p_0^{-\nu-M} \alpha_1^{\mu_1} \dots \alpha_n^{\mu_n}}{\Gamma(2\mu_1+1) \dots \Gamma(2\mu_n+1)} \times \quad (\text{П4})$$

$$\times \Psi_2 \left(\nu+M; 2\mu_1+1, \dots, 2\mu_n+1; -\frac{\alpha_1}{p_0}, \dots, -\frac{\alpha_n}{p_0} \right),$$

где $\text{Re } p > 0$, $M = \mu_1 + \dots + \mu_n$, $\text{Re}(M + \nu) > 0$,

$$\Psi_2(\alpha; \gamma_1, \dots, \gamma_n; z_1, \dots, z_n) =$$

$$= \sum \frac{(\alpha)_{m_1+\dots+m_n} \cdot z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n}}{(\gamma)_{m_1} \dots (\gamma)_{m_n} \cdot m_1! \dots m_n!}$$

– вырожденный гипергеометрический ряд многих переменных, $(\alpha)_m = \Gamma(\alpha+m)/\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(n) = (n-1)! -$ гамма-функция.

Используя (П4) можем записать для (П2) следующее выражение

$$I_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{q}\right)^2 \frac{\Gamma(m) \left(\frac{1}{w_0}\right)^{-m} \left(\frac{1}{4}q^2\right)^{\frac{1}{2}m} \left(\frac{1}{4}q^2\right)^{2m}}{\Gamma(1)\Gamma(m+1)\Gamma(m+1)} \times \\ \times \Psi_2\left(m; 1, m+1, m+1; -\frac{1}{4}p^2w_0^2, -\frac{1}{4}q^2w_0^2, -\frac{1}{4}q^2w_0^2\right).$$

С помощью численного анализа ряда было установлено, что достаточно ограничиться первыми двумя членами. Следовательно, для интеграла I_1 получаем

$$I_1 \approx \frac{1}{2} \left(\frac{m}{q}\right)^2 \left(\frac{1}{4}q^2\right)^m w_0^{2m} \times \\ \times \left[\left(\frac{1}{(m+1)!} - \frac{a(p)(m+2)!}{(m+1)!(m+1)!} \right) b^2 + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{a(p)}{m!} - \frac{1}{(m+1)!} \right) b + \frac{(m-1)!}{m!m!} - \frac{a(p)}{m!} \right], \quad (П5)$$

где $a(p) = \frac{1}{4}p^2w_0^2$, $b = \frac{1}{4}q^2w_0^2$.

Аналогичным образом несложно получить соответствующее выражение для второго интеграла

$$I_2 \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}q^2\right)^{m+1} w_0^{2m+1} \times \\ \times \left[\left(\frac{(m+3)!}{(m+2)!(m+2)!} - \frac{a(p)(m+4)!}{(m+2)!(m+2)!} \right) b^2 + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{a(p)(m+3)!}{(m+1)!(m+2)!} - \frac{1}{(m+1)!} \right) b + \right. \\ \left. + \frac{1}{(m+1)!} - \frac{a(p)(m+2)!}{(m+1)!(m+1)!} \right]. \quad (П6)$$

Подставляя (П5) и (П6) в (П1) получим конечное соотношение для искомого интеграла

$$I = \frac{1}{2} b^m \left[\frac{m^2}{q^2} R_1(p) + w_0^2 b R_2(p) \right],$$

где

$$R_1(p) = \left(\frac{1}{(m+1)!} - \frac{a(p)(m+2)!}{(m+1)!(m+1)!} \right) b^2 + \\ + 2 \left(\frac{a(p)}{m!} - \frac{1}{(m+1)!} \right) b + \frac{(m-1)!}{m!m!} - \frac{a(p)}{m!}, \\ R_2(p) = \left(\frac{(m+3)!}{(m+2)!(m+2)!} - \frac{a(p)(m+4)!}{(m+2)!(m+2)!} \right) b^2 + \\ + 2 \left(\frac{a(p)(m+3)!}{(m+1)!(m+2)!} - \frac{1}{(m+1)!} \right) b + \\ + \frac{1}{(m+1)!} - \frac{a(p)(m+2)!}{(m+1)!(m+1)!}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Щука, А.А.* Нанoeлектроника / А.А. Щука // М. Физматкнига. – 2007. – 463 с.
2. *Максименко, С.А.* Электродинамика углеродных нанотрубок / С.А. Максименко, Г.Я. Слепьян // Радиотехника и электроника. – 2002. – Т. 47. – С. 261.
3. *Елецкий, А.* Транспортные свойства углеродных нанотрубок / А.В. Елецкий // УФН. – 2009. – Т. 179, № 3 – С. 225–242.
4. *Слепьян, Г.Я.* Современные тенденции развития нанoeлектромагнетизма: аналит. обзор / НИУ «Ин-т ядерных проблем» БГУ; сост. Г.Я. Слепьян, С.А. Максименко, П.П. Кужир. – Минск: Изд. центр БГУ, 2012. – 71 с.
5. *Головань, Л.А.* Оптические свойства нанокomпозитов на основе пористых систем / Л.А. Головань, В.Ю. Тимошенко, П.К. Кашкаров // УФН. – 2007. – Т. 177, № 6. – С. 619–638.
6. *Елецкий, А.* Механические свойства углеродных наноструктур и материалов на их основе / А.В. Елецкий // УФН. – 2007. – Т. 177, № 3 – С. 233–274.
7. *Tasaki, S.* P-band contribution to the optical properties of carbon nanotubes: Effect of chirality / S. Tasaki, K. Maekawa, T. Yamabe // Phys. Rev. B. – 1998. – Vol. 57, № 15. – P. 9301–9318.
8. *Bessel-like beams with z-dependent cone angles* / V.N. Belyi [et al.] // Opt. Express. – 2010. – № 18. – P. 1966–1973.
9. *Polarization-Independent Acousto-Optical Modulation of Bessel Light Beams* / V.N. Belyi [et al.] // J. Appl. Spectrosc. – 2014. – Vol. 81, № 1. – P. 73–78.
10. *Bessel-beam Grueneisen relaxation photoacoustic microscopy with extended depth of field* / J. Shi [et al.] // Journal of Biomedical Optics. – 2015. – Vol. 20, № 11. – P. 116002-1–116002-6.
11. *Rapid three-dimensional isotropic imaging of living cells using Bessel beam plane illumination* / T.A. Planchon [et al.] // Nat Methods. – 2011. – Vol. 8, № 3. – P. 417–423.
12. *Multicolor 4D fluorescence microscopy using ultrathin Bessel light sheets* / T. Zhao [et al.] // Scientific Reports. – 2016. – Vol. 6. – P. 26159-1–26159-5.
13. *Степанов, Н.Ф.* Квантовая механика и квантовая химия / Н.Ф. Степанов. – М.: Мир, 2001. – 519 с.
14. *Saito, R.* Physical properties of carbon nanotubes / R. Saito, M.S. Dresselhaus, G. Dresselhaus. – London: Imperial College Press, 1999. – 251 p.
15. *Mintmire, J.W.* Electronic and structural properties of carbon nanotubes / J.W. Mintmire, C.T. White // Carbon. – 1993. – Vol. 33, № 7. – P. 893–902.
16. *Митюрин, Г.С.* Фотодефлекционный сигнал, генерируемый бесселевым световым пучком в плотном слое углеродных нанотрубок / Г.С. Митюрин, Е.В. Черненко, А.Н. Сердюков //

Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 4 (25). – С. 20–27.

17. Браже, Р.А. Теплопроводность планарных и нанотубулярных супракристаллических структур при температурах ниже температуры Дебая / Р.А. Браже, В.С. Нефёдов // ФТТ. – 2014. – Т. 56, Вып. 3. – С. 602–606.

18. *Photothermal deflection spectroscopy and detection* / W.B. Jackson [et al.] // *Applied Optics*. – 1981. – Vol. 20, № 8. – P. 1333–1344.

19. *Устройство управляемой термооптической генерации акустической волны*: пат. 10757и Респ. Беларусь, МПК(2006.01) G10K 11/00 / Г.С. Митюрин, Е.В. Черненко, А.Н. Сердюков; заявитель ГГУ им. Ф. Скорины. – № и 20150083; заявл. 09.09.2015; опубл. 30.09.2015 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2015. – № 4. – С. 146.

20. *Устройство термооптического возбуждения акустических волн*: пат. 5969и Респ. Беларусь, МПК(2009) G10K 11/00 / П.И. Ропот, Г.С. Митюрин; заявители Ин-т физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Белорусский торговоекономический ун-т потребительской кооперации. – № и 20090659, заявл. 28.07.2009; опубл. 28.02.2010 // Афіцыйны бюл. / Нац. центр інтэлектуал. уласнасці. – 2010. – № 1. – С. 215.

21. *Бейтман, Г.* Таблицы интегральных преобразований: в 2 т. Т. 1: Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина / Г. Бейтман, А. Эрдейи; пер. Н.Я. Виленкина. – М.: Наука, 1969. – 344 с.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант Ф16-126).

Поступила в редакцию 05.11.16.

УДК 521.1; 524.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ ДЛЯ ТРОЙНЫХ СИСТЕМ С НЬЮТОНОВСКИМ ГРАВИТАЦИОННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Г.Ю. Тюменков¹, А.Ю. Песенко², Д.А. Богданович³

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

²Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

³Гомельский городской лицей №1

SIMULATION OF PERIODIC ORBITS FOR THREE-BODY SYSTEMS WITH NEWTONIAN GRAVITATIONAL INTERACTION

G.Yu. Tyumenkov¹, A.Yu. Pesenko², D.A. Bogdanovich³

¹F. Scorina Gomel State University

²Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

³Gomel City Lyceum №1

В рамках общей задачи трёх тел небесной механики решаются динамические уравнения для нерелятивистской тройной системы с ньютоновским потенциалом и моделируются новые периодические орбиты. Используются принцип наименьшего действия, Фурье-анализ и возможности компьютерной симуляции пакета Mathematica.

Ключевые слова: система трех тел, гравитационное взаимодействие, функционал действия, периодическая орбита, ряд Фурье, компьютерное моделирование.

In the framework of the general three-body problem of celestial mechanics dynamic equations for non-relativistic three-body system with Newtonian potential are solved and new periodic orbits are simulated. Principle of least action, Fourier analysis and Mathematica's possibilities of computer simulation were used.

Keywords: three-body system, gravitational interaction, action functional, periodic orbit, Fourier series, computer simulation.

Введение

Со времени формулировки гравитационной задачи n тел Ньютоном в 1687 году специалисты в области небесной механики занимаются поиском и исследованием точных решений этой фундаментальной задачи. Но до настоящего времени даже общая задача трёх тел не имеет точных аналитических решений, поэтому часто изучаются её частные случаи, например, ограниченная задача трех тел, первые решения которой были найдены еще Эйлером в 1767 году и Лагранжем в 1772 году.

Особый интерес в рамках данной деятельности представляет поиск периодических орбит, то есть совокупностей замкнутых траекторий, по которым перемещаются компоненты системы при условии равенства периодов обращения каждой. Успехи в изучении такого рода орбит связаны уже с работами Пуанкаре, который предложил ряд общих подходов в исследовании, например, применение принципа наименьшего действия для поиска экстремальных (в том числе периодических) решений, как в неподвижной, так и вращающейся системах координат. Тем самым он заложил основы всех современных исследований периодических решений.

С середины же прошлого века поиск периодических решений в задаче n тел проводится с

использованием численного интегрирования уравнений движения на компьютерах [1]–[3], что стало особо продуктивно со стремительным развитием вычислительных технологий в начале XXI века [4]–[6].

Идея Пуанкаре об использовании принципа наименьшего действия в дальнейшем была продуктивно развита Муром [1], который подробно рассмотрел обобщенный потенциал взаимодействия полиномиального вида $V \propto r^\alpha$, при $\alpha = -1$ соответствующий гравитационному потенциалу Ньютона. Было показано, что периодические орбиты действительно соответствуют минимуму функционала действия

$$S = \int_0^T (K + V) d\tau, \quad (0.1)$$

где K – кинетическая энергия и V – потенциальная энергия системы в системе отсчета, связанной с центром масс, T – общий период обращения компонентов, переменная интегрирования $\tau \in (0, T)$. Для упрощения анализа в функционале (0.1) часто используют угловую переменную $t = (2\pi/T)\tau$, изменяющуюся в пределах: $t \in (0, 2\pi)$. Это удобно, например, при использовании элементов Фурье-анализа, что характерно для данной работы, и что без потери качества приводит к перепределению вида функционала действия (0.1).

1 Минимизация функционала действия

Для нахождения минимумов функционала действия будем использовать встроенный в среду Mathematica инструмент *FindMinimum*, который находит локальные минимумы в зависимости от начальных значений параметров, которые задает генератор случайных чисел. Стандартной точности вычисления для нашего случая было недостаточно, поэтому параметр *MaxIterations* был увеличен до значения 100. Этот уровень точности потребовал учёта семи слагаемых в рядах Фурье, используемых в данной методике, что довело число параметров до 90. Дальнейшее же увеличение точности приводит к резкому росту расхода оперативной памяти компьютера. После нахождения локального минимума мы имеем массив данных, который записывается в файл для дальнейшего использования при построении орбит.

В общем случае для системы n тел с массами m_j обозначим z_j координаты положения j -го тела в момент времени t с соответствующим значением аргумента t . Тогда для n тел с траекториями $z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)$ функционал действия запишется в виде [2], [3]:

$$S = \int_0^{2\pi} \left(\sum_j \frac{m_j}{2} |\dot{z}_j|^2 - \sum_{j,k;k < j} \frac{m_j m_k}{|z_j - z_k|} \right) dt. \quad (1.1)$$

Далее используем разложение траекторий в ряды Фурье

$$z_j(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikt}, \quad y_k \in X. \quad (1.2)$$

При этом задачу трёх тел рационально полагать плоской, тогда траектории для такой задачи будут двухкомпонентными $z_j(t) = \{x_j(t), y_j(t)\}$ с коэффициентами $\gamma_k = \{\alpha_k, \beta_k\}$, задаваемыми, следуя (1.2), в виде рядов

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^c \cos(kt) + a_k^s \sin(kt)) \\ y(t) &= b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k^c \cos(kt) + b_k^s \sin(kt)), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha_0, \quad a_k^c = \alpha_k + \alpha_{-k}, \quad a_k^s = \beta_{-k} - \beta_k, \\ b_0 &= \beta_0, \quad b_k^c = \beta_k + \beta_{-k}, \quad b_k^s = \alpha_k - \alpha_{-k}. \end{aligned}$$

Вначале рассмотрим плоское движение трёх тел равной массы. Так как функционал действия

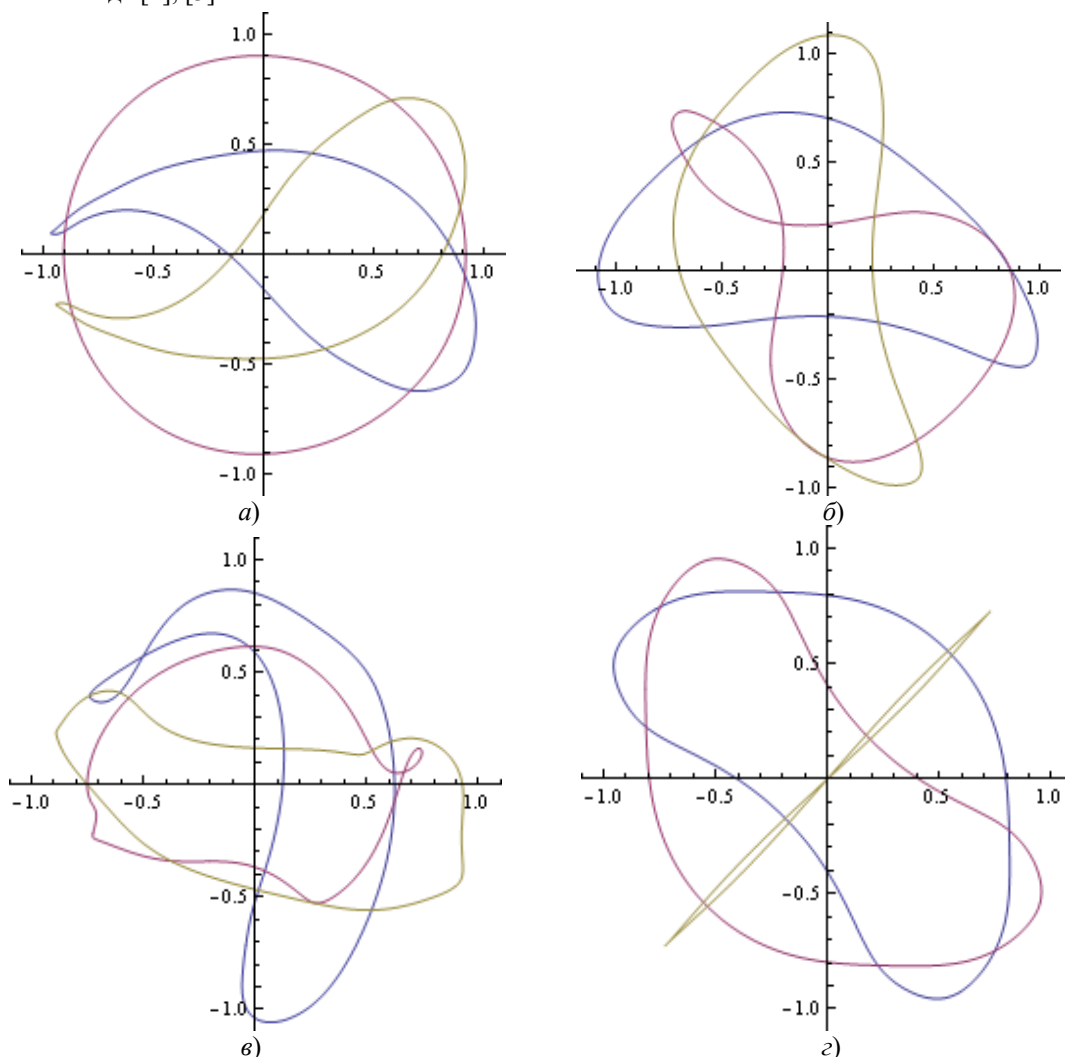


Рисунок 1.1 – Модельные орбиты, удовлетворяющие принципу наименьшего действия (a – z)

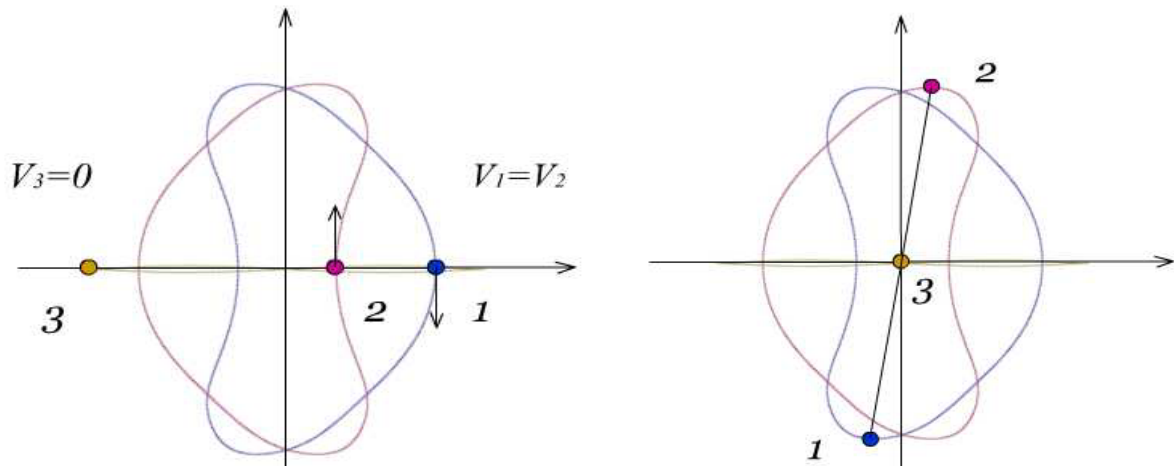


Рисунок 2.1 – Орбита «Новая I» и положения тел на орбите при $\tau = 0$ и $\tau = T/4$

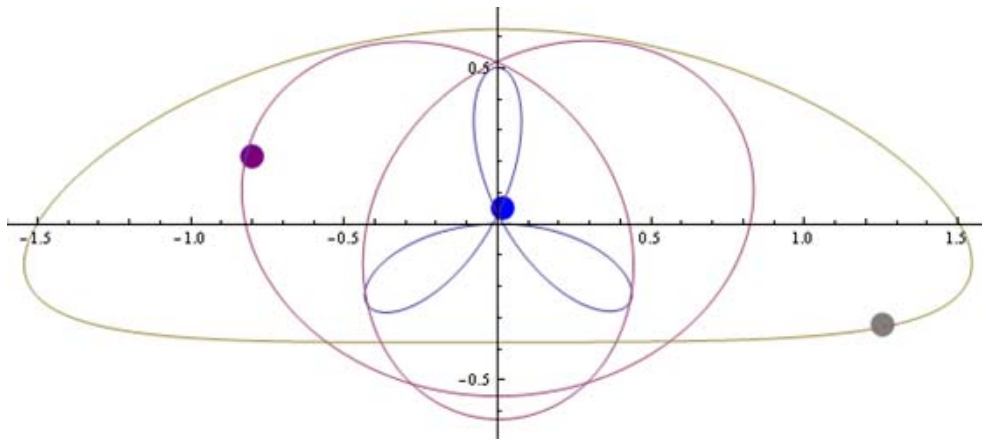


Рисунок 2.2 – Орбита «Новая II» для частного случая неравных масс

в пространстве параметров a_0 , a_k^c , a_k^s , b_0 , b_k^c , b_k^s имеет множество локальных минимумов, то должно существовать множество периодических орбит, среди которых присутствуют как известные, так и новые.

Итогом компьютерной симуляции являются орбиты тел тройной системы, число которых в настоящее время приближается к 1300. Но не все полученные орбиты являются физическими, то есть удовлетворяющими динамическим уравнениям. На рисунке 1.1 представлены некоторые новые орбиты, которые претендуют стать периодическими.

2 Численное решение уравнений и новые периодические орбиты

Является ли модельная орбита реальной периодической, то есть физической орбитой, определяется путем численного решения системы дифференциальных уравнений для трёх связанных тел [3]–[5]

$$m_j \ddot{z}_j^\alpha = \sum_{k:k \neq j} m_j m_k \frac{z_j^\alpha - z_k^\alpha}{|z_j - z_k|^3}; \quad j = 1, 2, 3, \alpha = 1, 2;$$

с использованием массивов полученных орбитальных данных.

Во всех случаях при моделировании за единицу измерения массы тела была принята масса Солнца, обе шкалы на графиках орбит были масштабированы астрономическими единицами, а единице измерения времени, то есть секунде, соответствует земной сидерический год.

В рамках используемой методики нами была получена новая периодическая орбита (далее «Новая I») для трёх тел равной массы, представленная на рисунке 2.1 (вариант γ рисунка 1.1). Два тела двигаются по симметричным замкнутым кривым, а третье тело совершает движение вдоль вытянутой восьмерки очень близкой к горизонтальной оси. В начальный момент времени все три тела расположены на одной прямой, причем скорость третьего тела равна нулю, а второе и первое тело имеют одинаковые по модулю, но противоположные по направлению скорости, перпендикулярные этой прямой. Через промежуток времени $\tau = T/4$ тела снова выстраиваются в линию, причем третье тело в этот момент времени проходит центр масс системы.

Далее был рассмотрен интересный частный случай системы, состоящей из трёх тел с различными массами, отношение между которыми

определяется так называемым «золотым сечением». Последнее было сделано из эстетических соображений. В этом случае массы определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} m_1 &\approx 1,851 m; \\ m_2 &\approx 0,710 m; \\ m_3 &\approx 0,439 m. \end{aligned}$$

Введение различных масс тел приводит к появлению двух дополнительных параметров задачи, что существенно ее усложняет и значительно увеличивает время моделирования, но зато и повышает ее теоретическую привлекательность. Эта проблема была успешно преодолена, и нами была получена соответствующая периодическая орбита, названная «Новая II» и представленная на рисунке 2.2, где также отмечены начальные положения тел. Первому телу соответствует синяя метка в центре, второму – красная слева и третьему – коричневая справа. С помощью пакета Mathematica периодические орбиты «Новая I» и «Новая II» анимируются, что позволяет детально увидеть движение тел в системе.

Следует заметить, что среди множества орбит, следующих из минимизации функционала действия (1.1), новые физические периодические орбиты составляют порядка 1%, причем часть из них являются неустойчивыми и по этой причине нами сепарируются.

Заключение

Таким образом, в работе описан метод моделирования периодических орбит для систем, состоящих из трёх небесных тел, которые связаны между собой ньютоновским гравитационным взаимодействием. Данный метод опирается на использование базовых принципов и динамических уравнений нерелятивистской небесной механики и на симуляционные возможности системы компьютерной алгебры Mathematica разработчика Wolfram Research. В рамках общей задачи трёх тел небесной механики в двумерном

приближении получены две новые периодические орбиты для случаев одинаковых и различных масс компонентов. Активное развитие компьютерных технологий уже дало результаты [7] и в трехмерном моделировании периодических орбит, что делает данное научное направление весьма перспективной областью исследований в глобальном мире изучения космических объектов и явлений.

Предложенный метод и результаты работы могут быть использованы также в учебном процессе в классических университетах в рамках курсов «Общая астрономия» и «Астрофизика».

ЛИТЕРАТУРА

1. Moore, C. Braids in classical dynamics / C. Moore // Phys. Rev. Lett. – 1993. – Vol. 70. – P. 3675–3683.
2. Vanderbei, R.J. New orbits for the n -body problem / R.J. Vanderbei // Annals of the New York Academy of Sciences. – 2004. – Vol. 1017. – P. 422–430.
3. Montgomery, R. A new solution to the three – body problem / R. Montgomery // Notices Amer. Math. Soc. – 2001. – Vol. 48, № 5. – P. 471–481.
4. Рой, А. Движение по орбитам / А. Рой. – М.: Мир, 1981. – 545 с.
5. Орлов, В.В. Периодические орбиты в задаче N тел / В.В. Орлов, А.В. Рубинов, А.И. Мартынов // Физика Космоса. – Екатеринбург: УГУ, – 2010. – С. 108–121.
6. Мартынова, А.И. Периодические орбиты в общей задаче трёх тел / А.И. Мартынова, В.В. Орлов // Астрономический вестник. – 2013. – Т. 47, № 5. – С. 395–407.
7. Титов, В.Б. Периодические орбиты общей задачи трёх тел с нулевым кинетическим моментом / В.Б. Титов // Нелинейная динамика. – 2012. – Т. 8, № 2. – С. 377–389.

Поступила в редакцию 20.10.16.

УДК 535.42

ГЕНЕРАЦИЯ БЕССЕЛЕВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ В КРИСТАЛЛАХ С РАДИАЛЬНО-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

П.А. Хило¹, Н.А. Хило², О.И. Проневич¹

¹Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого

²Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси

GENERATION OF BESSEL LIGHT BEAMS OF THE SECOND HARMONIC IN CRYSTALS WITH RADIAL-PERIODICALLY NONLINEARITY

P.A. Khilo¹, N.A. Khilo², O.I. Pronevich¹

¹P.O. Sukhoi Gomel State Technical University

²B.I. Stepanov Institute of Physics of NAS Belarus

Предложена и исследована схема генерации второй гармоники бesselевых световых пучков в квадратично-нелинейных кристаллах с радиально-периодической структурой доменов. Рассмотрен тип взаимодействия, когда падающий бesselев световой пучок радиально или азимутально поляризован. Получена система укороченных уравнений для амплитуд поля основной частоты и поля второй гармоники. Численно исследованы интегралы перекрытия, характеризующие эффективность генерации второй гармоники.

Ключевые слова: бesselев световой пучок, система укороченных уравнений, интеграл перекрытия, генерация второй гармоники, квадратично-нелинейный кристалл.

The generation of the second harmonic of Bessel light beams in quadratic-nonlinear crystals with radial-periodically domain structure was proposed and investigated. The type of interaction when the incident Bessel beam radially or azimuthally polarized is considered. A system of truncated equations for the field amplitudes of the fundamental and second harmonic fields is achieved. Numerically investigated The overlap integrals describing the efficiency of second harmonic generation were numerically investigated.

Keywords: Bessel beam, system of reduced equations, overlap integral, second-harmonic generation, quadratic nonlinear crystal.

Введение

Среды с регулярными доменными структурами представляют значительный интерес для реализации эффектов квазисинхронного нелинейно-оптического взаимодействия и устройств управления параметрами лазерного излучения [1]. Одноосные периодически поляризованные кристаллы, в которых могут быть сформированы высококачественные периодические структуры, привлекательны для решения таких задач благодаря высоким значениям коэффициента нелинейной оптической восприимчивости второго порядка, в частности, компоненты d_{33} . Как известно, эффективность генерации второй гармоники критически зависит от выполнения условий фазового синхронизма и обычно их реализуют за счет анизотропии кристаллов. Кроме того, для выполнения фазового синхронизма при нелинейно-оптическом преобразовании важна поляризация взаимодействующих волн (тип I или тип II взаимодействия), взаимная ориентация волновых векторов взаимодействующих волн (коллинеарное или неколлинеарное взаимодействие), тип нелинейной среды (в частности, класс симметрии кристалла) и т. д. Для изотропных нелинейных кристаллов или для геометрий взаимодействия в анизотропных кристаллах, для которых

реализация традиционного фазового синхронизма невозможна, широко используются квазисинхронные взаимодействия в высокотехнологичных кристаллах с периодической модуляцией нелинейной восприимчивости. При этом обычно рассматривается геометрия взаимодействия, в которой световые пучки основной и удвоенной частоты распространяются вдоль (или под малым углом) к направлению вектора модуляции нелинейной восприимчивости [2]. В работе [3] исследован новый тип периодической структуры с радиальной модуляцией нелинейной восприимчивости для квазисинхронного преобразования частоты световых волн, а в [4] была показана возможность генерации радиально-поляризованного БСП удвоенной частоты при падении на периодически-поляризованный нелинейный кристалл гауссова пучка, распространяющегося вдоль оптической оси кристалла.

1 Теория метода и расчет нелинейной поляризации для кристалла с радиально-периодической структурой доменов

В работе предложена и исследована схема квазисинхронной генерации радиально поляризованного БСП удвоенной частоты в квадратично-нелинейных кристаллах с радиально-поляризованной

структурой доменов при неколлинеарном взаимодействии двух необыкновенных волн, распространяющихся под углом β к оптической оси \vec{c} одноосного кристалла класса $4mm$ ($\vec{c} \parallel$ оси Z). Аналитически и численно показано, что данная геометрия позволяет реализовать квазисинхронное $ee-e$ взаимодействие в условия поперечного фазового синхронизма и генерировать вторую гармонику в форме радиально поляризованного бесселева пучка, задействовав при этом максимальную компоненту тензора нелинейной поляризации d_{33} кристалла, превышающую d_{31} в несколько раз.

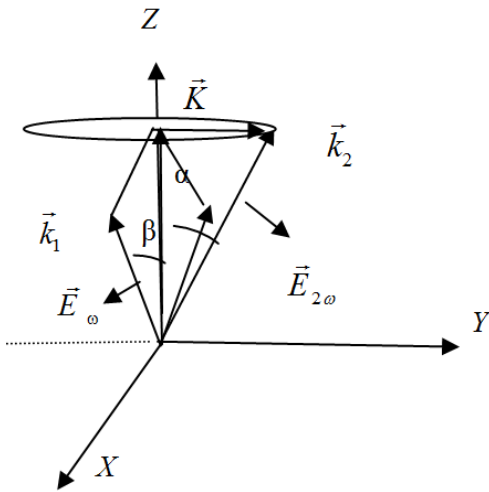


Рисунок 1.1 – Геометрия взаимодействия \vec{E}_ω , $\vec{E}_{2\omega}$, \vec{k}_1 , \vec{k}_2 – векторы поляризации и волновые векторы волны основной и удвоенной частоты соответственно, K – волновой вектор периодически поляризованного кристалла

Рассчитаем нелинейную поляризацию для кристалла класса $4mm$ с радиально-периодической структурой доменов. Матрица d_{ij} для кристалла данного класса имеет вид

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Ненулевые составляющие тензора квадратичной восприимчивости χ , соответствующие (1.1), равны

$$\chi_{xxz} = \chi_{xxx} = \chi_{yyz} = \chi_{yyz} = d_{15}; \quad \chi_{zxx} = \chi_{zyy} = d_{31}; \quad \chi_{zzz} = d_{33}. \quad (1.2)$$

С учетом (1.2) запишем составляющие НЛ поляризации на удвоенной частоте:

$$\begin{aligned} P_{2x} &= \chi_{xxx} E_{ex} E_{ez} + \chi_{xzx} E_{ez} E_{ex}, \\ P_{2y} &= \chi_{yyz} E_{ez} E_{ey} + \chi_{yyz} E_{ey} E_{ez}, \\ P_{2z} &= \chi_{zyy} E_{ey} E_{ez} + \chi_{zzz} E_{ez} E_{ez}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Из геометрии задачи следует что $P_{2x} = 0$, так как $E_{ex} = 0$, $P_{2y} = 0$ так первое и второе слагаемые

в (1.3) имеют противоположные знаки и ненулевая компонента вектора нелинейной поляризации равна

$$P_{2z} = d_{31} E_{ey}^2(\omega) + d_{33} E_{ez}^2(\omega). \quad (1.4)$$

В рассматриваемых кристаллах с радиальной симметричной периодической модуляцией тензора нелинейной восприимчивости компоненты тензора d_{ij} могут быть представлены в форме $d_{ij}(\rho) = d_{ij}^{ef}(\cos 2\pi\rho / \Lambda)$, где $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ поперечная радиальная компонента, Λ – период круговой модуляции, $d_{ij}^{ef} = 2d_{ij} / m\pi$. Предполагаем, что необыкновенные волны основной частоты ω распространяются под углом β к оптической оси (рисунок 1.1) и в результате векторного взаимодействия возбуждают нелинейную поляризацию P_{2z} , которая является источником для генерации волны второй гармоники. Поскольку ориентация вектора нелинейной поляризации направлена вдоль оси Z , то волна второй гармоники может генерироваться только за счет неколлинеарного взаимодействия с волнами основной частоты вдоль направления, определяемого следующими условиями фазового синхронизма

$$2\vec{k}_1 + m\vec{K} = \vec{k}_2, \quad (1.5)$$

где K – модуль волнового вектора периодической структуры, m – целое число. Из соотношения (1.5) получим условия продольного

$$2k_1 \cos \beta = k_2 \cos \alpha \quad (1.6)$$

и поперечного фазового синхронизма

$$mK = k_2 \sin \alpha \quad (1.7)$$

где α – угол между осью Z и направлением распространения волны второй гармоники (рисунок 1.1). Как следует из (1.7), выполнение условия поперечного фазового синхронизма при заданном периоде модуляции нелинейной восприимчивости достигается изменением угла генерации второй гармоники, при этом подстройка под продольный синхронизм (1.6) осуществляется изменением направления распространения волны основной частоты. В частности, для кристалла ниобата калия лития ($K_3Li_2Nb_5O_{15}$) для первой Фурье-компоненты радиально-периодической модуляции нелинейности при угле $\alpha = 5^\circ$ период модуляции составляет порядка 2.5 мкм, что легко достижимо современными методами поляризации доменной структуры кристаллов. Так как геометрия взаимодействия имеет азимутальную симметрию, следовательно, излучение волны второй гармоники не должно зависеть от азимутального угла ϕ и должно иметь форму концентрического конуса с углом конусности α , как показано на рисунке 1.1.

Запишем вектор нелинейной поляризации (1.4) в виде

$$P_{2z} = (d_{31} E_e^2(\omega) \cos^2(\beta) + d_{33} E_e^2(\omega) \sin^2(\beta)) \exp i(2k_{ez} z).$$

Характерной особенностью данного выражения является то, что проекция вектора нелинейной поляризации на удвоенной частоте не зависит от азимутального угла φ , при этом поле второй гармоники удовлетворяет следующему волновому уравнению

$$\left[\nabla^2 + \frac{\varepsilon}{c^2} (2\omega)^2 \right] E_{2\omega,z} = \frac{-4\pi}{c^2} (2\omega)^2 P_{2z}. \quad (1.8)$$

Как известно, в общем случае при распространении вдоль оптической оси бesselева пучка собственными модами кристалла, т. е. не изменяющими свой профиль из-за влияния анизотропии, являются ТЕ и ТН-моды, которые применительно к плоским волнам называются обыкновенной (o) и необыкновенной (e). Векторы электрического поля данных волн могут быть записаны в виде

$$\vec{E}^{(o)} = A_o (\vec{c}_+ J_{m-1}(qr) + \vec{c}_- J_{m+1}(qr)) \times \exp(im\varphi + ik_{o,z}z), \quad (1.9)$$

$$\vec{E}^{(e)} = A_e \left[\vec{c}_+ J_{m-1}(qr) - \vec{c}_- J_{m+1}(qr) - \frac{2iq\varepsilon_o}{k_{ez}\varepsilon_e} J_m(qr)\vec{e}_z \right] \exp(im\varphi + ik_{e,z}z), \quad (1.10)$$

где $\vec{c}_\pm = (\vec{e}_r \pm i\vec{e}_\varphi)$ – векторы циркулярной поляризации в цилиндрических координатах

$$k_{o,z} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_o - q^2},$$

$$k_{e,z} = (n_o/n_e) \sqrt{k_0^2 \varepsilon_e - q^2}.$$

Так как в результате нелинейно-оптического процесса генерируется $E_{2\omega,z}$ компонента ТН-волны второй гармоники, то из (1.10) получим

$$E_{2\omega,z}^{(e)}(r,t) = A_e J_m(qr) \exp(ik_{e,z}^{2\omega} z + im\varphi), \quad (1.11)$$

где $q = k_2 \sin \alpha$, а множитель $2iq\varepsilon_o/k_{ez}^{2\omega}\varepsilon_e^{2\omega}$ внесен в амплитуду. Выражение (1.11) является точным решением волнового уравнения, а соответствующее ему приближенное решение равно

$$E_{2\omega,z}(\rho, z) = A_2(z) \frac{J_m(q_2\rho)}{\sqrt{W(q_2)}} \exp[ik_{ez}^{2\omega} z + im\varphi]. \quad (1.12)$$

Для удобства дальнейшего анализа, в (1.12) введен нормировочный множитель

$$W(q_2) = 2\pi \int_0^R J_m^2(q_2\rho) \rho d\rho.$$

Будем предполагать, что нелинейное взаимодействие приводит в первую очередь к z -модуляции скалярной амплитуды A_2 в формуле (1.12). В то же время, z – составляющую модовой функции $\vec{e}_m^{(e)}(\rho, \varphi)$, будем считать неизменной, причем отметим, что все плоскостные компоненты БСП генерируются в одинаковых условиях продольного и поперечного синхронизмов вследствие цилиндрической симметрии задачи, обусловленной возникающей нелинейной поляризацией

вдоль оси Z и распространением пучка вдоль оптической оси кристалла.

Для получения укороченных уравнений, описывающих процесс генерации второй гармоники радиально-поляризованного БСП, подставляем в уравнение Гельмгольца решение в виде (1.12) с зависящей от z амплитудой A_2 . Поскольку нелинейная поляризация P_{2z} не зависит от азимутального угла φ , то в (1.12) полагаем $m = 0$, т. е., считаем, что генерируется $E_{2\omega,z}$ компонента радиально-поляризованного пучка нулевого порядка.

Используя формулы (1.12), (1.8) получим укороченное уравнение для амплитуды поля второй гармоники

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} = i\delta A_1^2(z)g(q), \quad (1.13)$$

где

$$g(q) = \frac{1}{\sqrt{W(q)}} \int_0^{R_b} J_0(q\rho) \cos(K\rho) \rho d\rho$$

– интеграл перекрытия, характеризующий эффективность генерации второй гармоники,

$$A_1 = \sqrt{2\pi P_\omega / n_\omega c} \int_0^{R_b} \rho d\rho$$

– нормированная амплитуда волны основной частоты, P_ω – мощность волны основной частоты,

$$K = 2\pi/\Lambda,$$

R_b – радиус бesselева пучка,

$$\delta = \frac{4\pi(2\omega)^2}{c^2 2k_{2z}} (d_{31}^{ef} \cos\beta + d_{33}^{ef} \sin\beta).$$

Отметим, что угол падения волн основной частоты β выбирался так, чтобы обеспечить выполнение поперечного синхронизма при учете первой Фурье-компоненты радиально-периодической модуляции нелинейности, при этом также обеспечивалось выполнение условия продольного синхронизма.

2 Результаты расчетов

На рисунке 2.1 приведен график зависимости интеграла перекрытия от соотношения поперечных компонент волновых векторов генерируемого бesselева пучка q и поперечной периодической структуры K при разных углах конуса генерируемой второй гармоники для кристалла ниобата калия лития ($K_3Li_2Nb_5O_{15}$). Как следует из графиков, максимальное значение интеграла перекрытия достигается при выполнении условия поперечного фазового синхронизма при генерации бesselева пучка второй гармоники $q = K$, не зависит от угла конуса генерируемой гармоники, а сам максимум сужается при увеличении угла α генерируемого бesselева пучка.

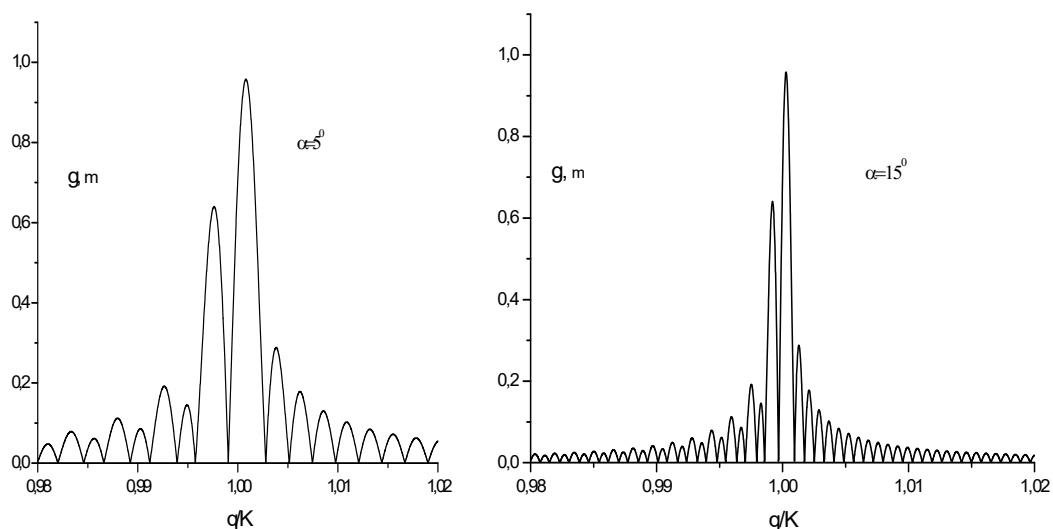


Рисунок 2.1 – Зависимость интеграла перекрытия g от соотношения поперечных компонент волновых векторов генерируемого бesselового пучка q и поперечной периодической структуры K для кристалла ниобата калия лития ($K_3Li_2Nb_5O_{15}$) при ($\lambda = 1.06$ мкм, $n_o = 2.208$, $n_{e2o} = 2.197$, $n_{o2o} = 2.238$)

Заключение

В работе предложена новая схема генерации бesselовых световых пучков второй гармоники на основе неколлинеарного взаимодействия волн основной частоты в кристаллах с радиально-периодической структурой доменов. Аналитически и численно показано, что данная геометрия позволяет реализовать квазисинхронное $ee-e$ взаимодействие в условиях поперечного фазового синхронизма и генерировать вторую гармонику в форме радиально поляризованного бesselового пучка, задействовав при этом максимальную компоненту тензора нелинейной поляризации d_{33} кристалла, превышающую d_{31} в несколько раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Quasi-phase-matched second harmonic generation – tuning and tolerances* / M.M. Fejer [et al.] // IEEE J. Quantum Electron. – 1992. – Vol. 28. – P. 2631–2654.
2. Хило, П.А. Генерация второй гармоники эллиптическими бesselовыми световыми пучками в периодически поляризованных нелинейных средах / П.А. Хило, Е.С. Петрова // ЖПС. – 2005. – Т. 72, № 6. – С. 752–755.
3. *Annular symmetry nonlinear frequency converters* / D. Kasimov [et al.] // Optics Express. – 2006. – Vol. 14, № 20. – P. 9371–9376.
4. *Generation of Bessel beams by parametric frequency doubling in annular nonlinear periodic structures* / S. Saltiel [et al.] // Optics Express. – 2007. – Vol. 15, № 7. – P. 4133–4138.

Поступила в редакцию 08.07.16.

УДК 621.793:539.216.2

**ВЛИЯНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ ФОРМИРОВАНИЯ
НА СТРУКТУРУ И СВОЙСТВА ПОКРЫТИЙ НА ОСНОВЕ ПОЛИМЕРОВ,
ОСАЖДАЕМЫХ ИЗ АКТИВНОЙ ГАЗОВОЙ ФАЗЫ (ОБЗОР).**

**2. ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ И РЕЖИМОВ ПРОЦЕССОВ,
ПРОТЕКАЮЩИХ НА ПОВЕРХНОСТИ ОСАЖДЕНИЯ**

М.А. Ярмоленко, А.А. Рогачёв, А.В. Рогачёв

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

**THE IMPACT OF TECHNOLOGICAL PROCESSES
ON THE PROPERTIES OF POLYMER-BASED COATINGS DEPOSITED
FROM ACTIVE GAS PHASE (REVIEW).**

**2. INFLUENCE OF CONDITIONS AND PARAMETERS
OF THE PROCESSES PROCEEDING ON THE DEPOSITED SURFACE**

M.A. Yarmolenko, A.A. Rogachev, A.V. Rogachev

F. Scorina Gomel State University

Рассмотрены закономерности влияния температуры поверхности осаждения и плотности потока летучих продуктов диспергирования, последующей термообработки сформированных покрытий на молекулярную структуру и свойства покрытий на основе полимеров, осаждаемых из активной газовой фазы. Определены особенности зарождения и роста полимерных частиц на активированной поверхности.

Ключевые слова: электронно-лучевое диспергирование, полимерные покрытия, молекулярная структура, морфология, термообработка.

Regularities of substrate temperature influence and density of a volatile dispersion products flow, following heat treatment of the formed layers on molecular structure and properties of polymer-based coatings deposited from an active gas phase are considered. Features of nucleation and growth of polymer particles on the activated surface are determined.

Keywords: electron beam dispersion, polymer coatings, molecular structure, morphology, heat treatment.

Введение

Экспериментальные исследования структуры и свойств полимерных покрытий, осаждаемых из газовой фазы – продуктов электронно-лучевого диспергирования, указывают на сложный характер их зависимости от условий и режимов генерации газовой фазы, процессов переноса генерируемых молекулярных фрагментов из зоны диспергирования до поверхности осаждения с последующим их взаимодействием с поверхностью подложки, приводящего к образованию покрытия. В [1]–[4] проведен анализ влияния энергии и плотности потока электронов, введения в мишень низкомолекулярных соединений, лазерного ассистирования процесса диспергирования, плазменной активации летучих продуктов на молекулярную структуру и свойства покрытий на основе полимеров, осаждаемых из активной газовой фазы. Определена также эффективность регулирования структуры и свойств покрытий путем изменения условий и режимов генерации газовой фазы.

В работах [5], [6] в числе наиболее значимых параметров, в значительной степени определяющих протекающие на поверхности осаждения

процессы, отмечают плотность потока молекулярных фрагментов, природу и степень активации поверхности подложки, ее температуру и режим термообработки покрытия после его нанесения. При этом характер их влияния на молекулярную структуру, морфологию и, соответственно, свойства осаждаемых покрытий является, как правило, неоднозначным и зависит от состава и реакционной активности летучих продуктов диспергирования, условиями их переноса в газовой фазе.

Основной целью настоящей работы является проведение, с учетом отмеченных особенностей, анализа зависимости молекулярной структуры и морфологии от режимов и условий процессов, протекающих на поверхности при взаимодействии с ней летучих продуктов диспергирования.

1 Влияние температуры поверхности осаждения и плотности потока летучих продуктов

В работе [7] на основании анализа процессов, протекающих на поверхности подложки при взаимодействии с ней молекулярных частиц

диспергирования, получены аналитические выражения, описывающие зависимость скорости осаждения и молекулярной массы от температуры поверхности и плотности потока фрагментов j ($\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$). При этом учитывается тепловая десорбция фрагментов, процессы химического взаимодействия их с активными частицами, возможность проявления стереометрических эффектов, возникающих при экранировании фрагментов другими частицами, поступающими из газовой фазы. Считается, что участие максимально возможного числа адсорбированных молекулярных фрагментов в процессе полимеризации обеспечивается при одновременном выполнении следующих оптимальных условий: время жизни фрагмента в адсорбированном состоянии τ_a должно быть больше (или равно) времени захвата фрагмента растущим активным центром пленки τ_u ; τ_u должно быть меньше (или равно) времени поступления на поверхность, занимаемую адсорбированной частицей, фрагмента из газовой фазы τ_n . Если $\tau_u < \tau_n$, то молекулярные фрагменты перейдут в газовую фазу до того, как осуществится их захват растущей цепью, т. е. акт химического взаимодействия. При $\tau_u > \tau_n$ фрагмент также имеет высокую вероятность не участвовать в росте макромолекулы, ибо он окажется экранирован другими фрагментами, поступившими на эту поверхность. В результате анализа данных соотношений установлено существование интервала оптимальных плотностей потока фрагментов

$$j_2 \leq j \leq j_1,$$

где $j_1 = \frac{\gamma D}{0,0144 \cdot S_0^2}$, $j_2 = \frac{0,0144 \cdot a}{\gamma D \tau_a^2}$, S_0 – площадь, занимаемая адсорбированным фрагментом, D – коэффициент диффузии, γ – доля активных частиц, способных инициировать процессы полимеризации, a – постоянная величина.

Из результатов, представленных на рисунке 1.1, следует также существование и оптимального температурного режима формирования покрытия.

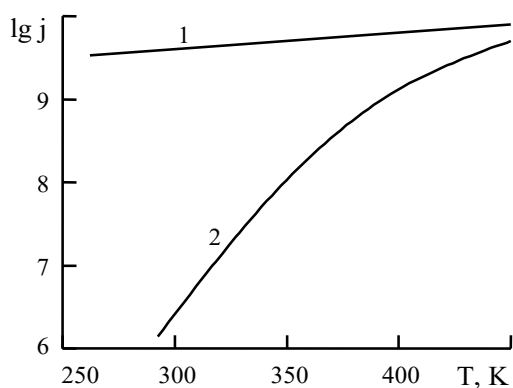


Рисунок 1.1 – Зависимость j_1 (1) и j_2 (2) от температуры поверхности ($\gamma = 10^{-3}$, энергия адсорбции фрагментов $E = 4,5 \cdot 10^{-20}$ Дж)

Отметим, что при увеличении плотности потока частиц диапазон оптимальных температур расширяется. Увеличение доли активных, инициирующих процесс полимеризации частиц γ в падающем на поверхность подложки потоке приводит также к расширению интервала оптимальных температур и плотностей потока.

В рамках молекулярно-кинетической модели в [7] рассмотрено влияние технологических режимов на скорость роста и молекулярную массу. Показано, что степень полимеризации макромолекул полимера и скорость роста покрытия достигают максимального значения при температуре

$$T_0 = \frac{E}{R \ln \left[\frac{2E - E_0}{\tau_0 (\alpha_u + S_0) j E_0} \right]},$$

где E_0 – энергия активации процесса диффузии, τ_0 – постоянная величина, α_u – эффективное сечение взаимодействия при ионно-стимулированной десорбции.

Следует отметить, что характер зависимости $m(T)$ зависит в значительной степени от вклада в массоперенос ионно-стимулированной десорбции (коэффициент α_u). При $\alpha_u + S_0 \gg \frac{1}{j \tau_a}$ во всем

интервале температур $\frac{dm}{dT} < 0$. При осаждении покрытия из молекулярного потока, не содержащего активных частиц и $\alpha_u + S_0 \ll \frac{1}{j \tau_a}$, $\frac{dm}{dT} < 0$.

Данный результат согласуется с экспериментальными данными по исследованию температурной зависимости молекулярной массы покрытий, полученных методом электронно-лучевого диспергирования [8].

Экстремальной является и зависимость $m(j)$.

При $j_0 = \frac{1}{(\alpha_u + S_0) \tau_a}$ средняя молекулярная масса имеет максимальное значение. При увеличении температуры оптимальное значение плотности потока возрастает.

В работе [7] установлено, что с увеличением плотности потока летучих продуктов скорость роста покрытия возрастает при значениях $j < j_{кр}$, при более высоких значениях j скорость роста слоев снижается, что обусловлено, в основном, протеканием процессов газофазной полимеризации, потерей активности летучих продуктов диспергирования.

2 Особенности зарождения и роста полимерных частиц на активированной поверхности

Кинетика протекания процессов адсорбции, диффузии, полимеризации, особенно на начальной стадии осаждения полимерного слоя, его

структура и свойства определяется энергетическими параметрами поверхности, ее дефектностью. Данное обстоятельство объясняет высокую эффективность применения дополнительной активации поверхности подложки, в частности, ее ионной обработки в качестве технологического приема, активно влияющего на процессы осаждения и свойства покрытия.

Кинетические и морфологические особенности роста полимерных покрытий политетрафторэтилена из активной газовой фазы на подложки, обработанные различными методами, рассмотрены в [9]. Установлено, что при осаждении покрытий ПТФЭ на поверхности монокристалла кремния, обработанной растворителем и имеющей наиболее низкое значение поверхностной энергии ($53,1 \text{ мДж/м}^2$), процессы адсорбции и образования микрочастиц полимерной фазы характеризуются поверхностной неоднородностью. Имеются поверхностные участки, на которых уже на начальных стадиях образуются достаточно большие по размеру частицы. Так, при эффективной толщине слоя $3,8 \text{ нм}$ на таких участках растущие частицы имеют куполоподобную форму с площадью основания до $0,6 \text{ мкм}^2$ и высотой до 20 нм , фрактальная размерность таких структур равна $D_f = 2,73 \pm 0,19$, т. е. ее значение близко к $D_f = 3$, что характерно для неупорядоченных структур. Формирование на такой поверхности подложки полимерного покрытия с эффективной толщиной $3 \dots 5 \text{ нм}$ снижает суммарную поверхностную энергию до значения $18,5 \text{ мДж/м}^2$, характерного для блочного полимера [10].

Обработка ионами Ag^+ , N^+ поверхности кремния приводит к возрастанию поверхностной энергии до 74 мДж/м^2 и к практически безактивационному процессу роста покрытия, формированию сплошного, даже на начальных стадиях осаждения, полимерного слоя. Отметим, что значение суммарной поверхностной энергии таких слоев составляет $13 \dots 15 \text{ мДж/м}^2$. Согласно известным представлениям, для фторполимеров такое уменьшение поверхностной энергии связано в первую очередь с увеличением содержания концевых групп CF_3 , имеющих больший молекулярный радиус, по сравнению с группами CF_2 . В нашем случае, вследствие активации поверхности подложки, наблюдается ориентированный рост низкомолекулярных фрагментов, приводящий к выходу CF_3 -групп на внешнюю поверхность покрытия. Стабилизация значений поверхностной энергии и ее составляющих в слоях толщиной более 2 нм характерно для адсорбционно-однородных поверхностей.

В работе [10] на основании анализа морфологических особенностей сделан вывод о преимущественно адсорбционно-диффузионном механизме роста полимерных покрытий из активной газовой фазы и предложена аналитическая модель, описывающая кинетику процесса осаждения.

В рамках данной модели проанализирована зависимость скорости роста полимерной фазы от состояния поверхности, на которой осаждается полимерное покрытие. Показано, что скорость роста покрытия неоднозначно чувствительна к изменению степени активации поверхности подложки. При условиях осаждения, когда основным процессом является адсорбция молекулярных фрагментов, увеличение поверхностной энергии (степени активации) приводит к возрастанию времени жизни фрагментов в адсорбционном состоянии и, соответственно, росту скорости осаждения. При достаточно высокой степени активации процесс осаждения лимитируется диффузионной активностью фрагментов. Поэтому при значении энергии адсорбции E_a , большем некоторого порогового, дальнейшее ее увеличение сопровождается снижением скорости роста. Экспериментальные исследования закономерностей осаждения полимерных слоев на активированной поверхности, проведенные с помощью двух кварцевых кристаллов, показали их высокое согласование с результатами моделирования: при осаждении слоя толщиной менее 3 нм на поверхности, обработанной ионами, скорость роста возрастает в 5 и более раз (рисунок 2.1).

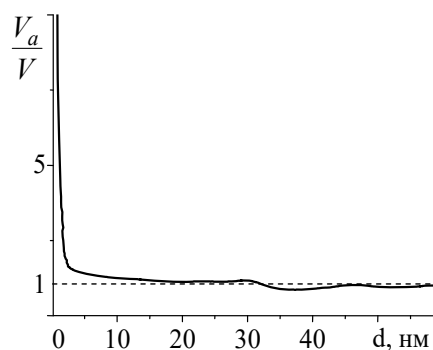


Рисунок 2.1 – Зависимость отношения скоростей роста покрытия, осажденного на активированной ионами N^+ (V_a) и обработанной растворителем (V) поверхности, от толщины полимерного слоя

Спектры высокого разрешения уровней C1s , полученные в [10] методом рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии и представленные на рисунке 2.1, свидетельствуют о влиянии активационной обработки поверхности и на молекулярную структуру покрытия ПТФЭ.

Установлено, что тонкие слои ПТФЭ, осажденные на подложку, предварительно обработанную ионами N^+ , представляют собой более низкомолекулярные фрагменты, в то время как у покрытия ПТФЭ на подложке, обработанной только растворителем, регистрируется большая молекулярная масса, концентрация разветвлений и поперечных шивков. К тому же повышение концентрации $-\text{CF}_2-\text{CF}_2-$, $\text{C}-\text{CF}_2$ в таких слоях свидетельствует о сравнительно большей длине

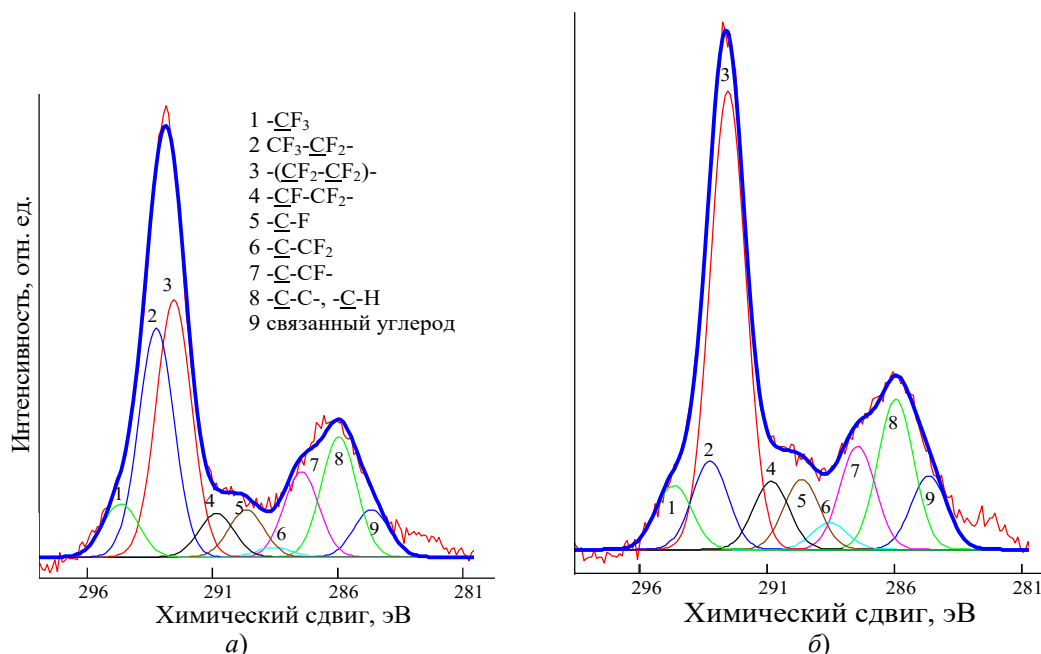


Рисунок 2.2 – Спектры C1s покрытий ПТФЭ толщиной 7,5 нм на поверхности монокристалла кремния, обработанной ионами азота (а) и растворителем (б)

молекулярных фрагментов, что совпадает с результатами приведенного в [11] аналитического описания процесса осаждения. Установленный эффект объясняется уменьшением подвижности адсорбированных молекулярных фрагментов и, соответственно, снижением вероятности их захвата растущими активными ядрами полимеризации. Отметим, что влияние активации поверхности подложки на молекулярную структуру покрытия проявляется только в граничном слое, в пределах которого осуществляется влияние поверхностного поля подложки.

3 Влияние термообработки сформированных покрытий на их структуру

Термообработка сформированных тонких покрытий является наиболее простым технологическим способом изменения их структуры, свойств. Отжиг полимерных покрытий, сформированных из активной газовой фазы, вызывает повышение подвижности адсорбированных молекулярных фрагментов, инициирует протекание реакций с их участием, процессов структурообразования. Наиболее значительные изменения наблюдаются при термообработке диспергированных, наноразмерных покрытий. Установлено, что после отжига островкового слоя ПТФЭ плотность и высота микрочастиц полимера возрастают, уменьшается их средняя площадь основания. Так, после термообработки слоя ПТФЭ с эффективной толщиной 4,5 нм плотность кластеров увеличилась в 3,5 раза, взвешенная площадь уменьшилась в 1,8 раза, а их средняя высота возросла с 7,6 нм до 12,2 нм. При нагреве более толстых слоев, например, имеющих эффективную

толщину 9,1 нм, средняя высота микрочастиц возросла с 11,4 нм до 27,1 нм. Наблюдаемый экспериментальный факт можно объяснить, если учесть, что в соответствии с данными [9] на поверхности подложки на начальных стадиях осаждения формируется слой из адсорбированных частиц диспергирования, которые участвуют в процессах полимеризации. При нагреве слоя выше температуры стеклования подвижность макромолекул возрастает, что и является основной причиной протекания более интенсивных агломерационных процессов.

Более сложными и менее изученными являются процессы термического инициирования химических взаимодействий при осаждении их активной газовой фазы нанокomпозиционных металл-полимерных покрытий.

В работе [12] показано, что нагрев композиционных покрытий, полученных диспергированием ПЭ и нитрата серебра, сопровождается ростом в его ИК-спектре значений оптических плотностей полос поглощения при 1720, 1410, 1350, 1170 и 836 см^{-1} . Данные изменения являются следствием протекания процессов окисления углеводородных фрагментов макромолекул полиэтилена, активируемых при нагреве. При этом регистрируется существенное увеличение оптической плотности полосы поглощения при 1350 см^{-1} , которые относят к валентным колебаниям нитрогрупп $-\text{C}-\text{NO}_2$, что указывает на возможность протекания при нагреве реакций с участием нитрогрупп.

Термообработка таких покрытий вызывает более полный распад соли, образование наночастиц серебра в полимерной матрице (интенсивность

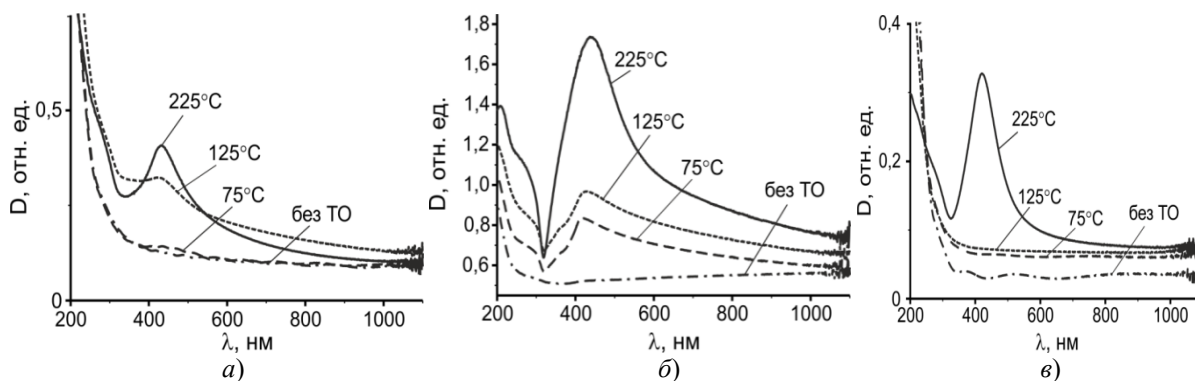
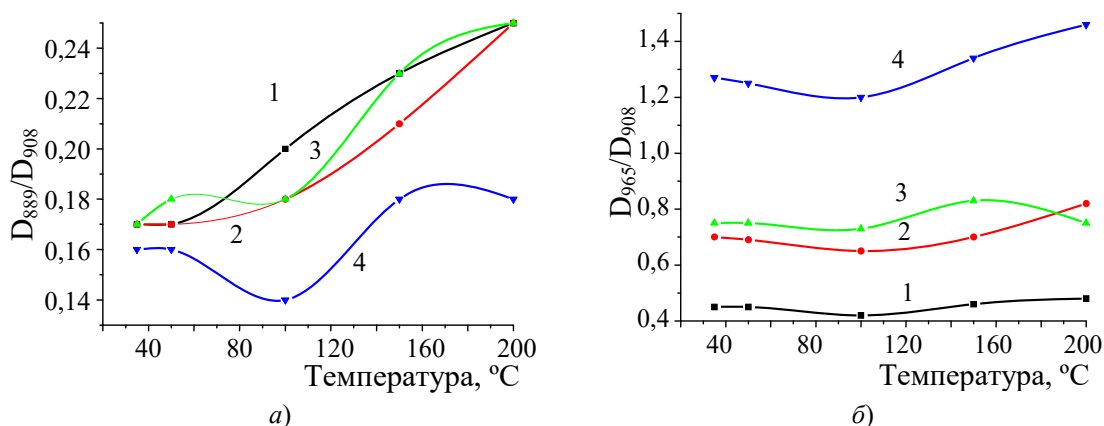


Рисунок 3.1 – Электронные спектры покрытий, сформированных в процессе электронно-лучевого диспергирования смесей нитрата серебра с полиэтиленом (а), полилактидом (б), полиметилметакрилатом (в)



1 – покрытие ПЭ; 2 – ПЭ + Pb; 3 – ПЭ + Ni; 4 – ПЭ + Cr

Рисунок 3.2 – Зависимость концентрации винилиденовых (а) и трансвиниленовых групп (в) от температуры отжига покрытий на основе полиэтилена (ПЭ)

полос плазмонного поглощения возрастает). При этом характер изменения интенсивности плазмонных полос при нагреве зависит от природы полимера: наиболее заметен данный эффект при использовании в качестве матрицы полярных полимеров (рисунок 3.1).

Термообработка нанокмпозиционных полимерных покрытий оказывает влияние и на молекулярную структуру, топографию матрицы [10], [13], [14]. Зависимость отношения оптических плотностей полос поглощения винилиденовых ($>C=CH_2$, 889 см^{-1}), винильных ($-CH=CH_2$, 908 и 990 см^{-1}) и трансвиниленовых ($-CH=CH-$, 965 см^{-1}) групп от температуры отжига представлена на рисунке 3.2.

Наиболее заметно параметры отжига металлсодержащих полиэтиленовых покрытий сказываются на относительном содержании винилиденовых групп. В целом, как для однокомпонентных, так и для нанокмпозиционных покрытий их содержание при нагреве покрытий возрастает. При этом введение металла, как правило, вызывает снижение доли винилиденовых концевых двойных связей относительно винильных.

Введение в полиэтиленовую матрицу металлических кластеров и отжиг оказывают существенное влияние и на морфологию покрытий [11]. После отжига в вакууме для всех покрытий фиксируется появление на фазовом контрасте слоистой структуры, подобной структуре, образованной пластинчатыми кристаллами, формируемыми из разбавленных растворов полимеров [15]. Для покрытий, содержащих никель и хром, подобная слоистая структура имеет наиболее выраженный характер. Это может указывать на инициирование данными металлами реакций, приводящих к снижению молекулярной массы макромолекул полимера.

В работах [10], [14] определены особенности влияния отжига на морфологию и молекулярную структуру композиционных покрытий ПЭ–ПТФЭ. Нагрев покрытий в вакууме до температуры плавления полиэтилена не приводит к увеличению кристалличности. При этом наиболее низкое значение кристалличности характерно для покрытия, сформированного в условиях плазменной обработки продуктов диспергирования, и составляет 0,48 (для покрытий, осажденных без активации продуктов диспергирования

степень кристалличности 0,67). Подобные результаты, однако, не могут быть объяснены только сшивкой фрагментов макромолекул при нагреве вследствие инициирования радикальных реакций. Существенное влияние на процессы структурирования при этом, по-видимому, оказывают процессы взаимодействия, протекающие в межфазных переходных областях.

Установлено, что если плазменная обработка продуктов электронно-лучевого диспергирования приводит к появлению различного рода дефектов во фторопластовой компоненте композиционного покрытия, то отжиг покрытия ПЭ-ПТФЭ снижает дефектность молекулярной структуры политетрафторэтиленовой компоненты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dynamics of combined electron beam and laser dispersion of polymers in vacuum* / P.A. Luchnikov [et al.] // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2016. – № 110. – 012081 DOI:10.1088/1757-899X/110/1/012081.

2. *A preparation of polyethylene coatings by pulse laser-assisted electron beam deposition* / Zhubo Liu [et al.] // Progress in Organic Coatings. – 2011. – Vol. 136. – P. 28–31.

3. *Молекулярная структура и морфология покрытий полиэтлена, легированных при их формировании из газовой фазы низкомолекулярными соединениями* / М.А. Ярмоленко [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 2 (3). – С. 10–20.

4. *Growth feature of PTFE coatings on rubber substrate by low-energy electron beam dispersion* / Zhubo Liu, Bing Zhou, A.V. Rogachev, M.A. Yarmolenko // Polym. Adv. Technol. – 2016. – № 27. – P. 823–829.

5. *Красовский, А.М.* Нестационарные процессы в тонких пленках, формируемых лазерным распылением полимеров в вакууме / А.М. Красовский, Е.М. Толстопятов, П.Н. Гракович // Высокомолекул. соед. – 1988. – 30А. – № 2. – С. 448–452.

6. *Классов, В.Н.* Флуктуационные явления в процессах электропереноса в тонких фторполимерных пленках / В.Н. Классов, А.П. Лучников,

В.В. Филимонов // Электроника нелинейных диэлектриков. Э.Т. – 1988. – Сер. 6. – № 3. – С. 66–69.

7. *Буй, М.В.* Релаксационно-диффузионная теория межфазных процессов / М.В. Буй, А.В. Рогачев. – БелГУТ, 1997. – 177 с.

8. *Задорожный, В.Г.* Получение тонких пленок и покрытий из фторопластов в вакууме и исследование их свойств: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.17.09 / В.Г. Задорожный; Л.: ЛТИ, 1978. – 23 с.

9. *Рогачев, А.А.* Морфология и молекулярная структура наноразмерных защитных полимерных покрытий, осажденных из активной газовой фазы: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 01.04.07 / А.А. Рогачев; ИММС НАНБ. – Гомель, 2006. – 23 с.

10. *Рогачев, А.А.* Физико-химия полимерных покрытий, осаждаемых из активной газовой фазы / А.А. Рогачев. – М.: Научный мир, 2014. – 278 с.

11. *Микро- и нанокмпозиционные полимерные покрытия, осаждаемые из активной газовой фазы* / М.А. Ярмоленко [и др.]: под ред. А.В. Рогачева. – М.: Радиотехника, 2016. – 424 с.

12. *Heat treatment impact on molecular structure of polymer-based silver containing coatings deposited from the active gas phase* / A.A. Rogachev [et al.] // Progress in Organic Coatings. – 2015. – Vol. 81. – P. 80–86.

13. *Влияние межфазного взаимодействия на морфологию наноразмерных покрытий на основе полиэтилена, осажденных из активной газовой фазы* / А.А. Рогачев [и др.] // Наноматериалы и наноструктуры. – 2012. – № 3. – С. 21–27.

14. *Морфология покрытий политетрафторэтилена, осажденных из активной газовой фазы, ее изменения при термообработке* / А.А. Рогачев [и др.] // ЖПХ. – 2006. – Т. 79, № 7. – С. 1217–1219.

15. *Тагер, А.А.* Физико-химия полимеров / А.А. Тагер. – М.: Химия, 1968. – 536 с.

Поступила в редакцию 03.10.16.

УДК 512.542

О СТРОЕНИИ СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП В ГРУППАХ С ОПЕРАТОРАМИ

Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич, М.В. Селькин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON THE STRUCTURE OF SUBNORMAL SUBGROUPS IN GROUPS WITH OPERATORS

R.V. Borodich, E.N. Borodich, M.V. Selkin

F. Scorina Gomel State University

Изучаются свойства пересечений максимальных подгрупп в группах с операторами.

Ключевые слова: конечная группа, субнормальная подгруппа, локальная формация.

The properties of intersection of maximal subgroups in groups with the operators are studied.

Keywords: finite group, subnormal subgroup, local formation.

Введение

В работе Д.Бейдлемана и Ш.Смита [1] был поставлен следующий вопрос: «Если H – субнормальная подгруппа группы G , содержащая подгруппу Фраттини $\Phi(G)$, то будет ли из сверхразрешимости $H/\Phi(G)$ следовать сверхразрешимость подгруппы H ?» Эта задача рассматривалась в работах М.В. Селькина [2], Баллестера-Болиншеса [3] и многих других авторов [2].

В данной работе дается ответ на более общий вопрос: «Пусть \mathfrak{F} – локальная формация, H – субнормальная подгруппа. В каком случае из $H/\Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$ будет следовать, что $H \in \mathfrak{F}$, где $\Delta(G, A)$ подгруппа, равная пересечению ядер всех абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп?»

1 Используемые определения и леммы

Рассматриваются только конечные группы. В обозначениях и определениях мы следуем монографиям [2], [4].

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (то есть пересечение всех подгрупп из G , сопряженных с подгруппой M).

Пусть даны группа G , множество A и отображение $f: A \rightarrow \text{End}(G)$, где $\text{End}(G)$ – гомоморфное отображение группы G в себя или эндоморфизм группы G . Подгруппа M называется A -допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A , то есть $M^\alpha \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им эндоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа

является A -допустимой для произвольной группы операторов.

Напомним, подгруппа H группы G называется: *пронормальной*, если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $\langle H, H^x \rangle$; *абнормальной*, если $x \in \langle H, H^x \rangle$ для любого $x \in G$.

Обозначим через $\Phi(G, A)$ пересечение ядер всех максимальных A -допустимых подгрупп, а через $\Delta(G, A)$ ($\Delta^p(G, A)$) пересечение ядер всех абнормальных (абнормальных не p -нильпотентных) максимальных A -допустимых подгрупп.

Для пересечения всех абнормальных (абнормальных не p -нильпотентных) максимальных подгрупп группы G будем использовать ставшее традиционным обозначение подгруппы Гашюца $\Delta(G)$ ($\Delta^p(G)$).

В случае отсутствия в группе G указанных подгрупп будем полагать, что соответствующие пересечения совпадают с самой группой G .

Необходимо отметить, что не всегда множество всех максимальных подгрупп группы G будет совпадать со множеством всех максимальных A -допустимых подгрупп группы G относительно некоторой группы операторов A [5].

Напомним, что группа G называется π -замкнутой, если она содержит инвариантную π -холловскую подгруппу.

Лемма 1.1. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $K \subseteq N \triangleleft G$, $K \triangleleft G$, N и K – A -допустимые подгруппы группы G и $K \subseteq \Delta(G, A)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если N/K π -замкнута, то и N π -замкнута;

$$2) F_p(N/K) = F_p(N)/K.$$

Доказательство. Пусть N/K имеет нормальную S_π -подгруппу H/K . Так как $K \subseteq \Delta(G, A)$, то K нильпотентна. Нетрудно заметить, что S_π -подгруппа R из K является S_π -подгруппой в H . По теореме Шура-Цассенхауза H содержит S_π -подгруппу S и любые две такие подгруппы сопряжены в H . По обобщенной лемме Фраттини $G = N_G(S)H$. С учётом того, что $H = SR$, получаем, что $G = N_G(S)R$. Так как S есть S_π -подгруппа в N , а подгруппа N A -допустима, то S A -допустима. Тогда подгруппа $N_G(S)$ A -допустима и является абнормальной подгруппой группы G . Следовательно, $N_G(S)$ содержится в некоторой абнормальной максимальной A -допустимой подгруппе M из G . Поэтому $G = MR$. Так как $R \subseteq \Delta(G, A) \subseteq M$, то $G = M$. Получили противоречие. Следовательно, S нормальна в G .

Второе утверждение леммы является следствием первого при $\pi = p'$. \square

Лемма 1.2 [6, с. 367]. Пусть F – локальная формация, $G \in F$ и p является простым делителем порядка группы G . Тогда формация F содержит циклическую группу порядка p . В частности, если \mathfrak{F} – локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, то $N_\pi \subseteq F \subseteq E_\pi$.

Лемма 1.3 [4, с. 38]. Пусть f – локальный экран формации F . Группа G тогда и только тогда принадлежит F , когда $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$.

Лемма 1.4. Пусть K – нормальная подгруппа группы G обладающая свойством C_π и H – холлова подгруппа из K . Тогда $N_G(H)$ – абнормальная подгруппа группы G .

Доказательство. Заметим, что для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $\langle H, H^x \rangle \subseteq K$, то есть H является пронормальной подгруппой в G . Тогда подгруппа $N_G(H)$ является абнормальной в G . \square

Из теоремы Силова следует, что любая подгруппа группы G обладает свойством C_p . Отсюда и из предыдущей леммы получаем, что в любой нормальной подгруппе нормализатор A -допустимой силовской подгруппы является абнормальной подгруппой группы G .

Лемма 1.5 [7, с. 44]. Пусть p – простое нечётное число. Группа G является p -нильпотентной тогда и только тогда, когда для любой подгруппы P , характеристической в некоторой

силовской p -подгруппе группы G , $N_G(P)/C_G(P)$ – p -подгруппа.

Лемма 1.6 [8, с. 26]. Пусть группа G имеет группу операторов A . Если K – A -допустимая подгруппа группы G , то $N_G(K)$ является A -допустимой подгруппой группы G .

2 Свойства пересечений максимальных подгрупп в группах с операторами.

Теорема 2.1. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$, \mathfrak{F} – локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Если субнормальная A -допустимая подгруппа H группы G содержит $O_\pi(\Delta(G, A))$ и $H/O_\pi(\Delta(G, A)) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.

Доказательство. Согласно лемме 1.2 \mathfrak{F} содержится в E_π классе всех π -групп. Не ограничивая общности, можно считать, что $\Delta(G, A)$ – π -группа. Таким образом, H – π -группа и $H/\Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$. Пусть $p \in \pi$. Так как H – субнормальная подгруппа группы G и согласно леммы 1.1 $F_p(G/\Delta(G, A)) = F_p(G)/\Delta(G, A)$, получаем, что $F_p(H/\Delta(G, A)) = F_p(H)/\Delta(G, A)$. Так как $H/\Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$, то, используя лемму 1.1 и лемму 1.3, получаем, что

$$\begin{aligned} (H/\Delta(G, A))/F_p(H/\Delta(G, A)) &= \\ = H/\Delta(G, A)/F_p(H)/\Delta(G, A) &= \\ H/F_p(H) \in f(p). \end{aligned}$$

Так как последнее справедливо для любого $p \in \pi(H)$, то по лемме 1.3 подгруппа H входит в \mathfrak{F} . Теорема доказана.

В случае, когда \mathfrak{F} содержит формацию нильпотентных групп, тогда $\pi = P$ и теорема 2.1 дает ответ на вопрос: «Если H субнормальная A -допустимая подгруппа группы G , такая, что $H/\Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$?»

В случае, когда группа операторов $A = 1$, то подгруппа $\Delta(G, A)$ совпадает с подгруппой Гашиоца $\Delta(G)$ и имеет место следующее

Следствие 2.1.1. Пусть \mathfrak{F} – локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Если субнормальная подгруппа H группы G содержит $O_\pi(\Delta(G))$ и $H/O_\pi(\Delta(G)) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.

Используя доказательство теоремы 2.1, несложно получить следующее следствие.

Следствие 2.1.2. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$, \mathfrak{F} – локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Если субнормальная A -допустимая подгруппа H группы G содержит $O_\pi(\Phi(G, A))$ и $H/O_\pi(\Phi(G, A)) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.

Если группа операторов A единична, то подгруппа $\Phi(G, A)$ совпадает с подгруппой Фраттини $\Phi(G)$ и из следствия 2.1.2 получаем результат работы [3].

Замечание. Если локальная формация \mathfrak{F} не содержит формацию нильпотентных групп, то даже в случае единичной группы операторов из того, что $H / \Delta(G) \in \mathfrak{F}$ для субнормальной подгруппы H , не всегда следует, что $H \in \mathfrak{F}$. Действительно, пусть $\mathfrak{F} = S_p$ – насыщенная формация всех p -групп, p – простое число. Рассмотрим $q \neq p$ и пусть $G = C_{p^2} \times C_{q^2}$ – циклическая группа порядка $p^2 q^2$. Если $H = C_{p^2} \Delta(G)$, тогда $H \triangleleft G$ и $H / \Delta(G) \in \mathfrak{F}$, но $H \notin \mathfrak{F}$.

Теорема 2.2. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$, \mathfrak{F} – локальная формация. Если N – субнормальная A -допустимая подгруппа группы G и

$$N / N \cap \Delta(G, A) \in \mathfrak{F}.$$

Тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;
- 2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$;
- 3) $N_2 \subseteq \Delta(G, A)$.

Доказательство. Пусть $D = N \cap \Delta(G, A)$, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. По теореме 2.1 подгруппа N представима в виде $N = N_1 \times N_2$, где N_1 – холловская π -подгруппа из N . Так как $N_2 \subseteq \Delta(G, A)$, то $N / DN_1 / D_1 \in \mathfrak{F}$, где $D_1 = N_1 \cap \Delta(G, A)$. Пусть $p \in \pi$. Так как $N_1 / D_1 \in \mathfrak{F}$, то, используя лемму 1.1 и лемму 1.3, получаем, что

$$\begin{aligned} (N_1 / D_1) / F_p(N_1 / D_1) &= \\ = N_1 / D_1 / F_p(N_1) / D_1 N_1 / F_p(N_1) &\in f(p). \end{aligned}$$

Так как последнее справедливо для любого $p \in \pi(N_1)$, то по лемме 1.3 подгруппа N_1 входит в \mathfrak{F} . \square

Следствие 2.2.1. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$, \mathfrak{F} – локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если N – субнормальная A -допустимая подгруппа группы G и $N / N \cap \Delta(G, A) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.

Следствие 2.2.2. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$, \mathfrak{F} – локальная формация. Если N – субнормальная A -допустимая подгруппа группы G и $N / N \cap \Phi(G, A) \in \mathfrak{F}$. Тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;
- 2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$;
- 3) $N_2 \subseteq \Phi(G, A)$.

Следствие 2.2.3. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$, \mathfrak{F} – локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если N – субнормальная A -допустимая подгруппа группы G и

$$N / N \cap \Phi(G, A) \in \mathfrak{F},$$

то $N \in \mathfrak{F}$.

В случае, когда группа операторов единична имеет место следующее

Следствие 2.2.4. Пусть \mathfrak{F} – локальная формация. Если N – субнормальная подгруппа группы G и $N / N \cap \Delta(G) \in \mathfrak{F}$. Тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;
- 2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$;
- 3) $N_2 \subseteq \Delta(G)$.

Следствие 2.2.5. Пусть \mathfrak{F} – локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если N – субнормальная подгруппа группы G и $N / N \cap \Delta(G) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.

Следствие 2.2.6. Пусть \mathfrak{F} – локальная формация. Если N – субнормальная подгруппа группы G и $N / N \cap \Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;
- 2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$;
- 3) $N_2 \subseteq \Phi(G)$.

Следствие 2.2.7. Пусть \mathfrak{F} – локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если N – субнормальная подгруппа группы G и $N / N \cap \Phi(G) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.

Теорема 2.3. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$ и $p > 2$.

Тогда либо $\Delta^p(G, A) = \Delta(G, A)$, либо G является p -разрешимой группой.

Доказательство. Пусть \mathfrak{F} – формация всех p -нильпотентных групп. Так как G не p -разрешима, то $K = G^3 \notin \mathfrak{F}$. Можно считать, что $O_p(G) = 1$. Пусть P – силовская p -подгруппа из K . По теореме Томпсона в P найдётся такая характеристическая, а следовательно, A -допустимая подгруппа $R \neq 1$, что $N_K(R) \notin \mathfrak{F}$. Так как R – A -допустимая подгруппа, то по лемме 1.6 $N_G(R)$ – A -допустимая подгруппа. Далее $N_K(R) \subseteq N_G(R)$. Значит, $N_G(R) \notin \mathfrak{F}$. Так как $O_p(G) = 1$, то $N_G(P) \neq G$.

По лемме 1.4, $N_G(P)$ – абнормальная подгруппа. Из того, что $N_G(P) \subseteq N_G(R)$, имеем, что $N_G(R)$ – абнормальная подгруппа. Так как любая подгруппа, содержащая $N_G(R)$ является абнормальной и не p -нильпотентной, то в качестве абнормальной не p -нильпотентной максимальной A -допустимой подгруппы выберем наибольшую A -допустимую подгруппу, содержащую $N_G(R)$.

Пусть G не p -разрешима. Обозначим через D пересечение ядер всех абнормальных не p -нильпотентных максимальных A -допустимых подгрупп группы G . Если в G нет p -нильпотентных максимальных A -допустимых подгрупп, то $D = \Delta(G, A)$. Так как G не p -разрешима, то G имеет по крайней мере одну абнормальную не p -нильпотентную максимальную A -допустимую подгруппу. Следовательно, $D \neq G$.

В G существует p -нильпотентная абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа MD . В противном случае, если любая p -нильпотентная абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа из G содержит D , то $\Delta(G, A) = D$.

Отсюда следует, что $G = MD$. Имеем

$$G/D \cong M/M \cap D \quad (2.1)$$

является p -нильпотентной, в частности, p -разрешимой.

Пусть P – A -допустимая силовская p -подгруппа из D . По лемме Фраттини $G = DN_G(P)$. Тогда или $N_G(P) = G$, или $N_G(P)$ – p -нильпотентная подгруппа.

Если $N_G(P) = G$, то $P \triangleleft G$. Следовательно, $P \triangleleft \Delta(G, A)$, а значит, $\Delta(G, A)$ p -разрешима, тогда из (2.1) G p -разрешима. Противоречие. Получаем, что $N_G(P)$ является A -допустимой p -нильпотентной подгруппой. Если D p -нильпотентна, то G по (2.1) является p -разрешимой, получаем противоречие, которое показывает, что D не p -нильпотентна.

По лемме 1.5 в D существует характеристическая подгруппа P^* из P , такая, что

$$N_D(P^*)/C_D(P^*) -$$

не p -группа. Так как $N_G(P^*) \supseteq N_G(P)$, то $G = DN_G(P^*)$.

Возможны ситуации: $N_G(P^*) = G$ или $N_G(P^*)$ p -нильпотентна. Но во втором случае $N_D(P^*)$ p -нильпотентна и $N_D(P^*)/C_D(P^*) - p$ -группа. Остаётся предположить, что $N_D(P^*)/C_D(P^*) -$ не p -группа и P^* нормальна в G .

Пусть P^* максимальная среди всех таких подгрупп. Положим $\bar{G} = G/P^*$. Пусть $\bar{P}_0 -$ характеристическая подгруппа в \bar{P} . Тогда P_0

характеристична в P и содержит P^* . Следовательно, $N_D(P_0)/C_D(P_0) - p$ -группа.

Но

$$N_{\bar{D}}(\bar{P}_0) = N_D(P_0)/P^* \text{ и } C_D(P_0)P^*/P^* \subseteq C_{\bar{D}}(\bar{P}_0),$$

где $\bar{P}_0 = P_0/P^*$. Из этого получаем, что

$N_{\bar{D}}(\bar{P}_0)/C_{\bar{D}}(\bar{P}_0) - p$ -группа. Следовательно, по

лемме 1.5 \bar{D} p -нильпотентна. Так как $\bar{D} = D/P^*$ и $P^* - p$ -группа, то D p -разрешима и, следовательно, G p -разрешима. Последнее противоречие показывает, что $D = \Delta(G, A)$. \square

Следствие 2.3.1. Пусть $p > 2$, тогда либо $\Delta^p(G) = \Delta(G)$, либо G является p -разрешимой группой.

Из следствия 2.3.1 вытекает результат В.В. Шлыка из [9].

Заключение

В данной работе исследовано влияние операторно-обобщенной подгруппы Фраттини на строение конечных групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Beidleman, J.C. On Frattini-like subgroups / J.C. Beidleman, H.Smith. // Glasgow Math. J. – 1993. – Vol. 35. – P. 95–98.
2. Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 144 с.
3. Ballester-Bolinches, A. On F -subnormal subgroups and Frattini-like subgroups of a finite group / A. Ballester-Bolinches, M.D. Perez-Ramos // Glasgow Math. J. – 1994. – Vol. 36. – P. 241–247.
4. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Шеметков Л.А. – М.: Наука, 1978. – 267 с.
5. Бородич, Р.В. Об F -достижимых подгруппах в группах с операторами / Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич, М.В. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2 (23). – С. 33–39.
6. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
7. Thompson, J.G. Normal p -complements for finite groups / J.G. Thompson // J. Algebra. – 1964. – Vol. 1. – P. 43–46.
8. Gorenshstein, D. Finite groups / D. Gorenshstein. – New York: Harper and Row, 1968. – 572 p.
9. Шлык, В.В. О пересечении максимальных подгрупп в конечных группах / В.В. Шлык // Мат. заметки. – 1973. – Т. 14, № 3. – С. 429–439.

Поступила в редакцию 16.06.16.

УДК 512.542

ОБ ОТДЕЛИМЫХ РЕШЕТКАХ НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ

Н.Н. Воробьев, А.Р. Кузнецова

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова

ON SEPARATED LATTICES OF SATURATED FORMATIONS

N.N. Vorob'ev, A.R. Kuznetsova

P.M. Masherov Vitebsk State University

Найдены новые серии отделимых решеток насыщенных формаций.

Ключевые слова: формация, полная решетка формаций, решетка насыщенных формаций, \mathfrak{X} -отделимая решетка насыщенных формаций.

A new series of separated lattices of saturated formations was found.

Keywords: formation, complete lattice of formations, lattice of saturated formations, \mathfrak{X} -separated lattice of saturated formations.**Введение**

Все рассматриваемые группы конечны. Будем рассматривать терминологию из [1]–[4]. Символом $F_p(G)$ обозначают наибольшую нормальную p -нильпотентную подгруппу группы G , а символом $O_p(G)$ – наибольшую нормальную p -подгруппу группы G . Через $\pi(G)$ обозначают множество всех простых делителей порядка группы G .

Напомним, что *формацией* называется класс групп, который замкнут относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. В теории формаций особую роль играют так называемые насыщенные формации. Пусть f – произвольная функция вида

$$f: \mathbb{P} \rightarrow \{\text{формации групп}\}. \quad (0.1)$$

Следуя [1], сопоставим функции f класс групп $LF(f) = (G \mid G / F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(G))$.

Если формация \mathfrak{F} такова, что $\mathfrak{F} = LF(f)$ для некоторой функции f вида (0.1), то \mathfrak{F} называют *насыщенной формацией* с локальным спутником f [1].

Совокупность формаций Θ называется *полной решеткой формаций* [3], если пересечение любой совокупности формаций из Θ снова принадлежит Θ , и во множестве Θ имеется такая формация \mathfrak{F} , что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для любой формации $\mathfrak{H} \in \Theta$. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация. Заметим, что относительно включения \subseteq множество всех насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ и \mathfrak{F} образуют полную решетку (обозначаемую $\mathfrak{F} / \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$), где \mathfrak{N} – класс всех nilпотентных групп.

В 1997 году А.Н. Скибой [3] начали изучать отделимые решетки формаций. Пусть \mathfrak{X} –

некоторый непустой класс групп. Согласно [3], полная решетка формаций Θ называется \mathfrak{X} -отделимой, если для любого термина $\xi(x_1, \dots, x_m)$ сигнатуры $\{\cap, \vee_\Theta\}$, любых Θ -формаций $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m$ и любой группы

$$A \in \mathfrak{X} \cap \xi(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m)$$

найдутся такие \mathfrak{X} -группы $A_1 \in \mathfrak{F}_1, \dots, A_m \in \mathfrak{F}_m$, что

$$A \in \xi(\Theta \text{form } A_1, \dots, \Theta \text{form } A_m).$$

Здесь \vee_Θ – оператор объединения в решетке Θ .

Свойство отделимости является одним из основных инструментов при изучении решеток классов конечных групп (см. [3], [4]). В монографии [3] доказано, что решетка всех функторно замкнутых n -кратно насыщенных формаций \mathfrak{S} -отделима, а решетка всех функторно замкнутых тотально насыщенных формаций \mathfrak{S} -отделима. Впоследствии в работе Л.А. Шеметкова, А.Н. Скибы и Н.Н. Воробьева [6] была доказана \mathfrak{S} -отделимость решетки функторно замкнутых n -кратно ω -насыщенных формаций, а в работе Н.Н. Воробьева, А.Н. Скибы и А.А. Царева [7] была установлена \mathfrak{S} -отделимость решетки всех ω -композиционных формаций. Отметим, что в работах [5]–[7] свойство отделимости применяется при исследовании тождеств решеток частично насыщенных и частично композиционных формаций.

Целью данной работы является доказательство \mathfrak{S} -отделимости решетки $\mathfrak{F} / \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$.

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 2.1. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация. Тогда решетка $\mathfrak{F} / \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ \mathfrak{S} -отделима.

1 Предварительные сведения

Напомним некоторые известные утверждения и определения, которые потребуются для доказательства основного результата.

Символом $\Theta \text{form} \mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех формаций из Θ , содержащих совокупность групп \mathfrak{X} .

Лемма 1.1 [3, лемма 1.2.22]. Для любой совокупности групп \mathfrak{X} справедливо равенство $\text{form} \mathfrak{X} = \text{QR}_0(\mathfrak{X})$.

Лемма 1.2 [8, лемма 2]. Пусть $\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i = LF(f_i)$. Тогда $\mathfrak{F} = LF(f)$, где $f = \bigcap_{i \in I} f_i$.

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – набор всех локальных спутников формации \mathfrak{F} . Ввиду леммы 1.2 $f = \bigcap_{i \in I} f_i$ – локальный спутник формации \mathfrak{F} , называемый *минимальным*. Следующая лемма дает способ построения минимального локального спутника формации $\mathfrak{F} = l\text{form} \mathfrak{X}$.

Лемма 1.3 [3, теорема 1.1.5]. Пусть \mathfrak{X} – непустая совокупность групп, $\mathfrak{F} = l\text{form} \mathfrak{X}$ и f – минимальный локальный спутник формации \mathfrak{F} . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $\pi(\mathfrak{X}) = \pi(\mathfrak{F})$;
- 2) $f(p) = \text{form}(G / F_p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ для всех $p \in \mathbb{P}$;
- 3) если $\mathfrak{F} = LF(h)$, то для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$ имеет место

$$f(p) = \text{form}(A \mid A \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(A) = 1).$$

Лемма 1.4 [3, лемма 4.1.2]. Пусть f_i – минимальный локальный спутник насыщенной формации \mathfrak{F}_i , где $i \in I$. Тогда $\vee(f_i \mid i \in I)$ – минимальный локальный спутник формации $\mathfrak{F} = \vee_i(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$.

Напомним, что *полуформацией* называется класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов.

Лемма 1.5 [3, лемма 1.2.21]. Пусть \mathfrak{F} – полуформация, порожденная \mathfrak{X} . Тогда $\mathfrak{F} = \mathcal{Q} \mathfrak{X}$.

Лемма 1.6 [3, лемма 4.1.5]. Пусть \mathfrak{M} – полуформация и $A \in \text{form} \mathfrak{M}$. Тогда если $O_p(A) = 1$, то $A \in \text{form} \mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1 = (G / O_p(G) \mid G \in \mathfrak{M})$.

Лемма 1.7 [3, лемма 1.3.6]. Если $\mathfrak{F} = LF(f)$ и $G / O_p(G) \in f(p) \cap \mathfrak{F}$ для некоторого $p \in \pi(G)$, то $G \in \mathfrak{F}$.

2 Доказательство теоремы

Доказательство. Пусть $\xi(x_1, \dots, x_m)$ – терм сигнатуры $\{\cap, \vee_i\}$, $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m$ – произвольные формации из $\mathfrak{F} / \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ и $A \in \xi(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m)$.

Индукцией по числу r вхождений символов из $\{\cap, \vee_i\}$ в терм ξ покажем, что найдутся такие группы $A_i \in \mathfrak{F}_i$ ($i = 1, \dots, m$), что

$$A \in \xi(\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_m),$$

где $\mathfrak{M}_i = \text{form} A_i$. При $r = 0$, очевидно, $A \in \text{form} A$. Докажем, что данное утверждение верно при $r = 1$.

Если $A \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$, то $A \in \text{form} A \cap \text{form} A$. Пусть $A \in \mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2 = \text{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$. Тогда по лемме 1.1 $\text{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2) = \text{QR}_0(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$. Следовательно, $A \cong H / N$, где $H \in \text{R}_0(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$. Значит, группа H имеет нормальные подгруппы N_1, \dots, N_t ($t \geq 2$) такие, что

$$\bigcap_{i=1}^t N_i = 1 \text{ и } H / N_i \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2, \quad i = 1, \dots, t.$$

Заметим, что $H^{\delta_1} \cap H^{\delta_2} = 1$. Значит,

$$H \in \text{R}_0(H / H^{\delta_1}, H / H^{\delta_2}).$$

Отсюда применяя лемму 1.1, получаем

$$A \cong H / N \in \text{QR}_0(H / H^{\delta_1}, H / H^{\delta_2}) =$$

$$= \text{form}(H / H^{\delta_1}, H / H^{\delta_2}) =$$

$$= \text{form}(H / H^{\delta_1}) \vee \text{form}(H / H^{\delta_2}) \subseteq \mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2.$$

Пусть $A \in \mathfrak{F}_1 \vee_i \mathfrak{F}_2$ и $\{p_1, \dots, p_i\} = \pi(A)$. Тогда в виду леммы 1.3 и леммы 1.4

$$A / F_{p_i}(A) \in f_1(p_i) \vee f_2(p_i),$$

где f_j – минимальный локальный спутник формации \mathfrak{F}_j , $j = 1, 2$. По доказанному выше найдутся такие группы $A_{i_1} \in f_1(p_i)$ и $A_{i_2} \in f_2(p_i)$, что

$$A / F_{p_i}(A) \in (\text{form} A_{i_1}) \vee (\text{form} A_{i_2}).$$

Заметим, что

$$(\text{form} A_{i_1}) \vee (\text{form} A_{i_2}) = \text{form}(A_{i_1}, A_{i_2}).$$

Пусть \mathfrak{M}_1 – полуформация, порожденная группой A_{i_1} , \mathfrak{M}_2 – полуформация, порожденная группой A_{i_2} . Тогда по лемме 1.5 $\mathfrak{M}_1 = (A_1, \dots, A_t)$ и $\mathfrak{M}_2 = (B_1, \dots, B_r)$, для некоторых $A_1, \dots, A_t \in \mathcal{Q}(A_{i_1})$ и $B_1, \dots, B_r \in \mathcal{Q}(A_{i_2})$. Понятно, что $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ – полуформация и

$$A / F_{p_i}(A) \in \text{form}(A_{i_1}, A_{i_2}) =$$

$$= \text{form}(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2) = \text{form}(A_1, \dots, A_t; B_1, \dots, B_r).$$

Значит, ввиду леммы 1.6 можем считать, что

$$O_{p_i}(A_k) = 1 = O_{p_i}(B_l)$$

для всех $k = 1, \dots, t$ и $l = 1, \dots, r$. Пусть

$$D_{i_1} = A_1 \times \dots \times A_t \text{ и } D_{i_2} = B_1 \times \dots \times B_r.$$

Тогда $O_{p_i}(D_{i_1}) = 1 = O_{p_i}(D_{i_2})$.

Кроме того, понятно, что

$$A / F_{p_i}(A) \in \text{form}(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2) =$$

$$= \text{form}(D_{i_1}, D_{i_2}) \subseteq \text{form}(A_{i_1}, A_{i_2}).$$

Пусть Z_{p_i} – группа порядка p_i , $B_i = Z_{p_i} wr D_i$, $B_{i_2} = Z_{p_i} wr D_{i_2}$. Ввиду леммы 1.7 $B_i \in \mathfrak{F}_1$, $B_{i_2} \in \mathfrak{F}_2$.
Значит,

$$A_1 = B_{i_1} \times B_{i_2} \times \dots \times B_{i_r} \in \mathfrak{F}_1,$$

$$A_2 = B_{i_1} \times B_{i_2} \times \dots \times B_{i_r} \in \mathfrak{F}_2.$$

Покажем, что

$$A \in \mathfrak{F} = (lform A_1) \vee_l (lform A_2).$$

Для этого достаточно установить, что $A / F_{p_i}(A) \in f(p_i)$, где f – минимальный локальный спутник формации \mathfrak{F} . Понятно, что $B_i \in \mathfrak{F}$. Значит, $B_i / F_{p_i}(B_i) \in f(p_i)$. Но поскольку $O_{p_i}(D_i) = 1$, то $B_i / F_{p_i}(B_i) \cong D_i$, т. е. $D_i \in f(p_i)$. Аналогично убеждаемся, что $D_{i_2} \in f(p_i)$. Следовательно,

$$A / F_{p_i}(A) \in form(D_i, D_{i_2}) \subseteq f(p_i).$$

Этим самым доказано утверждение теоремы при $r = 1$.

Пусть теперь терм ξ имеет $r > 1$ вхождений символов из $\{\cap, \vee_l\}$ и для термов с меньшим числом вхождений теорема верна. Пусть ξ имеет вид

$$\xi_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_a}) \Delta \xi_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_b}),$$

где $\Delta \in \{\cap, \vee_l\}$, и

$$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_a}\} \cup \{x_{j_1}, \dots, x_{j_b}\} = \{x_1, \dots, x_m\}.$$

Обозначим через \mathfrak{F}_1 формацию $\xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a})$, а через \mathfrak{F}_2 – формацию $\xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b})$. Тогда, по доказанному выше, найдутся такие группы $A_1 \in \mathfrak{F}_1$, $A_2 \in \mathfrak{F}_2$, что

$$A \in (lform A_1) \Delta (lform A_2).$$

Поскольку число операций в терме ξ_1 меньше r , то по индукции найдутся такие группы $B_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, \dots, B_a \in \mathfrak{F}_{i_a}$, что

$$A_1 \in \xi_1(lform B_1, \dots, lform B_a).$$

Аналогично, найдутся такие группы $C_1 \in \mathfrak{F}_{j_1}, \dots, C_b \in \mathfrak{F}_{j_b}$, что

$$A_2 \in \xi_2(lform C_1, \dots, lform C_b).$$

Пусть $x_{i_1}, \dots, x_{i_a} \in \{x_{j_1}, \dots, x_{j_b}\}$ и, вместе с тем,

$$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_a}\} \cap \{x_{j_1}, \dots, x_{j_b}\} = \emptyset.$$

Пусть

$$D_k = \begin{cases} B_k, & \text{если } k < t+1, \\ B_k \times C_q, & \text{где } x_{i_k} = x_{j_q} \text{ для некоторого} \\ & q \in \{1, \dots, b\} \text{ при } k \geq t+1. \end{cases}$$

Пусть $D_{j_k} = C_k$, если $x_{j_k} \notin \{x_{i_1}, \dots, x_{i_a}\}$. Обозначим через \mathfrak{M}_p формацию $lform D_p$, где $p = 1, \dots, a$; через \mathfrak{X}_c – формацию $lform D_{j_c}$, где $c = 1, \dots, b$.

Итак,

$$A_1 \in \xi_1(lform B_1, \dots, lform B_a) \subseteq$$

$$\subseteq \xi_1(lform D_{i_1}, \dots, lform D_{i_a}) = \xi_1(\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_a),$$

$$A_2 \in \xi_2(lform C_1, \dots, lform C_b) \subseteq$$

$$\subseteq \xi_2(lform D_{j_1}, \dots, lform D_{j_b}) = \xi_2(\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_b).$$

Значит, найдутся такие формации $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m$, что

$$A \in \xi_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) \Delta \xi_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}) = \xi(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m),$$

где $\mathfrak{F}_i = lform K_i$, где $K_i \in \mathfrak{F}_i$, $i = 1, \dots, m$. Таким образом, решетка $\mathfrak{F} / \mathfrak{F} \cap \mathfrak{R} \cong \mathfrak{F}$ –отделима. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 256 с.
2. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York: Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p. – (De Gruyter Expo. Math., vol. 4).
3. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.
4. Воробьев, Н.Н. Алгебра классов конечных групп / Н.Н. Воробьев. – Витебск: ВГУ имени П. М. Машерова, 2012. – 322 с.
5. Го, Вэньбинь. Два замечания о тождествах решеток ω -локальных и ω -композиционных формаций конечных групп / Вэньбинь Го, А.Н. Скиба // Известия вузов. Математика. – 2002. – № 5 (480). – С. 14–22.
6. Shemetkov, L.A. On laws of lattices of partially saturated formations / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba, N.N. Vorob'ev // Asian-European Journal of Mathematics. – 2009. – Vol. 2, № 1. – P. 155–169.
7. Воробьев, Н.Н. Тожества решеток частично композиционных формаций / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба, А.А. Царев // Сибирский матем. журнал. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1011–1024.
8. Скиба, А.Н. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Математические труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.

Поступила в редакцию 25.07.16.

УДК 512.542

**КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ
ОБОБЩЕННО МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ (ОБЗОР).
I. КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ОБОБЩЕННО НОРМАЛЬНЫМИ
 n -МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ**

В.А. Ковалева

Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины

**FINITE GROUPS WITH GIVEN GENERALIZED MAXIMAL
SUBGROUPS (REVIEW). I. FINITE GROUP WITH GENERALIZED NORMAL
 n -MAXIMAL SUBGROUP**

V.A. Kovaleva

F. Scorina Gomel State University

Пусть G – конечная группа. Максимальной цепью длины n в G называется всякая цепь вида $H_n < H_{n-1} < \dots < H_1 < H_0 = G$, где H_i – максимальная подгруппа в H_{i-1} для всякого $i = 1, \dots, n$. Подгруппа H из G называется n -максимальной подгруппой в G , если H является последним членом некоторой максимальной цепи длины n . Данный обзор посвящен анализу наиболее известных работ, связанных с исследованиями конечных групп с обобщенно нормальными n -максимальными подгруппами.

Ключевые слова: конечная группа, максимальная подгруппа, максимальная цепь, n -максимальная подгруппа, нормальная подгруппа, субнормальная подгруппа, K - \mathfrak{S} -субнормальная подгруппа, перестановочная подгруппа.

Let G be a finite group. A chain of subgroups $H_n < H_{n-1} < \dots < H_1 < H_0 = G$ of G such that H_i is a maximal subgroup of H_{i-1} for every $i = 1, \dots, n$ is called a maximal chain of length n . A subgroup H of G is said to be an n -maximal subgroup of G if H is the latest member of some maximal chain of G of length n . In this review, we give the analysis of the most famous papers in which finite groups with generalized normal n -maximal subgroups are developed.

Keywords: finite group, maximal subgroup, maximal chain, n -maximal subgroup, normal subgroup, subnormal subgroup, K - \mathfrak{S} -subnormal subgroup, permutable subgroup.

Введение

Все рассматриваемые в работе группы являются конечными и G обозначает конечную группу. Символ $\pi(G)$ обозначает множество всех простых делителей порядка G , n обозначает некоторое натуральное число.

Напомним, что собственная подгруппа M из G называется *максимальной подгруппой* в G , если M не содержится ни в какой другой собственной подгруппе из G .

Результаты, связанные с изучением максимальных подгрупп, составили одно из самых содержательных направлений в теории конечных групп. Прежде всего это связано с тем, что многие известные классы групп допускают описание на основе свойств максимальных подгрупп. В частности, Хупперт в работе [1] доказал, что группа является нильпотентной тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы нормальны. В этой же работе Хупперт установил, что группа сверхразрешима в том и только в том случае, когда индексы всех ее максимальных подгрупп являются простыми числами. Дескинсом [2], [3] было доказано, что G является

разрешимой тогда и только тогда, когда индекс любой максимальной подгруппы из G совпадает с ее нормальным индексом. Отметим также, что максимальные подгруппы лежат в основе многих важных признаков принадлежности группы выделенному классу групп. Наиболее известными среди них являются теорема Дескинса – Янко – Томпсона [4] о разрешимости группы, обладающей нильпотентной максимальной подгруппой, класс нильпотентности 2-силовских подгрупп которой не превосходит двух, а также теоремы Шмидта [5] и Хупперта [1] о разрешимости групп, все максимальные подгруппы которых являются нильпотентными и сверхразрешимыми соответственно.

По мере развития теории максимальных подгрупп авторами стали предприниматься попытки изучения и применения их обобщений – максимальных цепей и n -максимальных подгрупп. Напомним, что *максимальной цепью длины n* в G называется всякая цепь вида

$$H_n < H_{n-1} < \dots < H_1 < H_0 = G,$$

где H_i – максимальная подгруппа в H_{i-1} для всякого $i = 1, \dots, n$. Подгруппа H из G называется

n -максимальной подгруппой в G , если H является последним членом некоторой максимальной цепи длины n .

Работы, посвященные изучению максимальных цепей и, в частности, n -максимальных подгрупп ($n > 1$), составили обширное направление теории конечных групп, обогащенное большим числом глубоких теорем и содержательных примеров. Одни из наиболее ранних результатов в этом направлении были получены Хуппертом [1]. Хупперт исследовал группы, все n -максимальные подгруппы которых нормальны для $n = 2, 3$. Так, в случае, когда $n = 2$, было доказано, что группа сверхразрешима; более того, если порядок такой группы имеет по крайней мере три простых делителя, Хуппертом была доказана ее нильпотентность. В случае, когда $n = 3$, Хупперт установил, что коммутант группы нильпотентен, ранг группы не превосходит 2 и, если порядок группы имеет по крайней мере три простых делителя, группа сверхразрешима.

В дальнейшем результаты Хупперта получили развитие в работах многих известных математиков. Данный обзор посвящен анализу наиболее известных работ, связанных с исследованиями групп с обобщенно нормальными n -максимальными подгруппами. Используемые в статье обозначения и терминологию можно при необходимости найти в [6]–[8].

1 Группы, все n -максимальные подгруппы которых нормальны

Поскольку в [1] Хупперт привел лишь общие характеристики групп, все 3-максимальные подгруппы которых нормальны, вполне естественным развитием его результатов является получение полного описания групп с нормальными n -максимальными подгруппами при $n \geq 3$.

Отметим, что в нильпотентном случае полное описание групп с нормальными 3-максимальными подгруппами дает следующая теорема, доказанная в работе Луценко и Скибы [9].

Теорема 1.1 [9, теорема 4.1]. Пусть p, q, r – простые числа. В том и только в том случае каждая 3-максимальная подгруппа нильпотентной группы G является нормальной в G , когда либо $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, $\alpha + \beta + \gamma \leq 3$, либо G изоморфна $SL(2, 3)$, либо G – сверхразрешимая группа Шмидта, либо G – сверхразрешимая группа Белоногова одного из следующих типов:

(1) $G = P \rtimes Q$, где $|P| = p$, $|Q| = q^\beta$ ($\beta \geq 3$); Q является либо циклической группой, либо абелевой группой типа $(q^{\beta-1}, q)$, либо изоморфна группе кватернионов порядка 8, либо изоморфна группе $M_\beta(q)$ ($\beta > 4$); $C_Q(P) = \Omega_{\beta-2}(Q)$.

(2) $G = P \rtimes Q$, где P – циклическая группа порядка p^2 , обе подгруппы $\Phi(P)Q$ и $G/\Phi(P)$

являются группами Шмидта и максимальная подгруппа из Q совпадает с $Z(G)$.

(3) $G = (P_1 \times P_2) \rtimes Q$, где $|P_1| = |P_2| = p$, P_1Q – группа Шмидта и группа P_2Q либо нильпотентна, либо также является группой Шмидта.

(4) $G = (P \times Q)R$, где P и R – минимальные нормальные подгруппы в G , $|P| = p$, $|R| = r$, Q – циклическая группа и $F(G) = PR\Phi(Q)$.

В теореме 1.1 под группой Белоногова понимается нильпотентная разрешимая группа, не являющаяся группой Шмидта, все вторые максимальные подгруппы которой нильпотентны.

Группы с нормальными 4-максимальными подгруппами были исследованы в работе Янко [10]. Янко установил, что простая группа, все 4-максимальные подгруппы которой нормальны, изоморфна группе $PSL(2, p)$, где либо $p = 5$, либо p – такое простое число, что $p-1$ и $p+1$ являются произведением не более трех простых чисел и p сравнимо с ± 3 или ± 13 по модулю 40. Кроме того, Янко доказал, что $SL(2, 5)$ является единственной неразрешимой непростой группой, в которой все 4-максимальные подгруппы нормальны. Напомним, что рангом разрешимой группы называется наибольшее целое число, для которого в группе существует главный фактор порядка p^k для некоторого простого числа p . В случае, когда G разрешима, Янко, обобщив таким образом результаты Хупперта, показал, что ранг G не превышает трех, а в случае, когда $|G|$ имеет по крайней мере 4 простых делителя, G сверхразрешима.

Полное описание неразрешимых групп, все 4-максимальные подгруппы которых нормальны, было получено Берковичем в работе [11].

Теорема 1.2 [11, теорема 16]. Если все 4-максимальные подгруппы неразрешимой группы G нормальны, то G является группой одного из следующих типов:

(1) Группа $SL(2, 5)$.

(2) Γ_3 -группа (т. е. для любой собственной разрешимой подгруппы H из G выполнено неравенство $\lambda(H) \leq 3$), причем $\lambda(G) \leq 6$ и выполнены следующие условия:

(i) если $\lambda(G) = 4$, то $G \cong PSL(2, 5)$;

(ii) если $\lambda(G) = 5$, то либо $G \cong PSL(2, 11)$, либо $G \cong PSL(2, 13)$;

(iii) если $\lambda(G) = 6$, то $G \cong PSL(2, p)$, $\lambda(p-1) = \lambda(p+1) = 3$, где p – простое число, не сравнимое с 1 по модулю 5.

В теореме 1.2 под $\lambda(m)$ понимается сумма показателей канонического разложения числа m . В частности, $\lambda(G)$ – сумма показателей канонического разложения числа $|G|$.

Напомним, что подгруппа H из G называется строго n -максимальной подгруппой в G , если H является n -максимальной подгруппой в G , но не является n -максимальной подгруппой в любой собственной подгруппе из G . Понятие строго n -максимальной подгруппы было введено в работе Асаада [12], где отмеченные выше результаты Хупперта [1] и Янко [10] были развиты для строго n -максимальных подгрупп при $n = 2, 3, 4$. Асаад доказал, что группа, все строго 2-максимальные подгруппы которой нормальны, является сверхразрешимой. Полное описание таких групп было получено Луценко и Скибой [13]. Заметим попутно, что исследованию групп со строго n -максимальными подгруппами, посвящена также работа Флавелла [14], в которой была найдена точная верхняя граница числа максимальных подгрупп группы, содержащей строго 2-максимальную подгруппу, а также описаны группы, в которых эта граница достигается.

Исследованию неразрешимых групп с нормальными пятими максимальными подгруппами посвящена работа Берковича [15].

2 Группы, все n -максимальные подгруппы которых субнормальны

Поскольку понятие субнормальности является обобщением нормальности, то естественной является задача изучения групп, все n -максимальные подгруппы которых субнормальны. В связи с этим следует, прежде всего, отметить не потерявшую свое фундаментальное значение и в настоящее время работу Манна [16], в которой отмеченные выше результаты Хупперта [1] были перенесены не только на субнормальные подгруппы, но и на произвольное n , зависящее только от числа простых делителей порядка группы. В частности, Манном было доказано, что если все n -максимальные подгруппы разрешимой группы G субнормальны и $|\pi(G)| \geq n + 1$, то G нильпотентна; если $|\pi(G)| \geq n - 1$, то G является ϕ -дисперсивной для некоторого упорядочения ϕ множества $\pi(G)$. И, наконец, в случае, когда $|\pi(G)| \geq n$, Манн привел полное описание G .

Теорема 2.1 [16, теорема 8]. Пусть G – разрешимая группа и $|\pi(G)| \geq n$. В том и только в том случае каждая n -максимальная подгруппа из G является субнормальной в G , когда G – группа одного из следующих типов:

(1) G – нильпотентная группа.

(2) $G = HN$, каждая силовская подгруппа из G является либо циклической, либо нормальной подгруппой в G и выполнены следующие условия:

(i) N – нормальная абелева холлова подгруппа в G и все силовские подгруппы из N являются элементарными абелевыми группами;

(ii) H является циклической холловой подгруппой в G и $|H|$ является либо степенью простого числа, либо свободным от квадратов числом;

(iii) $(|N|, |H|) = 1$;

(iv) если H_p – силовская p -подгруппа из H и N_q – силовская q -подгруппа из N , то H_p индуцирует на N_q неприводимую группу автоморфизмов порядка p или 1. В последнем случае $|N_q| = q$.

Отметим также, что в [16] Манн доказал разрешимость групп, все вторые или все третьи максимальные подгруппы которых субнормальны, а также описал неразрешимые группы с субнормальными 4-максимальными или 5-максимальными подгруппами. Полное описание групп, все 2-максимальные или все 3-максимальные подгруппы которых являются субнормальными, получено в отмеченной выше работе Луценко и Скибы [13].

Теорема 2.2 [13, лемма 5]. В том и только в том случае каждая 2-максимальная подгруппа из G является субнормальной, когда G либо нильпотентна, либо является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.

Теорема 2.3 [13, теорема 1]. Пусть p, q, r – различные простые числа, P, Q, R – соответствующие им силовские подгруппы из G . В том и только в том случае каждая 3-максимальная подгруппа из G является субнормальной, когда G либо нильпотентна, либо является группой одного из следующих типов:

I. $G = P \rtimes Q$ – группа Шмидта, где либо $P' = 1$, либо $|P'| = p$.

II. G – бипримарная группа, не являющаяся группой Шмидта, одного из следующих видов:

(1) $G = P \rtimes Q$, где P – минимальная нормальная подгруппа в G , Q – циклическая группа и $P \rtimes \Phi(Q)$ – группа Шмидта;

(2) $G = (P \rtimes Q_1) \times C_q$, где P – минимальная нормальная подгруппа в G , $|C_q| = q$ и PQ_1 – группа Шмидта;

(3) $G = P \rtimes Q$, где P – минимальная нормальная подгруппа в G , $Q = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $|a| = |b| = q$, $P\langle a \rangle$ и $P\langle b \rangle$ – группы Шмидта;

(4) $G = P \rtimes Q$, где $|P| = p, p > 2$ и Q изоморфна группе кватернионов порядка 8;

(5) $G = (P \rtimes Q_1)C_q$, где P – минимальная нормальная подгруппа в G , $Q_1 = \langle a \rangle$, $C_q = \langle b \rangle$, $|Q_1C_q| = q^\beta$, $|a| = q^{\beta-1}$ ($\beta \in \mathbb{N}$), PQ_1 – группа Шмидта, $a^b = a^{1+q^{\beta-2}}$ и $[P, C_1] = 1$ для всякой подгруппы C_1 , изоморфной C_q ;

(6) $G = P \rtimes Q$, где $\Phi(P)$ – минимальная нормальная подгруппа в G , обе группы $\Phi(P)Q$ и $G/\Phi(P)$ являются группами Шмидта и максимальная подгруппа из Q совпадает с $Z(G)$;

(7) G – подпрямое произведение двух различных изоморфных групп Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами;

(8) $G = (P_1 \times C_p) \rtimes Q$, где P_1 – минимальная нормальная p -подгруппа в G , $|C_p| = p$, P_1Q – группа Шмидта, максимальная подгруппа из Q содержится в $Z(G)$ и $[C_p, Q] = 1$.

III. Порядок G имеет в точности три простых делителя p, q, r и G является группой одного из следующих видов:

(i) $G = (P \times R) \rtimes Q$, где P и R – минимальные нормальные подгруппы в G , Q – циклическая группа и $F(G) = PR\Phi(Q)$;

(ii) $G = P \rtimes (R \times Q)$, где $|R| = r$, $|Q| = q$ и $P = F(G)$ – минимальная нормальная подгруппа в G .

3 Группы, все n -максимальные подгруппы которых обобщенно субнормальны

Результаты исследований групп с субнормальными n -максимальными подгруппами стимулировали появление ряда работ, касающихся описания групп с обобщенно субнормальными n -максимальными подгруппами. В связи с этим в 2005 году на Гомельском алгебраическом семинаре Шеметковым была поставлена задача изучения групп, все n -максимальные подгруппы которых являются обобщенно субнормальными.

Отметим, что еще до выхода работы Манна [16] Поляковым [17] были исследованы группы, каждая n -максимальная подгруппа которых является квазидостижимой для $n = 1, 2, 3, 4$. Напомним, что подгруппа H из G называется квазидостижимой в G , если для всякой силовской p -подгруппы P из G подгруппа $P \cap H$ является силовской p -подгруппой в H . Легко показать, что каждая субнормальная подгруппа является квазидостижимой. В своей работе Поляков показал, что в случае, когда $n = 2$, группа с квазидостижимыми n -максимальными подгруппами либо нильпотентна, либо является группой Миллера – Морено. В случае, когда $n = 3$, Поляков установил разрешимость группы. Более того, если $n = 3$ и порядок группы имеет более трех простых делителей, была доказана нильпотентность группы. Наконец, в случае, когда $n = 4$, была получена полная классификация таких групп. Позже Ведерниковым [18] было получено описание неразрешимых групп с квазидостижимыми 4-максимальными $2d$ -подгруппами.

Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Напомним, что подгруппа H из G называется \mathfrak{F} -субнормальной

в смысле Кегеля [19] или K - \mathfrak{F} -субнормальной [7, с. 236] в G , если найдется такая цепь подгрупп

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n = G,$$

что либо H_{i-1} нормальна в H_i , либо $H_i / (H_{i-1})_{H_i} \in \mathfrak{F}$, $i = 1, \dots, n$. Поскольку каждая субнормальная подгруппа является K - \mathfrak{F} -субнормальной для всякой формации \mathfrak{F} , то естественно получить развитие отмеченных выше результатов о субнормальных n -максимальных подгруппах для K - \mathfrak{F} -субнормальных n -максимальных подгрупп. Так, в работе [20] получено расширение результатов Манна [16] до K - \mathfrak{F} -субнормальных подгрупп в случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ – класс всех сверхразрешимых групп.

Теорема 3.1 [20, теорема А]. Если каждая n -максимальная подгруппа разрешимой группы G является K - \mathfrak{U} -субнормальной в G и $|\pi(G)| \geq n + 2$, то G сверхразрешима.

Теорема 3.2 [20, теорема В]. Пусть G – разрешимая группа и $|\pi(G)| \geq n + 1$. В том и только в том случае все n -максимальные подгруппы из G являются K - \mathfrak{U} -субнормальными в G , когда G является группой одного из следующих типов:

I. G – сверхразрешимая группа.

II. $G = A \rtimes B$, где $A = G^{\mathfrak{U}}$ – сверхразрешимый корадикал G , A и B – холловы подгруппы в G , G дисперсивна по Оре и выполняются следующие условия:

(1) подгруппа A либо имеет вид $N_1 \times \dots \times N_t$, где N_i – минимальная нормальная подгруппа в G , являющаяся силовской подгруппой в G ($i = 1, \dots, t$), либо является силовской p -подгруппой в G экспоненты p для некоторого простого числа p , причем коммутант, подгруппа Фраттини и центр A совпадают, каждый главный фактор из G ниже $\Phi(A)$ является циклическим и $A/\Phi(A)$ является нециклическим главным фактором в G ;

(2) для каждого простого делителя p порядка A любая n -максимальная подгруппа H из G сверхразрешима и индуцирует на силовской p -подгруппе из A группу автоморфизмов, являющуюся расширением некоторой p -группы при помощи абелевой группы экспоненты, делящей $p - 1$.

Теорема 3.3 [20, теорема С]. Если каждая n -максимальная подгруппа разрешимой группы G является K - \mathfrak{U} -субнормальной в G и $|\pi(G)| \geq n$, то G является ϕ -дисперсивной для некоторого упорядочения ϕ множества $\pi(G)$.

В дальнейшем мы используем символы \mathfrak{N} and \mathfrak{N}^r для обозначения классов всех нильпотентных групп и всех разрешимых групп с нильпотентной длиной, не превышающей r ($r \geq 1$), соответственно.

В основе доказательства теорем 3.1–3.3 лежит общая теория K - \mathfrak{F} -субнормальных n -максимальных подгрупп, построенная в работе [21], где доказаны следующие теоремы.

Теорема 3.4 [21, теорема С]. Пусть \mathfrak{F} – такая наследственная насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, что каждая минимальная не \mathfrak{F} -группа разрешима и содержит нормальную силовскую p -подгруппу $G_p \neq 1$ для некоторого простого числа p . В том и только в том случае каждая вторая максимальная подгруппа из G является K - \mathfrak{F} -субнормальной в G , когда либо $G \in \mathfrak{F}$, либо G является минимальной не \mathfrak{F} -группой и \mathfrak{F} -корадикал G^δ группы G является минимальной нормальной подгруппой в G .

Отметим, что упомянутые выше результаты Хупперта [1] и Манна [16] для 2-максимальных подгрупп являются следствиями теоремы 3.4.

Теорема 3.5 [21, теорема А]. Пусть \mathfrak{F} – такая r -кратно насыщенная формация, что $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^{r+1}$ для некоторого $r \geq 0$. Если каждая n -максимальная подгруппа разрешимой группы G является K - \mathfrak{F} -субнормальной в G и $|\pi(G)| \geq n+r+1$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Теорема 3.6 [21, теорема В]. Пусть $\mathfrak{F} = LF(F)$ – такая насыщенная формация, что $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$, где F – канонический локальный спутник формации \mathfrak{F} . Пусть G – разрешимая группа с $|\pi(G)| \geq n+1$. В том и только в том случае все n -максимальные подгруппы из G являются K - \mathfrak{F} -субнормальными в G , когда G – группа одного из следующих типов:

I. $G \in \mathfrak{F}$.

II. $G = A \rtimes B$, где $A = G^\delta$ – \mathfrak{F} -корадикал группы G , A и B – холловы подгруппы в G , G дисперсивна по Оре и выполняются следующие условия:

(1) подгруппа A либо имеет вид $N_1 \times \dots \times N_t$, где N_i – минимальная нормальная подгруппа в G , являющаяся силовской подгруппой в G ($i = 1, \dots, t$), либо является силовской p -подгруппой в G экспоненты p для некоторого простого числа p , причем коммутант, подгруппа Фраттини и центр A совпадают и $A/\Phi(A)$ является \mathfrak{F} -эксцентральным главным фактором группы G ;

(2) для каждого простого делителя p порядка A любая n -максимальная подгруппа H из G принадлежит \mathfrak{F} и индуцирует на силовской p -подгруппе из A группу автоморфизмов, содержащуюся в $F(p)$.

Теорема 3.7 [21, теорема D]. Пусть \mathfrak{F} – такая насыщенная формация, что $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Если каждая n -максимальная подгруппа разрешимой

группы G является K - \mathfrak{F} -субнормальной в G и $|\pi(G)| \geq n$, то G ϕ -дисперсивна для некоторого упорядочения ϕ множества $\pi(G)$.

Теоремы 3.1–3.3 позволяют не только развить результаты Манна, но и получить полное описание групп, все 3-максимальные подгруппы которых K - \mathfrak{M} -субнормальны [22]–[24]. В частности, для бипримарных групп справедлив следующий результат.

Теорема 3.8 [23, теорема 1.2]. Пусть $|\pi(G)| = 2$, p и q – различные простые делители $|G|$, P и Q – силовские p -подгруппа и q -подгруппа из G соответственно. В том и только в том случае каждая 3-максимальная подгруппа из G является K - \mathfrak{M} -субнормальной в G , когда либо G сверхразрешима, либо выполнены следующие условия:

(I) Если G не имеет нормальных силовских подгрупп и $O^p(G) \neq G$, то $G^u \leq P$, Q – такая циклическая группа, что $[Q^q, G^u] = 1$ и p делит $q-1$. Более того, в этом случае $G^u Q$ является максимальной подгруппой в G и Q индуцирует на G^u неприводимую группу автоморфизмов.

(II) Если P является нормальной подгруппой в G , то справедливы следующие утверждения:

(i) каждая 2-максимальная подгруппа из Q индуцирует на P абелеву группу автоморфизмов экспоненты, делящей $p-1$. Каждая максимальная подгруппа из Q индуцирует на P группу автоморфизмов, которая является либо неприводимой, либо абелевой экспоненты, делящей $p-1$;

(ii) если P является минимальной нормальной подгруппой в G и q не делит $p-1$, то Q является циклической группой и $Z(G)$ является подгруппой в Q , причем $|Q:Z(G)| \in \{q, q^2\}$. Более того, если G не является минимальной несверхразрешимой группой, то q^2 делит $p^{q-1}-1$;

(iii) если $\Phi(P) \neq 1$, то $G^u = P$ и $P/\Phi(P)$ – нециклический главный фактор в G . Более того, если G является минимальной несверхразрешимой группой, то $|\Phi(P)| = p$. Если G не является минимальной несверхразрешимой группой, то $\Phi(P)Q$ – минимальная несверхразрешимая группа с абелевым сверхразрешимым корадикалом и, следовательно, $\Phi(P)$ является минимальной нормальной подгруппой в G ;

(iv) если P не является минимальной нормальной подгруппой в G и $\Phi(P) = 1$, то $P = P_1 \times P_2$, где P_1 и P_2 – минимальные нормальные подгруппы в G и по крайней мере одна из этих подгрупп не является циклической.

Еще одним обобщением понятия субнормальной подгруппы является понятие K - \mathbb{P} -субнормальной подгруппы, введенное Васильевым,

Васильевой и Тютяновым [25]. Подгруппа H из G называется K - \mathbb{P} -субнормальной в G , если найдется такая цепь подгрупп

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n = G,$$

что либо H_{i-1} нормальна в H_i , либо $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число, $i = 1, \dots, n$. Описанию групп, заданные 2-максимальные подгруппы которых являются K - \mathbb{P} -субнормальными, посвящены работы [26], [27], где получены следующие результаты.

Теорема 3.9 [26, 27]. Следующие утверждения эквивалентны.

(1) G либо сверхразрешима, либо является минимальной несверхразрешимой группой с абелевым сверхразрешимым корадикалом.

(2) Каждая 2-максимальная подгруппа из G является K - \mathbb{P} -субнормальной в G .

(3) Каждая строго 2-максимальная подгруппа из G является K - \mathbb{P} -субнормальной в G .

(4) Если T – такая 2-максимальная подгруппа из G , что T не является перестановочной с некоторой 2-максимальной подгруппой из G , то T является K - \mathbb{P} -субнормальной в G .

Теорема 3.9 позволяет обобщить отмеченные выше результаты Хупперта [1], Манна [16] и Асаада [12], а также результат Агравала [28] (см. ниже, раздел 4).

Отметим, что одним из новых активно развивающихся направлений современной теории конечных групп, начало которому было положено Скибой в работах [29]–[33], является исследование структуры группы с заданными арифметическими свойствами. Одним из ключевых понятий данного направления является такое обобщение понятия субнормальной подгруппы, как σ -субнормальная подгруппа [29], [30]. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – разбиение множества всех простых чисел \mathbb{P} , т. е. $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Группа G называется σ -примарной, если G – σ_i -группа для некоторого $i \in I$. Подгруппа A из G называется σ -субнормальной в G , если найдется такая цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G,$$

что либо A_{i-1} нормальна в A_i , либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ σ -примарна для всех $i = 1, \dots, n$. В работе [34] Скиба установил σ -разрешимость группы, каждая 3-максимальная подгруппа которой σ -субнормальна, обобщив таким образом результат Хупперта [1] (группа называется σ -разрешимой, если каждый ее главный фактор σ -примарен [29], [30], [34]).

4 Группы, каждая n -максимальная подгруппа которых перестановочна с заданными системами подгрупп

Напомним, что подгруппы A и B из G называются перестановочными, если $AB = BA$.

Поскольку каждая нормальная подгруппа из G перестановочна со всеми подгруппами из G , то для развития отмеченных выше результатов Хупперта [1] можно рассмотреть группы, n -максимальные подгруппы которых перестановочны с некоторыми подгруппами данных групп. Так, например, в одной из работ Княгиной и Монахова [35] были изучены группы, каждая n -максимальная подгруппа которых перестановочна с любой подгруппой Шмидта.

Теорема 4.1 [35, теорема 1]. Пусть p – простое число. Если каждая n -максимальная подгруппа p -разрешимой группы G перестановочна с любой p -нильпотентной pd -подгруппой Шмидта из G , то справедливы следующие утверждения:

(i) если $n \in \{1, 2, 3\}$, то p -нильпотентная длина G не превышает 1;

(ii) если $n \geq 4$, то p -нильпотентная длина G не превышает $n - 2$.

Теорема 4.2 [35, теорема 2]. Если каждая n -максимальная подгруппа из G перестановочна с каждой подгруппой Шмидта из G , то справедливы следующие утверждения:

(i) если $n \in \{1, 2, 3\}$, то G метанильпотентна;

(ii) если $n \geq 4$ и G разрешима, то nilпотентная длина G не превышает $n - 1$.

В [35] также было установлено, что в случае, когда каждая n -максимальная подгруппа ($n \in \{1, 2, 3\}$) из G перестановочна с любой 2-нильпотентной подгруппой Шмидта четного порядка из G , G разрешима.

Группы с S -квазинормальными n -максимальными подгруппами. Подгруппа H из G называется квазинормальной в G , если H перестановочна со всеми подгруппами из G . Группы, все n -максимальные подгруппы которых являются квазинормальными, были рассмотрены еще в отмеченной выше работе Манна [16]. Так, в [16] было установлено, что если каждая n -максимальная подгруппа разрешимой группы G является квазинормальной в G , то ранг G не превышает $n - 1$; более того, при $|\pi(G)| \geq n - k + 1$ для некоторого $k \geq 1$, ранг G не превышает k . Ранее в работе Берковича [36] было получено описание групп с квазинормальными 4-максимальными разрешимыми подгруппами.

Одним из обобщений понятия квазинормальной подгруппы является понятие S -квазинормальной подгруппы. Напомним, что подгруппа H из G называется S -квазинормальной в G , если H перестановочна со всеми силовскими подгруппами из G .

Рассматривая группы, все n -максимальные подгруппы которых являются S -квазинормальными, Агравал в работе [28] получил следующие результаты, которые, как несложно заметить, обобщают отмеченные во введении и разделах 1 и 2 и результаты Хупперта, Янко и Манна.

Теорема 4.3 [28, теорема 2.1]. *Если каждая 2-максимальная подгруппа из G является S -квазинормальной в G , то G сверхразрешима. Более того, если $|G|$ имеет по крайней мере три простых делителя, то G нильпотентна.*

Теорема 4.4 [28, теорема 2.2]. *Если каждая 3-максимальная подгруппа из G является S -квазинормальной в G , то справедливы следующие утверждения:*

- (i) *если $|\pi(G)| \geq 3$, то G сверхразрешима;*
- (ii) *коммутант G нильпотентен;*
- (iii) *ранг G не превышает двух.*

Теорема 4.5 [28, теорема 2.3]. *Если каждая 4-максимальная подгруппа разрешимой группы G является S -квазинормальной в G , то справедливы следующие утверждения:*

- (i) *если $|\pi(G)| \geq 4$, то G сверхразрешима;*
- (ii) *ранг G не превышает трех.*

В дальнейшем в работе Луценко и Скибы [9] было получено полное описание групп, у которых все 3-максимальные подгруппы являются S -квазинормальными. Было установлено, что каждая 3-максимальная подгруппа из G является S -квазинормальной в G в том и только в том случае, когда либо G нильпотентна, либо

$$|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma, \quad \alpha + \beta + \gamma \leq 3$$

(p, q, r – различные простые делители порядка G), либо G изоморфна группе $SL(2, 3)$, либо G является сверхразрешимой группой Шмидта, либо G – сверхразрешимая группа Белоногова одного из типов, описанных в теореме 1.1.

Отметим также работы [37], [38], в которых были рассмотрены группы с обобщенно S -квазинормальными подгруппами. В [37] В. Го и Скибой были получены критерии сверхразрешимости групп в терминах s -вложенных 2-максимальных подгрупп. Подгруппа H из G называется s -вложенной в G , если в G найдется такая S -квазинормальная подгруппа T , что $T \cap H \leq H_{sG}$ и $HT = H^{sG}$, где H^{sG} – пересечение всех S -квазинормальных подгрупп из G , содержащих H , и H_{sG} – подгруппа из H , порожденная всеми теми подгруппами из H , которые являются S -квазинормальными в G . Доказана следующая

Теорема 4.6 [37, теорема F]. *В том и только в том случае G сверхразрешима, когда каждая вторая максимальная подгруппа E из G , индекс которой $|G : E|$ не является простым числом, имеет циклическое добавление в E^{sG} и является s -вложенной в G .*

В [38] найдены характеристики p -нильпотентных групп, вторые максимальные подгруппы которых являются π -квазинормально вложенными (подгруппа H из G называется π -квазинормально вложенной в G , если для всякого простого делителя p порядка H силовская p -подгруппа

из H является также силовской p -подгруппой в некоторой S -квазинормальной подгруппе из G).

Отметим, что еще в работе Пальчика [39] было получено описание группы, все вторые максимальные подгруппы которой перестановочны с ее дисперсивной π -холловой подгруппой, а также установлена π -разрешимость группы, содержащей дисперсивную π -холлову подгруппу, перестановочную со всеми 3-максимальными подгруппами. Более того, в этой же работе Пальчик, рассматривая группы, содержащие дисперсивную π -холлову подгруппу, доказал, что в случае, когда такая подгруппа перестановочна со всеми 4-максимальными подгруппами, группа является либо π -разрешимой, либо изоморфна одной из неразрешимых групп, все 4-максимальные подгруппы которых нормальны (см. теорему 1.2). Исследования Пальчика были продолжены в его совместной с Конторовичем работе [40], где было установлено, что группа, дисперсивная π -холлова подгруппа которой перестановочна со всеми 5-максимальными подгруппами, является либо π -разрешимой, либо изоморфна одной из неразрешимых групп, все 5-максимальные подгруппы которых нормальны (см. работу Берковича [15]).

Группы, все n -максимальные подгруппы которых перестановочны со всеми максимальными подгруппами. Поляковым в работе [41] была доказана сверхразрешимость групп, все 2-максимальные подгруппы которых перестановочны со всеми максимальными подгруппами. Кроме того, в этой же работе Поляков доказал разрешимость группы, каждая 3-максимальная подгруппа которой перестановочна со всеми максимальными подгруппами. В связи с этими результатами возникли задачи описания групп, каждая n -максимальная подгруппа которых перестановочна со всеми максимальными подгруппами при $n = 2, 3$. Такие задачи были решены в работах В. Го, Легчековой и Скибы [42], [43]. В частности, для нильпотентных групп, все 3-максимальные подгруппы которых перестановочны со всеми максимальными подгруппами, получена следующая классификационная теорема.

Теорема 4.7 [43, теорема 3.1]. *Пусть p, q, r – простые числа. В том и только в том случае каждая 3-максимальная подгруппа нильпотентной группы G перестановочна со всеми максимальными подгруппами из G , когда либо $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, $\alpha + \beta + \gamma \leq 3$, либо G изоморфна $SL(2, 3)$, либо G является сверхразрешимой группой одного из следующих типов:*

- (1) $G = P \times M$, где $|P| = p$ и M – такая группа с циклическими силовскими подгруппами, что $|M| = rq^\alpha$, где $\alpha > 1$, $q \neq p$, подгруппа M_G является q -замкнутой и $|M : M_G| = q$.

(2) $G = P \rtimes Q$, где $|P| = p$, Q – циклическая q -группа с $|Q| > q^2$ ($q \neq p$) и $|Q : Q_G| = q^2$.

(3) $G = PQ$, где $|P| = p$, Q – циклическая q -группа с $|Q| > q^2$ ($q \neq p$), $|Q : Q_G| = q$ и все отличные от Q_G максимальные подгруппы из Q являются циклическими.

В [43] также было получено описание примитивных групп, в которых каждая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами. Заметим, что в дальнейшем в [44] было получено полное описание ненильпотентных групп, каждая 2-максимальная подгруппа которых перестановочна со всеми 3-максимальными подгруппами. Продолжая исследования работ В. Го, Легчековой и Скибы [42]–[44] и решая таким образом задачи, поставленные Монаховым и Тавгеном [45, вопросы 3.9 и 3.10], В. Го, Луценко и Скиба [46] описали ненильпотентные группы, любые две 2-максимальные или 3-максимальные подгруппы которых перестановочны. Было доказано, что все вторые максимальные подгруппы из G перестановочны в том и только в том случае, когда G является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Для случая же, когда все третьи максимальные подгруппы перестановочны, было получено 14 видов таких групп.

Берковичем [11] были изучены такие группы G , все четвертые максимальные подгруппы которых перестановочны со всеми своими сопряжениями в G . Было установлено, что все такие группы относятся к одному из типов, описанных в теореме 1.2. Кроме того, в этой же работе Берковичем было доказано, что в случае, когда каждая 4-максимальная подгруппа из G перестановочна со всеми подгруппами из Φ , где Φ – множество всех силовских подгрупп из G , взятых по одной для каждого простого делителя порядка G , все 4-максимальные подгруппы из G нормальны.

Группы с X -перестановочными n -максимальными подгруппами. Одним из обобщений перестановочности подгрупп из G является свойство X -перестановочности, где X – некоторое непустое подмножество из G . Напомним, что подгруппа H из G называется X -перестановочной с подгруппой E из G , если найдется такой элемент $x \in X$, что $HE^x = E^xH$. В частности, подгруппа H называется X -перестановочной в G , если H является X -перестановочной с каждой подгруппой из G .

В случае, когда X – подгруппа Фиттинга, исследованию групп, все n -максимальные подгруппы которых являются X -перестановочными с некоторыми системами подгрупп группы, посвящены, в частности, упомянутые выше работы В. Го, Легчековой и Скибы [42], [43]. В [42] была установлена метанильпотентность группы, каждая

2-максимальная подгруппа которой X -перестановочна со всеми максимальными подгруппами. В [43] авторами была доказана разрешимость группы, каждая 3-максимальная подгруппа которой X -перестановочна со всеми ее максимальными подгруппами.

Заслуживают внимание также работы, в которых авторы получили новые характеристики групп с обобщенно X -перестановочными n -максимальными подгруппами (см., например, [47]–[50]). В частности, в работах Скибы, В. Го и К.П. Шама [47]–[49] были получены характеристики сверхразрешимых групп в терминах X -полуперестановочных, X_m -полуперестановочных, s -перестановочных, Q -вложенных и условно перестановочных 2-максимальных подгрупп.

Группы, все n -максимальные подгруппы которых σ -перестановочны. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – разбиение множества всех простых чисел \mathbb{P} . Множество \mathcal{H} подгрупп из G называется *полным холловым σ -множеством* в G [51], если каждый член $\neq 1$ из \mathcal{H} является холловой σ_i -подгруппой в G для некоторого $\sigma_i \in \sigma$ и \mathcal{H} содержит в точности одну холлову σ_i -подгруппу из G для каждого I такого, что $\sigma_i \cap \pi(G) \neq \emptyset$. В работе Скибы [30] было введено следующее обобщение перестановочной подгруппы. Подгруппа A из G называется *σ -перестановочной* в G , если G содержит такое полное холлово σ -множество \mathcal{H} , что A является \mathcal{H}^G -перестановочной в G , т. е. $AN^x = N^xA$ для всех $x \in G$ и всех $N \in \mathcal{H}$. В случае, когда каждая n -максимальная подгруппа разрешимой группы G σ -перестановочна, Скибой [34] получен следующий результат.

Теорема 4.8 [34, теорема 8.23]. Пусть каждая n -максимальная подгруппа разрешимой группы G σ -перестановочна в G . Если в G существует такое полное холлово σ -множество \mathcal{H} , что для всякого члена N из \mathcal{H} ранг N не превосходит $n - 1$, то ранг G также не превосходит $n - 1$.

Заметим, что теорема 4.8 позволяет обобщить отмеченные выше результаты Хупперта [1], Янко [10], Манна [16] и Агравала [28].

5 Некоторые другие результаты о группах с обобщенно нормальными n -максимальными подгруппами

Рассмотрим еще несколько интересных результатов, связанных с исследованиями групп с обобщенно нормальными n -максимальными подгруппами.

Подгруппа H из G называется *модулярной*, если $\langle X, H \cap Z \rangle = \langle X, H \rangle \cap Z$ для всех $X \leq Z \leq G$ и $\langle H, Y \cap Z \rangle = \langle H, Y \rangle \cap Z$ для всех таких подгрупп

Y, Z из G , что $H \leq Z$. Развивая результаты Хупперта [1], Р. Шмидт [52] получил описание групп, каждая n -максимальная подгруппа которых является модулярной для $n = 2, 3, 4$. В частности, в [52] было установлено, что группа, у которой все вторые максимальные подгруппы являются модулярными, сверхразрешима. В случаях же, когда $n = 3$ и $n = 4$, получены следующие классификационные теоремы.

Теорема 5.1 [52, теорема 3]. *Если все 3-максимальные подгруппы из G являются модулярными, то G является группой одного из следующих типов:*

- (1) G – сверхразрешимая группа.
- (2) $|G| = p^2q$, где p и q – простые числа.
- (3) G является полупрямым произведением группы кватернионов порядка 8 и ее группы автоморфизмов порядка 3.

Теорема 5.2 [52, теорема 4]. *Если все 4-максимальные подгруппы из G являются модулярными, то справедливы следующие утверждения:*

(i) *Если G – простая неабелева группа, то $G \cong \text{PSL}(2, p)$, где либо $p = 5$, либо p – такое простое число, что $p-1$ и $p+1$ имеют не более трех простых делителей и p сравнимо с ± 3 или ± 13 по модулю 40.*

(ii) *Если G – непустая неразрешимая группа, то $G \cong \text{SL}(2, 5)$.*

(iii) *Если G разрешима, то она является группой одного из следующих типов:*

- (1) G – сверхразрешимая группа;
- (2) $|G|$ имеет не более четырех простых делителей;

(3) G является полупрямым произведением группы кватернионов Q_8 порядка 8 и группы A порядка $3p$, где $p \geq 3$ – простое число и A индуцирует на Q_8 группу автоморфизмов порядка 3;

(4) $G = U \times J$, $|J| = 2$ и U является полупрямым произведением группы кватернионов порядка 8 и ее группы автоморфизмов порядка 3;

(5) G – группа представлений симметрической группы S_4 , имеющая только одну инволюцию ($|G| = 48$ и G порождается элементами a, b_i , для которых $a^2 = [b_i, a] = 1$ и $b_i^2 = (b_1 b_2)^3 = (b_2 b_3)^3 = [b_i, b_j] = a$ ($i = 1, 2, 3$)).

В дальнейшем в работе Харламовой и Решко [53] для произвольного натурального числа n было установлено, что p -длина группы, все n -максимальные подгруппы которой являются либо модулярными, либо p -субнормальными, не превышает n (подгруппа H из G называется p -субнормальной в G , если для каждой силовской p -подгруппы G_p из G пересечение $H \cap G_p$ является силовской p -подгруппой в H).

Исследованию групп с обобщенно нормальными n -максимальными подгруппами посвящены также работы Уначева [54], [55], Ш. Ли [56] и Даниэлло [57]. Введя понятие независимой подгруппы, Уначев в работах [54], [55] исследовал группы с независимыми максимальными и 2-максимальными подгруппами, а также привел описание неразрешимых групп, все 3-максимальные или 4-максимальные подгруппы которых независимы (подгруппа H из G называется независимой, если $N_G(T) \leq N_G(H)$ для всякой неединичной подгруппы T из H). Ш. Ли [56] была получена классификация нильпотентных групп G , все 2-максимальные подгруппы E которых являются TI -подгруппами (для всех элементов $g \in G$ выполнено $E \cap E^x = 1$ или $E \cap E^x = E$). Одним из результатов работы [56] является следующая

Теорема 5.3 [56, теорема 2]. *В том и только в том случае каждая 2-максимальная подгруппа нильпотентной группы G является TI -подгруппой, когда G – группа одного из следующих типов:*

(1) $G = PQ$ – группа Миллера – Морено, где $P = \langle x \rangle$ – силовская p -подгруппа из G , Q – нормальная силовская q -подгруппа из G , p и q – различные простые числа.

(2) G – неабелева группа порядка pq^2 или pqr , где p , q и r – различные простые числа.

(3) $G = PH$ – группа Фробениуса с ядром P , являющимся элементарной абелевой группой, и дополнением H . Каждая максимальная подгруппа из H действует неприводимо на P , и H является либо циклической группой, либо прямым произведением циклической группы нечетного порядка и группы кватернионов Q_8 порядка 8.

(4) G изоморфна симметрической группе S_4 степени 4.

(5) $G = \text{PSL}(2, 5)$.

Даниэлло в работе [57] были исследованы группы с дуально пронормальными n -максимальными подгруппами. Подгруппа H из G называется дуально пронормальной, если $F(\langle H, H^x \rangle) \leq H$ для всех $x \in G$. В [57] установлено, что группа с дуально пронормальными 2-максимальными подгруппами является либо нильпотентной, либо сверхразрешимой группой Шмидта, причем все вторые максимальные подгруппы такой группы нормальны. В случае, когда 3-максимальные подгруппы группы являются дуально пронормальными, в [57] была доказана нормальность всех таких подгрупп. Более того, для сверхразрешимых групп с дуально пронормальными 3-максимальными подгруппами была получена полная классификация. Отметим, наконец, что в случае, когда группа является метанильпотентной, Даниэлло показал, что каждая ее

n -максимальная подгруппа является дуально пронормальной в том и только в том случае, когда она является нормальной.

Пусть H/K – фактор группы G и E – подгруппа из G . Напомним, что E покрывает H/K , если $EH = EK$; E изолирует H/K , если $E \cap H = E \cap K$. В связи с тем, что любая нормальная подгруппа из G изолирует каждый главный фактор из G , непосредственное отношение к исследованиям групп с обобщенно нормальными n -максимальными подгруппами имеет работа Баллестера-Болинше, Эскуэрро и Скибы [58]. В [58] была получена полная классификация таких групп G , в которых все вторые максимальные подгруппы силовских p -подгрупп (для фиксированного простого делителя p порядка G) покрывают либо изолируют все главные факторы из G .

ЛИТЕРАТУРА

1. Huppert, B. Normalteiler und maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.
2. Deskins, W.E. On maximal subgroups / W.E. Deskins // Proc. Sympos. Pure Math. – 1959. – Vol. 1. – P. 100–104.
3. Deskins, W.E. A note on the index complex of maximal subgroups / W.E. Deskins // Arch. Math. – 1990. – Vol. 54. – P. 236–240.
4. Janko, Z. Finite groups with a nilpotent maximal subgroup / Z. Janko // J. Austral. Math. Soc. – 1964. – Vol. 4. – P. 449–451.
5. Шмидт, О.Ю. Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Матем. сборник. – 1924. – Т. 31. – С. 366–372.
6. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992.
7. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer-Verlag, 2006.
8. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978.
9. Луценко, Ю.В. Строение конечных групп с S -квазинормальными третьими максимальными подгруппами / Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба // Укр. матем. ж. – 2009. – Т. 61, № 12. – С. 1630–1639.
10. Janko, Z. Finite groups with invariant fourth maximal subgroups / Z. Janko // Math. Z. – 1963. – Vol. 82. – P. 82–89.
11. Беркович, Я.Г. О существовании подгрупп у конечной неразрешимой группы / Я.Г. Беркович // Изв. АН СССР. – 1964. – Т. 156, № 6. – С. 1255–1257.
12. Asaad, M. Finite groups some whose n -maximal subgroups are normal / M. Asaad // Acta Math. Hung. – 1989. – Vol. 54, № 1–2. – P. 9–27.
13. Луценко, Ю.В. Конечные группы с субнормальными вторыми или третьими максимальными подгруппами / Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба // Матем. заметки. – 2012. – Т. 91, № 5. – С. 680–688.
14. Flavell, P. Overgroups of second maximal subgroups / P. Flavell // Arch. Math. – 1995. – Vol. 64. – P. 277–282.
15. Беркович, Я.Г. Подгрупповая характеристика некоторых конечных групп / Я.Г. Беркович // Докл. АН БССР. – 1996. – Т. 169, № 3. – С. 499–502.
16. Mann, A. Finite groups whose n -maximal subgroups are subnormal / A. Mann // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – Vol. 132. – P. 395–409.
17. Поляков, Л.Я. Максимальные и нормальные ряды конечных групп / Л.Я. Поляков // Докл. АН СССР. – 1966. – Т. 167, № 2. – С. 294–297.
18. Ведерников, В.А. О конечных группах с перестановочными подгруппами / В.А. Ведерников // Докл. АН БССР. – 1967. – Т. 2, № 12. – С. 1057–1059.
19. Kegel, O.H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den subnormalteilerverband each enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30, № 3. – P. 225–228.
20. Ковалева, В.А. Конечные разрешимые группы, у которых все n -максимальные подгруппы \mathcal{U} -субнормальны / В.А. Ковалева, А.Н. Скиба // Сибир. матем. ж. – 2013. – Т. 54, № 1. – P. 86–97.
21. Kovaleva, V.A. Finite soluble groups with all n -maximal subgroups \mathfrak{F} -subnormal / V.A. Kovaleva, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2014. – Vol. 17. – P. 273–290.
22. Ковалева, В.А. Finite groups with all n -maximal ($n = 2, 3$) subgroups K - \mathcal{U} -subnormal / В.А. Ковалева, С. Йи // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 2 (19). – С. 59–64.
23. Kovaleva, V.A. Finite biprimary groups with all 3-maximal subgroups \mathcal{U} -subnormal / V.A. Kovaleva, X. Yi // Acta Math. Hung. – 2015. – Vol. 146, №1. – P. 47–55.
24. Ковалева, В.А. Конечные группы с заданными системами K - \mathcal{U} -субнормальных подгрупп // Укр. матем. ж. – 2016. – Т. 68, № 1. – С. 52–63.
25. Васильев, А.Ф. О $K - \mathbb{P}$ -субнормальных погруппах конечных групп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Матем. заметки. – 2014. – Т. 95, № 4. – С. 517–528.
26. Kovaleva, V.A. Finite groups with all 2-maximal subgroups $K - \mathbb{P}$ -subnormal / V.A. Kovaleva // Math. Sci. Res. J. – 2013. – Vol. 17, № 6. – P. 150–155.
27. Kovaleva, V.A. Finite groups with generalized \mathbb{P} -subnormal second maximal subgroups / V.A. Kovaleva // Asian-European J. Math. – 2014. – Vol. 7, № 3. – P. 1450047-1-1450047-8.
28. Agrawal, R.K. The influence on a finite group of its permutable subgroups / R.K. Agrawal // Canad. Math. Bull. – 1974. – Vol. 17, № 2. – P. 159–165.
29. Skiba, A.N. A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and its Appl. – 2015. – Vol. 15, № 4. – P. 21–36.

30. Skiba, A.N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // *J. Algebra*. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
31. Скиба, А.Н. On σ -properties of finite groups I / А.Н. Скиба // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2014. – № 4 (21). – С. 89–96.
32. Скиба, А.Н. On σ -properties of finite groups II / А.Н. Скиба // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2015. – № 3 (24). – С. 70–83.
33. Скиба, А.Н. On σ -properties of finite groups III / А.Н. Скиба // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2016. – № 1 (26). – С. 52–62.
34. Skiba, A.N. On some results in the theory of finite partially soluble groups / A.N. Skiba // *Comm. in Math. and Stat.* – 2016. – Vol. 4, № 3. – P. 281–309.
35. Княгина, В.Н. О перестановочности n -максимальных подгрупп с подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // *Тр. ИММ УрО РАН*. – 2012. – Т. 18, № 3. – P. 125–130.
36. Беркович, Я.Г. О существовании подгрупп у конечной неразрешимой группы II / Я.Г. Беркович // *Изв. АН СССР*. – 1965. – Т. 29. – С. 527–552.
37. Guo, W. Finite groups with given s -embedded and n -embedded subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // *J. Algebra*. – 2009. – Vol. 321. – P. 2843–2860.
38. Li, Y. On p -nilpotency of finite groups with some subgroups π -quasinormally embedded / Y. Li, Y. Wang, H. Wei // *Acta Math. Hung.* – 2005. – Vol. 108, № 4. – P. 283–298.
39. Пальчик, Э.М. О группах, все i -максимальные подгруппы которых перестановочны с силовой подгруппой. I / Э.М. Пальчик // *Изв. АН БССР*. – 1968. – № 1. – С. 45–48.
40. Пальчик, Э.М. О группах, все i -максимальные подгруппы которых перестановочны с силовой подгруппой. II / Э.М. Пальчик, Н.П. Конторович // *Изв. АН БССР*. – 1969. – № 3. – С. 51–57.
41. Поляков, Л.Я. Конечные группы с перестановочными подгруппами / Л.Я. Поляков // *Конечные группы*. – Минск: Наука и техника, 1966. – С. 75–88.
42. Легчекова, Е.В. Конечные группы с частично перестановочными вторыми и третьими максимальными подгруппами / Е.В. Легчекова, А.Н. Скиба // *Докл. НАН Беларуси*. – 2006. – Т. 50, № 3. – С. 1012–1017.
43. Го, В. Конечные группы, в которых каждая третья максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами / В. Го, Е.В. Легчекова, А.Н. Скиба // *Матем. заметки*. – 2009. – Т. 86, № 3. – С. 350–359.
44. Guo, W. The structure of finite non-nilpotent groups in which every 2-maximal subgroup permutes with all 3-maximal subgroups / W. Guo, H.V. Legchekova, A.N. Skiba // *Comm. in Algebra*. – 2009. – Vol. 37. – P. 2446–2456.
45. Skiba, A.N. Finite groups with given systems of generalized permutable subgroups / A.N. Skiba // *Изв. ГГУ им. Ф. Скорины*. – 2006. – Т. 36, № 3. – С. 12–31.
46. Го, В. О ненильпотентных группах, любые две 3-максимальные подгруппы которых перестановочны / В. Го, Ю.В. Луценко, А.Н. Скиба // *Сибир. матем. ж.* – 2009. – Т. 50, № 6. – С. 1255–1268.
47. Guo, W. Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // *SEAMS Bull. Math.* – 2004. – Vol. 29, № 2. – P. 240–254.
48. Guo, W. X -semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // *J. Algebra*. – 2007. – Vol. 315. – P. 31–41.
49. Guo, W. Finite groups with some system of X_m -semipermutable subgroups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // *Math. Nachr.* – 2010. – Vol. 283, № 11. – P. 1603–1612.
50. Li, B. New characterizations of finite supersoluble groups / B. Li, A.N. Skiba // *Sci. in China, Series A: Math.* – 2008. – Vol. 50, № 1. – P. 827–841.
51. Guo, W. Finite groups with permutable complete Wielandt sets of subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // *J. Group Theory*. – 2015. – Vol. 18. – P. 191–200.
52. Schmidt, R. Endliche Gruppen mit vielen modularen Untergruppen / R. Schmidt // *Abhandl. Math. Semin. Univ. Hamburg*. – 1969. – Vol. 34, № 1–2. – P. 115–125.
53. Решко, К.А. О p -длине произвольной конечной группы / К.А. Решко, В.И. Харламова // *Матем. заметки*. – 1973. – Т. 14, № 3. – С. 419–427.
54. Уначев, Х.Я. Конечные группы, любая i -максимальная подгруппа которых независима / Х.Я. Уначев // *Сибир. матем. ж.* – 1971. – Т. 12, № 4. – С. 926–930.
55. Уначев, Х.Я. О конечных группах, четвертые максимальные подгруппы которых независимы / Х.Я. Уначев // *Алгебра и теория чисел*. – Нальчик, 1977. – № 2. – С. 127–138.
56. Li, Sh. Finite non-nilpotent groups all of whose second maximal subgroups are TI -groups / Sh. Li // *Math. Proc. Royal Irish Academy*. – 2000. – Vol. 100A, № 1. – P. 65–71.
57. D’Aniello, A. Groups in which n -maximal subgroups are dualpronormal / D’Aniello Alma // *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*. – 1990. – Vol. 84. – P. 83–90.
58. Ballester-Bolinches, A. On second maximal subgroups of Sylow subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro, A.N. Skiba // *J. Pure and Appl. Algebra*. – 2011. – Vol. 215, № 4. – P. 705–714.

Поступила в редакцию 31.05.16.

УДК 519.2

ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ ОТКРЫТОЙ СЕТИ С НЕАКТИВНЫМИ ЗАЯВКАМИ И МНОГОРЕЖИМНЫМИ СТРАТЕГИЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Ю.С. Крук¹, Ю.Е. Дудовская²

¹Белорусский национальный технический университет
²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

STATIONARY DISTRIBUTION INSENSITIVITY OF AN OPEN QUEUEING NETWORK WITH NON-ACTIVE CUSTOMERS AND MULTIMODE SERVICE STRATEGIES

J.S. Kruk¹, Y.E. Dudovskaya²

¹Belarusian National Technical University
²F. Scorina Gomel State University

Исследуется стационарное распределение вероятностей состояний открытой сети массового обслуживания, приборы в узлах которой могут функционировать в нескольких режимах. Заявки в узлах сети могут быть двух типов: обыкновенные (активные) заявки и временно неактивные заявки. Поступающие в сеть потоки информационных сигналов позволяют заявкам менять свое состояние: из неактивного состояния переходить в состояние, когда они могут получать обслуживание, и наоборот. Устанавливается инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний сети по отношению к функциональной форме распределений величин работ, требующихся для обслуживания заявок, при фиксированных первых моментах.

Ключевые слова: сеть массового обслуживания, неактивные заявки, многорежимное обслуживание, инвариантность стационарного распределения.

Stationary distribution of conditions probabilities of the open queueing network is investigated. Devices of the nodes can operate in several modes. There are two types of customers in the nodes: ordinary (active) customers and temporarily non-active customers. There are input flows of signals that allow customers to change the state: from non-active state pass into the state when they can receive service and backwards. Stationary distribution insensitivity with respect to functional form of distribution of work quantity for customer service is established.

Keywords: queueing network, non-active customers, multimode service, stationary distribution insensitivity.

Введение

В работе исследуется открытая сеть массового обслуживания, в узлах которой приборы могут функционировать в нескольких режимах. Режимы пронумерованы и характеризуют различную степень работоспособности узлов. С помощью введения многорежимного обслуживания можно моделировать ситуации, когда прибор может быть частично ненадежным. Полная потеря работоспособности прибора в настоящей работе не рассматривается. Впервые сети с многорежимными стратегиями обслуживания рассматривались в работе [1].

Заявки, ожидающие обслуживания в узлах сети, могут становиться временно неактивными. И в этом смысле можно говорить о «ненадежности» заявок. Неактивные заявки формируют отдельную очередь и не требуют обслуживания. Поступающие в сеть потоки информационных сигналов позволяют заявкам менять свое состояние: из неактивного состояния переходить в состояние, когда они могут получать обслуживание, и наоборот.

В работе [2] рассматривалась открытая сеть с неактивными заявками, для которой доказана инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний относительно функционального вида распределения величины работы, требующейся для обслуживания заявки.

В настоящей работе доказывается инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний относительно функционального вида распределения величины работы, требующейся для обслуживания заявки, для модели сети массового обслуживания, которая является обобщением модели из работы [2] на случай многорежимного обслуживания.

1 Описание сети

Рассмотрим открытую сеть массового обслуживания, состоящую из N узлов. Все заявки, находящиеся в сети, подразделяются на обыкновенные (активные), которые требуют обслуживания, и временно неактивные, которые формируют отдельную очередь и не требуют обслуживания. В сеть поступает простейший поток заявок с параметром λ . Каждая заявка входящего

потока независимо от других заявок направляется в i -ый узел с вероятностью p_{0i} ($\sum_{i=1}^N p_{0i} = 1$).

Кроме того, в узлы сети поступают независимые простейшие потоки информационных сигналов с интенсивностями v_i и ϕ_i , $i = \overline{1, N}$. Информационный сигнал, поступивший в i -ый узел с интенсивностью v_i , уменьшает количество обыкновенных заявок на единицу и увеличивает на единицу количество неактивных заявок. В случае отсутствия в i -ом узле обыкновенных заявок сигнал покидает сеть. Информационный сигнал, поступивший в i -ый узел с интенсивностью ϕ_i , уменьшает количество неактивных заявок на единицу и увеличивает на единицу количество обыкновенных заявок. В случае отсутствия в i -ом узле неактивных заявок сигнал покидает сеть. Описанные информационные сигналы не требуют обслуживания.

Предполагается, что i -ый узел может находиться в одном из $r_i + 1$ режимов работы ($i = \overline{1, N}$). Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_N(t))$, где $z_i(t) = (n_i(t), n'_i(t), l_i(t))$ – состояние i -го узла в момент времени t . Здесь $n_i(t)$, $n'_i(t)$ – число активных и, соответственно, неактивных заявок в i -ом узле в момент времени t , $l_i(t)$ – номер режима функционирования i -го узла. Пространство состояний случайного процесса $z(t)$ имеет вид

$$Z = \left\{ z = ((n_1, n'_1, l_1), \dots, (n_N, n'_N, l_N)) : \right. \\ \left. n_i, n'_i \geq 0, l_i = \overline{0, r_i}, i = \overline{1, N} \right\}.$$

Нумерация обыкновенных заявок в очереди каждого узла осуществляется от «хвоста» очереди к прибору, то есть если в i -ом узле находится n_i обыкновенных заявок, то заявка, которая обслуживается, имеет номер n_i , а последняя заявка в очереди имеет номер 1. Временно неактивные заявки в очереди i -го узла нумеруются следующим образом: заявка, последняя, ставшая неактивной, имеет номер n'_i . Поступающий в i -ый узел сигнал v_i воздействует на обыкновенную заявку, имеющую номер 1, которая становится неактивной заявкой под номером $n'_i + 1$. Сигнал ϕ_i воздействует на неактивную заявку, имеющую номер n'_i , которая становится обыкновенной заявкой под номером 1.

Назовем нулевой режим основным режимом работы. Время работы узла, находящегося в состоянии $z_i = (n_i, n'_i, l_i)$, в режиме l_i ($l_i = \overline{0, r_i}$, $i = \overline{1, N}$) имеет показательное распределение,

при этом с интенсивностью

$$\sigma_i(n_i + n'_i, l_i) \quad (\sigma_i(n_i + n'_i, l_i) > 0)$$

i -ый узел переходит в $(l_i + 1)$ -ый режим ($l_i = \overline{0, r_i - 1}$), а с интенсивностью $\rho_i(n_i + n'_i, l_i)$ ($\rho_i(n_i + n'_i, l_i) > 0$) – в $(l_i - 1)$ -ый режим ($l_i = \overline{1, r_i}$). Переключение прибора с одного режима в другой сохраняет общее число заявок в узле.

Дисциплина обслуживания LCFS-PR. Поступающая в i -ый узел заявка начинает сразу обслуживаться и получает номер $n_i + 1$, а вытесненная заявка сохраняет номер n_i и становится первой в очереди на дообслуживание. Предполагается, что в начальный момент времени временно неактивные заявки в сети отсутствуют.

Если в момент времени t состояние i -го узла есть вектор $(n_i(t), n'_i(t), l_i(t))$, и сразу после указанного момента в этот узел поступает заявка, которая, как отмечалось выше, начинает немедленно обслуживаться, то количество работы по ее обслуживанию является случайной величиной

$$\eta_i(n_i + n'_i + 1)$$

с функцией распределения

$$B_i(n_i + n'_i + 1, s),$$

математическим ожиданием

$$\tau_i(n_i + n'_i + 1) < \infty.$$

Предполагается, что $B_i(n_i + n'_i + 1, 0) = 0$, $i = \overline{1, N}$. Если в момент времени t состояние i -го узла есть $(n_i(t), n'_i(t), l_i(t))$, то обслуживание ведется со скоростью $\alpha_i(n_i + n'_i, l_i)$, то есть зависит от состояния узла. Изменение режима работы узла влечет изменение скорости обслуживания. Обслуживание в таких сетях имеет не «временную», а так называемую «энергетическую» трактовку, то есть каждая операция обслуживания характеризуется случайной величиной работы, которую необходимо выполнить.

Заявка, получившая обслуживание в i -ом узле, мгновенно, с вероятностью p_{ij} , переходит в j -ый узел, а с вероятностью p_{i0} покидает сеть ($\sum_{j=1}^N p_{ij} + p_{i0} = 1$, $i = \overline{1, N}$). Не ограничивая общности рассуждений, договоримся считать $p_{ii} = 0$, $i = \overline{1, N}$. Матрица маршрутизации предполагается неприводимой.

Для открытых сетей показано, что в случае неприводимости матрицы маршрутизации (p_{ij}) система уравнений трафика

$$\varepsilon_j = p_{0j} + \sum_{i=1}^N \varepsilon_i p_{ij}, \quad j = \overline{1, N}, \quad (1.1)$$

имеет единственное положительное решение [3].

2 Инвариантность стационарного распределения

Ранее рассмотрен случай, когда

$$B_i(n_i + n'_i, s) = 1 - e^{-\mu_i s} \quad (s > 0),$$

$$\tau_i(n_i + n'_i) = 1 / \mu_i$$

с единичной скоростью обслуживания

$$\alpha_i(n_i + n'_i, l_i) = 1.$$

Тогда $z(t)$ является марковским процессом, для которого в [4] получено стационарное распределение вероятностей состояний в мультипликативной форме.

Рассмотрим общий случай. Пусть количество работы по обслуживанию заявки является случайной величиной $\eta_i(n_i + n'_i)$ с произвольной функцией распределения $B_i(n_i + n'_i, s)$ и конечным математическим ожиданием $\tau_i(n_i + n'_i)$.

Пусть $\psi_{i,k}(t)$ – количество работы, которое осталось выполнить с момента t для завершения обслуживания заявки, стоящей в момент времени t на k -ой позиции в i -ом узле,

$$\Psi_i(t) = (\psi_{i,1}(t), \dots, \psi_{i,n_i+n'_i}(t)), \quad i = \overline{1, N}.$$

Если состояние i -го узла рассматриваемой сети есть вектор (n_i, n'_i, l_i) , то в силу сказанного выше

$$\frac{d\psi_{i,n_i+n'_i}(t)}{dt} = -\alpha_i(n_i + n'_i, l_i), \quad i = \overline{1, N}.$$

Тогда в общем случае процесс $z(t)$ не является марковским, поэтому рассмотрим кусочно-линейный марковский процесс $\zeta(t) = (z(t), \psi(t))$, добавляя к $z(t)$ непрерывную компоненту $\psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_N(t))$.

Введем обозначения:

$$F(z, x) = F(z, x_{1,1}, \dots, x_{1,n_1+n'_1}; x_{2,1}, \dots, x_{2,n_2+n'_2};$$

$$x_{N,1}, \dots, x_{N,n_N+n'_N}) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{z(t) = z, \psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \dots,$$

$$\dots, \psi_{i,n_i+n'_i}(t) < x_{i,n_i+n'_i}, i = \overline{1, N}\},$$

$$z \in Z, x_{k,l} \in \mathbb{R} \quad \forall k, l.$$

Теорема. При выполнении условий

$$\sum_{z \in Z} q(z) \prod_{i=1}^N (\lambda \varepsilon_i)^{n_i} \left(\frac{\lambda \varepsilon_i v_i}{\Phi_i} \right)^{n'_i} \times$$

$$\times \prod_{s=1}^{n_i+n'_i} \frac{\tau_i(s)}{\alpha_i(s, l_i)} \prod_{k=1}^{l_i} \frac{\sigma_i(0, k-1)}{\rho_i(0, k)} < \infty, \quad (2.1)$$

где

$$q(z) = \sum_{i=1}^N (\lambda p_{0i} + (\tau_i(n_i + n'_i)))^{-1} \times$$

$$\times \alpha_i(n_i + n'_i, l_i) I_{n_i > 0} + v_i I_{n_i > 0} +$$

$$+ \Phi_i I_{n'_i > 0} + \sigma_i(n_i + n'_i, l_i) I_{l_i < r_i} + \rho_i(n_i + n'_i, l_i) I_{l_i > 0};$$

$$\sigma_i(n_i + n'_i, l_i - 1) \alpha_i(n_i + n'_i, l_i) \rho_i(n_i + n'_i - 1, l_i) =$$

$$= \sigma_i(n_i + n'_i - 1, l_i - 1) \alpha_i(n_i + n'_i, l_i - 1) \rho_i(n_i + n'_i, l_i),$$

$$l_i = \overline{1, r_i}, i = \overline{1, N},$$

процесс $\zeta(t)$ эргодичен, а стационарные функции распределения вероятностей состояний $F(z, x)$ определяются по формулам

$$F(z, x) = p_1(n_1, n'_1, l_1) p_2(n_2, n'_2, l_2) \dots p_N(n_N, n'_N, l_N) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^N \prod_{s=1}^{n_i+n'_i} \frac{1}{\tau_i(s)} \int_0^{x_{i,s}} (1 - B_i(s, u)) du, \quad z \in Z,$$

где

$$p_i(n_i, n'_i, l_i) = (\lambda \varepsilon_i)^{n_i} \left(\frac{\lambda \varepsilon_i v_i}{\Phi_i} \right)^{n'_i} \times$$

$$\times \prod_{s=1}^{n_i+n'_i} \frac{\tau_i(s)}{\alpha_i(s, l_i)} \prod_{k=1}^{l_i} \frac{\sigma_i(0, k-1)}{\rho_i(0, k)} p_i(0, 0, 0), \quad (2.2)$$

$$p_i(0, 0, 0) = \left(\sum_{n_i=0}^{\infty} \sum_{n'_i=0}^{\infty} \sum_{l_i=0}^{r_i} (\lambda \varepsilon_i)^{n_i} \left(\frac{\lambda \varepsilon_i v_i}{\Phi_i} \right)^{n'_i} \times$$

$$\times \prod_{s=1}^{n_i+n'_i} \frac{\tau_i(s)}{\alpha_i(s, l_i)} \prod_{k=1}^{l_i} \frac{\sigma_i(0, k-1)}{\rho_i(0, k)} \right)^{-1},$$

ε_i находятся из (1.1).

Доказательство. Рассмотрим процесс $\zeta(t)$.

При выполнении условия (2.1) $\zeta(t)$ эргодичен. Строгое доказательство этого факта может быть проведено с помощью предельной теоремы Смита [5], если учесть, что случайный процесс $\zeta(t)$ является регенерирующим. Действительно, функционирование сети схематично можно представить как чередование периодов, когда сеть находится в нулевом состоянии (в узлах нет ни обыкновенных, ни неактивных заявок, узел работает в основном режиме) и периодов занятости сети (в противном случае). Момент перехода сети в свободное состояние является моментом регенерации. Далее доказательство сводится к применению теоремы Смита для регенерирующих процессов.

Обозначим $e_i \in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю кроме $(n_i, n'_i, l_i) = (1, 0, 0)$, $e'_i \in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю кроме $(n_i, n'_i, l_i) = (0, 1, 0)$, $e''_i \in Z$ – вектор, все координаты которого равны нулю кроме $(n_i, n'_i, l_i) = (0, 0, 1)$.

Для функций $F(z, x)$ справедлива следующая система дифференциально-разностных уравнений:

$$F(z, x) \sum_{i=1}^N (\lambda p_{0i} + v_i I_{n_i > 0} + \Phi_i I_{n'_i > 0} +$$

$$+ \sigma_i(n_i + n'_i, l_i) I_{l_i < r_i} + \rho_i(n_i + n'_i, l_i) I_{l_i > 0}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^N \alpha_i(n_i + n'_i, l_i) \times \\
 &\times \left(\frac{\partial F(z, x)}{\partial x_{i, n_i + n'_i}} - \left(\frac{\partial F(z, x)}{\partial x_{i, n_i + n'_i}} \right)_{x_{i, n_i + n'_i} = 0} \right) I_{n_i > 0} + \\
 &+ \sum_{i=1}^N \lambda p_{0i} B_i(n_i + n'_i, x_{i, n_i + n'_i}) F(z - e_i, x) I_{n_i > 0} + \quad (2.3) \\
 &+ \sum_{j=1}^N \sum_{i=1, i \neq j}^N \alpha_j(n_j + n'_j + 1, l_j) p_{ji} B_i(n_i + n'_i, x_{i, n_i + n'_i}) \times \\
 &\times \left(\frac{\partial F(z + e_j - e_i, x)}{\partial x_{j, n_j + n'_j + 1}} \right)_{x_{j, n_j + n'_j + 1} = 0} I_{n_i > 0} + \\
 &+ \sum_{i=1}^N \alpha_i(n_i + n'_i + 1, l_i) p_{i0} \left(\frac{\partial F(z + e_i, x)}{\partial x_{i, n_i + n'_i + 1}} \right)_{x_{i, n_i + n'_i + 1} = 0} + \\
 &+ \sum_{i=1}^N F(z + e_i - e'_i, x) \nu_i I_{n'_i > 0} + \\
 &+ \sum_{i=1}^N F(z - e_i + e'_i, x) \rho_i I_{n_i > 0} + \\
 &+ \sum_{i=1}^N F(z - e'_i, x) \sigma_i(n_i + n'_i, l_i - 1) I_{l_i > 0} + \\
 &+ \sum_{i=1}^N F(z + e'_i, x) \rho_i(n_i + n'_i, l_i + 1) I_{l_i < r_i}.
 \end{aligned}$$

Подстановкой убеждаемся, что определенные в условии теоремы функции $F(z, x)$ являются решением системы уравнений (2.3). \square

Пусть $\{p(z), z \in Z\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $z(t)$. Из теоремы с учетом равенства $p(z) = F(z, +\infty)$ вытекает следующее следствие.

Следствие. Если выполняются условия (2.1), то процесс $z(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение вероятностей состояний

$\{p(z), z \in Z\}$ не зависит от функционального вида распределений $B_i(s, x), i = \overline{1, N}$, и имеет мультипликативную форму

$$p(z) = p_1(n_1, n'_1, l_1) p_2(n_2, n'_2, l_2) \dots p_N(n_N, n'_N, l_N),$$

где $p_i(n_i, n'_i, l_i)$ определяются по формуле (2.2). Здесь $p_i(n_i, n'_i, l_i)$ – стационарное распределение вероятностей состояний изолированного узла.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малинковский, Ю.В.* Мультипликативность стационарного распределения в открытых сетях с многорежимными стратегиями обслуживания / Ю.В. Малинковский, А.Ю. Нуеман // *Вестн. НАН Беларуси.* – 2001. – №3. – С. 129–134.
2. *Крук, Ю.С.* Инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний открытой сети с неактивными заявками / Ю.С. Крук, Ю.Е. Дудовская // *Автоматика и телемеханика.* – 2015. – № 12. – С. 94–107.
3. *Jackson, J.R.* Network of Waiting Lines / J.R. Jackson // *Oper. Res.* – 1957. – № 4. – P. 518–521.
4. *Дудовская, Ю.Е.* Стационарное распределение вероятностей состояний открытых сетей массового обслуживания с неактивными заявками и многорежимными стратегиями обслуживания / Ю.Е. Дудовская, Ю.С. Боярович // *Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: материалы международного науч. конф., посвящ. 80-летию профессора, д-ра физ.-мат. наук Г.А. Медведева, Минск, 23–26 февраля 2015 г.* – РИВШ. – Минск, 2015. – С. 33–36.
5. *Гнеденко, Б.В.* Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. – М.: КомКнига, 2005. – 400 с.

Поступила в редакцию 05.09.16.

УДК 517.983.23:517.983.5

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ЗАМКНУТЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.Р. Миротин, А.А. Атвиновский

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON SOME PROPERTIES OF A FUNCTIONAL CALCULUS OF CLOSED OPERATORS ON BANACH SPACE

A.R. Mirotin, A.A. Atvinovskii

F. Scorina Gomel State University

Рассмотрены некоторые вопросы теории возмущений, связанные с построенным ранее авторами функциональным исчислением замкнутых операторов в банаховом пространстве. Доказано неравенство моментов для указанного функционального исчисления.

Ключевые слова: теория возмущений линейных операторов, операторно липшицевы функции, операторно дифференцируемые функции, производная Гато, неравенство моментов.

Some topics in the perturbation theory related to the functional calculus of closed operators in Banach space which belongs to the authors are considered. Moment inequality for the above mentioned functional calculus is also proved.

Keywords: perturbation theory of linear operators, operator Lipschitz functions, operator differentiable functions, Gateaux derivative, moment inequality.

Введение

Статья посвящена некоторым вопросам теории возмущений линейных операторов, возникающим в функциональном исчислении замкнутых операторов в банаховом пространстве, построенном в [1]–[4]. Вместе с тем, ее можно читать независимо от указанных работ.

В последние десятилетия в работах Бирмана и Соломяка, Александрова, Пеллера, Кисина, Шульмана, Потапова, Сукочёва и других математиков была развита теория операторно липшицевых и операторно дифференцируемых функций самосопряженных, унитарных или нормальных операторов в гильбертовых пространствах (см., например, [5]–[8]). В данной работе аналогичные вопросы изучаются для построенного в [1]–[4] функционального исчисления. В ней, в частности, выделены классы операторов, для которых рассматриваемые функции являются операторно липшицевыми или операторно дифференцируемыми по Гато, и доказано полезное неравенство моментов для указанного функционального исчисления.

1 Предварительные сведения

Напомним необходимые понятия и результаты из [1] и [4].

Определение 1.1. Пусть $a < b$. Говорят, что функция g относится к классу Маркова $R[a, b]$, если она голоморфна в верхней полуплоскости, отображает ее в свое замыкание, а также голоморфна и положительна на $(-\infty, a)$ и голоморфна и отрицательна на (b, ∞) .

При этом функция g допускает интегральное представление ($z \notin [a, b]$)

$$g(z) = \int_a^b \frac{d\tau(t)}{t-z}$$

с некоторой ограниченной положительной мерой τ .

Скажем, что функция g принадлежит классу R^0 , если она принадлежит $R[0, b]$ и непрерывна в нуле; другими словами, мера τ удовлетворяет условию $\int_0^b d\tau(t)/t < \infty$.

Определение 1.2. Обозначим через $S(b)$ ($Z[a, b]$) множество функций вида $zg(z)$, где $g \in R^0$ (соответственно, $g \in R[a, b]$).

В силу интегрального представления функций Маркова, приведенного выше, функции из $S(b)$ имеют в точности вид

$$f(z) = \int_0^b \frac{z}{t-z} d\tau(t), \quad (1.1)$$

где τ – единственная ограниченная положительная мера на $(0, b]$, такая, что $\int_0^b d\tau(t)/t < \infty$ («представляющая мера»). Аналогичное интегральное представление имеют и функции из $Z[a, b]$.

Следующая лемма дает внутреннюю характеристику функций из $S(b)$.

Лемма 1.1. Функция f принадлежит $S(b)$ тогда и только тогда, когда она голоморфна и

отрицательна на промежутках $(-\infty, 0)$ и $(b, +\infty)$, причем функция $f(z)/z$ непрерывна в нуле и отображает открытую верхнюю полуплоскость $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}z > 0\}$ в свое замыкание.

Для доказательства достаточно заметить, что указанные свойства функции f равносильны тому, что функция $g(z) := f(z)/z$ принадлежит классу $R[0, b]$ функций Маркова и непрерывна в нуле, т. е. принадлежит классу R^0 в смысле [4].

Аналогичным образом можно дать внутреннюю характеристику функций из $Z[a, b]$.

Всюду ниже A – замкнутый плотно определенный оператор в комплексном банаховом пространстве X , $\sigma(A)$ и $\rho(A)$ – спектр и резольвентное множество оператора A соответственно. Через $LB(X)$ мы будем обозначать алгебру всех ограниченных операторов в X .

Определение 1.3. Будем говорить, что оператор A в пространстве X принадлежит классу $V_{(0,b)}(X)$, если $(0, b) \subset \rho(A)$ и для некоторой постоянной $M_A > 0$ выполняется неравенство

$$\|R(t, A)\| \leq \frac{M_A}{t}, t \in (0, b]$$

(в [4] этот класс операторов обозначался V^0). Класс $V_{(0,b)}(X)$ весьма широк. Например, ему принадлежат в силу теоремы Хилле-Иосиды все операторы вида $-A + bI$, где A есть генератор ограниченной полугруппы класса C_0 в пространстве X .

Определение 1.4. Для любой функции $f \in S(b)$ с представляющей мерой τ и любого $A \in V_{(0,b)}(X)$ положим

$$f(A) = \int_0^b AR(t, A)d\tau(t). \quad (1.2)$$

Ясно, что $f(A) = Ag(A)$, где $g(A)$ понимается в смысле [4]. Поэтому данное исследование можно рассматривать как продолжение работ [1]–[4].

Из хорошо известного тождества

$$AR(t, A) = -I + tR(t, A) \quad (t \in \rho(A))$$

следует, что оператор $f(A)$ определен на X и ограничен.

2 Операторная липшицевость и операторная дифференцируемость

Говорят, что функция f является операторно липшицевой в классе операторов W , если найдется такая константа L , что для любых $A, B \in W$, таких, что оператор $A - B$ ограничен, выполняется неравенство

$$\|f(A) - f(B)\| \leq L\|A - B\|.$$

Нижеследующая теорема 2.1 показывает, что функции из $S(b)$ являются операторно липшицевыми в классе операторов

$$V_{(0,b)}^c(X) := \{A \in V_{(0,b)}(X) : M_A \leq c\} \quad (c = \text{const}).$$

Аналогичные замечания можно сделать и в связи с теоремами 2.2 и 2.3.

Теорема 2.1. Пусть $f \in S(b)$. Для любых операторов $A, B \in V_{(0,b)}(X)$ таких, что $D(A) \supseteq D(B)$ и $A - B$ принадлежит $LB(X)$, выполняется неравенство

$$\|f(A) - f(B)\| \leq M_A M_B f'(-0)\|A - B\|.$$

Доказательство. Пусть $A, B \in V_{(0,b)}(X)$ таковы, что $D(A) \supseteq D(B)$ и $A - B \in LB(X)$. Тогда $AR(t, A) - BR(t, B) = tR(t, A)(A - B)R(t, B), t \in (0, b]$.

Следовательно, этот оператор принадлежит $LB(X)$ и

$$f(A) - f(B) = \int_0^b R(t, A)(A - B)R(t, B)td\tau(t).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|f(A) - f(B)\| &\leq M_A M_B \|A - B\| \int_0^b \frac{d\tau(t)}{t} = \\ &= M_A M_B f'(-0)\|A - B\|, \end{aligned}$$

поскольку

$$\int_0^b \frac{d\tau(t)}{t} = \lim_{z \rightarrow -0} \frac{f(z)}{z} = f'(-0). \quad \square$$

Рассматриваемое функциональное исчисление обладает следующим свойством устойчивости.

Следствие 2.1. Если

$$f \in S(b), A_n, B_n \in V_{(0,b)}(X), D(A_n) \supseteq D(B_n),$$

причем $A_n - B_n \in LB(X)$ и

$$\|A_n - B_n\| \rightarrow 0, M_{A_n}, M_{B_n} \leq \text{const},$$

то $\|f(A_n) - f(B_n)\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

В соответствии с [1], обозначим через $V_{[a,b]}(X)$ множество всех замкнутых операторов в X , для которых $[a, b] \subset \rho(A)$. Если

$$A \in V_{[a,b]}(X), f(z) = zg(z) \in Z[a, b],$$

где функция $g \in R[a, b]$ имеет представляющую меру τ , то мы полагаем

$$f(A) := \int_a^b AR(t, A)d\tau(t).$$

Легко проверить, что возникающее функциональное исчисление является частью голоморфного.

Заметим, что для производной функции $f \in Z[a, b]$ с представляющей мерой τ справедливо равенство ($n \in \mathbb{N}$)

$$f^{(n)}(z) = n! \int_a^b \frac{td\tau(t)}{(t-z)^{n+1}}.$$

Для функции $f \in Z[a, b]$ и оператора $A \in V_{[a,b]}(X)$ положим

$$f^{(n)}(A) := n! \int_a^b R(t, A)^{n+1} t d\tau(t).$$

Ясно, что оператор $f^{(n)}(A)$ ограничен.

Для операторов из $V_{[a,b]}(X)$ справедлив следующий аналог теоремы 2.1. Ниже положено $m_A := \max_{t \in [a,b]} \|R(t, A)\|$.

Теорема 2.2. Пусть операторы A и B из $V_{[a,b]}(X)$ таковы, что $A - B \in LB(X)$, и $f \in Z[a, b]$. Тогда ($n \in \mathbb{Z}_+$)

$$\|f^{(n)}(A) - f^{(n)}(B)\| \leq C(A, B, f, n) \|A - B\|,$$

где

$$C(A, B, f, n) := n! \frac{m_A^{n+2} m_B - m_A m_B^{n+2}}{m_A - m_B} \int_a^b t d\tau(t).$$

Доказательство. Из определения следует, что

$$f^{(n)}(A) - f^{(n)}(B) = n! \int_a^b (R(t, A)^{n+1} - R(t, B)^{n+1}) t d\tau(t).$$

Подставляя $S = R(t, A), T = R(t, B)$ в очевидное равенство

$$S^{n+1} - T^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} S^{n+1-k} (S - T) T^{k-1},$$

справедливое для любых ограниченных операторов S и T , получаем с учетом второго резольвентного тождества, что

$$\begin{aligned} & \|R(t, A)^{n+1} - R(t, B)^{n+1}\| = \\ & = \left\| \sum_{k=1}^{n+1} R(t, A)^{n+2-k} (A - B) R(t, B)^k \right\| \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^{n+1} m_A^{n+2-k} m_B^k \|A - B\| = \frac{m_A^{n+2} m_B - m_A m_B^{n+2}}{m_A - m_B} \|A - B\|, \end{aligned}$$

откуда и следует утверждение теоремы. \square

Аналогично доказывается следующее обобщение теоремы 2.1.

Теорема 2.3. Пусть операторы A и B из $V_{(0,b)}(X)$ таковы, что $A - B \in LB(X)$, и $f \in S(b)$. Тогда ($n \in \mathbb{Z}_+$)

$$\begin{aligned} & \|f^{(n)}(A) - f^{(n)}(B)\| \leq \\ & \leq \frac{M_A^{n+2} M_B - M_A M_B^{n+2}}{M_A - M_B} f^{(n)}(-0) \|A - B\|. \end{aligned}$$

Перейдем к вопросу о дифференцируемости рассматриваемых операторных функций.

Определение 2.1. Пусть $f \in Z[a, b]$ и $A \in V_{[a,b]}(X)$. Ограниченный оператор $f'_r(A)$ на $LB(X)$ (трансформатор) будем называть производной Гато операторной функции f в точке A , если для всех $B \in LB(X)$, таких, что $A + hB \in V_{[a,b]}(X)$ при достаточно малых $h \in \mathbb{C}$, справедливо равенство

$$f'_r(A)B = \left. \frac{d}{dh} f(A + hB) \right|_{h=0}, \quad (2.1)$$

где производная понимается в смысле нормы оператора.

Теорема 2.4. Функция $f \in Z[a, b]$ является дифференцируемой по Гато, причем ее производная Гато в точке $A \in V_{[a,b]}(X)$ имеет вид

$$f'_r(A)B = \int_a^b R(t, A) B R(t, A) t d\tau(t) \quad (B \in LB(X)). \quad (2.2)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что трансформатор $F(B)$, определяемый правой частью формулы (2.2), действительно ограничен, поскольку $\|F(B)\| \leq m_A^2 \int_a^b t d\tau(t) \|B\|$. Далее, рассуждая, как в доказательстве теоремы 2.1, получаем для $\Delta A \in LB(X)$, таких, что $A + \Delta A \in V_{[a,b]}(X)$, равенство

$$\begin{aligned} & f(A + \Delta A) - f(A) - F(\Delta A) = \\ & = \int_a^b (R(t, A + \Delta A) - R(t, A)) \Delta A R(t, A) t d\tau(t). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Выберем ΔA таким, что $\|\Delta A\| \leq 1/2m_A$. Тогда (см., например, [10, теорема IV.1.16])

$$\begin{aligned} & \|R(t, A + \Delta A) - R(t, A)\| \leq \\ & \leq \frac{\|\Delta A\| \|R(t, A)\|^2}{1 - \|\Delta A\| \|R(t, A)\|} \leq 2m_A^2 \|\Delta A\|. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Отсюда и из равенства (2.3) следует, что

$$\|f(A + hB) - f(A) - hF(B)\| = o(\|h\|) \text{ при } h \rightarrow 0,$$

откуда и вытекает доказываемое равенство. \square

Следствие 2.2. Если дополнительно к условиям теоремы 2.4 предположить, что операторы A и B коммутируют, то $f'_r(A)B = f'(A)B$.

Для формулировки еще одного следствия теоремы 2.4 условимся называть операторы A и A' из $V_{[a,b]}(X)$ эквивалентными, если $A' - A \in LB(X)$. Очевидно, что формула $\|A' - A\|$ задает метрику в каждом классе эквивалентности.

Следствие 2.3. Отображение $A \mapsto f'_r(A)$ непрерывно в каждом классе эквивалентности операторов из $V_{[a,b]}(X)$.

Доказательство. Пусть операторы A и A' из $V_{[a,b]}(X)$ эквивалентны, $B \in LB(X)$. По теореме 2.4

$$\begin{aligned} & (f'_r(A') - f'_r(A))B = \\ & = \int_a^b R(t, A') B (R(t, A') - R(t, A)) t d\tau(t) + \\ & \quad \int_a^b (R(t, A') - R(t, A)) B R(t, A) t d\tau(t). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|(f'_r(A') - f'_r(A))B\| \leq$$

$$\leq 2m_A m_A \|B\| \int_a^b \|R(t, A') - R(t, A)\| t d\tau(t).$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Если оператор $\Delta A := A' - A$ таков, что $\|\Delta A\| < \min\{1/2m_A, \varepsilon\}$, то из формулы (2.4) следует, что $\|R(t, A') - R(t, A)\| \leq m_A$, а потому $m_{A'} \leq 2m_A$. Из формулы (2.4) следует также, что $\|R(t, A') - R(t, A)\| \leq 2m_A^2 \varepsilon$. Значит, при таком выборе ΔA выполняется неравенство

$$\|(f'_{\Gamma}(A') - f'_{\Gamma}(A))B\| \leq \left(8m_A^4 \int_a^b t d\tau(t)\right) \varepsilon \|B\|,$$

т. е.

$$\|f'_{\Gamma}(A') - f'_{\Gamma}(A)\|_{LB(LB(X))} \leq \left(8m_A^4 \int_a^b t d\tau(t)\right) \varepsilon,$$

что завершает доказательство. \square

Следствие 2.4. Если $A \in V_{[a,b]}(X)$ и оператор $B \in LB(X)$ таков, что $\|B\| < 1/m_A$, то

$$\|f(A+B) - f(A)\| \leq \max_C \|f'_{\Gamma}(C)\| \|B\|,$$

где максимум берется по всем операторам вида $C = A + tB, t \in [0, 1]$.

Доказательство. Из [10, IV.1.16] следует, что $A + tB \in V_{[a,b]}(X)$ при $t \in [0, 1]$. По следствию 2.3 отображение $t \mapsto d/dt f(A + tB)$ непрерывно, а потому справедливо равенство

$$f(A+B) - f(A) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(A + tB) dt,$$

Поэтому утверждение следствия 2.4 вытекает из равенства

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(A + tB) &= \frac{d}{dh} f((A + tB) + hB) \Big|_{h=0} = \\ &= f'_{\Gamma}(A + tB)B. \end{aligned}$$

3 Неравенство моментов и его следствия

Теорема 3.1. Пусть $A \in V_{(0,b)}(X)$, $f \in S(b)$.

Тогда для любого $x \in D(A)$, $\|x\| = 1$ выполняется неравенство

$$\|f(A)x\| \leq -(2M_A + 1)f(-\|Ax\|). \quad (3.1)$$

Доказательство. Воспользуемся методом доказательства неравенства моментов из [11]. Пусть $A \in V_{(0,b)}(X)$. Докажем, что

$$\|R(t, A)Ax\| \leq (2M_A + 1) \frac{\|Ax\|}{t + \|Ax\|}, \quad (3.2)$$

где $t \in (0, b]$, $x \in D(A)$, $\|x\| = 1$. Для этого рассмотрим два случая.

1. Пусть

$$t \leq \frac{\|Ax\| M_A}{M_A + 1}, \quad x \in D(A), \quad \|x\| = 1.$$

Заметим, что

$$R(t, A)Ax = -x + tR(t, A)x.$$

Поэтому для любых $x \in D(A)$, $\|x\| = 1$, $t \in (0, b]$

$$\begin{aligned} \|R(t, A)Ax\| &\leq 1 + t \|R(t, A)x\| \leq \\ &\leq (M_A + 1) \leq (2M_A + 1) \frac{\|Ax\|}{t + \|Ax\|}. \end{aligned}$$

Действительно, последнее неравенство равносильно неравенству

$$(M_A + 1)(t + \|Ax\|) \leq (2M_A + 1)\|Ax\|,$$

$$\text{т. е. } t \leq \frac{2M_A + 1}{M_A + 1} \|Ax\| - \|Ax\| = \frac{\|Ax\| M_A}{M_A + 1}.$$

2. Пусть

$$t \geq \frac{\|Ax\| M_A}{M_A + 1}, \quad x \in D(A), \quad \|x\| = 1.$$

Тогда для любых $x \in D(A)$, $\|x\| = 1$, $t \in (0, b]$

$$\|R(t, A)Ax\| \leq \frac{M_A}{t} \|Ax\| \leq (2M_A + 1) \frac{\|Ax\|}{t + \|Ax\|}.$$

Последнее неравенство равносильно неравенству $M_A(t + \|Ax\|) \leq (2M_A + 1)t$, что, в свою очередь, равносильно неравенству

$$t \geq \frac{\|Ax\| M_A}{M_A + 1}.$$

Теперь, воспользовавшись неравенством (3.2), получаем при всех $x \in D(A)$, $\|x\| = 1$

$$\begin{aligned} \|f(A)x\| &\leq \int_0^b \|R(t, A)Ax\| d\tau(t) \leq \\ &\leq -(2M_A + 1) \int_0^b \frac{(-\|Ax\|) d\tau(t)}{t - (-\|Ax\|)} = \\ &= -(2M_A + 1) f(-\|Ax\|), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. \square

Следствие 3.1. Если $A \in V_{(0,b)}(X)$, $f \in S(b)$, то при всех $x \in D(A)$, $\|x\| = 1$

$$\|f(A)x\| \leq (2M_A + 1) f'(-0) \|Ax\|.$$

Доказательство. Заметим, что в силу формулы (1.1) функция $f(-r)/(-r)$ убывает на множестве $\{r > 0\}$. Поэтому

$$f'(-0) = \lim_{r \rightarrow +0} \frac{f(-r)}{-r} \geq \frac{f(-r)}{-r} \quad (r > 0).$$

В частности, $-f(-\|Ax\|) \leq f'(-0) \|Ax\|$.

Следствие 3.2. Данное функциональное исчисление обладает следующим свойством непрерывности. Если

$$f_n \in S(b), A \in V_{(0,b)}(X) \text{ и } f_n(-0) \rightarrow 0,$$

то $\|f_n(A)x\| \rightarrow 0$ ($x \in D(A), n \rightarrow \infty$).

Следствие 3.3. Если $g \in R^0$ и $A \in V_{(0,b)}(X)$, то

$$\begin{aligned} \|g(A)Ax\| &\leq (2M_A + 1) g\left(-\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right) \|Ax\| \\ &\quad (x \in D(A), x \neq 0). \end{aligned}$$

Доказательство. Это следует из неравенства моментов (3.1), если заменить в нем x на $x/\|x\|$ и положить $f(z) = g(z)z$. \square

Следствие 3.4. Если $g_n \in R^0$, $g_n(s) \rightarrow 0$ при $s < 0$ и $A \in V_{(0,b]}(X)$, то $\|g_n(A)y\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) для $y \in \text{Im}A$.

Доказательство. Для случая $y = 0$ это очевидно. Для остальных $y \in \text{Im}A$ это вытекает из следствия 3.3. \square

Следствие 3.5. Если $g_n \in R^0$, $g_n(s) \rightarrow 0$ при $s < 0$, последовательность $g_n(-0)$ ограничена, $A \in V_{(0,b]}(X)$ и $\text{Im}A$ плотен, то $g_n(A) \rightarrow 0$ сильно ($n \rightarrow \infty$).

Доказательство. Ввиду следствия 3.4 достаточно убедиться, что нормы операторов $g_n(A)$ ограничены в совокупности. Для этого напомним (см. [1], [4]), что

$$g_n(A) = \int_0^b R(t, A) d\tau_n(t),$$

где τ_n – представляющая мера функции g_n , а потому справедливо неравенство

$$\|g_n(A)\| \leq M_A g_n(-0). \quad \square$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Атвиновский, А.А.* Об одном функциональном исчислении замкнутых операторов в банаховом пространстве / А.А. Атвиновский, А.Р. Миротин // Известия вузов. Математика. – 2013. – № 10. – С. 3–15.
2. *Атвиновский, А.А.* Обращение одного класса операторов в банаховом пространстве и некоторые его применения / А.А. Атвиновский,

А.Р. Миротин // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 3 (16). – С. 55–60.

3. *Миротин, А.Р.* Обращение линейной комбинации значений резольвенты замкнутого оператора / А.Р. Миротин, А.А. Атвиновский // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3 (20). – С. 77–79.

4. *Атвиновский, А.А.* Об одном функциональном исчислении замкнутых операторов в банаховом пространстве. II / А.А. Атвиновский, А.Р. Миротин // Известия вузов. Математика. – 2015. – № 5. – С. 3–16.

5. *Александров, А.Б.* Операторно липшицевы функции / А.Б. Александров, В.В. Пеллер // 2016. – Preprint, <http://arxiv.org/abs/1602.07994v1>.

6. *Peller, V.V.* The behavior of functions of operators under perturbations / V.V. Peller // April 10, 2009. – Preprint, <http://arxiv.org/abs/0904.1761>.

7. *Kissin, E.* Classes of operator-smooth functions. I. Operator Lipschitz functions / E. Kissin, V.S. Shulman // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 2005. – № 48. – P. 151–173.

8. *Kissin, E.* Lipschitz functions, Schatten ideals and unbounded derivations / E. Kissin, D. Potapov, F. Sukochev, V.S. Shulman // Functional Analysis and its Applications. – 2011. – № 45:2. – P. 93–96.

9. *Крейн, М.Г.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М.Г. Крейн, А.А. Нудельман – М.: Наука, 1973. – 552 с.

10. *Като, Т.* Теория возмущений линейных операторов / Т. Като – М.: Мир, 1972. – 740 с.

11. *Миротин, А.Р.* О некоторых свойствах многомерного функционального исчисления Бохнера-Филлипса / А.Р. Миротин // Сибирский матем. ж. – 2011. – № 52:6. – С. 1300–1312.

Поступила в редакцию 26.10.16.

УДК 512.542

J-КОНСТРУКЦИЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЙ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Е.Н. Мысловец

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

J-CONSTRUCTION OF COMPOSITION FORMATIONS AND PRODUCTS OF FINITE GROUPS

E.N. Myslovets

F. Scorina Gomel State University

В работе [1] была введена J -конструкция композиционных формаций конечных групп. Были получены их некоторые свойства и найдены приложения к изучению произведений нормальных и взаимно перестановочных подгрупп конечных групп. В настоящей работе продолжают исследования в данном направлении.

Ключевые слова: конечная группа, J -квазинильпотентная группа, Jc -сверхразрешимая группа, Jca -разрешимая группа, Jca -сверхразрешимая группа, произведение нормальных подгрупп, произведение взаимно перестановочных подгрупп, композиционная формация.

In [1] J -construction of composition formations was introduced. Some properties of them were found and applications to the study of products of normal and mutually permutable subgroups were obtained. In this paper we continue investigation in this area.

Keywords: finite group, J -quasinilpotent group, Jc -supersoluble group, Jca -soluble group, Jca -supersoluble group, product of normal subgroups, mutually permutable product, composition formation.

Introduction

Only finite groups are considered. In recent years series of new constructions of composition formations have been investigated in several papers (see [2]–[5]). V.A. Vedernikov in [2] introduced and studied some new classes of groups such as c -supersoluble groups, ca -supersoluble groups, ca -soluble groups, etc. Later in [6], it was proved that the class of all c -supersoluble groups is a composition (soluble saturated) formation. Recall that a group G is called c -supersoluble if every chief factor of G is simple. D. Robinson [7] established the structural properties of finite c -supersoluble groups.

The formation of all c -supersoluble groups found different applications, including the study of mutually permutable and totally permutable products of groups (see [8]–[10]).

In [1] local analogues (“ J -construction”) of formations of all quasinilpotent, c -supersoluble, ca -supersoluble and ca -soluble groups were introduced. Also in [1] some results for products of normal and mutually permutable subgroups of these formations were obtained. In this paper we continue investigation in this area.

Let J be a class of simple groups (possibly empty). We will say that group G is a J -group, if the set of all composition factors of G is contained in J . We will say that the chief factor of G is J -factor if it is a J -group.

Definition 0.1 [1]. A group G is called:

1) J -quasinilpotent if for each chief J -factor of G any automorphism induced by an element of G is inner;

2) Jc -supersoluble if each chief J -factor of G is a simple group;

3) Jca -soluble if each abelian chief J -factor of G is central in G ;

4) Jca -supersoluble if it is Jc -supersoluble and each abelian chief J -factor is central in G .

We will use the following notations: \mathfrak{N}_J^* is the class of all J -quasinilpotent groups; \mathfrak{U}_{Jc} is the class of all Jc -supersoluble groups; \mathfrak{S}_{Jca} is the class of all Jca -soluble groups; \mathfrak{U}_{Jca} is the class of all Jca -supersoluble groups.

If $J = \mathfrak{S}$ is the class of all simple groups then \mathfrak{N}_J^* coincides with the class of all quasinilpotent groups, \mathfrak{U}_{Jc} , \mathfrak{S}_{Jca} , \mathfrak{U}_{Jca} coincide with the class of all c -supersoluble, ca -soluble and ca -supersoluble groups, respectively, from [2]. If J is the class of all simple non-abelian groups then \mathfrak{N}_J^* coincides with the class of all sn -soluble groups from [2]. If J is the class of all non-abelian simple groups then \mathfrak{U}_{Jc} coincides with the class of all $SNAC$ -groups from [7].

In [1] the following properties of these classes were obtained.

Theorem 0.2 [1]. The following statements hold:

1) \mathfrak{N}_J^* , \mathfrak{S}_{Jca} и \mathfrak{U}_{Jca} are soluble saturated Fitting formations;

2) \mathfrak{U}_{Jc} is a normal hereditary soluble saturated formation;

3) \mathfrak{U}_{Jc} is a Fitting formation if J does not contain abelian groups;

4) $\mathfrak{N}_J^* \subseteq \mathfrak{U}_{Jca} \subseteq \mathfrak{U}_{Jc}$ and $\mathfrak{U}_{Jca} \subseteq \mathfrak{S}_{Jca}$. In general $\mathfrak{N}_J^* \neq \mathfrak{U}_{Jca} \neq \mathfrak{U}_{Jc}$ and $\mathfrak{U}_{Jca} \neq \mathfrak{S}_{Jca}$.

5) Let $\mathfrak{F} \in \{\mathfrak{N}_J^*, \mathfrak{U}_{Jc}, \mathfrak{S}_{Jca}, \mathfrak{U}_{Jca}\}$. A class of groups \mathfrak{F} is a composition formation and has maximal inner composition satellite h such that

if $\mathfrak{F} \in \{\mathfrak{N}_J^*, \mathfrak{S}_{Jca}, \mathfrak{U}_{Jca}\}$, then $h(N) = \mathfrak{N}_p$, if $N \in J$ and N is a group of prime order p ; $h(N) = \mathfrak{F}$, if either $N \notin J$ and N is a group of prime order, or N is a simple non-abelian group;

if $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}_{Jc}$, then $h(N) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}(p-1)$, if $N \in J$ and N is a group of prime order p ; $h(N) = \mathfrak{F}$, if either $N \notin J$ and N is a group of prime order, or N is a simple non-abelian group.

Let $G = HK$ be the product of normal supersoluble subgroups H and K of G . It is known that G is supersoluble in the one of the following cases: 1) derived subgroup G' of G is nilpotent [11]; 2) subgroups H and K have coprime indices in G [12, ch. 4, theorem 3.4]; 3) either H or K is nilpotent. Above-mentioned results were spread on c -supersoluble groups in [6], on p -supersoluble groups in the work of V.S. Monakhov and I.K. Chirik [13]. The following theorem generalizes theorems from [6] and [1].

Theorem 0.3. Let $G = HK$ be the product of normal subgroups H and K of G . Then the following statements hold:

1) if G/H and G/K don't have common (up to isomorphism) abelian composition factors then $G^{\mathfrak{U}_{Jc}} = H^{\mathfrak{U}_{Jc}} K^{\mathfrak{U}_{Jc}}$;

2) if group G is an extension of Jca -soluble group by A -group then $G^{\mathfrak{U}_{Jc}} = H^{\mathfrak{U}_{Jc}} K^{\mathfrak{U}_{Jc}}$;

3) $G^{\mathfrak{U}_{Jc}} = H^{\mathfrak{U}_{Jc}} K^{\mathfrak{U}_{Jca}}$;

4) $G^{\mathfrak{U}_{Jca}} = H^{\mathfrak{U}_{Jca}} K^{\mathfrak{U}_{Jca}}$.

Corollary 0.4 [1, 14]. Let $G = HK$ be the product of normal subgroups H and K of G . Then the following statements hold:

1) if H and K are Jc -supersoluble subgroups and G/H and G/K don't have common (up to isomorphism) abelian composition factors, then G is Jc -supersoluble;

2) if group G is an extension of Jca -soluble group by A -group and H and K are Jc -supersoluble subgroups, then G is Jc -supersoluble;

3) if H is a Jc -supersoluble subgroup and K is a Jca -supersoluble subgroup of G , then G is Jc -supersoluble;

4) if H and K are Jca -supersoluble subgroups of G , then G is Jca -supersoluble.

According to [15, p. 151] the group $G = AB$ is the mutually permutable product of subgroups A and B if A permutes with every subgroup of B and B permutes with every subgroup of A . In papers [1], [16] the following results were obtained.

Theorem 0.5 [16]. Let the group $G = HK$ be the product of the mutually permutable subgroups H

and K . If G is Jc -supersoluble, then H and K are both Jc -supersoluble.

When $J = \mathfrak{J}$ we get Theorem 3 from [10], when J is the class of all non-abelian simple groups then we get Theorem 1 from [17] as corollaries.

Theorem 0.6 [16]. Let the group $G = HK$ be the mutually permutable product of the subgroups H and K . If H is Jc -supersoluble and K is J -quasi-nilpotent, then G is Jc -supersoluble.

When $J = \mathfrak{J}$ we get Theorem 4 from [10] as corollary.

Analogue of Baer's theorem [11] for mutually permutable products of c -supersoluble subgroups was received in [10]. The development of this result is the next theorem.

Theorem 0.7 [1]. Let the group $G = HK$ be the mutually permutable products of the subgroups H and K . If H and K are Jc -supersoluble and the derived subgroup G' of G is Jca -supersoluble, then G is Jc -supersoluble.

If J doesn't contain abelian groups we get the next result.

Theorem 0.8. Let the group $G = HK$ be the mutually permutable product of Jc -supersoluble subgroups H and K . If J doesn't contain abelian groups then G is a Jc -supersoluble group.

Corollary 0.9 [18]. Assume that G is the mutually permutable product of the subgroups A and B . If A and B are SNAC-groups then G is an SNAC-group.

In [10] it was shown that the formation of all c -supersoluble groups is closed under taking mutually permutable products in which the intersection of the factors does not contain non-trivial normal subgroups. The following theorem generalizes this result.

Theorem 0.10. Let the group $G = AB$ be the mutually permutable products of the Jc -supersoluble subgroups A and B of G . If $(A \cap B)_G = 1$, then G is a Jc -supersoluble group.

Corollary 0.11 [10]. Let the group $G = AB$ be the product of the mutually permutable subgroups A and B . If A and B are c -supersoluble groups and $(A \cap B)_G = 1$, then G is a c -supersoluble group.

1 Preliminaries

Standard notations, notions and results are used in the paper (see [19], [20]). Recall important notions and notations for this paper.

\mathfrak{J} is the class of all simple groups; \mathfrak{N}_p is the class of all p -groups for some prime p ; \mathfrak{A} is the class of all abelian groups; $\mathfrak{A}(p-1)$ is the class of all abelian groups of exponent dividing $p-1$; $\mathfrak{A}^{\mathbb{P}}$ is the class of all A -groups, i. e. groups with abelian Sylow subgroups.

A formation is the class of group closed under taking of homomorphic images and subdirect products. A formation \mathfrak{F} is said to be normally hereditary, if \mathfrak{F} contains all normal subgroups of every group in \mathfrak{F} ; soluble saturated if from $G/\Phi(N) \in \mathfrak{F}$

for any soluble normal subgroup N of group G should always be that $G \in \mathfrak{F}$.

Let \mathfrak{F} be a nonempty formation. $G^{\mathfrak{F}}$ denotes \mathfrak{F} -residual of group G , i. e., the smallest normal \mathfrak{F} -subgroup of G for which $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

For every function f of the form $f: \mathfrak{F} \rightarrow \{\text{formations}\}$ we put, $CLF(f) = \{G \text{ is a finite group } | G/C_G(H/K) \in f(A) \text{ for every chief factor } H/K \text{ of } G \text{ and every composition factor } A \text{ of } H/K\}$. It is well known that a composition formation (or a Baer-local formation if we use the terminology in [20]) \mathfrak{F} is exactly a class $\mathfrak{F} = CLF(f)$ for some function f of above-mention form. In this case, the function f is said to be a composition satellite [21] of the formation \mathfrak{F} .

A composition satellite f is called an inner composition satellite if $f(N) \subseteq \mathfrak{F}$ for every composition factor N of G . Satellite f is called a maximal inner composition satellite of formation \mathfrak{F} if f is a maximal element of set of all inner composition satellites of formation \mathfrak{F} .

Lemma 1.1 [20]. (a) A characteristic-simple finite group is a direct product of subgroups, each isomorphic with a fixed simple group.

(b) Let $G = G_1 \times \dots \times G_r$ with each G_i a non-abelian simple group. Then a subgroup S is subnormal in G if and only if it is a (direct) product of subset of the factors G_i .

(c) Let N be a minimal normal subgroup of a finite group G , and let $N \leq M \trianglelefteq G$. Then N is a direct product of minimal normal subgroups of M .

Lemma 1.2 [6]. Let \mathfrak{F} be a formation and let N be a minimal normal subgroup of the group G such that $|N| = p^\alpha$ for some prime p . If N is contained in a subgroup H of G and $H/C_H(U/V) \in \mathfrak{F}$ for any H -chief factor U/V of N , then $H/C_H(N) \in \mathfrak{F}_p$.

Lemma 1.3 [19]. If H/K is a chief factor of the group G and $p \in \pi(H/K)$, then $G/C_G(H/K)$ doesn't contain non-trivial normal p -subgroups, is also $F_p(G) \subseteq C_G(H/K)$.

Lemma 1.4 [15]. Let the group $G = AB$ be the mutually permutable product of the subgroups A and B . Then:

1. If N is a maximal normal subgroup of G , then $\{AN, BN, (A \cap B)N\} \subseteq \{N, G\}$.

2. If N is a non-abelian minimal normal subgroup of G , then $\{A \cap N, B \cap N\} \subseteq \{N, 1\}$ and $N = (N \cap A)(N \cap B)$ (that is, N is prefactorised with respect to $G = AB$).

3. If N is a minimal normal subgroup of G , then $N \leq A \cap B$ or $[N, A \cap B] = 1$.

4. If N is a minimal normal subgroup of G , then $\{A \cap N, B \cap N\} \subseteq \{N, 1\}$.

5. If N is a minimal normal subgroup of G contained in A and $B \cap N = 1$, then $N \leq C_G(A)$ or $N \leq C_G(B)$. If furthermore N is not cyclic, then $N \leq C_G(B)$.

Lemma 1.5 [15]. If the group $G = AB$ is the mutually permutable product of the subgroups A and B and $N \trianglelefteq G$, then $G/N = AN/N \cdot BN/N$ is the mutually permutable product of the subgroups AN/N and BN/N .

Lemma 1.6 [15]. Let the nontrivial group $G = AB$ is the mutually permutable product of the subgroups A and B . Then $A_G B_G$ is nontrivial.

Lemma 1.7 [15]. Let the group $G = AB$ be the product of the mutually permutable subgroups A and B . Then $(A \cap B)^G / (A \cap B)_G$ is nilpotent.

Lemma 1.8 [15]. Let the group $G = AB$ be the product of the mutually permutable subgroups A and B . Let N be a minimal normal subgroup of G . Assume that $N \cap A = N \cap B = 1$. Then $|N| = p$, where p is a prime, and $N \leq C_G(A)$ or $N \leq C_G(B)$.

Lemma 1.9 [15]. Let the group $G = AB$ be the product of the totally permutable subgroups A and B . Let \mathfrak{F} be formation containing the class \mathfrak{A} of all supersoluble groups. If $A, B \in \mathfrak{F}$, then G belongs to \mathfrak{F} .

Lemma 1.10 [16]. Let the group G has the unique minimal normal subgroup $N = N_1 \times \dots \times N_t$, and N_i are isomorphic simple non-abelian groups for all $i = 1, \dots, t$. If $N \subseteq H$, where H is Jc -supersoluble subgroup of G , then $N_i \triangleleft H$ for all $i = 1, \dots, t$.

2 Proofs of the main results

In this section we provide proofs of above-mentioned theorems for products of normal and mutually permutable subgroups of finite groups.

Proof of theorem 0.3. 1) Lets show that $H^{\mathfrak{M}_{Jc}} K^{\mathfrak{M}_{Jc}} \subseteq G^{\mathfrak{M}_{Jc}}$. Since $G/G^{\mathfrak{M}_{Jc}} \in \mathfrak{M}_{Jc}$ and \mathfrak{M}_{Jc} is normally hereditary by Theorem 0.2, we have that

$$H/(H \cap G^{\mathfrak{M}_{Jc}}) \cong HG^{\mathfrak{M}_{Jc}}/G^{\mathfrak{M}_{Jc}} \triangleleft G/G^{\mathfrak{M}_{Jc}} \in \mathfrak{M}_{Jc}.$$

Hence $H \cap G^{\mathfrak{M}_{Jc}} \supseteq H^{\mathfrak{M}_{Jc}}$ and $H^{\mathfrak{M}_{Jc}} \subseteq G^{\mathfrak{M}_{Jc}}$. Similarly $K^{\mathfrak{M}_{Jc}} \subseteq G^{\mathfrak{M}_{Jc}}$. Therefore $H^{\mathfrak{M}_{Jc}} K^{\mathfrak{M}_{Jc}} \subseteq G^{\mathfrak{M}_{Jc}}$.

Lets prove that $G^{\mathfrak{M}_{Jc}} \subseteq H^{\mathfrak{M}_{Jc}} K^{\mathfrak{M}_{Jc}}$. Let G be a counterexample of the least order. Consider $H^{\mathfrak{M}_{Jc}} K^{\mathfrak{M}_{Jc}} \neq 1$. Then there is a minimal normal subgroup R contained in $H^{\mathfrak{M}_{Jc}}$ or in $K^{\mathfrak{M}_{Jc}}$. We can assume without loss of generality that $R \subseteq H^{\mathfrak{M}_{Jc}}$. Then $(G/R)^{\mathfrak{M}_{Jc}} = G^{\mathfrak{M}_{Jc}}/R$. On other hand by the choice of group G we have that

$$\begin{aligned} (G/R)^{\mathfrak{M}_{Jc}} &= (HR/R \cdot KR/R)^{\mathfrak{M}_{Jc}} = \\ &= H^{\mathfrak{M}_{Jc}}R/R \cdot K^{\mathfrak{M}_{Jc}}R/R = H^{\mathfrak{M}_{Jc}}K^{\mathfrak{M}_{Jc}}/R. \end{aligned}$$

Hence $G^{\mathfrak{M}_{Jc}} \subseteq H^{\mathfrak{M}_{Jc}} K^{\mathfrak{M}_{Jc}}$.

Let $H^{\mathfrak{M}_{Jc}} K^{\mathfrak{M}_{Jc}} = 1$. For any minimal normal subgroup N of G all conditions of statement 1) are

hold. Therefore $G/N \in \mathfrak{U}_{Jc}$. By Theorem 0.2, \mathfrak{U}_{Jc} is a formation. Hence N is the unique minimal normal subgroup of G and $N \leq H \cap K$. From the choice of G , it follows that N is a chief J -factor of the group G . By 3) of Lemma 1.1, subgroup $N = T_1 \times \dots \times T_s = U_1 \times \dots \times U_k$, where T_i and U_j are minimal normal subgroup of H and K respectively, $i = 1, \dots, s, j = 1, \dots, k$.

Let N be an abelian p -group for some prime p . From $H \in \mathfrak{U}_{Jc}$ and $K \in \mathfrak{U}_{Jc}$, it follows that $|T_i| = p$ and $|U_j| = p$ for any $i = 1, \dots, s, j = 1, \dots, k$ and $s = k$. Let U/V be any H -chief factor of N . Since $H \in \mathfrak{U}_{Jc}$, then $H/C_H(U/V) \in h(p)$, where h is a maximal inner composition satellite of the formation \mathfrak{U}_{Jc} . Then $h(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}(p-1)$ and by Lemma 1.2 $H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}(p-1)$. Due to conditions symmetry on H and K , we have that $K/C_K(N) \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}(p-1)$. The group $G/C_G(N) = HC_G(N)/C_G(N) \cdot KC_G(N)/C_G(N)$ and

$$HC_G(N)/C_G(N) \simeq H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}(p-1),$$

$$KC_G(N)/C_G(N) \simeq K/C_K(N) \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}(p-1).$$

Denote $G/C_G(N) = \bar{G}$, $HC_G(N)/C_G(N) = \bar{H}$ and $KC_G(N)/C_G(N) = \bar{K}$. Since \bar{G} is soluble and G/H and G/K don't have common (up to isomorphism) abelian composition factors, we conclude that $(|\bar{G} : \bar{H}|, |\bar{G} : \bar{K}|) = 1$. From $\bar{H}/O_p(\bar{H}) \in \mathfrak{A}(p-1)$, $\bar{K}/O_p(\bar{K}) \in \mathfrak{A}(p-1)$ and $O_p(\bar{H})O_p(\bar{K}) \trianglelefteq \bar{G}$, we have that $\bar{G}/O_p(\bar{H})O_p(\bar{K}) \in \mathfrak{A}(p-1)$. Hence $G/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}(p-1) = h(N)$. Therefore factor N is h -central in G . From this and from $G/N \in \mathfrak{U}_{Jc}$, it follows that $G \in \mathfrak{U}_{Jc}$. It contradicts with the choice of the group G .

If N is non-abelian group, then by Lemma 1.1 $T_1 = U_j$ for some $j \in \{1, \dots, k\}$. Then $T_1 \trianglelefteq G$. Hence $T_1 = N$ and $G \in \mathfrak{U}_{Jc}$ and $G^{\mathfrak{U}_{Jc}} = 1$. This contradiction finishes the proof of the statement 1).

2) Let G be a counterexample of the least order for the statement 2) of the theorem. Then G has the unique minimal normal subgroup N , and more $G/N \in \mathfrak{U}_{Jc}$, $N \leq H \cap K$ and N is a chief J -factor of G . Arguing as above we need to consider the case when $H^{\mathfrak{U}_{Jc}} K^{\mathfrak{U}_{Jc}} = 1$.

Let N be an abelian p -group for some prime p . Show that $G/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}^p$. By condition G is an extension of Jca -soluble group using A -group. Therefore $G^{\mathfrak{A}^p} \in S_{Jca}$. Denote $L = G^{\mathfrak{A}^p}$. Then $L/C_L(U/V) = 1$ for any L -chief factor U/V of N . From Lemma 1.2, we conclude that $L/C_L(N) \in \mathfrak{N}_p$. Then group $G/C_G(N)$ is an extension of p -group

$L/C_L(N)$ using A -group G/L . Therefore $G/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}^p$. Since $C_L(N) \leq C_G(N)$, we have that $G/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}^p$.

By Lemma 1.3 $O_p(G/C_G(N)) = 1$. Hence $G/C_G(N) \in \mathfrak{A}^p$.

Let h be a maximal inner composition satellite of the formation \mathfrak{U}_{Jc} . By condition, $H \in \mathfrak{U}_{Jc}$. Therefore $H/C_H(U/V) \in h(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}(p-1)$ for any H -chief factor U/V of the group N . By Lemma 1.2, $H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p (\mathfrak{N}_p \mathfrak{A}(p-1)) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}(p-1)$. Since H and K have symmetric conditions, we have that $K/C_K(N) \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}(p-1)$. Demote $\bar{G} = G/C_G(N)$, $\bar{H} = HC_G(N)/C_G(N)$ and $\bar{K} = KC_G(N)/C_G(N)$. Then $\bar{G} = \bar{H}\bar{K}$, where $\bar{H} \simeq H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}(p-1)$ and $\bar{K} \simeq K/C_K(N) \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}(p-1)$. Since $O_p(\bar{H})$ and $O_p(\bar{K})$ are normal subgroups of \bar{G} , we have that $O_p(\bar{H}) = 1$ and $O_p(\bar{K}) = 1$. Then $\bar{H} \in \mathfrak{A}(p-1)$ and $\bar{K} \in \mathfrak{A}(p-1)$. Any Sylow q -subgroup Q of the group \bar{G} has the form $Q = Q_1 Q_2$, where Q_1 and Q_2 are some Sylow q -subgroups of \bar{H} and \bar{K} respectively. From $\bar{G} \in \mathfrak{A}^p$, it follows that $\bar{G} \in \mathfrak{A}(p-1)$. It means that $G/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}(p-1) = h(p)$, i. e. chief factor N is h -central in G . From $G/N \in \mathfrak{U}_{Jc}$, it follows that $G \in \mathfrak{U}_{Jc}$. It contradicts with the choice of G .

Let N be a non-abelian group. Then N is a direct product of minimal normal subgroups of H and a direct product of minimal normal subgroups of K . From $H \in \mathfrak{U}_{Jc}$, $K \in \mathfrak{U}_{Jc}$ and Lemma 1.1, it follows that N is a simple group. Due to $G/N \in \mathfrak{U}_{Jc}$, we have that $G \in \mathfrak{U}_{Jc}$ and $G^{\mathfrak{U}_{Jc}} = 1$. It contradicts with the choice of G . The statement 2) is proved.

3) Let G be a counterexample of the least order for the statement 3) of the theorem. Let N be a minimal normal subgroup of the group G . For G/N conditions of the statement 3) of the theorem are hold. Therefore G/N is Jc -supersoluble. Since \mathfrak{U}_{Jc} is a formation, N is the unique minimal normal subgroup of G and $N = G^{\mathfrak{U}_{Jc}}$. Hence $N \leq H \cap K$ and N is a chief J -factor of G . By Theorem 0.2, $\mathfrak{U}_{Jca} \subseteq \mathfrak{U}_{Jc}$. Hence $H^{\mathfrak{U}_{Jc}} \subseteq H^{\mathfrak{U}_{Jca}}$. Arguing as above we need to consider the case when $H^{\mathfrak{U}_{Jca}} K^{\mathfrak{U}_{Jca}} = 1$.

Let N be a p -group for some prime p . Since $H \in \mathfrak{U}_{Jc}$, for any H -chief factor R/L of the group N we have that $H/C_H(R/L) \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}(p-1)$. By lemma 1.2, it follows that

$$H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p (\mathfrak{N}_p \mathfrak{A}(p-1)) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}(p-1).$$

Any K -chief factor U/V of the group N is an abelian J -factor. From $K \in \mathfrak{U}_{Jca}$, we have that

$K/C_K(U/V)=1$. By Lemma 1.2, $K/C_K(N)$ is a p -group. Thus the group $G/C_G(N)$ is the product of $\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$ -group $HC_G(N)/C_G(N)$ and p -group $KC_G(N)/C_G(N)$. From this it follows that $G/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$. It means that factor $N = G^{\mathfrak{U}_c}$ is an h -central in G . Have a contradiction with the choice of the group G .

If N is a non-abelian group, then from $N \leq H \in \mathfrak{U}_{Jca}$, $N \leq K \in \mathfrak{U}_{Jc}$ and Lemma 1.1, it follows that N is a simple group. Due to $G/N \in \mathfrak{U}_{Jc}$, we have that G is a Jc -supersoluble and $G^{\mathfrak{U}_c} = 1$. It contradicts with the choice of the group G . The statement 3) is proved.

4) Let G be a counterexample of the least order for the statement 4) of the theorem. Let N be a minimal normal subgroup of the group G . For G/N conditions of the statement 4) of the theorem are hold. Therefore G/N is Jc -supersoluble. Since \mathfrak{U}_{Jca} is a formation, N is the unique minimal normal subgroup of G and $N = G^{\mathfrak{U}_{Jca}}$. Hence $N \leq H \cap K$ and N is a chief J -factor of G . Arguing as above we need to consider the case when $H^{\mathfrak{U}_{Jca}}K^{\mathfrak{U}_{Jc}} = 1$.

Let N be a p -group for some prime p . Then any H -chief factor U/V of the group N is an abelian J -factor. From $H \in \mathfrak{U}_{Jca}$, we have that $H/C_H(U/V)=1$. By Lemma 1.2, $H/C_H(N)$ is a p -group. Similarly, $K/C_K(N)$ is a p -group. Since $HC_G(N)/C_G(N) \cong H/H \cap C_G(N) = H/C_H(N)$, we have that $HC_G(N)/C_G(N)$ is a normal p -group of $G/C_G(K)$. By Lemma 1.3, it follows that $H \subseteq C_G(N)$. Similarly, $K \subseteq C_G(N)$. From $G = MN$ it follows that $G = C_G(N)$. Hence N is a central chief J -factor of G and group G is Jca -supersoluble.

If N is a non-abelian group, then from $N \leq H \in \mathfrak{U}_{Jca}$, $N \leq K \in \mathfrak{U}_{Jca}$ and Lemma 1.1, we have that N is a simple group. Since $G/N \in \mathfrak{U}_{Jca}$, it follows that G is a Jca -supersoluble and $G^{\mathfrak{U}_{Jca}} = 1$. It contradicts the choice of the group G . The statement 3) and theorem are proved.

Proof of theorem 0.8. Assume the result is false and let G be a counterexample of minimal order. Let N be a minimal normal subgroup of G . Let $G = N$. Then G is a simple group and therefore $G \in \mathfrak{U}_{Jc}$, a contradiction. Let $G \neq N$. Then $G/N = HN/N \cdot KN/N$ is a mutually permutable product of subgroups HN/N and KN/N by Lemma 1.5. Note that $HN/N \cong H/H \cap N \in \mathfrak{U}_{Jc}$ and $KN/N \cong K/K \cap N \in \mathfrak{U}_{Jc}$. Then all conditions of the theorem hold for G/N . By choice of G we have that G/N is a Jc -supersoluble. If R is a minimal normal subgroup of G such that $N \neq R$, then G/R is Jc -supersoluble. This implies that G is Jc -supersoluble, a

contradiction. Thus N is the unique minimal subgroup of G .

Assume N isn't a J -group. Since $G/N \in \mathfrak{U}_{Jc}$, it follows that $G \in \mathfrak{U}$. A contradiction.

Let N be a J -group. Hence, N is a non-abelian group.

According to Lemma 1.4 we should consider the following cases.

1. Let $H \cap N = K \cap N = N$. Then $N \subseteq H \cap K$. We have that $N = N_1 \times \dots \times N_t$ is the product of isomorphic simple non-abelian groups N_i . Since H and K are Jc -supersoluble, $N_i \triangleleft H$ and $N_i \triangleleft K$ by Lemma 1.10. Since $G = HK$, we have that $N_i \triangleleft G$ for all $i = 1, \dots, t$. Since N is the unique minimal normal subgroup of G , it follows that $t = 1$ and N is a simple group. Since $G/N \in \mathfrak{U}_{Jc}$, it follows $G \in \mathfrak{U}_{Jc}$. We have a contradiction.

2. Let $H \cap N = K \cap N = 1$. By Lemma 1.6 $H_G K_G \neq 1$. Then $N \subseteq H_G \subseteq H$ or $N \subseteq K_G \subseteq K$, a contradiction.

3. Let $H \cap N = N$ and $K \cap N = 1$. Then $N \subseteq H$. By Lemma 1.4 (5) it follows that $N \leq C_G(H)$ or $N \leq C_G(K)$. If $N \leq C_G(H)$, then N is abelian. This contradicts the choice of N . Let $N \leq C_G(K)$. Since $N = N_1 \times \dots \times N_t$, where N_1, \dots, N_t are isomorphic simple non-abelian groups, we have that $N_i \leq C_G(K)$ for all $i = 1, \dots, t$. By Lemma 1.10 we have that $N_i \triangleleft H$. Since $G = HK$, it follows that $N_i \triangleleft G$ for all $i = 1, \dots, t$. But N is the unique minimal normal subgroup of G . Thus $N = N_1$ and N is a simple group. Since $G/N \in \mathfrak{U}_{Jc}$, we have that $G \in \mathfrak{U}_{Jc}$. This contradicts the choice of G .

4. Let $H \cap N = 1$ and $K \cap N = N$. This case is considered similarly to the case 3. Theorem is proved.

Proof of the theorem 0.10. Assume the result is false and let G be a counterexample of minimal order.

By Theorem 0.8 non-abelian J -factors of group G are simple. Let $D = A \cap B$. By Lemma 1.7 D^G is nilpotent group. Note that G/D^G is a totally permutable product of Jc -supersoluble subgroups AD^G/D^G and BD^G/D^G . Hence, by Lemma 1.9 G/D^G is a Jc -supersoluble group. It remains to show that every G -chief J -factor H/K with $1 \subseteq K \subset H \subseteq D^G$ is cyclic. Since D^G is nilpotent, it follows that H/K is p -group.

Consider the group $G/K = AK/K \cdot BK/K$. The subgroup H/K is a minimal normal subgroup in G/K . According to Lemma 1.4 we should consider the following cases.

1. Let $AK/K \cap H/K = BK/K \cap H/K = H/K$. Then $H/K \subseteq AK/K \cap BK/K$. Let U/V is any AK/K -chief factor of H/K . Since $AK/K \in \mathfrak{U}_{Jc}$, it follows that $AK/K/C_{AK/K}(U/V) \in h(p)$, where

h is a maximal inner composition satellite of the formation $\mathfrak{U}_{\mathcal{J}_c}$. Then $h(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}(p-1)$ and by Lemma 1.2, we have that $AK/K / C_{AK/K}(H/K) \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}(p-1)$. Similarly $BK/K / C_{BK/K}(H/K) \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}(p-1)$. Denote $C/K = C_{G/K}(H/K)$. Consider the group $G/C = AC/C \cdot BC/C$. By Lemma 1.5, G/C is the mutually permutable product of subgroups AC/C and BC/C . Since D^G is nilpotent, it follows that $D^G \subseteq F(G) \subseteq C$. By Lemma 1.3, it follows that $O_p(G/C) = 1$. Since $O_p(AC/C)$ and $O_p(BC/C)$ are normal subgroups of G/C , we have that $O_p(AC/C) = 1$ and $O_p(BC/C) = 1$. Therefore G/C is the totally permutable product of two abelian groups of exponent $p-1$ and hence supersoluble. By Lemma 4 of [17] we have that $[A, B] \subseteq C$ so that G/C is abelian of exponent $p-1$. Since H/K is the minimal normal subgroup of G/K , it follows that H/K is cyclic and G is \mathcal{J}_c -supersoluble group.

2. Let $AK/K \cap H/K = BK/K \cap H/K = 1$. By Lemma 1.8, $|H/K| = p$ and the chief factor H/K is a cyclic group.

3. Let $AK/K \cap H/K = H/K$ and $BK/K \cap H/K = 1$. By Lemma 1.4 (5), if H/K is non-cyclic, it follows that $H/K \leq C_{G/K}(BK/K)$. Let $C/K = C_{G/K}(H/K)$. Note that $BK/K \subseteq C/K$. Therefore $G/C = AC/C \cdot BC/C = AC/C \simeq A/(A \cap C) \simeq AK/K / C_{AK/K}(H/K)$. Since $H/K \subseteq AK/K$ and $AK/K \in \mathfrak{U}_{\mathcal{J}_c}$, we have that $AK/K / C_{AK/K}(H/K) \in \mathfrak{h}(p)$ by Lemma 1.2. Hence $G/C \in \mathfrak{U}_{\mathcal{J}_c}$ and $G \in \mathfrak{U}_{\mathcal{J}_c}$, a contradiction. It follows that H/K is a cyclic subgroup.

4. Let $AK/K \cap H/K = 1$ and $BK/K \cap H/K = H/K$. This case is considered similarly to the case 3. Theorem is proved.

REFERENCES

1. Vasil'ev, A.F. On finite groups with a given normal structure / A.F. Vasil'ev, T.I. Vasil'eva, E.N. Myslovets // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2016. – Vol. 13. – P. 897–910.
2. Vedernikov, V.A. On some classes of finite groups / V.A. Vedernikov // Dokl. Akad. Nauk BSSR. – 1988. – Vol. 32, № 10. – P. 872–875.
3. Guo, W. On finite quazi- \mathfrak{F} -groups / W. Guo, A.N. Skiba // Communication in Algebra. – 2009. – Vol. 37. – P. 470–481.
4. Guo, W. On some classes of finite quazi- \mathfrak{F} -groups / W. Guo, A.N. Skiba // Journal of Group Theory. – 2009. – Vol. 12. – P. 407–417.
5. Vdovin, E.P. Formations of finite C_π -groups / E.P. Vdovin, D.O. Revin, L.A. Shemetkov // St. Petersburg Math. J. – 2013. – Vol. 24. – P. 29–37.

6. Vasil'ev, A.F. On finite groups whose principal factors are simple groups / A.F. Vasil'ev, T.I. Vasil'eva // Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika). – 1997. – Vol. 41, № 11. – P. 8–12.

7. Robinson, D.J.S. The structure of finite groups in which permutability is a transitive relation / D.J.S. Robinson // J. Austral. Math. Soc. – 2001. – Vol. 70. – P. 143–149.

8. Ballester-Bolinches, A. Totally permutable products of finite groups satisfying SC and PST / A. Ballester-Bolinches, J. Cossey // Monatsh. Math. – 2005. – Vol. 145. – P. 89–94.

9. Beidleman, J.C. Totally permutable products of certain classes of finite groups / J.C. Beidleman, P. Hauck, H. Heineken // J. Algebra. – 2004. – Vol. 276. – P. 826–835.

10. Ballester-Bolinches, A. On mutually permutable products of finite groups / A. Ballester-Bolinches, J. Cossey, M. C. Pedraza-Aguilera // J. Algebra. – 2005. – Vol. 294. – P. 127–135.

11. Baer, R. Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1, № 2. – P. 115–187.

12. *Between Nilpotent and Solvable* / H.G. Bray [et al.]; edited by M. Weinstein. – Passaic: Polugonal Publishing House, 1982. – 240 p.

13. Monakhov, V.S. On the p -supersolvability of a finite factorizable group with normal factors / V.S. Monakhov, I.K. Chirik // Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. – 2015. – Vol. 21, № 3. – P. 256–267.

14. Myslovets, E.N. On products of normal generalized supersoluble subgroups of finite groups / E.N. Myslovets // Izv. of F. Scorina Gomel State University. – 2012. – Vol. 6, № 75. – P. 163–167.

15. Ballester-Bolinches, A. Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Berlin: Walter de Gruyter, 2010. – 334 p.

16. Myslovets, E.N. On mutually permutable products of generalized supersoluble subgroups of finite groups / E.N. Myslovets // Asian-European Journal of Mathematics. – 2016. – Vol. 9, № 2. – P. 1650054-1–1650054-10.

17. Beidleman, J.C. Mutually permutable subgroups and group classes / J.C. Beidleman, H. Heineken // Arch. Math. – 2005. – Vol. 85. – P. 12–30.

18. Beidleman, J.C. Group classes and mutually permutable products / J.C. Beidleman, H. Heineken // Journal of Algebra. – 2006. – Vol. 297. – P. 409–416.

19. Shemetkov, L.A. Formations of finite groups / L.A. Shemetkov. – M.: Nauka, 1978. – 272 p.

20. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

21. Skiba, A.N. Multiply \mathcal{L} -composition formations of finite groups / A.N. Skiba, L.A. Shemetkov // Ukrainsk. Math. Zh. – 2000. – Vol. 52, № 6. – P. 783–797 (In Russian).

Поступила в редакцию 23.09.16.

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ КОНТАКТА ИНДЕНТОРА С ОРТОТРОПНЫМ ПОКРЫТИЕМ НА УПРУГОМ ИЗОТРОПНОМ ОСНОВАНИИ

В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

THE TECHNIQUE FOR DETERMINING THE PARAMETERS OF A CONTACT FOR INDENTER WITH THE ORTHOTROPIC COATING ON THE ELASTIC ISOTROPIC SUBSTRATE

V.V. Mozharovsky, D.S. Kuzmenkov

F. Scorina Gomel State University

Показана реализация статического контакта цилиндрического индентора с ортотропным покрытием на упругом изотропном основании. На основании разработанной теории расчета покрытий из композитов построена методика определения параметров контакта. Для исследования влияния свойств материала и толщины покрытия на параметры контакта была написана программа, по которой производился расчет для разных толщин покрытий. Построены диаграммы для определения параметров контакта (зоны контакта, давления, величины вдавливания) в зависимости от соотношений модулей упругости покрытия и основания. Исследовалась сходимость численных решений в зависимости от толщины покрытий и отношений свойств материала.

Ключевые слова: *параметры контакта, индентор, ортотропное покрытие, композит.*

The implementation of contact for indenter with the orthotropic coating on the elastic isotropic substrate is shown. Methods of determining the exposure parameters are built on the basis of the theory developed for calculating composite coatings. To investigate the influence of material properties and thickness of the coating on the contact parameters the program, on which the calculation was performed for different coating thickness, was written. Depending on the ratio of module of elasticity of the coating and base diagrams are constructed to determine the parameters of contact (contact area, pressure and values of the indentation). The convergence of numerical solutions depending on the thickness of the coatings and the relationship of material properties is studied.

Keywords: *contact parameters, indenter, orthotropic coating, composite.*

Введение

Перспективы прогресса в машиностроении и строительстве в основном связываются с разработкой и широким применением композиционных материалов (композитов).

Применение в мировой практике высокоскоростного и надежного промышленного транспорта с массивными шинами (автомобильные, электропогрузчики, подвесные канатные дороги, эскалаторы метро и др.), а также новых способов передачи движений требует создания новых армирующих материалов и инженерных методик расчета. Следует отметить, что кроме резин с армирующими элементами корда шин, широко применяются и другие материалы, например, полиуретаны для массивных шин, армированные композиты. Они выдерживают вдвое больше нагрузки по сравнению с резиновыми шинами, имеют более высокую износостойкость, малое сопротивление качению и т. д. Недостаточно изучено влияние конструктивной анизотропии на напряженно-деформированное состояние дорожного покрытия при силовом статическом и квазистатическом воздействии, что не позволяет обосновать практику их проектирования; не

существует сравнимых по эффективности методов расчета поведения конструкций из композитов при ударе по ним внешними объектами. При определении реакции на удар желательнее иметь критерий, позволяющий выяснить, как различные свойства мишени и параметры удара влияют на повреждение мишени. В связи с этим есть необходимость в разработке математической модели и компьютерных программ расчета напряжений при статическом (квазистатическом) взаимодействии индентора с упругим телом (или покрытием) из композита при различных физических параметрах ударного взаимодействия. Описанный в статье подход и направлен на решение этой проблемы.

В данном случае особенно важно исследовать механические свойства армированных материалов, работающих в процессе:

– контактного взаимодействия цилиндрического тела (моделирующие шину) и слоистого основания;

– зависимость напряженного состояния упругих тел из композитов (при квазистатическом контакте) от типа ориентации волокон материала, например, армированного кордом;

– широкий диапазон нагрузок и условий трения при эксплуатации.

Анализ применения анизотропных композиционных материалов нельзя производить без учета их взаимодействия с другими телами соприкосновения, а также материала матрицы и армирующих элементов, геометрии компонентов и структуры, и расположения компонентов. Важно учитывать и метод изготовления материала, что является весьма сложной и многопараметрической задачей.

Существует большое число различных способов моделирования расчета анизотропных волокнистых материалов при силовом квазистатическом воздействии [1]–[19]. Но, в основном, выделяются два наиболее значимых подхода, используемых при моделировании – это, например, аналитический подход [11], [12] и численный [1], [20]–[25]. В связи с этим возникает цель исследований – создание математических моделей и алгоритмов расчета напряженно-деформированного состояния слоистых систем при силовом статическом воздействии.

1 Методика определения параметров контакта

Рассмотрим случай контакта цилиндрического индентора с ортотропным покрытием на упругом изотропном основании. На основании разработанной теории расчета покрытий из композитов [7], [13]–[15], [16], [18] построена методика определения параметров контакта индентора с ортотропным покрытием на упругом изотропном основании. Для исследования влияния свойств материала и толщины покрытия на параметры контакта была составлена программа на ЭВМ, по которой производился расчет для разных толщин. Следует отметить, что впервые исследования о влиянии изотропного основания на изотропное покрытие было представлено в работе [9], а влияния изотропного основания для ортотропных покрытий представлено в работе [16] и ортотропного основания на изотропное покрытие – в работе [10]. Совсем недавно была защищена докторская диссертация [6], в которой более детально представлены результаты о влиянии различных параметров контактного взаимодействия индентора с покрытием (ортотропным, изотропным) на изотропном основании.

Естественно, на параметры контакта ортотропного покрытия влияют как все модули упругости, входящие в физические соотношения между деформациями и напряжениями, так и упругие постоянные основания. В качестве параметра, характеризующего упругие свойства ортотропного покрытия и упругие свойства изотропного основания, вводился параметр E_2/E , где E_2 – модуль упругости в направлении ортогональном к волокнам; E – модуль упругости

изотропного основания. На рисунках 1.1–1.3 приведены зависимости изменения параметров контакта – давления $\tilde{p} = p_m / p_0$ и зоны контакта

$$\tilde{a} = a / a_0 \text{ от } \alpha_{0x} = \frac{a}{h}, \text{ где } a_0 = \sqrt{\frac{2PR}{\pi m}},$$

$$m = \frac{1}{(\beta_1 + \beta_2)S_{22}}, \quad p_0 \text{ (задача типа Герца).}$$

Представленные результаты являются оценочными, они показывают качественное влияние упругих свойств материалов и их соотношений на параметры контакта и могут использоваться в инженерных расчетах (вычисления проводились согласно методики [14] и показывают практически идентичные результаты.)

Входящие в уравнение коэффициенты при плоской деформации равны [18]:

$$S_{11} = \frac{1 - \nu_{31}\nu_{13}}{E_1}; \quad S_{22} = \frac{1 - \nu_{32}\nu_{23}}{E_2};$$

$$S_{12} = \frac{-\nu_{12} - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1}; \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}}.$$

При плоском напряженном состоянии выполняется:

$$\nu_{j3} = \nu_{3j} = 0, \quad j = \overline{1,2};$$

$$E_x = E_1, \quad E_y = E_2, \quad \nu_{xy} = \nu_{12}.$$

Здесь E_j , $j = \overline{1,2}$, G_{12} , ν_{ij} , $i, j = \overline{1,3}$, – технические характеристики (постоянные) материала.

Т. к. в данном случае коэффициенты $\beta_i = 1/\gamma_i$, то из свойства корней характеристического уравнения, получаем

$$\beta_1^2\beta_2^2 = \frac{S_{11}}{S_{22}}, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 = \frac{2S_{12} + S_{66}}{S_{22}},$$

где γ_i , $i = 1, 2$ – действительные корни характеристического уравнения:

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{S_{66} + 2S_{12} \pm \sqrt{(S_{66} + 2S_{12})^2 - 4S_{11}S_{22}}}{2S_{11}}},$$

для изотропного покрытия $\beta_1 = \beta_2 = 1$.

На рисунке 1.1 приведена зависимость относительного давления p_m/p_0 от a/h при вдавливании жесткого цилиндрического штампа в ортотропное покрытие с модулем упругости E_2 для различных отношений упругих постоянных покрытия и основания:

$$0 - \frac{E_2}{E} = 1; \quad 1 - \frac{E_2}{E} = 0.2; \quad 2 - \frac{E_2}{E} = 0.05;$$

$$3 - \frac{E_2}{E} = 2.5; \quad 4 - \frac{E_2}{E} = 8.$$

На рисунке 1.2 приведена зависимость относительной полуширины площадки контакта a/a_0 от a/h . Условия и обозначения те же, что на рисунке 1.1:

$$0 - \frac{E_2}{E} = 1; \quad 1 - \frac{E_2}{E} = 0.2; \quad 2 - \frac{E_2}{E} = 0.05;$$

$$3 - \frac{E_2}{E} = 2.5; \quad 4 - \frac{E_2}{E} = 8; \quad 5 - \frac{E_2}{E} = 12;$$

$$6 - \frac{E_2}{E} = 16; \quad 7 - \frac{E_2}{E} = 24.$$

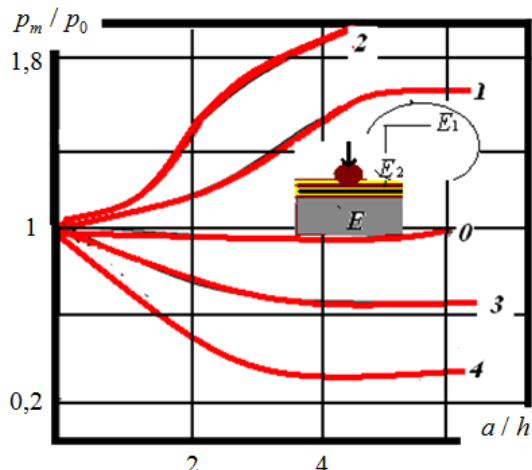


Рисунок 1.1 – Зависимость относительного давления p_m/p_0 от a/h

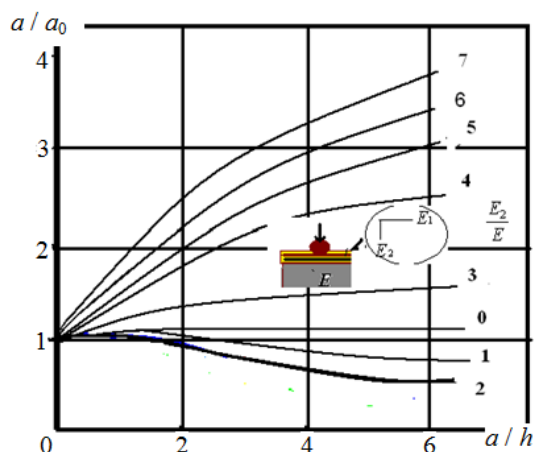


Рисунок 1.2 – Зависимость a/a_0 от a/h

На рисунке 1.3 приведена зависимость относительной величины вдавливания v от a/h .

Также исследовалась сходимость численных решений в зависимости от толщины покрытий и отношений свойств материала. Как видно из рисунков 1.1–1.3, очень сильно влияет на характер изменения давления параметр E_2/E и для некоторых случаев давление существенно отличается от «герцевского» (рисунок 1.4). Так, в результате численных расчетов было отмечено, что для разных отношений a/h , при отсутствии трения в области контакта, достаточно точно можно описать распределение давления зависимостью $p(x) = p_0(a^2 - x^2)^k$. Тогда, используя условие равновесия, имеем уравнение для определения зоны контакта:

$$P = p_{\max} \frac{\Gamma(k+1)\sqrt{\pi}}{\Gamma(k+1/2)(k+1/2)} a^{k+1},$$

(в частности, для $k=1$, $P = p_{\max} 4/3 a^3$; при $k=0.5$, $P = p_{\max} \pi a^2 / 2$), где Γ – гамма функция, k – параметр, определяющийся из таблицы 1.1, $0.5 \leq k \leq 1$.

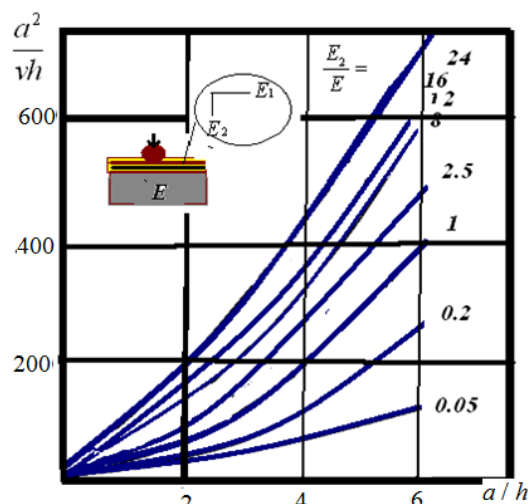


Рисунок 1.3 – Зависимость относительной величины вдавливания v от a/h

На рисунке 1.4 показано распределение давления для ортотропного покрытия на жестком основании. Профиль давления изменяется от эллиптического (при отношениях $a/h < 1$, $k \approx 0.5$) к параболическому (при $a/h > 10$, $k \approx 1$).

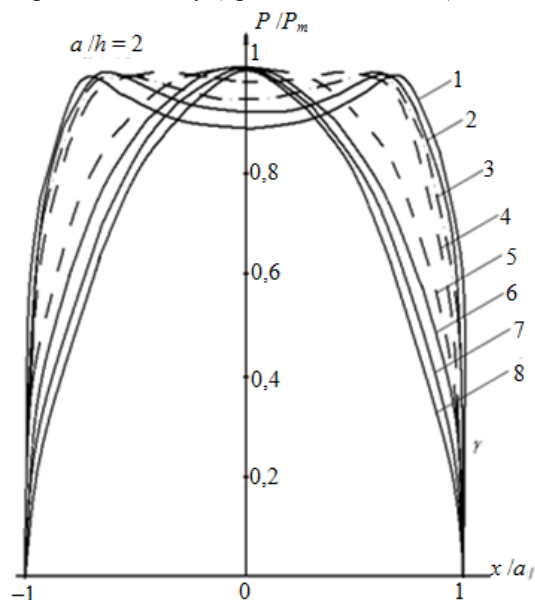


Рисунок 1.4 – Изменение профилей давления при вдавливании цилиндрического штампа в ортотропную полосу на упругом основании в зависимости от E . Кривые 1–8 соответствуют следующим значениям отношения E_2/E : 1 – 24; 2 – 16; 3 – 12; 4 – 8; 5 – 2,4; 6 – 1; 7 – 0,2; 8 – 0,05.

Таблица 1.1 – Значения коэффициентов k для определения закона распределения давления для разных соотношений $\alpha = a/h$

a/h	30	20	15	10	7	6	5	4	3
k	1	1	1	0,95	0,9	0,9	0,9	0,8	0,8
a/h	2	1,5	1	0,8	0,7	0,5	0,3	0,1	
k	0,7	0,65	0,55	0,55	0,55	0,5	0,5	0,5	

Расчеты показали, что упругие постоянные оказывают незначительное влияние на изменение профиля давления. Существенно влияние на изменения профиля давления оказывает соотношение a/h . Приведенные выше графические зависимости могут служить компонентами составляющих методик для выбора оценочных параметров покрытий из композитов при инженерном проектировании элементов деталей машин.

2 Напряженно-деформированное состояние в ортотропном теле

На основании аналитических выкладок, представленных в работе [13], построим программу реализации расчета напряжений в композите, свойства которого моделируем с помощью ортотропной полуплоскости. Напряжение в композите при ударе определяется с помощью вычислительных программ на основе граничных элементов. Считаем, что при квазистатическом ударе цилиндра по ортотропной поверхности давление в зоне контакта распределяется по следующему закону:

$$p(x) = p_0 \sqrt{(a^2 - x^2)},$$

где $p_0 = \frac{2P_{\max}}{\pi a}$, a – полуширина площадки контакта, $P_{\max} = P_1$.

Для определения напряжений в упругом ортотропном теле поверхность контакта разделяется на полосы. Тогда при достаточно большом количестве разбиений можно считать, что в отдельной полосе действует среднее постоянное давление p . Используя зависимости, определяющие напряжения при действии нормальных усилий $p(s)$, напряжения в произвольной точке определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{y}{\pi(\beta_1 - \beta_2)} \times \\ &\times \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{\beta_1^2(x-s)^2 + y^2} - \frac{1}{\beta_2^2(x-s)^2 + y^2} \right) p(s) ds; \\ \sigma_y &= \frac{y}{\pi(\beta_1 - \beta_2)} \times \\ &\times \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{(x-s)^2 + y^2/\beta_1^2} - \frac{1}{(x-s)^2 + y^2/\beta_2^2} \right) p(s) ds; \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{\pi(\beta_1 - \beta_2)} \times \end{aligned}$$

$$\times \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{x-s}{(x-s)^2 + y^2/\beta_1^2} - \frac{x-s}{(x-s)^2 + y^2/\beta_2^2} \right) p(s) ds;$$

где $[x_1, x_2]$ – область изменения давления; $x_1 \leq s \leq x_2$; s – координата вдоль оси x относительно начала координат.

Рассматривается дискретная аппроксимация распределенного давления на границе путем разбиения на n участков (граничные элементы). Нормальные напряжения на каждом граничном элементе принимаются постоянными.

Суммарное напряжение, действующее в теле, будет определяться следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{i=1}^n (\sigma_x)_i; \quad \sigma_y = \sum_{i=1}^n (\sigma_y)_i; \\ \tau_{xy} &= \sum_{i=1}^n (\tau_{xy})_i. \end{aligned}$$

После преобразований и вычислений интегралов напряжения на i -ом участке вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} (\sigma_y)_i &= -\frac{1}{\pi} p(s_i) L_{0i}; \\ (\tau_{xy})_i &= -\frac{1}{\pi} p(s_i) L_{1i}; \\ (\sigma_x)_i &= -\frac{1}{\pi} p(s_i) L_{2i}; \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} L_{0i} &= \frac{1}{2(\beta_1 - \beta_2)} \left(\ln \left(B^2 + \frac{y^2}{\beta_1^2} \right) - \ln \left(A^2 + \frac{y^2}{\beta_1^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \ln \left(B^2 + \frac{y^2}{\beta_2^2} \right) + \ln \left(A^2 + \frac{y^2}{\beta_2^2} \right) \right); \\ L_{2i} &= \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} \left(-\frac{1}{\beta_1} \left(\operatorname{arctg} \frac{\beta_1 B}{y} - \operatorname{arctg} \frac{\beta_1 A}{y} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\beta_2} \left(\operatorname{arctg} \frac{\beta_2 A}{y} - \operatorname{arctg} \frac{\beta_2 B}{y} \right) \right); \end{aligned}$$

$$A = x - s_i + L; \quad B = x - s_i - L; \quad s_{i-1} \leq s_i \leq s_{i+1},$$

где L – полуширина граничного элемента.

3 Программная реализация

Разработана программа для исследования (определения напряжений) соударения цилиндрического индентора с упругим основанием из композиционного материала. Главное окно разработанной программы представлено на рисунке 3.1.

Например, рассчитаем касательное напряжение в композите при ударе цилиндрического индентора. Упругие постоянные волокна: $E_f = 380$ ГПа, $G_f = 13.7$ ГПа, $\nu_f = 0.2$, матрицы: $E_m = 70$ ГПа, $G_m = 26$ ГПа, $\nu_m = 0.34$, объемное содержание волокна в матрице $V_f = 0.8$, глубина $y = 0.5a$.

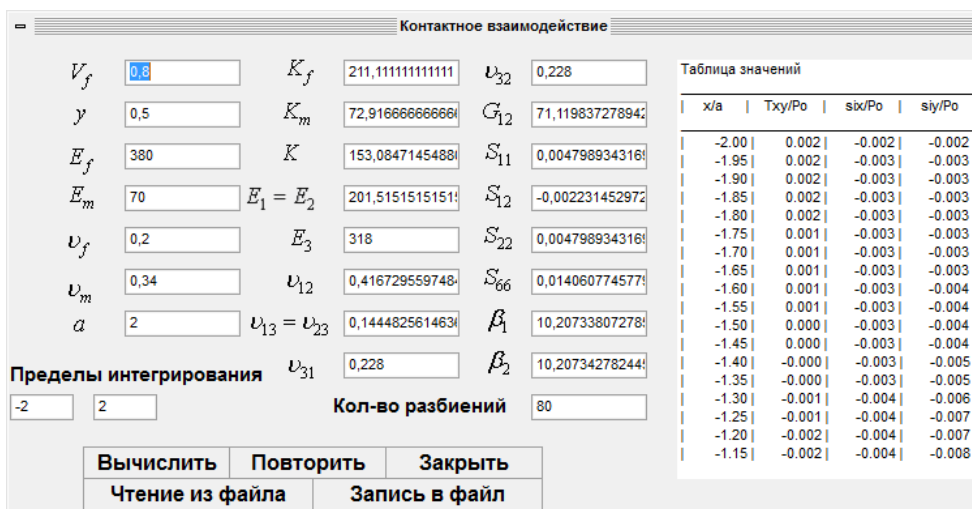


Рисунок 3.2 – Результаты расчетов в виде таблицы

По нажатию на клавишу «Вычислить» программа определяет напряжения и выводит результаты в виде таблицы (рисунок 3.2) и в графическом виде: будут построены графики зависимости σ_x / p_0 , σ_y / p_0 , τ_{xy} / p_0 от x/a (рисунки 3.3 и 3.4).

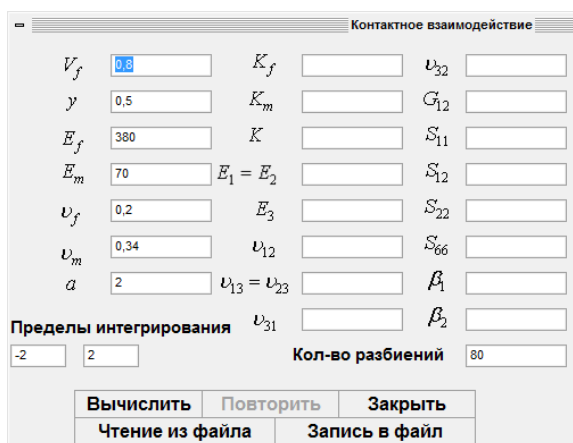


Рисунок 3.1 – Главное окно программы

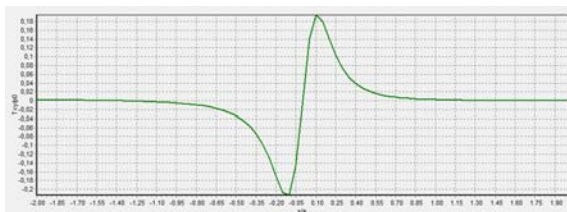


Рисунок 3.3 – График зависимости τ_{xy} / p_0 от x/a

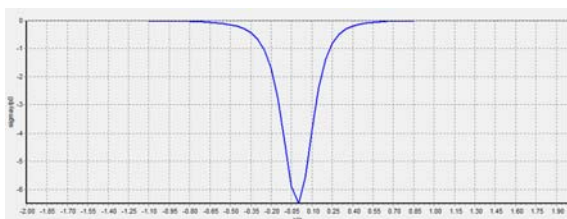


Рисунок 3.4 – График зависимости σ_y / p_0 от x/a

4 Исследование контакта металлического индентора с резиновым покрытием

Проведенные опыты включали: определение полуширины площадки контакта a и сближения δ в зависимости от нагрузки, толщины и объемной доли армировки. Испытания проводили на установке, смонтированной на базе установки типа «INSTRON». Материал для исследований составляет такую модель, которая имитирует упругие свойства шины. Процесс исследований состоял в виде следующей последовательности этапов: изготовление образцов контактирующих цилиндрических металлических инденторов и покрытий из резины (в том числе армированной), применяющейся для изготовления автопокрышек; исследование физико-механических свойств образцов; создание методики исследований; анализ влияния физико-механических и деформативных свойств покрытий в зависимости от действующих нагрузок.

Экспериментальное исследование проводили как для однородной резины, так и для армированной. Объемная доля металлического волокна составляла 0.06. На рисунке 4.1 показана схема проведения экспериментов и модель математической реализации, происходит внедрение цилиндра (ось вдоль волокон) в армированный лист резины брекера на жестком основании, индентор с $r = 20$ мм, $l = 23.5$ мм, экспериментальный образец $h = 2$ мм, $L = 20$ мм.

На рисунке 4.2 показаны теоретические данные расчета, которые сопоставимы с результатами эксперимента (рисунок 4.1).

Был проведен целый ряд экспериментов и получены результаты опытов, представлен математический аппарат расчета. Были апробированы предложенные методики и разработки в инженерных методах расчета образца автомобильной шины (рисунки 4.3 и 4.4).

В правой части рисунка 4.3 приведено изменение величины внедрения в зависимости от силы вдавливания, $r = 12.7$ мм.

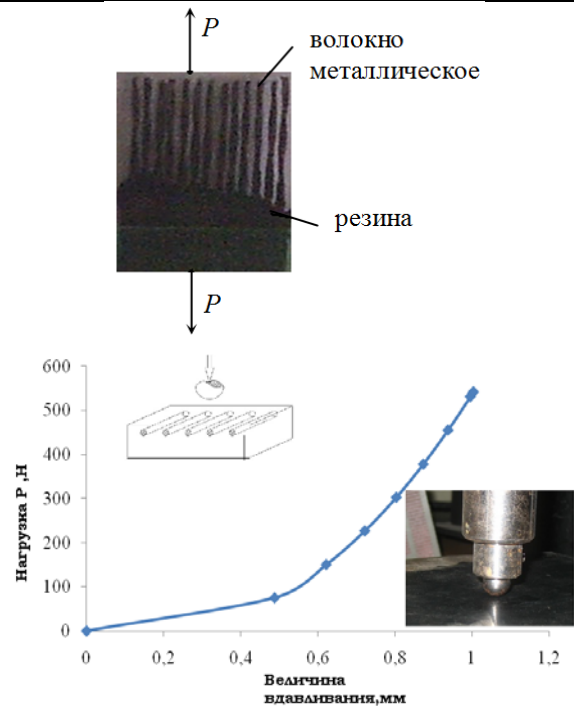


Рисунок 4.3 – Пример эксперимента внедрения шара в армированный лист резины брекера

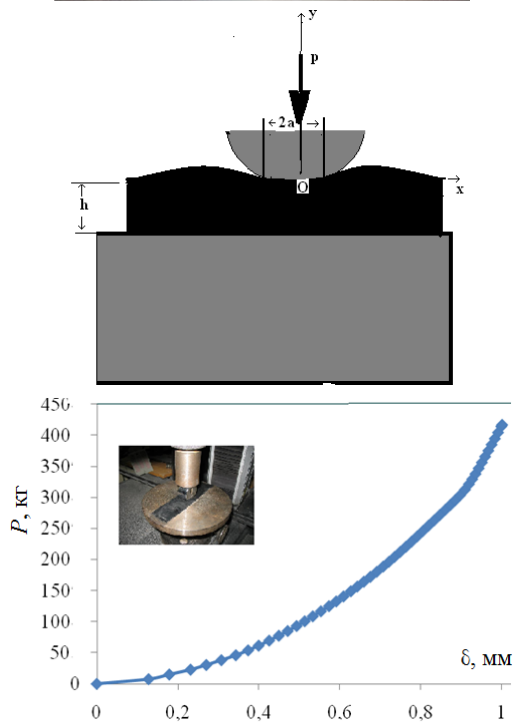


Рисунок 4.1 – Схема и результаты эксперимента

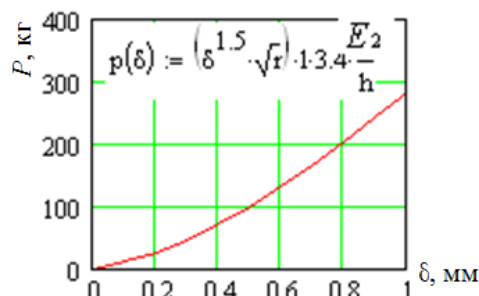


Рисунок 4.2 – Теоретический расчет изменения силы вдавливания цилиндра в покрытие от величины перемещения

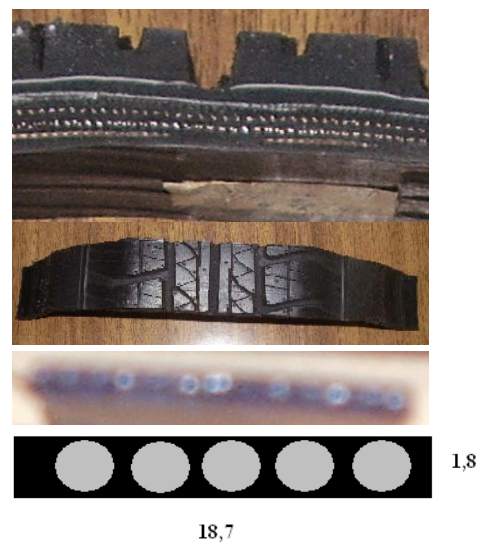


Рисунок 4.4 – Экспериментальные образцы для исследования деформации армированного покрытия в зависимости от силы нагружения для брекера шины

Исследования легко можно продолжить для определения зависимости максимальной силы удара и времени от объемного содержания волокна для различных способов расположения волокон в матрице, например, на рисунке 4.5 показана схематическая картина (представлена зависимость максимальной силы удара и времени удара от объемного содержания волокна для различных способов расположения волокон в матрице).

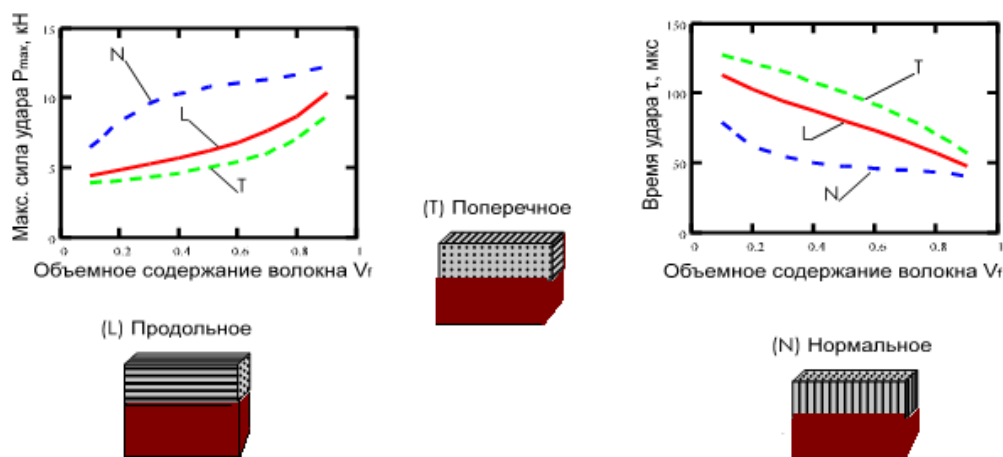


Рисунок 4.5 – Влияние объемного содержания волокна на параметры контакта

Заключение

Разработаны механико-математические модели контактного деформирования и методы реализации расчета напряженно-деформированного состояния тел из композитов с упругими покрытиями, в том числе из армированной резины при квазистатическом воздействии. Исследована зависимость напряженно-деформированного состояния от типа ориентации волокон и построена методика определения параметров контакта для тел с ортотропными покрытиями. Расчеты проводились с помощью разработанного программного модуля применительно к контакту цилиндрических тел из армированного материала. Осуществлена численная реализация методики по определению напряжений и перемещений в объемном теле применительно к контуру «шина-основание», предлагаемые методы дают возможность развития методик расчета слоистых конструкций на примере технических приложений, например, напряженно-деформированного состояния слоистых труб, применяющихся в промышленности и теплоэнергетике. Результаты могут использоваться в производстве и в учебном процессе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжов, С.А. Проектирование шин с использованием программного комплекса ABAQUS / С.А. Рыжов, К.А. Ильин, А.Н. Варюхин // САПР и графика. – 2006. – № 1. – С. 20–40.
2. Анализ контактного взаимодействия автомобильной шины с колесным диском и дорожным покрытием / В.В. Можаровский [и др.] // Доклады Белорусского конгресса механики: сборник научных трудов. – Минск, 2007. – С. 135–142.
3. Wang, H. Combined effect of moving wheel loading and three-dimensional contact stresses on perpetual pavement responses / H. Wang., I.L. Al-Qadi // Transportation research record. – 2009. – Vol. 2095. – P. 53–61.

4. Giannakopoulos, A.E. Indentation of solids with gradients in elastic properties / A.E. Giannakopoulos, S. Suresh // Axisymmetric indentors. Int. J. Solids Struct. – 1977. – № 34. – P. 2393–2428.

5. Peijian, C. Thermo-contact mechanics of rigid cylindrical stamps sliding on a finite graded-Layer / C. Peijian, C. Shaohua // Acta Mech. – 2012. – Vol. 223. – P. 2647–2665.

6. Caroline Bagault. Mechanical contact for layered anisotropic materials using a semi-analytical method. Other. INSA de Lyon, 2013. English. NNT : 2013ISAL0014 <tel-00940377> PhD. THESIS-2013 [Электронный ресурс] / Caroline Bagault. Режим доступа: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00940377/document> Дата доступа: 01.06.2016.

7. Напряженно-деформированное состояние композиционных покрытий в трибологических системах / В.В. Можаровский [и др.] // Трение и износ. – 2001. – Т. 22, № 4. – С. 379–385.

8. Можаровский, В.В. Определение напряженно-деформированного состояния слоистых неоднородных тел / В.В. Можаровский, Е.М. Березовская // Теоретическая и прикладная механика: научно-технический сборник / Донецкий национальный университет редкол.: Н.И. Березкина (отв. ред.) [и др.]. – Харьков, 2001. – Вып. 34. – С. 3–9.

9. Гупта, П.К. Распределение напряжений при плоской деформации слоистого упругого тела под действием произвольной граничной нагрузки / П.К. Гупта, Ж.А. Валовит, Е.Ф. Финкин // Проблемы трения и смазки. – 1973. – № 4. – С. 61–67.

10. Можаровский, В.В. Напряженное состояние упругого ортотропного основания с однородным покрытием с учетом трения / В.В. Можаровский, Н.А. Рогачева // Трение и износ. – 1999. – Т. 20, № 5. – С. 471–479.

11. Тарнопольский, Ю.М. Особенности расчета деталей из армированных пластиков / Ю.М. Тарнопольский, А.В. Розе. – 2-е изд., перераб. – Рига: Зинатне, 1969. – 274 с.

12. Лехницкий, С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
13. Pleskachevsky, Yu.M. Mathematical models of quasi-static interaction between fibrous composite bodies / Yu.M. Pleskachevsky, V.V. Mozharovsky, Yu.F. Rouba // Proc. Int. Conf. Computational methods in contact mechanics III, Madrid, July 3–5, 1997. – Madrid, 1997. – P. 363–372.
14. Можаровский, В.В. Математическое моделирование нано-контактного взаимодействия ортотропных тел / В.В. Можаровский, Н.А. Марьяна // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 2 (3). – С. 47–53.
15. Можаровский, В.В. Математическое моделирование взаимодействия цилиндрического индентора с волокнистым композиционным материалом / В.В. Можаровский, И.В. Смотренко // Трение и износ. – 1996. – Т. 17, № 6. – С. 24–32.
16. Можаровский, В.В. Плоские контактные задачи для анизотропных покрытий с учетом трения / В.В. Можаровский // Трение и износ. – 1992. – № 5. – С. 825–836.
17. Марьин, С.А. Напряженно-деформированное состояние слоистой трубы из ортотропных материалов / С.А. Марьин, В.В. Можаровский // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2004. – Т. 9, № 3. – С. 16–21.
18. Можаровский, В.В. Прикладная механика слоистых тел из композитов / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский. – Минск: Наука, 1988. – 280 с.
19. Можаровский, В.В. О расчете напряженного состояния покрытий из функционально-градиентных и термочувствительных материалов / В.В. Можаровский, Е.М. Березовская // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3 (84). – С. 86–92.
20. Можаровский, В.В. Численная реализация методики по определению напряжений и перемещений в объемном теле применительно к техническим приложениям / В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2014. – № 6 (87). – С. 161–166.
21. Можаровский, В.В. Разработка инженерных методов расчета слоистых трибологических систем из композиционных материалов с учетом функционально-градиентных и термочувствительных свойств / В.В. Можаровский, Н.А. Марьяна, Д.С. Кузьменков // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: сборник докладів, Львів, 15–19 вересня 2014 г. / Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Пидстригача НАН України. – Львів, 2014. – С. 128–129.
22. Можаровский, В.В. Методика, реализующая определение напряжений и перемещений в объемном теле при заданных областях контакта и действующем давлении / В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: сборник докладів, Львів, 15–19 вересня 2014 г. / Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Пидстригача НАН України. – Львів, 2014. – С. 68–70.
23. Можаровский, В.В. Расчет напряженно-деформированного состояния объемного тела при действующем давлении и при заданных областях контакта / В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков // Математическое и имитационное моделирование систем: материалы конференции МОДС '2014', Украина, Чернигов, с. Жукин, 23–27 июня 2014 г. – Чернигов, 2014. – С. 167–171.
24. Можаровский, В.В. Расчет напряженно-деформированного состояния покрытий из функционально-градиентных и термочувствительных материалов / В.В. Можаровский, Е.М. Березовская, Т.М. Дёмова // Математическое и имитационное моделирование систем: материалы конференции МОДС '2014', Украина, Чернигов, с. Жукин, 23–27 июня 2014 г. – Чернигов, 2014. – С. 161–165.
25. Методика расчета напряженного состояния слоистых трибологических систем из композиционных материалов с учетом функционально-градиентных и термочувствительных свойств / В.В. Можаровский [и др.] // Современные проблемы машиноведения (научные чтения, посвященные П.О. Сухому) Машиноведение-2014: материалы X Международной научно-технической конференции, Гомель, 23–24 октября, 2014 г. – Гомель, 2014. – С. 63–64.

Поступила в редакцию 04.07.16.

СИНТЕЗ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ГЕНЕРАТОРОВ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ОДНОМЕРНЫХ И ДВУМЕРНЫХ СИГНАЛОВ

А.А. Борискевич

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

SYNTHESIS OF MULTICOMPONENT GENERATORS OF PSEUDORANDOM ONE-DIMENSIONAL AND TWO-DIMENSIONAL SIGNALS

A.A. Boriskevich

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

Разработаны многокомпонентные генераторы псевдослучайных одномерных и двумерных сигналов, основанные на выборе множества нелинейных функций, типа взаимосвязи между нелинейными функциями, порядка использования начальных ключевых параметров и типа обработки формируемого псевдослучайного сигнала и позволяющие улучшить их статистические и криптографические свойства. Приведены результаты моделирования многокомпонентных кольцевого и параллельного хаотических генераторов, двухкомпонентного генератора с хаотическими перестановками, двумерного генератора матриц вертикально-горизонтальной перестановок и многокомпонентного генератора муаровых масок.

Ключевые слова: однокомпонентные и многокомпонентные псевдослучайные генераторы, хаотическая функция, муаровая маска, начальные ключевые параметры, поточное шифрование, энтропия.

Multi-component generators of pseudorandom multi-dimensional and two-dimensional signals based on the selection of the set of non-linear functions, the type of the relationship between the non-linear functions, the order of using the initial key parameters and the type of processing of the generated pseudorandom signal and allowing to improve the statistical and cryptographic properties of ones are developed. The results of the simulation of multi-component ring and parallel random generators, two-component generator with random permutations, the two-dimensional generator of the vertical-horizontal permutations matrix and multi-component moire mask generator are presented.

Keywords: one- and multi-component pseudorandom generators, chaotic function, moire mask, initial key parameters, stream encryption, entropy.

Введение

Для защиты мультимедийных данных (МД) [1] от несанкционированного доступа широко используются как генераторы одномерных и двумерных псевдослучайных сигналов (ПСС) [2]–[7], так и их сочетания, позволяющие шифровать МД со скоростью, соизмеримой со скоростью ее поступления, с минимальным коэффициентом размножения ошибок и с учетом особенностей зрительного восприятия человека

Для обеспечения уровня защищенности механизма запутывания-рассеяния [2]–[4], [6] используются блок-схемы шифрования на основе одномерных и двумерных генераторов (рисунок 0.1).

Ключевые параметры нелинейных функций многокомпонентных генераторов, осуществляющих перестановку и модификацию пикселей (рисунок 0.1, а), должны быть различными в различных раундах, что достигается с помощью генератора раундовых ключей со стартовым секретным значением.

Генераторы одномерных (рисунок 0.1, б, в) и двумерных ПСС (рисунок 0.1, а) могут отличаться по типу используемой нелинейной функции, структуре генератора и принципу формирования выходной последовательности. Существующие одномерные и двумерные генераторы ПСС в основном используют одну нелинейную

функцию [2], [4]–[6], что приводит к снижению объема ключевого пространства и степени декорреляция значений ПСС.

Одним из эффективных средств построения одномерных и двумерных ПСС является структурный подход, основанный на выборе множества функций генерации сигналов, типов их взаимосвязи и локальной обработки генерируемых сигналов, что позволяет формировать квантованные и бинарные псевдослучайные одномерные и двумерные сигналы с улучшенными криптографическими и статистическими свойствами.

Целью работы является разработка многокомпонентных генераторов одномерных и двумерных ПСС с использованием нелинейных одномерных хаотических и двумерных пространственных функций для улучшения их криптографических и статистических свойств.

1 Синтез многокомпонентных генераторов псевдослучайных одномерных и двумерных сигналов

Для улучшения статистических и криптографических характеристик однокомпонентных хаотических генераторов [2], [5] и уменьшения их зависимости от типа ХФ предложены многокомпонентные кольцевой и параллельный бинарные

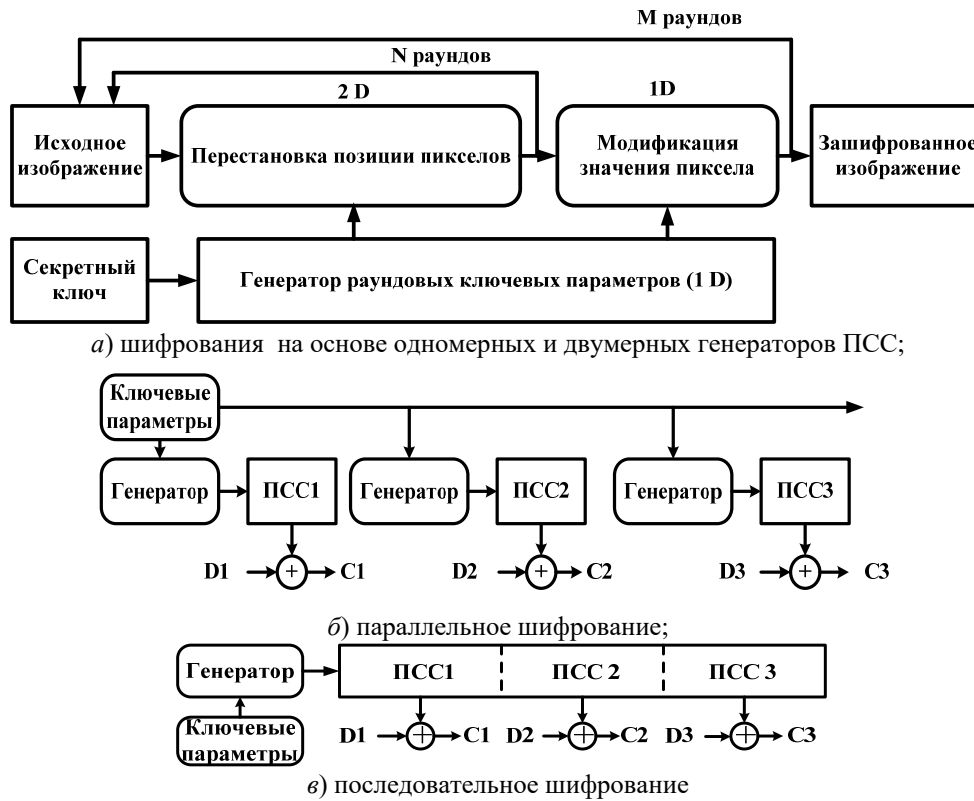


Рисунок 0.1 – Поточное шифрование мультимедийных данных D

хаотические генераторы и двухкомпонентный бинарный хаотический генератор (рисунок 1.1), основанные на выборе множества нелинейных ХФ, типа взаимосвязи между ХФ, количества раундов генерации значений ХП, порядка использования начальных ключевых параметров и типа обработки ХП, представленной в виде множества

$$X = \left\{ x(n+1) = f^{n+1}(x(n), x_q(0), \lambda(p)) \right\}$$

$$n = \overline{0, N-1}, p = \overline{0, P-1}, q = \overline{1, Q},$$

где N, Q и P – количество хаотических значений $x(n)$, начальных хаотических значений $x_q(0)$ и управляющих параметров (параметров бифуркации) λ_p , $f()$ – хаотическая функция.

В многокомпонентном генераторе (рисунок 1.1, а) начальные ключевые параметры ($x_q(0), \lambda_p$) ХФ поступают во второе кольцо, а в первом кольце находятся промежуточные значения $x(n)$ ХФ. Блок управления определяет порядок использования ключевых параметров и число раундов или заданное число подключений ХФ перед выдачей хаотического значения $x(n)$ на выход генератора. Число раундов (проходов через каждый блок ХФ до завершения цикла) может изменяться от 1 до 9.

В многокомпонентном генераторе (рисунок 1.1, б) однокомпонентный генератор с различными ХФ генерирует вещественные значения ХП, используя множество начальных ключевых

параметров $\{x(0)\}$ и $\{\lambda\}$. Вещественные значения ХФ преобразуются в последовательность двоичных символов

$$x_b(n) \rightarrow (b_{L-1}(n) \dots b_1(n) \dots b_0(n))$$

с помощью двоично-десятичного преобразования (ДДП) $x(n) = \sum_{l=0}^{L-1} b_l(n) 2^l$, где L – длина кодового слова значения $x(n)$ ХФ. Формирование результирующей бинарной псевдослучайной последовательности $\{x_b(n)\}$ осуществляется с помощью операции по модулю 2:

$$x_b(n) \rightarrow x_{b_{XФ1}}(n) \oplus x_{b_{XФ2}}(n) \oplus \dots$$

$$\dots \oplus x_{b_{XФk}}(n) \oplus \dots \oplus x_{b_{XФK}}(n),$$

где K – количество различных ХФ.

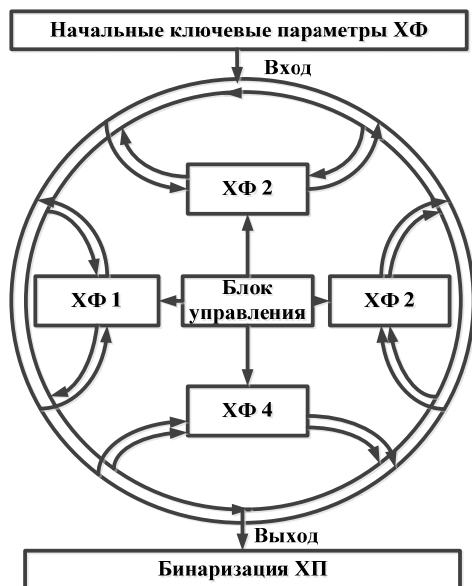
В двухкомпонентном генераторе (рисунок 1.1, в) формирование ХП $x = (x(1), \dots, x(n), \dots, x(N))$ основано на перестановке значений ХП

$$z = (z(1), \dots, z(l), \dots, z(m_c)),$$

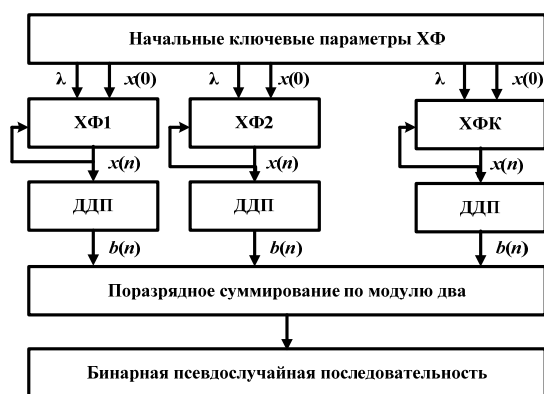
генерируемой однокомпонентным генератором с ХФ1, с помощью ХП целочисленных значений (индексов) $m = (m(1), \dots, m(n), \dots, m(N))$, полученной из ХП $y = (y(1), \dots, y(n), \dots, y(N))$, генерируемой однокомпонентным генератором с ХФ2

посредством вычисления $m(n) = \left\lfloor \frac{1}{y(n)} \right\rfloor$ при

выполнения следующих условий: $y(n) \in [0, 1]$, $y(n) \leq y_{th}$, y_{th} – пороговое значение и $m_c = \max(m(j))$ – количество хаотических значений ХП z . Значение хаотического индекса $m(n)$ определяет позицию, из которой извлекается хаотическое значение ХП z .



а) кольцевой генератор;



б) параллельный генератор;



в) генератор с хаотическими перестановками

Рисунок 1.1 – Блок-схемы многокомпонентных генераторов одномерных квантованных и бинарных ХП

Для бинаризации ХП используются следующие соотношения:

$$- \text{глобальная, } x_b(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } x(n) > f(x), \\ 0 & \text{при } x(n) \leq f(x), \end{cases}$$

- интервальная

$$x_b(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } x(n) \in \Delta x_i, i = 2p - 1, \\ 0 & \text{при } x(n) \in \Delta x_i, i = 2p, \end{cases}$$

- двоично-десятичная бинаризация

$$x_b(n) = (b_{L-1}(n) \dots b_l(n) \dots b_0(n))$$

- модулярная двоично-десятичная бинаризация без увеличения длины ХП

$$x_b(n) = b_{L-1}(n) \oplus b_{L-2} \oplus \dots \oplus b_l \oplus b_{l-1} \oplus \dots \oplus b_1 \oplus b_0.$$

$$\text{Здесь } f(x) = \begin{cases} x_{avg} = N^{-1} \sum_{n=1}^N x(n), & - \text{глобальный} \\ med(x), & \end{cases}$$

порог, зависящий от среднего x_{avg} и медианного

$$med(x) = \begin{cases} x\left(\frac{N+1}{2}\right) & \text{при } N - \text{нечетном,} \\ \frac{x\left(\frac{N}{2}\right) + x\left(\frac{N}{2} + 1\right)}{2} & \text{при } N - \text{четном,} \end{cases}$$

значений; $p = \overline{1, P}$; P – количество интервалов Δx_i , на которое разбивается диапазон изменения хаотической переменной.

Для повышения степени равномерности рассеяния любого локального множества пикселей по всему полю изображения и защищенности от несанкционированного доступа при его хранении и передачи предлагается двумерный генератор матриц хаотических перестановок (рисунок 1.2) [7].



Рисунок 1.2 – Блок-схема генератора матриц хаотических перестановок

Размер матриц перестановок определяется размерами исходного шифруемого изображения $I = (I(i, j))_{M \times N}$. Формирование строчных и столбцовых матриц хаотических значений основан на выборе многокомпонентного генератора ХП $x = \{x(1), \dots, x(n), \dots, x(MN)\}_{n=1}^{MN}$ длиной MN или $2MN$ с требуемым объемом ключевого пространства.

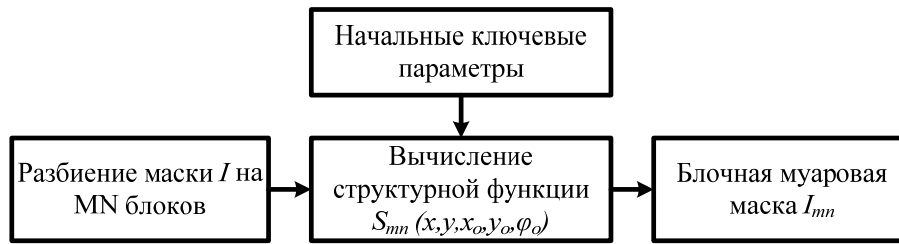


Рисунок 1.3 – Блок-схема многокомпонентного генератора муаровых масок

Синтез строчных

$$P_H = (\bar{p}_{Hi} = (n_{i1}, \dots, n_{ij}, \dots, n_{iN}) | i = \overline{1, M},)$$

и столбцовых

$$P_V = (\bar{p}_{Vj} = (n_{1j}, \dots, n_{ij}, \dots, n_{Mj})^T | j = \overline{1, N})$$

матриц хаотических перестановок основан, соответственно, на формировании столбцовых

$$X_V = (\bar{x}_{Vj} = (x_{1j}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{Mj})^T | j = \overline{1, N})$$

и строчных

$$X_H = (\bar{x}_{Hi} = (x_{i1}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{iN}) | i = \overline{1, M})$$

матриц хаотических значений, которые заполняются значениями ХП $x = \{x(1), \dots, x(n), \dots, x(MN)\}_{n=1}^{MN}$ по столбцам и строкам, соответственно, для уменьшения корреляции между значениями хаотических переменных в строках X_V матрицы и столбцах X_H матриц, упорядочивании хаотических значений в пределах столбца X_V и строки X_H в порядке возрастания или убывания их значений и выборе номеров позиции упорядоченных x_{ij} .

В общем случае матрицы X_V и X_H формируются независимо с использованием двух разных ХП длиной MN , что требует двух наборов ключевых параметров. Количество секретных ключей при синтезе матриц хаотических перестановок P_V и P_H зависит от выбора ХФ, типа хаотических генераторов и точности вычисления хаотических значений.

Одним из эффективных подходов повышения уровня защищенности механизма запутывания-рассеяния является использование принципов оптических цифровых технологий шифрования полутоновых изображений в качестве эффективного средства маскирования яркостных, контрастных и структурных особенностей изображений [8], [9]. Оптический муаровый эффект является эффективным средством для формирования большого множества двумерных ключевых образов за счет его высокой чувствительности к изменению условий формирования и учета особенностей восприятия зрительной системы человека [9].

В предложенном многокомпонентном муаровом генераторе (рисунок 1.3) матрица

$I_{MM}(x_0, y_0, f_0, \varphi_0)$ муаровой маски размером $S = XY$ с начальными ключевыми идентификационными параметрами (координаты центра поворота маски (x_0, y_0) , угол вращения маски φ_0 , частота муаровых полос f_0 и количество уровней квантования Q_0) формируется с помощью выбора структурной функции $S_{mn}(x, y, x_{mn}, y_{mn}, \varphi_{mn})$, определяющей форму, толщину и период муаровых полос

$$I_{mn}(x_0, y_0, f_0, \varphi_0) = (f_{mn} \cdot S_{mn}(x, y, x_{mn}, y_{mn}, \varphi_{mn}) \bmod Q_0 | x = \overline{0, X-1}, y = \overline{0, Y-1}),$$

где $S_{mn} = (m+n) \bmod K_S$, $f_{mn} = f_0 + (m+n)f_0$,

$$\begin{cases} x_{mn} = x_0 + (m+n)X / MN, \\ y_{mn} = y_0 + (m+n)Y / MN, \end{cases}$$

и $\varphi_{mn} = \varphi_0 + (m+n)360^\circ / MN$ – индекс K_S структурных функций, частоты муаровых полос, координаты центра поворота маски и углы вращения маски соответственно в зависимости от (m, n) индексов блоков, на которые разбивается муаровая маска; MN – количество блоков маски размером $X \times Y$.

Функция $S_{mn}(x, y, x_0, y_0, \varphi_0)$ определяется с помощью множества структурных функций

$$S_{mn}(c_{xmn}, c_{ymn}) = \left\{ \begin{array}{l} 1. |c_{xmn} \cdot \cos(c_{ymn})|, \\ 2. c_{xmn} \cdot \sqrt{c_{xmn}^2 + c_{ymn}^2}, \\ 3. (c_{xmn}^2 + c_{ymn}^2), \\ 4. (c_{xmn} \cdot c_{ymn}), \\ 5. (c_{xmn}^2 \cdot c_{ymn}^2), \\ 6. |c_{xmn} \cdot \cos(c_{xmn} \cdot c_{ymn})|, \\ 7. c_{xmn} \cdot \exp(c_{ymn}), \\ 8. c_{xmn} \cdot |\log c_{ymn}| \end{array} \right\},$$

где $c_{xmn} = \frac{(x - x_{mn}) \cdot \cos(\varphi_{mn}) + (y - y_{mn}) \cdot \sin(\varphi_{mn})}{S}$

и $c_{ymn} = \frac{(x - x_{mn}) \cdot \sin(\varphi_{mn}) - (y - y_{mn}) \cdot \cos(\varphi_{mn})}{S}$ –

структурные параметры, определяющие характер

изменения формы муаровых полос маски в направлении x и y и нормированные на размер муаровой маски S .

2 Результаты моделирования

При синтезе и анализе бинарных хаотических генераторов использованы 13 хаотических отображений (стандартное логистическое отображение, первая, вторая и третья модификации логистического отображения, функции PWAM (Piece-Wise Affine Markov), PWAM2, PWAM3, PWAM4, отображение Tent, первая и вторая модификация отображения Tent, кубическое отображение и Sine отображение [2], [5]. Проведен анализ кольцевого генератора с четырьмя логистическими ХФ и четырьмя ключевыми параметрами $\lambda_1 = 3.99$, $\lambda_2 = 3.95$, $\lambda_3 = 3.91$ и $\lambda_4 = 3.87$ при фиксированном $x(0)$ (рисунок 2.1, а). Из анализа пространственных траекторий ХП

$$x(n+1) = f^{n+1}(x(n), \{\lambda\}, x(0), N_r)$$

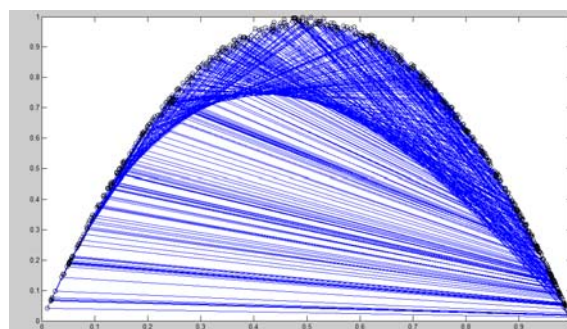
кольцевого генератора для логистической ХФ с различным числом раундов, представленных на рисунке 2.3, следует, что степень равномерности распределения значений ХП зависит от количества раундов, не зависит от типа ХФ и достигает максимума при количестве раундов $N_r \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$.

В качестве показателя меры заполнения плоскости значениями ХП, предлагается использовать нормированную энтропию $S(\epsilon)$ распределения значений ХП по ячейкам с линейным размером ϵ , на которые разбивается плоскость,

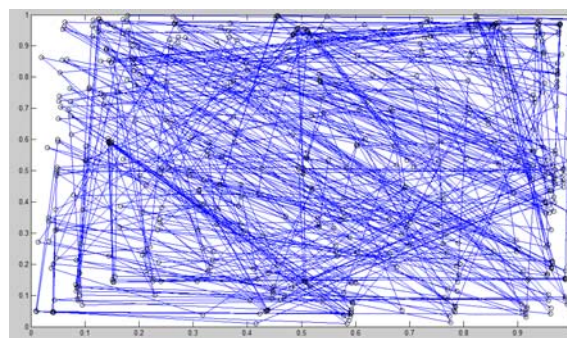
$$S(\epsilon) = -(\log_2 N(\epsilon))^{-1} \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i(\epsilon) \log_2 p_i(\epsilon),$$

где $p_i(\epsilon) = \frac{n_i(\epsilon)}{N}$, $n_i(\epsilon)$ и $N(\epsilon)$ – вероятность появления значений ХП в ячейке с номером $i = \overline{1, N(\epsilon)}$, количество точек в ячейке с номером $i = \overline{1, N(\epsilon)}$ и ячеек на плоскости соответственно.

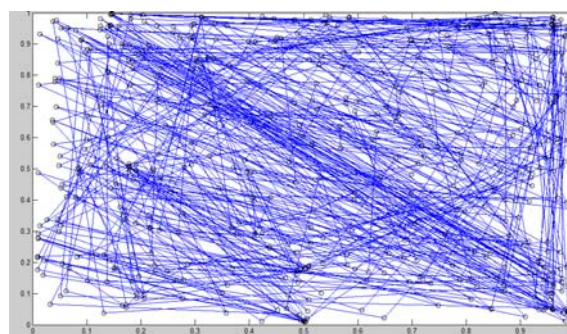
Для оценки степени декорреляции хаотических значений вычислены значения $S(\epsilon)$ для ХП, генерируемые однокомпонентным генератором с логистической ХФ, равные 0.61, 0.57, 0.54, 0.52, 0.47 и 0.37 при $x(0) = 0,924$, $\lambda = 4.0$, а также для ХП, генерируемые кольцевым генератором с логистической ХФ, равные 0.91, 0.87, 0.79, 0.75, 0.64 и 0.45 для размеров $\epsilon = 1, 2, 4, 5, 10$ и 25 соответственно при $x_1(0) = 0,924$, $x_2(0) = 0,548$, $x_3(0) = 0,568$ и $\lambda = 4.0$. Таким образом, кольцевой генератор обеспечивает в 1,5 раз большие значения нормированной энтропии ($S(\epsilon) = 0,91$), чем однокомпонентный генератор ($S(\epsilon) = 0,61$) для различного типа ХФ, что приводит к увеличению непредсказуемости ХП независимо от типа ХФ.



а) один раунд;



б) пять раундов;



в) девять раундов

Рисунок 2.1 – Зависимость между соседними значениями ХП $x(n+1)$ и $x(n)$ для логистической ХФ при различном количестве раундов

На рисунке 2.2 представлены зависимости нормированной энтропии $S(\epsilon)$ распределения значений ХП по ячейкам с линейным фиксированным размером ϵ от длины L кодового слова хаотического значения.

Установлено, что длина кодового слова для представления хаотических значений должна быть больше или равно 24 бит с целью обеспечения максимально возможных значений нормированной энтропии $S(\epsilon) > 0,9$.

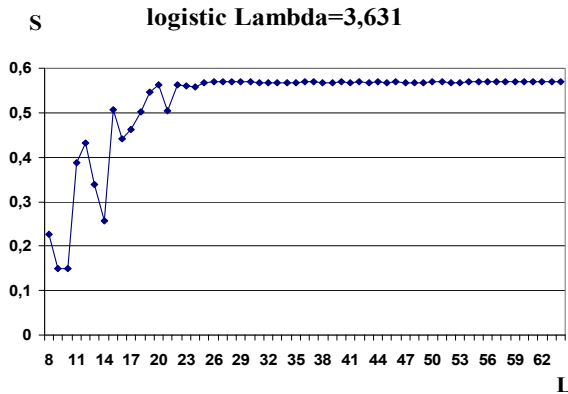
Определено, что формирование квантованной ХП с требуемой длиной из множества ХП осуществляется посредством конкатенация слабокоррелированных относительно коротких ХП с нормированным коэффициентов корреляции

$$r_n(X, Y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sqrt{D(x)}\sqrt{D(y)}} \in [0, r_{\min} \leq 0,015]$$

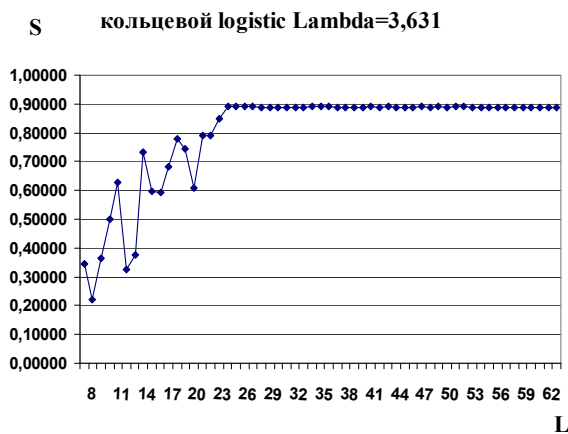
между ХП тестируемого множества, где $\text{cov}(x, y) = N^{-1} \sum_{i=1}^N (x_i - E(x))(y_i - E(y))$ – среднее значение ковариации пар хаотических значений x_i и y_i ХП;

$$E(x) = N^{-1} \sum_{i=1}^N x_i \text{ и } D(x) = N^{-1} \sum_{i=1}^N (x_i - E(x))^2$$

– среднее значение и дисперсия хаотических значений x_i ХП.



а) однокомпонентный генератор



б) кольцевой генератор

Рисунок 2.2 – Зависимости нормированной энтропии $S(\varepsilon)$ распределения точек ХП на плоскости по ячейкам с линейным размером $\varepsilon = 1$ от длины кодового слова L хаотического значения $x(n)$ при $\lambda = 3,631$

Однокомпонентные и многокомпонентные генераторы должны обладать криптографической стойкостью, под которой понимают отсутствие у нарушителя возможности предсказать следующий бит на основе известных ему предыдущих с вероятностью, отличающейся от 0,5. Практическая криптостойкость генераторов ПСП оценивается с помощью пакета статистических тестов, разработанного Национальным Институтом Стандартов и Технологий (НИСТ) [10], [11]. Для оценки статистических свойств многокомпонентных генераторов (рисунок 1.1) выполнены 16

тестов НИСТ (таблица 2.1). Определено, что вычисленные P -значения больше уровня значимости $\alpha \in \{0,001; 0,01\}$. Следовательно, формируемые ХП являются случайными с достоверностью 0,999 и 0,99 соответственно. Из результатов тестирования с использованием тестов НИСТ следует, что наилучшие результаты обеспечивает интервальная бинаризация хаотических значений ХП.

Таблица 2.1. – Выборочные результаты тестирования по 4-м тестам НИСТ множества ХП многокомпонентных хаотических генераторов

Название теста NIST	P-значение	% последовательностей, которые прошли тест	Результат
Frequency	0.034339	0.9945	Пройден
Block Frequency	0.743552	0.9945	Пройден
Cumulative Sums	0.891244	0.9964	Пройден
Runs	0.026297	0.9836	Пройден

Для формирования бинарной ХП требуемой длины целесообразно использовать конкатенацию слабокоррелированных бинарных ХП с нормированным расстоянием Хемминга

$$d_n(X, Y) = N^{-1} \sum_{j=1}^N (x_j \oplus y_j) \in [d_{\min} \leq 0,49, d_{\max} \leq 0,51]$$

из тестируемого множества ХП.

Предложенный параллельный генератор обладает гибкой структурой и позволяет формировать ХП с улучшенными статистическими и криптографическими свойствами (2^{128} , 2^{192} , 2^{256} и 2^{512} секретных ключей) за счет использования гибкого выбора множества ХФ с различными ключевыми параметрами и беспороговой бинаризацией ХП.

Результаты шифрования полутоновых изображений показывают, что матрицы хаотических перестановок позволяют уменьшить межпиксельную корреляцию изображений различного класса в среднем на 99,84% [7].

На рисунке 2.3 представлены структуры муаровых масок при $m = n = 0$, $(x_0, y_0) = (255, 255)$, $\varphi_0 = 30^\circ$ и $f_0 = 10^3; 10^4; 10^6$ и $f_0 = 10^8$ и использованной структурной функции

$$S(c_x, c_y) = c_x \cdot \sqrt{c_x^2 + c_y^2}$$

Результаты моделирования генератора муаровых масок показывают, что муаровые маски обладают энтропией 8 бит на пиксель, низкими значениями порогов чувствительности к изменению начальных параметров структурных функций: шаг изменения частотного параметра ($T = 10^5$), шаг сдвига центра поворота ($\Delta s = 5$ пикселей), шаг изменения угловой ориентации ($\Delta \varphi = 1^\circ$) и

позволяют надежно маскировать как низкочастотные, так и высокочастотные детали изображений [9].

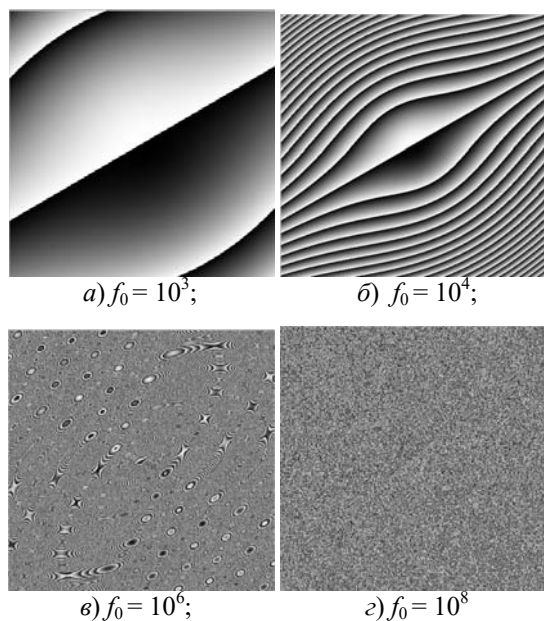


Рисунок 2.3 – Муар-маски при различных значениях частотного параметра

Заключение

Разработаны многокомпонентные генераторы псевдослучайных одномерных и двумерных сигналов, основанные на выборе множества нелинейных функций, типа взаимосвязи между нелинейными функциями, порядка использования начальных ключевых параметров и типа обработки формируемого псевдослучайного сигнала и позволяющие улучшить их статистические и криптографические свойства.

Приведены результаты моделирования многокомпонентных кольцевого и параллельного хаотических генераторов, двухкомпонентного генератора с хаотическими перестановками, двумерного генератора матриц вертикально-горизонтальной перестановки и многокомпонентного генератора муаровых масок. Результаты моделирования показывают, что генератор с кольцевой сменой секретных ключей обеспечивает в 1,5 раза большие значения нормированной энтропии распределения значений ХП на плоскости, чем генератор с одной ХФ, что приводит к увеличению непредсказуемости ХП по сравнению с однокомпонентными генераторами.

Установлено, что длина кодового слова для представления хаотических значений должна быть больше или равна 24 бита. Предложено использовать многокомпонентные генераторы

для формирования квантованных и бинарных ХП с требуемой длиной посредством конкатенации слабо коррелированных относительно коротких ХП из тестируемого множества. Для улучшения уровня защищенности механизма запутывания-рассеяния целесообразно использовать сочетание одномерных и двумерных генераторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lian, S. Multimedia Content Encryption: Techniques and Applications / S. Lian. – London, Taylor & Francis Group, 2008. – 224 p.
2. Kocarev, L. Chaos-Based Cryptography / L. Kocarev, S. Lian. – Theory, Algorithms and Applications. – Springer, 2011. – 395 p.
3. Асосков, А.В. Поточные шифры / А.В. Асосков, М.А. Иванов, А.А. Мирский. – М.: КУДИЦ-ОБРАЗ, 2003. – 336 с.
4. Fridrich, J. Symmetric ciphers based on two-dimensional chaotic maps / J. Fridrich // International Journal of Bifurcation and Chaos. – 1998. – № 8. – P. 1259–1284.
5. Ansari, S. A Review on Chaotic Map Based Cryptography / S. Ansari, N. Gupta, S. Agrawal // International Journal of Scientific Engineering and Technology. – 2012. – Vol. 1, № 4. – P. 24–27.
6. Patidar, V. A new substitution diffusion based image cipher using chaotic standard and logistic maps / V. Patidar, N.K. Pareekb, K.K. Suda // Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2009. – № 14. – P. 3056–3075.
7. Борискевич, А.А. Голографическая защита информации / А.А. Борискевич, В.К. Ероховец, В.В. Ткаченко. – Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2012. – 279 с.
8. Munoz-Rodriguez, J.A. Image Encryption Based on Moire Pattern Performed by Computational Algorithms / J.A. Munoz-Rodriguez, R. Rodriguez-Vera // Optics Communications. – 2004. – Vol. 236. – P. 295–301.
9. Борискевич, А.А. Метод визуального шифрования изображений на основе оптического муар-эффекта / А.А. Борискевич, В.Ю. Цветков // Доклады НАН Беларуси. – 2008. – Т. 52, № 6. – С. 42–48.
10. Иванов, М.А. Теория, применение и оценка качества генераторов псевдослучайных последовательностей / М.А. Иванов, И.В. Чугунков. – Кн. 2. – М.: КУДИЦ-ОБРАЗ, 2003. – 240 с.
11. A statistical test suite for random and pseudorandom number generators for cryptographic applications // NIST Special Publications 800–22. – May 15, 2001. – 163 p.

Поступила в редакцию 01.10.16.

УДК 519.25

ЭКСПЕРТНО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ СОЦИАЛЬНЫХ ГРУПП

А.Н. Осипенко¹, Н.Б. Осипенко², Е.В. Невдашенко²

¹Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого

²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

EXPERT-ANALYTICAL OPTIMIZATION OF THE FORMATION OF SOCIAL GROUPS

A.N. Osipenko¹, N.B. Osipenko², E.V. Neudashenko²

¹P.O. Sukhoi Gomel State Technical University

²F. Scorina Gomel State University

Описан программно-алгоритмический инструментальный пилотного проекта экспертно-аналитической оптимизации разбиения совокупности людей на группы с разной специализацией. Предложенный алгоритм учитывает такие критерии, как психологический тип личности, индивидуальные предпочтения целевых задач, расположенности или нерасположенности к остальным участникам, а также разнообразие интересов членов формируемых групп и их взаимодополняемость. В качестве базовой типологизации участников использовалось авторское обобщение ряда традиционных подходов. Предварительная апробация предложенного алгоритма и программы была осуществлена на примере распределения студентов по специализациям на математическом факультете ГГУ им. Ф. Скорины.

Ключевые слова: экспертно-аналитическое принятие решений, многокритериальная оптимизация, типологизация личности, разбиение совокупности людей на группы.

The algorithmic and software toolkit of the pilot project expert-analytical optimization of partitioning the set of people into groups with different specialization is described. The proposed algorithm takes into account criteria such as the psychological type of personality, individual preferences of the targets, disposition or aversion to other participants, as well as the diversity of interests of the members formed groups and their complementarity. As a basic typology of participants the author's synthesis of a number of conventional approaches was used. Preliminary testing of the proposed algorithm and the program was carried out on the example of the distribution of students into specialization at mathematical faculty F. Scorina GSU.

Keywords: expert-analytical decision-making, multi-criterion optimization, typology of personality, splitting the set of people into groups.

Введение

Одна из наиболее характерных тенденций последнего десятилетия – рост интереса к индивидуальному подходу в разных сферах деятельности, прежде всего, в маркетинге, менеджменте, бизнес-консалтинге, психологическом консультировании, профориентации, образовании и оздоровлении. Появились новые специальности, например, коуч, HR-менеджер, тьютор. Важнейшей составляющей повышения эффективности индивидуального подхода является наработка программно-технологического инструментария диагностики и аналитической обработки данных о человеке. В настоящей статье рассматривается проблема формирования из потенциального множества людей нескольких коллективов под разные задачи. В качестве примера это могут быть проблемы: распределения IT-специалистов по разным проектам, разбиения студентов курса по разным специализациям или формирования рабочих бригад на предприятии. Для разрешения поставленной проблемы в каждом конкретном случае необходимо иметь: 1) алгоритм типологизации личности и соответствующую ему технологию диагностики (тестирования); 2) алгоритм

многокритериальной оптимизации разбиения множества людей на группы под разные задачи; 3) технологию создания соответствующей базы данных; 4) сайт или десктопную программу для взаимодействия с клиентами, составляющими потенциальное множество кандидатов в результирующую выборку участников будущего распределения по группам; сбора данных диагностики по клиентам; предварительной фильтрации клиентов при формировании множества участников; опроса участников об их расположенности или нерасположенности к взаимодействию с каждым из остальных участников (на основе личных встреч или предоставленной информации); реализации алгоритма многокритериальной оптимизации разбиения участников на группы; интерактивного диалога с экспертом-заказчиком в процессе оптимизации разбиения с целью обеспечения его адекватности и правдоподобности за счет коррекции настраиваемых весовых параметров программы; вывода рекомендаций по формированию итоговых групп участников.

В настоящее время по данным Википедии существует несколько тысяч различных способов построения типологий личности, а также множество

алгоритмов оптимизации совмещения людей в группе. В данной статье был выбран вариант типологизации личности, обобщающий ряд традиционных подходов, в частности, работы М.С. Кагана [1], дифференциальной психологии и типологии характеров К.Г. Юнга и Майерс-Бриггс в интерпретации П. Тайгер и Б. Тайгер [2], психодиагностическую методику 16-факторного личностного опросника Раймонда Кэттелла [4], а также пирамиды потребностей человека А. Маслоу [3]. Результатом классификации видов деятельности явилась матрица из 35 рабочих ячеек и одной управляющей ячейки [5]. Пять столбцов этой таблицы определяются пятью ипостасями (аспектами) человеческой деятельности: информационной (выбирающе-решающий аспект), креативной (структурирующе-функциональный), энергетической (переживающе-эмоционирующий), коммуникативной (образно-мыслящий), синтезирующей (отражающе-деятельностный). Семь строк этой таблицы определяются семью уровнями (сферами) человеческой деятельности: актуальной реализации (природно-экологической среды), потенциального подсознания (рода), потенциального сознания (ментальной области коллективного сознания), актуального подсознания (коллективного взаимодействия), актуального сознания (личности), потенциальной реализации, или мотивации (социально-культурных образований), духовного сопровождения личностного развития (духовных институтов человечества). Отметим также, что 32-м (из 36) ячейкам из этой таблицы соответствуют 32 типа характера человека, полученных с использованием шести дифференциаций: экстраверсия – интроверсия, сенсорика – интуиция, логика – этика, рациональность – иррациональность, лидер – ведомый, фокусировка на своих намерениях – фокусировка на намерениях других [5].

Каждый человек обладает своим уникальным характером, темпераментом и способностями. У одного – какое-то качество (например, воля) сильно развито, у другого – его почти нет: у одного – позитив, а у другого – негатив (безволие) или псевдопозитив (пустая страсть). Причем, по отношению к разным видам деятельности и к разным людям у человека это качество может проявляться всеми тремя способами. Поэтому классическая диагностика: интроверт – экстраверт, холерик – флегматик или рождение в каком-либо знаке Зодиака дает очень общее и статичное представление о человеке.

Предлагаемый алгоритм многокритериальной оптимизации разбиения людей на группы помогает подобрать «нужный сплав» психологических элементов, развернуть их друг к другу позитивными сторонами, обеспечить устойчивость и эффективность сотрудничества, или же (при формировании коллектива) дает возможность найти людей с недостающими качествами.

1 Описание реализации проекта

Работа посвящена автоматизации разбиения совокупности людей на группы с помощью экспертно-аналитической оптимизации. В отличие от классических методов оптимизации, ведущая роль отводится эксперту, подбирающему критерии и их веса на нескольких этапах оптимизации. Определяющим и направляющим фактором принятия решений в процессе оптимизации является интуитивное представление эксперта о естественности и стратегической эффективности результирующей классификации. Без вспомогательной аналитической оптимизации эксперт обычно опирается на два-три ключевых фактора внешнего порядка, а в настоящей работе используется большее число факторов: психологическая совместимость, темперамент, внутренняя мотивация, расположенности или нерасположенности к отдельным лицам, индивидуальный рейтинг групповых специализаций, общая квалификация субъекта и ограничения на численность групп. Принцип поэтапного подключения новых критериев оптимизации помогает эксперту лучше осознать влияние каждого фактора и, как следствие, осуществить более глубокую и всестороннюю интуитивную имитацию возможных внутригрупповых взаимодействий при выборе окончательной классификации субъектов.

Разработанная в ходе исследования программная система в настоящее время широко востребована в связи с возрастанием роли высококачественной коллективной деятельности в разных организациях.

В основе алгоритма разбиения множества участников на группы положен критерий минимума многомерного расстояния субъектов (участников) до своих целевых ячеек в таблице деятельности [6]. На начальном этапе работы алгоритма используется информация о паспортных данных человека [5].

1.2 Основные понятия и виды реализуемых расстояний. Пусть N – количество людей общей совокупности Ω , которые разбиваются на L групп: $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_L : N = N_1 + N_2 + \dots + N_L$, где N_l – количество людей, которые должны остаться в l -ой группе ($l = \overline{1, L}$). Будем считать, что $N_l \geq N/L - \Delta N_l$, где ΔN_l по умолчанию равно 1, иначе запрашивается у пользователя ($N/L > \Delta N_l \geq 1$).

Рассмотрим произвольную пару субъектов из общей совокупности Ω людей: S_f и S_r , ($1 \leq f \leq N, 1 \leq r \leq N$): $S_f \in \Omega$ и $S_r \in \Omega$. Пусть *корневая* ячейка для субъекта $S_f : R(S_f) = Z_{ij}$ и для субъекта $S_r : R(S_r) = Z_{pq}$ (корневая ячейка для субъекта определяется с помощью отдельной программы с использованием даты рождения, имени, а также результатов тестирования темперамента).

Целевая ячейка Z_{ij} для l -ой группы задается изначально согласно смыслу совместной деятельности в l -ой группе ($l = \overline{1, L}$).

Итоговое расстояние между ячейками $\rho(R(S_n), Z_{ij})$ определяется как взвешенная сумма четырех расстояний:

$$\begin{aligned} \rho(R(S_n), Z_{ij}) = & 0,125 \cdot \rho_T(R(S_n), Z_{ij}) + \\ & + 0,125 \cdot \rho_H(R(S_n), Z_{ij}) + \\ & + 0,25 \cdot \rho_{Re}(S_n, l) + 0,5 \cdot \rho_{PS}(R(S_n), Z_{ij}). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Расстояния, используемые в (1.1), определены ниже.

1. Расстояние по разности темпераментов: $\rho_T(Z_{ij}, Z_{pq})$ – количество инверсий (максимум 5) в структуре темперамента при переходе от ячейки Z_{ij} к Z_{pq} : $T_{ij} = (t_{ij}^1, t_{ij}^2, t_{ij}^3, t_{ij}^4, t_{ij}^5)$, где $t_{ij}^m = 0$. Если соответствующая составляющая темперамента преимущественно интенсивна, иначе $t_{ij}^m = 1$:

$$\rho_T(Z_{ij}, Z_{pq}) = \begin{cases} 1 - 0,2 \cdot [(t_{ij}^1 \wedge t_{pq}^1) + (t_{ij}^2 \wedge t_{pq}^2) + \\ + (t_{ij}^3 \wedge t_{pq}^3) + (t_{ij}^4 \wedge t_{pq}^4) + (t_{ij}^5 \wedge t_{pq}^5)], \\ \text{если } (j < 7 \vee (j = 7 \wedge i = (3 \vee 4))); \\ 0,1 \cdot \sum_{k=1}^5 |t_{ij}^k - t_{pq}^k|, \\ \text{иначе для остальных случаев,} \\ \text{когда встречаются ячейки} \\ Z_{17}, Z_{27}, Z_{57}. \end{cases}$$

Здесь матрица T_{ij} , $i = \overline{1, 5}$, $j = \overline{1, 7}$ задается априори, исходя из теоретических соображений.

2. Расстояние по различию направлений деятельности сравниваемых ячеек:

$$\rho_H(Z_{ij}, Z_{pq}) = 0,0625 \cdot |H_{ij} - H_{pq}|,$$

где H_{ij} и H_{pq} – номера направлений описания деятельности человека $1 \leq H_{ij} \leq 18$ и $1 \leq H_{pq} \leq 18$ для ячеек Z_{ij} и Z_{pq} . Матрица H_{ij} , $i = \overline{1, 5}$, $j = \overline{1, 7}$ задается также априори, исходя из теоретических соображений.

3. Рейтинговое расстояние

$$\rho_{Re}(S_n, l) = \frac{Re[n, l] - 1}{L - 1}, \quad n = \overline{1, N}, \quad l = \overline{1, L},$$

где $Re[n, l]$ – рейтинг (ранг) l -ой деятельности (на первом месте самая приоритетная деятельность). Рейтинги деятельности задают субъекты путем заполнения таблицы «название деятельности – ее рейтинг (порядковый по приоритету номер)».

4. Расстояние по психологической несовместимости $\rho_{PS}(R(S_n), Z_{ij})$.

Пусть

$$\alpha^1(K_{ij}^{n+}), \alpha^1(K_{ij}^{n0}), \alpha^1(K_{ij}^{n-})$$

– степени выраженности по целевой ячейке Z_{ij} псевдокачества, нормы качества и антикачества во мне в отношении от меня к другому возможному члену коллектива;

$$\alpha^2(K_{ij}^{n+}), \alpha^2(K_{ij}^{n0}), \alpha^2(K_{ij}^{n-})$$

– степени выраженности этих трех составляющих качества, но уже в моем представлении от другого возможного члена коллектива по отношению ко мне, или другим людям. Пусть

$$\beta^1(K_{ij}^{n+}), \beta^1(K_{ij}^{n0}), \beta^1(K_{ij}^{n-}), \beta^2(K_{ij}^{n+}), \beta^2(K_{ij}^{n0}), \beta^2(K_{ij}^{n-})$$

– соответствующие степени значимости (важности) трех разновидностей качества по ячейке Z_{ij} .

Все перечисленные степени выраженности и значимости трех разновидностей качеств высчитываются с помощью отдельной программы по результатам специального психологического тестирования субъектов.

Тогда ненормированное $\rho'_{PS}(R(S_n), Z_{ij})$ и нормированное $\rho_{PS}(R(S_n), Z_{ij})$ расстояния по психологической несовместимости определяются следующим образом, соответственно:

$$\begin{aligned} \rho'_{PS}(R(S_n), Z_{ij}) = & 0,2(\alpha^1(K_{ij}^{n+})\beta^1(K_{ij}^{n+}) + \\ & + \alpha^2(K_{ij}^{n+})\beta^2(K_{ij}^{n+})) + \\ & + 0,8(\alpha^1(K_{ij}^{n-})\beta^1(K_{ij}^{n-}) + \alpha^2(K_{ij}^{n-})\beta^2(K_{ij}^{n-})) - \\ & - (\alpha^1(K_{ij}^{n0})\beta^1(K_{ij}^{n0}) + \alpha^2(K_{ij}^{n0})\beta^2(K_{ij}^{n0})), \\ \rho_{PS}(R(S_n), Z_{ij}) = & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho'_{PS}(R(S_n), Z_{ij}) - \min_{l \in \overline{1, L}} \rho'_{PS}(R(S_n), Z_{ij})}{\max_{l \in \overline{1, L}} \rho'_{PS}(R(S_n), Z_{ij}) - \min_{l \in \overline{1, L}} \rho'_{PS}(R(S_n), Z_{ij})}. \end{aligned}$$

1.3 Начальное разбиение общей совокупности на группы.

Первый критерий. Распределение субъектов по группам по минимуму расстояния субъектов до целевой ячейки. Для этого организуется цикл по субъектам общей совокупности S_n , $n = \overline{1, N}$: $S_n \in \Omega_n^l$, если $l_n \rightarrow \min_l \rho(R(S_n), Z_{ij})$.

В процессе выполнения этого цикла сохраняем полученные расстояния в матрице RO : $RO[n, l] = \rho(R(S_n), Z_{ij})$. В итоге получаем вектор распределения субъектов по группам: $LP[n] = l_n$, $n = \overline{1, N}$. Таким образом, формируется разбиение Ω .

Второй критерий. Проверка наполняемости групп субъектами. Если мощность множества $|\Omega_l| < N_l$, то к этому множеству добавляется субъект n'_0 (если $n = n'_0$, то субъект S_n максимально удален от всех остальных групп и минимально близок к Z_{ij}):

$$n_0^l \rightarrow \max_{S_n \in (\Omega_1, \Omega_2)} \left\{ \sum_{i \neq j}^L \rho(R(S_n), Z_{i'j'}) - \rho(R(S_n), Z_{i'j}) \right\}.$$

Последняя операция осуществляется до тех пор пока $|\Omega_l| \geq N_l, l = \overline{1, L}$.

1.4 Корректировка начального разбиения.

Корректировка начального разбиения осуществляется с использованием матрицы индивидуальных предпочтений и нерасположенностей к совместной деятельности, а также матрицы психологической несовместимости.

Пусть $Q[n_1, n_2], n_1 = \overline{1, N}, n_2 = \overline{1, N}$ – матрица индивидуальных предпочтений и нерасположенностей:

$$Q[n_1, n_2] = \begin{cases} 1, & \text{если } S_{n_1} \text{ предрасположен к } S_{n_2}; \\ 4, & \text{если } S_{n_1} \text{ нерасположен к } S_{n_2}; \\ 2, & \text{если } S_{n_1} \text{ не отметил } S_{n_2}. \end{cases}$$

Матрица попарных психологических несовместимостей $C'[n_1, n_2], n_1 = \overline{1, N}, n_2 = \overline{1, N}$:

$$C'[n_1, n_2] = \alpha^1 (K_{ij}^{n_1+}) \beta^1 (K_{ij}^{n_1+}) + \alpha^2 (K_{pq}^{n_1-}) \beta^2 (K_{pq}^{n_1-}) + \\ + \alpha^1 (K_{pq}^{n_2+}) \beta^1 (K_{pq}^{n_2+}) + \alpha^2 (K_{ij}^{n_2-}) \beta^2 (K_{ij}^{n_2-}) - \\ - [\alpha^1 (K_{ij}^{n_1 0}) \beta^1 (K_{ij}^{n_1 0}) + \alpha^2 (K_{ij}^{n_1 0}) \beta^2 (K_{ij}^{n_1 0}) + \\ + \alpha^1 (K_{pq}^{n_2 0}) \beta^1 (K_{pq}^{n_2 0}) + \alpha^2 (K_{pq}^{n_2 0}) \beta^2 (K_{pq}^{n_2 0})],$$

$$C_{\max} = \max_{n_1, n_2 (n_1 < n_2)} C'[n_1, n_2],$$

$$C_{\min} = \min_{n_1, n_2 (n_1 < n_2)} C'[n_1, n_2],$$

$$C[n_1, n_2] = \frac{C'[n_1, n_2] - C_{\min}}{C_{\max} - C_{\min}} \times \\ \times (1 - 0,5 \cdot (\rho_T(Z_{ij}, Z_{pq}) + \rho_H(Z_{ij}, Z_{pq}))) \times \\ \times (Q[n_1, n_2] + Q[n_2, n_1]).$$

В последней формуле использованы три критерия: критерий психологической несовместимости, принцип разнообразия внутри групп; удаленность по матрице индивидуальных нерасположенностей.

Преобразуем двумерную треугольную матрицу $C[n_1, n_2], n_1 < n_2$ в одномерный вектор $C^{sv}[m], m = \overline{1, N(N-1)/2}$ с помощью функции свертки индексов:

$$m = svertka(n_1, n_2) = N(n_1 - 1) + n_2.$$

При этом $C^{sv}[m] = C[n_1, n_2]$. Отсортируем вектор $C^{sv}[m], m = \overline{1, N(N-1)/2}$ по возрастанию. В результате получим вектор

$$C^{sort}[m'], m' = \overline{1, N(N-1)/2},$$

а также вектор $M^{rank}[m'], m' = \overline{1, N(N-1)/2}$.

$M^{rank}[m'] = m$ – номер элемента в векторе $C^{sv}[.]$, который после сортировки в векторе $C^{sort}[.]$ оказался на m' -ом месте $C^{sort}[m'] = C^{sv}[m]$. С помощью вектора $M^{rank}[m'], m' = \overline{1, N(N-1)/2}$

можно выделить наиболее совместимые и наименее совместимые пары субъектов. С помощью функции развертки: $m = M^{rank}[m']$: $rasvertka(m) = (n_1, n_2)$, где $n_1 = [m/N] + 1, n_2 = m - N \cdot [m/N]$ из первых элементов вектора $M^{rank}[.]$ берутся близкие друг к другу пары субъектов S_{n_1} и S_{n_2} из последних элементов этого вектора – удаленные друг от друга пары субъектов.

Пусть $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_L$ – группы субъектов, полученные в результате начального разбиения исходной совокупности.

1.5 Общая схема алгоритма корректировки начального разбиения. Представлена следующими тремя этапами.

Этап 1. Расчет показателей качества объединения субъектов в группы.

Этап 2. Проведение цикла «переброски» субъектов из одной группы в другую с целью оптимизации критериев средней попарной совместимости и разнообразия в группах при относительном сохранении средней удаленности субъектов S_{n_i} от своей целевой ячейки. Пусть $iter = 1$ (первая итерация по «переброскам»).

2.1. Блок объединения в одну группу двух близких по критерию совместимости субъектов.

2.2. Блок разнесения по разным группам двух далеких по критерию совместимости субъектов. Положим $iter = iter + 1$. Если $N - 2 \cdot iter \leq 2$, то идти на вывод результатов, иначе идти на блок 2.1 (объединение в одну группу двух близких субъектов).

Этап 3. Вывод результатов. Вывод вектора $LP[n], n = \overline{1, N}$ и векторов по группам $Nom^n[n_i], n_i = \overline{1, NL[l_n]}, l_n = \overline{1, L}$.

2 Апробация алгоритма

Предварительная апробация предложенного алгоритма была осуществлена на примере распределения студентов 2-го курса математического факультета УО ГГУ имени Ф.Скорины по трем специализациям. Desktopная версия реализации алгоритма написана на языке C# с использованием фреймворка ASP.NET MVC. Для получения исходных данных было проведено анкетирование студентов второго курса математического факультета специальности «Математика (научно-педагогическая деятельность)» из двух групп: M21 и M22. Студенты указали следующие данные: ФИО, дату рождения, средний балл, рейтинг каждой из групп дальнейшей специализации и индивидуальные расположенности или нерасположенности к членам формируемых команд.

Таким образом, после обработки данных в программном интерфейсе произошло разделение студентов по группам. В качестве начальных параметров было задано минимальное количество

во студентов в группе, веса интегрального расстояния (предварительное разбиение), параметры выравнивания численности групп и параметры корректировки начального разбиения с использованием матрицы индивидуальных расположений или нерасположенностей к другим субъектам.

Веса интегрального расстояния включают в себя: вес расстояния между субъектами по разности темпераментов; вес расстояния по различию направлений внутренней мотивации субъектов; вес расстояния между рейтингами групповых специализаций. Начальные значения весов равны $1/3$.

Параметры выравнивания численности групп: вес интегрального расстояния; вес показателя квалификации субъекта (показатель квалификации пропорционален среднему баллу и степени учета пожеланий субъекта, согласованной с рейтингом специализации). Начальные значения весов равны $1/2$.

Параметры корректировки начального разбиения: вес расстояния по разности темпераментов и направлений внутренней мотивации; вес отличий по матрице индивидуальных расположений или нерасположенностей. Начальные значения весов равны $1/2$.

Все эти параметры задаются экспертом аналитиком в процессе разбиения и могут корректироваться.

Полученное итоговое распределение студентов по группам в основном отражает их пожелания, по какой специализации они хотят продолжать учиться, их индивидуальные предпочтения и нерасположенности.

Заключение

Апробация разработанной программы показала её работоспособность, однако нерешенным в настоящем алгоритме осталась проблема учета слабых сторон участников формируемых групп, так как рассматривались только высокозначи-

мые для человека сильные корневые ячейки и никак не использовались знания о его незначимых темах деятельности. Опыт эксплуатации программы показал необходимость предоставления возможности эксперту работать пошагово, чтобы он по ходу работы программы видел влияние на результат всех критериев, а также мог вернуться к тому моменту, когда стали появляться неестественные с его точки зрения результаты разбиения.

Отметим, что основная задача созданного программно-алгоритмического инструментария – помочь специалисту выработать высоковероятные альтернативы по подбору людей, однако окончательный выбор и ответственность всегда остаются за лицом, принимающим решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каган, М.С.* Человеческая деятельность (Опыт системного анализа) / М.С. Каган. – М.: Политиздат, 1974. – 254 с.
2. *Тайгер, П.* Делай то, для чего ты рожден / П. Тайгер, Б. Тайгер. – М.: АСТ, 2005. – 688 с.
3. *Маслоу, А.* Мотивация и личность / А. Маслоу. – СПб.: Евразия, 1999. – 316 с.
4. *Фрейдджер, Р.* Теории личности и личностный рост / Р. Фрейдджер, Д. Фэйдимен. – М.: ОЛМА ПРЕСС, 2004. – 657 с.
5. *Осипенко, А.Н.* Метод генерации гипотез для выявления факторов ранней смертности населения / А.Н. Осипенко, Н.Б. Осипенко // Материалы юбилейной научно-практической конференции, посвященной 85-летию ГГУ им. Ф. Скорины (17 июня 2015 г.). Ч. 4. – Гомель, 2015. – С. 145–149.
6. *Осипенко, Н.Б.* Автоматизация диагностики потенциальных качеств человека при выборе профессии / Н.Б. Осипенко, А.Н. Осипенко, Ю.А. Слепенко // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 3 (28). – 88–96 с.

Поступила в редакцию 21.10.16.

МЕТОД СИНТЕЗА ПОЛНОГО КЛАССА БЕНТ-ФУНКЦИЙ ШЕСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

А.В. Соколов

Одесский национальный политехнический университет

SYNTHESIS METHOD OF A COMPLETE CLASS OF BENT-FUNCTIONS OF SIX VARIABLES

A.V. Sokolov

Odessa National Polytechnic University

Предложен метод построения полного класса бент-функций шести переменных на основе знакокодирующих матриц, структурных, асинхронных и синхронных перестановок применительно к теории бент-квадратов Агиевича. Полученный полный класс бент-функций может быть использован при решении многих проблем теории передачи информации, помехоустойчивого кодирования, криптографии и криптоанализа.

Ключевые слова: бент-функция, бент-квадрат Агиевича, знакокодирующая матрица, структурная перестановка, синхронная и асинхронная перестановка, преобразование Уолша-Адамара.

The synthesis method for constructing full class of bent-functions of six variables based on the sign coding matrices, structural, synchronous and asynchronous permutations applied to the theory of Agievich bent-squares is proposed. The resulting full class of bent-functions can be used to solve many problems in the theory of information transmission, error-correcting coding, cryptography and cryptanalysis.

Keywords: bent-function, Agievich bent-square, sign coding matrix, structure permutation, synchronous and asynchronous permutation, Walsh-Hadamard transform.

*Памяти д.т.н., профессора
Михаила Ивановича Мазуркова*

Введение

Бент-функции со времени своего введения О. Ротхаусом [1] представляют интерес для многих исследователей в виду своей огромной области применения в современных информационных технологиях, в частности, в криптологии. Бент-функции также находят свое применение в задачах построения сигналов с расширенным спектром, в теории кодирования и в комбинаторике [2]. Бент-функции, будучи максимально удаленными от аффинных булевых функций, являются сложным комбинаторным объектом: в настоящее время нет даже оценок их количества для числа переменных $k > 8$. Тем не менее, основной задачей теории бент-функций является построение методов синтеза их полных классов.

Булевы бент-функции чаще всего определяют через их таблицы истинности, называемые бент-последовательностями. В соответствии с определением [3], бинарная последовательность $B = [b_0, b_1, \dots, b_i, \dots, b_{n-1}]$ длины $n = 2^{2l} = N^2$, где $b_i \in \{\pm 1\}$, $i = 0, n-1$ – коэффициенты, называется бент-последовательностью, если она имеет равномерный по модулю спектр Уолша – Адамара $W_B(\omega)$, который представим в матричной форме $W_B(\omega) = BA$, $\omega = 0, n-1$, где A – матрица Уолша – Адамара порядка n .

Исходя из определения бент-функций, каждый спектральный коэффициент бент-последовательности $W_B(\omega = 0), W_B(\omega = 1), \dots, W_B(\omega = n-1)$ принимает значение из множества $\{\pm N\}$.

Одним из наиболее универсальных методов построения бент-последовательностей длины n является конструкция Майорана-МакФарланда, которая основана на конкатенации строк матрицы Адамара A порядка N , а также всех возможных $N!$ перестановок её строк и 2^N знаковых кодирований, в свою очередь, матрица Адамара A каждого следующего порядка 2^l строится в соответствии с рекуррентным правилом [4]

$$A_{2^l} = \begin{bmatrix} A_{2^{l-1}} & A_{2^{l-1}} \\ A_{2^{l-1}} & -A_{2^{l-1}} \end{bmatrix}, \text{ где } A_1 = 1. \quad (0.1)$$

Очевидно, число бент-последовательностей, которые могут быть получены таким образом, определяется выражением $J = 2^N N!$.

Известен также регулярный метод синтеза полных классов бент-функций от $k = 4$ переменных [5], основанный на четырех специальных обобщённых опорных матрицах, для которых определены правила заполнения, что позволяет строить бент-функции, минуя перебор. Тем не менее, оказывается, что для большего числа переменных число подобных опорных конструкций становится велико, что затрудняет дальнейшее развитие подобного метода.

Для синтеза полных классов бент-функций следующей длины $n = 64$ был разработан конструктивный метод, основанный на свойствах преобразования Рида-Маллера [6], однако, его применение связано с вычислительными затруднениями, что диктует необходимость более строгого математического описания полного класса бент-функций этой длины путем создания соответствующих методов синтеза.

Как показали исследования, лучшим математическим базисом для разработки подобных методов синтеза является теория бент-квадратов (БК), разработанная С. Агиевичем [7].

Для каждой бент-функции может быть найден соответствующий ей бент-квадрат. Бент-квадратом назовем матрицу S порядка N , каждой строкой и каждым столбцом которой является спектральный вектор (коэффициенты преобразования Уолша – Адамара бинарной последовательности). Строки бент-квадрата получаются в результате умножения сегмента бент-последовательности длины N на матрицу Адамара порядка N $S_i = B_i \cdot A_N$, где S_i – i -я строка бент-квадрата S ; B_i – i -й сегмент бент-последовательности.

В работе [7] показано, что для длины бент-последовательностей $n = 64$ существует 8 структур, неэквивалентных с точки зрения перестановок по строкам и столбцам и знаковых кодирований бент-квадратов:

$$\begin{aligned}
 S^1 &= \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \\
 S^2 &= \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad (0.2) \\
 S^3 &= \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \\
 S^4 &= \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -4 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S^5 &= \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}, \\
 S^6 &= \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}, \\
 S^7 &= \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -4 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}, \\
 S^8 &= \begin{bmatrix} -6 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -6 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -6 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & -6 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & -6 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & -6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & -6 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

С. Агиевичем была указана возможность построения бент-последовательностей длины $n = 64$ с помощью операций перестановок по строкам и столбцам и знакового кодирования бент-квадратов (0.2), однако, конкретные правила перестановок и знаковых кодирований показаны не были.

Целью настоящей статьи является разработка регулярных правил перестановок и знаковых кодирований строк и столбцов бент-квадратов Агиевича для построения полного класса бент-последовательностей длины $n = 64$.

1 Основные принципы выполнения операций перестановок и кодирований

Рассмотрим основные принципы выполнения операций перестановок по строкам и столбцам, а также знаковых кодирований, для чего введем несколько базовых определений.

Определение 1.1. Знакокодирующей бинарной матрицей назовем такую матрицу Z порядка N , у которой каждая строка и столбец представляют собой функцию Уолша [4] длины N .

Очевидно, для $N = 2$ все существующие бинарные матрицы являются знакокодирующими

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} + & + \\ + & + \end{bmatrix} \begin{bmatrix} + & + \\ - & + \end{bmatrix} \begin{bmatrix} + & - \\ + & + \end{bmatrix} \begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix} \\
 &\begin{bmatrix} - & + \\ + & + \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & + \\ - & + \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & - \\ + & + \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & - \\ - & + \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} + & + \\ + & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} + & + \\ - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} + & - \\ + & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} + & - \\ - & - \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

где, для краткости, под символом «+» понимается +1, а под символом «-» – значение -1.

Для построения всех знакокодирующих матриц 4×4 представим их в общем виде

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – знакокодирующие матрицы из (1.1).

Выбор такого вида матриц $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, чтобы конструкция (1.2) была знакокодирующей матрицей, должен происходить таким образом, чтобы все строки и столбцы (1.2) были функциями Уолша длины $N = 4$, т. е. совпадали бы с одной из следующих строк

$$\begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \\ - & - & - & - \\ - & + & - & + \\ - & - & + & + \\ - & + & + & - \end{bmatrix}.$$

Получить выполнение этого условия возможно в том случае, если в качестве матрицы β использовать знаковые кодирования функциями Уолша строк матрицы α , тогда как в качестве матрицы γ использовать знаковые кодирования функциями Уолша столбцов матрицы α , следя за выполнением определения знакокодирующей матрицы.

В качестве матрицы δ можно взять поэлементное произведение остальных матриц $\delta = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ или его инверсию. В соответствии с приведенными выше выкладками, оценивается число возможных комбинаций матриц $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ в конструкции (1.2)

$$\begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix},$$

таким образом, знакокодирующих матриц порядка $N = 4$ существует $J_4 = 16 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 512$. Аналогичным образом $J_8 = 512 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 2 = 65536$, $J_{16} = 2^{16} \cdot 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2 = 2^{25}$.

Рассмотрим базовые принципы проведения перестановок строк и столбцов бент-квадратов. Пусть V_8 – линейное векторное пространство $J = 2^k = 2^8 = 256$ векторов v_i длины $k = 8$. Тогда элементы этого пространства в бинарном виде

$$V_8 = \left\{ \begin{bmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & + & + & + & - \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ - & - & - & - & - & - & - & - \end{bmatrix} \right\}.$$

Для каждого элемента данного пространства единственным образом определяется спектральный вектор (коэффициенты преобразования Уолша – Адамара) как произведение

$$W_i = v_i \cdot A,$$

где A – матрица Уолша – Адамара порядка $N = 8$, построенная в соответствии с (0.1).

Среди всего полученного множества спектральных векторов W_i можно выделить три класса (где в круглых скобках указано количество позиций, в которых число перед скобками встречается среди элементов вектора):

- 1) векторы, компонентами которых являются числа $\{\pm 6(1), \pm 2(7)\}$, которых существует 128 штук;
- 2) векторы, компонентами которых являются числа $\{\pm 8(1), 0(7)\}$, которых существует 16 штук;
- 3) векторы, компонентами которых являются числа $\{\pm 4(4), 0(4)\}$, которых существует 112 штук.

Определение 1.2. *Позиционной структурой спектрального вектора называются номера позиций, на которых расположены ненулевые компоненты.*

Найдены множества таких векторов из третьего класса, каждый вектор внутри которого имел бы различную позиционную структуру. Эти векторы представлены в матрице слева, позиционные структуры – в матрице справа

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \\ -4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 0 & 4 & 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 4 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Например, для первой структуры выписаны все четырнадцать правил структурных перестановок

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 3 & 4 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 7 & 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 2 & 6 & 7 & 3 & 8 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 3 & 7 & 8 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 6 & 3 & 7 & 8 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 & 4 & 8 \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 3 & 7 & 4 & 8 \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 7 & 3 & 8 & 4 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 7 & 8 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Определение 1.3. Синхронные и асинхронные перестановки. Для столбцов или строк матрицы размера 4×4 существует всего $4! = 24$ различных способов перестановок строк и столбцов

1 2 3 4	1 2 4 3	1 3 2 4	1 3 4 2	1 4 2 3	1 4 3 2
2 1 3 4	2 1 4 3	2 3 1 4	2 3 4 1	2 4 1 3	2 4 3 1
3 1 2 4	3 1 4 2	3 2 1 4	3 2 4 1	3 4 1 2	3 4 2 1
4 1 2 3	4 1 3 2	4 2 1 3	4 2 3 1	4 3 1 2	4 3 2 1

(1.4)

Перестановку строк или столбцов матрицы порядка 8 мы можем представить как суперпозицию двух перестановок из (1.4)

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \end{array} \right], \quad (1.5)$$

где столбцы $c_1 \dots c_4$ могут быть переставлены, соответственно, $4!$ различными способами из (1.4), тогда как столбцы $c_5 \dots c_8$ должны переставляться синхронно со столбцами $c_1 \dots c_4$, т. е. для каждой перестановки $c_1 \dots c_4$, соответствующие номера старших столбцов определяются как

$$\begin{cases} c_5 = c_1 + 4; \\ c_6 = c_2 + 4; \\ c_7 = c_3 + 4; \\ c_8 = c_4 + 4, \end{cases}$$

такую перестановку будем называть **синхронной**.

Исследования показали, что также возможны и **асинхронные** перестановки столбцов, когда первые столбцы $c_1 \dots c_4$ выбираются из $4!$ различных перестановок, тогда как старшие столбцы $c_5 \dots c_8$ могут быть подвергнуты диадному сдвигу [8], т. е. одной из 4-х комбинаций

$$\left\{ \begin{array}{cccc} c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \\ c_6 & c_5 & c_8 & c_7 \\ c_7 & c_8 & c_5 & c_6 \\ c_8 & c_7 & c_6 & c_5 \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Далее, последовательно рассмотрены все восемь бент-квадратов (0.2) и для каждого представлены свои специфические правила перестановок строк и столбцов, а также знаковых кодирований, основанные на ранее введенных основных определениях.

2 Бент-квадраты Агиевича

Первый бент-квадрат Агиевича S_1 представляет собой известную ранее конструкцию Майорана-МакФарланда, где матрица S_1 является матрицей циркулянтном. Полное множество бент-функций, соответствующих структуре S_1 , может быть получено путем всех возможных знаковых кодирований строк (или столбцов), которых существует $J_{Z1} = 256 = 2^8$, а также всех возможных перестановок по строкам (или по столбцам), которых может быть выполнено $J_{P1} = 8! = 40320 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Отметим, что, поскольку

структура S_1 является матрицей циркулянтном, все перестановки по строкам эквиваленты перестановкам по столбцам.

Итого, количество бент-функций, соответствующих первой структуре, достигает

$$J_1 = 2^{15} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

Второй бент-квадрат Агиевича S_2 . Для выполнения операции знакового кодирования используем знакокодирующие матрицы. Бент-квадрат структуры S_2 может быть представлен в виде обобщенной структуры

$$\begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{bmatrix},$$

где $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ – матрицы четвертого порядка.

Знаковые кодирования допускают только структуры α_2 и δ_2 . В соответствии с правилами построения знакокодирующих матриц, структура α_2 допускает $512 = 2^9$ различных вариантов знаковых кодирований, тогда как структура δ_2 допускает только 2^4 вариантов знаковых кодирований по строкам (или по столбцам). Таким образом, с помощью знаковых кодирований получаем $J_{Z2} = 2^{13}$ различных бент-последовательностей.

Рассмотрим алгоритм выполнения перестановок бент-квадрата структуры S_2 . Структура δ_2 допускает $24 = 2^3 \cdot 3$ перестановок по строкам или по столбцам, тогда как перестановки в структуре α_2 не требуются исходя из того, что все они поглощаются знаковыми кодированиями. Перестановки между структурами $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ выполняются в соответствии с найденными четырнадцатью правилами

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 3 & 4 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 7 & 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 2 & 6 & 7 & 3 & 8 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 3 & 7 & 8 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 7 & 3 & 4 & 8 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccccccc} 5 & 1 & 6 & 2 & 7 & 3 & 8 & 4 \\ 5 & 1 & 6 & 2 & 3 & 7 & 4 & 8 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 7 & 8 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 & 4 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 3 & 7 & 8 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right],$$

которые используются как для перестановок по строкам, так и для перестановок по столбцам, причем пересечения структур при этом не происходит. Объем возможных перестановок составляет $J_{P2} = 24 \cdot 14^2$. Таким образом, полный объем бент-функций, которые могут быть получены на основе бент-квадрата S_2 , равняется $J_2 = 2^9 \cdot 2^4 \cdot 24 \cdot 14^2 = 2^{18} \cdot 3 \cdot 7^2$.

Третий бент-квадрат Агиевича S_3 . Для использования подхода к знаковому кодированию, основанному на знакокодирующих матрицах, рассмотрим бент-квадрат структуры S_3 в виде следующей обобщенной матрицы

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a_3 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & d_3 & 0 \\ \hline e_3 & 0 & f_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_3 \end{array} \right],$$

где $a_3, b_3, c_3, d_3, e_3, f_3, g_3$ – матрицы второго порядка.

В соответствии с правилом построения знакокодирующих матриц, a_3 допускает 16 различных вариантов, тогда как b_3 должно быть всеми возможными знаковыми кодированиями матрицы a_3 , т. е. допускает только 4 варианта. Матрица c_3 должна быть знаковыми кодированиями столбцов матрицы b_3 , что также допускает 4 варианта её выбора. В соответствии с правилом построения знакокодирующих матриц правый верхний квадрант должен быть всеми возможными знаковыми кодированиями строк левого верхнего. Т. е., матрица d_3 может принимать значения всех возможных построчных знаковых кодирований матрицы c_3 . Аналогично, матрица f_3 должна быть знаковыми кодированиями столбцов матрицы d_3 , тогда как матрица e_3 допускает только 2 значения – прямое и инверсное. Матрица g_3 , имеет всего 4 возможных варианта знакового кодирования. Итого, мы имеем

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2^4 & 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 2^2 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^2 \end{array} \right],$$

или всего $J_{23} = 2^{15}$ знаковых кодирований.

Рассмотрим алгоритм выполнения перестановок по строкам и столбцам в виде конкретных шагов:

Шаг 1. Перестановки по строкам.

Выполнение всех $8! = 40320$ перестановок по строкам показывает, что только 2688 перестановок исходной матрицы структуры S_3 приводят к новому бент-квадрату. Однако, только 336 имеют уникальные позиционные структуры. Из них можно выделить 26 базовых перестановок, на основе которых могут быть получены все остальные

$$\left[\begin{array}{cccccccc|cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 3 & 5 & 7 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 & 8 & 7 & 1 & 3 & 5 & 8 & 2 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 8 & 5 & 6 & 1 & 3 & 5 & 8 & 4 & 2 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 8 & 7 & 6 & 5 & 1 & 3 & 5 & 8 & 6 & 7 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 3 & 4 & 8 & 7 & 1 & 3 & 5 & 8 & 7 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 4 & 3 & 7 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 8 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 7 & 8 & 4 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 8 & 7 & 3 & 4 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & 8 & 3 & 4 & 6 & 5 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 8 & 6 & 5 & 3 & 4 & 3 & 4 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 4 & 6 & 8 & 3 & 4 & 7 & 8 & 6 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 4 & 2 & 8 & 6 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 6 & 8 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Остальные перестановки могут быть получены из базовых перестановок путем синхронных перестановок, выполненных в соответствии с таблицей правил размножения опорных перестановок.

Таблица 2.1 – Правила размножения опорных перестановок бент-квадрата S_3

Опорные перестановки	Правила размножения	Получаемый объем
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 19, 20, 21, 22	1 2 3 4 1 3 2 4 1 3 4 2 3 1 2 4 3 1 4 2 3 4 1 2	$6 \cdot 12 = 72$
9, 10, 23, 24, 25, 26	1 2 3 4 1 2 4 3 1 3 2 4 1 3 4 2 1 4 2 3 1 4 3 2 3 1 2 4 3 1 4 2 3 4 1 2 4 1 2 3 4 1 3 2 4 3 1 2	$6 \cdot 12 = 72$
11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18	Все возможные перестановки	$8 \cdot 24 = 192$
Сумма перестановок		336

Шаг 2. Нахождение перестановок по столбцам, которые не поглощаются перестановками по строкам. Очевидно, выполнив все полученные 336 перестановок по строкам и перестановок по столбцам, мы получаем 336^2 бент-квадратов, но только 9408 обладают уникальным набором позиционных структур. Итого, несовпадающие – каждая $336^2 / 9408 = 12$ -я.

Таким образом, существует 28 базовых перестановок по столбцам, которые при суперпозиции с каждой из перестановок по строкам не приводят к появлению эквивалентных позиционных структур

$$\left[\begin{array}{cccccccc|cccccccc} 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 3 & 7 & 5 & 6 & 8 & 4 & 2 \\ 7 & 1 & 8 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 1 & 3 & 7 & 5 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 7 & 1 & 3 & 5 & 8 & 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 7 & 5 & 2 & 4 & 8 & 6 \\ 7 & 1 & 3 & 5 & 6 & 4 & 2 & 8 & 1 & 3 & 5 & 7 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 7 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 8 & 2 & 1 & 3 & 5 & 7 & 6 & 8 & 2 & 4 \\ 7 & 1 & 3 & 5 & 2 & 8 & 6 & 4 & 1 & 3 & 5 & 7 & 4 & 2 & 8 & 6 \\ 7 & 1 & 2 & 8 & 3 & 5 & 6 & 4 & 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 7 & 8 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 & 1 & 3 & 4 & 2 & 7 & 5 & 6 & 8 \\ 1 & 7 & 3 & 5 & 8 & 2 & 6 & 4 & 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 7 & 8 & 6 \\ 1 & 7 & 3 & 5 & 6 & 4 & 8 & 2 & 1 & 3 & 2 & 4 & 7 & 5 & 8 & 6 \\ 1 & 7 & 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 8 & 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 7 & 6 & 8 \\ 1 & 7 & 3 & 5 & 2 & 8 & 4 & 6 & 1 & 2 & 7 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 7 & 2 & 8 & 3 & 5 & 4 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 8 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 7 & 5 & 8 & 6 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \right] \cdot (2.1)$$

Итого, полный объем перестановок $J_{P3} = 336 \cdot 28 = 9408 = 2^6 \cdot 3 \cdot 7^2$, тогда как количество

всех бент-функций, которые могут быть построены на основе бент-квадрата структуры S_3 , составляет $J_3 = 2^{21} \cdot 3 \cdot 7^2$.

Четвертый бент-квадрат Агиевича S_4 . В соответствии с подходом, основанным на знакокодирующих матрицах, представим бент-квадрат S_4 в обобщенном виде

$$\begin{bmatrix} \alpha_4 & \beta_4 \\ \gamma_4 & \delta_4 \end{bmatrix},$$

где $\alpha_4, \beta_4, \gamma_4, \delta_4$ – матрицы четвертого порядка.

Определим возможные знаковые кодирования матрицы α_4 , для чего продолжим обобщение

$$\alpha_4 = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_4 & b_4 \\ c_4 & d_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2^4 & 2 \\ 2 & 2^2 \end{bmatrix},$$

где a_4, b_4, c_4, d_4 – матрицы второго порядка.

Верхняя строка b_4 принимает значения, являющиеся знаковым кодированием верхней строки a_4 . Левый столбец c_4 принимает значения, являющиеся знаковым кодированием левого столбца a_4 , а матрица d_4 допускает все возможные знаковые кодирования.

Матрица β_4 состоит из 3-х строк, каждая из которых является знаковым кодированием соответствующих строк α_4 , которых может быть 2^3 . Аналогично, матрица γ_4 является знаковым кодированием соответствующих столбцов α_4 . Их также может быть 2^3 . Матрица δ_4 допускает только инверсный или прямой вариант своих 3-х строк, а также отрицательный или положительный элемент 8, т. е. всего 2^2 значений. Итого $\begin{bmatrix} 2^8 & 2^3 \\ 2^3 & 2^2 \end{bmatrix}$, таким образом, $J_{Z4} = 2^{16}$.

Выполнение всех возможных $8! = 40320$ перестановок по строкам показывает, что только 1344 из них приводят к формированию новых бент-квадратов. Экспериментальные данные по применению этих перестановок как по строкам, так и по столбцам приводят к выводу, что всего существуют $10752 = 2^9 \cdot 3 \cdot 7$ новых позиционных структур, т.е. каждая 168-я является уникальной.

Представим исходную структуру S_4 в виде двух структур, разделив матрицу на две равные части сначала по вертикали, а затем и по горизонтали $S_4 = [G_1 | H_1] = \begin{bmatrix} G_2 \\ H_2 \end{bmatrix}$.

Перестановки по строкам сначала матрицы G_1 , в соответствии с правилом синхронных и асинхронных перестановок, дают 96 различных

структур бент-квадратов, а затем выполнение 14 базовых для данной структуры перестановок

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 3 & 4 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 7 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 6 & 8 & 2 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 2 & 3 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 6 & 7 & 2 & 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 & 1 & 4 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 6 & 7 & 1 & 4 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 7 & 1 & 3 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 7 & 8 & 1 & 2 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

дает 1344 перестановки по строкам.

И далее, выписывая все перестановки по столбцам, которые не приводят к появлению повторяющихся позиционных структур, получаем

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 & 8 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 8 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 8 & 4 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 8 & 7 & 4 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 2 & 7 & 4 & 5 & 3 & 6 \\ 8 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Итого, объем допустимых перестановок составляет $J_{P4} = 2^6 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^3$, тогда как общий объем бент-функций, которые могут быть построены на основе бент-квадрата Агиевича структуры S_4 , составляет $J_4 = 2^{16} \cdot 2^6 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^3 = 2^{25} \cdot 3 \cdot 7$.

Пятый бент-квадрат Агиевича S_5 . Для осуществления знакового кодирования матрицы S_5 представим её в обобщенном виде

$$\begin{bmatrix} \alpha_5 & 0 \\ 0 & \alpha_5 \end{bmatrix},$$

где α_5 – матрица четвертого порядка.

Все позиции в матрицах α_5 являются активными, что, в соответствии с определением знакокодирующих матриц, приводит к объему возможных знаковых кодирований

$$\begin{bmatrix} 2^9 & 0 \\ 0 & 2^9 \end{bmatrix}, \text{ т. е. } J_{Z5} = 2^{18}.$$

Выполняя все $8! = 40320$ перестановок по строкам, устанавливаем, что только 8064 перестановки приводят к формированию нового бент-квадрата, но только 14 из них, приведенные в (1.3), приводят к формированию неповторяющихся структур бент-квадратов.

Для выполнения перестановок по столбцам может быть рассмотрена позиционная структура матрицы S_5

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Матрица S_5 состоит из двух различных позиционных структур. Ясно, что перестановка 5-го и 1-го столбца, а также 6-го и 2-го, 7-го и 3-го, 8-го и 4-го будут абсолютно эквивалентными некоторой другой перестановке столбцов и перестановке

строк. Например, применение одной из перестановок из (1.3) [5 1 2 6 3 7 8 4] приводит к формированию бент-квадрата

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -4 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & -4 & 0 \end{bmatrix},$$

что является эквивалентным применению перестановки по столбцам [1 5 6 2 7 3 4 8] и перестановки по строкам [5 6 7 8 1 2 3 4]. Аналогичным образом, не прибегая к перебору, можно показать, что все другие из вторых 7-ми перестановок из (1.3) эквивалентны одной из первых 7-ми перестановок из (1.3) и некоторой перестановке по строкам.

Таким образом, выполняя перестановки по строкам и по столбцам, можем получить $J_{P_5} = 14 \cdot 7 = 98 = 2 \cdot 7^2$ новых бент-функций, соответствующих бент-квадрату структуры S_5 , тогда как общий объем всех бент-функций, соответствующих этой структуре, достигает $J_5 = 2^{18} \cdot 2 \cdot 7^2 = 2^{19} \cdot 7^2$.

Шестой бент-квадрат Агиевича S_6 . Для применения знакокодирующих матриц к структуре бент-квадрата S_6 удобно представить его в следующем обобщенном виде

$$\begin{bmatrix} \alpha_6 & \beta_6 \\ \gamma_6 & \delta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_6 & b_6 & 0 & 0 \\ 0 & c_6 & d_6 & 0 \\ 0 & 0 & e_6 & f_6 \\ h_6 & 0 & 0 & g_6 \end{bmatrix},$$

где $\alpha_6, \beta_6, \gamma_6, \delta_6$ – матрицы четвертого порядка, $a_6, b_6, c_6, d_6, e_6, f_6, g_6, h_6$ – матрицы второго порядка.

Матрица a_6 допускает 16 значений, матрица b_6 – 4, знаковые кодирования строк матрицы a_6 . Матрица c_6 – знаковые кодирования столбцов матрицы b_6 . Матрица d_6 – знаковые кодирования строк матрицы c_6 . Матрица e_6 – знаковые кодирования столбцов матрицы d_6 . Матрица f_6 – знаковые кодирования строк матрицы e_6 . Матрица g_6 – знаковые кодирования столбцов матрицы f_6 . Матрица h_6 принимает только 2 варианта, прямой и инверсный. Таким образом, имеем

$$\begin{bmatrix} 2^4 & 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 & 2^2 \\ 2 & 0 & 0 & 2^2 \end{bmatrix},$$

т. е. общее число бент-функций, которые могут быть построены с помощью знаковых кодирований бент-квадрата структуры S_6 , составляет $J_{Z_6} = 2^{17}$.

Выполнение всех 40320 перестановок по строкам показывает, что 2688 перестановок приводят к формированию нового бент-квадрата, тогда как только $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ из них имеют уникальные структуры. Данные перестановки могут быть сформированы регулярным способом, для чего исходный бент-квадрат S_6 может быть представлен в виде обобщенной структуры

$$\begin{bmatrix} a_6 \\ b_6 \\ c_6 \\ d_6 \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

где каждая из строк a_6, b_6, c_6, d_6 эквивалентна двум строкам исходного бент-квадрата S_6 . Для структуры (2.2) допустимы $4! = 24$ перестановки и 7 объединяющих перестановок для полученного множества бент-квадратов

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 7 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 7 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 & 7 & 8 \end{bmatrix},$$

что дает 168 искомым перестановок по строкам.

Правила перестановок по столбцам определяются несколькими из 28-ми базовых перестановок (2.1), а также правилами их размножения (таблица 2.2).

Таблица 2.2 – Правила перестановок по столбцам бент-квадрата S_6

Опорные перестановки	Правила размножения	Получаемый объем
1 2 3 4 5 6 7 8	Синхронные перестановки 4 3 2 1 4 2 3 1 4 2 1 3 Асинхронные перестановки 1 2 3 4 3 4 1 2	$2 \cdot 3 = 6$
1 2 5 6 3 4 8 7	Синхронные перестановки 4 3 2 1 4 2 3 1 4 2 1 3 Асинхронные перестановки 1 2 3 4	$3 \cdot 1 = 3$

Продолжение таблицы 2.2

Опорные перестановки	Правила размножения	Получаемый объем
1 3 5 7 4 2 8 6	Синхронные перестановки	12
	4 3 2 1	
	4 3 1 2	
	4 2 3 1	
	Асинхронные перестановки	
	1 2 3 4	
	2 1 4 3	
	3 4 1 2	
	4 3 2 1	

Таким образом, с помощью перестановок по строкам и столбцам можно получить $J_{P_6} = 168 \cdot 21 = 3528 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2$ бент-функций, основанных на бент-квадрате структуры S_6 , тогда как общий объем бент-функций, основанных на бент-квадрате структуры S_6 , составляет $J_6 = 2^{20} \cdot 3^2 \cdot 7^2$.

Седьмой бент-квадрат Агиевича S_7 . Для применения подхода к знаковому кодированию бент-квадратов, основанного на закодирующих матрицах, удобно представить структуру S_7 в виде следующей обобщенной матрицы

$$\begin{bmatrix} a_7 & b_7 & c_7 & d_7 \\ e_7 & f_7 & g_7 & h_7 \\ i_7 & k_7 & l_7 & m_7 \\ n_7 & o_7 & p_7 & q_7 \end{bmatrix},$$

где $a_7, b_7, c_7, d_7, e_7, f_7, g_7, h_7, i_7, k_7, l_7, m_7, n_7, o_7, p_7, q_7$ – матрицы второго порядка.

Рассмотрим отдельно каждую структуру:

- 1) матрица a_7 допускает 16 вариантов знакового кодирования;
- 2) матрица b_7 – 2 варианта – прямая и инверсная первая строка матрицы a_7 ;
- 3) матрица e_7 – 2 варианта – прямой и инверсный первый столбец матрицы a_7 ;
- 4) матрица f_7 – все 4 доступных варианта;
- 5) матрица $\begin{bmatrix} c_7 & d_7 \\ g_7 & h_7 \end{bmatrix}$ – 8 вариантов знаковых кодирований последних 3-х строк матрицы $\begin{bmatrix} a_7 & b_7 \\ e_7 & f_7 \end{bmatrix}$;
- 6) матрица $\begin{bmatrix} i_7 & k_7 \\ n_7 & o_7 \end{bmatrix}$ – 8 вариантов знаковых кодирований последних 3-х столбцов матрицы $\begin{bmatrix} a_7 & b_7 \\ e_7 & f_7 \end{bmatrix}$;

$$7) \text{ матрица } \begin{bmatrix} l_7 & m_7 \\ p_7 & q_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{-4} & 0 & 0 & \overline{4} \\ 0 & \overline{-4} & 0 & \overline{4} \\ 0 & 0 & \overline{-4} & \overline{4} \\ \overline{4} & \overline{4} & \overline{4} & \overline{-4} \end{bmatrix}$$

является сложной, содержит 3 прямоугольника, которые допускают знаковые кодирования (представимы в прямом или инверсном виде), соответственно, допускает 2^3 знаковых кодирований.

Всего знаковых кодирований существует

$$\begin{bmatrix} 2^8 & 2^3 \\ 2^3 & 2^3 \end{bmatrix}, \text{ т. е. } J_{Z7} = 2^{17}.$$

Выполнение синхронных (1.5), а также асинхронных (1.6) перестановок по строкам позволяет сформировать $96 = 2^5 \cdot 3$ уникальных структур бент-квадратов структуры S_7 , к каждой из которых применимы перестановки (1.3), что дает $14 \cdot 96 = 1344$ уникальных бент-квадрата.

К каждой из полученных 1344-х перестановок могут быть применены базовые перестановки по столбцам, использование которых не приводит к появлению повторяющихся структур

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 8 & 5 & 7 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 8 & 2 & 7 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 4 & 3 & 8 & 7 \\ 6 & 7 & 3 & 2 & 4 & 1 & 5 & 8 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, с помощью перестановок по строкам и столбцам можно получить $J_{P7} = 7 \cdot 1344 = 9408 = 2^6 \cdot 3 \cdot 7^2$ бент-функций, основанных на бент-квадрате структуры S_7 . Следовательно, общий объем бент-функций, основанных на бент-квадрате структуры S_7 , составляет $J_7 = 2^{17} \cdot 2^6 \cdot 3 \cdot 7^2 = 2^{23} \cdot 3 \cdot 7^2$.

Восьмой бент-квадрат Агиевича S_8 . Для выполнения операции знакового кодирования целесообразно использовать закодирующие матрицы порядка $N = 8$, которых существует $J_{Z8} = J_8 = 2^{16}$ штук. Для выполнения операций перестановок по строкам (или по столбцам) могут быть применены все $J_{P8} = 8! = 40320 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ существующих перестановок. Поскольку бент-квадрат структуры S_8 является матрицей циркулянтном, все перестановки по столбцам поглощаются перестановками по строкам.

Таким образом, общий объем бент-функций, основанных на бент-квадрате структуры S_8 , составляет $J_8 = 2^{23} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

Таблица 2.3 суммирует результаты по разработанным правилам знакового кодирования и перестановкам строк и столбцов.

Анализируя результаты таблицы 2.3 нетрудно установить, что общее число синтезированных бент-функций

$$J_{bent64} = 5\,425\,430\,528,$$

что составляет полный класс всех бент-функций шести переменных.

Таблица 2.3 – Характеристики бент-квадратов

Номер бент-квадрата							
1	2	3	4	5	6	7	8
Количество знаковых кодирований							
2^8	2^{13}	2^{15}	2^{16}	2^{18}	2^{17}	2^{17}	2^{16}
Количество перестановок в виде множителей							
$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$2^5 \cdot 3 \cdot 7^2$	$2^6 \cdot 3 \cdot 7^2$	$2^9 \cdot 3 \cdot 7$	$2 \cdot 7^2$	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2$	$2^6 \cdot 3 \cdot 7^2$	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
Количество перестановок							
40320	4704	9408	10752	98	3528	9408	40320
Количество бент-последовательностей в эквивалентном классе							
$2^{15} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$2^{18} \cdot 3 \cdot 7^2$	$2^{21} \cdot 3 \cdot 7^2$	$2^{25} \cdot 3 \cdot 7$	$2^{19} \cdot 7^2$	$2^{20} \cdot 3^2 \cdot 7^2$	$2^{23} \cdot 3 \cdot 7^2$	$2^{23} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

Заключение

Отметим основные результаты проведенных исследований:

- впервые предложены определения и разработаны методы синтеза знакокодирующих матриц, структурных перестановок, а также синхронных и асинхронных перестановок применительно к теории бент-квадратов Агиевича;

- получила дальнейшее развитие теория бент-квадратов Агиевича, в результате чего разработаны регулярные правила знаковых кодирований и перестановок по строкам и по столбцам всех восьми бент-квадратов Агиевича порядка $N = 8$;

- регулярными методами синтезирован полный класс бент-функций шести переменных.

Таким образом, разработанные методы, позволяющие синтез бент-функций, минуя переборные операции, являются существенным развитием теории бент-функций, могут быть применены в современных технологиях передачи информации, помехоустойчивом кодировании, а также в криптографии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rothaus, O.S. On “bent” functions / O.S. Rothaus // J. Comb. Theory Ser. A. – USA: Academic Press Inc, 1976. – № 20 (3). – P. 300–305.
2. Соколов, А.В. Конструктивный метод синтеза нелинейных S-блоков подстановки, соответствующих строгому лавинному критерию / А.В. Соколов // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. – 2013. – Т. 56, № 8. – С. 43–52.

3. Токарева, Н.Н. Бент-функции: результаты и приложения. Обзор работ / Н.Н. Токарева // Приклад. дискрет. математика. – Томск, 2009. – Сер. № 1 (3). – С. 15–37.

4. Мазурков, М.И. Системы широкополосной радиосвязи / М.И. Мазурков // Одесса: Наука и Техника. – 2010. – 340 с.

5. Мазурков, М.И. Регулярные правила построения полного класса бент-последовательностей длины 16 / М.И. Мазурков, А.В. Соколов // Пр. Одес. політехн. ун-ту. – 2013. – № 2 (41). – С. 231–237.

6. Qingshu, Meng A novel algorithm enumerating bent functions / Qingshu Meng, Min Yang, Huanguo Zhang, Jingsong Cui // Discrete Mathematics. – 2008. – Vol. 308, № 23. – P. 5576–5584.

7. Agievich S.V. On the representation of bent functions by bent rectangles. – Probabilistic Methods in Discrete Mathematics: Proceedings of the Fifth International Petrozavodsk Conference (Petrozavodsk, June 1–6, 2000). Utrecht, Boston: VSP. – 2002. – P. 121–135.

8. Мазурков, М.И. Быстрые ортогональные преобразования на основе бент-последовательностей / М.И. Мазурков, А.В. Соколов // Информатика та математичні методи в моделюванні. – Одеса, 2014. – № 1. – С. 5–13.

Поступила в редакцию 22.07.15.

УДК 004.42:373

АНАЛИЗ ТРЕБОВАНИЙ К ШКОЛЬНОМУ РАСПИСАНИЮ С УЧЕТОМ СПЕЦИФИКИ БЕЛОРУССКОГО ЗАКОНОДАТЕЛЬСТВА

А.С. Филипенко, К.В. Овсянников, С.В. Болотов

Белорусско-Российский университет, Могилев

ANALYSIS OF SCHOOL SCHEDULE REQUIREMENTS TAKING INTO ACCOUNT SPECIFICITY OF THE BELARUSIAN LEGISLATION

A.S. Filipenka, K.V. Ausiannikau, S.V. Bolotov

Belarusian-Russian University, Mogilev

Изложены требования к составлению расписания в Республике Беларусь. Алгоритм, составляющий расписание в автоматическом режиме, должен учитывать нюансы этих требований, для того чтобы полученное расписание можно было считать приемлемым для белорусских школ.

Ключевые слова: составление расписания, обзор, санитарные нормы, школьное расписание, комбинаторная оптимизация.

The requirements for schools scheduling in the Republic of Belarus are described. The algorithm for automatic scheduling, must take into account the nuances of these requirements, in order that the resulting schedule can be considered acceptable for the Belarusian schools.

Keywords: scheduling, overview, sanitary norms, school schedule, combinatorial optimization.

Введение

Составление школьного расписания в Республике Беларусь имеет ряд особенностей, которые отличает данный процесс от аналогичных в других странах, например, в Российской Федерации.

Особое внимание следует уделить санитарным нормам, принятым министерством образования Республики Беларусь [1].

1 Анализ требований

На основании опроса экспертов, с учетом санитарных норм, были сформированы основные требования к алгоритму для построения школьного расписания в РБ:

1. Расчёт расписания должен быть завершён за приемлемое время.
2. Возможность улучшения существующего расписания.
3. Каждому занятию должно быть назначено время.
4. Каждому занятию должен быть назначен кабинет.
5. В одной группе в одно время должно проходить не больше одного занятия.
6. У одного преподавателя в одно время может быть только одно занятие.
7. В одном кабинете в одно время может проходить только одно занятие.
8. Возможность назначения занятиям времени так, чтобы занятия в одном классе по одному предмету были строго в разные дни.
9. Возможность спаривать занятия.
10. Возможность фиксирования за занятием определённого времени.

11. Отсутствие «окон» в расписании классов.

12. Минимизация «окон» у преподавателей.

13. Возможность создания элективных занятий. Это необходимо, чтобы, например, правильно распределить иностранный язык, когда класс делится на группы для изучения определённых языков у разных преподавателей в разных кабинетах.

14. Расписание учебных занятий на учебную неделю составляется с учетом ранговой шкалы трудности учебных предметов.

15. Учебные предметы, требующие большого умственного напряжения, сосредоточенности и внимания, не должны изучаться на первом или последнем учебном занятии чаще одного раза в неделю в одном классе [1].

16. В расписании учебных занятий в течение учебного дня необходимо чередовать учебные предметы, требующие большого умственного напряжения, сосредоточенности и внимания с другими предметами [1].

Исходя из вышеизложенного можно однозначно сделать вывод о том, что задача составления школьного расписания изобилует различными нюансами и особенностями. При этом, несоответствие полученного расписания хотя бы одному из требований делает все труды на составление напрасными, а само расписание – непригодным к использованию.

2 Анализ сложности задачи

Кроме требований к расписанию, необходимо так же подвергнуть тщательному изучению вычислительную сложность поставленной задачи.

С математической точки зрения задача построения оптимального расписания учебных занятий является достаточно сложной, поскольку она принадлежит классу так называемый NP-трудных задач [2]. Исходя из этого факта, можно смело утверждать, что создание алгоритма, способного составить расписание занятий, по качеству сравнимое с расписанием, полученным традиционным путём за приемлемое время (здесь можно смело говорить о нескольких часах), является очень серьёзным достижением [3]. Так же из этого следует, что создание точного алгоритма для данной задачи практически невозможно, так как большая размерность делает невозможным применение каких-либо переборных методов, даже оптимизированных [4].

Принимая во внимание вышесказанное и результаты предыдущих исследований [2], [3], [5], [6], одним из самых перспективных направлений в решении проблемы составления школьного расписания видится применение метаэвристик [7], показывающих хорошие результаты при решении сложных задач комбинаторной оптимизации, например, задачи о коммивояжёре, а так же находящихся широкое применение в машинном обучении [8].

3 Сравнительный анализ существующих систем

Имеется большое количество программ для составления расписания, в том числе и русскоязычных. Имеет смысл оценить возможности данных программ с целью выяснения вопроса – насколько качественно решается поставленная задача?

Опрос завучей школ (проводился опрос завучей могилевских школ) показал, что попытки использования программ предпринимались неоднократно, но в целом безуспешно.

Далее будет проведён сравнительный анализ трёх систем для составления школьного расписания: 1) «Ректор-Школа»; 2) «ХроноГраф 3.0»; 3) «aSc TimeTables».

Данные системы были выбраны на основании того, что все они достаточно распространены и более выглядят «зрелыми» по сравнению с другими подобными системами. Кроме того, «Ректор-Школа» и «aSc TimeTables» являются коммерческими продуктами. Эти факты позволяют считать, что выбранные системы являются одними из лучших представителей семейства программ для автоматизированного составления расписаний.

Таблица 3.1 – Сравнение систем для составления школьного расписания

	Ректор-Школа	ХроноГраф3.0	aSc TimeTables
Расписание построено	+	–	+
Расчёт завершён за приемлемое время	+	+	+
Возможность улучшения существующего расписания.	+	+	+
Каждому занятию назначено время	+	–	+
Каждому занятию назначен кабинет	+	+	+
В одном классе в одно время проходит не больше одного занятия.	+	+	+
У одного преподавателя на одно время назначено только одно занятие	+	+	+
В одном кабинете в одно время проходит только одно занятие	+	+	+
Занятия по одинаковым предметам в классах проходят строго в разные дни	+	+	+
Возможность спаривать занятия	+	+	+
Возможность фиксирования за занятием определённого времени	+	+	+
Отсутствие «окон» в расписании классов	+	+	+
Минимизация «окон» у преподавателей	+	+	+
Возможность создания элективных занятий	+	+	+
Расписание учебных занятий на учебную неделю составляется с учетом ранговой шкалы трудности учебных предметов	+	+	–
Учебные предметы, требующие большого умственного напряжения, сосредоточенности и внимания, не должны изучаться на первом или последнем учебном занятии чаще одного раза в неделю в одном классе	–	–	–
В расписании учебных занятий в течение учебного дня необходимо чередовать учебные предметы, требующие большого умственного напряжения, сосредоточенности и внимания, с другими предметами	–	–	–

Алгоритмы, положенные в основу этих систем, не раскрываются. Однако анализ данных продуктов может помочь достаточно точно оценить текущее положение вещей и установить адекватные цели для дальнейших исследований в этой области.

Основная цель анализа – проверить выбранные системы на соответствие требованиям, указанным выше.

Для проведения анализа подготовлен реальный набор данных, описывающий самую обычную белорусскую сельскую школу. Выбранная школа не является самым сложным вариантом задачи, которая может возникнуть на практике, однако достоверность входных данных позволяет считать проверку выбранных систем вполне «реальной».

Далее представлен анализ результатов, полученных при решении одной и той же задачи с использованием выбранных для этого систем.

Как видно из результатов проведённого анализа, системам «Ректор-Школа» и «aSc TimeTables» удалось построить расписание, система «ХроноГраф 3.0» с данной задачей не справилась, однако «ХроноГраф 3.0» не построил расписание при включённой опции «СанПин», при выключении этой опции получить расписание, где всем занятиям назначено время, всё же возможно.

Так же хочется отметить богатый функционал всех представленных систем, например, работа с элективными курсами, возможности по закреплению занятий и т. д. Все эти функции можно назвать «обязательными» для подобных систем, в представленных решениях они присутствуют. Этот факт говорит о глубоких знаниях авторов систем в предметной области.

Наряду с высокой функциональностью в исследуемых продуктах присутствует и серьёзный недостаток, который не позволяет их использовать в школах Республики Беларусь – это практическое отсутствие полной поддержки санитарных норм, принятых в РБ [2]. Учитывая этот факт, представленные системы можно использовать лишь для создания начального решения, которое потом должно дорабатываться вручную, что, в целом, сложнее, чем создать начальное расписание. Кроме того, создание начального расписания требует ввод в систему всех входных данных, что так же отнимает время, которое может оказаться вполне сравнимым со временем, затрачиваемым завучем на составление начального расписания, которое может быть сформировано исторически, другими словами, в большинстве школ найдётся более-менее удачное расписание, с которого обычно и стартует каждое новое построение.

Заключение

Изложенные факты можно назвать главными причинами неиспользования систем для построения школьных расписаний в Республике Беларусь.

Как было указано выше, сравнительный анализ существующих систем показывает, что создание программной системы, которая будет строить школьное расписание с учетом санитарных норм, является актуальным. Таким образом, необходимо синтезировать алгоритм для автоматического построения школьного расписания, повторяющий признанные экспертами предметной области функции существующих систем с дополнительной поддержкой санитарных норм, принятых в Республике Беларусь.

Таким образом, это направление исследований является очень актуальным [2], [9] для Беларуси, так как говорить о более-менее успешных проектах, используемых в белорусских школах, не приходится. Завучи по учебной работе до сих пор составляют расписания занятий вручную и тратят на это очень много рабочего времени и сил, причиной этому является фактическое отсутствие решений, покрывающих все необходимые аспекты составления школьного расписания в РБ.

Изучение комбинаторной оптимизации, к приложениям которой можно отнести построение расписаний, носит актуальный характер в современных условиях. Об этом свидетельствует частое изучение поднятых вопросов. Актуальность проблемы только возрастает, так как в современном мире постоянно появляется всё больше и больше сфер деятельности, где решение подобной задачи может принести очень ощутимый экономический и качественный эффект, например, в логистике.

Вследствие чрезвычайной сложности проблемы составления школьного расписания, лучшее, чего удалось добиться исследователям к настоящему моменту, это разработка ряда эвристических алгоритмов, которые позволяют получить некоторые положительные результаты в определённых условиях. Зачастую приходится говорить лишь о том, что метод хорошо подходит для какого-то определённого университета или школы [5], и работает хуже или вообще не работает в других местах, где его пытались применить.

Целью данного исследования является попытка синтеза подобного алгоритма, способного решать задачи составления школьного расписания, возникающие в школах Республики Беларусь.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Санитарные нормы, правила и гигиенические нормативы* [Электронный ресурс] / Министерство образования республики Беларусь. – Минск, 2011. - Режим доступа: <http://edu.gov.by/page-14901>. – Дата доступа: 01.07.2016.
2. *Проблема полной автоматизации при составлении школьного расписания* [Электронный ресурс] / <http://www.mnogosmenka.ru/>. – Москва, 2004. – Режим доступа: <http://www.mnogosmenka.ru/pilikov/timetable.htm>. – Дата доступа: 01.07.2016.

3. *Задача составления школьного расписания* [Электронный ресурс] / <http://www.mnogosmenka.ru/>. – Москва, 2004. – Режим доступа: <http://www.mnogosmenka.ru/pilikov/school.htm>. – Дата доступа: 01.07.2016.

4. *Алгоритмы для NP трудных задач. Введение* [Электронный ресурс] / Youtube.com. – San Bruno, 2006. – Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch>. – Дата доступа: 01.07.2016.

5. Müller, T. Real-life curriculum-based timetabling with elective courses and course sections / T. Müller, H. Rudová // *Annals of Operations Research*, ISSN 0254-5330, DOI 10.1007/s10479-014-1643-1, 2014.

6. Гэри, М. *Вычислительные машины и трудно решаемые задачи* / М. Гэри, Д. Джонсон. – М.: Мир, 1982. – 416 с.

7. *Метаэвристические алгоритмы для задач комбинаторной оптимизации* (обзор). Щербина О.А. [Электронный ресурс] / Таврический Вестник Информатики и Математики. – Симферополь, 2002. – Режим доступа: http://tvim.info/files/56_72_Shcherbina.pdf. – Дата доступа: 01.07.2016.

8. *Машинное обучение: начало* [Электронный ресурс] / Youtube.com. – San Bruno, 2006. – Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch>. – Дата доступа: 01.07.2016.

9. Балтак, С.В. Построение расписания учебных занятий на основе раскраски вершин графа / С.В. Балтак, Ю.Н. Сотсков // *Информатика*. – 2006. – № 3. – С. 58–69.

Поступила в редакцию 06.07.16.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;

- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).