



ISSN 2077-8708

**Проблемы  
физики,  
математики  
и техники**

**№4 (25) 2015**

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ЖУРНАЛ  
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,  
МАТЕМАТИКИ  
И ТЕХНИКИ»**

*Главный редактор:*  
**А.В. Рогачев** (Беларусь)

*Заместитель главного редактора:*  
**О.М. Демиденко** (Беларусь)

*Редакционная коллегия:*

**В.Е. Агабеков** (Беларусь)  
**П.Н. Богданович** (Беларусь)  
**А.Ф. Васильев** (Беларусь)  
**Го Вэньбинь** (Китай)  
**С.С. Гиргель** (Беларусь)  
**В.И. Громак** (Беларусь)  
**А.Н. Дудин** (Беларусь)  
**В.А. Еровенко** (Беларусь)  
**А.И. Калинин** (Беларусь)  
**Матс Ларссон** (Швеция)  
**В.Д. Мазуров** (Россия)  
**Н.В. Максименко** (Беларусь)  
**Ю.В. Малинковский** (Беларусь)  
**А.Р. Миротин** (Беларусь)  
**В.В. Можаровский** (Беларусь)  
**В.С. Монахов** (Беларусь)  
**Н.К. Мышкин** (Беларусь)  
**Ю.М. Плескачевский** (Беларусь)  
**М.В. Селькин** (Беларусь)  
**И.В. Семченко** (Беларусь)  
**А.Н. Сердюков** (Беларусь)  
**А. Сихвола** (Финляндия)  
**А.Н. Скиба** (Беларусь)  
**С.А. Третьяков** (Финляндия)

*Ответственный секретарь:*  
**Е.А. Ружицкая** (Беларусь)

*Адрес редакции:*

Гомельский государственный  
университет им. Ф. Скорины  
ул. Советская, 104,  
246019, г. Гомель, Беларусь  
Тел. +375(232)60-30-02  
+375(232)60-74-82  
e-mail: [pfmt@gsu.by](mailto:pfmt@gsu.by)  
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL  
JOURNAL  
«PROBLEMS OF PHYSICS,  
MATHEMATICS  
AND TECHNICS»**

*Editor-in-Chief:*  
**A.V. Rogachev** (Belarus)

*Deputy Editor-in-Chief:*  
**O.M. Demidenko** (Belarus)

*Editorial board:*

**V.E. Agabekov** (Belarus)  
**P.N. Bogdanovich** (Belarus)  
**A.F. Vasilyev** (Belarus)  
**Guo Wenbin** (China)  
**S.S. Girgel** (Belarus)  
**V.I. Gromak** (Belarus)  
**A.N. Dudin** (Belarus)  
**V.A. Erovenko** (Belarus)  
**A.I. Kalinin** (Belarus)  
**Mats Larsson** (Sweden)  
**V.D. Mazurov** (Russia)  
**N.V. Maksimenko** (Belarus)  
**Yu.V. Malinkovsky** (Belarus)  
**A.R. Mirotin** (Belarus)  
**V.V. Mozharovsky** (Belarus)  
**V.S. Monakhov** (Belarus)  
**N.K. Myshkin** (Belarus)  
**Yu.M. Pleskachevsky** (Belarus)  
**M.V. Selkin** (Belarus)  
**I.V. Semchenko** (Belarus)  
**A.N. Serdyukov** (Belarus)  
**A. Sihvola** (Finland)  
**A.N. Skiba** (Belarus)  
**S.A. Tretyakov** (Finland)

*Executive Secretary:*  
**E.A. Ruzhitskaya** (Belarus)

*Edition address:*

*F. Scorina Gomel State University*  
*Sovetskaya Str., 104,*  
*246019, Gomel, Republic of Belarus*  
*Ph. +375(232)60-30-02*  
*+375(232)60-74-82*  
*e-mail: [pfmt@gsu.by](mailto:pfmt@gsu.by)*  
*website: <http://pfmt.gsu.by>*

# ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

## НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 4 (25) 2015

### СОДЕРЖАНИЕ

#### ФИЗИКА

<b>Васькевич В.В., Коваленко Д.Л., Семченко А.В., Сидский В.В., Ковалевич М.А.</b> Наноструктурированные фотокаталитические золь-гель покрытия на основе титана . . . . .	7
<b>Гиргель С.С.</b> Обобщенные пучки Бесселя – Гаусса непрерывного порядка . . . . .	11
<b>Косенок Я.А., Гайшун В.Е., Тюленкова О.И., Савицкая Т.А., Кимленко И.М., Шахно Е.А.</b> Влияние ультразвуковой обработки на размер частиц в суспензиях на основе наноразмерного диоксида кремния . . . . .	16
<b>Митюрин Г.С., Черненко Е.В., Сердюков А.Н.</b> Фотодефлекционный сигнал, генерируемый бесселевым световым пучком в плотном слое углеродных нанотрубок . . . . .	20
<b>Рогачёв А.В., Федосенко Н.Н., Горбачёв Д.Л.</b> Многослойные плёночные поляризаторы на основе тугоплавких оксидов . . . . .	27
<b>Стаськов Н.И.</b> Аналитическое решение обратной спектрофотометрической задачи для прозрачного слоя на поглощающей подложке . . . . .	31
<b>Тюменков Г.Ю.</b> О методе расчета статистического веса неидеального газа на основе энтропии критического состояния . . . . .	38
<b>Хорошко В.В., Цырельчук И.Н., Гременок В.Ф., Петлицкий А.Н.</b> Солнечные элементы с $Cu_xIn_xZn_{2-2x}Se_2$ поглощающим слоем . . . . .	41
<b>Шершнев Е.Б., Никитюк Ю.В., Соколов С.И., Шершнев А.Е.</b> Исследование лазерной полировки кварцевого стекла . . . . .	45

#### МАТЕМАТИКА

<b>Белоконь Л.М.</b> О пересечениях максимальных $\theta_\pi$ -подгрупп конечных групп и $\mathfrak{S}$ -абнормально $\pi^1$ -полный подгрупповой $m$ -функтор . . . . .	50
<b>Васильев А.Ф., Мурашко В.И.</b> О влиянии подгруппы Фиттинга на произведения конечных разрешимых групп . . . . .	59
<b>Ерёмина А.Р.</b> Об инвариантности стационарного распределения вероятностей состояний кусочно-непрерывной сети с многорежимным обслуживанием . . . . .	64
<b>Каморников С.Ф.</b> Достаточный признак разрешимой насыщенности формации . . . . .	69
<b>Миротин А.Р., Дыба Р.В.</b> О конечномерных и ядерных ганкелевых операторах в пространствах Харди $H^2$ на компактных абелевых группах . . . . .	74
<b>Сафонов В.Г., Сафонова И.Н.</b> О коммутативных полугруппах разрешимых тотально $\omega$ -насыщенных формаций . . . . .	80
<b>Шамоян Р.Ф., Зайцева О.А.</b> О следах в некоторых новых аналитических пространствах типа Герца в областях Зигеля в $\mathbb{C}^n$ . . . . .	87

#### ИНФОРМАТИКА

<b>Кулинченко В.Н., Демиденко О.М.</b> Изучение влияния внешних помех на качество сигнала в сетях Wi-Fi . . . . .	96
<b>Курочка К.С., Трубенко Д.Н., Стефановский И.Л.</b> Моделирование собственных колебаний многослойных плит в структуре каркасного здания . . . . .	100

**Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»**

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь  
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

**Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):**  
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**  
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

---

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*  
Корректоры *Г. Н. Петухова, Т. А. Фицнер*  
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 02.12.15. Формат 60×84  $\frac{1}{8}$ . Бумага офсетная. Гарнитура Times.  
Усл. печ. л. 12,3. Уч.-изд. л. 10,7. Тираж 100 экз. Заказ № 732.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования  
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.  
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013  
ул. Советская, 104, 246019, Гомель

---

© Учреждение образования  
«Гомельский государственный  
университет имени Франциска Скорины», 2015  
© Проблемы физики, математики и техники, 2015  
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2015

# PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

*Published since December, 2009*

There are 4 times a year

№ 4 (25) 2015

## CONTENTS

### PHYSICS

<b>Vaskevich V.V., Kovalenko D.L., Semchenko A.V., Sidsky V.V., Kovalevich M.A.</b> Nanostructured photocatalytic sol-gel coating based on titanium . . . . .	7
<b>Girgel S.S.</b> Generalized Bessel – Gaussian beams of continuous order . . . . .	11
<b>Kosenok Ya.A., Gaishun V.E., Tyulenokova O.I., Savitskaya T.A., Kimlenko I.M., Shakhno K.A.</b> Influence of ultrasonic dispergation on the particle size in suspension based on nanosized silica dioxide . . . . .	16
<b>Mityurich G.S., Chernenok E.V., Serdyukov A.N.</b> Photodeflectional signal generation by Bessel light beam in dence layer of carbon nanotubes . . . . .	20
<b>Rogachev A.V., Fedosenko N.N., Gorbachev D.L.</b> Multifilm polarizers based on refractory oxides . . . . .	27
<b>Stas'kov N.I.</b> The analytical solution of the inverse problem for the spectrophotometric transparent layer on an absorbing substrate . . . . .	31
<b>Tyumenkov G.Yu.</b> On the method of calculating the statistical weight of a non-ideal gas based on entropy of the critical state . . . . .	38
<b>Khoroshko V.V., Tsyrelchuk I.N., Gremenok V.F., Pyatlitski A.N.</b> Solar cells with $Cu_xIn_xZn_{2-2x}Se_2$ absorber layer . . . . .	41
<b>Shershnev E.B., Nikitjuk Y.V., Sokolov S.I., Shershnev A.E.</b> Study of laser beam polishing of quartz glass . . . . .	45

### MATHEMATICS

<b>Belokon L.M.</b> On the intersections of the maximal $\theta_\pi$ -subgroups of finite groups and a subgroup $\mathfrak{F}$ -abnormally $\pi'$ -full $m$ -functor . . . . .	50
<b>Vasil'ev A.F., Murashka V.I.</b> On the influence of the Fitting subgroup on the products of finite soluble groups . . . . .	59
<b>Eryomina A.R.</b> On insensibility of stationary distribution of state probabilities of piecewise continuous queueing network with multimode servicing . . . . .	64
<b>Kamornikov S.F.</b> A sufficient condition for a formation to be solubly saturated . . . . .	69
<b>Mirotin A.R., Dyba R.V.</b> On finite dimensional and nuclear operators in Hardy spaces $H^2$ on compact Abelian groups . . . . .	74
<b>Safonov V.G., Safonova I.N.</b> On commutative semigroups of soluble totally $\omega$ -saturated formations . . . . .	80
<b>Shamoyan R.F., Zaytseva O.A.</b> On sharp traces of some new analytic Herz-type spaces in Siegel domains in $\mathbb{C}^n$ . . . . .	87

### INFORMATION SCIENCE

<b>Kulinchenko V.N., Demidenko O.M.</b> Studying of the influence of external noises on the signal quality in Wi-Fi networks . . . . .	96
<b>Kurochka K.S., Trubenok D.N., Stefanovsky I.L.</b> Simulation of natural oscillations in the hollow-core slabs in structure of the frame buildings . . . . .	100

***Founder – Francisk Scorina Gomel State University***

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus  
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

***The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):***

- Technics (Informatics, Computer Science and Control);***
- Physics and Mathematics.***

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 661.882

## НАНОСТРУКТУРИРОВАННЫЕ ФОТОКАТАЛИТИЧЕСКИЕ ЗОЛЬ-ГЕЛЬ ПОКРЫТИЯ НА ОСНОВЕ ТИТАНА

**В.В. Васькевич, Д.Л. Коваленко, А.В. Семченко, В.В. Сидский, М.А. Ковалевич**

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*

## NANOSTRUCTURED PHOTOCATALYTIC SOL-GEL COATING BASED ON TITANIUM

**V.V. Vaskevich, D.L. Kovalenko, A.V. Semchenko, V.V. Sidsky, M.A. Kovalevich**

*F. Scorina Gomel State University*

Представлен золь-гель метод получения покрытий на основе этоксида титана. Определены оптимальные условия синтеза и описаны параметры, влияющие на свойства получаемых материалов. Проведены исследования структурных и фотокаталитических свойств покрытий на основе диоксида титана. Исследовано влияние концентрации ионов церия на морфологию поверхности сформированных титановых покрытий.

**Ключевые слова:** золь-гель технология, покрытие, структурные свойства, фотокаталитические свойства.

The sol-gel method for the production of coatings based on titanium ethoxide is described. The optimal synthesis conditions and the parameters affect on the properties of the resulting materials are described. Investigations of structural and photocatalytic properties have been made. The effect of the concentration of cerium ions on the surface morphology of formed titanium coatings has been discussed.

**Keywords:** sol-gel process, film, structural properties, photo catalytic properties.

### **Введение**

В настоящее время наряду с увеличением темпов роста промышленного производства и хозяйственной деятельности обостряется проблема очистки воды. Существующие на сегодняшний день сорбционные, деструктивные и разделительные технологии лишь частично решают проблему загрязнения воды, так как предусматривают дополнительное обезвреживание и захоронение отходов, скапливающихся на поверхности сорбентов или фильтров в процессе очистки. Фотокаталитический метод выгодно выделяется на фоне указанных технологий и обладает комплексом положительных свойств [1]. Так, применение данного метода снижает объемы выброса в атмосферу окислителей типа хлора и озона, устраняет необходимость обезвреживания отходов, так как его реализация не связана с накоплением загрязнителей, требующих последующей утилизации [2].

Использование наноструктурированных материалов создает благоприятные предпосылки для эффективного решения задач по очистке воды от органических загрязнений и инфекционных агентов [3]. Установлено, что окислительно-восстановительные реакции на поверхности плёнок на основе диоксида титана разлагают загрязнения до экологически безопасных составляющих. Стимулирующим фактором в данных процессах выступает фотоэлектрический катализ, протекающий под воздействием излучения видимого и ультрафиолетового диапазона.

Среди наиболее перспективных технологических подходов к созданию наноструктурированных фотокаталитических покрытий на основе оксидов титана выделяется золь-гель метод, основанный на осаждении гидролизованых металлоорганических соединений титана с последующей кристаллизацией при термической обработке. Данный метод позволяет в широких пределах варьировать физико-химические свойства получаемых покрытий и достигать значительного взаимодействия компонент плёнообразующего раствора.

В этой связи актуальной представляется задача разработки методики синтеза и исследование наноструктурированных фотокаталитических золь-гель покрытий на основе металлоорганических соединений титана, для применения их в системах очистки воды и комбинированной очистки водно-воздушных смесей.

### **1 Экспериментальная часть**

Синтез получаемых в работе покрытий можно разделить на следующие стадии:

1. Приготовление плёнообразующего раствора (смешивание исходных компонентов).
2. Созревание плёнообразующего раствора (прохождение реакций гидролиза и поликонденсации).
3. Нанесение пленки на поверхность подложки.
4. Окончательное формирование пленки (сушка и термообработка).

При проведении гидролиза различных соединений титана (алкоксидов и неорганических солей титана, главным образом оксидов) в водных и безводных растворах, первичными продуктами, при низких значениях pH, являются основные соли переменного состава. При более высоких значениях pH образуются гидратированные формы диоксида титана, которым приписывают формулу  $Ti(OH)_2$  или  $TiO_2 \cdot nH_2O$ , где  $n$  зависит от условий старения и сушки. Свежеосажденный гидратированный диоксид титана обладает большой адсорбционной способностью по отношению, как к катионам, так и к анионам. Содержание и природа примесей в  $TiO_2$  зависят от pH среды при осаждении, природы осадителя и исходного соединения титана. В данной работе для получения пленкообразующих растворов в качестве исходного алкоксидов титана был выбран диоксид титана, так как проведение гидролиза диоксида титана в безводном изопропиловом спирте с добавлением строго определенного количества ультрачистой воды в мягких условиях приводит к формированию стабильного раствора.

Пленкообразующие растворы были приготовлены следующим образом. Требуемое количество диоксида титана смешивали с безводным изопропиловым спиртом, добавляли в полученную смесь водный раствор соляной кислоты и перемешивали. Так как протекание реакции гидролиза в системах на основе алкоксидов титана требует много времени, приготовленный раствор выдерживали при комнатной температуре в течение 5–7 суток. Для дополнительного исследования после созревания в полученный раствор вводили соли хлорида цинка от 1 масс. % до 5 масс. % и выдерживали раствор еще сутки для стабилизации кислотно-щелочного баланса. Готовые пленкообразующие растворы наносили на заранее подготовленные подложки из кремния, кварцевого стекла и металла методами центрифугирования и окупания. После нанесения полученные образцы помещали в муфельную печь для пошаговой термообработки на воздухе от 100°C до 800°C.

## 2 Результаты и их обсуждение

По описанной выше методике были получены прозрачные однородные покрытия на поверхности кремния при температурах обработки 400, 600, 700 и 800°C. Результаты рентгенофазового анализа показали, что низкотемпературный отжиг ( $T \leq 400^\circ C$ ) не приводит к образованию активных  $TiO_2$  частиц в полученных пленках. На дифрактограммах пленок, сформированных на основе диоксида титана (рисунок 2.1) видно, что кристаллы  $TiO_2$ , кристаллизующиеся в фазу брукита и выступающие в последствии в качестве активных центров в фотокаatalитических реакциях, образуются при температуре  $T \geq 600^\circ C$ .

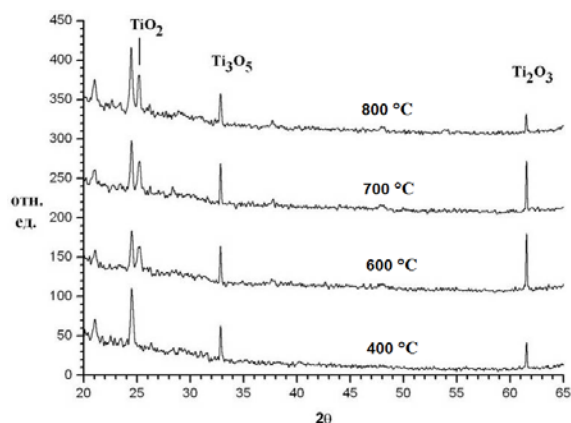


Рисунок 2.1 – Дифрактограммы золь-гель покрытий, сформированных на основе диоксида титана

При дальнейшем росте температуры термообработки до 800°C происходит увеличение интенсивности линий, обусловленных присутствием брукита в исследованных покрытиях ( $2\theta = 25.24^\circ$ ). Данная модификация диоксида титана по фотокаatalитической активности превосходит анатаз и рутил [4]. Интенсивность пиков  $Ti_2O_3$  ( $2\theta = 61.55^\circ$ ) снижается с увеличением температуры отжига от 600°C до 800°C. Таким образом, присутствие брукита в исследованных тонкопленочных системах обуславливает возможность их использования в качестве покрытий с самоочищающейся поверхностью, а также создание систем очистки воды на базе фильтров, выполненных из набора металлических сеток с активным фотокаatalитическим покрытием.

На рисунке 2.2 представлены результаты микроскопических исследований покрытий, сформированных на основе диоксида титана, легированного ионами Се (1 масс.%). Для данного покрытия характерна пористая структура с цепочками длиной  $l \approx 2,5$  мкм, составленными из пор со средним поперечным размером  $d \approx 95$  нм.

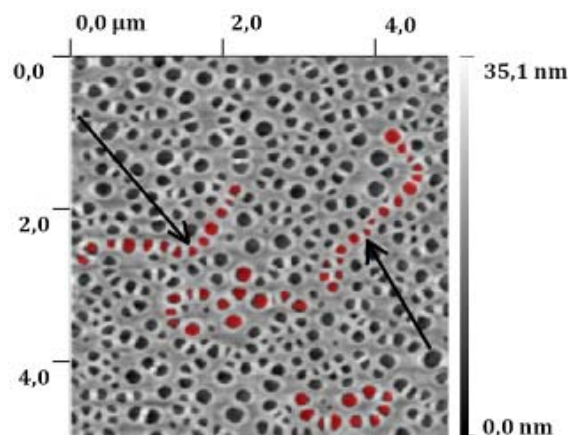


Рисунок 2.2 – Топография поверхности образца  $TiO_2:Ce$  1 масс. %. Стрелки указывают на цепочки, образованные порами

В образце с концентрацией Се 2 масс. % образуются кольцеобразные частицы (рисунок 2.3), внешний и внутренний радиусы которых составляют 460 и 250 нм соответственно. Дальнейшее увеличение концентрации церия в плёнообразующем золе приводит к увеличению размеров кольцеобразных частиц, образующих менее структурированную поверхность, образуются незамкнутые кольцеобразные частицы.

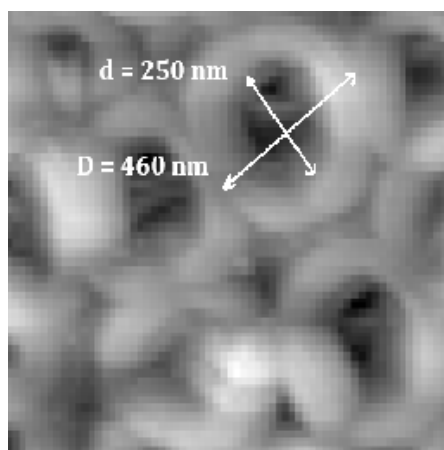


Рисунок 2.3 – Топография поверхности образца Ti:Ce – 2 масс. % (поле  $1,26 \times 1,05 \text{ мкм}^2$ ). Внешний ( $D$ ) и внутренний ( $d$ ) радиусы кольцеобразных участков

Анализ статистических данных (таблица 2.1), полученных по результатам исследования морфологии поверхности плёнок методом атомно-силовой микроскопии показал, что наименьшей субшероховатостью характеризуется образец титанового покрытия, содержащий Се – 1 масс. %.

Таблица 2.1 – Результаты измерения толщины и шероховатости покрытий, сформированных на основе TiO<sub>2</sub>

№ образца	До-пант	Содержание допанта масс. %	Толщина, нм	Субшероховатость $R_a$ , нм
3.2.1. Ti(C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> O) <sub>4</sub>	Ce	5	141	5,69
3.2.2. Ti(C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> O) <sub>4</sub>	Ce	2	126	4,32
3.2.3. Ti(C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> O) <sub>4</sub>	Ce	1	119	3,28

С увеличением пористости структуры покрытия площадь смачиваемой поверхности увеличивается, что приводит к росту адсорбции, и в процессе фотокатализа увеличивается количество разрушаемых органических загрязнителей.

Фотокаталитическая активность полученных материалов была исследована на модельных реакциях фотокаталитического окисления метиленового синего при облучении фотонами ультрафиолетового света.

Для этих целей была изготовлена экспериментальная установка, представляющая собой

рабочую камеру с излучателем ультрафиолетового света и фильтра на основе латунных сеток с фотокаталитическим покрытием (рисунок 2.4).

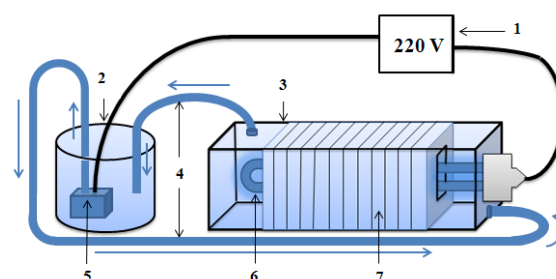


Рисунок 1.4 – Схема установки для исследования фотокаталитических свойств полученных покрытий

- 1 – источник питания;
- 2 – колба;
- 3 – рабочая камера;
- 4 – резиновые шланги;
- 5 – насос;
- 6 – УФ лампа;
- 7 – фильтр из ряда латунных сеток с фотокаталитическим покрытием

Объём рабочей камеры был смоделирован с учётом размеров источника ультрафиолетового излучения и максимальной проектируемой производительности установки, то есть с учётом необходимости обеспечения облучённости ультрафиолетовым излучением, находящимся в рабочей камере фильтра. Сборка частей камеры осуществлялась с использованием винтовых соединений. В качестве источника излучения использовалась малогабаритная люминесцентная U-образная лампа, излучающая в диапазоне ультрафиолетовой и видимой области спектра излучения от 300–450 нм. Подача раствора в рабочую камеру установки осуществлялась с помощью внутреннего компрессора SOBO WP – 330F.

Результаты исследования показали уменьшение концентрации метиленового синего в растворе до 1–2% от его первоначальной концентрации за 7 часов работы установки, что является хорошим результатом для установок с маленькой площадью рабочей поверхности фотокаталитического материала.

### Заключение

Исследования структурных свойств методом рентгенофазового анализа TiO<sub>2</sub> плёнок, сформированных при температурах более 600°C, показали образование кристаллов TiO<sub>2</sub> в форме брукита, выступающих в качестве активных центров в фотокаталитических реакциях. Методом АСМ исследовано влияние концентрации ионов церия на морфологию поверхности сформированных покрытий. Установлено, что титановые плёнки, легированные церием, характеризуются

присутствием пор, размеры и количество которых зависят от концентрации соли церия в исходном пленкообразующем золе. Результаты исследования фотокаталитических свойств  $\text{TiO}_2$  пленок, легированных церием, на примере реакции фотокаталитического окисления метиленового синего показывают снижение концентрации метиленового синего в растворе до 1–2% от его первоначальной концентрации, что является хорошим результатом для установок с маленькой площадью рабочей поверхности фотокаталитического материала. Разработанные покрытия могут найти свое применение в небольших циклических системах очистки воды в качестве окислительных фотокаталитических материалов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Fujishima, A.* TiO photocatalysis and related surface phenomena / A. Fujishima, X. Zhang, D.A. Tryk

// *Surface Science Report.* – 2008. – Vol. 63. – P. 515–582.

2. *Артемьев, Ю.М.* Введение в гетерогенный фотокатализ / Ю.М. Артемьев, В.К. Рябчук. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1999. – 304 с.

3. *Способ получения дисперсий  $\text{TiO}_2$  в форме наночастиц, дисперсии, полученные указанным способом, и применение дисперсий  $\text{TiO}_2$  для придания поверхностям заданных свойств:* пат. 2399589 РФ, МПК C01G23/053. / Дж. Балди, М. Битосси, А. Барцанти // заявл. 20.01.2009; опубл. 20.09.2010. – 11 с.

4. *Xingtao, G.* Titania-silica as catalysts: molecular structure characteristics and physico-chemical properties / G. Xingtao, I.E. Wachs // *Catalysis Today.* – 1999. – Vol. 51. – P. 233–254.

*Поступила в редакцию 09.11.15.*

УДК 535.42+537.86

## ОБОБЩЕННЫЕ ПУЧКИ БЕССЕЛЯ – ГАУССА НЕПРЕРЫВНОГО ПОРЯДКА

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

## GENERALIZED BESSEL – GAUSSIAN BEAMS OF CONTINUOUS ORDER

S.S. Girgel

F. Scorina Gomel State University

Предложены новые решения параболического уравнения, описывающие обобщенные пучки Бесселя – Гаусса непрерывного порядка. Они характеризуются тремя свободными непрерывными параметрами и обладают спиральным волновым фронтом. Установлены ограничения на эти параметры, при которых исследуемые фракционные пучки переносят конечную мощность. Проведено графическое моделирование таких пучков.

**Ключевые слова:** фракционные пучки, пучки Бесселя – Гаусса, квадратичная интегрируемость.

The new solutions of the parabolic equation featuring the generalized Bessel – Gaussian beams of the continuous order are offered. They are characterized by three free continuous parameters and possess a spiral wave front. Restrictions on these parameters at which the explored fractional beams transfer terminating power are discovered. Graphic simulation of such beams is held.

**Keywords:** fractional beams, beams of Bessel – Gaussian, square integrability.

**Введение**

В последнее время наблюдается бум в поиске и исследовании новых типов световых пучков [1]–[5]. Большой интерес привлекают пучки Бесселя и пучки Бесселя – Гаусса (ПБГ) [6]–[10]. Как хорошо известно [6], пучки Бесселя обладают уникальным свойством бездифракционности. Вместе с тем, они переносят бесконечную мощность и не могут быть реализованы практически. Использование гауссовой аподизации функций Бесселя позволяет перейти к скалярным ПБГ [7], которые переносят конечную мощность и могут быть реализованы практически, хотя свойство бездифракционности, строго говоря, при этом нарушается. Свойства векторных ПБГ исследовались нами в [11], [12]. В данной работе вводится новый тип пучков (фракционные обобщенные ПБГ), найдены условия их физической реализуемости и обсуждаются их физические свойства.

**1 Новый тип ПБГ**

Будем исходить из 3D параболического уравнения [1]

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) f(x, y, z) = 0, \quad (1.1)$$

описывающего скалярные параксиальные монохроматические световые пучки, распространяющиеся в направлении оси  $z$ . Перейдя к цилиндрической системе координат путем стандартной подстановки  $\{x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi\}$  получаем

$$\left( \frac{\partial}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) f = 0. \quad (1.2)$$

Разделяя переменные, находим частное решение

$$f_B(\rho, \varphi, z) = J_\nu(K\rho) \exp(i\nu\varphi) \exp\left(\frac{-iK^2 z}{2k}\right), \quad (1.3)$$

где параметры  $\nu$  и  $K$  – постоянные разделения переменных, а  $J_\nu$  – функции Бесселя I рода [13]. Поэтому выражение (1.3) описывает параксиальные пучки Бесселя. В случае классических пучков Бесселя  $K = k_\perp$ , где  $k_\perp$  – вещественная поперечная составляющая волнового вектора  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_\perp + \mathbf{k}_\parallel$  и, кроме того, порядок (индекс)  $\nu$  является целочисленным [1]. С физической точки зрения пучок Бесселя представляет суперпозицию плоских монохроматических волн, волновые векторы каждой из которых расположены по круговому конусу вокруг оси  $z$ .

Пучки Бесселя обладают бесконечной энергией. Чтобы найти соответствующие решения для ПБГ с конечной энергией, надо выполнить гауссову аподизацию выражения (1.3). С этой целью проще всего к параксиальному уравнению (1.3) применить преобразование Аппеля [14], которое мы представим в форме

$$f(\mathbf{r}, z) \rightarrow G \cdot f\left(\frac{r}{\beta q}, -\frac{1}{\beta^2 q}\right). \quad (1.4)$$

Здесь гауссиан  $G = \frac{1}{q} \exp\left(\frac{i\rho^2}{2q}\right)$ , комплексный параметр пучка  $q = z - q_0$ . Размерный коэффициент  $\beta$  можно взять в виде  $\beta = i/z_0$ . Величины  $w_0$  и  $z_0 = kw_0^2/2$  – характерные размеры пучка

вдоль осей  $OX$  и  $OZ$  соответственно. Теперь получаем

$$f_{BG} = \frac{1}{q} \left[ i \left( \frac{k}{2q} \left( \rho^2 - \left( \frac{Kz_0}{k} \right)^2 \right) + \nu\varphi \right) \right] \times \times J_\nu \left( \frac{-iK\rho z_0}{q} \right). \quad (1.5)$$

Последнее выражение позволяет также интерпретировать исследуемые ПБГ, как децентрированные пучки.

Фракционные ПБГ зависят от трех переменных  $(\rho, \varphi, z)$  и пяти параметров  $(k, K, z_0, q_0, \nu)$ . Число независимых свободных параметров можно уменьшить, если перейти к безразмерным величинам соотношениями:  $R = \rho/w_0$ ,  $Z = z/z_0$ ,  $K_\perp$ . Введем также безразмерный параметр пучка  $Q = q/z_0 \equiv Z - Q_0$ . Теперь число независимых параметров уменьшилось до трех:

$$f_{BG} = \frac{1}{Q} \exp \left[ \frac{i}{Q} \left( R^2 - \frac{K_\perp^2}{4} \right) + i\nu\varphi \right] J_\nu \left( \frac{-iK_\perp R}{Q} \right). \quad (1.6)$$

## 2 Условия физической реализуемости новых фракционных ПБГ

Пучок будем считать физически реализуемым, если его комплексная амплитуда является конечной во всем пространстве, а переносимая им мощность через любое сечение, перпендикулярное оси пучка, также является конечной. Эти требования сводятся к непрерывности и квадратичной интегрируемости комплексной амплитуды пучка. Так как при  $\rho \rightarrow \infty$

$$\lim J_\nu(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \cos \left( \rho - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

[13], то отсюда можно получить, что необходимые условия квадратичной интегрируемости спиральных ПБГ –  $Q_0'' > 0$ . Кроме того, функция Бесселя имеет особенность при  $R \rightarrow 0$ . Отсюда следует, что индекс  $\nu$  должен быть неотрицательным.

Поскольку индекс  $\nu$  может принимать непрерывные значения, то фаза при полном обороте вокруг оси пучка также является непрерывной и не обязана быть равной  $2\pi$ . Пучки, обладающие таким свойством, называются фракционными [2]–[5], [15]. Поэтому обсуждаемые нами ПБГ являются также фракционными и имеют спиральный волновой фронт. Следуя терминологии, применяющейся Абрамочкиным и Волосниковым [16], пучки со спиральным волновым фронтом можно называть также спиральными.

Итак, общие условия физической реализуемости фракционных ПБГ (6):

$$Q_0'' > 0 \text{ и } \nu \geq 0. \quad (2.1)$$

При этом на параметр  $K_\perp$  не накладываются никакие ограничения и он может быть произвольным комплексным числом.

## 3 Обсуждение результатов

В классических пучках ПБГ [7], [1], как и в пучках Бесселя, свободный параметр  $K_\perp$  является вещественным. При комплексном параметре  $K_\perp$  и целочисленных значениях  $\nu$  получаем обобщенные ПБГ, введенные в работах [8]–[10]. Обобщенные ПБГ можно интерпретировать [10] как суперпозицию пучков Гаусса, центральные волновые векторы которых расположены по круговому конусу вокруг оси  $OZ$  с углом раствора  $\theta$ , а оси перетяжек парциальных волн размещены в плоскости  $z = 0$  по окружности.

Основными результатами настоящей работы являются выражения (1.6) и (2.1). Непрерывный порядок  $\nu$  дает основание полученные пучки (1.6) трактовать как фракционные обобщенные ПБГ, которые обладают спиральным волновым фронтом. В частных случаях, когда неотрицательный индекс (порядок)  $\nu$  фракционных обобщенных ПБГ (1.6) становится целым числом, наши выражения (1.6) эквивалентны выражениям для обобщенных ПБГ, введенных в работах [8], [9]. Однако наши более общие формулы (1.5) и (1.6) имеют в то же время более простую форму, чем соответствующие формулы в [8]–[10].

Попутно отметим, что после получения важных результатов в физике, как правило, всегда находятся забытые предшественники. Так, пучки Бесселя привлекли всеобщий интерес как бездифракционные, после работ Дурнина [6] в 1987 году. Однако решения уравнения Гельмгольца в виде волновых полей Бесселя были получены математиками гораздо раньше, см., напр., [17]. Аналогично, ПБГ нулевого порядка фактически были получены [18] Шеппардом еще в 1978 году, до работы [7].

В давней работе Валдрона [19] использовалась неортогональная спиральная (цилиндрическая вращающаяся) система координат. Для уравнения Гельмгольца получено решение в виде спиральных волновых полей Бесселя. В отличие от обычных световых полей Бесселя индекс (порядок)  $\nu$  таких полей не обязан быть целым числом, а может пробегать непрерывный спектр значений:  $\nu \geq 0$ . Согласно интерпретации Оверфельт [20] в таких случаях непрерывный индекс  $\nu$  связан не только с угловой фазой, но также является функцией шага спирали волнового фронта и продольной фазовой скорости волны Бесселя.

В работах [2], [3] вводятся новые пучковые решения фракционного порядка для пучков Эрмита – Гаусса и Лагерра – Гаусса. Фракционные ПБГ рассматривались недавно также в [4], однако обсуждаемые нами ПБГ непрерывного порядка  $\nu$  принадлежат другому типу и отличаются от пучков в [4].

Произведем численные оценки. Возьмем радиус гауссова пучка в перетяжке  $w_0 \approx 10^{-3}$  м,

длину волны  $\lambda \approx 6,33 \cdot 10^{-7}$  м, угол раствора конуса  $\theta \approx 10^{-3}$ ,  $Q_0'' = 1$ . Тогда конфокальный параметр  $z_0 = \pi w_0^2 / 2 \approx 5$  м; расхожимость парциальных гауссовых пучков, образующих ПБГ,  $\theta_G = \lambda / (\pi w_0) \approx 1.1 \cdot 10^{-2}$ .

Согласно Гори и др. [7], поведение стандартного ПБГ определено двумя конкурирующими влияниями: угловой апертурой конуса и угловым расширением отдельных гауссовых пучков. Картина интенсивности в поперечном сечении пучка зависит от отношения  $\theta / \theta_G = K_{\perp} / 2$ .

1. При  $K_{\perp} < 2$  картина БГП практически не отличается от картины гауссового пучка.
2. При  $K_{\perp} > 2$  и при малых расстояниях  $Z < 0.2$  ПБГ ведет себя подобно пучку Бесселя. При  $Z \gg 0.2$  вклад функции Бесселя превалирует над вкладом функции Гаусса и картина интенсивности превращается в светлое кольцо.

При комплексных  $K_{\perp}$  и нецелых  $\nu$  картины интенсивности существенно усложняются. Проведем численное моделирование интенсивности обобщенных ПБГ в зависимости от значений его продольной координаты  $Z$  при различных значениях нецелого порядка  $\nu$  и комплексного параметра  $K_{\perp}$ . Будем полагать во всех случаях  $Q_0'' = 1$ , что соответствует обычной нормировке  $q_0'' = z_0$ . На рисунках 3.1–3.3 полагаем  $K_{\perp}' = 15$ , что соответствует преобладанию вклада функции Бесселя над вкладом функции Гаусса. При  $\nu \neq 0$  имеем полый пучок.

На рисунке 3.1 видно, что ПБГ с нецелым порядком ведет себя качественно, как стандартный ПГ. С увеличением расстояния  $Z$  центральные кольца постепенно уменьшаются и при  $Z > 0.2$  исчезают. Взамен на периферии появляется светлое кольцо. Из-за расплывания пучка его интенсивность постепенно уменьшается.

На рисунке 3.2 показано влияние мнимой части параметра  $K_{\perp}$ . Значение параметра  $K_{\perp}'' < 0$  приводит к возникновению значительного периферийного светлого кольца. Оно присутствует всегда, с увеличением  $Z$  постепенно расширяется и доминирует.

Наиболее интересные случаи иллюстрированы на рисунках 3.3 и 3.4, когда  $K_{\perp}'' > 0$ . Картина интенсивности качественно видоизменяется. С увеличением расстояния  $Z$  центральные кольца сначала растут, и только потом постепенно уменьшаются. Это новое явление можно интерпретировать, как самофокусировку пучка. При  $Z < 0$  – картина аналогичная. Таким образом, если  $K_{\perp}'' > 0$ , то пучок самофокусируется при двух значениях  $Z$ . Это новое любопытное свойство самофокусировки пучков в линейной среде, насколько нам известно, не было описано ранее в литературе.

Итак, анализ и графическое моделирование показывают, что картины интенсивности в поперечных сечениях фракционных обобщенных со спиральным волновым фронтом ПБГ (1.6) представляют собой множества колец разной интенсивности и ширины. Всегда, за счет гауссиана, с увеличением  $Z$  ПБГ, в конечном счете, расплывается.

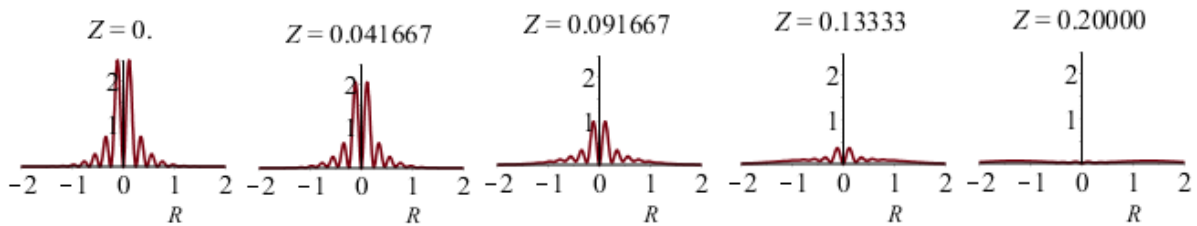


Рисунок 1 – Распределение интенсивности вдоль диаметра поперечного сечения пучка с  $K_{\perp}' = 15$ ,  $\nu = 0.9$  при различных значениях  $Z$

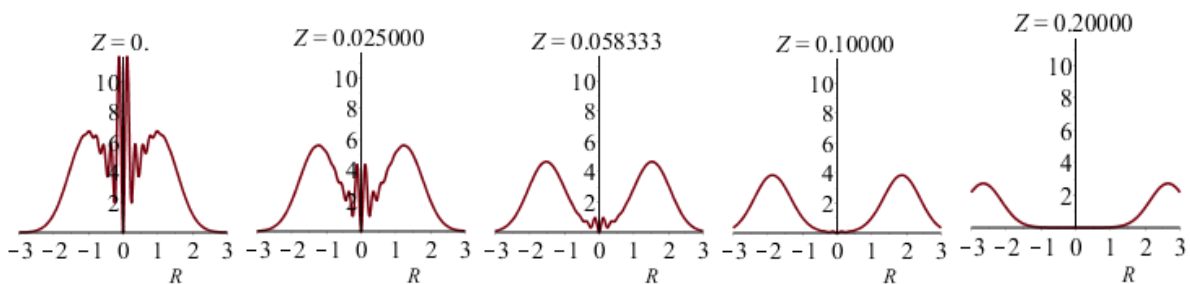


Рисунок 2 – Распределение интенсивности вдоль диаметра поперечного сечения пучка с  $K_{\perp}' = 15 - 2.5i$ ,  $\nu = 0.9$  при различных значениях  $Z$

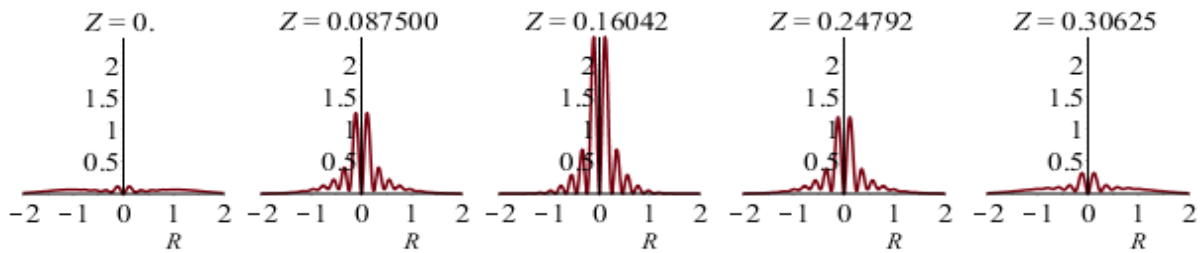


Рисунок 3 – Распределение интенсивности вдоль диаметра поперечного сечения пучка с  $K_{\perp} = 15 + 2.5i$ ,  $\nu = 0.9$  при различных значениях  $Z$

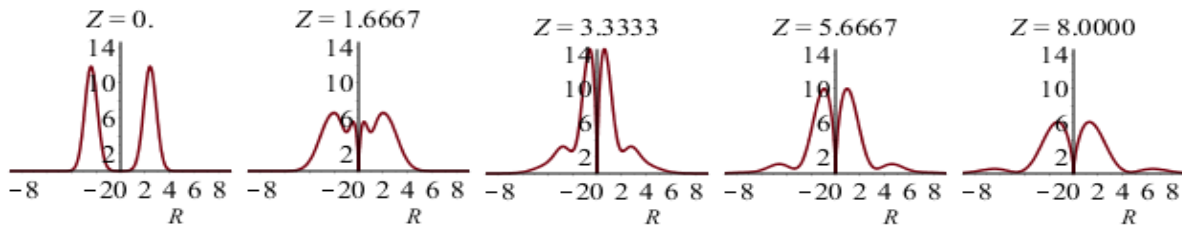


Рисунок 4 – Распределение интенсивности вдоль диаметра поперечного сечения пучка с  $K_{\perp} = 5i$ ,  $\nu = 0.3$  при различных значениях  $Z$

При этом, в отличие от стандартных ПБГ и обычных пучков Лагерра – Гаусса, при увеличении расстояния  $R$  от оси пучка интенсивности и радиусы колец могут изменяться нерегулярным образом.

#### Заключение

Выведены выражения, описывающие новый тип пучков – фракционные обобщенные ПБГ непрерывного порядка, обладающие спиральным волновым фронтом. Они характеризуются тремя свободными параметрами: двумя вещественными непрерывными  $\nu$ ,  $Q_0''$  и комплексным параметром  $K_{\perp}$ . Частными случаями введенных здесь пучков являются известные обобщенные ПБГ с дискретными целочисленными индексами  $\nu$ , а также фракционные пучки Бесселя со спиральным волновым фронтом.

Найдены условия физической реализуемости новых типов пучков во всем пространстве:  $Q_0'' > 0$  и  $\nu \geq 0$ . Одновременный переход от дискретных значений  $\nu$  к непрерывному спектру, а также от вещественных к комплексным значениям  $K_{\perp}$  сильно расширяет класс известных в настоящее время ПБГ. Варьирование новых свободных параметров таких пучков, несомненно, расширяет и предоставляет новые дополнительные возможности создания и исследования пучков с заданными свойствами для последующих практических применений.

Проведено графическое моделирование таких пучков. Установлено, что если  $K_{\perp}'' > 0$ , то, с увеличением расстояния  $Z$  центральные кольца сначала растут, и только потом постепенно

уменьшаются. Это новое явление можно интерпретировать, как самофокусировку пучка. Пучок самофокусируется при двух значениях расстояния  $Z$ :  $Z > 0$  и  $Z < 0$ .

Для экспериментального получения спиральных обобщенных ПБГ могут, в принципе, быть использованы после модернизации некоторые методики получения стандартных ПБГ и фракционных пучков. Так, в работах Тао и др. рассматривались возможности экспериментального получения и изучения фракционных пучков Бесселя (см., например, [5]).

В настоящем сообщении обсуждались скалярные фракционные обобщенные ПБГ. Несложно перейти к соответствующим векторным пучкам с произвольной поляризацией, используя, например, формализм, предложенный нами в [21], [22].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев, А.П. Локализованные световые волны: парааксиальные и точные решения волнового уравнения (обзор) / А.П. Киселев // Оптика и спектроскопия. – 2007. – Т. 102, № 4. – С. 661–681.
2. Gutierrez-Vega, J.C. Fractionalization of optical beams: I. Planar Analysis / Julio C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2007. – Vol. 32, № 11. – P. 1521–1523.
3. Gutierrez-Vega, J.C. Fractionalization of optical beams: II. Elegant Laguerre-Gaussian modes / Julio C. Gutierrez-Vega // Optics Express. – 2007. – Vol. 15, № 10. – P. 6300–6313.
4. Gutierrez-Vega, J.C. Nondiffracting vortex beams with continuous orbital angular momentum order dependence / Julio C. Gutierrez-Vega,

- C. Lopez – Mariscal // J. Opt. A. Pure Appl. Opt. – 2008. – 10015009 (8pp).
5. Tao, S.H. Experimental study of holographic generation of fractional Bessel beams / Shao Hua Tao, Woei Ming Lee, and Xiaocong Yuan // Applied Optics. – 2004. – Vol. 43, № 1. – P. 122–126.
6. Durnin, J. Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory / J. Durnin // JOSA A. – 1987. – Vol. 4, № 4. – P. 651–654.
7. Gori, F. Bessel–Gauss beams / F. Gori, G. Guattari, C. Padovani // Optics Communications. – 1987. – Vol. 64, № 6. – P. 491–495.
8. Generalized Bessel – Gauss beams / V. Bagini [et al.] // Journal of Modern Optics. – 1996. – Vol. 43, № 6. – P. 1155–1166.
9. Imaging of generalized Bessel – Gauss beams / C. Palma [et al.] // Journal of Modern Optics. – 1996. – Vol. 43, № 11. – P. 2269–2277.
10. Santarsiero, M. Propagation of general Bessel-Gauss beams through ABCD optical systems / M. Santarsiero // Optics Communications. – 1996. – Vol. 132. – P. 1–7.
11. Гиргель, С.С. Поляризационные свойства бessel-гауссовых пучков света. Проблемы взаимодействия излучения с веществом / С.С. Гиргель // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2001. – № 6 (9). – С. 150–154.
12. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства векторных бessel-гауссовых световых пучков / С.С. Гиргель // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2006. – № 6 (39), Ч. 1. – С. 49–52.
13. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. II / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1974. – 295 с.
14. Миллер, У. Симметрия и разделение переменных / У. Миллер. – М.: Мир, 1981. – 342 с.
15. Berry, M.V. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps / M.V. Berry // Journal of Optics. – 2003, № 6. – P. 259–268.
16. Абрамочкин, Е.Г. Спиральные пучки света / Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волосников // УФН. – 2004. – Т. 174, № 12. – С. 1273–1300.
17. Стрэттон, Дж.А. Теория электромагнетизма / Дж.А. Стрэттон. – М.: ОГИЗ. ГИТТЛ, 1948. – 539 с.
18. Sheppard, C.J.R. Gaussian-beam theory of lenses with annular aperture / C.J.R. Sheppard, T. Wilson // IEEE J. Microwaves, Optics and Acoustics. – 1978. – Vol. 2. – P. 105–112.
19. Waldron, R.A. A helical coordinate system and its applications in electromagnetic theory / R.A. Waldron // Quart. Journ. Mech. and Applied Math. – 1958. – Vol. XI, Pt. 4. – P. 438–461.
20. Overfelt, P.L. Scalar optical beams with helical symmetry / P.L. Overfelt // Phys. Rev. A. – 1992. – Vol. 46, № 6. – P. 3516–3522.
21. Гиргель, С.С. Свойства векторных параксиальных световых пучков. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1 (10). – С. 11–14.
22. Гиргель, С.С. Свойства векторных параксиальных световых пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 20–24.

Поступила в редакцию 24.09.15.

УДК 546.28

## ВЛИЯНИЕ УЛЬТРАЗВУКОВОЙ ОБРАБОТКИ НА РАЗМЕР ЧАСТИЦ В СУСПЕНЗИЯХ НА ОСНОВЕ НАНОРАЗМЕРНОГО ДИОКСИДА КРЕМНИЯ

Я.А. Косенок<sup>1</sup>, В.Е. Гайшун<sup>1</sup>, О.И. Тюленкова<sup>1</sup>,  
Т.А. Савицкая<sup>2</sup>, И.М. Кимленко<sup>2</sup>, Е.А. Шахно<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины  
<sup>2</sup>Белорусский государственный университет, Минск

## INFLUENCE OF ULTRASONIC DISPERSION ON THE PARTICLE SIZE IN SUSPENSION BASED ON NANOSIZED SILICA DIOXIDE

Ya.A. Kosenok<sup>1</sup>, V.E. Gaishun<sup>1</sup>, O.I. Tyulenкова<sup>1</sup>,  
T.A. Savitskaya<sup>2</sup>, I.M. Kimlenko<sup>2</sup>, K.A. Shakhno<sup>2</sup>

<sup>1</sup>F. Scorina Gomel State University  
<sup>2</sup>Belarusian State University, Minsk

Водные суспензии на основе наноразмерного диоксида кремния получают методом диспергирования аэросила в жидкой среде. Исследуется влияние времени ультразвуковой обработки на размеры частиц диоксида кремния. Показано, что ультразвуковая обработка с одновременным механическим перемешиванием, а также введение поверхностно-активных веществ приводит к формированию большего числа частиц с меньшим размером.

**Ключевые слова:** ультразвуковая обработка, пирогенный диоксид кремния, наноразмерные частицы, кавитация, гидродинамический диаметр.

Water suspensions of nanosized silica dioxide are obtained by dispersing in a liquid medium. The influence of sonication time on the size of the silica particles is investigated. It was shown that ultrasonic treatment with simultaneous mechanical mixing and the introduction of surfactants lead to the formation of larger number of particles with smaller size.

**Keywords:** ultrasonic dispersion, pyrogenic silica dioxide, nanosized particles, cavitation, hydrodynamic diameter.

### Введение

Высокодисперсные пирогенные кремнеземы (аэросилы) широко используются в промышленности благодаря хорошим адсорбционным свойствам, высокой химической стойкости к действию большинства химических реагентов, загущающей способности. Аэросил представляет собой порошок диоксида кремния, состоящий из плотных непористых сферических частиц с размерами от 7 до 40 нм и удельной поверхностью от 50 до 400 м<sup>2</sup>/г. Разброс частиц по размерам обычно достигает 50%. Насыпная плотность аэросила до 50 г/л. При решении некоторых технологических задач (например, в процессе химико-механической полировки) все большее внимание привлекают готовые суспензии на основе наноразмерных частиц аэросила. В жидкой среде частицы пирогенного диоксида кремния обладают способностью образовывать агрегаты и агломераты агрегатов. С уменьшением среднего размера частиц эффект образования агрегатов и агломератов увеличивается. При этом, чем более тонкодисперсным является порошок, тем труднее агломераты диспергировать в жидкости до отдельных агрегатов [1].

Получение материалов сверхтонкой дисперсности имеет значение, так как от степени измельчения зависят многие характеристики материалов.

Существует множество способов измельчения твердых веществ (измельчение сухих порошков, измельчение в жидкой среде с помощью шаровых, струйных и вибрационных мельниц). Однако все они измельчают твердые вещества до размеров не менее 100 мкм и только ультразвуковое диспергирование обеспечивает получение материалов сверхтонкой дисперсности (1 мкм и менее) [2].

Диспергирующее действие ультразвука связано с кавитацией – образованием и захлопыванием полостей в жидкости. Захлопывание полостей сопровождается появлением кавитационных ударных волн, которые и разрушают материал. Суспензии, полученные ультразвуковым методом, отличаются однородностью размеров частиц дисперсной фазы. Экспериментально установлено, что дисперсность находится в прямой зависимости от частоты ультразвуковых колебаний [3]. Вместе с тем мало исследований, посвященных зависимости размера частиц от времени действия ультразвука. Для каждого вещества существует оптимальное время ультразвукового диспергирования, обеспечивающее получение частиц минимального размера. Цель данной работы состоит в исследовании влияния времени ультразвуковой обработки на размер частиц в суспензиях на основе наноразмерного порошка

диоксида кремния, используемых в процессе химико-механической полировки (ХМП) пластин монокристаллического кремния.

### 1 Экспериментальная часть

Для исследований были приготовлены высококонцентрированные суспензии на основе пирогенного кремнезёма ОХ-50 (Degussa AG, Германия), имеющего минимальную удельную поверхность  $50 \text{ м}^2/\text{г}$  и слабую агрегированность первичных частиц ( $d \approx 40 \text{ нм}$ ). Изолированные первичные частицы пирогенных кремнезёмов не наблюдаются как индивидуальные без специальной обработки, за исключением аэросила ОХ-50 [4] (рисунок 1.1). Чем меньше частицы, тем более сильная связь в агрегатах и агломератах. Индивидуальные частицы аэросила ОХ-50 оказываются настолько слабо связанными между собой, что их можно диспергировать до агрегатов коллоидных размеров. Распределение частиц по размерам по данным метода лазерной дифракции для суспензии аэросила ОХ-50 представлено на рисунке 1.2. Для стабилизации суспензий использовали этилендиамин или гидроокись натрия, а также поверхностно-активное вещество (этиленгликоль). После смешения исходных компонент проводилось ультразвуковое диспергирование суспензии на ультразвуковой установке марки УЗО-44-М1 с частотой 40 кГц. Перемешивание вели с помощью фторопластовой лопастной мешалки, скорость перемешивания – 250 об/мин. Диспергирование кремнезёма в золь, состоящего из дискретных первичных частиц, представляет определенные трудности, поскольку слипание частиц меняется в значительной степени.

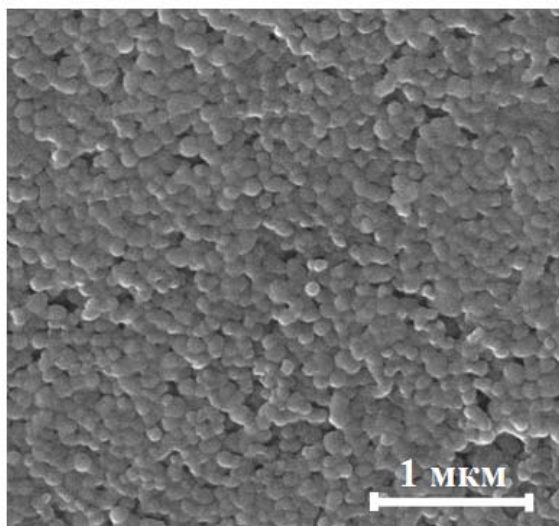


Рисунок 1.1 – СЭМ изображение частиц аэросила ОХ-50

Средний радиус частиц суспензий различного состава определялся по методу Геллера. Под термином «частица» подразумевается частица с гидродинамической точки зрения. Общепринятой

терминологией для методов, основанных на светорассеянии, является описание гидродинамического радиуса или диаметра частиц, которые могут представлять собой как первичные частицы, так и их агрегаты и агломераты [5]. Разбавленные суспензии при концентрации  $\text{SiO}_2$  0,18–0,25 масс. % использовали для уменьшения влияния эффектов агрегации [6]. Оптическую плотность суспензий измеряли на спектрофлуориметре СМ 2203 в диапазоне длин волн от 300 нм до 800 нм.

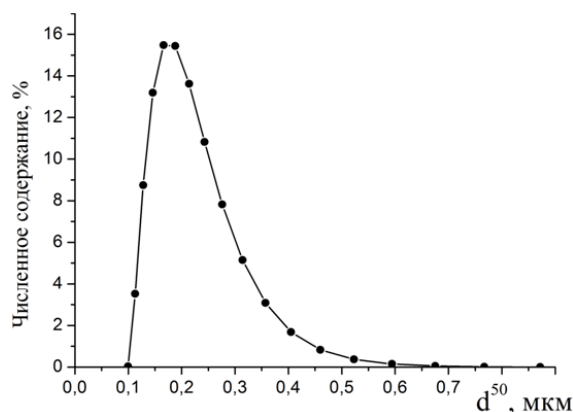


Рисунок 1.2 – Распределение частиц по размерам по данным метода лазерной дифракции для суспензии аэросила ОХ-50

### 2 Результаты и их обсуждение

Водные суспензии на основе пирогенного диоксида кремния используются в процессе ХМП пластин монокристаллического кремния. Размер частиц дисперсной фазы в полирующих композициях влияет не только на качество полируемой поверхности, но и является одним из важнейших критериев, определяющих поведение дисперсных систем.

В [7] экспериментально установлены пределы среднего размера частиц пирогенного диоксида кремния, используемого в полирующих композициях. При среднем размере частиц более 1000 нм при реализации ХМП приповерхностный слой обрабатываемого материала может быть нарушен, что может привести к ухудшению качества полированной поверхности. При среднем размере частиц менее 10 нм повышается вероятность коагуляции частиц в крупные конгломераты, что также может привести к ухудшению качества полированной поверхности при ХМП.

Частицы пирогенного аморфного диоксида кремния имеют правильную сферическую форму. В водной среде эти первичные частицы формируют относительно устойчивые агрегаты или вторичные частицы размером 100–500 нм посредством водородных и электростатических связей [4] и/или через мостики Si–O–Si, образованные благодаря слипанию первичных частиц и плавлению при относительно высоких температурах в процессе синтеза [6]. При более низких

температурах и после отмеченной гидратации поверхности оксидов, агрегаты формируют рыхлые агломераты (более 1 мкм, фрактальная размерность  $\approx 2.1-2.2$ , кажущаяся плотность  $\approx 1-3$  % истинной) через водородные связи, электростатические и полярные взаимодействия [4].

Внешнее механическое воздействие изменяет структуру вторичных частиц. На рисунке 3 представлены графики зависимости эффективного радиуса частиц в водных суспензиях различного состава от времени ультразвуковой обработки. В результате ультразвуковой обработки водных суспензий кремнезёма эффективный диаметр  $D_{ef}$  (средний гидродинамический диаметр) зависит от времени обработки  $t_{us}$ :

$$D_{ef} = F(C_{SiO_2}) \exp(-\alpha t_{us}),$$

где  $F$  – функция, зависящая от концентрации  $C_{SiO_2}$  и диаметра первичных частиц  $d$ ,  $\alpha$  – постоянная для данного образца,  $t_{us}$  – время ультразвуковой обработки.

Например, для нестабилизированной суспензии аэросила ОХ-50 при  $C_{SiO_2}=0,18$  масс. %:

$$D_{ef} = 0,238 + 0,638 \exp\left(-\frac{t_{us}(h)}{0,386}\right) \text{ (мкм)}. \quad (2.1)$$

Численные коэффициенты в выражении (2.1) зависят от состава суспензии, типа стабилизатора и концентрации ПАВ.

Исходя из наших исследований, можно сделать вывод, что вклад силоксановых связей между первичными частицами кремнезёма в стабилизацию агрегатов невелик, что подтверждается литературными данными [4]. Так, даже кратковременная (20–30 минут) ультразвуковая обработка водных суспензий аэросила ОХ-50 (диаметр большинства первичных частиц 40 нм) разрушает значительную часть агрегатов, и эффективный диаметр  $D_{ef}$ , который может быть

на 10–15% больше геометрического [6], около 90% частиц составляет 200–250 нм, хотя остаются или образуются вновь большие агрегаты (более 500 нм). Таким образом, в обработанной концентрированной суспензии аэросила наблюдаются в основном малые агрегаты, состоящие из нескольких первичных частиц, и отдельные первичные частицы, следовательно, связи первичных частиц в агрегатах относительно легко разрушаются, что может быть обусловлено нехимической их природой: Н-связи+электростатические взаимодействия. При разбавлении таких суспензий их стабильность не снижается.

На размер частиц в суспензии влияет дополнительная обработка. Как видно из рисунка 2.1, радиус частиц уменьшается, если суспензия одновременно подвергается механическому перемешиванию и ультразвуковой обработке. Также размер частиц уменьшается, если в суспензию добавляют гидроксид натрия (4 масс. %), этилендиамин (7,1 масс. %) и этиленгликоль (1,6 масс. %). Добавление стабилизирующих веществ и ПАВ, модифицирующих поверхность диоксида кремния, позволяет изменять её лиотропные свойства и, тем самым, препятствовать агрегированию (коагуляции) частиц, которое может привести либо к седиментации крупных агрегатов, либо к образованию пространственных структур, которое завершается формированием геля. Введение в суспензию этилендиамина и NaOH, создающих щелочную среду и соответственно увеличивающих отрицательный заряд частиц диоксида кремния, приводит к повышению устойчивости и более равномерному распределению частиц дисперсной фазы по объёму. Этиленгликоль адсорбируется на поверхности частиц аэросила, обеспечивает её гидрофилизацию и, таким образом, стабилизирует суспензию.

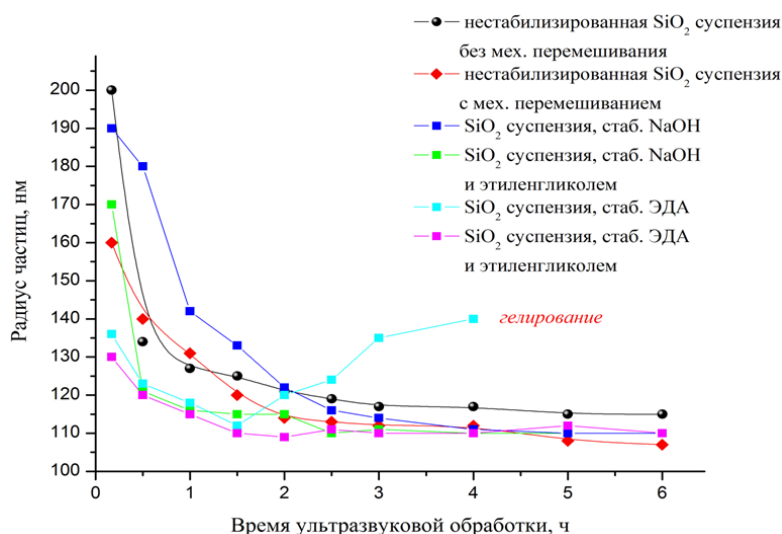


Рисунок 2.1. – Зависимость эффективного радиуса частиц в водных суспензиях пирогенного нанокремнезёма различного состава от времени ультразвуковой обработки

Ультразвуковое диспергирование суспензий происходит за счет кавитации и взаимного трения движущихся и соударяющихся частиц в две фазы. В первой фазе (протекающей в течение нескольких десятков секунд) измельчение происходит благодаря наличию в исходных агрегатах частицах большого количества микротрещин и поэтому трение частиц о жидкость и их взаимные соударения играют определяющую роль. Во второй фазе измельчение происходит за счет кавитационных ударных волн, формирующих в агрегатах частиц новые микротрещины [3].

Для суспензий пирогенного кремнезёма существует оптимальное время ультразвукового диспергирования, обеспечивающее получение частиц минимального размера. Для нестабилизированных суспензий достаточно 2,5–3 ч ультразвуковой обработки с одновременным механическим перемешиванием для равномерного распределения частиц минимально возможного размера по всему объёму системы, что обеспечивает седиментационную устойчивость суспензий. Длительная обработка может приводить к слипанию частиц и образованию грубодисперсных суспензий. Так, ультразвуковая обработка суспензии, стабилизированной этилендиамином, более 2 часов приводит к гелеобразованию.

#### Заключение

В результате проведенных исследований установлено влияние времени ультразвуковой обработки на размер частиц в суспензиях на основе пирогенного диоксида кремния. Оптимальными условиями для получения стабильных водных кремнеземсодержащих суспензий является совмещение механического перемешивания и ультразвукового диспергирования. Размеры агрегатов частиц при ультразвуковом диспергировании могут быть уменьшены с 0,3–0,4 мкм до 210–240 нм. Показана эффективность введения ряда стабилизаторов (NaOH, этилендиамин) и

поверхностно-активных веществ (этиленгликоль) для стабилизации исследуемых наночастиц аэрозоля в суспензиях при оптимальной концентрации.

Эффекты структурной реорганизации суспензий пирогенного нанокремнезёма при разбавлении, старении, механических и химических воздействиях имеют важное значение при использовании их в качестве полирующих.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чуйко, А.А. Структура и химия поверхности кремнезёма / А.А. Чуйко, Ю.И. Горлов, В.В. Лобанов. – Киев: Наук. думка, 2007. – 347 с.
2. Хмельёв, В.Н. Многофункциональные ультразвуковые аппараты и их применение в условиях малых производств, сельском и домашнем хозяйстве: научная монография / В.Н. Хмельёв, О.В. Попова. – Алт. гос. техн. ун-т. им. И.И. Ползунова. – Барнаул: изд. АлтГТУ, 1997. – 160 с.
3. Захарченко, В.Н. Коллоидная химия: учеб. для медико-биолог. спец. вузов / В.Н. Захарченко; 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1989. – 238с.
4. Гунько, В.М. Вода на межфазной границе / В.М. Гунько, В.В. Туров, П.П. Горбик; под ред. В.В. Гончарука. – Киев: Наукова думка, 2009. – 694 с.
5. *Encyclopedia of Analytical Chemistry: Applications, Theory, and Instrumentation*. R.A. Meyers (Ed.) – N.Y.: Wiley, 2000. – 14344 p.
6. *Aqueous Suspensions of Fumed Oxides: Particle Size Distribution and Zeta Potential* / V.M. Gun'ko [et al.] // *Adv. Colloid. Interface Sci.* – 2001. – Vol. 91, №1.– P.1-112.
7. *Способ полирования полупроводниковых материалов*: пат. RU2457574C1, МПК H01L21/302, B82B3/00 / В.М. Андреев, Д.А. Кудряшов, М.Н. Мизеров, Б.В. Пушный; заявка № 2011106341/28 от 18.02.2011; опубл 27.07.2012. бюл № 21.– 7с.

Поступила в редакцию 29.06.15.

УДК 535.016

## ФОТОДЕФЛЕКЦИОННЫЙ СИГНАЛ, ГЕНЕРИРУЕМЫЙ БЕССЕЛЕВЫМ СВЕТОВЫМ ПУЧКОМ В ПЛОТНОМ СЛОЕ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК

Г.С. Митюрин, Е.В. Черненко, А.Н. Сердюков

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*

## PHOTODEFLECTIONAL SIGNAL GENERATION BY BESSEL LIGHT BEAM IN DENCE LAYER OF CARBON NANOTUBES

G.S. Mityurich, E.V. Chernenok, A.N. Serdyukov

*F. Scorina Gomel State University*

Исследовано явление возникновения фотодефлекционного сигнала в слое углеродных нанотрубок типов zigzag и armchair под действием облучения бесселевыми световыми пучками (БСП). Установлено, что скорость диссипации энергии ТЕ-моды БСП существенно зависит от радиальной координаты  $\rho$ , нормированной координаты  $xw = x/w_0$ , угла конусности БСП  $\alpha$ , а также частоты амплитудной модуляции  $\Omega$  БСП.

**Ключевые слова:** фотодефлекционный сигнал, углеродная нанотрубка, бесселевы световые пучки, скорость диссипации энергии, амплитуда фотодефлекционного сигнала, функция Бесселя, уравнение теплопроводности.

The phenomenon of occurrence of photodeflection signal in layer of carbon nanotubes of types zigzag and armchair by irradiation of Bessel light beams (BLB) was investigated. It was found that the rate of energy dissipation TE-mode BLB essentially depends on the radial coordinate  $\rho$ , normalized coordinate  $xw = x/w_0$ . BLB taper angle  $\alpha$ , as well as the frequency of the amplitude modulation  $\Omega$  BLB.

**Keywords:** photodeflection affect, carbon nanotube, Bessel light beam, energy dissipation rate, amplitude of the photodeflection signal, Bessel function, heat equation.

### **Введение**

Интенсивное развитие конструкционных основ элементной базы нанoeлектроники требует особого внимания к изучению электродинамического моделирования наноструктур и нанообъектов. Происходящие на наноразмерном уровне физические явления и процессы существенно отличаются от широко известных в макроскопической электродинамике. Поэтому классические результаты, относящиеся к трехмерным макрообъектам, не могут быть перенесены на нанотрубки и здесь требуются новые фундаментальные исследования, которые решали бы отличные от известных в макроскопической электродинамике задачи [1]–[4]. Развитие современных теоретических разделов электродинамики всегда тесно увязывалось с практическими потребностями квантовой электроники, а в последнее время и с созданием элементов нанoeлектроники [5]–[7].

В рамках модели эффективной среды наноструктуру можно рассматривать как среду с некоей эффективной диэлектрической проницаемостью. Суть данной модели заключается в том, что используется электростатическое приближение, условием которого является малость как размера наночастиц, так и расстоянием между ними по сравнению с длиной оптического излучения в среде. Таким образом, при анализе распространения

электромагнитного излучения в наноструктурах нет необходимости решения уравнения Максвелла в каждой точке пространства. Используя подход, описанный выше, в настоящей работе исследовано явление возникновения фотодефлекционного сигнала в слое углеродных нанотрубок типов zigzag и armchair под действием облучения бесселевыми световыми пучками.

### **1 Теория метода**

Используя модель эффективной среды, можно определить эффективные параметры всей среды как целого, зная оптические параметры каждого из компонентов композитной среды, а также их концентрацию и геометрическую форму [8]. Для этого надо связать электрическую индукцию  $\langle D \rangle$ , усредненную по объему  $V$ , размеры которого намного превышают размеры неоднородностей диэлектрической проницаемости, и величину напряженности внешнего электрического поля  $E_0$

$$\langle D \rangle = \frac{1}{V} \int_V D(r) dr = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon(r) E(r) dr \quad (1.1)$$

В выражении (1.1)  $D(r)$ ,  $E(r)$  и  $\varepsilon(r)$  – локальные (в точке с радиусом-вектором  $r$ ) значения электрической индукции, напряженности электрического поля и диэлектрической проницаемости. Данная

связь определяет эффективную диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_{eff}$  композитной среды:

$$D = \epsilon_{eff} E_0.$$

Локальное поле  $E(r)$  зависит от формы частицы. В самом общем случае интегрирование в формуле (1.1) встречает значительные трудности. Точное определение  $\epsilon_{eff}$  возможно в нескольких исключительных случаях, например в случае ламинарной структуры, состоящей из чередующихся параллельных слоев диэлектриков с проницаемостями  $\epsilon_1, \epsilon_2$ . Для остальных задач приходится рассматривать различные приближения, принимая во внимание локальные поля, которые определяются из решения задач электростатистики. К одним из наиболее широко применяемых моделей эффективной среды относятся модели Максвелла – Гарнета и Бруггемана, что обусловлено прежде всего их физической наглядностью.

В данной работе электронные свойства графена будем описывать законом дисперсии [9]

$$\epsilon(\vec{p}) = \quad (1.2)$$

$$= \pm \gamma_0 \sqrt{1 + 4 \cos(ap_x) \cos\left(\frac{a}{\sqrt{3}} p_y\right) + 4 \cos^2\left(\frac{a}{\sqrt{3}} p_y\right)},$$

учитывающим взаимодействие только трех соседних атомов гексагональной структуры. В выражении (1.2)  $\gamma \approx 2,7$  эВ – интеграл перекрытия,  $a = 3b / 2\hbar$ ,  $p_x, p_y$  – проекции квазиимпульса  $\vec{p}$ , знак «+» соответствует зоне проводимости, а знак «-» – валентной зоне. Законы дисперсии для углеродных нанотрубок типов zigzag и armchair можно легко получить, выполнив подстановки в соотношении (1.2)  $\{p_x \rightarrow p_z, p_y \rightarrow p_\phi\}$  и  $\{p_x \rightarrow p_\phi, p_y \rightarrow p_z\}$  соответственно:

$$\epsilon(\vec{p}) =$$

$$= \pm \gamma_0 \sqrt{1 + 4 \cos(ap_z) \cos\left(\frac{a}{\sqrt{3}} p_\phi\right) + 4 \cos^2\left(\frac{a}{\sqrt{3}} p_\phi\right)},$$

$$\epsilon(\vec{p}) =$$

$$= \pm \gamma_0 \sqrt{1 + 4 \cos(ap_\phi) \cos\left(\frac{a}{\sqrt{3}} p_z\right) + 4 \cos^2\left(\frac{a}{\sqrt{3}} p_z\right)}.$$

Нанотрубки типа armchair обладают металлической проводимостью при всех значениях  $m$ , тогда как нанотрубки типа zigzag являются металлами только при  $m = 3q$ , где  $q$  – целое число.

Как отмечается в [9], одной из важных особенностей углеродных нанотрубок является то, что при помещении УНТ в продольное магнитостатическое поле меняется характер проводимости, и, следовательно, изменяя величину намагниченности можно управлять проводимостью нанотрубок.

Далее рассмотрим уравнение Больцмана, описывающее движение  $\pi$ -электронов по цилиндрической поверхности однослойной нанотрубки в полуклассическом приближении [9]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + eE_z \frac{\partial f}{\partial p_z} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} = J(F(\vec{p}); f(\vec{p}, z, t)), \quad (1.3)$$

где  $e$  – заряд электрона,  $v_z = \partial \epsilon(\vec{p}) / \partial p_z$  – скорость электрона,  $J(F, f)$  – интеграл столкновений,  $F(\vec{p}) = [1 + \exp\{\epsilon(\vec{p}) / k_B T\}]^{-1}$  – равновесная функция распределения Ферми,  $T$  – температура,  $k_B$  – постоянная Больцмана. Для вычисления интеграла столкновений воспользуемся приближением времени релаксации, согласно которому

$$J(F(\vec{p}); f(\vec{p}, z, t)) \cong v [F(\vec{p}) - f(\vec{p}, z, t)],$$

$v = 1 / \tau$  – частота релаксации,  $\tau$  – среднее время свободного пробега электрона.

Ограничение, которое накладывается на полуклассическую модель описания движения электрона по поверхности УНТ со стороны высоких частот, можно записать следующим образом:

$$\omega < \omega_l,$$

где значение  $\omega_l = 2v_F / R_H$  соответствует металлическим, а  $\omega_l = 2v_F / 3R_H$  – полупроводниковым нанотрубкам. Здесь  $v_F = a\gamma_0$  – скорость  $\pi$ -электронов на уровне Ферми,  $R_H$  – радиус нанотрубки.

Далее полуклассическая модель применяется для вычисления аксиального тока в прямолинейной бесконечно длинной нанотрубке. Этот ток возникает под действием электрического поля бегущей волны

$$E_z = \text{Re} [E_z^0 \exp\{i(hz - \omega t)\}],$$

где  $h$  – константа распространения.

Найдем малое возмущение  $\delta f$  из уравнения (1.3) путем линейного по полю приближения с учетом того, что  $E_z = F + \text{Re} [\delta f \exp\{i(hz - \omega t)\}]$ :

$$\delta f = -i \frac{\partial F}{\partial p_z} \frac{eE_z^0}{\omega - hv_z + iv}.$$

Тогда плотность поверхностного аксиального тока  $j_z = \text{Re} [j_z^0 \exp\{i(hz - \omega t)\}]$  может быть определена следующим равенством

$$j_z = \frac{2e}{(2\pi\hbar)^2} \iint v_z f d^2 \vec{p}. \quad (1.4)$$

Выражение (1.4) можно представить в более компактном виде

$$j_z^0 = \sigma_{zz}(h, \omega) E_z^0,$$

где  $\sigma_{zz}$  – аксиальная проводимость нанотрубки, которая может быть определена следующим образом:

$$\sigma_{zz}(h, \omega) = \frac{2e}{(2\pi\hbar)^2} \iint \frac{\partial F}{\partial p_z} \frac{v_z d^2 \vec{p}}{\omega - hv_z + iv}. \quad (1.5)$$

Интегрирование в равенстве (1.5) выполняется по первой зоне Бриллюэна.

При скоростях электронов  $v_e \ll c$  ( $c$  – скорость света) проводимость определяется соотношением:

$$\sigma_{zz}(\omega) = -\frac{2iw_n e^2}{3\pi\hbar(mb)} \frac{1}{(\omega + iv)} \times \sum_{s=1}^m \int_{-P_0}^{P_0} v_z^2(P_z, S) \frac{\partial F}{\partial E} dP_z,$$

где  $P_z$  – проекция импульса электрона проводимости на ось нанотрубки,  $P_0 = 2\pi\hbar/(\sqrt{3}w_n b)$ ,  $w_n = 1(\text{armchair})$ ,  $w_n = \sqrt{3}(\text{zigzag})$ ,  $v = 1/\tau$  – частота релаксации неравновесных электронов.

Радиус нанотрубки выражается хорошо известным соотношением:

$$R_n = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} b \sqrt{m^2 + m \cdot n + n^2}, \quad \text{tg } \theta_n = \frac{\sqrt{3}n}{(2m + n)}, \quad (1.6)$$

$\theta_n$  – геометрический угол хиральности,  $b$  – расстояние между атомами в элементарной ячейке материала (для углеродных нанотрубок  $b = 0,142$  нм), для нанотрубок типов zigzag и armchair соответственно  $n = 0$  и  $n = m$ .

Радиус нанотрубки, параметр  $(mb)$  и угол хиральности согласно формуле (1.6) для нанотрубок типов zigzag и armchair выражаются соотношениями:

- 1)  $R_n = \frac{\sqrt{3}(mb)}{2\pi}$ ,  $(mb) = 2\pi R / \sqrt{3}$ ;  $\theta_n = 0$ ;
  - 2)  $R_n = \frac{3(mb)}{2\pi}$ ,  $(mb) = 2\pi R / 3$ ;
- $\text{tg } \theta_n = 1/\sqrt{3}$ ;  $\theta_n = 30^\circ$ .

Выражения для проводимости имеют вид:

$$1) \text{ для zigzag} \quad \sigma_{zz}(\omega) = -\frac{iw_{cn} e^2}{\sqrt{3}\pi\hbar R} \frac{1}{(\omega + iv)} \times \sum_{s=1}^m \int_{-P_0}^{P_0} v_z^2(P_z, S) \frac{\partial F}{\partial E} dP_z, \quad (1.7)$$

$$2) \text{ для armchair} \quad \sigma_{zz}(\omega) = -\frac{iw_{cn} e^2}{\pi\hbar R} \frac{1}{(\omega + iv)} \times \sum_{s=1}^m \int_{-P_0}^{P_0} v_z^2(P_z, S) \frac{\partial F}{\partial E} dP_z. \quad (1.8)$$

Очевидно, что радиус  $R$  определяет размер «интегральной» нанотрубки ( $R \sim mb$ ,  $m \sim 100$ ). Выражения (1.7) и (1.8) построены с учетом цилиндрического характера структуры, состоящей из сотен вложенных цилиндров.

Предполагается, что для обоих нанотрубок известен закон дисперсии электронов  $\varepsilon(\vec{p})$  – энергия. Используется приближение  $\pi$ -электронов (без спина) и сильной связи электронов в атомах. Заметим, что структура является гексагональной:

$$\varepsilon(p_z, s) = \pm \gamma_0 \sqrt{1 + 4 \cos(aP_z) \cos\left(\frac{\pi S}{m}\right) + 4 \cos^2\left(\frac{\pi S}{m}\right)}; \quad (1.9)$$

$$\varepsilon(p_z, s) = \pm \gamma_0 \sqrt{1 + 4 \cos(aP_\phi) \cos\left(\frac{\pi P_z}{\sqrt{3}}\right) + 4 \cos^2\left(\frac{\pi P_z}{\sqrt{3}}\right)}. \quad (1.10)$$

Выражения (1.9), (1.10) есть законы дисперсии для нанотрубок типов zigzag и armchair соответственно. Здесь  $P_\phi = \pi S/R$  – проекция на ось ОФ в цилиндрической системе координат, для углеродных нанотрубок (графен) знаки «+» и «-» определяются аналогично выражению (1.2). Будем считать, что носителями тока являются электроны, а не дырки, так как их подвижность волны  $\mu_n \ll \mu_p$ . Тогда берем «+». Так как нанотрубки типов armchair и zigzag не обладают хиральностью, то при расчетах диссипации световой энергии следует ограничиваться линейно поляризованным излучением.

В формулах (1.7) и (1.8) имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = -\frac{\exp(\varepsilon/k_B T)}{k_B T [1 + \exp(\varepsilon/k_B T)]^2}, \quad (1.11)$$

где  $F(\vec{p}) = [1 + \exp\{\varepsilon(\vec{p})/k_B T\}]^{-1}$  – равновесная функция распределения Ферми,  $T$  – температура,  $k_B$  – постоянная Больцмана.

Подставляя (1.11) в (1.7) получим для нанотрубок типа zigzag:

$$|\sigma_{zz}(\omega)| = \frac{2w_{cn} e^2 P_0}{\sqrt{3}\pi^2 R \sqrt{(\omega^2 + v^2)} k_B T} \times \sum_{s=1}^m \frac{\exp(\varepsilon_0/k_B T)}{[1 + \exp(\varepsilon_0/k_B T)]^2}, \quad (1.12)$$

где

$$\varepsilon_0 = \varepsilon(P_0) = \gamma \sqrt{1 + 4 \cos(aP_0) \cos\left(\frac{\pi S}{m}\right) + 4 \cos^2\left(\frac{\pi S}{m}\right)}.$$

Выполнив аналогичную подстановку (1.11) в (1.8) можно рассчитать модуль проводимости для углеродных нанотрубок типа armchair вдоль оси  $z$ :

$$|\sigma_{zz}(\omega)| = \frac{2w_{cn} e^2 P_0}{\pi^2 R \sqrt{(\omega^2 + v^2)} k_B T} \times \sum_{s=1}^m \frac{\exp(\varepsilon_0/k_B T)}{[1 + \exp(\varepsilon_0/k_B T)]^2}, \quad (1.13)$$

где

$$\varepsilon_0 = \varepsilon(P_0) = \gamma \sqrt{1 + 4 \cos\left(\frac{a\hbar S}{R_0}\right) \cos\left(\frac{aP_0}{\sqrt{3}}\right) + 4 \cos^2\left(\frac{aP_0}{\sqrt{3}}\right)}.$$

Ряды, входящие в (1.12), (1.13) можно просуммировать численно для  $m = 1, 2, 3, \dots, 100$  (150). При вычислении интегралов, входящих в (1.7), (1.8) использовалась теорема о среднем:

$$P_0 = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{3W_n b}},$$

$$\int_{-P_0}^{P_0} f(x) dx \approx f(P_0)(P_0 - (-P_0)) = 2P_0 f(P_0).$$

Таким образом, полученные для  $\sigma_H$  выражения дают возможность рассчитать проводимость углеродных поглощающих нанотрубок. Объемная плотность тепловых источников, содержащая  $\sigma_H$ , позволит выполнить решение тепловой задачи и в последующем определить амплитудно-фазовые характеристики фотоакустического сигнала, возникающего в массиве углеродных проводящих нанотрубок [10], [11].

Рассчитаем эффективный коэффициент температуропроводности  $\beta_{cn}$ , связанный с коэффициентом теплопроводности  $k_{cn}$  соотношением  $\beta_{cn} = k_{cn} / \rho_0 C$ ,  $\rho_0$  – плотность,  $C$  – удельная теплоемкость.

Ковалентная энергия и энергия металлизации соответственно определяются выражениями [12]

$$V_1 = \sqrt{\frac{3}{10n_2}} \left[ |V_2| \left( 3|E_{atom}| - n_2 |V_2| \right) \right],$$

$$V_2 = \eta_2 \frac{\hbar^2}{m_0 l^2},$$

где  $E_{atom} = 13.5$  эВ – энергия связи на один атом [13],  $\eta_2 = -3.26$  для  $sp^2$ -орбитали и  $\eta_2 = -3.22$  для  $sp^3$ -орбитали,  $m_0$  – масса свободного электрона.

Вычислив ковалентную энергию и энергию металлизации, можно найти константы центрального  $\alpha$  и нецентрального взаимодействия  $\beta$ ,

$$\alpha = \frac{2}{l^2} |V_2| \left[ 1 - \frac{10}{3} \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^2 \right],$$

$$\beta = \frac{\lambda}{3} \alpha,$$

где  $l_{ca}$  – длина связи, коэффициент  $\lambda$  выражается через матричные элементы оператора ковалентной энергии между соответствующими атомными волновыми функциями  $s$ - и  $p$ -состояний (использовано значение  $\lambda = 0.69$  из [14]).

Согласно [15] выражения для независимых модулей упругости имеют вид

$$c_{11} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 4\alpha + \beta + 18 \frac{\alpha\beta}{4\alpha + \beta} \right),$$

$$c_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 4\alpha + \beta - 18 \frac{\alpha\beta}{4\alpha + \beta} \right).$$

Применение аналитических методов расчета направлений распространения чистых мод упругих волн для кристаллов класса  $6mm$  приводит к

следующим выражениям для скоростей распространения чисто продольной и чисто поперечной волн

$$v_{\parallel} = \sqrt{c_{11} s_2},$$

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) s_2},$$

где  $s_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{N_A}{\mu} l^2$  – удельная поверхность слоя нанотрубок.

Теплоемкость углеродных нанотрубок определяется выражением

$$C = 4R \left[ 3 \left( \frac{T}{\Theta_D} \right)^2 \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^2 dx}{e^x - 1} - \frac{\Theta_D/T}{e^{\Theta_D/T} - 1} \right] \approx$$

$$\approx \begin{cases} 2R, & T \gg \Theta_D \\ 28.9R, & T \ll \Theta_D \end{cases}$$

где  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $\Theta_D = \hbar\omega_m / k_B$  – температура Дебая. Параметр  $\omega_m$  – максимальная частота фононов записывается следующим образом [16]:

$$\omega_m = \sqrt{\frac{8\pi n_2}{m_N \left( \frac{1}{v_{\parallel}^2} + \frac{1}{v_{\perp}^2} \right)}},$$

где  $m_N$  – число атомов в ячейке,  $v_{\parallel}^2$  и  $v_{\perp}^2$  – соответственно скорости распространения продольных и поперечных упругих волн.

В формуле  $n_2 = N/S$  – поверхностная плотность атомов, которая определяется выражением

$$n_2 = \frac{\rho_2 N_A}{\mu} = \frac{N_A}{s_2 \mu},$$

$\rho_2$  – двумерная плотность материала НТ,  $s_2 = \rho_2^{-1}$  – удельная поверхность. Таким образом, для углеродных нанотрубок, согласно [15]  $\Theta_D = 2750$  К.

Согласно [17], двумерный коэффициент квантовой теплопроводности для области температур ниже температуры Дебая определяется следующим образом

$$k_{cn} = G_0 N_{phonon} \frac{L}{L_0},$$

где  $G_0 = \frac{\pi^2 k_B^2 T}{3h}$  – универсальный квант тепла,

$N_{phonon} = 2N = \frac{4N(n^2 + nm + m^2)}{d_R}$  – полное число

фононных каналов в УНТ,  $N$  – число шестигульников в элементарной ячейке нанотрубки,  $d_R$  – наибольший общий делитель для чисел  $(2n+m)$  и  $(2m+n)$ ,  $L$  – длина нанотрубки,  $L_0 = 2\pi R$  – длина поперечной границы нанотрубки, перпендикулярной тепловому потоку.

Запишем уравнение теплопроводности

$$k_{cn} \nabla^2 T - \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{2} Q (1 - e^{i\Omega t}), \quad (1.14)$$

где  $k_{cn}$  – коэффициент теплопроводности. Объемная плотность тепловых источников  $Q = \sigma_H |E|^2$ . Интенсивность волны

$$I = \frac{1}{2} n \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |E|^2.$$

Отсюда имеем для скорость диссипации энергии:

$$Q = 2\alpha I_0 e^{-2\alpha z} = \frac{2\sigma_H}{c\sqrt{\epsilon'\epsilon_0}} I_0 e^{-2\alpha z}. \quad (1.15)$$

В формуле (1.15) оператор  $\nabla^2 = \Delta$  следует записать в цилиндрической системе координат, что определяется геометрией исследуемых нанообъектов. Коэффициент поглощения, входящий в уравнение теплопроводности, определяется следующим образом:

$$\alpha = \frac{\omega \epsilon''}{c \sqrt{\epsilon'}} = \frac{\omega \epsilon''}{c n}.$$

Например, при  $n = 4$  можно получить следующее значение  $\alpha = 15,96 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ . В свою очередь, проводимость связана с мнимой частью диэлектрической проницаемости формулой  $\epsilon = \epsilon' - i\epsilon''$ ,  $\epsilon'' = \sigma/\omega\epsilon_0$  ( $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ ).

В цилиндрических координатах скорость диссипации энергии бесселевых световых пучков (БСП) для поглощающих углеродных нанотрубок можно представить следующим образом

$$Q^{TE} = \frac{2|\sigma_H| I_0}{c\sqrt{\epsilon'\epsilon_0}} A^{TE} \exp(-2k_{zz}z), \quad (1.16)$$

где

$$A^{TE} = \frac{c}{4\pi} k_0 \epsilon_\alpha (n_1^2 + n_2^2) \left[ \frac{m^2}{(q\rho)^2} J_m^2(q\rho) + J_m'^2(q\rho) \right],$$

$$|\sigma_H| = \frac{2\pi}{\lambda} |\sigma_{zz}|.$$

Выполнив решение уравнения теплопроводности (1.14) методом функции Грина [17], с учетом (1.16), и основываясь на выражении для угла дефлексии пробного лазерного пучка для случая трансверсальной геометрии взаимодействия (рисунок 1.1)

$$\Phi^T = \frac{1}{n_{\text{эф}}} \frac{dn_{\text{эф}}}{dT} \int \frac{dT(x, y, z, t)}{dx} dy,$$

найдем величину фотодефлекционного сигнала для плотных слоев поглощающих углеродных нанотрубок

$$\Phi(\rho, z, t) = \frac{k_0^4}{2n_{\text{эф}} \sqrt{\pi}} \frac{dn_{\text{эф}}}{dT} Q^{TE} \times \quad (1.17)$$

$$\times \int_0^t \frac{(1 + \cos \Omega t) x}{[w_0^2 + 8\beta_{cn}(t - \tau)]^{3/2}} e^{-\frac{(x^2 + y^2)}{w_0^2 + 8\beta_{cn}(t - \tau)}} e^{-\alpha_{\text{эф}}^2 \beta_{cn}(t - \tau)} d\tau =$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi} k_0^4}{n_{\text{эф}}} \frac{dn_{\text{эф}}}{dT} \frac{|\sigma_{zz}(\omega)| I_0}{\lambda c \sqrt{\epsilon'\epsilon_0}} A^{TE} e^{-2k_{zz}z} \times$$

$$\times \int_0^t \frac{(1 + \cos \Omega t) x}{[w_0^2 + 8\beta_{cn}(t - \tau)]^{3/2}} e^{-\frac{(x^2 + y^2)}{w_0^2 + 8\beta_{cn}(t - \tau)}} e^{-\alpha_{\text{эф}}^2 \beta_{cn}(t - \tau)} d\tau.$$

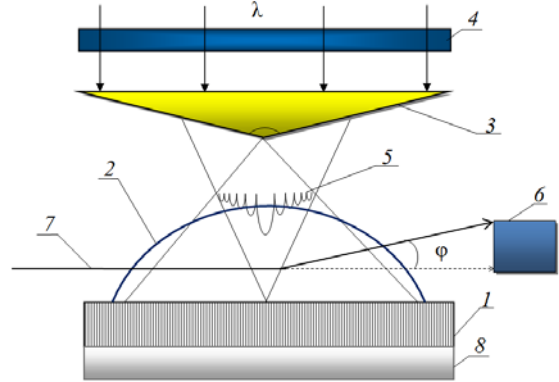


Рисунок 1.1 – Схема регистрации фотодефлекционного сигнала:

- 1 – слой углеродных нанотрубок;
- 2 – «термическая» линза; 3 – аксикон;
- 4 – модулятор; 5 – ТЕ-мода БСП;
- 6 – позиционно-чувствительный фотодетектор;
- 7 – зондирующий луч; 8 – подложка

Выражения для фотодефлекционного отклика для двух видов углеродных нанотрубок типа zigzag и типа armchair легко получить из (1.17), подставив в него соотношения (1.12) и (1.13) соответственно.

Таким образом, амплитуда фотодефлекционного сигнала, определяемая выражением (1.17), сложным образом зависит от диссипативных, геометрических и теплофизических параметров нанотрубок, а также энергетически-временных и поляризационных свойств БСП.

## 2 Графический анализ

Анализ амплитуды фотодефлекционного сигнала показывает, что величина сигнала осциллирует, спадая по экспоненте с возрастанием радиальной координаты  $\rho$ , причем осцилляции для нулевой и более высоких мод происходят в противофазе (рисунок 2.1).

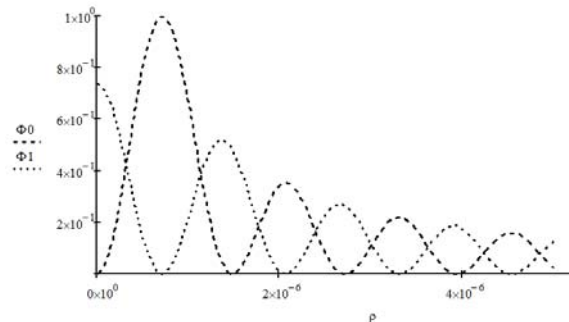


Рисунок 2.1 – Зависимость фотодефлекционного отклика от радиальной координаты  $\rho$  для разных мод БСП (1 –  $m = 0$ ; 2 –  $m = 1$ )

На формирование фотодефлекционного отклика от слоя углеродных нанотрубок сказывается соотношение толщин компонент образца. Как видно из рисунка 2.2, амплитуда фотодефлекционного сигнала симметрична относительно изменения нормированной координаты ( $xw = x/w_0$ ) и экспоненциально спадает аналогично зависимости, представленной в [17].

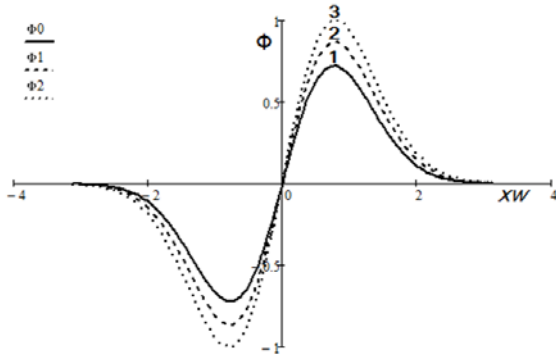


Рисунок 2.2 – Зависимость фотодефлекционного отклика от нормированной координаты  $xw = x/w_0$  для разных значений времени  
1 –  $t = 1$  мс, 2 –  $t = 1.25$  мс, 3 –  $t = 1.5$  мс

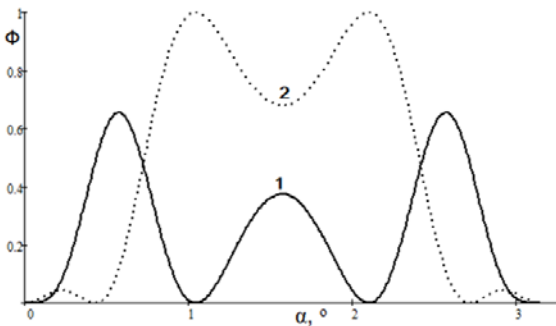


Рисунок 2.3 – Зависимость амплитуды фотодефлекционного сигнала от угла конусности БСП для разных мод (1 –  $m = 0$ ; 2 –  $m = 1$ )

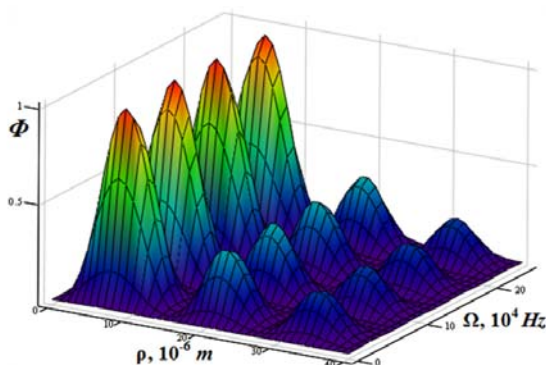


Рисунок 2.4 – Зависимость амплитуды фотодефлекционного сигнала от радиальной координаты и частоты модуляции ( $m = 0$ )

Ответственный за формирование пространственной структуры беселевого светового пучка угол конусности аксикона  $\alpha$  также весьма существенно

влияет на амплитуду фотодефлекционного сигнала (рисунок 2.3). В зависимости от порядка моды БСП ( $m = 0, m = 1$ ) при определенном значении параметра конусности может наблюдаться максимум или минимум амплитудного значения фотодефлекционного отклика. Таким образом, существует возможность управления величиной фотодефлекционного сигнала путем изменения угла конусности аксикона. Как видно из рисунка 2.4, влияние частоты модуляции БСП на фотодефлекционный отклик не значительно.

### Заключение

На основе проведенного анализа выявлена возможность управления амплитудой фотодефлекционного отклика, возбуждаемого БСП. За счет реализации оптических схем с перестраиваемой конусностью беселевых пучков можно управлять амплитудой фотоакустического сигнала и распределением интенсивности термоупругих полей в слоях углеродных нанотрубок, что достигается путем формирования требуемых поляризационных мод квазибездифракционного светового излучения. Полученные результаты позволяют также предложить метод определения геометрических, диссипативных и теплофизических параметров углеродных нанотрубок типа zigzag и armchair по экспериментально измеренным значениям амплитуды фотодефлекционного отклика, выполненных для разных углов конусности БСП и на различных частотах амплитудной модуляции, поглощаемого исследуемым нанобразцом лазерного излучения.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Слепая, Г.Я. Современные тенденции развития наноэлектроматематизма: аналит. обзор / НИУ «Ин-т ядерных проблем» БГУ; сост. Г.Я. Слепая, С.А. Максименко, П.П. Кужир. – Минск: Изд. центр БГУ, 2012. – 71 с.
2. Головань, Л.А. Оптические свойства нанокмпозитов на основе пористых систем / Л.А. Головань, В.Ю. Тимошенко, П.К. Кашкаров // УФН. – 2007. – Т. 177, № 6. – С. 619–638.
3. Елецкий, А. Механические свойства углеродных наноструктур и материалов на их основе / А.В. Елецкий // УФН. – 2007. – Т. 177, № 3. – С. 233–274.
4. Tasaki, S. P-band contribution to the optical properties of carbon nanotubes: Effect of chirality / S. Tasaki, K. Maekawa, Yamabe T. // Phys. Rev. B. – 1998. – Vol. 57, № 15. – P. 9301–9318.
5. Щука, А.А. Наноэлектроника / А.А. Щука // М. Физматкнига. – 2007. – 463 с.
6. Кобаяси, Н. Введение в нанотехнологию / Н. Кобаяси // М. Бином. – 2007. – 134 с.
7. Елецкий, А. Транспортные свойства углеродных нанотрубок / А.В. Елецкий // УФН. – 2009. – Т. 179, № 3 – С. 225–242.

8. *Фотоакустическое преобразование беселевых световых пучков в магнитоактивных сверхрешетках* / Г.С. Митюрин [и др.] // Кристаллография. – 2015. – Т. 60. – № 2. – С. 299–306.
  9. *Максименко, С.А.* Электродинамика углеродных нанотрубок / С.А. Максименко, Г.Я. Слепян // Радиотехника и электроника. – 2002. – Т. 47, №3. – С. 261–280.
  10. *Оптоакустический эффект в плотных слоях ориентированных углеродных нанотрубках: использование его для измерения коэффициента поглощения света и толщин пленок* / Грузинская И.С. [и др.] // Акустический журнал. – 2006. – Т. 52, № 3. – С. 330–334.
  11. *Carbon nanotubes as photoacoustic molecular imaging agents in living mice* // De la Zerda A. [et al.] // Nat Nanotechnology. – 2008. – Vol. 3, № 9. – P. 557–562.
  12. *Давыдов, С.Ю.* Об упругих характеристиках графена и силицена / С.Ю. Давыдов // ФТТ. – 2010. – Т. 52. – Вып. 1. – С. 172–174.
  13. *Упругие характеристики углеродных 2D-супракристаллов в сравнении с графеном* / Р.А. Браже [и др.] // ФТТ. – 2011. – Т. 53. – Вып. 7. – С. 1406–1408.
  14. *Харрисон, У.* Электронная структура и свойства твердых тел. / У. Харрисон. – М.: Мир, 1983. – Т. 1. – 381 с.
  15. *Браже, Р.А.* Упругие волны в углеродных 2D-супракристаллах / Р.А. Браже, А.А. Каренин, Р.М. Мефтахутдинов // ФТТ. – 2011. – Т. 53. – Вып. 8. – С. 1614–1617.
  16. *Браже, Р.А.* Теплопроводность планарных и нанотубулярных супракристаллических структур при температурах ниже температуры Дебая / Р.А. Браже, В.С. Нефёдов // ФТТ. – 2014. – Т. 56. – Вып. 3. – С. 602–606.
  17. *Митюрин, Г.С.* Фотодефлекционная спектроскопия магнитоактивных сверхрешеток, облучаемых бессель-гауссовыми световыми пучками / Г.С. Митюрин, Е.В. Черненко, А.Н. Сердюков // ЖПС. – 2015. – Т. 82. – № 2. – С. 260–265.
- Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф14-047).*
- Поступила в редакцию 18.09.15.*

УДК 538.9:535.8

## МНОГОСЛОЙНЫЕ ПЛЁНОЧНЫЕ ПОЛЯРИЗАТОРЫ НА ОСНОВЕ ТУГОПЛАВКИХ ОКСИДОВ

А.В. Рогачёв, Н.Н. Федосенко, Д.Л. Горбачёв

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

## MULTIFILM POLARIZERS BASED ON REFRACTORY OXIDES

A.V. Rogachev, N.N. Fedosenko, D.L. Gorbachev

F. Scorina Gomel State University

В работе показана эффективность использования вакуумного электронно-лучевого испарения совместно с методом оптического контроля толщины для формирования многослойных поляризационных покрытий на основе 12-слойной системы  $\text{SiO}_2+\text{ZrO}_2$  с высокими значениями степени поляризации. Разработанная конструкция поляризационного покрытия на основе тугоплавких оксидов для длины волны  $\lambda = 660$  нм может быть использована для формирования поляризаторов, работающих как на отражение, так и на пропускание при создании оптических элементов лазерных систем.

**Ключевые слова:** поляризатор, электронно-лучевое испарение, тугоплавкие оксиды, многослойные оптические покрытия.

The effectiveness of using an electron beam vacuum evaporation method is shown together with the optical thickness monitoring for formation of multilayer coatings based on twelve layers of  $\text{SiO}_2+\text{ZrO}_2$  with high degree of polarization. The developed design of the polarization coating is based on refractory oxides for the wavelength  $\lambda = 660$  nm. It can be used to form polarizers operating as reflective and transmissive optical elements as parts of laser systems.

**Keywords:** polarizer, electron beam evaporation, refractory oxides, multilayer optical coatings.

### Введение

В настоящее время совершенствование конструкции и миниатюризация лазерных систем продолжают являться актуальной задачей современной науки и техники, благодаря всё расширяющимся областям применения лазеров [1], [2]. Такие уникальные свойства лазерного излучения, как монохроматичность, когерентность и малая расходимость луча наряду с возможностью создания большой плотности мощности определяют широкие возможности для применения лазеров в контрольно-измерительном оборудовании, различных датчиках, технологиях бесконтактной резки материалов, передачи данных, формирования проекций изображений и многих других областях деятельности человека.

Ещё одним уникальным свойством лазерного излучения является его линейная поляризация. Благодаря такому свойству лазерный луч по-разному воздействует на поверхность материалов с разной отражательной способностью. Известно, что материал хорошо поглощает линейно поляризованный свет, вектор напряжённости поля  $E$  которого параллелен плоскости поверхности при лазерной резке материалов, что увеличивает эффективность данного процесса и улучшает геометрию профиля реза. Кроме этого эффект поляризованности лазерного излучения применяется в интерферометрах, оптических усилителях и модуляторах, а также при создании сложных комбинированных пучков для реализации

точной обработки материалов и формирования фотонных структур.

Однако некоторые типы лазеров изначально не имеют линейно поляризованного выходного излучения (например, волоконные). К тому же оптические параметры поляризации луча могут быть неустойчивыми благодаря температурному дрейфу и другим технологическим факторам работы квантового генератора. Для преобразования частично поляризованного в линейно-поляризованное излучение в оптических схемах используют специальные элементы – поляризаторы. Различают призмные и пластинчатые поляризаторы, причём призмные из-за сложности изготовления и дороговизны всё больше уступают миниатюрным плёночным интерференционным поляризаторам.

Целью данной работы являлась разработка и оптимизация конструкции плёночного интерференционного поляризатора для длины волны 660 нм на основе слоёв тугоплавких оксидов, а также последующее изготовление образцов поляризационного покрытия методом электронно-лучевого вакуумно-плазменного синтеза и изучение его оптических характеристик.

### 1 Методика и объекты исследования

Нанесение покрытий производилось на установке вакуумного напыления ВУ-1А (рисунок 1.1), оснащенной источником электронно-лучевого испарения УЭЛИ-1 и встраиваемой системой

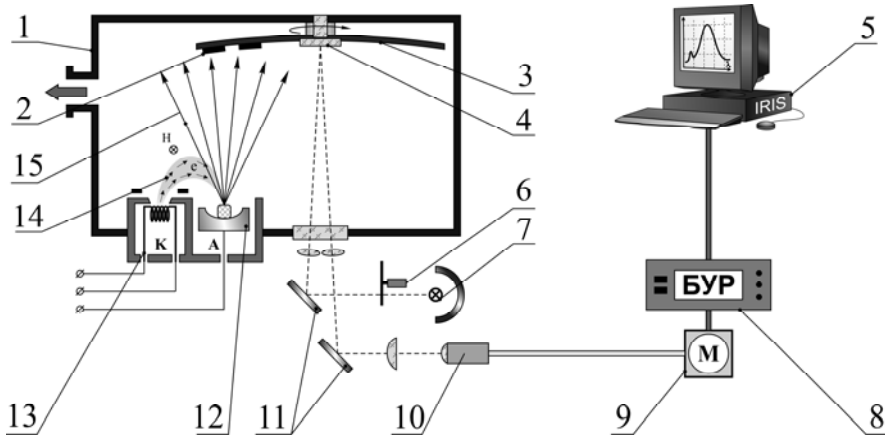


Рисунок 1.1 – Структура вакуумной установки электронно-лучевого нанесения покрытий:  
 1 – вакуумная камера; 2 – подложки; 3 – вращающаяся оснастка; 4 – образец-свидетель;  
 5 – компьютер с программой «IrisSoft»; 6 – модулятор; 7 – источник излучения галогенный;  
 8 – блок управления и регистрации; 9 – монохроматор M250; 10 – световод; 11 – плоские зеркала;  
 12 – анод источника ЭЛИ с испаряемым веществом; 12 – катод источника ЭЛИ;  
 14 – электронный луч; 15 – поток распылённого вещества

контроля оптических характеристик, модель Iris-0211 (СОК Iris). Источник электронно-лучевого испарения УЭЛИ-I специально предназначен для испарения в вакууме тугоплавких окислов, полупроводниковых материалов и металлов с максимальным ускоряющим напряжением 12 кВ и максимальным током нагрузки 500 мА.

При исследовании оптических свойств покрытий использовали спектрофотометр Photon RT (Essent Optics, Беларусь), предназначенный для измерения спектральных характеристик отражения, пропускания и оптической плотности в поляризованном свете в диапазоне длин волн от 200 до 4000 нм. Так же в программе для работы со спектрофотометром реализован математический алгоритм расчёта показателя преломления по отношению интенсивности поляризационных компонент в спектре отражения. Исследование морфологии покрытий осуществляли методом атомно-силовой микроскопии (АСМ) с использованием сканирующего зондового микроскопа Solver P47 PRO (NT-MDT, Россия). В качестве зондов применялись кремниевые кантилеверы серии NSG11S с типичной силовой константой 5,5 Н/м. В качестве подложек для формируемых экспериментальных покрытий использовались полированные пластины кремния и оптического стекла К8.

## 2 Результаты и их обсуждение

В качестве материалов для многослойного покрытия выбраны чередующиеся слои  $ZrO_2$  и  $SiO_2$ . Для точного определения значения оптической толщины отдельных слоёв, необходимого для проектирования многослойного покрытия, по спектрам отражения однослойных покрытий рассчитаны показатели преломления. Для  $ZrO_2$  показатель преломления составляет  $n = 1,924$  (при

табличном значении 2,039) и для  $SiO_2$   $n = 1,475$  (при табличном значении 1,456). Различие табличных показателей преломления с полученными на практике связано с условиями вакуумно-электронно-лучевого формирования покрытий, влияющих на их структуру.

На основании полученных данных проведено проектирование конструкции покрытия для рабочей длины волны красного лазерного излучения 660 нм с помощью специализированной программы Multispectrum, входящей в комплект системы оптического контроля толщины Iris (Essent Optics, Беларусь). Покрытие состоит из чередующихся слоёв с малым и большим показателем преломления с оптической толщиной 165,7 нм, причём оптимальным количеством слоёв является 12, т. к. при этом наблюдаются максимальные значения отражённой  $s$ -поляризованной и прошедшей  $p$ -поляризованной компонент излучения на длине волны 660 нм при угле падения  $75^\circ$  (рисунок 2.1).

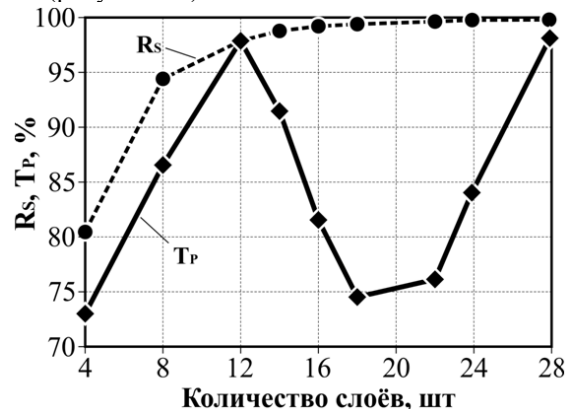


Рисунок 2.1 – Зависимость параметров поляризованных компонент излучения от количества слоёв интерференционного покрытия

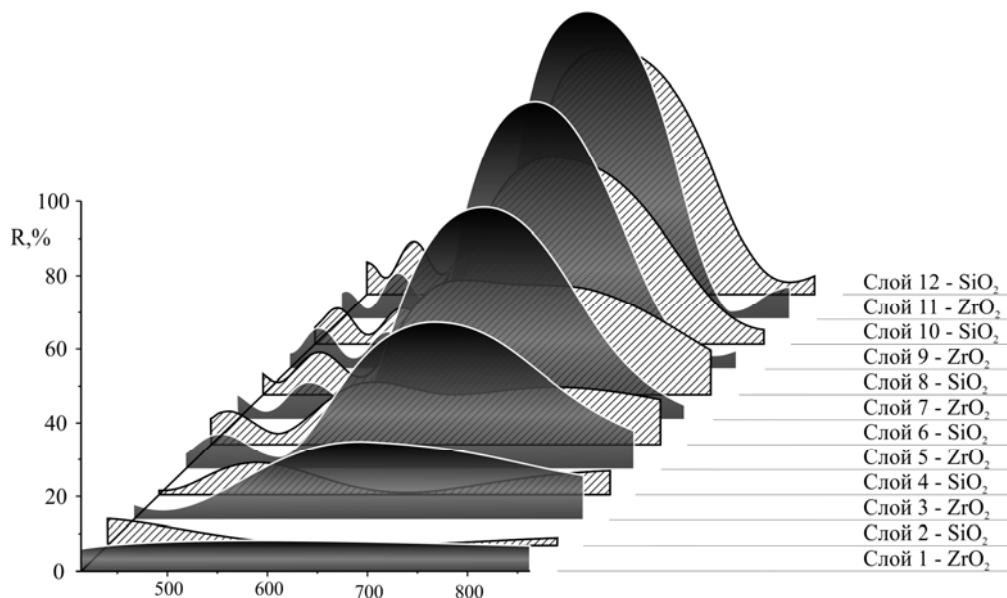


Рисунок 2.2 – Изменение коэффициента отражения при послойном формировании покрытия

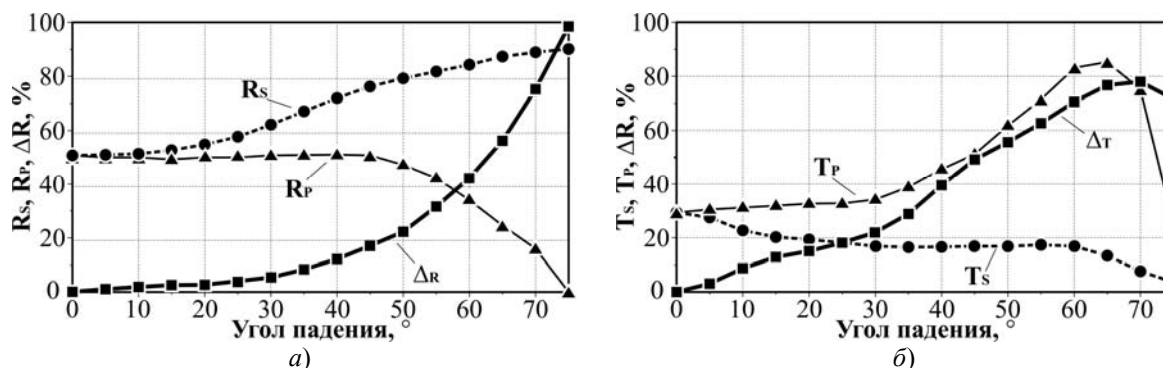


Рисунок 2.3 – Зависимости изменения степени поляризации  $\Delta$ , а также интенсивностей  $p$ - и  $s$ - компонент от угла падения для:  
 а) отражённого излучения от покрытия на непрозрачной подложке;  
 б) прошедшего излучения через покрытие на прозрачной подложке

На рисунке 2.2 приведены расчётные значения коэффициента отражения на разных стадиях формирования покрытия, полученные в ходе оптического контроля толщины отдельных слоёв. Как видно из рисунка, с увеличением числа слоёв происходит усиление коэффициента отражения излучения в рабочем диапазоне длин волн с максимумом при  $\lambda = 660$  нм.

С помощью спектрофотометра Photon RT измерена степень поляризации отражённого излучения  $\Delta_R$  для покрытия на непрозрачной кремниевой подложке и степень поляризации  $\Delta_T$  излучения, прошедшего через покрытие на прозрачной подложке из оптического стекла К8 при различных от 0 до 75° углах падения на длине волны 660 нм (рисунок 2.3).

Как видно из графиков, максимальная степень поляризации для покрытия, работающего в качестве зеркала (рисунок 2.3, а) составляет 97% при угле падения 75° за счёт полного отсутствия при данном угле отражения  $p$ -компоненты излучения.

При этом значение  $s$ -компоненты на 9% ниже расчётной и составляет  $R_s = 89\%$ .

Покрытие, сформированное на прозрачной подложке из оптического стекла К8, показало несколько большее расхождение расчётных и экспериментально полученных оптических параметров (рисунок 2.3, б). Максимум степени поляризации излучения, прошедшего через образец с покрытием, наблюдается в диапазоне углов падения 68–70°, причём после 70° происходит резкий спад интенсивности как  $s$ -, так и  $p$ -компоненты. Значение максимальной поляризации составляет 79%, а максимум интенсивности  $p$ -компоненты –  $T_p = 84\%$ .

Для определения чистоты поверхности сформированных покрытий изучена морфология поверхности как сформированных однослойных  $ZrO_2$  и  $SiO_2$ , так и 12-слоистого поляризационного покрытия  $ZrO_2+SiO_2$ . Результаты исследований, полученные методом АСМ, приведены в таблице 2.1 и на рисунке 2.4.

Таблица 2.1 – Среднестатистические параметры морфологии покрытий

Тип покрытия	Субшероховатость $R_a$ , нм	Диаметр зёрен у основания $D$ , нм	Соотношение высоты зерна к его диаметру, $h / D$
$\text{SiO}_2$	0,97	50	0,040
$\text{ZrO}_2$	0,86	30	0,083
$(\text{ZrO}_2+\text{SiO}_2)\cdot 6$	1,8	115	0,060

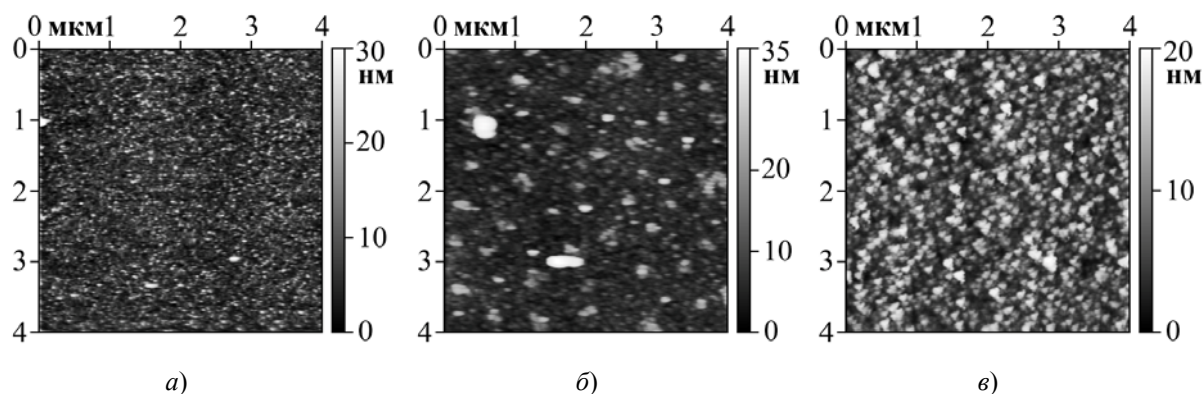


Рисунок 2.4 – Морфология поверхности покрытий полученная методом АСМ по полю сканирования 4x4 мкм: а)  $\text{ZrO}_2$ ; б)  $\text{SiO}_2$ ; в)  $(\text{ZrO}_2+\text{SiO}_2)\cdot 6$

Из рисунка 2.4, в) видно, что поверхность многослойного поляризационного покрытия, имеющего последний закрывающий слой  $\text{SiO}_2$ , имеет равномерную структуру, состоящую из зёрен со средним размером у основания около 115 нм, а субшероховатость поверхности сформированных покрытий не превышает 2 нм, что позволяет применять данные покрытия для создания оптических элементов видимого и инфракрасного спектрального диапазона.

#### Заключение

Таким образом, экспериментально полученные поляризационные покрытия имеют хорошо согласующиеся с теоретическими расчётами оптические характеристики, что определяет возможность их применения в конструкции оптических элементов реальных лазерных систем с

рабочей длиной волны 660 нм. Высокая лучевая стойкость, прозрачность, миниатюрность конструкции, простота и дешевизна изготовления определяют широкую область применения таких тонкоплёночных систем в различных технических решениях.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Mourou, G. Development and applications of compact highintensity lasers / G. Mourou, D. Umstadter // Physics of Fluids B: Plasma Physics. – 1992. – Vol. 4, № 7. – P. 2315–2325.
2. Крылова, Т.Н. Интерференционные покрытия / Т.Н. Крылова. – Л.: Машиностроение. – 1973. – 224 с.

Поступила в редакцию 22.11.15.

УДК 535.32+535.34

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ СПЕКТРОФОТОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРОЗРАЧНОГО СЛОЯ НА ПОГЛОЩАЮЩЕЙ ПОДЛОЖКЕ

Н.И. Стаськов

Могилевский государственный университет им. А.А. Кулешова

## THE ANALYTICAL SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM FOR THE SPECTROPHOTOMETRIC TRANSPARENT LAYER ON AN ABSORBING SUBSTRATE

N.I. Stas'kov

A.A. Kuleshov Mogilev State University

Впервые получено аналитическое и численное решения обратной спектрофотометрической задачи для слоя диоксида кремния на кремниевой подложке. Аналитически определенные параметры слоя и подложки можно использовать в качестве первых приближений при численных расчетах параметров трехслойной модели. Структуру неоднородных поверхностного и переходного слоев интерпретировали моделью Максвелла-Гарнетта и Бруггемана.

**Ключевые слова:** интерференционная спектрофотометрия, переходный слой, оптические постоянные, толщина слоя.

For the first time, an analytical and numerical solution of the inverse problem for the spectrophotometric silicon dioxide layer on a silicon substrate is obtained. Analytical determination of the parameters of the layer and the substrate can be used as the first approximation in numerical calculations of the parameters of the three-layer model. Inhomogeneous structure of the surface and transition layers is interpreted by Maxwell-Garnett & Bruggeman model.

**Keywords:** interference spectrophotometry, transition layer, optical constants, thickness of the layer.

### Введение

Известно [1], что при оптической толщине слоя, соизмеримой с длиной волны света  $\lambda$ , в спектрах отражательных  $R(\lambda)$  и пропускательных  $T(\lambda)$  способностей наблюдаются максимумы и минимумы. В работе [2] для модельного однородного поглощающего слоя на однородной диэлектрической пластине конечной толщины с постоянными оптическими характеристиками продемонстрирована возможность численного определения всех параметров слоя – толщины  $d$ , показателей преломления  $n_1(\lambda)$  и поглощения  $k_1(\lambda)$ . Методика [3], [4] аналитического определения трех параметров слоя основана на построении огибающих экстремумов в экспериментальных спектрах и получении аналитических выражений этих огибающих. Такая процедура практически не возможна уже для спектров двухслойной структуры [5]. Применение аналитической методики и точность определения параметров полимерных пленок, нанесенных на кремниевые подложки, обсуждалось в работе [4]. В работе [6] теоретически получены аналитические выражения огибающих максимумов и минимумов коэффициентов отражения  $s$  и  $p$  поляризованного света модельной многослойной структуры для  $\lambda = const$  и угла падения от 0 до 90°. В литературе отсутствуют данные аналитического

определения оптических характеристик подложки, на которой находится интерференционный слой.

Все рассмотренные работы основываются на известной классической модели среда – слой – подложка с идеальными границами раздела. Обратим внимание на то, что интерференция на слое обуславливается когерентностью волн отраженных от поверхности слоя и подложки. Не вызывает сомнения, что в рассматриваемом случае наличие переходного слоя должно проявляться на измеренных спектрах и на рассчитанных параметрах структуры. В работе [7] натуральными и численными экспериментами (ЛЭФ-3М,  $\lambda = 0.6328 \mu m$ ) исследовано влияние переходных слоев между наноразмерной пленкой диоксида кремния и кремниевой подложкой КЭФ5 на эллипсометрические углы. Показана целесообразность замены структуры подложка – переходный слой подложкой с эффективными оптическими характеристиками при определении толщины и показателя преломления пленки. В работе [8] переходный слой между диоксидом и кремниевой подложкой не учитывается при исследовании методом спектральной эллипсометрии двухслойной кремниевой структуры.

В данной работе сделана попытка обнаружения переходных слоев в пленочных структурах методами интерференционной спектрофотометрии. Получены аналитические решения обратной четырехпараметрической спектрофотометрической

задачи для толстого ( $d \sim \lambda$ ) прозрачного ( $k_1(\lambda) = 0$ ) слоя на поглощающей подложке с оптическими характеристиками  $n_2(\lambda)$  и  $k_2(\lambda)$ . Предложены две методики аналитического определения оптических характеристик подложки, основанные на использовании спектров  $R_s(\lambda)$ ,  $R_p(\lambda)$  для одного угла падения и спектров  $R_s(\lambda)$  для двух углов падения. Практически алгоритмы аналитических решений реализованы на методе огибающих интерференционных экстремумов в спектрах  $R(\lambda)$  слоя диоксида кремния ( $\text{SiO}_2$ ) на кремниевой подложке (cSi, КДБ12). Эта структура достаточно исследована и может использоваться для тестирования различных оптических задач.

### 1 Теория метода

Для слоя на подложке (рисунок 1.1) коэффициент отражения  $s$  и  $p$  поляризованного света

$$R(\lambda) = \left| \frac{|r_{01}(\lambda)|e^{i\alpha_{01}(\lambda)} + |r_{12}(\lambda)|e^{i(\alpha_{12}(\lambda) - 2\delta(\lambda))}}{1 + |r_{01}(\lambda)||r_{12}(\lambda)|e^{i(\alpha_{01}(\lambda) + \alpha_{12}(\lambda) - 2\delta(\lambda))}} \right|^2, \quad (1.1)$$

при  $k_1(\lambda) = 0$  не выходит за пределы максимальных ( $+$ ,  $\alpha_{12}(\lambda) - 2\delta(\lambda) = 2m\pi$ ) и минимальных ( $-$ ,  $\alpha_{12}(\lambda) - 2\delta(\lambda) = 2(m+1)\pi$ ,  $m \in N \cup \{0\}$ ) значений, которые являются соответствующими огибающими экстремумов

$$R_{\pm}(\lambda) = \left( \frac{|r_{01}(\lambda)| \pm |r_{12}(\lambda)|}{1 \pm |r_{01}(\lambda)||r_{12}(\lambda)|} \right)^2. \quad (1.2)$$

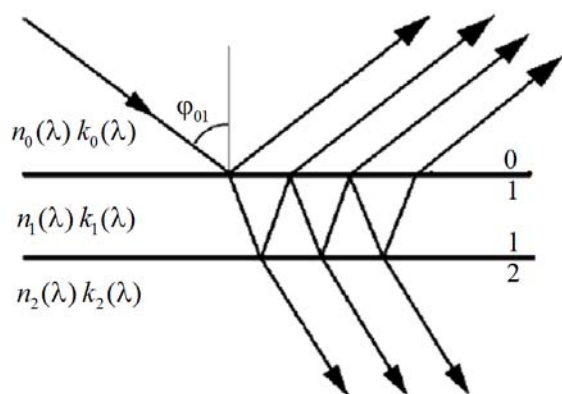


Рисунок 1.1 – Оптическая модель слоя

В выражении (1.1)  $r_{ij}(\lambda)$  и  $\alpha_{ij}(\lambda)$  – хорошо известные амплитудные коэффициенты отражения и фазы отраженных лучей на границах раздела ( $i = 0, 1, j = 1, 2$ ),  $\delta(\lambda)$  – фазовая толщина слоя [1]. На основании выражения (1.2) можно показать, что для диэлектрических пленок с малым показателем преломления ( $n_1(\lambda) < 2$ ) в области слабого поглощения спектры  $R_-(\lambda)$  близки к нулю, в особенности, для  $p$  поляризованного

света. Определение таких спектров на практике неизбежно приведет к большим ошибкам при расчете толщины и оптических характеристик слоя.

В нашем случае свет падает на слой из воздуха ( $n_0(\lambda) = 1, k_0(\lambda) = 0$ ) под углом  $\varphi_{01}$ . При этом не учитывается отражение излучения от нижней грани достаточно толстой поглощающей подложки. Учет нижней грани прозрачной ( $k_0(\lambda) = 0$ ) подложки сделан в работе [2]. В работе [3] представлена методика определения по спектрам  $R_+(\lambda)$  и  $R_-(\lambda)$  спектров коэффициентов отражения  $s$  и  $p$  поляризованного света для границ раздела воздух – слой

$$R_{01}(\lambda) = \quad (1.3)$$

$$= \left( \frac{1 - \sqrt{R_+(\lambda)}\sqrt{R_-(\lambda)} - \sqrt{(1 - R_-(\lambda))(1 - R_+(\lambda))}}{\sqrt{R_+(\lambda)} - \sqrt{R_-(\lambda)}} \right)^2$$

и слой – подложка  $R_{12}(\lambda) = |r_{12}(\lambda)|^2$ .

Как видим, для определения оптических характеристик подложки необходимо определить  $n_1(\lambda)$ , угол падения света из слоя на подложку  $\varphi_{12}$  и по огибающим спектров определить  $R_{12}(\lambda)$  [3]. Это приведет к увеличению погрешностей определения значений  $n_2(\lambda)$  и  $k_2(\lambda)$ . В отличие от подхода, предложенного в работе [3], воспользуемся, во-первых, тем, что для прозрачного слоя  $R_{01}(\lambda)$  зависит только от параметра  $n_1(\lambda)$ , значение которого можно найти при одном угле падения. При использовании  $s$  поляризованного света выражение для определения спектра  $n_1(\lambda)$  имеет вид

$$n_1(\lambda) = \quad (1.4)$$

$$= \sqrt{\sin^2 \varphi_{01} + \left( \frac{\cos \varphi_{01} [1 + R_{01s}(\lambda) + 2\sqrt{R_{01s}(\lambda)}]}{1 - R_{01s}(\lambda)} \right)^2}$$

Во-вторых, не трудно показать, что для прозрачного слоя спектры  $R_+(\lambda)$  в (1.2) являются спектрами чистой подложки

$$R_{+s} = \left| \frac{\cos \varphi_{01} - \left( (n_2(\lambda) - ik_2(\lambda))^2 - \sin^2 \varphi_{01} \right)^{0.5}}{\cos \varphi_{01} + \left( (n_2(\lambda) - ik_2(\lambda))^2 - \sin^2 \varphi_{01} \right)^{0.5}} \right|^2,$$

$$R_{+p} = \left| \frac{\begin{aligned} &(n_2(\lambda) - ik_2(\lambda))^2 \cos \varphi_{01} - \\ &-\left( (n_2(\lambda) - ik_2(\lambda))^2 - \sin^2 \varphi_{01} \right)^{0.5} \end{aligned}}{\begin{aligned} &(n_2(\lambda) - ik_2(\lambda))^2 \cos \varphi_{01} + \\ &+\left( (n_2(\lambda) - ik_2(\lambda))^2 - \sin^2 \varphi_{01} \right)^{0.5} \end{aligned}} \right|^2,$$

которые определяются углом падения и неизвестными параметрами  $n_2(\lambda)$ ,  $k_2(\lambda)$ . Рассмотрим два подхода к определению оптических параметров подложки. Во-первых, параметры  $n_2(\lambda)$  и

$k_2(\lambda)$  аналитически можно найти по отношению спектров  $\frac{R_{+p}(\lambda)}{R_{+s}(\lambda)}$  и спектру  $R_{+s}(\lambda)$ , измеренным при одном угле падения

$$n_2(\lambda) - ik_2(\lambda) = \sqrt{(\eta_1(\lambda) - i\eta_1(\lambda))^2 + \sin^2 \varphi_{01}},$$

где

$$C(\lambda) = \frac{R_{+p}(\lambda)}{R_{+s}(\lambda)}, \quad (1.5)$$

$$\eta_1(\lambda) = \frac{(\cos^2 \varphi_{01} - \sin^2 \varphi_{01})(1 - C(\lambda))(1 - R_{+s}(\lambda))}{2 \cos \varphi_{01} \left[ \cos^2 \varphi_{01} (1 - C(\lambda))(1 + R_{+s}(\lambda)) - \sin^2 \varphi_{01} (1 + C(\lambda))(1 - R_{+s}(\lambda)) \right]},$$

$$\eta_2(\lambda) = \sqrt{\frac{(\cos \varphi_{01} - \eta_1(\lambda))^2 - R_{+s}(\lambda) (\cos \varphi_{01} + \eta_1(\lambda))^2}{R_{+s}(\lambda) - 1}}.$$

Во-вторых, характеристики подложки  $n_2(\lambda)$  и  $k_2(\lambda)$  аналитически можно найти и по спектрам  $R_{+s}(\lambda)$ , рассчитанным для двух углов падения излучения на слой подобно тому, как это было сделано в работе [9] при определении оптических параметров однородной среды по спектрам НПВО. В таком случае необходимо при двух углах падения  $\varphi_{01}^*$  и  $\varphi_{01}^{**}$  измерить два интерференционных спектра  $R_s^*(\lambda)$  и  $R_s^{**}(\lambda)$ , и по ним определить спектры огибающих максимумов  $R_{+s}^*(\lambda)$  и  $R_{+s}^{**}(\lambda)$ . Ниже приведен алгоритм аналитического расчета оптических функций подложки для этого подхода:

$$a_1(\lambda) = (1 - R_{+s}^*(\lambda))^4 (R_{+s}^*(\lambda))^{-1}, \quad (1.6)$$

$$b_1(\lambda) = (1 + R_{+s}^*(\lambda))^2 \cos^4 \varphi_{01}^*,$$

$$c_1(\lambda) = (1 - R_{+s}^*(\lambda))^2 \cos^2 \varphi_{01}^*,$$

$$d_1(\lambda) = R_{+s}^*(\lambda) \cos^4 \varphi_{01}^*,$$

$$a_2(\lambda) = (1 - R_{+s}^{**}(\lambda))^4 (R_{+s}^{**}(\lambda))^{-1},$$

$$b_2(\lambda) = (1 + R_{+s}^{**}(\lambda))^2 \cos^4 \varphi_{01}^{**},$$

$$c_2(\lambda) = (1 - R_{+s}^{**}(\lambda))^2 \cos^2 \varphi_{01}^{**},$$

$$d_2(\lambda) = R_{+s}^{**}(\lambda) \cos^4 \varphi_{01}^{**},$$

$$p(\lambda) = \frac{a_1(\lambda)d_2(\lambda) - a_2(\lambda)d_1(\lambda)}{c_1(\lambda)d_2(\lambda) - c_2(\lambda)d_1(\lambda)},$$

$$q(\lambda) = \frac{b_1(\lambda)d_2(\lambda) - b_2(\lambda)d_1(\lambda)}{c_1(\lambda)d_2(\lambda) - c_2(\lambda)d_1(\lambda)},$$

$$x(\lambda) = 0.25(a_1(\lambda) - c_1(\lambda)p(\lambda) + 0.25d_1(\lambda)p^2(\lambda)),$$

$$y(\lambda) = 4(c_1(\lambda)q(\lambda) - b_1(\lambda) - 0.5d_1(\lambda)p(\lambda)q(\lambda)),$$

$$z(\lambda) = 16d_1(\lambda)q^2(\lambda),$$

$$m(\lambda) = \left( -y(\lambda) - (y^2(\lambda) - 4x(\lambda)z(\lambda))^{0.5} (2x(\lambda))^{-1} \right),$$

$$u(\lambda) = q(\lambda) - 16^{-1} p(\lambda)m(\lambda),$$

$$w(\lambda) = \left| (m(\lambda) - u^2(\lambda))^{0.5} \right|,$$

$$v_2(\lambda) = \left( (u(\lambda) - 1) + ((u(\lambda) - 1)^2 + w^2(\lambda))^{0.5} \right) (w(\lambda))^{-1},$$

$$n_2(\lambda) = (0.5w(\lambda)v_2^{-1}(\lambda))^{0.5},$$

$$k_2(\lambda) = n_2(\lambda)v_2(\lambda).$$

Алгоритмы (1.5) и (1.6) можно использовать для определения оптической функции слоя  $n_1(\lambda)$  по спектрам коэффициентов отражения  $R_{01s}^*(\lambda)$ ,  $R_{01p}^*(\lambda)$  и  $R_{01s}^{**}(\lambda)$ , которые рассчитываются по выражению (1.3) для соответствующих поляризации и углов падения  $\varphi_{01}^*$  и  $\varphi_{01}^{**}$ . При правильном построении огибающих спектров, прозрачном и не шероховатом слое мнимая часть показателя преломления слоя должна быть близка к нулю. Это известный критерий [10], который применяется, например, при численном определении физических не комплексных величин.

Для определения толщины слоя лучше выбрать в спектре два любых интерференционных максимума, положения которых достаточно точно задаются  $\lambda_v$  и  $\lambda_{v+j}$  ( $\lambda_{v+j}, \lambda_{v+j} > \lambda_v, j = 1; 2; 3$ ), и определить две оптические характеристики слоя  $n_1(\lambda_v)$  и  $n_1(\lambda_{v+j})$ . Для прозрачного слоя в области контрастного интерференционного спектра ( $k_2(\lambda) < 0,1$ ) выражение для определения толщины имеет вид [11]

$$d = \frac{j\lambda_v \lambda_{v+j}}{2 \left( \frac{\lambda_{v+j} \sqrt{n_1^2(\lambda_v) - \sin^2 \varphi_{01}} - \lambda_v \sqrt{n_1^2(\lambda_{v+j}) - \sin^2 \varphi_{01}}}{\lambda_{v+j} \sqrt{n_1^2(\lambda_v) - \sin^2 \varphi_{01}} - \lambda_v \sqrt{n_1^2(\lambda_{v+j}) - \sin^2 \varphi_{01}}} \right)}. \quad (1.7)$$

## 2 Моделирование структуры слоев SiO<sub>2</sub> – подложка cSi

Табличные значения оптических характеристик слоя SiO<sub>2</sub>, подложки cSi и аморфного кремния ( $n_a(\lambda), k_a(\lambda)$ ), приведенные в программном обеспечении спектрального эллипсометра ES2, в области от 0.4 мкм до 1 мкм можно задать функциями

$$n_1(\lambda) = 1.4470 + 1.3147 \times 10^{-3} \lambda^2 + 4.6542 \times 10^{-3} \lambda^{-2} - 2.4312 \times 10^{-4} \lambda^{-4}, \quad (2.1)$$

$$n_2(\lambda) = 3.3828 - 0.017 \lambda^2 + 0.2313 \lambda^{-2} - 0.0293 \lambda^{-4} + 0.0072 \lambda^{-6}, \quad (2.2)$$

$$k_2(\lambda) = -0.0394 + 0.0117 \lambda^2 + 0.039 \lambda^{-2} - 0.0136 \lambda^{-4} + 0.0027 \lambda^{-6},$$

$$n_a(\lambda) = 2.0664 - 0.7761 \lambda^2 + 1.2311 \lambda^{-2} - 0.1702 \lambda^{-4} + 0.008 \lambda^{-6}, \quad (2.3)$$

$$k_a(\lambda) = -0.7403 + 0.6601\lambda^2 + 0.1043\lambda^{-2} - 0.0821\lambda^{-4} - 0.0044\lambda^{-6}.$$

Это позволило, во-первых, по формулам (1.1) для  $s$  и  $p$  поляризованного света рассчитать точные значения коэффициентов отражения  $R_{s,p}(\lambda)$  слоя ( $d = 0.95\mu m$ ) на подложке. Углы падения света на слой выбирались так, чтобы чувствительность

$$\varepsilon = \frac{R(n_1, n_2, k_2, d) - R(\Delta n_1, \Delta n_2, \Delta k_2, \Delta d)}{R(n_1, n_2, k_2, d)}$$

этих коэффициентов к малым изменениям параметров модельной структуры  $\Delta n_1(\lambda)$ ,  $\Delta n_2(\lambda)$ ,  $\Delta k_2(\lambda)$  и  $\Delta d$  была максимальной.

Во-вторых, на рассчитанных спектрах  $R_{s,p}(\lambda)$  построить огибающие экстремумов и сравнить значения  $R_{\pm}(\lambda)$  со значениями, полученными по выражению (1.2). После этого по выражению (1.3), удалось рассчитать  $R_{01}(\lambda)$ .

Решение обратных задач спектрофотометрии (расчет спектров оптических характеристик) показывает, что при точном задании значений коэффициентов отражения  $R_{s,p}(\lambda)$ , по выражению (1.4) и алгоритмам (1.5), (1.6) однозначно восстанавливаются оптические функции (2.1) и (2.2), а по выражению (1.7) находится толщина модельного слоя. Эту задачу удалось решить благодаря тому, что на аналитически рассчитанных спектрах  $R_{s,p}(\lambda)$  можно точно определить координаты экстремумов и построить их огибающие.

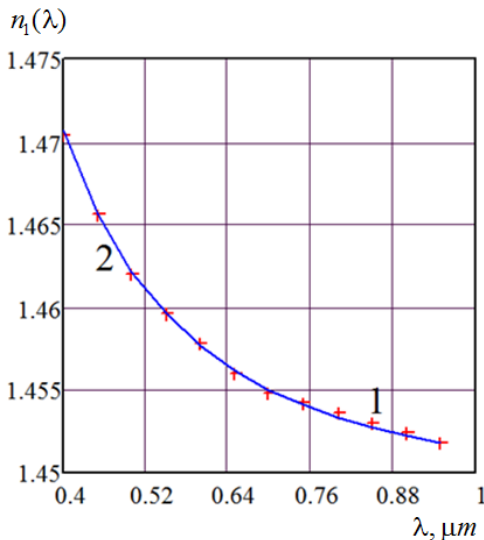


Рисунок 2.1 – Влияние погрешностей определения коэффициентов отражения на спектр показателя преломления модельного слоя

Исследуем влияние возможных погрешностей определения коэффициентов отражения ( $\Delta R(\lambda) = \pm 0.0005$ ) и угла падения ( $\Delta \varphi_{01} = \pm 0.1^\circ$ ) на аналитически определяемые параметры слоя и

подложки. На рисунке 2.1 приведены рассчитанные (кривая 1,  $\varphi_{01} = 30^\circ$ ) по выражению (1.4) и заданные на основании (2.1) (кривая 2) спектры  $n_1(\lambda)$  модельного диэлектрика. Увеличение точности расчетов  $n_1(\lambda)$  наблюдается в коротковолновой области спектра и при увеличении угла падения. Это объясняется соответствующим увеличением значений  $R_{01s}(\lambda)$ . При точном определении огибающих экстремумов спектров и указанных погрешностях определения коэффициентов отражения, угла падения, погрешность расчета показателя преломления слоя  $\pm 0.0003$ .

На рисунке 2.2 приведены аналитически рассчитанные по двухугловому ( $\varphi_{01}^* = 30^\circ$ ,  $\varphi_{01}^{**} = 60^\circ$ ) алгоритму спектры  $n_2(\lambda)$  (кривая 1) модельного полупроводника. Показатели преломления  $n_2(\lambda)$  менее чем на 0.5% отличаются от заданных (кривая 2) по выражению (2.2). Соответствующие показатели поглощения в области  $\lambda < 0.6 \mu m$  отличаются от заданных менее чем на 5%. При  $\lambda > 0.6 \mu m$  отличие сравниваемых показателей поглощения в отдельных точках спектра увеличивается и для определения  $k_2(\lambda)$  приходится использовать функции полиномиальной регрессии.

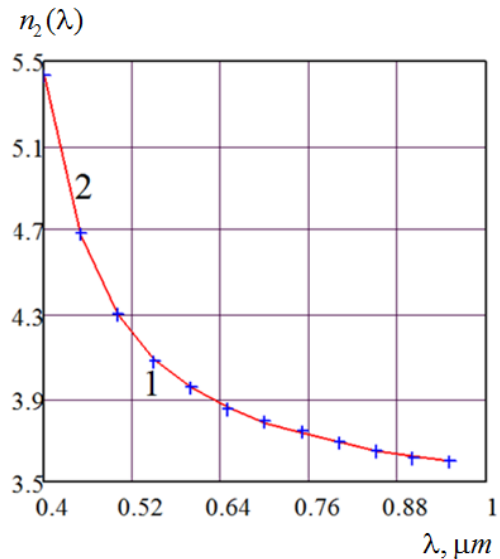


Рисунок 2.2 – Влияние погрешностей определения коэффициентов отражения на спектр показателя преломления модельной подложки

Таким образом, при отсутствии переходных и поверхностных слоев в модельной структуре  $SiO_2 - cSi$  и высокой точности определения коэффициентов отражения (не более 0.1%) аналитически можно рассчитать спектры оптических характеристик слоя и подложки. На результаты аналитических решений существенное влияние оказывают углы падения. Если спектр  $n_2(\lambda)$  подложки можно определить как по двухугловой

так и по одноугловой методикам, то для определения  $k_2(\lambda)$  на участке спектра слабого поглощения из-за недостаточной точности определения коэффициентов отражения  $R_{+s}(\lambda)$  и  $R_{+p}(\lambda)$  необходимо использовать функции полиномиальной регрессии.

### 3 Эксперимент и результаты

Перед нанесением слоя  $\text{SiO}_2$  промышленную подложку КДБ12 очищали от естественного поверхностного слоя с использованием известной методики [12]. Слой диоксида кремния получали путем окисления подложки в атмосфере сухого кислорода. Такая технология используется при изготовлении многих кремниевых структур. Спектры  $R_s(\lambda)$ ,  $R_p(\lambda)$  и  $\frac{R_p(\lambda)}{R_s(\lambda)}$  образцов

измеряли на спектрофотометре Photon RT производства ООО «ЭссентОптикс» при углах падения  $\varphi_{01}$  от  $10^\circ$  до  $60^\circ$  в спектральной области от  $0,220 \mu\text{m}$  до  $1 \mu\text{m}$ . Шаг измерений по  $\lambda$  составлял  $0,5 \cdot 10^{-3} \mu\text{m}$ , по углу  $\varphi_{01} - 10^\circ$ . Точность измерения коэффициентов отражения – не хуже 0,1%.

На рисунке 3.1 для угла падения  $30^\circ$  приведены измеренные спектры  $R_s(\lambda)$  и  $R_p(\lambda)$  слоя  $\text{SiO}_2$  на пластине КДБ12 (кривые 1), пластины КДБ12 до очистки от естественного слоя (кривые 2) и огибающие экстремумов (кривые 3, 4). Спектры отражения для границы раздела воздух – чистый кристаллический кремний, рассчитанные на основании (2.2), проходят между кривыми (2) и (3). Несовпадение спектров (2), (3) и чистого кремния можно объяснить тем, что по оптическим и геометрическим параметрам переходный слой отличается от естественного слоя на пластине КДБ12. Другими словами, при термическом отжиге пластин между слоем  $\text{SiO}_2$  и очищенной кремниевой подложкой образуется тонкий переходный слой.

Спектр показателя преломления слоя (рисунок 3.2, кривая 1) на пластине КДБ12 был рассчитан по двухугловому алгоритму (1.6). Для этого  $R_{+s}^*(\lambda)$  и  $R_{+s}^{**}(\lambda)$  заменяли на  $R_{01}^*(\lambda)$  и  $R_{01}^{**}(\lambda)$ , соответствующие углам падения  $30^\circ$  и  $60^\circ$ . Для  $s$  поляризованного света в средней части спектра коэффициент отражения  $R_{01}(\lambda)$  имеет значение около 5%, а для  $p$  поляризованного света – около 2%. При определении такой отражательной способности материала слоя велика роль погрешностей измерения спектров  $R_{s,p}(\lambda)$ . Обработанный функцией полиномиальной регрессии (кривая 2) спектр  $n_1(\lambda)$  располагается под спектром, рассчитанным по функции (2.1) (кривая 3). Эффективные значения показателя преломления диоксида кремния и малая мнимая

часть ( $k_1(\lambda) \approx 10^{-8}$ ), по-видимому, обусловлены наличием поверхностного слоя.

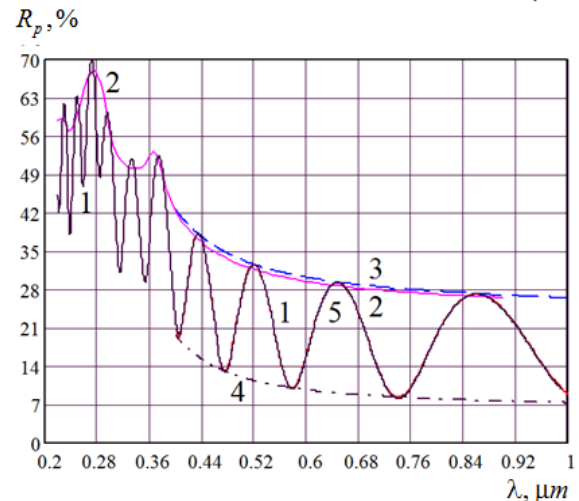
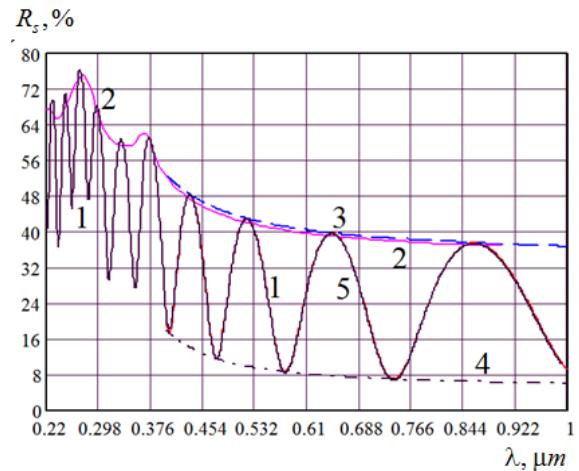


Рисунок 3.1 – Измеренные спектры слоя на подложке (1), подложки (2), огибающих (3), (4) и рассчитанный спектр слоя на подложке (5)

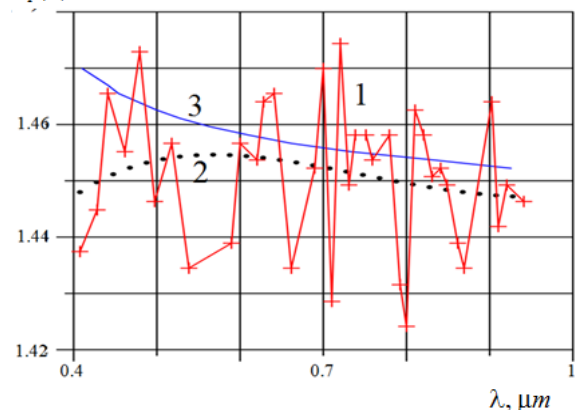


Рисунок 3.2 – Спектры показателя преломления слоя диоксида кремния

На рисунке 3.3 (кривые 1) представлены спектры оптических характеристик подложки КДБ12, которые были определены по огибающим максимумов (кривые 3, рисунок 3.1). Для этого использовался алгоритм (1.5). Допустим,

что дисперсия оптических характеристик кремниевой подложки (рисунок 3.3, кривые 2) задается выражением (2.2). Тогда приведенные данные указывают на отличие структуры переходной и объемной областей подложки. Эффективные значения  $n_2(\lambda)$  и  $k_2(\lambda)$  подтверждают наличие переходного слоя между слоем диоксида кремния и подложкой КДБ12. Такой слой необходимо учитывать при выборе более сложной электродинамической модели структуры слой  $\text{SiO}_2$  – подложка cSi.

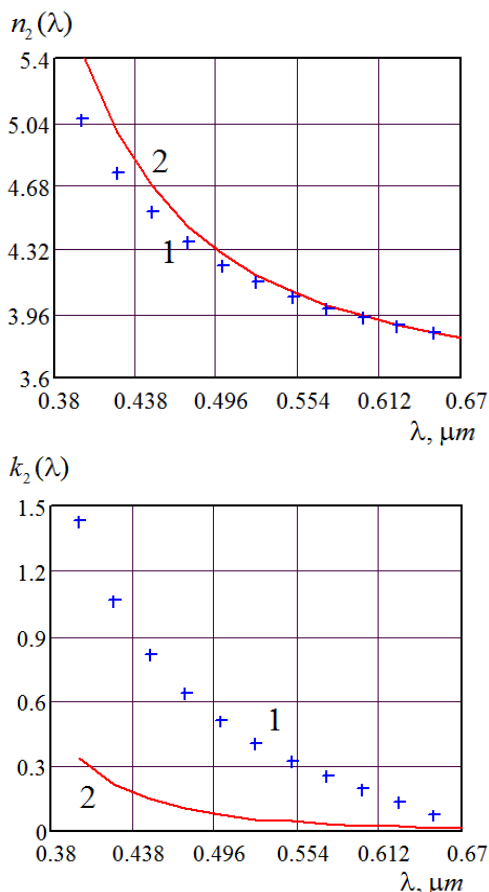


Рисунок 3.3 – Спектры оптических характеристик подложки КДБ12

Для определения толщины слоя (таблица 3.1) диоксида кремния в выражение (1.7) подставляли длины волн максимумов ( $\lambda_v$ ) из измеренных спектров (рисунок 3.1, кривые 1). Толщина слоя  $\text{SiO}_2$ , нанесенного на пластину КДБ12, оказалась равной  $(0.948 \pm 0.008) \mu\text{m}$ .

Мы пытались численно решить обратную задачу спектрофотометрии по измеренным спектрам  $R_{s,p}(\lambda)$ . Для этого использовалась трехслойная электродинамическая модель: поверхностный слой – смесь воздушных пор ( $f_1$ ) и диоксида кремния  $(1 - f_1)$  (модель Максвелла-Гарнетта); однородный слой  $\text{SiO}_2$ ; переходный слой – матрица из аморфного кремния  $(1 - f_2 - f_3)$  со

сферическими частицами из диоксида кремния ( $f_2$ ) и кристаллического кремния ( $f_3$ ) (модель Максвелла-Гарнетта и Бруггемана. Дисперсия оптических характеристик материалов задавалась функциями (2.1)–(2.3). Методом наименьших квадратов определялись шесть параметров – толщины слоев  $d_1, d_2, d_3$  и доли материалов поверхностного и переходного слоев  $f_1, f_2, f_3$ , при которых рассчитанные спектры были наиболее близки к измеренным спектрам (рисунок 3.1, кривые 1 и 5). Решения этой задачи приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.1 – Толщина слоя  $\text{SiO}_2$

$v$	$\lambda_v, \mu\text{m}$	$v + j, v$	$d_1, \mu\text{m}$	$d_{cp}, \mu\text{m}$
1	0.43504	2, 1	0.939	
2	0.52047	3, 2	0.950	
3	0.64775	4, 3	0.953	0.948
4	0.85952	4, 1	0.947	
		4, 2	0.952	
		3, 1	0.945	

Таблица 3.2 – Параметры трехслойной модели для  $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$

Слой	$d_j, \mu\text{m}$	$n_j$	$k_j$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
Поверхностный	$2.9 \cdot 10^{-3}$	1.422		0.074	0.926	
$\text{SiO}_2$	0.9466	1.457				
Переходный	$3.6 \cdot 10^{-3}$	2.685	0.036	0.108	0.491	0.401

Толщина слоя  $\text{SiO}_2$  в этом случае оказалась  $0.9466 \mu\text{m}$ . Как видим, для слоя диоксида кремния наблюдается удовлетворительная корреляция величин толщин, которые определялись аналитически и численно. Переходный слой имеет толщину  $3,6 \text{ нм}$ , содержит 11% аморфного кремния, 40% кристаллического кремния и 49% диоксида кремния. Показатели преломления переходного слоя (таблица 3.2) меньше, чем у кристаллического кремния, а соответствующие показатели поглощения больше, чем у кристаллического кремния. Такое соотношение показателей преломления свойственно и поверхностному слою. Оно объясняет поведение кривых на рисунках 3.2 и 3.3. Поверхностный слой состоит из диоксида кремния (93%) и воздушных пор (7%).

### Заключение

Численное моделирование и экспериментальное исследование структуры диэлектрический слой  $\text{SiO}_2$  – полупроводниковая подложка КДБ12 показывает:

1. Определение оптических спектров подложки и толщины прозрачного слоя можно выполнить аналитически, используя упрощенный метод огибающих максимумов, при точности измерений коэффициентов отражения не хуже 0,1%.

2. На результаты аналитических решений существенное влияние оказывает не только точность измерения коэффициентов отражения, но и выбор углов падения. Если спектр  $n_2(\lambda)$  подложки можно определить достаточно точно как по двухугловой, так и по одноугловой методикам, то для определения  $k_2(\lambda)$  на отдельных участках спектра слабого поглощения полупроводника приходится пользоваться функциями полиномиальной регрессии. При этом точность определения показателей преломления около 0.5%, а для  $k_2(\lambda)$  относительная погрешность около 15%. Определяющим фактором при этом является отыскание оптимальных углов падения, которые обеспечивают достаточную чувствительность соответствующих коэффициентов отражения.

3. Эффективные значения  $n_1(\lambda)$ ,  $n_2(\lambda)$  и  $k_2(\lambda)$ , рассчитанные аналитически, обусловлены наличием поверхностного слоя на слое  $\text{SiO}_2$  и переходного слоя между слоем диоксида и подложкой КДБ12. Такие слои необходимо учитывать при выборе электродинамической модели структуры слой  $\text{SiO}_2$  – подложка cSi.

4. Аналитические решения спектрофотометрической задачи прозрачный слой на поглощающей подложке можно использовать в качестве первых приближений при численном определении параметров более сложной трехслойной модели. Это существенно уменьшает время расчетов и обеспечивает минимальную невязку значений измеренных и рассчитанных коэффициентов отражения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Борн, М. Основы оптики: пер. с англ. / М. Борн, Э. Вольф. – М.: Наука, 1970. – 856 с.
2. Minkov, D. Computation of the optical constants of a thin dielectric layer on a transmitting substrate from the reflection spectrum it inclined incidence of light / D. Minkov // JOSA A. – 1991. – Vol. 8, № 2. – P. 306–310.
3. Филиппов, В.В. Аналитический метод определения оптических постоянных и толщины поглощающих пленок по спектрам отражения / В.В. Филиппов // Оптика и спектроскопия. – 1995. – Т. 78, № 5. – С. 798–801.

4. Филиппов, В.В. Точность определения оптических параметров тонких пленок методом огибающих экстремумов спектра отражения / В.В. Филиппов, В.П. Кутавичюс // ЖПС. – 2003. – Т. 70, № 1. – С. 109–115.

5. Филиппов, В.В. Метод огибающих для исследования системы двух пленок на отражающей подложке / В.В. Филиппов // Оптика и спектроскопия. – 2006. – Т. 101, № 3. – С. 485–489.

6. Кособуцкий, П.С. Аналитические функции огибающих спектров Фабри-Перо многослойных структур / П.С. Кособуцкий // Письма в ЖТФ. – 2008. – Т. 34, № 10. – С. 79–82.

7. Биленко, Д.И. Влияние переходного слоя на результаты эллипсометрических исследований наноразмерных слоев / Д.И. Биленко, В.П. Полянская, М.А. Гецьман, Д.А. Горин, А.А. Невешкин, А.М. Ященко // ЖТФ. – 2005. – Т. 75, вып. 6. – С. 69–73.

8. Беляева, А.И. Границы раздела слоев и шероховатость в многослойной кремниевой структуре / А.И. Беляева, А.А. Галуза, С.Н. Коломиец // Физика и техника полупроводников. – 2004. – Т. 38. – № 9. – С. 1050–1055.

9. Fahrenfort, J. On the determination of optical constants in the infrared by attenuated total reflection / J. Fahrenfort, W.M. Visser // Spectrochim. Acta. – 1962. – Vol. 18, № 9. – P. 1103–1116.

10. Пшеницын, В.И. Эллипсометрия в физико-химических исследованиях / В.И. Пшеницын, М.И. Абаев, Н.Ю. Лызлов // Ленинград: Химия. – 1986. – 152 с.

11. Стаськов, Н.И. Переходные слои в кремниевых структурах  $\text{SiO}_2$  – cSi и pSi –  $\text{SiO}_2$  – cSi / Н.И. Стаськов, С.О. Парашков, Т.Н. Коледа // Актуальные вопросы теоретической физики, физики конденсированных сред и астрофизики: Межд. научно-практ. конф. Брест, 2–3 октября 2014 г. / БрГУ им. А.С. Пушкина; ред. А.В. Демидчик и [др.]. – Брест. – 2014. – С. 96–101.

12. Chiou, Y.I. Growth characteristics of silicon produced by rapid thermal oxidation processes / Y.I. Chiou, C.H. Sow, G. Li, K.A. Ports // Appl. Phys. Lett. – 1990. – Vol. 57, № 9. – P. 881–883.

Поступила в редакцию 10.02.15.

УДК 530.1; 539.12

## О МЕТОДЕ РАСЧЕТА СТАТИСТИЧЕСКОГО ВЕСА НЕИДЕАЛЬНОГО ГАЗА НА ОСНОВЕ ЭНТРОПИИ КРИТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ

Г.Ю. Тюменков

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*

## ON THE METHOD OF CALCULATING THE STATISTICAL WEIGHT OF A NON-IDEAL GAS BASED ON ENTROPY OF THE CRITICAL STATE

G.Yu. Tyumenkov

*F. Scorina Gomel State University*

Статистический вес неидеального газа является важнейшей его характеристикой, лежащей в основе статистической теории данной макросистемы. В работе предложен метод расчета статистического веса, основанный на использовании энтропии критического состояния неидеального газа, описываемого рядом общепризнанных полуэмпирических двухпараметрических уравнений состояния.

**Ключевые слова:** полуэмпирическое двухпараметрическое уравнение состояния, неидеальный газ, критическое состояние, энтропия, статистический вес.

The statistical weight of non-ideal gas is its most important characteristic of the underlying statistical theory of the macrosystem. In this paper the method of calculating the statistical weight of a non-ideal gas based on entropy of the critical state is proposed. Some non-ideal gases corresponding several well-known semi-empirical two-parameter equation of state are considered.

**Keywords:** semi-empirical two-parameter equation of state, non-ideal gas, critical state, entropy, statistical weight.

### Введение

В настоящее время проблема изучения в рамках статистического метода неидеальных газов, феноменология которых исходит из полуэмпирических уравнений состояния, по-прежнему актуальна [1]. Сложность заключается в том, что для таких газов крайне затруднительно точно сформулировать модельные представления о характере столкновения молекул, их форме и т.д. Часто такие уравнения состояния не связаны с вириальным разложением, а носят научно-интуитивный характер, что явно заметно по их виду, например, по виду второго уравнения Дитеричи. Поэтому возникает задача максимально точного расчета статистического веса  $\Gamma$  таких газов с использованием характеристик, следующих из самих уравнений состояния. В статье предлагается применить для указанной цели характеристики критического состояния газа, в том числе, и критическую энтропию  $S_k$ . Критическая энтропия аддитивно может быть точно выражена через статистически определенную энтропию идеального газа и добавку, содержащую критические параметры, строго соответствующие конкретному виду полуэмпирического уравнения состояния. И это является наиболее прямым и наиболее корректным способом, позволяющим связать феноменологический параметр неидеального газа с основополагающей его характеристикой в рамках статистического подхода.

### 1 Связь статистического веса с параметрами критического состояния

Следуя [2], можно достаточно несложно прийти к выводу, что знание критической энтропии  $S_k$  молярного состояния позволяет найти соответствующее значение статистической энтропии  $S$  для системы, содержащей произвольное количество вещества. Воспользовавшись выражениями для изменения энтропии [2] и положив в них  $S_0 \equiv S_k$ , получим энтропию  $S$  в виде

$$S = \frac{\nu}{k} \left( S_k + c_v \ln \frac{T}{T_k} + R \ln \frac{V-b}{V_k-b} \right), \quad (1.1)$$

где  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $k$  – постоянная Больцмана,  $\nu$  – число молей вещества макросистемы. Заметим, что здесь и в дальнейшем в работе используются стандартные обозначения физических величин и констант. Тогда искомый статистический вес на основе (1.1) будет найден, как

$$\Gamma = e^S, \quad (1.2)$$

Вид безразмерной статистической энтропии  $S$ , задаваемый формулой (1.1), следует из точного представления ее полного дифференциала

$$dS = \frac{\nu}{k} \left( \frac{c_v}{T} dT + \frac{R}{(V-b)} dV \right), \quad (1.3)$$

являющегося универсальным для всех подлежащих рассмотрению в работе полуэмпирических двухпараметрических уравнений состояния, а это: уравнение Ван-дер-Ваальса, второе уравнение

Дитеричи, модифицированное уравнение Соаве – Редлиха – Квонга с  $\alpha \neq \alpha(T)$  и модифицированное уравнение Пенга – Робинсона также с  $\alpha \neq \alpha(T)$ . Следовательно, указанная общность переносится и на саму энтропию (1.1).

### 2 Энтропия критического состояния

Обратимся непосредственно к поиску недостающей в (1.1) критической энтропии. Предварительно заметив, что в термодинамике [2] в рамках феноменологического метода для характеристики критического состояния традиционно используют такие параметры, как критическое давление  $P_k$ , критический объем  $V_k$  и критическую температуру  $T_k$ . Их значения определены и хорошо известны. Хотя совершенно очевидно, что и другие функции состояния в этом случае преобретают критические значения. Одной из таких функций состояния и является критическая энтропия  $S_k$ . В силу специфики метода исследования энтропия в термодинамике определяется неоднозначно [2], но это затруднение при расчете  $S_k$  можно преодолеть, используя статистический результат для энтропии идеального газа [1].

Начнем поиск с рассмотрения выражения для свободной энергии  $F$  неидеального газа, полученного в рамках статистического метода [1]

$$F = F_{ид} + \frac{N^2 BT}{V} = F_{ид} + \frac{N^2 T \beta}{V} - \frac{N^2 \alpha}{V}, \quad (2.1)$$

где  $B = (\beta - \alpha/T)$  – вириальный коэффициент,  $N$  – число частиц системы,  $V$  – объем системы,  $T$  – энергетическая температура системы. Параметр  $\beta$  является частью вириального коэффициента характеризующей силы межмолекулярного отталкивания и выражается как

$$\beta = 4V_0 = \frac{b}{N_A},$$

где  $V_0$  – объем молекулы газа. Параметр же  $a$  связан с силами межмолекулярного притяжения и определяется, как правило, эмпирически. Тогда безразмерная статистическая энтропия будет определяться из (2.1) как

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = S_{ид} + \frac{N^2 \beta}{V}, \quad (2.2)$$

где слагаемое  $S_{ид}$ , соответствующее идеальному газу, оказывается равным [1]

$$S_{ид} = N \ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2} N \ln T + \frac{3}{2} N \ln \frac{m}{2\pi\hbar^2} + \frac{5}{2} N, \quad (2.3)$$

в нем  $m$  – масса молекулы газа. Из (2.2) и (2.3) находим искомую энтропию

$$S = S(V, T, N; \beta) = N \ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2} N \ln T + \frac{3}{2} N \ln \frac{m}{2\pi\hbar^2} + \frac{5}{2} N + \frac{N^2 \beta}{V}. \quad (2.4)$$

Переход от статистического вида (2.4) к виду термодинамическому делается путем замен

$$S \rightarrow \frac{S}{k}, T \rightarrow kT.$$

В силу того, что все полуэмпирические уравнения состояния формулируются в молярной форме, сразу делаем в (2.4) одновременный переход и к критичности, и к молярности. Следовательно, для термодинамической молярной критической энтропии  $S_k$  получим

$$S_k = S(V_k, T_k, N_A; \beta) = \quad (2.5)$$

$$= R \left( \ln \frac{V_k}{N_A} + \frac{3}{2} \ln(kT_k) + \frac{3}{2} \ln \frac{m}{2\pi\hbar^2} + \frac{5}{2} + \frac{N_A \beta}{V_k} \right).$$

Упростим формулу (2.5), воспользовавшись достоверными численными значениями фундаментальных констант [3], фигурирующих в круглых скобках:

$$S_k = R \left[ \ln \left( V_k T_k^{3/2} m^{3/2} e^{100,7379} \right) + \frac{b}{V_k} \right]. \quad (2.6)$$

Полученный результат (2.6) носит общий характер и позволяет перейти теперь непосредственно к частным случаям конкретных уравнений состояния.

### 3 Частные значения энтропия критического состояния

Рассмотрим, как было сказано выше, часто используемые для описания реальных газов двухпараметрические уравнения состояния, приводящие к полному дифференциалу энтропии вида (1.3), и определим для них критическую энтропию  $S_k$ :

уравнение Ван-дер-Ваальса

$$\left( P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT,$$

$$V_k = 3b, \quad T_k = \frac{8a}{27Rb},$$

$$S_k = R \ln \left( \frac{a^{3/2} m^{3/2}}{b^{1/2}} e^{97,1682} \right); \quad (3.1)$$

второе уравнение Дитеричи

$$\left( P + \frac{a}{V^{5/3}} \right) (V - b) = RT,$$

$$V_k = 4b, \quad T_k = \frac{15}{2^{16/3}} \frac{a}{Rb^{2/3}},$$

$$S_k = R \ln \left( a^{3/2} m^{3/2} e^{97,7141} \right); \quad (3.2)$$

модификация уравнения Соаве – Редлиха – Квонга с  $\alpha \neq \alpha(T)$

$$\left( P + \frac{a}{V(V+b)} \right) (V - b) = RT,$$

$$V_k = 3,8473b, \quad T_k = 0,2027 \frac{a}{Rb},$$

$$S_k = R \ln \left( \frac{a^{3/2} m^{3/2}}{b^{1/2}} e^{96,7740} \right); \quad (3.3)$$

модификация уравнения Пенга – Робинсона с  $\alpha \neq \alpha(T)$

$$\left( P + \frac{a}{V(V+b) + b(V-b)} \right) (V-b) = RT,$$

$$V_k = 3,9514b, \quad T_k = 0,1701 \frac{a}{Rb},$$

$$S_k = R \ln \left( \frac{a^{3/2} m^{3/2}}{b^{1/2}} e^{96,5313} \right). \quad (3.4)$$

Полученные выражения (3.1)–(3.4) говорят о том, что искомые значения критической энтропии  $S_k$  неидеального газа зависят также от массы молекулы газа  $m$  и от параметров соответствующих уравнений состояния  $a$  и  $b$ . Поэтому конкретный расчет статистического веса  $\Gamma$  неидеального газа может быть осуществлен на основе использования значений критической энтропии (3.1)–(3.4) в выражениях (1.1) и (1.2).

#### Заключение

Таким образом, в работе сформулирован метод расчета статистического веса  $\Gamma$  неидеального газа, описываемого некоторыми полуэмпирическими двухпараметрическими уравнениями состояния, основанный на использовании параметров критического состояния, в частности, критической энтропии  $S_k$ . Полученные результаты могут быть полезны при теоретических ис-

следованиях неидеальных газов в рамках статистического метода и в учебном процессе в классических и технических университетах в рамках курсов «Термодинамика и статистическая физика» и «Физическая химия».

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Коткин, Г.Л. Лекции по статистической физике / Г.Л. Коткин. – Москва, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. – 190 с.
- 2 Румер, Ю.Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика / Ю.Б. Румер, М.Ш. Рывкин. – Новосибирск: Изд-во Новосибирского университета, 2000. – 608 с.
- 3 Barrow, J.D. The Constants of Nature: From Alpha to Omega – The Numbers that Encode the Deepest Secrets of the Universe / J.D. Barrow. – Pantheon Books, 2002. – 392 с.
- 4 Глушкова, Н.И. Критическая энтропия неидеального газа / Н.И. Глушкова, Г.Ю. Тюменков // Научные проблемы современной физики. Сборник материалов Республиканской научной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.А. Борисевича / БрГУ им. А.С. Пушкина – Брест, 2013. – С. 74–77.

Поступила в редакцию 08.10.15.

УДК 621.315.592

СОЛНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ С  $\text{Cu}_x\text{In}_x\text{Zn}_{2-2x}\text{Se}_2$  ПОГЛОЩАЮЩИМ СЛОЕМВ.В. Хорошко<sup>1</sup>, И.Н. Цырельчук<sup>1</sup>, В.Ф. Гременок<sup>2</sup>, А.Н. Петлицкий<sup>3</sup><sup>1</sup>Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск<sup>2</sup>Научно-практический центр НАН Беларуси по материаловедению, Минск<sup>3</sup>ОАО «ИНТЕГРАЛ», МинскSOLAR CELLS WITH  $\text{Cu}_x\text{In}_x\text{Zn}_{2-2x}\text{Se}_2$  ABSORBER LAYERV.V. Khoroshko<sup>1</sup>, I.N. Tsyrelchuk<sup>1</sup>, V.F. Gremenok<sup>2</sup>, A.N. Pyatlitski<sup>3</sup><sup>1</sup>Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk<sup>2</sup>Scientific and Practical Materials Research Centre of NAS Belarus, Minsk<sup>3</sup>JSC «INTEGRAL», Minsk

Сформированы тонкопленочные солнечные элементы с поглощающим слоем  $\text{Cu}_x\text{In}_x\text{Zn}_{2-2x}\text{Se}_2$  (CIZS) на стеклянных подложках. Данный полупроводниковый материал удовлетворяет как физическим требованиям к материалам фотоэлектрических преобразователей, так и требованиям снижения стоимости производства солнечных элементов. Предварительные результаты исследований показали, что стекло/Mo/ $\text{Cu}_x\text{In}_x\text{Zn}_{2-2x}\text{Se}_2$ /CdS/ZnO/Al-Ni тонкопленочные солнечные элементы могут обладать эффективностью более 10%.

**Ключевые слова:**  $\text{Cu}_x\text{In}_x\text{Zn}_{2-2x}\text{Se}_2$ , тонкие пленки, солнечные элементы, физические характеристики, эффективность.

Thin-film solar cells with the  $\text{Cu}_x\text{In}_x\text{Zn}_{2-2x}\text{Se}_2$  (CIZS) absorber layer of on glass substrates are created. The given semiconductor material satisfies physical requirements for materials for photo-electric converters, and requirements for depreciation of solar cells production. Preliminary results of researches showed that glass/Mo/ $\text{Cu}_x\text{In}_x\text{Zn}_{2-2x}\text{Se}_2$ /CdS/ZnO/Al-Ni thin film solar cells can possess efficiency more than 10%.

**Keywords:**  $\text{Cu}_x\text{In}_x\text{Zn}_{2-2x}\text{Se}_2$ , thin films, solar cells, physical characteristics, efficiency.

**Введение**

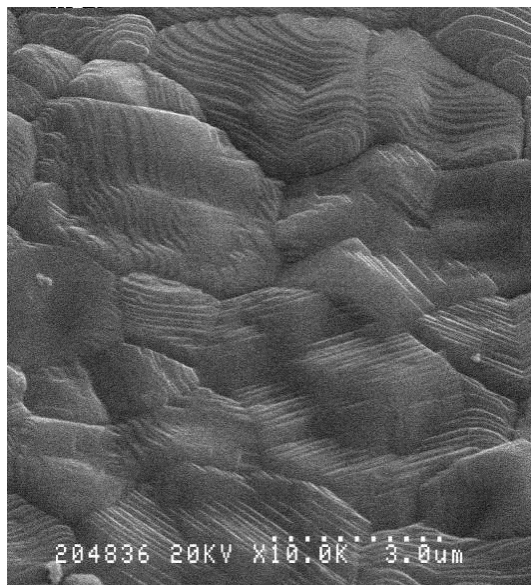
Тонкопленочные солнечные элементы (ТСЭ) на основе тройных  $\text{A}^{\text{I}}\text{B}^{\text{III}}\text{C}^{\text{VI}}_2$  и более сложных фаз с халькопиритной структурой являются фотопреобразователями нового поколения. Так, например, на основе  $\text{Cu}(\text{In},\text{Ga})\text{Se}_2$  (CIGS) получены лабораторные солнечные элементы с рекордной эффективностью до 21% и промышленные фотопреобразователи с КПД 12–14% [1], [2]. Дальнейшее улучшение характеристик таких фотопреобразователей лежит на пути исследований взаимосвязи технологических процессов со свойствами конкретных типов структур, а также освоения новых систем на основе  $\text{A}^{\text{I}}\text{B}^{\text{III}}\text{C}^{\text{VI}}_2$  полупроводников. В рамках этих исследований твердые растворы на основе тройных и  $\text{A}^{\text{I}}\text{B}^{\text{VI}}$  ( $\text{ZnSe}$ ,  $\text{ZnS}$ ,  $\text{ZnTe}$ ) соединений в последнее время привлекают внимание разработчиков приборов на их основе [2]–[4]. Полупроводники этой группы являются прямозонными материалами, имеют коэффициент оптического поглощения (до  $10^5 \text{ см}^{-1}$ ) и обнаруживают повышенную радиационную стойкость. Кроме того, использование цинка позволяет заменить дорогостоящие материалы как индий и галлий. Показано, что в системе  $\text{Cu}_{1-x}\text{In}_x\text{Zn}_{2-2x}\text{Se}_2$  (CIZS) существует непрерывный ряд твердых растворов, и ширина запрещенной зоны изменяется от 2.67 эВ ( $\text{ZnSe}$ ) до 1.04 эВ ( $\text{CuInSe}_2$ ) [3]–[5], что соответствует теоретическому оптимуму для создания высокоэффективных

фотопреобразователей. В данной статье приведены сведения о ТСЭ с  $\text{Cu}_x\text{In}_x\text{Zn}_{2-2x}\text{Se}_2$  поглощающим слоем, сформированных на стеклянных подложках.

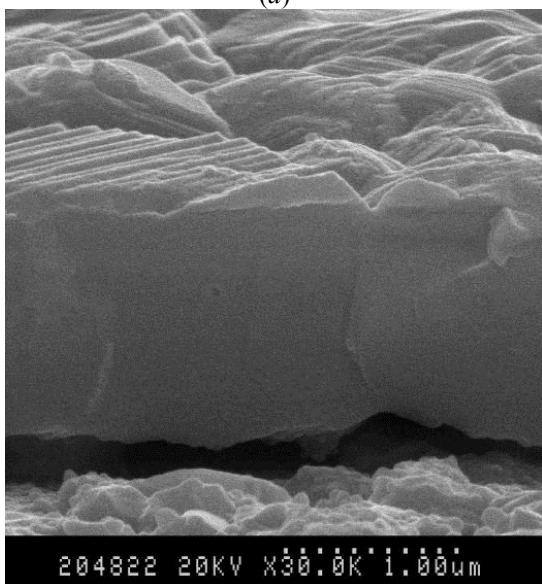
**1 Эксперимент**

Тестовые образцы солнечных элементов изготавливались на стеклянных подложках (ISO Norm 8037/1) размером  $76 \times 26 \text{ мм}^2$ . Подложки предварительно очищались кипячением в перекисно-аммиачной среде и промывались деионизованной водой. Далее наносился слой молибдена, который является нижним контактом структуры [2]. Для получения базовых слоев  $\text{Cu-In}$  использовался метод термического испарения на вакуумной установке УВН-71П-3. Давление остаточных газов в процессе осаждения металлов составляло  $8,7 \times 10^{-4} \text{ Па}$ . Температура подложек поддерживалась на уровне  $100\text{--}120^\circ\text{C}$ . Навески металлов чистоты В4 распылялись из молибденовой лодочки одновременно со средней скоростью 0,5 мкм. Получение базового слоя, содержащего цинк, осуществлялось методом испарения селенида цинка, который испаряется возгонкой с сохранением стехиометрии. Навеска селенида цинка рассчитывалась исходя из задаваемого состава получаемой пленки. Селенид цинка испарялся из отдельного танталового испарителя. Далее пленки прекурсоров подвергались процессу селенизации в реакторной системе

диффузионной печи СДО 125/3–15 для формирования слоев  $\text{Cu}_x\text{In}_x\text{Zn}_{2-2x}\text{Se}_2$ . Первая стадия селенизации осуществлялась при температуре 240–270°C в течение 10–30 минут, вторая стадия – при температуре 460–500°C в течение 10–50 минут [3], [4]. На основании ранее проведенных расчетов были определены расчетные значения элементов в поглощающем слое [3]. Температура второй стадии селенизации была снижена по сравнению с более ранними исследованиями [5], что в прочем не оказало влияния на морфологию поверхности (рисунок 1.1).



(а)



(б)

Рисунок 1.1 – Морфология поверхности (а) и поперечного сечения пленки CIZS-слоя (б)

После селенизации образцы поступали на операцию нанесения CdS методом CBD. Для получения CdS толщиной 50 нм использовалась смесь трех компонент: ammonia– $\text{NH}_3$  (1M), cadmiumsalt– $\text{CdI}_2$  или  $\text{CdSO}_4$  ( $1.4 \times 10^{-3}$ М) и thiourea

$\text{NH}_2\text{CSNH}_2$  (0.14 М). Этот процесс проводился в течение 4 мин при температуре 60°C. Затем магнетронным напылением из цинковой мишени в смеси аргона с кислородом (90% Ag + 10%  $\text{O}_2$ ) при давлении  $5 \times 10^{-3}$  мм.рт.ст. осаждались высокоомные плёнки *i*-ZnO толщиной 80÷100 нм с  $\rho = 10^6$  Ом·см и низкоомные слои *n*-ZnO с  $R = 20 - 80$  Ом/□ при толщине 300 нм. Цинковая мишень представляла собой диск диаметром 114 мм и толщиной 4 мм. Расстояние между подложкой и мишенью составляло 5 см. Осаждение пленок проводилось в смеси аргона с кислородом (90% Ag + 10%  $\text{O}_2$ ) при давлении  $5 \times 10^{-3}$  мм.рт.ст. Скорость осаждения пленок варьировалась величиной напряжения смещения на мишени, которое изменялось в пределах 300–420 В. Напыление Ni–Al контактной сетки проводилось на стандартной промышленной установке методом термического напыления в едином процессе через биметаллические маски. Толщина слоев Ni и Al составляла 0.1 мкм и 0.8 – 1.0 мкм, соответственно. Далее полученные структуры скрайбировались до слоя Mo и поступали на измерения фотоэлектрических параметров солнечных элементов, размеры которых составляли  $5 \times 10$  мм.

## 2 Результаты измерений и их обсуждение

Измерения характеристик СЭ выполнялись с использованием автоматизированного комплекса измерения вольтамперных характеристик солнечных элементов. Освещение, исследуемых СЭ, осуществлялось с помощью имитатора солнечного спектра близкого по составу к стандарту AM1,5 (1000 Вт/м<sup>2</sup>). Неоднородность освещённости по площади составляла менее 5%. Спектральные зависимости fotocувствительности СЭ регистрировались на призмном спектрометре. Спектральное распределение относительных значений внутренней квантовой эффективности рассчитывалось с учетом спектрального распределения энергии источника излучения. На рисунке 2.1 представлена спектральная чувствительность ТСЭ.

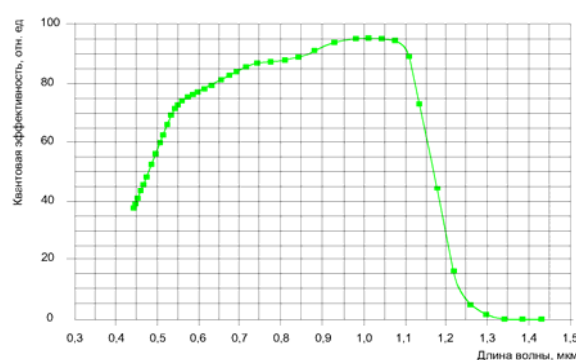


Рисунок 2.1 – Спектральная зависимость относительной квантовой эффективности при комнатной температуре для созданного СЭ

Из графика видно, что максимум фоточувствительности приходится на диапазон  $1 - 1,1 \text{ мкм}$ , что означает основной вклад в поглощение пленки CZTS. Максимальная вольтовая фоточувствительность для наилучших СЭ составляет  $S_U^m \approx 400 \text{ В/Вт}$ . Некоторые электрические параметры приведены в таблице 2.1. Исследования стационарных вольтамперных характеристик показали, что полученные тонкопленочные структуры обнаруживают четкое выпрямление, причем пропускное направление всегда реализуется при отрицательной полярности внешнего смещения на контактах к пленке  $n\text{-ZnO}$ . Было проведено исследование вольтамперных характеристик (ВАХ) созданных ТСЭ, сформированных на стеклянных подложках в температурном интервале  $\Delta T = 80\text{--}420^\circ\text{K}$ . На рисунке 2.2 приведены типичные ВАХ в условиях отсутствия освещения.

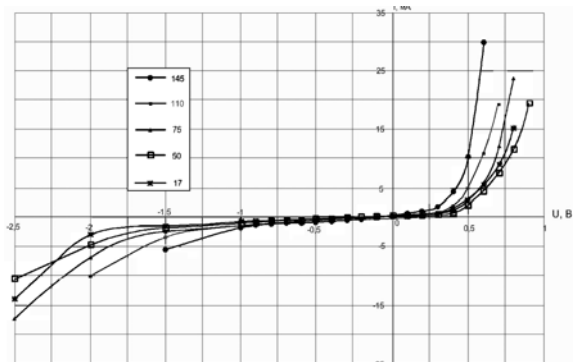


Рисунок 2.2 – Темновые ВАХ исследованных структур при температурах ( $^\circ\text{C}$ ): 17, 50, 75, 110, 145

Начальный участок прямых ветвей вольтамперных характеристик в интервале напряжений  $0\text{--}0,6 \text{ В}$  можно описать известной зависимостью:

$$I = I_s \left( \exp\left(\frac{qU}{mkT}\right) - 1 \right),$$

где  $m$  – коэффициент неидеальности,  $I_s$  – ток насыщения. Значения коэффициента неидеальности изменяются, при  $T = 300^\circ\text{K}$  составляет  $\approx 3$ , а ток насыщения  $0,5 \cdot 10^6 \text{ А}$ . При повышении температуры ток насыщения увеличивается до  $0,6 \cdot 10^6 \text{ А}$ , а  $m$  уменьшается до 2. Такие значения диодного коэффициента позволяют предположить туннельно-рекомбинационную природу прохождения тока.

При освещении фоточувствительной структуры светом постоянной интенсивности величина установившейся фотоЭДС описывается уравнением вольтамперной характеристики, полученным из выражения с учетом генерации носителей заряда при освещении:

$$0 = J_{sc} - J_0 \left( \exp\left(\frac{qU_{oc}}{mkT}\right) - 1 \right) - \frac{U_{oc}}{R_p}.$$

При освещении образцов ВАХ смещается в сторону отрицательных токов пропорционально

интенсивности освещения. На рисунке 2.3 показаны ВАХ образцов в темноте (штриховая линия) и при освещении светом (сплошная линия) стандарта АМ 1,5 при температуре  $300^\circ\text{K}$ .

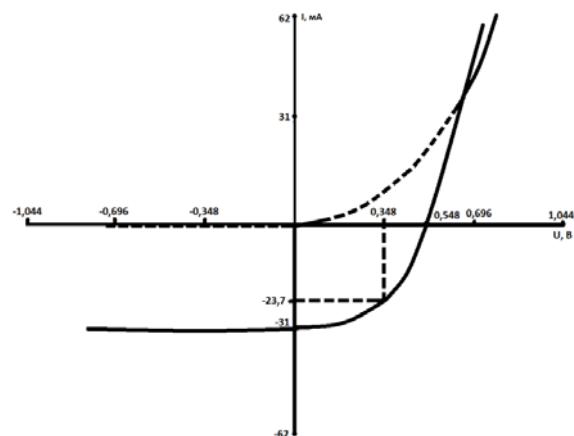


Рисунок 2.3 – Темновая и световая ВАХ ТСЭ

Видно, что при освещении, наряду со сдвигом по оси токов вниз, наблюдается пересечение темновой и световой ВАХ при прямом смещении. Одной из возможных причин, вызывающих это явление, может быть различное значение фотопроводимости материалов, образующих фотопреобразователь. Из полученной световой ВАХ были рассчитаны основные электрические параметры ТСЭ, которые приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Параметры ТСЭ при температуре  $300^\circ\text{K}$

Параметр	Значение
Площадь СЭ	$0,5 \text{ см}^2$
Напряжение холостого хода ( $U_{oc}$ )	$0,548 \text{ В}$
Плотность тока короткого замыкания ( $J_{кз}$ )	$31,12 \text{ mA/cm}^2$
Плотность фототока ( $J_{ph}$ )	$20 \text{ mA/cm}^2$
Напряжение в точке максимальной мощности ( $U_m$ )	$0,348 \text{ В}$
Плотность тока в точке максимальной мощности ( $J_m$ )	$23,7 \text{ mA/cm}^2$
Последовательное сопротивление ( $R_s$ )	$5 \text{ Ом}$
Параллельное сопротивление ( $R_{sh}$ )	$50 \text{ Ом}$
Коэффициент заполнения ВАХ (FF)	$53,6\%$
Коэффициент полезного действия (КПД)	$9,106\%$

### Заключение

Показано, что система твердых растворов может быть использована в качестве поглощающего слоя в ТСЭ. КПД полученных структур составил  $9,1\%$ . Следует отметить, что полученное значение КПД может быть значительно увеличено за счет увеличения коэффициента заполнения ВАХ, в первую очередь за счет снижения последовательного и увеличения параллельного сопротивлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Datasheet* // Stion Corporation [Electronic resource]. – 2013. – Mode of access: [http://www.stion.com/wp-content/uploads/2015/05/Stion\\_Elevation4\\_Framed\\_300-100-002\\_RevA.pdf](http://www.stion.com/wp-content/uploads/2015/05/Stion_Elevation4_Framed_300-100-002_RevA.pdf). – Date of access: 20.07.2015.

2. Гременок, В.Ф. Солнечные элементы на основе полупроводниковых материалов / В.Ф. Гременок, М.С. Тиванов, В.Б. Залесский. – Минск: Изд. Центр БГУ, 2007. – 222 с.

3. Оптимизация параметров поглощающего слоя  $\text{Cu}_x\text{In}_x\text{Zn}_{2-2x}\text{Se}_2$  для тонкопленочных солнечных элементов / В.В. Хорошко [и др.] // Известия национальной академии наук Беларуси. Серия

физико-математических наук. – 2014. – № 2. – С. 91–96.

4. Электрические свойства тонких пленок полупроводниковых твердых растворов  $(\text{CuInSe}_2)_x-(2\text{ZnSe})_{1-x}$  / И.Н. Цырельчук, В.В. Хорошко, В.Ф. Гременок, В.А. Иванов // Доклады БГУИР. – 2013. – № 8 (78). – С. 95–100.

5. Фотоэлектрические свойства поверхностно-барьерных структур на основе пленок  $\text{Zn}_{2-2x}\text{Cu}_x\text{In}_x\text{Se}_2$  / В.Ю. Рудь [и др.] // Физика и техника полупроводников. – 2005. – Т. 39, вып. 9. – С. 1070–1074.

Поступила в редакцию 09.09.15.

УДК 621.373.826

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЛАЗЕРНОЙ ПОЛИРОВКИ КВАРЦЕВОГО СТЕКЛА

Е.Б. Шершнев, Ю.В. Никитюк, С.И. Соколов, А.Е. Шершнев

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

## STUDY OF LASER BEAM POLISHING OF QUARTZ GLASS

E.B. Shershnev, Y.V. Nikitjuk, S.I. Sokolov, A.E. Shershnev

F. Scorina Gomel State University

Представлены результаты исследования процесса лазерной полировки кварцевого стекла, полученные с использованием конечно-элементного моделирования. Также представлены результаты экспериментов по лазерной полировке кварцевого стекла с использованием CO<sub>2</sub>-лазера.

**Ключевые слова:** лазер, кварцевое стекло, полировка, моделирование.

This paper presents the results of a study of the laser polishing quartz glass obtained by using finite element modeling. In addition, the results of experiments on the laser polishing quartz glass by using CO<sub>2</sub>-laser.

**Keywords:** laser, quartz glass, polishing, simulation.

**Введение**

Кварцевое стекло обладает высокой термостойкостью и высокой механической прочностью, устойчиво к действию кислот и воды. Благодаря этим свойствам кварцевое стекло применяется в качестве материала для изготовления окон фотоприемников и колб газоразрядных ламп, из него производятся линзы для передачи ультрафиолетового излучения и призмы для монохроматоров и спектрофотометров [1].

Применение излучения CO<sub>2</sub>-лазера в качестве технологического инструмента для обработки кварцевого стекла эффективно при лазерной резке и сварке, лазерной очистке кварцевого сырья и вытяжке волоконных световодов [2]–[11].

Так же известны примеры реализации лазерной полировки кварцевых стекол с использованием излучения CO<sub>2</sub>-лазера [11]–[14]. В работах [13], [14] отмечена высокая скорость лазерной полировки, а так же возможность обработки поверхностей различной формы. В работе [11] обращается внимание на возможность автоматизации процесса полировки лазерным излучением изделий из кварцевого стекла и отсутствие загрязнений нагреваемого объекта источниками нагрева.

Однако, лазерной полировке присущ ряд недостатков, затрудняющих ее дальнейшее широкое промышленное распространение [13], [14] и обуславливающих необходимость проведения исследований лазерной полировки кварцевого стекла с использованием излучения CO<sub>2</sub>-лазера.

**1 Моделирование**

Моделирование процесса лазерного нагрева кварцевого стекла было выполнено методом конечных элементов [15] в соответствии со схемой,

представленной на рисунке 1.1. Цифрой 1 отмечен лазерный пучок, цифрой 2 – кварцевое стекло. На рисунке прямыми линиями со стрелками указаны направления перемещения лазерного пучка относительно обрабатываемого изделия.

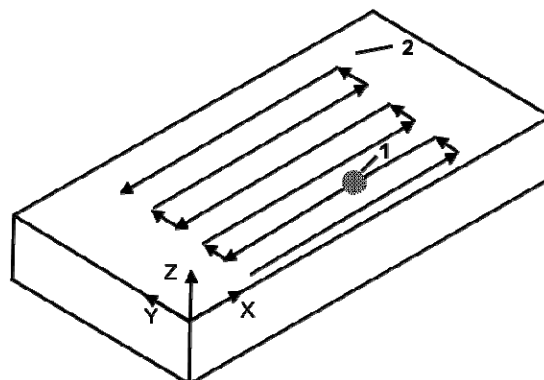


Рисунок 1.1 – Схема перемещения лазерного пучка в зоне обработки:  
1 – пятно лазерного пучка;  
2 – кварцевая пластина

Моделирование выполнялось с учетом зависимости теплофизических свойств кварцевого стекла от температуры (рисунок 1.2) [13].

Расчеты были выполнены для образца, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда с геометрическими размерами 20×10×3 мм, с использованием следующих значений технологических параметров обработки: плотность мощности лазерного излучения  $P_0 = 22 \cdot 10^6$  Вт/м<sup>2</sup>, радиус поперечного сечения лазерного пучка  $R = 1,5$  мм. Модуль скорости относительного перемещения лазерного пучка и образца  $V = 2,5$  мм/с.

На рисунке 1.3 представлено разбиение кварцевой пластины на конечные элементы.

Символами Т1–Т9 отмечено расположение контрольных точек.

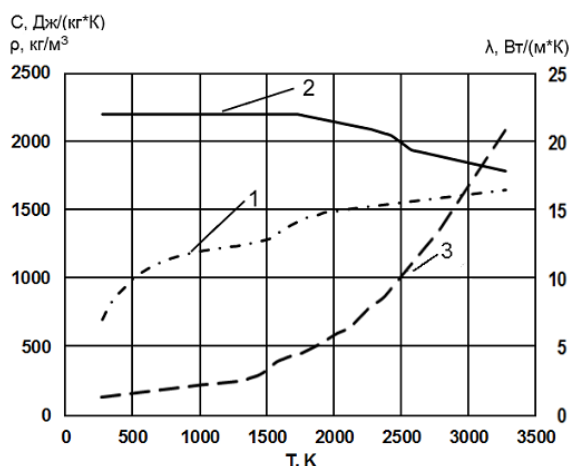


Рисунок 1.2 – Зависимость теплофизических свойств кварцевого стекла от температуры:  
 1 – теплоемкость  $C$ , Дж/(кг·К);  
 2 – плотность  $\rho$ , кг/м<sup>3</sup>;  
 3 – теплопроводность  $\lambda$ , Вт/(м·К)  
 (графики 1 и 2 относятся к левой шкале ординат, график 3 к правой оси ординат)

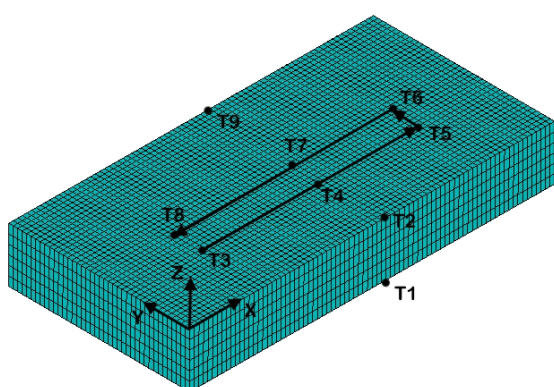


Рисунок 1.3 – Конечно-элементное разбиение расчетной области

Результаты проведенных расчетов приведены на рисунках 1.4, 1.5. На рисунке 1.4 представлены расчетные зависимости температуры в контрольных точках от времени.

Анализируя данные, приведенные на рисунке 1.4 а), видим, что температура в контрольных точках Т3–Т5 в результате многократного лазерного нагрева кварцевой пластинки по схеме, приведенной на рисунке 1.1, периодически резко повышается. При этом вначале в контрольных точках наблюдается плавное увеличение максимальных значений температуры, которое после прохождения центром лазерного пучка этих точек сменяется их снижением. Значения температуры в контрольных точках Т1–Т2, Т9, расположенных вне контура обработки так же периодически изменяются и сопровождаются ростом максимальных значений, обусловленных прогревом

лазерным излучением обрабатываемой пластины (рисунок 1.4, б). Нужно отметить, что, при выбранной схеме и параметрах лазерной полировки, участки обрабатываемой поверхности неоднократно достигают температуры размягчения кварцевого стекла, которая находится в диапазоне 1773–1943 К [5].

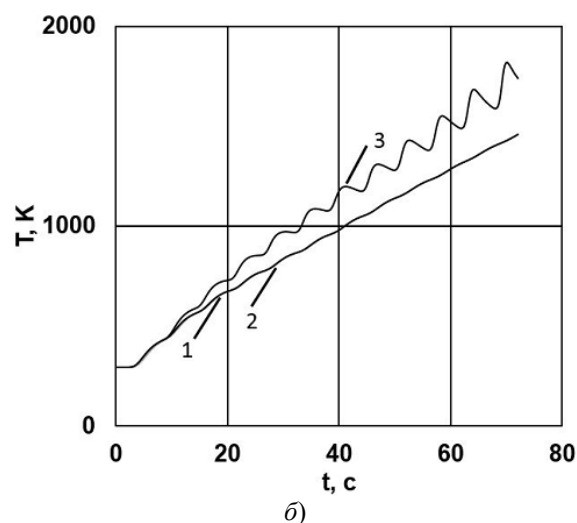
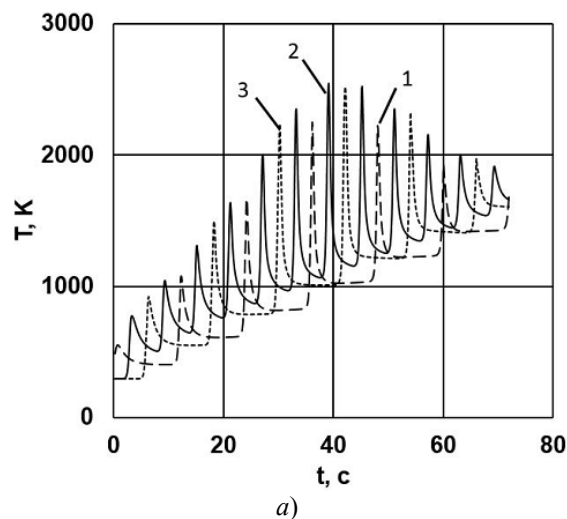


Рисунок 1.4 – Расчетные значения температуры  
 а) в контрольных точках Т3 (линия 1), Т4 (линия 2), Т5 (линия 3);  
 б) в контрольных точках Т1 (линия 1), Т2 (линия 2), Т9 (линия 3)

На рисунке 1.5 показаны расчетные распределения температурных полей на поверхности кварцевой пластины в моменты времени, соответствующие прохождению центра лазерного пучка через контрольные точки Т3–Т8.

Как видно из данных, представленных на рисунке 1.5, локализация изотерм, соответствующих температуре размягчения, имеет круглую форму и практически не изменяется с течением времени.

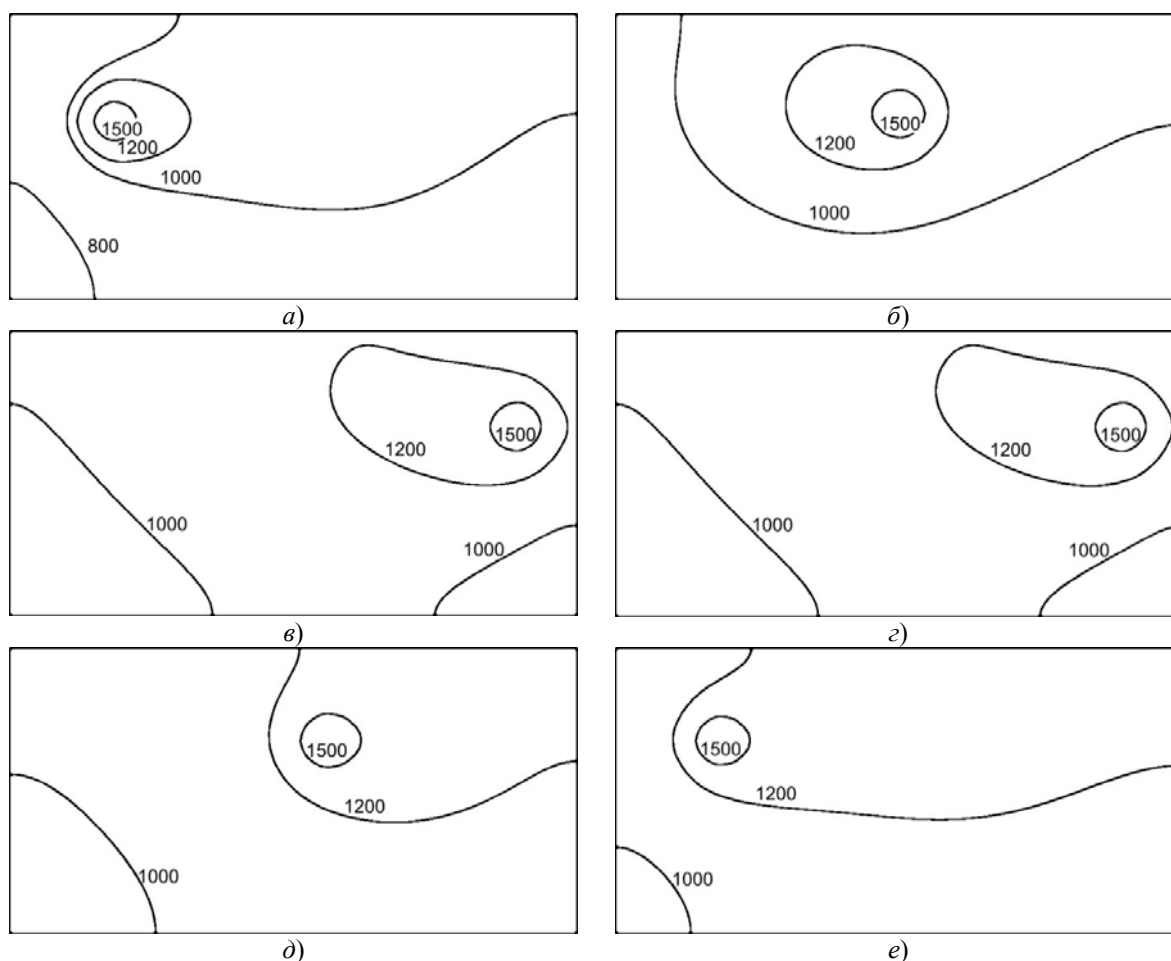


Рисунок 1.5 – Расчетное распределение температуры на поверхности кварцевого стекла:  
 а)  $t = 36$  с; б)  $t = 39$  с; в)  $t = 42$  с; г)  $t = 42,1$  с; д)  $t = 45$  с; е)  $t = 48$  с

При этом изотермы, соответствующие более низким температурам в ходе обработки, постоянно изменяются. Стабильность формы зоны размягчения при выбранной схеме и технологических параметрах на практике обеспечивает однородность качества обработанной поверхности при реализации процесса лазерной полировки кварцевого стекла.

## 2 Эксперимент

Экспериментальные исследования процесса лазерной полировки кварцевых стекол были выполнены на установке для лазерной обработки материалов. На рисунке 2.1 представлена схема установки.

В качестве образцов использовались кварцевые пластины различного типоразмера. Полировка осуществлялась лазерным пучком, который сканировал поверхность пластины по схеме, представленной на рисунке 1.1. Скорость обработки варьировалась от 1,25 мм/с до 5 мм/с. Шаг смещения лазерного пучка после одного прохода в направлении оси  $Y$  составлял 0,25 мм.

Качество обработки поверхности кварцевого стекла оценивалось по параметрам шероховатости

$R_a$  и  $R_z$ . Полученные экспериментальные результаты представлены на рисунках 2.2–2.3 и в таблице 2.1.

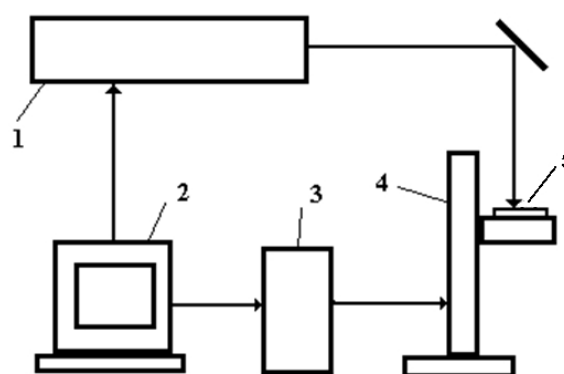


Рисунок 2.1 – Схема лазерной установки:  
 1 – CO<sub>2</sub>-лазер, 2 – компьютер,  
 3 – блок управления, 4 – координатный стол,  
 5 – кварцевая пластина

Как видно из данных, приведенных в таблице 2.1 и на рисунке 2.2, в результате лазерной полировки поверхности кварцевого стекла параметр  $R_a$  уменьшался в 5–8 раз, а параметр  $R_z$  – в 8–12 раз.

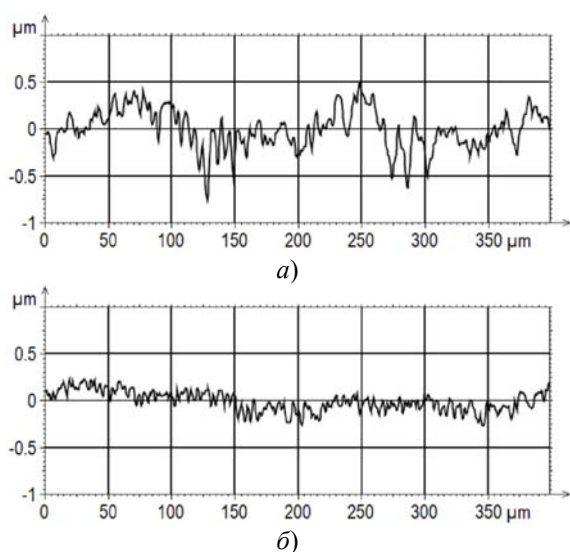


Рисунок 2.2 – Профилограмма пластинки из кварцевого стекла  
а) до лазерной полировки;  
б) после лазерной полировки

Таблица 2.1 – Результаты эксперимента по полировке кварцевого стекла

$V_p$ , мм/с	До полировки		После полировки	
	$R_z$ , мкм	$R_{a2}$ , мкм	$R_z$ , мкм	$R_{a2}$ , мкм
1,25	4,58	0,333	0,49	0,0645
2,5	2,71	0,278	0,220	0,0374
5	4,07	0,547	0,460	0,0812

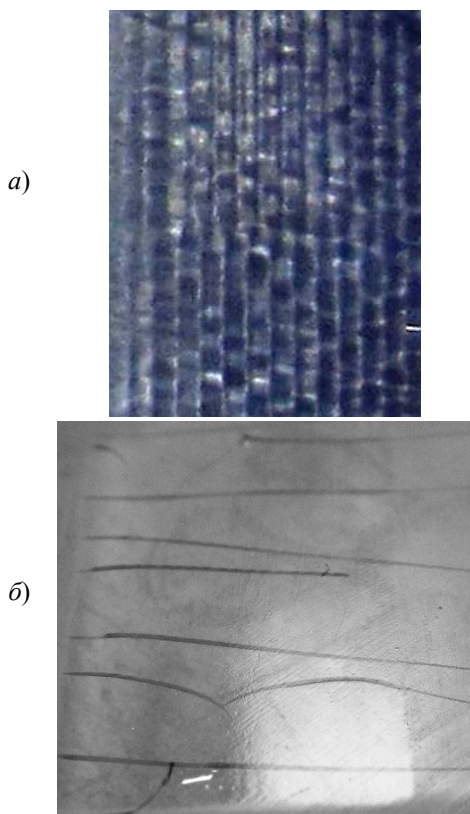


Рисунок 2.3 – Дефекты, возникающие при полировке кварцевого стекла:  
а) появление борозд; б) появление трещин

В ходе проведения экспериментальных исследований было установлено, что при параметрах обработки, приводящих к перегреву кварцевой пластины, наблюдается формирование борозд на обрабатываемой поверхности (рисунок 2.3, а). Кроме этого, в ряде случаев происходит растрескивание образцов (рисунок 2.3, б), обусловленное наличием остаточных напряжений.

### Выводы

В работе определены особенности пространственной локализации температурных полей при полировке кварцевого стекла излучением  $CO_2$ -лазера. Установлена необходимость проведения дополнительного моделирования процесса лазерной полировки кварцевого стекла с анализом полей термоупругих напряжений.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Арбузов, В.И. Основы радиационного оптического материаловедения / В.И. Арбузов. – СПб: СПб ГУ ИТМО, 2008. – 284 с.
2. Мачулка, Г.А. Лазерная обработка стекла / Г.А. Мачулка. – М.: Сов. радио, 1979. – 136 с.
3. Шершнев, Е.Б. Разработка и внедрение новых эффективных процессов в производстве стеклоизделий с применением лазерной технологии: дис. ... канд. техн. наук: 05.17.11 / Е.Б. Шершнев. – М., 1990. – 145 с.
4. Установка для обогащения жильного кварца: пат. 5147 Респ. Беларусь, МПК (2006) С 03В 33/00 / Е.Б. Шершнев, С.И. Соколов, А.С. Побыха; заявитель Гомель. гос. ун-т. им. Ф.Скорины – № и 20080615; заявл. 30.07.08; опубл. 30.06.04 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтра інтэлектуал. уласнасці. – 2008. – № 5. – С. 88.
5. Борисовский, В.Е. Развитие теории и разработка комплекса технологий и оборудования для лазерной обработки кварцевого стекла: дис. докт. техн. наук: 05.11.14 / В.Е. Борисовский; МГУПИ. – М., 2011. – 182 с.
6. Шершнев, Е.Б. Распределение температурных полей при двулучевой сварке аморфного кварца / Е.Б. Шершнев, Ю.В. Никитюк, С.И. Соколов, А.Е. Шершнев // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2012. – № 6 (75). – С. 105–109.
7. Шершнев, Е.Б. Особенности лазерного термораскалывания кварцевого стекла / Е.Б. Шершнев, Ю.В. Никитюк, С.И. Соколов, А.Е. Шершнев // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 3 (16). – С. 39–44.
8. Шершнев, Е.Б. Моделирование двулучевой лазерной сепарации кварцевого сырья / Е.Б. Шершнев, Ю.В. Никитюк, С.И. Соколов, Г.А. Баевич // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2013. – № 6 (81). – С. 216–220.
9. Установка для обогащения жильного кварца: пат. 9675 Респ. Беларусь, МПК (2006)

С 03В 1/00 / Е.Б. Шершневу, Ю.В. Никитюку, С.И. Соколову; заявитель Гомель. гос. ун-т. им. Ф. Скорины – № и 20130334; заявл. 15.04.13; опубл. 30.10.13 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтра інтэлектуал. уласнасці. – 2013. – № 5. – С. 196.

10. *Установка для двухлучевой лазерной сварки кварцевого стекла*: пат. 9962 Респ. Беларусь, МПК (2006) С 03В 33/02 Е.Б. Шершневу, Ю.В. Никитюку, С.И. Соколову; заявитель Гомель. гос. ун-т. им. Ф. Скорины – № и 20130623; заявл. 25.07.13; опубл. 28.02.14 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтра інтэлектуал. уласнасці. – 2014. – № 1. – С. 171.

11. *Многопрофильная лазерная технология обработки кварцевого стекла* / В.К. Сысоев // Электронный научный журнал «Исследовано в России» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2003/053.pdf>. – Дата доступа: 25.01.2009.

12. *Sysoev, V.K.* Laser etching and polishing of quartz tubes / V.K. Sysoev // *Glass and Ceramics*. – 2003. – Vol. 60. – P. 106–107.

13. *Hildebrand, J.* Laser Beam Polishing of Quartz Glass Surfaces / J. Hildebrand, K. Hecht, J. Bliedtner, H. Müller // *Physics Procedia*. – 2011. – № 12. – P. 452–461.

14. *Hildebrand, J.* Advanced analysis of laser beam polishing of quartz glass surfaces / J. Hildebrand, K. Hecht, J. Bliedtner, H. Müller // *Physics Procedia*. – 2012. – № 39. – P. 277–285.

15. *Шабров, Н.Н.* Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей / Н.Н. Шабров. – Л.: Машиностроение, 1983. – 212 с.

*Поступила в редакцию 11.09.15.*

## О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ МАКСИМАЛЬНЫХ $\theta_\pi$ -ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП И $\mathfrak{F}$ -АБНОРМАЛЬНО $\pi'$ -ПОЛНЫЙ ПОДГРУППОВОЙ $m$ -ФУНКТОР

Л.М. Белоконь

Могилёвский государственный университет продовольствия

## ON THE INTERSECTIONS OF THE MAXIMAL $\theta_\pi$ -SUBGROUPS OF FINITE GROUPS AND A SUBGROUP $\mathfrak{F}$ -ABNORMALLY $\pi'$ -FULL $m$ -FUNCTOR

L.M. Belokon

Mogilev State University of Food Technologies

Исследуются условия, при которых для конечной группы  $G$ , непустой радикальной (радикальной локальной) формации  $\mathfrak{F}$  и подгруппового  $m$ -функтора  $\theta$   $\Phi_{\theta, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_\theta(G) \neq G$ ,  $\pi$  – некоторое множество простых чисел. Полученные результаты включают в качестве следствий утверждения относительно пересечений соответствующих максимальных  $\theta$ -подгрупп без ограничений на индексы в группе  $G$ .

**Ключевые слова:** радикальные формации конечных групп,  $\mathfrak{F}$ -радикалы, пересечения максимальных  $\theta_\pi$ -подгрупп,  $\mathfrak{F}$ -абнормально  $\pi'$ -полный подгрупповой  $m$ -функтор.

Conditions under which for a finite group  $G$ , a non-empty radical (radical local) formation  $\mathfrak{F}$  and a subgroup  $m$ -functor  $\theta$   $\Phi_{\theta, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_\theta(G) \neq G$ ,  $\pi$  – a set of primes, are investigated. The results include, as a consequence, statements on the intersections of the corresponding maximal  $\theta$ -subgroups without restrictions on their indexes.

**Keywords:** radical formations of finite groups,  $\mathfrak{F}$ -radicals, intersections of maximal  $\theta_\pi$ -subgroups, subgroup  $\mathfrak{F}$ -abnormally  $\pi'$ -full  $m$ -functor.

### Введение

Рассматриваются только конечные группы и формации конечных групп. Используются определения и обозначения, принятые в монографии [1]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустая радикальная (радикальная локальная) формация,  $\pi$  – некоторое множество простых чисел. В работе [2] исследовались условия, при которых в группе  $G$  существуют максимальные (максимальные  $\mathfrak{F}$ -абнормальные) подгруппы взаимно простых с числами из  $\pi$  индексов, не содержащие её  $\mathfrak{F}$ -радикал  $G_\mathfrak{F}$ , причём соответствующие пересечения  $\Phi_{\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G)$  и  $\Delta_{\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}^\mathfrak{F}(G)$  всех таких подгрупп совпадают с пересечениями всех максимальных (всех максимальных  $\mathfrak{F}$ -абнормальных) подгрупп группы  $G$  взаимно простых с числами из  $\pi$  индексов  $\Phi_\pi(G)$  и  $\Delta_\pi^\mathfrak{F}(G)$  соответственно. Из полученных результатов в качестве следствий вытекают утверждения относительно пересечений как всех максимальных, так и всех максимальных  $\mathfrak{F}$ -абнормальных подгрупп без ограничений на их индексы в необязательно разрешимой группе  $G$ . Настоящей работой предлагается функторное обобщение этих результатов с использованием

понятия  $\mathfrak{F}$ -абнормально  $\pi'$ -полного подгруппового  $m$ -функтора  $\theta$ . Приводятся утверждения, распространяющие полученные обобщения на случай, когда вместо формационного радикала группы  $G$  рассматривается подгруппа  $\tilde{F}_{\Phi_\theta}(G)$ .

### 1 Предварительные сведения и результаты

Под подгрупповым  $m$ -функтором будем понимать всякое отображение  $\theta$ , которое ставит в соответствие каждой группе  $G$  множество  $\theta(G)$ , состоящее из группы  $G$  и некоторых её максимальных подгрупп. Подгруппы множества  $\theta(G)$  называются  $\theta$ -подгруппами группы  $G$ . Через  $\Phi_\theta(G)$  обозначают пересечение всех  $\theta$ -подгрупп группы  $G$ .

Подгрупповой  $m$ -функтор  $\theta$  назовём подгрупповым  $m_s$ -функтором при выполнении условия: если  $H \in \theta(G)$ , то  $H^x \in \theta(G)$  для всех  $x \in G$ .

Определение подгруппового  $m$ -функтора  $\theta$ , включающее условие  $\theta(G^\varphi) = \{H^\varphi \mid H \in \theta(G)\}$  для любого изоморфизма  $\varphi$  группы  $G$ , вводилось в [3, с. 13–14]. Понятие подгруппового  $m$ -функтора  $\theta$  в смысле подгруппового  $m_s$ -функтора использовалось в работе [4].

Обозначаем через  $\pi$  некоторое множество простых чисел,  $\pi' = P \setminus \pi$ , где  $P$  – множество всех простых чисел, считаем также, что  $\pi \neq P$ . Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустая формация,  $\theta$  – подгрупповой  $t$ -функтор. Следуя [4], пересечение всех  $\mathfrak{F}$ -абнормальных максимальных  $\theta$ -подгрупп группы  $G$  обозначаем через  $\Phi_\theta^\mathfrak{F}(G)$ ; пересечение всех  $\mathfrak{F}$ -абнормальных максимальных  $\theta$ -подгрупп группы  $G$ , индекс каждой из которых не делится на числа из  $\pi$ , – через  $\Phi_{\theta_\pi}^\mathfrak{F}(G)$ . Если в группе  $G$  функтор  $\theta$  выделяет саму группу  $G$  и все максимальные (все максимальные  $\mathfrak{F}$ -абнормальные) подгруппы в  $G$ , то  $\Phi_{\theta_\pi}(G) = \Phi_\pi(G)$ ,  $(\Phi_{\theta_\pi}(G) = \Delta_\pi^\mathfrak{F}(G))$ , соответственно). Для формации всех нильпотентных групп  $\mathfrak{N}$  используются обозначения:  $\Phi_{\theta_\pi}^{\mathfrak{N}}(G) = \Delta_{\theta_\pi}(G)$ ,  $\Delta_\pi^{\mathfrak{N}}(G) = \Delta_\pi(G)$ , а также  $\Phi_\theta^{\mathfrak{N}}(G) = \Delta_\theta(G)$ .

Через  $M(G)$  будем обозначать множество всех максимальных подгрупп группы  $G$ ;  $M_\pi(G)$  – множество всех максимальных,  $\pi'$ -индексов подгрупп группы  $G$ ;  $M^\mathfrak{F}(G)$  – множество всех  $\mathfrak{F}$ -абнормальных максимальных подгрупп группы  $G$ ;  $M_\pi^\mathfrak{F}(G)$  – множество всех  $\mathfrak{F}$ -абнормальных максимальных,  $\pi'$ -индексов подгрупп группы  $G$ ;  $M_{\theta_\pi}^\mathfrak{F}(G)$  – множество всех  $\mathfrak{F}$ -абнормальных максимальных,  $\pi'$ -индексов  $\theta$ -подгрупп группы  $G$ .

**Определение 1.1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустая формация. Подгрупповой  $t$ -функтор  $\theta$  назовём  $\mathfrak{F}$ -абнормально  $\pi'$ -полным подгрупповым  $t$ -функтором, если  $\theta(G) \supseteq M_\pi^\mathfrak{F}(G)$  для любой группы  $G$ . В случае  $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ , т. е. если  $\theta(G) \supseteq M_\pi^{\mathfrak{N}}(G)$  для любой группы  $G$ ,  $\theta$  будем называть абнормально  $\pi'$ -полным подгрупповым  $t$ -функтором.

Определение 1.1 можно рассматривать включающим понятие  $\mathfrak{F}$ -абнормально полного подгруппового  $t$ -функтора, вводимого в [5] (случай  $\pi = \emptyset$ ). Заметим, что

$$\{G\} \cup M_\pi(G) \supseteq \theta_\pi(G) \supseteq M_\pi^\mathfrak{F}(G)$$

для всякой группы  $G$  и  $\mathfrak{F}$ -абнормально  $\pi'$ -полного подгруппового  $t$ -функтора  $\theta$ , а значит,

$$\Phi_\pi(G) \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G) \subseteq \Delta_\pi^\mathfrak{F}(G).$$

Пусть  $N$  – нормальная подгруппа группы  $G$ . Через  $\Phi_{\theta_\pi, N}(G)$  ( $\Phi_{\theta_\pi, N}(G)$ ) обозначаем пересечение всех максимальных  $\theta$ -подгрупп группы  $G$ , имеющих взаимно простые с числами из  $\pi$  индексы и не содержащих (содержащих, соответственно)  $N$ ,  $\theta$  – подгрупповой  $t$ -функтор. Пересечение всех максимальных (всех максимальных  $\mathfrak{F}$ -абнормальных) подгрупп группы  $G$ , каждая из которых имеет взаимно простой с числами

из  $\pi$  индекс и не содержит  $N$ , обозначаем через  $\Phi_{\pi, N}(G)$  ( $\Delta_{\pi, N}^\mathfrak{F}(G)$  соответственно).

Если в группе  $G$  не существует максимальных подгрупп, отвечающих указанным требованиям, соответствующие пересечения считаем совпадающими с  $G$ .

Подгруппа  $\tilde{F}_N(G)$  группы  $G$ ,  $N$  – нормальная подгруппа в  $G$ , определяется следующим образом:  $\tilde{F}_N(G) \supseteq N$ ,  $\text{Soc}(G/N) = \tilde{F}_N(G)/N$  [2]. Пусть  $\theta$  – подгрупповой  $t$ -функтор. Тогда подгруппы  $\Phi_{\theta_\pi}(G)$ ,  $\Delta_{\theta_\pi}(G)$  нормальны в группе  $G$ . Через  $\tilde{F}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G)$  обозначаем в дальнейшем  $\tilde{F}_N(G)$ , если  $N = \Phi_{\theta_\pi}(G)$ . В случаях, когда  $N \in \{\Phi_\pi(G), \Phi_{\theta_\pi}(G), \Delta_\pi^\mathfrak{F}(G), \Delta_\pi(G), \Delta_{\theta_\pi}(G), \Delta(G)\}$ , используем обозначения  $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$ ,  $\tilde{F}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G)$ ,  $\tilde{F}_{\Delta_\pi^\mathfrak{F}}(G)$ ,  $\tilde{F}_{\Delta_\pi}(G)$ ,  $\tilde{F}_{\Delta_{\theta_\pi}}(G)$  и  $\tilde{F}_\Delta(G)$  соответственно.

**Лемма 1.1** [5, лемма 1.1] Пусть  $\mathfrak{F}_1$  и  $\mathfrak{F}_2$  – непустые формации,  $\pi(\mathfrak{F}_1) \cap \pi(\mathfrak{F}_2) = \emptyset$ ,  $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2$ . Для всякой формации  $\mathfrak{F}_3$ , удовлетворяющей условию  $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_3 \subseteq \mathfrak{F}_0$ , и максимальной,  $\pi(\mathfrak{F}_2)$ -индекса подгруппы  $H$  в группе  $G$  равносильны условию: подгруппа  $H$   $\mathfrak{F}_i$ -абнормальна в  $G$ ,  $i \in \{0, 2, 3\}$ . В частности, если максимальная в группе  $G$  подгруппа  $H$  имеет индекс, взаимно простой с числами из множества простых чисел  $\pi$ , то условие абнормальности  $H$  в  $G$  равносильно условию  $\mathfrak{N}_\pi$ -абнормальности и условию  $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi$ -абнормальности  $H$  в  $G$ .

**Лемма 1.2.** Пусть  $G$  – группа. Имеют место следующие утверждения.

(1) Если  $\theta$  – абнормально полный подгрупповой  $t$ -функтор, то  $\theta$  –  $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi$ -абнормально полный подгрупповой  $t$ -функтор. Если  $\theta$  –  $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi$ -абнормально полный подгрупповой  $t$ -функтор, то  $\theta$  – абнормально  $\pi'$ -полный подгрупповой  $t$ -функтор. Если  $\theta$  – абнормально  $\pi'$ -полный подгрупповой  $t$ -функтор, то  $\Delta_{\theta_\pi}(G) = \Delta_\pi(G)$ .

(2) Пусть  $\theta$  – абнормально  $\pi'$ -полный подгрупповой  $t$ -функтор. Тогда для всякой формации  $\mathfrak{F}$ , содержащей формацию всех нильпотентных  $\pi'$ -групп  $\mathfrak{N}_{\pi'}$ ,  $\theta$  является  $\mathfrak{F}$ -абнормально  $\pi'$ -полным подгрупповым  $t$ -функтором;  $\Delta_{\theta_\pi}(G) = \Delta_\pi(G) \subseteq \Phi_{\theta_\pi}^\mathfrak{F}(G) = \Delta_\pi^\mathfrak{F}(G)$ .

**Доказательство.** (1) Так как, очевидно,  $M^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G) \subseteq M^{\mathfrak{N}_\pi}(G)$  для всякой группы  $G$ , то абнормально полный подгрупповой  $t$ -функтор является  $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi$ -абнормально полным подгрупповым

$m$ -функтором. Пусть  $\theta$  –  $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_{\pi'}$ -абнормально полный подгрупповой  $m$ -функтор,  $G$  – произвольная группа. Тогда  $\theta(G) \supseteq M^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_{\pi'}}(G)$ . Учитывая лемму 1.1,

$$\theta(G) \supseteq \theta_\pi(G) \supseteq M_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_{\pi'}}(G) = M_\pi^{\mathfrak{N}_{\pi'}}(G),$$

значит,  $\theta$  – абнормально  $\pi'$ -полный подгрупповой  $m$ -функтор. Так как все абнормальные максимальные,  $\pi'$ -индексов подгруппы группы  $G$  являются  $\theta$ -подгруппами в  $G$ , то  $\Delta_{\theta_\pi}(G) = \Delta_\pi(G)$ .

(2) Пусть  $\mathfrak{F}$  – формация, содержащая формацию всех нильпотентных  $\pi'$ -групп  $\mathfrak{N}_{\pi'}$ . Тогда очевидно,  $M^{\mathfrak{N}_{\pi'}}(G) \supseteq M^{\mathfrak{F}}(G)$ , откуда  $M_\pi^{\mathfrak{N}_{\pi'}}(G) \supseteq M_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$ . По лемме 1.1  $M_\pi^{\mathfrak{N}_{\pi'}}(G) = M_\pi^{\mathfrak{N}_{\pi'}}(G)$ , значит,  $M_\pi^{\mathfrak{N}_{\pi'}}(G) \supseteq M_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$ . Следовательно,

$$\theta(G) \supseteq M_\pi^{\mathfrak{N}_{\pi'}}(G) \supseteq M_\pi^{\mathfrak{F}}(G).$$

Таким образом,

$$\Delta_{\theta_\pi}(G) = \Delta_\pi(G) \subseteq \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \Phi_{\theta_\pi}^{\mathfrak{F}}(G).$$

Лемма доказана.

**Следствие 1.2.1.** Пусть  $\theta$  – абнормально полный подгрупповой  $m$ -функтор,  $G$  – группа. Тогда:

$$(1) \Delta_\theta(G) = \Delta(G);$$

(2) если  $\mathfrak{F}$  – формация, содержащая формацию всех нильпотентных групп  $\mathfrak{N}$ , то  $\theta$  является  $\mathfrak{F}$ -абнормально полным подгрупповым  $m$ -функтором;  $\Delta_\theta(G) = \Delta(G) \subseteq \Phi_\theta^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G)$ .

**Лемма 1.3** [2]. Пусть  $A$  и  $B$  – нормальные подгруппы группы  $G$ ,  $B \subset A$ . Тогда  $\tilde{F}_B(G) \subseteq \tilde{F}_A(G)$ .

**Теорема 1.1** [5]. Если подгруппа  $\Phi_\pi(G)$  группы  $G$  обладает свойством  $C_\pi$ , то  $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) = \tilde{F}_{\Delta_\pi}(G)$ .

Следующая лемма 1.4 повторяет утверждение следствия 1.2.2 (1) леммы 1.2 из [5] при ослабленном, ввиду леммы 1.2 (1), требовании, предъявляемом к подгрупповому  $m_s$ -функтору  $\theta$ .

**Лемма 1.4.** Пусть  $\theta$  – абнормально  $\pi'$ -полный подгрупповой  $m_s$ -функтор. Если подгруппа  $\Phi_\pi(G)$  группы  $G$  обладает свойством  $C_\pi$ , то

$$\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) = \tilde{F}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G) = \tilde{F}_{\Delta_{\theta_\pi}}(G) = \tilde{F}_{\Delta_\pi}(G).$$

*Доказательство.* Понятно, что

$$\Phi_\pi(G) \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G) \subseteq \Delta_{\theta_\pi}(G) = \Delta_\pi(G)$$

ввиду леммы 1.2 (1). Следовательно, по лемме 1.3  $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) \subseteq \tilde{F}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G) \subseteq \tilde{F}_{\Delta_{\theta_\pi}}(G) = \tilde{F}_{\Delta_\pi}(G)$ . По теореме 1.1  $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) = \tilde{F}_{\Delta_\pi}(G)$ . Лемма доказана.

**Следствие 1.4.1** [5]. Пусть  $\theta$  – абнормально полный подгрупповой  $m_s$ -функтор. Тогда  $\tilde{F}(G) = \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) = \tilde{F}_{\Delta_\pi}(G)$  для любой группы  $G$ .

**Лемма 1.5** [2]. Если подгруппа  $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$  группы  $G$   $\pi'$ -разрешима, то  $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) = F_\pi(G)$ .

**Лемма 1.6** [2, следствие 3.1.1 леммы 3.1]. Пусть  $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$  – радикальная локальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных  $\pi'$ -групп  $\mathfrak{N}_{\pi'}$ . И пусть подгруппа  $\Phi_\pi(G)$  группы  $G$  обладает свойством  $C_\pi$ ;  $K$  – нормальная, а  $L$  – субнормальная подгруппы группы  $G$  такие, что  $\Phi_\pi(G) \subseteq K \subseteq \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \cap L$ . Тогда  $(L/K)_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{F}}/K$ .

**Лемма 1.7** [6]. Пусть  $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$  – локальная  $S_\pi$ -замкнутая формация, содержащая формацию всех нильпотентных  $\pi'$ -групп  $\mathfrak{N}_{\pi'}$ . И пусть подгруппа  $\Phi_\pi(G)$  группы  $G$  обладает свойством  $C_\pi$ . Тогда  $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$ .

**2 Абнормально  $\pi'$ -полный подгрупповой  $m_s$ -функтор  $\theta$  и радикальная формация  $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_{\pi'}$ . Условия выполнимости утверждения  $\Phi_{\theta_\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_{\theta_\pi}(G) \neq G$**

**Теорема 2.1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – радикальная формация, содержащая формацию всех  $\pi'$ -нильпотентных групп  $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_{\pi'}$ ,  $\theta$  – абнормально  $\pi'$ -полный подгрупповой  $m_s$ -функтор. И пусть подгруппа  $\Phi_\pi(G)$  группы  $G$  обладает свойством  $C_\pi$ . Тогда

$$\begin{aligned} (\Phi_{\theta_\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G))_{\mathfrak{F}} &= F_\pi(\Phi_{\theta_\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G)) = \\ &= F_\pi(\Phi_{\theta_\pi, \overline{F_\pi(G)}}(G)) = \Phi_{\theta_\pi}(G). \end{aligned}$$

*Доказательство.* Так как по условию подгрупповой  $m_s$ -функтор  $\theta$  является абнормально  $\pi'$ -полным, то  $\Phi_{\theta_\pi}(G) \subseteq \Delta_\pi(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_{\pi'}}(G)$  ввиду леммы 1.1. По лемме 1.7  $\Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_{\pi'}}(G) \in \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_{\pi'}$ . Следовательно,  $\Phi_{\theta_\pi}(G)$  – нормальная  $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_{\pi'}$ -подгруппа, а значит, и  $\mathfrak{F}$ -подгруппа в  $G$ . Так как  $(\Phi_{\theta_\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G))_{\mathfrak{F}}$  – характеристическая в  $\Phi_{\theta_\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G)$  подгруппа, подгруппа  $\Phi_{\theta_\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G)$  нормальна в  $G$ , то  $(\Phi_{\theta_\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G))_{\mathfrak{F}} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$ . Поэтому  $(\Phi_{\theta_\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G))_{\mathfrak{F}} = \Phi_{\theta_\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G) \cap G_{\mathfrak{F}}$ . Предположим,

$$\Phi_{\theta_\pi}(G) \subset \Phi_{\theta_\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G) \cap G_{\mathfrak{F}} = N.$$

Так как  $\mathfrak{F}$ -подгруппа  $N$  нормальна в  $G$ , то  $\Phi_{\theta_\pi}(G) \subset N \subseteq \Phi_{\theta_\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G) \cap \Phi_{\theta_\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_{\theta_\pi}(G)$  – противоречие. Следовательно,  $\Phi_{\theta_\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G) \cap G_{\mathfrak{F}} = \Phi_{\theta_\pi}(G)$ , т. е.  $(\Phi_{\theta_\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G))_{\mathfrak{F}} = \Phi_{\theta_\pi}(G)$ . А так как  $\Phi_{\theta_\pi}(G) \subseteq F_\pi(\Phi_{\theta_\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G)) \subseteq (\Phi_{\theta_\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G))_{\mathfrak{F}}$ , то

$$F_\pi(\Phi_{\theta_\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G)) = \Phi_{\theta_\pi}(G).$$

Полагая, в частном случае,  $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_{\pi'}$ , получаем:  $\Phi_{\theta_\pi}(G) = F_\pi(\Phi_{\theta_\pi, \overline{F_\pi(G)}}(G))$ . Теорема доказана.

В случае, когда абнормально  $\pi'$ -полный подгрупповой  $m_s$ -функтор  $\theta$  в любой группе  $G$  выделяет саму группу  $G$  и все её максимальные подгруппы, т. е.  $\theta(G) = \{G\} \cup M(G) \supseteq M_\pi(G)$ ,  $\theta_\pi(G) = \{G\} \cup M_\pi(G)$ ,  $\Phi_{\theta_\pi}(G) = \Phi_\pi(G)$ , из теоремы 2.1 вытекает

**Следствие 2.1.1** [2, теорема 2.1]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – радикальная формация, содержащая формацию всех  $\pi'$ -нильпотентных групп  $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi$ . И пусть подгруппа  $\Phi_\pi(G)$  группы  $G$  обладает свойством  $C_\pi$ . Тогда

$$\begin{aligned} (\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G))_\mathfrak{F} &= F_\pi(\Phi_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G)) = \\ &= F_\pi(\Phi_{\pi, F_\pi(G)}(G)) = \Phi_\pi(G). \end{aligned}$$

В случае, когда абнормально  $\pi'$ -полный  $m_s$ -функтор  $\theta$  выделяет в каждой группе  $G$  саму группу  $G$  и все её максимальные абнормальные подгруппы взаимно простых с числами из  $\pi$  индексов, т. е.  $\theta(G) = \{G\} \cup M_\pi^*(G)$ ,  $\theta(G) = \theta_\pi(G)$ ,  $\Phi_{\theta_\pi}(G) = \Delta_\pi(G)$ , из теоремы 2.1 вытекает

**Следствие 2.1.2.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – радикальная формация, содержащая формацию всех  $\pi'$ -нильпотентных групп  $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi$ . И пусть подгруппа  $\Phi_\pi(G)$  группы  $G$  обладает свойством  $C_\pi$ . Тогда

$$\begin{aligned} (\Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G))_\mathfrak{F} &= F_\pi(\Delta_{\pi, G_\mathfrak{F}}(G)) = \\ &= F_\pi(\Delta_{\pi, F_\pi(G)}(G)) = \Delta_\pi(G). \end{aligned}$$

Полагая  $\pi = \emptyset$  в условии теоремы 2.1, получаем следующий результат.

**Теорема 2.2.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – радикальная формация, содержащая формацию всех  $\pi'$ -нильпотентных групп  $\mathfrak{N}$ ,  $\theta$  – абнормально полный подгрупповой  $m_s$ -функтор. Тогда

$$(\Phi_{\theta, G_\mathfrak{F}}(G))_\mathfrak{F} = F(\Phi_{\theta, G_\mathfrak{F}}(G)) = F(\Phi_{\theta, F(G)}(G)) = \Phi_\theta(G).$$

В случае, когда абнормально полный подгрупповой  $m_s$ -функтор  $\theta$  в любой группе  $G$  выделяет саму группу  $G$  и все её максимальные подгруппы, из теоремы 2.2 вытекает

**Следствие 2.2.1** [2]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – радикальная формация, содержащая формацию всех  $\pi'$ -нильпотентных групп  $\mathfrak{N}$ . Тогда

$$(\Phi_{G_\mathfrak{F}}(G))_\mathfrak{F} = F(\Phi_{G_\mathfrak{F}}(G)) = F(\Phi_{F(G)}(G)) = \Phi(G).$$

Если абнормально полный подгрупповой  $m_s$ -функтор  $\theta$  в любой группе  $G$  выделяет саму группу  $G$  и все её максимальные абнормальные подгруппы, из теоремы 2.2 получается

**Следствие 2.2.2.** Для любой группы  $G$  и радикальной формации  $\mathfrak{F}$ , содержащей формацию всех  $\pi'$ -нильпотентных групп  $\mathfrak{N}$ ,

$$(\Delta_{G_\mathfrak{F}}(G))_\mathfrak{F} = F(\Delta_{G_\mathfrak{F}}(G)) = F(\Delta_{F(G)}(G)) = \Delta(G).$$

**Лемма 2.1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – радикальная формация, содержащая формацию всех  $\pi'$ -нильпотентных групп  $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi$ ,  $\theta$  – абнормально  $\pi'$ -полный подгрупповой  $m_s$ -функтор. И пусть подгруппа

$\Phi_{\theta_\pi, G_\mathfrak{F}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$  группы  $G$   $\pi'$ -разрешима. Тогда:

- (1) в том и только в том случае  $\Phi_{\theta_\pi, G_\mathfrak{F}}(G) \neq G$ , когда  $\Phi_{\theta_\pi, G_\mathfrak{F}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) \neq G$ ;
- (2) если  $\Phi_{\theta_\pi, G_\mathfrak{F}}(G) = G$ , то  $G = F_\pi(G)$ ;
- (3) в том и только в том случае  $\Phi_{\theta_\pi, G_\mathfrak{F}}(G) = G$ , когда  $\theta_\pi(G) = \{G\}$ ;
- (4)  $\Phi_{\theta_\pi, G_\mathfrak{F}}(G) = \Phi_{\theta_\pi}(G)$ .

**Доказательство.** Пусть  $G$  – группа, удовлетворяющая условию теоремы,  $\theta$  – абнормально  $\pi'$ -полный подгрупповой  $m_s$ -функтор. Так как  $\Phi_\pi(G) \subseteq \Phi_{\theta_\pi, G_\mathfrak{F}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$ , то  $\Phi_\pi(G)$  обладает свойством  $C_\pi$ ; по лемме 1.4  $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) = \tilde{F}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G)$ .

- (1) Если  $\Phi_{\theta_\pi, G_\mathfrak{F}}(G) \neq G$ , то

$$\Phi_{\theta_\pi, G_\mathfrak{F}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) \neq G.$$

Пусть  $\Phi_{\theta_\pi, G_\mathfrak{F}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) \neq G$ , и предположим, что  $\Phi_{\theta_\pi, G_\mathfrak{F}}(G) = G$ . Тогда  $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) \neq G$ ,  $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$  –  $\pi'$ -разрешимая группа, совпадающая по лемме 1.5 с  $F_\pi(G)$ . Так как  $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) = \tilde{F}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G) \neq G$ , то  $\Phi_{\theta_\pi}(G) \neq G$ ,  $G_\mathfrak{F} \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G)$  ввиду предположения  $\Phi_{\theta_\pi, G_\mathfrak{F}}(G) = G$ . Но тогда, ввиду  $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$ ,  $F_\pi(G) = \tilde{F}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G) \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G)$ , что противоречит  $\Phi_{\theta_\pi}(G) \neq G$ . Значит,  $\Phi_{\theta_\pi, G_\mathfrak{F}}(G) \neq G$ . Утверждение (1) доказано.

- (2) Пусть  $\Phi_{\theta_\pi, G_\mathfrak{F}}(G) = G$ , тогда по доказанному утверждению (1) группа  $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) = G$   $\pi'$ -разрешима. По лемме 1.5  $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) = F_\pi(G)$ . Утверждение (2) доказано.

(3) Если  $\theta_\pi(G) = \{G\}$ , то  $\Phi_{\theta_\pi}(G) = G$ , следовательно, по определению,  $\Phi_{\theta_\pi, G_\mathfrak{F}}(G) = G$ . Пусть  $\Phi_{\theta_\pi, G_\mathfrak{F}}(G) = G$ . Из доказанного утверждения (2) следует  $G = F_\pi(G)$ . Если  $\Phi_{\theta_\pi}(G) \neq G$ , то  $\Phi_{\theta_\pi}(G) \subset \tilde{F}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G)$ . С другой стороны, так как  $\Phi_{\theta_\pi, G_\mathfrak{F}}(G) = G$ , то  $G = F_\pi(G) = G_\mathfrak{F} \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G)$ , что противоречит  $\Phi_{\theta_\pi}(G) \neq G$ . Значит,  $\Phi_{\theta_\pi}(G) = G$ , откуда  $\theta_\pi(G) = \{G\}$ . Утверждение (3) доказано.

(4) Если  $\Phi_{\theta_\pi, G_\mathfrak{F}}(G) = G$ , то по доказанному пункту (3)  $\theta_\pi(G) = \{G\}$ , а значит,  $\Phi_{\theta_\pi}(G) = G$ .

Пусть  $\Phi_{\theta_\pi, G_\delta}^-(G) \neq G$ . Обозначим

$$K = \Phi_{\theta_\pi, G_\delta}^-(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G).$$

Для нормальной подгруппы  $K/\Phi_{\theta_\pi}(G)$  группы  $G/\Phi_{\theta_\pi}(G)$  из  $\text{Soc}(G/\Phi_{\theta_\pi}(G))$  имеем:

$$\begin{aligned} K/\Phi_{\theta_\pi}(G) &= F_{\pi'}(K/\Phi_{\theta_\pi}(G)) \subseteq \\ &\subseteq F_{\pi'}(\Phi_{\theta_\pi, G_\delta}^-(G)/\Phi_{\theta_\pi}(G)) \subseteq \\ &\subseteq F_{\pi'}(\Phi_{\theta_\pi, F_{\pi'}(G)}^-(G)/\Phi_{\theta_\pi}(G)), \end{aligned}$$

ибо  $\Phi_{\theta_\pi, G_\delta}^-(G) \subseteq \Phi_{\theta_\pi, F_{\pi'}(G)}^-(G)$ , так как  $F_{\pi'}(G) \subseteq G_\delta$ .

Так как  $\theta_\pi(G) \supseteq M_\pi^{\mathfrak{N}}(G) = M_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G)$  ввиду леммы 1.1, то  $\Phi_\pi(G) \subseteq \Phi_{\theta_\pi}(G) \subseteq \Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G)$ . По лемме 1.6

$$\begin{aligned} F_{\pi'}(\Phi_{\theta_\pi, F_{\pi'}(G)}^-(G)/\Phi_{\theta_\pi}(G)) &= \\ = F_{\pi'}(\Phi_{\theta_\pi, F_{\pi'}(G)}^-(G))/\Phi_{\theta_\pi}(G). \end{aligned}$$

По теореме 2.1  $F_{\pi'}(\Phi_{\theta_\pi, F_{\pi'}(G)}^-(G)) = \Phi_{\theta_\pi}(G)$ . Значит,  $K/\Phi_{\theta_\pi}(G) = 1$ . Следовательно,  $\Phi_{\theta_\pi, G_\delta}^-(G) = \Phi_{\theta_\pi}(G)$ . Лемма доказана.

Пусть  $\mathfrak{F}$  – радикальная формация, содержащая  $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi$ . Если абнормально  $\pi'$ -полный подгрупповой  $t_s$ -функтор  $\theta$  выделяет в любой группе  $G$  саму группу  $G$  и все её максимальные подгруппы, то  $\Phi_{\theta_\pi}(G) = \Phi_\pi(G)$ . В этом случае для группы  $G$  с  $\pi'$ -разрешимой подгруппой  $\Phi_{\pi, G_\delta}^-(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) \supseteq \Phi_\pi(G)$  условие  $\theta_\pi(G) = \{G\}$ , а значит, условие  $\Phi_{\pi, G_\delta}^-(G) = \Phi_\pi(G) = \Phi_{\theta_\pi}(G) = G$ , равносильно условию  $G \in \mathfrak{G}_\pi$ . Поэтому из леммы 2.1 вытекает лемма 2.5[2].

Пусть  $\theta(G) = \{G\} \cup M_\pi^{\mathfrak{N}}(G)$  для абнормально  $\pi'$ -полного подгруппового  $t_s$ -функтора  $\theta$  и любой группы  $G$ . Тогда  $\Phi_{\theta_\pi}(G) = \Delta_\pi(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi}(G) \in \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi$ . В этом случае для группы  $G$  с  $\pi'$ -разрешимой подгруппой  $\Delta_{\pi, G_\delta}^-(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$  условие  $\theta_\pi(G) = \{G\}$ , а значит,  $\Delta_{\pi, G_\delta}^-(G) = \Delta_\pi(G) = G$ , равносильно условию  $G = F_{\pi'}(G)$ . Таким образом, имеет место следующее утверждение.

**Следствие 2.1.1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – радикальная формация, содержащая формацию всех  $\pi'$ -нильпотентных групп  $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi$ . И пусть  $G$  – группа, подгруппа  $\Delta_{\pi, G_\delta}^-(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$   $\pi'$ -разрешима. Тогда:

- (1) в том и только в том случае  $\Delta_{\pi, G_\delta}^-(G) \neq G$ , когда  $\Delta_{\pi, G_\delta}^-(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) \neq G$ ;
- (2) в том и только в том случае  $\Delta_{\pi, G_\delta}^-(G) = G$ , когда  $G = F_{\pi'}(G)$ ;
- (3)  $\Delta_{\pi, G_\delta}^-(G) = \Delta_\pi(G)$ .

Следующее следствие 2.1.2 леммы 2.1 распространяет следствие 2.5.1 леммы 2.5 из [2] на пересечения максимальных  $\theta$ -подгрупп группы  $G$ .

**Следствие 2.1.2.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – радикальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных групп  $\mathfrak{N}$ ,  $\theta$  – абнормально полный подгрупповой  $t_s$ -функтор. И пусть подгруппа  $\Phi_{\theta, G_\delta}^-(G) \cap \tilde{F}(G)$  группы  $G$  разрешима. Тогда:

- (1) в том и только в том случае  $\Phi_{\theta, G_\delta}^-(G) \neq G$ , когда  $\Phi_{\theta, G_\delta}^-(G) \cap \tilde{F}(G) \neq G$ ;
- (2) если  $\Phi_{\theta, G_\delta}^-(G) = G$ , то  $G = F(G)$ ;
- (3) в том и только в том случае  $\Phi_{\theta, G_\delta}^-(G) = G$ , когда  $\theta(G) = \{G\}$ ;
- (4)  $\Phi_{\theta, G_\delta}^-(G) = \Phi_\theta(G)$ .

**Следствие 2.1.3.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – радикальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных групп  $\mathfrak{N}$ . И пусть  $G$  – группа, подгруппа  $\Delta_{G_\delta}^-(G) \cap \tilde{F}(G)$  разрешима. Тогда:

- (1) в том и только в том случае  $\Delta_{G_\delta}^-(G) \neq G$ , когда  $\Delta_{G_\delta}^-(G) \cap \tilde{F}(G) \neq G$ ;
- (2) в том и только в том случае  $\Delta_{G_\delta}^-(G) = G$ , когда  $G = F(G)$ ;
- (3)  $\Delta_{G_\delta}^-(G) = \Delta(G)$ .

**Теорема 2.3.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – радикальная формация, содержащая формацию всех  $\pi'$ -нильпотентных групп  $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi$ ,  $\theta$  – абнормально  $\pi'$ -полный подгрупповой  $t_s$ -функтор. Имеют место следующие утверждения.

(1) Если подгруппа  $\Phi_{\theta_\pi, G_\delta}^-(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$  группы  $G$   $\pi'$ -разрешима и не совпадает с группой  $G$ , в частности, если группа  $\Phi_{\theta_\pi, G_\delta}^-(G)$   $\pi'$ -разрешима и не совпадает с группой  $G$  (в частности, если в группе  $G$  существует  $\pi'$ -разрешимая, взаимно простого с числами из  $\pi$  индекса максимальная  $\theta$ -подгруппа, не содержащая  $G_\delta$ ), то

$$\Phi_{\theta_\pi, G_\delta}^-(G) = \Phi_{\theta_\pi}(G) \subset G_\delta.$$

(2) Если  $\theta_\pi(G) \neq \{G\}$ , группа  $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$   $\pi'$ -разрешима, то

$$\Phi_{\theta_\pi, F_{\pi'}(G)}^-(G) = \Phi_{\theta_\pi, G_\delta}^-(G) = \Phi_{\theta_\pi}(G) \subset F_{\pi'}(G).$$

**Доказательство.** (1) Утверждение  $\Phi_{\theta_\pi, G_\delta}^-(G) = \Phi_{\theta_\pi}(G) \subset G_\delta$  вытекает из леммы 2.1 с учётом того, что  $\Phi_{\theta_\pi}(G) \subseteq F_{\pi'}(G) \subseteq G_\delta$  ввиду теоремы 2.1, группа  $\Phi_{\theta_\pi, G_\delta}^-(G)$ , не совпадающая с  $G$ , не содержит  $G_\delta$ .

(2) Так как группа  $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$   $\pi'$ -разрешима, то по лемме 2.1 условие  $\theta_\pi(G) \neq \{G\}$  равносильно

$\Phi_{\theta_\pi, \overline{F_\pi(G)}}(G) \neq G$ ; по утверждению (1)  $\Phi_{\theta_\pi, \overline{F_\pi(G)}}(G) = \Phi_{\theta_\pi}(G) \subset F_\pi(G)$ . Так как

$$\Phi_{\theta_\pi}(G) \subseteq \Phi_{\theta_\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G) \subseteq \Phi_{\theta_\pi, \overline{F_\pi(G)}}(G),$$

то  $\Phi_{\theta_\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_{\theta_\pi, \overline{F_\pi(G)}}(G)$ . Теорема доказана.

Полагая  $\theta(G) = \{G\} \cup M(G)$  для любой группы  $G$ ,  $\theta$  – абнормально  $\pi'$ -полный подгрупповой  $t_s$ -функтор, из теоремы 2.3 получаем следующий результат.

**Теорема 2.4** [2, теорема 2.2]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – радикальная формация, содержащая формацию всех  $\pi'$ -нильпотентных групп  $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi$ . Имеют место следующие утверждения.

(1) Если подгруппа  $\Phi_{\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$  группы  $G$   $\pi'$ -разрешима и не совпадает с группой  $G$ , в частности, если группа  $\Phi_{\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G)$   $\pi'$ -разрешима и не совпадает с группой  $G$  (в частности, если в группе  $G$  существует  $\pi'$ -разрешимая, взаимно простого с числами из  $\pi$  индекса максимальная подгруппа, не содержащая  $G_\mathfrak{F}$ ), то  $\Phi_{\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_\pi(G) \subset G_\mathfrak{F}$ .

(2) Если  $G$  –  $\pi'$ -d-группа, группа  $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$   $\pi'$ -разрешима, то

$$\Phi_{\pi, \overline{F_\pi(G)}}(G) = \Phi_{\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_\pi(G) \subset F_\pi(G).$$

**Следствие 2.4.1.** Пусть подгруппа  $\Phi_{\pi, \overline{F_\pi(G)}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$  группы  $G$   $\pi'$ -разрешима и не совпадает с группой  $G$  (в частности, группа  $\Phi_{\pi, \overline{F_\pi(G)}}(G)$   $\pi'$ -разрешима и не совпадает с группой  $G$ ). Тогда

$$\Phi_{\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_{\pi, \overline{F_\pi(G)}}(G) = \Phi_\pi(G) \subset F_\pi(G)$$

для всякой радикальной формации  $\mathfrak{F}$ , содержащей формацию всех  $\pi'$ -нильпотентных групп  $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi$ .

Следующая теорема 2.5 вытекает из теоремы 2.3, если положить  $\theta(G) = \{G\} \cup M_\pi^\pi(G)$  для каждой группы  $G$  и абнормально  $\pi'$ -полного подгруппового  $t_s$ -функтора  $\theta$ .

**Теорема 2.5.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – радикальная формация, содержащая формацию всех  $\pi'$ -нильпотентных групп  $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi$ . Имеют место следующие утверждения.

(1) Если подгруппа  $\Delta_{\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$  группы  $G$   $\pi'$ -разрешима и не совпадает с группой  $G$ , в частности, если группа  $\Delta_{\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G)$   $\pi'$ -разрешима и не совпадает с группой  $G$  (в частности, если в группе  $G$  существует  $\pi'$ -разрешимая абнормальная максимальная, взаимно простого с

числами из  $\pi$  индекса подгруппа, не содержащая  $G_\mathfrak{F}$ ), то  $\Delta_{\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G) = \Delta_\pi(G) \subset G_\mathfrak{F}$ .

(2) Если группа  $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$   $\pi'$ -разрешима и не совпадает с  $G$ , то

$$\Delta_{\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G) = \Delta_{\pi, \overline{F_\pi(G)}}(G) = \Delta_\pi(G) \subset F_\pi(G) \subset G.$$

**Следствие 2.5.1.** Если подгруппа

$$\Delta_{\pi, \overline{F_\pi(G)}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$$

группы  $G$   $\pi'$ -разрешима и не совпадает с группой  $G$  (в частности, если группа  $\Delta_{\pi, \overline{F_\pi(G)}}(G)$   $\pi'$ -разрешима и не совпадает с  $G$ ), то

$$\Delta_{\pi, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G) = \Delta_{\pi, \overline{F_\pi(G)}}(G) = \Delta_\pi(G) \subset F_\pi(G) \subset G$$

для всякой радикальной формации  $\mathfrak{F}$ , содержащей формацию всех  $\pi'$ -нильпотентных групп  $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{N}_\pi$ .

Следующий результат есть прямое следствие теоремы 2.3, случай  $\pi = \emptyset$ .

**Теорема 2.6.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – радикальная формация, содержащая формацию всех nilпотентных групп  $\mathfrak{N}$ ,  $\theta$  – абнормально полный подгрупповой  $t_s$ -функтор. Имеют место следующие утверждения.

(1) Если подгруппа  $\Phi_{\theta, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G) \cap \tilde{F}(G)$  группы  $G$  разрешима и не совпадает с группой  $G$ , в частности, если группа  $\Phi_{\theta, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G)$  разрешима и не совпадает с  $G$  (в частности, если в группе  $G$  существует разрешимая максимальная  $\theta$ -подгруппа, не содержащая  $G_\mathfrak{F}$ ), то

$$\Phi_{\theta, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_\theta(G) \subset G_\mathfrak{F}.$$

(2) Если  $\theta(G) \neq \{G\}$ , группа  $\tilde{F}(G)$  разрешима, то

$$\Phi_{\theta, \overline{G_\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_{\theta, \overline{F(G)}}(G) = \Phi_\theta(G) \subset F(G).$$

Теорема 2.6 является функторным обобщением следствия 2.2.1 теоремы 2.2 [2], вытекающего из теоремы 2.6, если положить  $\theta(G) = \{G\} \cup M(G)$  для любой группы  $G$  и абнормально полного подгруппового  $t_s$ -функтора  $\theta$ .

Отметим ещё одно следствие теоремы 2.6, случай  $\theta(G) = \{G\} \cup M^\pi(G)$  для любой группы  $G$  и абнормально полного подгруппового  $t_s$ -функтора  $\theta$ .

**Следствие 2.6.1.** Если подгруппа

$$\Delta_{\overline{F(G)}}(G) \cap \tilde{F}(G)$$

группы  $G$  разрешима и не совпадает с группой  $G$ , в частности, если выполняется одно из следующих двух условий:

(1) группа  $\Delta_{\overline{F(G)}}(G)$  разрешима и не совпадает с группой  $G$ ;

(2) группа  $\tilde{F}(G)$  разрешима и не совпадает с группой  $G$ , то

$$\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Delta_{F(G)}(G) = \Delta(G) \subset F(G) \subset G$$

для всякой радикальной формации  $\mathfrak{F}$ , содержащей формацию всех нильпотентных групп  $\mathfrak{N}$ .

**3 Радикальная локальная формация**  
 $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi} \mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}_{\pi}$  и  $\mathfrak{F}$ -абнормально  $\pi'$ -полный подгрупповой  $t_s$ -функтор  $\theta$ . Условия выполнимости утверждения  $\Phi_{\theta_{\pi}, G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_{\theta_{\pi}}(G) \neq G$

**Лемма 3.1.** Пусть  $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi} \mathfrak{F}$  – радикальная локальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных  $\pi'$ -групп  $\mathfrak{N}_{\pi}$ ,  $\theta$  –  $\mathfrak{F}$ -абнормально  $\pi'$ -полный подгрупповой  $t_s$ -функтор. И пусть подгруппа  $\Phi_{\theta_{\pi}, G_{\mathfrak{F}}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_{\theta_{\pi}}}(G)$  группы  $G$   $\pi'$ -разрешима. Тогда:

(1) в том и только в том случае  $\Phi_{\theta_{\pi}, G_{\mathfrak{F}}}(G) \neq G$ , когда  $\Phi_{\theta_{\pi}, G_{\mathfrak{F}}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_{\theta_{\pi}}}(G) \neq G$ ;

$$(2) \Phi_{\theta_{\pi}, G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_{\theta_{\pi}}(G);$$

(3) в том и только в том случае  $\Phi_{\theta_{\pi}, G_{\mathfrak{F}}}(G) = G$ , когда  $\theta_{\pi}(G) = \{G\}$ ;

$$(4) \text{ если } \Phi_{\theta_{\pi}, G_{\mathfrak{F}}}(G) = G, \text{ то } G \in \mathfrak{F}.$$

*Доказательство.* (1) Понятно, что

$$\Phi_{\theta_{\pi}, G_{\mathfrak{F}}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_{\theta_{\pi}}}(G) \neq G,$$

если  $\Phi_{\theta_{\pi}, G_{\mathfrak{F}}}(G) \neq G$ . Пусть  $\Phi_{\theta_{\pi}, G_{\mathfrak{F}}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_{\theta_{\pi}}}(G) \neq G$ , и предположим, что  $\Phi_{\theta_{\pi}, G_{\mathfrak{F}}}(G) = G$ . Тогда  $\tilde{F}_{\Phi_{\theta_{\pi}}}(G) \neq G$ , а значит,  $\Phi_{\theta_{\pi}}(G) \subset \tilde{F}_{\Phi_{\theta_{\pi}}}(G)$ , причём подгруппа  $\tilde{F}_{\Phi_{\theta_{\pi}}}(G)$   $\pi'$ -разрешима,  $G_{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_{\theta_{\pi}}(G)$ .

Ввиду условия леммы

$$\tilde{F}_{\Phi_{\theta_{\pi}}}(G) / \Phi_{\theta_{\pi}}(G) = F_{\pi}(\tilde{F}_{\Phi_{\theta_{\pi}}}(G) / \Phi_{\theta_{\pi}}(G)) \in \mathfrak{F}.$$

Так как подгрупповой  $t_s$ -функтор  $\theta$  является  $\mathfrak{F}$ -абнормально  $\pi'$ -полным, то

$$\Phi_{\pi}(G) \subseteq \Phi_{\theta_{\pi}}(G) \subseteq \Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G);$$

по лемме 1.6  $\tilde{F}_{\Phi_{\theta_{\pi}}}(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$ . Таким образом,

$$\tilde{F}_{\Phi_{\theta_{\pi}}}(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_{\theta_{\pi}}(G),$$

что противоречит  $\Phi_{\theta_{\pi}}(G) \subset \tilde{F}_{\Phi_{\theta_{\pi}}}(G)$ . Значит, предположение о том, что  $\Phi_{\theta_{\pi}, G_{\mathfrak{F}}}(G) = G$ , неверно,  $\Phi_{\theta_{\pi}, G_{\mathfrak{F}}}(G) \neq G$ . Утверждение (1) доказано.

(2) Так как

$$\Phi_{\theta_{\pi}, G_{\mathfrak{F}}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_{\theta_{\pi}}}(G) / \Phi_{\theta_{\pi}}(G) \in \mathfrak{G}_{\pi} \mathfrak{N}_{\pi} \subseteq \mathfrak{F},$$

то

$$\Phi_{\theta_{\pi}, G_{\mathfrak{F}}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_{\theta_{\pi}}}(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$$

по лемме 1.6. Поэтому

$$\Phi_{\theta_{\pi}, G_{\mathfrak{F}}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_{\theta_{\pi}}}(G) \subseteq \Phi_{\theta_{\pi}, G_{\mathfrak{F}}}(G);$$

$$\begin{aligned} & \Phi_{\theta_{\pi}, G_{\mathfrak{F}}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_{\theta_{\pi}}}(G) \subseteq \\ & \subseteq \Phi_{\theta_{\pi}, G_{\mathfrak{F}}}(G) \cap \Phi_{\theta_{\pi}, G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_{\theta_{\pi}}(G). \end{aligned}$$

Значит,  $\Phi_{\theta_{\pi}, G_{\mathfrak{F}}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_{\theta_{\pi}}}(G) = \Phi_{\theta_{\pi}}(G)$ , т. е. в  $\Phi_{\theta_{\pi}, G_{\mathfrak{F}}}(G) / \Phi_{\theta_{\pi}}(G)$  нет неединичных нормальных в  $G / \Phi_{\theta_{\pi}}(G)$  подгрупп,  $\Phi_{\theta_{\pi}, G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_{\theta_{\pi}}(G)$ . Утверждение (2) доказано.

Утверждение (3) вытекает из утверждения (2).

(4) Пусть  $\Phi_{\theta_{\pi}, G_{\mathfrak{F}}}(G) = G$ . По утверждению

(2)  $\Phi_{\theta_{\pi}}(G) = G$ , а так как  $\Phi_{\theta_{\pi}}(G) \subseteq \Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$ , по лемме 1.7  $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$ , то  $G \in \mathfrak{F}$ . Лемма доказана.

Лемма 3.1 является функторным обобщением леммы 3.4 из [2], вытекающей из леммы 3.1 в случае  $\theta(G) = \{G\} \cup M_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$  для любой группы  $G$ . Отметим ещё одно следствие леммы 3.1.

**Следствие 3.1.1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – радикальная локальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных групп  $\mathfrak{N}$ ,  $\theta$  –  $\mathfrak{F}$ -абнормально полный подгрупповой  $t_s$ -функтор. И пусть подгруппа  $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_{\theta}}(G)$  группы  $G$  разрешима. Тогда:

(1) в том и только в том случае

$$\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) \neq G, \text{ когда } \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_{\theta}}(G) \neq G;$$

$$(2) \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_{\theta}(G);$$

(3) в том и только в том случае  $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) = G$ , когда  $\theta(G) = \{G\}$ ;

$$(4) \text{ если } \Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) = G, \text{ то } G \in \mathfrak{F}.$$

**Теорема 3.1.** Пусть  $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi} \mathfrak{F}$  – радикальная локальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных  $\pi'$ -групп  $\mathfrak{N}_{\pi}$ ,  $\theta$  –  $\mathfrak{F}$ -абнормально  $\pi'$ -полный подгрупповой  $t_s$ -функтор. Имеют место следующие утверждения.

(1) Если группа  $\Phi_{\theta_{\pi}, G_{\mathfrak{F}}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_{\theta_{\pi}}}(G)$   $\pi'$ -разрешима и не совпадает с группой  $G$ , в частности, если группа  $\Phi_{\theta_{\pi}, G_{\mathfrak{F}}}(G)$   $\pi'$ -разрешима и не совпадает с группой  $G$  (в частности, если в  $G$  существует  $\pi'$ -разрешимая максимальная  $\theta_{\pi}$ -подгруппа, не содержащая  $G_{\mathfrak{F}}$ ), то

$$\Phi_{\theta_{\pi}, G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_{\theta_{\pi}}(G) \subset G_{\mathfrak{F}};$$

(2) Если  $\Phi_{\theta_{\pi}}(G) \neq G$ , причём подгруппа  $\tilde{F}_{\Phi_{\theta_{\pi}}}(G)$   $\pi'$ -разрешима, то

$$\Phi_{\theta_{\pi}, G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_{\theta_{\pi}}(G) \subset \tilde{F}_{\Phi_{\theta_{\pi}}}(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}}.$$

*Доказательство.* (1) По лемме 3.1

$$\Phi_{\theta_{\pi}}(G) = \Phi_{\theta_{\pi}, G_{\mathfrak{F}}}(G) \neq G.$$

Так как  $\theta - \mathfrak{F}$ -абнормально  $\pi'$ -полный подгрупповой  $t_s$ -функтор, то  $\Phi_{\theta_\pi}(G) \subseteq \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$ . По лемме 1.7  $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$ . Значит,  $\Phi_{\theta_\pi, G_{\mathfrak{F}}}(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$ .

(2) Так как  $\tilde{F}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G)/\Phi_{\theta_\pi}(G) \in \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{F}$ , то  $\tilde{F}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$  по лемме 1.6. Теорема доказана.

Если для подгруппового  $\mathfrak{F}$ -абнормально  $\pi'$ -полного подгруппового  $t_s$ -функтора  $\theta$  и любой группы  $G$  положить  $\theta(G) = \{G\} \cup M_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$ , то из теоремы 3.1 вытекает

**Следствие 3.1.1** [2, теорема 3.3]. Пусть  $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{F}$  – радикальная локальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных  $\pi'$ -групп  $\mathfrak{N}_\pi$ . Имеют место следующие утверждения.

(1) Если группа  $\Delta_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{F}}(G) \cap \tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G)$   $\pi'$ -разрешима и не совпадает с  $G$ , в частности, если группа  $\Delta_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{F}}(G)$   $\pi'$ -разрешима и не совпадает с группой  $G$  (в частности, если в  $G$  существует  $\pi'$ -разрешимая максимальная  $\mathfrak{F}$ -абнормальная подгруппа взаимно простого с числами из  $\pi$  индекса, не содержащая  $G_{\mathfrak{F}}$ ), то

$$\Delta_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}} \subseteq G.$$

(2) Если  $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$ , причём подгруппа  $\tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G)$   $\pi'$ -разрешима, то

$$\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta_{\pi, G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}} \subseteq G.$$

Следующий результат, относящийся к пересечениям максимальных  $\theta$ -подгрупп произвольных индексов в группе, вытекает из теоремы 3.1 в случае  $\pi = \emptyset$ .

**Теорема 3.2.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – радикальная локальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных групп  $\mathfrak{N}$ ,  $\theta - \mathfrak{F}$ -абнормально полный подгрупповой  $t_s$ -функтор. Имеют место следующие утверждения.

(1) Если группа  $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) \cap \tilde{F}_{\Phi_\theta}(G)$  разрешима и не совпадает с группой  $G$ , в частности, если группа  $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G)$  разрешима и не совпадает с группой  $G$  (в частности, если в  $G$  существует разрешимая максимальная  $\theta$ -подгруппа, не содержащая  $G_{\mathfrak{F}}$ ), то  $\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_\theta(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}}$ .

(2) Если  $\Phi_\theta(G) \neq G$ , причём подгруппа  $\tilde{F}_{\Phi_\theta}(G)$  разрешима, то

$$\Phi_{\theta, G_{\mathfrak{F}}}(G) = \Phi_\theta(G) \subseteq \tilde{F}_{\Phi_\theta}(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}}.$$

**Следствие 3.2.1.** [2]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – радикальная локальная формация, содержащая формацию всех нильпотентных групп  $\mathfrak{N}$ . Имеют место следующие утверждения.

(1) Если группа  $\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{F}}(G) \cap \tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G)$  разрешима и не совпадает с группой  $G$ , в частности, если группа  $\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{F}}(G)$  разрешима и не совпадает с группой  $G$  (в частности, если в  $G$  существует разрешимая максимальная  $\mathfrak{F}$ -абнормальная подгруппа, не содержащая  $G_{\mathfrak{F}}$ ), то

$$\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}} \subseteq G.$$

(2) Если  $G \notin \mathfrak{F}$ , причём подгруппа  $\tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G)$  разрешима, то

$$\Delta_{G_{\mathfrak{F}}}^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}} \subseteq G.$$

#### 4 Пересечения максимальных $\theta_\pi$ -подгрупп группы $G$ , не содержащих $\tilde{F}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G)$

**Теорема 4.1.** Пусть  $\theta -$  подгрупповой  $t_s$ -функтор,  $G -$  группа. Имеют место следующие утверждения.

I.  $\Phi_{\theta_\pi}(G) = \Phi_{\theta_\pi, \tilde{F}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G)}(G) = A$ , причём тогда и только тогда  $A \neq G$ , когда  $\theta_\pi(G) \neq \{G\}$ .

II. Пусть  $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{F}$  – локальная  $S_n$ -замкнутая формация, содержащая формацию всех нильпотентных  $\pi'$ -групп  $\mathfrak{N}_\pi$ . И пусть подгруппа  $\Phi_\pi(G)$  группы  $G$  обладает свойством  $C_\pi$ ,  $G \notin \mathfrak{F}$ . Если подгрупповой  $t_s$ -функтор  $\theta$  является  $\mathfrak{F}$ -абнормально  $\pi'$ -полным, то

$$\Phi_{\theta_\pi}(G) = \Phi_{\theta_\pi, \tilde{F}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G)}(G) \neq G.$$

III. Пусть подгруппа  $\Phi_\pi(G)$  группы  $G$  обладает свойством  $C_\pi$ ,  $G \neq F_\pi(G)$ . Если подгрупповой  $t_s$ -функтор  $\theta$  является абнормально  $\pi'$ -полным, то  $\Phi_{\theta_\pi}(G) = \Phi_{\theta_\pi, \tilde{F}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G)}(G) \neq G$ .

**Доказательство.** I. Справедливость равенства  $\Phi_{\theta_\pi}(G) = \Phi_{\theta_\pi, \tilde{F}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G)}(G)$  для всякой группы  $G$  и подгруппового  $t_s$ -функтора  $\theta$  есть утверждение (1) теоремы 2.1[5]. Кроме того, очевидно, что  $\theta_\pi(G) \neq \{G\}$  тогда и только тогда, когда  $\Phi_{\theta_\pi}(G) \neq G$ .

II. Так как  $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{F}$  – локальная  $S_n$ -замкнутая формация, содержащая все нильпотентные  $\pi'$ -группы  $\mathfrak{N}_\pi$ , а подгруппа  $\Phi_\pi(G)$  группы  $G$  обладает свойством  $C_\pi$ , то по лемме 1.7  $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$ . Так как  $\Phi_{\theta_\pi}(G) \subseteq \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$  и по условию  $G \notin \mathfrak{F}$ , то  $\Phi_{\theta_\pi}(G) \neq G$ . Теперь применим утверждение I. Утверждение II доказано.

III. По лемме 1.4  $\tilde{F}_{\Phi_\pi}(G) = \tilde{F}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G)$ , по лемме 1.2 (2)  $\theta - \mathfrak{E}_\pi \mathfrak{N}_\pi$ -абнормально  $\pi'$ -полный

подгрупповой  $m_s$ -функтор. Поэтому утверждение III вытекает из утверждения II. Теорема доказана.

**Следствие 4.1.1.** I [2]. Если  $G$  является  $\pi$ 'd-группой, подгруппа  $\Phi_\pi(G)$  обладает свойством  $C_\pi$ , то  $\Phi_\pi(G) = \Phi_{\pi, \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)}(G) \neq G$ .

II [2]. Пусть  $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{F}$  – локальная  $S_n$ -замкнутая формация, содержащая формацию всех нильпотентных  $\pi$ '-групп  $\mathfrak{N}_\pi$ . И пусть подгруппа  $\Phi_\pi(G)$  группы  $G$  обладает свойством  $C_\pi$ ,  $G \notin \mathfrak{F}$ . Тогда  $\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta_{\pi, \tilde{F}_{\Delta_\pi^{\mathfrak{F}}}(G)}^{\mathfrak{F}}(G) \neq G$ .

III [5], [7]. Пусть подгруппа  $\Phi_\pi(G)$  группы  $G$  обладает свойством  $C_\pi$ ,  $G \neq F_\pi(G)$ . Тогда  $\Delta_\pi(G) = \Delta_{\pi, \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)}(G) \neq G$ .

*Доказательство.* I. Пусть подгрупповой  $m_s$ -функтор  $\theta$  выделяет в каждой группе  $G$  саму группу  $G$  и все её максимальные подгруппы взаимно простых с числами из  $\pi$  индексов, т. е.  $\theta(G) = \{G\} \cup M_\pi(G)$  для любой группы  $G$ . Тогда  $\theta(G) = \theta_\pi(G)$ ,  $\Phi_{\theta_\pi}(G) = \Phi_\pi(G)$ ,  $\tilde{F}_{\Phi_{\theta_\pi}}(G) = \tilde{F}_{\Phi_\pi}(G)$ . Так как по условию подгруппа  $\Phi_\pi(G)$   $\pi$ 'd-группы  $G$  обладает свойством  $C_\pi$ , то  $\theta_\pi(G) \neq \{G\}$ , и утверждение I является следствием утверждения I теоремы 4.1.

II. Для подгруппового  $\mathfrak{F}$ -абнормально  $\pi$ '-полного  $m_s$ -функтора  $\theta$  и любой группы  $G$  положим  $\theta(G) = \{G\} \cup M_\pi^{\mathfrak{F}}(G)$ . Тогда

$$\Phi_\theta(G) = \Phi_{\theta_\pi}(G) = \Delta_\pi^{\mathfrak{F}}(G),$$

и утверждение II следует из утверждения II теоремы 4.1.

III. Для абнормально  $\pi$ '-полного подгруппового  $m_s$ -функтора  $\theta$  и любой группы  $G$  положим  $\theta(G) \setminus \{G\} = M_\pi^{\mathfrak{N}}(G)$ . Теперь применим утверждение III теоремы 4.1. Следствие доказано.

Ослабление требований, предъявляемых к функтору  $\theta$  в условиях теорем 2.1 и 2.2 из [5], а также теорем 1 и 2 из [7], позволяет усилить соответствующие результаты утверждениями II, III теоремы 4.1.

В случае  $\pi = \emptyset$  из теоремы 4.1 как следствия вытекают результаты о пересечениях максимальных  $\theta$ -подгрупп без ограничений на их индексы, составляющие содержание следующей теоремы.

**Теорема 4.2.** Пусть  $\theta$  – подгрупповой  $m_s$ -функтор,  $G$  – группа. Имеют место следующие утверждения.

I.  $\Phi_\theta(G) = \Phi_{\theta, \tilde{F}_{\Phi_\theta}(G)}(G) = A$ , причём тогда и

только тогда  $A \neq G$ , когда  $\theta(G) \neq \{G\}$ .

II. Пусть  $\mathfrak{F}$  – локальная  $S_n$ -замкнутая формация, содержащая формацию всех нильпотентных групп  $\mathfrak{N}$ . И пусть группа  $G \notin \mathfrak{F}$ . Если подгрупповой  $m_s$ -функтор  $\theta$  является  $\mathfrak{F}$ -абнормально полным, то

$$\Phi_\theta(G) = \Phi_{\theta, \tilde{F}_{\Phi_\theta}(G)}(G) \neq G.$$

III [5]. Пусть группа  $G \neq F(G)$ . Если подгрупповой  $m_s$ -функтор  $\theta$  является абнормально полным, то  $\Phi_\theta(G) = \Phi_{\theta, \tilde{F}(G)}(G) \neq G$ .

Результат III теоремы 4.2 при дополнительных условиях для подгруппового  $m$ -функтора  $\theta$  получен также в работе [8].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978. – 272 с.
2. Белоконь, Л.М. О пересечениях максимальных подгрупп конечных групп / Л.М. Белоконь // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 46–59.
3. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Мн.: Бел. наука, 2003. – 254 с.
4. Бородич, Е.Н. О пересечениях  $\mathfrak{F}$ -абнормальных максимальных  $\theta$ -подгрупп / Е.Н. Бородич, Р.В. Бородич // Весці Нацыянальнай Акадэміі Навук Беларусі. – 2007. – №3. – С. 47–52.
5. Белоконь, Л.М. К вопросу о пересечениях максимальных  $\theta$ -подгрупп конечных групп / Л.М.Белоконь // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 46–50.
6. Белоконь, Л.М. Пересечения максимальных подгрупп конечных групп и радикальные формации / Л.М. Белоконь // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2013. – № 6 (81). – С. 3–10.
7. Белоконь, Л.М. О пересечениях максимальных  $\theta$ -подгрупп конечных групп / Л.М.Белоконь // Межд. науч. конф. «Дискретная математика, алгебра и их приложения», Минск, 14 – 18 сентября 2015 г. Тез. докл. – Мн.: Институт математики НАН Беларуси. – 2015. – С. 4–5.
8. Васильев, А.Ф. Заметка о пересечениях некоторых максимальных подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, А.В. Сыроквашин // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 2 (11). – С. 62–64.

Поступила в редакцию 21.10.15.

УДК 512.542

## О ВЛИЯНИИ ПОДГРУППЫ ФИТТИНГА НА ПРОИЗВЕДЕНИЯ КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

**А.Ф. Васильев, В.И. Мурашко**

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*

## ON THE INFLUENCE OF THE FITTING SUBGROUP ON THE PRODUCTS OF FINITE SOLUBLE GROUPS

**A.F. Vasil'ev, V.I. Murashka**

*F. Scorina Gomel State University*

Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $F(G)$ -субнормальной, если она субнормальна в  $HF(G)$ , где  $F(G)$  – подгруппа Фиттинга группы  $G$ . В работе описаны все замкнутые относительно взятия подгрупп Шмидта насыщенные формации  $\mathfrak{F}$  конечных разрешимых групп, которые содержат всякую разрешимую группу  $G$ , представимую в произведение  $F(G)$ -субнормальных  $\mathfrak{F}$ -подгрупп. Установлена сверхразрешимость группы  $G$ , содержащей три сверхразрешимые  $F(G)$ -субнормальные подгруппы с попарно взаимно простыми индексами в  $G$ .

**Ключевые слова:** подгруппа Фиттинга,  $F(G)$ -субнормальная подгруппа, сверхразрешимая группа, насыщенная формация,  $F(G)$ -радикальная формация.

A subgroup  $H$  of a group  $G$  is called  $F(G)$ -subnormal if it is subnormal in  $HF(G)$ . In the paper all closed under taking Schmidt subgroups saturated formations  $\mathfrak{F}$  of finite soluble groups such that  $\mathfrak{F}$  contains every soluble group  $G$  which is the product of its  $F(G)$ -subnormal  $\mathfrak{F}$ -subgroups were described. It was shown that a group  $G$  which contains three supersoluble  $F(G)$ -subnormal subgroups of pairwise coprime indexes in  $G$  is supersoluble.

**Keywords:** the Fitting subgroup,  $F(G)$ -subnormal subgroup, supersoluble group, saturated formation,  $F(G)$ -radical formation.

### Introduction

Only finite groups are considered. One of the important problems of group theory is the structural study of a finite group which can be factorized as a product of two or more pairwise permutable subgroups. The origin of this problem may be traced back to the well known theorem of Burnside about the solvability of biprimary groups.

Formations closed under taking products of certain types (arbitrary [1], normal and subnormal [2], abnormal and contrnormal [3] and etc.) of subgroups were studied in many papers. An important generalization of the subnormality is the  $\mathfrak{F}$ -subnormality [4], [5]. Formations closed under taking products of  $\mathfrak{F}$ -subnormal subgroups were studied in [6]–[8] etc. Formations with the Shemetkov property play significant role in this research. Recall that a formation  $\mathfrak{F}$  is called a formation with the Shemetkov property if every  $s$ -critical group for  $\mathfrak{F}$  is either a Schmidt group or a group of prime order.

In 1938 Fitting [9] showed that a product of two normal nilpotent subgroups is again nilpotent. It means that there exists the unique maximal normal nilpotent subgroup  $F(G)$  in every group  $G$ . This subgroup is called the Fitting subgroup. The Fitting subgroup has a great influence on the structure of a soluble group. That is why in the paper [10] authors introduced the following definition.

**Definition 0.1.** A subgroup  $H$  of a group  $G$  is called  $F(G)$ -subnormal if  $H$  is subnormal in  $HF(G)$ .

A subnormal subgroup of a group  $G$  is obviously  $F(G)$ -subnormal. The following example shows that in the general case a  $F(G)$ -subnormal subgroup is not subnormal.

**Example 0.2.** Let  $G \cong S_4$  be the symmetric group of degree 4. Let  $H$  be a Sylow 2-subgroup of  $G$ . Then  $H$  is a maximal subgroup of  $G$  which is not normal in  $G$ . Note that  $F(G) \subseteq H$ . Hence  $H$  is  $F(G)$ -subnormal in  $G$ . But  $H$  is not subnormal in  $G$ .

**Definition 0.3.** Let  $\mathfrak{F}$  and  $\mathfrak{X}$  be classes of soluble groups. We say that  $\mathfrak{F}$  is  $F(G)$ -radical in  $\mathfrak{X}$  if  $\mathfrak{F}$  is  $S_n$ -closed and contains every  $\mathfrak{X}$ -group  $G = AB$  where  $A$  and  $B$  are  $F(G)$ -subnormal  $\mathfrak{F}$ -subgroups of  $G$ .

The following problem seems natural.

**Problem A.** Describe all classes (formations, Schunk classes, Fitting classes) of soluble groups which are  $F(G)$ -radical in the class  $\mathfrak{S}$  of all soluble groups.

**Definition 0.4.** We shall call a class of groups  $\mathfrak{X}$   $S_{cr}$ -closed if  $\mathfrak{X}$  contains with every group  $G$  all its Schmidt subgroups.

Recall that  $\mathfrak{S}_\pi$  is the class of all soluble  $\pi$ -groups. Formations closed under products of  $F(G)$ -subnormal subgroups are described in the following theorem.

**Theorem A.** Let  $\mathfrak{F}$  be a  $S_{ch}$ -closed saturated formation of soluble groups and  $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ . The following statements are equivalent:

- (1)  $\mathfrak{F}$  is  $F(G)$ -radical in  $\mathfrak{S}$ .
- (2)  $\mathfrak{F}$  contains every soluble group  $G = AB$  where  $A$  and  $B$  are  $F(G)$ -subnormal  $\mathfrak{F}$ -subgroups of  $G$ .
- (3)  $\mathfrak{F}$  is a hereditary formation and there exists a partition  $\sigma = \{\pi_i \mid i \in I\}$  of  $\pi$  into mutually disjoint subsets such that  $\mathfrak{F} = \times_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}$ .

**Corollary A.1** [10]. Let  $G = AB$  be a product of nilpotent  $F(G)$ -subnormal subgroups. Then  $G$  is nilpotent.

**Corollary A.2.** Let  $\pi$  be a set of primes and a soluble group  $G = AB$  be a product of  $\pi$ -decomposable  $F(G)$ -subnormal subgroups. Then  $G$  is  $\pi$ -decomposable.

Let us note that the class

$$\times_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i} = (G \mid G = O_{\pi_i}(G) \times \dots \times O_{\pi_n}(G))$$

is a lattice formation. Recall that a formation  $\mathfrak{F}$  is called lattice if the intersection and the join of two  $\mathfrak{F}$ -subnormal subgroups is again a  $\mathfrak{F}$ -subnormal subgroup. This formations were studied by many researchers [5, chapter 6].

There are examples [11, p. 8] of non-supersoluble groups which are products of supersoluble normal (subnormal) subgroups. So the formation  $\mathfrak{U}$  of all supersoluble groups is not  $F(G)$ -radical in  $\mathfrak{S}$ . R. Baer [12] showed that if a group  $G$  is the product of two normal supersoluble subgroups and  $G'$  is nilpotent then  $G$  is supersoluble. In [13] A.F. Vasil'ev and D.N. Simonenko generalized Baer's theorem on arbitrary hereditary saturated formations.

These results are the motivations for the following

**Problem B.** Let  $\mathfrak{X}$  be a hereditary saturated formation of soluble groups. Describe all hereditary saturated  $F(G)$ -radical in  $\mathfrak{X}$  subformations  $\mathfrak{F}$  of  $\mathfrak{X}$ .

**Theorem B.** Let  $\mathfrak{X}$  be a hereditary saturated formation of soluble groups. The following statements are equivalent:

- (1) Every hereditary saturated subformation  $\mathfrak{F}$  of  $\mathfrak{X}$  is  $F(G)$ -radical in  $\mathfrak{X}$ .
- (2) Every group in  $\mathfrak{X}$  has nilpotent derived subgroup.

K. Doerk [14] showed that a group is supersoluble if it contains four supersoluble subgroups of pairwise coprime indexes. This result was generalized by O.U. Kramer [15] on arbitrary saturated formations of metanilpotent groups.

**Problem C.** Let  $n$  be a natural number,  $n \geq 3$  and  $\mathfrak{F}$  be a saturated formation of soluble groups such that  $\mathfrak{F}$  contains every group  $G$  which has  $n$   $\mathfrak{F}$ -subgroups of pairwise coprime indexes in  $G$ . Assume

that a group  $G$  contains  $n-1$   $F(G)$ -subnormal  $\mathfrak{F}$ -subgroups of pairwise coprime indexes in  $G$ . Does  $G \in \mathfrak{F}$ ?

Partially answer on this problem is given in the following theorem.

**Theorem C.** Let  $\mathfrak{F}$  be a hereditary saturated formation of metanilpotent groups with Sylow tower. If a group  $G$  contains three  $F(G)$ -subnormal  $\mathfrak{F}$ -subgroups of pairwise coprime indexes in  $G$  then  $G \in \mathfrak{F}$ .

**Corollary C.1.** If a group  $G$  contains three  $F(G)$ -subnormal supersoluble subgroups of pairwise coprime indexes in  $G$  then  $G$  is supersoluble.

**Corollary C.2.** Let  $\mathfrak{F}$  be the formation of groups with nilpotent derived subgroup and Sylow tower. If a group  $G$  contains three  $F(G)$ -subnormal  $\mathfrak{F}$ -subgroups of pairwise coprime indexes in  $G$  then  $G \in \mathfrak{F}$ .

D.K. Friesen [16] noted that if a group  $G$  contains two normal (subnormal) supersoluble subgroups of coprime indexes in  $G$  then  $G$  is supersoluble. The following example shows that we can not replace the subnormality by the  $F(G)$ -subnormality in Friesen's theorem.

**Example 0.5.** Let a group  $G$  be isomorphic to the symmetric group of degree 3. Then there is a faithful irreducible  $G$ -module  $V$  of dimension 2 over  $F_7$ . Let  $T$  be the semidirect product of  $V$  and  $G$ . Consider  $A = VG_3$  and  $B = VG_2$  where  $G_p$  is a Sylow  $p$ -subgroup of  $G$  and  $p \in \{2, 3\}$ . From  $7 \equiv 1 \pmod{p}$  and  $p \in \{2, 3\}$  it follows that  $A$  and  $B$  are supersoluble. Since  $V$  is a faithful irreducible  $G$ -module,  $F(T) = V$ . Now  $A$  and  $B$  are  $F(T)$ -subnormal supersoluble subgroups of  $T$ . Note that  $T = AB$  is not supersoluble.

### 1 Preliminary results

We use standard notation and terminology that if necessary can be found in [17]. Recall some of them that are important in this paper. By  $\mathbb{P}$  is denoted the set of all primes;  $\pi(G)$  is the set of all prime divisors of the order of  $G$ ;  $\pi(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} \pi(G)$ ; a group  $G$  is called  $\pi$ -group if  $\pi(G) \subseteq \pi$ ;  $Z_p$  is the cyclic group of order  $p$ ;  $O_\pi(G)$  is the greatest normal  $\pi$ -subgroup of  $G$ ;  $G'$  is the derived subgroup of  $G$ ;  $G^\mathfrak{F}$  is the  $\mathfrak{F}$ -residual for a formation  $\mathfrak{F}$ ;  $O_{p',p}(G)$  is the  $p$ -nilpotent radical of  $G$  for  $p \in \mathbb{P}$  it also can be defined by  $O_{p',p}(G) / O_{p'}(G) = O_p(G / O_{p'}(G))$ ;  $\Phi(G)$  is the Frattini subgroup of  $G$ ;  $AwrB$  is the regular wreath product of groups  $A$  and  $B$ ;  $G = N \rtimes M$  is the semidirect product of groups  $M$  and  $N$  ( $N \triangleleft G$  and  $N \cap M = 1$ );  $\mathfrak{G}_\pi$  ( $\mathfrak{N}_\pi$ ) is the class of all (nilpotent)  $\pi$ -groups, where

$\pi \subseteq \mathbb{P}$ . Let  $\sigma = \{\pi_i \mid i \in I\}$  be a partition of  $\pi$  into mutually disjoint subsets then the class of all groups which are direct products of their (soluble)  $\pi_i$ -subgroups is denoted by  $\times_{i \in I} \mathfrak{G}_{\pi_i} \ (\times_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$ .

Let  $\mathfrak{F}$  and  $\mathfrak{R}$  be formations then

$$\mathfrak{F}\mathfrak{R} = (G \mid G^{\mathfrak{R}} \in \mathfrak{F}).$$

A class of groups  $\mathfrak{F}$  is called a formation if from  $G \in \mathfrak{F}$  and  $N \triangleleft G$  it follows that  $G/N \in \mathfrak{F}$  and from  $H/A \in \mathfrak{F}$  and  $H/B \in \mathfrak{F}$  it follows that  $H/A \cap B \in \mathfrak{F}$ .

A class of groups  $\mathfrak{X}$  is called hereditary ( $S_n$ -closed) if from  $G \in \mathfrak{X}$  and  $H \leq G$  ( $H \triangleleft G$ ) it follows that  $H \in \mathfrak{X}$ .

A class of groups  $\mathfrak{X}$  is called weakly hereditary if from  $p \in \pi(\mathfrak{X})$  it follows that  $Z_p \in \mathfrak{X}$ .

A class of groups  $\mathfrak{X}$  is called saturated if from  $G/\Phi(G) \in \mathfrak{X}$  it follows that  $G \in \mathfrak{X}$ .

A function  $f: \mathbb{P} \rightarrow \{\text{formations}\}$  is called a formation function.

By well known Gashütz – Lubeseder – Schmid theorem saturated formations are exactly local formations, i. e. formations  $\mathfrak{F} = LF(f)$  defined by a formation function  $f: LF(f) = (G \in \mathfrak{G} \mid \text{if } H/K \text{ is a chief factor of } G \text{ and } p \in \pi(H/K) \text{ then } G/C_G(H/K) \in f(p))$ .

Among all local definitions of a local formation  $\mathfrak{F}$  there is exactly one, denoted by  $F$ , such that  $F$  is integrated ( $F(p) \subseteq \mathfrak{F}$  for all  $p \in \mathbb{P}$ ) and full ( $\mathfrak{N}_p F(p) = F(p)$  for all  $p \in \mathbb{P}$ ). The function  $F$  is called the canonical local definition of  $\mathfrak{F}$ .

**Lemma 1.1** [17, p. 357]. *Let  $f$  be a local definition of a formation  $\mathfrak{F}$ . A group  $G$  belongs  $\mathfrak{F}$  if and only if  $G/O_{p',p}(G) \in f(p)$  for all  $p \in \pi(G)$ .*

Recall some properties of Schmidt groups.

**Lemma 1.2** [4, p. 243]. *Let  $G$  be a Schmidt group. Then*

(1)  $G = P \rtimes Q$  where  $P$  is the normal  $p$ -subgroup of  $G$  and  $Q$  is a cyclic Sylow  $q$ -subgroup of  $G$  that is not normal in  $G$ .

(2)  $G/\Phi(G)$  is a Schmidt group.

(3)  $P\Phi(G)/\Phi(G)$  is an elementary abelian  $p$ -subgroup and

$$|Q\Phi(G)/\Phi(G)| = q.$$

Recall that  $\mathfrak{F}^s$  is the greatest hereditary subclass of a class of groups  $\mathfrak{F}$ . Let  $\mathfrak{X}$  be a class of groups. Recall that a group  $G$  is called  $s$ -critical for  $\mathfrak{X}$  if  $G \notin \mathfrak{X}$  but every proper subgroup of  $G$  belongs in  $\mathfrak{X}$ . The class of all  $s$ -critical for  $\mathfrak{X}$  groups is denoted by  $\mathcal{M}(\mathfrak{X})$ . Note that  $\mathcal{M}(\mathfrak{X}) = \mathcal{M}(\mathfrak{X}^s)$ .

## 2 $S_{ch}$ -closed formations

In the sequel a Schmidt  $(p, q)$ -group is a Schmidt  $\{p, q\}$ -group with a normal Sylow  $p$ -subgroup.

**Lemma 2.1.** *Let  $\mathfrak{F}$  be a saturated formation and  $S$  be a Schmidt  $(p, q)$ -group. If  $S \in \mathfrak{F}$  then every Schmidt  $(p, q)$ -group belongs  $\mathfrak{F}$ .*

*Proof.* Let  $f$  be a local definition of  $\mathfrak{F}$ . From lemmas 1.1 and 1.2 it follows that  $S/O_{p',p}(S) \simeq 1 \in f(p)$  and  $S/O_{q',q}(S) \simeq Z_q \in f(q)$ . Now if  $K$  is a Schmidt  $(p, q)$ -group then  $K/O_{p',p}(K) \simeq 1$  and  $K/O_{q',q}(K) \simeq Z_q$  by lemma 1.2. So  $K \in \mathfrak{F}$  by lemma 1.1.  $\square$

**Theorem 2.2.** *Let  $\mathfrak{F} = LF(F)$  be a local formation of soluble groups and  $F$  be the canonical local definition of  $\mathfrak{F}$ . Then  $\mathfrak{F}$  is  $S_{ch}$ -closed if and only if  $F(p)$  is a weakly hereditary formation for every  $p \in \pi(\mathfrak{F})$ .*

*Proof.* Let  $\mathfrak{F} = LF(F)$  be a  $S_{ch}$ -closed formation,  $F$  be the canonical local definition of  $\mathfrak{F}$  and  $p \in \pi(\mathfrak{F})$ . Then  $F(p) \neq \emptyset$ .

Consider  $q \in \pi(F(p))$ . If  $q = p$  then  $Z_p \in \mathfrak{N}_p \subseteq F(p)$ .

Assume that  $q \neq p$ . Let  $G$  be a group of minimal order such that  $G \in F(p)$  and  $q \in \pi(G)$ . Note that  $O_p(G) = 1$ . Let  $R = Z_p \text{ wr } G = L \rtimes G$  where  $L = Z_p \times \dots \times Z_p$  is the base of  $R$ .

From  $G \in F(p)$ , lemma 1.1 and the properties of the regular wreath product it follows that  $R \in \mathfrak{F}$ . Let  $R_q$  be a Sylow  $q$ -subgroup of  $R$ . Consider  $T = LR_q$ . By the properties of the regular wreath product  $C_T(L) = L$ . That is why  $T$  is nonnilpotent. Then  $T$  has a Schmidt  $(p, q)$ -subgroup  $S$ . So  $S \in \mathfrak{F}$ . Since  $S/O_{p',p}(S) \simeq Z_q$ ,  $Z_q \in F(p)$ . Q.E.D.

Let  $F(p)$  be a weakly hereditary formation for all  $p \in \pi(\mathfrak{F})$ . Assume that the theorem is false and let  $G$  be a minimal order counterexample. It means that  $G \in \mathfrak{F}$  and  $G$  has a Schmidt  $(p, q)$ -subgroup  $S \notin \mathfrak{F}$ . Since  $G$  is soluble, we see that the order of every minimal normal subgroup of  $G$  is the power of a prime.

Let  $N$  be a minimal normal  $r$ -subgroup of  $G$ . Assume that  $q \neq r$  and  $p \neq r$ . Then  $N \cap S = 1$ . It means that  $S \simeq SN/N \subseteq G/N$ . By our assumption  $S \in \mathfrak{F}$ , a contradiction.

Assume that  $q = r$ . From lemma 1.2 it follows that  $N \cap S \leq \Phi(S)$ . It means that  $SN/N \in \mathfrak{F}$ . So  $SN/N$  is a Schmidt group by lemma 1.2. By lemma 2.1  $S \in \mathfrak{F}$ , a contradiction.

Thus  $O_{p'}(G) = 1$ . Now

$$q \in \pi(G/O_{p',p}(G)) \subseteq \pi(F(p)).$$

From  $S/O_{q',q}(S) = 1$ ,  $S/O_{p',p}(S) \cong Z_q \in F(p)$  and lemma 1.1 it follows that  $S \in \mathfrak{F}$ , the final contradiction.  $\square$

**Lemma 2.3.** *Every  $S_n$ -closed formation of soluble groups is weakly hereditary.*

*Proof.* Let  $\mathfrak{F}$  be a  $S_n$ -closed formation of soluble groups,  $G \in \mathfrak{F}$  and  $p \in \pi(G)$ . Since  $G$  is soluble, there is a chief factor  $H/K$  of  $G$  such that  $\pi(H/K) = \{p\}$ . Since  $\mathfrak{F}$  is a  $S_n$ -closed formation,  $H/K \in \mathfrak{F}$ . From  $H/K \cong Z_p \times \dots \times Z_p$  it follows that  $Z_p \in \mathfrak{F}$ .  $\square$

**Corollary 2.4.** *Let  $\mathfrak{F}$  be a saturated  $S_n$ -closed formation of soluble groups. Then  $\mathfrak{F}$  is  $S_{ch}$ -closed.*

*Proof.* According to [17, p. 365]  $\mathfrak{F}$  has the canonical local definition  $F$  such that  $F(p)$  is a  $S_n$ -closed formation for every prime  $p$ . By lemma 2.3  $F(p)$  is a weakly hereditary formation for every prime  $p$ . By theorem 2.2 formation  $\mathfrak{F}$  is  $S_{ch}$ -closed.  $\square$

The converse to corollary 2.4 is false. Let  $\mathfrak{F}$  be the formation generated by the symmetric group  $S_4$  of degree 4 and cyclic groups of orders 2 and 3. According to [18, p. 44] the alternating group  $A_4$  of degree 4 does not belong  $\mathfrak{F}$ . It is well known that  $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$  is a local formation with the canonical local definition  $F$  where  $F(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}$  for all  $p \in \mathbb{P}$ . Since  $\mathfrak{F}$  is a weakly hereditary formation, it is clear that  $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F}$  is also weakly hereditary for all  $p \in \mathbb{P}$ . By theorem 2.2 formation  $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$  is  $S_{ch}$ -closed. By theorem 10.3B [17] there is a faithful irreducible  $S_4$ -module  $V$  over  $F_7$ . Let  $G = V \rtimes S_4$ . Then  $C_G(V) = V$  and  $V = F(G)$ . It means that  $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$ . Note that  $H = VA_4 \triangleleft G$ . Since  $C_G(V) = V$ ,  $O_{7,7}(H) = V$ . From  $H/O_{7,7}(H) \cong A_4 \notin \mathfrak{N}_7\mathfrak{F}$  it follows that  $H \notin \mathfrak{N}\mathfrak{F}$ . Thus  $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$  is a  $S_{ch}$ -closed but not  $S_n$ -closed formation.

**Theorem 2.5.** *Let  $\mathfrak{F}$  be a saturated  $S_{ch}$ -closed formation with the Shemetkov property. Then  $\mathfrak{F}$  is a hereditary formation.*

*Proof.* Since  $\mathfrak{F}$  is saturated,  $\mathfrak{F}$  is weakly hereditary. Let us show that  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^S$ . Assume that the set  $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}^S \neq \emptyset$  and let  $G$  be a group of minimal order from it. Since  $G \notin \mathfrak{F}^S$ , there is a  $s$ -critical for  $\mathfrak{F}^S$  subgroup  $H$  of  $G$ . Since  $\mathcal{M}(\mathfrak{F}) = \mathcal{M}(\mathfrak{F}^S)$ ,  $H$  is a  $s$ -critical for  $\mathfrak{F}$  Schmidt group. From  $G \in \mathfrak{F}$  it follows that  $H \in \mathfrak{F}$ , the contradiction.  $\square$

### 3 Final remarks and problems

Note that the  $F(G)$ -subnormality is not a hereditary property, i. e. if  $H$  is a  $F(G)$ -subnormal subgroup of a group  $G$  and  $H \leq K \leq G$  then  $H$  is not  $F(K)$ -subnormal in general. Also note that from the  $F(G)$ -subnormality of  $H$  does not follow the  $F(G/N)$ -subnormality of  $HN/N$  in  $G/N$ .

The main idea of the proof of theorem A (from (3) follows (1)) is to show that  $F(G) \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$ . It was achieved by the result of [19] where the author showed that  $Z_{\mathfrak{F}}(G)$  coincides with the intersection of all normalizers of all  $\pi_i$ -maximal subgroups of  $G$  for all  $i \in I$  for any group  $G$  where  $\mathfrak{F} = \times_{i \in I} \mathfrak{G}_{\pi_i}$ . This result generalizes the well known theorem of R. Baer [20] that claims that the hypercenter of a group is the intersection of all normalizers of Sylow subgroups.

**Problem 3.1.** *Describe all soluble  $F(G)$ -radical in  $\mathfrak{S}$  formations. Is there soluble non-saturated  $F(G)$ -radical in  $\mathfrak{S}$  formation?*

**Problem 3.2.** *Describe all soluble (local)  $F(G)$ -radical in  $\mathfrak{S}$  Fitting classes.*

**Problem 3.3.** *Is every soluble  $F(G)$ -radical in  $\mathfrak{S}$  Fitting class a formation?*

Recall [17, p. 453] that a Schunck class  $\mathfrak{X}$  is called a  $D$ -class in a universe  $\mathfrak{J}$  if every group  $G$  in  $\mathfrak{J}$  has a unique class of maximal  $\mathfrak{X}$ -subgroups. We note that every Schunck  $D$ -class  $\mathfrak{X}$  of soluble groups contains every soluble group  $G = AB$  where  $A$  and  $B$  are  $F(G)$ -subnormal  $\mathfrak{X}$ -subgroups of  $G$ .

In connection with this observation, the following problem seems to be interesting.

**Problem 3.4.** *Describe all soluble  $F(G)$ -radical in  $\mathfrak{S}$  Schunck classes.*

Theorem B shows that the class of all groups with nilpotent derived subgroup is the greatest formation of soluble groups such that every its hereditary saturated subformation is  $F(G)$ -radical in it.

**Problem 3.5.** *Describe all saturated  $F(G)$ -radical in  $\mathfrak{N}^n$  formations.*

The two main ideas of the proof of theorem C is the induction on a Sylow tower and the following lemma:

**Lemma** [19]. *Let  $\mathfrak{F}$  be the formation of all  $p$ -decomposable groups. Then  $G^{\mathfrak{F}} = \langle [a, b] \mid a, b \in G, \text{ where } a \text{ is a } p\text{-element, } b \text{ is a } q\text{-element and } q \neq p \rangle$ .*

**Problem 3.6.** *Let a group  $G$  contain three  $F(G)$ -subnormal metanilpotent subgroups with pairwise coprime indexes in  $G$ . Is  $G$  metanilpotent?*

In the universe of all groups there are a lot of groups  $G$  with  $F(G) = 1$ . In this universe the quasinilpotent radical  $F^*(G)$  and the Shemetkov – Schmid

subgroup  $\tilde{F}(G)$  are the generalizations of the Fitting subgroup [21].

**Definition 3.7.** A subgroup  $H$  of a group  $G$  is called  $F^*(G)$ -subnormal ( $\tilde{F}(G)$ -subnormal) if  $H$  is subnormal in  $HF^*(G)$  ( $H\tilde{F}(G)$ ).

**Definition 3.8.** Let  $\mathfrak{F}$  be a class of groups. We say that  $\mathfrak{F}$  is  $F^*(G)$ -radical ( $\tilde{F}(G)$ -radical) if  $\mathfrak{F}$  is  $S_n$ -closed and contains every group  $G = AB$  where  $A$  and  $B$  are  $F^*(G)$ -subnormal ( $\tilde{F}(G)$ -subnormal)  $\mathfrak{F}$ -subgroups of  $G$ .

It is natural to consider the following problems.

**Problem 3.9.** Describe all hereditary  $F^*(G)$ -radical ( $\tilde{F}(G)$ -radical) formations.

**Problem 3.10.** Is every hereditary  $F^*(G)$ -radical ( $\tilde{F}(G)$ -radical) formation composition (saturated)?

#### REFERENCES

1. Amberg, B. Finite groups with multiple factorizations / B. Amberg, L.S. Kazarin, B. Hofling // *Fundamental'naya i Prikladnaya Matematika*. – 1998. – Vol. 4, № 4. – P. 1251–1263.
2. Bryce, R.A. Fitting formations of finite soluble groups / R.A. Bryce, J. Cossey // *Math. Z.* – 1972. – Bd. 127, № 3. – S. 217–233.
3. Vasil'ev, A.F. On Products of Nonnormal Subgroups of Finite Groups / A.F. Vasil'ev // *Acta Applicandae Mathematicae*. – 2005. – Vol. 85, № 1. – P. 305–311.
4. Shemetkov, L.A. Formations of finite groups / L.A. Shemetkov. – Moscow: Nauka, 1978. – 272 p. (In Russian)
5. Ballester-Bolinches A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer, 2006. – 385 p.
6. Semenchuk, V.N. Solvable  $\mathfrak{F}$ -radical formations / V.N. Semenchuk // *Mathematical Notes*. – 1996. – Vol. 59, № 2. – P. 185–188.
7. Semenchuk, V.N. Superradical formations / V.N. Semenchuk, L.A. Shemetkov // *Dokl. Akad. Nauk Belarusi*. – 2000. – Vol. 44, № 5. – P. 24–26 (In Russian).
8. Kamornikov, S.F. On one class of superradical hereditary saturated formations / S.F. Kamornikov,

V.N. Tyutyaynov // *Siberian J. Math.* – 2014. – Vol. 55, № 1. – P. 78–86.

9. Fitting, H. Beiträge zur Theorie der endlichen Gruppen / H. Fitting // *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* – 1938. – Bd. 48. – S. 77–141.

10. Murashka, V.I. On products of partially subnormal subgroups of finite groups / V.I. Murashka, A.F. Vasil'ev // *Vesnik VSU*. – 2012. – Vol. 70, № 4. – P. 24–27 (In Russian).

11. *Between Nilpotent and Soluble* / H.G. Bray [et al.]; ed. M. Weinstein. – Passaic: Polygonal Publishing House, 1982. – 240 p.

12. Baer, R. Classes of finite groups and their properties / R. Baer // *Illinois J. Math.* – 1957. – Vol. 1. – P. 318–326.

13. Vasil'ev, A.F. Relative radical local formations / Vasil'ev A.F., Simonenko D.N. // *Proceedings of F. Scorina Gomel State University*. – 2006. – № 5 (38). – P. 19–25 (In Russian).

14. Doerk, K. Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen / K. Doerk // *Math. Z.* – 1966. – Bd. 91, № 3. – S. 198–205.

15. Kramer, O.U. Endliche Gruppen mit Untergruppen mit paarweise teilerfremden Indizes / O.U. Kramer // *Math. Z.* – 1974. – Bd. 138, № 1. – S. 63–68.

16. Friesen, D.K. Products of Normal Supersolvable Subgroups / D. K. Friesen // *Proc. Amer. Math. Soc.* – 1971. – Vol. 30, № 1. – P. 46–48.

17. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

18. Shemetkov, L.A. Formations of algebraic systems / L.A. Shemetkov, Skiba A.N. – Moscow: Nauka, 1989. – 256 p. (In Russian).

19. Murashka, V.I. On one generalization of Baer's theorems on hypercenter and nilpotent residual / V.I. Murashka // *Problems of Physics, Mathematics and Technics*. – 2013. – № 3 (16). – P. 84–88.

20. Baer, R. Group Elements of Prime Power Index / R. Baer // *Trans. Amer. Math. Soc.* – 1953. – Vol. 75, № 1. – P. 20–47.

21. Murashka, V.I. On the Shemetkov – Schmid subgroup and related subgroups of finite groups / V.I. Murashka, A.F. Vasil'ev // *Proceedings of F. Scorina Gomel State University*. – 2014. – № 3 (84). – P. 23–29.

Поступила в редакцию 21.09.15.

## ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНОЙ СЕТИ С МНОГОРЕЖИМНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ

А.Р. Ерёмина

*Гродненский государственный университет им. Я. Купалы*

## ON INSENSIBILITY OF STATIONARY DISTRIBUTION OF STATE PROBABILITIES OF PIECEWISE CONTINUOUS QUEUEING NETWORK WITH MULTIMODE SERVICING

A.R. Eryomina

*Y. Kupala Grodno State University*

Рассматривается открытая кусочно-непрерывная сеть массового обслуживания с многорежимными стратегиями и разнотипными заявками. Количество работы, необходимое для переключения прибора с одного режима на другой, является случайной величиной с произвольной функцией распределения. Дисциплина обслуживания заявок прибором – «дискриминаторное разделение процессора» (DPS). Устанавливается, что стационарное распределение вероятностей состояний сети инвариантно относительно функциональной формы распределений величин работ, требующихся на переключение режимов приборов в узлах, если фиксированы первые моменты этих распределений.

**Ключевые слова:** инвариантность, многорежимное обслуживание, DPS, кусочно-непрерывная сеть массового обслуживания.

The open piecewise continuous queueing network with multimode service and polytypic demands is considered. The quantity of work, which is necessary for switching from one strategy to another, is random variable with arbitrary distribution function. The dispatching rule is DPS. It was proved that stationary distribution is invariant in relation to functional form of distribution of work's quantities, which are necessary for switching of strategies of devices in units, on condition that first moments of these distributions are fixed.

**Keywords:** invariance, multimode service, DPS, piecewise continuous queueing network.

### **Введение**

Сети массового обслуживания являются адекватными моделями, описывающими функционирование многих реальных объектов в экономике, здравоохранении, логистике, технике, проектировании информационных и компьютерных сетей и т. д.

Особый практический интерес представляет изучение сетей с многорежимными стратегиями обслуживания, в которых обслуживающие приборы в узлах могут работать с различной производительностью, требовать ремонта или замены. Подобные сети могут быть использованы при проектировании производственных линий, ремонтных мастерских, планировании графика работы общественного транспорта и т. д. Они исследовались Ю.В. Малинковским в работах [1]–[3]. Однако в этих работах полагалось, что длительности пребывания приборов в режимах имеют экспоненциальное распределение. На практике это чаще всего не так. Поэтому при исследовании сетей массового обслуживания важную роль играет проблема инвариантности стационарного распределения вероятностей состояний сетей по отношению к функциональному виду распределений величин работ, требующихся на переключение режимов приборов в узлах.

Для сетей с многорежимными стратегиями, немедленными дисциплинами обслуживания и заявками одного типа эта проблема была решена А.Н. Старовойтовым в [4], [5]. Однако на практике, как правило, встречаются сети, в которые поступают заявки различных типов, что хорошо проиллюстрировано в классических работах [6]–[8], посвященных ВСМР-сетям и сетям Келли. В этих и других работах не рассматривались случаи, связанные с многорежимным обслуживанием.

Для информационных и вычислительных сетей также представляют интерес модели, описывающие эффект разделения средств сети между несколькими требованиями, работами и т. д. При так называемых дисциплинах «разделения процессора» все или некоторые группы заявок обслуживаются одновременно единственным прибором с переменной скоростью обслуживания, принимающей дробные значения и изменяющейся во времени в зависимости от состояния сети. К группе данных дисциплин относятся «обобщенное разделение процессора» (GPS – Generalized Processor-Sharing), «справедливое разделение процессора» (EPS – Egalitarian Processor-Sharing), «дискриминаторное разделение процессора» (DPS – Discriminatory Processor-Sharing) и другие. Подробно они рассмотрены в

[9]. Свойства инвариантности сетей с разделением процессора исследовались в работах [7], [8] и других.

В настоящей работе впервые исследуется открытая сеть с многорежимными стратегиями и дисциплиной обслуживания DPS, для которой величина работы по переключению режимов приборов в узлах имеет произвольный закон распределения, а сами заявки являются разнотипными.

### 1 Постановка задачи

Рассматривается открытая сеть с многорежимными стратегиями обслуживания, состоящая из  $N$  узлов, в которых циркулируют заявки  $M$  типов.

Поступающий поток заявок – простейший с интенсивностью  $\lambda$ , а каждая заявка входного потока, независимо от других заявок, направляется в  $l$ -й узел и становится заявкой типа  $u$  с вероятностью  $p_{0(l,u)}$ ,  $l = \overline{1, N}$ ,  $u = \overline{1, M}$  ( $\sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M p_{0(l,u)} = 1$ ).

Обслуживание заявок в узлах осуществляется в соответствии с дисциплиной DPS. Данную дисциплину можно описать следующим образом. Поступившая в узел заявка сразу начинает обслуживаться (очередь в её традиционном понимании отсутствует). В моменты поступления новых или ухода обслуженных заявок происходят скачки скорости обслуживания. При такой дисциплине обслуживания каждая заявка имеет свою скорость выполнения работы по обслуживанию, которая пропорциональна числу заявок данного типа и обратно пропорциональна общему числу заявок в узле.

После обслуживания в  $l$ -м узле заявка типа  $u$  мгновенно и независимо от других заявок направляется в  $k$ -й узел и становится заявкой типа  $v$  с вероятностью  $p_{(l,u)(k,v)}$ , а с вероятностью  $p_{(l,u)0}$  покидает сеть:

$$\sum_{k=1}^N \sum_{v=1}^M p_{(l,u)(k,v)} + p_{(l,u)0} = 1; k = \overline{1, N}; u, v = \overline{1, M}.$$

В  $l$ -м узле находится единственный обслуживающий прибор, который может работать в  $r_l + 1$  режимах:  $0, 1, \dots, r_l$ ,  $l = \overline{1, N}$ . В качестве основного режима работы прибора полагается режим 0. Переключение происходит только на соседние режимы. Во время переключения прибора с одного режима на другой число заявок в узле не меняется.

Длительность обслуживания заявки прибором  $l$ -го узла имеет показательное распределение с параметром  $\mu_l$ .

Состояние сети в момент времени  $t$  будем характеризовать вектором

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)),$$

где

$$x_l(t) = (\bar{x}_l(t), j_l(t)) = (x_{l1}(t), x_{l2}(t), \dots, x_{lm}(t), j_l(t))$$

описывает состояние  $l$ -го узла в момент времени  $t$ . Здесь  $x_{lu}(t)$  – число заявок типа  $u$  в  $l$ -ом узле в момент времени  $t$ ,  $j_l(t)$  – режим, в котором работает  $l$ -й узел в момент времени  $t$ . Процесс  $x(t)$  обладает не более чем счётным фазовым пространством состояний  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N$ , где

$$X_l = \{(\bar{x}_l, j_l) = (x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lm}, j_l),$$

$$x_{lu} = 0, 1, 2, \dots; l = \overline{1, N}, u = \overline{1, M}, j_l = \overline{0, r_l}\},$$

$x_{lu}$  – число заявок типа  $u$  в  $l$ -ом узле,  $|x_l| = \sum_{u=1}^M x_{lu}$

– общее число заявок в  $l$ -ом узле.

Обозначим через  $(\bar{0}, 0)$  такое состояние  $l$ -го узла, когда в нем отсутствуют заявки и он функционирует в режиме 0.

Пусть в момент времени  $t$  состояние  $l$ -го узла есть вектор  $(\bar{x}_l, j_l)$ . Тогда работа по обслуживанию заявки типа  $u$  выполняется со скоростью

$$\alpha_{lu}(x_{lu}, |x_l|, j_l) = \alpha_{lu}(x_{lu}, j_l) \frac{x_{lu}}{|x_l|},$$

если в узле находится всего  $|x_l|$  заявок,  $x_{lu}$  заявок типа  $u$  и он работает в режиме  $j_l$  ( $l = \overline{1, N}, u = \overline{1, M}, j_l = \overline{0, r_l}$ ).

При этом полагается, что  $\alpha_{lu}(x_{lu}, |x_l|, j_l) > 0$ , если  $x_{lu} \neq 0$ ;  $\alpha_{lu}(x_{lu}, |x_l|, j_l) = 0$ , если  $x_{lu} = 0$  или  $|x_l| = 0$ .

Количество работы, необходимое для переключения прибора  $l$ -го узла из основного режима работы в режим 1, является случайной величиной  $\eta_l(0)$  с произвольной функцией распределения  $\Phi_l(0, \tilde{u})$ ,  $\Phi_l(0, 0) = 0$ , плотностью распределения  $f_l(0, \tilde{u})$  и математическим ожиданием  $\tau_l(0) < +\infty$ . При этом скорость указанного переключения не является постоянной. Так, если в момент времени  $t$  состояние узла есть  $x_l(t)$ , а  $\xi_{l,0}(t)$  – остаточное количество работы, которое надо выполнить с момента  $t$  до перехода в режим 1, то скорость переключения прибора будет равняться  $v_l(\bar{x}_l, 0)\beta_l(0, \xi_{l,0}(t))$ , где  $v_l(\bar{x}_l, 0)$  – заданная скорость перехода из режима 0 в режим 1,  $\beta_l(0, \xi_{l,0}(t))$  – непрерывная функция, выражающая зависимость скорости выполнения работы по переключению режима с 0 на 1 от количества оставшейся работы  $\xi_{l,0}(t)$ .

Для состояний  $x_l$ , у которых  $1 \leq j_l \leq r_l - 1$ , количество работы, необходимое для изменения режима (на  $j_l - 1$  или  $j_l + 1$ ), также является случайной величиной  $\eta_l(j_l)$  с произвольной функцией распределения  $\Phi_l(j_l, \tilde{u})$ ,  $\Phi_l(j_l, 0) = 0$ ,

плотностью распределения  $f_l(j_l, \tilde{u})$  и математическим ожиданием  $\tau_l(j_l) < +\infty$ .

Если в момент времени  $t$  состояние узла есть  $(\bar{x}_l, j_l)$ , а  $\xi_{l,j_l}(t)$  – остаточное количество работы, которое необходимо выполнить с момента  $t$  до перехода в соседний режим, то скорость указанного переключения будет равняться  $(v_l(\bar{x}_l, j_l) + \varphi_l(\bar{x}_l, j_l))\beta_l(j_l, \xi_{l,j_l}(t))$ , где  $v_l(\bar{x}_l, j_l)$  и  $\varphi_l(\bar{x}_l, j_l)$  – заданные скорости перехода в режимы  $j_l + 1$  и  $j_l - 1$  соответственно,  $\beta_l(j_l, \xi_{l,j_l}(t))$  – непрерывная функция, выражающая зависимость скорости выполнения работы по переключению режима  $j_l$  от количества оставшейся работы. Таким образом, скорость переключения зависит от остаточного количества работы.

При этом прибор  $l$ -го узла с вероятностью  $\frac{v_l(\bar{x}_l, j_l)}{v_l(\bar{x}_l, j_l) + \varphi_l(\bar{x}_l, j_l)}$  переходит в режим  $j_l + 1$ , а с вероятностью  $\frac{\varphi_l(\bar{x}_l, j_l)}{v_l(\bar{x}_l, j_l) + \varphi_l(\bar{x}_l, j_l)}$  – в режим  $j_l - 1$ .

Аналогично, количество работы, необходимое для перехода прибора  $l$ -го узла из режима работы  $r_l$  в  $r_l - 1$ , имеет произвольную функцию распределения  $\Phi_l(r_l, \tilde{u})$ ,  $\Phi_l(r_l, 0) = 0$ , плотность распределения  $f_l(r_l, \tilde{u})$  и математическое ожидание  $\tau_l(r_l) < +\infty$ . При этом скорость указанного переключения не является постоянной. Так, если в момент времени  $t$  состояние узла есть  $(\bar{x}_l, j_l)$ , а  $\xi_{l,r_l}(t)$  – количество работы, которое осталось выполнить с момента  $t$  до перехода в соседний режим  $r_l - 1$ , то скорость переключения прибора будет равняться  $\varphi_l(\bar{x}_l, r_l)\beta_l(r_l, \xi_{l,r_l}(t))$ , где  $\varphi_l(\bar{x}_l, r_l)$  – заданная скорость перехода из режима  $r_l$  в режим  $r_l - 1$ ,  $\beta_l(r_l, \xi_{l,r_l}(t))$  – непрерывная функция, выражающая зависимость скорости выполнения работы по переключению режима с  $r_l$  на  $r_l - 1$  от количества оставшейся работы  $\xi_{l,r_l}(t)$ .

Таким образом,

$$\frac{d\xi_{l,j_l}(t)}{dt} = -((v_l(\bar{x}_l, j_l)I_{(j_l \neq r_l)} + \varphi_l(\bar{x}_l, j_l)I_{(j_l \neq 0)})\beta_l(j_l, \xi_{l,j_l}(t)).$$

Далее будем полагать, что  $v_l(\bar{x}_l, j_l) > 0$ ,  $\varphi_l(\bar{x}_l, j_l) > 0$ , функции  $\beta_l(j_l, \tilde{u}) > 0$  являются непрерывными для любого  $j_l$  и выполняется условие

$$q_l(j_l) = \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{u}f_l(j_l, \tilde{u})}{\beta_l(j_l, \tilde{u})} d\tilde{u} < +\infty, \quad l = \overline{1, N}.$$

Полагаем, что матрица маршрутизации  $(p_{(l,u)(k,v)})$ ,  $u, v = \overline{1, M}$ ,  $l, k = \overline{0, N}$ ,  $p_{(0,u)(0,v)} = 0$ ,

неприводима. Тогда система уравнений трафика принимает вид:

$$\varepsilon_{lu} = \lambda p_{0(l,u)} + \sum_{k=1}^N \sum_{v=1}^M \varepsilon_{kv} p_{(k,v)(l,u)}, \quad (1.1)$$

$$l = \overline{1, N}; u = \overline{1, M},$$

где  $\varepsilon_{lu}$  – средняя интенсивность поступления в  $l$ -ый узел заявок типа  $u$ .

Данная система уравнений трафика имеет единственное положительное решение  $(\varepsilon_{lu}; l = \overline{1, N}; u = \overline{1, M})$ , что можно доказать, перенумеровав соответствующим образом элементы матрицы вероятностей переходов. В результате получим систему уравнений трафика сети Джексона, для которой доказано существование единственного положительного решения [10].

В общем случае процесс  $x(t)$  не является марковским, поэтому рассматривается процесс  $\zeta(t) = (x(t), \xi(t))$ , полученный путем добавления к  $x(t)$  непрерывной компоненты

$$\xi(t) = (\xi_{1,j_1(t)}(t), \xi_{2,j_2(t)}(t), \dots, \xi_{N,j_N(t)}(t)).$$

В рамках постановки задачи процесс  $\zeta(t)$  является кусочно-непрерывным марковским процессом [11], т. е. скорость выполнения работы по переключению режима не является постоянной, а зависит от количества оставшейся работы. Эта зависимость в  $l$ -ом узле выражается непрерывной функцией  $\beta_l(j_l, \tilde{u})$ .

Под  $P = \{P(x)\}$  будем понимать стационарное распределение вероятностей состояний процесса  $x(t)$ . Введем обозначения:

$$\mathfrak{D}_l(\bar{x}_l, j_l) = v_l(\bar{x}_l, j_l)I_{(j_l \neq r_l)} + \varphi_l(\bar{x}_l, j_l)I_{(j_l \neq 0)},$$

$$F(x, z) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{x(t) = x;$$

$$\xi_{1,j_1(t)}(t) < z_{1,j_1}, \dots, \xi_{N,j_N(t)}(t) < z_{N,j_N}\},$$

$$\bar{F}(x, z) = \frac{\partial^N F(x, z)}{\partial z_{1,j_1} \dots \partial z_{N,j_N}}.$$

## 2 Основной результат

**Теорема.** Пусть процесс  $\zeta(t)$  эргодичен.

Если выполняются соотношения

$$\begin{aligned} &v_l(x_{l_1}, x_{l_2}, \dots, x_{l_M}, j_l - 1)\alpha_{lu}(x_{lu}, j_l) \times \\ &\times \varphi_l(x_{l_1}, \dots, x_{lu} - 1, \dots, x_{l_M}, j_l) = \\ &= v_l(x_{l_1}, \dots, x_{lu} - 1, \dots, x_{l_M}, j_l - 1) \times \\ &\times \alpha_{lu}(x_{lu}, j_l - 1)\varphi_l(x_{l_1}, x_{l_2}, \dots, x_{l_M}, j_l), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$x_{lu} \neq 0, u = \overline{1, M}, l = \overline{1, N}, j_l = \overline{1, r_l},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{f_l(j_l, \tilde{u})}{\beta_l(j_l, \tilde{u})} d\tilde{u} = \frac{1}{\beta_l(j_l, 0)}, \quad l = \overline{1, N}, j_l = \overline{0, r_l}, \quad (2.2)$$

то стационарные плотности  $\bar{F}(x, z)$  и стационарные функции распределения  $F(x, z)$  определяются по формулам

$$\bar{F}(x, z) = P(0) \prod_{l=1}^N p_l(x_l) q_l^{-1}(j_l) \int_{z_{l,j_l}}^{+\infty} \frac{f_l(j_l, \tilde{u})}{\beta_l(j_l, \tilde{u})} d\tilde{u}, \quad (2.3)$$

$$F(x, z) = P(0) \prod_{l=1}^N p_l(x_l) q_l^{-1}(j_l) \times \left( \int_{z_{l,j_l}}^{+\infty} \frac{f_l(j_l, \tilde{u})}{\beta_l(j_l, \tilde{u})} d\tilde{u} + \int_0^{z_{l,j_l}} \frac{\tilde{u} f_l(j_l, \tilde{u})}{\beta_l(j_l, \tilde{u})} d\tilde{u} \right), \quad (2.4)$$

$$p_l(\bar{x}_l, j_l) = |x_l|! \frac{q_l(j_l)}{q_l(0)} \times \prod_{u=1}^M \frac{\varepsilon_{lu}^{x_{lu}}}{x_{lu}!} \prod_{w=1}^{x_{lu}} \alpha_{lu}^{-1}(w, j_l) \prod_{k=1}^{j_l} \frac{v_l(\bar{0}, k-1)}{\varphi_l(\bar{0}, k)}, \quad (2.5)$$

где  $\varepsilon_{lu}$  находятся из (1.1), а  $P(0)$  – из условия нормировки.

**Доказательство.** Для упрощения процедуры доказательства введём в рассмотрение некоторые вспомогательные обозначения:

$$x \pm e_{lu} = (x_1, \dots, (x_{l1}, \dots, x_{lu} \pm 1, \dots, x_{lM}, j_l), \dots, x_N);$$

$$x + e_{lu} - e_{kv} = (x_1, \dots, (x_{l1}, \dots, x_{lu} + 1, \dots, x_{lM}, j_l), \dots, (x_{k1}, \dots, x_{kv} - 1, \dots, x_{kM}, j_k), \dots, x_N);$$

$$x \pm e'_l = (x_1, \dots, (x_{l1}, \dots, x_{lM}, j_l \pm 1), \dots, x_N).$$

Сначала докажем теорему для  $\bar{F}(x, z)$ . Для  $\bar{F}(x, z)$  справедлива следующая система дифференциально-разностных уравнений

$$\left( \lambda + \sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M \alpha_{lu}(x_{lu}, j_l) \frac{x_{lu} + 1}{|x_l|} \right) \bar{F}(x, z) = \sum_{l=1}^N \frac{\partial \bar{F}(x, z)}{\partial z_{l,j_l}} \vartheta_l(\bar{x}_l, j_l) \beta_l(j_l, z_{l,j_l}) + \lambda \sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M p_{0(l,u)} \bar{F}(x - e_{lu}, z) + \sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M \alpha_{lu}(x_{lu} + 1, j_l) \frac{x_{lu} + 1}{|x_l| + 1} p_{(l,u)0} \bar{F}(x + e_{lu}, z) + \sum_{l=1}^N \sum_{s=1, s \neq l}^M \sum_{u=1}^M \alpha_{su}(x_{su} + 1, j_l) \times \frac{x_{su} + 1}{|x_s| + 1} p_{(s,u)(l,v)} \bar{F}(x + e_{su} - e_{lv}, z) + \sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M \alpha_{lu}(x_{lu} + 1, j_l) \times \frac{x_{lu} + 1}{|x_l|} p_{(l,u)(l,v)} \bar{F}(x + e_{lu} - e_{lv}, z) + \sum_{l=1}^N f_l(j_l, z_{l,j_l}) v_l(\bar{x}_l, j_l - 1) \times \beta_l(j_l - 1, 0) \bar{F}(x - e'_l, z) \Big|_{z_{l,j_l-1}=0} + \sum_{l=1}^N f_l(j_l, z_{l,j_l}) \varphi_l(\bar{x}_l, j_l + 1) \times \beta_l(j_l + 1, 0) \bar{F}(x + e'_l, z) \Big|_{z_{l,j_l+1}=0}, \quad x \in X.$$

Разобьем эту систему на уравнения локального баланса следующим образом:

$$\lambda \bar{F}(x, z) = \sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M \alpha_{lu}(x_{lu} + 1, j_l) \times \frac{x_{lu} + 1}{|x_l| + 1} p_{(l,u)0} \bar{F}(x + e_{lu}, z), \quad (2.7)$$

$$\alpha_{lu}(x_{lu}, j_l) \frac{x_{lu}}{|x_l|} \bar{F}(x, z) = \lambda p_{0(l,u)} \bar{F}(x - e_{lu}, z) + \sum_{s=1, s \neq l}^M \sum_{u=1}^M \alpha_{su}(x_{su} + 1, j_l) \times \frac{x_{su} + 1}{|x_s| + 1} p_{(s,u)(l,v)} \bar{F}(x + e_{su} - e_{lv}, z) + \sum_{u=1}^M \alpha_{lu}(x_{lu} + 1, j_l) \frac{x_{lu} + 1}{|x_l|} p_{(l,u)(l,v)} \bar{F}(x + e_{lu} - e_{lv}, z), \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \bar{F}(x, z)}{\partial z_{l,j_l}} \vartheta_l(\bar{x}_l, j_l) \beta_l(j_l, z_{l,j_l}) + f_l(j_l, z_{l,j_l}) v_l(\bar{x}_l, j_l - 1) \beta_l(j_l - 1, 0) \bar{F}(x - e'_l, z) \Big|_{z_{l,j_l-1}=0} + f_l(j_l, z_{l,j_l}) \varphi_l(\bar{x}_l, j_l + 1) \times \beta_l(j_l + 1, 0) \bar{F}(x + e'_l, z) \Big|_{z_{l,j_l+1}=0} = 0, \quad x \in X. \quad (2.9)$$

Стационарные плотности распределения  $\bar{F}(x, z)$ , определенные формулами (2.3), (2.5), являются решением уравнений (2.7)–(2.9) и, значит, уравнений (2.6). Это несложно доказать, поочередно подставляя указанные стационарные плотности  $\bar{F}(x, z)$  в уравнения (2.7)–(2.9). Выполняя преобразования, получим соответственно: следствие уравнения трафика  $1 = \sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M \varepsilon_{lu} p_{(l,u)0}$ , уравнение трафика (1.1) и, если выполнены соотношения (2.1)–(2.2), тождество. Для  $\bar{F}(x, z)$  теорема доказана.

Теперь по  $\bar{F}(x, z)$  найдем стационарные функции распределения  $F(x, z)$ . Для этого используем следующую известную зависимость между ними:

$$F(x, z) = F(x, z_{1,j_1}, \dots, z_{N,j_N}) = \int_{-\infty}^{z_{1,j_1}} \dots \int_{-\infty}^{z_{N,j_N}} \bar{F}(x, y_1, \dots, y_N) dy_1 \dots dy_N.$$

Подставляя (2.3) в последнее выражение и учитывая неотрицательность непрерывных компонент процесса  $\zeta(t)$ , имеем

$$\bar{F}(x, z) = \int_0^{z_{1,j_1}} \dots \int_0^{z_{N,j_N}} \left\{ P(0) \prod_{l=1}^N p_l(x_l) q_l^{-1}(j_l) \times \int_{y_l}^{+\infty} \frac{f_l(j_l, \tilde{u})}{\beta_l(j_l, \tilde{u})} d\tilde{u} \right\} dy_1 \dots dy_N = P(0) \prod_{l=1}^N p_l(x_l) q_l^{-1}(j_l) \int_0^{z_{1,j_1}} \left\{ \int_{y_l}^{+\infty} \frac{f_l(j_l, \tilde{u})}{\beta_l(j_l, \tilde{u})} d\tilde{u} \right\} dy_l.$$

Для последнего интеграла применим формулу интегрирования по частям:

$$\int_0^{z_{l,j_l}} \left\{ \int_{y_l}^{+\infty} \frac{f_l(j_l, \tilde{u})}{\beta_l(j_l, \tilde{u})} d\tilde{u} \right\} dy_l = \left\{ y_l \int_{y_l}^{+\infty} \frac{f_l(j_l, \tilde{u})}{\beta_l(j_l, \tilde{u})} d\tilde{u} \right\}_0^{z_{l,j_l}} - \int_0^{z_{l,j_l}} y_l \left( - \frac{f_l(j_l, y_l)}{\beta_l(j_l, y_l)} \right) dy_l = = z_{l,j_l} \int_{z_{l,j_l}}^{+\infty} \frac{f_l(j_l, \tilde{u})}{\beta_l(j_l, \tilde{u})} d\tilde{u} + \int_0^{z_{l,j_l}} \frac{\tilde{u}f_l(j_l, \tilde{u})}{\beta_l(j_l, \tilde{u})} d\tilde{u}.$$

Таким образом, получили (2.4) и теорема доказана полностью.

Из теоремы при фиксированных

$$\int_0^{+\infty} \frac{\tilde{u}f_l(j_l, \tilde{u})}{\beta_l(j_l, \tilde{u})} d\tilde{u}, l = \overline{1, N},$$

с учетом равенства  $P(x) = F(x, +\infty)$  вытекает следующее утверждение.

**Следствие.** В условиях теоремы стационарное распределение вероятностей состояний процесса  $x(t)$  не зависит от вида функций распределения  $\Phi_l(j_l, \tilde{u})$  и имеет вид

$$P(x) = P(0) \prod_{l=1}^N p_l(x_l) \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{u}f_l(j_l, \tilde{u})}{\beta_l(j_l, \tilde{u})} d\tilde{u},$$

где  $p_l(x_l)$  определяются по формулам (2.5), а  $P(0)$  находится из условия нормировки.

### Заключение

В статье установлены условия нечувствительности стационарного распределения вероятностей состояний открытой кусочно-непрерывной сети массового обслуживания с многорежимными стратегиями и заявками различных типов к виду законов распределения величин работ, требующихся на переключение режимов функционирования приборов в узлах, если фиксированы первые моменты этих законов, а длительности обслуживания заявок приборами имеют экспоненциальное распределение. Дисциплина обслуживания заявок прибором – «дискриминаторное разделение процессора» (DPS). Также определено, что стационарное распределение сети имеет форму произведения, где каждый множитель есть стационарное распределение изолированного узла, помещенного в фиктивную окружающую среду с пуассоновским входящим потоком.

Полученные результаты могут быть применены к широкому кругу задач при проектировании, моделировании и эксплуатации многих реальных объектов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Малинковский, Ю.В.* Замкнутые информационные сети с многорежимными стратегиями обслуживания / Ю.В. Малинковский, А.Ю. Нуеман

// Информационные системы и технологии (IST'2002): материалы I междунар. конф., Минск, 5–8 ноября, 2002 г.: в 2 ч. / Белорусский гос. ун-т. – Минск, 2002. – Ч. 1. – С. 324–328.

2. *Малинковский, Ю.В.* Мультипликативность стационарного распределения в открытых сетях с многорежимными стратегиями обслуживания / Ю.В. Малинковский, А.Ю. Нуеман // Вестні НАН Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 2001. – № 3. – С. 129–134.

3. *Нуеман, А.Ю.* Открытые сети с многорежимными стратегиями обслуживания и отрицательными заявками / А.Ю. Нуеман // Вестник ТГУ. – 2002. – № 1 (1). – С. 90–93.

4. *Старовойтов, А.Н.* Инвариантность стационарного распределения сетей с многорежимными стратегиями обслуживания и дисциплиной обслуживания PS / А.Н. Старовойтов // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы IX Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 13–15 марта 2006 г. / ГГУ им. Ф. Скорины; редкол.: Д.Г. Лин [и др.]. – Гомель, 2006. – С. 199–200.

5. *Старовойтов, А.Н.* Инвариантность стационарного распределения состояний сетей с многорежимными стратегиями обслуживания / А.Н. Старовойтов // Проблемы передачи информации. – 2006. – Т. 42, № 4. – С. 121–128.

6. *Open, Closed and Mixed Networks of Queues with Different Classes of Customers* / F. Basskett [et al.] // J. Assoc. Comput. Mach. – 1975. – Vol. 22, № 2. – P. 248–260.

7. *Chandy, K.M.* Product-form and Local Balance in Queueing Networks / K.M. Chandy, J.H.Jr. Howard, D.F. Towsley // Journ. of the Assoc. Comput. Mach. – 1977. – Vol. 24, № 2. – P. 250–263.

8. *Kelly, F.P.* Networks of Queues / F.P. Kelly // Adv. Appl. Probab. – 1976. – Vol. 8, № 2. – P. 416–432.

9. *Яшков, С.Ф.* Математические вопросы теории систем обслуживания с разделением процессора / С.Ф. Яшков // Итоги науки и техники. Сер. Теор. вероятн. Матем. статистика. Теор. кибернетика. – М.: ВИНТИ, 1990. – № 29. – С. 3–82.

10. *Jackson, J.R.* Jobshop-like Queueing Systems / J.R. Jackson // Manag. Sci. – 1963. – Vol. 10, № 1. – P. 131–142.

11. *Ивницкий, В.А.* Теория сетей массового обслуживания / В.А. Ивницкий. – М.: Физматлит, 2004. – 772 с.

Поступила в редакцию 10.09.15.

УДК 512.542

ДОСТАТОЧНЫЙ ПРИЗНАК РАЗРЕШИМОЙ  
НАСЫЩЕННОСТИ ФОРМАЦИИ

С.Ф. Каморников

Международный университет «МИТСО», Гомельский филиал

A SUFFICIENT CONDITION FOR A FORMATION  
TO BE SOLUBLY SATURATED

S.F. Kamornikov

Gomel Branch of International University «MITSO»

Для формации  $\mathfrak{F}$  и множества простых чисел  $\pi$  исследуется разрешимая насыщенность формации  $S_{\pi}^{\mathfrak{F}}$  всех конечных групп, у которых каждая  $\pi$ -подгруппа принадлежит  $\mathfrak{F}$ .

**Ключевые слова:** конечная группа,  $\pi$ -подгруппа, формация, разрешимо насыщенная формация,  $s$ -критическая группа.

For a formation  $\mathfrak{F}$  and for a set  $\pi$  of primes, the solubly saturation of the formation  $S_{\pi}^{\mathfrak{F}}$  of all finite groups whose all  $\pi$ -subgroups belong to  $\mathfrak{F}$  is investigated.

**Keywords:** finite group,  $\pi$ -subgroup, formation, solubly saturated formation,  $s$ -critical group.

**Введение**

Главная цель работы – доказательство следующего достаточного признака разрешимой насыщенности формации.

**Теорема.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – формация и  $\pi$  – множество простых чисел. Предположим, что выполняются следующие условия:

(1) группа  $G/G^{\mathfrak{F}}$  разрешима для любой  $\pi$ -группы  $G \in \text{Crit}_{\pi}(\mathfrak{F})$ ;

(2) формация  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{E}_{\pi}$  является наследственной и насыщенной.

Тогда  $S_{\pi}^{\mathfrak{F}}$  – наследственная разрешимо насыщенная формация.

Отметим, что формации  $S_{\pi}^{\mathfrak{F}}$  активно используются в приложениях. Например, в [1] при изучении групп с заданными нормализаторами силовских подгрупп рассматривался класс  $S_{\pi}^{\mathfrak{N}}$  всех конечных групп, у которых каждая  $\pi$ -подгруппа нильпотентна ( $\pi$  – множество простых чисел). При этом показано, что класс  $S_{\pi}^{\mathfrak{N}}$  является наследственной формацией, которая в общем случае не является насыщенной. В [2] в универсуме  $\mathfrak{E}$  всех конечных разрешимых групп при изучении свойств холловых подгрупп во фраттини-расширениях групп рассматривался класс  $E_{\pi}\mathfrak{F}$ , совпадающий в  $\mathfrak{E}$  с классом  $S_{\pi}^{\mathfrak{F}}$  в случае наследственной формации  $\mathfrak{F}$ .

**1 Предварительные результаты**

В работе рассматриваются только конечные группы. Используются определения и обозначения, принятые в [3]–[4].

Напомним, что *формация* – это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений.

Если  $\mathfrak{F}$  – непустая формация, то через  $G^{\mathfrak{F}}$  обозначается пересечение всех тех нормальных подгрупп  $N$  группы  $G$ , для которых  $G/N \in \mathfrak{F}$  (подгруппа  $G^{\mathfrak{F}}$  называется  $\mathfrak{F}$ -кордикалом группы  $G$ ).

Зафиксируем следующие обозначения:  $\mathfrak{E}$  – класс всех групп;  $\mathfrak{S}$  – класс всех разрешимых групп;  $\mathfrak{U}$  – класс всех сверхразрешимых групп;  $\mathfrak{N}$  – класс всех нильпотентных групп; если  $\mathfrak{F}$  – непустой класс и  $\pi$  – множество простых чисел, то  $\mathfrak{F}_{\pi}$  – класс всех  $\pi$ -групп из  $\mathfrak{F}$ . Через  $G_{\mathfrak{E}}$  обозначается  $\mathfrak{E}$ -радикал группы  $G$ , т. е. наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы  $G$ .

*Наследственная формация*  $\mathfrak{F}$  – это формация, замкнутая относительно взятия подгрупп.

Формация  $\mathfrak{F}$  называется *насыщенной*, если из  $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$  всегда следует  $G \in \mathfrak{F}$ . На основании теоремы Гашюца – Любезедер – Шмида [3, теорема IV.4.6] формация  $\mathfrak{F}$  является насыщенной тогда и только тогда, когда она локальна. Развивая концепцию локальной формации, Л.А. Шеметков и Р. Бэр (параллельно и независимо) ввели понятие *композиционной* формации. Суть идеи состоит в рассмотрении класса  $\mathfrak{F}$  групп с  $f$ -центральными рядами, где  $f$  – функция, ставящая в соответствие каждой простой (абелевой или неабелевой) группе некоторую формацию. В [3, стр. 370] такие функции называются

формационными функциями Бэра (Л.А. Шеметков в [4] называет их композиционными экранами).

Для характеристики композиционных формаций Бэр ввел следующее понятие. Формация  $\mathfrak{F}$  называется разрешимо насыщенной, если для любой разрешимой нормальной подгруппы  $N$  группы  $G$  из  $G/\Phi(N) \in \mathfrak{F}$  всегда следует  $G \in \mathfrak{F}$ . Вопрос о соотношении композиционных и разрешимо насыщенных формаций решен следующей теоремой Бэра [3, теорема IV.4.17]: *формация является композиционной тогда и только тогда, когда она разрешимо насыщена.*

Очевидно, каждая насыщенная формация является разрешимо насыщенной. Обратное неверно, на что указывает пример формации, порожденной простой неабелевой группой. В то же время в универсуме всех разрешимых групп понятия насыщенной и разрешимо насыщенной формаций эквивалентны.

Следуя [3], через  $Crit_s(\mathfrak{F})$  будем обозначать класс всех  $s$ -критических групп. Напомним, что  $s$ -критической группой формации  $\mathfrak{F}$  (или  $\mathfrak{F}$ -критической группой) называется группа, не принадлежащая  $\mathfrak{F}$ , все собственные подгруппы которой принадлежат  $\mathfrak{F}$ . Критическая группа формации всех нильпотентных групп – это группа Шмидта.

Центральным объектом работы является класс  $S_\pi^\delta$ . Для формации  $\mathfrak{F}$  и множества  $\pi$  простых чисел он определяется как класс групп, у которых каждая  $\pi$ -подгруппа принадлежит  $\mathfrak{F}$ .

В виде лемм приведем ряд утверждений, необходимых для доказательства основного результата работы. Эти леммы содержат информацию об общих свойствах класса  $S_\pi^\delta$ .

**Лемма 1.1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – формация и  $\pi$  – множество простых чисел. Тогда  $S_\pi^\delta$  – наследственная формация.

*Доказательство.* Наследственность класса  $S_\pi^\delta$  следует из его определения.

Пусть  $N$  – нормальная подгруппа группы  $G$ , принадлежащей классу  $S_\pi^\delta$ , и  $H/N$  – некоторая  $\pi$ -подгруппа из  $G/N$ . Пусть  $L$  – минимальное добавление к  $N$  в  $H$ . Так как  $N \cap L \subseteq \Phi(L)$ , то  $L$  является  $\pi$ -подгруппой и  $H = LN$ . Теперь из  $G \in S_\pi^\delta$  следует, что  $L \in \mathfrak{F}$ . Но тогда

$$H/N = LN/N \cong L/L \cap N \in \mathfrak{F}$$

и  $G/N \in S_\pi^\delta$ . Таким образом, класс  $S_\pi^\delta$  замкнут относительно взятия факторгрупп.

Покажем, что класс  $S_\pi^\delta$  замкнут относительно взятия прямых произведений. Пусть  $A$  и  $B$  – группы из класса  $S_\pi^\delta$  и  $G = A \times B$ . Если  $H$

– некоторая  $\pi$ -подгруппа из  $A \times B$ , то из  $A \in S_\pi^\delta$  и  $B \in S_\pi^\delta$  следует, что  $HA/A \in \mathfrak{F}$  и  $HB/B \in \mathfrak{F}$ . Отсюда  $H/H \cap A \in \mathfrak{F}$  и  $H/H \cap B \in \mathfrak{F}$ . Так как  $\mathfrak{F}$  – формация, то

$$H \cong H / (H \cap A) \cap (H \cap B) \in \mathfrak{F}.$$

Таким образом,  $G = A \times B \in S_\pi^\delta$ .

Из наследственности класса  $S_\pi^\delta$  и замкнутости его относительно прямых произведений следует, что класс  $S_\pi^\delta$  замкнут относительно подпрямых произведений. Лемма доказана.

**Лемма 1.2.** Для любой формации  $\mathfrak{F}$  и любого множества  $\pi$  простых чисел справедливо равенство  $Crit_s(S_\pi^\delta) = Crit_s(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{C}_\pi$ .

*Доказательство.* Пусть  $G$  – некоторая  $S_\pi^\delta$ -критическая группа. Тогда она обладает  $\pi$ -группой  $H$ , которая не принадлежит формации  $\mathfrak{F}$ . Так как  $G$  –  $S_\pi^\delta$ -критическая группа, то  $H = G$ . Следовательно,  $G$  является  $\pi$ -группой. Но тогда из определения класса  $S_\pi^\delta$  следует, что  $G \in Crit_s(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{C}_\pi$ . Итак,  $Crit_s(S_\pi^\delta) \subseteq Crit_s(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{C}_\pi$ .

Пусть теперь  $R$  –  $\mathfrak{F}$ -критическая  $\pi$ -группа. Тогда из определения класса  $S_\pi^\delta$  и того, что  $R$  –  $\pi$ -группа, имеем  $R \in Crit_s(S_\pi^\delta)$ . Следовательно,  $Crit_s(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{C} \subseteq Crit_s(S_\pi^\delta)_\pi$ . Лемма доказана.

Если  $\mathfrak{F}$  – класс групп, то через  $E_\pi \mathfrak{F}$  обозначается класс всех групп, обладающих холловыми  $\pi$ -подгруппами, принадлежащими  $\mathfrak{F}$ .

**Лемма 1.3** [2]. Для любой насыщенной формации  $\mathfrak{F}$  и любого множества  $\pi$  простых чисел класс всех разрешимых  $E_\pi \mathfrak{F}$ -групп является насыщенной формацией.

**Лемма 1.4.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – наследственная формация и  $\pi$  – множество простых чисел. Тогда справедливы следующие утверждения:

$$(1) S_\pi^\delta \cap \mathfrak{C} = E_\pi \mathfrak{F} \cap \mathfrak{C};$$

(2) если формация  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{C}_\pi$  является насыщенной, то насыщенной будет и формация  $S_\pi^\delta \cap \mathfrak{C}$ .

*Доказательство.* По теореме Холла любая разрешимая группа  $G$  для любого множества  $\pi$  обладает холловой  $\pi$ -подгруппой. Поэтому из  $G \in S_\pi^\delta \cap \mathfrak{C}$  всегда следует, что  $G \in E_\pi \mathfrak{F} \cap \mathfrak{C}$ .

Пусть  $G \in E_\pi \mathfrak{F} \cap \mathfrak{C}$  и  $H$  – произвольная  $\pi$ -подгруппа из  $G$ . По теореме Холла  $H$  содержится в некоторой холловой  $\pi$ -подгруппе  $G_\pi$  группы  $G$ . Кроме того, все холловы  $\pi$ -подгруппы группы  $G$  сопряжены. Следовательно, ввиду  $G \in E_\pi \mathfrak{F}$  подгруппа  $G_\pi$  принадлежит  $\mathfrak{F}$ . Так как формация  $\mathfrak{F}$  является наследственной, то  $H \in \mathfrak{F}$  и  $G \in S_\pi^\delta \cap \mathfrak{C}$ . Утверждение (1) доказано.

Утверждение (2) следует из утверждения (1) и леммы 1.3. Лемма доказана.

## 2 Доказательство теоремы

Пусть  $\mathfrak{F} = S_{\pi}^{\delta}$ . Ввиду леммы 1.1 класс  $\mathfrak{F}$  – наследственная формация.

Предположим, что теорема неверна. Тогда существует группа  $G$  минимального порядка такая, что  $G/\Phi(G_{\varepsilon}) \in \mathfrak{F}$ , но  $G \notin \mathfrak{F}$ . Пусть  $L$  – минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ , содержащаяся в  $\Phi(G_{\varepsilon})$ . Так как

$$\Phi(G_{\varepsilon})/L = \Phi(G_{\varepsilon}/L) = \Phi((G/L)_{\varepsilon}),$$

то группа  $(G/L)\Phi((G/L)_{\varepsilon})$  принадлежит формации  $\mathfrak{F}$  как гомоморфный образ группы  $G/\Phi(G_{\varepsilon})$ . Отсюда ввиду выбора группы  $G$  имеем, что  $G/L \in \mathfrak{F}$ . Так как  $L$  – минимальная нормальная подгруппа группы  $G$  и  $G \notin \mathfrak{F}$ , то  $L$  –  $\mathfrak{F}$ -корадикал группы  $G$ .

Так как группа  $G$  не принадлежит  $\mathfrak{F}$ , то  $G$  содержит некоторую подгруппу  $D$ , которая является  $\mathfrak{F}$ -критической группой. Так как формация  $\mathfrak{F}$  является наследственной, то подгруппа  $DL/L$  группы  $G/L$  принадлежит формации  $\mathfrak{F}$ . Поэтому из изоморфизма  $DL/L \cong D/D \cap L$  следует, что  $\mathfrak{F}$ -корадикал  $D^{\mathfrak{F}}$  группы  $D$  содержится в подгруппе  $L$ , которая абелева. Следовательно,  $\mathfrak{F}$ -корадикал группы  $D$  разрешим. С другой стороны, ввиду леммы 1.2 имеем  $D \in \text{Crit}_s(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{E}_{\pi}$ . Поэтому из условия теоремы факторгруппа  $D/D^{\mathfrak{F}} = D/D^{\delta}$  является разрешимой. Отсюда и из разрешимости  $D^{\mathfrak{F}}$  следует, что подгруппа  $D$  является разрешимой.

Рассмотрим подгруппу  $X = DG_{\varepsilon}$ . Так как подгруппа  $D$  разрешима, то разрешимой будет и подгруппа  $X$ . При этом из наследственности формации  $\mathfrak{F}$  следует, что факторгруппа  $X/\Phi(G_{\varepsilon})$  принадлежит  $\mathfrak{F}$ . Так как подгруппа  $G_{\varepsilon}$  нормальна в  $DG_{\varepsilon} = X$ , то по свойству подгруппы Фраттини справедливо включение  $\Phi(G_{\varepsilon}) \subseteq \Phi(X)$ . Поэтому группа  $X/\Phi(X)$  принадлежит  $\mathfrak{F}$  как гомоморфный образ группы  $X/\Phi(G_{\varepsilon})$ . Так как подгруппа  $X$  разрешима, то  $X/\Phi(X) \in S_{\pi}^{\delta} \cap \mathfrak{E}$ . Отсюда ввиду утверждения (2) леммы 1.4 имеем, что  $X \in \mathfrak{F}$ . Теперь из наследственности формации  $\mathfrak{F}$  следует, что  $D \in \mathfrak{F}$ . Пришли к противоречию с тем, что  $D$  –  $\mathfrak{F}$ -критическая группа. Следовательно, формация  $S_{\pi}^{\delta}$  является разрешимо насыщенной. Теорема доказана.

## 3 Некоторые приложения и примеры

Отметим наиболее важные частные случаи теоремы. Из приведенной выше теоремы Бэра имеем

**Следствие 3.1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – формация и  $\pi$  – множество простых чисел. Предположим, что выполняются следующие условия:

(1) группа  $G/G^{\delta}$  разрешима для любой  $\pi$ -группы  $G \in \text{Crit}_s(\mathfrak{F})$ ;

(2) формация  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{E}_{\pi}$  является наследственной и насыщенной.

Тогда  $S_{\pi}^{\delta}$  – наследственная композиционная формация.

Если  $\pi$  – множество всех простых чисел, то из теоремы прямо получаем следующий результат.

**Следствие 3.2** [5]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – наследственная формация, для которой выполняются следующие условия:

(1) группа  $G/G^{\delta}$  разрешима для любой группы  $G \in \text{Crit}_s(\mathfrak{F})$ ;

(2) формация  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{E}$  является насыщенной.

Тогда формация  $\mathfrak{F}$  является разрешимо насыщенной.

Из основного результата работы следует, что тестирование наследственной формации  $\mathfrak{F}$  на разрешимую насыщенность в ряде случаев полезно проводить по следующей схеме: 1) исследовать структуру  $\mathfrak{F}$ -критических групп; 2) проверить формацию  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{E}$  на насыщенность.

Проиллюстрируем эффективность рассмотренной схемы на конкретных примерах. Напомним, что формация  $\mathfrak{F}$  называется *формацией Шеметкова*, если все ее  $s$ -критические группы являются либо группами простого порядка, либо группами Шмидта. Из работы [6] следует, что любая разрешимая формация Шеметкова является насыщенной.

**Следствие 3.3** [7]–[8]. Любая наследственная формация Шеметкова является разрешимо насыщенной.

Формация Фиттинга – это формация  $\mathfrak{F}$ , замкнутая относительно взятия нормальных подгрупп и обладающая тем свойством, что из  $G = AB$ , где  $A \triangleleft G$ ,  $B \triangleleft G$ ,  $A \in \mathfrak{F}$ ,  $B \in \mathfrak{F}$ , всегда следует  $G \in \mathfrak{F}$ . Из теоремы Брайса и Косси [9] следует, что каждая разрешимая формация Фиттинга является насыщенной.

**Следствие 3.4.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – наследственная формация Фиттинга. Если для любой группы  $G \in \text{Crit}_s(\mathfrak{F})$  группа  $G/G^{\delta}$  разрешима, то формация  $\mathfrak{F}$  является разрешимо насыщенной.

**Следствие 3.5.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – наследственная формация Фиттинга. Если каждая группа  $G \in \text{Crit}_s(\mathfrak{F})$  разрешима, то формация  $\mathfrak{F}$  является разрешимо насыщенной.

В [10] построен пример наследственной формации Фиттинга, которая не является разрешимо насыщенной. Этот пример показывает, что ограничение на  $\mathfrak{F}$ -критические группы в следствии 3.4 существенно.

Если  $\mathfrak{F}$  – разрешимая формация (т. е.  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{C}$ ) и  $G \in \text{Crit}_s(\mathfrak{F})$ , то либо группа  $G$  разрешима, либо группа  $G/\Phi(G)$  изоморфна группе из следующего списка:  $PSL_2(2^p)$ ,  $p$  – простое число;  $PSL_2(3^p)$ ,  $p$  – нечетное простое число;  $PSL_2(p)$ ,  $p$  – простое число, большее 3, для которого  $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$ ;  $Sz(2^p)$ ,  $p$  – нечетное простое число;  $PSL_3(3)$ . Таким образом, для любой группы  $G \in \text{Crit}_s(\mathfrak{F})$  группа  $G/G^\delta$  разрешима. Поэтому имеет место

**Следствие 3.6.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – разрешимая наследственная насыщенная формация. Тогда для любого множества  $\pi$  простых чисел  $S_\pi^\delta$  – наследственная разрешимо насыщенная формация.

Так как формации  $\mathfrak{N}$  и  $\mathfrak{U}$  являются наследственными и насыщенными, то справедливы следующие утверждения.

**Следствие 3.7.** Для любого множества  $\pi$  простых чисел формация  $S_\pi^{\mathfrak{N}}$  является разрешимо насыщенной.

**Следствие 3.8.** Для любого множества  $\pi$  простых чисел формация  $S_\pi^{\mathfrak{U}}$  является разрешимо насыщенной.

Отметим, что ввиду теоремы Хупперга из [11] любая  $s$ -критическая группа формации  $\mathfrak{U}$  всех сверхразрешимых групп является разрешимой.

**Открытый вопрос.** Пусть  $\mathfrak{F}$  – разрешимая наследственная формация, у которой все ее  $s$ -критические группы являются либо группами простого порядка, либо  $\mathfrak{U}$ -критическими группами. Является ли  $\mathfrak{F}$  насыщенной формацией?

Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $\mathfrak{F}$ -субнормальной, если либо  $H = G$ , либо существует максимальная цепь подгрупп

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_n = H$$

такая, что  $(H_{i-1})^\delta \subseteq H_i$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Понятие  $\mathfrak{F}$ -субнормальной подгруппы является естественным обобщением понятия субнормальности. Для произвольных конечных групп оно впервые рассмотрено Л. А. Шеметковым.

Формация  $\mathfrak{F}$  называется *сверхрадикальной*, если она удовлетворяет следующим требованиям:

- 1)  $\mathfrak{F}$  – нормально наследственная формация;
- 2) любая группа  $G = AB$ , где  $A$  и  $B$  –  $\mathfrak{F}$ -субнормальные  $\mathfrak{F}$ -подгруппы из  $G$ , принадлежит  $\mathfrak{F}$ .

В 1999 году в Коуровской тетради [12] под номером 14.99а) Л.А. Шеметковым был сформулирован следующий вопрос: *доказать, что всякая*

*наследственная сверхрадикальная формация является разрешимо насыщенной формацией.*

В важном частном случае положительный ответ на этот вопрос дает

**Следствие 3.9** [5]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – наследственная сверхрадикальная формация. Если для любой группы  $G \in \text{Crit}_s(\mathfrak{F})$  группа  $G/G^\delta$  разрешима, то формация  $\mathfrak{F}$  является разрешимо насыщенной.

Отметим, что существуют сверхрадикальные формации, которые не являются наследственными [13].

Говорят, что формация  $\mathfrak{F}$  индуцирует функтор Виландта на  $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгруппах, если  $\langle A, B \rangle^\delta = \langle A^\delta, B^\delta \rangle$  для любых двух  $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп  $A$  и  $B$  каждой группы  $G$ . В книге [14] такая формация называется *формацией, обладающей обобщенным свойством Виландта для корадикалов, или GWP-формацией.*

**Следствие 3.10.** Любая GWP-формация является разрешимо насыщенной.

Как отмечено в [15], любая GWP-формация всегда является насыщенной. В то же время примеры, построенные в [1], показывают, что формация  $S_\pi^\delta$  не является насыщенной даже в случае  $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kazarin, L.S. On Sylow normalizers of finite groups / L.S. Kazarin, A. Martinez-Pastor, M.D. Perez-Ramos // J. Algebra Appl. – 2014. – Vol. 13, № 3. – 1350116. – 1–20.
2. Blessohl, D. Über Formationen und Halluntergruppen endlicher auflösbarer Gruppen / D. Blessohl // Math. Z. – 1975. – Vol. 142, № 3. – P. 299–300.
3. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
4. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
5. Ballester-Bolinches, A. A note on solubly saturated formations of finite groups / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov // J. Algebra Appl. – 2015. – Vol. 14, № 4. – 1550047. – 1–4.
6. Скиба, А.Н. Об одном классе локальных формаций / А.Н. Скиба // ДАН БССР. – 1990. – Т. 34, № 11. – С. 982–985.
7. Каморников, С.Ф. О двух проблемах Л.А. Шеметкова / С.Ф. Каморников // Сиб. мат. журнал. – 1994. – Т. 35, № 4. – С. 801–812.
8. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск: Беларуская навука, 2003. – 256 с.
9. Bryce, R.A. Fitting formations of finite soluble groups / R.A. Bryce, R. Cossey // Math. Z. – 1972. – Vol. 127, №3. – P. 217–223.

- 
10. Каморников, С.Ф. О двух задачах из «Коуровской тетради» / С.Ф. Каморников // Мат. заметки. – 1994. – Т. 55, № 6. – С. 59–63.
11. Huppert, B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen / В. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.
12. Мазуров, В.Д. Нерешенные вопросы теории групп: Коуровская тетрадь / В.Д. Мазуров, Е.И. Хухро. – Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2006. – 194 с.
13. Каморников, С.Ф. Об одном примере гиперрадикальной формации / С.Ф. Каморников // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3. – С. 61–64.
14. Ballester-Bolinches, A. Classes of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer, 2006. – 385 p.
15. Ballester-Bolinches, A. On formations of finite groups with the generalized Wielandt property for residuals / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, V. Perez-Calabuig // J. Algebra. – 2014. – Vol. 412. – P. 173–178.

Поступила в редакцию 27.06.15.

## О КОНЕЧНОМЕРНЫХ И ЯДЕРНЫХ ГАНКЕЛЕВЫХ ОПЕРАТОРАХ В ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ $H^2$ НА КОМПАКТНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

А.Р. Миротин, Р.В. Дыба

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

## ON FINITE DIMENSIONAL AND NUCLEAR OPERATORS IN HARDY SPACES $H^2$ ON COMPACT ABELIAN GROUPS

A.R. Mirotin, R.V. Dyba

F. Scorina Gomel State University

Рассматривается связная компактная абелева группа  $G$  с линейно упорядоченной группой характеров. Показано, что на группе  $G$  существует ненулевой ганкелев оператор конечного ранга тогда и только тогда, когда ее группа характеров содержит наименьший положительный элемент. При этом условия классические теоремы Кронекера, Хартмана и Пеллера переносятся на случай ганкелевых операторов над  $G$ .

**Ключевые слова:** компактная абелева группа, оператор Ганкеля, оператор конечного ранга, ядерный оператор.

Compact and connected Abelian group  $G$  with totally ordered dual is considered. It is shown that nontrivial finite rank Hankel operator exists on  $G$  if and only if the dual group contains the first positive element. In this case the classical theorems by Kronecker, Hartman, and Peller are generalized to the case of Hankel operators on  $G$ .

**Keywords:** compact Abelian group, Hankel operator, finite rank operator, nuclear operator.

### Введение

Операторы Ганкеля в пространствах Харди  $H^2$  на группе вращений окружности, их различные реализации и аналоги активно изучались в течение нескольких последних десятилетий и нашли важные приложения, в том числе к теории функций, теории операторов, теории случайных процессов, теории рациональных приближений и теории управления (см., например, [1]–[4]). Изучались также некоторые обобщения этих операторов (см. [3]–[13] и обзор в [3, с. 195–204]), а также обобщения тесно связанных с ними операторов Тёплица и операторов Винера – Хопфа (см. [5]–[7] и библиографию там).

В данной работе рассматриваются обобщенные операторы Ганкеля, определенные в пространствах  $H^2(G)$ , где  $G$  есть нетривиальная связная компактная абелева группа с нормированной мерой Хаара  $dx$  и линейно упорядоченной группой характеров  $X$ ,  $X_+$  — положительный конус в  $X$ . То же можно выразить, сказав, что в группе  $X$  выделена подполугруппа  $X_+$ , содержащая единичный характер 1 и такая, что  $X_+ \cap X_+^{-1} = \{1\}$  и  $X = X_+ \cup X_+^{-1}$ . При этом подполугруппа  $X_+$  индуцирует в  $X$  линейный порядок, согласованный со структурой группы, по правилу  $\xi \leq \chi := \chi\xi^{-1} \in X_+$ . Ясно, что  $X_+ = \{\chi \in X : \chi \geq 1\}$ . Далее мы положим  $X_- := X_+^{-1} \setminus \{1\} (= X \setminus X_+)$ . Хорошо известно, что (дискретная) абелева группа  $X$  может быть линейно упорядочена тогда и

только тогда, когда она не имеет кручения (см., например, [11]), что, в свою очередь, равносильно тому, что её группа характеров  $G$  компактна и связна [12] (при этом линейный порядок в  $X$ , вообще говоря, не единственен). В приложениях в роли  $X$  часто выступают подгруппы аддитивной группы  $\mathbb{R}^n$ , наделенные дискретной топологией, так что  $G$  является боровской компактификацией группы  $X$  (см, например, [7] и цитированную там литературу).

Статья продолжает цикл работ авторов [8]–[10]. Основной ее целью является получение для операторов Ганкеля в пространствах  $H^2$  на компактных абелевых группах аналогов классических теорем Кронекера и Пеллера, дающих, соответственно, критерии конечномерности и ядерности операторов Ганкеля в пространствах  $H^2$  на окружности.

### 1 Конечномерность операторов Ганкеля

Если в группе  $X$  имеется наименьший положительный элемент  $\chi_1$ , то через  $X^i$  будем обозначать (бесконечную циклическую) подгруппу группы  $X$ , порожденную этим элементом (см. [5, теорема 2]). Нам понадобятся следующие простые свойства множества  $X_+ \setminus X^i$  (это множество не пусто тогда и только тогда, когда группа  $G$  не изоморфна одномерному тору  $\mathbb{T}$  [5, следствие 1], что мы далее и будем предполагать).

**Лемма 1.1.** Пусть в группе  $X$  имеется наименьший положительный элемент  $\chi_1$ .

1) Множество  $X_+ \setminus X^i$  есть идеал подгруппы  $X_+$ ;

2) для любого  $k \in \mathbb{Z}$  справедливо равенство  $\chi_1^k(X_+ \setminus X^i) = X_+ \setminus X^i$ .

*Доказательство.* 1) Включение  $\chi \in X_+ \setminus X^i$  равносильно тому, что  $\chi > \chi_1^n$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ . В самом деле, достаточность очевидна. Если же в доказательстве необходимости предположить, что  $\chi \leq \chi_1^n$  для некоторого  $\chi \in X_+ \setminus X^i$  и натурального  $n$ , то получим  $\chi \in X^i$  в силу выпуклости  $X^i$  [5, теорема 2]. Следовательно, если  $\chi \in X_+ \setminus X^i$ , то  $\xi\chi > \xi\chi_1^n \geq \chi_1^n$  при всех  $n \in \mathbb{N}$  для любых  $\xi \in X_+$ , а потому  $\xi\chi \in X_+ \setminus X^i$ .

2) Достаточно рассмотреть случай  $k \in \mathbb{N}$ . В силу 1) тогда имеем  $\chi_1^k(X_+ \setminus X^i) \subseteq X_+ \setminus X^i$ . Далее, если  $\chi \in X_+ \setminus X^i$ , то для любого  $n \in \mathbb{N}$  справедливо неравенство  $\chi > \chi_1^{n+k}$ , а потому  $\chi_1^{-k}\chi > \chi_1^n$ , т. е.  $\chi_1^{-k}\chi \in X_+ \setminus X^i$ . Значит,

$$\chi_1^{-k}(X_+ \setminus X^i) \subseteq X_+ \setminus X^i,$$

что и завершает доказательство второго утверждения.

**Определение 1.1.** Пространство Харди

$$H^p(G) (1 \leq p \leq \infty)$$

над  $G$  определяется следующим образом (см., например, [11]):

$$H^p(G) = \{f \in L^p(G) : \hat{f}(\chi) = 0 \forall \chi \in X_-\},$$

где  $\hat{f}$  обозначает преобразование Фурье функции  $f \in L^1(G)$ .

Обозначим через  $H_-^2(G)$  ортогональное дополнение подпространства  $H^2(G)$  пространства  $L^2(G)$ . Тогда

$$H_-^2(G) = \{f \in L^2(G) : \hat{f}(\chi) = 0 \forall \chi \in X_+\}.$$

Ясно, что  $X_+$  является ортонормированным базисом пространства  $H^2(G)$ , а  $X_-$  – ортонормированным базисом пространства  $H_-^2(G)$ . Через  $P_+$  и  $P_-$  мы будем обозначать ортопроекторы из  $L^2(G)$  на  $H^2(G)$  и  $H_-^2(G)$  соответственно.

**Определение 1.2.** Пусть  $\varphi \in L^\infty(G)$ . Оператором Ганкеля (ганкелевым оператором) над  $G$  с символом  $\varphi$  назовем оператор

$$H_\varphi : H^2(G) \rightarrow H_-^2(G),$$

определяемый равенством

$$H_\varphi = P_- M_\varphi,$$

где  $M_\varphi : f \mapsto \varphi f$  – оператор умножения на  $\varphi$ .

Очевидно, что оператор  $H_\varphi$  ограничен, причем  $\|H_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$ . Кроме того,  $H_{\varphi+\psi} = H_\varphi$ , если и только если  $\psi \in H^\infty(G)$ .

Напомним, что функция  $\theta \in H^2(G)$  называется внутренней, если  $|\theta|=1$ .

**Определение 1.3.** Внутреннюю функцию  $\theta$  назовем конечным произведением Бляшке на группе  $G$ , если пространство

$$K_\theta := H^2(G) \ominus \theta H^2(G) = (\theta H^2(G))^\perp$$

конечномерно. При этом мы положим  $\deg \theta := \dim K_\theta$ .

Всюду ниже  $S_\chi : H^2(G) \rightarrow H^2(G), f \mapsto \chi f$  – оператор умножения на характер  $\chi \in X_+$ .

**Теорема 1.1.**

1. Нетривиальный ганкелев оператор конечного ранга над  $G$  существует тогда и только тогда, когда группа  $X$  содержит наименьший положительный элемент.

2. Пусть ядро оператора  $H_\varphi$  ( $\varphi \in L^\infty(G)$ ) содержит такую функцию  $g$ , для которой  $\hat{g}(1) \neq 0$ . Оператор  $H_\varphi$  будет иметь конечный ранг тогда и только тогда, когда  $\theta \varphi \in H^\infty(G)$  для некоторого конечного произведения Бляшке  $\theta$ , и при этом  $\deg \theta = \text{rank } H_\varphi$ .

*Доказательство.* 1. Пусть ненулевой оператор  $H_\varphi$  имеет конечный ранг. Обозначим через  $\tau(x)$  оператор сдвига на элемент  $x \in G$  в пространстве  $L^2(G)$  (и  $H^2(G)$ ), т. е.  $\tau(x)f(y) = f(xy)$ . Так как  $\tau(x)\chi = \chi(x)\chi$  ( $\chi \in X$ ), то  $\tau(x)$  коммутирует с  $P_\pm$ ; в частности,

$$\tau(x)H_\varphi\tau(x^{-1}) = H_{\tau(x^{-1})\varphi},$$

а потому последний оператор компактен вместе с  $H_\varphi$ . Далее, так как  $\varphi \notin H^\infty(G)$ , то  $\hat{\varphi}(\chi) \neq 0$  для некоторого характера  $\chi \in X_-$ . В силу непрерывной (и линейной) зависимости оператора  $H_\varphi$  от  $\varphi \in L^\infty(G)$ , для любого такого характера компактный оператор

$$\int_G \chi(x) H_{\tau(x^{-1})\varphi} dx$$

(интеграл Бохнера) равен  $H_{\chi^*\varphi} = \hat{\varphi}(\chi)H_\chi$ , откуда следует компактность оператора  $H_\chi$  (здесь мы воспользовались одной идеей из [13]). Далее, вычисляя  $S_\chi^- H_\chi \xi$  ( $\xi \in X_+$ ), получаем, что компактный оператор  $S_\chi^- H_\chi$  в  $H^2(G)$  является проектором на подпространство, порожденное множеством характеров  $[1, \bar{\chi}]$  (черта обозначает комплексное сопряжение). Значит, это множество

конечно, а потому содержит наименьший положительный элемент.

Обратно, если в группе  $X$  имеется наименьший положительный элемент  $\chi_1$ , то образом оператора  $H_{\chi_1}^-$  является пространство  $\text{span}\{\overline{\chi_1}^n, \dots, \overline{\chi_1}\}$  (линейная оболочка множества  $\{\overline{\chi_1}^n, \dots, \overline{\chi_1}\}$ ), имеющее размерность  $n$ . В самом деле, легко проверить, что  $H_{\chi_1}^- \xi = 0 (\xi \in X_+)$ , если и только если  $\xi \geq \chi_1^n$ . Поэтому

$$\begin{aligned} H_{\chi_1}^-(H^2(G)) &= H_{\chi_1}^-(\text{span}\{1, \overline{\chi_1}, \dots, \overline{\chi_1}^{n-1}\}) = \\ &= \text{span}\{\overline{\chi_1}^n, \dots, \overline{\chi_1}\}. \end{aligned}$$

2. Пусть  $\text{rank}H_\varphi < \infty$  и  $H_0 := \text{Ker}H_\varphi$  содержит такую функцию  $g$ , для которой  $\widehat{g}(1) \neq 0$ . Так как  $H_\varphi(H^2(G)) = H_\varphi(H_0^\perp)$ , причем оператор  $H_\varphi|_{H_0^\perp}$  инъективен, то  $\text{rank}H_\varphi = \dim H_0^\perp$ . Поскольку подпространство  $H_0$  пространства  $H^2(G)$  инвариантно относительно сдвигов  $S_\chi (\chi \in X_+)$ , по обобщенной теореме Берлинга (см., например, [11, глава 8]) найдется такая внутренняя функция  $\theta$  на  $G$ , что  $H_0 = \theta H^2(G)$ . Следовательно,  $K_0 = \dim H_0^\perp < \infty$ , т. е.  $\theta$  есть конечное произведение Бляшке, причем  $\deg \theta = \text{rank}H_\varphi$ . Наконец,  $\theta \in \Theta H^2(G)$ , а потому  $0 = H_\varphi \theta = P_-(\theta\varphi)$ . Значит,  $\theta\varphi \in H^\infty(G)$ .

Обратно, если  $\theta\varphi \in H^\infty(G)$  для некоторого конечного произведения Бляшке  $\theta$ , то  $H_{\theta\varphi} = 0$ , т. е.  $H_\varphi(\theta f) = 0$  при всех  $f \in H^2(G)$ . Значит,  $\theta H^2(G) \subseteq H_0$ , а стало быть,  $H_0^\perp \subseteq K_0$ . Таким образом,  $\dim H_0^\perp < \infty$ , а выше было показано, что  $\text{rank}H_\varphi = \dim H_0^\perp$ .

**Замечание 1.1.** Условие, что ядро оператора  $H_\varphi$  содержит такую функцию  $g$ , для которой  $\widehat{g}(1) \neq 0$ , в части 2 предыдущей теоремы использовалось лишь при доказательстве необходимости.

**Следствие 1.1.** Если  $\theta$  — конечное произведение Бляшке, и  $h \in H^\infty(G)$ , то  $\text{rank}H_{\theta h}^- < \infty$ .

Ввиду утверждения 1 теоремы 1.1 далее мы будем предполагать, что в группе  $X$  имеется наименьший положительный элемент  $\chi_1$ .

Для доказательства критерия конечномерности нам понадобится еще следующее обобщение классической леммы Бёрлинга, описывающей корневые подпространства сопряженного оператора  $S_{\chi_1}^*$  (ниже через  $\mathbb{D}$  обозначен открытый единичный круг комплексной плоскости;  $\text{span}M$  — линейная оболочка множества  $M$ ).

**Лемма 1.2** [2, с. 52]. 1. Любое число  $\lambda \in \mathbb{D}$  является собственным значением оператора  $S_\chi^* (\chi \in X_+, \chi \neq 1)$ , и отвечающие ему собственные функции имеют в точности вид  $g/(1-\lambda\chi)$ , где  $g \in H^2(G), g \neq 0$ , причем  $\widehat{g}$  сосредоточено на  $[1, \chi)$ .

2. Пусть в группе  $X$  имеется наименьший положительный элемент  $\chi_1$ . Тогда точечный спектр оператора  $S_{\chi_1}^*$  равен  $\mathbb{D}$ , и при всех  $\lambda \in \mathbb{D}$  и натуральных  $n$

$$\text{Ker}(S_{\chi_1}^* - \lambda I)^n = \text{span}\left\{\frac{\chi_1^{k-1}}{(1-\lambda\chi_1)^k} : 1 \leq k \leq n\right\}.$$

*Доказательство.* 1. Заметим, что  $\sigma(S_\chi^*) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$ , так как  $\|S_\chi^*\| = 1$ . Если число  $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$  есть собственное значение оператора  $S_\chi^* (\chi \in X_+, \chi \neq 1)$ , то, учитывая, что  $S_i^* = P_+ S_\chi^-$ , и приравнявая коэффициенты Фурье функций  $S_\chi^* f$  и

$$\lambda f (f \in H^2(G), f \neq 0),$$

получаем, что  $\widehat{f}(\eta\chi) = \lambda \widehat{f}(\eta) (\eta \in X_+)$ , что равносильно тому, что преобразование Фурье функции  $f(1-\lambda\chi)\chi^{-1}$  сосредоточено на  $X_-$ . Если мы положим  $g := f(1-\lambda\chi)$ , то это значит, что  $\widehat{g}$  сосредоточено на  $[1, \chi)$ . При  $\lambda \in \mathbb{D}$  получаем требуемый вид собственных функций, отвечающих  $\lambda$ .

2. При  $\chi = \chi_1$  из только что доказанного утверждения 1 леммы следует, что функция  $\widehat{g}$  сосредоточена на  $\{1\}$ , т. е.  $g$  есть константа, отличная от 0. Если мы предположим, что  $\lambda \in \mathbb{T}$  есть собственное значение оператора  $S_{\chi_1}^*$ , то по доказанному выше  $g = f(x)(1-\lambda\chi_1(x))$  при всех  $x \in G$ , что невозможно, так как  $\chi_1$  принимает значение  $1/\lambda$  ( $\chi_1(G)$  есть нетривиальная связная подгруппа группы  $\mathbb{T}$ ).

Докажем последнее утверждение леммы индукцией по  $n$ . При  $n=1$  оно уже доказано. Предположим, что оно верно при некотором  $n$ , и рассмотрим функцию  $f \in \text{Ker}(S_{\chi_1}^* - \lambda I)^{n+1}$ . Так как  $(S_{\chi_1}^* - \lambda I)f \in \text{Ker}(S_{\chi_1}^* - \lambda I)^n$ , то по предположению

$$(S_{\chi_1}^* - \lambda I)f = \sum_{k=1}^n c_k \frac{\chi_1^{k-1}}{(1-\lambda\chi_1)^k}.$$

Но легко проверить, что

$$\frac{\chi_1^{k-1}}{(1-\lambda\chi_1)^k} = (S_{\chi_1}^* - \lambda I) \frac{\chi_1^k}{(1-\lambda\chi_1)^{k+1}}.$$

Поэтому

$$(S_{\chi_1}^* - \lambda I) \left( f - \sum_{k=1}^n c_k \frac{\chi_1^k}{(1 - \lambda \chi_1)^{k+1}} \right) = 0,$$

откуда по доказанному выше найдется такая константа  $c_0$ , что

$$f - \sum_{k=1}^n c_k \frac{\chi_1^k}{(1 - \lambda \chi_1)^{k+1}} = \frac{c_0}{1 - \lambda \chi_1},$$

что и требовалось доказать.

**Следствие 1.2** (ср. [3, с. 216, лемма 2.4.4]). Пусть в группе  $X$  имеется наименьший положительный элемент  $\chi_1$ . Если  $\theta$  — конечное произведение Бляшке, то для некоторого конечного множества  $E \subset \mathbb{D}$  и подходящих натуральных  $k(\lambda), \lambda \in E$  имеем

$$K_\theta = \text{span} \left\{ \frac{\chi_1^k}{(1 - \lambda \chi_1)^{k+1}} : 1 \leq k \leq k(\lambda), \lambda \in E \right\}.$$

*Доказательство.* Это следует из найденного выше вида корневых подпространств оператора  $S_{\chi_1}^*$  и того факта, что конечномерное пространство есть прямая сумма корневых подпространств действующего в нем оператора (в данном случае речь идет о пространстве  $K_\theta$  и операторе  $S_{\chi_1}^* | K_\theta$ ).

Теперь мы можем перенести на наш случай теорему Кронекера. В связи с этим напомним, что если рациональная функция  $R$  представлена в виде несократимой дроби  $p/q$ , то степень функции  $R$  называется числом

$$\text{deg} R = \max \{ \text{deg} p, \text{deg} q \}.$$

Через  $H_{\chi_1}^2$  мы будем обозначать гильбертово подпространство пространства  $H^2(G)$  с (ортонормированным) базисом  $\{\chi_1^n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ . Ясно, что отображение  $i : f \mapsto f \circ \chi_1$  есть изоморфизм гильбертовых пространств  $H^2(\mathbb{T})$  и  $H_{\chi_1}^2$ . Обозначим также через  $P_1$  оператор ортогонального проектирования пространства  $H^2(G)$  на  $H_{\chi_1}^2$ .

**Теорема 1.2.** Пусть в группе  $X$  имеется наименьший положительный элемент  $\chi_1$ . Пусть ядро оператора  $H_\varphi (\varphi \in L^\infty(G))$  содержит такую функцию  $g$ , для которой  $\hat{g}(1) \neq 0$ . Оператор  $H_\varphi$  будет иметь конечный ранг тогда и только тогда, когда  $P_- \varphi = R \circ \chi_1$ , где  $R$  есть рациональная функция, все полюсы которой принадлежат  $\mathbb{D}$ . При этом  $\text{rank} H_\varphi = \text{deg} R$ .

*Доказательство.* Необходимость. Как и в доказательстве теоремы 1.1, найдется такая внутренняя функция  $\theta$ , что  $\text{Ker} H_\varphi = \theta H^2(G)$ . Если оператор  $H_\varphi$  имеет конечный ранг, то пространство  $K_\theta = (\text{Ker} H_\varphi)^\perp = H_\varphi^*(H_-^2(G))$  конечномерно,

т. е.  $\theta$  — конечное произведение Бляшке. В силу следствия 1.2  $K_\theta$  состоит из композиций рациональных функций с полюсами вне  $\mathbb{D}$  и характера  $\chi_1$ . Поэтому найдется такая рациональная функция  $r$ , все полюсы которой расположены вне  $\mathbb{D}$ , что  $r \circ \chi_1 = H_\varphi^* \overline{\chi_1} = P_+ (\overline{\varphi \chi_1})$ . Но для любой функции  $f \in L^2(G)$  справедливо равенство

$$P_+ \overline{f} = \overline{P_- f} + \hat{f}(1).$$

Следовательно, для некоторой константы  $c$  имеем  $r \circ \chi_1 = \overline{P_- (\varphi \chi_1)} + c$ , откуда

$$P_- (\varphi \chi_1) = \overline{r} \circ (1/\chi_1) - \overline{c} = r_1 \circ \chi_1,$$

где  $r_1$  есть рациональная функция, все полюсы которой лежат в  $\mathbb{D}$ . С другой стороны,  $P_- (\varphi \chi_1) = (P_- \varphi) \chi_1 - c_1$  ( $c_1 = \hat{\varphi}(\chi_1^{-1})$ ). Из двух последних равенств вытекает, что  $P_- \varphi = R \circ \chi_1$ , где  $R(z) = (r_1(z) + c_1)/z$ .

*Достаточность.* Пусть  $P_- \varphi = R \circ \chi_1$ , где  $R$  — рациональная функция, все полюсы которой принадлежат  $\mathbb{D}$ . Как известно, существует конечномерное произведение Бляшке  $B$  на группе  $\mathbb{T}$ , такое, что  $\text{deg} B = \text{deg} R$  и

$$F(z) := B(z)R(z) \in H^\infty(\mathbb{T})$$

(в качестве нулей произведения Бляшке нужно взять полюсы функции  $R$  с учетом их кратностей).

Покажем, что функция  $\theta := B \circ \chi_1$  есть конечномерное произведение Бляшке на группе  $G$ , причем  $\text{deg} \theta = \text{deg} B$ . В самом деле, поскольку функции из  $(H_{\chi_1}^2)^\perp$  — это в точности те функции из  $H^2(G)$ , которые разлагаются в ряд Фурье по характерам из  $X_+ \setminus X^i$ , из утверждения 2 леммы 1.1 следует, что  $(B \circ \chi_1)(H_{\chi_1}^2)^\perp = (H_{\chi_1}^2)^\perp$ . Поэтому

$$\theta H^2(G) = (B \circ \chi_1) H^2(G) = ((B \circ \chi_1) H_{\chi_1}^2) \oplus (H_{\chi_1}^2)^\perp.$$

Стало быть,

$$\begin{aligned} K_\theta &= H^2(G) \ominus \theta H^2(G) = \\ &= (H_{\chi_1}^2 \oplus (H_{\chi_1}^2)^\perp) \ominus ((B \circ \chi_1) H_{\chi_1}^2 \oplus (H_{\chi_1}^2)^\perp) = \\ &= H_{\chi_1}^2 \ominus (B \circ \chi_1) H_{\chi_1}^2 \cong H^2(T) \ominus B H^2(T), \end{aligned}$$

( $\cong$  обозначает изоморфизм гильбертовых пространств), а потому  $\theta$  — конечное произведение Бляшке и  $\text{deg} \theta = \text{deg} B$ .

В силу теоремы 1.1 и доказанного выше  $\text{rank} H_\varphi = \text{deg} \theta = \text{deg} B = \text{deg} R$ ,

что и требовалось доказать.

**Замечание 1.2.** Как и в теореме 1.1, условие, что ядро оператора  $H_\varphi$  содержит такую функцию  $g$ , для которой  $\hat{g}(1) \neq 0$ , в теореме 1.2 использовалось лишь при доказательстве необходимости.

**2 Компактность и ядерность операторов Ганкеля**

Равносильность условий 1 и 3 в следующем обобщении теоремы Хартмана может быть получена с помощью теоремы 1.2 работы [13]. Ниже предложено другое доказательство, основанное на редукции к классическому случаю.

**Теорема 2.1.** *Обозначим через  $K_1(G)$  замкнутую подалгебру алгебры  $L^\infty(G)$ , порожденную элементом  $\overline{\chi_1}$ . Пусть  $\varphi \in L^\infty(G)$ . Следующие утверждения равносильны:*

- 1) оператор  $H_\varphi$  компактен;
- 2)  $P_-\varphi \in K_1(G)$ ;
- 3)  $\varphi \in K_1(G) + H^\infty(G)$ .

*Доказательство.* Пусть оператор  $H_\varphi$  компактен и отличен от нуля. Как показано в начале доказательства теоремы 1.1, в этом случае из неравенства  $\widehat{\varphi}(\chi) \neq 0$  для характера  $\chi \in X_-$  следует, что множество  $[1, \chi^{-1})$  конечно, а потому  $X$  содержит наименьший положительный элемент  $\chi_1$ . Кроме того, из конечности этого промежутка вытекает, что  $\chi \in X^i$  и  $\chi = \overline{\chi_1}^n, n \in \mathbb{N}$  (см. [5]). Следовательно, имеет место разложение в ряд Фурье  $P_-\varphi = \sum_{n=1}^\infty c_n \overline{\chi_1}^n$ . Если мы положим

$$\varphi_1(z) := \sum_{n=1}^\infty c_n \overline{z}^n, z \in T,$$

то  $\varphi_1 \in H_-^2(\mathbb{T})$  и  $P_-\varphi = \varphi_1 \circ \chi_1$ . Легко проверить, что изоморфизм  $i$  гильбертовых пространств  $H^2(\mathbb{T})$  и  $H_{\chi_1}^2$  переводит оператор  $H_{\varphi_1}$  в компактный оператор  $H_{P_-\varphi} | H_{\chi_1}^2$ . Следовательно, по классической теореме Хартмана  $\varphi_1 = g + h$ , где функция  $g$  непрерывна на  $\mathbb{T}$ , а  $h \in H^\infty(\mathbb{T})$ . Выберем последовательность полиномов  $p_n(z)$ , равномерно на  $\mathbb{T}$  сходящуюся к функции  $g(\overline{z})$ . Тогда

$P_-\varphi \circ \chi_1 = \varphi_1 \circ \chi_1 = g \circ \chi_1 + h \circ \chi_1 \in K_1(G) + H^\infty(G)$ , поскольку последовательность  $p_n \circ \overline{\chi_1}$  равномерно на  $G$  сходится к  $g \circ \chi_1$ . Осталось заметить, что  $K_1(G) \subset H_-^2(G)$ , и потому  $P_-\varphi \in K_1(G)$ .

Предположим теперь, что  $P_-\varphi \in K_1(G)$ . Так как  $K_1(G) \subset C(G) \subset L^\infty(G)$ , то

$$P_+\varphi = \varphi - P_-\varphi \in L^\infty(G).$$

Таким образом,  $P_+\varphi \in H^\infty(G)$ , и, стало быть,  $\varphi \in K_1(G) + H^\infty(G)$ .

Наконец, пусть

$$\varphi = g + h, g \in K_1(G), h \in H^\infty(G),$$

и последовательность полиномов  $p_n$  такова, что последовательность  $p_n \circ \overline{\chi_1}$  равномерно сходится к  $g$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|H_\varphi - H_{p_n \circ \overline{\chi_1}}\| &= \|H_g - H_{p_n \circ \overline{\chi_1}}\| = \\ &= \|H_{g - p_n \circ \overline{\chi_1}}\| \leq \|g - p_n \circ \overline{\chi_1}\|_\infty \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

причем операторы  $H_{p_n \circ \overline{\chi_1}}$  имеют конечный ранг в силу теоремы 1.2. Следовательно, оператор  $H_\varphi$  компактен.

Идущее ниже следствие другим методом было установлено в [13].

**Следствие 2.1.** *Множество  $K_1(G) + H^\infty(G)$  есть замкнутая подалгебра алгебры  $L^\infty(G)$ .*

В самом деле, замкнутость этого пространства сразу следует из теоремы 2.1, а его устойчивость относительно умножения – из тождества, аналогичного тождеству (1.3) в [13].

Для формулировки еще одного следствия теоремы 2.1 дадим, имитируя [1],

**Определение 2.1.** Введем пространство функций Бесова аналитического типа на группе  $G$  следующим образом:

$$B_1(G) = \left\{ \sum_{n=1}^\infty \frac{c_n}{1 - \lambda_n \chi_1} : |\lambda_n| < 1, \sum_{n=1}^\infty \frac{|c_n|}{1 - |\lambda_n|} < \infty \right\}.$$

Напомним, что оператор в банаховом пространстве является ядерным, если он может быть разложен в сходящийся по норме ряд операторов ранга один.

Теперь, применяя, как и в доказательстве теоремы 2.1, редукцию к классическому случаю, мы можем перенести на  $G$  известный результат В.В. Пеллера (см. [1]) о ядерности ганкелевых операторов на группе  $\mathbb{T}$ .

**Теорема 2.2.** *Пусть  $\varphi \in L^\infty(G)$ . Оператор  $H_\varphi$  является ядерным, если и только если*

$$\overline{P_-\varphi} \in B_1(G).$$

*Доказательство.* Пусть

$$\overline{P_-\varphi} = \sum_{n=1}^\infty \frac{c_n}{1 - \lambda_n \chi_1},$$

и выполняются условия

$$|\lambda_n| < 1, \sum_{n=1}^\infty \frac{|c_n|}{1 - |\lambda_n|} < \infty.$$

В силу непрерывности отображения

$$L^\infty(G) \rightarrow LB(H^2(G), H^2(G)), \varphi \mapsto H_\varphi,$$

оператор  $H_\varphi (= H_{P_-\varphi})$  имеет представление

$$H_\varphi = \sum_{n=1}^\infty H_{\psi_n},$$

где

$$\psi_n = \frac{\overline{c_n}}{1 - \lambda_n \chi_1},$$

причем

$$\sum_{n=1}^\infty \|H_{\psi_n}\| \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{|c_n|}{1 - |\lambda_n|},$$

а в силу теоремы 2.1  $\text{rank} H_{\psi_n} = 1$ .

Обратно, если оператор  $H_\varphi = H_{P_\varphi}$  является ядерным, то, если мы положим, как в доказательстве теоремы 2.1,  $\varphi_1(z) := \sum_{n=1}^{\infty} c_n \bar{z}^n$  ( $z \in \mathbb{T}$ ), то  $\varphi_1 \in H^2(\mathbb{T})$  и  $P_\varphi = \varphi_1 \circ \chi_1$ . При этом, так как изоморфизм  $i^{-1}$  гильбертовых пространств  $H_{\chi_1}^2$  и  $H^2(\mathbb{T})$  (см. доказательство теоремы 2.1) переводит оператор  $H_{P_\varphi} | H_{\chi_1}^2$  в  $H_{\varphi_1}$ , оператор  $H_{\varphi_1}$  тоже ядерный, а потому [1]  $\overline{\varphi_1} \in B_1(\mathbb{T})$ . С учетом равенства  $P_\varphi = \varphi_1 \circ \chi_1$  отсюда сразу следует, что  $\overline{P_\varphi} \in B_1(G)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пеллер, В.В. Операторы Ганкеля и их приложения / В.В. Пеллер. – Москва-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2005. – 1028 с.
2. Никольский, Н.К. Лекции об операторе сдвига / Н.К. Никольский. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
3. Nikolski, N.K. Operators, Functions, and Systems: An Easy Reading: in 2 vol. / N.K. Nikolski // Amer. Math. Soc. – 2002. – Vol. I. – 461 p.
4. Nikolski, N.K. Operators, Functions, and Systems: An Easy Reading: in 2 vol. / N.K. Nikolski // Amer. Math. Soc. – 2002. – Vol. II. – 439 p.
5. Миротин, А.Р. Фредгольмовы и спектральные свойства тёплицевых операторов в пространствах  $H^p$  над упорядоченными группами / А.Р. Миротин // Матем. сборник. – 2011. – Т. 202, № 5. – С. 101–116.
6. Adukov, V. Wiener-Hopf operators on a sub-semigroup of a discrete torsion free abelian group /

V. Adukov // Int. Eq. Oper. Th. – 1993. – № 16. – P. 305 – 332.

7. Ehrhardt, T. Factorization in Weighted Wiener Matrix Algebras on Linearly Ordered Abelian Groups / T. Ehrhardt, C. van der Mee, L. Rodman, I. Spitkovski // Int. Eq. Oper. Th. – 2007. – Vol. 58, № 1. – P. 65–86.

8. Миротин, А.Р. Свойства операторов Ганкеля над положительным конусом линейно упорядоченных абелевых групп / А.Р. Миротин, Р.В. Дыба // XI Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Междунар. науч. конф. Минск, 5–9 ноября 2012 г. – Часть 1. – Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2012. – С. 37–38.

9. Миротин, А.Р. Функции ограниченной средней осцилляции и ганкелевы операторы на компактных абелевых группах / А.Р. Миротин, Р.В. Дыба // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2014. – Т. 20, № 2. – С. 135–144.

10. Дыба, Р.В. Теорема Нехари на компактных абелевых группах с линейно упорядоченной группой характеров / Р.В. Дыба // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 3 (8). – С. 57–60.

11. Rudin, W. Fourier analysis on groups / W. Rudin. – New York and London: Interscience Publishers, 1962. – 285 p.

12. Понтрягин, Л.С. Непрерывные группы, 2-е изд. / Л. С. Понтрягин – М.: ГИТТЛ, 1954. – 515 с.

13. Yan Chaozong. Hankel operators and Hankel algebras / Yan Chaozong, Chen Xiaoman, Guo Kunyu // Chin. Ann. of Math. – 1998. – 19 B, № 1. – P. 65–76.

Поступила в редакцию 28.10.15.

УДК 512.542

## О КОММУТАТИВНЫХ ПОЛУГРУППАХ РАЗРЕШИМЫХ ТОТАЛЬНО $\omega$ -НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ

**В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова**

*Белорусский государственный университет, Минск*

## ON COMMUTATIVE SEMIGROUPS OF SOLUBLE TOTALLY $\omega$ -SATURATED FORMATIONS

**V.G. Safonov, I.N. Safonova**

*Belarusian State University, Minsk*

Пусть  $\mathfrak{M}$  – некоторая totally ( $n$ -кратно)  $\omega$ -насыщенная формация конечных групп ( $n \geq 0$ ),  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  – totally ( $n$ -кратно)  $\omega$ -насыщенные подформации из  $\mathfrak{M}$ . Тогда через  $A_{\infty}^{\omega}(\mathfrak{M})$  ( $A_n^{\omega}(\mathfrak{M})$ ) обозначают полугруппу всех totally ( $n$ -кратно)  $\omega$ -насыщенных подформаций из  $\mathfrak{M}$  с умножением заданным формулой  $\mathfrak{F} \cdot_{\mathfrak{M}} \mathfrak{H} = \mathfrak{H}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}$ , где  $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G \mid G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F})$ . Доказано, что разрешимая totally ( $n$ -кратно)  $\omega$ -насыщенная формация порождает коммутативную полугруппу totally ( $n$ -кратно)  $\omega$ -насыщенных подформаций тогда и только тогда, когда она нильпотентна. В частности, в классе разрешимых групп получено решение проблемы 6.26 из [1].

**Ключевые слова:** формация конечных групп, totally  $\omega$ -насыщенная формация,  $n$ -кратно  $\omega$ -насыщенная формация, полугруппа формаций, коммутативная полугруппа формаций.

Let  $\mathfrak{M}$  be some totally ( $n$ -multiply)  $\omega$ -saturated formation of finite groups ( $n \geq 0$ ),  $\mathfrak{F}$  and  $\mathfrak{H}$  be totally ( $n$ -multiply)  $\omega$ -saturated subformations of  $\mathfrak{M}$ . Then  $A_{\infty}^{\omega}(\mathfrak{M})$  ( $A_n^{\omega}(\mathfrak{M})$ ) denotes the semigroup of all totally ( $n$ -multiply)  $\omega$ -saturated subformations of  $\mathfrak{M}$  with multiplication  $\mathfrak{F} \cdot_{\mathfrak{M}} \mathfrak{H} = \mathfrak{H}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}$ , where  $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G \mid G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F})$ . It is proved that a soluble totally ( $n$ -multiply)  $\omega$ -saturated formation generates a commutative semigroup of totally ( $n$ -multiply)  $\omega$ -saturated subformations if and only if, when it is nilpotent. In particular, the problem 6.26 from [1] is solved for the class of soluble groups.

**Keywords:** formation of finite groups, totally  $\omega$ -saturated formation,  $n$ -multiply  $\omega$ -saturated formation, semigroup of formations, commutative semigroup of formation.

### **Введение**

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используются определения и обозначения, принятые в [1]–[3].

А.И. Мальцевым в работе [4] было введено понятие произведения классов  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  алгебраических систем в некотором классе  $\mathfrak{M}$  (мальцевское произведение классов) и обсуждалась задача о нахождении таких классов алгебраических систем  $\mathfrak{M}$ , для которых соответствующий частичный группоид является ассоциативным и коммутативным.

Задачи нахождения формаций (totalno насыщенных формаций) с коммутативными полугруппами подформаций (totalno насыщенных подформаций) были включены Л.А. Шеметковым и А.Н. Скибой в монографию [1] (проблемы 6.26 и 10.7). В случае формаций конечных групп мальцевское произведение классов задается формулой  $\mathfrak{F} \cdot_{\mathfrak{M}} \mathfrak{H} = \mathfrak{H}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M}$ , где  $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G \mid G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F})$ .

Решение проблемы 10.7 было получено в работе [5], где, в частности, доказана следующая теорема

**Теорема.** Пусть  $\mathfrak{M}$  – totalno насыщенная формация. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) полугруппа  $A_{\infty}(\mathfrak{M})$  коммутативна;
- 2) всякий элемент полугруппы  $A_{\infty}(\mathfrak{M})$  является идемпотентом;
- 3) формация  $\mathfrak{M}$  нильпотентна.

В приведенной теореме  $A_{\infty}(\mathfrak{M})$  обозначает полугруппу всех totalno насыщенных подформаций из  $\mathfrak{M}$  с мальцевским умножением.

В данной статье, развивая результаты работы [5], получено описание разрешимых totalno  $\omega$ -насыщенных ( $\omega$ -композиционных) формаций с коммутативной полугруппой totalno  $\omega$ -насыщенных ( $\omega$ -композиционных) подформаций, а также разрешимых  $n$ -кратно  $\omega$ -насыщенных ( $\omega$ -композиционных) формаций с коммутативной полугруппой  $n$ -кратно  $\omega$ -насыщенных ( $\omega$ -композиционных) подформаций ( $n \geq 0$ ). В частности, в классе разрешимых групп получено решение проблемы 6.26 из [1].

### 1 Определения и обозначения

Пусть  $\omega$  – непустое подмножество множества всех простых чисел. Символом  $G_{\omega d}$  обозначается наибольшая нормальная в  $G$  подгруппа, у которой каждый композиционный фактор является  $\omega d$ -группой (если таких подгрупп в  $G$  нет, то полагают  $G_{\omega d} = 1$ ). Всякую функцию вида

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации}\}$$

называют  $\omega$ -локальным спутником. Через  $LF_{\omega}(f)$  обозначают класс всех таких групп  $G$ , что  $G/G_{\omega d} \in f(\omega')$  и  $G/F_p(G) \in f(p)$  для любого  $p \in \omega \cap \pi(G)$ . Если формация  $\mathfrak{F}$  такова, что  $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$ , то говорят, что  $\mathfrak{F}$  является  $\omega$ -локальной формацией, а  $f$  –  $\omega$ -локальным спутником формации  $\mathfrak{F}$ . Формация  $\mathfrak{F}$  называется  $\omega$ -насыщенной, если ей принадлежит всякая группа  $G$  с  $G/L \in \mathfrak{F}$ , где  $L \subseteq O_{\omega}(G) \cap \Phi(G)$ . Как известно [3], формация  $\mathfrak{F}$  является  $\omega$ -насыщенной тогда и только тогда, когда она  $\omega$ -локальна.

Всякую формацию считают  $0$ -кратно  $\omega$ -насыщенной. При  $n \geq 1$  формацию  $\mathfrak{F}$  называют  $n$ -кратно  $\omega$ -насыщенной, если  $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$ , где все значения  $\omega$ -локального спутника  $f$  являются  $(n-1)$ -кратно  $\omega$ -насыщенными формациями. Формацию  $n$ -кратно  $\omega$ -насыщенную для любого целого неотрицательного  $n$  называют тотально  $\omega$ -насыщенной.

Пусть  $\mathfrak{X}$  – некоторый класс групп. Тогда через  $l_{\infty}^{\omega} \text{form} \mathfrak{X}$  обозначают тотально  $\omega$ -насыщенную формацию, порожденную классом групп  $\mathfrak{X}$ , т. е. пересечение всех тотально  $\omega$ -насыщенных формаций, содержащих  $\mathfrak{X}$ . При этом, если  $\mathfrak{X} = \{G\}$ , то формацию  $l_{\infty}^{\omega} \text{form} G$  называют одно-порожденной тотально  $\omega$ -насыщенной формацией. Множество  $l_{\infty}^{\omega}$  всех тотально  $\omega$ -насыщенных формаций относительно включения  $\subseteq$  образует полную модулярную решетку [6]. Формации из  $l_{\infty}^{\omega}$  называют  $l_{\infty}^{\omega}$ -формациями.

Пусть  $\mathfrak{F}$  – некоторая  $l_{\infty}^{\omega}$ -формация,  $\mathfrak{H}$  – произвольный класс групп. Формацию  $\mathfrak{F}$  называют минимальной тотально  $\omega$ -насыщенной не  $\mathfrak{H}$ -формацией ( $\mathfrak{H}_{\infty}^{\omega}$ -критической формацией), если  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ , но все ее собственные  $l_{\infty}^{\omega}$ -подформации из  $\mathfrak{F}$  содержатся в классе групп  $\mathfrak{H}$ .

Если  $\mathfrak{F}$  – непустая формация, то символом  $G^{\mathfrak{F}}$  обозначается наименьшая нормальная подгруппа группы  $G$  с факторгруппой в  $\mathfrak{F}$ . Произведением двух непустых формаций  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  обозначают класс групп  $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = (G | G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F})$ .

Пусть  $\mathfrak{X}$  – произвольная совокупность групп,  $p$  – простое число. Тогда полагают  $\mathfrak{X}(F_p) = \text{form}(G/F_p(G) | G \in \mathfrak{X})$ , если  $p \in \pi(\mathfrak{X})$  и  $\mathfrak{X}(F_p) = \emptyset$ , если  $p \notin \pi(\mathfrak{X})$ .

Пусть  $\mathfrak{M}$  – тотально  $\omega$ -насыщенная формация. Тогда через  $A_{\infty}^{\omega}(\mathfrak{M})$  обозначают подгруппу тотально  $\omega$ -насыщенных подформаций из  $\mathfrak{M}$ . В частности, если  $\mathfrak{M} = l_{\infty}^{\omega} \text{form} G$ , то

$$A_{\infty}^{\omega}(l_{\infty}^{\omega} \text{form} G) = A_{\infty}^{\omega}(G).$$

### 2 Вспомогательные результаты

**Лемма 2.1** [7]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – ненильпотентная тотально  $\omega$ -насыщенная формация. Тогда и только тогда  $\mathfrak{F}$  является  $\mathfrak{N}_{\infty}^{\omega}$ -критической формацией, когда  $\mathfrak{F} = l_{\infty}^{\omega} \text{form} G$ , где  $G$  – такая монолитическая группа с монолитом  $P = G^{\pi}$ , что либо  $\pi = \pi(P) \cap \omega = \emptyset$ , либо  $\pi \neq \emptyset$  и выполняется одно из следующих условий:

- 1)  $G = [P]Q$  – группа Шмидта с  $\Phi(G) = 1$ , где  $P = C_G(P)$  – абелева  $p$ -группа,  $p \in \omega$  и  $|Q| = q$  – простое число;
- 2)  $P$  – неабелева  $pd$ -группа,  $G/P \in \mathfrak{N}_p$ , где  $p \in \omega$ , причем  $\pi(G) \cap \omega = \{p\}$ .

**Лемма 2.2** [3]. Если  $\mathfrak{F} = l_{\infty}^{\omega} \text{form} \mathfrak{X}$  и  $f$  – минимальный  $\omega$ -локальный  $l_{\infty}^{\omega}$ -значный спутник формации  $\mathfrak{F}$ , то справедливы следующие утверждения:

- 1)  $f(\omega') = l_{\infty}^{\omega} \text{form}(G/G_{\omega d} | G \in \mathfrak{X})$ ;
- 2)  $f(p) = l_{\infty}^{\omega} \text{form}(\mathfrak{X}(F_p))$  для всех  $p \in \omega$ ;
- 3) если  $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(h)$ , спутник  $h$   $l_{\infty}^{\omega}$ -значен и  $p$  – некоторое фиксированное число из  $\omega$ , то  $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f_1)$ , где  $f_1(a) = h(a)$  при любом  $a \in (\omega \setminus \{p\}) \cup \{\omega'\}$  и

$$f_1(p) = l_{\infty}^{\omega} \text{form}(G | G \in h(p) \cap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1),$$

кроме того,  $f_1(p) = f(p)$ ;

- 4)  $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(h)$ , где  $h(\omega') = \mathfrak{F}$  и  $h(p) = f(p)$  при всех  $p \in \omega$ .

**Лемма 2.3** [2, с. 171]. Если в группе  $G$  имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа и  $O_p(G) = \{1\}$  ( $p$  – некоторое простое число), то существует точный неприводимый  $F_p G$ -модуль, где  $F_p$  – поле из  $p$  элементов.

**Лемма 2.4** [1]. Если  $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$  и

$$G/O_p(G) \in \mathfrak{F} \cap f(p),$$

для некоторого  $p \in \omega$ , то  $G \in \mathfrak{F}$ .

**Лемма 2.5.** Пусть  $\mathfrak{M}$  – ненильпотентная тотально  $\omega$ -насыщенная формация. Тогда в  $\mathfrak{M}$  содержится по меньшей мере одна минимальная

тотально  $\omega$ -насыщенная ненильпотентная формация.

*Доказательство.* Пусть  $\mathfrak{M}$  – ненильпотентная тотально  $\omega$ -насыщенная формация. Выберем в  $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{N}$  группу  $G$  минимального порядка. Тогда  $G$  – монолитическая группа с цокелем  $P = G^{\omega_1}$ . Пусть  $\mathfrak{F} = l_{\infty}^{\omega} \text{form} G$ . Если

$$\pi = \pi(P) \cap \omega = \emptyset,$$

то в силу леммы 2.1  $\mathfrak{F}$  – искомая минимальная тотально  $\omega$ -насыщенная ненильпотентная формация.

Пусть  $\pi \neq \emptyset$  и  $p \in \pi$ . Допустим, что  $P$  – абелева  $p$ -группа. Поскольку  $\mathfrak{N}$  – насыщенная формация, то  $P \not\subseteq \Phi(G)$  и  $P = C_G(P) = F_p(G)$ . Ввиду леммы 2.2 формация  $\mathfrak{F}$  имеет такой минимальный  $\omega$ -локальный  $l_{\infty}^{\omega}$ -значный спутник  $f$ , что  $f(p) = l_{\infty}^{\omega} \text{form}(G/F_p(G)) = l_{\infty}^{\omega} \text{form}(G/P)$ . Заметим, что  $G/P \neq 1$ , поскольку в противном случае  $G$  является  $p$ -группой и принадлежит  $\mathfrak{N}$ , что невозможно. Поэтому найдется по меньшей мере одно  $q \in \pi(G/P) \setminus \{p\}$ . Пусть  $Q$  – группа порядка  $q$ . Так как  $l_{\infty}^{\omega} \text{form}(G/P) \subseteq \mathfrak{N}$  и  $\mathfrak{N}$  – наследственная формация, то силовская  $q$ -подгруппа группы  $G/P$  принадлежит  $l_{\infty}^{\omega} \text{form}(G/P)$ . Значит, формация  $l_{\infty}^{\omega} \text{form}(G/P) = f(p)$  принадлежит и группа  $Q$ . Поскольку  $Q$  монолитическая группа и  $O_p(Q) = 1$ , то по лемме 2.3 существует точный неприводимый  $F_p Q$ -модуль  $V$ , где  $F_p$  – поле из  $p$  элементов. Положим  $A = [V]Q$ . Тогда группа  $A$  является группой Шмидта с  $\Phi(A) = 1$ . Понятно, что  $F_p(A) = O_p(A) = V$ . Поскольку  $A/F_p(A) \cong V \in f(p)$ , то применяя лемму 2.4 получим  $A \in \mathfrak{F}$ . Тогда, ввиду леммы 2.1,  $\mathfrak{L} = l_{\infty}^{\omega} \text{form} A$  – искомая минимальная тотально  $\omega$ -насыщенная ненильпотентная формация.

Пусть теперь  $P$  – неабелева  $pd$ -группа, где  $p \in \omega$ . Допустим, что  $|\pi| > 1$ . Тогда в  $\pi$  существуют по крайней мере еще одно отличное от  $p$  простое число  $q$ . Понятно, что

$$F_p(G) = F_q(G) = 1.$$

В силу леммы 2.2 для минимального  $\omega$ -локального  $l_{\infty}^{\omega}$ -значного спутника  $f$  формации  $\mathfrak{F}$  имеем:

$$f(p) = l_{\infty}^{\omega} \text{form}(G/F_p(G)) = l_{\infty}^{\omega} \text{form} G,$$

$$f(q) = l_{\infty}^{\omega} \text{form}(G/F_q(G)) = l_{\infty}^{\omega} \text{form} G.$$

Пусть  $Z_p$  – группа простого порядка  $p$ . Поскольку  $O_q(Z_p) = 1$ , то ввиду леммы 2.3 существует точный неприводимый  $F_q Z_p$ -модуль  $W$ , где  $F_q$  – поле из  $q$  элементов. Пусть  $B = [W]Z_p$ .

Ясно, что  $F_q(B) = O_q(B) = W$ . Тогда, так как  $B/F_q(B) \cong W \in f(q)$ , то по лемме 2.4 группа  $B \in \mathfrak{F}$ . Но тогда в силу леммы 2.1  $l_{\infty}^{\omega} \text{form} B$  – искомая минимальная тотально  $\omega$ -насыщенная ненильпотентная формация.

Пусть теперь  $|\pi| = 1$ . Если теперь  $G/P \in \mathfrak{N}_p$ , то ввиду леммы 2.1  $\mathfrak{F}$  – искомая минимальная тотально  $\omega$ -насыщенная ненильпотентная формация. Пусть  $\pi(G/P) \not\subseteq \{p\}$  и  $q \in \pi(G/P) \setminus \{p\}$ . Обозначим через  $Q$  группу простого порядка  $q$ . Поскольку формация  $l_{\infty}^{\omega} \text{form}(G/P)$  нильпотентна, то она наследственна. Поэтому силовская  $q$ -подгруппа группы  $G/P$ , а следовательно и группа  $Q$ , принадлежат формации

$$l_{\infty}^{\omega} \text{form}(G/P) = f(p).$$

По лемме 2.3 существует точный неприводимый  $F_p Q$ -модуль  $K$ , где  $F_p$  – поле из  $p$  элементов. Положим  $M = [K]Q$ . Тогда  $F_p(M) = O_p(M) = K$ . Поскольку  $M/F_p(M) \cong K \in f(p)$ , то по лемме 2.4 группа  $M$  принадлежит  $\mathfrak{F}$ . Но тогда по лемме 2.1  $\mathfrak{L} = l_{\infty}^{\omega} \text{form} M$  – минимальная тотально  $\omega$ -насыщенная ненильпотентная формация. Лемма доказана.

**Лемма 2.6** [2, с. 94]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – разрешимая формация. Тогда в том и только в том случае  $\mathfrak{F}$  – минимальная тотально локальная ненильпотентная формация, когда  $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q$  для некоторых различных простых чисел  $p, q$ .

**Лемма 2.7** [3]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – формация. Тогда следующие условия равносильны:

- 1) формация  $\mathfrak{F}$   $\omega$ -насыщена;
- 2)  $\mathfrak{N}_p \mathfrak{F}(F_p) \subseteq \mathfrak{F}$  для всех  $p \in \omega$ ;
- 3)  $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$ , где  $f(\omega') = \mathfrak{F}$  и

$$f(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}(F_p)$$

для всех  $p \in \omega$ ;

- 4) формация  $\mathfrak{F}$   $\omega$ -локальна.

**Лемма 2.8.** Пусть формация  $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$ , где  $\mathfrak{H} = LF_{\omega}(h)$ ,  $\mathfrak{M} = LF_{\omega}(m)$  и спутники  $h$  и  $m$  являются внутренними. Тогда формация  $\mathfrak{F}$   $\omega$ -локальна и  $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$ , где  $f(\omega') = \mathfrak{F}$ ,

$$f(p) = m(p)\mathfrak{H} \text{ при } p \in \pi(\mathfrak{M}) \cap \omega$$

и  $f(p) = h(p)$  при  $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{M})$ .

**Лемма 2.9.** Пусть  $G = [P]Q$  – группа Шмидта с  $\Phi(G) = 1$ , где  $P = C_G(P)$  – абелева  $p$ -группа,  $p \in \omega$  и  $|Q| = q$  – простое число,  $q \notin \omega$ . Тогда имеет место равенство

$$l_{\infty}^{\omega} \text{form} G = \mathfrak{N}_p \text{form} Q.$$

*Доказательство.* Пусть  $\mathfrak{F} = I_\infty^\omega \text{form} G$ , где  $G$  группа из условия леммы. Обозначим через  $f$  – минимальный  $\omega$ -локальный  $I_\infty^\omega$ -значный спутник формации  $\mathfrak{F}$ . В силу леммы 2.2 имеет место  $f(p) = I_\infty^\omega \text{form}(G/F_p(G))$ . Поскольку по условию леммы  $P = C_G(P)$  – абелева  $p$ -группа, то  $F_p(G) = P$ . Значит,  $f(p) = I_\infty^\omega \text{form}(G/P) = I_\infty^\omega \text{form} Q$ . Так как при этом  $|Q| = q$  – простое число,  $q \notin \omega$ , то  $I_\infty^\omega \text{form} Q = \text{form} Q$ . Тогда по лемме 2.7 имеем

$$\mathfrak{N}_p f(p) = \mathfrak{N}_p \text{form} Q \subseteq \mathfrak{F}.$$

Заметим также, что в силу леммы 2.8 формация  $\mathfrak{N}_p \text{form} Q$  является тотально насыщенной формацией как произведения двух  $I_\infty^\omega$ -формаций  $\mathfrak{N}_p$  и  $\text{form} Q$ . Так как при этом, очевидно,  $G \in \mathfrak{N}_p \text{form} Q$ , то  $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p \text{form} Q$ . Лемма доказана.

**Лемма 2.10** [8]. Если  $H/K$  – главный фактор группы  $G$  и  $p \in \pi(H/K)$ , то  $G/C_G(H/K)$  не содержит неединичных нормальных  $p$ -подгрупп, причем  $F_p(G) \subseteq C_G(H/K)$ .

**Лемма 2.11** [7]. Пусть  $G$  – такая монолитическая группа с цоколем  $P = G^{\mathfrak{N}}$ , что  $\pi = \pi(P) \cap \omega = \emptyset$ . Тогда формация  $\mathfrak{L} = I_\infty^\omega \text{form} G$  имеет единственную максимальную  $I_\infty^\omega$ -подформуацию  $I_\infty^\omega \text{form}(G/P) = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ .

**Лемма 2.12.** Пусть  $\mathfrak{L} = I_\infty^\omega \text{form} G$ ,

$$\mathfrak{H} = I_\infty^\omega \text{form}(G/P),$$

где  $G$  – такая монолитическая группа с цоколем  $P = G^{\mathfrak{N}}$ , что  $\pi(P) \cap \omega = \emptyset$  и  $G/P \neq 1$ . Тогда  $\mathfrak{L} \not\subseteq \mathfrak{H}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathfrak{L}$  и  $\mathfrak{H}$  формации из условия леммы. В силу леммы 2.11 формация  $\mathfrak{H} = I_\infty^\omega \text{form}(G/P)$  является единственной максимальной  $I_\infty^\omega$ -подформуацией формации  $\mathfrak{L} = I_\infty^\omega \text{form} G$ .

Предположим, что  $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{H}$ . Тогда  $G \in \mathfrak{L}\mathfrak{H}$  и  $G^5 \in \mathfrak{L}$ . Так как при этом  $G/P \in \mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{L} \not\subseteq \mathfrak{H}$ , то  $P = G^5$ . Значит,  $P \in \mathfrak{L}$ .

Допустим, что  $I_\infty^\omega \text{form} P = \mathfrak{L}$ . Тогда поскольку  $P$  –  $\omega'$ -группа, то группа  $G$  также является  $\omega'$ -группой. Поэтому

$$I_\infty^\omega \text{form} P = \text{form} P,$$

$$I_\infty^\omega \text{form} G = \text{form} G$$

и  $\text{form} G = \text{form} P$ . Так как  $P$  – элементарная группа, а по условию леммы  $G/P \neq 1$ , то  $G \notin \text{form} P$ . Противоречие. Следовательно,  $I_\infty^\omega \text{form} P \subseteq I_\infty^\omega \text{form} G$ . Поэтому  $I_\infty^\omega \text{form} P \subseteq \mathfrak{H}$ . Так как при этом  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$ , то  $P$  – абелева  $p$ -группа

для некоторого простого числа  $p$ . Ввиду леммы 2.10 имеем  $O_p(G/P) = 1$ . Значит,  $P \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_p$ . Снова получили противоречие. Следовательно, наше предположение неверно и  $\mathfrak{L} \not\subseteq \mathfrak{H}$ . Лемма доказана.

**Лемма 2.13** [8, с. 18]. Любая подформуация формации  $\mathfrak{N}$  замкнута относительно подгрупп.

**Лемма 2.14** [1, с. 175]. Тогда и только тогда  $\mathfrak{F}$  – минимальная неабелева формация, когда  $\mathfrak{F} = \text{form} G$ , где  $G$  – одна из следующих групп:

- 1) ненильпотентная монолитическая группа с таким монолитом  $G$ , что  $P \not\subseteq \Phi(G)$  и факторгруппа  $G/P$  абелева;
- 2) группа кватернионов порядка 8;
- 3) неабелева группа порядка  $p^3$  простой нечетной экспоненты  $p$ .

**Лемма 2.15** [1, с. 167]. Пусть  $A$  монолитическая группа с монолитом  $P$ . Тогда если  $P \not\subseteq \Phi(G)$ , то  $\text{form}(A/P)$  единственная максимальная подформуация формации  $\text{form} A$ .

### 3 Основной результат

**Теорема 3.1.** Пусть  $\mathfrak{M}$  – разрешимая тотально  $\omega$ -насыщенная формация. Тогда и только тогда полугруппа  $A_\infty^\omega(\mathfrak{M})$  коммутативна, когда  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ .

*Доказательство.* Необходимость. Пусть полугруппа  $A_\infty^\omega(\mathfrak{M})$  коммутативна. Покажем, что  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ .

Допустим, что  $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}$ , тогда по лемме 2.5 в формацию  $\mathfrak{M}$  входит по меньшей мере одна минимальная тотально  $\omega$ -насыщенная ненильпотентная подформуация  $\mathfrak{L}$ . В силу леммы 2.1 имеем  $\mathfrak{L} = I_\infty^\omega \text{form} G$ , где  $G$  – такая монолитическая группа с монолитом  $P = G^{\mathfrak{N}}$ , что либо  $\pi = \pi(P) \cap \omega = \emptyset$ , либо  $\pi \neq \emptyset$  и выполняется одно из следующих условий:

- 1)  $G = [P]Q$  – группа Шмидта с  $\Phi(G) = 1$ , где  $P = C_G(P)$  – абелева  $p$ -группа,  $p \in \omega$  и  $|Q| = q$  – простое число;
- 2)  $P$  – неабелева  $pd$ -группа,  $G/P \in \mathfrak{N}_p$ , где  $p \in \omega$ , причем  $\pi(G) \cap \omega = \{p\}$ .

Пусть  $\pi(P) \cap \omega \neq \emptyset$ . Поскольку по условию теоремы формация  $\mathfrak{M}$  разрешима, то  $G = [P]Q$  – группа Шмидта с  $\Phi(G) = 1$ , где  $P = C_G(P)$  – абелева  $p$ -группа,  $p \in \omega$  и  $|Q| = q$  – простое число.

Пусть  $q \in \omega$ . Тогда поскольку  $\pi(G) \subseteq \omega$ , то  $I_\infty^\omega \text{form} G = I_\infty^\omega \text{form} G$ , т. е.  $\mathfrak{L}$  – тотально насыщенная формация. Ввиду леммы 2.6 имеем  $\mathfrak{L} = I_\infty^\omega \text{form} G = \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q$ . Поскольку  $\mathfrak{N}_p$  и  $\mathfrak{N}_q$  –

тотально  $\omega$ -насыщенные формации из  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{M}$ , то  $\mathfrak{N}_p$  и  $\mathfrak{N}_q$  элементы полугруппы  $A_\infty^\omega(\mathcal{M})$ . Следовательно, по условию теоремы имеет место равенство  $\mathfrak{N}_p \cdot \mathfrak{N}_q = \mathfrak{N}_q \cdot \mathfrak{N}_p$ . Так как

$$\mathfrak{N}_p \cdot \mathfrak{N}_q = \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q \cap \mathcal{M} \text{ и } \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q \subseteq \mathcal{M},$$

то  $\mathfrak{N}_p \cdot \mathfrak{N}_q = \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q$ .

Если теперь  $\mathfrak{N}_q \mathfrak{N}_p \not\subseteq \mathcal{M}$ , то  $\mathfrak{N}_q \mathfrak{N}_p \cap \mathcal{M} \subseteq \mathfrak{N}$ , так как  $\mathfrak{N}_q \mathfrak{N}_p \not\subseteq \mathfrak{N}$ . Следовательно,

$$\mathfrak{N}_p \cdot \mathfrak{N}_q = \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q \neq \mathfrak{N}_q \cdot \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}.$$

Противоречие. Поэтому  $\mathfrak{N}_q \mathfrak{N}_p \subseteq \mathcal{M}$ . Но тогда  $\mathfrak{N}_q \cdot \mathfrak{N}_p = \mathfrak{N}_q \mathfrak{N}_p$  и  $\mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q = \mathfrak{N}_q \mathfrak{N}_p$ . Снова получаем противоречие.

Следовательно,  $q \notin \omega$ . Тогда

$$l_\infty^\omega \text{form} Q = \text{form} Q$$

и в силу леммы 2.4 имеет место равенство

$$\mathcal{L} = l_\infty^\omega \text{form} G = \mathfrak{N}_p \text{form} Q.$$

Поскольку  $\text{form} Q$  и  $\mathfrak{N}_p$  – тотально  $\omega$ -насыщенные подформации из  $\mathcal{M}$ , то по условию теоремы  $\mathfrak{N}_p \cdot \text{form} Q = \text{form} Q \cdot \mathfrak{N}_p$ . Так как

$$G \in \mathfrak{N}_p \text{form} Q \cap \mathcal{M} = \mathfrak{N}_p \cdot \text{form} Q,$$

то  $G \in \text{form} Q \cdot \mathfrak{N}_p = \text{form} Q \mathfrak{N}_p \cap \mathcal{M}$ . Поэтому  $G^{\mathfrak{N}_p} \in \text{form} Q$ . Поскольку при этом  $G \notin \mathfrak{N}_p$ , то  $G^{\mathfrak{N}_p} \neq 1$ . Значит,  $P \subseteq G^{\mathfrak{N}_p} \in \text{form} Q$ . Противоречие. Следовательно,

$$\mathfrak{N}_p \cdot \text{form} Q \neq \text{form} Q \cdot \mathfrak{N}_p.$$

Полученное противоречие показывает, что данный случай невозможен.

Пусть теперь  $\pi(P) \cap \omega = \emptyset$ . Тогда  $G$  – монолитическая группа с монолитом  $P = G^\mathfrak{N}$ . Поскольку формация  $\mathcal{M}$  разрешима и  $\Phi(G) = 1$ , то  $P = C_G(P)$  – абелева  $p$ -группа,  $p \notin \omega$  и  $G = [P]H$ , где  $H$  – некоторая максимальная подгруппа группы  $G$ . Ввиду леммы 2.10 имеем  $O_p(H) = 1$ .

По лемме 2.11 формация  $\mathcal{L} = l_\infty^\omega \text{form} G$  имеет единственную максимальную тотально  $\omega$ -насыщенную подформацию  $\mathfrak{H} = l_\infty^\omega \text{form} H$ . Тогда  $\mathcal{L}$  и  $\mathfrak{H}$  элементы полугруппы  $A_\infty^\omega(\mathcal{M})$ . Значит,  $\mathcal{L} \cdot \mathfrak{H} = \mathfrak{H} \cdot \mathcal{L}$ .

Поскольку  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{M}$ , то  $\mathcal{L} \subseteq \mathfrak{H} \mathcal{L} \cap \mathcal{M} = \mathfrak{H} \cdot \mathcal{L}$ . С другой стороны, по лемме 2.12 имеем  $\mathcal{L} \not\subseteq \mathcal{L} \mathfrak{H}$ . Поэтому  $\mathcal{L} \not\subseteq \mathcal{L} \mathfrak{H} \cap \mathcal{M} = \mathcal{L} \cdot \mathfrak{H}$ . Таким образом,  $\mathcal{L} \cdot \mathfrak{H} \neq \mathfrak{H} \cdot \mathcal{L}$ . Противоречие. Следовательно,  $\mathcal{M} \subseteq \mathfrak{N}$ .

*Достаточность.* Пусть теперь  $\mathcal{M} \subseteq \mathfrak{N}$ .

Покажем, что тогда полугруппа  $A_\infty^\omega(\mathcal{M})$  коммутативна.

Допустим противное. Тогда найдутся такие тотально  $\omega$ -насыщенные подформации  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  из  $\mathcal{M}$ , что  $\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{H} \neq \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{F}$ . Пусть для определенности  $\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{F}$ . Выберем в  $\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{H} \setminus \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{F}$  группу  $G$  наименьшего порядка. Тогда  $G$  монолитическая группа с минимальной нормальной подгруппой  $P = \text{Soc}(G)$ . Так как в силу леммы 2.13 всякая подформация нильпотентных групп наследственна, то формации  $\mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{F}$  содержатся в произведении  $\mathfrak{H} \mathfrak{F}$  и в произведении  $\mathfrak{F} \mathfrak{H}$ . Поэтому  $P \subseteq G^\mathfrak{F} \neq 1$  и  $P \subseteq G^\mathfrak{H} \neq 1$ . Кроме того, так как  $G \in \mathfrak{F} \mathfrak{H}$ , то  $G^\mathfrak{H} \in \mathfrak{F}$  и имеет место  $G^\mathfrak{H} \neq G$ .

Применяя лемму 2.8 нетрудно убедиться, что имеет место равенство

$$\pi(\mathfrak{H} \mathfrak{F} \cap \mathcal{M}) \cap \omega = \pi(\mathfrak{F} \mathfrak{H} \cap \mathcal{M}) \cap \omega.$$

Поскольку группа  $G \in \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \mathfrak{H} \cap \mathcal{M}$ , то  $G$  является  $p$ -группой для некоторого простого числа  $p \notin \omega$ .

Допустим, что группа  $G$  абелева. Тогда  $G$  – циклическая группа. Пусть  $|G| = p^n$  для некоторого натурального  $n$ . Поскольку  $G \in \mathfrak{F} \mathfrak{H}$ , то  $G^\mathfrak{H} \in \mathfrak{F}$ . Пусть  $|G^\mathfrak{H}| = p^k$ . Тогда поскольку  $G^\mathfrak{H} \neq 1$ , то  $0 < k < n$ ,

$$|G/G^\mathfrak{H}| = p^{n-k}, \quad 0 < n-k < n.$$

Так как группа  $G/G^\mathfrak{H} \in \mathfrak{H}$ , то формация  $\mathfrak{H}$  содержит циклическую группу порядка  $p^{n-k}$ . Пусть  $H$  подгруппа группы  $G$  порядка  $p^{n-k}$ . Тогда  $H$  – нормальная циклическая подгруппа,  $H \in \mathfrak{H}$  и  $|G/H| = p^k$ . Поскольку  $G/H$  – циклическая группа, то  $G/H \cong G^\mathfrak{H}$ . Так как при этом  $G^\mathfrak{H} \in \mathfrak{F}$ , то  $G/H \in \mathfrak{F}$ . Значит,  $G^\mathfrak{F} \subseteq H$ . Но  $H \in \mathfrak{H}$  и формация  $\mathfrak{H}$  наследственна. Поэтому  $G^\mathfrak{F} \in \mathfrak{H}$ . Но тогда  $G \in \mathfrak{H} \mathfrak{F}$ . Следовательно,  $G \in \mathfrak{H} \mathfrak{F} \cap \mathcal{M} = \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{F}$ . Получили противоречие.

Поэтому  $G$  – неабелева группа. Так как при этом формация  $\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \mathfrak{H} \cap \mathcal{M}$  наследственна, то  $G$  – минимальная неабелева группа и

$$\mathcal{L} = l_\infty^\omega \text{form} G = \text{form} G$$

– минимальная неабелева формация. В силу леммы 2.14 группа  $G$  является либо группой кватернионов порядка 8, либо неабелевой группой порядка  $p^3$  простой нечетной экспоненты  $p$ .

Пусть  $2 \notin \omega$  и  $G$  – группа кватернионов порядка 8. Тогда  $G = AB$ , где  $A$  и  $B$  – нормальные циклические подгруппы порядка 4,  $A \cap B = Z(G)$  – группа порядка 2.

Поскольку  $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$ , то  $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ . Покажем, что  $|G^{\mathfrak{F}}| = 2$  и  $G^{\mathfrak{F}} = Z(G)$ . Допустим, что  $|G^{\mathfrak{F}}| = 4$ . Тогда  $|G/G^{\mathfrak{F}}| = 2$ . Поскольку  $|G/A| = 2$  и  $|G/B| = 2$ , то  $G/A \in \mathfrak{H}$  и  $G/B \in \mathfrak{H}$ . Значит,  $G/A \cap B = G/Z(G) \in \mathfrak{H}$ . Поэтому  $G^{\mathfrak{F}} \subseteq Z(G)$ . Так как при этом группа  $G \notin \mathfrak{H}$ , то  $G^{\mathfrak{F}} = Z(G)$  и  $|G^{\mathfrak{F}}| = 2$ . Противоречие. Поэтому  $G^{\mathfrak{F}} = Z(G)$  и  $|G^{\mathfrak{F}}| = 2$ .

Допустим теперь, что  $|G^{\mathfrak{F}}| = 4$ . Рассуждая аналогично, получим, что  $|G^{\mathfrak{F}}| = 2$  и  $G^{\mathfrak{F}} = Z(G)$ . Но тогда поскольку  $G/G^{\mathfrak{F}} = G/Z(G)$  – элементарная 2-группа, то  $G^{\mathfrak{F}} = Z(G) \in \mathfrak{H}$ . Последнее означает, что  $G \in \mathfrak{H}\mathfrak{F}$ . Следовательно,

$$G \in \mathfrak{H}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{F}.$$

Получили противоречие.

Пусть теперь  $G$  – неабелева группа порядка  $p^3$  простой нечетной экспоненты  $p \notin \omega$ . Тогда группа  $G$  представима в виде полупрямого произведения  $[Z_p \times Z_p]Z_p$  элементарной абелевой группы  $[Z_p \times Z_p]$  порядка  $p^2$  и циклической группы  $Z_p$  порядка  $p$ . Понятно, что

$$G \in \text{form}Z_p \text{form}Z_p.$$

Поскольку  $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$ , то  $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ . Так как при этом  $P \subseteq G^{\mathfrak{F}} \neq G$  и  $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}$ , то  $\text{form}Z_p \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ . Поэтому  $\text{form}Z_p \text{form}Z_p \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{H}$ . Но тогда

$$G \in \text{form}Z_p \text{form}Z_p \subseteq \mathfrak{H}\mathfrak{F}.$$

Следовательно,  $G \in \mathfrak{H}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{F}$ . Получили противоречие. Таким образом,  $\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{H} = \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{F}$ . Теорема доказана.

Приведем некоторые следствия доказанной теоремы. В случае, когда  $\omega = \{p\}$  из теоремы 3.1 получаем.

**Следствие 3.1.** Пусть  $\mathfrak{M}$  – разрешимая тотально  $p$ -насыщенная формация. Тогда и только тогда полугруппа  $A_p^p(\mathfrak{M})$  коммутативна, когда  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ .

Если  $\omega$  – множество всех простых чисел из теоремы 3.1 вытекает

**Следствие 3.2.** Пусть  $\mathfrak{M}$  – разрешимая тотально насыщенная формация. Тогда и только тогда полугруппа  $A_\infty(\mathfrak{M})$  коммутативна, когда  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ .

**Следствие 3.3.** Тогда и только тогда разрешимая группа  $G$  нильпотентна, когда полугруппа  $A_\infty(G)$  коммутативна.

Пусть  $\mathfrak{M}$  –  $n$ -кратно  $\omega$ -насыщенная формация,  $n \geq 0$ . Тогда через  $A_n^{\omega}(\mathfrak{M})$  обозначают полугруппу  $n$ -кратно  $\omega$ -насыщенных подформаций

из  $\mathfrak{M}$ . В частности, если  $\mathfrak{M} = I_n^{\omega} \text{form}G$ , то  $A_n^{\omega}(I_n^{\omega} \text{form}G) = A_n^{\omega}(G)$ .

Аналогично теореме 3.1 доказывается

**Теорема 3.2.** Пусть  $\mathfrak{M}$  – разрешимая  $n$ -кратно  $\omega$ -насыщенная формация,  $n \geq 0$ . Тогда и только тогда полугруппа  $A_n^{\omega}(\mathfrak{M})$   $n$ -кратно  $\omega$ -насыщенных подформаций из  $\mathfrak{M}$  коммутативна, когда  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ .

**Следствие 3.4.** Тогда и только тогда разрешимая группа  $G$  нильпотентна, когда полугруппа  $A_n^{\omega}(G)$  коммутативна,  $n \geq 0$ .

Частным случаем теоремы 3.2 является следующая теорема, дающая ответ на вопрос 6.26 [1, с. 67] в классе разрешимых групп.

**Теорема 3.3.** Пусть  $\mathfrak{M}$  – разрешимая формация. Тогда и только тогда полугруппа  $A_0(\mathfrak{M})$  подформаций из  $\mathfrak{M}$  коммутативна, когда  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ .

*Доказательство. Необходимость.* Пусть  $\mathfrak{M}$  – разрешимая формация и полугруппа  $A_0(\mathfrak{M})$  коммутативна. Покажем, что  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ .

Допустим, что  $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{N}$  и выберем в  $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{N}$  группу  $G$  минимального порядка. Тогда  $G$  – монолитическая группа с монолитом  $P = G^{\mathfrak{M}}$ . Поскольку формация  $\mathfrak{M}$  разрешима, то  $P = G^{\mathfrak{M}}$  – абелева  $p$ -группа для некоторого простого числа  $p$ . Ввиду насыщенности формации всех нильпотентных групп  $\mathfrak{N}$  имеем  $\Phi(G) = 1$ . Поэтому  $G = [P]Q$ , где  $P = C_G(P)$  – абелева  $p$ -группа,  $Q \in \mathfrak{N}$ . В силу леммы 2.10 имеет место  $O_p(Q) = 1$ . Применяя лемму 2.15 получим, что формация  $\mathfrak{L} = \text{form}G$  имеет единственную максимальную подформацию

$$\mathfrak{H} = \text{form}(G/P) = \text{form}Q.$$

Таким образом,  $\mathfrak{L}$  и  $\mathfrak{H}$  элементы полугруппы  $A_0(\mathfrak{M})$ . Следовательно, имеет место равенство  $\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{H} = \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{L}$ .

Поскольку  $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$ , то, очевидно,

$$\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{H}\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{L}.$$

Допустим, что  $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}\mathfrak{H}$ . Тогда  $G \in \mathfrak{L}\mathfrak{H}$  и  $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{L}$ . Так как  $G/P \in \mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{L} \not\subseteq \mathfrak{H}$ , то  $P = G^{\mathfrak{F}}$ . Следовательно,  $P \in \mathfrak{L}$ . Поскольку  $Q \neq 1$  и  $O_p(Q) = 1$ , то  $\text{form}G \neq \text{form}P$ . Поэтому

$$\text{form}P \subset \text{form}G.$$

Но  $\mathfrak{H}$  единственная максимальная подформация формации  $\mathfrak{L}$ . Следовательно,  $\text{form}P \subseteq \mathfrak{H}$ . Значит,  $P \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_p$ . Полученное противоречие показывает, что  $\mathfrak{L} \not\subseteq \mathfrak{L}\mathfrak{H}$ . Поэтому

$$\mathfrak{L} \not\subseteq \mathfrak{L}\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{L} \cdot \mathfrak{H}.$$

Таким образом,  $\mathcal{L} \cdot \mathfrak{H} \neq \mathfrak{H} \cdot \mathcal{L}$ . Противоречие.  
Значит,  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ .

**Достаточность.** Доказательство достаточности осуществляется аналогично доказательству достаточности теоремы 3.1.

**Замечание 3.1.** Отметим, что условие разрешимости формации  $\mathfrak{M}$  в теоремах 3.1–3.3 существенно.

Пусть  $\mathfrak{M} = l_n^\omega \text{form} G$ ,  $\mathfrak{F} = l_n^\omega \text{form} G$ , где  $G$  – простая неабелева группа, причем при  $n \geq 1$  имеет место  $|\pi(G) \cap \omega| \leq 1$ . Тогда  $\mathfrak{M}, \mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}$ . Однако, нетрудно показать, что полугруппы  $A_n^\omega(\mathfrak{M})$  и  $A_n^\omega(\mathfrak{F})$  коммутативны, поскольку  $2 \leq |A_n^\omega(\mathfrak{M})| \leq 3$  и  $2 \leq |A_n^\omega(\mathfrak{F})| \leq 3$ .

**Замечание 3.2.** Как известно, в классе всех разрешимых групп понятия  $\omega$ -насыщенной и  $\omega$ -композиционной формации совпадают (понятие  $\omega$ -композиционной формации введено в работе [9]). Поэтому из теорем 3.1 и 3.2, соответственно, вытекают

**Следствие 3.5.** Пусть  $\mathfrak{M}$  – разрешимая тотально  $\omega$ -композиционная формация. Тогда и только тогда полугруппа  $A_n^\omega(\mathfrak{M})$  тотально  $\omega$ -композиционных подформаций из  $\mathfrak{M}$  коммутативна, когда  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ .

**Следствие 3.6.** Пусть  $\mathfrak{M}$  – разрешимая  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционная формация,  $n \geq 0$ . Тогда и только тогда полугруппа  $A_n^\omega(\mathfrak{M})$   $n$ -кратно  $\omega$ -композиционных подформаций из  $\mathfrak{M}$  коммутативна, когда  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ .

### Заключение

Полученное в данной работе описание разрешимых тотально ( $n$ -кратно)  $\omega$ -насыщенных или  $\omega$ -композиционных формаций с коммутативной полугруппой тотально ( $n$ -кратно)  $\omega$ -насыщенных, соответственно,  $\omega$ -композиционных подформаций позволяет классифицировать формации

такого вида по свойствам полугруппы подформаций. Доказанные утверждения расширяют основные результаты работы [5] и дают новые примеры коммутативных полугрупп тотально ( $n$ -кратно)  $\omega$ -насыщенных и  $\omega$ -композиционных формаций. В частности, в классе всех разрешимых групп получено решения задачи об описании формаций с коммутативной полугруппой подформаций (проблема 6.26 [1]).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 253 с.
2. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Мн.: Беларуская наука, 1997. – 240 с.
3. Скиба, А.Н. Кратно  $\omega$ -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.
4. Мальцев, А.И. Об умножении классов алгебраических систем / А.И. Мальцев // Сиб. матем. журнал. – 1967. – Т. 8, № 2. – С. 346–365.
5. Сафонов, В.Г. К теории тотально насыщенных формаций конечных групп / В.Г. Сафонов. – Гомель, 2008. – 34 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 15).
6. Сафонов, В.Г. О тотально  $\omega$ -насыщенных формациях конечных групп / В.Г. Сафонов. – Гомель, 2004. – 18 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 7).
7. Сафонов, В.Г. О минимальных тотально  $\omega$ -насыщенных ненильпотентных формациях конечных групп / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Вестник Витебского гос. ун-та. – 2014. – № 6 (84). – С. 9–15.
8. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
9. Скиба, А.Н. Кратно частично композиционные формации конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Украинский математический журнал. – 2000. – Т. 52, № 6. – С. 783–797.

Поступила в редакцию 26.10.15.

УДК 517.553

## О СЛЕДАХ В НЕКОТОРЫХ НОВЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА ГЕРЦА В ОБЛАСТЯХ СИГЕЛЯ В $\mathbb{C}^n$

Р.Ф. Шамоян, О.А. Зайцева

*Брянский государственный университет*

## ON SHARP TRACES OF SOME NEW ANALYTIC HERZ-TYPE SPACES IN SIEGEL DOMAINS IN $\mathbb{C}^n$

R.F. Shamoian, O.A. Zaytseva

*Bryansk State University*

Получена полная характеристика следов в некоторых новых аналитических пространствах типа Герца в полицикле, единичном шаре, в трубчатых областях над симметрическими конусами и в ограниченных псевдывыпуклых областях с гладкой границей при естественном дополнительном условии на ядро. Наши результаты расширяют известные ранее утверждения.

**Ключевые слова:** аналитические функции, пространства типа Герца, полицикл, трубчатые области, псевдывыпуклые области.

We provide complete characterizations of traces of some new analytic spaces of Herz-type in polydisk, unit ball and tubular domains over symmetric cones and bounded pseudoconvex domains with smooth boundary under additional natural condition on kernel. Our results extend previously known assertions.

**Keywords:** analytic functions, Herz-type spaces, polydisk, tubular domains, pseudoconvex domains.

**2000 Mathematics Subject Classification.** Primary 42B15, Secondary 42B30.

### Introduction

This paper is a continuation of a long series of papers of the first author on traces in analytic function spaces on product domains (see [19]–[24], [12] and various references there). The intention of this note to provide new sharp results on traces in some new analytic Herz-type spaces in some general domains (typical Siegel domains of the second type) in  $\mathbb{C}^n$ . These spaces serve as very natural generalizations of classical Bergman spaces. Note that some new Herz-type spaces of another type were studied recently in papers of the first author [22]–[24]. Hence this note can be considered as continuation of our research on analytic Herz-type spaces. In this paper we at the same time generalize our previous results (see [22]–[24]) obtained for classical Bergman spaces in typical Siegel domains (tubular domains over symmetric cones and bounded pseudoconvex domains with smooth boundary). To be more precise some of our results can be seen in our previous papers in particular case of parameters (putting in all our theorems  $p = q$  we get classical Bergman spaces case). We refer the reader to our papers [22]–[24] for new sharp trace theorems in Bergman classes.

In this paper we first consider the case of the unit polydisk (a model case of analytic polyhedron), then the unit ball (a model case of bounded strongly pseudoconvex domains in  $\mathbb{C}^n$ ), and then the

bounded strongly pseudoconvex domains with smooth boundary and finally add some vital comments on various other domains in  $\mathbb{C}^n$  (bounded symmetric domains and more general minimal bounded homogeneous domains in higher dimension).

We also turn to unbounded Siegel domains, namely general tubular domains  $T_\Omega$  over symmetric cones in  $\mathbb{C}^n$  (a model case is a so-called Lorentz cone). All our proofs of our sharp theorems on traces are mainly based on properties of recently invented so-called  $r$ -lattices of tubular domains over symmetric cones and  $r$ -lattices of bounded strongly pseudoconvex domains with smooth boundary in  $\mathbb{C}^n$  (see [1], [2], [7], [17]).

### 1 Preliminary results

We start this paper with the simple case of the unit disk and the polydomain to show the core of our constructions first in this case in details. Then the same proof will be repeated for other domains. We need some definitions.

Let  $D$  be bounded domains in  $\mathbb{C}^n$ . Let  $H(D)$  be the space of all analytic functions in  $D$ . Let  $D^m = D \times \dots \times D$  be polydisk. Let  $H(D^m)$  be the space of all analytic functions in  $D^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

Let

$$A_{\alpha}^p(D) = \left\{ f \in H(D) : \|f\|_{p,\alpha}^p = \right.$$

$$= \int_D |f(z)|^p \cdot \text{dist}(z, \partial D)^\alpha d\tilde{m}_2(z) < \infty \Big\}$$
 $\alpha > -1, \quad 0 < p < \infty$  be as usual the Bergman class  $\tilde{d}m_2$  as usual is the Lebesgue measure in  $D$ . In a standard manner increasing the number of variables we define the spaces of analytic functions of Bergman type in the unit polydomain. Those spaces are Banach spaces for  $1 \leq p < \infty$  and complete metric spaces for other values of  $p$ . Denote by  $dV(z)$  or  $dv(z)$  the Lebesgue measure on tube and pseudoconvex domains. We can denote similarly Bergman class in tube and pseudoconvex domains (see [1], [2], [23], [24]). Then we define new natural extensions of Bergman type spaces in the polydisk, namely new analytic Herz type spaces in the unit polydisk. Their complete analogues in other domains will be defined in the next part of this paper. The existence of  $r$ -lattices in each domain is crucial for definitions of our new Herz-type spaces. Let

$$H_{\alpha}^{p,q}(\tilde{D}^m) = \left\{ f \in H(\tilde{D}^m) : \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_m=0}^{\infty} \sum_{j_1=-2^{k_1}-1}^{2^{k_1}-1} \dots \sum_{j_m=-2^{k_m}-1}^{2^{k_m}-1} \times \right. \\
 \left. \times \left( \int_{\Delta_{k_1,j_1}} \dots \int_{\Delta_{k_m,j_m}} |f(z_1 \dots z_m)|^p \times \right. \right. \\
 \left. \left. \times \prod_{j=1}^m (1 - |z_j|)^{\alpha_j} dm_2(z_j) \right)^{\frac{q}{p}} < \infty \right\},$$

where  $\alpha_j > -1, \quad j = 1, \dots, m, \quad 0 < p, q < \infty$ , and

$$\Delta_{k,j} = \left\{ z \in \tilde{D} : z = r\zeta : r \in \left( 1 - \frac{1}{2^k}, 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \right], \right. \\
 \left. \zeta \in \left( \frac{-\pi j}{2^k}, \frac{\pi(j+1)}{2^k} \right] \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad j = -2^k, \dots, 2^k - 1 \right\}.$$

Note if  $p = q$  we have classical Bergman space (the same happens in tube and pseudoconvex domains). These are analytic Herz-type spaces in the polydisk constructed based on well-known  $r$ -lattices in the unit disc  $\tilde{D}$  (see for these lattices [9] and various referenes there).

The intention of this paper (for the polydisk case) to show that if  $f \in H_{\alpha}^{p,q}(\tilde{D}^m)$  then  $f(z, \dots, z) \in A_{\beta}^s(\tilde{D})$  for some  $s, \beta$  and if  $g \in A_{\beta}^s(\tilde{D})$ , then there is a function  $f, f \in H_{\alpha}^{p,q}(\tilde{D}^m)$ , so that we have  $f(z, \dots, z) = g(z), \quad z \in \tilde{D}$ . (We will put some restrictions on  $p$  and  $q$ ).

This scheme (formulation of problem and even the proof of theorem 2.1 in the polydisk) then will be spread to more complicated domains such us tubular domains over symmetric cones and bounded strongly pseudoconvex domains with smooth boundary.

We alert the reader in advance that since all proofs of all cases are very similar to each other we provide only formulations of the last theorems leaving details of proofs to interested readers, but the proof of the simplest case will be given in this paper with all the details. Moreover we add all comments which are needed to apply the simple case to more complicated cases, all our proofs are based only on several tools and such an approach from our point of view is fully justified. For formulation of our theorems and proofs we will need basic facts on bounded strongly pseudoconvex domains with smooth boundary and on tubular domains over symmetric cones from [7], [17] and papers [24], [23], [15], [26]. For definition of determinant  $\Delta^\alpha$  and  $\Delta_\alpha$  function and  $g_0$  and  $g_0^*$  type symbols we refer the reader to [7], [17] and to papers [24], [23], [15], [26].

**Lemma 1.1** [15].

1) *The integral*

$$J_{\alpha}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \Delta^{-\alpha} \left( \frac{x+iy}{i} \right) \right| dx$$

converges if and only if  $\alpha > 2\frac{n}{r} - 1$ . In that case

$$J_{\alpha}(y) = \tilde{C}_{\alpha} \Delta^{-\alpha+n/r}(y), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad y \in \Omega.$$

2) Let  $\alpha \in \mathbb{C}^r$  and  $y \in \Omega$ . For any multi-indices  $s$  and  $\beta$  and  $t \in \Omega$  the function

$$y \mapsto \Delta_{\beta}(y+t)\Delta_s(y)$$

belongs to  $L^1(\Omega, \frac{dy}{\Delta^{n/r}(y)})$  if and only if  $\Re s > g_0$  and  $\Re(s + \beta) < -g_0^*$ . In that case we have

$$\int_{\Omega} \Delta_{\beta}(y+t)\Delta_s(y) \frac{dy}{\Delta^{n/r}(y)} = \tilde{C}_{\beta,s} \Delta_{s+\beta}(t).$$

The following lemma is a complete analogue of Forelly – Rudin type estimates in the tubular domains (see [15]), for classical  $B_{\alpha}$  Bergman kernels (see [23], [24]).

**Lemma 1.2** [15].

$$\int_{T_{\Omega}} \Delta^{\beta}(y) |B_{\alpha+\beta+\frac{\alpha}{r}}(z, w)| dV(z) \leq C \Delta^{-\alpha}(v),$$

$\beta > -1, \quad \alpha > \frac{n}{r} - 1, \quad z = x + iy, \quad w = u + iv$ .

In next lemmas we provide some basic facts from tubular domains function theory (see, for example, [7], [17] and papers [24], [23], [15], [26]).

The complete analogues of both lemmas 1.3 and 1.4 as well as lemmas 1.5 and 1.6 below are also valid in the polydisk, unit disk, and ball and pseudoconvex domains. Let  $T_{\Omega}$  be tube domain.

**Lemma 1.3** [15]. *Given  $\delta \in (0; 1)$  there exists a sequence of points  $\{z_j\}$  in  $T_{\Omega}$  called  $\delta$ -lattice such that calling  $\{B_j\}$  and  $\{B_j^*\}$  the Bergman balls with center  $z_j$  and radius  $\delta$  and  $\delta/2$  respectively then*

A) *the balls  $\{B_j\}$  are pairwise disjoint;*

B) the balls  $\{B_j\}$  cover  $T_\Omega$  with finite overlapping;

$$\begin{aligned} \text{C) } \int_{B_j(z_j, \delta)} \Delta^s(y) dV(z) &\asymp \\ &\asymp \int_{B_j(z_j, \delta)} \Delta^s(y) dV(z) = \widetilde{C}_\delta \Delta^{\frac{2n+s}{r}}(Imz_j); \end{aligned}$$

$$s > \frac{n}{r} - 1, J = |B_\delta(z_j)| \asymp \Delta^{\frac{2n}{r}}(Imz_j), j = 1, \dots, m,$$

$$J \asymp \Delta^{\frac{2n}{r}}(Imw), w \in B_\delta(z_j).$$

**Definition 1.1.** Let  $\mu$  be a positive Borel measure in unbounded  $D$  domain,  $0 < p, q < \infty, s > -1$ . Fix  $r \in (0; \infty)$  and an  $r$ -lattice  $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ . The analytic space  $A(p, q, d\mu)$  is the space of all holomorphic functions  $f$  such that

$$\|f\|_{A(p, q, d\mu)}^q = \sum_{k=1}^\infty \left( \int_{B(a_k, r)} |f(z)|^p d\mu(z) \right)^{\frac{q}{p}} < \infty.$$

If  $d\mu(z) = \Delta^s(Imz) dV(z)$  then we will denote by  $A(p, q, s)$  the  $A(p, q, d\mu)$ . This is Banach space for  $\min(p, q) \geq 1$ . It is clear that if  $p = q$  then we have standart classical Bergman class  $A(p, p, s) = A_p^s$ .

**Lemma 1.4** [15]. For any  $f \in A_p^s(T_\Omega)$  we have for any  $\mu > \frac{2n}{r} - 1$

$$f(z) = \int_{T_\Omega} B_\mu(z, w) f(w) \Delta^{\mu - \frac{2n}{r}}(Imw) dV(w).$$

**Lemma 1.5** [15]. Let  $\nu > \frac{n}{r} - 1, \alpha > \frac{n}{r} - 1$ , then for all functions from  $A_\alpha^\infty$  the integral representations of Bergman with Bergman kernel  $B_{\alpha+\nu}(z, w)$  (with  $\alpha + \nu$  index) is valid.

**Lemma 1.6** [15]. For all  $1 < p < \infty$  and for all  $\frac{n}{r} \leq p_1$ , where  $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p} = 1$  and  $\frac{n}{r} - 1 < \nu$  and for all functions  $f$  from  $A_\nu^p$  and for all  $\frac{n}{r} - 1 < \alpha$  the Bergman representation formula with  $\alpha$  index or with the Bergman kernel  $B_\alpha(z, w)$  is valid.

Now we provide the basic facts on strongly pseudoconvex domains taken from [1] and [2]. We denote by  $\nu$  the normalized Lebesgue measure on such domain,  $B_D(z, r)$  is Kobayashi ball in pseudoconvex domain with smooth boundary. For definition of classical Bergman spaces in these type domains we refer the reader to the same papers.

**Lemma 1.7** [2]. Let  $D \subset \subset \mathbb{C}^n$  be a strongly pseudoconvex bounded domain. Then there exist  $c_1 > 0$  and, for each  $r \in (0; 1)$ , a  $C_{1,r} > 0$  depending on  $r$  such that

$$c_1 r^{2n} d(z_0, \partial D)^{n+1} \leq \nu(B_D(z_0, r)) \leq C_{1,r} d(z_0, \partial D)^{n+1}$$

for every  $z_0 \in D$  and  $r \in (0, 1)$ .

**Lemma 1.8** [2]. Let  $D \subset \subset \mathbb{C}^n$  be a bounded strongly pseudoconvex domain, and  $r \in (0, 1)$ . Then

$$\nu(B_D(\cdot, r)) \approx \delta^{n+1},$$

where the constant depends on  $r$ .

**Lemma 1.9** [2]. Let  $D \subset \subset \mathbb{C}^n$  be a bounded strongly pseudoconvex domain. Then there is  $C > 0$  such that

$$\frac{C}{1-r} \delta(z_0) \geq \delta(z) \geq \frac{1-r}{C} \delta(z_0)$$

for all  $r \in (0, 1), z_0 \in D$  and  $z \in B_D(z_0, r)$ .

**Definition 1.2.** Let  $D \subset \subset \mathbb{C}^n$  be a bounded domain, and  $r > 0$ . An  $r$ -lattice in  $D$  is a sequence  $\{a_k\} \subset D$  such that  $D = \bigcup_k B_D(a_k, r)$  and there exists  $m > 0$  such that any point in  $D$  belongs to at most  $m$  balls of the form  $B_D(a_k, R)$ , where  $R = \frac{1}{2}(1+r)$ .

The existence of  $r$ -lattices in bounded strongly pseudoconvex domains with smooth boundary is ensured by the following.

**Lemma 1.10** [2]. Let  $D \subset \subset \mathbb{C}^n$  be a bounded strongly pseudoconvex domain. Then for every  $r \in (0, 1)$  there exists an  $r$ -lattice in  $D$ , that is there exist  $m \in \mathbb{N}$  and a sequence  $\{a_k\} \subset D$  of points

such that  $D = \bigcup_{k=0}^\infty B_D(a_k, r)$  and no point of  $D$  belongs to more than  $m$  of the balls  $B_D(a_k, R)$ , where  $R = \frac{1}{2}(1+r)$ . Note by lemma 1.8 and 1.9 we have  $\nu_\alpha(B_D(a_k, R)) = (\delta^\alpha(a_k)) \nu(B_D(a_k, R)), \alpha > -1$ .

Sometimes we will call by  $r$ -lattice the family of Kobayashi balls  $B_D(a_k, r)$ . Dealing with  $K$  unweighted Bergman kernel in bounded pseudoconvex domains with smooth boundary we know  $|K(z, a_k)| \asymp |K(a_k, a_k)|$  for any  $z \in B_D(a_k, r), r \in (0; 1)$  (see, for example, [1], [2] and various references there). This property plays a vital role in various proofs, though it is well known in the unit ball case (see [29]). It is also valid for weighted  $K_m$  Bergman kernels, where  $m = (n+1)l, l \in \mathbb{N}$ , this follows directly from definition of weighted Bergman kernels via Henkin – Ramirez function (see [24], [6], [5], and various references there for this well-known definition). To prove our theorem in context of pseudoconvex domains we will need a stronger condition on weighted Bergman kernel (it is valid in the unit ball [29]). Namely we assume that for  $t$  type kernels  $|K_t(z, \omega)| \asymp |K_t(a_k, \omega)|$  for any  $z \in B_D(a_k, r), r \in (0; 1)$  for any  $\omega$  from our domains (condition K). This type condition on Bergman kernels in pseudoconvex domains can be seen in many papers (see, for example, [14]). It is known this condition is valid in the ball.

From now we assume this condition is satisfied.

We shall use also a submean estimate for non-negative plurisubharmonic functions on Kobayashi balls.

**Lemma 1.11** [2]. *Let  $D \subset\subset \mathbb{C}^n$  be a bounded strongly pseudoconvex domain. Given  $r \in (0,1)$ , set  $R = \frac{1}{2}(1+r) \in (0,1)$ . Then there exists a  $C_r > 0$  depending on  $r$  such that  $\forall z_0 \in D, \forall z \in B_D(z_0, r)$*

$$\chi(z) \leq \frac{C_r}{v(B_D(z_0, r))} \int_{B_D(z_0, R)} \chi dV$$

for every nonnegative plurisubharmonic function  $\chi : D \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

This estimate is valid also in tube (see [23]).

**Lemma 1.12** [2]. *Let  $D \subset\subset \mathbb{C}^n$  be a bounded strongly pseudoconvex domain. Then*

$$\|K(\cdot, z_0)\|_2 = \sqrt{K(z_0, z_0)} \approx \delta^{-\frac{n+1}{2}}(z_0) \text{ and } \|K_{z_0}\|_2 \equiv 1$$

for all  $z_0 \in D$ .

Let  $D$  be bounded domain, we define Herz-type spaces for any such domains with  $r$ -lattices based on balls  $B(a_k, r)$ . Such a type of analytic spaces are the main objects of this paper. This definition in a standard manner can be applied in product domain case.

**Definition 1.3.** *Let  $\mu$  be a positive Borel measure in bounded  $D$  domain,  $0 < p, q < \infty, s > -1$ .*

*Fix  $r \in (0; \infty)$  and an  $r$ -lattice  $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ . The analytic space  $A(p, q, d\mu)$  is the space of all holomorphic  $f$  functions such that*

$$\|f\|_{A(p, q, d\mu)}^q = \sum_{k=1}^\infty \left( \int_{B(a_k, r)} |f(z)|^p d\mu(z) \right)^{\frac{q}{p}} < \infty.$$

If  $d\mu(z) = \delta^s(z) dv(z)$  then we will denote by  $A(p, q, s)$  the  $A(p, q, d\mu)$  space. This is Banach space for  $\min(p, q) \geq 1$ . It is clear that if  $p = q$  then we have standart classical Bergman class  $A(p, p, s) = A_s^p$ . These are main objects (spaces) of study of this paper.

## 2 Main theorems

This section is devoted to formulations and proofs of our main results. We define Herz-type spaces in tubular domains over symmetric cones and bounded strongly pseudoconvex domains with smooth boundary, based on the same idea provided in the unit disk in previous section, then we formulate our new sharp theorems first in the polydisk, then in tubular domains over symmetric cones, then in bounded strongly pseudoconvex domains with smooth boundary in  $\mathbb{C}^n$ . Proofs of all three assertions are completely parallell. We provide the complete proof of the polydisk case in this paper and add remarks on how to modify the proof for tube and pseudoconvex domains. Then finally some other

cases of domains will be shortly discussed by us at the end of the paper.

We define Herz-type spaces in products of tubular domains  $T_\Omega$  and products of pseudoconvex domains  $\Omega$  as follows. Note here dealing with weights and measures it is clear from the context we consider products of weights and products of measures, and integration on product domains, though it is not indicated below (see in previous section the definition of parallel analytic Herz type spaces in the polydisk and also for example, see [19]–[21]). Let

$$H_\alpha^{p, q}(T_\Omega^m) = \left\{ f \in H(T_\Omega^m) : \sum_{k=1}^\infty \left( \int_{B_r(z_k, r)} |f(\omega)|^{p\alpha} (Im\omega) dV(\omega) \right)^{\frac{q}{p}} < \infty \right\};$$

$$H_\alpha^{p, q}(\Omega^m) = \left\{ f \in H(\Omega^m) : \sum_{k=1}^\infty \left( \int_{B_\Omega(z_k, r)} |f(\omega)|^p (\delta(\omega))^\alpha dV(\omega) \right)^{\frac{q}{p}} < \infty \right\},$$

where  $\delta(z) = dist(z, \partial\Omega)$  and where  $0 < p, q < \infty, \alpha > -1$  with usual modification when  $\alpha$  is vector. Note for  $p = q$  we have classical Bergman space and these are Banach spaces when  $\min(q, p) > 1$  and complete metric spaces for other values of parameters and here  $\{z^k\} \subset T_\Omega$  and  $\{z^k\} \subset \Omega$  are certain fixed  $r$ -lattices in tubular domains over symmetric cones  $T_\Omega$  and in bounded pseudoconvex domains with smooth boundary  $\Omega$  which were discussed above. Note obviously these analytic spaces in higher dimension depend on  $\{z_n\}$  sequences, but we omit this in names of spaces. We denote here by  $dv(z)$  or  $dV(z)$  the normalized Lebeques measure on products of tubular domains or products of bounded pseudoconvex domain with smooth boundary.

We formulate our theorems in the polydisk, bounded pseudoconvex domains and in tubular domains over symmetric cones then provide detailed proof of first theorem in the polydisk, leaving proofs of theorems 2.2 and 2.3 to readers since the scheme is completely the same in each case. It is based on properties of  $r$ -lattices invented recently ([23], [24] for lattices in tube, and [1], [5] for pseudoconvex domains). The simple key idea is the following. Dyadic cubes in the unit disk, and the polydisk and their properties used mainly in the proof of theorem 2.1 should be replaced in the proof of theorem 2.1 below by Kobayashi balls and products of such balls in pseudoconvex domains and by Bergman balls and

products of such balls in tubular domains over symmetric cones. The provided lemmas serve as tools which are needed for parallel proofs in these domains. Note various sharp trace theorems in various domains were considered in a long series of papers of the first author (see, for example, [20], [21] and various references there).

We have to define now Bergman type projections in bounded strictly pseudoconvex domain with smooth boundary, and in tubular domains over symmetric cones and in the unit polydisk. Such type operators appeared in trace theorems many times before, see, for example, [19]–[21], [23], [24] and various references there.

In the unit disk we define them as the following operator

$$(P_\alpha f)(\bar{\omega}) = \int_D \frac{f(z) \cdot (1 - |z|)^\alpha dm_2(z)}{\prod_{j=1}^n (1 - z\bar{\omega}_j)^{\frac{\alpha+2}{n}}};$$

$$f \in L^1(D), \bar{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n),$$

where  $\alpha > -1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . In the tubular domains over symmetric cones we define them as the following Bergman-type integral operator (see for similar operators [15], [23])

$$(P_\alpha^1 f)(\bar{z}) = \int_{T_\Omega} \frac{f(\omega) \cdot (\Delta^\alpha(Im\omega)) dV(\omega)}{\prod_{j=1}^m \Delta^{\frac{\alpha+2n}{m}} \left( \frac{z_j - \bar{\omega}}{i} \right)};$$

$$f \in L^1(T_\Omega), \alpha > -1.$$

Finally in the bounded pseudoconvex domains with smooth boundary  $\Omega$  we define them as

$$(P_\alpha^2 f)(\bar{z}) = \int_\Omega f(\omega) \prod_{j=1}^m K_\tau(z_j, \omega) \cdot \delta^\alpha(\omega) dV(\omega),$$

$$f \in L^1(\Omega), \alpha > -1, \tau = \frac{\alpha + n + 1}{m}.$$

Such a type of Bergman type integral operators in tube can be seen in [15]. These operators are serving as base of our proofs. Our complete proof of the model case of the polydisk (theorem 2.1) is the systematic use of known properties of dyadic decomposition of the unit disk which can be seen in [9], [20].

To pass this proof to the case of tubular domains over symmetric cone and bounded strongly pseudoconvex domains with smooth boundary (theorems 2.2, 2.3) we have to repeat step by step the same proof replacing on each step properties of  $r$ -lattices in the disk by properties of  $r$ -lattices in tube and pseudoconvex domains (see [1], [2], [23], [24]).

Note in very particular case of unit disk these types of analytic spaces are spaces with quazinorms.

$$\|f\|_{A_{\alpha,\beta}^{p,q}}^p = \int_0^1 \left( \int_{|z|<r} |f(z)|^q (1 - |z|)^\alpha dm_2(z) \right)^{\frac{p}{q}} (1 - r)^\beta dr,$$

where  $\alpha > -1$ ,  $\beta > -1$ ,  $0 < p, q < \infty$ . They were considered previously in papers of M. Jevtic (see [13], see also [12] and references there). These

scales of analytic mixed norm spaces are Banach spaces for  $\min(p, q) \geq 1$  and complete metric spaces for other values of parameters.

In recent years there was a good amount of activities in both directions in spaces of analytic functions in tubular domains over symmetric cones and pseudoconvex domains with smooth boundary (see, for example, [15] and [2] and various references there also).

**Theorem 2.1.** Let  $F \in H_\beta^{p,q}(\tilde{D}^m)$ ,  $q \leq p$ ,  $0 < p, q < \infty$ , let  $\beta_0$  be large enough. Then  $F(z, \dots, z) \in A_{\alpha_1}^q(\tilde{D})$  that is

$$\int_D |F(z, \dots, z)|^q (1 - |z|)^{\alpha_1} dm_2(z) < \infty,$$

where

$$\alpha_1 = \sum_{j=1}^m (\beta_j + 2) \frac{p}{q} - 2.$$

Let  $f \in A_{\alpha_1}^q(\tilde{D})$ . Then we can find a function  $F$ , so that  $F \in H_\beta^{p,q}(\tilde{D}^m)$  and also  $F(z, \dots, z) = f(z)$ ,  $z \in \tilde{D}$ . In addition, the Bergman type projection  $P_{\tau_1}$  is mapping from  $A_{\alpha_1}^q(\tilde{D})$  to  $H_\beta^{p,q}(\tilde{D}^m)$  as a bounded operator, for all  $\tau_1 > \beta_0$ .

Note this type sharp theorem, but for other Herz-type spaces was formulated and proved before in [12] in the unit disk. We formulate below more general theorems of the same type for tubular domains over symmetric cones and bounded pseudoconvex domains with smooth boundary. They have parallel formulations and proofs.

**Theorem 2.2.** Let  $F \in H_\beta^{p,q}(T_\Omega^m)$ ,  $1 < p, q < \infty$ ,  $p \geq q$ ,  $\beta_0, \alpha_1$  be large enough. Then  $F(z, \dots, z) \in A_{\alpha_1}^q(T_\Omega)$  that is

$$\int_{T_\Omega} |F(z, \dots, z)|^q (Imz)^{\alpha_1} dV(z) < \infty,$$

where

$$\alpha_1 = \sum_{j=1}^m \left( \beta_j + \frac{2n}{r} \right) \frac{p}{q} - 2 \frac{n}{r}.$$

Let  $f \in A_{\alpha_1}^q(T_\Omega)$ . Then we can find a  $F$  function, so that  $F \in H_\beta^{p,q}(T_\Omega^m)$  and  $F(z, \dots, z) = f(z)$ ,  $z \in T_\Omega$ , so

$$Trace H_\beta^{p,q}(T_\Omega^m) = A_{\alpha_1}^q(T_\Omega).$$

In addition the Bergman type projection  $P_{\tau_1}^1$  is mapping from  $A_{\alpha_1}^q$  to  $H_\beta^{p,q}$  as a bounded operator for large  $\tau_1$ ,  $\tau_1 > \beta_0$ .

**Theorem 2.3.** Let  $F \in H_\beta^{p,q}(\Omega^m)$ ,  $0 < p, q < \infty$ ,  $n > n_0$ ,  $q \leq p$ , and let  $\beta_0, n_0$  be large enough. Then  $F(z, \dots, z) \in A_{\alpha_1}^q(\Omega)$  that is

$$\int_{\Omega} |F(z, \dots, z)|^q \delta(z)^{\alpha_1} dV(z) < \infty,$$

where

$$\alpha_1 = \sum_{j=1}^m (\beta_j + n + 1) \frac{p}{q} - (n + 1).$$

Let  $f \in A_{\alpha_1}^q(\Omega)$ . Then we can find a function  $F$ , so that  $F \in H_{\beta}^{p,q}(\Omega^m)$  and  $F(z, \dots, z) = f(z)$ ,  $z \in \Omega$  so

$$\text{Trace}(H_{\beta}^{p,q})(\Omega^m) = (A_{\alpha_1}^q)(\Omega),$$

if conditions (K) holds for Bergman kernel of  $t$ -type.

In addition for all  $n > n_0$ ,  $\tau_1 > \beta_0$ , the Bergman type projection  $P_{\tau_1}^2$  is acting from  $A_{\alpha_1}^q(\Omega)$  to  $H_{\beta}^{p,q}(\Omega^m)$  as a bounded operator if the weighted Bergman kernel  $K_t$  satisfies (K) condition.

The proof of theorem 2.2 is based on lemmas 1.1–1.6, the proof of theorem 2.3 is based on lemmas 1.7–1.12. Note the complete proof of theorem 2.1 below provides all basic ideas and details needed for proof of theorem 2.2 and 2.3. It can be considered as a proof of theorem 2.3 in simplest case of unit disk.

*Remark 2.1.* We remark that such type sharp Trace theorems on product domains (tubular domains over symmetric cones and bounded strongly pseudoconvex domains in  $\mathbb{C}^n$ ) where proved recently in [22]–[24]. Note [27] is probably the first paper where product domains were studied. Our results also complement some sharp assertions (sharp trace theorems in the polydisk and unit ball) which can be seen for example in [9], [20], [21]. In [3] we can see several such type results in harmonic function spaces in higher dimension.

*Remark 2.2.* Note for unit ball  $B$  in  $\mathbb{C}^n$  these Herz type classes and some of their properties were studied in papers by the author and Songxiao Li (see, for example, [25] and various references there). It was shown in [25] in particular that if  $\mu$  is a positive Borel measure on  $B$  and  $\{a_k\}$  is a sampling sequence based on  $B(a_k, r)$  Bergman balls  $\alpha > -1$ ,

$$0 < p_i, q_i < \infty, f_i \in H(B), \text{ and } \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{q_i} \right) = 1.$$

Then

$$\int_D \prod_{k=1}^n |f_i(z)|^{p_i} d\mu(z) \leq c \prod_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left( \iint_{D(a_k, r)} |f_i(z)|^{p_i} (1-|z|)^{\alpha} dV(z) \right)^{q_i} \right)$$

if and only if  $\mu(D(a_k, r)) \leq c(1-|a_k|)^{m(n+1+\alpha)}$  for every  $k = 1, 2, 3, \dots$  Using these Bergman  $B(a_k, r)$  balls and their properties which can be seen in [29], [25], a complete copy of theorem 2.1 in the unit ball in  $\mathbb{C}^n$  can be also formulated, we leave this procedure to readers.

*The proof of theorem 2.1.* The proof of theorem 2.1 hinges on lemmas 1.7–1.12 from previous section in case when our pseudoconvex domains is a unit disk.

First note that by lemmas 1.8–1.10 applied in the unit disk if  $f \in A_{\alpha}^p$  then for all  $\alpha > -1$ ,  $0 < p < \infty$  we have that (see also [19], [9] for similar arguments);  $\widetilde{f}(z) = f(z, \dots, z)$

$$\begin{aligned} \int_D |\widetilde{f}(z)|^p (1-|z|)^{\alpha} dm_2(z) &= \sum_{j,k} \int_{\Delta_{j,k}} (|\widetilde{f}(z)|^p) (1-|z|)^{\alpha} dm_2(z) \leq \\ &\leq c \sum_{j,k} (\max_{\Delta_{j,k}} (|\widetilde{f}(z)|^p)) \left( \int_{\Delta_{j,k}} (1-|z|)^{\alpha} dm_2(z) \right) \leq \\ &\leq c \sum_{j,k} (\max_{\Delta_{j,k}} |\widetilde{f}(z)|^p) \cdot (2^{-k\alpha} \cdot 2^{-2k}) \leq J. \end{aligned}$$

Using lemma 1.11 in the polydisk

$$\begin{aligned} J &\leq c \sum_{k_1 \geq 0} \sum_{k_n \geq 0} \sum_{j_1, \dots, j_n} \max_{z_i \in \Delta_{j_i, k_i}} (|f(z_1, \dots, z_n)|^q)^{\frac{p}{q}} \times \\ &\quad \times (2^{-k_1 \frac{(\alpha+2)}{n}} \dots 2^{-k_n \frac{(\alpha+2)}{n}}) \leq \\ &\leq c \sum_{k_1 \geq 0} \sum_{k_n \geq 0} \sum_{j_1, \dots, j_n} \left( \int_{\Delta_{j_1, k_1}} \dots \int_{\Delta_{j_n, k_n}} |f(z_1, \dots, z_n)|^q dm_{2n}(z) \right)^{\frac{p}{q}} \times \\ &\quad \times \left[ 2^{-k_1 \frac{(\alpha+2)}{n}} \dots 2^{-k_n \frac{(\alpha+2)}{n}} \right] \cdot \left( 2^{2k_1 \frac{p}{q}} \dots 2^{2k_n \frac{p}{q}} \right) \leq \\ &\leq c \sum_{k_1, \dots, k_n} \sum_{j_1, \dots, j_n} \left( \int_{\Delta_{j_1, k_1}} \dots \int_{\Delta_{j_n, k_n}} |f(z_1, \dots, z_n)|^q \times \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{j=1}^n (1-|z_j|)^{\beta_j} dm_{2n}(z) \right)^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

where  $\beta_j = \frac{(\alpha+2)}{n} \frac{q}{p} - 2$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $0 < p, q < \infty$ .

Note in last estimate we used the fact ([9]) that for subharmonic  $f$  function in the polydisk

$$\begin{aligned} \max_{z_i \in \Delta_{j_i, k_i}} |f(z_1, \dots, z_n)|^q &\leq \frac{c}{m_2(\Delta_{j_1, k_1}) \dots m_2(\Delta_{j_n, k_n})} \times \\ &\times \int_{\Delta_{j_1, k_1}} \dots \int_{\Delta_{j_n, k_n}} |f(z_1, \dots, z_n)|^q dm_2(z_1) \dots dm_2(z_n), \quad (2.1) \end{aligned}$$

$m_2(\Delta_{j_k}) = 2^{-2k}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  This estimate follows from related estimate of one variable function (lemma 1.11) applied several times by each variable separately. The vital point in the chain of estimates we consider that it is valid also in tubular domains and pseudoconvex domains based fully on properties of  $r$ -lattices which we provided in previous section, but with other parameters (see also [24], [23], [5], [2], [1] for similar arguments). Let us show the reverse assertion, that for each analytic function  $f$ ,  $f \in A_{\alpha}^p(D)$  there is a analytic function  $F$ ,

$F(z, \dots, z) = f(z)$  and  $z \in D$ ,  $F \in H_{\beta}^{p,q}(D^n)$ . For this reason we will use the following simple observation related with dyadic cubes  $\{\Delta_{jk}\}_{j,k}$  and Bergman kernel  $[Q_{\beta}](z, \omega) = \frac{(1-|z|)^{\beta}}{(1-\bar{z}\omega)^{\beta+2}}$ ,  $\beta > -1$  in the unit disk where  $z \in D$ ,  $\omega \in D$ . The importance of simplicity of arguments and estimates below for us again is based on the fact that the same estimates with other values of parameters are valid also in tubular domains and in pseudoconvex domains (based on lemmas related with  $r$ -lattices from previous section).

Note first that (see also [20], [9]) using (2.1) we have the following estimates in one dimension for the Bergman kernel. For center  $z_{jk}$  of “dyadic cube”  $\Delta_{jk}$  by lemma 1.8–1.10 and 1.11 we have

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq 0} \sum_j \frac{(1-|z_{jk}|)^{\beta}}{|1-\bar{z}z_{jk}|^{\tau}} \leq \\ & \leq c \sum_{k \geq 0} \sum_j \int_{\Delta_{jk}} \frac{(1-|\tilde{z}|)^{\beta-2} dm_2(\tilde{z})}{|1-\bar{z}\tilde{z}|^{\tau}} \leq \\ & \leq \frac{C_1}{(1-|z|)^{\tau-\beta}}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$z \in D$ ,  $\tau > 0$ ,  $\beta \geq 1$ ,  $\tau > \beta$  we will need also the following estimate (2.2)

$$\int_{\Delta_{jk}} \frac{(1-|z|)^{\beta}}{|1-\bar{z}\omega|^{\tau}} dm_2(z) \leq c \left( \frac{2^{-k\beta}}{|1-z_{jk}\omega|^{\tau}} \right), \omega \in D \tag{2.3}$$

(see, for example, [9] and references there) and

$$\frac{2^{-k\beta}}{|1-z_{jk}\omega|^{\tau}} \leq c \frac{(1-|z_{jk}|)^{\beta}}{|1-z_{jk}\omega|^{\tau}};$$

$$\tau > 0, \beta \geq 0, z_{jk} \in \{\Delta_{jk}\}, \omega \in D,$$

$z_{jk}$  is the center of  $\Delta_{jk}$ . Note that all three estimates are also valid in tubular domains and pseudoconvex domains based on lemmas 1.2–1.3, 1.5–1.10 and some conditions on Bergman Kernels (see also [24], [23], [2], [1]). The second estimate for tube can be seen in [18]. For pseudoconvex domains it follows from (K) condition. Using these two estimates and well-known properties of dyadic decomposition of the unit disk (dyadic cubes  $\Delta_{jk}$ ), (see, for example, [9], [19]–[21] and references there) we will have the following inequalities in the unit disk  $D$ .

First note that if  $f \in A_{\alpha}^p(D)$  then  $F \in H(D^m)$ , where

$$F(z_1, \dots, z_n) = \int_D \frac{f(\omega)(1-|\omega|)^{\beta} dm_2(\omega)}{\prod_{j=1}^n (1-\bar{\omega}z_j)^{\frac{\beta+2}{n}}},$$

$$z_j \in D, j = 1, \dots, n$$

and  $\beta$  is large enough number,  $\beta > \beta_0$  then note that for  $p \leq 1$  and then for  $p > 1$  we have that

$$\begin{aligned} & |F(z_1, \dots, z_n)|^p \leq \\ & \leq \int_D \frac{|f(\omega)|^p (1-|\omega|)^{\beta p+2p-2} dm_2(\omega)}{\left| \prod_{j=1}^n (1-\bar{\omega}z_j)^{\frac{\beta+2}{n} p} \right|} \end{aligned} \tag{2.4}$$

for  $z_j \in D$ ,  $j = 1, \dots, n$  and for  $\gamma_1 + \gamma_2 = \left(\frac{\beta+2}{n}\right)$ ,  $\gamma_2 > 0$

$$\begin{aligned} & |F(z_1, \dots, z_n)|^p \leq \\ & \leq \int_D \frac{|f(\omega)|^p (1-|\omega|)^{\beta} dm_2(\omega)}{\left| \prod_{j=1}^n (1-\bar{\omega}z_j)^{\gamma_1} \right|} \times \\ & \times \prod_{j=1}^n (1-|z_j|)^{\left(\frac{\beta+2}{n}-\gamma_2\right)p-\frac{(\beta+2)}{n}} \end{aligned} \tag{2.5}$$

both estimates can be seen in [12]. We must show now  $F \in H_{\beta}^{p,q}(D^m)$  this will finish the proof. Note last two estimates again are valid in tubular domains and pseudoconvex domains ([24], [23], [2], [1]). The last estimate in particular follows from Holders inequality and Forelly – Rudin type estimates directly (see for tube lemma 1.2). The previous one in pseudoconvex domains can be seen in [5], in tube in [24], [23]. This indeed will finish the proof since we have that  $F(z, \dots, z) = f(z)$ ,  $z \in D$  and this will hold since of well-known Bergman representation formula in the unit disk (see, for example, [9], chapter 4 and references there). The same formula is valid in tube and pseudoconvex domains (see lemmas 1.4, 1.5, 1.6 for tube case).

From (2.4) and (2.5) using (2.2) and (2.3) we will have that the following estimates are true. We use that  $\beta$  is large enough.

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1 \dots k_n} \sum_{j_1 \dots j_n} \left( \int_{\Delta_{j_1, k_1}} \dots \int_{\Delta_{j_n, k_n}} |F(z_1, \dots, z_n)|^p \times \right. \\ & \times \left. \prod_{j=1}^n (1-|z_j|)^{\beta_j} dm_{2n}(z) \right)^{\frac{q}{p}} \leq \\ & \leq c \sum_{k_1 \dots k_n} \sum_{j_1 \dots j_n} \left( \int_{\Delta_{j_1, k_1}} \dots \int_{\Delta_{j_n, k_n}} \left( \int_D \frac{|f(\omega)|^p (1-|\omega|)^{\beta p+2p-2} dm_2(\omega)}{\prod_{j=1}^n |1-\bar{\omega}z_j|^{\frac{\beta+2}{n} p}} \right) \times \right. \\ & \times \left. \prod_{j=1}^n (1-|z_j|)^{\beta_j} dm_{2n}(z) \right)^{\frac{q}{p}} \leq \\ & \leq c_1 \sum_{k_1 \dots k_n} \sum_{j_1 \dots j_n} \left( \int_D \frac{|f(\omega)|^p (1-|\omega|)^{\beta p+2p-2} dm_2(\omega)}{\prod_{j=1}^n (|1-\bar{\omega}z_j^*|)^{\frac{\beta+2}{n} p - (\beta_j+2)}} \right)^{\frac{q}{p}} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq c \int_D |f(\omega)|^q (1-|\omega|)^{\frac{(\beta p+2p-2)q}{p}+2\frac{q}{p}-2} dm_2(\omega) \leq \\ &\quad \int_D |f(\omega)|^q (1-|\omega|)^{\frac{(\beta+2)p-(\beta_j+2)q}{p}} dm_2(\omega) \leq \\ &\leq c \int_D |f(\omega)|^q (1-|\omega|)^{\sum_{j=1}^n (\beta_j+2)\frac{q}{p}-2} dm_2(\omega); \end{aligned}$$

here  $z_s^*$  is the center of  $\Delta_{j_s, k_s}$ .

Indeed we have that

$$\begin{aligned} &(2p-2+\beta p)\frac{q}{p}+2\frac{q}{p}-2+ \\ &+\sum_{j=1}^n \left( \frac{\beta+2}{n}(-q)+(\beta_j+2)\frac{q}{p} \right) = \\ &= (-2)+\sum_{j=1}^n (\beta_j+2)\frac{q}{p} = \tau, \tau > -1. \end{aligned}$$

Thus our theorem is proved for  $q \leq p \leq 1$  case. Let us assume  $q < p$ ,  $p > 1$ . Then we have from estimate (2.5) the following estimate

$$\begin{aligned} &\|f\|_{H^{p,q}_\beta}^q(D) \leq \\ &\leq c \sum_{k_1 \dots k_n, j_1, \dots, j_n} \left( \int_D |f(\omega)|^p (1-|\omega|)^{\beta p+2p-2} dm_2(\omega) \right)^{\frac{q}{p}} = K. \end{aligned}$$

Using (2.5) again for inner integral for  $\frac{q}{p} > 1$  we have

$$\begin{aligned} &s_1^j + s_2^j = \tau = \frac{(\beta+2)}{n}p - (\beta_j+2), \\ &s_1^j > 0, s_2^j > 0, j = 1 \dots n, \\ &K \leq c \sum_{k_1 \dots k_n, j_1, \dots, j_n} \int_D |f(\omega)|^p (1-|\omega|)^{(2p-2)(\beta p)} dm_2(\omega) \times \\ &\quad \prod_{j=1}^n (1-|\omega z_j^*|)^{\frac{(s_1^j)q}{p}} \times \end{aligned}$$

$$\times \prod_{s=1}^n (1-|z_s^*|)^{s_1^j \left( \frac{q}{p} \right) - \gamma_1^j};$$

$$\gamma_1^j = \frac{(\beta+2)}{n}p - (\beta_j+2), j = 1, \dots, n$$

where  $z_s^*$  is a center of  $\Delta_{j_s, k_s}$ ,  $s = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} &K \leq c \int_D |f(\omega)|^q (1-|\omega|)^\tau dm_2(\omega), \\ &\tau = \sum_{j=1}^m (\beta_j+2)\frac{p}{q} - 2; \tau > -1 \end{aligned}$$

we used (2.2), (2.3) here again.

We omit easy calculations with indexes here. The crucial fact here is that  $\beta$  is large enough positive number,  $\beta > \beta_0$  and hence  $s_1^j$  and  $s_2^j$  can be chosen as large as we wish together with  $\gamma_1^j$ , for all  $j = 1, \dots, n$ . Theorem 2.1 is proved.

Now we turn to the proof of theorems 2.2 and 2.3, noting they are completely parallel to the proof we have just provided above (we refer the reader also to several detailed remarks given within the proof of theorem 2.1).

The main ingredients here are  $r$ -lattices and their properties and properties of Whitney type decomposition (Bergman or Kobayashi balls) of domains which we provided above in previous section. We omit details.

*Remark 2.3.* Trace theorems and related issues concerning Bergman type projection in various general domains were under intensive study during last decades (see, for example, [10]–[21], [24], [23]). Various results in this directions were obtained and even some applications to Hardy type inequalities and duality theorems were found (see, for example, [15]–[17] and various references there). We do not discuss these issues in this note, but hope to return to them in our forthcoming papers.

*Remark 2.4.* Note that Trace theorems have various applications in function and operator theory (see, for example, [4], [8] and references there). Hence our theorems may also have such a type of applications.

*Remark 2.5.* Finally we add some analysis concerning other domains and related to these results on them.

Our theorems are also partially valid in bounded symmetric domains, since all machinery we have used is also valid there, starting from Forelly-Rudin type estimates and Whitney type decomposition of such domains. We refer the reader to papers [10], [28] where appropriate machinery can be found, the same can be even applied to more general minimal bounded homogeneous domains in higher dimension and appropriate estimates can be seen in a series of recent papers of S. Yamaji (see, for example, [10], [28], [11] and references there).

## REFERENCES

1. *Abate, M.* Toeplitz operators and Carleson measures in strongly pseudoconvex domains / M. Abate, T. Raissy, A. Saracco // Journal. Funct. Anal. – 2012. – № 263. – P. 3449–3491.
2. *Abate, M.* Carleson measures and uniformly discrete sequences in strongly pseudoconvex domains / M. Abate, A. Saracco // Journal of London. Math. Soc. – 2011. – № 83. – P. 587–605.
3. *Arsenovic, M.* Trace theorems in harmonic function spaces, multiplier theorems and related estimates / M. Arsenovic, R. Shamoyan // Kragujevac Math. Journal. – 2011. – Vol. 35, № 3. – P. 411–430.
4. *Amar, E.* A counterexample to the corona theorem for operators in  $H^2$  in polydisk / E. Amar, C. Menini // Pacif. Journal of Mathematics. – 2002. – № 206 (2). – P. 257–268.
5. *Arsenovic, M.* On distances and atomic decomposition of Bergman type spaces in pseudoconvex

- domains with smooth boundary / M. Arsenovic, R. Shamoyan // Bulletin of Korean Math. Society. – 2015. – Vol. 52, № 1. – P. 85–105.
6. Beatrous, F.  $L^p$  estimates in pseudoconvex domains / F. Beatrous // Michigan Math. Journal. – 1985. – Vol. 32, Issues 3. – P. 361–380.
7. Bekolle, D. Analytic Besov spaces and Hardy type inequalities in tube domains over symmetric cones / D. Bekolle, A. Bonami, G. Garrigos, F. Ricci, B. Sehba // Jour. fur. reine und ang. – 2010. – № 647. – P. 25–56.
8. Clark, D. Restriction of  $H^p$  functions in the polydisk / D. Clark // American Journal of Mathematics. – 1988. – № 110. – P. 1119–1152.
9. Djrbashian, M. Topics in the theory of Bergman  $A_\alpha^p$  spaces / M. Djrbashian, F. Shamoyan // Teubner Texte zur Math. Leipzig. – 1988.
10. Gheorghe, L.G. Interpolation of Besov spaces and applications / L.G. Gheorghe // Le Matematiche, LV. – 2000. – P. 29–42.
11. Ishi, S. Some new estimates of Bergman kernel in minimal bounded homogeneous domains / S. Ishi, S. Yamaji // Arxiv. Preprint.
12. Jevtic, M. A note on diagonal mapping theorem in spaces of analytic functions in the polydisk / M. Jevtic, M. Pavlovic, R. Shamoyan // Publ. Math. Debrecen. – 2009. – № 74 (1/2). – P. 1–14.
13. Jevtic, M. On  $D_{\alpha,\beta}^p$  spaces / M. Jevtic // Mat. Vesnik. – 1984.
14. Li, Song-Yong. Analysis on Besov spaces II: Embedding and Duality Theorems / Song-Yong Li, W. Luo // Journal of Math. Analysis and Applications. – 2007. – № 333 (2). – P. 1189–1202.
15. Lecture notes on Bergman projectors in tube domain over cones, an analytic and geometric viewpoint / D. Bekolle, A. Bonami, G. Garrigos, C. Nana, M. Peloso, F. Ricci // Proceeding of the International Workshop on Classical Analysis. Yaounde. – 2001. – P. 75.
16. Littlewood-Paley decomposition and Besov spaces related to symmetric cones / D. Bekolle, A. Bonami, G. Garrigos, F. Ricci // Preprint. Arxiv. – 2008. – 48 p.
17. Sehba, B.F. Bergman type operators in tube domains over symmetric cones / B.F. Sehba // Proc. Edinburg. Math. Society. June. – 2009. – № 52. – P. 529–544.
18. Sehba, B.F. Hankel operators and Schatten classes / B.F. Sehba // Int. Eq. Op. Th. – 2012.
19. Shamoyan, R. On traces of holomorphic functions in polyballs / R. Shamoyan, O. Mihic // Applicable Analysis and Discrete Mathematics. – 2009. – № 3. – P. 42–48.
20. Shamoyan, R. On traces of  $Q_p$  type spaces and mixed norm analytic function spaces in polyballs / R. Shamoyan, O. Mihic // Siauliai Math. Seminar. – 2010. – № 5 (13). – P. 101–119.
21. Shamoyan, R. A note on traces of some holomorphic functions classes in polyballs / R. Shamoyan, O. Mihic // Journal of Function Spaces and Applications. – 2010. – Vol. 8, № 3. – P. 271–285.
22. Shamoyan, R. Sharp trace theorems in Bergman type spaces in pseudoconvex domains / R. Shamoyan, O. Mihic // Doklady NAN Armenii. – 2014. – Vol. 114, №2. – P. 91–96.
23. Shamoyan, R. Sharp trace theorems in Bergman type spaces in tubular domains over symmetric cones / R. Shamoyan, E. Povpritz // Journal of Siberian Federal University. – 2013. – Vol. 6, № 4. – P. 527–538.
24. Shamoyan, R. Sharp Trace theorems in unbounded Siegel domains / R. Shamoyan, E. Povpritz // Uzbekistan Math. Journal. – 2015. – Vol. 1. – P. 149–157.
25. Shamoyan, R. On some properties of analytic spaces related with the Bergman metric ball / R. Shamoyan, S. Li // Bulletin Iranian Math. Society. – 2008. – Vol. 34, № 2. – P. 121–139.
26. Shamoyan, R. Embedding theorems and multifunctional analytic spaces in products strongly pseudoconvex domains / R. Shamoyan, E. Povpritz // Kragujevac Math. Journal. – 2013. – Vol. 37, № 2. – P. 221–244.
27. Sakai, J. Interpolation manifolds for products of strictly pseudoconvex domains / J Sakai, T. Jimbo // Complex variables and applications. – 1997. – № 8. – P. 3–14.
28. Yamaji, S. Composition operators on the Bergman spaces in minimal domains / S. Yamaji // Hiroshima Math. Journal. – 2014. – № 43. – P. 107–127.
29. Zhu, K. Function theory in the unit ball / K. Zhu // Graduate Studies in Math. – 2005.

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant 13-353 01-97508) and by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (grant 1.1704.2014K).*

Поступила в редакцию 09.09.15.

УДК 004.052

## ИЗУЧЕНИЕ ВЛИЯНИЯ ВНЕШНИХ ПОМЕХ НА КАЧЕСТВО СИГНАЛА В СЕТЯХ WI-FI

**В.Н. Кулинченко, О.М. Демиденко**

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*

## STUDYING OF THE INFLUENCE OF EXTERNAL NOISES ON THE SIGNAL QUALITY IN WI-FI NETWORKS

**V.N. Kulinchenko, O.M. Demidenko**

*F. Scorina Gomel State University*

Рассматривается влияние различных источников помех в диапазоне 2,4–5 ГГц на качество передачи Wi-Fi сигнала точкой доступа, включенной в локальную вычислительную сеть.

**Ключевые слова:** беспроводная сеть Wi-Fi, источники помех, точка доступа, полоса частот, микроволновая печь.

The effect of different sources of noises in the range of 2.4–5 GHz on the quality of transmission signal by the Wi-Fi access point in the local area network is considered in the article.

**Keywords:** wireless network Wi-Fi, sources of noises, access point, band, microwave.

### **Введение**

Целью данного исследования являлось изучение следующего спектра вопросов:

1. Что влияет на качество работы беспроводных сетей Wi-Fi?
2. Что может являться источником помех и каковы возможные причины их возникновения?
3. Что может привести к прерыванию работы или нестабильной работе сетей Wi-Fi?

Как известно, в беспроводных сетях в качестве среды распространения сигнала используются радиоволны и работа устройств и передача данных в сети происходит без использования кабельных соединений.

В связи с этим на качество работы беспроводных сетей влияет большее количество различного рода помех.

### **1 Причины возникновения помех, влияющих на работу беспроводных сетей Wi-Fi**

Приведем список самых распространенных причин возникновения помех, влияющих на качество работы беспроводных сетей Wi-Fi (IEEE 802.11 b/g/n).

1. Wi-Fi-устройства (точки доступа, беспроводные камеры и др.), работающие в радиусе действия вашего устройства и использующие тот же частотный диапазон.

Дело в том, что Wi-Fi-устройства подвержены воздействию даже небольших помех, которые создаются другими устройствами, работающими в том же частотном диапазоне. В беспроводных сетях используются два частотных диапазона – 2,4 и 5 ГГц. Беспроводные сети стандарта 802.11 b/g работают в диапазоне 2,4 ГГц,

сети стандарта 802.11a – 5 ГГц, а сети стандарта 802.11n могут работать как в диапазоне 2,4 ГГц, так и в диапазоне 5 ГГц.

В полосе частот 2,4 ГГц для беспроводных сетей доступны 13 каналов шириной 20 МГц (802.11 b/g/n) или 40 МГц (IEEE 802.11n) с интервалами 5 МГц между ними. Беспроводное устройство, использующее для Wi-Fi один из 13 частотных каналов, создает значительные помехи на соседние каналы. Например, если точка доступа использует канал 6, то она оказывает сильные помехи на каналы 5 и 7, а также, уже в меньшей степени, на каналы 4 и 8. Для исключения взаимных помех между каналами необходимо, чтобы их несущие отстояли друг от друга на 25 МГц (5 межканальных интервалов).

На рисунке 1.1 показаны спектры 11 каналов. Группы непересекающихся каналов располагаются в следующих комбинациях диапазонов [1, 6, 11], [2, 7], [3, 8], [4, 9], [5, 10]. Разные беспроводные сети, расположенные в пределах одной зоны действия, следует настраивать на непересекающиеся каналы.

Для определения наиболее свободного канала Wi-Fi можно воспользоваться утилитой InSSIDer.

2. Bluetooth-устройства, работающие в зоне покрытия вашего Wi-Fi-устройства. Bluetooth-устройства работают в том же частотном диапазоне, что и Wi-Fi-устройства, то есть, 2,4 ГГц и, следовательно, могут оказывать влияние на работу Wi-Fi-устройств.

3. Большие расстояния между Wi-Fi-устройствами.

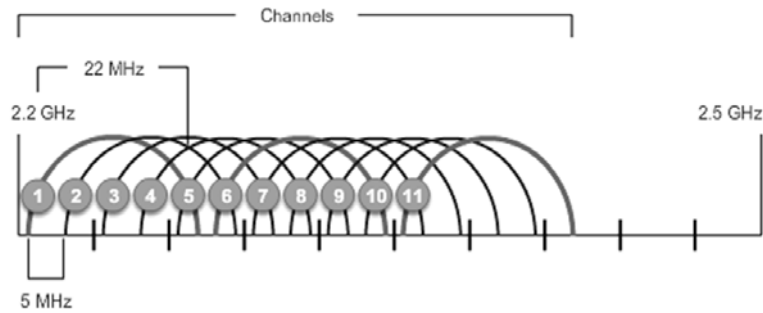


Рисунок 1.1 – Распределение диапазонов каналов Wi-Fi

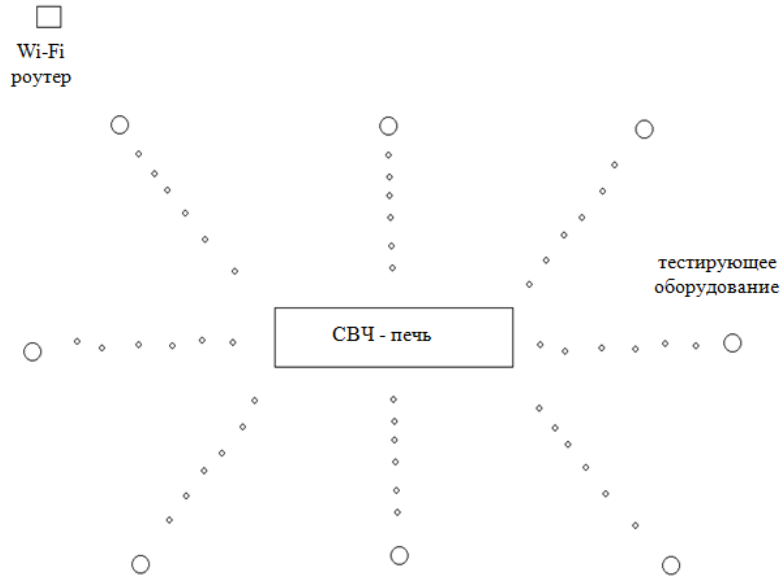


Рисунок 2.1 – Расстановка оборудования

Необходимо помнить, что беспроводные устройства Wi-Fi имеют ограниченный радиус действия. Например, домашний медиа-центр с точкой доступа Wi-Fi стандарта 802.11 b/g имеет радиус действия до 60 м в помещении и до 300 м вне помещения. В помещении дальность действия беспроводной точки доступа может быть ограничена несколькими десятками метров в зависимости от конфигурации комнат, материала стен, а также наличия других препятствий.

4. Препятствия. Различные препятствия (стены, потолки, мебель, металлические двери и т. д.), расположенные между Wi-Fi-устройствами, могут частично или значительно отражать/поглощать радиосигналы, что приводит к частичной или полной потере сигнала.

В городах с многоэтажной застройкой основным препятствием для радиосигнала являются здания. Наличие капитальных стен (бетон+арматура), листового металла, штукатурки на стенах, стальных каркасов и т. д. влияет на качество радиосигнала и может значительно ухудшать работу Wi-Fi-устройств. Внутри помещения причиной помех радиосигнала также могут являться зеркала и тонированные окна. Ниже показана таблица потери эффективности сигнала Wi-Fi при прохождении через различные среды.

5. В качестве помех могут выступать сигналы от устройств операторов 3G и MMDS (в зависимости от региональных особенностей их зона вещания может перекрывать диапазон от 2,1 ГГц до 2,6 ГГц).

6. Различная бытовая техника, работающая в зоне покрытия Wi-Fi-устройства, в том числе:

- микроволновые СВЧ-печи. Эти приборы могут ослаблять уровень сигнала Wi-Fi, т. к. обычно также работают в диапазоне 2,4 ГГц;
- детские «радионяни». Эти приборы работают в диапазоне 2,4 ГГц и дают наводки, в результате чего ухудшается качество связи Wi-Fi;
- посудомоечные машины, стиральные машины и другая техника, оборудованная мощными электромоторами;
- мониторы и телевизоры с электронно-лучевыми трубками, беспроводные телефоны и др.

### 2 Влияния помех диапазона 2,4–5,0 ГГц на качество Wi-Fi сигнала на примере пары «СВЧ-печь – Wi-Fi сеть»

Было проведено исследование влияния помех диапазона 2,4–5,0 ГГц на качество Wi-Fi сигнала на примере пары «СВЧ-печь – Wi-Fi сеть».

Оборудование было установлено по схеме, указанной на рисунке 2.1.

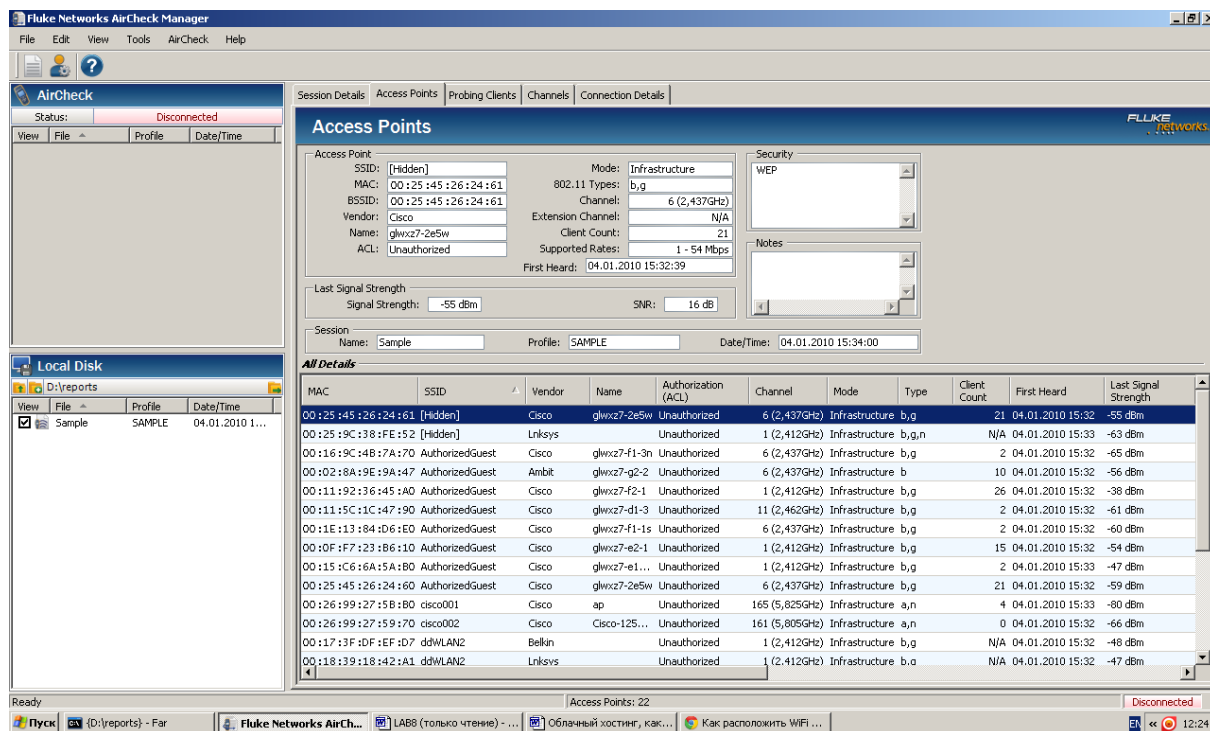


Рисунок 2.2 – Тестирование Wi-Fi клиентов

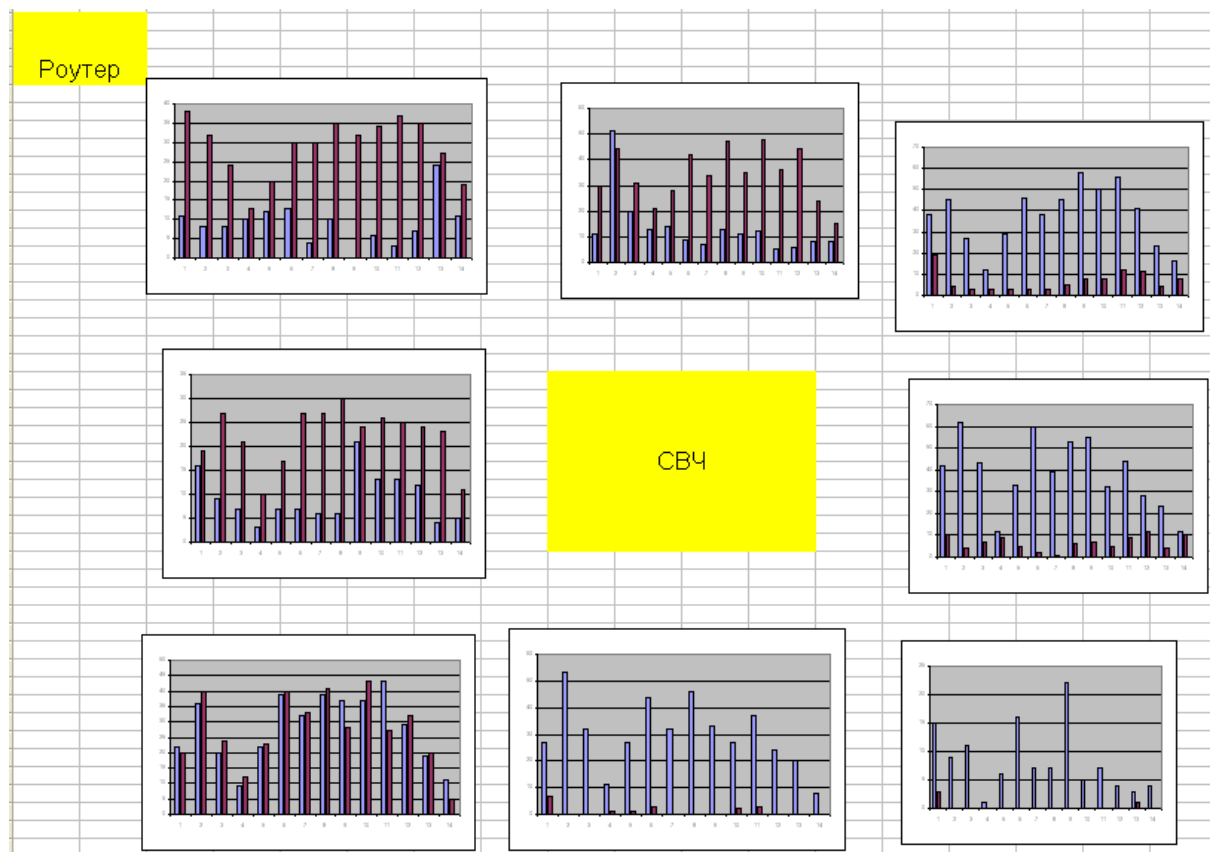


Рисунок 2.3 – Диаграмма взаимодействия СВЧ-печи и Wi-Fi сети

На рисунке кружками обозначено расположение тестирующего оборудования.

Сети Wi-Fi и микроволновые печи работают в одном диапазоне 2,45 ГГц. Это – собственная

частота колебаний молекулы  $H_2O$  (или, как принято говорить, «диполя воды»). Именно на использовании этой частоты основана работа микроволновых печей, ибо на другой частоте они бы

не работали. Выбор диапазона частот для сетей Wi-Fi основан на том, что из-за наличия влаги в атмосфере полезный сигнал в этом случае быстро затухает в зависимости от расстояния и большое количество устройств при этом не мешают друг другу. Этот диапазон частот иногда называют «мусорным диапазоном».

На рисунке 2.2 приведены результаты исследований, которые показало тестирующее оборудование в различных точках расположения при выключенной микроволновой печи.

На рисунке 2.3 представлена диаграмма взаимодействия СВЧ-печи и сети Wi-Fi.

Таблица 2.1 – Потеря эффективности сигнала Wi-Fi при прохождении через различные среды

Тип препятствия	Дополнительные потери (dB)	Процент прохождения сигнала
Открытое пространство	0	100%
Окно без тонировки (отсутствует металлизированное покрытие)	3	70%
Окно с тонировкой (металлизированное покрытие)	5–8	50%
Деревянная стена	10	30%
Межкомнатная кирпичная стена (15,2 см)	15–20	15%
Несущая кирпичная стена (30,5 см)	20–25	10%
Бетонный пол/потолок	15–25	10–15%
Монолитное железобетонное перекрытие	20–25	10%

Любая микроволновая печь имеет небольшую утечку излучения. При этом мощность печи обычно колеблется от киловатта и более, так что даже доли процента микроволнового излучения дают хорошую помеху на фоне 100 милливаттного Wi-Fi оборудования, разрешенного в продажу провайдерами в бытовых целях (в промышленных целях могут использоваться точки доступа мощностью до 650 мВт). Соответственно можно предположить, что непосредственно возле работающей печи работа Wi-Fi затруднена или даже невозможна.

По результатам проведенных опытов была получена следующая таблица потери эффективности сигнала Wi-Fi при прохождении через различные препятствия.

### Заключение

Для устранения влияния различного рода помех на распространение сигналов в сетях Wi-Fi предлагается использовать следующие меры:

- сместиться в диапазоне частот, выбрав другой канал сети Wi-Fi;
- увеличить расстояние между микроволновой печью и устройством Wi-Fi (от 2 метров влияние практически сводится к нулю, исходя из проведенных опытов);
- заземлить все устройства, генерирующие помехи в диапазоне 2,4 ГГц;
- поставить между устройством и печью препятствие из проводящего материала (лист фольги, зеркало);
- перейти на стандарт 802.11n в диапазоне 5 ГГц.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Демиденко, О.М. Сравнительный анализ математических методов повышения надежности информационных и технических систем / О.М. Демиденко, А.И. Кучеров // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 1 (22). – С. 92–97.
2. Кулинченко, В.Н. Об одном подходе к определению пропускной способности каналов ЛВС по протоколам TCP/IP, ICMP и UDP / В.Н. Кулинченко, О.М. Демиденко, П.Л. Чечет // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 1–3.
3. Воруев, А.В. Диагностика беспроводных соединений локальных вычислительных сетей / А.В. Воруев, В.Н. Кулинченко // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2014. – № 6 (87). – С. 112–116.
4. Масштабирование сетей. Учебный материал курса CCNA Routing and Switching [Электронный ресурс] / Cisco Systems, Inc. – San Jose, 2014. – Режим доступа: <http://www.netacad.com>. – Дата доступа: 12.09.2015.
5. Демиденко, О.М. Функциональные возможности программного комплекса адаптивной идентификации пользователей корпоративной сети / О.М. Демиденко, В.Д. Левчук, А.И. Кучеров // Проблемы, физики, математики и техники. – 2010. – № 3 (4). – С. 69–73.

Поступила в редакцию 19.09.15

## МОДЕЛИРОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МНОГОПУСТОТНЫХ ПЛИТ В СТРУКТУРЕ КАРКАСНОГО ЗДАНИЯ

К.С. Курочка, Д.Н. Трубенко, И.Л. Стефановский

Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого

## SIMULATION OF NATURAL OSCILLATIONS IN THE HOLLOW-CORE SLABS IN STRUCTURE OF THE FRAME BUILDINGS

K.S. Kurochka, D.N. Trubenok, I.L. Stefanovsky

P.O. Sukhoi Gomel State Technical University

Рассмотрена математическая модель воздействия импульсной нагрузки на многопустотную плиту, которая является составной частью конструкции каркасного здания. В результате получены данные распространения собственных колебаний в исследуемой конструкции с течением времени.

**Ключевые слова:** свободные колебания, многопустотная плита, метод конечных элементов.

A mathematical model of the impact impulse load on the hollow-core slabs, which is an integral part of the design of the frame of the building, is considered. As a result, data on the occurrence of the natural oscillations in the studied construction with the passage of time are obtained.

**Keywords:** natural oscillation, hollow-core slabs, finite element method.

### Введение

В настоящее время широкое распространение получили каркасные здания, основным конструктивным элементом которых является многопустотная плита. Из-за повсеместного применения плит данного типа решается большое количество задач в целях увеличения срока эксплуатации и прочности этого конструктивного элемента. Одной из таких задач является моделирование собственных колебаний многопустотных плит в структуре каркасного здания.

При прочностных расчетах на устойчивость подобных сооружений проектировщикам необходимо проводить вычисления собственных колебаний многопустотных плит, составляющих диски перекрытий. Собственные колебания, возникающие под действием внешней нагрузки, приводят к возникновению трещин и разрушению конструкции. По этой причине инженер-проектировщик должен производить расчет конструкций на обнаружение воздействий данного физического процесса для определения предельно допустимых величин при воздействии нагрузки определенной величины.

Главная проблема существующих алгоритмов и методик расчетов заключается в том, что они не являются универсальными, то есть применяются для конкретной физической модели.

### 1 Физическая постановка задачи

Для решения задачи о собственных колебаниях плиты применяется физическая модель, которая представляет собой плиту, закрепленную со всех сторон. Перпендикулярно к ее поверхности приложена внешняя нагрузка ( $F$ ).

При воздействии возмущающей силы, зависящей от времени  $F(t)$ , на поверхность многопустотной плиты в ней возникают свободные колебания  $\{\Psi\}$ . Также плита из-за воздействия внешней нагрузки совершает перемещения, зависящие от времени  $\delta(t)$ . Данный физический процесс можно описать следующим уравнением:

$$u(t) = \sum_{i=1}^n \delta_i(t) \{\Psi\}_i = [\Phi] \delta(t),$$

где  $[\Phi]$  – матрица, столбцы которой представляют собой векторы свободных колебаний системы  $\{\Psi\}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $u(t)$  – амплитуда колебаний.

В общем случае в уравнения движения вводится вязкое сопротивление, так что эти уравнения принимают вид [1]:

$$[K] \{\delta\} + [C] \frac{\partial \{\delta\}}{\partial t} + [M] \frac{\partial^2 \{\delta\}}{\partial t^2} + \{F(t)\} = 0, \quad (1.1.)$$

где  $[K]$  – матрица жесткости,  $[C]$  – матрица демпфирования,  $[M]$  – матрица масс,  $\{\delta\}$  – вектор узловых перемещений.

В рамках задачи об импульсных нагрузках постоянное воздействие внешней нагрузки  $F(t)$  заменяется импульсом силы, который вычисляется по формуле [2, с. 512]:

$$F(t) = F_0 \int_0^{\tau} f(t) dt,$$

где  $F_0$  – величина нагрузки,  $\tau$  – продолжительность действия импульсной нагрузки.

Из-за того, что существует множество форм импульса  $f(t)$  [2, с. 513], по которым можно определить импульсную нагрузку, будет выбрана

конкретная, которую наиболее удобно применить для решения задачи:

$$f(t) = 1,$$

отсюда следует:

$$F(t) = F_0 \int_0^t 1 dt = F_0 t.$$

Предположим, что существует решение уравнения (1.1), при котором вектор узловых перемещений  $\{\delta\}$  принимает следующую форму:

$$\{\delta(t)\} = \{\delta_0\} e^{at}.$$

Произведем подстановку этого выражения в уравнение (1.1) и получим уравнение [1], [2]:

$$([K] + a[C] + a^2[M])\{\delta_0\} + \{F\} = 0, \quad (1.2)$$

где  $a$  – мнимая величина, то есть имеет вид

$$a = i\omega.$$

Тогда  $e^{at} = e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$ .

В общем случае вектор  $\{\delta_0\}$  является комплексным, следовательно:

$$\{\delta_0\} = \{\delta_x\} + i\{\delta_y\}, \quad (1.3)$$

$\{\delta_x\}$ ,  $\{\delta_y\}$  – вещественная и мнимая части вектора узловых перемещений.

После установления начальных и граничных условий необходимо свести задачу к решению линейных алгебраических уравнений. Для этого необходимо подставить выражение (1.3) в уравнение (1.2), тогда его можно записать в виде [1, с. 372]:

$$\begin{bmatrix} [K] - \omega^2[M] & -\omega[C] \\ -\omega[C] & [K] - \omega^2[M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_x\} \\ \{\delta_y\} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \{F\} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (1.4)$$

Для нахождения форм собственных колебаний в начальный момент времени, следует подставить полученные значения, в ходе решения методом Гаусса уравнения (1.4), в формулу:

$$\{\delta\} = \{\delta_x\} \cos(\omega t) + \{\delta_y\} i \sin(\omega t), \quad (1.5)$$

где  $t$  – время.

Для нахождения затухающих колебаний необходимо применить вариационный принцип [2, с. 515]:

$$u_j = \sum_{i=1}^n U_{ji} e^{-\frac{\gamma}{2}\omega t} \sin(\omega t), (j = 1, \dots, n), \quad (1.6)$$

где  $U_{ji}$  вычисляется с использованием форм собственных колебаний  $\delta_{ji}$ , найденных в уравнении (1.5) при  $t = 0$ , по формуле:

$$U_{ji} = \frac{\delta_{ji}}{\omega} \sum_{r=1}^m \varepsilon \left( \frac{\tau\omega}{2\pi} \right) \delta_{jr} F_0 \tau, \quad (1.7)$$

$$(j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, n).$$

## 2 Математическое моделирование

Будем дискретизировать исследуемую область конечными элементами [1–4] в форме прямоугольника с тремя степенями свободы (перемещение вдоль оси  $Oz$ , и углы поворотов вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ ) в каждом узле. Выбор этого конечного элемента обусловлен следующими преимуществами:

данное разбиение легко реализуется; при таком разбиении легко учесть граничные условия и благодаря этому уменьшается погрешность вычислительных экспериментов.

Чтобы приближенно удовлетворить условию непрерывности угла наклона [1], [3], в качестве узловых параметров рассматриваются три компоненты: перемещение  $(\Omega_n)$  вдоль оси  $z$ ; углы поворота  $(\theta_y)_n$  – вокруг оси  $y$ ;  $(\theta_x)_n$  – вокруг оси  $x$ . Так как конечный элемент – прямоугольник, то углы наклона  $\omega$  и углы поворота совпадают, поэтому можно записать:

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} \Omega_i \\ \Theta_{xi} \\ \Theta_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Omega_i \\ - \left( \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)_i \\ \left( \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)_i \end{Bmatrix}. \quad (2.1)$$

Для отдельного конечного элемента уравнение (2.1) можно записать в виде:

$$\{\delta\} = [A]\{\alpha\}, \quad (2.2)$$

где  $[A]$  – координатная матрица, составленная из координат узлов элемента,  $\{\alpha\}$  – вектор искомых коэффициентов.

Из выражения (2.2) можно найти  $\{\alpha\}$ :

$$\{\alpha\} = [A]^{-1}\{\delta\}.$$

Для получения глобальных матриц жесткости, демпфирования и масс необходимо добавить значения соответствующих локальных матриц, принадлежащих конечным элементам. Нахождение глобальных матриц производится путем занесения значений из узлов, принадлежащих конечному элементу в узел принадлежащий пластине, если они совпадают, то значения суммируются.

## 3 Результаты исследований и их обсуждения

Начальные условия, определяющие величины усилий при заданных условиях закрепления (при изгибе плиты – это изгибающие и крутящие моменты, а также поперечные силы). Так как в рассматриваемой физической модели защемлены все края, поэтому начальные условия равны:

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Узловые перемещения, полученные после решения уравнения (1.5), используются для нахождения форм собственных колебаний (1.7). Затем полученные формы колебаний подставляются в уравнение (1.6). В ходе решения этого уравнения, будут получены значения перемещений (или амплитуды колебаний).

Для проверки методики нахождения собственных колебаний рассматривается фрагмент перекрытия, состоящий из двух многопустотных плит ПК 63.15.8АТ800АТ-8 с: длиной – 6.2 м, шириной – 1.49 м, высотой – 0.22 м, отверстием в середине пролёта, рабочей арматурой 5Ø12АТ800. Плита имеет 7 отверстий диаметром 159 мм, защитный слой бетона 20 мм. Загружение проводилось от 0 Н/м<sup>2</sup> до 4532 Н/м<sup>2</sup>. Найденные значения прогибов сравнивались с экспериментальными данными [5]. При нагрузке 3286 Н/м<sup>2</sup> прогиб в нижней растянутой зоне в середине пролёта равен 15,14 мм [5, с. 61], в ходе вычислительного эксперимента он составил 13,17 мм. При нагрузке 4532 Н/м<sup>2</sup> прогиб в середине пролёта составил 20.6 мм [5, с. 61], в ходе вычислительного эксперимента он составил 17,9 мм.

Фрагмент перекрытия дискретизировался по длине на 20 конечных элементов, по ширине – на 14. Результат моделирования с величиной нагрузки 3286 Н представлен на рисунке 3.1.



Рисунок 3.1 – Колебания многопустотных плит ПК 63.15.8АТ800АТ-8 под действием внешней нагрузки

В результате моделирования были получены результаты, расхождение которых с экспериментальными данными [5] составляет 15%. Это говорит о том, что результаты, производимые по представленной математической модели, вычисляются с высокой точностью.

### Заключение

В ходе исследовательской работы предложена математическая модель, отличающаяся от существующих аналитических решений поставленной

задачи, и разработано программное обеспечение для нахождения собственных колебаний многопустотных плит.

Одним из основных достоинств разработанной математической модели является ее универсальность. Так как можно, варьируя начальные и граничные условия, а также изменяя место и характер приложения внешней нагрузки, решать различные задачи, связанные с исследуемым видом конструкции. Также, внося незначительные изменения в разбиение на конечные элементы и сменив физические характеристики материала можно решить абсолютно новую задачу (например, задачу о биениях, возникающих в тормозной системе автомобиля).

Предложенная математическая модель может быть использована при проектировании каркасных зданий для определения наиболее подходящего типа многопустотных плит, которые необходимо применить для конкретного проекта.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Зенкевич, О.С.* Метод конечных элементов в технике: учебник / О.С. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
2. *Перельмутер, А.В.* Расчётные модели сооружений и возможность их анализа: учебник / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. – Киев: Сталь, 2002. – 596 с.
3. *Александров, А.В.* Сопротивление материалов: учебник / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин. – М.: Высшая школа, 2003. – 560 с.
4. *Курочка, К.С.* Численное моделирование деформаций многопустотных плит / К.С. Курочка // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2002. – № 6 (15). – С. 44–48.
5. *Пространственные конструктивные системы зданий и сооружений, методы расчета, конструирования и технология возведения* / Труды международной научно-технической конференции, Минск, 10–12 октября 2001 г. / Минск: институт БелНИИС; редкол.: А.И. Мордич [и др.]. – Минск, 2002. – 287 с.

Поступила в редакцию 07.07.15.

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

## GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;

- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).