



ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№2 (27) 2016

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

Главный редактор:
А.В. Рогачев (Беларусь)

Заместитель главного редактора:
О.М. Демиденко (Беларусь)

Редакционная коллегия:

В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

Ответственный секретарь:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

Адрес редакции:

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

Editor-in-Chief:
A.V. Rogachev (Belarus)

Deputy Editor-in-Chief:
O.M. Demidenko (Belarus)

Editorial board:

V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

Executive Secretary:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

Edition address:

F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 2 (27) 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

- Ахундова Г.А.** Исследование уменьшения интенсивности акустической волны в океане . . . 7
- Достанко А.П., Голосов Д.А., Завадский С.М., Мельников С.Н., Окоджи Д.Э., Котинго Д.Д., Рубан Г.М.** Формирование пленок нитрида титана методом реактивного магнетронного распыления при пониженном давлении 12
- Митюрин Г.С., Черненко Е.В., Свиридова В.В., Сердюков А.Н.** Формирование фотодифлекционного отклика в гиротропной сверхрешетке, облучаемой бесселевым световым пучком . . 18
- Савенко В.С., Силивонец А.Г., Ермоковец С.А.** Влияние пондеромоторных факторов на микроструктурные характеристики магния при электропластической деформации 24
- Ярмоленко М.А., Рогачев А.А., Рогачёв А.В.** Влияние технологических режимов формирования на структуру и свойства покрытий на основе полимеров, осаждаемых из активной газовой фазы (обзор). 1. Влияние условий и режимов генерации активной газовой фазы 29

МАТЕМАТИКА

- Бураковский В.В.** Симметричная маркерная кольцевая локальная сеть со случайным выбором дисциплины обслуживания 39
- Лукьяненко В.О.** О холловых подгруппах конечных групп 42
- Мысловец Е.Н., Васильев А.Ф.** Конечные обобщенно s -сверхразрешимые группы и их взаимно перестановочные произведения 45
- Нестерович А.В.** Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой трехслойной пластины 54
- Старовойтов А.П., Казимиров Г.Н., Сидорцов М.В.** Асимптотика аппроксимаций Эрмита – Паде экспоненциальных функций с комплексными множителями в показателях экспонент 61

ИНФОРМАТИКА

- Демиденко О.М., Смородин В.С., Сукач Е.И., Жердецкий Ю.В.** Автоматизация проектного моделирования систем управления технологическими процессами производства с элементами потенциальной опасности 68
- Кириченко В.В.** Аналитический обзор алгоритмов сжатия цифровой информации 77
- Кузнецов Д.И., Купин А.И.** Информационная система интеллектуального регулирования микроклимата жилых помещений 84
- Листопад Н.И., Михневич С.Ю., Хайдер А.А.** QoS маршрутизация информационных потоков в сетях телекоммуникаций 90

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Г. Н. Петухова, Т. А. Фицнер*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 31.05.16. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 11,6. Уч.-изд. л. 10,1. Тираж 100 экз. Заказ № 377.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246019, Гомель

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2016
© Проблемы физики, математики и техники, 2016
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2016

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 2 (27) 2016

CONTENTS

PHYSICS

Akhundova G.A. Study of the reduce of the intensity of the acoustic waves in the ocean	7
Dostanko A.P., Golosov D.A., Zavadski S.M., Melnikov S.N., Okojie J.E., Kotingo J.D., Ruban G.M. Formation of titanium nitride films by reactive magnetron sputtering under low pressure	12
Mityurich G.S., Chernenok E.V., Sviridova V.V., Serdyukov A.N. The formation of photodeflection response in gyrotropic superlattice irradiated by Bessel light beams	18
Savenko V.S., Silivonec A.G., Ermokovec S.A. Influence of ponderomotive factors on mikrostrukture characteristics of magnesium during elektroplastic deformation	24
Yarmolenko M.A., Rogachev A.A., Rogachev A.V. Influence of technological processes of forming on the properties of coatings based on polymers deposited from active gas phase (review). 1. Effect of conditions and modes of gas phase generation	29

MATHEMATICS

Burakovski V.V. Symmetric token passing ring local area network with random choice of service discipline	39
Lukyanenko V.O. On Hall subgroups of finite groups	42
Myslovets E.N., Vasil'ev A.F. Finite generalized c -supersoluble groups and their mutually permutable products	45
Nesterovich A.V. The nonaxisymmetric termoforces deformation of the circular sandwich plate in the plane	54
Starovoitov A.P., Kazimirov G.N., Sidorzov M.V. Asymptotics of Hermite – Padé approximation of exponential functions with complex multipliers in the exponent	61

INFORMATION SCIENCE

Demidenko O.M., Smorodin V.S., Sukach E.I., Zherdetsky Y.V. Automation of project simulation of control systems of the process of production with the elements of potential hazard	68
Kirichenko V.V. Analytical review of compression algorithms of digital information	77
Kuznetsov D.I., Kupin A.I. Information system of intellectual control of microclimate in premises	84
Listopad N.I., Mikhnevich S.Yu., Hayder A.A. QoS based routing of information flows in telecommunication networks	90

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

- Technics (Informatics, Computer Science and Control);***
- Physics and Mathematics.***

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 532.59; 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ УМЕНЬШЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В ОКЕАНЕ

Г.А. Ахундова

Азербайджанская государственная Морская Академия, Баку

STUDY OF THE REDUCE OF THE INTENSITY OF THE ACOUSTIC WAVES IN THE OCEAN

G.A. Akhundova

Azerbaijan State Marine Academy, Baku

Исследуется влияние пузырьков газа на поглощение звуковой волны в жидкости. Показано, что коэффициент поглощения, согласно классической теории затухания, возрастает с увеличением вязкости жидкой фазы. Результаты численных расчетов показали, что затухание звука в газожидкостной среде усугубляется тем, что поглощение наиболее сильно происходит именно на резонансной частоте.

Ключевые слова: газожидкостная среда, газированная жидкость, звуковая волна, объемная концентрация, двухфазный поток, уравнение состояния.

The influence of gas bubbles on the absorption of sound wave in the liquid is investigated. It is shown that the absorption coefficient increases with the increases of viscosity of the liquid phase according to the classical theory of damping. The numerical results showed that the damping of the sound in the gas-liquid surrounds aggravated by the fact that the absorbing is getting much stronger exactly at the resonance frequency.

Keywords: gas, bubble, frequency, sound wave, oscillation, sound absorption, density, pressure field, fluctuation damping, volume concentration.

Введение

К одной из фундаментальных проблем механики относится изучение воздействия Мирового океана на эксплуатируемые в нем объекты техники: буровые платформы, океанские суда и т. д. Одним из факторов влияния оказываются акустические волны. С каждым годом это становится все более актуальной задачей, как в научном, так и в техническом отношении. Все время возникают новые проблемы и становится ясным, что многие, казалось бы, давно изученные вопросы, оказываются более сложными, чем это предполагалось, и все еще далеки от своего решения [1], [2].

В настоящее время широко используются дистанционные методы экспериментального исследования Мирового океана с помощью радиоволн. Радиоволны практически совсем не проникают в морскую воду вследствие ее электропроводности и затухают на расстоянии много меньше длины волны. Освещенность видимой части светового спектра падает в морской воде в тысячи раз на протяжении десятков, в лучшем случае, одной-двух сотен метров. И лишь звуковые волны могут распространяться в водной среде на сотни километров. Это несомненное преимущество акустических волн над другими видами излучения определило их широкое использование в приборах, предназначенных для работы в водах морей и океанов.

Распространение акустических колебаний в море также сопровождается уменьшением их интенсивности. Причины затухания звуковых волн в море не исчерпываются лишь вязкостью, теплопроводностью, релаксационными (молекулярными) процессами, т. е. поглощением. В такой неоднородной среде, как морская вода, важной причиной затухания является рассеяние волны неоднородностями, рассредоточенными в толще воды. Особая роль здесь принадлежит таким рассеивателям, как газовые пузырьки.

Рассеяние звуковой волны неоднородностями среды зависит от формы и размеров неоднородностей, от сжимаемости и плотности их вещества (соответственно от волнового сопротивления). Если сжимаемость и плотность такие же, как у среды, то неоднородности не вызывают рассеяния, независимо от их размеров и формы. В противном случае рассеяние в той или иной мере будет наблюдаться [3].

Газовый пузырек – это неоднородность, отличающаяся и плотностью, и сжимаемостью от воды. Плотность жидких тел очень мало изменяется при изменении давления – внутренние силы стойко сопротивляются внешнему воздействию, стремящемуся уменьшить или увеличить объем, занимаемый данной массой вещества. Это сопротивление столь велико, что для решения многих задач жидкости можно считать несжимаемыми. Однако даже очень малые изменения плотности твердых и жидких сред, происходящие при

изменении давления, в акустике играют перво-степенную роль и ими пренебрегать нельзя.

1 Постановка задачи

Исследуем влияние пузырьков газа на поглощение звуковой волны в жидкости. При этом, в отличие от опубликованных работ, допустим, что состояния пузырьковой жидкости с учетом капиллярных эффектов описываются уравнением, предложенным в работе [4]. Запишем уравнения неразрывности, одномерного движения и состояния жидкости в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\alpha_{20}(1+S)\rho/\rho_0}{1-\alpha_{10}\rho/\rho_0} - S \cdot \sqrt{\frac{\alpha_{20}\rho/\rho_0}{1-\alpha_{10}\rho/\rho_0}}, \quad (1.3)$$

$$S = \frac{2\sigma}{R_0 p_0}.$$

Волны можно рассматривать как возмущения малой амплитуды, учет которых позволяет проводить линеаризацию уравнений (1.1)–(1.3):

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0, \quad (1.4)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0, \quad (1.5)$$

$$\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} = C_0^2, \quad C_0 = \sqrt{\frac{p_0}{\alpha_{20}\rho_0} \cdot \frac{3+2S}{3}}, \quad (1.6)$$

где \bar{p} , $\bar{\rho}$, \bar{u} представляют собой возмущения соответствующих характеристик акустической волны.

Из уравнений (1.4) и (1.6) следует

$$\frac{1}{C_0^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0. \quad (1.7)$$

Если это уравнение продифференцировать по t , а уравнение (1.5) продифференцировать по x , то удастся исключить возмущение скорости и получить волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial t^2} = C_0^2 \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2}. \quad (1.8)$$

В статье приняты следующие обозначения: ρ – плотность, p – давление, C_0 – скорость звука, $v_\phi(k)$ – фазовая скорость, $\lambda(k)$ – длина волны, $\omega_{**}(k)$ – декремент затухания, α_{10} , α_{20} – объемное содержание жидкости и газа, σ – поверхностное натяжение, R_0 – радиус пузырька, n – количество пузырьков в единице объема смеси.

2 Аналитическое решение

В водной среде акустические колебания являются продольными. Рассмотрим наиболее простой и представляющий практический интерес

случай плоских гармонических продольных волн в виде действительной части комплексного выражения:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \bar{p}^0 \exp[i(k_*x + \omega_*t)], \\ \bar{p}^0 &= \bar{p}_*^0 + i\bar{p}_{**}^0, \quad |\bar{p}^0| \ll 1, \quad k_* = k + ik_{**}, \\ \omega_* &= \omega + i\omega_{**}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где \bar{p}^0 определяет амплитуду возмущений давления.

Возможны два типа решения.

Тип I. Решение или волна первого типа, когда $k_* = k$ – действительное положительное число ($k > 0, k_{**} = 0$).

В этом случае будем иметь:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= (\bar{p}_*^0 + i\bar{p}_{**}^0) \exp[i(kx + \omega t + i\omega_{**}t)] = \\ &= (\bar{p}_*^0 + i\bar{p}_{**}^0) \exp(-\omega_{**}t) \times \\ &\quad \times [\cos(kx + \omega t) + i \sin(kx + \omega t)], \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}\{\bar{p}\} = \exp(-\omega_{**}t) |\bar{p}^0| \sin[\varphi + (kx + \omega t)].$$

Здесь $|\bar{p}^0| = \sqrt{\bar{p}_*^0{}^2 + \bar{p}_{**}^0{}^2}$, $\varphi = \arctg(-\bar{p}_*^0 / \bar{p}_{**}^0)$.

Таким образом, решение первого типа представляет собой синусоидальное по координате и при $\omega_{**} > 0$ экспоненциально затухающее во времени возмущение, которое называют k -волной:

$$\begin{aligned} \bar{p}(k) &= |\bar{p}^0| \exp[-\omega_{**}(k)t] \times \\ &\quad \times \sin \left\{ \varphi + \frac{2\pi[x + v_\phi(k)t]}{\lambda(k)} \right\}, \end{aligned}$$

где $v_\phi(k) = \omega(k)/k$, $\lambda(k) = 2\pi/k$, φ – начальная фаза.

Здесь $v_\phi(k)$ – фазовая скорость или скорость перемещения фазы колебания, $\lambda(k)$ – длина волны, $\omega_{**}(k)$ – декремент затухания колебаний во времени. Другими словами, k -волны – волны с однородной по длине, но изменяющейся во времени амплитудой. Эти волны являются аналогом свободных колебаний.

Тип II. Решения, или волны, второго типа, когда $\omega_* = \omega$ – действительное положительное число ($\omega > 0, \omega_{**} = 0$). В этом случае имеем:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= (\bar{p}_*^0 + i\bar{p}_{**}^0) \exp[i(kx + \omega t + ik_{**}x)] = \\ &= (\bar{p}_*^0 + i\bar{p}_{**}^0) \exp(-k_{**}x) \times \\ &\quad \times [\cos(kx + \omega t) + i \sin(kx + \omega t)], \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}\{\bar{p}\} = \exp(-k_{**}x) |\bar{p}^0| \sin[\varphi + (kx + \omega t)].$$

Таким образом, решение второго типа представляет собой синусоидальное по времени колебание (возбуждаемое, например, каким-либо стационарным внешним источником монохроматических колебаний при $x = 0$) с экспоненциально

затухающей по длине амплитудой. Такие возмущения, являющиеся волновым аналогом вынужденных колебаний, называют ω -волнами:

$$\begin{aligned} \bar{p}(\omega) &= |\bar{p}^0(\omega)| \exp(-k_{**}(\omega)x) \times \\ &\times \sin \left\{ \varphi + \frac{2\pi[x + v_\varphi(\omega)t]}{\lambda(\omega)} \right\}, \\ v_\varphi(\omega) &= \omega / k(\omega), \\ \lambda(\omega) &= 2\pi / k(\omega). \end{aligned}$$

Здесь $k_{**}(\omega)$ – декремент затухания колебаний по длине. Другими словами, ω -волны – волны со стационарными по времени, но изменяющимися по длине амплитудами. Случай $k_{**} > 0$ соответствует режиму затухания амплитуд возмущения.

Ограничимся только ω -волнами ($\omega > 0$, $\omega_{**} = 0$).

Если воспользоваться соотношением (2.1) в уравнении (1.8), то получим дисперсионное уравнение вида $\omega / k = C_0$. Поскольку поток количества движения за счет трения и других внешних сил в уравнении (1.2) не учитывался, то волновое число оказывается действительным положительным числом и фазовая скорость оказывается равной скорости звука $\omega / k = C_0$, а декремент затухания равен нулю.

Рассмотрим иную постановку задачи с эффективной вязкостью μ_{ef} в уравнении радиального движения для учета всех возможных диссипативных эффектов и используя условие полноты газа [4]:

$$\begin{aligned} R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 &= \frac{p_2 - p - 2\sigma / R}{\rho_1^0} - \frac{4\mu_{ef}\dot{R}}{R\rho_1^0}, \\ \frac{p_2}{p_{20}} &= \left(\frac{\rho_2^0}{\rho_{20}^0} \right)^\kappa. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Уравнение импульса среды, сохранения массы фаз и индивидуального пузырька можно представить в виде [5]–[9]:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \rho &\approx \rho_1^0 \alpha_1, \quad \rho_1^0 = const, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{d}{dt}(\rho_2^0 R^3) &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Объемная концентрация газа α_{20} связана с количеством пузырьков в единице объема смеси n равенством:

$$\alpha_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 n, \quad \frac{n}{n_0} = \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (2.4)$$

Если произвести линеаризацию уравнений (2.2)–(2.4), то в безразмерных переменных и параметрах

$$\begin{aligned} \bar{R} &= R / R_0, \quad \bar{\rho}_2^0 = \rho_2^0 / \rho_{20}^0, \\ \bar{p} &= p / p_0, \quad \bar{p}_2 = p_2 / p_{20}, \quad \bar{u} = u / u_0, \\ u_0 &= R_0 / t_0, \quad t_0 = R_0^2 / v_{ef}, \quad v_{ef} = \mu_{ef} / \rho_{10}^0, \\ S &= 2\sigma / R_0 p_0, \quad Pe = \frac{p_0 R_0^2}{\rho_{10}^0 v_{ef}^2}, \quad p_{20} = p_0 + 2\sigma / R_0, \\ \tau &= t / t_0, \quad X = x / R_0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

получим следующую систему уравнений относительно возмущений переменных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \tau} &= -\alpha_{10} \frac{\partial \bar{u}}{\partial X}, \quad \alpha_{10} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} = -Pe \frac{\partial \bar{p}}{\partial X}, \\ \alpha_2 &= 3\alpha_{10}\alpha_{20}\bar{R}, \quad \bar{p}_2 = \kappa\bar{\rho}_2^0, \\ \frac{\partial \bar{\rho}_2^0}{\partial \tau} + 3\frac{\partial \bar{R}}{\partial \tau} &= 0, \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 \bar{R}}{d\tau^2} = Pe \cdot \left[(1+S)\bar{p}_2 - \bar{p} + S\bar{R} \right] - 4\frac{d\bar{R}}{d\tau}. \quad (2.6)$$

Исключив возмущения скорости, объемного газосодержания, давления и плотности газа получим систему уравнений

$$\begin{aligned} 3\alpha_{10}\alpha_{20}\frac{d^2 \bar{R}}{d\tau^2} &= Pe \cdot \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial X^2}, \\ \frac{d^2 \bar{R}}{d\tau^2} &= Pe \cdot \left\{ \bar{R} [S - 3\kappa(1+S)] - \bar{p} \right\} - 4\frac{d\bar{R}}{d\tau}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Будем искать решение (2.7) в виде действительной части комплексного выражения:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \bar{p}^0 \exp[i(K_* X + \Omega \tau)], \\ \bar{p}^0 &= \bar{p}_*^0 + i\bar{p}_{**}^0, \quad |\bar{p}^0| \ll 1, \quad k_* = k + ik_{**}, \\ \bar{R} &= \bar{R}^0 \exp[i(K_* X + \Omega \tau)], \quad \bar{R}^0 = \bar{R}_*^0 + i\bar{R}_{**}^0, \\ |\bar{R}^0| &\ll 1, \quad \Omega = \omega R_0^2 / v_{ef}, \quad K_* = k_* R_0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Получим систему линейных однородных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} 3\alpha_{10}\alpha_{20}\bar{R}^0 \cdot \Omega^2 &= Pe \cdot \bar{p}^0 \cdot K_*^2, \quad (2.9) \\ \bar{R}^0 \cdot \Omega^2 &= Pe \cdot \left\{ \bar{R}^0 [S - 3\kappa(1+S)] + \bar{p}^0 \right\} + 4\bar{R}^0 i \cdot \Omega. \end{aligned}$$

Из условия существования у системы (2.9) нетривиального решения вытекает следующая дисперсионная зависимость волнового числа K от частоты Ω :

$$\frac{K_*^2}{\Omega^2} = \frac{3\alpha_{10}\alpha_{20}}{\Omega + Q - 4i}, \quad Q = [3\kappa(1+S) - S] \cdot Pe. \quad (2.10)$$

Решив уравнение (2.10), выделив действительную и мнимую части решения, найдем выражения для фазовой скорости $C_f = \frac{\bar{v}_{ef}}{R_0}$ и декремента затухания колебаний по длине $k_{**} = K_{**} / R_0$ в виде:

$$\bar{C}_f = \frac{\Omega}{K} = \frac{Q_0}{\sqrt{\frac{\Omega+Q}{(\Omega+Q)^2+16} + \frac{1}{\sqrt{(\Omega+Q)^2+16}}}},$$

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2}{3\alpha_{10}\alpha_{20}}}, \quad (2.11)$$

$$K_{**} = \Omega Q_0 \sqrt{\frac{1}{\sqrt{(\Omega+Q)^2+16}} - \frac{\Omega+Q}{(\Omega+Q)^2+16}}. \quad (2.12)$$

Мнимая часть $K_{**} > 0$ положительна. Поэтому амплитуды возмущения затухают по координате.

3 Численные результаты

На рисунках 3.1 и 3.2 приведены зависимости коэффициента поглощения $k_{**} = K_{**} / R_0$ и фазовой скорости $C_f = \bar{C}_f \cdot v_{ef} / R_0$ от частоты $\omega = \Omega v_{ef} / R_0^2$. Равновесный радиус пузырьков принимался равным 10 мкм, а объемное газосодержание – 5%.

Анализ выражения (2.12) показывает, что коэффициент поглощения, согласно классической теории затухания, возрастает с увеличением коэффициента вязкости и, что очень важно частоты.

Как видно из рисунка 3.2, характерен диапазон частот, который иногда называют диапазоном «непрозрачности» из-за больших значений декремента затухания k_{**} . Это означает, что в диапазоне «непрозрачности» волна будет сильнее поглощаться.

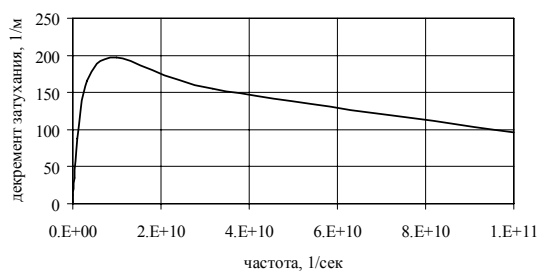


Рисунок 3.1 – Зависимость декремента затухания от частоты

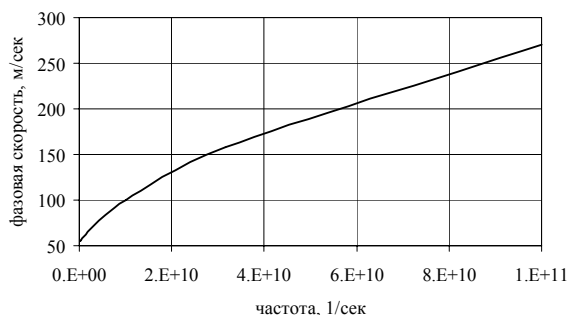


Рисунок 3.2 – Зависимость фазовой скорости от частоты

Заключение

В связи с тем что в морской воде длительное время могут существовать во взвешенном состоянии пузырьки с миллиметровыми диаметрами, аномальное затухание в море могут испытывать волны с частотами в десятки килогерц, что подтверждается и практическими наблюдениями.

Затухание звука на газовых пузырьках усугубляется еще и тем, что пузырьки не только рассеивают, но и поглощают часть энергии звуковой волны. И это поглощение наиболее сильно происходит именно на резонансной частоте. Количественное поглощение звука пузырьками оценивают аналогично рассеянию, т. е. вводят понятие о сечении поглощения по отношению поглощенной мощности к интенсивности падающей волны. Поэтому учет поглощения звука газовыми пузырьками формально можно свести к некоторому увеличению сечения рассеяния.

Таким образом, при рассмотрении закона затухания звуковых волн в море показано, что интенсивность волны значительно убывает из-за наличия газа в жидкости. В случае наличия слоистых преград затухание звуковых волн будет усиливаться. В этом случае необходимо дополнительно использовать модели и решения, приведенные в [10]–[15].

ЛИТЕРАТУРА

1. Безруков, Ю.Ф. Океанология. Часть I. Физические явления и процессы в океане / Ю.Ф. Безруков. – Симферополь: Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, 2006. – 159 с.
2. Доронин, Ю.П. Физика океана / Ю.П. Доронин. – Санкт-Петербург, 2010. – 274 с.
3. Андреева, И.Б. Физические основы распространения звука в океане / И.Б. Андреева. – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1975. – 192 с.
4. Нигматуллин, Р.И. Основы механики гетерогенных сред / Р.И. Нигматуллин – М.: Наука, 1978.
5. Нагиев, Ф.Б. Нелинейные колебания растворимых газовых пузырьков в жидкости / Ф.Б. Нагиев // Изв. АН Аз. ССР. Серия физ.-тех. и мат. наук. – 1985. – № 1. – С. 136–140.
6. Нагиев, Ф.Б. Декременты затухания колебаний растворимых газовых пузырьков, радиально пульсирующих в жидкости / Ф.Б. Нагиев // Изв. АН Аз. ССР. Серия физ.-тех. и мат. наук. – 1984. – № 4. – С. 125–130.
7. Starovoitov, E.I. Foundations of the theory of elasticity, plasticity and viscoelasticity / E.I. Starovoitov, F.B. Nagiyev. – Apple Academic Press, Toronto, New Jersey, Canada, USA, 2012. – 346 p.
8. Хабеев, Н.С. Динамика растворимых газовых пузырьков // Н.С. Хабеев, Ф.Б. Нагиев // Известия АН СССР, МЖГ. – 1985. – № 6. – С. 52–59.

9. *Nigmatulin, R.I.* Dynamics, heat-mass transfer of vapor-gas bubbles in a liquid / R.I. Nigmatulin, N.S. Khabeev, F.B. Nagiyev // Printed in Great Britain. Inter. J.Heat and Mass Transfer. – 1981. – Vol. 24, № 6. – P. 1033–1044.

10. *Старовойтов, Э.И.* Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании // Э.И. Старовойтов, Е.П. Доровская // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2006. – № 3. – С. 45–50.

11. *Горшков, А.Г.* Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2004. – № 1. – С. 45–52.

12. *Старовойтов, Э.И.* Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Экологический вестник научных

центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2006. – № 4. – С. 55–62.

13. *Горшков, А.Г.* Деформирование круговой трехслойной пластины на упругом основании / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2005. – № 1. – С. 16–22.

14. *Starovoitov, E.I.* Circular sandwich plates under local impulsive loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Т. 39, № 8. – С. 945–952.

15. *Горшков, А.Г.* Гармоническое нагружение слоистых вязкоупругопластических систем / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2000. – № 6. – С. 91–98.

Поступила в редакцию 08.03.16.

ФОРМИРОВАНИЕ ПЛЕНОК НИТРИДА ТИТАНА МЕТОДОМ РЕАКТИВНОГО МАГНЕТРОННОГО РАСПЫЛЕНИЯ ПРИ ПОНИЖЕННОМ ДАВЛЕНИИ

А.П. Достанко, Д.А. Голосов, С.М. Завадский, С.Н. Мельников,
Д.Э. Окоджи, Д.Д. Котинго, Г.М. Рубан

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

FORMATION OF TITANIUM NITRIDE FILMS BY REACTIVE MAGNETRON SPUTTERING UNDER LOW PRESSURE

A.P. Dostanko, D.A. Golosov, S.M. Zavadski, S.N. Melnikov,
J.E. Okojie, J.D. Kotingo, G.M. Ruban

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

Проведены исследования процесса реактивного магнетронного распыления титана в среде Ar/N₂ рабочих газов при пониженном давлении. Установлено, что при высоковакуумном режиме работы магнетронной распылительной системы и высоких скоростях откачки в режиме стабилизации мощности разряда магнетрона напряжение разряда практически однозначно зависит от содержания реактивного газа в камере, т. е. отсутствует гистерезис характеристик, свойственный процессам реактивного распыления. При этом возможно воспроизводимое нанесение слоев нитрида титана с удельным сопротивлением менее 70 мкОм×см и твердостью свыше 28 ГПа.

Ключевые слова: реактивное магнетронное распыление, нитрид титана, микротвердость, коэффициент трения, объемный износ.

The processes of reactive magnetron sputtering of titanium in the atmosphere of Ar/N₂ working gases under low pressure were studied. It was established that during high vacuum operating mode of magnetron sputtering system and high pumping rates under conditions of stabilization of the magnetron power the discharge voltage univalently depends on the concentration of nitrogen in the chamber, i. e., the characteristic hysteresis usual for reactive magnetron sputtering processes was not observed. At the same time titanium nitride layers with specific resistance less than 70 μΩ cm and microhardness greater than 28 GPa can be obtained with good reproducibility.

Keywords: reactive magnetron sputtering, titanium nitride, microhardness, friction coefficient, volume wear.

Введение

Тонкие пленки нитрид титана (TiN) уже несколько десятков лет используются в машиностроении, микроэлектронике и медицине в качестве защитных, декоративных, коррозионно-стойких и барьерных слоев [1]–[3]. До настоящего времени нитрид титана не теряет своей актуальности и постоянно обнаруживаются новые сферы его применения. В микроэлектронике пленки TiN стали использоваться в качестве барьерных слоев, предотвращающих диффузию Al в Si, защитных масок при травлении фоторезиста в кислородной плазме, омических контактов для солнечных элементов и эпитаксиальных слоев p-GaN [4], для создания диодов Шоттки с малым падением напряжения при прямом включении [5].

Традиционно пленки нитрида титана наносят методом вакуумного дугового испарения [6]. Данный метод позволяет наносить пленки с высокими скоростями осаждения, причем как путем использования мишеней из этих материалов, так и реактивным методом. Главными недостатками метода являются относительная сложность конструкции дуговых источников и наличие в потоке осаждаемого вещества капельной фазы, что

исключает возможность использования дугового испарения в микроэлектронике. В данном случае для нанесения высококачественных тонких пленок TiN наилучшим образом подходит метод реактивного магнетронного распыления, который позволяет получать покрытия без капельной фракции с высокими функциональными характеристиками при скоростях осаждения, сравнимых с методом дугового испарения [7], [8]. Однако одной из проблем процессов реактивного распыления является неустойчивость процесса. При реактивном распылении образование соединений происходит не только на подложке, но и на стенках камеры и поверхности мишени. Формирующиеся слои влияют на характеристики разряда магнетрона, что приводит к изменению скорости распыления мишени и, как следствие, парциального давления реактивного газа в разряде. В результате этого при одинаковой мощности разряда скорость нанесения может различаться на порядок, а состав пленки значительно изменяться [10]. Для устранения неустойчивости процесса используют системы активного контроля процесса (оптические системы спектрального контроля или быстродействующие квадрупольные масс-спектрометры), которые обеспечивают быстрый

ответный сигнал при изменении парциального давления реактивного газа, что дает возможность управлять давлением реактивного газа в любой требуемой точке разрядных характеристик [11]. Однако это значительно усложняет систему.

Последние исследования показывают, что увеличение скорости откачки и снижение рабочего давления при реактивном магнетронном распылении (реактивное магнетронное распыление при пониженном давлении) позволяет уменьшить гистерезис характеристик и формировать компонентные пленки с контролируемым составом без использования систем обратной связи [12]. Основной проблемой реализации метода реактивного магнетронного распыления при пониженном давлении является сравнительно высокое минимальное рабочее давление традиционных магнетронных распылительных систем (как правило, более 0.1 Па), а для эффективной реализации метода необходимо обеспечить снижение минимального рабочего давления магнетрона до уровня 0.02–0.04 Па. Работа магнетронов при таком низком давлении может быть реализована только за счет оптимизации конфигурации магнитных полей в зоне распыления и формирования высокоэффективной магнитной ловушки [13]. Такие рабочие давления обеспечивают высоковакуумные MPC с дополнительным соленоидом [14].

Целью работы являлось исследование особенностей процессов синтеза пленок нитрида титана при реактивном магнетронном распылении при пониженном давлении и влияние скорости откачки и состава газовой среды на характеристики нанесенных слоев.

1 Эксперимент

Схема экспериментальной установки для нанесения слоев нитрида титана методом реактивного магнетронного распыления при пониженном давлении приведена на рисунке 1.1. Установка выполнена на базе вакуумного поста ВУ-2МП. Камера вакуумной установки была оборудована магнетронной распылительной системой (MPC) MAC-160 с мишенью \varnothing 160 мм и ионным источником на основе ускорителя с анодным слоем (ИИ). Особенностью используемой MPC является пониженное до уровня 0.03 Па предельное рабочее давление, что достигнуто за счет использования магнитной системы с двумя источниками магнитного поля и оптимизации конфигурации силовых линий над поверхностью мишени [15]–[17]. При этом возможна работа MPC при небольших (до 50 мл/мин) расходах рабочего газа.

Пленки нитрида титана наносились на подложки из монокристаллического кремния Si(100) и полированной нержавеющей стали 12X18H10T. В ходе экспериментов подложки устанавливались на вращаемый подложкодержатель карусельного

типа на расстоянии 85 мм от поверхности мишени магнетрона. Камера вакуумной установки откачивалась до остаточного давления 10^{-3} Па и производилась предварительная ионная очистка подложек. Для этого рабочий газ Ag подавался в ассистирующую ступень ионного источника до рабочего давления 2.0×10^{-2} Па. Время очистки, энергия ионов и ток разряда во всех экспериментах были постоянными и составляли 5 мин (режим вращения подложкодержателя), 500 эВ, 70 мА соответственно.

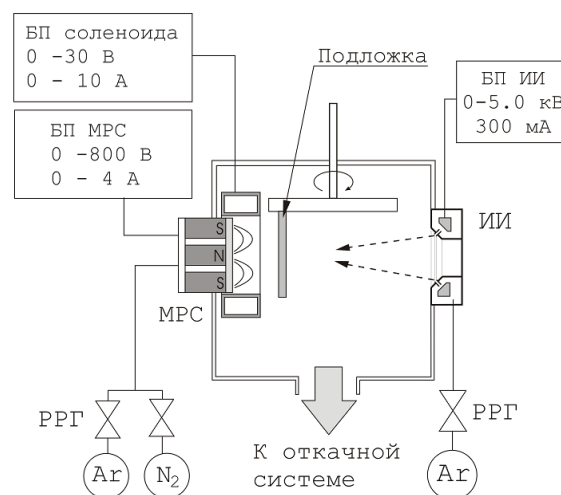


Рисунок 1.1 – Схема экспериментальной установки для нанесения слоев нитрида титана методом реактивного магнетронного распыления при пониженном давлении:

ИИ – ионный источник, MPC – магнетронная распылительная система, БП – блок питания; РРГ – регулятор расхода газа

Затем производилось нанесение слоев нитрида титана. Для этого подложки подводились в зону нанесения. В газораспределительную систему магнетрона подавались рабочие газы. Распыление мишени Ti марки ВТ1-0 \varnothing 160 мм (частота 99.6 %) и толщиной 10 мм осуществлялось в Ag/N₂ смеси газов. Расход Ag во всех процессах поддерживался постоянным и составлял $Q_{Ar} = 45$ мл/мин. Поток азота изменялся от 0 до 12 мл/мин. Для поддержания заданного расхода газов использовались автоматические регуляторы расхода газа РРГ-1.

Питание MPC осуществлялось с помощью источника питания мощностью 1.5 кВт с возможностью работы в режимах стабилизации тока или мощности. Для устранения неустойчивости магнетронного разряда в момент возникновения дугового разряда на поверхности мишени источник питания был оборудован системой дугогашения, которая позволяла в момент резкого увеличения тока разрывать цепь нагрузки на время порядка 10 мс. В процессе нанесения мощность разряда магнетрона поддерживалась постоянной и

составляла 0.9 кВт. При этом ток разряда и напряжение разряда составляли соответственно $I_t \approx 2.2$ А и $U_t \approx 385$ В. Пленки нитрида титана наносились до толщины 2.0–2.5 мкм со средней скоростью нанесения 0.8–1.1 нм/с.

Распределение толщины нанесенных слоев определялось с помощью оптического интерферометрического профилометра ПОИ-08. Поверхностное сопротивление измерялось с помощью измерителя удельного поверхностного сопротивления ИУС-3М. Удельное сопротивление определялось расчетным методом по формуле

$$\rho = R_{sq} h,$$

где R_{sq} – поверхностное сопротивление пленки, h – толщина пленки.

Значения микротвердости пленок получены с помощью измерителя микротвердости *Leika VMHT Mot* при нагрузке индентора 5 г и времени сохранения нагрузки 7 с. Для измерений использовался индентор Кнупа. При измерениях глубина проникновения индентора в пленку не превышала 30 % от толщины пленки, что исключало влияние деформации подложки. На каждом образце производилось не менее пяти измерений и определялось среднее значение микротвердости и среднеквадратичное отклонение. Измерения коэффициента трения и объемного износа пленок проводились на трибометре ТАУ-1Н методом истирания пленки при возвратно поступательном движении индентора (шарик $\varnothing 10$ мм из твердосплавного материала ВК-20) в условиях сухого трения (система трения шарик – плоскость). Нагрузка индентора составляла 140 г, количество циклов трения – 500. Объемный износ рассчитывался исходя из ширины дорожки трения.

2 Результаты и обсуждение

Проведены исследования особенностей процесса реактивного магнетронного распыления Ti в среде Ar/N₂ рабочих газов при пониженном давлении. Получены зависимости напряжения разряда МРС от потока реактивного газа N₂ при различной скорости откачки вакуумной системы. Скорость откачки вакуумной камеры S изменялась путем изменения размера пропускного отверстия откачной системы. В зависимости от скорости откачки давление в камере составляло: $S = 1150$ л/с, $p = 0.07$ Па; $S = 800$ л/с, $p = 0.1$ Па; $S = 650$ л/с, $p = 0.12$ Па. Установлено, что в режиме стабилизации мощности разряда, независимо от скорости откачки, при увеличении потока азота в камеру напряжение разряда увеличивалось (рисунок 2.1). С увеличением скорости откачки при переходе из одной моды процесса в другую, перепад напряжений разряда и площадь гистерезиса характеристик уменьшались. При скорости откачки более 1000 л/с гистерезис характеристик практически отсутствовал. В ре-

жиме стабилизации тока разряда характер зависимости напряжения разряда от потока реактивного газа имел другой характер. На рисунке 2.2 представлена зависимость напряжения разряда от потока азота в камеру при максимальной скорости откачки $S = 1150$ л/с. Как видно при увеличении потока реактивного газа напряжение разряда первоначально уменьшалось и достигало минимума при $Q_{N_2} = 3$ мл/мин. При дальнейшем увеличении потока реактивного газа напряжение разряда практически линейно увеличивалось. Однако гистерезис также практически отсутствовал. Т. е для системы титан – азот характерно снижение проводимости разряда при переходе из металлической в реактивную моду процесса, а в реактивной моде процесса проводимость разряда увеличивается при увеличении потока реактивного газа. Данное поведение может быть связано с образованием компонентного слоя на поверхности мишени. При увеличении парциального давления реактивного газа в камере происходит все большее формирование нитрида титана на поверхности мишени и изменение его стехиометрического индекса. Это приводит к изменениям электрической проводимости мишени и коэффициента ионно-электронной эмиссии компонентного слоя. Двойной характер зависимости напряжения разряда от парциального давления реактивного газа указывает на то, что первоначально доминирующим процессом является увеличение коэффициента ионно-электронной эмиссии, который увеличивает проводимость разряда, а в реактивной моде процесса проводимость разряда снижается за счет образования на поверхности мишени слоя сверхстехиометрического нитрида титана, имеющего сравнительно низкую электропроводность. В режиме стабилизации мощности разряда ток и напряжение разряда определяются характеристиками блока питания и начальное снижение напряжения разряда компенсируется увеличением тока разряда.

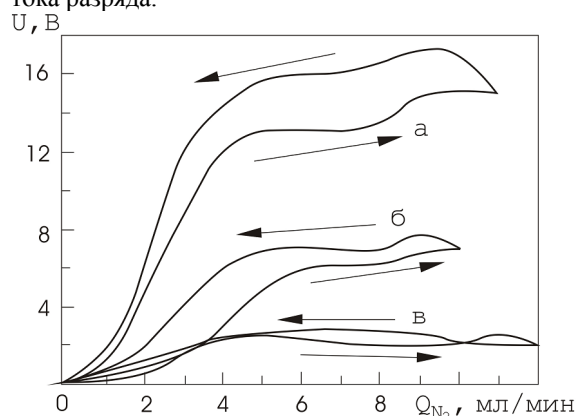


Рисунок 2.1 – Зависимость изменения напряжения разряда МРС от потока N₂ при распылении Ti мишени при различной скорости откачки: а – 650 л/с, б – 800 л/с, в – 1150 л/с. Минимальное напряжение разряда принято за ноль

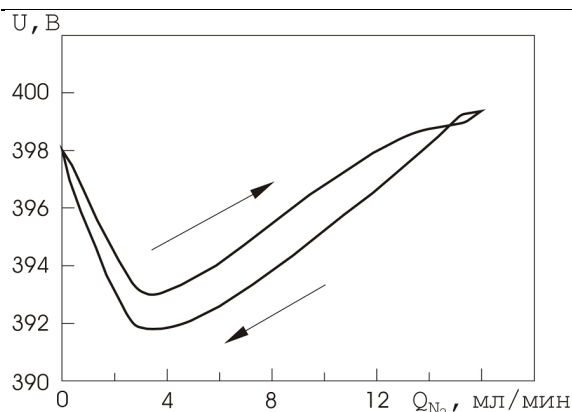


Рисунок 2.2 – Зависимость напряжения разряда МРС от потока N_2 при распылении Ti мишени в режиме стабилизации тока разряда при скорости откачки 1150 л/с

На основе анализа разрядных характеристик сделан вывод, что более предпочтительным является режим стабилизации мощности разряда, который обеспечивает однозначную зависимость напряжения разряда от потока реактивного газа, отсутствие гистерезиса и меньший перепад напряжения при переходе из одной моды процесса в другую. Это позволяет стабилизировать процесс реактивного магнетронного распыления без применения специальных систем контроля.

Поэтому все дальнейшие исследования по нанесению пленок нитрида титана проводились в режиме стабилизации мощности разряда при максимальной скорости откачки 1150 л/с.

Получены профили распределения толщины нанесенных слоев при распылении Ti в среде Ar ($Q_{Ar} = 45$ мл/мин) и реактивном распылении в среде Ar/N_2 ($Q_{Ar} = 45$ мл/мин, $Q_{N_2} = 4$ мл/мин) (рисунок 2.3). При мощности разряда $P_t = 0.9$ кВт скорость нанесения на оси магнетрона составляла 1.11 нм/с при нанесении пленок Ti и практически линейно снижалась при увеличении содержания азота в Ar/N_2 смеси газов. При потоке азота 4 мл/мин скорость нанесения составляла 0.86 нм/с. Распределение толщины нанесенных пленок нитрида титана значительно отличалось от распределения толщины пленок титана. При реактивном магнетронном распылении профиль распределения толщины имел более однородный характер и неравномерность толщины на подложке $\varnothing 200$ мм составляла 42 %, тогда как при магнетронном распылении титана неравномерность превышала 60 %. Данное поведение связано с особенностями процесса реактивного магнетронного распыления. При реактивном магнетронном распылении угловое распределение распыленных атомов мишени практически не изменяется по сравнению с магнетронным распылением в среде аргона и подчиняется тому же косинусному закону распределения. Однако на подложке, на поверхности растущей пленки, активно

образуется химическое соединение, и стехиометрический состав осажденной пленки зависит от соотношения скорости нанесения материала мишени и скорости поглощения реактивного газа. Поэтому на краях подложки, где скорость нанесения ниже по сравнению с центром подложки, пленка будет содержать в своем составе больше азота и занимать больший объем. Таким образом, изменение профиля нанесенной пленки при реактивном магнетронном распылении можно объяснить различиями в скорости роста компонентной пленки с различной стехиометрией.

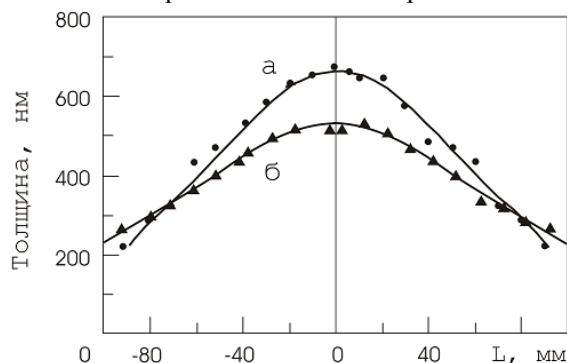


Рисунок 2.3 – Профили распределения толщины нанесенных слоев: *a* – Ti методом магнетронного распыления, *б* – TiN методом реактивного магнетронного распыления

С целью определения условий формирования стехиометрических пленок нитрида титана, проведены исследования влияния состава газовой среды на поверхностное сопротивление пленок. Область гомогенности нитрида титана очень широка, и электрофизические свойства TiN сильно зависят от количества азота в нитриде. Как известно, из всех возможных композиций стехиометрический нитрид титана обладает минимальным удельным сопротивлением [2]. С увеличением отклонения от стехиометрии удельное сопротивление нитрида титана увеличивается из-за уменьшения подвижности носителей заряда при увеличении концентрации вакансий в подрешетке азота, которые служат центрами рассеяния [18].

Получены зависимости поверхностного сопротивления пленок нитрида титана от потока N_2 (рисунок 2.4). Для этого пленки наносились на подложки $Si(100)$ до толщины 250 нм. Пленки получены в режиме стабилизации мощности разряда $P_t = 0.9$ кВт, $Q_{Ar} = 45$ мл/мин при максимальной скорости откачки. При увеличении потока азота в камеру поверхностное сопротивление пленок уменьшалось и достигало минимума при потоке азота около 3.5 мл/мин. При дальнейшем увеличении потока азота поверхностное сопротивление пленок практически линейно увеличивалось. Минимум поверхностного сопротивления соответствовал стехиометрическому нитриду титана. При этом расчетное удельное

сопротивление нитрида титана составило менее 70 мкОм×см. Для сравнения, удельное сопротивление объемного нитрида титана составляет порядка 40 мкОм×см [19]. Таким образом, методом реактивного магнетронного распыления при пониженном рабочем давлении без нагрева подложки получены пленки нитрида титана с удельным сопротивлением в 2 – 2.5 раза ниже, чем при традиционном реактивном магнетронном распылении (120–160 мкОм×см) [7].

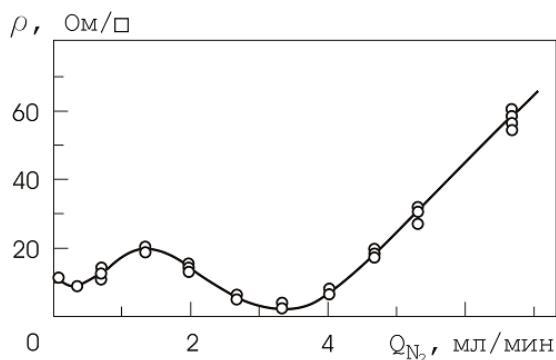


Рисунок 2.4 – Зависимость поверхностного сопротивления пленок TiN от потока реактивного газа N_2

На рисунке 2.5 представлена зависимость микротвердости по Кнупу пленок нитрида титана от потока реактивного газа N_2 . При увеличении потока реактивного газа в камеру микротвердость пленок увеличивалась с 8 ГПа и достигала максимума 28 ГПа при потоке азота 3–4 мл/мин, что соответствовало стехиометрическому составу пленок. При дальнейшем увеличении потока азота твердость пленок снижалась до 20–22 ГПа и далее практически не зависела от содержания азота в Ag/N_2 смеси газов.

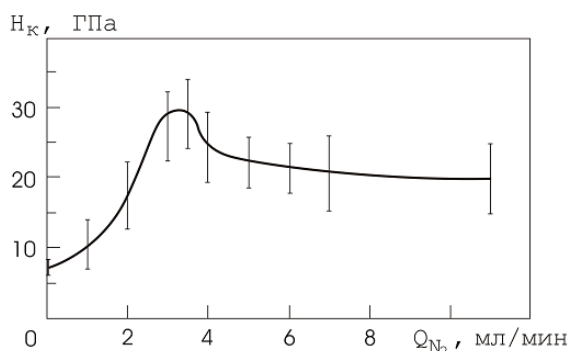


Рисунок 2.5 – Зависимость микротвердости по Кнупу пленок нитрида титана от потока реактивного газа N_2

Также исследовано влияние состава газовой среды на трибологические характеристики пленок нитрида титана, нанесенных методом реактивного магнетронного распыления при пониженном давлении. На рисунке 2.6 и рисунке 2.7 представлены зависимости коэффициента трения и объемного износа пленок TiN от потока азота в

камеру. Анализ зависимостей коэффициента трения от количества двойных проходов показал, что после начальной приработки пленки имели практически постоянный коэффициент трения на всех участках износа, что свидетельствовало об отсутствии слоистой структуры покрытий. Наиболее износостойкие пленки получены при потоке N_2 порядка 2 мл/мин, что соответствовало недостатку азота в нанесенных пленках, т. е. пленки, полученные при данных условиях, имели нарушенный стехиометрический состав.

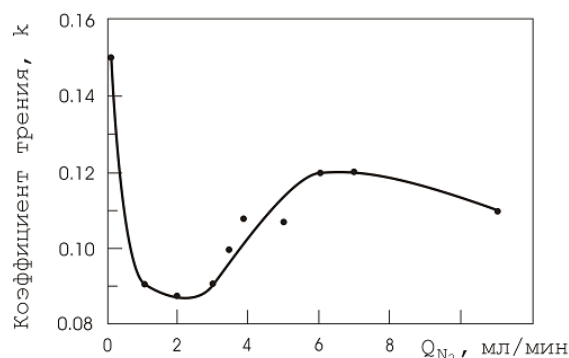


Рисунок 2.6 – Зависимость коэффициента трения пленок TiN от потока N_2

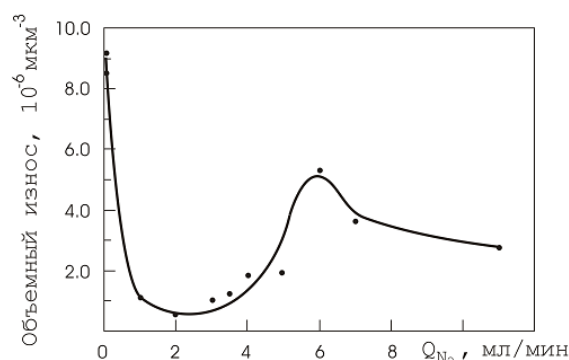


Рисунок 2.7 – Зависимость объемного износа пленок нитрида титана от потока N_2

Таким образом, можно сделать вывод, что с целью формирования пленок с низким удельным сопротивлением и высокой твердостью необходимо наносить стехиометрические пленки. Однако наиболее износостойкие пленки получены при недостатке азота.

Заключение

Проведены исследования особенностей процесса реактивного магнетронного распыления Ti в среде Ag/N_2 рабочих газов при пониженном давлении. Установлено, что при высокой скорости откачки в режиме стабилизации мощности напряжение разряда магнетрона однозначно зависит от скорости натекания азота, что позволяет стабилизировать процесс реактивного магнетронного распыления без применения специальных систем контроля.

Методом реактивного магнетронного распыления при пониженном давлении получены пленки нитрида титана с удельным сопротивлением менее $70 \text{ мкОм} \times \text{см}$ и твердостью до 28 ГПа. Стехиометрические пленки, несмотря на высокую твердость, имеют сравнительно низкую износостойкость. С целью повышения износостойкости, как, например, для режущего инструмента, необходимо использовать пленки с недостатком азота.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Colour control of titanium nitride coatings produced by reactive magnetron sputtering at temperature less than 100°C* / Ph. Roquiny [et al.] // *Surface and Coatings Technology*. – 1999. – Vol. 116–119. – P. 278–283.
2. *Room temperature deposition of sputtered TiN films for superconducting coplanar waveguide resonators* / S. Ohya [et al.] // *Superconductor Science & Technology*. – 2014. – Vol. 27, № 1. – P. 1–10.
3. *Biocompatible thin films deposited by cathodic arc method* / A. Vladescu [et al.] // *Romanian Reports in Physics*. – 2004. – Vol. 56, № 3. – P. 460–465.
4. *Process technology study of TiN/AlGaIn/GaN Schottky contact on (111) silicon substrate* / Az. Ahaitouf [et al.] // *J. Mater. Environ. Sci.* – 2010. – Vol. 1. – P. 309–312.
5. *Effect of substrate temperature and input power on TiN film deposition by low-frequency (60 Hz) PECVD* / H.T. Kim [et al.] // *Journal of the Korean Physical Society*. – 2000. – Vol. 37, № 3. – P. 319–323.
6. *Закономерности влияния структурного состояния вакуумно-дуговых покрытий TiN на их стойкость к абразивному износу* / А.А. Андреев [и др.] // *Трение и износ*. – 2014. – Т. 35, № 6. – С. 718–722.
7. *Characterization of titanium nitride films prepared by d.c. reactive magnetron sputtering at different nitrogen pressures* / L.-J. Meng [et al.] // *Surface and Coatings Technology*. – 1997. – Vol. 90. – P. 64–70.
8. *Properties of titanium nitride films prepared by direct current magnetron sputtering* / Y.L. Jeyachandran [et al.] // *Materials Science and Engineering A*. – 2007. – Vol. 445–446. – P. 223–236.
9. *Magnetron sputtering: a recent developments and applications* / P.J. Kelly [et al.] // *Vacuum*. – 2000. – Vol. 56. – P. 159–172.
10. *Reactive magnetron sputtering of thin films: present status and trends* / J. Musil [et al.] // *Thin Solid Films*. – 2005. – Vol. 475. – P. 208–218.
11. *Control of reactive sputtering processes* / W.D. Sproul [et al.] // *Thin Solid Films*. – 2005. – Vol. 491. – P. 1–17.
12. *Comparison of reactive magnetron and reactive ion-beam sputtering methods for deposition of silicon oxide thin films* / Zhu Chang [et al.] // *Journal of Applied Optics*. – 2010. – Vol. 31, № 5. – P. 855–859.
13. *Musil, J. Low-pressure magnetron sputtering* / J. Musil // *Vacuum*. – 1998. – Vol. 50, № 3–4. – P. 363–372.
14. *Голосов, Д.А. Низковакуумный режим работы магнетронных распылительных систем* / Д.А. Голосов, И.В. Сवादковский, С.М. Завадский // *Материалы 6-ой междунар. конференции по модификации материалов пучками частиц и плазменными потоками*, Томск, Россия, 23–28 сентября 2002 г. – С. 148–150.
15. *Characterisation parameters for unbalanced magnetron sputtering systems* / I.V. Svadkovski [et al.] // *Vacuum*. – 2002. – Vol. 68, № 4. – P. 283–290.
16. *Characteristics of unbalanced magnetron sputtering systems* / D.A. Golosov [et al.] // *Surface Engineering and Applied Electrochemistry*. – 2002. – № 6. – P. 56–64.
17. *Joint functioning of magnetron sputtering system and End-Hall ion source* / D.A. Golosov [et al.] // *Technical Physics*. – 2014. – Vol. 59, № 9. – P. 1326–1333.
18. *Структурные и фазовые превращения в тонких пленках титана при облучении азот-водородной плазмой* / А.М. Чапманов [и др.] // *ЖТФ*. – 1999. – Т. 69, № 10. – С. 102–108.
19. *Самсонов, Г.В. Нитриды* / Г.В. Самсонов. – Киев: Наукова думка, 1969. – 380 с.

Поступила в редакцию 15.04.16.

УДК 535.016

ФОРМИРОВАНИЕ ФОТОДЕФЛЕКЦИОННОГО ОТКЛИКА В ГИРОТРОПНОЙ СВЕРХРЕШЕТКЕ, ОБЛУЧАЕМОЙ БЕССЕЛЕВЫМ СВЕТОВЫМ ПУЧКОМ

Г.С. Митюрнич, Е.В. Черненко, В.В. Свиридова, А.Н. Сердюков

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

THE FORMATION OF PHOTODEFLECTION RESPONSE IN GYROTROPIC SUPERLATTICE IRRADIATED BY BESSEL LIGHT BEAMS

G.S. Mityurich, E.V. Chernenok, V.V. Sviridova, A.N. Serdyukov

F. Scorina Gomel State University

Исследовано явление возникновения фотодефлекционного сигнала в гиротропной сверхрешетке под действием облучения бесселевыми световыми пучками (БСП). Установлено, что скорость диссипации энергии ТЕ-моды БСП существенно зависит от радиальной координаты ρ , нормированной координаты $xw = x/w_0$, угла конусности БСП α , а также частоты амплитудной модуляции Ω БСП.

Ключевые слова: фотодефлекционный отклик, гиротропная сверхрешетка, бесселевы световые пучки, скорость диссипации энергии, амплитуда фотодефлекционного сигнала, функция Бесселя, уравнение теплопроводности.

The phenomenon of occurrence of photodeflection signal in gyrotropic superlattice by irradiation of Bessel light beams (BLB) was investigated. It was found that the rate of energy dissipation TE-mode BLB essentially depends on the radial coordinate ρ , normalized coordinate $xw = x/w_0$. BLB taper angle α , as well as the frequency of the amplitude modulation ω BLB.

Keywords: photodeflection response, gyrotropic superlattice, Bessel light beam, energy dissipation rate, amplitude of the photodeflection signal, Bessel function, heat equation.

Введение

В последние годы повышенный интерес у многих исследователей [1]–[6] вызывают созданные искусственным образом сверхрешетки, состоящие из периодически повторяющихся слоев наноразмерной толщины. Одним из главных достоинств наноструктур является возможность влиять на свойства создаваемых наноматериалов путем изменения геометрических размеров и конфигурации нанообъектов. В естественно-гиротропных и магнитоактивных сверхрешетках существует также дополнительная возможность управления их свойствами при воздействии внешних электрических и магнитных полей [7]–[9]. В этой связи актуальным является разработка методов неразрушающего контроля диагностики таких сред.

К одним из достаточно эффективных и широко используемых относятся методы лазерной фотодефлекционной или фототермоакустической спектроскопии [10]–[12], отличительной особенностью которых является высокая чувствительность, универсальность и относительная простота прецизионных измерений. Данные методы хорошо себя зарекомендовали при исследовании пространственно-неоднородных, многослойных и нелинейных структур [13]–[19], а также в сочетании с биомедицинской ультразвуковой фотоакустикой [20].

1 Теория метода

В данной работе метод лазерной фотодефлекционной спектроскопии будет использован для исследования диссипативных и термофизических свойств короткопериодных двухслойных сверхрешеток, обладающих эффектами естественной пространственной дисперсии [21].

В качестве возбуждающего фотодефлекционный сигнал будем использовать бесселевые световые пучки (БСП) [22]–[24], которые обладают рядом уникальных свойств. Например, бездифракционностью при распространении в определенной области пространства, способностью высокой концентрации световой энергии вблизи оси пучка, а также возможностью управления выбором необходимых поляризационных мод БСП за счет управляемого изменения угла конусности светового пучка [25]–[26]. Последнее обстоятельство, как отмечалось в [27]–[29], весьма существенно сказывается на изменении скорости диссипации энергии поляризационных мод БСП и распределении температурного поля в исследуемом образце, которое непосредственно влияет на процесс формирования фотодефлекционного сигнала.

Сверхрешетка, состоящая из слоев поглощающих гиротропных кубических кристаллов, в рамках длинноволнового приближения, характеризуется одноосными комплексными тензорами диэлектрической проницаемости ϵ_e и оптической активности γ_e [7], [8]

$$(\varepsilon_e)_{11} = (\varepsilon_e)_{22} = x_0 \varepsilon_1 + (1-x_0) \varepsilon_2,$$

$$(\gamma_e)_{11} = (\gamma_e)_{22} = x_0 \gamma_1 + (1-x_0) \gamma_2,$$

где $x_0 = d_1/D$, d_1, d_2 – толщины компонентов сверхрешетки, $D = d_1 + d_2$ – период сверхрешетки, $\varepsilon_{1,2} = \varepsilon'_{1,2} + i\varepsilon''_{1,2}$ – комплексная диэлектрическая проницаемость, $\gamma_{1,2} = \gamma'_{1,2} + i\gamma''_{1,2}$ – комплексный параметр оптической активности, где реальная часть $\gamma = \text{Re } \gamma = \gamma'$ отвечает за удельное вращение плоскости поляризации, а мнимая $\text{Im } \gamma = \gamma''$ связана с циркулярным дихроизмом. Исследуется случай короткопериодных сверхрешеток [7], когда период структуры $D = d_1 + d_2 \ll \lambda_1, \lambda_2$, где λ_1, λ_2 – длины оптических и тепловых волн.

Основываясь на материальных уравнениях для гиротропных сред [21]

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + i\gamma \mathbf{H},$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} - i\gamma \mathbf{E}, \quad \mu = 1,$$

а также на уравнениях Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = [\nabla \mathbf{E}] = i k_0 \mathbf{B},$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = [\nabla \mathbf{B}] = -i k_0 \mathbf{D},$$

получим выражение для скорости диссипации энергии ТЕ-моды БСП в цилиндрической системе координат аналогично [27]

$$Q^{TE} = \frac{\omega I_0 |\varepsilon_1 x_0 + (1-x_0) \varepsilon_2| (\varepsilon''_1 x_0 + (1-x_0) \varepsilon''_2)}{2\pi} \times$$

$$\times \left[\left(\frac{m}{q\rho} \right)^2 J_m^2(q\rho) + J_m'^2(q\rho) + \frac{2m k'_z (\gamma''_1 x_0 + (1-x_0) \gamma''_2)}{\rho k_0^2 (\varepsilon_1 x_0 + (1-x) \varepsilon_2)^{3/2} \sin^3 \alpha} J_m(q\rho) J_m'(q\rho) \right] \times$$

$$\times \exp(-2k'_z z),$$

где

$$k_z = k_0 \sqrt{\varepsilon_e} \cos \alpha, \quad k_0 = \omega / c,$$

$$\varepsilon_e = \varepsilon_1 x_0 + \varepsilon_2 (1-x_0),$$

$$q = k_0 \sqrt{\varepsilon_e} \sin \alpha,$$

$$k'_0 = k_0 \cos \alpha = \frac{\omega}{c} \cos \alpha,$$

α – параметр конусности БСП, равный половине угла при вершине конуса волновых векторов, определяющий спектр пространственных частот пучка, I_0 – интенсивность света, $J_m(q\rho)$ – функции Бесселя первого рода m -го порядка,

$J'_m(q\rho) = \frac{\partial}{\partial(q\rho)} J_m(q\rho)$ – производная по радиальной координате от функции Бесселя. Выражение для скорости диссипации энергии ТН-моды БСП получается аналогичным образом, но ввиду его громоздкости не приводится.

Рассмотрим случай трансверсальной геометрии возбуждающего фотодефлекционный отклик и пробного световых пучков (рисунок 1.1). На поглощающую сверхрешетку, состоящую из двух гиротропных кубических кристаллов германата висмута и силиката висмута, нормально к поверхности падает модулированный по интенсивности БСП ТЕ-поляризации. Вследствие модулированного поглощения на частоте модуляции Ω в образце выделяется тепловая энергия, причем распределение температурного поля $T(z, t)$ в сверхрешетке можно найти на основе решения уравнения теплопроводности

$$\nabla^2 T - \frac{1}{\beta_s} \frac{\partial T}{\partial t} =$$

$$= \frac{1}{2k_s} Q^{TE} \exp(-2r^2/w_0^2) (1 + \cos \Omega t), \quad (1.1)$$

где β_s – эффективный коэффициент теплопроводности, связанный с коэффициентом теплопроводности k_s соотношением $\beta_s = k_s / \rho_0 C$, ρ_0 – плотность, C – удельная теплоемкость. Правая часть уравнения (1.1) содержит скорость диссипации энергии бesselь-гауссового пучка

$$Q^{TE} \exp(-2r^2/w_0^2)$$

($r^2 = x^2 + y^2$, w_0 – перетяжка пучка), как плотность мощности тепловых источников.

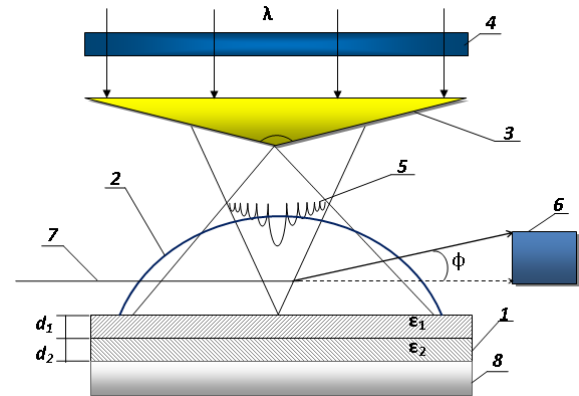


Рисунок 1.1 – Схема регистрации фотодефлекционного сигнала:

- 1 – естественно гиротропная сверхрешетка;
- 2 – «термическая» линза;
- 3 – аксикон;
- 4 – модулятор;
- 5 – ТЕ-мода БСП;
- 6 – позиционно-чувствительный фотодетектор;
- 7 – зондирующий луч;
- 8 – подложка

Решение уравнения теплопроводности (1.1) выполним в виде

$$T(x, y, z, t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} Q^{TE}(\xi, \eta, \mu, \chi) G(\xi, \eta, \mu, \chi) d\xi d\eta d\mu d\chi, \quad (1.2)$$

потребовав при этом выполнения стандартных граничных условий

$$T(r, t)|_{r=0} = 0, \quad T(r, t)|_{r=R} = 0.$$

В соотношении (1.2) $G(\xi, \eta, \mu, \chi)$ – фундаментальное решение оператора уравнения теплопроводности в (1.1), определяемое выражением

$$G = \frac{\Theta(t)}{8\rho C\beta_s [\pi(t-\tau)]^{3/2}} \times \exp\left(-\frac{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\mu)^2)}{4\beta_s(t-\tau)}\right), \quad (1.3)$$

удовлетворяющим дифференциальному уравнению для точечного мгновенного источника

$$\Delta G - \frac{1}{\beta_s} \frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{1}{2k_s} \delta(x-\xi, y-\eta, z-\mu) \delta(t-\chi). \quad (1.4)$$

В (1.3), (1.4) $\Theta(t)$ – единичная ступенчатая функция Хэвисайда, $\delta(x-\xi, y-\eta, z-\mu)$ и $\delta(t-\chi)$ – дельта функция Дирака от пространственных и временной координат соответственно.

Выполнив подстановку (1.3) в (1.2) и вычислив интегралы по пространственным переменным несложно получить для распределения температурного поля в гиротропной сверхрешетке следующее выражение

$$\Phi(\rho, z, t) = \frac{k_0^4}{2n_{ef}\sqrt{\pi}} \frac{dn_{ef}}{dT} Q^{TE} \times \int_0^t \frac{(\sin^2 \Omega t - 1)x}{[w_0^2 + 8\beta_s(t-\tau)]^{3/2}} \times \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2 + 8\beta_s(t-\tau)}\right) \times \exp(-\alpha_{ef}^2 \beta_s(t-\tau)) d\tau. \quad (1.5)$$

Как следует из соотношения (1.5), значение амплитуды фотодефлекционного сигнала от гиротропной сверхрешетки сложным образом зависит от временных и поляризационных свойств бessel-гауссового светового пучка, а также геометрических, теплофизических, диссипативных и дихроичных параметров сверхрешетки.

2 Графический анализ

Для анализа полученных результатов в дальнейшем воспользуемся методом численного интегрирования соотношения (1.5). Будем предполагать, что двухслойная сверхрешетка содержит в качестве компонентов гиротропные кристаллы класса 23 германат висмута ($Bi_{12}GeO_{20}$) и силикат висмута ($Bi_{12}SiO_{20}$). При проведении численных расчетов выберем следующие значения параметров и констант [30]:

$$I_0 = 0.15 \times 10^4 \text{ Вт/м}^2, \\ \varepsilon_1 = 7 + i2 \cdot 10^{-2}, \quad \varepsilon_2 = 4 + i \cdot 10^{-2}, \\ \gamma_1 = 10^{-4} + i2 \cdot 10^{-5}, \quad \gamma_2 = 10^{-5} + i2 \cdot 10^{-6}, \\ \lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}, \\ d_1 = 80 \cdot 10^{-9} \text{ м}, \quad d_2 = 120 \cdot 10^{-9} \text{ м}, \\ \beta_1 = 0.4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}, \quad \beta_2 = 0.74 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}.$$

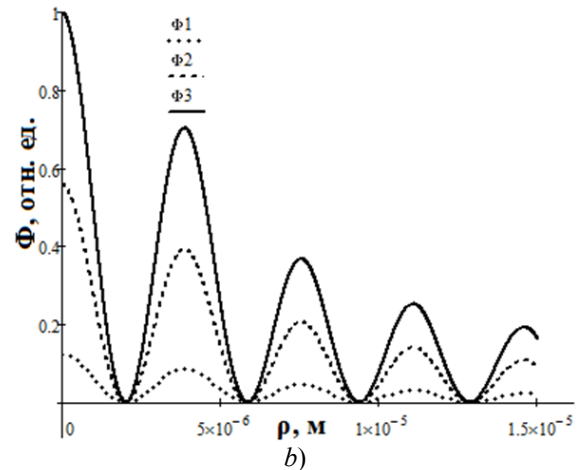
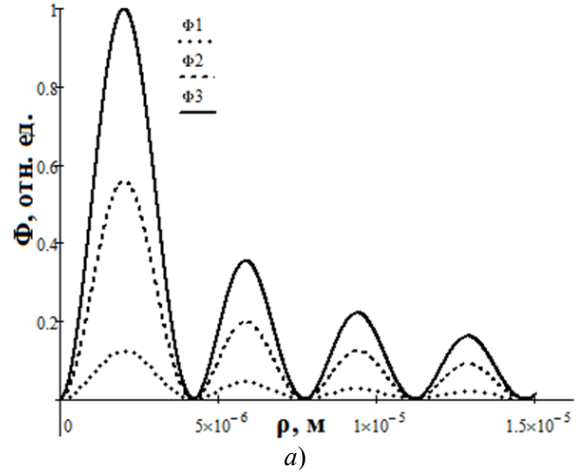


Рисунок 2.1 – Зависимость угла фотодефлекции от радиальной координаты ρ для ТЕ-мод БСП и разных значений времени $t_1 = 0.15 \text{ с}, t_2 = 0.175 \text{ с}, t_3 = 0.2 \text{ с}$

Из рисунка 2.1 следует, фотодефлекционный отклик существенным образом зависит от радиальной координаты ρ . Для различных значений времени облучения исследуемого образца происходит возрастание амплитуды фотодефлекционного сигнала с одновременной синхронизацией осцилляций. Для моды $m = 0$ (рисунок 2.1 a) сигнал обращается в нуль в зависимости от ρ , что связано с пространственным распределением интенсивности БСП по концентрическим окружностям и проявлением модулирующих свойств функции Бесселя. Аналогично можно объяснить достижение углом фотодефлекции максимума при $\rho = 0$ и $m = 1$ (рисунок 2.1 b).

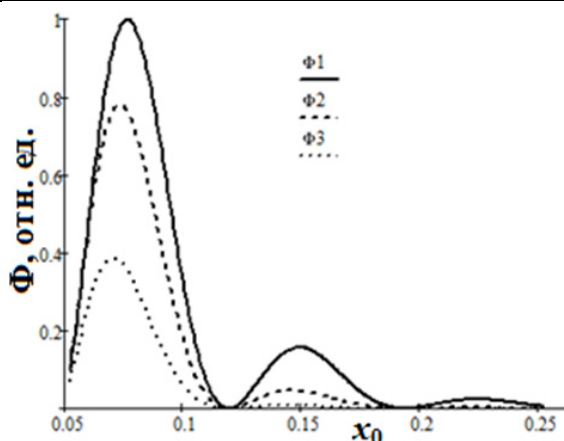


Рисунок 2.2 – Зависимость угла фотодефлекции от параметра сверхрешетки $x_0 = d_1/D$ для ТЕ-мод БСП и разных значений времени $t_1 = 0.15$ с, $t_2 = 0.175$ с, $t_3 = 0.2$ с ($m=0$) для гиротропной сверхрешетки

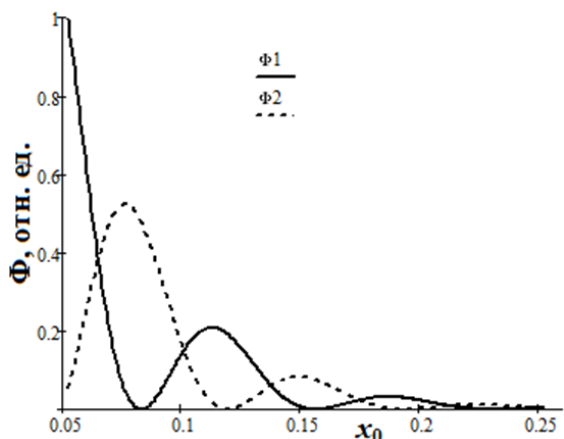


Рисунок 2.3 – Зависимость угла фотодефлекции от параметра сверхрешетки $x_0 = d_1/D$ для различных ТЕ-мод БСП ($m_1 = 0$, $m_2 = 1$) и значения времени $t = 0.15$ с

Угол фотодефлекции осциллирует в зависимости от относительной толщины сверхрешетки x_0 , а амплитуда фотодефлекционного отклика возрастает с увеличением времени воздействия лазерного излучения (рисунок 2.2).

Максимумы осцилляций фотодефлекционного сигнала для нулевой и первой мод находятся в противофазе (рисунок 2.3), так как значение m БСП существенно влияет на распределение тепловых полей в исследуемом образце.

Как видно из рисунка 2.4, угол конусности аксикона α , ответственного за формирование пространственной структуры бesselевого пучка, также весьма существенно влияет на амплитуду фотодефлекционного сигнала. В зависимости от порядка моды БСП ($m = 0$, $m = 1$) при определенном значении параметра конусности может наблюдаться максимум или минимум амплитудного значения фотодефлекционного отклика.

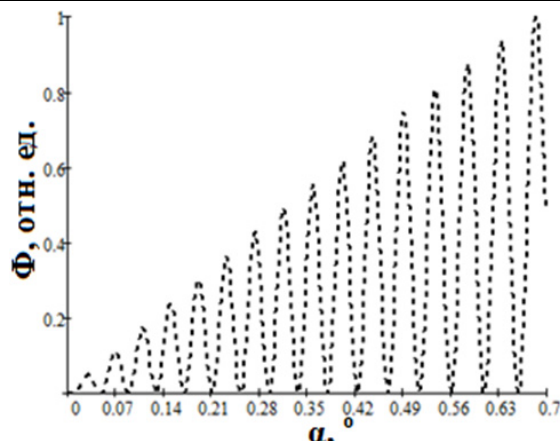


Рисунок 2.4 – Зависимость угла фотодефлекции от параметра угла конусности α для значения времени $t = 0.1$ с ($m = 0$)

На рисунке 2.5 видно, что амплитуда фотодефлекционного сигнала осциллирует в зависимости от значения радиальной координаты ρ и симметрична относительно нормированной координаты (x/w_0). Можно заметить также, что амплитуда осцилляций экспоненциально уменьшается с увеличением частоты модуляции возбуждающего фотодефлекционный отклик пучка, что обуславливается термической инерционностью преобразования типа свет – тепло.

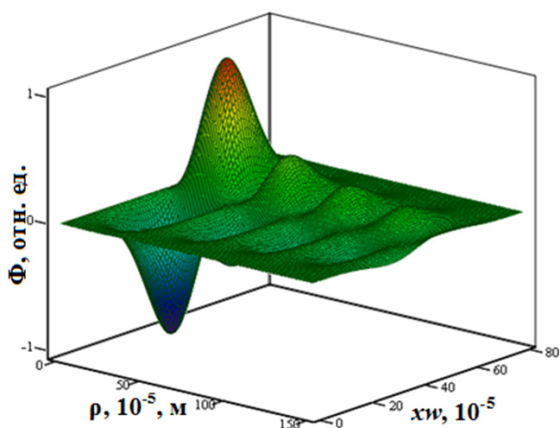


Рисунок 2.5 – Зависимость угла фотодефлекции от радиальной координаты ρ и нормированной координаты $xw = x/w_0$ для $m = 1$ ТЕ-моды БСП для гиротропной сверхрешетки

Заключение

Таким образом, в работе проведено исследование диссипативных и термофизических свойств короткопериодных двухслойных гиротропных сверхрешеток методом лазерной фотодефлекционной спектроскопии. Полученные результаты позволяют предложить метод неразрушающего контроля геометрических параметров гиротропной сверхрешетки в процессе ее изготовления. Так же выявлена возможность управления термооптической генерацией звука, возбуждаемого

бесселевыми световыми пучками. Управление амплитудой фотодефлекционного сигнала и распределением интенсивности термоупругих полей в гиротропных сверхрешетках может достигаться путем формирования требуемых поляризационных ТЕ- и ТН-мод квазибездифракционного излучения, за счет использования аксионов с регулируемым углом конусности или реализации оптических схем с перестраиваемой конусностью бесселевых световых пучков.

Авторы выражают огромную благодарность В.Н. Капшаю за плодотворное обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Исследование сверхрешеток BaTiO₃ / (Ba,Sr)TiO₃ методом спектроскопии комбинационного рассеяния света* / О.А. Маслова, Ю.И. Юзюк, N. Ortega, A. Kumar, R.S. Katigar // ФТТ. – 2011. – Т. 53, № 5. – С. 999–1003.
2. *Полупроводниковая сверхрешетка-твердотельный терагерцовый гетеродинамический источник для электронно-разогретого NbN-смесителя* / И.В. Пентин [и др.] // ЖТФ. – 2012. – Т. 82, вып. 7. – С. 75–78.
3. *Исследование физических процессов, возникающих в условиях низких температур и токов в светоизлучающих наногетероструктурах на основе полупроводниковых нитридов* / Е.А. Менькович [и др.] // Труды МФТИ. Нанотехнологии. – 2014. – Т. 6, № 1 – С. 12–19.
4. *Высокоэффективные InGaN/GaN/AlGaN светодиоды с короткопериодной InGaN/GaN сверхрешеткой для диапазона 530–560 нм* / В.В. Лундин [и др.] // Письма в ЖТФ. – 2010. – Т. 36, вып. 22. – С. 89–95.
5. *Глазов, С.Ю.* Генерация высших гармоник в сверхрешетке на основе графена в присутствии постоянного электрического поля / С.Ю. Глазов, Н.Е. Мещерякова // Наносистемы: физика, химия, математика. – 2012. – Т. 3, вып. 1. – С. 64–70.
6. *Использование короткопериодных сверхрешеток InGaN/GaN в светодиодах синего диапазона* / В.С. Сизов [и др.] // ФТП. – 2010. – Т. 44, вып. 7. – С. 955–961.
7. *Семченко, И.В.* Гиротропные свойства сверхрешеток в длинноволновом приближении / И.В. Семченко // Кристаллография. – 1990. – Т. 35, № 5. – С. 1047–1050.
8. *Гайшун, В.Е.* Гиротропные свойства сверхрешеток с магнитной структурой в длинноволновом приближении / В.Е. Гайшун, И.В. Семченко, А.Н. Сердюков // Кристаллография. – 1993. – Т. 38, №3. – С. 24–27.
9. *Румянцев, В.В.* Оптическая активность неидеальных 1D-сверхрешеток с вакансиями в примесных слоях / В.В. Румянцев, С.А. Федоров, М.В. Проскурин // ЖТФ. – 2014. – Т. 84, вып. 10. – С. 79–82.

10. *Photothermal deflection spectroscopy and detection* / W.B. Jackson, N.M. Amer, A.C. Boccara, D. Fournier // App. Opt. – 1981. – Vol. 20, № 8. – P. 1333–1344.

11. *Zharov, V.P.* Lazer Optoacoustic Spectroscopy / V.P. Zharov, V.S. Letokhov. – N-Y.: Springer-Verlag. – 1986. – 320 p.

12. *Bialkowski, S.E.* Photothermal Spectroscopy Methods for Chemical Analysis / S.E. Bialkowski. – N-Y.: Wiley. – 1996. – 584 p.

13. *McGahan, W.A.* Solution of the Heat Conduction Equation in Multilayers for Photothermal Deflection Experiments / W.A. McGahan, K.D. Cole // J. App. Phys. – 1992. – Vol. 72, № 4. – 1362–1373.

14. *Gallais, L.* Photothermal deflection in multilayer coatings: modeling and experiment / L. Gallais, M. Commandre // Appl. Opt. – 2005. – Vol. 44, № 25. – P. 5230–5238.

15. *Муратиков, К.Л.* Определение теплофизических характеристик и параметров трещин в керамиках лазерным фотодефлекционным методом / К.Л. Муратиков, А.Л. Глазов // ЖТФ. – 2001. – Т. 71, вып. 6. – С. 110–115.

16. *Burbelo, R.* Photothermal analysis of heterogeneous semiconductor structures under a pulse laser irradiation / R. Burbelo, M. Isaiev, A. Kuzmich // Semiconduct. Phys., Quant. Electron. & Optoelect. – 2009. – Vol. 12, № 4. – P. 403–405.

17. *Митюрин, Г.С.* Фотоакустическое преобразование в нелинейных гиротропных кристаллах типа силленита / Г.С. Митюрин // ЖТФ. – 1989. – Т. 59, № 9. – С. 118–122.

18. *The complex ray theory of photodeflection signal formation: Comparison with the ray theory and the experimental results* / D.K. Kobylińska, R.J. Bukowski, B. Burak, J. Bodzenta, S. Kochowski // J. Appl. Phys. – 2006. – Vol. 100. – P. 063501–1–063501–9.

19. *Detector effects in photothermal deflection experiments* / D.K. Kobylińska, R.J. Bukowski, J. Bodzenta, S. Kochowski, A. Kaźmierzczak-Balata // Appl. Opt. – 2008. – Vol. 47, № 10. – P. 1559–1566.

20. *Khosroshahi, M.E.* Variation of Photoacoustical signal With Gold Nanoparticles Concentration In Phantom Tissue Using Pulsed Nd:YAG Laser / M.E. Khosroshahi, A. Mandelis // Int. J. Thermophys. – 2014. – doi: 10.1007/s10765-014-1773-3.

21. *Федоров, Ф.И.* Теория гиротропии. / Ф.И. Федоров. – Минск: Наука и техника. – 1976. – 380 с.

22. *Durnin, J.* Exact solution for nondiffraction beams / J. Durnin // JOSA. – 1987. – Vol. 4, № 4. – P. 651–654.

23. *Bessel-like beams with z-dependent cone angles* / V. Belyi [et al.] // Opt. Express. – 2010. – № 18. – P. 1966–1973.

24. *Пятницкий, А.Н.* Волновые бесселевы пучки / А.Н. Пятницкий – М.: Физматлит. – 2012. – 407 с.

25. Лепарский, В.Е. Электроскопические конические линзы для формирования бесселевых световых пучков: проблемы взаимодействия излучения с веществом / В.Е. Лепарский, А.Г. Мащенко // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2001. – Т. 9, № 6. – С. 8–10.

26. Устройство термооптического возбуждения акустических волн: пат. 5969 Респ. Беларусь МПК G 10K 11/00 / П.И. Ропот, Г.С. Митюрин; заявитель ин-т физики им. Б.Н. Степанова НАН Беларуси, Белорусский торгово-экономический университет ПК. – № u20090659; заявл. 28.08.2009; опубл. 28.02.2010 // Афіцыйны бюл. Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2010. – № 1. – С. 215.

27. Mityurich, G.S. Thermo-optical excitation of sound by Bessel light beams in crystalline media with internal stress / G.S. Mityurich, A.N. Serdyukov // Crystallogr. Rep. – 2011. – Vol. 56, № 3. – P. 360–365.

28. Mityurich, G.S. Photodeflection spectroscopy of magnetoactive superlattice irradiated by Bessel – Gaussian light beams / G.S. Mityurich, E.V. Chernenok, A.N. Serdyukov // J. Appl. Spectr. – 2015. – Vol. 82, № 2. – P. 254–259.

29. Photoacoustic Transformation of Bessel Light Beams in Magnetoactive Superlattices / G.S. Mityurich, E.V. Chernenok, V.V. Sviridova, A.N. Serdyukov // Crystallogr. Rep. – 2015. – Vol. 60, № 2. – P. 273–279.

30. Блистанов, А.А. Акустические кристаллы. Справочник / А.А. Блистанов, В.С. Бондаренко, Н.В. Переломова; под ред. Н.П. Шаскольской. – М.: Наука. – 1982. – 632 с.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф14-047).

Поступила в редакцию 05.03.16.

УДК 669.2.8:620.178.6

ВЛИЯНИЕ ПОНДЕРОМОТОРНЫХ ФАКТОРОВ НА МИКРОСТРУКТУРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАГНИЯ ПРИ ЭЛЕКТРОПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

В.С. Савенко, А.Г. Силивонец, С.А. Ермоковец

Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина

INFLUENCE OF PONDEROMOTIVE FACTORS ON MICROSTRUCTURE CHARACTERISTICS OF MAGNESIUM DURING ELEKTROPLASTIC DEFORMATION

V.S. Savenko, A.G. Silivonec, S.A. Ermokovec

I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University

Представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований влияния импульсного тока плотностью 10^3 А/мм², длительностью 10^{-4} с и частотой 600–800 Гц на микроструктурные характеристики при реализации многоходовой электропластической прокатки магния. Рассмотрен вклад пондеромоторных факторов собственного магнитного и электрического полей на модификацию микроструктуры в условиях возбуждения электронной подсистемы металла при внешних электромагнитных воздействиях.

Ключевые слова: электропластическая деформация, пондеромоторное действие тока, пинч-эффект, скин-эффект, импульсный ток, собственное магнитное поле, вихревое электрическое поле, поле Холла, механическое давление, максимальная осевая сила.

The results of theoretical and experimental research of pulse current influence (density 10^3 A/mm², duration 10^{-4} s and frequency 600–800 Hz) on the microstructure of magnesium when implementing a multi-pass electroplastic rolling are presented. The contribution of ponderomotive factors of the own magnetic and electric fields to microstructure modification is examined in conditions of the metal electronic subsystem excitation by external electromagnetic influences.

Keywords: electroplastic deformation, ponderomotive action, pinch effect, skin effect, pulse current, magnetic field, electric field, Vortex field Hall, mechanical pressure, maximum axial force.

Введение

В настоящее время внимание многих исследователей обращено на рассмотрение электронно-дислокационных механизмов при модификации физических свойств материалов. Это вызвано тем, что у подавляющего большинства металлов пластические свойства реализуются путем эволюции совокупностей дислокаций при внешних энергетических воздействиях. Возникающий электропластический эффект (ЭПЭ) при действии одиночными импульсами тока во время деформации кристаллов растяжением и сжатием проявляется в скачкообразном удлинении образцов при прохождении импульса тока без какого-либо существенного теплового эффекта и тепловой дилатации. ЭПЭ обусловлен ускорением пластического течения металла потоком электронов проводимости, которые находятся в дрейфовом движении под влиянием электромагнитного поля, или действием «электронного ветра» внутри деформируемого металла, то есть помимо джоулевого эффекта, свободные электроны способны оказывать особое специфическое электропластическое действие на металл, находящийся под механическими напряжениями выше предела текучести [1]–[4].

Воздействие электромагнитными полями на деформируемое твердое тело, в частности, на металл во время обработки его давлением, относят к высокоэнергетическим воздействиям, хотя, как правило, они отличаются относительно низкими затратами энергии – не более 10^{-4} эВ в расчете на один атом, что на один-два порядка меньше затрат энергии на простое механическое деформирование (10^{-3} – 10^{-2} эВ) или на тепловое действие (10^{-2} эВ). В магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл приращение энергии на один атом составляет:

$$\Delta W = \mu_b B = 10^{-4} \text{ эВ},$$

в электрическом поле напряженностью $E = 1$ кВ/см:

$$\Delta W = eEa = 10^{-4} \text{ эВ},$$

в поле импульсного тока с плотностью $J_m = 10^3$ А/мм² и длительностью импульса $\tau = 100$ мкс:

$$\Delta W = J_m^2 \rho \tau a^3 = 10^{-4} \text{ эВ},$$

где μ_b – магнетрон Бора, e – элементарный заряд, ρ – удельное сопротивление, a – параметр кристаллической решетки.

Электропластичность обуславливает ряд факторов вторичного силового действия импульсного тока, которые влияют на пластическую деформацию металла, находящегося под механическим

напряжением выше предела текучести, таких как, пинч-эффект, возникающий под влиянием собственного магнитного поля тока и поляризации электронной подсистемы металла с созданием поперечного электрического поля Холла, которое препятствует дальнейшему сжатию электронной плазмы. При этом пинч-эффект создает ультразвуковую вибрацию остова кристаллической решетки и стимулирует пластичность металла, снижая его сопротивление деформированию. Механизм пинч-эффекта заключается в появлении вокруг образца с током кольцевых линий собственного магнитного поля (рисунок 0.1) и поперечного поля Холла, действующего на движущиеся заряды электронной плазмы (электроны проводимости) в поперечном направлении и смещающего их к оси проводника, обуславливая ультразвуковую вибрацию ионной решетки металла с частотой следования импульсов [5].

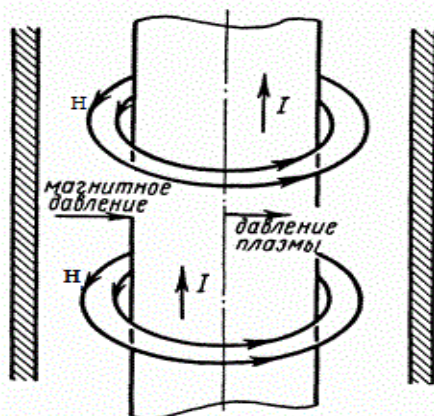


Рисунок 0.1 – Модель возникновения пинч-эффекта

Скин-эффект заключается в уменьшении амплитуды электромагнитных волн по мере их проникновения вглубь проводящей среды. В результате этого эффекта переменный ток высокой частоты при протекании по проводнику распределяется неравномерно по сечению, а преимущественно в поверхностном слое проводника. Происхождение скин-эффекта объясняется тем, что под действием внешнего переменного поля в проводнике свободные электроны создают токи, поле которых компенсирует внешнее поле в объеме проводника.

Таким образом, при реализации явления электропластичности пондеромоторные факторы становятся особенно заметным на высоких частотах следования импульсов [4], [6], [7].

Следует отметить, что во время электропластической деформации, кроме вторичных пондеромоторных эффектов при пропускании импульса электрического тока через проводник, наблюдается термическое разупрочнение решетки, расчет которого, для рассматриваемых длительностей импульсов тока (10^{-4} – 10^{-5} с) свидетельствует о несущественности этого эффекта [8]–[9].

В работе представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований воздействия импульсного тока на реализацию электропластической деформации многоходовой прокатки магния, а также влияние пондеромоторных факторов собственного магнитного и электрического поля, характеристики микроструктуры образца в условиях возбуждения электронной подсистемы металла при внешних электромагнитных воздействиях.

1 Расчет параметров пинч- и скин-эффектов

Рассмотрим влияние пондеромоторных факторов – напряженности собственного магнитного поля, механического давления и осевой силы – для технологического процесса электропластической деформации магния, реализованной на промышленном прокатном стане многоходовой прокаткой для конечных геометрических размеров образца после 35 переходов: толщина – 1 мм, ширина – 4 мм. При реализации электропластической прокатки через зону деформации с помощью специальных контактов пропускали импульсы тока плотностью $J = 10^3$ А/мм², длительностью $\tau = 10^{-4}$ с и частотой следования импульсов $\omega = 600$ – 800 Гц.

На поверхности образца, напряженность собственного магнитного поля для последнего 35-го перехода, принимает значение [4]–[6]:

$$H_m = 0,2 \frac{I_a}{r} = 31,8 \cdot 10^3 \text{ А/м,}$$

где $I_a = jS$ – амплитудное значение силы тока в проводнике, $j = 10^3$ А/мм², $S = 4$ мм² – площадь поперечного сечения проводника, $r = 0,5$ мм – радиус образца.

Механическое давление, возникающее от сжатия электронной плазмы, равно:

$$P = \mu \frac{H_m^2}{8\pi} = 7,89 \cdot 10^{-3} \text{ Па,}$$

где P – механическое давление (Па), $\mu = 1,257 \cdot 10^{-6}$ Гн/м – магнитная проницаемость магния.

На рисунках 1.1 и 1.2 представлены расчетные значения собственного магнитного поля тока H_m , а также механического давления P на поверхности образца магния.

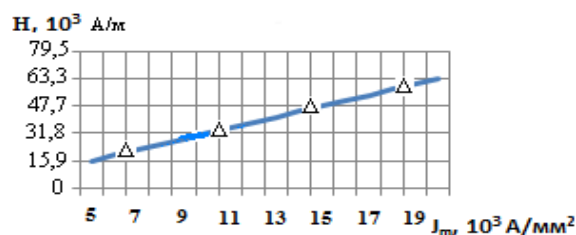


Рисунок 1.1 – Зависимость собственного магнитного поля тока H_m на поверхности образца магния от плотности тока J_m

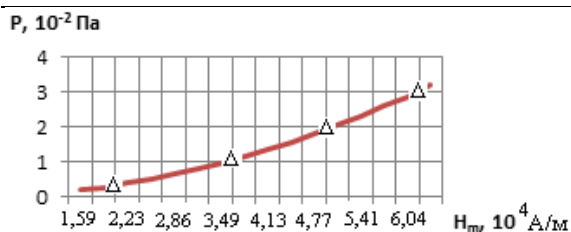


Рисунок 1.2 – Изменение механического давления P на поверхности образца магния при различных значениях собственного магнитного поля тока H_m

При этом максимальная осевая сила F_z , возникающая на последнем переходе и обуславливающая ультразвуковую вибрацию остова кристаллической решетки от пинч-действия тока, равна:

$$F_z = 2\nu PS = 1,71 \cdot 10^{-2} \text{ Н},$$

где $\nu = 0,27$ – коэффициент Пуассона, P – механическое давление, $S = 4 \text{ мм}^2$ – площадь сечения образца.

Важную роль в явлении электропластичности и возникновении вторичных пондеромоторных эффектов играет материал образца и его проводимость, а также скорость диффузии магнитного поля, которыми соответственно обуславливается пинч-эффект.

Величина пинч-эффекта также зависит от круговой частоты ω , добротности Q , которая должна быть небольшой. При $R \leq 0,1 \text{ Ом}$, $L \cong 10^{-7} \text{ Гн}$ и $C \cong 10^{-3} \text{ Ф}$, $\omega = 600 \div 800 \text{ Гц}$ и длительности импульса $\tau = 10^{-4} \text{ с}$ добротность составляет величину $Q \leq 0,1$.

Толщину скин-слоя δ для образца магния определяли из соотношения $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}$, где μ – магнитная проницаемость магния, σ – удельная проводимость магния, ω – частота следования импульсов.

При частоте тока 600 Гц толщина скин-слоя в образце на последнем технологическом переходе равна $\delta = 1,081 \cdot 10^{-2} \text{ мм}$, а при 800 Гц $\delta = 9,36 \cdot 10^{-3} \text{ мм}$.

Очевидно, что при достаточно большой частоте ω толщина скин-слоя может быть очень малой, достигая значений менее 10 мкм при частотах порядка 800 Гц (рисунок 1.3).

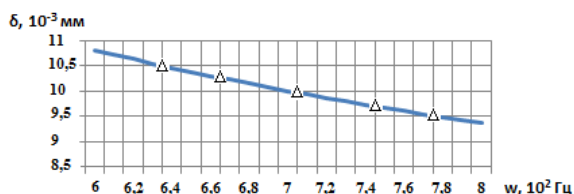


Рисунок 1.3 – Зависимость величины скин-слоя δ от круговой частоты ω

2 Морфологический анализ микроструктуры образцов магния

Рассмотрим влияние пондеромоторных факторов на изменение микроструктурных характеристик при реализации электропластической деформации многоходовой прокаткой магния.

Исследования проводили на образцах магния, один из которых подвергался многоходовой прокатке из 35 переходов в условиях электропластической деформации, а второй образец (контрольный) проходил прокатку без тока.

Микроструктуру образцов (рисунок 2.1) изучали с помощью растрового электронного микроскопа LEO 1455VP (CarlZeiss) в отраженных электронных лучах, ускоряющее напряжение составляло 20 кВ.

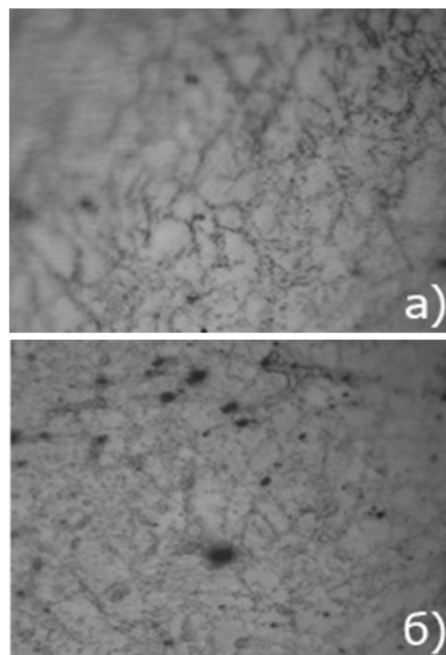


Рисунок 2.1 – Микроструктура образцов без тока (а) и с током (б) (100x)

Морфологический анализ изображения осуществляли на приборе «Пост микроконтроля МК-3» с помощью компьютерной программы Autoscan Objects, которая позволяет проводить их автоматическую классификацию по заданным параметрам с выделением гистограмм по классам и определением контроля физико-механических свойств материала (рисунок 2.2 (а, б)).

Деформационные характеристики образцов с током и без тока по различным параметрам показали существенную модификацию микроструктуры при внешних энергетических воздействиях в результате реализации электропластической деформации (таблица 2.1).

Площадь зерен рассчитывали методом трапезий путем проектирования отрезков, составляющих объект, на ось и подсчетом суммы разности площадей полученных фигур. Периметр зерен определяется простым суммированием длин

отрезков, составляющих контур объекта. Из морфологического анализа микроструктуры по параметрам площади и периметра видно существенное влияние импульсов тока, пропущенных через материал, нагруженный выше предела текучести, на деформационные процессы при прокатке магния в условиях электропластичности (рисунки 2.4, 2.5).

Таблица 2.1. – Деформационные характеристики образцов

Морфология образцов	Без тока (а)	С током (б)
Количество всех объектов	218	272
Сумма площадей всех объектов:	282.12 мкм ²	258.86 мкм ²
Обработанная площадь:	62.64%	57.48%

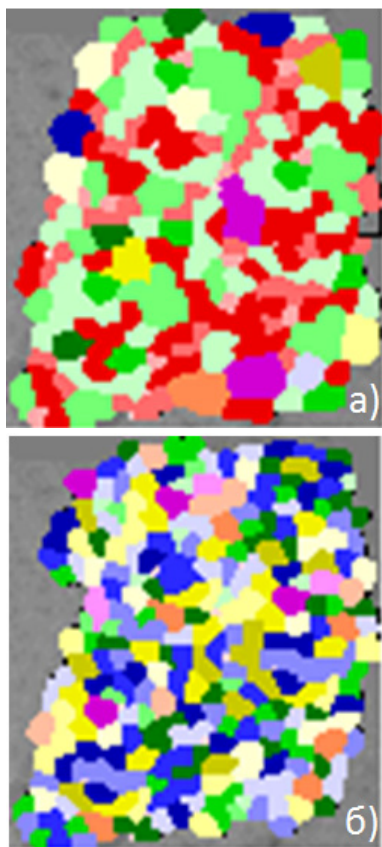


Рисунок 2.2 – Морфология микроструктуры образца без тока (а) и с током (б)

Из графиков видно, что при пропускании импульсов электрического тока через образец изменяется кинетика пластической деформации и физико-механические характеристики материала за счет пондеромоторных факторов, при этом микроструктура деформированного магния становится мелкозернистой с появлением зон рекристаллизации (размер зерна 1–3 мкм) и частичной аморфизацией за счет увеличения изотропности кристаллической решетки.

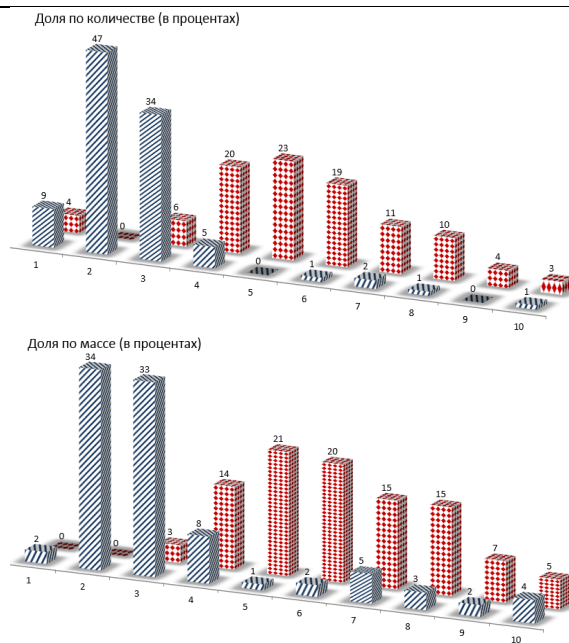


Рисунок 2.4 – Сравнительный график по параметру «площади зерен»

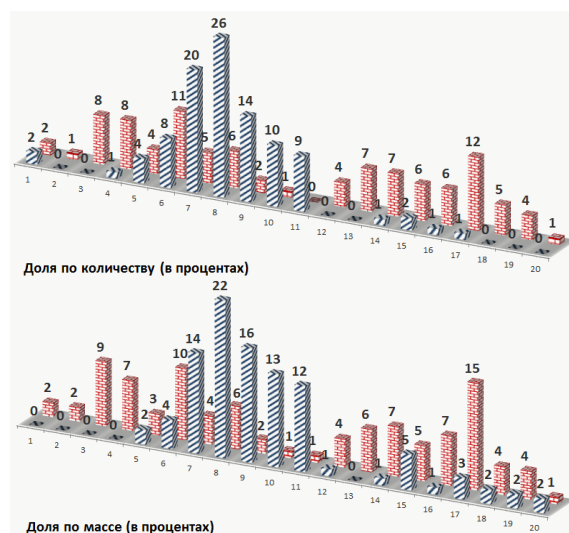


Рисунок 2.5 – Сравнительный график по параметру «периметр зерен»

Заключение

Для технологических процессов электропластической деформации металлов, особенно при их волочении и прокатке, необходимо учитывать условия возникновения пондеромоторных факторов с целью определения максимальных значений пинч- и скин-эффектов при одинаковых параметрах импульсного тока, а также их связь со скоростью диффузии магнитного поля в металл.

Импульсный ток, пропущенный через металл, нагруженный выше предела текучести, реализует явление электропластичности и вызывает, помимо электропластического действия, пондеромоторные эффекты, которые обуславливают

возникновение механических напряжений, возбуждение ультразвуковых колебаний ионного остова кристаллической решетки металла с периодичностью подачи импульсов тока за счет действия поперечного поля Холла.

При дополнительной деформации образца за счет пондеромоторных факторов магнитное поле диффундирует в кристалл, при этом скорость диффузии зависит как от проводимости металла, так и от частоты тока. Для достижения максимума пинч-эффекта необходимо выбирать такую частоту импульсов тока, при которой магнитное поле не успевает существенно проникнуть через поверхность образца. При одной и той же геометрии образцов пинч-эффект выражен сильнее на материале с более высокой электропроводностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рощупкин, А.М.* Физические основы электропластической деформации металлов / А.М. Рощупкин, И.Л. Батаронов // Изв. ВУЗов. Серия Физика. – 1996. – № 3. – С. 57–65.
2. *Рощупкин, А.М.* О влиянии электрического тока и магнитного поля на взаимодействие дислокаций с точечными дефектами в металлах / А.М. Рощупкин, И.Л. Батаронов // Физика твердого тела. – 1988. – Т. 30. – № 11. – С. 3311–3316.

3. *Roschupkin, A.M.* Electric current effect on metal surface layers / A.M. Roschupkin, I.L. Bataronov, O.A. Troitskii, M.M. Moiseenko // Phys. Stat. sol (b). – 1989. – Vol. 151, № 1. – P. 121–126.

4. *Савенко, В.С.* Механическое двойникование и электропластичность металлов в условиях внешних энергетических воздействий / В.С. Савенко // Монография. Издание 2-е дополненное и переработанное. – Мн.: БГАФК – 200. – 203 с.

5. *Арцимович, Л.А.* Пинч-эффект / Л.А. Арцимович. – В кн.: Элементарная физика плазмы. – 3-е изд. – М.: Атомиздат, 1969. – С. 151–158.

6. *Физические основы электроимпульсной и электропластической обработок и новые материалы* / Ю.В. Баранов, О.А. Троицкий, Ю.С. Авраамов, А.Д. Шляпин. – М.: МГИУ, 2001. – 844 с.

7. *Савенко, В.С.* Фундаментальные и прикладные исследования электропластической деформации металлов / В.С. Савенко, О.А. Троицкий. – Минск: ИВЦ Минфина, 2013. – 375 с.

8. *Savenko, V.S.* Electroplastic effect under the simultaneous superposition and magnetic fields. / V.S. Savenko // Journal of Applied Physics. – 1999. – № 5. – P. 1–4.

9. *Электропластическая правка и прокатка стали* / В.С. Савенко [и др.] // Известия АНБ, Серия физико-технических наук. – 1994. – № 1. – С. 14–17.

Поступила в редакцию 24.02.16.

УДК 621.793:539.216.2

**ВЛИЯНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ ФОРМИРОВАНИЯ
НА СТРУКТУРУ И СВОЙСТВА ПОКРЫТИЙ НА ОСНОВЕ ПОЛИМЕРОВ,
ОСАЖДАЕМЫХ ИЗ АКТИВНОЙ ГАЗОВОЙ ФАЗЫ (ОБЗОР).**

**1. ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ И РЕЖИМОВ ГЕНЕРАЦИИ АКТИВНОЙ
ГАЗОВОЙ ФАЗЫ**

М.А. Ярмоленко, А.А. Рогачев, А.В. Рогачёв

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

**INFLUENCE OF TECHNOLOGICAL PROCESSES OF FORMING
ON THE PROPERTIES OF COATINGS BASED ON POLYMERS
DEPOSITED FROM ACTIVE GAS PHASE (REVIEW).**

1. EFFECT OF CONDITIONS AND MODES OF GAS PHASE GENERATION

M.A. Yarmolenko, A.A. Rogachev, A.V. Rogachev

F. Scorina Gomel State University

Проведен анализ влияния энергии и плотности потока электронов, введения в мишень низкомолекулярных соединений, лазерного ассистирования процесса диспергирования, плазменного разряда в летучих продуктах на молекулярную структуру и свойства покрытий на основе полимеров, осаждаемых из активной газовой фазы. Определена эффективность регулирования структуры и свойств покрытий путем изменения условий и режимов генерации газовой фазы.

Ключевые слова: электронно-лучевое диспергирование, полимерные покрытия, лазерное ассистирование, плазменная обработка.

The influence of energy and density of electron flux, the introduction into a target of low molecular weight compounds, laser assisting of the dispersion process, the plasma treatment of dispersion products on the molecular structure and properties of coatings based on polymers deposited from the gas phase were analyzed. The effectiveness of regulation of the structure and properties of the coatings by means of the conditions and modes change of the gas phase generation was determined.

Keywords: electron beam dispersion, polymer coatings, assisting laser, plasma treatment.

Введение

В числе методов осаждения тонких наноконпозиционных слоев на основе полимеров особый научный и практический интерес представляют методы, заключающиеся в генерации активной газовой фазы в результате воздействия в вакууме на полимер концентрированного потока электронов, ионов, лазерного излучения и последующего осаждения летучих частиц диспергирования на поверхности [1]–[3]. Протекающие при этом процессы характеризуются высокой химической активностью летучих продуктов диспергирования, и введение в их состав паров наполнителя позволяет формировать наноконпозиционные слои практически любого состава. При этом путем изменения технологических условий и режимов генерации газовой фазы, массопереноса в газовой фазе и осаждения летучих продуктов диспергирования на поверхности предоставляется возможность активного влияния на процессы адсорбции летучих частиц на поверхности, полимеризации, молекулярную структуру и морфологию, свойства формирующихся слоев. Используемые при этом технологические приемы оказывают различное влияние на процессы

формирования покрытий, и рассмотрение особенностей этого влияния дает возможность разработать научно обоснованные принципы управления структурой и морфологией покрытий, а, соответственно, и их свойствами, что представляет большой практический интерес, позволяет значительно расширить область эффективного применения осаждаемых слоев.

В числе важнейших особенностей процесса осаждения из активной газовой фазы следует отметить высокую, как правило, неоднозначную зависимость состава летучих продуктов диспергирования, их реакционной активности, а, соответственно, структуры и свойств покрытий от параметров воздействия на полимер концентрированного потока энергии, процессов, протекающих на стадии переноса частиц из зоны диспергирования до поверхности подложки [1].

В настоящей работе объектом анализа являются закономерности влияния на структуру и свойства покрытий энергии электронов, плотности потока, особенности генерации летучих продуктов диспергирования при введении в мишень низкомолекулярных соединений, лазерном ассистировании процесса диспергирования, эффективность

влияния на структуру и свойства покрытий плазменного разряда в летучих продуктах.

1 Оптимизация параметров электронного потока

При формировании полимерных покрытий из летучих продуктов электронно-лучевого диспергирования исходных полимеров на всех стадиях протекают сложные физико-химические процессы. При этом их кинетика и, соответственно, скорость роста покрытия, его молекулярная структура и свойства в значительной степени зависят от режимов и условий генерации газовой фазы [1], [3]. В числе наиболее значимых процессов, влияющих на кинетические параметры диспергирования, состояние газовой фазы, отмечают: зарядку поверхности полимерной мишени и возникновение электрического поля, тормозящего первичный поток электронов [4]; радиационно-термическое воздействие электронов на макромолекулы полимера, их фрагменты в зоне диспергирования и в газовой фазе [5]; генерацию реакционно-активных частиц в газовой фазе в результате действия на них первичных и вторичных электронов [6]. Данные процессы определяют, в частности, установленный в [5] нестационарный характер диспергирования ПТФЭ потоком электронов, условия возникновения периодических изменений скорости диспергирования.

В [4] рассмотрены особенности переноса заряда при электронно-лучевом диспергировании полимеров. Предложена модель, учитывающая изменение адсорбированного заряда за счет вторичной электронной эмиссии, десорбции заряженных частиц диспергирования. Получено, что изменение во времени линейной скорости диспергирования определяется выражением

$$V_0 = \frac{k}{\rho_n} j \left[U_0 + (U_y - U_0) \exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right) \right], \quad (1.1)$$

где τ_0 – постоянная времени зарядки; j – плотность потока электронов; U_y – ускоряющее напряжение источника электронов; ρ_n – плотность полимера мишени; d и β – параметры, зависящие от природы полимера; $U_0 = E/e$, E – энергия электрона, при которой коэффициент вторичной электронной эмиссии равен единице; e – заряд электрона.

Из (1.1) следует, что при достаточно длительном диспергировании ($t \gg \tau_0$) величина ускоряющего напряжения электронной пушки U_y практически не влияет на скорость диспергирования. Поэтому для обеспечения высокой экономичности и стационарности процесса диспергирования величину ускоряющего напряжения электронной пушки следует устанавливать близким к U_0 , а для обеспечения высокой скорости диспергирования необходимо использовать достаточно интенсивные потоки электронов (ионов).

При этом, однако, необходимо учитывать, что с увеличением плотности потока электронов уменьшается постоянная времени зарядки и на поверхности быстрее накапливается заряд, который уменьшает эффективную энергию электронов и, соответственно, скорость диспергирования. Стационарное значение скорости диспергирования в данной модели линейно возрастает с увеличением плотности потока электронов.

Отметим, что установленный характер зависимости скорости диспергирования от плотности потока электронов согласуется с экспериментальными измерениями скорости диспергирования ПТФЭ при различных режимах [1], [7], что позволяет сделать вывод о значительном влиянии поверхностного заряда на кинетику электронно-лучевого разрушения поверхности.

В работе [7] при режимах диспергирования, исключающих значительное влияние на него зарядки поверхности полимера ($U_y < U_0$), определено влияние плотности потока электронов и их энергии на скорость осаждения V покрытия ПТФЭ, давление летучих продуктов диспергирования P_n , их реакционную активность, оцениваемую с помощью параметра $\delta = \frac{V}{P_n - P_0}$ (P_0 – начальное давление в камере).

Установлено, что зависимость V от параметров электронного потока (плотности потока, энергии электронов) является практически линейной (рисунок 1.1). На основании этого можно заключить, что скорость роста покрытия линейно возрастает с повышением мощности электронного пучка падающего на мишень. Это согласуется с тем, что и скорость диспергирования ПТФЭ, определенная по силе отдачи тигля, линейно зависит от мощности электронного потока [5]. Однако влияние параметров электронного потока на эффективную реакционную способность продуктов диспергирования (или коэффициент использования паров) имеет различный характер. Как видно из рисунка 1.1, параметр δ возрастает при повышении ускоряющего напряжения U_y и снижается при повышении тока электронного луча.

Для объяснения установленной особенности влияния технологических параметров электронного потока на реакционную способность продуктов диспергирования в [7] проведено аналитическое рассмотрение осаждения покрытия в результате присоединения адсорбированных на поверхности молекулярных фрагментов к активным центрам полимеризации с учетом их тепловой и электронно-стимулированной десорбции. Рассматривая процесс вторичной полимеризации как реакцию первого порядка, лимитированную плотностью центров полимеризации, и предположив на основании данных, приведенных на рисунке 1.1, линейную зависимость давления летучих продуктов от мощности потока электронов получено

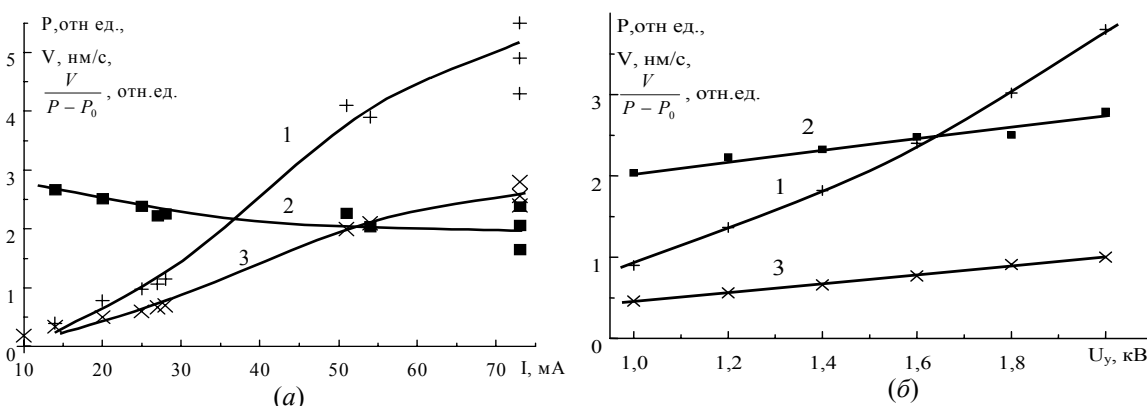


Рисунок 1.1 – Влияние силы тока электронного луча (а) и ускоряющего напряжения (б) на скорость роста полимерного покрытия (1), реакционную активность летучих продуктов диспергирования (2) (точки – экспериментальные данные, сплошная линия – расчет

по формуле (1.2) при $\frac{S_0}{k_1} \sqrt{\frac{k_2 \cdot kT \cdot \alpha}{\gamma \cdot bV}} = 300$) и давление в камере (3)

$$\delta = \frac{V}{P} = \frac{V_K}{kT} \cdot \frac{(1-\gamma)}{1 + \frac{S_0}{k_1} \sqrt{\frac{k_2 \cdot kT \cdot \alpha}{\gamma \cdot bV}} \cdot \frac{\alpha J}{U_y}}, \quad (1.2)$$

где k_1 – константа скорости полимеризации; k_2 – константа скорости рекомбинации активных центров (радикалов); γ – доля активных частиц в потоке летучих продуктов, способных выполнять роль ядер полимеризации; j – плотность потока электронов; S_0 – эффективное сечение взаимодействия при электронно-стимулированной десорбции; α – коэффициент, зависящий от пространственного распределения вторичных электронов; V_K – скорость движения молекулярных частиц в потоке; k – постоянная Больцмана; T – температура; b – коэффициент пропорциональности.

Анализ (1.2) показывает, что в рамках предлагаемой модели представляется возможным объяснить различный характер влияния силы тока электронного потока и ускоряющего напряжения на значение параметра δ (расчетные зависимости, полученные на основании (1.2), достаточно полно согласуются с экспериментальными, представленными на рисунке 1.1).

2 Влияние плазменной активации летучих продуктов диспергирования

Обработка плазменным разрядом генерируемых при диспергировании летучих продуктов является одним из наиболее эффективных способов направленного изменения структуры и свойств осаждаемых слоев на основе полимеров. В процессе такой обработки продукты диспергирования подвергаются воздействию нейтральных и заряженных частиц плазмы и УФ-излучения, что приводит к более интенсивному разрушению молекулярных фрагментов, образованию

реакционноспособных частиц. При этом в зоне активационного воздействия оказываются и поверхностные слои подложки и, как следствие этого, повышаются прочность адгезионного взаимодействия, скорость роста покрытия.

При создании плазменного разряда в летучих продуктах диспергирования формирование полимерного слоя протекает в условиях непрерывного воздействия генерируемых в плазме активных заряженных частиц, которые могут инициировать как процессы полимеризации, так и травление, особенно аморфных участков растущего полимерного покрытия [8], [9]. Приведенные выше и целый ряд других особенностей определяют значительное влияние параметров разряда на структуру, морфологию и свойства осаждаемых покрытий. В числе наиболее характерных морфологических, физико-химических особенностей покрытий, сформированных в условиях плазменной активации, следует отметить следующие:

1. Образование в покрытии при повышении интенсивности плазменного воздействия, как правило, столбчатых структур, являющихся результатом слияния большого количества мелких сферических элементов ($< 0,1$ мкм), формирующихся как в результате газофазных реакций между продуктами диспергирования, так и на подложке вследствие травления и селективного роста скоплений активных центров полимеризации, возникающих под действием плазмы тлеющего разряда (рисунок 2.1) [10], [11].

2. Молекулярная структура покрытий, осажденных в условиях плазменной активации, характеризуется более низкой упорядоченностью, снижается степень кристалличности. При этом изменение молекулярной насыщенности

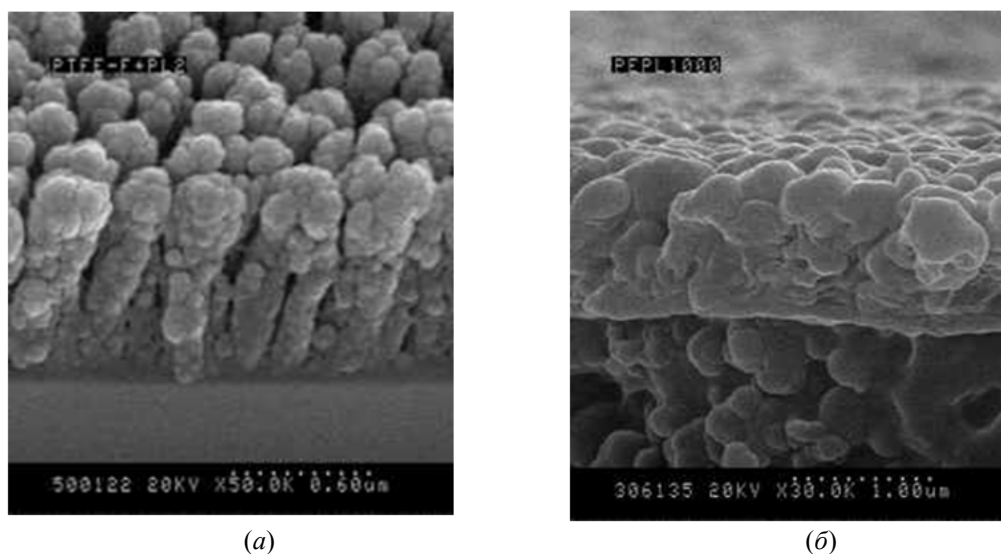


Рисунок 2.1 – РЭМ-изображение покрытий, сформированных из активированных в плазме продуктов электронно-лучевого диспергирования ПТФЭ (а), ПЭ (б)

Таблица 2.1 – Влияние активационной обработки на поверхностную энергию полимерных покрытий

Покрытие	Поверхностная энергия, мДж/м ²	
	Без активации	Плазменная обработка ($j = 2,5 \text{ A/m}^2$)
политетрафторэтилен	14,9	28,3
полиэтилен	24,9	27,3
полиуретан	24,38	40,64

определяется природой полимера. Так, например, плазменная активационная обработка продуктов диспергирования ПТФЭ практически не влияет на плотность двойных связей, а обработка фрагментов ПЭ сопровождается снижением содержания винильных групп и повышением содержания трансвиниленовых связей [1], [12].

3. Влияние плазменной обработки проявляется в повышении поверхностной энергии осаждаемых покрытий (таблица 2.1). При формировании покрытий ПТФЭ изменение поверхностной энергии может быть связано с более интенсивным протеканием процессов дефторирования макромолекул под действием потока электронов, дополнительно инициируемых компонентами плазмы [13], с инъекцией заряженных частиц в осаждаемый слой [14], заметным изменением морфологии тонкого слоя.

4. Полимер-полимерные покрытия, осажденные из активированной газовой фазы, представляют собой высокодисперсные смеси компонентов мишени, модифицированных в плазме разряда. При формировании ряда покрытий, например ПТФЭ-ПУ, возможно химическое взаимодействие продуктов диспергирования в газовой фазе и на поверхности [12].

3 Влияние лазерного ассистирования при электронно-лучевом диспергировании

Влияние ассистирующего электромагнитного излучения на процессы диспергирования является многофакторным, зависящим от природы мишени, параметров излучения. Оно заключается, прежде всего, в дополнительной тепловой активации макромолекул, разрыве химических связей (если энергия фотонов больше энергии связи), фотохимической активации образовавшихся летучих продуктов диспергирования и, соответственно, в повышении их реакционной способности. При этом, если энергия фотона достаточно большая, то возбуждение электрона в результате фотонного поглощения может привести к непосредственно фотохимическому разложению. Если энергия квантов излучения меньше энергии связи атомов и плотность теплового выделения превышает некоторую пороговую величину, то основным механизмом диспергирования является термохимическое разложение.

Коротковолновое электромагнитное излучение может вызвать также фотоэлектронную эмиссию, которая снижает величину адсорбированного при обработке электронами электрического заряда и, соответственно, определяет уменьшение напряженности электрического поля,

тормозящего падающий поток электронов. Это, в свою очередь, повышает энергию электронов, воздействующих на мишень, и, соответственно, интенсивность диспергирования, определяет более интенсивную вторичную электронную эмиссию, которая оказывает активационное воздействие на летучие продукты диспергирования и таким образом влияет на характер и кинетику процессов вторичной полимеризации.

В [15] показано, что при наличии лазерного ассистирования возрастание скорости диспергирования за счет снижения зарядки полимерной поверхности при ее электроннолучевом диспергировании пропорционально плотности потока энергии электромагнитного излучения:

$$\Delta V_{d,0} = \frac{k}{\rho} \frac{eJ_{\phi}}{(d + \beta k)}$$

Так, в работе [16] установлено влияние лазерного ассистирования на скорость диспергирования уксусноокислого цинка (рисунок 3.1). Импульсный характер изменения давления летучих продуктов при периодическом воздействии на зону диспергирования лазерного излучения указывает на преимущественно фотохимический характер разрушения соединения. Отметим, что энергия квантов ассистирующего излучения составляет 4,7 эВ, ее достаточно для разрыва химических связей в молекуле углекислого цинка и ее ионизации.

В работах [17], [18] определены особенности морфологии и структуры покрытий на основе ПЭ, сформированных из активной газовой фазы, образованной электроннолучевым диспергированием в условиях лазерного ассистирующего воздействия. Осаждение осуществлялось на поверхности, отличающиеся значением поверхностной энергии, кремния ($E = 63,5$ мДж/м²), подслоя ПТФЭ ($E = 20$ мДж/м²). Установлено, что при лазерном стимулирующем диспергировании действии ($\lambda = 532$ нм) осаждаются покрытия ПЭ с более высокой (на 35%) степенью упорядоченности и низкой степенью разветвленности (таблица 3.1).

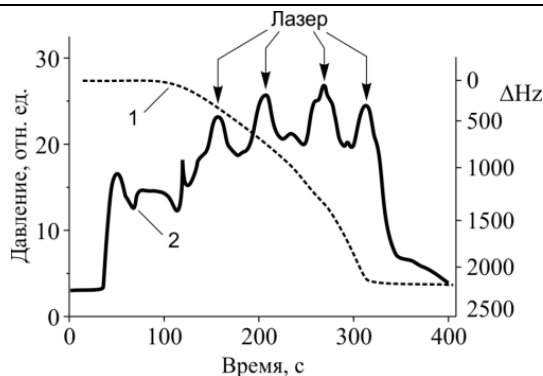


Рисунок 3.1 – Изменение толщины покрытия, регистрируемое по изменению резонансной частоты кварцевого датчика (1), давления в камере (1) в процессе электронно-лучевого диспергирования уксусноокислого цинка при многократном импульсном лазерном ассистирующем воздействии

Воздействие лазерного излучения проявляется в увеличении степени упорядоченности и некотором уменьшении разветвленности полимерных макромолекул покрытий на основе ПЭ. Покрытия, сформированные в процессе электронно-лучевого диспергирования смеси ПЭ+AlCl₃ без лазерного ассистирования, характеризуются более высокой разветвленностью молекулярной цепи, уменьшением концентрации винильных групп (–CH=CH₂) и упорядоченности в сравнении с покрытием ПЭ, сформированным без лазерного ассистирования.

В [15], [19] отмечается, что при формировании покрытий полиэтилена и композиционных покрытий хлорида алюминия и полиэтилена с возрастанием поверхностной энергии подложки увеличивается в 2–4 раза шероховатость структурных образований ПЭ. При лазерном ассистировании процесса диспергирования установлено формирование слоев с большим размером зерна.

Заметные изменения молекулярной структуры и морфологии покрытий при использовании лазерного ассистирования процесса диспергирования установлены при формировании металлосодержащих полимерных покрытий [1], [20].

Таблица 3.1 – Относительные оптические плотности полос поглощения в ИК-спектре покрытий ПЭ и ПЭ+AlCl₃, осажденных в условии лазерного ассистирования и без него

Подложки	Метод формирования покрытий	ПЭ/ПЭ+AlCl ₃				
		D ₁₄₇₃ /D ₁₄₆₄	D ₁₃₇₈ /D ₁₄₆₄ (CH ₃)	D ₉₆₅ /D ₁₄₆₄ (–CH=CH–)	D ₉₀₈ /D ₁₄₆₄ (–CH=CH ₂)	D ₈₈₉ /D ₁₄₆₄ (>C=CH ₂)
Кремний	без ассистирования	0,37/0,32	0,29/0,43	0,14/0,14	0,21/0,07	0,06/0,06
Кремний	ассистирование	0,5/0,46	0,28/0,39	0,11/0,09	0,13/0,05	0,06/0,03
Подслой ПТФЭ	без ассистирования	0,52/0,34	0,22/0,36	0,13/0,12	0,17/0,09	0,03/0,06
Подслой ПТФЭ	ассистирование	0,66/0,49	0,16/0,32	0,1/0,08	0,14/0,05	0,02/0,03

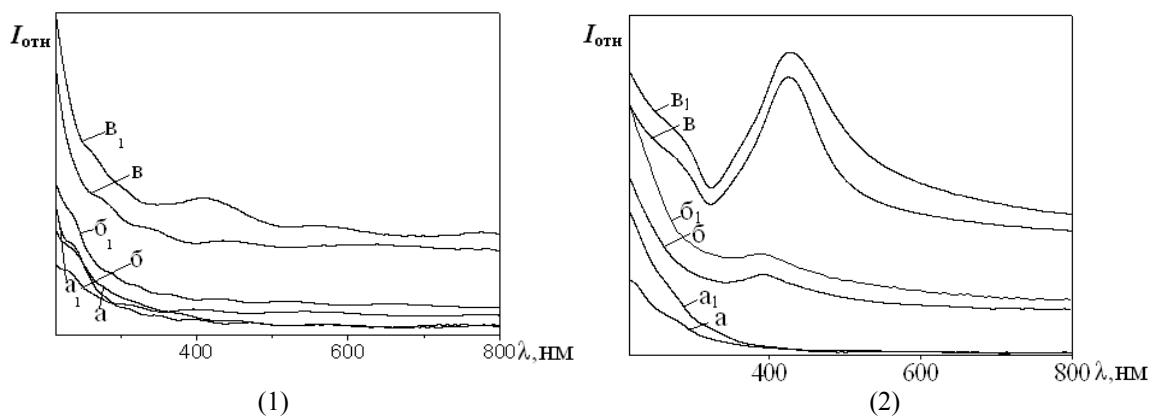


Рисунок 3.2 – Электронные спектры покрытий до (1) и после отжига при 200°C (2) (а) – ПЭ; (б) – AgNO₃: ПЭ = 1:1; (в) – AgNO₃:ПЭ = 2:1; ₁ – в условии лазерного ассистирования (λ = 266 нм)

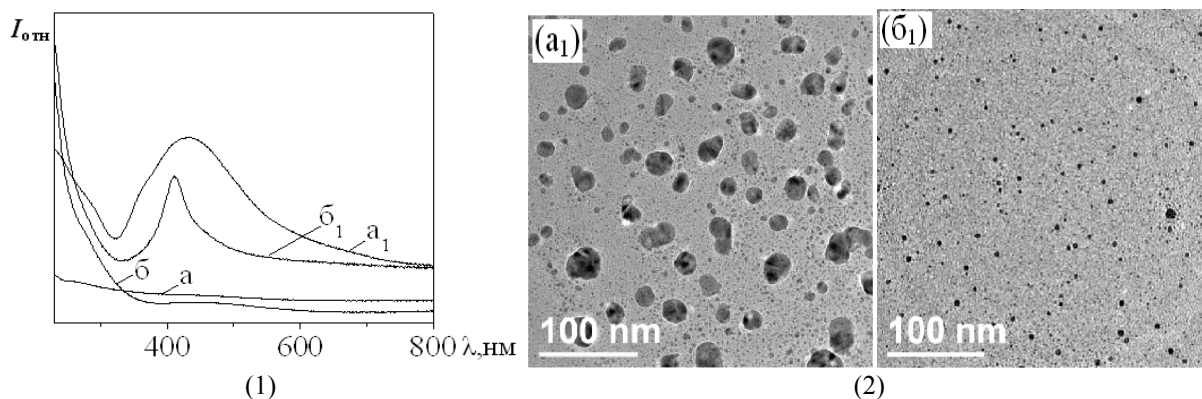


Рисунок 3.3 – Электронные спектры (1) и ПЭМ-изображения (2) покрытий (а) – AgNO₃; (б) – AgNO₃ + ПММА; ₁ – в условии лазерного ассистирования (λ = 266 нм)

Так, при электронно-лучевом диспергировании смеси полиэтилена и нитрата серебра, осаждении покрытий в условиях лазерного ассистирования (λ = 266 нм) более активно протекают процессы образования наночастиц серебра. В электронном спектре покрытия, сформированного при соотношении компонент AgNO₃: ПЭ = 2:1 без лазерного стимулирования, отсутствует пик плазмонного поглощения, а в спектре покрытия, сформированного в условиях лазерного ассистирующего воздействия, такой пик с максимумом при длине волны λ = 410 нм наблюдается (рисунок 3.2), что указывает на образование в слое наночастиц серебра.

Последующая термообработка композиционных покрытий интенсифицирует процессы формирования в полимерном слое наночастиц серебра. Из представленных на рисунке 3.2 результатов следует, что для покрытий, подвергнутых термообработке при 200°C, характерно малоинтенсивное плазмонное поглощение в области длин волн 380 нм при диспергировании смеси с соотношением AgNO₃: ПЭ = 1:1. Для композиционных покрытий, сформированных при диспергировании смеси с соотношением AgNO₃:

ПЭ = 2:1, плазмонное поглощение является более интенсивным. С учетом того, что температура термического разложения соли составляет 440°C, в работах [1], [15] сделан вывод о фотохимическом влиянии лазерной обработки на разложение соли и автокаталитическом воздействии на этот процесс наночастиц серебра, образовавшихся на стадии диспергирования.

Образование металлических кластеров, ответственных за плазмонное поглощение, установлено и при осаждении покрытий в условиях лазерного ассистирующего воздействия на зону электронно-лучевого диспергирования AgNO₃ и смеси ПММА – AgNO₃ (рисунок 3.3) [21]. Отметим, что пик плазмонного поглощения для композиционного полимерного покрытия является более узким, что указывает на высокую монодисперсность образующихся наночастиц.

4 Введение в зону диспергирования низкомолекулярных соединений. Легирование покрытий

Осаждение покрытий из активной газовой фазы предполагает возможность использования составных мишеней, последовательное или

одновременное диспергирование полимеров, нагрев и даже испарение низкомолекулярных соединений различной природы. В зоне действия потока электронов на составную мишень протекают сложные ионные и радикальные реакции, кинетика и механизм которых в значительной степени зависят от условий и режимов диспергирования, инициирующего или ингибирующего влияния присутствующих в мишени химических соединений [1], [22], [23]. При этом в зависимости от природы, физико-химических, теплофизических свойств веществ, введенных в состав полимерной мишени, возможно протекание следующих основных процессов, определяющих состав, структуру и свойства осаждаемых покрытий:

1. Вещество-наполнитель под действием электронов не разлагается, однако при этом оказывает каталитическое влияние на процессы деградации макромолекул полимера, генерацию летучих продуктов диспергирования, их вторичную полимеризацию. Частицы такого наполнителя при электронной обработке имеют достаточно высокую температуру, что в значительной степени определяет разрушение макромолекул преимущественно в зоне контакта их с полимером. Изменение теплового режима диспергирования влияет на состав летучих продуктов, их реакционную активность.

2. В зоне диспергирования низкомолекулярное вещество-наполнитель испаряется с последующей адсорбцией на поверхности подложки и участием во вторичной полимеризации и структурообразовании. При осуществлении, например, термообработки сформированного покрытия, возможно разложение этих соединений, взаимодействие с молекулами полимерной матрицы. В результате осуществляется формирование нано- или микрокомпозиционных слоев, состав и свойства которых значительно отличается от состава и свойств исходных веществ, находящихся в тигле.

3. Низкомолекулярные соединения разлагаются при электронной обработке, образовавшиеся отдельные частицы, как правило, наноразмерные остаются в тигле и оказывают воздействие на протекающие при диспергировании макромолекул полимера процессы. При определенных условиях, например, при реализации капельного режима диспергирования возможен их унос из тигля и осаждение на поверхности подложки. Летучие продукты разложения участвуют в процессе формирования покрытия, инициируя процессы вторичной полимеризации молекулярных фрагментов полимера или же химически взаимодействуя с ними.

Приведенные варианты процессов с участием низкомолекулярных веществ являются, как уже отмечалось, основными, они не учитывают возможность их влияния на состояние продуктов диспергирования в газовой фазе, которое является

весьма значительным, в частности, при создании в ней плазменного разряда.

Высокая эффективность влияния на молекулярную структуру полимерных покрытий введения в диспергируемый полимер низкомолекулярных соединений в [23] показана на примере формирования слоев полиэтилена из продуктов электроннолучевого и термического диспергирования. На основании анализа результатов ИК-спектроскопии полиэтиленовых покрытий, легированных низкомолекулярными соединениями различной природы (таблица 4.1), показано, что при электронно-лучевом диспергировании покрытия имеют более высокую транс-виниленовую ненасыщенность и больший размер надмолекулярных образований в сравнении с покрытиями, сформированными термическим диспергированием. Установленные особенности молекулярной структуры легированных покрытий ПЭ объясняются протеканием на поверхности подложки свободно-радикальной и ионно-молекулярной вторичной полимеризации. При резистивном диспергировании полученные результаты находят объяснения при проявлении свободнорадикальных реакций как основных при образовании молекулярной структуры и морфологии.

Так, высокая разветвленность молекулярной структуры, характер изменения ненасыщенности в покрытиях полиэтилена, сформированных при диспергировании смеси полимера с хлористым алюминием, свидетельствует о преимущественно карбокатионном механизме вторичной полимеризации.

Анализ ИК-спектров покрытия полиэтилена, осаждаемых из продуктов диспергирования смеси ПЭ с перекисью бензоила, показывает, что влияние перекиси сказывается на заметном увеличении транс-виниленовой ненасыщенности и уменьшении винильной в сравнении с исходным покрытием полиэтилена. Перекись бензоила, являясь источником свободных радикалов, способствует образованию разветвленных, сшитых молекулярных структур.

Дифениламин, гидрохинон, хинон являются стабилизаторами радикально-цепных окислительных процессов [24]. Взаимодействие дифениламина с продуктами электронно-лучевого диспергирования полиэтилена, с позиции протекания только свободнорадикальных процессов полимеризации на подложке, должно сопровождаться гибелью свободных радикалов, что, как правило, приводит к уменьшению разветвленности молекулярной структуры покрытия и, как следствие, снижению транс-виниленовых двойных связей в сравнении с молекулярной структурой исходного покрытия полиэтилена. Однако полученные результаты не согласуются с данными представлениями, что указывает на высокую вероятность ионных процессов полимеризации.

Таблица 4.1 – Относительные оптические плотности полос ИК-спектра покрытий ПЭ (нормировка по полосе 1465 см⁻¹ [10])

Покрытие	Частота, см ⁻¹				D ₉₀₈ /D ₉₆₆
	ν (CH ₃)	-CH=CH-	-CH=CH ₂	>C=CH ₂	
	1378	965	908	889	
ПЭ	<u>0,22</u>	<u>0,078</u>	<u>0,166</u>	<u>0,035</u>	<u>2,13</u>
	0,064	0,015	0,223	0,047	14,87
ПЭ + AlCl ₃	<u>0,682</u>	<u>0,177</u>	<u>0,067</u>	<u>0,038</u>	<u>0,38</u>
	0,072	0,021	0,246	0,045	11,71
ПЭ + перекись бензоила	<u>0,179</u>	<u>0,096</u>	<u>0,12</u>	<u>0,024</u>	<u>1,25</u>
	0,08	0,04	0,325	0,059	8,125
ПЭ + гидрохинон	<u>0,176</u>	<u>0,062</u>	<u>0,159</u>	<u>0,033</u>	<u>2,56</u>
	0,072	0,02	0,281	0,053	14,05
ПЭ + хинон	<u>0,19</u>	<u>0,091</u>	<u>0,13</u>	<u>0,016</u>	<u>1,43</u>
	0,068	0,017	0,249	0,046	14,65
ПЭ + дифениламин	<u>0,249</u>	<u>0,104</u>	<u>0,139</u>	<u>0,032</u>	<u>1,34</u>
	0,072	0,041	0,301	0,062	7,34

Числитель – значения, полученные при анализе покрытий, полученных электронно-лучевым диспергированием, знаменатель – для покрытий, полученных термическим диспергированием.

В работах [1], [16], [19], [23], [25], [26] методом диспергирования составных мишеней получены покрытия ПТФЭ, ПУ, ПЭ, ПММА, полилактида, содержащие наночастицы металлов. В качестве материала мишени использовались механические смеси порошков полимера и соли металлов. Показано, что введение в микро- и наноразмерные полимерные покрытия в процессе их роста образовавшихся нанокластеров Ag или Cu приводит к формированию высоко ориентированных, сплошных, высокодисперсных слоев при их эффективной толщине > 3 нм. Ориентация макромолекул матрицы при введении в нее нанокластеров Ag или Cu не отличается от однокомпонентных покрытий. В покрытиях ПТФЭ+Mo проявляется линейная зависимость молекулярной ориентации от толщины слоя. В композиционных покрытиях, содержащих нанокластеры серебра диаметром менее 30 нм, установлен эффект избирательного плазмонного поглощения с максимумом при 420 нм.

В работах [27], [28] показана высокая эффективность использования сульфаминовой кислоты и хлористого алюминия в качестве составной компоненты с основанием эмеральдина (ПАНИ) с целью его окисления. Так, проводимость полученных при таких условиях легированных хлоридом алюминия покрытий превышает более чем в 10⁸ раз проводимость нелегированных слоев ПАНИ. Показано, что процесс протонирования ПАНИ сульфаминовой кислотой может интенсивно протекать и в тигле, и на подложке. Хлористый алюминий интенсивно взаимодействует с основанием эмеральдина преимущественно только непосредственно в тигле при диспергировании.

Заключение

Определена эффективность влияния параметров и условий генерации активной газовой фазы электронно-лучевым диспергированием (энергии и плотности потока электронов, введения в мишень низкомолекулярных соединений, лазерного ассистирования процесса диспергирования, плазменного разряда в летучих продуктах) на кинетику осаждения, молекулярную структуру и свойства покрытий на основе полимеров. С целью обеспечения высокой экономичности и стационарности процесса диспергирования рекомендуется ускоряющее напряжение электронной пушки устанавливать ниже некоторого критического, зависящего от природы полимера. Плазменная активация летучих продуктов диспергирования приводит к формированию более аморфных слоев с дисперсной структурой, изменению молекулярной ненасыщенности. При электронно-лучевом диспергировании в условиях лазерного ассистирования осаждаются полимерные слои, характеризующиеся более высокой упорядоченностью, меньшей дисперсностью. Наиболее перспективно применение лазерного ассистирования при осаждении полимерных слоев, содержащих наночастицы металлов. Введение в зону диспергирования низкомолекулярных соединений является эффективным приемом легирования полимерных покрытий, изменения их молекулярной структуры. Степень влияния соединений на морфологию и свойства покрытий определяются природой вещества-наполнителя, полимера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рогачев, А.А. Физико-химия полимерных покрытий, осаждаемых из активной газовой фазы / А.А. Рогачев. – М.: Научный мир, 2014. – 287 с.

2. Ткачук, Б.В. Получение тонких полимерных пленок из газовой фазы / Б.В. Ткачук, В.М. Колотыркин. – М.: Химия, 1977. – 216 с.
3. Красовский, А.М. Получение тонких пленок распылением полимеров в вакууме / А.М. Красовский, Е.М. Толстопятов. – Минск: Наука и техника, 1989. – 181 с.
4. Рогачев, А.В. Особенности кинетики электронно-лучевого диспергирования полимеров в процессе получения покрытий / А.В. Рогачев, В.В. Харитонов // Инж.-физ. журнал. – 1983. – № 1 (44). – С. 105–108.
5. Казаченко, В.П. Закономерности диспергирования политетрафторэтилена потоком электронов средних энергий / В.П. Казаченко, А.В. Рогачев // Химия высоких энергий. – 1999. – № 4 (33). – С. 284–287.
6. Егоров, А.И. Физико-химические закономерности процессов массопереноса при плазмохимическом окрашивании и аппретировании полиэтилентерефталата: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 01.04.19 / А. И. Егоров; ИММС НАН Беларуси. – Гомель, 1999. – 24 с.
7. Влияние технологических режимов электронного диспергирования политетрафторэтилена на скорость роста покрытий из газовой фазы / А.В. Рогачев, А.И. Егоров, В.П. Казаченко, С.С. Сидорский // Материалы, технология, инструмент. – 2000. – № 2 (5). – С. 77–80.
8. Байдаровцев, Ю.П. Исследование механизма взаимодействия плазмы тлеющего разряда с ПТФЭ: изучение свойств плазмомодифицированных материалов: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.17 / Ю. П. Байдаровцев. – М., 1984. – 144 л.
9. Гольдштейн, Д.В. Физико-химические аспекты плазмохимической модификации политетрафторэтилена в тлеющем ВЧ разряде: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 02.00.04 / Д.В. Гольдштейн; НИФХИ РАН. – М., 1990. – 21 с.
10. Рогачев, А.В. Морфология, структура и свойства покрытий полиэтилена, формируемых из активированных в плазме продуктов диспергирования / А.В. Рогачев, М.А. Ярмоленко, А.А. Рогачев // Весці Нацыянальнай Акад. навук Беларусі. Серыя хімічных навук. – 2005. – № 4. – С. 25–28.
11. Триботехнические свойства покрытий на основе политетрафторэтилена и полиуретана, осаждаемых из активной газовой фазы / А.В. Рогачев, Цзян Сяо Хун, Луде Лу, М.А. Ярмоленко // Трение и износ. – 2004. – № 2 (25). – С. 197–201.
12. Ярмоленко, М.А. Плазмохимическое модифицирование уплотнительных резинотехнических изделий на основе бутадиен-нитрильного каучука: структура и антифрикционные свойства поверхностных слоев: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.02.01; 05.17.06 / М.А. Ярмоленко; ИММС НАН Беларуси. – Гомель, 2006. – 23 с.
13. Rogachev, A.V. Physicochemical Roles of Materials processing in the active metonym of polymerized Gases / A.V. Rogachev, V.P. Kazachenko, A.I. Egorov // Plasma Physics and Plasma Technology: сб. ст. / ИМАФ НАН Б Минск, 1997. – С. 511–514.
14. Электретные свойства пленок сополимера тетрафторэтилена с гексафторпропиленом, модифицированных в тлеющем разряде / А.А. Рычков [и др.] // Химия высоких энергий. – 2010. – № 4 (44). – С. 375–379.
15. Лю, Чжубо. Молекулярная структура и морфология однокомпонентных и нанокпозиционных покрытий на основе полиэтилена и полиметилметакрилата, осаждаемых из активной газовой фазы: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 01.04.07 / Лю Чжубо; ИММС НАН Беларуси. – Гомель, 2013. – 23 с.
16. Синтез и морфология нанокпозиционных покрытий на основе оксида цинка и полиметилметакрилата, полученных электроннолучевым диспергированием в условиях лазерного ассистирования / М.А. Ярмоленко [и др.] // Наноматериалы и наноструктуры. – 2011. – № 1 (3). – С. 21–29.
17. A preparation of polyethylene coatings by pulse laser-assisted electron beam deposition / Zhubo Liu [et al.] // Progress in Organic Coatings. – 2011. – Vol. 136. – P. 28–31.
18. Структура и морфология наноразмерных вакуумных покрытий на основе полиэтилена / А.А. Рогачев [и др.] // Известия ВУЗов. Физика. – 2013. – № 1/2 (56). – С. 280–284.
19. The feature of laser deposition of polymeric composite films from an active gas phase / Zhubo Liu [et al.] // Key Engineering Materials. – 2011. – № 480–481. – P. 30–35.
20. Molecular structure and optical properties of PTFE-based nanocomposite polymer-metal coatings / A.V. Rahachou [et al.] // Applied Surface Science. – 2012. – Vol. 258. – P. 1976–1980.
21. Влияние ассистирующего лазерного излучения при электронно-лучевом диспергировании на молекулярную структуру формируемых нанокпозиционных покрытий полиэтилен-серебро / Чжубо Лю [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (14). – С. 37–42.
22. Особенности формирования структуры вакуумных композиционных покрытий при электронно-лучевом диспергировании смеси полиэтилена и хлорида меди / М.А. Ярмоленко [и др.] // Наноматериалы и наноструктуры. – 2012. – № 4 (3). – С. 22–29.
23. Морфология и молекулярная структура наноразмерных композиционных плёнок на основе полиэтилена, осаждаемых из газовой фазы / А.А. Рогачев [и др.] // Нанотехнологии: разработка, применение. – 2011. – № 2. – С. 25–33.
24. Горбунов, Б.Н. Химия и технология стабилизаторов полимерных материалов / Б.Н. Горбунов, Я.А. Гурвич, И.П. Маслова. – М.: Химия, 1981. – 368 с.

25. *Способ нанесения композиционного металлополимерного покрытия*: пат. 11928 Респ. Беларусь, МПК (2006) С23С 14/22 / А.В. Рогачев, М.А. Ярмоленко, А.А. Рогачев В.П. Казаченко; заявитель Бел. гос. ун-т. тр-та. – №а 20040150; заявл. 27.02.04; опубл. 30.09.05 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2009. – № 3. – С. 138.

26. *Способ формирования композиционного металлосодержащего покрытия*: пат. 19412. Респ. Беларусь, МПК С 23С 14/22 (2006.01) / А.В. Рогачев, М.А. Ярмоленко, А.А. Рогачев, Джанг Сянь Хун, Лю Чжубо; заявитель Гом. гос. ун-т. – № а 20120651; заявл. 25.04.12; опубл. 30.12.13 //

Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2015. – № 4. – С. 89–90.

27. *Особенности формирования и молекулярная структура композиционных покрытий на основе полианелина, осажденных из активной газовой фазы* / А.В. Рогачев [и др.] // Журнал прикладной химии. – 2009. – Т. 82, вып. 9. – С. 1552–1558.

28. *Effects of Polyvinyl Chloride and Aluminum Trichloride on Structure and Property of Poly-aniline Composite Films by Electron Beam Deposition* / Zhubo Liu [et al.] // Polymer Engineering and Science. – 2013. – № 53 (3). – P. 502–506.

Поступила в редакцию 15.01.16.

УДК 519.872.5:681.142.2

СИММЕТРИЧНАЯ МАРКЕРНАЯ КОЛЬЦЕВАЯ ЛОКАЛЬНАЯ СЕТЬ СО СЛУЧАЙНЫМ ВЫБОРОМ ДИСЦИПЛИНЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ

В.В. Бураковский

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

SYMMETRIC TOKEN PASSING RING LOCAL AREA NETWORK WITH RANDOM CHOICE OF SERVICE DISCIPLINE

V.V. Burakovski

F. Scorina Gomel State University

Рассматривается симметричная кольцевая локальная сеть с протоколом маркерного доступа с N абонентскими станциями, на каждой из которых имеется буфер конечной емкости. При поступлении маркера с вероятностью p включается ординарная, а с противоположной вероятностью – вентильная дисциплина обслуживания. Потоки поступающих сообщений предполагаются пуассоновскими, независимыми и одинаковой интенсивности λ для каждой станции. Получена матрично-векторная система, позволяющая вычислить стационарные вероятности, а также основные вероятностно-временные характеристики рассматриваемой локальной сети.

Ключевые слова: маркерная кольцевая локальная сеть, станция, сообщение, буфер конечной емкости, ординарная и вентильная дисциплина обслуживания, стационарные вероятности состояний.

The symmetric token-passing ring local area network with N stations in which each station has a finite capacity buffer is studied. When token arrives the ordinary service discipline with the probability p or gated discipline with the opposite probability is on. The message arrival streams at each station are assumed to be independent Poisson processes with the same rates λ . The matrix-vector system for the steady-state probabilities and main characteristics of the considered network are obtained.

Keywords: token-passing ring local area network, station, message, finite capacity buffer, ordinary and gated service discipline, steady-state probabilities.

Введение

Среди различных классов вычислительных сетей большой интерес для автоматизации производства и учрежденческой деятельности представляют локальные вычислительные сети (ЛВС). Применение ЛВС в настоящее время приобрело массовый характер во многих отраслях машиностроения, особенно наукоемких, к которым относятся авиаприборостроение, ракетостроение и другие. Поэтому представляет интерес проблема повышения эффективности их практического применения.

Протокол маркерного доступа [1] – одна из самых эффективных схем, обеспечивающих связь между станциями в кольцевой сети передачи данных. Кольцевая ЛВС (КЛВС) [2] с маркерным доступом относится к протоколам детерминированного множественного доступа циклического типа. Она представляет собой совокупность абонентских станций (АС), соединенных последовательно двухточечными линиями. АС получают право на передачу данных при получении специального служебного кадра – маркера, циркулирующего по кольцу. Функционирование сети происходит в соответствии со стандартом ANSI/IEEE 802.5 [3]. При поступлении маркера на АС может случайным образом подключаться ординарная (ordinary) или вентильная (gated) дисциплины обслуживания сообщений [4].

Математическими моделями КЛВС с маркерным доступом являются циклические системы массового обслуживания [5]. Адекватность математических моделей, описывающих КЛВС с ординарной, а также вентильной дисциплиной обслуживания, стоящих в буфере АС сообщений, проверялась при помощи разработанных имитационных моделей [6]. Основные вероятностно-временные характеристики, полученные с помощью стационарных вероятностей состояний рассматриваемой сети, необходимы для анализа эффективности и оптимизации функционирования КЛВС [7].

1 Описание математической модели

Рассматривается симметричная кольцевая локальная вычислительная сеть с протоколом маркерного доступа (стандарт ANSI/IEEE 802.5). На каждой из абонентских станций кольца имеется конечный буфер емкости m , $m > 1$. Всего в сети N АС, связанных между собой моноканалом. АС занумерованы таким образом, что номер станции увеличивается по направлению движения маркера по кольцу. При поступлении маркера на произвольную АС случайным образом подключается одна из двух дисциплин обслуживания находящихся в буфере сообщений. С вероятностью p включается ординарная, а с вероятностью $1 - p$ подключается вентильная дисциплина

обслуживания. Ординарная дисциплина обслуживания сообщений предполагает, что из буфера АС при поступлении маркера может быть обслужено не более одного сообщения, после чего маркер передается следующей станции. Вентильная дисциплина позволяет обслужить все находящиеся в буфере на момент прихода маркера сообщения, и только после этого маркер отправляется на следующую АС.

Поступающие на каждую АС, независимо от номера, сообщения образуют простейший поток интенсивности λ . В момент поступления маркера на АС она может находиться в одном из $m+1$ состояний в зависимости от числа сообщений, находящихся в буфере АС, с соответствующими вероятностями p_i , $0 \leq i \leq m$. Сообщения, поступающие на АС с полностью занятым буфером, теряются.

Обозначим через δ время передачи сообщения между соседними АС. Для приема сообщения на АС-адресате необходимо время a . Время передачи (обслуживания) одного сообщения для любой станции $\Delta = N\delta + a$.

Будем рассматривать состояния КЛВС в моменты поступления маркера на станции. Поскольку имеется очевидная симметрия процессов передачи сообщений в сети, исследуется произвольная АС кольца. Поведение рассматриваемой КЛВС в моменты поступления маркера на фиксированную АС описывается неприводимой непериодической цепью Маркова.

Ввиду симметричности КЛВС будем считать, что если на рассматриваемой АС подключается одна из двух дисциплин обслуживания (ординарная или вентильная), то и на всех АС до возвращения маркера на рассматриваемую станцию также происходит обслуживание согласно этой же дисциплине. При следующем поступлении маркера на рассматриваемую АС случайным образом опять для всех станций включается какая-то из дисциплин обслуживания стоящих в буферах сообщений. Предполагается, что при поступлении маркера буфер на АС, с которой происходит передача сообщений, блокируется для их поступления до окончания передачи.

2 Стационарные вероятности и вероятностно-временные характеристики функционирования сети

Процедура определения стационарных вероятностей состояний рассматриваемой КЛВС [8]:

$$(p_0, p_1, \dots, p_m) = (p_0, p_1, \dots, p_m)(PQ + (1-p)G),$$

$$\sum_{i=0}^m p_i = 1,$$

где Q и G – матрицы переходных вероятностей размерности $(m+1) \times (m+1)$ для ординарной и вентильной дисциплин обслуживания соответственно.

Матрица переходных вероятностей для ординарной дисциплины обслуживания сообщений имеет вид:

$$Q = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & \dots & q_{m-1} & q_m \\ q_0 & q_1 & q_2 & \dots & q_{m-1} & q_m \\ 0 & q_0 & q_1 & \dots & q_{m-2} & q_{m-1} + q_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q_0 & 1 - q_0 \end{bmatrix},$$

а элементы ее вычисляются по формулам:

$$q_i = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(\lambda(N\delta + k\Delta))^i}{i!} e^{-\lambda(N\delta + k\Delta)} C_{N-1}^k (1-p_0)^k p_0^{N-k-1},$$

$$0 \leq i \leq m-1, \quad q_m = 1 - \sum_{i=0}^{m-1} q_i.$$

Матрица вероятностей переходов для вентильной дисциплины обслуживания имеет вид:

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_m \\ g_0 & g_1 & \dots & g_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_0 & g_1 & \dots & g_m \end{bmatrix}.$$

Элементы этой матрицы вычисляются по формулам:

$$g_i = \sum_{k=0}^{(N-1)m} \frac{(\lambda(N\delta + k\Delta))^i}{i!} e^{-\lambda(N\delta + k\Delta)} \times \sum_{r_0=0}^{N-1} \dots \sum_{r_m=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{r_0! \dots r_m!} p_0^{r_0} p_1^{r_1} \dots p_m^{r_m},$$

$$0 \leq i \leq m-1, \quad g_m = 1 - \sum_{i=0}^{m-1} g_i,$$

$$\text{где } \sum_{i=0}^m r_i = N-1, \quad \sum_{i=0}^m ir_i = k.$$

Основными характеристиками, определяющими эффективность функционирования рассматриваемой КЛВС, являются следующие:

1. Коэффициент загрузки АС

$$KZ = 1 - p_0.$$

2. Средняя длина очереди на АС

$$L = \sum_{i=1}^m ip_i.$$

3. Средняя продолжительность обслуживания сообщений на АС

$$TM = (pKZ + (1-p)L)\Delta.$$

4. Среднее число обслуженных за время обращения маркера по кольцу сообщений

$$MS = p \sum_{k=0}^N k C_N^k (1-p_0)^k p_0^{N-k} + (1-p) \sum_{k=0}^{Nm} k \sum_{r_0=0}^N \dots \sum_{r_m=0}^N \frac{N!}{r_0! \dots r_m!} p_0^{r_0} \dots p_m^{r_m}.$$

5. Среднее время обращения маркера по кольцу

$$TL = N\delta + \Delta \times MS.$$

6. Среднее число поступивших на одну АС сообщений за время обращения маркера по кольцу

$$MNS = \lambda \times TL.$$

7. Среднее число сообщений, поступивших в КЛВС за время обращения маркера

$$MNR = N \times MNS.$$

Заключение

В работе представлена математическая модель симметричной кольцевой локальной сети с протоколом маркерного доступа, на каждой станции которой имеется буфер конечной емкости. Обслуживание сообщений происходит по одной из двух дисциплин (ординарной или вентильной), которые подключаются к очереди случайным образом. Предложенная модель основана на предположении о независимости процессов, протекающих на различных станциях. Она позволяет значительно сократить число состояний и упростить процедуру определения стационарных вероятностей сети, а также облегчить получение основных характеристик ее функционирования и построение имитационной модели. Локальные сети такого типа очень широко используются в настоящее время и проблемы их оптимизации, эффективности работы являются актуальными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Takagi, H. Analysis of Polling Systems / H. Takagi. – Cambridge, M.A.: MIT Press, 1986. – 198 p.
2. Бакс, В. Кольцевые локальные сети с маркерным доступом и их производительность / В. Бакс // ТИИЭР. – 1989. – № 2. – С. 121–142.
3. ANSI/IEEE 802.5 Standard-1985. Token-passing Ring Access Method and Physical Layer Specification // IEEE Press. – 1985. – 89 p.

4. Бураковский, В.В. Локальные вычислительные сети: курс лекций по спецкурсу для студентов специальности 1-31 03 01 02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)» специализации 1–31 03 01 02 06 «Теория вероятностей и математическая статистика» / В.В. Бураковский, В.О. Родченко. – Гомель: УО «ГГУ им. Ф.Скорины», 2008. – 78 с.

5. Бураковский, В.В. Симметричная кольцевая локальная сеть с протоколом маркерного доступа, буферами конечной емкости и вентильной дисциплиной обслуживания: сборник научных трудов / В.В. Бураковский // Национальная Ассоциация авиаприборостроителей (НААП). – С.-Петербург, 1998. – Вып. 1: Аэрокосмическое приборостроение России. Сер. 2. Авионика. – С. 38–46.

6. Бураковский, В.В. Имитационная модель КЛВС с бесконечными буферами и вентильным обслуживанием / В.В. Бураковский // Materialy IX mezinarodni vedecko-prakticka conference «Efektivni nastroje modernich ved – 2013». – 27 dubna – 05 kvetna 2013 roku / Publishing House «Education and Science» s.r.o.; Sefredaktor Z. Cernak. – Praha, 2013. – Dil 40. – Matematika. – P. 19–22.

7. Бураковский, В.В. Кольцевая локальная сеть с протоколом маркерного доступа / В.В. Бураковский, Г.А. Медведев // Техника средств связи. Серия Системы связи. – 1990. – Вып. 7. – С. 9–16.

Поступила в редакцию 24.09.16.

О ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В.О. Лукьяненко

Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого

ON HALL SUBGROUPS OF FINITE GROUPS

V.O. Lukyanenko

P.O. Sukhoi Gomel State Technical University

Пусть H – подгруппа конечной группы G . Будем говорить, что подгруппа H τ -квазинормальна в G , если H перестановочна с каждой силовской подгруппой Q из G , такой что $(|H|, |Q|) = 1$ и $(|H|, |Q^G|) \neq 1$. В данной работе получено обобщение теоремы Шура-Цассенхауза в терминах τ -квазинормальных подгрупп.

Ключевые слова: τ -квазинормальная подгруппа, силовская подгруппа, холлова подгруппа, разрешимая группа.

Let G be a finite group and H a subgroup of G . Then H is said to be τ -quasinormal in G if H permutes with all Sylow subgroups Q of G such that $(|H|, |Q|) = 1$ and $(|H|, |Q^G|) \neq 1$. A generalization of Schur-Zassenhaus Theorem in terms of τ -quasinormal subgroups is obtained.

Keywords: τ -quasinormal subgroup, Sylow subgroup, Hall subgroup, soluble group.

1 Definitions and preliminary results

Throughout this paper, all groups are finite.

Let H be a subgroup of a group G . Then $\pi(G)$ denotes the set of all primes dividing $|G|$, H^G denotes the normal closure of H in G , that is, the intersection of all normal subgroups of G containing H . Recall that a subgroup A of G is said to permute with a subgroup B if $AB = BA$. A subgroup H of G is said to be $\pi(G)$ -permutable or $\pi(G)$ -quasinormal in G (O. Kegel, [9]) if H permutes with all Sylow subgroups of G . A subgroup H of a group G is said to be τ -quasinormal in G [10] if H permutes with all Sylow subgroups Q of G such that $(|H|, |Q|) = 1$ and $(|H|, |Q^G|) \neq 1$. It is clear that every $\pi(G)$ -quasinormal subgroup is τ -quasinormal. The Example 1.2 in [10] shows that the converse does not hold in general.

By Sylow's Theorem a group G possesses a Sylow p -subgroup for any prime p and any two Sylow p -subgroups of G are conjugate in G . For an arbitrary set of primes π a group G may or may not possess a Hall π -subgroup and, if it does, it may or may not be true that any two of them are conjugate in G . The Schur-Zassenhaus Theorem gives an important sufficient condition for the existence and conjugacy of Hall subgroups: *If a group G has a normal Hall π -subgroup A , then G is an E_{π} -group (i. e. G has a Hall π' -subgroup). In addition, if either A or G/A is soluble, then G is a C_{π} -group (i. e. any two Hall π' -subgroups of G are conjugate in G).* Naturally, one can ask whether or not the

conclusion of the Schur-Zassenhaus Theorem holds if the Hall subgroup of G is not normal. In other words, can we weaken the condition of normality for the Hall subgroup of G so that the Schur-Zassenhaus Theorem still holds? The results of [5]–[7] give the positive answer to this question. In this paper, we prove the following generalization of these results.

Theorem 1.1. *Let $G = AT$, where A is a Hall π -subgroup of a group G . If A is τ -quasinormal in G and either A is soluble or every π' -subgroup of T is soluble, then T contains a complement of A in G and any two complements of A in G are conjugate.*

Notice that the well known Feit-Thompson Theorem 1.1 of groups of odd order is not used in the proof of the Theorem.

The reader is referred to [1], [3] and [4] for all unexplained terminology and definitions if necessary.

2 Proof of the main result

Before continuing, we will need to know a few facts about τ -quasinormal subgroups.

Lemma 2.1. *Let G be a group, $H \leq K \leq G$ and $L \leq G$.*

- (1) *If H is τ -quasinormal in G , then H is τ -quasinormal in K .*
- (2) *Suppose that H is normal in G . Then EH/H is τ -quasinormal in G/H for every τ -quasinormal subgroup E in G satisfying $(|H|, |E|) = 1$.*
- (3) *Suppose that H is τ -quasinormal in G . If $HL = LH$ and $\pi(H \cap L) = \pi(H) \cap \pi(L)$, then $H \cap L$ is τ -quasinormal in L .*

Proof. (1) and (2) See [10].

(3) Let Q be a Sylow q -subgroup of L such that $q \notin \pi(H \cap L)$ and $(|H \cap L|, |Q^L|) \neq 1$. Then $q \notin \pi(H)$, so Q is a Sylow q -subgroup of HL . Besides, $Q^L \leq Q^{HL} \cap L \leq Q^{HL}$. Then

$$(|H|, |Q^{HL}|) \neq 1.$$

Since H is τ -quasinormal in G , we have that H is τ -quasinormal in HL by (1). Hence $HQ = QH$. Therefore, $Q(H \cap L) = QH \cap L = (H \cap L)Q$.

Proof of Theorem 1.1. Assume that the theorem is false and let G be a counterexample of minimal order. Then a Hall π' -subgroup of G is not a Sylow subgroup of G . We proceed the proof by proving the following claims.

(1) $O_{\pi'}(G) = 1$.

Suppose that $Y = O_{\pi'}(G) \neq 1$. We show that the hypothesis still holds on G/Y . Clearly, $Y \leq T$ and $G/Y = (AY/Y)(T/Y)$, where $AY/Y \cong A$ is a Hall π -subgroup of G/Y . In view of Lemma 2.1(2), AY/Y is τ -quasinormal in G/Y . If A is soluble, then AY/Y is soluble. If every π' -subgroup of T is soluble, then, clearly, every π' -subgroup of T/Y is soluble. Thus the hypothesis still holds for $(AY/Y, T/Y)$ in G/Y . Since $|G/Y| < |G|$, G/Y is a $C_{\pi'}$ -group and T/Y contains a complement V/Y of AY/Y in G/Y by the choice of G . It is clear that V/Y is a Hall π' -subgroup of G/Y . Hence V is a Hall π' -subgroup of G , so $G = AV$. Now let T_1 and T_2 be Hall π' -subgroups of G . Then $T_1/Y = (T_2/Y)^{xy} = T_2^x/Y$ for some $x \in G$, so T_1 and T_2 are conjugate in G . Therefore the conclusion of the theorem is true for G , which contradicts to the choice of G . Hence we have (1).

(2) A permutes with every Sylow q -subgroup of G , where $q \in \pi'$.

Let Q be any Sylow q -subgroup of G for some prime $q \in \pi'$. In view of (1), $(|A|, |Q^G|) \neq 1$. Then $AQ = QA$ by hypothesis.

(3) $O_{\pi}(G) = 1$.

Suppose that $R = O_{\pi}(G) \neq 1$. We show that the hypothesis still holds on G/R . Clearly, $R \leq A$ and $G/R = (A/R)(TR/R)$, where A/R is a Hall π -subgroup of G/R . If A is soluble, then A/R is soluble. Suppose that every π' -subgroup of T is soluble. Let V/R be any π' -subgroup of TR/R . Then $V = V \cap TR = (V \cap T)R$. Hence

$$V/R = (V \cap T)R/R \cong (V \cap T)/(R \cap V \cap T)$$

is a π' -group. Since R is a π -group, it follows from the Schur-Zassenhaus Theorem that

$$V \cap T = (R \cap V \cap T) \rtimes E$$

for some Hall π' -subgroup E of $V \cap T$. Since by hypothesis E is soluble, V/R is soluble. Thus every π' -subgroup of TR/R is soluble. Now let Q/R be a Sylow q -subgroup of G/R , where $q \in \pi'$. Then for some Sylow q -subgroup G_q of G we have $Q = G_q R$. In view of (2), $AG_q = G_q A$. Then

$$(A/R)(Q/R) = (A/R)(G_q R/R) = (Q/R)(A/R),$$

so A/R permutes with every Sylow q -subgroup of G/R , where $q \in \pi'$. Hence A/R is τ -quasinormal in G/R . Therefore the hypothesis still holds for $(A/R, TR/R)$ in G/R . Since $|G/R| < |G|$, G/R is a $C_{\pi'}$ -group and TR/R contains a complement $V/R \cong (V \cap T)/(R \cap V \cap T)$ of A/R in G/R by the choice of G . Then $V \cap T = (R \cap V \cap T) \rtimes E$ for some Hall π' -subgroup E of $V \cap T$. It is clear that V/R is a Hall π' -subgroup of G/R . Hence E is a Hall π' -subgroup of G , so $G = AE$. Now let T_1 and T_2 be Hall π' -subgroups of G . Then $T_1 R/R = T_2^x R/R$ for some $x \in G$. Therefore by the Schur-Zassenhaus Theorem, T_1 and T_2 are conjugate in $T_1 R$. Hence the conclusion of the theorem is true for G , which contradicts to the choice of G . Thus we have (3).

(4) G is not a simple group.

Assume that G is a simple non-abelian group. Let Q be any Sylow q -subgroup of G for some prime $q \in \pi'$. Then by (2), $AQ^x = Q^x A$ for all $x \in G$. Besides, $AQ^x \neq G$ by the choice of G . Hence G is not simple by [8, Theorem 3]. This contradiction completes the proof of (4).

(5) If $D \neq 1$ is a proper normal subgroup of G , then D is a $C_{\pi'}$ -group. If, in addition, $T = G$, then $A \leq D$.

First we show that D is a $C_{\pi'}$ -group. In view of (1) and (3), $1 \neq A \cap D \neq D$. It is clear that $A \cap D$ is a Hall π -subgroup of D . If A is soluble, then $A \cap D$ is soluble. Suppose that every π' -subgroup of T is soluble. Since every π' -subgroup of D is contained in $T \cap D$, then every π' -subgroup of D is soluble. Besides, by Lemma 2.1(3), $A \cap D$ is τ -quasinormal in D . Thus D is a $C_{\pi'}$ -group by the choice of G . Now suppose that $T = G$ and $A \not\leq D$. Let $N = N_G(A \cap D)$. In view of (3), $N \neq G$. Since D is normal in G and $G = DN$ by the Frattini Argument, we have that $A < N$. Then by Lemma 2.1(1), A is τ -quasinormal in N . Besides, since every π' -subgroup of N is a π' -subgroup of $T = G$, we have that the hypothesis still holds for (A, N) in N . Since $|N| < |G|$, N is a $C_{\pi'}$ -group

and N contains a complement $N_{\pi'}$ of A in N by the choice of G . It is clear that $DN_{\pi'} \neq G$. Since $ADN_{\pi'} = DAN_{\pi'} = DN = DN_{\pi'}A$ and

$$A \cap DN_{\pi'} = (A \cap D)(A \cap N_{\pi'}) = A \cap D$$

is a Hall π -subgroup of $DN_{\pi'}$, then $A \cap D$ is τ -quasinormal in $DN_{\pi'}$ by Lemma 2.1(3). Hence $DN_{\pi'}$ is a $C_{\pi'}$ -group by the choice of G , in particular, $DN_{\pi'}$ has a Hall π' -subgroup, which, evidently, is a Hall π' -subgroup of G . Now let T_1 and T_2 be Hall π' -subgroups of G . Then $D_1 = T_1 \cap D$ and $D_2 = T_2 \cap D$ are Hall π' -subgroups of D . Since D is a $C_{\pi'}$ -group, D_1 and D_2 are conjugate in D . Hence $N_G(D_1) = N_G(D_2)^x$ for some $x \in G$. Since $T_1 \leq N_G(D_1)$ and $T_2 \leq N_G(D_2)$, T_1 is conjugate with some Hall π' -subgroup of $N_G(D_2)$. Hence T_1 and T_2 are conjugate in G , so the conclusion of the theorem is true for G , which contradicts to the choice of G . Therefore we have (5).

(6) T has a Hall π' -subgroup.

Suppose that this is false. Then $A \cap T \neq 1$. Since A is a Hall π -subgroup of G , $A \cap T$ is a Hall π -subgroup of T . By Lemma 2.1(3), $A \cap T$ is τ -quasinormal in T . Hence the hypothesis still holds for $(A \cap T, T)$ in T . If $T \neq G$, then T is a $C_{\pi'}$ -group by the choice of G , in particular, T has a Hall π' -subgroup, which, evidently, is a Hall π' -subgroup of G , a contradiction. Now suppose that $T = G$. Then in view of (4) and (5), G has a proper normal $C_{\pi'}$ -subgroup D such that $A < D$. Let $D_{\pi'}$ be a Hall π' -subgroup of D and $N = N_G(D_{\pi'})$. Then $D = AD_{\pi'}$ and by the Frattini Argument, $G = DN = AN$. If $A \cap N = 1$, then N is a Hall π' -subgroup of $T = G$, a contradiction. Suppose that $A \cap N \neq 1$. Since A is a Hall π -subgroup of G , $A \cap N$ is a Hall π -subgroup of N . In view of Lemma 2.1(3), $A \cap N$ is τ -quasinormal in N . By (1), $N \neq G$. Hence N is a $C_{\pi'}$ -group by the choice of G , in particular, N has a Hall π' -subgroup, which, evidently, is a Hall π' -subgroup of $G = T$, a contradiction. Thus we have (6).

In view of (6), we may assume without loss that T is a Hall π' -subgroup of G . Hence similarly as in the proof of (1) and (3) we obtain that

(7) If $D \neq 1$ is a proper normal subgroup of G , then G/D is a $C_{\pi'}$ -group.

Final contradiction.

In view of (4), G has a proper normal subgroup $D \neq 1$. By (5) and (7) both groups D and G/D are $C_{\pi'}$ -groups. Hence G is a $C_{\pi'}$ -group by

[2]. This contradiction completes the proof of the theorem.

Note that the $G = A_5$ shows that under conditions of Theorem 1.1 the subgroup A is not necessarily normal in G and G is not necessarily π -soluble or π' -soluble, where π is the set of all primes dividing $|A|$.

Corollary 2.1. *If every Sylow subgroup of a group G is τ -quasinormal in G , then G is soluble.*

Proof. In view of Theorem 1.1, every Sylow subgroup of a group G has a complement in G . Then by [3], G is soluble.

The example of the symmetric group $G = S_4$ shows that under conditions of Corollary 2.1, the group G is not necessarily supersoluble, p -closed or p -nilpotent for any prime $p \in \pi(G)$.

Corollary 2.2. *If every Hall subgroup of a group G is τ -quasinormal in G , then G is soluble.*

REFERENCES

1. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Springer, Dordrecht, 2006.
2. Chunikhin, S.A. Subgroups of Finite Groups / S.A. Chunikhin. – Wolters – Noordhoff, Groningen, 1969.
3. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Walter de Gruyter, Berlin – New York, 1992.
4. Guo, W. The Theory of Classes of Groups / W. Guo. – Science Press – Kluwer Academic Publishers, Beijing – New York – Dordrecht – Boston – London, 2000.
5. Guo, W. Criteria of existence of Hall subgroups in non-soluble finite groups / W. Guo, A.N. Skiba. – Acta Math. Sinica, English Series. – 2010. – Vol. 26, № 2. – P. 295–304.
6. Guo, W. X -semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – № 315. – P. 31–41.
7. Guo, W. Schur-Zassenhaus Theorem for X -permutable subgroups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Algebra Colloq. – 2008. – Vol. 15, № 2. – P. 185–192.
8. Kegel, O.H. Produkte nilpotenter Gruppen / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1961. – № 12. – P. 90–93.
9. Kegel, O.H. Sylow-Gruppen and Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1962. – № 78. – P. 205–221.
10. Lukyanenko, V.O. On weakly τ -quasinormal subgroups of finite groups / V.O. Lukyanenko, A.N. Skiba // Acta Math. Hungar. – 2009. – Vol. 125, № 3. – P. 237–248.

Поступила в редакцию 19.05.16.

УДК 511.542

КОНЕЧНЫЕ ОБОБЩЕННО C -СВЕРХРАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ И ИХ ВЗАИМНО ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Е.Н. Мысловец, А.Ф. Васильев

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

FINITE GENERALIZED C -SUPERSOLUBLE GROUPS AND THEIR MUTUALLY PERMUTABLE PRODUCTS

E.N. Myslovets, A.F. Vasil'ev

F. Scorina Gomel State University

Пусть \mathfrak{F} – класс групп. Конечная группа G называется ca - \mathfrak{F} -группой, если каждый ее неабелевый главный фактор является простой группой и $H/K \times C_G(H/K) \in \mathfrak{F}$ для каждого абелевого главного фактора группы G . В работе найдена структура конечной ca - \mathfrak{F} -группы при предположении, что \mathfrak{F} является насыщенной формацией разрешимых групп. Изучены свойства произведений взаимно перестановочных ca - \mathfrak{F} -групп.

Ключевые слова: конечная группа, ca - \mathfrak{F} -группа, композиционная формация, взаимно перестановочное произведение подгрупп.

Let \mathfrak{F} be a class of groups. A finite group G is called a ca - \mathfrak{F} -group if its every non-abelian chief factor is simple and $H/K \times C_G(H/K) \in \mathfrak{F}$ for every abelian chief factor H/K of G . In this paper the structure of finite ca - \mathfrak{F} -groups under the assumption that \mathfrak{F} is a soluble saturated formation is found. Properties of mutually permutable products of finite ca - \mathfrak{F} -groups are studied.

Keywords: finite group, ca - \mathfrak{F} -group, composition formation, mutually permutable products of subgroups.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Понятие композиционной формации было впервые введено Л.А. Шеметковым в [1] и Р. Бэром в неопубликованной рукописи (отмечено в [2, IV, С. 370]). Всякая насыщенная формация является композиционной. Класс всех квазинильпотентных групп является примером ненасыщенной композиционной формации. Го Вэньбинем и А.Н. Скибой в [3], [4] было предложено интересное обобщение квазинильпотентности – конструкция квази- \mathfrak{F} -групп. В [3] они доказали, что класс всех квази- \mathfrak{F} -групп является композиционной формацией, если \mathfrak{F} – насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы. В [3], [4] были также рассмотрены некоторые приложения формации квази- \mathfrak{F} -групп.

В.А. Ведерников в [5] ввел понятие c -сверхразрешимой группы. Напомним, что группа G называется c -сверхразрешимой, если она обладает главным рядом, все факторы которого изоморфны простым группам. В [6] А.Ф. Васильевым и Т.И. Васильевой было доказано, что класс \mathfrak{U}_c всех c -сверхразрешимых групп является композиционной, но ненасыщенной формацией. В [7] Д. Робинсон установил структурные свойства c -сверхразрешимых групп (в терминологии [7] SC -групп).

В [8] было введено следующее обобщение c -сверхразрешимости.

Пусть \mathfrak{F} – класс групп. Напомним [9], что главный фактор H/K группы G называется \mathfrak{F} -центральным, если $H/K \times G/C_G(H/K) \in \mathfrak{F}$.

Определение 0.1 [8]. Пусть \mathfrak{F} – класс групп. Будем говорить, что группа G является ca - \mathfrak{F} -группой, если ее каждый неабелевый главный фактор является простой группой, а каждый абелевый главный фактор H/K \mathfrak{F} -централен.

Класс всех ca - \mathfrak{F} -групп обозначается через \mathfrak{F}_{ca} . В случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$, получим формацию \mathfrak{U}_c всех c -сверхразрешимых групп. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{NA}$, получим формацию \mathfrak{NA}_{ca} , состоящую из всех групп G , у которых неабелевые главные факторы изоморфны простым группам, а для каждого абелевого главного фактора H/K группы G группа автоморфизмов $Aut_G(H/K)$ абелева. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$, то класс \mathfrak{F}_{ca} совпадает с классом всех $SNAC$ -групп [7], т. е. классом всех групп, у которых неабелевые главные факторы – простые группы.

Класс всех ca - \mathfrak{F} -групп образует композиционную формацию [8]. Также в [8] были установлены свойства произведений нормальных ca - \mathfrak{F} -подгрупп.

Напомним [9, §8], что через $Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G)$ обозначается \mathfrak{F} -гиперцентр группы G – произведение всех нормальных подгрупп H из G , нормальные G -допустимые факторы которых \mathfrak{F} -центральны в G .

Следующая теорема является расширением результата Робинсона [7] для случая, когда \mathfrak{F} – разрешимая насыщенная формация.

Теорема А. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая насыщенная формация. Группа G является sa - \mathfrak{F} -группой тогда и только тогда, когда G удовлетворяет следующим утверждениям:

- 1) $G^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{S}}$;
- 2) если $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$, то $G^{\mathfrak{F}} / Z(G^{\mathfrak{F}})$ является прямым произведением G -инвариантных неабелевых простых групп;
- 3) $Z(G^{\mathfrak{F}}) \subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G)$.

Следуя работе [10], группу $G = HK$ будем называть произведением взаимно перестановочных подгрупп H и K , если H перестановочна с любой подгруппой из K , а K перестановочна с любой подгруппой из H . Взаимно перестановочные произведения сверхразрешимых и s -сверхразрешимых подгрупп изучались во многих работах различных авторов (см. монографию [11]). Ряд работ был посвящен рассмотрению случая, когда группа $G = HK$ является произведением взаимно перестановочных подгрупп H и K , которые принадлежат насыщенной формации \mathfrak{F} . Поэтому естественной является следующая проблема.

Проблема. Пусть \mathfrak{F} – композиционная формация. Какова структура группы $G = HK$, где H и K – взаимно перестановочные \mathfrak{F} -подгруппы группы G .

В данной работе эта проблема решается для формации sa - \mathfrak{F} -групп, где \mathfrak{F} – насыщенная формация, содержащая класс \mathfrak{M} всех сверхразрешимых групп.

Теорема В. Пусть \mathfrak{F} – наследственная насыщенная формация, содержащая \mathfrak{M} . Пусть группа $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K . Если G – sa - \mathfrak{F} -группа, то H и K также sa - \mathfrak{F} -группы.

Следствие В.1 [12]. Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K . Если G – s -сверхразрешимая группа, то H и K также s -сверхразрешимы.

Следствие В.2 [13]. Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K . Если G – SNA -группа, то H и K также SNA -группы.

Следствие В.3. Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K . Если G – sa - \mathfrak{M} -группа, то H и K также sa - \mathfrak{M} -группы.

Известно, что в общем случае группа, представляемая в виде произведения своих нормальных сверхразрешимых подгрупп, не является сверхразрешимой. В 1957 году Бэр [14] установил, что такая группа будет сверхразрешимой, если ее коммутант нильпотентен. Следующая теорема является развитием данного результата.

Теорема С. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация, содержащая \mathfrak{M} . Если группа $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных sa - \mathfrak{F} -подгрупп H и K и коммутант G' группы G квазинильпотентен, то G – sa - \mathfrak{F} -группа.

Следствие С.1 [12]. Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных s -сверхразрешимых подгрупп H и K . Если коммутант G' группы G квазинильпотентен, то G – s -сверхразрешимая группа.

Следствие С.2 [15]. Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных сверхразрешимых подгрупп H и K . Если коммутант G' группы G нильпотентен, то G сверхразрешима.

Следствие С.3. Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K . Если H и K – sa - \mathfrak{M} -группы и коммутант G' группы G квазинильпотентен, то G – sa - \mathfrak{M} -группа.

Следующее следствие расширяет результат о свойствах нормальных произведений sa - \mathfrak{F} -групп из работы [8].

Следствие С.4. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация, содержащая \mathfrak{M} . Если группа $G = HK$ – произведение нормальных sa - \mathfrak{F} -подгрупп H и K и коммутант G' группы G квазинильпотентен, то G – sa - \mathfrak{F} -группа.

Хорошо известно, что группа, являющаяся произведением своих нормальных сверхразрешимой и нильпотентной подгрупп сверхразрешима. В развитие этого случая получен следующий результат.

Теорема D. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация дисперсивных по Оре групп, содержащая \mathfrak{M} . Пусть группа $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K . Если подгруппа H – sa - \mathfrak{F} -подгруппа, а K квазинильпотентна, то G – sa - \mathfrak{F} -группа.

Следствие D.1 [12]. Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K . Если подгруппа H s -сверхразрешима, а K квазинильпотентна, то G – s -сверхразрешимая группа.

Следствие D.2 [15]. Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K . Если подгруппа H сверхразрешима, а K нильпотентна, то G – сверхразрешимая группа.

1 Предварительные результаты

Используется стандартная теоретико-групповая терминология из монографий [2], [16]. Напомним понятия и обозначения, существенные в работе. Через \mathbb{P} обозначается множество всех простых чисел; 1 – единичная группа; $H \times K$ – полупрямое произведение групп H и K ; \mathfrak{G} – класс всех групп; \mathfrak{S} – класс всех разрешимых групп; \mathfrak{U} – класс всех сверхразрешимых групп; \mathfrak{U}_c – класс всех s -сверхразрешимых групп; \mathfrak{N} – класс всех нильпотентных групп; \mathfrak{N}_p – класс всех p -групп; \mathfrak{J} – класс всех простых групп; \mathfrak{A} – класс всех абелевых групп; $\mathfrak{A}(p-1)$ – класс всех абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$; $\mathcal{K}(G)$ – множество всех композиционных факторов группы G .

Группа G порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ (p_i – простое число, $i=1,2,\dots,n$) называется *дисперсивной по Оре*, если $p_1 > p_2 > \dots > p_n$ и G имеет нормальную подгруппу порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$ для любого $i=1,2,\dots,n$.

Формацией называется класс, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Формация \mathfrak{F} называется *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$; *наследственной (нормально наследственной)*, если \mathfrak{F} вместе с каждой группой содержит все ее (соответственно нормальные) подгруппы.

Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Через G^δ обозначается \mathfrak{F} -корадикал группы G , т.е. наименьшая нормальная подгруппа группы G , для которой $G/G^\delta \in \mathfrak{F}$. Через G_δ обозначается \mathfrak{F} -радикал группы G , т.е. наибольшая нормальная \mathfrak{F} -подгруппа группы G .

Отображение $f: \mathbb{P} \rightarrow \{\text{формации}\}$ называется *локальным экраном*. Формация \mathfrak{F} называется *локальной*, если она имеет хотя бы один локальный экран f такой, что

$$\mathfrak{F} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/C_G(H/K) \in f(p)\},$$

для любого главного фактора H/K и для любого $p \in \pi(H/K)$. Известно, что формация \mathfrak{F} является локальной тогда и только тогда, когда она насыщена [2, IV, Теорема 4.6].

Отображение $f: \mathfrak{J} \rightarrow \{\text{формации}\}$ называется *композиционным экраном*. Формация \mathfrak{F} называется *композиционной* (или Бэр-локальной формацией), если использовать терминологию из [2]), если она имеет хотя бы один композиционный экран f такой, что

$$\mathfrak{F} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G/C_G(H/K) \in f(A)\}$$

для любого $A \in \mathcal{K}_{H/K}$.

Внутренним локальным экраном формации \mathfrak{F} называется такой локальный экран f , что $f(p) \subseteq LF(f)$ для любого простого числа p . Экран f называется *максимальным внутренним локальным экраном* формации \mathfrak{F} , если f является максимальным элементом множества всех внутренних локальных экранов формации \mathfrak{F} . Аналогично вводятся понятия внутреннего композиционного и максимального внутреннего композиционного экранов.

Любая локальная (композиционная) формация имеет единственный максимальный внутренний локальный (композиционный) экран [16, гл. 1].

В работе будем использовать следующие известные результаты о свойствах класса \mathfrak{F}_{ca} .

Лемма 1.1 [8]. Пусть \mathfrak{F} – класс групп. Тогда класс \mathfrak{F}_{ca} является непустой формацией.

Теорема 1.2 [8]. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация и f – ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда формация \mathfrak{F}_{ca} является композиционной и имеет максимальный внутренний композиционный экран h такой, что $h(N) = \mathfrak{F}_{ca}$, если N – простая неабелева группа и $h(N) = f(p)$, если N – простая p -группа, где p – простое число.

Лемма 1.3 [6]. Пусть \mathfrak{F} – формация и N – минимальная нормальная подгруппа группы G такая, что $|N| = p^a$ для некоторого простого числа p . Если N содержится в подгруппе H из G и $H/C_H(U/V) \in \mathfrak{F}$ для любого H -главного фактора U/V группы N , то $H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}$.

Нам также потребуются следующие результаты о произведениях взаимно перестановочных подгрупп.

Лемма 1.4 [11]. Пусть подгруппы H и K группы G взаимно перестановочны, подгруппа N нормальна в G . Тогда HN/N и KN/N взаимно перестановочны.

Лемма 1.5 [11]. Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если N – максимальная нормальная подгруппа группы G , то

$$\{HN, KN, (H \cap K)N\} \subseteq \{N, G\};$$

2) если N – неабелева минимальная нормальная подгруппа группы G , то

$$\{H \cap N, K \cap N\} \subseteq \{N, 1\} \text{ и } N = (N \cap H)(N \cap K);$$

3) если N – минимальная нормальная подгруппа группы G , то либо $N \leq H \cap K$, либо $[N, H \cap K] = 1$;

4) если N – минимальная нормальная подгруппа группы G , то $\{H \cap N, K \cap N\} \subseteq \{N, 1\}$;

5) если N – минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в H и $K \cap N = 1$,

то либо $N \leq C_G(H)$, либо $N \leq C_G(K)$. Кроме того, если N – нециклическая, то $N \leq C_G(K)$.

Теорема 1.6 [11]. Пусть $G \neq 1$ и $G = HK$ – произведение своих взаимно перестановочных подгрупп H и K . Тогда $H_G K_G \neq 1$.

2 Доказательство теоремы А

В данном разделе доказывается теорема, описывающая структуру конечной sa - \mathfrak{F} -группы.

Лемма 2.1. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая формация. Если G является sa - \mathfrak{F} -группой, то справедливы следующие утверждения:

- 1) $G^\epsilon \leq G^\delta \leq C_G(G_\epsilon)$;
- 2) $(G^\epsilon)_\epsilon \leq Z(G^\epsilon)$.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Заметим, что все главные факторы группы G , лежащие в подгруппе G_ϵ , являются \mathfrak{F} -центральными в G . Следовательно, подгруппа G_ϵ является \mathfrak{F} -гиперцентральной и, таким образом, является подгруппой \mathfrak{F} -гиперцентра $Z_\infty^\delta(G)$. В силу следствия 9.3.2 [16] имеем, что

$$G^\delta \leq C_G(Z_\infty^\delta(G)).$$

Отсюда и из того, что \mathfrak{F} – разрешимая формация, заключаем, что $G^\epsilon \leq G^\delta \leq C_G(G_\epsilon)$.

Докажем утверждение 2). Пусть $R = (G^\epsilon)_\epsilon$. Из $R \text{ char } G^\epsilon \trianglelefteq G$ следует, что $R \trianglelefteq G$. Поэтому $R \leq G_\epsilon$. Ввиду утверждения 1) леммы $G^\epsilon \leq C_G(R)$. Откуда следует справедливость утверждения 2). Лемма доказана.

Доказательство теоремы А. Обозначим через D разрешимый корадикал G^ϵ группы G . Пусть G – sa - \mathfrak{F} -группа. Если группа G разрешима, то $D = 1$ и $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому утверждения 1), 2) и 3) выполняются. Будем считать, что группа G не является разрешимой. Тогда $D \neq 1$.

Так как \mathfrak{F} – разрешимая формация, то $G/G^\delta \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}$. Следовательно, $D \subseteq G^\delta$. Так как \mathfrak{F}_{ca} является формацией, то $G/D \in \mathfrak{F}_{ca}$. В силу разрешимости факторгруппы G/D получаем, что $G/D \in \mathfrak{F}$. Значит, $G^\delta \subseteq D$ и $D = G^\delta$. Утверждение 1) выполняется. Заметим, что все главные факторы группы G , лежащие ниже центра $Z(D)$, являются абелевыми, а значит и \mathfrak{F} -центральными. Следовательно, центр $Z(D)$ является \mathfrak{F} -гиперцентральной и утверждение 3) выполняется.

Покажем, что $D/Z(D)$ является прямым произведением G -инвариантных простых групп.

Предположим, что $Z(D) = 1$. Пусть N_1 – минимальная нормальная подгруппа группы G ,

содержащаяся в подгруппе D . Если N_1 абелева, то из $N_1 \leq D_\epsilon$ по утверждению 2) леммы 2.1 получаем, что $N_1 \leq Z(D) = 1$. Значит, N_1 неабелева. Так как $G \in \mathfrak{F}_{ca}$, то N_1 является простой группой. Заметим, что $G/C_G(N_1)$ изоморфна подгруппе группы автоморфизмов $\text{Aut}(N_1)$, а $N_1 C_G(N_1)/C_G(N_1)$ изоморфна группе внутренних автоморфизмов $\text{Inn}(N_1)$. Следовательно, фактор-группа

$G/N_1 C_G(N_1) \cong (G/C_G(N_1))/(N_1 C_G(N_1)/C_G(N_1))$ изоморфна подгруппе из $\text{Aut}(N_1)/\text{Inn}(N_1)$. Исходя из справедливости гипотезы Шрайера, заключаем, что $G/N_1 C_G(N_1)$ разрешима. Тогда $D \leq N_1 C_G(N_1)$, следовательно,

$$D = N_1 C_G(N_1) = N_1 C_D(N_1),$$

причем, $N_1 \cap C_D(N_1) = 1$. Если $D = N_1$, то утверждение 2) выполняется. Предположим, что D не является простой. Поэтому, $C_D(N_1) \neq 1$. В случае, когда $C_D(N_1)$ – простая группа, утверждение 2) выполняется. Предположим, что $C_D(N_1)$ не является простой, пусть N_2 – минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в подгруппе $C_D(N_1)$. Так как $Z(D) = 1$, ввиду утверждения 2) леммы 2.1 N_2 – простая неабелева подгруппа. По доказанному выше $D = N_2 C_D(N_2)$. По тождеству Дедекинда

$$C_D(N_1) = C_D(N_1) \cap N_2 C_D(N_2) = N_2 (C_D(N_1) \cap C_D(N_2)) = N_2 C_L(N_2),$$

где $L = C_D(N_1) \cap C_D(N_2)$. Тогда $D = N_1 N_2 C_L(N_2)$. Применяя доказанное выше к $C_D(N_2)$ и т. д., можем заключить, что $D = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_t$ является прямым произведением простых минимальных нормальных подгрупп группы G . Таким образом, верно и утверждение 2).

Пусть теперь $Z(D) \neq 1$. Так как $G/Z(D) \in \mathfrak{F}_{ca}$ и $(G/Z(D))^\epsilon = D/Z(D)$, для $G/Z(D)$ утверждения 1) и 3) выполняются. Обозначим $T/Z(D) = Z(D/Z(D))$. Тогда T – нормальная разрешимая подгруппа группы D . По лемме 2.1 T содержится в центре $Z(D)$. Поэтому

$$Z(D/Z(D)) = 1.$$

По доказанному выше для $G/Z(D)$ утверждение 2) выполняется.

Обратно, предположим, что для группы G справедливы утверждения 1), 2) и 3). Проведем главный ряд группы G через подгруппу $D = G^\delta$. Заметим, что все главные факторы, лежащие выше D , являются абелевыми и \mathfrak{F} -центральными. По утверждению 2) фактор-группа $D/Z(D)$

является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп группы $G/Z(D)$, которые будут простыми. Ниже $Z(D)$ все главные факторы группы G будут \mathfrak{F} -центральными по утверждению 3). В силу теоремы Жордана – Гёльдера для групп с операторами [2, А, 3.2] и определения 0.1 группа $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Теорема доказана.

3 Доказательства теорем В, С и D

В данном разделе рассмотрим доказательства сформулированных выше свойств произведений взаимно перестановочных sa - \mathfrak{F} -групп.

Доказательство теоремы В. Предположим, что теорема неверна и выберем группу G – контрпример наименьшего порядка. Обозначим через N минимальную нормальную подгруппу группы G . Если $N = G$, то G – простая группа, следовательно, $H \in \mathfrak{F}_{ca}$ и $K \in \mathfrak{F}_{ca}$. Пусть $N \neq G$. Тогда по лемме 1.4 $G/N = HN/N \cdot KN/N$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп HN/N и KN/N группы G/N . Заметим, что $G/N \in \mathfrak{F}_{ca}$. Таким образом, для G/N условия теоремы выполняются. Следовательно,

$$HN/N \cong H/(H \cap N) \in \mathfrak{F}_{ca}$$

и $KN/N \cong K/(K \cap N) \in \mathfrak{F}_{ca}$. Из леммы 1.1 следует, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G .

Пусть N – неабелева группа. Тогда N – простая группа. Согласно лемме 1.5 достаточно рассмотреть следующие случаи.

1. Пусть $H \cap N = K \cap N = N$. Тогда $N \leq H \cap K$ и $H/(H \cap N) = H/N \in \mathfrak{F}_{ca}$ и $K/(K \cap N) = K/N \in \mathfrak{F}_{ca}$. Следовательно, H и K – sa - \mathfrak{F} -группы. Получили противоречие.
2. Пусть $H \cap N = K \cap N = 1$. Тогда $H/(H \cap N) \cong H$ и $K/(K \cap N) \cong K$ – sa - \mathfrak{F} -группы. Противоречие.
3. Пусть $H \cap N = N$ и $K \cap N = 1$. Тогда $H/(H \cap N) = H/N \in \mathfrak{F}_{ca}$ и H – sa - \mathfrak{F} -группа и $K/(K \cap N) \cong K$ – sa - \mathfrak{F} -группа, противоречие.
4. Пусть $H \cap N = 1$ и $K \cap N = N$. Данный случай рассматривается аналогично случаю 3.

Случай когда N – абелева p -группа рассматривается аналогично с некоторыми изменениями. Теорема доказана.

Лемма 3.1. Пусть группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $N = N_1 \times \dots \times N_t$, где N_i – изоморфные простые неабелевы группы для всех $i = 1, \dots, t$. Если $N \leq H$, где H – sa - \mathfrak{F} -подгруппа группы G , то $N_i \triangleleft H$ для всех $i = 1, \dots, t$.

Доказательство. Пусть $i \in \{1, \dots, t\}$. Рассмотрим нормальное замыкание $N_i^H = \langle N_i^x \mid x \in H \rangle$

подгруппы N_i в H . Заметим, что $N_i \triangleleft\triangleleft G$. Следовательно, $N_i \triangleleft\triangleleft H$. Согласно лемме 9.17 [17] N_i^H является минимальной нормальной подгруппой группы H . Так как подгруппа N_i^H неабелева и изоморфна главному фактору sa - \mathfrak{F} -группы H , то N_i^H – простая группа. Тогда в силу $N_i \triangleleft\triangleleft N_i^H$ имеем, что $N_i^H = N_i$. Следовательно, $N_i \trianglelefteq H$ для любого $i = 1, \dots, t$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. Пусть \mathfrak{F} – композиционная формация и f – ее внутренний композиционный экран. Пусть N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , причем N – абелева p -группа для некоторого простого числа p . Главный фактор N является \mathfrak{F} -центральным в группе G тогда и только тогда, когда

$$G/C_G(N) \in f(p).$$

Доказательство. Пусть $G/C_G(N) \in f(p)$.

Рассмотрим полупрямое произведение

$$R = N \rtimes G/C_G(N).$$

Заметим, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы R и $C_R(N) = N$. Тогда $R/C_R(N) \cong G/C_G(N) \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, $R \in \mathfrak{F}$, т. е. главный фактор N группы G является \mathfrak{F} -центральным.

Пусть теперь N – \mathfrak{F} -центральный главный фактор группы G . Тогда $R = N \rtimes G/C_G(N) \in \mathfrak{F}$, где N – единственная минимальная нормальная подгруппа в R и $C_G(N) = N$. Отсюда следует, что $R/C_R(N) \cong G/C_G(N) \in f(p)$. Лемма доказана.

Лемма 3.3. Пусть \mathfrak{F} – формация и группа $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K , где $H, K \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}$ и $G \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}$. Тогда $G \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}$.

Доказательство. Предположим, что лемма неверна и выберем группу G – контрпример минимального порядка. Обозначим через N минимальную нормальную подгруппу группы G . Без ограничения общности можем считать $G \neq N$. По лемме 1.4 $G/N = HN/N \cdot KN/N$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп HN/N и KN/N группы G/N . Заметим, что $HN/N \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}$, $KN/N \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}$ и $G/N \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}$. Тогда все условия леммы выполняются для G/N . Поэтому $G/N \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{N}_p \mathfrak{F}$ – формация, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G . Следовательно, N – q -группа для некоторого простого числа $q \neq p$. Так как $G \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}$ и $O_p(G) = 1$, то $G \in \mathfrak{A}$. Отсюда получаем, что $H \in \mathfrak{F}$ и $K \in \mathfrak{F}$. В силу

того, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G имеем, что G – циклическая группа и $|G| = q^n$. Так как $G = HK$, то $G = H$ или $G = K$, т. е. $G \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы С. Предположим, что теорема неверна и выберем группу G – контрпример наименьшего порядка. Обозначим через N минимальную нормальную подгруппу группы G . Если $N = G$, то G – простая группа, следовательно, $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Пусть $N \neq G$. Тогда по лемме 1.4 $G/N = HN/N \cdot KN/N$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп HN/N и KN/N группы G/N . Заметим, что коммутант $(G/N)'$ квазинильпотентен. Таким образом, для G/N условия теоремы выполняются. Следовательно, $G/N \in \mathfrak{F}_{ca}$. Так как \mathfrak{F}_{ca} является формацией по лемме 1.1, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G .

Пусть N – неабелева группа. Тогда

$$N = N_1 \times \dots \times N_t,$$

где N_i – изоморфные простые неабелевы группы, $i = 1, \dots, t$. Согласно лемме 1.5 достаточно рассмотреть следующие случаи.

1. Пусть $H \cap N = K \cap N = N$. Тогда $N \subseteq H \cap K$.

Так как H и K – ca - \mathfrak{F} -подгруппы, и

$$N = N_1 \times \dots \times N_t,$$

то по лемме 3.1 $N_i \triangleleft H$ и $N_i \triangleleft K$. Отсюда и из $G = HK$, следует, что $N_i \triangleleft G$ для всех $i = 1, \dots, t$. В силу того, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , получаем, что $t = 1$ и N – простая группа. Из $G/N \in \mathfrak{F}_{ca}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Получили противоречие.

2. Пусть $H \cap N = K \cap N = 1$. Тогда по пункту 2) леммы 1.5 получаем, что

$$N = (H \cap N)(K \cap N) = 1,$$

что противоречит выбору N .

3. Пусть $H \cap N = N$ и $K \cap N = 1$. Тогда $N \subseteq H$ и по пункту 5) леммы 1.5 $N \leq C_G(H)$ или $N \leq C_G(K)$. Так как $N \leq H$ и N неабелева, получаем, что $N \leq C_G(K)$. Так как $N = N_1 \times \dots \times N_t$, подгруппа $N_i \leq C_G(K)$ для каждого $i = 1, \dots, t$. Из $N_i \leq H$ по лемме 3.1 получаем, что $N_i \triangleleft H$ для каждого $i = 1, \dots, t$. В силу $G = HK$, имеем, что $N_i \triangleleft G$. Так как N – минимальная нормальная подгруппа группы G , заключаем, что $N = N_i$ и N – простая группа. В силу $G/N \in \mathfrak{F}_{ca}$ имеем, что $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Получили противоречие с выбором G .

4. Пусть $H \cap N = 1$ и $K \cap N = N$. Данный случай рассматривается аналогично случаю 3.

Пусть теперь N – абелева группа. Тогда N – p -группа для некоторого просто числа p . По теореме 1.2 формация \mathfrak{F}_{ca} имеет максимальный внутренний композиционный экран h такой, что $h(N) = f(p)$, где f – максимальный внутренний локальный экран формации \mathfrak{F} . Согласно лемме 1.5 достаточно рассмотреть следующие случаи.

1. Пусть $H \cap N = K \cap N = N$. Тогда $N \subseteq H \cap K$.

Пусть U/V – любой H -главный фактор группы N . Так как $H \in \mathfrak{F}_{ca}$, то $H/C_H(U/V) \in h(p)$. Из леммы 1.3 получаем, что $H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p h(p) = h(p)$.

Аналогично $K/C_K(N) \in h(p)$. Рассмотрим группу $G/C_G(N) = HC_G(N)/C_G(N) \cdot KC_G(N)/C_G(N)$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп $HC_G(N)/C_G(N)$ и $KC_G(N)/C_G(N)$ группы $G/C_G(N)$.

Так как $N \subseteq G'$ и G' – квазинильпотентная группа, то $G'/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p$ по лемме 1.3. Значит

$$(G/C_G(N))' = G'C_G(N)/C_G(N) \simeq G'/C_G(N)$$

– p -группа. Тогда из того, что

$$G/C_G(N)/(G/C_G(N))' \in \mathfrak{A}$$

следует, что $G/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}$. Используя лемму 3.3 для $G/C_G(N)$, получаем, что

$$G/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p h(p) \subseteq \mathfrak{F}_{ca}.$$

Отсюда получаем, что $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Это противоречит выбору G .

2. Пусть $H \cap N = K \cap N = 1$. По теореме 1.6, $H_G K_G \neq 1$. Тогда

$$N \subseteq H_G \subseteq H \text{ или } N \subseteq K_G \subseteq K,$$

противоречие.

3. Пусть $H \cap N = N$ и $K \cap N = 1$. Пусть N – нециклическая подгруппа, тогда по пункту 5) леммы 1.5 $N \leq C_G(K)$. Следовательно, $K \subseteq C_G(N)$ и $G/C_G(N) = HC_G(N)/C_G(N) \cdot KC_G(N)/C_G(N) = HC_G(N)/C_G(N) \simeq H/(C_G(N) \cap H) = H/C_H(N)$. Так как $N \subseteq H$ и $H \in \mathfrak{F}_{ca}$, то по лемме 1.3 $H/C_H(N) \in h(p)$. Из леммы 3.2 следует, что фактор N – \mathfrak{F} -центральный главный фактор группы G . Тогда $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Получили противоречие. Если N – циклическая группа, то $|N| = p$ и $G/C_G(N)$ – циклическая группа порядка, делящего $p-1$. Тогда

$$G/C_G(N) \in \mathfrak{A}(p-1) \subseteq f(p) = h(p).$$

В силу $G/N \in \mathfrak{F}_{ca}$ получаем, что $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Получили противоречие.

4. Пусть $H \cap N = 1$ и $K \cap N = N$. Данный случай рассматривается аналогично случаю 3. Теорема доказана.

Лемма 3.4. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация дисперсивных по Оре групп, содержащая \mathfrak{U} и f – ее максимальный внутренний локальный экран. Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K группы G . Если H – p -группа и $K \in f(p)$, то $G \in f(p)$.

Доказательство. Предположим, что лемма неверна и выберем группу G – контрпример наименьшего порядка. Обозначим через N – минимальную нормальную подгруппу группы G . Без ограничения общности можно положить, что $G \neq N$. По лемме 1.4

$$G/N = HN/N \cdot KN/N$$

– произведение взаимно перестановочных подгрупп HN/N и KN/N группы G/N . Заметим, что $HN/N \cong H/H \cap N$ – p -группа и

$$KN/N \cong K/K \cap N \in f(p).$$

Тогда условия леммы выполняются для G/N . Следовательно, $G/N \in f(p)$. Так как $f(p)$ является формацией, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G . Значит, N – q -группа для некоторого простого $q \neq p$.

Согласно лемме 1.5 достаточно рассмотреть следующие случаи.

1. Пусть $H \cap N = K \cap N = N$. Тогда $N \subseteq H \cap K$. Значит, N – p -группа, противоречие.

2. Пусть $H \cap N = K \cap N = 1$. Рассмотрим G_q – силовскую q -подгруппу группы G . Тогда $N \subseteq G_q$. Так как H – p -группа, можем положить, что $G_q \subseteq K$. Следовательно, $N \subseteq K$, противоречие.

3. Пусть $H \cap N = N$ и $K \cap N = 1$. Тогда N – p -группа, противоречие.

4. Пусть $H \cap N = 1$ и $K \cap N = N$. Положим $\Phi(G) = 1$. Тогда $N = C_G(N)$.

Если N – циклическая группа, то $|N| = q$. Тогда $G = N \rtimes M$, где $M \in f(p)$. Следовательно M – абелева группа порядка делящего $q-1$. Но с другой стороны $G = HK$, где H – p -группа. Так как \mathfrak{F} – насыщенная формация дисперсивных по Оре групп, согласно [2, IV, 4.8 (g)] $p > q$, получили противоречие.

Пусть N – нециклическая группа. По пункту 5) леммы 1.5 $N \leq C_G(H)$. Тогда $H \leq C_G(N) = N$, противоречие.

Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$. Тогда $N \subseteq \Phi(G)$. Рассмотрим $O_p(G/N) = G_p N/N$, где G_p – силовская p -подгруппа группы G . Тогда $G_p N \triangleleft G$. По лемме Фраттини $G = N_G(G_p)N = N_G(G_p)$ и $G_p \triangleleft G$, противоречие. Значит, $O_p(G/N) = 1$ и $G_p = 1$, так как N – q -группа. Тогда $H = 1$ и $G = K \in f(p)$. Последнее противоречие завершает доказательство леммы.

Доказательство теоремы D. Предположим, что теорема неверна и выберем группу G , являющуюся контрпримером наименьшего порядка. Обозначим через N минимальную нормальную подгруппу группы G . Без ограничения общности можно положить, что $G \neq N$. По лемме 1.4 $G/N = HN/N \cdot KN/N$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп HN/N и KN/N группы G/N . Заметим, что

$$HN/N \cong H/H \cap N \in \mathfrak{F}_{ca}$$

и $KN/N \cong K/K \cap N \in \mathfrak{N}$. Таким образом, для G/N условия теоремы выполняются.

Следовательно, $G/N \in \mathfrak{F}_{ca}$. Так как \mathfrak{F}_{ca} является формацией по лемме 1.1, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G .

Пусть N – абелева p -группа для некоторого простого p . По теореме 1.2 формация \mathfrak{F}_{ca} имеет максимальный внутренний композиционный экран h такой, что $h(N) = f(p)$, где f – максимальный внутренний локальный экран формации \mathfrak{F} . Согласно лемме 1.5 достаточно рассмотреть следующие случаи.

1. Пусть $H \cap N = K \cap N = N$. Тогда $N \subseteq H \cap K$.

Пусть U/V – любой H -главный фактор группы N . Так как $H \in \mathfrak{F}_{ca}$, то $H/C_H(U/V) \in h(p)$. Из леммы 1.3 получаем, что $H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p h(p)$.

Так как K квазинильпотентна, то $K/C_K(N) \in \mathfrak{N}_p$ по лемме 1.3. Рассмотрим группу

$$G/C_G(N) = HC_G(N)/C_G(N) \cdot KC_G(N)/C_G(N)$$

– произведение взаимно перестановочных подгрупп $HC_G(N)/C_G(N)$ и $KC_G(N)/C_G(N)$ группы $G/C_G(N)$. Применяя лемму 3.4 к группе $G/C_G(N)$ получаем, что

$$G/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p f(p) = h(p).$$

Так как G/N – \mathfrak{F}_{ca} -группа, то G – \mathfrak{F}_{ca} -группа, противоречие.

2. Пусть $H \cap N = K \cap N = 1$. По теореме 1.6, $H_G K_G \neq 1$. Тогда $N \subseteq H_G \subseteq H$ или

$$N \subseteq K_G \subseteq K,$$

противоречие.

3. Пусть $H \cap N = N$ и $K \cap N = 1$. Положим, что N – нециклическая группа. Тогда $N \leq C_G(K)$ по пункту 5) леммы 1.5. Заметим, что $K \subseteq C_G(N)$. Поэтому

$$G/C_G(N) = HC_G(N)/C_G(N) \cdot KC_G(N)/C_G(N) = HC_G(N)/C_G(N) \cong H/(C_G(N) \cap H) = H/C_H(N).$$

Так как $N \subseteq H$ и $H \in \mathfrak{F}_{ca}$, следовательно $H/C_H(N) \in h(p)$ по лемме 1.3. Значит, $G \in \mathfrak{F}_{ca}$, противоречие.

Пусть N – циклическая группа. Тогда N – группа простого порядка и $G/C_G(N)$ – циклическая группа порядка делящего $p-1$. Следовательно

$$G/C_G(N) \in \mathfrak{A}(p-1) \subseteq \mathfrak{N}_p f(p) = h(p).$$

Поэтому $G \in \mathfrak{F}_{ca}$, противоречие.

4. Пусть $H \cap N = 1$ и $K \cap N = N$. Пусть N – нециклическая группа. Тогда $N \leq C_G(H)$ по пункту 5) леммы 1.5. Поэтому $H \subseteq C_G(N)$ и

$$G/C_G(N) = HC_G(N)/C_G(N) \cdot KC_G(N)/C_G(N) =$$

$$= KC_G(N)/C_G(N) \approx K/(C_G(N) \cap K) = K/C_K(N).$$

Так как $N \subseteq K$ и $K \in \mathfrak{N}_p$, получаем, что

$$H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p \subseteq h(p)$$

по лемме 1.3. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_{ca}$, противоречие.

Пусть N – циклическая группа. Тогда N – группа простого порядка и $G/C_G(N)$ – циклическая группа порядка делящего $p-1$. Следовательно

$$G/C_G(N) \in \mathfrak{A}(p-1) \subseteq \mathfrak{N}_p f(p) = h(p).$$

Поэтому $G \in \mathfrak{F}_{ca}$, противоречие.

Пусть N – неабелева подгруппа. По пункту 2) леммы 1.5 получаем, что

$$\{H \cap N, K \cap N\} \subseteq \{N, 1\} \text{ и } N = (N \cap H)(N \cap K).$$

Следовательно, случай $H \cap N = K \cap N = 1$ невозможен. Заметим, что $N = N_1 \times \dots \times N_t$ – произведение простых неабелевых подгрупп N_i .

Пусть $H \cap N = N$. Так как H – \mathfrak{F}_{ca} -подгруппа, то $N_i \triangleleft H$ по лемме 3.1. Если $K \cap N = N$ тогда $K_i \triangleleft H$ по лемме 3.1. Так как $G = HK$, то $N_i \triangleleft G$ для всех $i = 1, \dots, t$. Противоречие. Если $K \cap N = 1$ то в силу того, что N неабелева и $N \leq H$ получаем, что $N \leq C_G(K)$ по пункту 5) леммы 1.5. Значит, $K \leq C_G(N_i)$ и $N_i \triangleleft G$ для всех $i = 1, \dots, t$. Так как N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , то $N = N_i$ – простая группа. Так как $G/N \in \mathfrak{F}_{ca}$, то $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Получили противоречие с выбором группы G .

Если $H \cap N = 1$ и $K \cap N = N$, то как выше показываем, что $N = N_i$ – простая группа и $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Последнее противоречие завершает доказательство теоремы.

4 Заключительные замечания

С помощью конструкции класса \mathfrak{F}_{ca} можно строить различные новые конкретные примеры композиционных формаций, подходящие под условия приведенных выше теорем.

Приведем одну серию таких примеров.

Согласно [2], *ранговой функцией* называется отображение $R: p \rightarrow R(p)$, которое каждому простому числу p ставит в соответствие некоторое множество натуральных чисел $R(p)$. Для

этой функции в [2] определяется класс групп

$$\mathfrak{F}(R) = \{G \in \mathfrak{S} \mid \text{для всех простых } p \in \pi(G)$$

каждый главный p -фактор из G имеет ранг, принадлежащий $R(p)\}$,

который является формацией.

В случае, когда $\mathfrak{F}(R)$ является насыщенной формацией, ранговая функция называется насыщенной [2, С. 484]. Говорят, что ранговая функция R имеет полную характеристику, если $R(p) \neq \emptyset$ для всех простых p .

Заметим, что если R – насыщенная ранговая функция полной характеристики, то по [2, IV, 4.3] получаем, что $1 \in R(p)$ для всех простых $p \in \mathbb{P}$ и поэтому $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}(R)$.

Если задана ранговая функция R , то согласно [2] для каждого простого числа p определяются

$$\pi(G) = R(p) \cap \mathbb{P} \text{ и}$$

$$e(p) = \{p^m - 1 \mid m \in R(p)\}.$$

Через $\mathfrak{A}_{\pi(p)'}(e(p))$ обозначается класс всех абелевых $\pi(p)'$ -групп с экспонентой, делящей $e(p)$, который является формацией.

Согласно [2] выполняется следующая

Лемма 4.1 [2]. Пусть R – насыщенная ранговая функция полной характеристики. Тогда R удовлетворяет следующим условиям

RF1: Если $n \in R(p)$ и $m \mid n$, то $m \in R(p)$;

RF2: Если $\{m, n\} \in R(p)$, то $mn \in R(p)$;

RF3: Если p и q различные простые числа, $q \in R(p)$ и $m \in R(p)$, то $q^m - 1 \in R(p)$;

RF4: Если простые числа p и q и натуральное число r удовлетворяют условиям

$$1) p \mid (q^m - 1) \text{ для некоторого } m \in R(p),$$

$$2) q \mid (p^n - 1) \text{ для некоторого } n \in R(p),$$

$$3) r \mid (p^k - 1) \text{ для некоторого } k \in R(p),$$

$$4) p \in R(p), r \in R(p),$$

тогда $r \in R(p)$.

Локальный экран формации $\mathfrak{F}(R)$ в случае, когда R – насыщенная ранговая функция, описан в теореме 1.18 [2, С. 490], которую сформулируем в виде леммы.

Лемма 4.2. Пусть R – ранговая функция, и $\widehat{\mathfrak{F}}(R)$ – локальная формация, определенная локальным экраном f таким, что

$$f(p) = \mathfrak{A}_{\pi(p)'}(e(p)) \mathfrak{S}_{\pi}(p)$$

для каждого простого p . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) R является насыщенной ранговой функцией;

2) R удовлетворяет условиям **RF1-RF4**;

3) $\widehat{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}$.

Следствие В.4. Пусть R – насыщенная ранговая функция полной характеристики и группа $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K группы G . Если G – sa - $\mathfrak{F}(R)$ -группа, то H и K также sa - $\mathfrak{F}(R)$ -группы.

Следствие С.5. Пусть R – насыщенная ранговая функция полной характеристики и группа $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных sa - $\mathfrak{F}(R)$ -подгрупп H и K группы G . Если коммутант G' группы G квазинильпотентен, то G – sa - $\mathfrak{F}(R)$ -группа.

Напомним [18]–[19], что подгруппа H группы G называется \mathbb{P} -субнормальной в G , если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $i = 1, \dots, n$. В работах [18]–[20] были приведены новые примеры насыщенных формаций дисперсивных по Оре групп, содержащие \mathfrak{U} : класс $w\mathfrak{U}$ всех групп, у которых любая силовская подгруппа \mathbb{P} -субнормальна; класс \mathfrak{X} всех групп, у которых любая циклическая примарная подгруппа \mathbb{P} -субнормальна.

Приведем новые следствия теоремы D.

Следствие D.3. Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K . Если H – sa - $w\mathfrak{U}$ -подгруппа, а K квазинильпотентна, то G – sa - $w\mathfrak{U}$ -группа.

Следствие D.4. Пусть $G = HK$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K . Если H – sa - \mathfrak{X} -подгруппа, а K квазинильпотентна, то G – sa - \mathfrak{X} -группа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Два направления в развитии непростых конечных групп (доклад, прочитанный на XII Всесоюзном алгебраическом коллоквиуме в Свердловске в сентябре 1973 г.) / Л.А. Шеметков // Успехи мат. наук. – 1975. – Т. 30, № 2. – С. 179–198.
2. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
3. Guo, W. On finite quasi- \mathfrak{F} -groups / W. Guo, A.N. Skiba // Comm. Algebra. – 2009. – Vol. 37. – P. 470–481.
4. Guo, W. On some classes of finite quasi- \mathfrak{F} -groups / W. Guo, A.N. Skiba // Journal of Group Theory. – 2009. – Vol. 12. – P. 407–417.
5. Ведерников, В.А. О некоторых классах конечных групп / В.А. Ведерников // Докл. АН БССР. – 1988. – Т. 32, № 10. – С. 872–875.

6. Васильев, А.Ф. О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Изв. вузов. Серия Математика. – 1997. – Т. 426, № 11. – С. 10–14.

7. Robinson, D.J.S. The structure of finite groups in which permutability is a transitive relation / D.J.S. Robinson // J. Austral. Math. Soc. – 2001. – Vol. 70. – P. 143–149.

8. Мысловец, Е.Н. О конечных sa - \mathfrak{F} -группах / Е.Н. Мысловец // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – Т. 2, № 19. – С. 64–68.

9. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 256 с.

10. Carocca, A. p -supersolvability of factorized finite groups / A. Carocca // Hokkaido Math. J. – 1992. – № 21. – P. 395–403.

11. Ballester-Bolinches, A. Products of Finite Groups / A. Ballester – Bolinches, R. Esteban – Romero, M. Asaad. – Berlin: Walter de Gruyter, 2010. – 334 p.

12. Ballester-Bolinches, A. On mutually permutable products of finite groups / A. Ballester – Bolinches, J. Cossey, M. C. Pedraza – Aguilera // J. Algebra. – 2005. – Vol. 294. – P. 127–135.

13. Beidleman, J.C. Group classes and mutually permutable products / J.C. Beidleman, H. Heineken // J. Algebra. – 2006. – Vol. 297. – P. 409–416

14. Baer, R. Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.

15. Asaad, M. On the supersolvability of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Arch. Math. (Basel). – 1989. – Vol. 53. – P. 318–326.

16. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

17. Isaacs, I.M. Finite Group Theory / I.M. Isaacs. – Graduate Studies in Mathematics. – 2008. – № 92.

18. Васильев, А.Ф. О конечных группах, близких к сверхразрешимым группам / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 2 (3). – С. 21–27.

19. Васильев, А.Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

20. Monakhov, V.S. Finite groups with \mathbb{P} -subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniahina // Ricerche di Matematica. – 2013. – Vol. 62. – P. 307–329.

Поступила в редакцию 18.04.16.

НЕОСЕССИМЕТРИЧНОЕ ТЕРМОСИЛОВОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

А.В. Нестерович

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

THE NONAXISYMMETRIC TERMOFORCES DEFORMATION OF THE CIRCULAR SANDWICH PLATE IN THE PLANE

A.V. Nesterovich

Belarusian State University of Transport, Gomel

Приведена постановка краевой задачи о деформировании круговой трехслойной пластины при неосесимметричном термосиловом деформировании в своей плоскости. Кинематические соотношения соответствуют гипотезе ломаной линии. Получены аналитические решения при различных видах нагрузки, проведен их численный анализ.

Ключевые слова: трехслойная круговая пластина, термоупругость, неосесимметричная нагрузка.

The boundary value problem formulation and general solution for a circular sandwich plate deformed by nonaxisymmetric termoforces load in its plane are given. As an example, the nonaxisymmetric tension-compression plate cosine load is considered. Numerical testing of solution has been made.

Keywords: three-layer circular plate, thermoelasticity, axially symmetric load.

Введение

Широкое применение в авиа-, ракетно-, машиностроении и строительстве многослойных конструкций приводит к необходимости разработки методов их расчета на различные виды и типы нагрузок. Стержни, пластины и оболочки, имеющие слоистую структуру, обычно набраны из материалов с существенно различными физико-механическими свойствами.

В последнее время значительное распространение получили трехслойные конструкции, которые состоят из двух несущих слоев и заполнителя, обеспечивающего их совместную работу. В условиях деформации изгиба трехслойные конструкции оказываются наиболее рациональными, то есть близкими к оптимальным с точки зрения обеспечения минимума весовых показателей при заданных ограничениях на прочность и жесткость. Несущие слои из материалов высокой прочности и жесткости предназначены для восприятия основной части механической нагрузки. Связующие слои, служащие для образования монолитной конструкции, обеспечивают перераспределение усилий между несущими слоями и защиту от внешних тепловых, радиационных и вибрационных воздействий.

Деформированию и колебаниям трехслойных элементов конструкций посвящено множество публикаций. Это обусловлено рядом их выдающихся качеств: прочностью и жесткостью при изгибе при минимуме весовых показателей, хорошей защитой от химических, тепловых и радиационных воздействий. Различные механико-математические модели упругих трехслойных

конструкций предложены в [1], [2]. Задачи квазистатического деформирования трехслойных стержней и пластин разобраны в работах [3]–[7]. Поведение элементов конструкций при импульсных воздействиях и терморadiационных ударах исследованы в [8]–[14]. Здесь рассмотрено деформирование круговой трехслойной пластины при неосесимметричном термосиловом деформировании в своей плоскости.

1 Постановка краевой задачи

Для описания кинематики пакета принята гипотеза «прямой нормали»: в несущих слоях выполняются гипотезы Кирхгофа, в заполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол (рисунок 1.1), составляющий с радиальной и тангенциальной осями величины $\psi_r(r, \varphi)$ и $\psi_\varphi(r, \varphi)$. На границах склейки слоев перемещения непрерывны. На торце пластины ($r = r_0$) предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев ($\psi_r = 0$), но не мешающих деформированию из своей плоскости. Деформации малые.

Постановка задачи проводится в цилиндрической системе координат r, φ, z . Срединную плоскость заполнителя примем за координатную, ось z направим ей перпендикулярно вверх, к слою 1. В этом случае перемещения в пластине выражаются через пять искомым функций $u_r, u_\varphi, \psi_r, \psi_\varphi, w$:

$$u_r^{(1)} = u_r + c\psi_r - z w_{,r};$$

$$u_\varphi^{(1)} = u_\varphi + c\psi_\varphi - \frac{z}{r} w_{,\varphi};$$

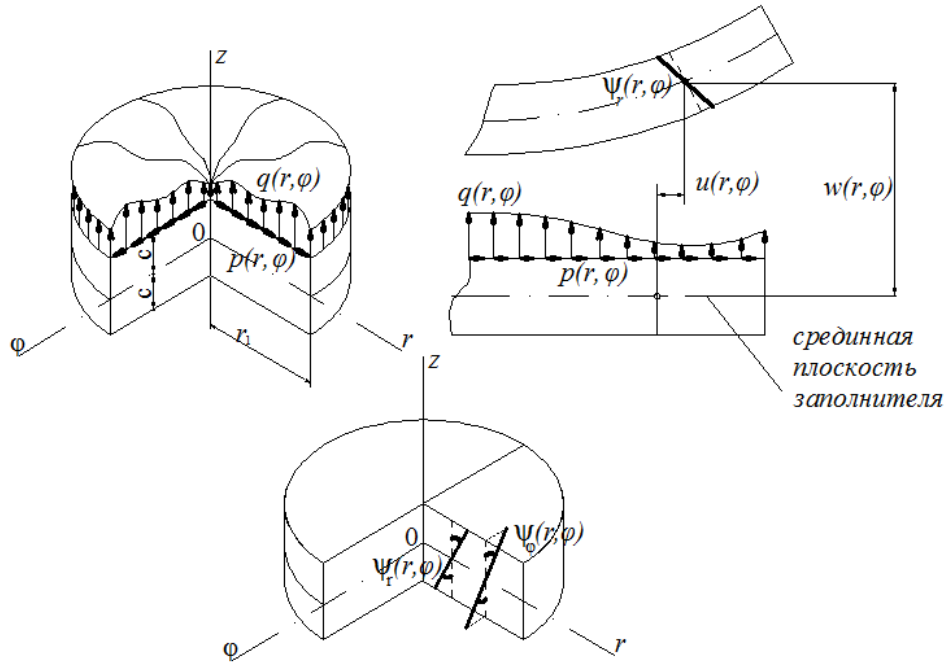


Рисунок 1.1 – Схема деформирования круговой пластины

$$\begin{aligned}
 & c \leq z \leq c + h_1; \\
 & u_r^{(2)} = u_r - c\psi_r - zw_{,r}; \\
 & u_\phi^{(2)} = u_\phi - c\psi_\phi - \frac{z}{r}w_{,\phi}; \\
 & -c - h_2 \leq z \leq -c; \\
 & u_r^{(3)} = u_r + z\psi_r - zw_{,r}; \\
 & u_\phi^{(3)} = u_\phi + z\psi_\phi - \frac{z}{r}w_{,\phi}; \\
 & -c \leq z \leq c;
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной плоскости заполнителя, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате, индекс сверху – номер слоя.

Деформации в пластине следуют из перемещений (1.1) и соотношений Коши [5]. Введем обобщенные внутренние усилия и моменты в пластине:

$$\begin{aligned}
 T_{\alpha\beta} &= \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\beta}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_h \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} dz, \\
 M_{\alpha\beta} &= \sum_{k=1}^3 M_{\alpha\beta}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_h \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} z dz, \\
 Q_r &= \int_h \sigma_{rz}^{(3)} dz, \quad Q_\phi = \int_h \sigma_{\phi z}^{(3)} dz,
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\sigma_{\alpha\beta}$ – компоненты тензора напряжений ($\alpha, \beta = r, \phi$).

Закон Гука с учетом температуры принимаем в виде

$$\begin{aligned}
 s_x^{(k)} &= 2G_k(T)\varepsilon_x^{(k)}, \\
 \sigma^{(k)} &= 3K_k(T)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}T) \quad (k = 1, 2),
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $s_x^{(k)}, \sigma^{(k)}$ и $\varepsilon_{xx}^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций k -го слоя; α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения материала; $G_k(T), K_k(T)$ – температурно-зависимые модули сдвига и объемного деформирования, зависимость которых от температуры описывает формула Белла [5].

Уравнения равновесия рассматриваемой пластины в усилиях (1.2) получены с помощью принципа возможных перемещений Лагранжа:

$$\begin{aligned}
 T_{rr,r} + \frac{1}{r}(T_{rr} - T_{\phi\phi}) + \frac{1}{2r}T_{r\phi,\phi} &= -p_r; \\
 H_{rr,r} + \frac{1}{r}(H_{rr} - H_{\phi\phi}) - Q_r - \frac{1}{2r}H_{r\phi,\phi} &= 0; \\
 M_{rr,r} + \frac{1}{r}(2M_{rr} - M_{\phi\phi}) + \frac{1}{r^2}M_{\phi\phi,\phi} \\
 - \frac{1}{2r}M_{r\phi,\phi} + \frac{1}{2r}M_{\phi r,\phi} + \frac{1}{r^2}M_{r\phi,\phi} &= -q; \\
 T_{r\phi,r} + \frac{2}{r}T_{\phi\phi} + \frac{2}{r}T_{r\phi} &= -p_\phi; \\
 H_{r\phi,r} + \frac{2}{r}H_{\phi\phi} + \frac{2}{r}H_{r\phi} - 2Q_\phi &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Если в системе (1.4) выразить все внутренние усилия (1.2) через искомые функции и добавить к ней граничные условия, то получим замкнутую краевую задачу для нахождения перемещений. Поэтому, выразив напряжения через деформации и используя закон Гука (1.3), получим систему из пяти уравнений в частных производных, относительно искомых перемещений.

Уравнения равновесия в частных производных рассматриваемой пластины при неосесимметричном деформировании в своей плоскости будут следовать из этой системы, если положить

$$\Psi_r = \Psi_\varphi = w = 0,$$

т. е. присутствуют только радиальные и тангенциальные перемещения u_r, u_φ . В результате

$$\begin{aligned} & (a_5 + a_2) \frac{u_{r,\varphi r}}{r} + (a_5 + a_1) \frac{u_{r,\varphi}}{r^2} + \\ & + a_5 \left(u_{\varphi,rr} - \frac{u_\varphi}{r^2} \right) + a_1 \frac{u_{\varphi,\varphi\varphi}}{r^2} = -p_\varphi, \\ & (a_2 + a_5) \frac{u_{\varphi,r\varphi}}{r} - (a_1 + a_5) \frac{u_{\varphi,\varphi}}{r^2} + \\ & + a_1 \left(u_{r,rr} + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + a_5 \frac{u_{r,\varphi\varphi}}{r^2} = -p_r, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате, коэффициенты a_i определяются интегральными соотношениями, т. к. модули упругости материалов в слоях изменяются по их толщине вместе с температурой:

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 K_{k0}, \quad a_2 = K_{32} + c^2(K_{10} + K_{20}),$$

$$a_5 = \int_{h_3} G_3 dz, \quad a_6 = c(K_{10} - K_{20}),$$

$$K_{km} = \int_{h_k} [K_k(T) + \frac{4}{3}G_k(T)] z^m dz \quad (m = 0, 1, 2).$$

Задача отыскания перемещений замыкается присоединением к уравнениям (1.5) силовых или кинематических граничных условий. При заделке или шарнирном закреплении ее контура должны выполняться требования ($r = r_0$):

$$u_r = u_\varphi = 0. \quad (1.6)$$

2 Решение краевой задачи

Искомые функции $u_r(r, \varphi)$, $u_\varphi(r, \varphi)$ и нагрузки $p_r(r, \varphi)$, $p_\varphi(r, \varphi)$ раскладываем в тригонометрические ряды по окружной координате:

$$\begin{aligned} u_r(r, \varphi) &= u_r^{(0)}(r) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} [u_m^{(1)}(r) \cos(n\varphi) + u_m^{(2)}(r) \sin(n\varphi)], \\ u_\varphi(r, \varphi) &= u_\varphi^{(0)}(r) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} [u_{\varphi n}^{(1)}(r) \cos(n\varphi) + u_{\varphi n}^{(2)}(r) \sin(n\varphi)], \\ p_r(r, \varphi) &= p_r^{(0)}(r) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} [p_m^{(1)}(r) \cos(n\varphi) + p_m^{(2)}(r) \sin(n\varphi)], \end{aligned}$$

$$h_{n1} = \frac{-n^2 a_1 a_2^2 - 2a_3^2 n^2 a_2 - a_3^3 n^2 + a_1 a_3^2 - 2n^2 a_1 a_2 a_3 + a_1^2 a_3 - a_3 n^2 a_2^2 - n^2 a_1 a_3^2 + a_1^2 n^2 a_3 + a_1^3 n^2}{n(a_1 a_2^2 + a_3^3 n^2 + 2a_1 a_2 a_3 - 2a_1^2 a_3 - a_1^3 + 2a_3^2 n^2 a_2 + a_3 n^2 a_2^2)},$$

$$h_{n2} = -S_{nk} \frac{-3n^2 a_3 a_2^2 - 3a_3^2 n^2 a_2 - a_3^3 n^2 + a_1 a_2 a_3 - n^2 a_3^2 + n^2 a_3 a_1^2 + a_1^2 a_3 n^2 + a_2 n^2 a_1^2 + a_1 a_3^2}{n(a_1 a_2^2 + a_3^3 n^2 + 2a_1 a_2 a_3 - 2a_1^2 a_3 - a_1^3 + 2a_3^2 n^2 a_2 + a_3 n^2 a_2^2)},$$

$$p_\varphi(r, \varphi) = p_\varphi^{(0)}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [p_{\varphi n}^{(1)}(r) \cos(n\varphi) + p_{\varphi n}^{(2)}(r) \sin(n\varphi)]. \quad (2.1)$$

Здесь перемещения $u_r^{(0)}(r)$, $u_\varphi^{(0)}(r)$ соответствуют осесимметричному деформированию,

$$p_{\varphi n}^{(1)}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_\varphi(r, \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi,$$

$$p_{\varphi n}^{(2)}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p_\varphi(r, \varphi) \sin(n\varphi) d\varphi.$$

Подставив выражения (2.1) в систему (1.5) и приравняв коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получим систему из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений для определения амплитудных функций $u_m^{(1)}(r)$, $u_m^{(2)}(r)$, $u_{\varphi n}^{(1)}(r)$, $u_{\varphi n}^{(2)}(r)$:

$$\begin{aligned} & a_1 u_{rn}^{(1)} \gg_{rr} + a_1 \frac{1}{r} u_{rn}^{(1)} \gg_r - a_1 \frac{1}{r^2} u_{rn}^{(1)} - a_5 \frac{1}{r^2} n^2 u_{rn}^{(1)} + \\ & + (a_5 + a_2) \frac{1}{r} n u_{\varphi n}^{(2)} \gg_r - (a_5 + a_1) \frac{1}{r^2} n u_{\varphi n}^{(2)} = -p_m^{(1)}; \\ & -(a_5 + a_2) n \frac{u_{rn}^{(1)} \gg_r}{r} - (a_5 + a_1) \frac{n u_{rn}^{(1)}}{r^2} + a_5 u_{\varphi n}^{(2)} \gg_{rr} - \\ & - a_5 \frac{1}{r^2} u_{\varphi n}^{(2)} - a_1 \frac{1}{r^2} n^2 u_{\varphi n}^{(2)} = -p_{\varphi n}^{(2)}; \\ & a_1 u_{rn}^{(2)} \gg_{rr} + a_1 \frac{1}{r} u_{rn}^{(2)} \gg_r - a_1 \frac{1}{r^2} u_{rn}^{(2)} - a_5 \frac{1}{r^2} n^2 u_{rn}^{(2)} - \\ & - (a_5 + a_2) \frac{1}{r} n u_{\varphi n}^{(1)} \gg_r + (a_5 + a_1) \frac{1}{r^2} n u_{\varphi n}^{(1)} = -p_m^{(2)}; \\ & (a_5 + a_2) n \frac{u_{rn}^{(2)} \gg_r}{r} + (a_5 + a_1) n \frac{u_{rn}^{(2)}}{r^2} + \\ & + a_5 u_{\varphi n}^{(1)} \gg_{rr} - a_5 \frac{1}{r^2} u_{\varphi n}^{(1)} - a_1 \frac{1}{r^2} n^2 u_{\varphi n}^{(1)} = -p_{\varphi n}^{(1)}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Общее решение полученной системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений можно выписать в виде суммы решений соответствующей однородной системы и частного решения $u_{rn}^{(1)*}$, $u_{rn}^{(2)*}$, $u_{\varphi n}^{(1)*}$, $u_{\varphi n}^{(2)*}$ системы (2.2):

$$\begin{aligned} u_{rn}^{(1)} &= \sum_{k=1}^4 C_{nk}^{(1)} h_{nk} r^{S_{nk}} + u_{rn}^{(1)*}, \\ u_{\varphi n}^{(2)} &= \sum_{k=1}^4 C_{nk}^{(1)} r^{S_{nk}} + u_{\varphi n}^{(2)*}, \\ u_{rn}^{(2)} &= -\sum_{k=1}^4 C_{nk}^{(2)} h_{nk} r^{S_{nk}} + u_{rn}^{(2)*}, \\ u_{\varphi n}^{(1)} &= \sum_{k=1}^4 C_{nk}^{(2)} r^{S_{nk}} + u_{\varphi n}^{(1)*}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $C_{nk}^{(1)}$, $C_{nk}^{(2)}$ – константы интегрирования,

$$h_{n3} = -\left(S_{nk}^2 - S_{nk}\right) \frac{a_1 a_3 (a_1 - 2a_2 - a_3)}{n(a_1 a_2^2 + a_3^3 n^2 + 2a_1 a_2 a_3 - 2a_1^2 a_3 - a_1^3 + 2a_3^2 n^2 a_2 + a_3 n^2 a_2^2)},$$

$$h_{n4} = \left(S_{nk}^3 - 3S_{nk}^2 + 2S_{nk}\right) \frac{a_1 a_3 (a_2 + a_3)}{n(a_1 a_2^2 + a_3^3 n^2 + 2a_1 a_2 a_3 - 2a_1^2 a_3 - a_1^3 + 2a_3^2 n^2 a_2 + a_3 n^2 a_2^2)}.$$

Таблица 2.1 – Корни уравнения

n	S_1	S_2	S_3	S_4
1	0	0.2926011498	2.435066524	-1.727667674
2	1.052979336	3.493652747	-0.9377547248	-2.608877359
3	1.967588593	4.562018430	-2.047758864	-3.481848160
4	2.891816913	5.630078984	-3.190795930	-4.331099966
5	3.821267962	6.696143009	-4.391946597	-5.125464374
6	4.754557422	7.759905638	-5.757231530 + 0.2380982754i	-5.757231530 - 0.2380982754i
7	5.690963802	8.821409789	-6.756186796 + 0.4982267022i	-6.756186796 - 0.4982267022i
8	6.630018566	9.880795255	-7.755406911 + 0.6632999951i	-7.755406911 - 0.6632999951i
9	7.571381535	10.93822285	-8.754802194 + 0.7948774943i	-8.754802194 - 0.7948774943i

Здесь величины S_{nk} ($k = 1, 2, 3, 4$) являются корнями уравнения

$$a_3 a_1 S^4 - a_3 a_1 S^3 + (-2a_3 a_1 + n^2 a_2^2 - n^2 a_1^2 + 2n^2 a_3 a_2) S^2 + (n^2 a_3^2 + a_3 a_1) S - 2n^2 a_3 a_1 + a_3 a_1 + n^4 a_3 a_1 = 0,$$

$$a_3 = \frac{2}{3} c^3 \left(K + \frac{4}{3} G \right). \quad (2.4)$$

Численные значения корней уравнения (2.4) получены для пластины со слоями: дюралюминий–фторопласт–дюралюминий [5]. Первые 10 из них приведены в таблице 2.1.

Следует отметить, что из условия ограниченности перемещений в начале координат для сплошных пластин в решении (2.3) необходимо полагать равными нулю константы интегрирования, стоящие перед фундаментальными функциями с отрицательными значениями корней S_{nk} . Остальные константы интегрирования определяются из условий закрепления пластины (1.6).

3 Частные решения при неосесимметричном деформировании

Рассмотрим некоторые частные решения $u_{rn}^{(1)*}$, $u_{rn}^{(2)*}$, $u_{\varphi n}^{(1)*}$, $u_{\varphi n}^{(2)*}$ системы дифференциальных уравнений (2.2), если правые части этих уравнений (нагрузки) являются степенными функциями от радиальной координаты.

При постоянных правых частях ($p_{rn0}^{(1)}$, $p_{rn0}^{(2)}$, $p_{\varphi n0}^{(1)}$, $p_{\varphi n0}^{(2)}$ – const) получаем

$$u_{rn}^{(1)*} = -r^2 \left(\left(p_{\varphi n0}^{(2)} n - p_{rn0}^{(1)} \right) a_5 + n \left(p_{rn0}^{(1)} n a_1 + p_{\varphi n0}^{(2)} (2a_2 - a_1) \right) \right) / B_n,$$

$$u_{rn}^{(2)*} = -r^2 \left(\left(-p_{\varphi n0}^{(1)} n - p_{rn0}^{(2)} \right) a_5 + n \left(p_{rn0}^{(2)} n a_1 + p_{\varphi n0}^{(1)} (-2a_2 + a_1) \right) \right) / B_n,$$

$$u_{\varphi n}^{(1)*} = r^2 \left(3n a_5 p_{rn0}^{(2)} + p_{\varphi n0}^{(1)} n^2 a_5 - 3p_{\varphi n0}^{(1)} a_1 + 2n a_2 p_{rn0}^{(2)} + p_{rn0}^{(2)} n a_1 \right) / D_n,$$

$$u_{\varphi n}^{(2)*} = -r^2 \left(-3p_{rn0}^{(1)} n a_5 + a_5 p_{\varphi n0}^{(2)} n^2 - 3a_1 p_{\varphi n0}^{(2)} - 2p_{rn0}^{(1)} n a_2 - p_{rn0}^{(1)} n a_1 \right) / D_n;$$

$$B_n = 2n^2 a_5^2 + (n^4 a_1 + (8a_2 - 2a_1) n^2 + 3a_1) a_5 + 4(a_2^2 - a_1^2) n^2,$$

$$D_n = 3a_5 a_1 - 4n^2 a_1^2 - 2n^2 a_5 a_1 + 8n^2 a_5 a_2 + 2n^2 a_5^2 + n^4 a_5 a_1 + 4n^2 a_2^2. \quad (3.1)$$

Если нагрузки в правых частях уравнений (2.2) линейно зависят от радиальной координаты

$$p_{rn}^{(1)} = p_{rn0}^{(1)} r, \quad p_{rn}^{(2)} = p_{rn0}^{(2)} r,$$

$$p_{\varphi n}^{(1)} = p_{\varphi n0}^{(1)} r, \quad p_{\varphi n}^{(2)} = p_{\varphi n0}^{(2)} r,$$

то частные решения следующие:

$$u_{rn}^{(1)*} = r^3 \left(\left(-2p_{\varphi n0}^{(2)} n + 5p_{rn0}^{(1)} \right) a_5 + n \left(-p_{rn0}^{(1)} n a_1 + p_{\varphi n0}^{(2)} (-3a_2 + a_1) \right) \right) / E_n,$$

$$u_{rn}^{(2)*} = -r^3 \left(\left(-2p_{\varphi n0}^{(1)} n - 5p_{rn0}^{(2)} \right) a_5 + n \left(p_{rn0}^{(2)} n a_1 + p_{\varphi n0}^{(1)} (-3a_2 + a_1) \right) \right) / E_n,$$

$$u_{\varphi n}^{(1)*} = -r^3 \left(4n a_5 p_{rn0}^{(2)} + p_{\varphi n0}^{(1)} n^2 a_5 + p_{rn0}^{(2)} n a_1 - 8p_{\varphi n0}^{(1)} a_1 + 3n a_2 p_{rn0}^{(2)} \right) / G_n,$$

$$u_{\varphi n}^{(2)*} = -r^3 \left(-4p_{rn0}^{(1)} n a_5 + a_5 p_{\varphi n0}^{(2)} n^2 - 3p_{rn0}^{(1)} n a_2 - p_{rn0}^{(1)} n a_1 - 8a_1 p_{\varphi n0}^{(2)} \right) / G_n,$$

$$E_n = 3n^2 a_5^2 + (a_1 n^4 + (18a_2 - 2a_1) n^2 + 40a_1) a_5 + 9(a_2^2 - a_1^2) n^2,$$

$$G_n = 40a_5 a_1 + n^4 a_5 a_1 - 2n^2 a_5 a_1 - 9n^2 a_1^2 + 18n^2 a_5 a_2 + 3n^2 a_5^2 + 9n^2 a_2^2. \quad (3.2)$$

При квадратичной зависимости нагрузок от радиальной координаты ($p_m^{(1)} = p_{m0}^{(1)} r^2$, $p_m^{(2)} = p_{m0}^{(2)} r^2$,

$p_{\varphi n}^{(1)} = p_{\varphi n0}^{(1)} r^2$, $p_{\varphi n}^{(2)} = p_{\varphi n0}^{(2)} r^2$) частные решения

$$\begin{aligned} u_{rn}^{(1)*} &= r^4 \left((-3p_{\varphi n0}^{(2)} n + 11p_{rn0}^{(1)}) a_5 + \right. \\ &\quad \left. + n(-p_{rn0}^{(1)} n a_1 + p_{\varphi n0}^{(2)} (-4a_2 + a_1)) \right) / Q_n, \\ u_{rn}^{(2)*} &= -r^4 \left((-3p_{\varphi n0}^{(1)} n - 11p_{rn0}^{(2)}) a_5 + \right. \\ &\quad \left. + n(p_{rn0}^{(2)} n a_1 + p_{\varphi n0}^{(1)} (-4a_2 + a_1)) \right) / Q_n, \\ u_{\varphi n}^{(1)*} &= -r^4 \left(5n a_5 p_{rn0}^{(2)} + p_{\varphi n0}^{(1)} n^2 a_5 + \right. \\ &\quad \left. + p_{rn0}^{(2)} n a_1 - 15p_{\varphi n0}^{(1)} a_1 + 4n a_2 p_{rn0}^{(2)} \right) / R_n, \\ u_{\varphi n}^{(2)*} &= -r^4 \left(-4p_{rn0}^{(1)} n a_2 - 5p_{rn0}^{(1)} n a_5 + \right. \\ &\quad \left. + a_5 p_{\varphi n0}^{(2)} n^2 - p_{rn0}^{(1)} n a_1 - 15a_1 p_{\varphi n0}^{(2)} \right) / R_n; \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$Q_n = 4n^2 a_5^2 + (a_1 n^4 + (32a_2 - 2a_1) n^2 + 165a_1) a_5 + 16(a_2^2 - a_1^2) n^2,$$

$$R_n = -16n^2 a_1^2 + 16n^2 a_2^2 + 165a_5 a_1 + 4n^2 a_5^2 + n^4 a_5 a_1 + 32n^2 a_5 a_2 - 2n^2 a_5 a_1.$$

Другие частные решения можно получить комбинацией решений (3.1)–(3.3), либо разлагая нагрузку в степенной ряд и используя эти же решения.

Пример. Растяжение-сжатие пластины несимметричной косинусоидальной нагрузкой:

$$\begin{aligned} p_r(r, \varphi) &= p_0 \cos \varphi, \\ p_\varphi &= 0, \quad p_0 = \text{const}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Коэффициенты разложения нагрузки (3.4) в ряд (2.1) будут

$$p_m^{(1)}(r) = \frac{p_0}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi = \begin{cases} 0, & n \neq 1, \\ p_0, & n = 1, \end{cases}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} p_{r1}^{(1)}(r) &= p_0, \quad p_{rn}^{(1)}(r) = 0, \quad n > 1, \\ p_{rn}^{(2)}(r) &= p_{\varphi n}^{(1)}(r) = p_{\varphi n}^{(2)}(r) \equiv 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Составляющие перемещений (2.1) будут

$$\begin{aligned} u_{r1}^{(1)} &= \sum_{k=1}^4 C_{1k}^{(1)} h_{1k} r^{S_{1k}} + u_{r1}^{(1)*}, \\ u_{\varphi 1}^{(2)} &= \sum_{k=1}^4 C_{1k}^{(1)} r^{S_{1k}} + u_{\varphi 1}^{(2)*}, \\ u_{rn}^{(2)} &= 0, \quad u_{\varphi n}^{(1)} = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Частные решения $u_{r1}^{(1)*}$, $u_{\varphi 1}^{(2)*}$ следуют из решений (3.1) при $n = 1$ с учетом (3.5):

$$\begin{aligned} u_{r1}^{(1)*} &= p_0 r^2 (a_5 - a_1) / B_1, \\ u_{\varphi 1}^{(2)*} &= p_0 r^2 (a_1 + 2a_2 + 3a_5) / D_1; \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$B_1 = D_1 = (2a_1 + 8a_2) a_5 + 4(a_2^2 - a_1^2) + 2a_5^2.$$

Константы интегрирования $C_{1k}^{(1)}$, входящие в (3.6) получим из условия ограниченности решения в центре и граничных условий на контуре пластины, учитывая корни S_{1k} . В нашем случае (таблица 2.1)

$S_{11} = 0$, $S_{12} = 0.2926011498$, $S_{13} = 2.435066524$, $S_{14} = -1.727667674$, поэтому необходимо положить $C_{12}^{(1)} = C_{14}^{(1)} = 0$ из условия ограниченности перемещений и деформаций в центре пластины. Константы $C_{11}^{(1)}$, $C_{13}^{(1)}$ получим из граничных условий (1.6):

$$\begin{aligned} u_{r1}^{(1)}(r_0) &= C_{11}^{(1)} h_{11} + C_{13}^{(1)} h_{13} r_0^{S_{13}} + u_{r1}^{(1)*}(r_0) = 0, \\ u_{\varphi 1}^{(2)}(r_0) &= C_{11}^{(1)} + C_{13}^{(1)} r_0^{S_{13}} + u_{\varphi 1}^{(2)*}(r_0) = 0; \\ C_{11}^{(1)} &= \frac{u_{r1}^{(1)*}(r_0) - h_{13} u_{\varphi 1}^{(2)*}(r_0)}{h_{13} - h_{11}}, \\ C_{13}^{(1)} &= \frac{h_{11} u_{\varphi 1}^{(2)*}(r_0) - u_{r1}^{(1)*}(r_0)}{r_0^{S_{13}} (h_{13} - h_{11})}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где коэффициенты h_{1k} определяются из формул, приведенных в (2.3),

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{-a_1 a_2^2 - 2a_2 a_5^2 - 2a_1 a_2 a_5 + 2a_1^2 a_5 - a_2^2 a_5 + a_1^3 - a_5^3}{a_1 a_2^2 + a_5^3 + 2a_1 a_2 a_5 - 2a_1^2 a_5 - a_1^3 + 2a_5^2 a_2 + a_5 a_2^2} = -1, \\ h_{13} &= -\frac{a_1 a_5 (a_1 - 2a_2 - a_5)}{a_1 a_2^2 + a_5^3 + 2a_1 a_2 a_5 - 2a_1^2 a_5 - a_1^3 + 2a_5^2 a_2 + a_5 a_2^2} \times \\ &\quad \times \sum_{k=1}^4 (S_{1k}^2 - S_{1k}). \end{aligned}$$

Полные перемещения в пластине следуют из соотношений (2.1), с учетом (3.7)–(3.8):

$$\begin{aligned} u_r(r, \varphi) &= u_{r1}^{(1)}(r) \cos \varphi, \\ u_\varphi(r, \varphi) &= u_{\varphi 1}^{(2)}(r) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Численные результаты получены для пластины радиуса $r_0 = 1$, с толщинами слоев $h_1 = h_2 = 0,02$, $h_3 = 0,08$ при нагрузке $p_0 = 5$ МПа.

На рисунке 3.1 показано изменение радиальных $u_r(r, \varphi_0) - a$ и тангенциальных $u_\varphi(r, \varphi_0) - b$ перемещений вдоль радиуса пластины при различных значениях угловой координаты: 1 – $\varphi_0 = 0$, 2 – $\varphi_0 = \pi/2$, 3 – $\varphi_0 = \pi$, 4 – $\varphi_0 = 3\pi/2$. Положительный знак радиальных перемещений показывает, что они направлены по радиусу, отрицательный – в противоположную сторону. Следовательно, правая половина пластины сжата, левая – растянута, т. е. материал пластины, включая ее центр, сдвинуты вправо. Картина изменения тангенциальных перемещений подобна. Экстремумы всех перемещений достигаются в центре пластины.

Изменение перемещений $u_r(r, \varphi) - a$, $u_\varphi(r, \varphi) - b$ в зависимости от координаты φ отражает рисунок 3.2: 1 – $r = r_0/4$, 2 – $r = r_0/2$, 3 – $r = 2r_0/3$. Знаки перемещений соответствуют знакам тригонометрических функций в решении (3.7). Максимальные значения радиальные перемещения достигают в направлениях максимумов нагрузки, тангенциальные перемещения там равны нулю.

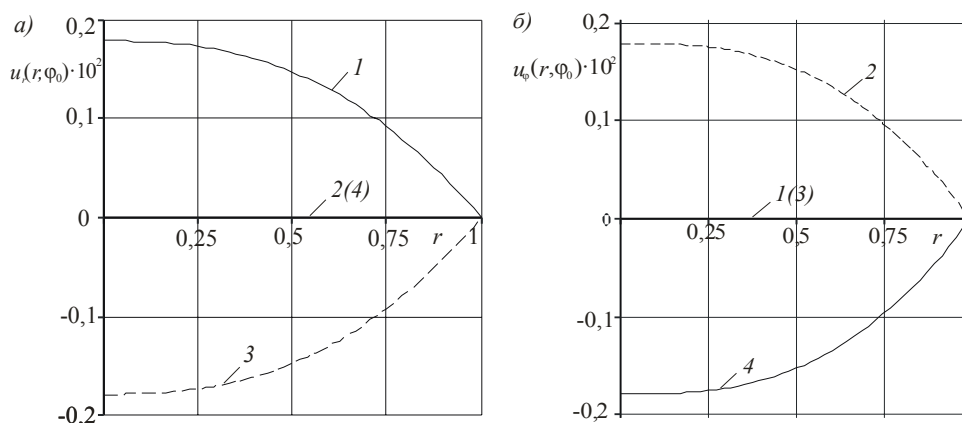


Рисунок 3.1 – Изменение перемещений $u_r(r, \varphi_0)$ – а, $u_\varphi(r, \varphi_0)$ – б вдоль радиуса пластины

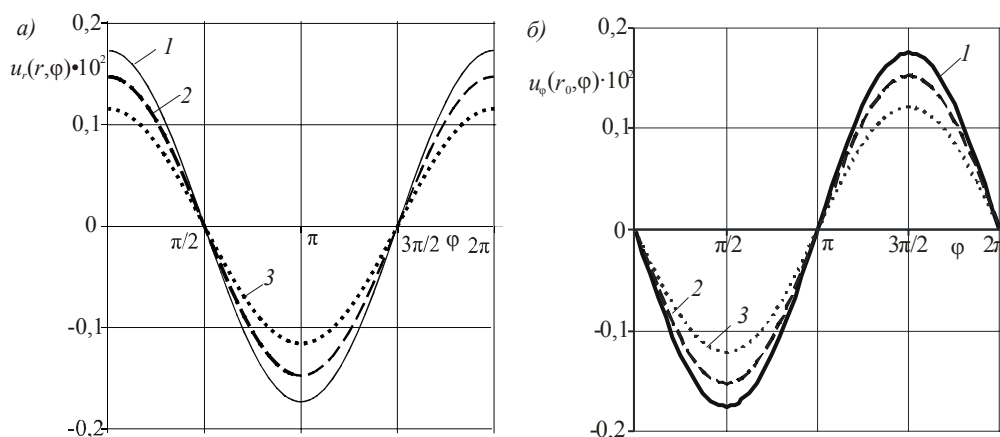


Рисунок 3.2 – Изменение перемещений $u_r(r, \varphi)$ – а, $u_\varphi(r, \varphi)$ – б в зависимости от окружной координаты

Заключение

Полученные в работе аналитические решения позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины при любых неосесимметричных термосиловых нагрузках в ее плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин, В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Плескачевский, Ю.М. Динамика металлополимерных систем / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Минск: Бел. Наука, 2004. – 386 с.
3. Деформирование круговой трехслойной пластины на упругом основании / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2005. – № 1. – С. 16–22.
4. Горшков, А.Г. Гармоническое нагружение слоистых вязкоупругопластических систем / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая //

Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2000. – № 6. – С. 91.

5. Старовойтов, Э.И. Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Е.П. Доровская // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2006. – № 3. – С. 45–50.

6. Старовойтов, Э.И. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2006. – № 4. – С. 55–62.

7. Leonenko, D.V. Thermoplastic strain of circular sandwich plates on an elastic base / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // Mechanics of Solids. – 2009. – Vol. 44, № 5. – P. 744–755.

8. Starovoitov, E.I. Vibration of circular sandwich plates under resonance loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2003. – Т. 39, № 12. – С. 1458–1463.

9. Starovoitov, E.I. Circular sandwich plates under local impulsive loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko,

A.V. Yarovaya // *International Applied Mechanics*. – 2003. – Vol. 39, № 8. – С. 945–952.

10. *Starovoitov, E.I.* Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // *International Applied Mechanics*. – 2011. – Vol. 47, № 5. – P. 580–589.

11. *Leonenko, D.V.* Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // *Mechanics of Solids*. – 2012. – Vol. 47, № 1. – P. 111–118.

12. *Viswanathan, K.K.* Free vibration of multilayered circular cylindrical shell with cross-ply walls, including shear deformation by using spline function method / K.K. Viswanathan, K.S. Kim, J.H. Lee,

H.S. Koh, J.B. Lee // *Journal of Mechanical Science and Technology*. – 2008. – Vol. 22, № 11. – P. 2062–2075.

13. *Kuznetsova, E.L.* Natural vibrations of three-layer circular cylindrical shells in an elastic medium / E.L. Kuznetsova, D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // *Mechanics of Solids*. – 2015. – Vol. 50, № 3. – P. 359–366.

14. *Могилевич, Л.И.* Гидроупругость виброопоры с трехслойной круглой упругой пластиной с несжимаемым наполнителем / Л.И. Могилевич, В.С. Попов, Э.И. Старовойтов // *Наука и техника транспорта*. – 2006. – № 2. – С. 56–63.

Поступила в редакцию 09.03.16.

УДК 517.538.52+517.538.53

АСИМПТОТИКА АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ПАДЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ МНОЖИТЕЛЯМИ В ПОКАЗАТЕЛЯХ ЭКСПОНЕНТ

А.П. Старовойтов, Г.Н. Казимиров, М.В. Сидорцов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ASYMPTOTICS OF HERMITE – PADÉ APPROXIMATION OF EXPONENTIAL FUNCTIONS WITH COMPLEX MULTIPLIERS IN THE EXPONENT

A.P. Starovoitov, G.N. Kazimirov, M.V. Sidorzov

F. Scorina Gomel State University

Изучаются асимптотические свойства диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде I типа для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$, где $\lambda_0 = 0$, а остальные λ_p являются корнями уравнения $\xi^k = 1$. Доказанные теоремы дополняют известные результаты П. Борвейна, Ф. Вилонского, Г. Шталя, А.В. Астафьевой, А.П. Старовойтова, полученные в случае, когда $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ – различные действительные числа.

Ключевые слова: система экспонент, аппроксимации Эрмита – Паде, асимптотические равенства, метод Лапласа, метод перевала.

Asymptotic properties of the diagonal Hermite – Padé approximants of type I for the system of exponentials $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$, in which $\lambda_0 = 0$, while the rest λ_p are the roots of the equation $\xi^k = 1$ are studied. The theorems complement known results of P. Borwein, F. Wielonsky, H. Stahl, A.V. Astafyeva, A.P. Starovoitov, obtained for the case, where the $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ – different real numbers.

Keywords: exponential system, Hermite-Padé approximants, asymptotic equality, Laplace's method, saddle point method.

Введение

В последние годы наблюдается повышенный интерес к аппроксимациям Эрмита – Паде экспоненциальных функций и их обобщениям, в частности, в задачах приближения аналитических функций [1]–[3], в приложениях к случайным матрицам [4]–[7], диофантовым приближениям [8]–[12] и теории операторов [13], [14].

Саму конструкцию этих аппроксимаций предложил Эрмит, в связи с исследованием арифметических свойств числа e . С тех пор аппроксимации Эрмита – Паде экспоненциальных функций были достойным объектом исследования как классиками (Д. Гильберт, Ф. Клейн, Ф. Линдеман, К. Малер, К. Зигель), так и известными современными математиками (А.А. Гончар, Е.А. Рахманов, С.П. Суетин, А.И. Аптекарев, Н. Stahl, E. Saff, R. Varga, G. Chudnovsky, P. Borwein, W. Van Assche, A. B. J. Kuijlaars и др.).

Для того, чтобы перейти к точным определениям и конкретным формулировкам, рассмотрим систему экспоненциальных функций $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$, где $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ – произвольные различные комплексные числа.

Аппроксимациями Эрмита – Паде I типа (Latin type) системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$ называют многочлены $A_n^p(z)$, $\deg A_n^p \leq n-1$, $p = 0, 1, \dots, k$, хотя бы один из которых тождественно не равен нулю, удовлетворяющие условию

$$\sum_{p=0}^k A_n^p(z) e^{\lambda_p z} = O(z^{kn+n-1}), z \rightarrow 0. \quad (0.1)$$

Многочлены $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$ введены в рассмотрение Эрмитом [15] (одновременно с полученными для них интегральными представлениями) спустя некоторое время после выхода в свет его знаменитой работы [16], посвящённой доказательству трансцендентности числа e . В [16] Эрмит нашёл явный вид (также в интегральной форме) многочленов $Q_n(z)$, $P_n^{(j)}(z)$, $j = 1, 2, \dots, k$, степени не выше kn , удовлетворяющих условиям

$$Q_n(z) e^{\lambda_j z} - P_n^{(j)}(z) = O(z^{kn+n+1}), z \rightarrow 0, \quad (0.2)$$

которые единственным образом определяют рациональные функции

$$\pi_n^{(j)}(z) = P_n^{(j)}(z) / Q_n(z), j = 1, 2, \dots, k. \quad (0.3)$$

Дроби (0.3) принято называть *совместными диагональными рациональными приближениями*, а

многочлены $Q_n(z), P_n^{(1)}(z), \dots, P_n^{(k)}(z)$ – диагональными аппроксимациями Эрмита – Паде II типа (German type) системы экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$ (по поводу терминологии см., например, [17]).

В одномерном случае ($k=1$) общая постановка задачи о нахождении многочленов, удовлетворяющим равенствам (0.1), (0.2), принадлежит Паде [18], а построенные многочлены (их называют аппроксимациями Паде) совпадают:

$$A_n^0(z) = -P_{n-1}^1(z), A_n^1(z) = Q_{n-1}(z). \quad (0.4)$$

Теорема Паде утверждает, что многочлены (0.4), нормированные так, что $A_1(0) = 1$, при $n \rightarrow \infty$ равномерно сходятся на любом компакте в \mathbb{C} :

$$A_n^0(z) \rightrightarrows e^{z/2}, A_n^1(z) \rightrightarrows e^{-z/2}.$$

С помощью явных формул П. Борвейн [19] нашёл асимптотику квадратичных ($k=2$) аппроксимаций Эрмита – Паде I типа для системы $\{1, e^z, e^{2z}\}$. В [20] этот результат был обобщён на произвольную систему экспонент $\{e^{\lambda_0 z}, e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}\}$. В недавнем цикле работ [21]–[27] с помощью метода матричной задачи Римана – Гильберта найдены очень точные асимптотики и расположение нулей, преобразованных с помощью масштабирования независимой переменной квадратичных аппроксимаций Эрмита – Паде I и II типов для системы экспоненциальных функций $\{1, e^z, e^{2z}\}$. Ещё раньше, применяя метод перевала, Ф. Вилонский [28] доказал аналог результата П. Борвейна для системы экспонент $\{e^{p^z}\}_{p=0}^k$ при любом $k \geq 2$.

В [29] найдены равномерные асимптотики многочленов $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$ для системы экспоненциальных функций $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$ с произвольными различными действительными числами $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$. В этой работе также как и в [28] при исследовании асимптотик интегральных представлений многочленов $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^k$ применялся метод перевала: в случае действительных множителей в показателе экспонент найдены все точки перевала соответствующей подинтегральной функции в интегралах Коши, представляющих эти многочлены, и соответствующие этим интегралам перевальные контуры интегрирования. Анализируя доказательства в [29], можно сделать вывод о том, что аналогичные результаты справедливы и в случае, когда комплексные числа $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ лежат на одной прямой в комплексной плоскости (например, на мнимой оси). Если же $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ являются произвольными комплексными числами, то применение метода перевала крайне затруднено.

В данной статье рассматривается в некотором смысле исключительный случай, когда применение метода перевала в указанной ситуации возможно. Для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$, где $\lambda_0 = 0$, а остальные λ_p являются корнями уравнения $\xi^k - 1 = 0$, найдены асимптотики соответствующих аппроксимаций Эрмита – Паде I типа и доказана равномерная сходимость нормированных аппроксимаций на компактах в \mathbb{C} к явно заданным функциям. Для простоты формулировок далее ограничимся случаем, когда $k=3$.

1 Предварительные результаты

Полиномы $\{A_n^p(z)\}_{p=0}^3$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{p=0}^3 A_n^p(z) e^{\lambda_p z} = O(z^{4n-1}), \quad z \rightarrow 0, \quad (1.1)$$

где

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_p = e^{i2\pi(p-1)/3}, \quad p = 1, 2, 3,$$

могут быть получены решением линейной системы $4n-1$ однородных уравнений с $4n$ неизвестными коэффициентами. Поэтому нетривиальное решение всегда существует. Легко показать, что такие нетривиальные решения могут быть выписаны в явном виде. Действительно, пусть C_p – круг с центром в точке λ_p столь малого радиуса, что все остальные λ_j лежат во внешности этого круга. Используя теорему Коши о вычетах, легко показать, что функции

$$A_n^p(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i} \int_{C_p} \frac{e^{\xi z} d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}, \quad 0 \leq p \leq 3, \quad (1.2)$$

где $\varphi(\xi) = \xi(\xi^3 - 1)$, удовлетворяют (1.1) и всем другим условиям.

При изучении асимптотики многочленов (1.2) будем использовать известные методы комплексного анализа. Приведем без доказательств в удобном для нас виде необходимые утверждения [30, С. 398, 415].

Утверждение 1.1 (Метод Лапласа). Пусть $f(x), S(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ функции, при этом $S(x)$ принимает только действительные значения, а $f(x)$ может быть комплекснозначной. Полагаем

$$I_n = \int_a^b f(x) e^{nS(x)} dx.$$

Предполагаем, что $S(x)$ в точке $x_0 \in (a, b)$ имеет абсолютный максимум на отрезке $[a, b]$, т. е. $S(x) < S(x_0), x \neq x_0, S''(x_0) \neq 0$ и функции $f(x), S(x)$ бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0 . Тогда при $n \rightarrow +\infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$I_n = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_0)}} e^{nS(x_0)} \{f(x_0) + O(1/n)\}.$$

Утверждение 1.2 (Метод перевала). Пусть функции $f(z)$ и $S(z)$ регулярны в некоторой односвязной области G , содержащей кусочно гладкую кривую γ и

$$F_n = \int_{\gamma} f(\xi) e^{nS(\xi)} d\xi.$$

Предположим, что $\max\{\operatorname{Re} S(\xi) : \xi \in \gamma\}$ достигается только в точке z_0 , которая является внутренней точкой контура γ и простой точкой перевала, т. е. $S'(x_0) = 0$, $S''(x_0) \neq 0$. Считаем также, что в окрестности z_0 контур γ проходит через оба сектора [30, С. 414], в которых $\operatorname{Re} S(\xi) < \operatorname{Re} S(z_0)$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$F_n = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(z_0)}} e^{nS(z_0)} \{f(z_0) + O(1/n)\}. \quad (1.3)$$

Выбор ветви корня в (1.3) определяется из условий

$$\arg \sqrt{-\frac{1}{S''(z_0)}} = \varphi_0,$$

где φ_0 – угол между касательной к кривой l в точке z_0 и положительным направлением действительной оси, а l – линия наискорейшего спуска, проходящая через точку z_0 , т. е. для l в окрестности z_0 выполняются условия: $\operatorname{Im} S(z) = \operatorname{Im} S(z_0)$ при $z \in l$; $\operatorname{Re} S(z) < \operatorname{Re} S(z_0)$ при $z \in l$, $z \neq z_0$.

2 Асимптотика поточечной сходимости

Перейдём непосредственно к изучению асимптотики многочленов $A_n^p(z)$, $0 \leq p \leq 3$ при фиксированном значении переменной z . С этой целью введём необходимые обозначения. Пусть z_j – нули функции $\varphi'(\xi)$. Тогда

$$z_j = \sqrt[3]{1/4} e^{i2\pi(j-1)/3}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Здесь и в дальнейшем i – мнимая единица.

В окрестности точки z_1 определим однозначную ветвь функции

$$S(\xi) = -\ln \varphi(\xi),$$

полагая

$$S(z_1) = -[\ln |\varphi(z_1)| + i\pi].$$

Фиксируем односвязную область G , для которой $\{z_j\}_{j=1}^3 \subset G \subset \mathbb{C} \setminus \{\lambda_p\}_{p=0}^3$. Тогда по теореме о монотонии выбранная ветвь аналитически продолжается в G , а полученная в результате продолжения функция является однозначной. Её значения в G вычисляются по формуле

$$S(\xi) = -[\ln |\varphi(\xi)| + i\Delta_j \arg \varphi(\xi)],$$

где кривая γ лежит в G и соединяет точки z_1 и ξ , а $\Delta_j \arg \varphi(\xi)$ – приращение аргумента $\varphi(\xi)$ вдоль кривой γ .

Пусть

$$B_n(z_j) = \frac{1}{2\pi i} \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(z_j)}} e^{nS(z_j)}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.1)$$

Ветвь корня в (2.1) определяется из условий

$$\arg \sqrt{-\frac{1}{S''(z_j)}} = \Psi_0,$$

где Ψ_0 – угол между касательной к окружности $\{z : |z| = \sqrt[3]{1/4}\}$ в точке z_j (окружность обходится против часовой стрелки) и положительным направлением действительной оси. Учитывая легко проверяемые равенства

$$S''(z_j) = 4z_j^{-2}, \quad j = 1, 2, 3,$$

нетрудно показать, что

$$B_n(z_j) = \sqrt{\frac{1}{8\pi i}} z_j e^{nS(z_j)}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.2)$$

Теорема 2.1. Для каждого фиксированного $z \in \mathbb{C}$ и $n \rightarrow \infty$

$$A_n^0(z) = \sum_{j=1}^3 B_n(z_j) e^{(z_j - \lambda_1)z} (1 + O(1/n)), \quad (2.3)$$

$$A_n^p(z) = -B_n(z_p) e^{(z_p - \lambda_p)z} (1 + O(1/n)), \quad (2.4)$$

$$p = 1, 2, 3.$$

Доказательство. Исходя из интегрального представления

$$A_n^1(z) = \frac{e^{-\lambda_1 z}}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{e^{\xi z} d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}, \quad (2.5)$$

докажем равенство (2.4) при $p = 1$ для каждого фиксированного $z \in \mathbb{C}$. При других значениях p равенства (2.4) доказываются аналогично.

Для этого в (2.5) деформируем контур интегрирования C_1 в криволинейный прямоугольник Π с вершинами в точках

$$\begin{aligned} &A(r \cos(\pi/3), r \sin(\pi/3)), \\ &B(R \cos(\pi/3), R \sin(\pi/3)), \\ &C(R \cos(\pi/3), -R \sin(\pi/3)), \\ &D(r \cos(\pi/3), -r \sin(\pi/3)). \end{aligned}$$

Сторонами прямоугольника Π являются отрезки $[A, B]$ и $[D, C]$ и дуги окружностей

$$\begin{aligned} \widehat{AD} &= \{r e^{i\tau} : -\pi/3 \leq \tau \leq \pi/3\}, \\ \widehat{BC} &= \{R e^{i\tau} : -\pi/3 \leq \tau \leq \pi/3\}, \end{aligned}$$

где $r = \sqrt[3]{1/4}$, а $R > 1$.

Так как при $t \in [r, R]$

$$|\varphi(te^{i\pi/3})| = t(t^3 + 1) \geq r(r^3 + 1),$$

на отрезке, соединяющем точки A и B , минимум функции $|\varphi(\xi)|$ достигается в единственной

точке A . Аналогично, на вертикальном отрезке, соединяющем точки D и C , минимум функции $|\varphi(\xi)|$ достигается в единственной точке D и равен $r(r^3 + 1)$.

На дуге \widehat{BC} при достаточно больших R значения $|\varphi(\xi)|$ больше каждого из значений $|\varphi(\xi)|$ в точках A и D . Действительно, если $R > 3$, то при $\tau \in [-\pi/3, \pi/3]$

$$|\varphi(Re^{i\tau})| = |Re^{i\tau}(R^3 e^{i3\tau})| \geq R(R^3 - 1) \geq r(r^3 + 1).$$

С другой стороны, если $\tau \in [-\pi/3, \pi/3]$, то

$$|\varphi(re^{i\tau})| = r\sqrt{r^6 - 2r^3 \cos 3\tau + 1} \geq r(1 - r^3).$$

Поэтому наименьшее значение функции $|\varphi(\xi)|$ на дуге \widehat{AD} достигается в единственной точке z_1 и равно $r(1 - r^3)$.

Считаем положительным направлением обхода дуги \widehat{LN} направление от L к N . По определению полагаем

$$F_n^{\widehat{AD}}(z) = \frac{e^{-\lambda_1 z}}{2\pi i} \int_{\widehat{AD}} \frac{e^{\xi z} d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}.$$

Область G выбираем так, что $\widehat{AD} \subset G$. Поэтому предыдущее равенство можно записать в виде

$$F_n^{\widehat{AD}}(z) = -\frac{e^{-\lambda_1 z}}{2\pi i} \int_{\widehat{DA}} e^{\xi z} e^{nS(\xi)} d\xi, \quad (2.6)$$

Так как наименьшее значение функции $|\varphi(\xi)|$ на дуге \widehat{DA} достигается в единственной точке z_1 , то максимум функции $\operatorname{Re} S(\xi)$ на этой дуге также достигается в единственной точке z_1 , которая является простой точкой перепада функции $S(\xi)$. Поэтому для нахождения асимптотики интеграла в (2.6) можно применить метод перепада (утверждение 1.2). Учитывая выбор ветви корня в (2.1) и равенство $\varphi_0 = \psi_0$, получим

$$\begin{aligned} F_n^{\widehat{AD}}(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_1)}} e^{nS(z_1)} e^{(z_1 - \lambda_1)z} (1 + O(1/n)) = \\ &= -B_n(z_1) e^{(z_1 - \lambda_1)z} (1 + O(1/n)). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Рассмотрим интеграл

$$F_n(z) = \frac{e^{-\lambda_1 z}}{2\pi i} \int_{\Pi \setminus \widehat{AD}} e^{\xi z} e^{nS(\xi)} d\xi.$$

На криволинейном прямоугольнике Π функция $|\varphi(\xi)|$ достигает наименьшее значение в единственной точке z_1 , которая принадлежит дуге \widehat{AD} .

Поэтому, рассуждая как и при доказательстве неравенства (8) в [30, гл. VII, § 45], получим, что

$$|F_n(z)| \leq \theta |e^{n(S(z_1) - \delta)}|, \quad (2.8)$$

где θ и δ – положительные постоянные. Из неравенства (2.8) следует, что при $n \rightarrow \infty$ интеграл

$F_n(z)$ по модулю экспоненциально мал по сравнению с модулем $e^{nS(z_1)}$. Значит основной вклад в асимптотику многочлена $A_n^1(z)$ вносит интеграл по дуге \widehat{DA} . Таким образом, равенство (2.4) при $p = 1$ доказано.

Перейдём к доказательству равенства (2.3). При $p = 0$ в качестве контура интегрирования C_0 в (1.2) возьмём окружность

$$\gamma = \{z : |z| = \sqrt[3]{1/4}\}.$$

Все точки $\{z_j\}_{j=1}^3$ лежат на этой окружности.

Представим γ в виде $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где

$$\gamma_1 = \{z \in \gamma : \pi/6 \leq \arg z \leq \pi/3\}, \quad \gamma_2 = \gamma \setminus \gamma_1.$$

Будем считать, что G – односвязная область, для которой $\{z_j\}_{j=1}^3 \subset G \subset \mathbb{C} \setminus \{\lambda_p\}_{p=0}^3$ и, кроме того, $\gamma_2 \subset G$, а пересечение γ_1 с дополнением G является дугой окружности.

Введём в рассмотрение интегралы

$$F_n^{\gamma_j}(z) = \frac{e^{-\lambda_j z}}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{e^{\xi z} d\xi}{[\varphi(\xi)]^n}, \quad j = 1, 2.$$

Поскольку $\gamma_2 \subset G$, то интеграл $F_n^{\gamma_2}(z)$ можно представить в виде

$$F_n^{\gamma_2}(z) = \frac{e^{-\lambda_1 z}}{2\pi i} \int_{\gamma_2} e^{\xi z} e^{nS(\xi)} d\xi.$$

Учитывая, что $\max\{\operatorname{Re} S(\xi)\}$ достигается на γ_2 только в точках z_1, z_2, z_3 , которые являются точками перепада и внутренними точками контура γ_2 , можно утверждать [30, гл. VIII, § 45, следствие 2], что асимптотика $F_n^{\gamma_2}(z)$ при $n \rightarrow \infty$ равна сумме вкладов от точек z_1, z_2, z_3 . Поэтому, учитывая, что контур γ_2 обходится против часовой стрелки, получим

$$F_n^{\gamma_2}(z) = \sum_{j=1}^3 B_n(z_j) e^{(z_j - \lambda_j)z} (1 + O(1/n)).$$

Аналогично, как и при доказательстве равенств (2.4), доказывается, что основной вклад в асимптотику $A_n^0(z)$ вносит интеграл по дуге γ_2 . Теорема 2.1 доказана.

Следствие 2.1. При $n \rightarrow \infty$

$$A_n^0(0) = \sqrt{\frac{1}{8\pi n}} \sum_{j=1}^3 z_j e^{nS(z_j)} (1 + O(1/n)), \quad (2.9)$$

$$A_n^p(0) = -\sqrt{\frac{1}{8\pi n}} z_p e^{nS(z_p)} (1 + O(1/n)), \quad p = 1, 2, 3. \quad (2.10)$$

3 Асимптотика равномерной сходимости

Из (2.10) следует, что при $p = 1, 2, 3$ и достаточно больших n $A_n^p(0) \neq 0$. При таких n определим три последовательности нормированных многочленов:

$$\tilde{A}_n^p(z) = A_n^p(z) / A_n^p(0), \quad p = 1, 2, 3.$$

Теорема 3.1. При $n \rightarrow \infty$

$$\tilde{A}_n^p(z) \Rightarrow e^{(z^p - \lambda_p)z}, \quad p = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

равномерно на любом компакте из \mathbb{C} .

Доказательство. Поточечная сходимость в (3.1) доказана в теореме 2.1. Необходимо доказать, что многочлены $\tilde{A}_n^p(z)$, $1 \leq p \leq 3$ равномерно сходятся на компактах в \mathbb{C} к соответствующим функциям. Докажем это, например, для $\tilde{A}_n^1(z)$.

Если предположить, что $|z| \leq \rho$ и $\xi \in \Pi$, то модуль $e^{\xi z}$ ограничен $M = e^{2\rho R}$. Опираясь на равенство (2.5), в этом случае получим, что

$$|A_n^1(z)| \leq \frac{M}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-n \ln|\varphi(\zeta(t))|} |\zeta'(t)| dt, \quad (3.2)$$

при условии, что контур интегрирования прежний и параметризуется вещественным параметром $t \in [\alpha, \beta]$. Обозначим через $[\alpha_1, \beta_1] \subset [\alpha, \beta]$

отрезок, который параметризует дугу \widehat{AD} . Также, как и при доказательстве теоремы 2.1 показывается, что основной вклад в асимптотику интеграла в правой части (3.2) вносит интеграл по отрезку $[\alpha_1, \beta_1]$. Поэтому при достаточно больших n

$$|A_n^1(z)| \leq \frac{M}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} e^{-n \ln|\varphi(\zeta(t))|} |\zeta'(t)| dt, \quad (3.3)$$

Для нахождения асимптотики интеграла в правой части равенства (3.3) применим метод Лапласа (утверждение 1.1). В результате получим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha_1}^{\beta_1} e^{-n \ln|\varphi(\zeta(t))|} |\zeta'(t)| dt = \\ & = \sqrt{\frac{-2\pi}{n[\operatorname{Re} S(\zeta(t))]'_{t=t_0}}} e^{n \operatorname{Re} S(\zeta_1)} |\zeta'(t_0)| (1 + O(1/n)), \end{aligned}$$

где t_0 выбрано так, что $\zeta(t_0) = z_1$. Параметризуем дугу \widehat{AD} , полагая

$$\zeta(t) = \sqrt[3]{1/4} e^{it}, \quad t \in [-\pi/3, \pi/3].$$

Тогда

$$t_0 = 0, \quad |\zeta'(t_0)| = \sqrt[3]{1/4}, \quad [\operatorname{Re} S(\zeta(t))]'_{t=t_0} = -3.$$

Поэтому при достаточно больших n

$$|A_n^1(z)| \leq M \sqrt{\frac{2}{3\pi n}} \sqrt[3]{1/4} e^{n \operatorname{Re} S(\zeta_1)}.$$

Отсюда и из равенства (2.10) при $p = 1$ следует, что $|\tilde{A}_n^1(z)| \leq 4M$. Это значит, что последовательность $\{\tilde{A}_n^1(z)\}_{n=1}^{\infty}$ по модулю равномерно ограничена в круге $D_\rho = \{z : |z| \leq \rho\}$. Тогда по теореме Витали [31, С. 371] эта последовательность равномерно сходится на любом компакте из круга D_ρ . Аналогично рассматривается случай, когда $p = 2, 3$. Теорема 3.1 доказана.

Докажем аналог теоремы 3.1 для многочленов $\tilde{A}_n^0(z)$. В начале заметим, что если продифференцировать тождество

$$A_n^0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{e^{\xi z} d\xi}{\xi^n (\xi^3 - 1)^n}, \quad (3.4)$$

l раз, то получим

$$[A_n^0(z)]^{(l)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{\xi^l e^{\xi z} d\xi}{\xi^n (\xi^3 - 1)^n}, \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (3.5)$$

При фиксированном z асимптотика интеграла в (3.5) находится также, как и асимптотика интеграла (3.4) при доказательстве теоремы 2.1, с той лишь разницей, что при применении метода перевала вместо функции $f(\xi) = e^{\xi z}$ нужно брать функцию $f(\xi) = \xi^l e^{\xi z}$. Поэтому при $n \rightarrow \infty$

$$[A_n^0(z)]_{z=0}^{(l)} = \sum_{j=1}^3 z_j^l B_n(z_j) (1 + O(1/n)). \quad (3.6)$$

Из (3.5) также следует, что

$$[A_n^0(z)]_{z=0}^{(l)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{\xi^l d\xi}{\xi^n (\xi^3 - 1)^n}, \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (3.7)$$

Интегралы в (3.7) легко вычисляются. Поэтому из (3.6) и (3.7) получаем:

$$\begin{aligned} A_{3n}^0(0) &= [A_{3n}^0(z)]_{z=0}' = 0, \\ [A_{3n}^0(z)]_{z=0}'' &= (-1)^{3n} \frac{(n)_{3n-1}}{(3n-1)!} = \\ &= \sum_{j=1}^3 z_j^2 B_{3n}(z_j) (1 + O(1/n)). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь и далее $(a)_0 = 1$, $(a)_m = a(a+1) \cdots (a+m-1)$ – символ Похгаммера. Из (3.8) следует, что $[A_{3n}^0(z)]_{z=0}'' \neq 0$. Поэтому определена последовательность

$$\tilde{A}_{3n}^0(z) = A_{3n}^0(z) / [A_{3n}^0(z)]_{z=0}''', \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Далее, из (3.6) и (3.7) следует, что $A_{3n-1}^0(0) = 0$,

$$\begin{aligned} [A_{3n-1}^0(z)]_{z=0}' &= (-1)^{3n-1} \frac{(n)_{3n-2}}{(3n-2)!} = \\ &= \sum_{j=1}^3 z_j B_{3n-1}(z_j) (1 + O(1/n)). \end{aligned}$$

Поэтому определена последовательность

$$\tilde{A}_{3n-1}^0(z) = A_{3n-1}^0(z) / [A_{3n-1}^0(z)]_{z=0}', \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Аналогично определяем последовательность

$$\tilde{A}_{3n-2}^0(z) = A_{3n-2}^0(z) / A_{3n-2}^0(0), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Это определение корректно, так как знаменатель дроби в правой части последнего равенства представим в виде

$$\begin{aligned} A_{3n-2}^0(0) &= (-1)^{3n-2} \frac{(n)_{3n-3}}{(3n-3)!} = \\ &= \sum_{j=1}^3 B_{3n-2}(z_j) (1 + O(1/n)) \end{aligned}$$

и, следовательно, не может быть равен нулю.

Теорема 3.2. При $n \rightarrow \infty$ равномерно на любом компакте в \mathbb{C}

$$\tilde{A}_{3n}^0(z) \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{16}}{3} \sum_{j=1}^3 e^{i2\pi(j-1)/3} e^{(z_j - \lambda_j)z}, \quad (3.9)$$

$$\tilde{A}_{3n-1}^0(z) \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \sum_{j=1}^3 e^{i4\pi(j-1)/3} e^{(z_j - \lambda_j)z}, \quad (3.10)$$

$$\tilde{A}_{3n-2}^0(z) \Rightarrow \sum_{j=1}^3 e^{(z_j - \lambda_j)z}. \quad (3.11)$$

Доказательство. Поточечная сходимость в (3.9)–(3.11) следует из теоремы 2.1 и следующих легко проверяемых соотношений:

$$B_n(z_j) = (-1)^n \sqrt{\frac{1}{2\pi n}} \Omega_n e^{-i2\pi(n-1)(j-1)/3},$$

$$[A_{3n}^0(z)]''_{z=0} = (-1)^{3n} \frac{3}{\sqrt[3]{16}} \cdot \sqrt{\frac{1}{6\pi n}} \Omega_{3n} (1 + O(1/n)),$$

$$[A_{3n-1}^0(z)]'_{z=0} =$$

$$= (-1)^{3n-1} \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi(3n-1)}} \Omega_{3n-1} (1 + O(1/n)),$$

$$[A_{3n-2}^0(z)]_{z=0} =$$

$$= (-1)^{3n-2} 3 \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi(3n-2)}} \Omega_{3n-2} (1 + O(1/n)),$$

где

$$\Omega_n = \frac{1}{\sqrt[3]{32}} \left(\frac{4^{4/3}}{3} \right)^n.$$

Равномерная сходимость на компактах в \mathbb{C} последовательностей нормированных многочленов в (3.9)–(3.11) следует из теоремы Витали и равномерной ограниченности последовательности $\{\tilde{A}_n^0(z)\}_{n=1}^\infty$ в круге D_ρ . Равномерная ограниченность последовательности $\{\tilde{A}_n^0(z)\}_{n=1}^\infty$ доказывается с помощью утверждения 1.1 также, как и соответствующее утверждение при доказательстве теоремы 3.1. Теорема 3.2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Boyd, J.P. Chebyshev expansion on intervals with branch points with application to the root of Kepler's equation: a Chebyshev – Hermite – Pade method / J.P. Boyd, K. Mahler // J. of Comput. and Appl. Math. – 2009. – Vol. 223, № 2. – P. 693–702.
2. Beckermann, B. How well does the Hermite – Pade approximation smooth the Gibbs phenomenon? / B. Beckermann, V. Kalyagin, Ana C. Matos, F. Wielonsky // Math. Comput. – 2011. – Vol. 80, № 274. – P. 931–958.
3. Сорокин, В.Н. Циклические графы и теорема Апери / В.Н. Сорокин // Успехи матем. Наук. – 2002. – Т. 57, № 3. – P. 931–958.
4. Bleher, P.M. Random matrices with external source and multiple orthogonal polynomials /

P.M. Bleher, A.V.J. Kuijlaars // Int. Math. Res. Not. – 2004. – Vol. 3. – P. 109–129.

5. Aptekarev, A.I. Large n limit of Gaussian random matrices with external source, Part II / A.I. Aptekarev, P.M. Bleher, A.V.J. Kuijlaars // Comm. Math. Phys. – 2005. – Vol. 259, № 2. – P. 367–389.

6. Аптекарев, А.И. Глобальный режим распределения собственных значений случайных матриц с ангармоническим потенциалом и внешним источником / А.И. Аптекарев, В.Г. Лысов, Д.Н. Туляков // ТМФ. – 2009. – Т. 159, № 1. – P. 34–57.

7. Аптекарев, А.И. Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно ортогональных многочленов / А.И. Аптекарев, В.Г. Лысов, Д.Н. Туляков // Матем. сб. – 2011. – Т. 202, № 2. – P. 3–56.

8. Mahler, K. Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I, II / K. Mahler // J. Reine Angew. Math. – 1931. – Vol. 166. – P. 118–150.

9. Mahler, K. Applications of some formulas by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms / K. Mahler // Math. Ann. – 1967. – Vol. 168. – P. 200–227.

10. Assche, W. Van. Continued fractions: from analytic number theory to constructive approximation (University of Missouri-Columbia, Columbia, MO, USA, 1998) / W. Van Assche // Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI. – 1999. – Vol. 236 – P. 325–342.

11. Chudnovsky, G.V. Hermite-Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π / G.V. Chudnovsky. In “Lecture Notes in Math”. – New York / Berlin: Springer-Verlag. – 1982. – Vol. 925. – P. 299–322.

12. Аптекарев, А.И. Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения / А.И. Аптекарев (ред.) // Сборник статей. Совр. пробл. матем. Т. 9. – М.: МИАН, 1988.

13. Калягин, В.А. Аппроксимации Эрмита-Падэ и спектральный анализ несимметричных операторов / В.А. Калягин // Матем. сборник. – 1994. – Т. 185, № 6. – С. 79–100.

14. Aptekarev, A.I. Higher-order three-term recurrences and asymptotics of multiple orthogonal polynomials / A.I. Aptekarev, V.A. Kalyagin, E.B. Saff // Constr. Approx. – 2009. – Vol. 30, № 2. – P. 175–223.

15. Hermite, C. Sur la généralisation des fractions continues algébriques / C. Hermite // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A. – 1883. – Vol. 21. – P. 289–308.

16. Hermite, C. Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Akad. Sci. (Paris). – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.

17. Mahler, K. Perfect systems / K. Mahler // Comp. Math. – 1968. – Vol. 19. – P. 95–166.

18. *Pade, H.* Memoire sur les developpements en fractions continues de la fonctial exponential // Ann. École Norm. Sup. Paris. – 1899. – Vol. 16. – № 3. – P. 394–426.
19. *Borwein, P.B.* Quadratic Hermite-Padé approximation to the exponential function / P.B. Borwein // Const. Approx. – 1986. – Vol. 62. – P. 291–302.
20. *Старовойтов, А.П.* Асимптотика квадратичных аппроксимаций Эрмита – Паде экспоненциальных функций / А.П. Старовойтов // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 1 (18). – С. 74–80.
21. *Stahl, H.* Asymptotics for quadratic Hermite-Padé polynomials associated with the exponential function / H. Stahl // Electronic Trans. Num. Anal. – 2002. – № 14. – P. 193–220.
22. *Stahl, H.* Asymptotic distributions of zeros of quadratic Hermite-Padé polynomials associated with the exponential function / H. Stahl // Constr. Approx. – 2006. – Vol. 23, № 2. – P. 193–220.
23. *Kuijlaars, A.B.J.* Asymptotique des approximants de Hermite – Padé quadratiques de la fonction exponentielle et probl`emes de Riemann-Hiebert / A.B.J. Kuijlaars, H. Stahl, W. Van Assche, F. Wielonsky // C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. – 2003. – Vol. 336. – P. 893–896.
24. *Kuijlaars, A.B.J.* Type II Hermite-Padé approximation to the exponential function / A.B.J. Kuijlaars, H. Stahl, W. Van Assche, F. Wielonsky // J. of Comput. and Appl. Math. – 2007. – Vol. 207. – P. 227–244.
25. *Kuijlaars, A.B.J.* Quadratic Hermite-Padé approximation to the exponential function: a Riemann-Hiebert approach / A.B.J. Kuijlaars, W. Van Assche, F. Wielonsky // Constr. Approx. – 2005. – Vol. 21. – P. 351–412.
26. *Kuijlaars, A.B.J.* Type II Hermite-Padé approximation to the exponential function / A.B.J. Kuijlaars, H. Stahl, W. Van Assche, F. Wielonsky // J. of Comput. and Appl. Math. – 2007. – Vol. 207. – P. 227–244.
27. *Wielonsky, F.* Riemann-Hilbert analysis and uniform convergence of rational interpolants to the exponential function / F. Wielonsky // J. Approx. Theory. – 2004. – Vol. 131. – P. 100–148.
28. *Wielonsky, F.* Asymptotics of Diagonal Hermite – Padé Approximants to e^z / F. Wielonsky // J. Approx. Theory. – 1997. – Vol. 90, № 2. – P. 283–298.
29. *Астафьева, А.В.* Асимптотические свойства многочленов Эрмита / А.В. Астафьева, А.П. Старовойтов // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 3. – С. 5–11.
30. *Сидоров, Ю.В.* Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – М.: Наука, 1989.
31. *Маркушевич, А.И.* Теория аналитических функций. Т. 1. / А.И. Маркушевич. – М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию 14.03.16.

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЕКТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ ПРОИЗВОДСТВА С ЭЛЕМЕНТАМИ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ОПАСНОСТИ

О.М. Демиденко, В.С. Смородин, Е.И. Сукач, Ю.В. Жердецкий

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

AUTOMATION OF PROJECT SIMULATION OF CONTROL SYSTEMS OF THE PROCESS OF PRODUCTION WITH THE ELEMENTS OF POTENTIAL HAZARD

O.M. Demidenko, V.S. Smorodin, E.I. Sukach, Y.V. Zherdetsky

F. Scorina Gomel State University

Излагается подход к исследованию надёжности систем управления технологическими процессами производства, включающими элементы потенциальной опасности. Описываются средства автоматизации, позволяющие построить вероятностную модель объекта и оценить в динамике надёжность реализации технологического цикла производства с учётом изменения надёжности его структурных элементов.

Ключевые слова: вероятностно-алгебраическое моделирование, надёжность, безопасность, системы управления, технологические процессы производства.

The approach to the study of reliability of process control systems of production, including the potential danger elements is presented. Automation means, allowing to build a probabilistic model of the object and to evaluate the reliability of the dynamics in the implementation of the manufacturing cycle are described, taking into account the changes in the reliability of its structural elements.

Keywords: probability-algebraic simulation, reliability, safety, control systems, production processes.

Введение

Поскольку риск принимаемых решений как в процессе проектирования самих систем управления (СУ), так в ходе реализации их управляющих воздействий на ход технологических процессов производства (ТПП) достаточно велик, имеет смысл получение точных ориентиров, в соответствии с которыми будет запланирована и организована работа исследуемых объектов. Единственным способом получения прогнозных оценок надёжности работы СУ ТПП в условиях их небезопасного функционирования является компьютерное моделирование, поскольку проведение натуральных экспериментов для получения подобной информации невозможно осуществить в принципе.

Проблема исследования СУ ТПП состоит в том, что все они функционируют в условиях воздействия случайных факторов, определяющих вероятностный характер происходящих в системах процессов, оказывающих влияние на результирующие характеристики надёжности системы. Рассмотрение процесса функционирования СУ ТПП без учёта влияния случайных воздействий ограничивает возможности расчётных методов при решении практических задач. А учёт вероятностных параметров функционирования СУ ТПП при оценке их надёжности представляет проблему, решение которой возможно лишь путём рассмотрения сложных и трудоёмких математических задач.

Ввиду структурной сложности реальных объектов исследования оценка надёжности и безопасности их функционирования с использованием существующих ручных технологий, как правило, невозможна. Поэтому значительный вклад в разработку этой проблемы предлагается получить посредством создания компьютерных математических моделей СУ ТПП и разработки средств их реализации, включающих методы, методики и программное обеспечение, которые учитывают особенности организации исследуемых объектов, варианты их структурной организации, случайный характер происходящих в них процессов, особенности взаимодействия элементов между собой и с внешней средой [1].

В статье приводится описание программно-технологического комплекса (ПТК) «ControlSyst» [2], предназначенного для автоматизации проектного моделирования СУ ТПП с элементами потенциальной опасности и реализующего расчёт вероятностных характеристик надёжности / безопасности СУ ТПП по вероятностным характеристикам их структурных элементов, включая элементы потенциальной опасности. Научную основу этого комплекса составляют методы вероятностно-алгебраического моделирования и методики, выбор которых обусловлен числом элементов (состояний) объекта и видом связей между ними, определяющим в совокупности структурную сложность исследуемого объекта [3].

Главные отличия ПТК «ControlSyst» от ранее разработанных методов, технологий и программных комплексов аналогичного назначения состоят в следующем.

1. Используется универсальный способ формализации СУ ТПП с элементами потенциальной опасности, реализующий единый подход к описанию систем различной структурной организации при оценке их разных вероятностных свойств (надёжности, безопасности, эффективности и др.), поддерживающий однотипное описание элементов, составляющих систему, и всей системы в целом, что делает прозрачным процесс формализации и способствует оперативности построения модели.

2. Введено понятие и определён аппарат вероятностно-алгебраического моделирования СУ ТПП с элементами потенциальной опасности, теоретической основой которого является аппарат стохастических алгебр, порождённых операциями, определёнными на базе симплекса $P \in R^n$, позволяющий реализовать расчётные алгоритмы при оценке вероятностных свойств систем различной структурной сложности, исключающих экспоненциальный рост сложности расчётов при увеличении числа элементов и/или состояний исследуемых объектов.

3. В рамках вероятностно-алгебраического аппарата предложена методика решения как прямой задачи, заключающейся в оценке влияния исследуемого свойства (надёжности, безопасности, эффективности и др.) элементов на свойство всей СУ ТПП с элементами потенциальной опасности в целом, так и обратной задачи, состоящей в определении вероятностных характеристик элементов, составляющих СУ, обеспечивающих заданный уровень исследуемого свойства системы.

4. В процессе вероятностно-алгебраического моделирования реализуется способ модификации структуры исследуемой СУ ТПП с элементами потенциальной опасности между итерациями моделирования, снимающий ограничение независимости элементов и позволяющий учесть эволюционное взаимное влияние изменений элементов друг на друга и на систему в целом, которое организуется путём добавления и исключения элементов модели, изменения структурных связей между элементами и изменения их текущих параметров [4]. При этом пошаговое изменение структуры моделируемой системы реализуется на основе результатов одной итерации моделирования, обеспечивающего точные вероятностные значения исследуемого свойства системы для широкого спектра исходных вероятностных параметров, что отличает его от традиционного метода имитационного моделирования с использованием процедуры Монте-Карло.

1 Методика проектного моделирования СУ ТПП

Проектирование СУ ТПП с элементами потенциальной опасности включает последовательное решение взаимосвязанных задач, решение которых позволит выбрать вариант надёжного / безопасного функционирования исследуемых объектов, которые включают в качестве элементов оборудование с вероятностными параметрами реализации своих функций. СУ ТПП представляется как многоуровневая конструкция из взаимодействующих элементов (потенциально опасных элементов), объединяемых в подсистемы различных уровней иерархии.

При формализации все элементы СУ описываются однотипным образом: выделяются состояния объектов (элементов / системы); задаются векторы вероятностей этих состояний:

$$P^{it} = (p_0^{it}, p_1^{it}, \dots, p_n^{it}),$$

$$\sum_{j=0}^n p_j^{it} = 1, i = \overline{1, m}, t = \overline{1, T}. \quad (1.1)$$

Связи между единицами технологического оборудования, обеспечивающие передачу актуальной управляющей информации, определяют структурную организацию СУ ТПП. Итогом процесса формализации СУ ТПП является графовая структура, описывающая h -ый вариант организации объекта исследования с выделением потенциально опасных элементов и их взаимосвязей на выбранном уровне детализации. Результат моделирования h -го варианта вероятностно-алгебраической модели представляется в виде изменяющегося во времени вектора вероятностей состояний надёжности СУ ТПП:

$$P^{st} = (p_0^{st}, p_1^{st}, \dots, p_n^{st}),$$

$$\sum_{j=0}^n p_j^{st} = 1, i = \overline{1, m}, t = \overline{1, T}.$$

Сформированные вектора характеризуют исследуемый показатель надёжности для различного числа и множества терминальных вершин, учитывают динамику происходящих процессов взаимодействия структурных элементов исследуемого объекта, свидетельствуют о доле вероятностей отказов системы, обусловленных разными причинами, в общей оценке вероятности отказа.

Методика заключается в поэтапном использовании одной из схем формализации [5] и последующей автоматизации создания и эксплуатации вероятностно-алгебраических моделей СУ ТПП. Первый этап направлен на формализацию СУ ТПП и проверку её структурной сложности, позволяющей определить метод её исследования. Для этого используются встроенные средства анализа в составе ПТК «ControlSyst». Второй этап заключается в использовании одной из параметризованных заготовок для создания моделей проектируемых СУ ТПП. Для СУ ТПП простой

структурной организации выбирается модель, не имеющая ограничений на число элементов и их состояний. Для СУ ТПП с элементами структурно-сложной организации используется модель, реализующая методику сведения к совокупности бинарных моделей. Для СУ ТПП большой размерности реализуется расчётный метод вероятностно-алгебраического моделирования, базирующийся на представлении исследуемого объекта в виде структуры n -полюсника и последующего вероятностно-алгебраического умножения его подструктур [6]. Следующий этап методики предполагает эксплуатацию готовой вероятностно-алгебраической модели СУ ТПП, результативность проведения которого гарантируется наличием встроенных средств расчёта сопутствующих статистических характеристик, визуализации результатов моделирования и применения процедур выбора решений.

2 Функциональные возможности программно-технологического комплекса «ControlSyst»

Программно-технологический комплекс «ControlSyst» реализует методы вероятностно-алгебраического моделирования СУ ТПП и позволяет:

- проводить построение схемы функционального моделирования СУ ТПП с элементами потенциальной опасности в виде иерархического древовидного графа;
- определять элементы потенциальной опасности в составе СУ ТПП в виде вершин или ребер графа модели;
- выбирать функции взаимодействия элементов СУ ТПП, описывающие различные варианты их временных или пространственных связей, включая логические схемы резервирования потенциально опасных элементов;
- задавать число терминальных вершин (список точек начала и завершения технологических процессов производства) из списка элементов СУ ТПП;
- определять число возможных отказов (с классификацией их по типам в зависимости от причины отказа и выделением опасных) для структурных элементов СУ ТПП;
- редактировать схему СУ ТПП с элементами потенциальной опасности и параметры надёжности (безопасности) элементов в процессе моделирования;
- присваивать начальные вероятностные параметры показателей надёжности структурным элементам модели СУ ТПП и редактировать их текущие значения;
- задавать параметры динамического изменения вероятностных показателей надёжности для структурных элементов СУ ТПП;
- выбирать тип моделирования (статическое / динамическое) и задавать время моделирования;
- рассчитывать вероятностные характеристики надёжности (безопасности) для СУ ТПП и

её структурных подсистем с учетом сложности структурной организации объекта исследования, числа элементов СУ ТПП и числа их возможных отказов, количества терминальных вершин;

- сохранять построенные модели и результаты моделирования;
- представлять результаты моделирования в виде отчётов и графиков.

Для задания исходных данных моделирования используется многооконный интерфейс программы «ControlSyst» или один из известных текстовых редакторов. Проект модели сохраняется в формате *.vtr. Результаты моделирования сохраняются в формате *.xls и могут быть обработаны и проанализированы с использованием библиотеки (PS.OPTIM) [7].

3 Интерфейс программно-технологического комплекса «ControlSyst»

Комплекс «ControlSyst» реализован в среде Borland Delphi Professional, Version 10.0 на языке программирования Delphi 7.0.

После запуска программы «ControlSyst» автоматически создаётся пустой проект (*.vtr) и перед пользователем появляется окно создания графической схемы организации СУ ТПП, включающее главное горизонтальное меню, рабочую область для формирования схемы модели и управляющие компоненты, позволяющие настроить интерфейс инструментария (выбрать язык, способ формирования модели и др.) и задать параметры моделирования. С использованием библиотеки процедур TeeChart Pro v7.06, используемой при реализации программно-технологического комплекса «ControlSyst», в автоматическом режиме происходит формирование модели СУ ТПП простой графовой структуры (рисунок 3.1).

Представление СУ ТПП в виде древовидной структуры при автоматизации задач исследования вероятностных характеристик её функционирования позволяет:

- наглядно представить связи между выделенными элементами системы;
- определить параметры терминальных узлов;
- установить уровни иерархии элементов системы;
- обеспечить замещение функциональных связей между элементами системы вероятностными вычислениями;
- при машинной реализации метода использовать эффективные алгоритмы обхода узлов дерева, сложность которых зависит от количества уровней дерева, т. е. приблизительно от $\log_2 n$ (n – количество узлов).

В процессе создания модели может быть использована одна из параметризованных заготовок в составе библиотеки (LIB.PALS) [6], с целью настройки которой (указания числа состояний элементов модели, выбора вида функций, описывающих взаимодействие элементов СУ ТПП, задания времени моделирования для случая оценки

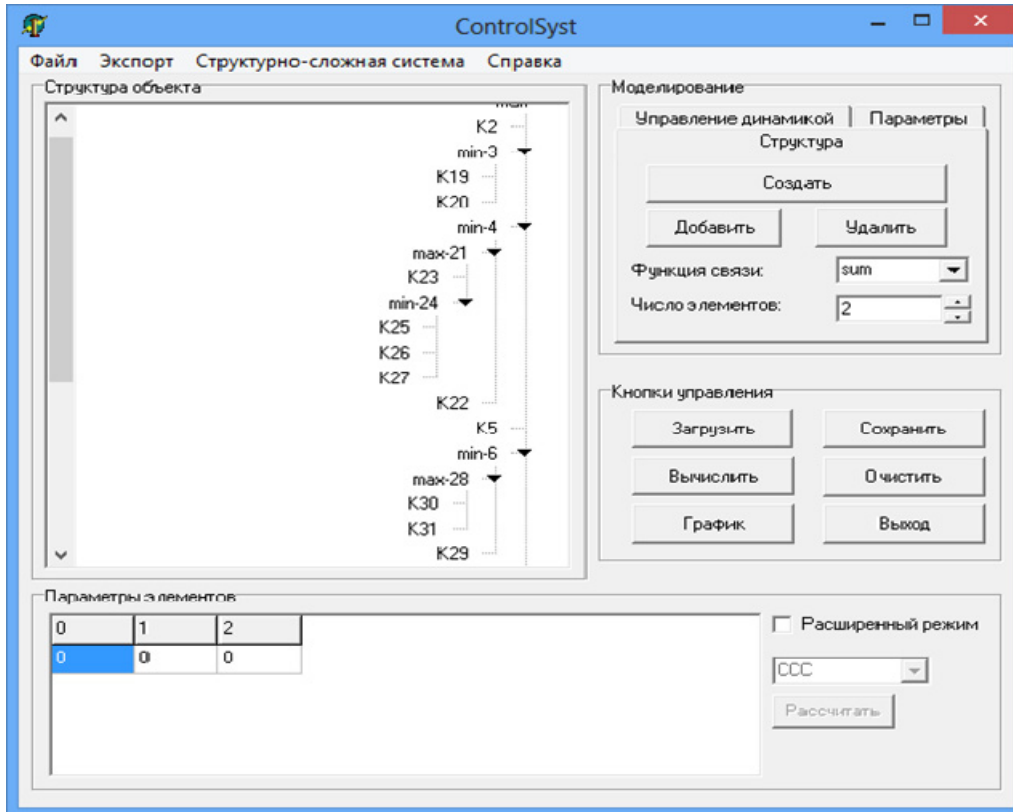


Рисунок 3.1 – Окно отражающее структуру модели СУ ТПП

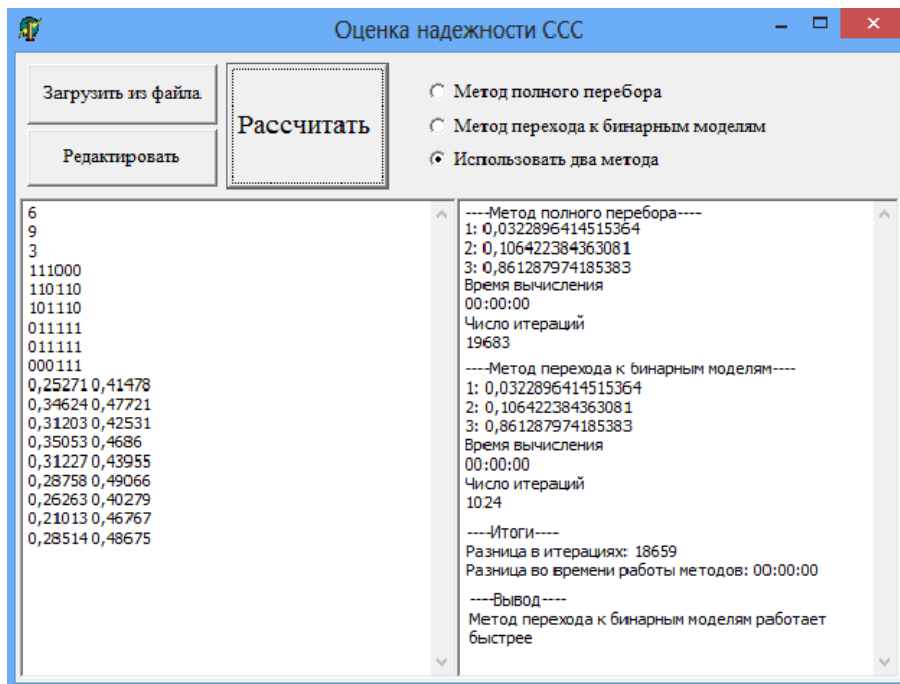


Рисунок 3.2 – Окно расчёта фрагмента СУ ТПП структурно-сложной организации

объекта в динамике) используется набор управляющих компонентов программы, которые размещены в области *Моделирование*, слева от рабочей области инструментария. Для формирования графа модели используются управляющие компоненты области *Структура*, позволяющие редактировать структуру параметризованной

модели. Управляющие компоненты вкладки *Параметры* позволяют задать параметры моделирования (число состояний элементов, число знаков после запятой для вероятностей состояний и др.), которые фиксируются в базе данных инструментария и используются для проведения расчётов.

В составе инструментария реализованы методики, расширяющие возможности аппарата вероятностно-алгебраического моделирования: методика сокращения размерности модели, методика перехода к бинарным моделям, методика интерпретации объекта в виде многосвязной структуры – позволяющие оценить надёжность (безопасность) фрагментов СУ ТПП, имеющих структурно-сложную организацию. Возможность проведения моделирования с использованием оптимизирующих методик реализуется в *Расширенном режиме*, переход в который реализуется путём настройки области *Параметры элементов* либо с использованием команды *Структурно-сложная система* главного меню инструментария (используется в том случае, когда СУ ТПП имеет структурно-сложную организацию).

В окне *Оценка надёжности ССС* (рисунок 3.2) имеется возможность загрузить исходные параметры моделирования из файла. Управляющий компонент *Редактировать* позволяет изменить исходные данные моделирования, задающие структуру фрагмента и вероятностные параметры элементов, сохранить их и далее использовать для проведения модельного эксперимента.

Расчет результирующих вероятностных характеристик фрагмента СУ ТПП структурно-сложной организации реализуется управляющим компонентом *Рассчитать*, запускающим один из расчётных алгоритмов: полного перебора; перехода к бинарным моделям. Результаты расчёта и сравнительные характеристики работы двух алгоритмов отражаются в левой рабочей области.

В очередном окне *Оценка надёжности n-полюсников* (рисунок 3.3) предоставляется возможность использовать одну из схем формализации объекта, указав с использованием групп переключателей способ описания исследуемой

СУ ТПП: *Матрица смежности / Списки смежности; Трёхполюсник / Четырёхполюсник; Элементы-рёбра / Элементы-вершины*. Рабочая область окна *Параметры надёжности элементов* позволяет задать параметры моделирования, отражающие исследуемый вариант структурной организации СУ ТПП и параметры надёжного функционирования её элементов (ТХО) и зафиксировать их в базе данных инструментария.

Рабочее окно *Результаты оценки надёжности системы* предназначено для вывода результирующих значений оценок вероятностей состояний надёжности СУ ТПП для выбранной схемы формализации.

Для организации динамического моделирования СУ ТПП используется область *Моделирование* и вкладка этой области *Управление динамикой* (рисунок 3.1), последовательность диалоговых окон которой позволяют определить опции моделирования. Завершающим звеном цепочки настроек является определение настроек динамического моделирования и корректирующего управления (рисунок 3.4).

В этом окне можно выбрать виды изменения вероятностных параметров надёжности элементов СУ ТПП, используя управляющие компоненты области *Виды моделирования* и подобласти *Параметры динамики*. В области *Виды моделирования* реализованы возможности редактирования шага изменения вероятностных параметров надёжности элементов (вкладка *Статический*), функции изменения параметров надёжности элементов (вкладка *Функциональный*), параметров изменения вероятностных параметров элементов в соответствии со статистическими данными, полученными в результате наблюдения за объектом исследования на протяжении установленного интервала времени (вкладка

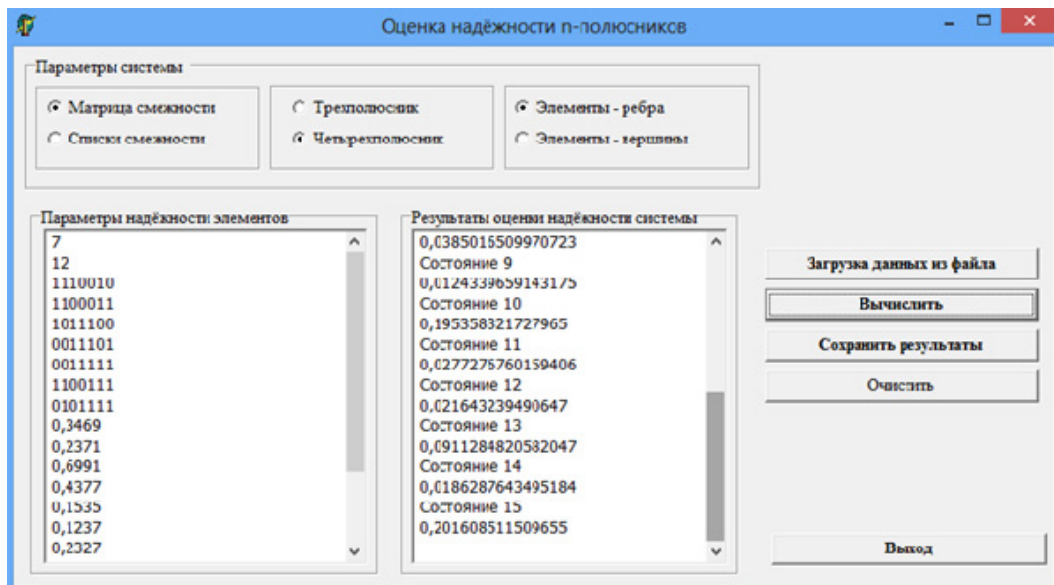


Рисунок 3.3 – Окно для выполнения расчёта надёжности СУ ТПП n-полюсника

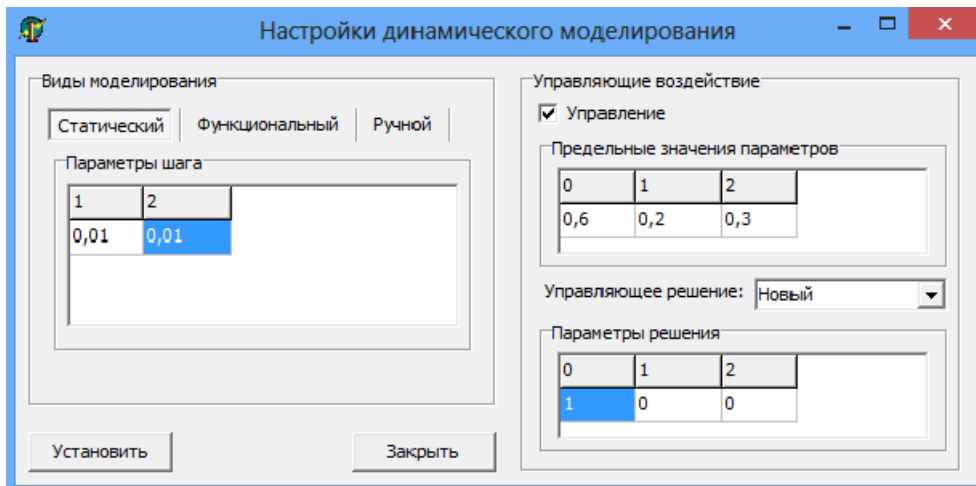


Рисунок 3.4 – Окно установок динамического моделирования СУ ТПП

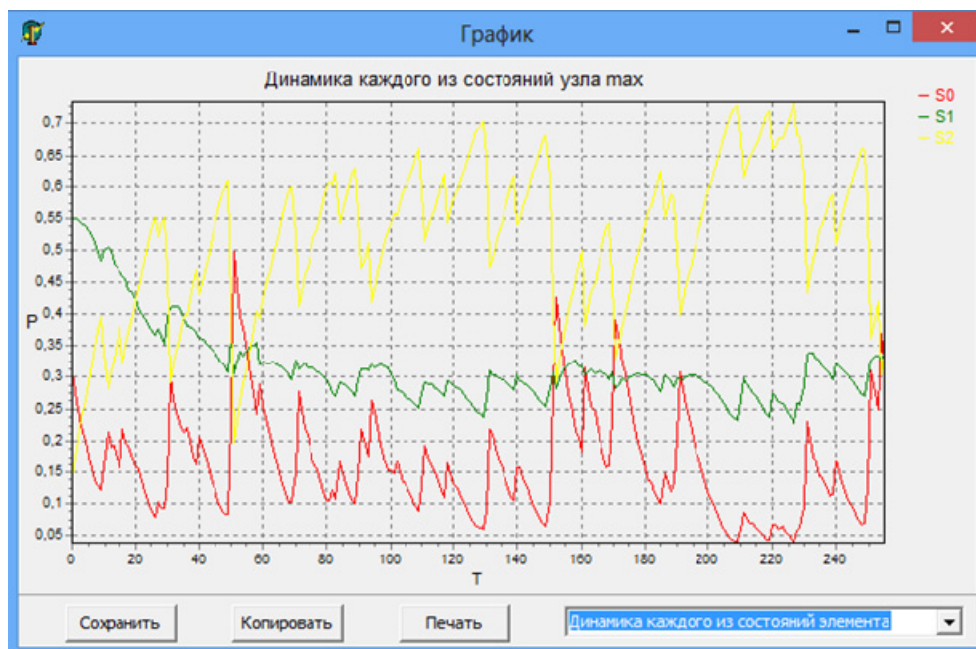


Рисунок 3.5 – Окно графической интерпретации результатов динамического моделирования СУ ТПП

Ручной). Для организации корректирующих управляющих воздействий используется область *Управляющее воздействие*, в которой ставится флажок в поле *Управление* для его активизации. После чего предоставляется возможность установить параметры предельных значений в области *Предельные значения параметров* для каждого из состояний элемента. Наконец, последним шагом в цепочке задания параметров динамического управляющего моделирования является указание управляющего воздействия, вид которого выбирается из выпадающего списка поля *Управляющее решение*: вектор вероятностей заменяется на новый (*Новый*), вектор вероятностей остаётся исходным (*Исходный*), пользователю предоставляется возможность изменить вектор вероятностей состояний надёжности потенциально опасного элемента (*Пользовательский*).

При этом в области *Параметры решения* отображаются изменённые значения вектора вероятностей. Кнопка *Установить* в нижней части экрана проверяет корректность установки параметров в окне *Настройки динамического моделирования* и завершает задание параметров динамического моделирования для выбранного элемента дерева.

Результаты моделирования отображаются в нижней части экрана главного окна программы *Параметры элементов* и отображаются в окне графической интерпретации результатов (рисунок 3.5) при нажатии кнопки *График* в области *Кнопки управления* главного окна программы.

В диалоговом окне отображения предусмотрена возможность графического отображения вероятностей состояний надёжности системы (элемента) в динамике (рисунок 3.5) и статического

представления вероятностей результирующих состояний надёжности в виде круговой диаграммы.

Пункт меню *Экспорт* главного окна программы позволяет сохранить результаты моделирования для всех элементов модели СУ ТПП в формате MS Excel.

4 Динамическое моделирование надёжности реализации технологического цикла производства

Для иллюстрации работы ПТК «Control-Syst» использовалась модель ТПП (рисунок 4.1), включающая совокупность технологических операций (ТХО), последовательное выполнение которых обеспечивало реализацию технологического цикла производства с элементами потенциальной опасности.

Характеристиками надёжности элементов при оценке надёжности организации ТПП служили вероятности отказов, возникающие в ходе выполнения ТХО. Рассматривались три состояния надёжности элементов: S_1 – надёжное выполнение операции; S_2 – отказы при выполнении ТХО; S_3 – опасные отказы при выполнении ТХО. Первые элементы векторов (1.1) определяли вероятность безотказного выполнения i -ой ТХО, вторые указывали на вероятность отказов при выполнении ТХО, не влияющие на надёжность выполнения последующих ТХО; третьи составляющие

вектора (1.1) задавали вероятность опасного отказа, возникающего при выполнении ТХО.

В виду того, что модель служила лишь примером, позволяющим продемонстрировать решение типовой задачи, то исходные данные (значения векторов (1.1)) были выбраны произвольным образом.

В процессе моделирования требовалось получить значения векторов вероятностей ТПП с учетом изменения структуры технологического цикла. Предполагалось, что участки цепочки технологического процесса производства ТХО₂₂ и ТХО₃₆ при достижении предельных значений вектора вероятностей их состояний (0,999; 0,0007; 0,0003) замещались в процессе моделирования на допустимые схемы резервирования (рисунок 4.2), после чего моделирование продолжалось.

В результате моделирования было зафиксировано, что на 91 шаге произошло замещение участка ТХО₃₆, а на 101 шаге изменилась структура участка ТХО₂₂. Далее структура ТПП не изменялась.

Значения вероятностей надёжной реализации цикла ТПП представлены на рисунке 4.3, а значения вероятностей возникновения опасного отказа в процессе реализации ТПП – на рисунке 4.4.

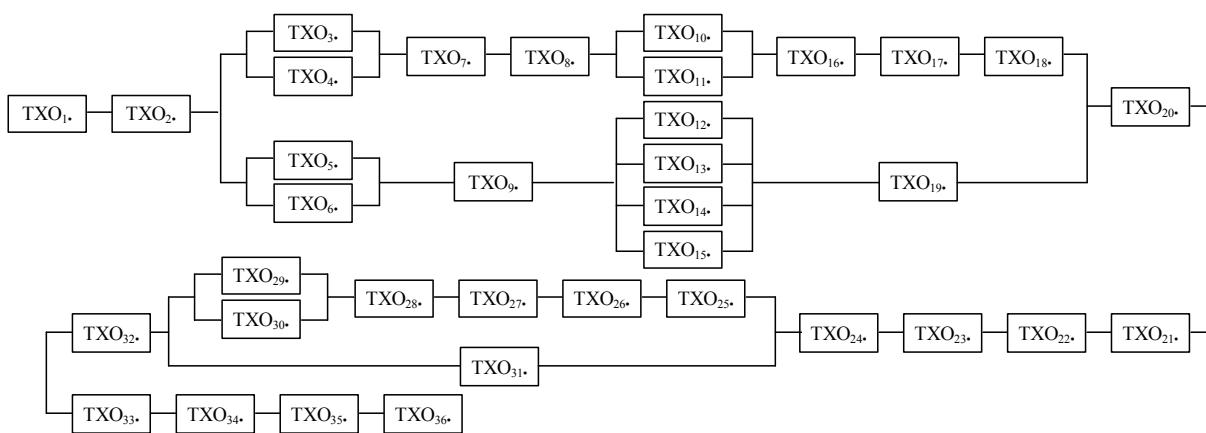


Рисунок 4.1 – Схема технологического цикла производства

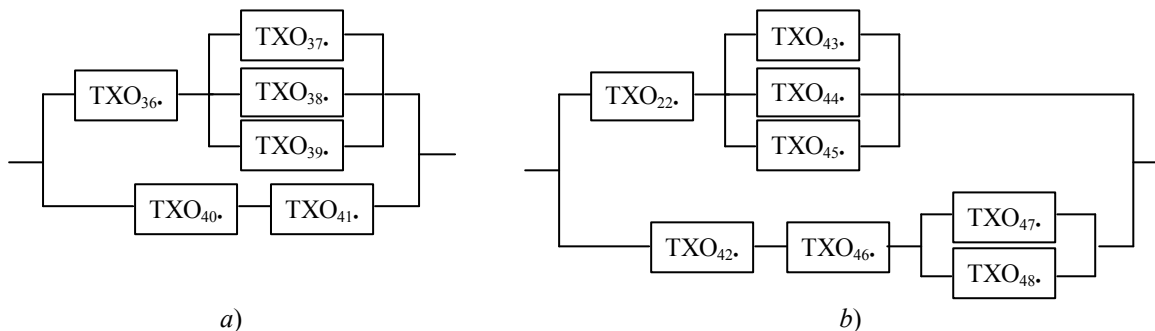


Рисунок 4.2 – Схемы резервирования участков технологического процесса производства (ТХО₂₂ – схема а); ТХО₃₆ – схема б)

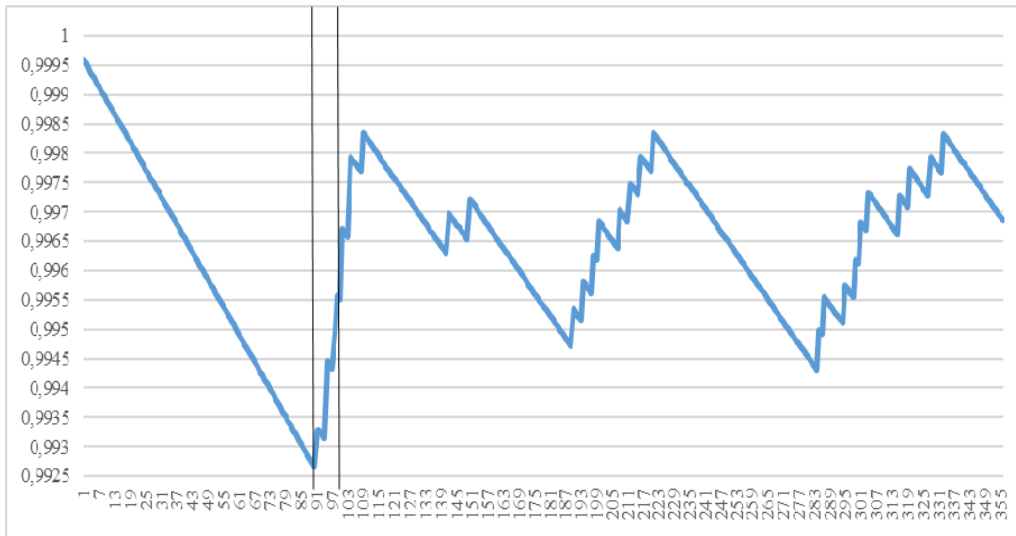


Рисунок 4.3 – Изменение вероятностей надёжной реализации цикла технологического процесса производства

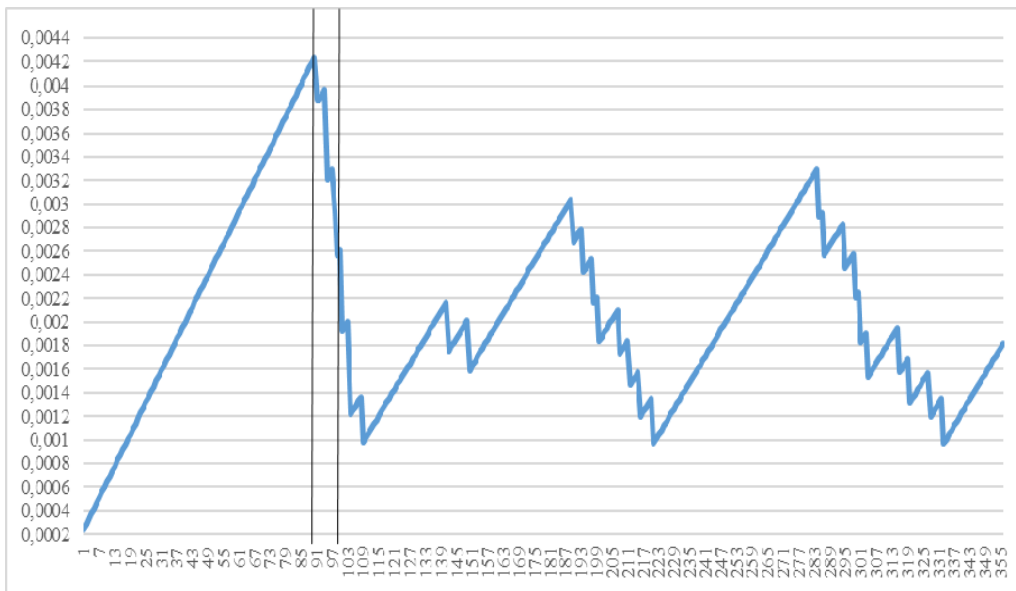


Рисунок 4.4 – Изменение вероятностей возникновения опасного отказа в процессе реализации цикла технологического процесса производства

Как видно из рисунков вероятность надёжной реализации ТПП линейно уменьшается на интервале [1; 91], после этого на интервале [91, 101] наблюдается значительный рост вероятности надёжной реализации цикла (до значения 0,9985). Обратная картина наблюдается для состояния опасного отказа в процессе реализации ТПП: вероятность его линейно возрастает на интервале [1; 91] и резко снижается при переходе к схемам резервирования. На интервале [101; 355] наблюдается неоднократные поступательное снижение значения вероятности надёжной реализации ТПП (до значения 0,994), обусловленное снижением надёжности реализации совокупности ТХО. По достижении локальных минимумов реализуется обновление параметров

ТХО, значения вероятностей надёжного выполнения которых достигли предельных значений, что приводит к возрастанию значений вероятностей надёжной реализации цикла ТПП в целом.

Заключение

Программно-технологический комплекс «ControlSys» может быть использован в ходе проектного моделирования надёжности (безопасности) функционирования СУ ТПП с элементами потенциальной опасности для решения следующих классов задач:

- проектного моделирования надёжных / безопасных СУ ТПП, включающего рассмотрение различных схем резервирования и ликвидации последствий сбоев и аварий, возможных в ходе

выполнения ТХО с использованием технологического оборудования;

– синтеза оптимальной структуры СУ ТПП с учетом характеристик надёжности / безопасности их элементов и их взаимодействия;

– оценки изменения надёжности / безопасности организации СУ ТПП в результате изменения их структурной организации и параметров надёжности элементов;

– расчёта вероятностных параметров надёжности элементов, обеспечивающих заданный уровень надёжности / безопасности СУ ТПП установленной структурной организации;

– оценки эффективности организации функционирования СУ ТПП.

Применение ПТК «ControlSyst возможно так же в ходе реализации цикла технологического процесса производства» как инструмента оперативного контроля и управления самим процессом функционирования ТПП, при котором моделирование позволяет корректировать технологический процесс производства с учётом особенностей его протекания, путём формирования единственно правильного решения для текущего момента времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Максимей, И.В.* Проблемы теории и практики моделирования сложных систем / И.В. Максимей, О.М. Демиденко, В.С. Смородин; М-во образования РБ, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2015. – 263 с.

2. *Программно-технологический комплекс автоматизации проектного моделирования систем управления технологическими процессами производства с элементами потенциальной опасности «ControlSyst»:* свидетельство о регистрации компьютерной программы № 773 / Е.И. Сукач,

Ю.В. Жердецкий. – Минск: НЦИС, 2015. – Заявка № С20150031. – Дата подачи: 15.04.15.

3. *Сукач, Е.И.* Вероятностно-алгебраическое моделирование сложных систем графовой структуры / Е.И. Сукач; М-во образования РБ, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2012. – 224 с.

4. *Сукач, Е.И.* Методика анализа надёжности систем управления технологическими процессами производства с элементами потенциальной опасности / Е.И. Сукач // Юбилейная научно-практическая конференция, посвященная 85-летию Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины, 17 июня 2015 года. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины. – 2015. – Ч. 4. – С. 165–168.

5. *Способ формализации объектов графовой структуры с вероятностными параметрами функционирования* / Е.И. Сукач, Д.В. Ратобильская, Ю.В. Жердецкий, Г.А. Мальцева // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2012. – № 5 (74). – С. 195–202.

6. *Анализ надёжности электроэнергетических систем на основе вероятностно-алгебраического моделирования* / О.М. Демиденко, Е.И. Сукач, Д.В. Ратобильская, Ю.В. Жердецкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 2 (13). – С. 87–94.

7. *Система вероятностно-алгебраического моделирования «Probability Algebraic Simulation (PALS)»:* свидетельство о регистрации компьютерной программы № 450 / Е.И. Сукач, Д.В. Ратобильская. – Минск: НЦИС, 2012. – Заявка № С20120049. – Дата подачи: 25.06.2012.

Поступила в редакцию 06.05.16.

УДК 681.004.6

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР АЛГОРИТМОВ СЖАТИЯ ЦИФРОВОЙ ИНФОРМАЦИИ

В.В. Кириченко

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, Минск

ANALYTICAL REVIEW OF COMPRESSION ALGORITHMS OF DIGITAL INFORMATION

V.V. Kirichenko

United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences, Minsk

Приведен краткий обзор и анализ существующих алгоритмов сжатия цифровой информации. Рассматриваются преимущества и недостатки алгоритмов сжатия данных в зависимости от вида цифровой информации. Указываются программные продукты, реализованные на основе рассматриваемых алгоритмов.

Ключевые слова: информация, сжатие, сжатие данных, сжатие информации, сжатие изображений, алгоритм, алгоритм сжатия, архиватор, контекстное моделирование, кодирование информации.

A brief review and analysis of existing algorithms for compression of digital information are presented. The advantages and disadvantages of data compression algorithms depending on the type of digital information are considered. The software implemented on the basis of the considered algorithms is specified.

Keywords: information, compression, data compression, image compression, algorithm, compression algorithm, archive program, context modeling, encoding of information.

Введение

Развитие электроники, компьютерных и информационных технологий в наши дни идет высоким темпом. Создается инновационное оборудование, позволяющее проводить очень точные исследования в различных областях науки и медицины, которое оперирует огромным объемом данных. К примеру, архив снимков телескопа «Хаббл», накопленный за 15 лет, составляет примерно 50 терабайт, архив диагностических исследований в Минском консультационно-диагностическом центре, накопленный за 5 лет, составляет примерно 3,5 терабайт, а средний объем одного исследования компьютерной томографии в учреждениях здравоохранения Республики Беларусь составляет примерно 500 мегабайт. В медицине важную роль играют архивы исследований, которые позволяют проследить тенденцию развития заболевания конкретного пациента, изучить похожие случаи и т. п. Все это приводит к тому, что объемы данных, которые необходимо хранить и обрабатывать, растут в геометрической прогрессии.

Таким образом, проблема хранения и обработки больших объемов данных очень актуальна на сегодняшний день.

В данной статье рассматриваются универсальные и специфические алгоритмы сжатия данных, которые могут быть применены для сжатия любого вида информации. Рассматриваются преимущества и недостатки тех или иных алгоритмов сжатия в зависимости от типа данных.

1 Универсальные алгоритмы сжатия

1.1. Начало развития теории сжатия данных. Теория сжатия данных стала развиваться, как только ученые стали задумываться о количественной составляющей информации. Первые шаги в этом направлении сделал Ральф Вinton Лайон Хартли в 1928 году. Полученный им результат [1] можно сформулировать следующим образом: если во множестве, состоящем из N элементов, выделен некоторый элемент x , принадлежащий этому множеству, то для того, чтобы найти x , необходимо получить количество информации по формуле: $I = \log_2 N$. Эту формулу обычно называют формулой Хартли.

Однако основной вклад в изучение вопросов сжатия данных внес основатель теории информации Клод Шеннон. Он стал изучать вопрос взаимосвязи между семантикой и синтаксисом, т.е. каким образом можно уменьшить длину информации, сохраняя при этом ее значение. Исследования Шеннона в этом направлении привели к созданию теории кодирования информации [2]. В основе теории кодирования лежит следующая идея: если представить часто встречающиеся элементы короткими кодами, а редко встречающиеся коды длинными кодами, то для хранения такого блока данных требуется меньший объем памяти, чем если бы все элементы представить кодами одинаковой длины. Точная связь между вероятностями и кодами установлена в теореме Шеннон о кодировании источника: элемент s_i вероятность появления которого равняется

$p(s_i)$, выгоднее всего представлять $-\log_2 p(s_i)$ битами. Если при кодировании размер кода всегда в точности получается равным $-\log_2 p(s_i)$ битам, то в этом случае длина закодированной последовательности будет минимальна для всех возможных способов кодирования. Если распределение вероятностей $F = \{p(s_i)\}$ неизменно, и вероятность появления элементов независима, то мы можем найти среднюю длину кодов как среднее взвешенное:

$$H = -\sum_i p(s_i) \cdot \log_2 p(s_i).$$

Это значение также называется энтропией распределения вероятностей F или энтропией источника в заданный момент времени.

1.2. Алгоритм Хаффмана. Эта базовая теория лежит в основе исследований Дэвида Хаффмана [3], который перенес теоретические исследования в практическую область информационных технологий. Алгоритмы сжатия Хаффмана и его варианты оставались наиболее популярными методами сжатия данных вплоть до 1977 года, когда Абрахам Лемпели и Якоб Зив предложили совершенно иной подход к проблеме сжатия данных [4]. Они выдвинули идею формирования «словаря» общих последовательностей данных. При этом сжатие данных осуществляется за счет замены последовательности символов соответствующими кодами из словаря.

1.3. Алгоритмы семейства LZ. Результатом исследований Лемпеля и Зива стали алгоритмы сжатия данных LZ77 [4], [5] и LZ78 [5]. Однако, у этих алгоритмов был существенный недостаток: много времени тратится на создание эффективного словаря. Решение этой проблемы было предложено Терри Велчем, который расширил алгоритм LZ78, создав новый вариант, известный как LZW [6].

Алгоритмы семейства LZ получили широкое распространение благодаря своей универсальности. На сегодняшний день существует большое количество модификаций: LZMW (1984 г.) [18], LZB (1987 г.) [19], LZH (1987 г.) [7], LZFG (1987 г.) [20], LZBW (1991 г.) [21], LZRW1 (1991 г.) [22], LZR (1981 г.) [23], LZR (1995 г.) [24], LZ77-PM (1995 г.) [25], LZFG-PM (1995 г.) [25], LZW-PM (1995 г.) [25].

Одной из значимых модификаций алгоритмов семейства LZ была комбинация алгоритма LZ77 и алгоритма Хаффмана, которую предложил Фил Кац [7].

Архиваторы, использующие алгоритмы сжатия данных семейства LZ: 7-Zip, ACE, ARJ, ARJZ, CABARC, Imp, JAR, PKZIP, RAR, WinZip, Zip.

В таблице 1.1 [8] представлены результаты сравнения некоторых архиваторов по степени сжатия файлов набора CalgCC [17], являющегося международным эталоном для исследования алгоритмов сжатия данных

Таблица 1.1

Имя файла	ARJ	PKZIP	ACE	RAR	CABARC	7-Zip
Bib	3.08	3.16	3.38	3.39	3.45	3.62
Book1	2.41	2.46	2.78	2.80	2.91	2.94
Book2	2.90	2.95	3.36	3.39	3.51	3.59
Geo	1.48	1.49	1.56	1.53	1.70	1.89
News	2.56	2.61	3.00	3.00	3.07	3.16
Obj1	2.06	2.07	2.19	2.18	2.20	2.26
Obj2	3.01	3.04	3.39	3.38	3.54	3.96
Paper1	2.84	2.85	2.91	2.93	2.99	3.07
Paper2	2.74	2.77	2.86	2.88	2.95	3.01
Pic	9.30	9.76	10.53	10.39	10.67	11.76
Progc	2.93	2.94	3.00	3.01	3.04	3.15
Progl	4.35	4.42	4.49	4.55	4.62	4.76
Progp	4.32	4.37	4.55	4.57	4.62	4.73
Trans	4.65	4.79	5.19	5.23	5.30	5.56
Итого	3.47	3.55	3.80	3.80	3.90	4.10

1.4. Алгоритмы сжатия данных, основанные на методе контекстного моделирования. Одновременно с попытками улучшить эффективность алгоритмов семейства LZ, проводились исследования в поисках новых подходов к сжатию данных. Так, в 1971 году Риссанен и Лэнгдон предложили метод контекстного моделирования [9]. Предложенный метод опирается на парадигму сжатия с помощью универсального моделирования и кодирования. Свое развитие метод контекстного моделирования получил в исследованиях Клири Уиттена, который предложил использовать технику предсказания по частичному поведению (PPM) [10]. Дальнейшие исследования в рамках PPM были направлены на оценку вероятности ухода, адаптивные методы. Одной из первых попыток улучшения оценки вероятности ухода был метод Z, описанный Чарльзом Блумом [11], и получивший название PPMZ. Современным адаптивным методом является подход, предложенный Дмитрием Шкариным. Метод получил название PPMd [12].

Таблица 1.2

	CM	HA	PPMY	RKUC	PPMN	PPMd	PPMonstr
Bib	3.01	4.12	4.55	4.55	4.57	4.62	4.76
Book1	2.99	3.27	3.72	3.62	3.64	3.65	3.74
Book2	3.19	3.74	4.35	4.30	4.31	4.35	4.49
Geo	1.74	1.72	1.74	2.12	1.96	1.84	1.92
News	1.69	2.19	2.09	2.25	2.32	2.26	2.29
Obj1	2.37	3.39	3.59	3.51	3.59	3.65	3.74
Obj2	2.32	3.07	3.46	3.79	3.65	3.62	3.79
Paper1	2.37	3.39	3.59	3.51	3.59	3.65	3.74
Paper2	2.61	3.43	3.67	3.57	3.62	3.67	3.77
Pic	9.30	10.00	10.26	10.67	11.01	10.53	11.43
Progc	2.27	3.36	3.51	3.45	3.54	3.60	3.70
Progl	3.07	4.68	5.30	5.37	5.26	5.44	5.76
Progp	2.99	4.74	5.33	5.30	5.19	5.26	5.76
Trans	2.96	5.23	6.30	6.40	6.17	6.35	6.84
Итого	2.62	3.07	4.00	4.39	4.46	4.46	4.70

Архиваторы, использующие методы контекстного моделирования: HA, CM, PPMY, RKUC, PPMN, PPMd и PPMonstr.

В таблице 1.2 [8] представлены результаты сравнения некоторых архиваторов по степени сжатия файлов набора CalgCC [17].

1.5. Алгоритмы сжатия данных, основанные на предварительном преобразовании. Еще одним подходом к сжатию данных является подход, основанный на предварительном преобразовании информации для последующего более эффективного сжатия. Впервые такой подход был опубликован 10 мая 1994 г. [13]. Его авторами являются Дэвид Уиллер и Майк Барроуз. Алгоритм был назван преобразованием Барроуза-Уиллера (BWT). Особенностью преобразования является тот факт, что обычные алгоритмы сжатия, примененные на преобразованном массиве данных, работают не так эффективно, как алгоритмы, специально разработанные для сжатия преобразованных данных. Среди методов, разработанных для сжатия данных после преобразования Барроуза-Уиллера, можно выделить следующие: RLE (кодирование длин серий) [14], MTF (метод перемещения стопки книг) [15], DC (кодирование расстояний) [16], Метод Хаффмана [3], Арифметическое кодирование [26]–[33].

Таблица 1.3 – Последовательность применения методов, совместно с BWT

Шаг	Используемый алгоритм	
1	Кодирование длин серий (необязательно)	
2	Преобразование Барроуза-Уиллера	
3	Перемещение стопки книг	Кодирование расстояний
4	Кодирование длин серий (необязательно)	
5	Метод Хаффмана	Арифметическое кодирование

Таблица 1.4

Архиватор, версия и параметры	Р-р сжатого файла, байт	Время сжатия, с	Время разжатия, с
SBC 0.860 m3a	126,811	0.69	0.42
DC 0.99.298b	127,377	0.38	0.18
ARCb2	128,685	0.38	0.23
YBS 0.03-m256k	130,356	0.37	0.24
Compressiab256	131,737	0.61	0.40
BA1.01b5-24-r	132,651	0.41	0.30
Zzip 0.36-al	132,711	0.65	0.40
DC 0.99.298b-a	133,825	0.34	0.23
YBS 0.03e	133,915	0.37	0.25
BWC/PGCC 0.99 m600k	134,183	0.33	0.19
bzip2/ PGCC1.0b7-6	134,932	0.44	0.14
Szipl.12b21 o0	134,945	0.90	0.15
IMP1.10-2ul000	135,431	0.30	0.12
ICTUC1.0	136,842	0.41	0.29
BA1.01b5-24-z	137,566	0.49	0.31
Szipl.12b21o4	141,784	0.17	0.18

Архиваторы, использующие методы BWT: SBC, DC, ARC, YBS, Compressia, BA, Zzip, DC, YBS, BWC/PGCC, bzip2/PGCC, szip, IMP, ICTUC.

В таблице 1.4 [8] представлены результаты сравнения некоторых архиваторов по степени сжатия файла, содержащего смесь текстовых и бинарных данных, размером 427,520 байт.

1.6. Сравнительный анализ методов сжатия данных. В таблице 1.5 [8] приведен сравнительный анализ трех методов сжатия данных в зависимости от типа данных.

2 Алгоритмы сжатия изображений

Все существующие алгоритмы сжатия графических данных делятся на две категории [14]:

1. Сжатие с потерями информации. Т. е. компрессия достигается за счет удаления мало значимой информации, не искажающей общей картины. После сжатия с потерями, изображение не может быть восстановлено в исходное состояние.

2. Сжатие без потерь информации. Т. е. компрессия достигается с сохранением всей информации об изображении, а значит изображение может быть восстановлено в исходное состояние.

Алгоритмы сжатия с потерями имеют более широкое распространение, чем алгоритмы сжатия без потерь, поскольку:

- алгоритмы сжатия с потерями позволяют обеспечить более высокий коэффициент сжатия;

- определен перечень коэффициентов, при которых потерянная информация при сжатии не заметна на уровне человеческой интерпретации [26].

К недостаткам алгоритмов сжатия с потерями можно отнести следующие:

- алгоритмы сжатия с потерями не могут быть применены на информации, для которой основным критерием служит точность восстановления (текстовая информация, бинарные файлы, медицинские изображения и др.);

- с каждой следующей стадией компрессии и декомпрессии, качество изображения заметно ухудшается.

Далее рассмотрим алгоритмы сжатия графических данных без потерь.

2.1. RLE. Базовым методом сжатия графической информации без потерь является метод кодирования длин серий (RLE) [14]. Суть алгоритма в том, что повторяющиеся символы могут быть заменены цифрой, которая указывает количество повторов, и самим символом. Наилучший результат метод RLE достигает на изображениях, содержащих большие площади смежного цвета (например, монохромные изображения). Но на сложных цветных изображениях RLE может дать обратный результат, увеличив размер файла.

2.2. LZ. Также к изображениям могут быть применены алгоритмы семейства LZ и метод Хаффмана, которые были описаны выше. Эти алгоритмы относятся к группе алгоритмов сжатия без потерь информации.

Таблица 1.5 – Сравнительный анализ трех методов сжатия данных в зависимости от типа данных

Параметр	Метод	Однородные данные (текст)	Однородные данные с большой избыточностью (исходные код программ)	Неоднородные данные	Данные с малой избыточностью
Степень сжатия	Контекстное моделирование (PPM)	Высокая	Высокая	Высокая	Невысокая
	Кодирование (LZ)	Высокая	Высокая	Без фрагментирования – низкая	
	Преобразование BWT	Низкая	При большом количестве длинных повторов – высокая	Высокая	
Скорость кодирования	Преобразование BWT	Высокая	Средняя	Высокая	Высокая
	Контекстное моделирование (PPM)	При большом порядке модели – самая низкая; при небольшом – немного быстрее BWT	Если использовать сложное моделирование – высокая	Средняя	Низкая
	Кодирование (LZ)	средняя, а при малом словаре – самая высокая	средняя, а при малом словаре – самая высокая	Высокая	Высокая
Скорость декодирования	Кодирование (LZ)	Примерно в 10 раз выше скорости кодирования			
	Контекстное моделирование (PPM)	На 5–10% медленнее кодирования			
	Преобразование BWT	В 2–4 раза выше скорости кодирования			
Требуемый объем памяти при сжатии	Преобразование BWT	Постоянный при сжатии данных любого типа			
	Контекстное моделирование (PPM)	Варьируется в широких пределах, в зависимости от сложности моделирования и порядка модели; вырастает для очень неоднородных данных; в зависимости от структуры хранения контекстной информации может увеличиваться для мало избыточных данных			
	Кодирование (LZ)	Пропорционально размеру словаря			
Требуемый объем памяти при разжатии	Кодирование (LZ)	Минимальный			
	Контекстное моделирование (PPM)	Максимальный			
	Преобразование BWT	Средний			

2.3. CCITT.4 Group 3 и CCITT.6 Group 4. Другой группой алгоритмов сжатия графической информации без потерь являются алгоритмы CCITT.4 Group 3 [27] и CCITT.6 Group 4 [28]. Эти алгоритмы были предложены Международным консультативным комитетом по телефонии и телеграфии (CCITT) в 1985 г. В основном они применяются для кодирования и сжатия 1-битных (монохромных) изображений (факсимильные сообщения). К достоинствам данных алгоритмов можно отнести простоту реализации [8] и достаточно высокие коэффициенты сжатия [29]. К недостаткам: узкая применимость (монохромные изображения).

2.4. JPEG. Одним из самых распространённых алгоритмов сжатия графической информации является алгоритм JPEG, разработанный в 1990 году объединенной группой Международной организации по стандартизации (ISO) и Международным консультативным комитетом по

телефонии и телеграфии (CCITT). Основная спецификация JPEG описана в [30]. Основная область применения JPEG – 24-х битовые изображения. Изначально алгоритм JPEG относился к алгоритмам сжатия с потерей информации. Эффект компрессии достигался за счет частичного удаления незаметных для человеческого глаза данных изображения, используя метод дискретного косинусного преобразования (DCT) [31]. На последнем этапе применяется кодирование по методу Хаффмана [3]. Однако, в 1993 году было разработано расширение алгоритма «JPEG без потерь» [30]. Разработанный подход использует технику адаптивного предсказания значения текущего пикселя, анализируя соседние.

2.5. JPEG 2000. Следующим этапом развития алгоритма JPEG был формат JPEG 2000 [32], разработанный группой JPEG ISO в 2000 году. JPEG 2000 предусматривает сжатие, как с потерей информации, так и без потерь. Основные

отличия от алгоритма JPEG заключаются в следующем:

- лучшее качество изображения при сильной степени сжатия;
- поддержка кодирования отдельных областей с лучшим качеством;
- основной алгоритм сжатия заменен на wavlet-преобразование [41], [46];
- для повышения степени сжатия в алгоритме используется арифметическое сжатие;
- поддержка сжатия 1-битовых изображений;
- на уровне формата JPEG 2000 поддерживается прозрачность.

В итоге, JPEG 2000 на 5–100% превосходит по эффективности алгоритм JPEG [43], [44].

В 1996 году был разработан алгоритм сжатия без потерь PNG [33]. Сжатие в алгоритме PNG основано на методе Deflate и эффективен при сжатии изображений с глубиной цвета от 1бит до 48-бит.

2.6. Сравнение алгоритмов сжатия изображений. В таблицах 2.1 и 2.2 приведено сравнение параметров рассмотренных алгоритмов[8].

Таблица 2.1

Алгоритм	Особенности изображения, за счет которых происходит сжатие
RLE	Подряд идущие одинаковые цвета: 2 2 2 2 2 15 15 15
LZ	Одинаковые подцепочки: 2 3 15 40 2 3 15 40
Хаффмана	Разная частота появления цвета: 2232243222 4
CCITT – 3	Преобладание белого цвет в изображении, большие области, заполненные одним цветом
JPEG	Отсутствие резких границ

Таблица 2.2

Алгоритм	Коэффициенты сжатия	Симметричность по времени	На что ориентирован
RLE	32, 2, 0.5	1	3,4-битовые
LZ	1000, 4, 5/7	1.2–3	1-8-битовые
Хаффман	8, 1.5, 1	1–1.5	8-битовые
CCITT – 3	213, 5, 0.25	1	1-битовые
Lossless JPEG	20, 2, 1	1	24-битовые, 8-битовые
JPEG 2000	2–200	1–1.5	Полноцветные 24-битовые, 8-битовые, 1-битовые

3 Современные подходы к проблеме сжатия данных

В настоящее время исследования в области сжатия информации ведутся по трем основным направлениям:

- повышение эффективности сжатия;
- увеличение скорости работы алгоритма сжатия;
- поиск нового подхода к сжатию информации (новая система контекста).

Одним из таких подходов является использование больших словарей с синтаксической и семантической информацией, что позволит получить преимущество от имеющейся в тексте связанности. Так, Уолкери Эмслер [34] провел анализ 8 миллионов слов из New York Times News Service для Webster's Seventh New Collegiate Dictionary. Полученный результат свидетельствовал о том, что 64% слов отсутствовали в текущих словарях (около 1/4 из них – грамматические формы слов, еще 1/4 – собственные существительные, 1/6 – слова, написанные через дефис, 1/12 – напечатаны с орфографическими ошибками). Поэтому поиски методов улучшения сжатия текстов, вероятно, будут вестись в направлении исследований в области контекстного анализа.

Другой подход противоположен наукоемкому подходу контекстного анализа. Он заключается в поддержании полной адаптивности системы и исследований в поисках улучшений в существующих алгоритмах сжатия данных. Например, ведутся исследования в области выделения кодов ухода в частично соответствующих контекстуальных моделях, например, алгоритм Баума-Уэлча [35], направленный на определение скрытых моделей Маркова [36], и в последнее время вновь заинтересовавший исследователей [37].

Другим направлением исследований является увеличение скорости работы алгоритмов сжатия. Исследования в этой области вплотную связаны с развитием микроэлектроники. Так, ведутся работы по ускорению работы алгоритмов за счет большего использования памяти. Например, применение архитектуры RISC [38], разными путями воздействует на баланс между хранением и выполнением. Ведутся работы в более глубоком применении аппаратного кодирования. Например, Гонзалес-Смит и Сторер [39] разработали для сжатия LZ параллельные алгоритмы поиска, используя аппаратные возможности микросхем.

Последнее направление – разработка новых подходов к сжатию данных. Например, исследуется возможность объединения в единую систему ряда разработок из разных областей применения: текст-процессор MaxWrite [40], цифровой факсимильный аппарат [41], почту и новости. Так же существуют разработки в области объединения адаптированного алгоритма с аппаратным контроллером [42]. Развивается идея внедрения алгоритмов сжатия в телефонии и т. д.

Еще одной областью, которая может дать толчок в развитии алгоритмов сжатия, является область криптографии и защиты данных [43].

Сжатые данные зачастую уже становятся трудными для восприятия, тем самым придавая некую степень секретности.

Заключение

С момента первых исследований в области сжатия данных было разработано большое количество алгоритмов сжатия данных, которые имеют широкий спектр применения. Сжатие данных востребовано в современных программно-технических комплексах различного назначения.

Каждый год разрабатываются новые информационно-технические решения, которые требуют большого объема данных, к которому необходимо обеспечить оперативный доступ для обработки и последующих исследований. Это приводит к тому, что исследования в области сжатия данных играют все более важную роль.

Материалы, изложенные в статье, представляют интерес как для информационно-технических решений, так и для прикладного оборудования, которое создается с использованием достижений в области сжатия данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hartley, R.V.L.* Transmission of information / R.V.L. Hartley // *Bell System Technical Journal*. – 1928. – Vol. 7, iss. 3. – P. 535–563.
2. *Shannon, C.E.* A mathematical theory of communication / C.E. Shannon // *The Bell System Technical Journal*. – 1948. – Vol. 27. – P. 379–423.
3. *Huffman, D.A.* A method for the construction of minimum redundancy codes / D.A. Huffman // *J. Proc. of IRE*. – 1952. – Vol. 40. – P. 1098–1101.
4. *Ziv, J.* A universal algorithm for sequential data compression / J. Ziv, A. Lempel // *IEEE Transactions on Information Theory*. – May 1977. – Vol. 23, iss. 3. – P. 337–343.
5. *Ziv, J.* Compression of individual sequences via variable-rate coding / J. Ziv, A. Lempel // *IEEE Transactions on Information Theory*. – Sept. 1978. – Vol. 24, iss. 5. – P. 530–536.
6. *Welch, T.A.* A technique for high-performance data compression / T. A. Welch // *IEEE Computer*. – June 1984. – Vol. 17, iss. 6. – P. 8–19.
7. *IETF Tools* [Electronic resource]: DEFLATE Compressed Data Format Specification v.1.3 (RFC 1951). – Mode of access: <https://tools.ietf.org/html/rfc1951>. – Date of access: 28.09.2015.
8. *Методы сжатия данных. Устройство архиваторов, сжатие изображений и видео* / Д. С. Ватолин [и др.]. – М.: ДИАЛОГ–МИФИ, 2002. – 384 с.
9. *Rissanen, J.J.* Universal modeling and coding / J.J. Rissanen, G.G. Langdon // *IEEE Transactions on Information Theory*. – Jan. 1981. – Vol. 27, iss. 1. – P. 12–23.
10. *Cleary, J.G.* Data compression using adaptive coding and partial string matching / J.G. Cleary, I.H. Witten // *IEEE Transactions on Communications*. – April 1984. – Vol. 3, iss. 4. – P. 396–402.
11. *California Institute of Technology* [Electronic resource]: Solving the problems of context modeling / C. Bloom. Mode of access: <http://www.cbloom.com/papers/ppmz.zip>. – Date of access: 28.09.2015.
12. *Шкарин Д.А.* Повышение эффективности алгоритма PPM / Д.Ф. Шкарин // *Проблемы передачи информации*. – 2001. – Т. 34 № 3. – С. 44–54.
13. *HP Labs* [Electronic resource]: A Block-sorting Lossless Data Compression Algorithm / M. Burrows, D.J. Wheeler // SRC Research Report 124, Digital Systems Research Center, Palo Alto, May 1994. Mode of access: <http://www.hpl.hp.com/techreports/Compaq-DEC/SRC-RR-124.pdf>. – Date of access: 29.09.2015.
14. *The national archives* [Electronic resource]: Digital preservation guidance note 5: image compression, 2003 / A. Brown. Mode of access: <https://www.nationalarchives.gov.uk/documents/selecting-file-formats.pdf>. – Date of access: 29.09.2015.
15. *Ryabko, B.Ya.* Data Compression by Means of a “Book Stack” / B.Ya. Ryabko // *Problems of Information Transmission*. – 1980. – Vol. 16, iss. 4. – P. 265–269.
16. *Fenwick, P.M.* Block sorting text compression: papers from the Australasian Computer Science Conference, ACSC'96, Melbourne, Australia, Feb 1996. – Melbourne, 1996. – P. 193–202.
17. *Bell, T.C.* Modeling for text compression II *ACM Computer Survey* / T.C. Bell, I.H. Witten, J.G. Cleary. – 1989. – Vol. 24, № 4. – P. 555–591.
18. *Miller, V.S.* Variations on a theme by Ziv and Lempel / V.S. Miller, M.N. Wegman // *In Combinatorial Algorithms on Words. NATO ASI Series: papers from the conference, Berlin, 1984; ed.: A. Apostolico [et al.].* – Springer-Verlag, 1984. – Vol. F12. – P. 131–140.
19. *Bell, T.C.* A unifying theory and improvements for existing approaches to text compression: dissertation, Dept. of Computer Science / Ph. D. T.C. Bell; Univ. of Canterbury, New Zealand. – Canterbury, 1987. – P. 9.
20. *Fiala, E.R.* Data compression with infinite windows / E.R. Fiala, D.H. Greene // *Commun. ACM*. – Apr. 1989. – Vol. 32, iss. 4. – P. 490–505.
21. *Bender, P.E.* New asymptotic bounds and improvements on the Lempel-Ziv data compression algorithm / P.E. Bender, J.K. Wolf // *IEEE Transactions on Information Theory*. – May 1991. – Vol. 37, iss. 3. – P. 721–727.
22. *Williams, R.N.* An Extremely Fast Ziv-Lempel Data Compression Algorithm / R.N. Williams // *Data Compression Conference: papers from the conference, Snowbird, Utah, 8–11 April, 1991*. – P. 362–371.
23. *Roden, M.* Linear algorithm for data compression via string matching / M. Roden, V.R. Pratt,

- S. Even // J. ACM. – Jan. 1981. – Vol. 28, iss. 1. – P. 6–24.
24. *C. Bloom* [Electronic resource]: New Techniques in Context Modeling and Arithmetic Encoding / C. Bloom. Mode of access: <http://www.cbloom.com/papers/context.pdf>. – Date of access: 29.09.2015.
25. *Hoang, D.T.* Multiple-dictionary compression using partial matching / D.T. Hoang, P.M. Long, J.S. Vitter // Proceedings of Data Compression Conference: papers from the conference, Washington, DC, USA, March 1995. – P. 272.
26. *Земляченко А.Н.* Сжатие изображений без визуально заметных искажений / А.Н. Земляченко, В.В. Лукин // Радиоэлектронные и компьютерные системы. – 2011. – № 3 – С. 73–79.
27. *ITU* [Electronic resource]: Standardisation of Group 3 Facsimile apparatus for document transmission. CCITT Recommendations. Fascicle VII.2. 1980. T.4 Mode of access: https://www.itu.int/rec/dologin_pub.asp?lang=e&id=T-REC-T.4-198811-S!!PDF-E&type=items. – Date of access: 30.09.2015
28. *ITU* [Electronic resource]: Facsimile Coding Schemes and Coding Control Functions for Group 4 Facsimile Apparatus, Recommendation T.6, Volume VII, Fascicle VII.3. Mode of access: https://www.itu.int/rec/dologin_pub.asp?lang=e&id=T-REC-T.6-198811-I!!PDF-E&type=items. – Date of access: 30.09.2015.
29. *Нгуен, Д.М.* Разработка методики оценки качества сжатых изображений: дис. канд. техн. наук.: 25.00.35 // Нгуен Динь Минь. – М., 2006. – 163 с.
30. *Wallace, G.K.* The JPEG still picture compression standard / G.K. Wallace // Communication of ACM. – April 1991. – Vol. 34, № 4. – P. 30–44.
31. *Narasimha, M.* On the Computation of the Discrete Cosine Transform / M. Narasimha, A. Peterson // IEEE Transactions on Communications. – June 1978. – Vol. 26, iss. 6. – P. 934–936.
32. *Information technology – JPEG 2000 image coding system.* – Part 1: Core coding system: ISO/IEC 15444-1 2001.
33. *Portable Network Graphics* [Электронный ресурс] – Mode of access: <http://libpng.org/pub/png/> – Date of access: 30.09.2015.
34. *Walker, D.E.* The use of machine-readable dictionaries in sublanguage analysis / D.E. Walker, R.A. Amsler // In Analysis languages in restricted domains: Sublanguage description and processing: papers from the conference, Hillsdale, NJ, USA, 1986; ed.: R. Grishman [et al.]. – NJ, 1986. – P. 69–83.
35. *A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic functions of Markov chains* / L. E. Baum, T. Petrie, G. Soules, N. Weiss // Ann. Math. Stat. – 1970. – Vol. 41. – P. 164–171.
36. *Rabiner, L.R.* An Introduction to Hidden Markov models / L.R. Rabiner, B.H. Juang // IEEE ASSP Mag. – Jan. 1986. – P. 4–16.
37. *Levinson, S.E.* An introduction to the application of the theory of probabilistic function of a Markov process to automatic speech recognition / S.E. Levinson, L.R. Rabiner, M. Sondni // Bell Syst. Tech. J. – Apr. 1983. – Vol. 62, iss. 4. – P. 1035–1074.
38. *Jagger, D.* Fast Ziv-Lempel decoding using RISC architecture / D. Jagger // Dept. of Computer Science: Res. Rept., Univ. of Canterbury, New Zealand. – 1989.
39. *Gonzalez-Smith, M.E.* Parallel algorithms for data compression / M.E. Gonzalez-Smith, J.A. Storer // J. ACM. – 1985. – Vol. 32, iss. 2. – P. 344–373.
40. *Young, D.M.* MacWrite file formats / D.M. Young // Wheels for the mind: Newsletter of the Australian Apple University Consortium, University of Western Australia, Nedlands, WA 6009, Australia. – Nedlands, 1985. – P. 34.
41. *Hunter, R.* International digital facsimile coding standards / R. Hunter, A.H. Robinson // Proceedings of the IEEE. Jul. 1980. – Vol. 68, iss. 7. – P. 854–867.
42. *Auslander, M.* PCTERM: A terminal emulator using compression / M. Auslander, W. Harrison, V. Miller, M. Wegman // Proceedings of the IEEE. – 1985. – P. 860–862.
43. *Witten, I.H.* Picture coding and transmission using adaptive modelling of quad trees / I.H. Witten, J. Cleary // Proceeding of the International Electrical, Electronics conference 1: papers from the conference, Toronto, Canada, 1983. – Toronto, 1983. – P. 222–225.

Поступила в редакцию 01.10.15.

ИНФОРМАЦИОННАЯ СИСТЕМА ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ МИКРОКЛИМАТА ЖИЛЫХ ПОМЕЩЕНИЙ

Д.И. Кузнецов, А.И. Купин

Криворожский национальный университет

INFORMATION SYSTEM OF INTELLECTUAL CONTROL OF MICROCLIMATE IN PREMISES

D.I. Kuznetsov, A.I. Kupin

Krivoy Rog National University

Рассмотрены принципы построения информационной интеллектуальной системы регулирования микроклимата помещений на основе требований и пожеланий находящихся там субъектов, позволяющей обеспечить эффективное управление энергосберегающими системами.

Ключевые слова: интеллектуальная система, микроклимат помещения, экспертная система.

Principles of creation of information intelligent indoor climate control systems based on the requirements and wishes of the subjects are discussed. They allow the effective management of energy-saving systems.

Keywords: intelligent system, indoor climate, expert system.

Введение

Современные системы обеспечения микроклимата жилых и производственных помещений невозможно представить без систем автоматизированного управления (САУ). Применяя САУ возможно оптимизировать работу климатического оборудования, снижая расходы на эксплуатацию, например, за счет уменьшения энергопотребления [2].

Необходимость снижения энергопотребления также обусловлена постоянно растущей тенденцией к удорожанию, и, в последствии, экономии энергоресурсов [1]. В системах обеспечения микроклимата помещений, как результат, возникает необходимость использования современного энергосберегающего оборудования и проведения различных организационных мероприятий. С точки зрения организации энергосберегающих мероприятий можно выделить управляемые процессы автоматического регулирования температуры в зависимости от времени суток, дня недели, прерывистого отопления и т. д.

Использование современного энергосберегающего оборудования является неотъемлемым требованием при организации систем автоматического регулирования микроклимата, что, в свою очередь, позволяет обеспечить необходимый и точный уровень регулирования, например, температуры и влажности воздуха.

С точки зрения жилых помещений, таких как частные дома, квартиры или коттеджи, система микроклимата, в первую очередь, призвана организовывать комфортные условия для пребывания человека в помещении. Она должна помогать поддерживать комфортную для жильцов

температуру и влажность. В свою очередь, для каждого человека существуют свои комфортные параметры климата, так как некоторые люди привыкли к прохладе, а другие – к теплу.

Процесс настройки и поддержания комфортных условий проживания для одного человека является довольно простым, так как учитываются параметрические особенности одного субъекта [4]. В случае учета особенностей нескольких субъектов, возможность комфортного регулирования микроклимата должна содержать сложные алгоритмы подстройки оборудования, в противном случае может стать практически невозможной.

Цель данной статьи – разработка структуры информационной системы интеллектуального регулирования микроклимата (ИСИРМ) жилых помещений с учетом особенностей и пожеланий всех проживающих, упрощение процесса регулирования и автоматической подстройки под потребности каждого или группы субъектов.

1 Информационная система интеллектуального регулирования микроклимата

Реализация решения поставленной задачи сводится к трудностям, возникающим при использовании различной логики отдельных элементов, которые являются составной частью систем обеспечения микроклимата. Часть существующих контроллеров имеют жесткую логику и при проектировании САУ не позволяют выйти за пределы заводских настроек. Также в свободно программируемых контроллерах практически невозможно прописать алгоритм, который будет решать поставленную задачу.

На основе анализа существующих решений регулирования микроклимата в помещениях можно выделить следующие варианты при создании алгоритма регулирования [2]:

а) выполнение анализа параметров наружной среды и микроклимата, в результате чего выбирается заранее запрограммированный алгоритм;

б) информационная система сама просчитывает различные комбинации схемных решений и сама выбирает из них наиболее оптимальные.

В общем случае процесс интеллектуального регулирования микроклимата в помещении имеет вид, представленный на рисунке 1.1, где T – температура, P – давление, ϕ – относительная влажность, полученная с внутренних и внешних датчиков помещения. Блок управления представляет собой экспертную систему, которая «обучается» на протяжении всей своей работы, то есть пополняет или корректирует свою базу знаний в зависимости от изменений внутренних или внешних факторов помещения, учета дней недели или сезона года, в котором она работает. В качестве исполнительных устройств выступают радиаторы, кондиционеры и вентиляторы.

Следует отметить, что главным условием правильной и корректной работы ИСИРМ является наличие соответствующих исполнительных

устройств. Например, в качестве отопительных приборов следует использовать вместо привычных чугунных радиаторов, которым свойственна большая инерционность, стальные, алюминиевые или биметаллические [1].

Главным недостатком существующих информационных систем интеллектуального регулирования микроклимата является отсутствие возможности автоматической подстройки температурных параметров микроклимата помещения под каждого субъекта.

Авторами предложена структура ИСИРМ которая позволяет автоматически изменять микроклимат помещения на основе пожеланий субъектов и их времени пребывания (рисунок 1.2).

Блок «Выбор благоприятных условий микроклимата» является выбором соответственных значений влажности и температуры субъектом в соответствующем помещении (например, в кухне, зале, ванной и т. д.). Блок «Идентификация субъекта в помещении» регистрирует время и продолжительность нахождения субъекта в соответствующем помещении. Структурная схема данного блока имеет следующий вид, показанный на рисунке 1.3.



Рисунок 1.1 – Структурная схема процесса регулирования микроклимата

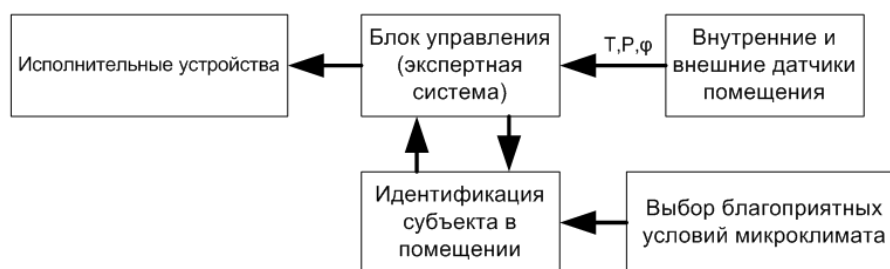


Рисунок 1.2 – Усовершенствованная схема ИСИРМ



Рисунок 1.3 – Схема идентификации субъекта ИСИРМ

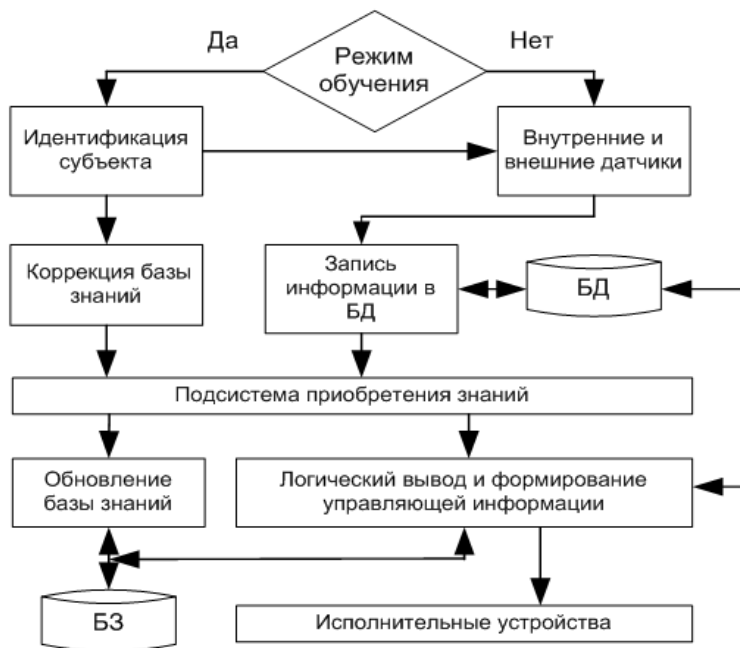


Рисунок 1.4 – Логико-функциональная схема работы экспертной системы

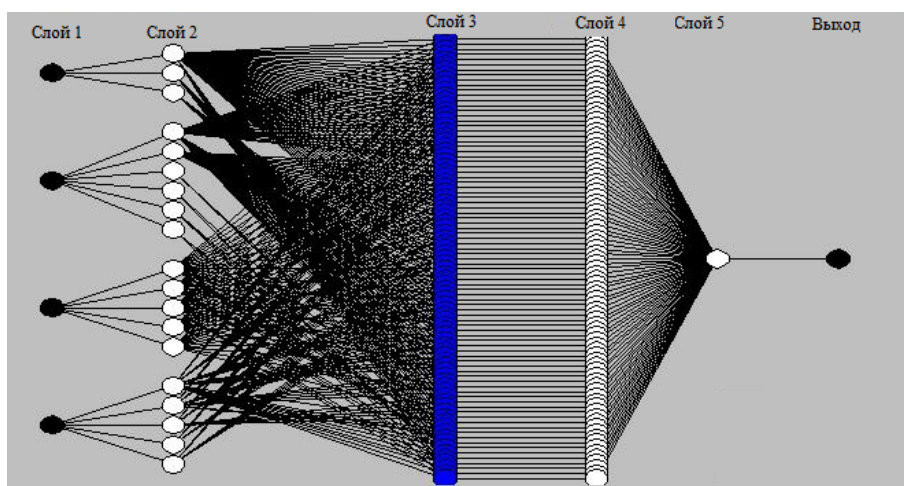


Рисунок 1.5 – Структура нейро-нечеткой сети системы нечеткого вывода

Каждый из субъектов при входе или выходе из помещения должен регистрироваться с помощью RFID считывателя, в результате чего соответствующая информация сохраняется в БД экспертной системы. На рисунке 1.4 показана логико-функциональная схема работы экспертной системы.

Для реализации блока «Логический вывод и формирование управляющей информации» предложено использовать адаптивную систему нейро-нечеткого вывода. Данная система позволяет автоматически формировать управляющую информацию для регулирования микроклимата помещений в зависимости от пожеланий субъектов, обобщая информацию о времени и месте их пребывания в разные периоды времени. Моделирование процессов управления выполнено в среде MatLab с пакетом расширения Fuzzy Logic Toolbox [6].

Блок «Логический вывод и формирование управляющей информации» формирует управляющее воздействие на элементы исполнительных устройств поддержания микроклимата в помещении (механизм сервопривода крана батареи, реле включения кондиционера и вентиляции), изменяя температуру окружающего воздуха T и относительную влажность φ .

Целью управления является воздействие на элементы управления исполнительных устройств, т. е. закрытие или открытие крана батареи, а также включение или выключение кондиционера. Управляющее воздействие формируется на основе данных о рассогласовании между заданной и текущей температурой в помещении.

Блок «Логический вывод и формирование управляющей информации» содержит систему нечеткого вывода – для управления краном батареи

и реле включения кондиционера. Данная система представлена в виде нейро-нечеткой пятислойной сети прямого распространения сигнала (рисунок 1.5). Сеть реализует систему нечеткого вывода типа Сугено нулевого порядка, имеет четыре входные переменные:

- IVG – время года (время отопительного сезона или нет);
- IT – текущее время дня;
- ICO – температура окружающей среды;
- ICZ – заданная температура.

Выходом сети является лингвистическая переменная OU , которая, в зависимости от значений входных переменных, формирует управляющую информацию для исполнительных устройств, т. е. включение/выключение сервопривода крана батареи или реле включения кондиционера.

Для лингвистической оценки входной переменной IVG используется три термина, для переменной IT – 6 термов, для переменной ICO – 5 термов и для переменной ICZ – 5 термов. В качестве терм-множества первой лингвистической переменной IVG используется множество $T_{IVG} = \{\text{«отопительный сезон}_1\text{»}, \text{«не отопительный сезон»}, \text{«отопительный сезон}_2\text{»}\}$, которое записывается в символическом виде как $T_{IVG} = \{IVGZ1, IVGL, IVGL2\}$. В качестве терм-множества второй лингвистической переменной IT используется множество $T_{IT} = \{\text{«ранее утро»}, \text{«утро»}, \text{«полдень»}, \text{«вечер»}, \text{«поздний вечер»}, \text{«ночь»}\}$, которое записывается в символическом виде как $T_{IT} = \{ITR, ITU, ITP, ITV, ITPV, ITN\}$. В качестве терм-множества третьей лингвистической переменной ICO используется множество $T_{ICO} = \{\text{«холодно»}, \text{«прохладно»}, \text{«комфортно»}, \text{«жарко»}, \text{«очень жарко»}\}$, которое записывается в символическом виде как $T_{ICO} = \{ICOH, ICOP, ICOK, ICOJ, ICON\}$. В качестве терм-множества четвертой лингвистической переменной ICZ используется множество $T_{ICZ} = \{\text{«холодно»}, \text{«прохладно»}, \text{«комфортно»}, \text{«жарко»}, \text{«очень жарко»}\}$, которое записывается в символическом виде как $T_{ICZ} = \{ICZH, ICZP, ICZK, ICZJ, ICZN\}$. Терм-множество выходной лингвистической переменной OU составляет множество значений для исполнительных устройств $T_{OU} = \{U_j\}$, $j = 1, \dots, 5$. В зависимости от полученных значений можно выделить следующие режимы работы исполнительных устройств:

- U_1 – закрыть кран батареи;
- U_2 – открыть кран батареи;
- U_3 – ничего не делать;
- U_4 – включить кондиционер;
- U_5 – выключить кондиционер.

Слои нейро-нечеткой сети имеют следующее назначение (рисунок 1.5):

Слой 1. Определяет нечеткие термы входных параметров. Выходы этого слоя представляют значения функции принадлежности при конкретных значениях. Каждый узел слоя является

адаптивным с функцией принадлежности $\mu_{A_i}(\chi)$, где χ – i -го узла, $i = 1, \dots, n$; A_i – лингвистическая нечеткая переменная, ассоциированная с данным узлом. Для термов входных переменных выбраны трапециевидные функции принадлежности.

Слой 2. Определяет посылки нечетких правил. Данный слой – неадаптивный. Каждый узел соединен с теми узлами первого слоя, которые формируют предпосылки соответствующего правила. Выполняет нечеткую логическую операцию «AND» на параметрах посылок правила. Выходами нейронов этого слоя являются степени истинности посылок каждого j -го правила базы знаний системы, вычисленные по формуле:

$$w_j = \min \{ \mu_{IVG_j}(IVG), \mu_{IT_j}(IT), \mu_{ICO_j}(ICO), \mu_{ICZ_j}(ICZ) \},$$

где $j = 1, \dots, 200$ – определяет общее количество правил нечеткой системы вывода.

Слой 3. Осуществляет нормализацию степени выполнения правил. Неадаптивные узлы этого слоя рассчитывают относительную степень (вес) выполнения нечеткого правила по формуле:

$$\bar{w}_j = w_j / \sum_{j=1}^{200} w_j.$$

Слой 4. Четкое число U_j , задающее заключение каждого j -го правила, рассматривается как нечеткое множество с синглтонной функцией принадлежности. Адаптивные узлы четвертого слоя рассчитывают вклад каждого нечеткого правила в выход сети по формуле:

$$y_j = \bar{w}_j U_j, i = 1, \dots, 200.$$

Слой 5. Неадаптивный узел этого слоя суммирует вклады всех правил:

$$y = \sum_{j=1}^{200} y_j.$$

Программная реализация нейро-нечеткой сети получена в математическом пакете Matlab Fuzzy Logic с использованием программной m-функции ANFIS. Система нечеткого вывода была настроена автоматически. Параметры узлов сети при обучении настраивались таким образом, чтобы минимизировать стандартную ошибку (RMSE) на основе следующей зависимости:

$$E = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [v_p(i) - OU(i)]^2} \rightarrow \min,$$

где v_p – рассогласование между заданной и текущей температурой в помещении, N – количество наблюдений в выборке обучающих данных v_p .

В качестве алгоритма обучения сети ANFIS для определения параметров функции принадлежности был выбран метод обратного распространения ошибки, основанный на градиентном методе наискорейшего спуска.

Задачей подсистемы приобретения знаний (рисунок 1.4) является обновление базы знаний на основе полученной информации с датчиков, а

также она может быть откорректирована субъектом. Следует отметить, что экспертная система (ЭС) может находиться как в состоянии обучения, так и в обычном состоянии. Целью режима обучения является формирование блоком логического вывода управляющей информации для исполнительных устройств на основе информации, полученной от субъектов.

2 Анализ информационной интеллектуальной системы регулирования микроклимата помещения

Проведено моделирование работы предложенного подхода в информационной интеллектуальной системе регулирования микроклимата на основе использования системы нейро-нечеткого вывода с целью создания управляющей информации. Обучающая выборка получена на основе использования метода Монте – Карло. Начальное значение шага обучения в направлении антиградиента критерия E при изменении параметров функции принадлежности задано равным $\alpha = 10^{-4}$. Допустимое изменение величины шага за одну итерацию – 15%. Для обучения сети значение критерия обучения, в среднем, составило $E = 2,187$, после 500 итерации – $E = 0,159$. Зависимость значения ошибки обучения от количества данных обучающей выборки представлена на рисунке 2.1.

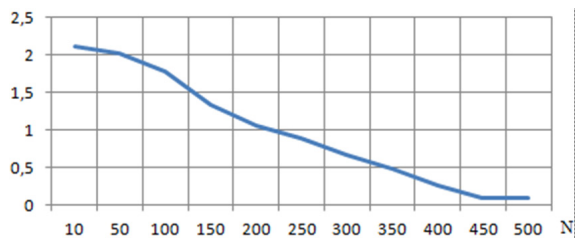


Рисунок 2.1 – Зависимость ошибки обучения от количества элементов обучающей выборки

При моделировании работы ИСИРМ подразумевалось, что используются современные стальные или биметаллические радиаторы, и проведены энергоэффективные мероприятия, например, утепление наружных стен, а также в помещении есть кондиционер.

Главной особенностью разрабатываемой ИСИРМ является подстройка микроклимата помещения под находящегося там субъекта с возможностью запоминания времени пребывания. В результате чего, в период времени, когда субъект (субъекты) отсутствуют или их выбранные температурные режимы совпадают, ИСИРМ способна уменьшить расходы используемого энергетического ресурса за счет уменьшения температуры воздуха в помещении. Результаты моделирования использования количества тепла для отопления помещения представлены на рисунке 2.2. В качестве энергетического ресурса для расчета количества потребляемого тепла был выбран природный газ. Параметр δ – среднеквадратическое отклонение выбранной температуры субъектами помещения. Например, для $\delta = 0,82$ диапазон выбранных температур составляет 18–19°C, для $\delta = 1,53$ диапазон выбранных температур составляет 18–20°C и т. д. В качестве единицы измерения используемого количества тепла были выбраны Гкал. Для достижения повышения температуры в помещении на 1°C в качестве нормы потребления тепла было принято 0,001 Гкал, основываясь на ранее рассмотренных расчетах [5]. То есть, из полученных данных, например, для поддержания средней температуры в помещении без используемой ИСИРМ необходимо в месяц потратить $0,001 \cdot 41,67 = 0,04$ Гкал (рисунок 2.2). Следует отметить, что под средней температурой помещения подразумевается температура, выбранная в качестве оптимальной для всех субъектов.

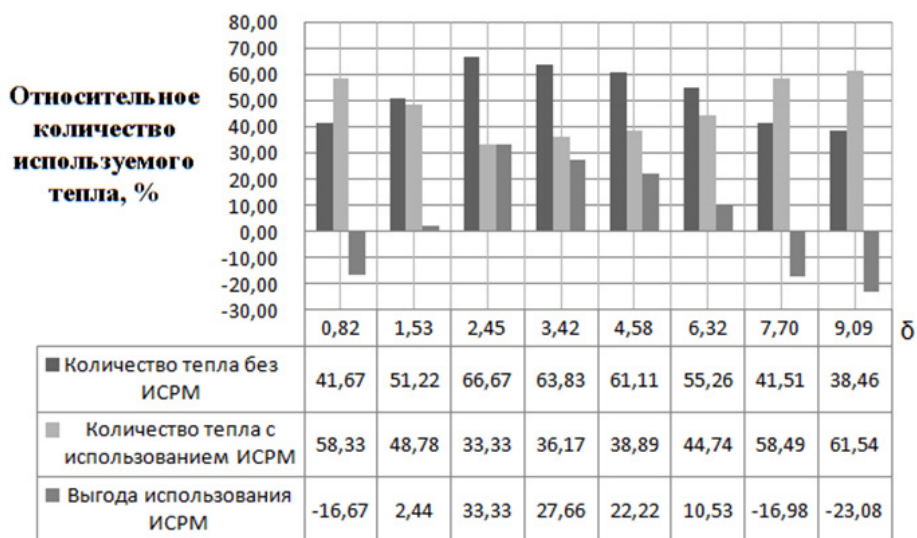


Рисунок 2.2 – Результаты моделирования работы ИСИРМ

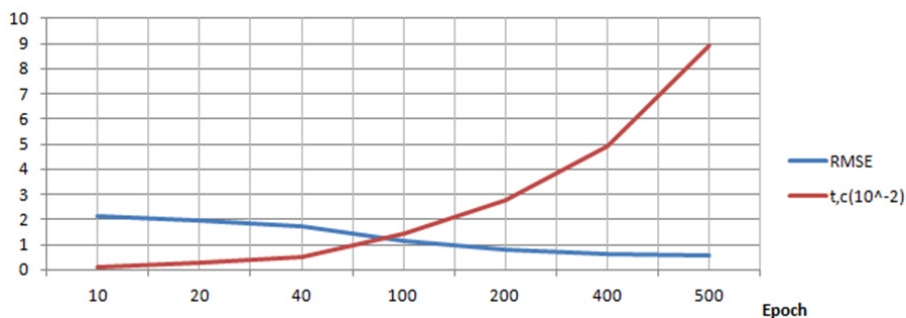


Рисунок 2.3 – Зависимость времени обучения от количества эпох

Из результатов моделирования видно, что при значении $\delta < 1$ или $\delta > 6.5$ использование ИСИРМ нерационально, так как происходит перерасход тепла, и соответственно, увеличивается количество затрат энергоресурса. При обучении нейро-нечеткой сети для достижения меньшего значения среднеквадратической ошибки обучения необходимо использовать обучающую выборку с большим значением входных данных или большее значение количества эпох обучения. Но с увеличением количества эпох обучения увеличивается общее время обучения нейро-нечеткой сети, что в свою очередь влияет на общую реакцию системы. Зависимость времени обучения от количества эпох представлено на рисунке 2.3. Значение N было выбрано равным 200, $E = 10^{-3}$, в качестве аппаратных ресурсов был выбран компьютер с процессором Intel Atom 1.5 Ghz, RAM = 2 Gb.

Из результатов видно, что при достижении минимального значения RMSE необходимо затратить большее время на обучение нейро-нечеткой сети. Поэтому целесообразно находить «золотую середину» по времени обучения, значению RMSE и количеству элементов входной выборки.

Заключение

На сегодняшний день интеллектуальные системы регулирования микроклимата являются неотъемлемой частью систем «умный дом». С учетом всех преимуществ и достижений современных методов, способов и информационных технологий регулирования микроклимата практически не существует систем, которые бы подстраивались автоматически под каждый субъект.

Использование предложенной интеллектуальной системы ИСИРМ позволит уменьшить в среднем до 23,4% количества используемого тепла для отопления помещения за счет учета желания поддержания комфортных условий в помещении. Данные условия достигаются за счет подстройки температуры на период пребывания субъекта в помещении, например, если человеку С1 комфортно при 18°C, а человеку С2 при 22°C,

причем С1 находится в помещении с 9.00 до 14.00, а С2 с 13.00 до 18.00, то ИСИРМ автоматически плавно подстраивает температуру под данных субъектов. Следует отметить, что если время пребывания субъектов совпадает, то выбирается среднее значение температуры.

Можно сделать вывод, что использование предложенной ИСИРМ дает возможность настроить благоприятные условия микроклимата под каждого субъекта помещения, а также уменьшить энергозатраты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Конох, И.С. Разработка и исследование интеллектуальной системы регулирования параметров микроклимата помещения / И.С. Конох, И.С. Гула, С.В. Сукач // Электромеханические и энергосберегающие системы. – Кременчуг: КНУ, 2010. – Вып. 3/2010 (11). – С. 80–85.
2. Мансуров, Р.Ш. Экспериментальное исследование переходных процессов в системах обеспечения микроклимата / Р.Ш. Мансуров // Сборник докладов 4-й международной научно-технической конференции «Теоретические основы теплогасоснабжения и вентиляции». – М.: МГСУ, 2011. – С. 20–25.
3. Кувшинов, Ю.Я. Динамические свойства помещения с регулируемой температурой воздуха / Ю.Я. Кувшинов // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1993. – № 4. – С. 87–91.
4. Управление микроклиматом [Электронный ресурс] / Мир автоматизации. – Москва, 2009. – Режим доступа: <http://www.soliton.com.ua/pr/MA-2009-Feb-Produal-small.pdf>. – Дата доступа: 20.01.2015.
5. Расчет Гкал на отопление [Электронный ресурс] / Гид по отоплению. – Москва, 2015. – Режим доступа: <http://otoplenie-gid.ru/operacii/raschet/364-raschet-gkal-na-otoplenie>. – Дата доступа: 19.01.2016.
6. Штовба, С.Д. Проектирование нечетких систем средствами MATLAB / С.Д. Штовба. – М.: Горячая линия. – Телеком, 2007. – 288 с.

Поступила в редакцию 08.02.16.

QoS МАРШРУТИЗАЦИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ ПОТОКОВ В СЕТЯХ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ

Н.И. Листопад, С.Ю. Михневич, А.А. Хайдер

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

QoS BASED ROUTING OF INFORMATION FLOWS IN TELECOMMUNICATION NETWORKS

N.I. Listopad, S.Yu. Mikhnevich, A.A. Hayder

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

Приведен обзор основных концепций как межсетевой, так и междоменной маршрутизации, показаны разработанные модели и методы маршрутизации с учетом качества обслуживания. На основе анализа преимуществ и недостатков различных методов выявлены основные тенденции развития маршрутизации с учетом качества обслуживания.

Ключевые слова: маршрутизация, качество обслуживания, пропускная способность, сетевые ресурсы.

Basic concepts as internetwork and interdomain routing are presented. The developed models and methods of QoS based routing are shown. Based on the analysis of the advantages and disadvantages of the different methods the main trends in the development of QoS based routing are revealed.

Keywords: QoS based routing, bandwidth, network resources.

Введение

С ростом требований к качеству обслуживания (Quality of Service) в современных мульти-сервисных сетях все больше внимания уделяется средствам маршрутизации [1]. Причина этого состоит в том, что функционал DiffServ, основанный на приоритетной обработке пакетов на узлах (маршрутизаторах) телекоммуникационной сети, способен повысить уровень QoS лишь на отдельных элементах сети. Протокол же маршрутизации в сетях телекоммуникаций нового поколения (NGN) должен обеспечивать расчет одного или нескольких путей доставки пакетов, вдоль которых будут выполняться все описанные в SLA-договоре требования к качеству обслуживания. Это является формулой концепции QoS-маршрутизации (QoS based routing) [1], определяющей направление развития моделей, методов, а впоследствии алгоритмов и протоколов маршрутизации.

1 Технологические решения в области QoS маршрутизации

Средства поддержки качества обслуживания в современных протоколах маршрутизации в последнее время достаточно сильно изменились, прежде всего, за счет пересмотра метрик, используемых при выборе маршрута. Во-первых, происходит отказ от топологических метрик – числа переприемов (hops), характерного для протокола RIP, и осуществляется переход на QoS-метрики, основанные на учете основных показателей качества обслуживания: скорости передачи, средних задержек, вариации задержек, уровня потерь

в трактах передачи сети. В результате маршруты передачи пакетов того или иного трафика прокладываются с учетом QoS-показателей вдоль них. Во-вторых, все больше протоколов поддерживают так называемые композитные (комбинированные) метрики, в рамках которых учитываются одновременно несколько основных QoS-показателей [2]. Так, в рамках протокола EIGRP в качестве метрики интерфейса используется следующая величина [3]

$$M_{EIGRP} = 256 \left[K_1 M_b + \frac{K_2 M_b}{256 - M_l} + K_3 M_d \right] \times \frac{K_5}{M_r + K_4}, \quad (1.1)$$

где K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 – постоянные коэффициенты; M_b, M_d, M_r, M_l – отдельные метрики маршрута, причем M_b – величина обратной логической пропускной способности маршрута; M_d – кумулятивная логическая задержка маршрута, M_r и M_l – надежность и загрузка маршрута соответственно.

Весовые коэффициенты $K_i, i = 1, 5$ (1.1) являются административно настраиваемыми параметрами, по умолчанию их значения равны $K_1 = K_3 = 1, K_2 = K_4 = K_5 = 0$. В результате формула (1.1) принимает вид (часть $\frac{K_5}{M_r + K_4}$, как правило, не используется):

$$M_{EIGRP} = 256 [K_1 M_b + K_3 M_d]. \quad (1.2)$$

В выражение (1.1) представлены метрики пропускной способности, задержки и загруженности маршрута. Более правильно было бы

учесть также и метрику, характеризующую вариации задержки (джиттер). В этом случае формула (1.1) приобретет следующий вид:

$$M_{EIGRP} = 256 \left[K_1 M_b + \frac{K_2 M_b}{256 - M_l} + K_3 M_d + K_6 M_j \right] \times \frac{K_5}{M_r + K_4},$$

где K_6 – постоянный коэффициент; M_j – метрика, характеризующая джиттер.

Формула (1.2) соответственно примет следующий вид:

$$M_{EIGRP} = 256 [K_1 M_b + K_3 M_d + K_6 M_j].$$

Анализ показывает, что существующие на сегодняшний день протоколы не укладываются в полной мере в рамки концепции QoS-маршрутизации, поскольку в них заложена идея поиска кратчайшего пути по одной, пусть даже комбинированной, метрике без учета достигаемых при этом значений других метрик [1]. Так, например, несмотря на то, что в рамках EIGRP при выборе маршрута может учитываться множество показателей качества обслуживания (задержка, загрузка, надежность, пропускная способность), использование комбинированной метрики вовсе не гарантирует наилучших значений других метрик, например, задержки, вдоль найденного маршрута.

Другой проблемой, связанной с применением существующих протоколов маршрутизации, является несбалансированное использование сетевых ресурсов [1]. В основу всех перечисленных протоколов маршрутизации положены алгоритмы нахождения кратчайшего пути в графе (Дейкстры или Беллмана – Форда), результатом работы которых является один, кратчайший в выбранной метрике, путь. Поскольку ни в одном из упомянутых выше протоколов в метрику не входит доступная (не задействованная) пропускная способность трактов передачи, всегда для заданной пары адресатов в качестве кратчайшего будет выбираться один и тот же путь, что в конечном итоге приводит к его перегрузке даже при наличии свободных обходных маршрутов [1]. Целесообразным решением в данной ситуации является многопутевая маршрутизация с балансировкой нагрузки не только между путями равной стоимости, что заложено во всех протоколах маршрутизации, но и между путями неравной стоимости [1], что присутствует только в протоколах IGRP, EIGRP и внутридомашней версии BGP – iBGP (interior BGP). Как правило, балансировка между маршрутами с различной стоимостью в рамках данных протоколов требует от администраторов сети дополнительных настроек и по этой причине не всегда ими используется.

Вычисление маршрута в рассмотренных выше протоколах маршрутизации как внутренних, так и внешних (межсетевых или междоменных),

реализуется распределенно и в момент поступления трафика в сеть, т. е. по требованию. Однако при переходе к QoS-маршрутизации заслуживают внимания следующие маршрутные концепции [5]:

1. Концепция централизованного вычисления путей в рамках маршрутизации от источника (Source routing) – концепция сервера маршрутов (Route Server, RS).

2. Концепция предвычисления путей (Pre-computed routing, PR).

При решении задач внутренней маршрутизации наличие единого центра управления в сети (домене) позволяет не только найти оптимальный путь с точки зрения всей сети и ее текущего состояния, но и обеспечивает решение задач управления доступом и резервирования ресурсов, что немаловажно для обеспечения гарантированного QoS в целом. Масштабируемость в условиях централизованного принятия решения сервером RS обеспечивается за счет предвычисления путей и для MPLS – за счет предварительного установления пути коммутации меток LSP [1].

В области внешней (межсетевой или междоменной) маршрутизации можно также выделить два направления развития. Первое связано с использованием протокола пограничного шлюза BGP и его QoS-расширения [6]. Как известно, BGP является протоколом маршрутизации дистанционно-векторного типа, в котором решение о направлении продвижения пакета принимается каждым узлом в отдельности (hop-by-hop) [6]. Отсутствие на маршрутизаторе информации о текущем состоянии всей сети не позволяет в условиях применения BGP получить в конечном итоге маршрут, оптимальный с точки зрения всей сети.

Другой подход к межсетевой маршрутизации заключается в использовании маршрутизации от источника [7]. Как известно [1] маршрутизация от источника имеет свои сложности, связанные с необходимостью сбора подробной информации о топологии сети, именно она потенциально способна обеспечить расчет такого маршрута, вдоль которого QoS-требования гарантировано выполняются. Масштабируемость в этом случае обеспечивается за счет иерархического представления топологической информации [1].

Таким образом, хотя маршрутизация потенциально является одним из наиболее действенных механизмов в плане предоставления качества обслуживания, на практике в рамках существующих протоколов маршрутизации подобные функции остаются нереализованными в полной мере. В связи с переходом к сетям нового поколения (NGN) вопросы совершенствования алгоритмов и протоколов являются особо актуальными. В целом на основании выявленных недостатков существующих протоколов и с учетом перспективных концепций можно сформулировать

требования к протоколу маршрутизации в современных телекоммуникационных сетях [1]:

1. Протокол должен отвечать концепции QoS-маршрутизации, т. е. оперировать не только номинальными, но и доступными сетевыми ресурсами, информация о которых должна обеспечиваться путем их постоянного мониторинга, а также выбирать маршрут не просто минимальной стоимости, а такой, вдоль которого гарантированно выполняются требования различных приложений к качеству их обслуживания.

2. Протокол маршрутизации должен обеспечивать сбалансированное использование сетевых ресурсов (Load-Balancing Routing), что требует перехода от однопутевых к многопутевым стратегиям.

3. Задача маршрутизации должна решаться в комплексе с задачами управления доступом и резервирования ресурсов.

На основании вышеизложенного можно сделать вывод, что в рамках перспективных протоколов маршрутизации необходимо руководствоваться концепцией сервера маршрутов в сочетании с концепцией предвычисления путей и иерархическим представлением топологической информации как средств обеспечения масштабируемости, что ориентирует на поиск новых, более конструктивных методов управления трафиком в современных мультисервисных сетях телекоммуникаций [1].

2 Комбинаторные и потоковые решения в области QoS маршрутизации

Существуют два основных подхода к поиску решений в области QoS маршрутизации: комбинаторный и потоковый [1]. Представление прикладной задачи как комбинаторной задачи и решение ее путем направленного перебора является одним из распространенных подходов в процессе анализа и синтеза сетей телекоммуникаций. При первом подходе основу существующих протоколов маршрутизации составляют различные алгоритмы кратчайшего пути в графе. Прежде всего, это алгоритмы Дейкстры и Беллмана – Форда, которые обеспечивают нахождение дерева кратчайших в выбранной метрике путей от узла источника ко всем остальным узлам, и вычислительная сложность которых приемлема для реализации в реальном масштабе времени [1]. С появлением концепции NGN и смещением акцентов при оценке алгоритмов управления трафиком на их возможности по поддержке функций QoS графокомбинаторные модели и методы были существенно пересмотрены.

Концепция QoS-маршрутизации требует определения такого пути (путей), между заданной парой узлов-адресатов, вдоль которого будут выполняться требования одновременно по нескольким QoS-показателям (метрикам) [1]. В рамках подобной маршрутизации требования к

QoS-показателям вдоль пути выступают в качестве ограничений на этапе его поиска, задача которого в общем случае может быть сформулирована двояко: как задача поиска пути с ограничениями (Multi-Constrained Path, MCP) или как задача поиска оптимального пути с ограничениями (Multi-Constrained Optimal Path, MCOP) [1]. На основании описанных в литературе моделей и методов в направлении снижения вычислительной сложности задач MCP и MCOP можно указать три основных подхода [1]:

1. Переход от множества простых, одиночных метрик, каждая из которых соответствует одному QoS показателю, к одной композитной (комбинированной), представляющей собой некоторую функцию отдельных метрик.

2. Поочередное использование метрик, т. е. поиск всех путей, удовлетворяющих требованиям в первой метрике, затем поиск среди найденных, но уже с использованием второй метрики и т. д.

3. Замена всего множества метрик одной, той, которая лежит в основе каждой из отдельных метрик и определяет их значения. Так, в рамках первого подхода вместо r аддитивных метрик в качестве комбинированной стоимостной функции пути p предлагается использовать следующие:

$$l(P) = \sum_{i=1}^r d_i w_i(P),$$

$$l(P) = \sum_{i=1}^r \max(w_i(P), L_i),$$

$$l(P) = \left[\sum_{i=1}^r \left(\frac{w_i(P)}{L_i} \right)^q \right]^{1/q}, \quad q > 1,$$

$$l(P) = \max_{1 \leq i \leq r} \left(\frac{w_i}{L_i} \right),$$

где d_i – весовые коэффициенты различных метрик, L_i – допустимое значение метрики w_i .

Наличие единственной метрики позволяет применить известные алгоритмы поиска кратчайшего пути и их всевозможные расширения. В целом задача конструирования метрик как одиночных, так и комбинированных представляет собой отдельный предмет исследований [1].

Учет нескольких QoS параметров и различных требований приложений к значениям этих параметров значительно усложняет задачу маршрутизации [1]. В самом общем виде задача поиска необходимых телекоммуникационных ресурсов может быть сформулирована следующим образом: телекоммуникационные ресурсы необходимо зарезервировать таким образом, чтобы пропускные способности каналов связи обеспечивали маршрутизацию требуемого объема трафика при соблюдении требований заданного качества обслуживания в безаварийной и во всех аварийных ситуациях [8].

Рассмотрим данную задачу более подробно. Пусть $P_{fes}(s,t)$ есть множество QoS-осуществимых путей из s в t . Тогда проблема QoS-маршрутизации может быть сформулирована как модель оптимальной маршрутизации, рассматриваемая на множестве QoS-осуществимых путей $P_{fes}(s,t)$ [8]:

$$\max_{P_{fes}} Y_{s,t} \Leftrightarrow \min_{P_{fes}} (-Y_{s,t}); \min_{P_{fes}} X_{s,t}; \min_{P_{fes}} D_{s,t}; \min_{P_{fes}} J_{s,t}; \quad (2.1)$$

при следующих ограничениях:

$$Y_{s,t} - Y^{\min} \geq 0; X_{s,t} - X^{\min} \geq 0; \quad (2.2)$$

$$D^{\max} - D_{s,t} \geq 0; J^{\max} - J_{s,t} \geq 0;$$

$$Y_{s,t} = \max_{e \in p} \{Y_e\}; D_{s,t} = \sum_{e \in p} D_e;$$

$$J_{s,t} = \sum_{e \in p} J_e; X_{s,t} = \sum_{e \in p} X_e, \quad (2.3)$$

где $Y_{s,t}$ – пропускная способность канала связи от s в t ; $X_{s,t}$ – величина, характеризующая потери пакетов в канале связи от s в t ; $D_{s,t}$ – задержка в передаче информации от s в t ; $J_{s,t}$ – вариации задержки.

Можно выделить следующие особенности модели (2.1)–(2.3), которые не позволяют непосредственно применить для ее решения хорошо известные методы нахождения пути наименьшей стоимости.

1. Критерий оптимальности (2.1), включающий четыре QoS параметра, является векторным. Его можно свернуть, используя, например, аддитивную свертку и решать задачу минимизации на графе скалярной функции $R_{s,t}$

$$\min_p R_{s,t} = \min_p \left(-w_Y \frac{Y_{s,t}}{Y^{\min}} + w_D \frac{D_{s,t}}{D^{\max}} + w_J \frac{J_{s,t}}{J^{\max}} + w_X \frac{X_{s,t}}{X^{\min}} \right). \quad (2.4)$$

Здесь w_Y, w_D, w_J, w_X – весовые коэффициенты, определяющие значимость соответствующих параметров QoS. Тем не менее, в рассматриваемом случае в силу неаддитивности полосы пропускания $Y_{s,t} = \max_{e \in p} \{Y_e\}$ описать каждое ребро графа функцией стоимости R_e , такой, что

$$R_{s,t} = \sum_{e \in p} R_e,$$

оказывается невозможным.

2. Поиск решения должен осуществляться только на подмножестве QoS осуществимых путей, удовлетворяющих условиям (2.2).

Для решения задачи (2.4) с учетом ограничений (2.2)–(2.3) может быть применен модифицированный алгоритм Дейкстры [8]. Модификация заключается в отбрасывании в процессе поиска тех путей, на которых не выполняются ограничения (2.2), и новом способе описания и вычисления меток узлов. В исходном алгоритме Дейкстры метки каждого j -го узла, которого можно достичь из узла s через соседний узел i , имеют вид $[R_{s,j}, i]$, где величина стоимости $R_{s,j}$,

соответствующая данному пути, аддитивна и вычисляется по формуле $R_{s,j} = R_{s,i} + R_{ij}$, где R_{ij} – стоимость ребра e_{ij} , а величина $R_{s,i}$ берется из метки i -го узла. Вместо этого введем метку, имеющую 6 компонент: $[R_{s,j}, Y_{s,j}, D_{s,j}, J_{s,j}, X_{s,j}, i]$. Новую метку при переходе из узла i в узел j будем вычислять следующим образом:

$$D_{s,j} = D_{s,i} + D_{ij};$$

$$J_{s,j} = J_{s,i} + J_{ij};$$

$$X_{s,j} = X_{s,i} + X_{ij};$$

$$Y_{s,j} = \min \{Y_{s,i}, Y_{ij}\}.$$

Таким образом, получим следующую свертку, учитывающую QoS требования:

$$r = -w_Y \frac{Y_{s,j}}{Y^{\min}} + w_D \frac{D_{s,j}}{D^{\max}} + w_J \frac{J_{s,j}}{J^{\max}} + w_X \frac{X_{s,j}}{X^{\min}},$$

$$R_{s,j} = \begin{cases} r, & \text{если для } D_{s,j}, J_{s,j}, X_{s,j}, Y_{s,j} \\ & \text{выполняются условия (2.2);} \\ \infty, & \text{если для } D_{s,j}, J_{s,j}, X_{s,j}, Y_{s,j} \\ & \text{не выполняется хотя бы} \\ & \text{одно из условий (2.2).} \end{cases} \quad (2.5)$$

Предложенный способ формирования метки обеспечивает вычисление параметров QoS, изменяющихся при прохождении пакета из узла i в узел j по ребру e_{ij} , не только путем суммирования, но, фактически, по любой формуле или алгоритму. Это позволяет в дальнейшем уточнять рассматриваемую модель в части способов вычисления параметров QoS по пути p . Поиск оптимального пути только среди QoS осуществимых путей обеспечивается путем формирования функции вида (2.5). При этом алгоритм просмотра узлов, правила замены меток ребер, предложенные Дейкстрой, остаются неизменными.

Примером второго подхода является алгоритм решения задачи поиска пути, удовлетворяющего требованиям по пропускной способности и по задержке. Алгоритм предусматривает два этапа: на первом этапе из графа удаляются все ветви, пропускные способности которых не отвечают выдвинутым требованиям, а на втором этапе в графе, полученном после удаления части ветвей, при помощи алгоритма Дейкстры ищется путь с минимальной задержкой [1].

Третий подход заключается в том, что для случая, например, использования механизма обслуживания очередей WFQ, такие метрики как скорость передачи, межконцевая задержка, джиттер и используемый объем буферной памяти не являются независимыми. Все они представляют собой функции от зарезервированной пропускной способности, выбранного пути и характеристик трафика, а потому исходная задача нахождения пути с множеством ограничений на основании установленной взаимосвязи может быть решена, например, при помощи модифицированного алгоритма Беллмана – Форда [1].

Рассмотрим более подробно потоковые модели маршрутизации. Такие модели, как правило,

формулируются в виде задачи математического программирования: линейного [1], [8], нелинейного [9], целочисленного [10], смешанного [11] с использованием терминологии распределения потока на графах. Обязательным компонентом такой постановки задачи является целевая функция, которая в зависимости от вкладываемого физического смысла подлежит минимизации или максимизации при следующих условиях: сохранении потока; ограниченности сетевых ресурсов, прежде всего пропускной способности трактов передачи (условия отсутствия перегрузки), и неотрицательности потока. В зависимости от уровня рассмотрения потока и физического смысла, вкладываемого в используемые переменные, каждое из перечисленных условий конкретизируется. Например, в работе [12] целевая функция может принимать следующий вид:

$$\sum_{k \in \kappa} \sum_{(i,j) \in \varepsilon} w_{ij} x_{ij}^k \rightarrow \min$$

или

$$\sum_{k \in \kappa} \sum_{p \in \wp_k} w_p x_p^k \rightarrow \min, \quad (2.6)$$

где w_{ij} , w_p – стоимость передачи единицы потока по тракту передачи $(i, j) \in \varepsilon$ и по пути $p \in \wp_k$ соответственно; \wp_k множество путей передачи k -го трафика.

Для (2.6) необходимы следующие ограничения:

- условия сохранения потока:

$$\begin{cases} \sum_{j:(i,j) \in \varepsilon} x_{ij}^k - \sum_{j:(i,j) \in \varepsilon} x_{ij}^k = 0, k \in \kappa, i \neq s_k, t_k; \\ \sum_{j:(i,j) \in \varepsilon} x_{ij}^k - \sum_{j:(i,j) \in \varepsilon} x_{ij}^k = 1, k \in \kappa, i = s_k; \\ \sum_{j:(i,j) \in \varepsilon} x_{ij}^k - \sum_{j:(i,j) \in \varepsilon} x_{ij}^k = -1, k \in \kappa, i = t_k; \end{cases}$$
- условия неотрицательности потока:

$$0 \leq x_{ij}^k \leq 1;$$
- условия отсутствия перегрузки:

$$\sum_{k \in \kappa} d_k x_{ij}^k \leq c_{ij} \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, (i, j),$$

где управляющей переменной служит величина x_{ij}^k , которая характеризует долю k -го трафика, протекающего в тракте $(i, j) \in \varepsilon$; κ – множество трафиков в сети; ε – множество трактов передачи сети; s_k, t_k – соответственно узел-источник и узел-получатель k -го трафика; d_k – интенсивность k -го трафика; c_{ij} – пропускная способность тракта передачи (i, j) ; α – динамически управляемый порог максимальной загруженности каналов сети телекоммуникаций.

Наиболее распространенными в классе задач линейного программирования являются следующие критерии оптимальности [1]:

- 1) минимум стоимостной функции;

- 2) минимум вероятности отказа в обслуживании для вновь поступающего трафика или максимум суммарного обслуженного потока;

- 3) минимум максимального по сети коэффициента использования каналов.

3 Задача о максимальном потоке минимальной стоимости

В работе [13] решается задача модификации методов и алгоритмов, обеспечивающих предельную загрузку и учитывающих заданные параметры QoS при минимальной стоимости – так называемая задача «о максимальном потоке минимальной стоимости». В этой задаче находится не только максимальный поток, но и поток, проходящий по самым «дешевым» с точки зрения веса путям. В результате мы получаем максимизацию по одной функции (максимальный поток) и минимизацию по второй (стоимость). Это достигается следующим образом – стоимости двух потоков сравниваются только при равных значениях пропускных способностей. Иначе поток с большей пропускной способностью считается лучше вне зависимости от его стоимости.

Пусть дана произвольная сеть $G(V, E)$ с источником $s \in V$ и стоком $t \in V$, где ребра $(u, v) \in E$ имеют пропускную способность $c(u, v)$, по которым передается поток $f(u, v)$. Стоимость пересылки единицы потока между u и v обозначим через $a(u, v)$ и задержку – через $d(u, v)$. Таким образом, стоимость пересылки всего потока $f(u, v)$ будет равна $f(u, v) a(u, v)$.

Задача состоит в определении подграфа $G' = (V', E')$ графа $G(V, E)$, который обеспечит бы маршрутизацию трафика и обладал бы минимальной стоимостью ребер при следующих ограничениях:

- поток не может превысить пропускную способность – ограничение пропускной способности:

$$f(u, v) \leq c(u, v);$$

- поток из u в v должен быть противоположным потоку из v в u :

$$f(u, v) = -f(v, u);$$

- сохранение потока:

$$\sum_{w \in V'} f(u, w) = 0$$

для всех $u \in V$, кроме источника и стока.

При поиске подграфа должны быть учтены следующие требования:

- поток по сети является максимальным для данного графа G

$$\sum_{u', v' \in V'} f(u', v') \rightarrow \max,$$

максимальная задержка при передаче в G' должна быть минимальной:

$$\max(d(P_1) \dots d(P_n)) \rightarrow \min; P \in G',$$

где n – количество выбранных путей P подграфа G' , $d(P_n)$ – задержка передачи потока по пути P_n ;

– стоимость потока стремится к минимальной:

$$\sum_{u,v \in V} f(u,v)a(u,v) \rightarrow \min.$$

Для решения поставленной задачи модифицируем алгоритм из задачи о «Максимальном потоке минимальной стоимости» так, что бы при выборе пути учитывалась не только стоимость, но и задержка. Для этого нужно изменить проверку весов дуг в алгоритме Беллмана – Форда. В работе [13] представлен алгоритм решения поставленных задач.

Однако представленный в [13] алгоритм не является оптимальным. Разработанный авторами модифицированный алгоритм приведен на рисунке 3.1.

Модификация состоит в объединении циклов проверок на ограничения по стоимости и задержке, что несколько упростило работу самого алгоритма и, как показали расчеты, повысило его быстродействие примерно на 20%.

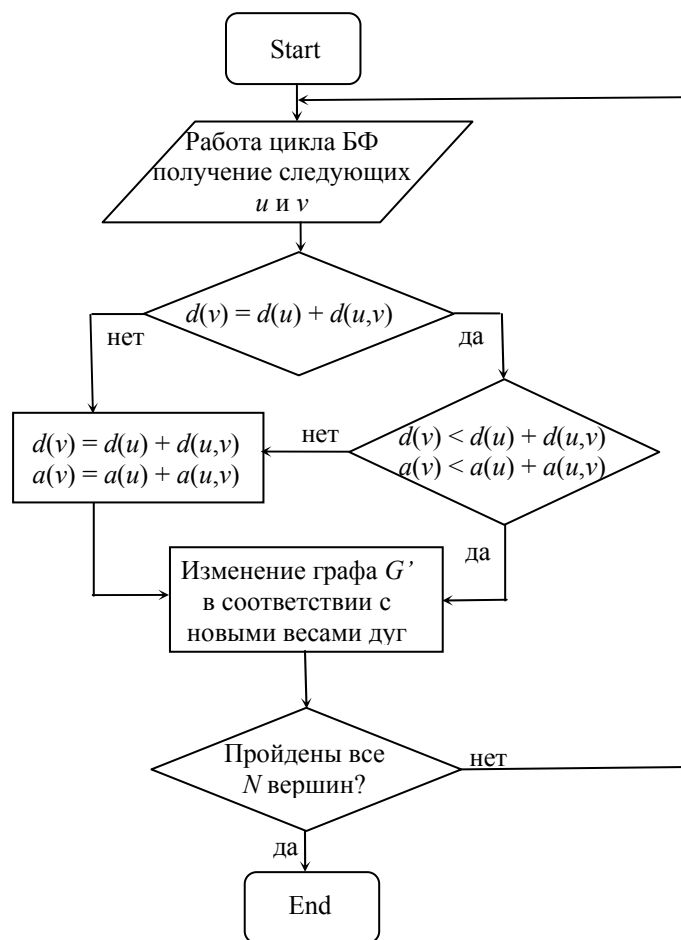


Рисунок 3.1 – Блок-схема алгоритма

Заключение

На основании проведенного как качественного, так количественного анализа различных подходов к решению задач QoS-маршрутизации в качестве основных направлений их дальнейшего развития следует отметить следующие [1].

1. Пересмотр моделей сетей телекоммуникаций и смещение акцентов с графокомбинаторных на потоковые модели динамического характера, что позволит в полной мере реализовать преимущества динамического управления трафиком, основываясь на текущем состоянии сети, например, текущей загруженности канальных и буферных ресурсов. В свою очередь это потребует

пересмотра метрик маршрутов: отказа от метрик, основанных на номинальных или статически конфигурируемых параметрах трактов передачи и маршрутизаторов сети, и перехода к динамическим метрикам, отражающим качество обслуживания.

2. Достижимое качество обслуживания пользователей, а также производительность сети в целом во многом зависят от степени сбалансированного использования сетевых ресурсов. В этом плане одним из эффективных средств повышения качества обслуживания является [13] балансировка трафика не только для равномерной загрузки сетевых ресурсов (канальных и

буферных), но и для обеспечения QoS-требований, достигаемых вдоль различных путей передачи трафика при реализации многопутевой стратегии маршрутизации.

3. Обеспечение согласованности при выборе того или иного маршрута с другими задачами управления трафиком, например, управления доступом, очередями и резервирования ресурсов, путем совместного их решения в рамках единой математической модели сетей телекоммуникаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Евсеева, О.Ю. Обзор технологических и теоретических решений в области маршрутизации на основе качества обслуживания / О.Ю. Евсеева, С.В. Гаркуша // Проблемы телекоммуникаций. – 2012. – № 3 (8). – С. 24–46.

2. *Chao, H.J.* Quality of service control in high-speed networks / H.J. Chao, Guo Xiaolei. – Wiley-IEEE, 2002. – 432 p.

3. Руденко, И. Tsunami Computing, Маршрутизаторы CISCO для IP-сетей / И. Руденко. – М.: Кудиц-Образ, 2003. – 656 с.

4. *Deepankar, M.* Network routing: algorithms, protocols, and architectures / M. Deepankar, K. Ramasamy. – Morgan Kaufmann Publishers, 2007. – 788 p.

5. *A scalable intra-domain resource management architecture for DiffServ networks* / H.A. Mantar, I.T. Okumus, J. Hwang [et al.] // Journal of High Speed Networks. – 2006. – Vol. 15. – P. 185–205.

6. *Руководство по технологиям объединенных сетей*; пер. с англ.; 4-е изд. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2005. – 1040 с.

7. *A Scalable And Efficient Inter-Domain QoS Routing Architecture For DiffServ Networks* / H.A. Mantar, J. Hwang, S.J. Chapin [et al.] // IFIP/IEEE

Eighth International Symposium on Integrated Network Management, 24–28 March 2003: proceedings of the symposium. – P. 463–467.

8. *Листопад, Н.И.* Оптимальная маршрутизация в мультисервисных сетях телекоммуникаций на основе модифицированного алгоритма Дейкстры / Н.И. Листопад, Ю.И. Воротничкий, А.А. Хайдер // Вестник БГУ. Серия 1. – 2015. – № 1. – С. 70–76.

9. *Chen, S.* An overview of quality-of-service routing for the next generation high-speed networks: problems and solutions / S. Chen, K. Nahrstedt // IEEE Network Magazine. – 1998. – Vol. 12. – P. 64–79.

10. *Листопад, Н.И.* Модели обеспечения живучести компьютерных сетей при оптимальной маршрутизации информационных потоков / Н.И. Листопад, А. Матрук Аль Даллаен, А.Г. Копачев. – Информатика. – 2006. – Вып. 4. – С. 39–48.

11. *Riedl, A.* Schupke Routing Optimization in IP Networks Utilizing Additive and Concave Link Metrics / A. Riedl, A. Dominic // IEEE/ACM Transactions on Networking. – 2007. – Vol. 15, Issue 5. – P. 1136–1148.

12. *Seok, Yo.* Dynamic constrained multipath routing for MPLS networks / Yo. Seok, Yo. Lee, Ya Choi // IEEE International Conference on Computer Communications and Networks. – 2001. – Vol. 2, Issue 1. – P. 348–353.

13. *Листопад, Н.И.* Оптимальная маршрутизация информационных потоков с учетом параметров QoS / Н.И. Листопад, И.О. Величkevич // Доклады БГУИР. – 2012. – № 4 (66). – С. 111–116.

Поступила в редакцию 25.04.16.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;

- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).