ISSN 2077-8708

Проблемы физики, математики и техники

№2 (23) 2015

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ»

Адрес редакции:
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: http://pfmt.gsu.by

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS»

Edition address:
F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
website:http://pfmt.gsu.by

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.
Выходит 4 раза в год

№ 2 (23) 2015

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

ТЕХНИКА

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– технические (информатика, вычислительная техника и управление);
– физико-математические (физика, математика).

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).
Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.
Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Г. Н. Петухова*, *Т. А. Фицнер*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 04.06.15. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 12,3. Уч.-изд. л. 10,7. Тираж 100 экз. Заказ № 429.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246019, Гомель

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009
There are 4 times a year

№ 2 (23) 2015

CONTENTS

PHYSICS

MATHEMATICS

TECHNICS

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):
– Technics (Informatics, Computer Science and Control);
– Physics and Mathematics.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 539.12.01

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЗАДАЧА О *S*-СОСТОЯНИЯХ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ СУПЕРПОЗИЦИИ ДВУХ ПОТЕНЦИАЛОВ «δ-СФЕРА»

В.Н. Капшай, Ю.А. Гришечкин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

RELATIVISTIC SCATTERING *S*-STATES PROBLEM FOR SUPERPOSITION OF TWO POTENTIALS «δ-SPHERE» TYPE

V.N. Kapshai, Yu.A. Grishechkin

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Получены точные решения релятивистских двухчастичных уравнений для *s*-состояний рассеяния в случае δ-потенциала и суперпозиции двух δ-потенциалов. На основании найденных волновых функций вычислены амплитуды рассеяния и фазовые сдвиги. Произведен анализ полученных величин, в результате которого доказано условие унитарности для амплитуд рассеяния, найдены условия обращения амплитуд в нуль. Показано, что нерелятивистский предел всех полученных релятивистских выражений даёт результаты, которые совпадают с соответствующими выражениями, найденными при решении уравнения Шрёдингера.

Ключевые слова: *релятивистское двухчастичное уравнение, релятивистское конфигурационное представление, дельта-потенциал, амплитуда рассеяния, S-матрица, фазовый сдвиг, условие унитарности, эффект Рамзауэра – Таунсенда.*

Exact solutions of relativistic two-particle equations for scattering *s*-states are obtained in cases of the δ-function potential and superposition of two δ-function potentials. Scattering amplitudes and phase shifts are calculated on the basis of wave functions found. The analysis of values obtained was carried out. As a result, the unitarity condition and vanishing conditions of scattering amplitudes are proved. It is shown that the non-relativistic limit of relativistic expressions obtained yields results which coincide with corresponding expressions which were found in the process of solving the Schrödinger equation.

Keywords: *relativistic two-particle equation, relativistic configurational representation, delta-function potential, scattering amplitude, S-matrix, phase shift, unitarity condition, Ramsauer – Townsend effect.*

Введение

Уравнения квазипотенциального типа впервые были получены в импульсном представлении в интегральной форме [1], [2]. Позже эти уравнения были сформулированы в так называемом релятивистском конфигурационном представлении (РКП) [3] в виде разностных или интегральных. Фактически РКП является релятивистским обобщением обычного координатного представления квантовой механики. В течение долгого времени в РКП рассматривались только разностные уравнения. И лишь с установлением явного вида функций Грина (ФГ) оказалось возможным рассмотрение интегральных уравнений в РКП [4], [5]. Основной проблемой, возникающей при решении разностных уравнений, является наличие у получаемых решений произвольного *i*-периодического множителя, определение явного вида которого из разностного уравнения невозможно. В то же время решения интегральных уравнений не имеют этого недостатка и определяются однозначно.

В настоящее время известно только очень небольшое число точных решений интегральных квазипотенциальных уравнений. В этой связи привлекательной возможностью получения точных решений является рассмотрение δ-потенциалов и их суперпозиций в РКП.

Так называемые потенциалы нулевого радиуса привлекают большое внимание физиков и используются в самых разных задачах молекулярной, атомной и ядерной физики [6]. С развитием метода и введением в рассмотрение обобщённых δ-потенциалов был найден большой класс точно решаемых задач квантовой механики.

Квазипотенциальные уравнения в РКП с δ-потенциалами долгое время не привлекали внимания, поскольку решение разностных парциальных уравнений с δ-потенциалами представляет очень сложную проблему. Но с нахождением явного вида ФГ интегральных квазипотенциальных уравнений в РКП стала ясна возможность изучения таких потенциалов. Ковариантные двухчастичные интегральные уравнения в РКП с δ-потенциалами рассматривались ранее [7], [8], но только в одномерном случае.

В данной работе найдены решения трехмерных релятивистских двухчастичных интегральных уравнений для сферически-симметричных волновых функций (ВФ) состояний рассеяния в РКП в случае δ-потенциала, отличного от нуля на поверхности сферы и суперпозиции двух таких потенциалов. На основании полученных решений вычислены парциальные амплитуды рассеяния и фазовые сдвиги.

1 Точное решение двухчастичных уравнений с δ-потенциалом

Интегральные уравнения для ВФ $\psi_{(j)}(\chi_q, r)$ в РКП, описывающих *s*-состояния рассеяния системы двух скалярных частиц одинаковой массы *m*, имеют вид [4]

$$\psi_{(j)}(\chi_q, r) = \sin(\chi_q mr) + \\ +\int_0^\infty G_{(j)}(\chi_q, r, r')V(r')\psi_{(j)}(\chi_q, r')dr', \tag{1.1}$$

где индекс *j* соответствует одному из четырёх вариантов релятивистских уравнений квазипотенциального типа [1]–[3]:

$j = 1$ $(j = 3)$ – уравнению Логунова – Тавхелидзе (модифицированному);

$j = 2$ $(j = 4)$ – уравнению Кадышевского (модифицированному).

В уравнениях (1.1) величина $\chi_q \geq 0$ – быстрота, связанная с энергией двухчастичной системы $2E_q$ как $2E_q = 2m\,\mathrm{ch}\,\chi_q$, r – модуль радиус-вектора в РКП, $V(r)$ – потенциал, $G_{(j)}(\chi_q, r, r')$ – ФГ *j*-го уравнения:

$$G_{(j)}(\chi_q, r, r') = \\ = G_{(j)}(\chi_q, r - r') - G_{(j)}(\chi_q, r + r'), \tag{1.2}$$

где [4], [5]

$$G_{(1)}(\chi_q, r) = \frac{-i}{K_q^{(1)}} \frac{\mathrm{sh}[(\pi/2 + i\chi_q)mr]}{\mathrm{sh}(\pi mr/2)}, \tag{1.3}$$

$$G_{(2)}(\chi_q, r) = \frac{(4m\,\mathrm{ch}\chi_q)^{-1}}{\mathrm{ch}(\pi mr/2)} - \frac{i}{K_q^{(2)}} \frac{\mathrm{sh}[(\pi + i\chi_q)mr]}{\mathrm{sh}(\pi mr)},$$

$$G_{(3)}(\chi_q, r) = \frac{-i}{K_q^{(3)}} \frac{\mathrm{ch}[(\pi/2 + i\chi_q)mr]}{\mathrm{ch}(\pi mr/2)},$$

$$G_{(4)}(\chi_q, r) = \frac{-i}{K_q^{(4)}} \frac{\mathrm{sh}[(\pi + i\chi_q)mr]}{\mathrm{sh}(\pi mr)}.$$

В формулах (1.3) использованы обозначения

$$K_q^{(1)} = K_q^{(2)} = m\,\mathrm{sh}\,2\chi_q;$$

$$K_q^{(3)} = K_q^{(4)} = 2m\,\mathrm{sh}\,\chi_q.$$

В дальнейшем нам понадобятся асимптотики ФГ (1.2) при $r \to \infty$:

$$G_{(j)}(\chi_q, r, r')\Big|_{r\to\infty} \cong \\ \cong \frac{-2}{K_q^{(j)}} \sin\left(\chi_q mr'\right)\exp\left(i\chi_q mr\right). \tag{1.4}$$

Рассмотрим решения релятивистских уравнений для состояний рассеяния (1.1) в случае взаимодействия, моделируемого δ-потенциалом

$$V(r) = V_0\delta(r - a), \tag{1.5}$$

где V_0 и $a > 0$ – вещественные константы. Потенциал (1.5) локализован на поверхности сферы конечного радиуса $a > 0$ (на «δ-сфере»). ВФ для потенциала (1.5) имеют следующий вид:

$$\psi_{(j)}(\chi_q, r) = \sin(\chi_q mr) + \\ +V_0 A_{(j)}^{-1}(\chi_q)\sin(\chi_q ma)G_{(j)}(\chi_q, r, a); \\ A_{(j)}(\chi_q) = 1 - V_0 G_{(j)}(\chi_q, a, a). \tag{1.6}$$

Учитывая (1.4), асимптотики ВФ (1.6) при $r \to \infty$ можно представить в виде

$$\psi_{(j)}(\chi_q, r)\Big|_{r\to\infty} \cong \sin(\chi_q mr) + \\ +q\, f_{(j)}(\chi_q)\exp(i\chi_q ma),$$

$$f_{(j)}(\chi_q) = \frac{-2V_0 \sin^2(\chi_q ma)}{qK_q^{(j)} A_{(j)}(\chi_q)}, \tag{1.7}$$

где $q = m\,\mathrm{sh}\,\chi_q$ – релятивистский импульс, $f_{(j)}(\chi_q)$ – релятивистская амплитуда рассеяния, которая определена так же, как и в нерелятивистской теории – в виде коэффициента при рассеянной волне в асимптотике ВФ, разделенного на импульс [9] (релятивистская рассеянная волна имеет вид $\exp(i\chi_q mr)$ [3]).

Выражения для амплитуд рассеяния, соответствующие четырём вариантам уравнений, могут быть представлены формулами

$$f_{(1)}(\chi_q) = \frac{-2V_0 q^{-1}\sin^2(\chi_q ma)}{K_q^{(1)} + V_0\left[\sin(2\chi_q ma)\,\mathrm{cth}(\pi ma) - 2\dfrac{\chi_q}{\pi} + 2i\sin^2(\chi_q ma)\right]}; \tag{1.8}$$

$$f_{(2)}(\chi_q) = \frac{-2V_0 q^{-1}\sin^2(\chi_q ma)}{K_q^{(2)} + V_0\left[\sin(2\chi_q ma)\,\mathrm{cth}(2\pi ma) - \dfrac{\chi_q}{\pi} - \dfrac{\mathrm{sh}(\chi_q)\mathrm{sh}^2(\pi ma/2)}{\mathrm{ch}(\pi ma)} + 2i\sin^2(\chi_q ma)\right]};$$

$$f_{(3)}(\chi_q) = \frac{-2V_0 q^{-1}\sin^2(\chi_q ma)}{K_q^{(3)} + V_0\left[\sin(2\chi_q ma)\,\mathrm{th}(\pi ma) + 2i\sin^2(\chi_q ma)\right]};$$

$$f_{(4)}(\chi_q) = \frac{-2V_0 q^{-1}\sin^2(\chi_q ma)}{K_q^{(4)} + V_0\left[\sin(2\chi_q ma)\,\mathrm{cth}(2\pi ma) - \chi_q/\pi + 2i\sin^2(\chi_q ma)\right]}.$$

Зная амплитуду рассеяния $f_{(j)}(\chi_q)$, можно получить информацию о рассеянии частиц. Например, парциальное сечение рассеяния *s*-волны $\sigma_{0(j)}(\chi_q)$ и парциальная *S*-матрица $S_{(j)}(\chi_q)$ соответственно выражаются через амплитуду рассеяния $f_{(j)}(\chi_q)$ соотношениями

$$\sigma_{0(j)}(\chi_q) = 4\pi \left| f_{(j)}(\chi_q) \right|^2 ;$$

$$S_{(j)}(\chi_q) = 1 + 2iq\, f_{(j)}(\chi_q). \qquad (1.9)$$

Нетрудно видеть, что амплитуды рассеяния (1.8) удовлетворяют условию унитарности [3], которое имеет вид, аналогичный нерелятивистскому выражению [9]:

$$\operatorname{Im} f_{(j)}(\chi_q) = q \left| f_{(j)}(\chi_q) \right|^2 . \qquad (1.10)$$

Из выражений (1.7) следует, что условие унитарности эквивалентно следующему свойству ФГ (1.2):

$$\operatorname{Im} G_{(j)}(\chi_q, a, b) = \\ = -2\sin(\chi_q ma)\sin(\chi_q mb) \big/ K_q^{(j)} . \qquad (1.11)$$

Парциальные S-матрицы могут быть представлены в следующем виде:

$$S_{(j)}(\chi_q) = 1 - \frac{4iV_0 \sin^2(\chi_q ma)}{K_q^{(j)} A_{(j)}(\chi_q)} = \frac{\left(A_{(j)}(\chi_q)\right)^*}{A_{(j)}(\chi_q)}, \qquad (1.12)$$

из которых унитарность S-матрицы очевидна. Унитарность S-матрицы учитывается в следующем представлении

$$S_{(j)}(\chi_q) = \exp\left(2i\,\phi_{(j)}(\chi_q)\right),$$

на основе которого определяется фазовый сдвиг $\phi_{(j)}(\chi_q)$. Фазовые сдвиги могут быть найдены по формулам

$$\operatorname{tg}\left(2\phi_{(j)}(\chi_q)\right) = \frac{-4V_0\left[1 - V_0 \operatorname{Re} G_{(j)}(\chi_q, a, a)\right]\sin^2(\chi_q ma)}{K_q^{(j)}\left[\left(1 - V_0 \operatorname{Re} G_{(j)}(\chi_q, a, a)\right)^2 - \left(2V_0 \sin^2(\chi_q ma) \big/ K_q^{(j)}\right)^2\right]}. \qquad (1.13)$$

На рисунке 1.1 приведены результаты численных расчётов сечений рассеяния и фазовых сдвигов, найденных для $m = 1$, $a = 5$, $V_0 = 2$ (номер кривой на всех рисунках равен индексу уравнения j).

Из выражений (1.8) следует и на рисунке 1.1 видно, что $\sigma_{0(j)}(\chi_q) \to 0$ при $\chi_q \to \infty$, что естественно. Видно также, что сечения рассеяния могут быть равны нулю при некоторых конечных значениях быстроты χ_q. В нерелятивистской теории аналогичный эффект обращения в ноль парциального сечения рассеяния при конечных значениях импульса известен как эффект Рамзауэра – Таунсенда [9]. Амплитуда рассеяния в случае δ-потенциала равна нулю, если выполняется одинаковое для всех уравнений условие

$$\chi_q m\, a = \pi n, \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Из этого условия следует, что число нулей каждой амплитуды рассеяния бесконечно, и они отстоят друг от друга на одинаковом расстоянии, обратно пропорциональном произведению радиуса «δ-сферы» и массы частицы.

2 Решение в случае суперпозиции двух δ-потенциалов

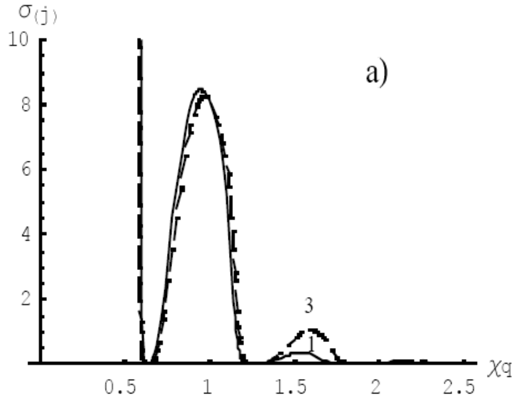
Найдём решения уравнений для состояний рассеяния (1.1) и выражения для амплитуд рассеяния в случае суперпозиции двух δ-потенциалов:

$$V(r) = V_1\delta(r - a_1) + V_2\delta(r - a_2), \qquad (2.1)$$

где $V_{1,2}$, $a_{1,2}$ – вещественные постоянные и $a_2 > a_1 > 0$. Подставляя (2.1) в уравнения (1.1), получим ВФ в следующем общем виде:

$$\psi_{(j)}(\chi_q, r) = \sin(\chi_q mr) + \\ + \sum_{s=1}^{2} V_s\, G_{(j)}(\chi_q, r, a_s)\, \psi_{(j)}(\chi_q, a_s). \qquad (2.2)$$

Содержащиеся в (2.2) величины $\psi_{(j)}(\chi_q, a_{1,2})$ могут быть найдены. Для их определения нужно взять выражения (2.2) в точках $r = a_1$ и $r = a_2$. В результате будет получена система двух линейных алгебраических уравнений для $\psi_{(j)}(\chi_q, a_1)$, $\psi_{(j)}(\chi_q, a_2)$. Решая эту систему и подставляя решение в (2.2), получим следующие выражения для ВФ:



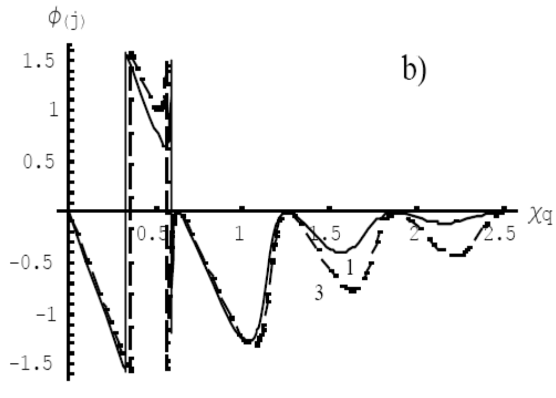


Рисунок 1.1 – Сечения рассеяния (a) и соответствующие им фазовые сдвиги (b) для δ-потенциала как функции быстроты

$$\psi_{(j)}(\chi_q, r) = \sin(\chi_q m r) + \\ + \frac{1}{\Delta_{(j)}(\chi_q)} \sum_{s=1}^{2} V_s\, G_{(j)}(\chi_q, r, a_s)\, \Delta_{s(j)}(\chi_q), \quad (2.3)$$

где введены обозначения

$$\Delta_{(j)}(\chi_q) = \prod_{s=1}^{2}\left[1 - V_s G_{(j)}(\chi_q, a_s, a_s)\right] - \\ - V_1 V_2 G_{(j)}^2(\chi_q, a_1, a_2);$$

$$\Delta_{1(j)}(\chi_q) = \sin(\chi_q m a_1)\left[1 - V_2 G_{(j)}(\chi_q, a_2, a_2)\right] + \\ + V_2 \sin(\chi_q m a_2) G_{(j)}(\chi_q, a_1, a_2);$$

$$\Delta_{2(j)}(\chi_q) = \sin(\chi_q m a_2)\left[1 - V_1 G_{(j)}(\chi_q, a_1, a_1)\right] + \\ + V_1 \sin(\chi_q m a_1) G_{(j)}(\chi_q, a_1, a_2).$$

Учитывая асимптотическое поведение ВФ (2.3) при $r \to \infty$, получим следующие формулы для амплитуд рассеяния:

$$f_{(j)}(\chi_q) = \frac{-2}{q K_q^{(j)} \Delta_{(j)}(\chi_q)} \times \\ \times \sum_{s=1}^{2} V_s \Delta_{s(j)}(\chi_q) \sin(\chi_q m a_s). \quad (2.4)$$

Выражения (2.3), (2.4) для конкретных j имеют довольно громоздкий вид. Например, в случае модифицированного уравнения Логунова-Тавхелидзе ($j = 3$) амплитуда рассеяния имеет форму

$$f_{(3)}(\chi_q) = \frac{F_1 + F_2}{q K_q^{(3)} \left(F_3 + i F_4\right)},$$

где

$$F_1 = V_1 \sin^2(\chi_q m a_1) \times \\ \times \left[1 + \frac{V_2}{K_q^{(3)}} \mathrm{th}(\pi m a_2) \sin(2\chi_q m a_2)\right] + \\ + V_2 \sin^2(\chi_q m a_2)\left[1 + \frac{V_1}{K_q^{(3)}} \mathrm{th}(\pi m a_1) \sin(2\chi_q m a_1)\right];$$

$$F_2 = \frac{2 V_1 V_2}{K_q^{(3)}} \sin(\chi_q m a_1) \sin(\chi_q m a_2) \times \\ \times \left[\sin(\chi_q m(a_2 - a_1)) \mathrm{th}\frac{\pi m(a_2 - a_1)}{2} - \right. \\ \left. - \sin(\chi_q m(a_2 + a_1)) \mathrm{th}\frac{\pi m(a_2 + a_1)}{2}\right];$$

$$F_3 = \prod_{s=1}^{2}\left[1 + \frac{V_s}{K_q^{(3)}} \mathrm{th}(\pi m a_s) \sin(2\chi_q m a_s)\right] - \\ - \frac{V_1 V_2}{\left(K_q^{(3)}\right)^2}\left[\mathrm{th}\frac{\pi m(a_2 - a_1)}{2} \sin(2\chi_q m(a_2 - a_1)) - \right. \\ \left. - \mathrm{th}\frac{\pi m(a_2 + a_1)}{2} \sin(2\chi_q m(a_2 + a_1))\right]^2;$$

$$F_4 = \frac{2 V_1 \sin^2(\chi_q m a_1)}{K_q^{(3)}} \mp \\ \mp \left[1 + \frac{V_2}{K_q^{(3)}} \mathrm{th}(\pi m a_2) \sin(2\chi_q m a_2)\right] + \\ + \frac{2 V_2 \sin^2(\chi_q m a_2)}{K_q^{(3)}}\left[1 + \frac{V_1}{K_q^{(3)}} \mathrm{th}(\pi m a_1) \sin(2\chi_q m a_1)\right] + \\ + \frac{4 V_1 V_2}{\left(K_q^{(3)}\right)^2} \sin(\chi_q m a_1) \sin(\chi_q m a_2) \times \\ \times \left[\mathrm{th}\frac{\pi m(a_2 - a_1)}{2} \sin(\chi_q m(a_2 - a_1)) - \right. \\ \left. - \mathrm{th}\frac{\pi m(a_2 + a_1)}{2} \sin(\chi_q m(a_2 + a_1))\right]^2.$$

Амплитуды (2.4) удовлетворяют условию унитарности (1.10), которое, как и в случае одного δ-потенциала, эквивалентно свойству ФГ (1.11).

Для суперпозиции δ-потенциалов S-матрицы $S_{(j)}(\chi_q)$ и фазовые сдвиги $\phi_{(j)}(\chi_q)$ также могут быть представлены в аналогичной (1.12) и (1.13) форме

$$S_{(j)}(\chi_q) = 1 - \left[4i\left(V_1 \sin(\chi_q m a_1) \Delta_{1(j)}(\chi_q) + \right.\right. \\ \left.\left. + V_2 \sin(\chi_q m a_2) \Delta_{2(j)}(\chi_q)\right)\right] / \left(K_q^{(j)} \Delta_{(j)}(\chi_q)\right) = \\ = \frac{\left(\Delta_{(j)}(\chi_q)\right)^*}{\Delta_{(j)}(\chi_q)}. \quad (2.5)$$

$$\tan\left(2\phi_{(j)}(\chi_q)\right) = \\ = \frac{-2 \operatorname{Re} \Delta_{(j)}(\chi_q) \operatorname{Im} \Delta_{(j)}(\chi_q)}{\left(\operatorname{Re} \Delta_{(j)}(\chi_q)\right)^2 - \left(\operatorname{Im} \Delta_{(j)}(\chi_q)\right)^2}, \quad (2.6)$$

где

$$\operatorname{Re} \Delta_{(j)}(\chi_q) = \prod_{s=1}^{2}\left[1 - V_s \operatorname{Re} G_{(j)}(\chi_q, a_s, a_s)\right] - \\ - V_1 V_2 \left[\operatorname{Re} G_{(j)}(\chi_q, a_2, a_1)\right]^2;$$

$$\operatorname{Im} \Delta_{(j)}(\chi_q) = 2 V_1 \sin^2(\chi_q m a_1) \times \\ \times \left[1 - V_2 \operatorname{Re} G_{(j)}(\chi_q, a_2, a_2)\right] / K_q^{(j)} + \\ + 2 V_2 \sin^2(\chi_q m a_2) \times \\ \times \left[1 - V_1 \operatorname{Re} G_{(j)}(\chi_q, a_1, a_1)\right] / K_q^{(j)} + \\ + 4 V_1 V_2 \sin(\chi_q m a_1) \sin(\chi_q m a_2) \times \\ \times \operatorname{Re} G_{(j)}(\chi_q, a_2, a_1) / K_q^{(j)}.$$

Выражения (2.3)–(2.6) для конкретных j имеют довольно громоздкий вид, поэтому мы не приводим их. Результаты численных расчётов сечений рассеяния и фазовых сдвигов для $j = 1, 2, 3, 4$ при $m = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $V_1 = 1$, $V_2 = -1$ проиллюстрированы на рисунке 2.1.

Условия обращения в нуль сечений рассеяния для суперпозиции двух δ-потенциалов имеют вид

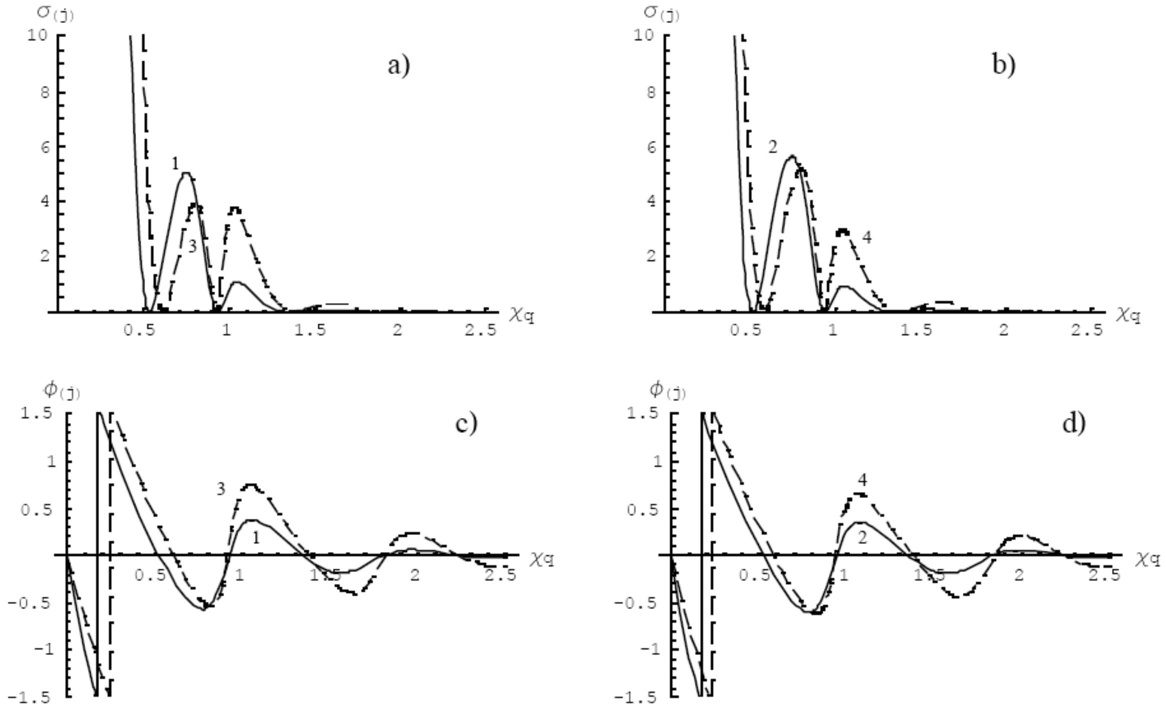


Рисунок 2.1 – Сечения рассеяния (a, b) и соответствующие им фазовые сдвиги (c,d) для суперпозиции двух δ-потенциалов как функции быстроты

$$\begin{gathered}V_2\sin^2(\chi_q m a_2)+V_1\sin^2(\chi_q m a_1)+\\ +V_1V_2\Big[2\sin(\chi_q m a_2)\sin(\chi_q m a_1)G_{(j)}(\chi_q,a_2,a_1)-\\ -\sin^2(\chi_q m a_1)G_{(j)}(\chi_q,a_2,a_2)-\\ -\sin^2(\chi_q m a_2)G_{(j)}(\chi_q,a_1,a_1)\Big]=0.\end{gathered}\tag{2.7}$$

Например, для $j=3$ условие (2.7) принимает форму

$$\begin{gathered}V_2\sin^2(\chi_q m a_2)+V_1\sin^2(\chi_q m a_1)+\\ +\frac{2V_1V_2}{K_q^{(3)}}\sin(\chi_q m a_1)\sin(\chi_q m a_2)\times\\ \times\Bigg[\operatorname{th}\frac{\pi m(a_2-a_1)}{2}\sin\big(\chi_q m(a_2-a_1)\big)-\\ -\operatorname{th}\frac{\pi m(a_2+a_1)}{2}\sin\big(\chi_q m(a_2+a_1)\big)+\\ +\operatorname{th}(\pi m a_1)\sin(\chi_q m a_2)\cos(\chi_q m a_1)+\\ +\operatorname{th}(\pi m a_2)\sin(\chi_q m a_1)\cos(\chi_q m a_2)\Bigg]=0\,.\end{gathered}$$

При $\chi_q\to\infty$ выражения (2.7) обращаются в равенство

$$V_2\sin^2(\chi_q m a_2)+V_1\sin^2(\chi_q m a_1)=0,\tag{2.8}$$

из которого следует:

1) при $V_1V_2<0$ число нулей амплитуд рассеяния $f_{(j)}(\chi_q)$ бесконечно;

2) при $V_1V_2>0$ уравнение (2.8) имеет бесконечное число решений только, если отношение a_2/a_1 – рациональное число; в противном случае амплитуда рассеяния имеет конечное число нулей.

3 Нерелятивистский предел

Определим теперь нерелятивистский предел полученных результатов. В этом пределе полученные для потенциала «δ-сфера» ВФ (1.6), амплитуды рассеяния (1.8) имеют одинаковый для всех рассматриваемых уравнений вид

$$\begin{gathered}\lim_{\substack{\chi_q\to 0\\ m\to\infty}}\psi_{(j)}(\chi_q,r)=\psi_{(0)}(q,r)=\\ =\sin(qr)+\frac{V_0\sin(qa)G_{(0)}(q,r,a)}{q+V_0\sin(qa)\exp(iqa)},\end{gathered}\tag{3.1}$$

$$\begin{gathered}\lim_{\substack{\chi_q\to 0\\ m\to\infty}}f_{(j)}(\chi_q)=f_{(0)}(q)=\\ =\frac{-V_0\sin^2(qa)}{q\left[q+V_0\sin(qa)\exp(iqa)\right]},\end{gathered}\tag{3.2}$$

где $q=\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ \chi_q\to 0}} m\chi_q$ – нерелятивистский импульс, $G_{(0)}(q,r,r')$ – нерелятивистская ФГ [9]. Нерелятивистский предел найденных для суперпозиции двух «δ-сфер» ВФ (2.3) и амплитуд рассеяния (2.4) для всех *j* может быть записан как

$$\begin{gathered}\psi_{(0)}(q,r)=\sin(qr)+\frac{1}{\Delta_{(0)}(q)}\times\\ \times\Big[V_1\sin(q\,a_1)G_{(0)}(q,r,a_1)+V_2\big(\sin(q\,a_2)+\\ +V_1/q\sin(q\,a_1)\sin(q\,a_2-q\,a_1)\big)G_{(0)}(q,r,a_2)\Big],\end{gathered}\tag{3.3}$$

$$\begin{gathered}f_{(0)}(q)=\frac{-\sin(q\,a_2)}{q^2\Delta_{(0)}(q)}\Bigg[\sum_{s=1}^{2}V_s\sin(q\,a_s)+\\ +V_1V_2/q\sin(q\,a_1)\sin(q\,a_2-qa_1)\Bigg],\end{gathered}\tag{3.4}$$

где

$$\Delta_{(0)}(q) = 1 + 1/q \prod_{s=1}^{2} V_s \exp(iqa_s)\sin(qa_s) + \\ + V_1 V_2 / q^2 \exp(iqa_2)\sin(qa_1)\sin(qa_2 - qa_1). \quad (3.5)$$

Формулы (3.1)–(3.5) совпадают с выражениями, полученными при решении уравнения Шрёдингера с соответствующими потенциалами.

Заключение

Таким образом, в данной работе найдены точные решения релятивистских двухчастичных интегральных уравнений в релятивистском конфигурационном представлении, описывающих *s*-состоянии рассеяния в случае δ-потенциала, локализованного на сфере конечного радиуса – «δ-сфере» и суперпозиции двух δ-потенциалов. На основании полученных решений вычислены парциальные амплитуды рассеяния, сечения рассеяния, *S*-матрицы и фазовые сдвиги. Численно и аналитически исследованы некоторые свойства полученных результатов, а именно: доказано условие двухчастичной унитарности для амплитуд рассеяния; установлено, что это условие для найденных амплитуд рассеяния является следствием тождества, которому удовлетворяют мнимые части релятивистских функций Грина; найдены условия обращения амплитуд рассеяния в ноль при конечных значениях быстроты. Нерелятивистский предел полученных результатов совпадает с соответствующими выражениями, полученными на основании решений уравнения Шрёдингера с δ-потенциалом и с суперпозицией двух δ-потенциалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Logunov*, *A.A.* Quasi-optical approach in quantum field theory / A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze // Nuovo Cimento. – 1963. – Vol. 29, № 2. – P. 380–399.

2. *Kadyshevsky*, *V.G.* Quasipotential type equation for the relativistic scattering amplitude / V.G. Kadyshevsky // Nucl. Phys. – 1968. – Vol. B6, № 1. – P. 125–148.

3. *Кадышевский*, *В.Г.* Трёхмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел / В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков // ЭЧАЯ. – 1972. – Т. 2, № 3. – С. 635–690.

4. *Капшай*, *В.Н.* Разложение по матричным элементам УНП группы Лоренца и интегральные уравнения для релятивистских волновых функций / В.Н. Капшай, Т.А. Алфёрова // Ковариантные методы в теоретической физике: Сб. ст. – Ин-т физики НАН Беларуси. – Минск, 1997. – Вып. 4. – С. 88–95.

5. *Alferova*, *T.A.* Expansion in terms of matrix elements of the Lorentz group unitary irreducible representations and integral equations for scattering states relativistic wave functions / T.A. Alferova, V.N. Kapshai // Nonlinear phenomena in complex systems: Proced. of the Sixth Annual Seminar NPCS'97 / Academy of Sciences of Belarus. Inst. of Phys. – Minsk, 1998. – P. 78–85.

6. *Демков*, *Ю.Н.* Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике / Ю.Н. Демков, В.Н. Островский. – Ленинград: Издательство Ленинградского университета, 1975. – 240 с.

7. *Kapshai*, *V.N.* Relativistic two-particle one-dimensional scattering problem for superposition of δ-potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // J. Phys. A. – 1999. – Vol. 32. – P. 5329–5342.

8. *Kapshai*, *V.N.* One-dimensional relativistic problems on bound states and scattering for a superposition of two δ potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // Russian Physics Journal. – 2002. – Vol. 45. – P. 1–9.

9. *Тейлор*, *Дж.* Теория рассеяния / Дж. Тейлор. – М.: Мир, 1975. – 568 с.

Поступила в редакцию 15.05.15.

УДК 621.396

СОЗДАНИЕ ПЛАНАРНЫХ МЕТАМАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ Ω-ЭЛЕМЕНТОВ С ОПТИМАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ С ПОМОЩЬЮ ВАКУУМНО-ПЛАЗМЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

М.А. Подалов, И.В. Семченко, С.А. Хахомов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

CREATING OF PLANAR METAMATERIALS BASED ON Ω-ELEMENTS WITH OPTIMAL PARAMETERS BY USING THE VACUUM-PLASMA TECHNOLOGIES

M.A. Podalov, I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Созданы и исследованы Ω-структуры с оптимальными параметрами, полученные с помощью магнетронного напыления. Металлическое покрытие в виде Ω-элементов наносилось на слой полиамида или фторопласта. Образцы исследованы в безэховой камере как преобразователи поляризации СВЧ излучения. Структуры на фторопластовой подложке преобразовывали падающую линейно поляризованную волну в отражённую эллиптически поляризованную с коэффициентом эллиптичности $K = 0.53–0.57$ на частоте 3.7 ГГц, а при полиамидной подложке – в волну с коэффициентом эллиптичности $K = 0.36–0.47$ на той же частоте.

Ключевые слова: *магнетронное распыление, эллиптичность, полимерная подложка, метаматериал, Ω-элемент.*

Creation and investigation of Ω-structures with optimal parameters obtained by magnetron sputtering are described. A metallic coating in the form of Ω-elements was deposited on a layer of polyamide or polytetrafluorethylene. The samples were investigated in the anechoic chamber as polarization transformers of microwave radiation. Structures on the polytetrafluorethylene substrate converted incident linearly polarized wave into the reflected elliptically polarized with the ellipticity coefficient $K = 0.53–0.57$ at a frequency of 3.7 GHz, while on the polyamide substrate – into a wave with the axial ratio $K = 0.36–0.47$ at the same frequency.

Keywords: *magnetron sputtering, ellipticity, polymer substrate, metamaterial, Ω-element.*

Введение

К метаматериалам относят такие искусственные структуры, которые обладают свойствами, не встречающимися у природных материалов [1]–[6]. Объектом исследования является Ω-элемент как составляющая метаматериалов. Искусственные Ω-структуры не являются киральными, но обладают магнитоэлектрическими свойствами [7]–[11]. Основными предметами исследования являются коэффициент эллиптичности волны, отражённой от образца, интенсивность отраженной и прошедшей волн. Оптимальные параметры Ω-элемента были рассчитаны ранее с помощью моделей квазистационарного и гармонического тока [9]. Оптимальность параметров означает, что в каждом Ω-элементе под действием падающей электромагнитной волны индуцируются одинаково значимые электрический дипольный момент и магнитный момент. Эти моменты в идеальном случае дают одинаковый вклад в отражённую волну, которая приобретает циркулярную поляризацию, в отличие от падающей линейно поляризованной волны. В прежних работах подобные структуры создавались путём изготовления Ω-элементов вручную из проволоки с помощью шаблона с предварительно рассчитанными параметрами и помещения этих Ω-частиц на подложку из пенопласта. В то же время создание метаматериалов предполагает достаточно плотное расположение элементов в пространстве, на расстояниях, существенно меньших длины волны электромагнитного поля. Кроме того, каждый элемент, или «атом» метаматериала, должен обладать резонансными свойствами. Этого можно добиться, если приблизить длину Ω-элемента в вытянутом состоянии к половине длины волны электромагнитного поля. Поэтому создание метаматериалов не только для СВЧ, но и для терагерцового и инфракрасного диапазонов предполагает миниатюризацию их элементов. В этой связи перспективным представляется использование вакуумно-плазменных технологий. В данной статье такие технологии, в частности, магнетронное распыление, применены для создания Ω-структур на полимерной подложке из полиамида или фторопласта, обладающих свойствами метаматериалов. Метаматериалы на основе оптимальных спиральных элементов ранее исследованы в [12]–[22].

1 Магнетронное распыление

В работе использовалось магнетронное распыление, при котором основным источником нагрева подложки является энергия, выделяемая при торможении и конденсации осаждаемых атомов вещества мишени, в результате чего температура подложки не превышает 100–200°С. Это дает возможность напылять пленки на подложки из материалов с малой термостойкостью. Магнетронные распылительные системы широко используются в технологиях нанесения покрытий вакуумно-плазменными методами. Действие магнетронной распылительной системы основано на распылении поверхности катода-мишени ускоренными ионами, образующимися в плазме тлеющего разряда в скрещенных электрическом и магнитном полях, и формировании потоков атомов материала мишени в направлении поверхности, на которую осаждается покрытие [23].

Для магнетронного напыления объектов Ω-подобной формы на подложки из полимеров была изготовлена маска. Для создания маски в пластине нержавеющей стали 08Х18Н10 вырезались отверстия Ω-образной формы (рисунки 1.1 и 1.2).

Рисунок 1.1 – Процесс вырезания лазером YAG маски из пластины нержавеющей стали 08Х18Н10

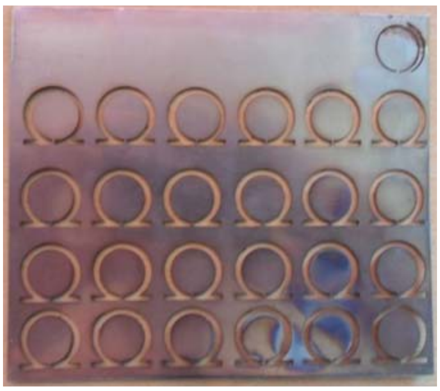


Рисунок 1.2 – Изготовленная маска с Ω-структурой

Для лазерной резки применялся твердотельный лазер YAG со следующими характеристиками: длиной волны $\lambda = 1{,}064$ мкм, мощностью Рср = 50 Вт, максимальной энергией лазерного импульса 790 мДж, расходимостью 0,8 мРад, частотой 50 Гц и длительностью импульса 1 мсек.

На подложку из фторопласта или полиамида распылялась медь через маску, содержащую 24 выреза Ω-подобной формы. После использования магнетронного распыления получены две плоские двумерные анизотропные решетки (рисунок 1.3).

а)

б)

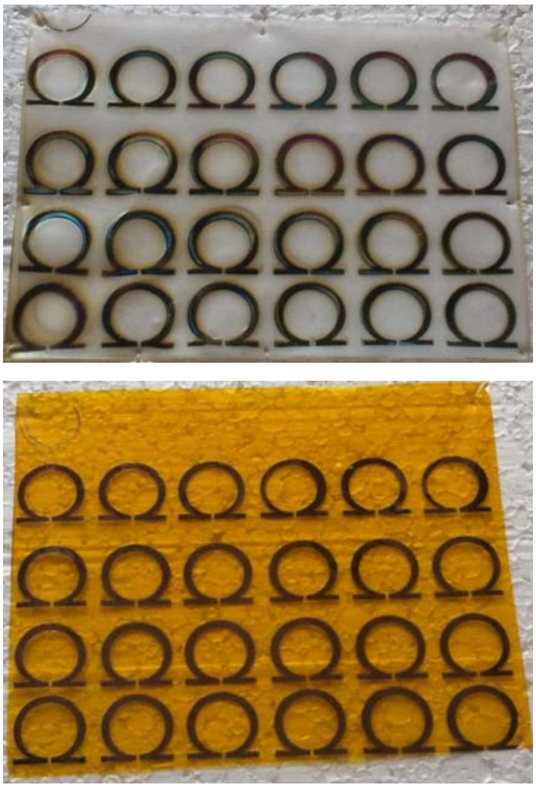


Рисунок 1.3 – Изготовленные образцы с Ω-структурой:
а) на подложке из фторопласта;
б) на подложке из полиамида

2 Экспериментальное исследование

Исследована эллиптичность волн при отражении от полученных образцов, схема эксперимента нами ранее подробно описывалась в работе [24].

Структуры исследовались в безэховой камере в частотном интервале $2.5 \div 3.8$ ГГц. Вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ падающей волны направлен вдоль плеч Ω-элемента, либо перпендикулярно плечам. Волновой вектор $\vec{k}$ падающей волны направлен под углом 45 градусов к плоскости решетки (рисунок 2.1).

Изготовлены два образца, содержащие Ω-элементы (рисунок 2.2) со следующими параметрами: $r = 6.6 \cdot 10^{-3}$ м, $L = 0.05$ м, $d = 15.5 \cdot 10^{-4}$ м, $l_0 = 3.75 \cdot 10^{-3}$ м, $l = 3 \cdot 10^{-4}$ м, где r – радиус витка, L – длина полосы напыления, d – ширина полосы напыления, l_0 – длина плеча, l – расстояние между плечами в образце.

Проведены исследования коэффициента эллиптичности электромагнитной волны, отраженной от образца, в зависимости от частоты падающего излучения. Коэффициент эллиптичности K отраженной волны вычисляли непосредственно из поляризационной диаграммы как отношение минимального и максимального значений уровня сигнала, которые определяли по индикаторам приемника. В результате проведенных экспериментов в безэховой камере была получена зависимость коэффициента эллиптичности K отраженной волны от частоты волны.

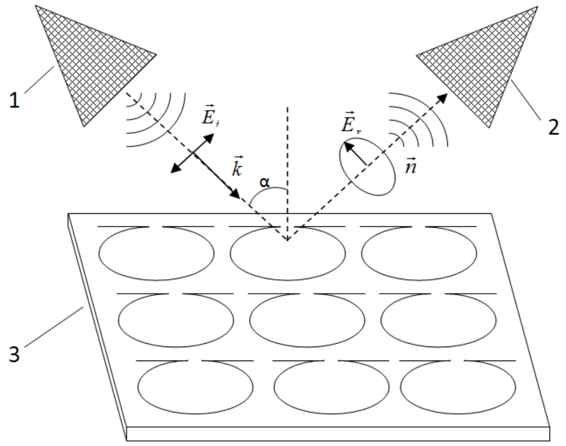


Рисунок 2.1 – Ориентация Ω-элементов в образце искусственной среды относительно падающей волны (1, 2 – излучающая и приемная антенны, 3 – образец двумерной решетки, угол падения α=45°)

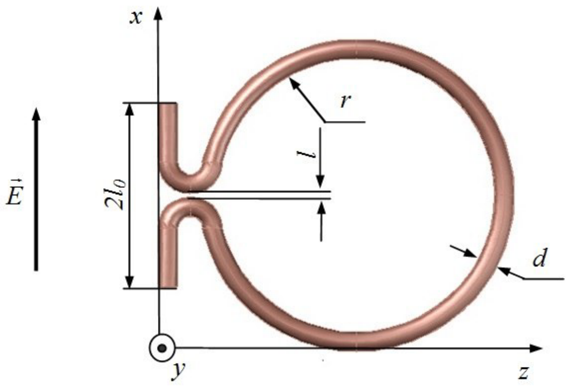


Рисунок 2.2 – Ω-элемент в поле падающей волны

В процессе эксперимента плечи Ω-элементов лежали в плоскости падения. Были исследованы два случая. В первом случае колебания вектора напряженности электрического поля перпендикулярны плечам Ω-элементов (рисунок 2.3).

Во втором случае вектор напряженности электрического поля падающей волны ориентирован параллельно плечам Ω-элемента (рисунок 2.4).

Как видно из графиков, коэффициент эллиптичности на частоте 3.7 ГГц достигает значений $K = 0.57$ и $K = 0.53$ (рисунки 2.3 и 2.4) при различной ориентации вектора напряженности электрического поля для фторопласта. В случае подложки из полиамида коэффициент эллиптичности достигает максимума также на частоте 3.7 ГГц и принимает значения $K = 0.36$ и $K = 0.47$ (рисунки 2.3 и 2.4).

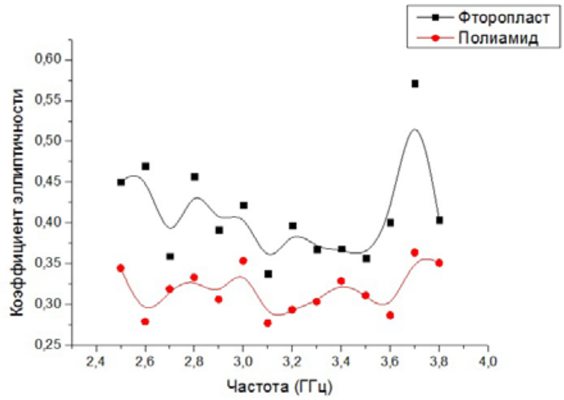


Рисунок 2.3 – График частотной зависимости коэффициента эллиптичности электромагнитной волны, отражённой от двумерной решетки, образованной 24 Ω-элементами

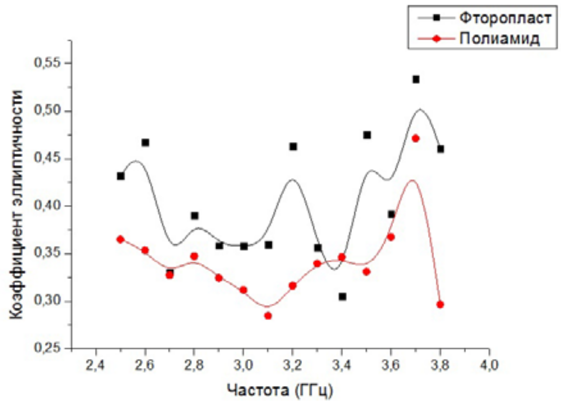


Рисунок 2.4 – График частотной зависимости коэффициента эллиптичности электромагнитной волны, отражённой от двумерной решетки, образованной 24 Ω-элементами

Использование вакуумно-плазменных технологий магнетронного распыления металлов на полимерные подложки из полиамида и фторопласта позволило создать метаматериалы для преобразования поляризации СВЧ волн. Данный вид метаматериалов образован тонкой пленкой металла (меди), распыленного на полимерную подложку, плёнка имеет вид 24-х Ω-элементов оптимальной формы. Исследования, проведённые в безэховой камере для электромагнитных волн СВЧ диапазона, показали способность двумерных решеток на основе полиамида и фторопласта преобразовывать падающую линейно поляризованную волну в отражённую волну с наибольшим коэффициентом эллиптичности $K = 0.53–0.57$ на частоте 3.7 ГГц при фторопластовой подложке и в волну с наибольшим коэффициентом эллиптичности $K = 0.36–0.47$ на этой же частоте при полиамидной подложке. Отличия в коэффициентах эллиптичности отражённой волны обусловлены различной диэлектрической проницаемостью подложек, поскольку у фторопласта $\varepsilon = 2.1$, а у полиамида $\varepsilon = 4$.

Заключение

Данный метод нанесения метаматериалов на полимерные подложки обладает рядом преимуществ перед другими методами получения метаматериалов: отличается относительно высокой точностью в изготовления образцов; возможно промышленное производство, т. к. планарное расположение элементов позволяет наносить элементы на большие поверхности, не меняя существенно производственный цикл, нанесение пленок требует значительно меньшего количества распыляемого материала, чем при других методах изготовления.

Авторы выражают благодарность сотрудникам Международной китайско-белорусской научной лаборатории по вакуумно-плазменным технологиям и научно-исследовательской лаборатории «Физикохимия и технологии микро- и наноразмерных систем» Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины Пилипцову Д.Г., Федосенко Н.Н., Савченко О.В., а также Надточаеву С.В. за помощь в изготовлении образцов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Advances in Complex Electromagnetic Materials* / A. Priou [et al.] // Kluwer Academic Publishers, 1997. – Vol. 28. – P. 32–37.

2. *Electromagnetics of bi-anisotropic materials: Theory and applications* / A.N. Serdyukov, I.V. Semchenko, S.A Tretyakov, A. Sihvola // Amsterdam : Gordon and Breach Science Publishers, 2001. – P. 308–321.

3. *Исследование свойств искусственных анизотропных структур с большой киральностью* / И.В. Семченко [и др.] // Кристаллография. 2011. – Т. 56, № 3. – С. 398–405.

4. *Semchenko*, *I.V.* Chiral metamaterial with unit negative refraction index / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, S.A. Tretyakov // The European Physical Journal. Applied Physics. – 2009. – T. 46, № 3. – P. 32607.

5. *Reply to comment on reflection and transmission by a uniaxial bi-anisotropic slab under normal incidence of plane waves* / S.A. Tretyakov, A.H. Sihvola, I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov // Journal of Physics D: Applied Physics. – 1999. – T. 32, № 20. – C. 2705–2706.

6. *Electromagnetic waves in artificial chiral structures with dielectric and magnetic properties* / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, S.A. Tretyakov, A.H. Sihvola // Electromagnetics. – 2001. – T. 21, № 5. – C. 401–414.

7. *Излучение циркулярно поляризованных волн сверхвысокочастотного диапазона плоской периодической структурой из Ω-элементов* / И.В. Семченко, С.А. Хахомов, М.А. Подалов, С.А. Третьяков // Радиотехника и электроника. – 2007. – Т. 52, № 9. – С. 1084–1088.

8. *Radiation of circularly polarized microwaves by a plane periodic structure of Ω elements* / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, M.A. Podalov, S.A. Tretyakov // Journal of Communications Technology and Electronics. – 2007. – T. 52, № 9. – C. 1002–1005.

9. *Параметрическое моделирование оптимальных омега-элементов, обеспечивающих преобразование поляризации СВЧ волны метаповерхностью* / С. Цянь, М.А. Подалов, И.В. Семченко, С.А. Хахомов // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. 2014. – № 6 (87). – С. 215–219.

10. *Устройство для преобразования поляризации электромагнитной волны*: пат. 3783 Респ. Беларусь, МПК (2006) H 01 Q 15/00/ И.В. Семченко, С.А. Хахомов, М.А. Подалов; заявитель и патентообладатель УО «Гомельский гос. ун-т. им. Ф. Скорины». – № u 20070065; заявл. 31.01.07; опубл. 30.08.07 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2007. – № 4. – С. 240.

11. *Ground-plane-less bidirectional terahertz absorber based on omega resonators* / A. Balmakou [et al.] // Optics Letters. – 2015. – Vol. 40, № 9 / May 1. – P. 2084–2087.

12. *Подалов*, *М.А.* Оптимальная форма омега-включений для метаматериалов / М.А. Подалов, И.В. Семченко // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – Гомель. – 2009. – № 4 (55), Ч. 2. – С. 172–176.

13. *Устройство для преобразования поляризации*: пат. 9850 Респ. Беларусь: МПК7 H 01 Q 15/00, H 01 Q 21/24 / И.В. Семченко, С.А. Хахомов, А.Л. Самофалов; заявитель и патентообладатель УО «Гомельский гос. ун-т. им. Ф. Скорины». – № a 20050738; заявл. 18.07.2005; опубл. 30.04.2007 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2007. – № 5. – С. 146.

14. *Устройство для преобразования поляризации электромагнитной волны*: пат. 2316857 Рос. Федерация: МПК7 H 01 Q 15/24, H 01 Q 21/06 / И.В. Семченко, С. А. Хахомов, А.Л. Самофалов; заявитель и патенто-обладатель УО «Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины». – № 2006112520/09; заявл. 14.04.2006; опубл. 10.02.2008 // Патенты России. Официальный бюллетень «Изобретения. Полезные модели» (с полным описанием изобретений к патентам) [Элекронный ресурс]: полнотекстовая база данных (602 Мб). − М: ФИПС, 2008.− № 4. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

15. *Преобразователи поляризации электромагнитных волн на основе композитных сред со спиральной структурой* / А.Л. Самофалов, И.А. Фаняев, И.В. Семченко, С.А. Хахомов // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 3 (16). – С. 34–38.

16. *Фаняев*, *И.А.* Дифракция волн на цилиндре, окруженном оптимальными спиралями / И.А. Фаняев, И.В. Семченко, С.А. Хахомов // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2013. – № 6 (81). – С. 208–215.

17. *Численное моделирование поворота плоскости поляризации при отражении СВЧ волны от двумерной решетки на основе металлических спиралей* / И.А. Фаняев, А.Л. Самофалов, И.А. Семченко, С.А. Хахомов // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2012. – № 6 (75). – С. 87–93.

18. *Исследование свойств слабоотражающих метаматериалов с компенсированной киральностью* / И.В. Семченко [и др.] // Кристаллография. – 2014. – Т. 59, № 4. – С. 544–551.

19. *Semchenko*, I.V. Transformation of the polarization of electromagnetic waves by helical radiators / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, A.L. Samofalov // Journal of Communications Technology and Electronics. – 2007. – Т. 52, № 8. – С. 850–855.

20. *Семченко*, *И.В.* Оптимальная форма спирали: равенство диэлектрической, магнитной и киральной восприимчивостей / И.В. Семченко, С.А. Хахомов, А.Л. Самофалов // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2009. – Т. 52, № 5. – С. 30–36.

21. *Поглотители электромагнитного излучения СВЧ-диапазона на основе полимерных композитов и киральных структур* / С. Цянь, В.А. Банный, А.Л. Самофалов, И.В. Семченко, С.А. Хахомов // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 40–45.

22. *Optimal arrangement of smooth helices in uniaxial* 2D-*arrays* / V.S. Asadchy [et al.] // Proc. of 7th International Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics, Metamaterials 2013, 16th–21st September, Bordeaux, France. – P. 244–246.

23. *Данилин*, *Б.С.* Магнетронные распылительные системы / Б.С. Данилин, В.К. Сырчин. – М. : Радио и связь, 1982. – 73 с.

24. *Семченко*, *И.В.* Получение циркулярно-поляризованной отраженной СВЧ волны с помощью плоской периодической структуры на основе омега-элементов / И.В. Семченко, М.А. Подалов // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2006. – № 6 (39), Ч. 2. – С. 40–43.

Поступила в редакцию 17.09.14.

УДК 621.383.4

МНОГОКРАТНЫЕ ОТРАЖЕНИЯ СВЕТА В ПРИЗМЕ СВЯЗИ

А.Б. Сотский, С.О. Парашков

Могилевский государственный университет им. А.А. Кулешова, Могилев, Беларусь

MULTIPLE REFLECTIONS OF LIGHT IN THE PRISM COUPLER

A.B. Sotsky, S.O. Parashkov

A.A. Kuleshov Mogilev State University, Mogilev, Belarus

Рассматривается проблема многократных отражений света в призме связи при волноводной спектроскопии тонких пленок. В рамках двумерной лучевой модели сформулированы алгоритмы расчета траектории светового луча и отражательной способности треугольной призмы связи. Предложены и проиллюстрированы расчетами критерии оптимального выбора углов и оси вращения призмы связи, предполагающие стабилизацию точки ввода излучения в исследуемую слоистую среду и минимизацию влияния лучей высших порядков на отражательную способность призмы связи. Представлены примеры решения обратной задачи волноводной спектроскопии двухслойной структуры оксинитрида кремния на кремниевой подложке.

Ключевые слова: *обратная задача волноводной спектроскопии, многократные отражения света в призме связи, оптимизация призмы связи.*

The problem of multiple reflections of light in the prism coupler at waveguide spectroscopy of thin films is investigated. With the use of a 2D ray model, algorithms for computing the trajectory of a light beam in the triangular prism coupler and the prism reflectivity are developed. Criteria for optimal choice of the prism angles and rotation axis are proposed and illustrated numerically. The criteria imply stabilization of the light insertion point into the layered medium under investigation and minimization of influence of high-order rays to full reflectivity of the prism coupler. Examples of the waveguide spectroscopy inverse problem solution for a bi-layer structure of silicon oxinitride on a silicon substrate are presented.

Keywords: *inverse problem of the waveguide spectroscopy, multiple reflections of light in the prism coupler, optimization of the prism coupler.*

Введение

Одним из эффективных методов оптического контроля параметров тонких пленок и слоистых сред является волноводная спектроскопия [1]. В данном методе сочетаются туннельное возбуждение мод слоистой структуры посредством призмы связи (ПС) и регистрация параметров отраженного светового пучка. При указанном способе возбуждения структуры зондирующее оптическое излучение проникает в нее в виде волноводных мод и взаимодействует с ней на наибольшем по сравнению с альтернативными измерительными схемами расстоянии. Этим определяется максимальная чувствительность метода волноводной спектроскопии к параметрам структуры.

При решении обратной задачи волноводной спектроскопии информация об исследуемой структуре извлекается из распределения интенсивности лазерного пучка, отраженного от ПС. Существует два способа измерения и обработки данного распределения. В первом из них осуществляется анализ фурье-образа отраженного пучка, наблюдаемого в фокальной плоскости объектива [1]. Во втором, который отличается повышенной светосилой, исследуется зависимость отражательной способности ПС от угла падения пучка на ее входную грань. Для измерения данной зависимости разработаны автоматизированная установка [2] и серийно выпускаемая Metricon Corporation установка Model 2010/M Prism Coupler. В настоящей статье анализируются проблемы обработки результатов измерений, характерные для второго из отмеченных способов.

В пионерских работах по методу волноводной спектроскопии [3]–[5] основное внимание уделялось регистрации углового положения минимумов отражательной способности ПС, соответствующих резонансному возбуждению волноводных мод структуры. По этим минимумам определялись вещественные части постоянных распространения мод. Последующее восстановление параметров структуры осуществлялось путем численного решения известных дисперсионных уравнений для мод структуры. Однако такой подход является достаточно грубым, поскольку в нем не учитывается возмущающее влияние ПС на исследуемую среду. Кроме того, он не позволяет оценить показатели поглощения материалов пленок.

Более точная схема обработки отражательной способности ПС в окрестности ее минимумов была предложена в [2]. Она позволяет определить комплексные постоянные распространения волноводных мод. Параметры структуры восстанавливаются в результате численного решения системы дисперсионных уравнений на комплексной плоскости. Недостатками данной схемы является ее сложность, а также то, что она применима к исследованию только многомодовых планарных структур.

В последнее время получил развитие подход, в котором осуществляется непосредственное (без обращения к дисперсионным уравнениям) восстановление параметров планарной структуры за счет обработки угловой зависимости отражательной способности ПС методом наименьших квадратов [6]–[11]. При таком подходе ключевую роль играет корректное теоретическое описание отражательной способности ПС.

В предложенных до настоящего времени теоретических моделях ПС учитывалось только однократное отражение света на всех гранях ПС [6]–[11]. Однако на практике обычно используются высокопреломляющие ПС (в видимом диапазоне их показатель преломления близок к 2, а в ближнем ИК диапазоне он может достигать 3). В такой ситуации многократные внутренние отражения света на гранях ПС могут заметно повлиять на ее полную отражательную способность. В результате названные модели могут привести к ошибкам при решении обратной задачи об определении параметров слоистой структуры.

Соответствующие ограничения анализируются в настоящей работе. В ее первом разделе представлены алгоритмы расчета траектории светового луча в ПС и расчета полной отражательной способности ПС. Во втором разделе исследованы вопросы оптимизации ПС. Речь идет о проблемах стабилизации точки ввода излучения в исследуемую планарную структуру и о минимизации влияния многократных отражений света на гранях ПС на ее полную отражательную способность. Выполнены расчеты, иллюстрирующие влияние многократных отражений света в ПС на результаты решения обратной задачи волноводной спектроскопии и эффективность найденных оптимизационных решений.

1 Расчет траектории луча в ПС

Рассмотрим схему измерения угловой зависимости отражательной способности ПС, представленную на рисунке 1.1 и адекватную установке Model 2010/M Prism Coupler.

Здесь треугольная ПС имеет ребра (1), (2), (3) и грани 1, 2, 3. ПС и примыкающая к ее боковым граням 1 и 3 среда имеют показатели преломления и поглощения n_p, k_p и n_a, k_a, соответственно, причем $k_p << n_p$, $k_a \to 0$. Грань 2 является основанием призмы, контактирующим с исследуемой слоистой структурой. Углы при основании равны θ_1 и θ_2. Пучок света ТЕ, либо ТМ поляризации проходит сквозь входную грань призмы 1, отражается от ее основания и сквозь выходную грань призмы 3 попадает на протяженный фотоприемник Ф. Штриховыми линиями изображены контур призмы и ось пучка при исходном положении измерительной установки. В этом положении ось пучка ортогональна входной грани призмы и пересекает основание призмы в точке c. Данная точка обведена кружком. Она находится на расстоянии a от ребра призмы (1). В дальнейшем точку пересечения оси пучка, прошедшего входную грань призмы и основания призмы мы будем называть точкой ввода излучения в исследуемую структуру. Вращение ПС вместе с прижатой к ее основанию исследуемой слоистой средой осуществляется вокруг оси r, параллельной оси $0z$. В ходе этого вращения фиксированы ось пучка, падающего на входную грань ПС, фотоприемник и система координат $0x_iy_iz$, в которой ось $0x_i$ параллельна основанию призмы в ее исходном положении, а ось вращения имеет координаты $x_i = 0$, $y_i = 0$. С ПС жестко связана подвижная система координат $0xyz$, начало которой совпадает с ребром призмы (1) (рисунок 1.1). В данной системе ось вращения при исходном положении ПС имеет координаты $x_r = \Delta x$, $y_r = \Delta y$. Поворот ПС на угол φ ($\varphi = 0$ соответствует исходному положению установки, $\varphi > 0$ при вращении ПС по часовой стрелке), в соответствии с законом преломления Снеллиуса, сопровождается изменением положения оси светового пучка в призме и на ее выходе. Ось пучка и грани ПС в ее повернутом на угол φ положении изображены на рисунке 1.1 сплошными линиями.

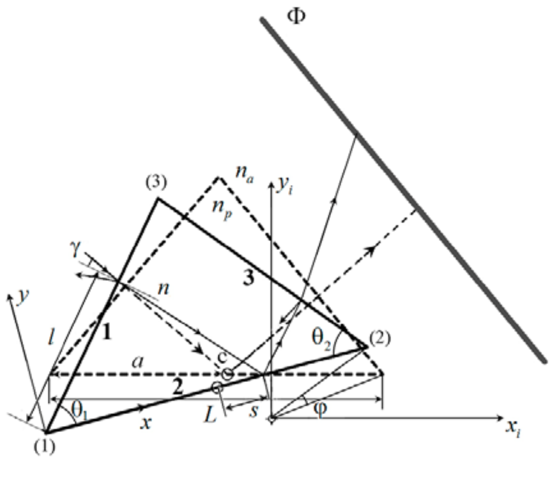


Рисунок 1.1 – Схема вращения призмы связи при измерении ее отражательной способности и сопутствующие системы координат

Заметим, что на рисунке 1.1 не рассматривается многократное внутреннее отражение света на гранях ПС. Соответствующий анализ представлен ниже.

Искомой является полная отражательная способность ПС $\eta_3 = P_3P_0^{-1}$. Здесь P_3 – мощность излучения, вышедшего из ПС через ее выходную грань и регистрируемая фотоприемником Ф, P_0 – мощность светового пучка, падающего на входную грань ПС. В дальнейшем нам понадобятся также величины $\eta_1 = P_1 P_0^{-1}$ и $\eta_2 = P_2 P_0^{-1}$. Здесь P_1 – суммарная мощность излучения, отраженного от входной грани ПС и вышедшего через эту грань в окружающее пространство в результате внутренних отражений излучения в ПС, P_2 – мощность излучения, вышедшая из ПС через ее основание.

Для обсуждаемых измерений характерно условие $k_0 w >> 1$, где $k_0 = 2\pi/\lambda$ – волновое число вакуума, w – радиус светового пучка, поступающего на вход ПС. При данном условии расчет величин η_1, η_2, η_3 может быть выполнен в двумерном лучевом приближении [10]. Для соответствующих вычислений мы будем использовать систему координат $0xy$ (рисунок 1.1).

Рассмотрим отражение светового луча от боковой грани ПС с номером j. Показатели преломления разделенных гранью сред n_1 и n_2 могут принимать значения n_p, либо n_a в зависимости от того, из какой среды падает луч.

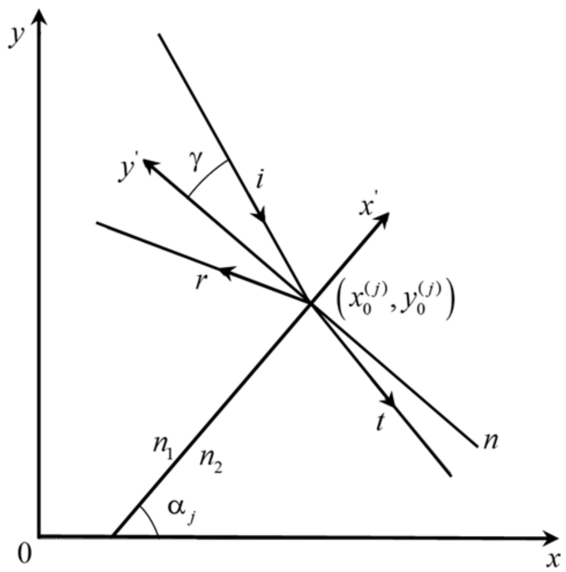


Рисунок 1.2 – Отражение светового луча от боковой грани ПС и вспомогательные системы координат

Пусть грань описывается уравнением

$$y = a_j x + b_j \tag{1.1}$$

и составляет угол α_j с осью $0x$. Уравнение падающего луча i имеет вид

$$y = A_i x + B_i. \tag{1.2}$$

Данный луч пересекает грань в точке с координатами

$$x = x_0^{(j)} = -(B_i - b_j)(A_i - a_j)^{-1},$$
$$y = y_0^{(j)} = A_i x_0^{(j)} + B_i. \tag{1.3}$$

Введем собственную систему координат грани $0x'y'$ с началом в точке $(x_0^{(j)},\ y_0^{(j)})$ и осью $0y'$, совпадающей с нормалью n к грани и направленной в сторону среды, из которой падает луч (рисунок 1.2).

Координаты любой точки в исходной и вновь введенной системах координат связаны преобразованиями поворота [12]:

$$\begin{cases} x' = (x - x_0^{(j)})\cos\alpha_j + (y - y_0^{(j)})\sin\alpha_j, \\ y' = (x - x_0^{(j)})\sin\alpha_j + (y - y_0^{(j)})\cos\alpha_j, \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\begin{cases} x - x_0^{(j)} = x'\cos\alpha_j - y'\sin\alpha_j, \\ y - y_0^{(j)} = x'\sin\alpha_j + y'\cos\alpha_j. \end{cases} \tag{1.5}$$

Согласно (1.5), уравнение (1.2) может быть записано в виде

$$y' = (A_i - a_j)(A_i a_j + 1)^{-1} x', \tag{1.6}$$

где $a_j = \mathrm{tg}\,\alpha_j$. В соответствии с (1.6) и рисунком 1.2, тангенс угла падения луча на рассматриваемую грань равен

$$\mathrm{tg}\,\gamma = (A_i a_j + 1)(A_i - a_j)^{-1}. \tag{1.7}$$

В (1.7) предполагается, что положительные значения γ соответствуют повороту луча i относительно оси $0y'$ по часовой стрелке (рисунок 1.2).

Поскольку угол падения луча на грань отличается от угла отражения луча знаком, уравнение отраженного луча r имеет вид

$$y' = -(A_i - a_j)(A_i a_j + 1)^{-1} x'. \tag{1.8}$$

Преобразование этого уравнения к системе координат $0xy$ осуществляется путем подстановки (1.4) в (1.8):

$$y = A_r x + B_r. \tag{1.9}$$

Здесь

$$A_r = \frac{2a_j - A_i + A_i a_j^2}{1 + 2A_i a_j - a_j^2},$$

$$B_r = B_i + \frac{2x_0^{(j)}(A_i - a_j)(1 + A_i a_j)}{1 + 2A_i a_j - a_j^2}. \tag{1.10}$$

Уравнение преломленного луча t может быть найдено аналогичным образом. С учетом закона Снеллиуса и преобразований (1.4), (1.5) это уравнение может быть представлено в форме

$$y = A_t x + B_t, \tag{1.11}$$

$$A_t = \frac{a_j + \overline{A}_t}{1 - a_j \overline{A}_t},\quad \overline{A}_t = -\frac{\sqrt{n_2^2 + (n_2^2 - n_1^2)\,\mathrm{tg}^2\gamma}}{n_1\,\mathrm{tg}\gamma},$$

$$B_t = y_0^{(j)} - A_t x_0^{(j)}. \tag{1.12}$$

Уравнение (1.11) имеет смысл только при выполнении неравенства

$$n_2^2 + (n_2^2 - n_1^2)\,\mathrm{tg}^2\gamma \ge 0, \tag{1.13}$$

означающего, что отражение света не является полным внутренним. При нарушении (1.13) полупрямая (1.11) вырождается в точку с координатами $x = x_0^{(j)}$, $y = y_0^{(j)}$.

Отражательная (ρ_j) и пропускательная (τ_j) способности боковой грани ПС ($j = 1$, либо $j = 3$) могут быть рассчитаны по формулам [13]

$$\rho_j = (1 - p\bar{A}_t \operatorname{tg}\gamma)^2 (1 + p\bar{A}_t \operatorname{tg}\gamma)^{-2},$$

$$\tau_j = 4p\bar{A}_t \operatorname{tg}\gamma (1 + p\bar{A}_t \operatorname{tg}\gamma)^{-2}, \qquad (1.14)$$

где $p = 1$ и $p = n_1^2 n_2^{-2}$ для волн TE и TM поляризации, соответственно. Выражения (1.14) определены при выполнении (1.13). При нарушении (1.13) $\rho_j = 1$, $\tau_j = 0$.

При рассмотрении отражения луча от основания ПС уравнения (1.1)–(1.10) сохраняют силу, а отражательная и пропускательная способности ρ_2 и τ_2 могут быть найдены при помощи рекуррентных соотношений.

Действительно, пусть исследуемая структура состоит из m однородных слоев с показателями преломления и поглощения $n^{(j)}$ и $k^{(j)}$ и толщинами d_j. Слои находятся на подложке с показателями преломления и поглощения n_s и k_s. Тогда при использовании TE волн имеем [14]

$$\rho_2 = \left| (i\psi_{m+1}k_{yp} - \psi'_{m+1})(i\psi_{m+1}k_{yp} + \psi'_{m+1})^{-1} \right|^2. \qquad (1.15)$$

Здесь $k_{yp} = \sqrt{n_p^2 - \beta^2}$,

$$\beta = -n_p \operatorname{tg}\gamma (1 + \operatorname{tg}^2\gamma)^{-0.5}, \qquad (1.16)$$

γ – угол падения луча на основание ПС. В частном случае, когда речь идет об отражении от основания ПС луча, прошедшего входную грань ПС, выражение (1.16) может быть приведено к виду

$$\beta = \beta_0 = k_z k_0^{-1} = \\ = \sin\theta_1 \sqrt{n_p^2 - n_a^2 \sin^2\varphi} - n_a \cos\theta_1 \sin\varphi, \qquad (1.17)$$

где k_z имеет смысл z – составляющей волнового вектора луча, прошедшего входную грань ПС. Коэффициенты ψ_{m+1} и ψ'_{m+1} рассчитываются по рекуррентным формулам

$$\psi_{j+1} = \psi_j \cos(\sigma_j k_0 d_j) + \psi'_j \sigma_j^{-1} \sin(\sigma_j k_0 d_j), \qquad (1.18)$$

$$\psi'_{j+1} = -\psi_j \sigma_j \sin(\sigma_j k_0 d_j) + \psi'_j \cos(\sigma_j k_0 d_j), \qquad (1.19)$$

$$\psi_1 = 1, \ \psi'_1 = i\sigma_s, \qquad (1.20)$$

$$\sigma_j = \sqrt{\varepsilon_j - \beta^2}, \ \varepsilon_j = (n^{(j)} - ik^{(j)})^2 \ \sigma_s = \sqrt{\varepsilon_s - \beta^2},$$

$$\varepsilon_s = (n_s - ik_s)^2.$$

Для TM волн соотношения, аналогичные (1.15), (1.18)–(1.20), имеют вид [14]

$$\rho_2 = \left| (i\psi_{m+1}k_{yp} - \psi'_{m+1}n_p^{-2}) \times \\ \times (i\psi_{m+1}k_{yp} + \psi'_{m+1}n_p^{-2})^{-1} \right|^2, \qquad (1.21)$$

$$\psi_{j+1} = \psi_j \cos(\sigma_j k_0 d_j) + \psi'_j \varepsilon_j \sigma_j^{-1} \sin(\sigma_j k_0 d_j), \qquad (1.22)$$

$$\psi'_{j+1} = -\psi_j \sigma_j \varepsilon_j^{-1} \sin(\sigma_j k_0 d_j) + \psi'_j \cos(\sigma_j k_0 d_j), \qquad (1.23)$$

$$\psi_1 = 1, \ \psi'_1 = i\sigma_s \varepsilon_s^{-1}. \qquad (1.24)$$

Пропускательная способность основания ПС может быть оценена по формуле $\tau_2 = 1 - \rho_2$, вытекающей из закона сохранения энергии.

Полная отражательная способность ПС может быть найдена путем рассмотрения последовательного отражения луча на гранях призмы. В этом случае луч, прошедший входную грань призмы, отождествляется с лучом, падающим на основание призмы. Поскольку уравнения лучей (1.2), (1.9) и (1.11) заданы в единой системе координат $0xy$, для указанных лучей $A_i = A_t$, $B_i = B_t$. Аналогично, в ходе последовательных внутренних отражений луча на гранях призмы луч, отраженный от предыдущей грани с номером j', отождествляется с лучом, падающим на следующую грань с номером j $(j' \neq j)$. В результате $A_i = A_r$, $B_i = B_r$, где A_r и B_r рассчитываются по формулам (1.10), в которых вместо j фигурирует j'. Номер j находится из условия $0 < x_0^{(j)} < L$ и требования, чтобы модуль $\left| x_0^{(j)} - x_0^{(j')} \right|$ достигал минимума относительно j.

В системе координат $0xy$ параметры граней ПС фиксированы:

$$a_1 = \operatorname{tg}\theta_1, \ b_1 = 0;$$

$$a_2 = 0, \ b_2 = 0;$$

$$a_3 = a \sin\theta_1 (a\cos\theta_1 - L)^{-1}, \ b_3 = -a_3 L, \qquad (1.25)$$

а вращение ПС приводит лишь к модификации уравнения луча, падающего на ПС. В соответствии с рисунком 1.1, в системе координат $0x_i y_i$ это уравнение имеет вид

$$y_i = A_0 x_i + B_0, \qquad (1.26)$$

где

$$A_0 = -(\operatorname{tg}\theta_1)^{-1}, \ B_0 = -A_0(\Delta y + a - \Delta x). \qquad (1.27)$$

Для приведения уравнения (1.26) к системе координат $0xy$ следует учесть, что в ходе вращения ПС координаты ребра (1) (рисунок 1.1), равные $x_i^{(1)}$ и $y_i^{(1)}$, изменяются в соответствии с выражениями

$$x_i^{(1)} = -\Delta x \cos\varphi + \Delta y \sin\varphi,$$

$$y_i^{(1)} = -\Delta x \sin\varphi - \Delta y \cos\varphi. \qquad (1.28)$$

Это означает, что переход от системы координат $0x_i y_i$ к системе $0xy$ осуществляется преобразованием трансляции начала координат и преобразованием поворота координатных осей на угол φ. Тогда аналогично (1.4) получаем

$$x_i = x_i^{(1)} + x\sin\varphi + y\cos\varphi,$$

$$y_i = y_i^{(1)} + x\cos\varphi - y\sin\varphi. \qquad (1.29)$$

Подстановка (1.29) в (1.26) дает уравнение падающего луча (1.2), где

$$A_i = \frac{A_0 \cos\varphi - \sin\varphi}{\cos\varphi + A_0 \sin\varphi},$$

$$B_i = \frac{A_0 x_i^{(1)} - y_i^{(1)} + B_0}{\cos\varphi + A_0 \sin\varphi}. \quad (1.30)$$

Заметим, что из выражений (1.27) и (1.30) можно легко получить соотношение между углом падения возбуждающего пучка на входную грань ПС γ и углом поворота ПС φ. Действительно, в соответствии с (1.27) и (1.30)

$$A_i = \frac{-(\operatorname{tg}\theta_1)^{-1} A_0 \cos\varphi - \sin\varphi}{\cos\varphi - (\operatorname{tg}\theta_1)^{-1}\sin\varphi} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\varphi - \theta_1)}. \quad (1.31)$$

Подставляя (1.31) в (1.7) и принимая во внимание (1.27), заключаем, что

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\theta_1 + \operatorname{tg}(\varphi - \theta_1)}{1 - \operatorname{tg}\theta_1 \operatorname{tg}(\varphi - \theta_1)} = \operatorname{tg}(\varphi - \theta_1 + \theta_1) = \operatorname{tg}\varphi.$$

То есть, острые углы γ и φ равны (как уже отмечалось, положительным считается угол падения пучка на входную грань ПС, отсчитанный от внешней нормали к грани по часовой стрелке).

Величины η_1, η_2, η_3 могут быть рассчитаны по формулам

$$\eta_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \eta_i^{(k)}, \quad (1.32)$$

$$\eta_i^{(k)} = \delta_{k1}\rho_1^{(0)} + H(n_i^{(k)} - 1)\tau_1^{(0)}\tau_k^{(n_i^{(k)})} \times \\ \times \exp(-2k_p k_0 D_i^{(k)}) \prod_{j=1}^{n_i^{(k)}-1} \rho_m^{(j)}. \quad (1.33)$$

Здесь n – число пересечений лучом k-й грани ПС, δ_{k1} – символ Кронекера, функция Хэвисайда $H(x) = 0$ при $x \le 0$, $H(x) = 1$ при $x > 0$, i – порядковый номер пресечения лучом k-й грани ПС в процессе его распространения внутри ПС, $D_i^{(k)}$ – расстояние, пройденное при этом лучом, $n_i^{(k)} - 1$ – число отражений луча на гранях ПС, произошедших за время от его входа в ПС до данного пересечения, $\rho_m^{(j)}$ и $\tau_m^{(j)}$ – отражательная и пропускательная способности m-й грани ПС, на которой луч испытал j-е внутреннее отражение, $\rho_1^{(0)}$ и $\tau_1^{(0)}$ – отражательная и пропускательная способности входной грани ПС для луча, падающего на нее из окружающей среды.

Согласно (1.32), полная отражательная способность ПС определяется всеми лучами, пересекающими выходную грань ПС (эти лучи могут испытывать либо частичное, либо полное внутреннее отражение на данной грани). Луч из этого множества, соответствующий номеру i, назовем лучом i-го порядка.

Заметим, что, строго говоря, запись (1.32) предполагает, что расстояния $D_i^{(k)}$ при всех i превосходят длину когерентности излучения. Практически же это ограничение не существенно, т. к. лучи различных порядков, выходящие из ПС, пространственно не перекрываются (см. раздел 2). Не влияет оно и на представленное в разделе 2 решение задачи об оптимальном выборе углов ПС.

Аналитическое суммирование рядов (1.32) затруднительно. Тем не менее, построение траектории луча в ПС и одновременное вычисление рядов (1.32) могут быть выполнены численно на основании полученных выше соотношений. Соответствующие результаты представлены в следующем разделе.

2 Оптимизация ПС

Основной практический интерес представляет оптимальный выбор углов при основании ПС и расположения оси вращения ПС.

Как известно, угол θ_1 и диапазон углов вращения ПС $\varphi_{\min} \le \varphi \le \varphi_{\max}$ определяются диапазоном изменения постоянных распространения мод исследуемой структуры, или неравенством $(\beta_0)_{\min} \le \beta_0 \le (\beta_0)_{\max}$ [3]. Пусть в исходном положении измерительной установки $(\varphi = 0)$ $\beta_0 = \overline{\beta}_0 = 0.5[(\beta_0)_{\min} + (\beta_0)_{\max}]$. Тогда, согласно (1.17),

$$\theta_1 = \arcsin(\overline{\beta}_0 n_p^{-1}), \quad (2.1)$$

$$\varphi_{\min} = \arcsin\left[n_a^{-1}\left(\sqrt{n_p^2 - \beta_{0\max}^2}\sin\theta_1 - \\ -\beta_{0\max}\cos\theta_1\right)\right], \quad (2.2)$$

$$\varphi_{\max} = \arcsin\left[n_a^{-1}\left(\sqrt{n_p^2 - \beta_{0\min}^2}\sin\theta_1 - \\ -\beta_{0\min}\cos\theta_1\right)\right]. \quad (2.3)$$

Критерием оптимального выбора положения оси вращения ПС, т. е. параметров Δx и Δy, является условие минимума сдвига точки ввода излучения в исследуемую структуру при вращении ПС. Его выполнение необходимо для стабилизации эффективности ввода излучения в исследуемую структуру в процессе измерений [3].

В настоящее время оптимальными принято считать значения Δx и Δy, определяемые в результате геометрических построений, предложенных в широко цитируемой работе [3]. Можно показать, что формально эти построения эквивалентны соотношениям

$$\Delta y = \operatorname{tg}\theta_1(\Delta x - a n_p^{-1}), \quad (2.4)$$

$$\Delta x = a[\sin^2\theta_1 + \cos\theta_1(n_p\cos\theta_1 + \\ +\operatorname{sign}(\varphi)\sin\theta_1)]n_p^{-1}. \quad (2.5)$$

С позиций же рассматриваемой теории сдвиг точки ввода при вращении ПС равен $s = x_0^{(2)} - a$, где $x_0^{(2)}$ определяется по формуле

(1.3), в которой $A_i = A_t$, $B_i = B_t$, а A_t и B_t рассчитываются на основании (1.3), (1.7), (1.12), (1.27) при $j = 1$, $A_i = A_0$, $B_i = B_0$. После преобразований получаем:

$$s = \frac{l\sqrt{n_p^2 n_a^{-2} - \sin^2\varphi}}{\sin\theta_1 \sin\varphi + \cos\theta_1\sqrt{n_p^2 n_a^{-2} - \sin^2\varphi}} - a, \quad (2.6)$$

где

$$l = \left\{a\cos\theta_1 - 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[\Delta y\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \theta_1\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \Delta x\sin\left(\frac{\varphi}{2} - \theta_1\right)\right]\right\}(\cos\varphi)^{-1} \quad (2.7)$$

– расстояние от ребра (1) ПС до точки пересечения падающего на ПС луча с ее входной гранью (рисунок 1.1).

Из (2.6) очевидно, что обеспечить строгое равенство $s(\varphi) \equiv 0$ за счет выбора Δx и Δy невозможно. Тем не менее, можно минимизировать $|s(\varphi)|$ по указанным параметрам, предполагая, что $\varphi \to 0$. С этой целью в ряде Тейлора

$$s(\varphi) = \left(\frac{ds}{d\varphi}\right)_{\varphi=0}\varphi + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 s}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=0}\varphi^2 + \ldots$$

следует потребовать, чтобы $(ds/d\varphi)_{\varphi=0} = 0$. Согласно (2.6), последнее уравнение удовлетворяется при условии

$$\Delta y = \operatorname{tg}\theta_1(\Delta x - a\, n_a n_p^{-1}). \quad (2.8)$$

В случае, когда световой пучок падает на ПС из воздуха ($n_a \to 1$) выражение (2.8) переходит в (2.4). Однако в отличие от решения (2.4), (2.5) Δx в (2.8) может быть произвольным. В такой ситуации естественно выбрать оптимальное решение на множестве (2.8), отыскивая минимум функции

$$I_s(\Delta x) = \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} s^2(\varphi)d\varphi.$$

Интеграл $I_s(\Delta x)$ допускает численное исследование. Для его проведения конкретизируем параметры ПС. Здесь и далее будем считать, что $\lambda = 0{,}6328$ мкм, $n_a = 1$, $n_p = 1{,}9645$, $k_p = 0$, (призма из галлий-гадолиниевого граната) $(\beta_0)_{\min} = 1{,}5$, $(\beta_0)_{\max} = 1{,}8$, $L = 8000$ мкм, $a = 2000$ мкм. Тогда, в соответствии с (2.1)–(2.3), $\theta_1 = 57{,}13^0$, $\varphi_{\min} = -18{,}42^0$, $\varphi_{\max} = 14{,}56^0$.

График функции $I_s(\Delta x)$ приведен на рисунок 2.1. Как видно, он имеет выраженный минимум, которому соответствуют оптимальные $\Delta x = 1261$ мкм, $\Delta y = 379$ мкм. Для сравнения, в приближении (2.4), (2.5) $\Delta x = 843$ мкм, $\Delta y = -271$ мкм.

Эффективность полученного решения иллюстрирует рисунок 2.2, на котором сопоставлены зависимости $s(\varphi)$, рассчитанные при трех различных положениях оси вращения ПС. Кривая 0 соответствует часто используемой в экспериментах конфигурации, в которой ось вращения ПС совмещена с точкой ввода излучения в исследуемую структуру при $\varphi = 0$. Согласно рисунку 2.2, такая конфигурация с позиций стабилизации точки ввода далеко не оптимальна. При использовании решения (2.4), (2.5) (кривая 1) ситуация улучшается, однако на краях диапазона изменения φ $|s(\varphi)|$ достигает заметных значений. В частности, $s(\varphi_{\min}) = 86{,}7$ мкм. Наиболее стабильна точка ввода при найденном нами решении оптимизационной задачи (кривая 2). В данном случае $|s(\varphi)| \le |s(\varphi_{\min})| = 15{,}8$ мкм.

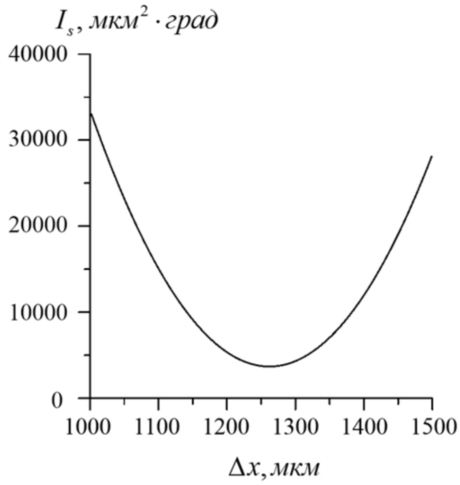


Рисунок 2.1 – Зависимость $I_s(\Delta x)$ для оптимизационного решения (2.8)

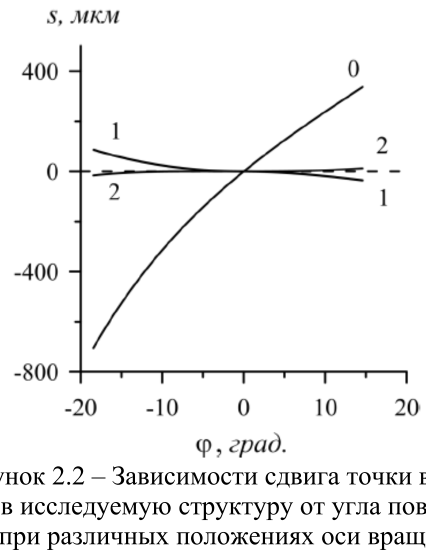


Рисунок 2.2 – Зависимости сдвига точки ввода луча в исследуемую структуру от угла поворота ПС при различных положениях оси вращения ПС. Кривая 0 – $\Delta x = 2000$ мкм, $\Delta y = 0$ мкм; 1 – $\Delta x = 843$ мкм, $\Delta y = -271$ мкм при $\varphi < 0$, $\Delta x = 1771$ мкм, $\Delta y = 1166$ мкм при $\varphi > 0$, 2 – $\Delta x = 1261$ мкм, $\Delta y = 379$ мкм. Штриховая линия – нулевой уровень s.

Как известно, успех решения обратных оптических задач определяется простотой алгоритма обработки экспериментальных данных [15]. Исходя из соображений предельной простоты такого рода алгоритма, угол θ_2 естественно выбрать из критерия минимизации влияния многократных отражений света внутри ПС на измеряемую отражательную способность ПС. При таком выборе становится оправданной простейшая модель описания отражательной способности ПС, в которой учитываются только однократные отражения света от граней ПС.

Дополнительным аргументом в пользу данного критерия является возможность предварительной калибровки ПС, устраняющей проблему построения аппаратной функции фотоприемника с учетом изменения углов и точек падения на фотоприемник выходящих из ПС лучей различных порядков в процессе вращения ПС.

Действительно, сигнал, снимаемый с фотоприемника при исследовании слоистой структуры, может быть представлен в виде

$$J(\varphi) = P_0 \sum_{i=1}^{\infty} H_i(\varphi)\eta_i^{(3)}(\varphi), \qquad (2.9)$$

где $H_i(\varphi)$ – аппаратная функция фотоприемника для падающего на него луча i-го порядка. Поскольку лучи различных порядков падают на фотоприемник под разными углами, функции $H_i(\varphi)$ с разными номерами i, вообще говоря, не совпадают. Если ПС не контактирует с исследуемой структурой (в (1.18), (1.19), (1.22), (1.23) $d_m \to \infty$, $n^{(m)} = n_a$), то в (2.9) будут фигурировать другие функции $\eta_i^{(3)}(\varphi)$, которые мы обозначим через $\eta_i'^{(3)}(\varphi)$. Тогда (2.9) примет вид

$$J'(\varphi) = P_0 \sum_{i=1}^{\infty} H_i(\varphi)\eta_i'^{(3)}(\varphi). \qquad (2.10)$$

Для исключения из рассмотрения мощности P_0 составим отношение

$$Z(\varphi) = \frac{J(\varphi)}{J'(\varphi)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} H_i(\varphi)\eta_i^{(3)}(\varphi)}{\sum_{i=1}^{\infty} H_i(\varphi)\eta_i'^{(3)}(\varphi)}. \qquad (2.11)$$

В приближении однократных отражений света от граней ПС суммы в числителе и знаменателе правой части выражения (2.11) содержат только одно слагаемое с $i = 1$. Тогда согласно (2.9), (2.10)

$$Z(\varphi) = \rho_2^{(1)}(\varphi)[\rho_2'^{(1)}(\varphi)]^{-1}, \qquad (2.12)$$

где $\rho_2^{(1)}(\varphi)$ и $\rho_2'^{(1)}(\varphi)$ – отражательные способности основания ПС при наличии и отсутствии исследуемой слоистой среды, соответственно. Последняя из указанных функций допускает аналитический расчет на основании (1.14).

Заметим, что если выполняется обычное для волноводной спектроскопии условие $\beta_0 > n_a$ [3]–[5], то учитывая (1.16), где $\beta = \beta_0$, заключаем, что неравенство (1.13) при отражении луча от основания ПС является нарушенным. Это означает, что $\rho_2'^{(1)}(\varphi) \equiv 1$, $Z(\varphi) = \rho_2^{(1)}(\varphi)$.

Из (2.12) следует, что в приближении однократного отражения света от граней ПС отражательная способность основания ПС допускает непосредственное определение. Для этого надо измерить сигналы $J(\varphi)$ и $J'(\varphi)$ и взять их отношение. Последующее восстановление параметров исследуемой структуры методом наименьших квадратов сводится к минимизации целевой функции [10]

$$F(p_1,...,p_l) = \\ = \sum_{k=1}^{N} \left[\rho_2^{(1)}(\beta_0^{(k)}) - \rho_2(\beta_0^{(k)}, p_1,...p_l)\right]^2, \qquad (2.13)$$

здесь $\rho_2^{(1)}(\beta_0^{(k)})$ – экспериментальные данные для отражательной способности основания ПС, найденные из (2.12) при N углах поворота ПС $\varphi = \varphi_k$, $\rho_2(\beta_0^{(k)}, p_1,...p_l)$ – теоретическая модель отражательной способности основания ПС, зависящая от параметров исследуемой многослойной структуры p_j. При записи (2.13) вместо угла φ использована более удобная для выкладок переменная β_0 ($\beta_0^{(k)}$ есть β_0 при $\varphi = \varphi_k$, см. (1.17)).

Для количественного учета многократных отражений света от граней ПС надо использовать общее выражение (2.11). С целью исключения из (2.11) неизвестных функций $H_i(\varphi)$ примем приближение, в котором эти функции не зависят от номера луча *i*. Это приближение может быть оправдано при использовании фотоприемника с матированной поверхностью, как это имеет место в установке Model 2010/M Prism Coupler, либо при использовании интегрирующей сферы [16]. Тогда (2.11) преобразуется к виду

$$Z(\varphi) = \eta_3(\varphi)[\eta_3'(\varphi)]^{-1}, \qquad (2.14)$$

где $\eta_3(\varphi)$ и $\eta_3'(\varphi)$ – полные отражательные способности ПС, контактирующей и не контактирующей с исследуемой слоистой средой, соответственно.

В дальнейшем для моделирования эксперимента мы будем использовать в качестве левой части выражения (2.12) функцию $Z(\varphi)$, рассчитанную на основании (2.14).

Влияние многократных отражений света на отражательную способность ПС при различных углах призмы θ_2 иллюстрируют рисунки 2.3– 2.5 и таблица 2.1. Вычисления выполнены на основе соотношений, полученных в предыдущем разделе. Рассмотрено возбуждение волнами ТЕ поляризации структуры, отделенной от ПС воздушным буферным слоем и состоящей из двух слоев оксинитрида кремния с различным процентным составом кислорода, последовательно нанесенных на кремниевую подложку. Параметры структуры имеют следующие значения: $m = 3$, $n^{(3)} = n_a = 1$, $k^{(3)} = k_a = 0$,

$$\begin{gathered} p_1 = d_1 = 1{,}1\,мкм,\ \ p_2 = d_2 = 1\,мкм, \\ p_3 = d_3 = 0{,}1\,мкм,\ \ p_4 = n^{(1)} = 1{,}542, \\ p_5 = n^{(2)} = 1{,}8,\ \ p_6 = k^{(1)} = 3\cdot 10^{-4}, \\ p_7 = k^{(2)} = 5\cdot 10^{-6}. \end{gathered} \tag{2.15}$$

При расчетах использованы найденные выше значения θ_1, $\varphi_{\min}$, $\varphi_{\max}$ и оптимальные $\Delta x = 1261$ мкм, $\Delta y = 379$ мкм.

На рисунке 2.3 представлены траектории луча в двух ПС с одинаковыми углами $\theta_1 = 57{,}13^0$, но различными углами θ_2. Учтены трехкратные отражения луча от выходной грани ПС. Траектории относятся к углу $\varphi = -7{,}756^0$, при котором происходит резонансное возбуждение первой высшей моды исследуемой слоистой структуры. Линии, пересекающие боковые грани ПС и расположенные вне ПС имеют смысл лучей, отраженного и вышедших из входной грани ПС и лучей, вышедших из выходной грани ПС. В случае $\theta_2 = 57{,}13^0$ за выходной гранью ПС имеются лучи 1, 2 и 3-го порядков, тогда как при $\theta_2 = 77{,}6^0$ такой луч всего один. Это луч 1-го порядка, поскольку лучи 2-го и 3-го порядков испытывают на выходной грани ПС полное внутреннее отражение.

На рисунке 2.4 сопоставлены результаты расчета функции $\eta_3(\varphi)$ вида (1.32) при $n = 1$ (однократное отражения луча на гранях ПС) и при $n \to \infty$.

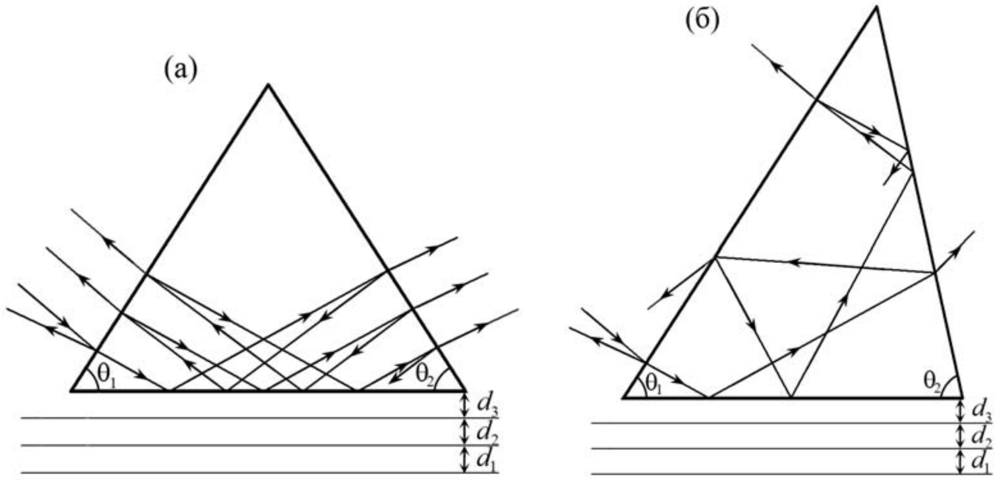


Рисунок 2.3 – Траектории луча в ПС при $\theta_2 = 57{,}13^0$ (равнобедренная призма) (а) и $\theta_2 = 77{,}6^0$ (б). Горизонтальные линии под ПС – исследуемая структура

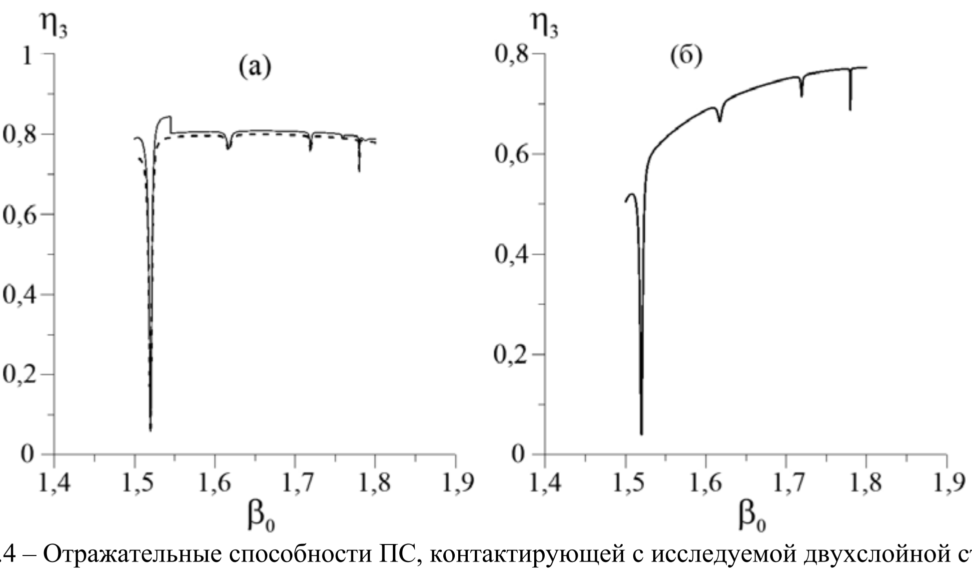


Рисунок 2.4 – Отражательные способности ПС, контактирующей с исследуемой двухслойной структурой при $\theta_2 = 57{,}13^0$ (а) и $\theta_2 = 77{,}6^0$ (б). Сплошные кривые соответствуют $n \ge 3$, штриховые кривые – $n = 1$ (на рисунке 2.4 (б) сплошная и штриховая кривые в масштабах рисунка не различимы)

Внутреннюю сходимость рядов (1.32) иллюстрирует таблица 2.1. В ней n – число внутренних отражений луча от выходной грани ПС (это верхний предел суммы η_3). Верхними пределами сумм η_1 и η_2 служат числа отражений луча от входной грани и основания ПС, произошедших за время от входа луча в ПС до n-го отражения луча от выходной грани ПС. Сумма $\eta_1+\eta_2+\eta_3$ позволяет судить о сходимости рядов по балансу мощности излучения (значение 1,0 в таблице означает, что $1-\eta_1-\eta_2-\eta_3<0,5\cdot 10^{-6}$). Значение $d_3=\infty$ отвечает ситуации, в которой ПС не контактирует с исследуемой структурой.

Таблица 2.1 – Влияние числа учитываемых отражений луча от выходной грани ПС на полную отражательную способность ПС при $\varphi=-7,756^0$

θ_2	d_3, *мкм*	n	η_3	$\eta_1+\eta_2+\eta_3$
$57,13^0$	∞	1	0,79594	0,90379
		2	0,80520	0,99888
		3	0,80530	0,99999
		6	0,80531	1,0
	0,1	1	0,75204	0,90909
		2	0,76030	0,99900
		3	0,76039	0,99999
		6	0,76039	1,0
$77,6^0$	∞	1	0,75743	0,86527
		2	0,75743	0,97307
		3	0,75743	0,99710
		6	0,75784	1,0
	0,1	1	0,71565	0,87270
		2	0,71565	0,95690
		3	0,71565	0,99535
		6	0,71605	1,0

Согласно таблице 2.1, по-существу стопроцентная сходимость рядов (1.32) имеет место, если $n\geq 3$. При $\theta_2=57,13^0$ значения η_3, соответствующие $n=1$ и $n\geq 3$, заметно отличаются, а при $\theta_2=77,6^0$ аналогичные η_3 практически совпадают.

Рисунки 2.3, 2.4 и таблица 2.1 позволяют заключить, что существует оптимальный выбор угла θ_2, при котором эффект полного внутреннего отражения лучей высших порядков на выходной грани ПС делает оправданным использование приближения однократного отражения света от граней ПС. Заметим, что соответствующий угол θ_2 отличается от θ_1, т. е. оптимальная ПС не является равнобедренной.

Более полную информацию для выбора оптимального угла θ_2 дает рисунок 2.5. Здесь

$$\overline{\Delta\eta_3}(\theta_2)=\frac{1}{\varphi_{\max}-\varphi_{\min}}\int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}}[\eta_3(\varphi)-\eta_1^{(3)}(\varphi)]d\varphi$$

– среднее по диапазону угла вращения ПС отклонение полной отражательной способности ПС от отражательной способности ПС, найденной в приближении однократного отражения луча от граней ПС. Функция $\eta_1^{(3)}(\varphi)$ рассчитывается на основании (1.33), а $\eta_3(\varphi)$ – на основании (1.32) при $n\geq 3$. Диапазон $(\theta_2)_{\min}\leq\theta_2\leq(\theta_2)_{\max}$ определяется из условия, что луч первого порядка на выходе ПС порождается непосредственно лучом, падающим на входную грань ПС. В соответствии с (1.13), (1.25), (2.7) и рисунками 1.1, 1.2

$$(\theta_2)_{\min}=\max[(\theta_2)_{\min}^{(1)},(\theta_2)_{\min}^{(2)}],$$

$$(\theta_2)_{\max}=\min[(\theta_2)_{\max}^{(1)},(\theta_2)_{\max}^{(2)}], \qquad (2.16)$$

$$(\theta_2)_{\min}^{(1)}=\arccos\left(\frac{n_a}{n_p}\right)-\arccos\left(\frac{\beta_{0\max}}{n_p}\right),$$

$$(\theta_2)_{\max}^{(1)}=\arccos\left(-\frac{n_a}{n_p}\right)-\arccos\left(\frac{\beta_{0\min}}{n_p}\right),$$

$$(\theta_2)_{\min}^{(2)}=\operatorname{arctg}\left[\frac{l\operatorname{tg}\theta_1}{L\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta_1}-l}\right],$$

$$(\theta_2)_{\max}^{(2)}=\operatorname{arctg}\left[\frac{a\sqrt{n_p^2-\beta_{0\min}^2}\operatorname{tg}\theta_1}{(L-a)\sqrt{n_p^2-\beta_{0\min}^2}-L\beta_{0\min}\operatorname{tg}\theta_1}\right].$$

Подставляя в (2.16) найденные выше значения параметров, получаем: $(\theta_2)_{\min}=35,84^0$, $(\theta_2)_{\max}=80,32^0$.

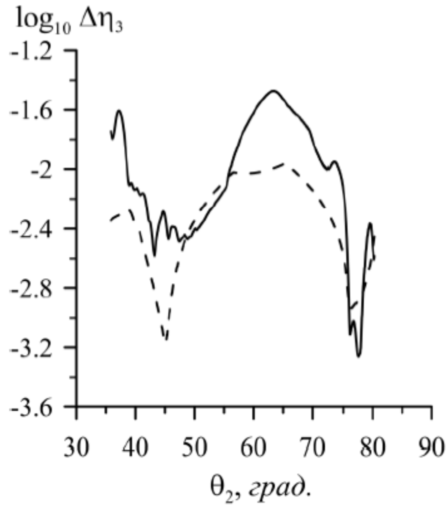


Рисунок 2.5 – Среднее по диапазону угла вращения ПС отклонение полной отражательной способности ПС от отражательной способности ПС, найденной в приближении однократного отражения луча на гранях ПС. Сплошная и штриховая кривые – ПС в контакте и вне контакта с исследуемой двухслойной структурой, соответственно

Штриховая кривая на рисунке 2.5 имеет два выраженных минимума при $\theta_2=45,6^0$ и $\theta_2=77,6^0$. Сплошная кривая на рисунке 2.5

имеет более сложный вид, но и ее минимумы наблюдаются в окрестности указанных значений. Таким образом, оптимальный выбор угла θ_2 получился двузначным. Оба найденных минимума имеют аналогичную физическую природу, которая обсуждалась выше.

Для количественной оценки влияния многократных отражений света в ПС на решение обратной задачи волноводной спектроскопии мы в качестве экспериментальных данных $\rho_2^{(1)}(\beta_0^{(k)})$ в целевой функции (2.13) использовали значения $Z(\beta_0^{(k)})$, рассчитанные по формуле (2.14), где переменная φ заменена на β_0. Вычисления выполнены при $N = 1000$.

Рисунок 2.6 иллюстрирует влияние выбора угла ПС θ_2 на точность модели (2.14).

Согласно рисунку 2.6, оптимизация угла θ_2 дает ощутимый эффект. Наилучшее соответствие зависимостей $Z(\beta_0)$ и $\rho_2(\beta_0)$ наблюдается при $\theta_2 = 77,6^0$. Как следует из рисунка 2.5, выбор $\theta_2 = 77,6^0$ обеспечивает минимизацию влияния многократных отражений света в ПС на полную отражательную способность ПС в ситуации, когда ПС контактирует с исследуемой структурой.

Параметры описанной выше структуры, восстановленные в результате минимизации градиентным методом семипараметрической целевой функции (2.13), приведены в таблице 2.2.

Из сравнения данных таблицы 2.2 с исходными параметрами структуры (2.15) можно заключить, что оптимизация угла θ_2 приводит к существенному повышению точности восстановления показателей поглощения слоев, но практически не сказывается на точности восстановления толщин и показателей преломления слоев, все табличные значения которых вполне приемлемы. Данные особенности можно объяснить тем, что показатели преломления и толщины слоев структуры влияют главным образом на координаты β_0 минимумов функции $\rho_2(\beta_0)$, а затухание мод сказывается на величине функции $\rho_2(\beta_0)$ [2]–[5]. В то же время, согласно рисунку 2.6, многократные отражения света внутри ПС сказываются главным образом на величине данной функции и практически не затрагивают координат β_0 ее минимумов.

Заключение

В двумерном лучевом приближении сформулированы алгоритм расчета траекторий световых лучей в треугольной ПС и алгоритм вычисления полной отражательной способности ПС. Предложены критерии оптимального выбора углов ПС и оси ее вращения: координаты оси вращения находятся из условия стабилизации точки ввода светового пучка в исследуемую слоистую структуру, а углы ПС – из требования минимизации влияния лучей высших порядков

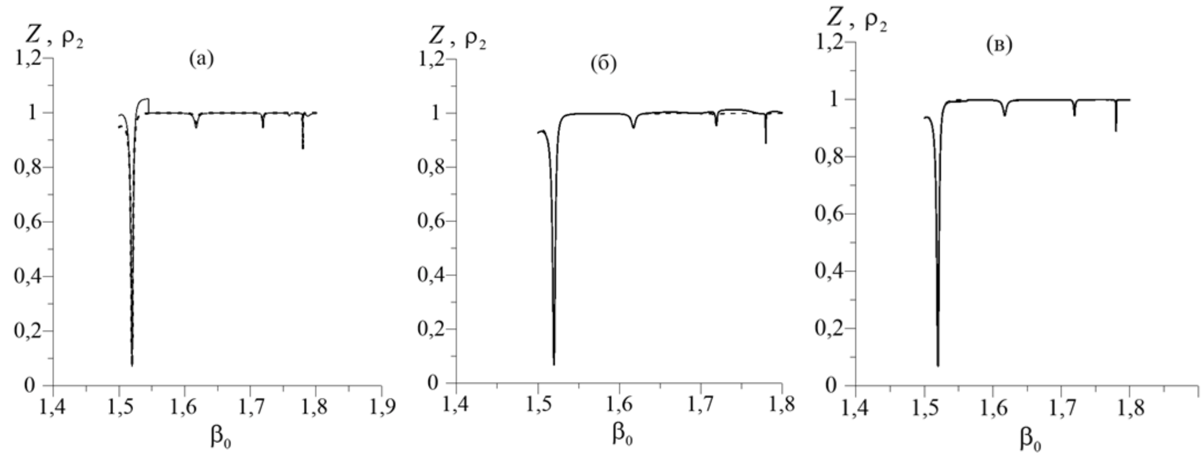


Рисунок 2.6 – Сравнение модели отражательной способности основания ПС (2.14) (сплошные кривые) с точной функцией $\rho_2(\beta_0)$, рассчитанной на основании (1.15), (1.17)–(1.20) (штриховые кривые) при $\theta_2 = 57,13^0$ (а), $\theta_2 = 45,6^0$ (б), $\theta_2 = 77,6^0$ (в)

Таблица 2.2 – Восстановление параметров двухслойной структуры при различных углах призмы связи θ_2

θ_2	d_1, *мкм*	d_2, *мкм*	d_3, *мкм*	n_1	$k_1 \cdot 10^4$	n_2	$k_2 \cdot 10^6$
$57,13^0$	1,0988	0,9995	0,1064	1,54205	1,399	1,80002	7,158
$45,6^0$	1,0922	1,0001	0,1004	1,54223	2,857	1,80000	4,263
$77,6^0$	1,1078	1,0001	0,0990	1,54172	3,239	1,80000	4,933

на полную отражательную способность ПС. Эффективность данных критериев подтверждена на примере решения обратной задачи волноводной спектроскопии в случае возбуждения посредством ПС из галлий-гадолиниевого граната двухслойной пленочной структуры оксинитрида кремния на кремниевой подложке.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Khomchenko*, *A.V.* Waveguide spectroscopy of thin films / A.V. Khomchenko. – New York: Academic Press, 2005. – 220 p.

2. *Хомченко*, *А.В.* Волноводный метод измерения параметров тонких пленок / А.В. Хомченко, А.Б. Сотский, А.А. Романенко, Е.В. Глазунов, А.В. Шульга // ЖТФ. – 2005. – Т. 75, № 6, С. 98–106.

3. *Ulrich*, *R.* Measurement of thin film parameters with a prism coupler / R. Ulrich, R. Torge // Appl. Opt. – 1973. – Vol. 12, № 12. – P. 2901–2908.

4. *Kersten*, *R.T.* A new method for measuring refractive index and thickness of liquid and deposited solid thin films / R.T. Kersten // Opt. Commun. – 1975. – Vol.13. – № 3. – P. 327–329.

5. *Adams*, *A.C.* An evaluation of the prism coupler for measuring the thickness and refractive index of dielectric films on silicon substrates / A.C. Adams, D.P. Schinke, C.D. Capio // J. Electrochem. Soc. – 1979. – Vol. 126. – P. 1539–1543.

6. *Kubica*, *J.M.* Noise limits in reconstruction of optical parameters of silica-based double-layer planar waveguides on silicon / J.M. Kubica // J. Lightwave Tecnol. – 2002. – Vol. 20. – № 1. – P. 114–119.

7. *Schneider*, *T.* Optical characterisation of a three layer waveguide structure by *m*-lines spectroscopy / T. Schneider, D. Leduc, J. Cardin, C. Lupi, H. Gundel // Ferroelectrics. – 2007. – Vol. 352, № 1. – P. 50–60.

8. *Schneider*, *T.* A method to retrieve optical and geometrical characteristics of three layer waveguides from m-lines measurements / T. Schneider, D. Leduc, C. Lupi, J. Cardin, H. Gundel, C. Boisrobert // Journal of Applied Physics. – 2008. – Vol. 103. – № 6. – P. 063110–063110–7.

9. *Cardin*, *J.* Determination of refractive index, thickness, and the optical losses of thin films from prism-film coupling measurements / J. Cardin, D. Leduc // Appl. Opt. – 2008. – Vol. 47, № 7. – P. 894–900.

10. *Сотский, А.Б.* Призменное возбуждение вытекающих мод тонких пленок / А.Б. Сотский, L.M. Steingart, J.H. Jackson, П.Я. Чудаковский, Л.И. Сотская // ЖТФ. – 2013. – Т. 83, вып. 11. – С. 105–115.

11. *Соколов*, *В.И.* Определение показателя преломления, коэффициента экстинкции и толщины тонких пленок методом возбуждения волноводных мод / В.И. Соколов, Н.В. Марусин, В.Я. Панченко, А.Г. Савельев, В.Н. Семиногов, Е.В. Хайдуков // Квант. Электроника. – 2013. – Т. 43, № 12. – С. 1149–1153.

12. *Корн*, *Г.* Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука. 1977. – 831 с.

13. *Борн*, *М.* Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М.: Наука. 1973. – 719 с.

14. *Сотский*, *А.Б.* Теория оптических волноводных элементов / Сотский А.Б. – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова. 2011. – 450 с.

15. *Тихонов*, *А.Н.* Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука. 1979. – 283 с.

16. *Bernacki*, *B.E.* A mid-infrared prism coupler for bulk and thin film optical analysis / B.E. Bernacki, N.C. Anheier, H.A. Qiao // SPIE Defense, Security and Sensing. – IR Materials Standard Working Group Meeting. – 2012. – P. 1–9.

Поступила в редакцию 15.09.14.

УДК 621.378

РАСЩЕПЛЕНИЕ СВЕРХКОРОТКОГО ИМПУЛЬСА ПРИ РЕЗОНАНСНОМ ОТРАЖЕНИИ ОТ ТОНКОЙ ПЛЁНКИ

Ю.В. Юревич, В.А. Юревич, Е.В. Тимощенко

Могилёвский государственный университет им. А.А. Кулешова, Могилев, Беларусь

SUPERSHORT PULSE SPLITTING UNDER RESONANT REFLECTION FROM A THIN FILM

Yu.V. Yurevich, V.A. Yurevich, E.V. Timoschenko

A.A. Kuleshov Mogilev State University, Mogilev, Belarus

Моделируется нелинейный динамический эффект – расщепление короткого светового импульса, отражаемого тонким слоем плотной резонансной среды. Эффект возникает как результат когерентного взаимодействия, развивающегося в условиях динамичной фазовой перестройки поля лазерного импульса и поляризованности среды тонкого слоя. Решающим фактором развития процесса расщепления является эффект фазового смещения, обусловленный влиянием ближних дипольных взаимодействий на контур линии поглощения.

Ключевые слова: *резонансное отражение импульсов, тонкие оптические плёнки, диполь-дипольное взаимодействие.*

The nonlinear dynamic effect – splitting of the supershort optical pulse reflected by a dense resonant medium thin layer is simulated. The effect arises as a result of the coherent interaction, developing in a dynamic phase adjustment of the laser pulse field and the polarization of the medium of a thin layer. The decisive factor in the development of the splitting process is the effect of the phase shift due to the influence of neighbor dipole interactions on the absorption line.

Keywords: *pulse resonant reflection, thin optical films, dipole-dipolar interaction.*

Введение

Волны высокочастотного электромагнитного поля способны эффективно взаимодействовать с тонкими в масштабе длины волны плёнками активных сред [1]–[4]. Для характеристик отражения при этом типично наличие нелинейных компонентов, дополнительных к френелевским, например, – в значении эффективного коэффициента отражения слоя. Их возникновение обусловлено вкладом в диэлектрическую проницаемость составляющих поверхностной резонансной поляризованности [5], их нередко называют сверхизлучательными. В условиях плотных резонансных сред (оптических материалов с относительно высокой плотностью активных центров) нелинейность усиливается за счёт взаимного влияния ближних полей элементарных излучателей [6], [7]. В число плотных резонансных сред включают изучаемые ныне квантоворазмерные полупроводниковые структуры [7], [8]. Субмикронные и наноразмерные планарные системы таких слоёв обладают выраженным нелинейным откликом в экситонной области спектра и перспективны для использования в качестве элементов в устройствах управления когерентными потоками излучения.

В настоящей работе исследованы особенности отражения коротких оптических импульсов тонкими планарными плёнками плотных резонансных сред. В связи со сложностью подобных граничных задач, изучаемых для крайне нестационарных режимов взаимодействия, использованы приёмы компьютерного моделирования, которые позволяют оценить характер и степень изменения формы отражённого светового поля. Взаимодействие поля с веществом плёнки рассматривается в приближении особо тонкого слоя, когда в качестве уравнений связи полей (падающего, отражённого и действующего на элементарные излучатели, образующие плёнку) возможно применение электродинамических условий для полей на границе раздела. Наряду с учётом типичной для плотных резонансных сред нелинейности, обусловленной диполь-дипольным взаимодействием, использование осцилляторной квантовомеханической модели динамической реакции среды на импульсное излучение характеризует оригинальность поставленной задачи и результатов её решения.

1 Основные уравнения

Рассматривается планарная резонансная плёнка толщиной l, значительно меньшей длины волны света $\lambda = 2\pi c/\omega$, находящаяся на границе раздела двух линейных оптических сред. Плотность активных центров в плёнке предполагается относительно высокой. Расстояние между резонансными частицами при этом считается достаточным, чтобы избежать перекрытия их электронных орбиталей, тогда можно не выходить за рамки традиционного описания взаимодействия поля со средой [8]. В случае нормального падения плосковолнового поля на плёнку с нерезонансным показателем преломления η соотношения для полей с учётом поверхностной поляризованности выражаются в виде:

$$E = \frac{2}{\eta+1}E_i + \frac{\mu Nl}{\varepsilon_0(\eta+1)\,c}\frac{d\rho}{dt},$$
$$E_r = -\frac{\eta-1}{\eta+1}E_i + \frac{\mu Nl}{\varepsilon_0(\eta+1)\,c}\frac{d\rho}{dt}. \qquad (1.1)$$

Здесь $E(t)$ – напряжённость прошедшего в среду поля, $E_i(t)$ и $E_r(t)$ – напряжённости внешнего импульсного поля и отражённого плёнкой поля соответственно, μ – средний дипольный момент активных центров, N – их концентрация (учтено, что макроскопическая объёмная резонансная поляризованность связана с вероятностной величиной ρ так: $P(t) = \mu N\rho(t)$). Далее будут использоваться нормированные переменные напряжённости:

$$\mathrm{e}(t) = \frac{\mu}{\hbar\omega}E(t),$$
$$\mathrm{e}_i(t) = \frac{2\mu}{\hbar\omega(\eta+1)}E_i(t).$$

Условия связи полей (1.1) дополнены осцилляторными уравнениями квантовомеханической матрицы плотности для вероятностных переменных поляризованности ρ и разности заселённости n уровней резонансного перехода. Для рассматриваемой в дальнейшем ситуации с воздействием поля на активные центры в слое учитывается конечность времен T_1 и T_2 релаксации отклика среды слоя, при этом время релаксации разности заселённости T_1 может значительно превышать время необратимой фазовой релаксации T_2. Также предполагается, что динамика лорентцовой поправки, которой в приближении среднего поля учитывается вклад ближних полей диполей в поляризуемость, определяется изменением резонансной составляющей поляризованности. Система уравнений, используемых при моделировании отражения импульсного поля, будет иметь вид:

$$\frac{d^2\rho}{d\tau^2} + \frac{2}{\tau_2}\frac{d\rho}{d\tau} + \rho\,(1+2\gamma n) = -\,2n\mathrm{e},$$
$$\frac{dn}{d\tau} + \frac{n-n_0}{\tau_1} = -\,2\frac{d\rho}{d\tau}(\mathrm{e}+\gamma\rho),$$
$$\mathrm{e}(\tau) = \mathrm{e}_i + \frac{\kappa}{\tau_2}\frac{d\rho}{d\tau}, \qquad (1.2)$$
$$\mathrm{e}_r(\tau) = -\,\frac{\eta-1}{2}\mathrm{e}_i + \frac{\kappa}{\tau_2}\frac{d\rho}{d\tau}.$$

Здесь ω_0 – среднее значение собственной частоты элементарных осцилляторов. В случае резонансного взаимодействия учитывается, что несущая частота поля импульса ω близка к ω_0 (в пределах частотной ширины резонанса, оцениваемой величиной $2/T_2$). В системе (1.2) нормированы время и параметры релаксации – $\tau = \omega_0 t$, $\tau_{1,2} = \omega_0 T_{1,2}$, а также определена величина показателя резонансного поглощения плёнки $\kappa = \mu^2\omega Nl\,T_2/\,\varepsilon_0(\eta+1)\hbar c$ и вводится нормированный коэффициент в лорентцовой поправке для локального поля: $\gamma = \mu^2 N/3\,\varepsilon_0\hbar\,\omega_0$.

2 Результаты моделирования

В рамках численного решения разностного аналога системы (1.2) моделировалась реакция тонкого слоя на внешний сигнал с несущей нормированной частотой

$$\Omega = 1 + \Delta \quad (\Delta = (\omega_0 - \omega)/\omega_0),$$

представленный зависимостью

$$\mathrm{e}_i(\tau) = \mathrm{e}_i'(\tau)\exp(i\Omega\tau).$$

Его амплитуда задавалась в виде гиперболического секанса:

$$\mathrm{e}_i'(\tau) = \frac{2\,\mathrm{e}_0/\Delta\tau}{\exp(\tau/\Delta\tau) + \exp(-\tau/\Delta\tau)},$$

т. е. сигнал представлял собой оптический импульс фемтосекундной длительности, определяемой значением $\Delta\tau$. Естественно было считать, что при отсутствии зондирующего извне поля (в начальный момент времени) ансамбль активных центров, образующих плёнку, находится в основном состоянии, т. е. $n\,(\tau = 0) = 1.0$, а резонансная поляризованность отсутствует –

$$\rho\,(\tau = 0) = 0 \text{ и } \frac{d\rho}{d\tau}\,(\tau = 0) = 0.$$

Решалась известная задача Коши, то есть для этих условий при численном интегрировании уравнений (1.2), определялась зависимость $\rho(\tau)$, а также $\mathrm{e}(\tau)$. Напряжённость поля $\mathrm{e}_r(\tau)$ выражалась на основе полученной зависимости, следуя соотношениям для поля в системе (1.2).

На рисунке 2.1 представлены результаты расчёта нормированной (безразмерной) напряжённости поля излучения в отражённом импульсе. Характер трансформации импульсов отслеживается для нарастающего ряда значений показателя ненасыщенного поглощения κ и значений напряжённости приложенного поля $\mathrm{e}_0/\Delta\tau$ (здесь же на рисунке 2.1, *а* представлена форма зондирующего импульса), временну́ю шкалу было удобно выбрать в пикосекундах. При выборе параметров моделирования, которые использовались для определения коэффициентов системы (1.2), исходили, как правило, из тех оценок, которые известны, например, из работы [7], где рассмотрены структуры на основе *InGaAs*/*GaAs* или *GaInNAsSb,* нелинейно реагирующие на излучение в экситонной области спектра. Применение квантовой резонансной модели взаимодействия при анализе динамики когерентных оптических явлений в используемых в лазерной физике полупроводниках детально обосновано, например, в [9]. Масштаб моделируемого явления по уровню средней напряжённости e_0

соответствовал резонансному отражению импульса с пиковой интенсивностью порядка 10^8 Вт/см^2 субмикронной плёнкой толщины l, не превышающей $\sim 10^{-7}$ м; плотность активных центров N предполагалась в пределах $1\ldots4\cdot10^{24}$ м$^{-3}$, частота резонанса ω_0 избрана примерно равной $1.45\cdot10^{15}$ рад/с.

Расчёты, результаты которых в качестве примера приведены на вариантах рисунка, позволили установить следующее. При невысоком ненасыщенном поглощении к (в случае, если принять, что $\gamma = 0$) деформация импульса не особо выражена, асимметрия отражённого сигнала и возникновение «провала» вблизи пиковой области импульса проявляется по мере роста поглощения примерно так, как демонстрируется на рисунке 2.1, *б*. Но затем подобного рода раздвоение утрачивает контраст (и эта особенность способна вообще исчезнуть) при дальнейшем увеличении к.

Существенное изменение форма отраженного импульса испытывает в случае отстройки несущей частоты от центра линии поглощения ω_0 и при влиянии эффекта локального поля (рисунок 2.1, *в–з*). Импульс «раскалывается» на две асимметричные части с высоким контрастом (рисунок 2.1, *в*, *г*, *ж*, *з*). Эффект расщепления тогда оптимален, его контраст может быть особенно заметным на временно́й развёртке интенсивности сигнала. Соотношением амплитуд частей отражённых импульсов можно управлять, варьируя соотношения между параметрами входного импульса и плёнки. Нарастание входной амплитуды e_0 ведёт к усложнению картины деформации (рисунок 2.1, *е–з*) – напряжённость в пике второго из возникших импульсов относительно возрастает и на его заднем фронте формируется третий выброс. Дальнейшее увеличение входной амплитуды, однако, приводит к снижению контраста модуляции.

Заключение

Причину рассмотренной сильной деформации отраженных тонким слоем плотной резонансной среды световых сигналов следует объяснить особенностями нелинейной динамики фазового соотношения светового поля и резонансной поляризации в условиях нутационных колебаний разности заселённости.

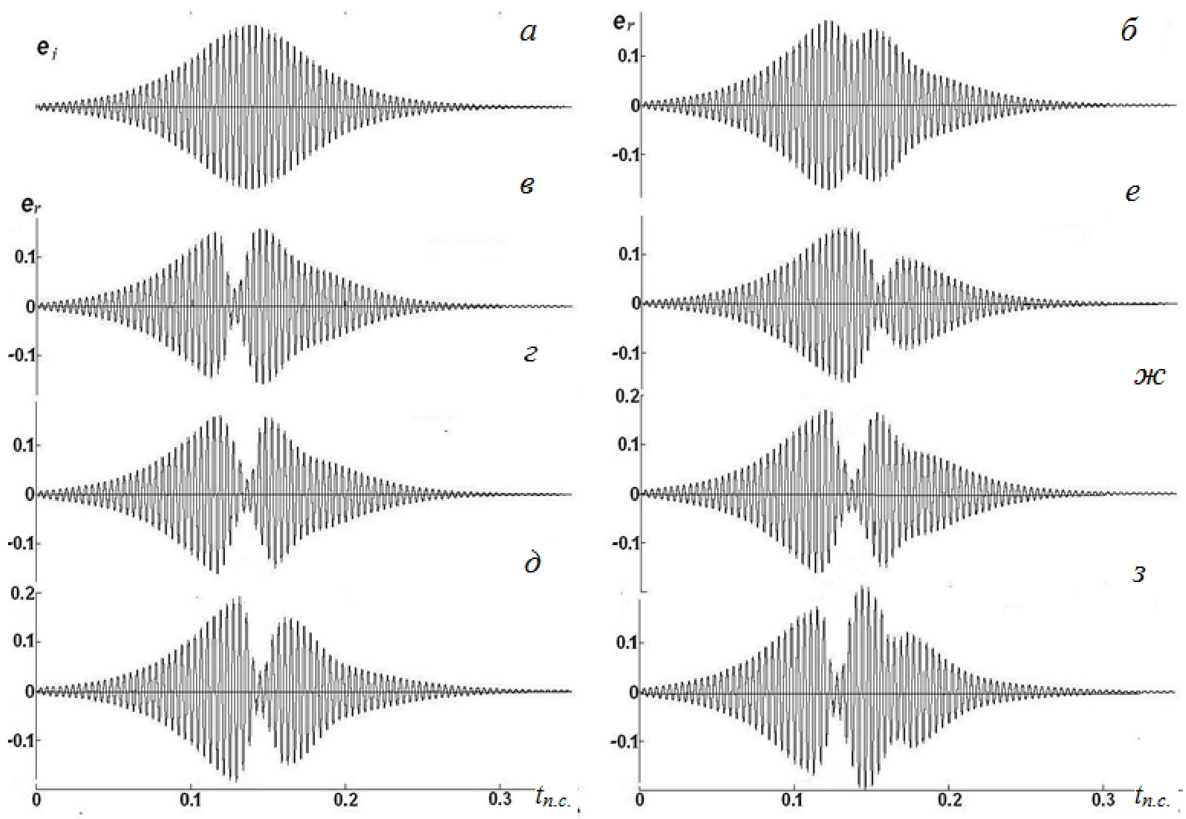


Рисунок 2.1 – Форма отражённых граничным нелинейным слоем импульсов: входной импульс с амплитудой огибающей $e_0/\Delta\tau = 0.25$ (*а–д*), $\kappa = 1.4$ (*б*, *е-з*), 1.1 (*в*), 1.2 (*г*), 1.5 (*д*), $e_0/\Delta\tau = 0.2$ (*е*), 0.27 (*ж*), 0.3 (*з*), $\gamma = 0$ (*б*), 0.3 (*в-з*), $\Delta = 0$ (*б*), 0.05 (*в–з*); $\eta = 3.6$, $T_1 = 1.0\cdot10^{-9}c$, $T_2 = 5.0\cdot10^{-13}c$, $\lambda = 1.3\cdot10^{-6}$м

Нутационная динамика типична для когерентного взаимодействия поля и среды, когда длительность импульсов сравнима или меньше времени фазовой релаксации среды T_2, и способна проявиться в отражённом тонким активным слоем излучении [4]. Нелинейный эффект затягивания частоты поля, первоначально отстроенного от резонанса в пределах спектральной ширины линии к её центру, давно известен в литературе. В ходе взаимодействия световое поле сигнала по частоте настраивается на резонанс, поглощение в центре линии максимально и при высокой мощности входного поля для него характерно насыщение. Перестройка фазы поляризованности следует за динамично смещающейся из-за эффекта ближних полей диполей резонансной частотой, это смещение определяется изменением разности заселённости. Оба процесса – перестройка частоты поля и дрейф резонансной частоты линии характеризуются различными временами релаксации. Из-за динамичных отклонений от условий резонансного поглощения во временно́й области, соответствующей пиковой части импульса, вместо насыщения и снижения поглощения возможно его резкое нарастание, в итоге отражённый импульс способен разделиться на две части.

Основным результатом работы является предсказание возможности расщепления короткого оптического импульса, отражаемого тонким слоем плотной резонансной среды. Явление характерно для режима когерентного взаимодействия света с веществом и возникает как следствие нутационных колебаний разности населённостей, развивающихся в условиях влияния ближних дипольных взаимодействий на контур линии поглощения. Эффект сильной деформации светового сигнала при резонансном отражении можно использовать для профилирования сверхкоротких световых импульсов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зельдович*, *Б.Я.* Влияние возбуждения поверхностной электромагнитной волны на временну́ю форму отражённого лазерного импульса / Б.Я. Зельдович, А.Н. Чудинов, А.А. Шульгинов // Письма в ЖТФ. – 1992. – Т. 18, вып. 22. – С. 61–65.

2. *Бакунов*, *М.И.* Расщепление электромагнитного импульса при резонансном отражении от плазменной плёнки / М.И. Бакунов, Н.С. Гурбатов // ЖТФ. – 1997. – Т. 68. – № 6. – С. 65–71.

3. *Злодеев*, *И.В.* Трансформация гауссова импульса при отражении от резонансной тонкоплёночной структуры / И.В. Злодеев, Ю.Ф. Наседкина, Д.И. Семенцов // Опт. и спектр. – 2012. – Т. 113, № 2. – С. 234–241.

4. *Тимощенко*, *Е.В.* Сверхизлучательная трансформация световых импульсов при отражении граничным нелинейным слоем / Е.В. Тимощенко, В.А. Юревич // Доклады НАН Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 6. – С. 56–61.

5. *Гадомский*, *О.Н.* Эхо-спектроскопия поверхности / О.Н. Гадомский, Р.А. Власов // Мн.: Навука і тэхніка, 1990. – 216 с.

6. *Malyshev*, *V.* Spatial effects in nonlinear resonant reflection from the boundary of a dense semi-infinite two-level medium: normal incidence / V. Malyshev, E.C. Jarque // J. Opt. Soc. Am. B. – 1997. – Vol. 14, № 5. – P. 1167–1172.

7. *Htoon*, *H.* Quantum coherence phenomena in semiconductor quantum dots: quantum interference, decoherence and Rabi oscillation / H. Htoon, C.K. Shih, T. Takagahara // Chaos, Solitons and Fractals. – 2003. – Vol. 16, № 3. – P. 439–448.

8. *Каплан*, *А.Е.* Поведение локальных полей в нанорешётках из сильно взаимодействующих атомов: наностраты, гигантские резонансы, «магические» числа и оптическая бистабильность / А.Е. Каплан, С.Н. Волков // УФН. – 2009. – Т. 179, № 5. – С. 539–547.

9. *Meier*, *T.* Coherent Semiconductor Optics: From Basic Concepts to Nanostructure Applications / T. Meier, P. Thomas, S.W. Koch. – Springer, 2007. – 312 p.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (*Проект Ф14М – 146*).

Поступила в редакцию 28.11.14.

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

ОБ $\mathfrak{F}$-ДОСТИЖИМЫХ ПОДГРУППАХ В ГРУППАХ С ОПЕРАТОРАМИ

Р.В. Бородич, М.В. Селькин, Е.Н. Бородич

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

ON $\mathfrak{F}$-ACCESSIBLE SUBGROUPS IN GROUPS WITH OPERATORS

R.V. Borodich, M.V. Selkin, E.N. Borodich

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

В работе изучается поведение $\mathfrak{F}$-достижимых подгрупп в обобщенно фраттиниевых расширениях.

***Ключевые слова**: максимальная подгруппа, формация, $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа, группа операторов.*

The behavior of $\mathfrak{F}$-accessible subgroups in generalized Frattini extension is studied.

***Keywords**: maximal subgroup, formation, $\mathfrak{F}$-accessible subgroups, group of operators.*

Введение

Все рассматриваемые группы конечны. Исследование пересечений максимальных подгрупп относится к одному из классических направлений теории конечных групп. Начало этой теории восходит к работе Фраттини [1] 1885 года. Полученные им результаты в дальнейшем развивались в работах таких авторов, как Л.А. Шеметков [2], М.В. Селькин [3], А. Баллестер-Болинше [4], Д. Бейдлеман и Ш. Смит [5] и многих других (см. монографии [2], [3]).

В работе Д. Бейдлемана и Ш. Смита [5] был поставлен следующий вопрос: «Если H субнормальная подгруппа группы G, содержащая $\Phi(G)$, то будет ли из сверхразрешимости $H/\Phi(G)$ следовать сверхразрешимость подгруппы H?» Эта задача рассматривалась в работах многих авторов (см. монографию [3]). В данной работе даётся ответ на более общий вопрос: «Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, H – $\mathfrak{F}$-достижимая подгруппа, в каком случае из $H/\Phi(G,A)\in\mathfrak{F}$ будет следовать, что $H\in\mathfrak{F}$?»

1 Определения и обозначения

Подгруппа H группы G называется пронормальной, если для любого $x\in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $<H,H^x>$.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G.

Класс групп называют наследственным, если вместе с каждой своей группой G он содержит все подгруппы группы G.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если выполняются следующие условия:

1) если $G\in\mathfrak{F}$ и $N\triangleleft G$, то $G/N\in\mathfrak{F}$;

2) если $G/N_1\in\mathfrak{F}$ и $G/N_2\in\mathfrak{F}$, то $G/N_1\cap N_2\in\mathfrak{F}$.

Отображение f класса G всех групп в множество классов групп называют экраном, если для любой группы G выполняются следующие условия:

1) $f(G)$ – формация;

2) $f(G)\subseteq f(G^{\varphi})\cap f(Ker\varphi)$ для любого гомоморфизма φ группы G;

3) $f(1)=G$.

Экран f называют локальным, если для любого простого числа p он принимает одинаковые значения на всех неединичных p-группах и $f(G)=\bigcap_{p\in\pi(G)} f(p)$ для любой группы G.

Формацию $\mathfrak{F}$ называют локальной, если она имеет хотя бы один локальный экран.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Тогда подгруппа H конечной группы G называется $\mathfrak{F}$ – достижимой, если имеется такая цепь подгрупп

$$H=H_0\subseteq H_1\subseteq\ldots\subseteq H_n=G,$$

что для каждого $i=1,2,\ldots,n$ выполняется одно из условий: 1) подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i; 2) $\mathfrak{F}$-корадикал подгруппы H_i содержится в H_{i-1}. Если выполняется только условие 2), то такую подгруппу называют $\mathfrak{F}$-субнормальной.

Понятие $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппы, введённое О. Кегелем в работе [6], позволило систематизировать многие закономерности, связанные с нормальными и субнормальными подгруппами, а также их обобщениями. В данной работе идея $\mathfrak{F}$-достижимой подгруппы используется для исследования поведения нормальных и обобщённо субнормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп во фраттиниевых расширениях конечных групп.

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (то есть пересечение всех подгрупп из G, сопряженных с подгруппой M).

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f : A \mapsto End(G)$, где $End(G)$ – множество всех эндоморфизм группы G. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, то есть $M^{\alpha} \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им эндоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Обозначим через $\Phi(G, A)$ пересечение ядер всех максимальных A-допустимых подгрупп.

Пусть $\mathfrak{I}$ – формация. Через $D^{\mathfrak{I}}(G, A)$ обозначим подгруппу, равную пересечению ядер всех максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих $\mathfrak{I}$-корадикал группы G.

В случае, когда группа операторов A единична, то подгруппы $\Phi(G, A)$ и $D^{\mathfrak{I}}(G, A)$ совпадают соответственно с $\Phi(G)$ (подгруппа Фраттини) и $\Delta^{\mathfrak{I}}(G)$ (подгруппа, равная пересечению всех $\mathfrak{I}$-абнормальных максимальных подгрупп группы G). Свойства подгруппы $\Delta^{\mathfrak{I}}(G)$, а также её влияние на строение группы для различных классов групп $\mathfrak{I}$ достаточно хорошо изучены [3].

В случае отсутствия в группе G указанных подгрупп будем полагать, что соответствующие пересечения совпадают с самой группой G.

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A-допустимой относительно некоторой группы операторов A, а также не всякая максимальная A-допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе.

***Пример* 1.1.** *Пусть Q – группа кватернионов 8-го порядка. Рассмотрим $G = [Q]Z_3$, Z_3 – группа операторов для Q. В группе Q подгруппа K порядка 2 является максимальной допустимой относительно группы операторов Z_3, но не является максимальной подгруппой группы Q.*

***Пример* 1.2.** *Рассмотрим группу*

$$G^* = < a, b, c \mid a^2 = b^3 = c^3 = 1, bc = cb, b^a = c > .$$

Тогда $G^* = [G]A$, где $G = < b > \times < c >$ и $A = < a >$ – группа операторов группы G. Простая проверка показывает, что в группе G есть максимальная A-допустимая подгруппа $H = < bc >$ порядка 3, но не все подгруппы порядка 3, например $< b >$, являются A-допустимыми.

Пусть $\Phi(G, A) \neq G$. Определим подгруппу $\widetilde{F}(G, A)$ группы G следующими двумя условиями:

1) $\widetilde{F}(G, A) \supseteq \Phi(G, A)$;

2) $\widetilde{F}(G, A) / \Phi(G, A) = Soc(G / \Phi(G, A))$.

На подгруппу $\widetilde{F}(G, A)$ можно смотреть как на обобщение подгруппы Фиттинга $F(G)$, тем более, что она сохраняет основное свойство подгруппы Фиттинга разрешимой группы – содержать свой централизатор.

2 Вспомогательные результаты

В дальнейшем нам понадобятся следующие результаты об $\mathfrak{I}$-достижимых подгруппах.

***Лемма* 2.1** [3]. *Пусть $\mathfrak{I}$ – непустая наследственная формация, H, K и N – подгруппы группы G, причем подгруппа N нормальна в G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если H – $\mathfrak{I}$-достижимая подгруппа группы G, то $H \cap K$ – $\mathfrak{I}$-достижимая подгруппа группы K, а HN / N – $\mathfrak{I}$-достижимая подгруппа группы G / N;*

2) *если $H \supseteq N$, то подгруппа H $\mathfrak{I}$-достижима в G тогда и только тогда, когда подгруппа H / N $\mathfrak{I}$-достижима в G / N;*

3) *если H – $\mathfrak{I}$-достижимая подгруппа группы G, то $H^{\mathfrak{I}}$ – субнормальная подгруппа группыG.*

***Лемма* 2.2.** *Пусть группа G имеет группу операторов A. Тогда $\Phi(G) \subseteq \Phi(G, A)$.*

Доказательство. Предположим, что

$$\Phi(G) \subset \Phi(G, A).$$

Тогда существует максимальная A-допустимая подгруппа M, такая, что $\Phi(G) \not\subset M$. Так как $\Phi(G)$ является характеристической подгруппой, то $\Phi(G)$ A-допустима. Так как произведение A-допустимых подгрупп является A-допустимым, то $M\Phi(G) = G$. Учитывая, что $\Phi(G)$ состоит из необразующих элементов, получаем, что $M = G$. Полученное противоречие доказывает лемму.

***Лемма* 2.3.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $K \subseteq N \triangleleft G$, $K \triangleleft G$ и $K \subseteq \Phi(G, A)$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если N / K π-замкнута, то и N π-замкнута*;

2) $F_p(N / K) = F_p(N) / K$.

Доказательство. Пусть N / K имеет нормальную S_{π}-подгруппу H / K. Так как $K \subseteq \Phi(G, A)$, то K нильпотентна. Нетрудно заметить, что $S_{\pi'}$-подгруппа R из K является $S_{\pi'}$-подгруппой в H. По теореме Шура-Цассенхауза H содержит S_{π}-подгруппу S и любые две такие подгруппы сопряжены в H. По лемме Фраттини $G = N_G(S)H$. С учётом того, что $H = SR$, получаем, что $G = N_G(S)R$. Так как S

есть S_π-подгруппа в N, а подгруппа N A-допустима, то S A-допустима. Тогда подгруппа $N_G(S)$ A-допустима и на основании леммы 17.1 из [2] является абнормальной подгруппой группы G. Следовательно, $N_G(S)$ содержится в некоторой абнормальной максимальной A-допустимой подгруппе M из G. Поэтому $G = MR$. Так как $R \subseteq \Phi(G, A) \subseteq M$, то $G = M$. Получили противоречие. Следовательно, S нормальна в G.

Второе утверждение леммы является следствием первого при $\pi = p'$. Лемма доказана.

3 Основной результат

***Теорема* 3.1.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\Im$ – локальная формация, $\pi = \pi(\Im)$. Если субнормальная подгруппа H группы G содержит $O_\pi(\Phi(G, A))$ и $H / O_\pi(\Phi(G, A)) \in \Im$, то $H \in \Im$.*

Доказательство. Согласно теореме 4.3 гл. IV [6] $\Im$ содержится в E_π классе всех π-групп. Не ограничивая общности, можно считать, что $\Phi(G, A)$ – π-группа. Таким образом, H – π-группа и $H / \Phi(G, A) \in \Im$. Так как H – субнормальная подгруппа группы G и согласно леммы 2.3 $F_p(G / \Phi(G, A)) = F_p(G) / \Phi(G, A)$, получаем, что

$$F_p(H / \Phi(G, A)) = F_p(H) / \Phi(G, A).$$

Так как $H / \Phi(G, A) \in \Im$, то, используя лемму 2.3 и лемму 4.5 из [2], получаем, что

$$(H / \Phi(G, A)) / F_p(H / \Phi(G, A)) =$$
$$= H / \Phi(G, A) / F_p(H) / \Phi(G, A)$$
$$H / F_p(H) \in f(p).$$

Так как последнее справедливо для любого $p \in \pi(H)$, то по лемме 4.5 из [2] подгруппа H входит в $\Im$. Теорема доказана.

В случае, когда $\Im$ содержит формацию нильпотентных групп, тогда $\pi = P$ и теорема 3.1 дает ответ на вопрос: «Если H субнормальная подгруппа группы G, такая, что $H / \Phi(G, A) \in \Im$, то $H \in \Im$».

Если группа операторов A единична, то подгруппа $\Phi(G, A)$ совпадает с подгруппой Фраттини $\Phi(G)$ и из теоремы 3.1 получаем результат работы [4].

Замечание. *Если локальная формация $\Im$ не содержит формацию нильпотентных групп, то даже в случае единичной группы операторов из того, что $H / \Phi(G) \in \Im$ для субнормальной подгруппы H, не всегда следует, что $H \in \Im$. Действительно, пусть $\Im$ – насыщенная формация всех p-групп, p – простое число. Рассмотрим $q \neq p$ и пусть $G = C_{p^2} \times C_{q^2}$ – циклическая группа порядка $p^2 q^2$. Если $H = C_{p^2}\Phi(G)$, тогда $H \triangleleft G$ и $H / \Phi(G) \in \Im$, но $H \notin \Im$.*

***Теорема* 3.2.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\Im$ – локальная формация. Если N – субнормальная подгруппа группы G и $N / N \cap \Phi(G, A) \in \Im$. Тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

1) $N_1 \in \Im$;
2) $\pi(N_2) \cap \pi(\Im) = \varnothing$;
3) $N_2 \subseteq \Phi(G, A)$.

Доказательство. Пусть $D = N \cap \Phi(G, A)$, $\pi = \pi(\Im)$. По теореме 3.1 подгруппа N представима в виде $N = N_1 \times N_2$, где N_1 – холловская π-подгруппа из N. Так как $N_2 \subseteq \Phi(G, A)$, то $N / DN_1 / D_1 \in \Im$, где $D_1 = N_1 \cap \Phi(G, A)$. Пусть $p \in \pi$. Так как $N_1 / D_1 \in \Im$, то, используя лемму 2.3 и лемму 4.5 из [2], получаем, что

$$(N_1 / D_1) / F_p(N_1 / D_1) =$$
$$= N_1 / D_1 / F_p(N_1) / D_1 N_1 / F_p(N_1) \in f(p).$$

Так как последнее справедливо для любого $p \in \pi(N_1)$, то по лемме 4.5 из [2] подгруппа N_1 входит в $\Im$. Теорема доказана.

***Следствие* 3.2.1.** *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\Im$ – локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если N – субнормальная подгруппа группы G и $N / N \cap \Phi(G, A) \in \Im$, то $N \in \Im$.*

***Теорема* 3.3.** *$C_G(\widetilde{F}(G, A)) \subseteq F(G)$ для любой группы G.*

Доказательство. Положим $H = \widetilde{F}(G, A)$, $C = C_G(H)$, $F = F(G)$. Если $\Phi(G, A) \neq 1$, то рассматриваем $G / \Phi(G, A)$, для которой теорема верна по индукции. Тогда

$C\Phi(G, A) / \Phi(G, A) \subseteq F / \Phi(G, A) = F(G / \Phi(G, A))$,

откуда $C \subseteq F$. Рассмотрим теперь случай $\Phi(G, A) = 1$. Ввиду того, что подгруппа Фиттига $F(G)$ совпадает с пересечением централизаторов в G всех главных факторов группы G, получаем, что $F \subseteq C$.

Предположим, что $C \neq F$ и рассмотрим такой главный фактор N / F группы G, что $N \subseteq C$. Так как $Soc(N)$ содержится в H, следовательно, он централизуется подгруппой N. Если $N \neq G$, то по индукции $N = F(N) = F(G)$, что невозможно. Пусть $N = G$, то есть, G / F – главный фактор группы G. По лемме 7.9 из [2] и лемме 2.2

$$G = LF, L \cap F = 1, F \subseteq H.$$

В рассматриваемом случае $G = C$. Поэтому $G = L \times F$. Так как $G / F \simeq L$, то L либо проста, либо есть прямое произведение изоморфных простых групп. Так как $F \neq G$, то L неабелева и, несложно заметить, $L = G'$. Значит, L является минимальной нормальной подгруппой группы G, то есть $L \subseteq H$. Но это невозможно, так как L неабелева и $G = C$. Теорема доказана.

***Теорема* 3.4.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– наследственная локальная формация и группа* G *имеет группу операторов* A, *такую, что* $(|G|, |A|) = 1$. *Если* H *–* $\mathfrak{F}$*-достижимая подгруппа группы* G *и* $H / H \cap \Phi(G, A) \in \mathfrak{F}$, *то* H *представима в виде прямого произведения* $H = H_1 \times H_2$, *множители которого удовлетворяют следующим условиям*:

1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(H_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $H_2 \subseteq \Phi(G, A)$.

Доказательство. Так как подгруппа H $\mathfrak{F}$-достижима в G, то она, очевидно, G_π-достижима в G, где $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Ввиду леммы 2.1 подгруппа $H\Phi(G, A) / \Phi(G, A)$ G_π-достижима в группе $G / \Phi(G, A)$. Значит, на основании работы [7] имеем, что

$$H\Phi(G, A) / \Phi(G, A) \subseteq O_\pi(G / \Phi(G, A)).$$

Пусть $O_\pi(G / \Phi(G, A)) = K / \Phi(G, A)$. По теореме 3.2 подгруппа K представима в виде $K = K_1 \times K_2$, где K_1 – π-группа, $\pi(K_2) \cap \pi = \varnothing$, $K_2 \subseteq \Phi(G, A)$. Пусть H_1 – холловская π-подгруппа группы H, H_2 – холловская π'-подгруппа группы H. Очевидно, $H_1 \subseteq K_1$, $H_2 \subseteq K_2$. Поэтому $H = H_1 \times H_2$, причем, H_1 – π-группа, $\pi(H_2) \cap \pi = \varnothing$, $H_2 \subseteq \Phi(G, A)$.

Покажем, что $H_1 \in \mathfrak{F}$. Предположим, что это неверно и группа G является контрпримером минимального порядка. Тогда в G найдется F-достижимая подгруппа T, такая, что из $T / T \cap \Phi(G, A) \in \mathfrak{F}$ следует равенство $T = T_1 \times T_2$, где T_1 – π-группа, $\pi(T_2) \cap \pi = \varnothing$, $T_2 \subseteq \Phi(G, A)$, но подгруппа T_1 не принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Среди всех таких подгрупп выберем подгруппу H, имеющую в G наименьший индекс. Очевидно, что $H_1 \neq 1$. Поэтому $O_\pi(G) \neq 1$.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как

$$H\Phi(G, A)N / \Phi(G, A)N \simeq$$
$$\simeq H\Phi(G, A) / H\Phi(G, A) \cap \Phi(G, A)N,$$

то $H\Phi(G, A)N / \Phi(G, A)N \in \mathfrak{F}$. С другой стороны,

$$H\Phi(G, A)N / \Phi(G, A)N \simeq HN / HN \cap \Phi(G, A)N.$$

Поэтому $HN / HN \cap \Phi(G, A)N \in \mathfrak{F}$.

Так как $\Phi(G, A)N / N \subseteq \Phi(G / N, A)$, то

$$(HN / N) / (HN / N) \cap \Phi(G / N, A) \in \mathfrak{F}.$$

Кроме того, на основании леммы 2.1 подгруппа HN / N $\mathfrak{F}$-достижима в группе G / N. Теперь ввиду выбора группы G имеем $H_1 N / N \in \mathfrak{F}$. Если L – минимальная нормальная подгруппа группы G, отличная от N, то аналогично доказывается, что $H_1 L / L \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что

$$H_1 / L \cap N \simeq H_1 \in \mathfrak{F}.$$

Пришли к противоречию.

Итак, N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Из

$$N \subseteq \Phi(G, A) \cap O_\pi(G)$$

следует, что N – абелева p-группа для некоторого $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Кроме того, $H_2 = 1$, $H = H_1$ и $HN / N \in \mathfrak{F}$. Если N не содержится в H, то $|G : HN| < |G : H|$. Кроме того,

$$HN / HN \cap \Phi(G, A) \in \mathfrak{F}.$$

Значит, ввиду выбора подгруппы H имеем, что $HN \in \mathfrak{F}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ является наследственной, то $H \in \mathfrak{F}$. Снова пришли к противоречию. Значит, в дальнейшем полагаем, что $N \subseteq H$.

Предположим, что H – собственная подгруппа группы $HO_p(G)$. Ввиду леммы 2.1 подгруппа H $\mathfrak{F}$-достижима в группе $HO_p(G)$. Поэтому существует такая цепь

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = HO_p(G),$$

что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ выполняется одно из условий: 1) подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i; 2) $\mathfrak{F}$-корадикал подгруппы H_i содержится в H_{i-1}.

Пусть $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, f – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Если подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, то, очевидно, $H_{i-1}^{f(p)}$ – нормальная подгруппа группы H_i. По теореме 4.7 из [2] формация $f(p)$ является наследственной. Поэтому $H_{i-1}^{f(p)} \subseteq H_i^{f(p)}$. Значит, подгруппа $H_{i-1}^{f(p)}$ нормальна в группе $H_i^{f(p)}$.

Пусть теперь $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$. Так как

$$H_i = H_{i-1}(O_p(G) \cap H_i),$$

то

$$H_i / (H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G) \cap H_i) \simeq$$
$$\simeq H_{i-1} / (H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G) \cap H_{i-1}).$$

Поэтому $(H_i)^{f(p)} \subseteq (H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G) \cap H_i)$.

Так как $H_{i-1}^{f(p)} \subseteq H_i^{f(p)}$, то

$$\begin{aligned}(H_i)^{f(p)}(O_p(G) \cap H_i) &= \\ = (H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G) \cap H_i).\end{aligned} \qquad (3.1)$$

По лемме 4.5 из [2] для любого $j \in \{0,1,2,...,n\}$ имеем

$$(H_j)^{f(p)} / (H_j)^{\Im} \subseteq O_{p'p}(H_j / (H_j)^{\Im}).$$

Так как экран f является внутренним максимальным, то на основании теоремы 3.3 из [2] $f(p) = N_p f(p)$. Отсюда следует, что

$$(H_j)^{f(p)} / (H_j)^{\Im} \subseteq O_{p'}(H_j / (H_j)^{\Im}).$$

Так как $H_j O_j(G) / O_p(G) \in \Im$, то

$$(H_j)^{\Im} \subseteq H_j \cap O_p(G).$$

Таким образом,

$$(H_j)^{f(p)} = (H_j)^{f(p)}_{p'} (H_j)^{\Im},$$

где $(H_j)^{f(p)}_{p'}$ – холловская p'-подгруппа группы $(H_j)^{f(p)}$. Теперь из равенства (3.1) следует, что холловская p'-подгруппа $(H_{i-1})^{f(p)}_{p'}$ группы $(H_{i-1})^{f(p)}$ является холловской p'-подгруппой группы $(H_i)^{f(p)}$. Значит,

$$(H_i)^{f(p)} = (H_{i-1})^{f(p)}_{p'} (H_i)^{\Im}.$$

Так как $(H_i)^{\Im} \subseteq H_{i-1}$, то $(H_i)^{f(p)} \subseteq H_{i-1}$. Итак,

$$(H_{i-1})^{f(p)} \subseteq (H_i)^{f(p)} \subseteq H_i.$$

Отсюда следует, что подгруппа $(H_{i-1})^{f(p)}$ нормальна в группе $(H_i)^{f(p)}$.

Итак, подгруппа $H^{f(p)}$ субнормальна в группе $HO_p(G)$. Тогда подгруппа

$$(H / N)^{f(p)} = H^{f(p)} N / N$$

является субнормальной подгруппой группы $(H/N)O_p(G/N)$. Так как $H / N \in \Im$, то

$$(H / N)^{f(p)} \subseteq O_{p'}(H / N).$$

Из субнормальности $(H / N)^{f(p)}$ в $HO_p(G)/N$ следует, что

$$(H / N)^{f(p)} \subseteq O_{p'}(HO_p(G)/N).$$

Значит,

$$(H / N)^{f(p)} O_p(G/N) \subseteq O_{p'p}(HO_p(G)/N).$$

Так как

$$HO_p(G) / H^{f(p)} O_p(G) \simeq$$

$$\simeq H / H \cap H^{f(p)} O_p(G) \in f(p),$$

то

$$(HO_p(G)/N) / O_{p'p}(HO_p(G)/N) \in f(p).$$

Используя теорему 4.1 из [2], получаем, что все главные факторы группы $HO_p(G)/N$, содержащиеся в $O_p(G)/N$, являются $\Im$-центральными. Поэтому из $HO_p(G)/O_p(G) \in \Im$ следует, что $HO_p(G)/N \in \Im$.

Очевидно, подгруппа $HO_p(G)$ $\Im$-достижима в группе G. Так как

$$|G : HO_p(G)| < |G : H|,$$

то ввиду выбора подгруппы H имеем, что $HO_p(G) \in \Im$. Из наследственности формации $\Im$ следует, что $H \in \Im$. Пришли к противоречию.

Итак, $O_p(G) \subseteq H$. Пусть ϕ – естественный гомоморфизм группы G на группу $G / \Phi(G, A)$. Отметим, что так как N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, то $\Phi(G, A) \subseteq O_p(G)$. Пусть $S = \phi^{-1}(O_p(G^{\phi}))$ – полный прообраз подгруппы $O_p(G^{\phi})$. На основании теоремы 3.2 подгруппа S представима в виде $S = S_1 \Phi(G, A)$, где S_1 – холловская p'-подгруппа группы S. Теперь из того, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа, имеем $O_p(G^{\phi}) = 1$. Таким образом, все абелевы минимальные нормальные подгруппы группы G^{ϕ} являются p-группами.

Пусть K – неабелева минимальная нормальная подгруппа группы G^{ϕ}. Предположим, что K не принадлежит формации $\Im$. Тогда $K = K^{\Im}$. Так как подгруппа H^{ϕ} $\Im$-достижима в G^{ϕ}, то из работы [8] $K \subseteq N_{G^{\phi}}(H)$. Значит, $K \cap H^{\phi}$ – нормальная подгруппа группы K и поэтому $(K \cap H^{\phi})^{\Im} = K \cap H^{\phi}$. Так как $\Im$ – наследственная формация, то $(K \cap H^{\phi})^{\Im} \subseteq (H^{\phi})^{\Im}$. Теперь из $H^{\phi} \in \Im$ следует, что $K \cap H^{\phi} = 1$. Значит, $KH^{\phi} = K \times H^{\phi}$.

Пусть теперь $K \in \Im$. Предположим, что K не содержится в H^{ϕ}. Так как подгруппа H^{ϕ} $\Im$-достижима в $H^{\phi}K$, то существует такая цепь

$$H^{\phi} = H_0 \subset H_1 \subset ... \subset H_s = H^{\phi}K,$$

что для каждого $i = 1,2,...,s$ выполняется одно из условий: 1) подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i; 2) $\Im$-корадикал подгруппы H_i содержится в H_{i-1}. В частности, либо подгруппа H^{ϕ} нормальна в группе H_1, либо $(H_1)^{\Im} \subseteq H^{\phi}$.

Пусть $(H_1)^{\Im} \subseteq H^{\phi}$. Так как $H^{\phi}K / K \in F$, то $(H^{\phi}K)^{\Im} \subseteq K$. Из наследственности формации $\Im$ имеем, что $(H_1)^{\Im} \subseteq K$. Так как подгруппа H_1 $\Im$-достижима в $H^{\phi}K$, то ввиду леммы 2.1 $(H_1)^{\Im}$ – субнормальная подгруппа группы $H^{\phi}K$. Очевидно, подгруппа K представима в виде $K = K_1 \times ... \times K_n$, где K_i – изоморфные простые группы. Так как подгруппа K неабелева, то $(H_1)^{\Im}$ – произведение некоторых подгрупп K_i для i из $\{1,2,...,n\}$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что

$$(H_1)^{\Im} = K_1 \times ... \times K_m,$$

где $k < m$.

Пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы H^{ϕ}, содержащаяся в $(H_1)^{\Im}$. Так как подгруппа L неабелева, то $K = L \times C_K(L)$. Отсюда, в частности, следует, что L – минимальная нормальная подгруппа группы $H^{\phi}K$. Так как $L \subseteq H^{\phi}$, то

$$H^{\phi}K = H^{\phi}(LC_K(L)) = H^{\phi}C_K(L) = H^{\phi}C_{H^{\phi}K}(L).$$

Поэтому

$$H^{\phi}K / C_{H^{\phi}K}(L) = H^{\phi}C_{H^{\phi}K}(L) / C_{H^{\phi}K}(L) \simeq$$
$$\simeq H^{\phi} / H^{\phi} \cap C_{H^{\phi}K}(L) = H^{\phi} / C_{H^{\phi}}(L).$$

Так как $H^{\phi} \in \Im$, то $H^{\phi} / C_{H^{\phi}}(L) \in f(L)$. Но тогда $H^{\phi}K / C_{H^{\phi}K}(L) \in f(L)$, то есть, L – $\Im$-центральный главный фактор группы $H^{\phi}K$. Так как формация *f*(*L*) наследственна, то L – *F*-центральный главный фактор группы H_1. Отсюда из строения подгруппы $(H_1)^{\Im}$ следует, что все H_1-главные факторы группы $(H_1)^{\Im}$ $\Im$-центральны в H_1. Значит, подгруппа H_1 принадлежит формации $\Im$. Так как подгруппа H_1 *F*-достижима в H_1K, а подгруппа $H_1K = H^{\phi}K$ $\Im$-достижима в G^{ϕ}, то H_1 – $\Im$-достижимая подгруппа группы G^{ϕ}. Пусть $\phi^{-1}(H_1)$ – полный прообраз подгруппы H_1. Тогда $\phi^{-1}(H_1)$ – $\Im$-достижимая подгруппа группы G, $\phi^{-1}(H_1) / \Phi(G, A) \in \Im$ и $|G : \phi^{-1}(H_1)| < |G : H|$. Ввиду выбора подгруппы *H* имеем, что $\phi^{-1}(H_1) \in \Im$. Так как формация $\Im$ наследственна, то $H \in \Im$. Пришли к противоречию.

Пусть теперь подгруппа H^{ϕ} нормальна в *H*. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что H_1 / H^{ϕ} – простая группа. Предположим, что $(H_1)^{\Im} H^{\phi}$. Тогда

$$H_1 = H^{\phi}(H_1)^{\Im} = H^{\phi}(K_1 \times ... \times K_m).$$

Так как

$$H_1 / H^{\phi} \simeq K_1 \times ... \times K_m / K_1 \times ... \times K_m \cap H^{\phi},$$

то из $K \in \Im$ следует, что $(H_1)^{\Im} \subseteq H^{\phi}$. Пришли к противоречию с предположением.

Значит, $(H_1)^{\Im} \subseteq H^{\phi}$. Как показано выше, это приводит к противоречию с выбором подгруппы *H*.

Итак, если *K* – минимальная нормальная подгруппа группы G^{ϕ}, то либо $K = K^{\phi}$ и $[K, H^{\phi}] = 1$, либо $K \in \Im$ и $K \subseteq H^{\phi}$. Если $K = K^{\Im}$, то, очевидно, $O_p(H^{\phi}) \subseteq C_{G^{\phi}}(K)$. Пусть $K \in \Im$. Тогда $K \subseteq H^{\phi}$. Так как все минимальные нормальные подгруппы группы *G* являются либо *p*-группами, либо *pd*-группами, то из $K \subseteq H^{\phi}$ снова получаем, что $O_p(H^{\phi}) \subseteq C_{G^{\phi}}(K)$. Таким образом,

$$O_p(H^{\phi}) \subseteq C_{G^{\phi}}(Soc(G^{\phi})).$$

Так как $\Phi(G^{\phi}, A) = 1$, то $Soc(G^{\phi}) = \widetilde{F}(G^{\phi}, A)$. По теореме 3.3

$$O_p(H^{\phi}) \subseteq F(G^{\phi}) = O_p(H^{\phi}).$$

Значит, $O_p(H^{\phi}) = 1$.

Так как $H^{\phi} \in \Im$, то ввиду леммы 4.5 [2] из условия $f(p) = N_p f(p)$ следует, что

$$H^{\phi} / O_p(H^{\phi}) \in f(p).$$

Так как $O_p(H^{\phi}) = 1$, то $H^{\phi} = H / \Phi(G, A) \in f(p)$. Теперь из $\Phi(G, A) \subseteq O_p(G)$ и $f(p) = N_p f(p)$ следует, что $H \in f(p)$. Так как экран f является внутренним, то $H^{\phi} \in \Im$. Снова пришли к противоречию. Теорема доказана.

***Следствие* 3.4.1.** *Пусть* $\Im$ *– наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, и группа G имеет группу операторов A, такую, что* $(|G|, |A|) = 1$. *Если* N *–* $\Im$*-достижимая подгруппа группы G и* $N / N \cap \Phi(G, A) \in \Im$, *то* $N \in \Im$.

Так как $\Im$-субнормальные и субнормальные подгруппы являются $\Im$-достижимыми, то в качестве следствия из теоремы 3.4 можно получить аналогичные утверждения для этих подгрупп.

***Теорема* 3.5.** *Пусть* $\Im$ *– наследственная локальная формация. Если H –* $\Im$*-достижимая подгруппа группы G и* $H / H \cap D^{\Im}(G, A) \in \Im$, *то H представима в виде прямого произведения* $H = H_1 \times H_2$, *множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

1) $H_1 \in \Im$;
2) $\pi(H_2) \cap \pi(\Im) = \varnothing$;
3) $H_2 \subseteq \Phi(G, A)$.

Доказательство. Так как

$$H / H \cap D^{\Im}(G, A) \in \Im,$$

то $HD^{\Im}(G, A) / D^{\Im}(G, A) \in \Im$. Ввиду теоремы 3.1 из [9] имеем, что

$$D^{\Im}(G, A) / \Phi(G, A) = Z_{\Im}(G / \Phi(G, A)).$$

Пусть K / S – *G*-главный фактор группы $D^{\Im}(G, A) / \Phi(G, A)$. Тогда он $\Im$-централен в G и поэтому $G / C_G(K / S) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(K / S)$ и любого локального экрана f формации $\Im$. Если f – максимальный внутренний локальный экран формации $\Im$, то согласно теореме 4.7 из [2] формация $f(p)$ наследственна. Значит,

$$HD^{\Im}(G, A) / C_{HD^{\Im}(G, A)}(K / S) \in f(p).$$

Отсюда следует, что все главные факторы группы $HD^{\Im}(G, A) / \Phi(G, A)$ $\Im$-центральны.

Поэтому $HD^{\mathfrak{I}}(G,A)/\Phi(G,A)\in\mathfrak{I}$. По лемме 2.1 $HD^{\mathfrak{I}}(G,A)$ – $\mathfrak{I}$-достижимая подгруппа группы G. Тогда на основании теоремы 3.4 подгруппа $HD^{\mathfrak{I}}(G,A)$ представима в виде $HD^{\mathfrak{I}}(G,A)=T_1\times T_2$, где

$$T_1\in\mathfrak{I},\ \pi(T_2)\cap\pi(\mathfrak{I})=\varnothing,$$
$$T_2\subseteq\Phi(G,A).$$

Так как формация $\mathfrak{I}$ наследственна, то и подгруппа H представима в виде $H=H_1\times H_2$, где

$$H_1\in\mathfrak{I},\ \pi(H_2)\cap\pi(\mathfrak{I})=\varnothing,\ H_2\subseteq\Phi(G,A).$$

***Следствие* 3.5.1.** *Пусть $\mathfrak{I}$ – наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если N – $\mathfrak{I}$-достижимая подгруппа группы G и $N/N\cap D^{\mathfrak{I}}(G,A)\in\mathfrak{I}$, то $N\in\mathfrak{I}$.*

Заключение

В работе описано влияние обобщенной подгруппы Фраттини на строение $\mathfrak{I}$-достижимых подгрупп в группах с операторами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Frattini*, *G.* Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.

2. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков – М.: Наука, 1978. – 272 с.

3. *Селькин*, *М.В.* Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 144 с.

4. *Ballester-Bolinches*, *A.* On $\mathfrak{I}$-subnormal subgroups and Frattini-like subgroups of a finite group / A. Ballester-Bolinches, M.D. Perez-Ramos // Glasgow Math. J. – 1994. – Vol. 36. – P. 241–247.

5. *Beidleman*, *J.* On Frattini-like subgroups / J. Beidleman, H. Smith // Glasgow Math. J. – 1993. – Vol. 35. – P. 95–98.

6. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

7. *Kegel*, *O.* Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormslteilerverband echt enthaltent / O.Kegel // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30. – № 2. – P. 225–228.

8. *Авдашкова*, *Л.П.* О нормализаторах $\mathfrak{I}$-достижимых подгрупп / Л.П. Авдашкова, С.Ф. Каморников // Весцi АН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. – 1996. – № 1. – С. 33–35.

9. *Бородич*, *Е.Н.* О пересечении подгрупп в группах с операторами / Е.Н. Бородич, Р.В. Бородич, М.В. Селькин // Вестник БГУ. Серия 1. – 2012. – С. 54–62.

Поступила в редакцию 20.02.15.

Проблемы физики, математики и техники, № 2 (23), 2015

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

ОБ УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУППОИДАХ АБЕЛЯ-ГРАССМАНА

Вагар Хан[1,2], Фейсал Ясафзай[1], Асад Хан[1]

[1]*Университет науки и технологии Китая*, *Хефей*, *Китай*
[2]*Институт информационных технологий COMSATS*, *Абботабад*, *Пакистан*

ON ORDERED ABEL-GRASSMANN'S GROUPOIDS

Waqar Khan[1,2], Faisal Yousafzai[1], Asad Khan[1]

[1]*University of Science and Technology of China*, *Hefei*, *China*
[2]*COMSATS Institute of Information Technology*, *Abbottabad*, *Pakistan*

Введено понятие (m,n)-идеалов упорядоченных $\mathcal{AG}$-группоидов и получены характеризации $(0,2)$-идеалов и $(1,2)$-идеалов упорядоченного $\mathcal{AG}$-группоида в терминах левых идеалов. Показано, что упорядоченный $\mathcal{AG}$-группоид S является $0-(0,2)$-бипростым в том и только в том случае, когда S является правым 0-простым. Результаты данной работы позволяют расширить концепцию $\mathcal{AG}$-группоида без введенного порядка. Получены характеризации внутренне-регулярного упорядоченного $\mathcal{AG}$-группоида в терминах левых и правых идеалов.

Ключевые слова: *упорядоченные $\mathcal{AG}$-группоиды*, *обратимое слева тождество*, *левая единица*, (m,n)*-идеал.*

The concept of (m,n)-ideals in ordered $\mathcal{AG}$-groupoids is introduced and the $(0,2)$-ideals and $(1,2)$-ideals of an ordered $\mathcal{AG}$-groupoid in terms of left ideals are characterised. It is shown that an ordered $\mathcal{AG}$-groupoid S is $0-(0,2)$-bisimple if and only if S is right 0-simple. The results of this paper extend the concept of an $\mathcal{AG}$-groupoid without order. Finally, we characterize an intra-regular ordered $\mathcal{AG}$-groupoid in terms of left and right ideals.

Keywords: *ordered $\mathcal{AG}$-groupoids, left invertive law, left identity,* (m,n)*-ideals.*

Mathematics Subject Classification (2010): 20D10, 20D20

Introduction

The concept of a left almost semigroup (*LA*-semigroup) [3] was first introduced by M.A. Kazim and M. Naseeruddin in 1972. In [1], the same structure is called a left invertive groupoid. P.V. Protić and N. Stevanović called it an Abel-Grassmann's groupoid ($\mathcal{AG}$-groupoid) [10].

An $\mathcal{AG}$-groupoid is a groupoid S satisfying the left invertive law $(ab)c=(cb)a$ for all $a,b,c\in S$. This left invertive law has been obtained by introducing braces on the left of ternary commutative law $abc=cba$. An $\mathcal{AG}$-groupoid satisfies the medial law $(ab)(cd)=(ac)(bd)$ for all $a,b,c,d\in S$. Since $\mathcal{AG}$-groupoids satisfy medial law, they belong to the class of entropic groupoids which are also called abelian quasigroups [12]. If an $\mathcal{AG}$-groupoid S contains a left identity, then it satisfies the paramedial law $(ab)(cd)=(dc)(ba)$ and the identity $a(bc)=b(ac)$ for all $a,b,c,d\in S$ [5].

An $\mathcal{AG}$-groupoid is a useful algebraic structure, midway between a groupoid and a commutative semigroup. An $\mathcal{AG}$-groupoid is non-associative and non-commutative in general, however, there is a close relationship with semigroup as well as with commutative structures. It has been investigated in [5] that if an $\mathcal{AG}$-groupoid contains a right identity, then it becomes a commutative semigroup. The connection of a commutative inverse semigroup with an $\mathcal{AG}$-groupoid has been given by Yousafzai et al. in [14] as, a commutative inverse semigroup $(S,\ .)$ becomes an $\mathcal{AG}$-groupoid $(S,\ *)$ under $a*b=ba^{-1}r^{-1}$ for all $a,b,r\in S$. The $\mathcal{AG}$-groupoid S with left identity becomes a semigroup under the binary operation "$\circ_e$" defined as, $x\circ_e y=(xe)y$ for all x, $y\in S$ [15]. The $\mathcal{AG}$-groupoid is the generalization of a semigroup theory [5] and has vast applications in collaboration with semigroups like other branches of mathematics. Many interesting results on $\mathcal{AG}$-groupoids have been investigated in [7], [8], [9].

If S is an $\mathcal{AG}$-groupoid with product $\cdot : S\times S\to S$, then $ab\cdot c$ and $(ab)c$ both denote the product $(a\cdot b)\cdot c$.

***Definition* 0.1** [16]. *An $\mathcal{AG}$-groupoid $(S,\cdot)$ together with a partial order $\leq$ on S that is compatible with an $\mathcal{AG}$-groupoid operation, meaning that for $x,y,z\in S$,*

$$x\leq y\Rightarrow zx\leq zy \text{ and } xz\leq yz,$$

is called an ordered $\mathcal{AG}$-groupoid.

Let $(S,\cdot,\leq)$ be an ordered $\mathcal{AG}$-groupoid. If A and B are nonempty subsets of S, we let

$$AB = \{xy \in S \mid x \in A, y \in B\},$$

and $(A] = \{x \in S \mid x \leq a \text{ for some } a \in A\}$.

***Definition* 0.2** [16]. *Let $(S,\cdot,\leq)$ be an ordered $\mathcal{AG}$-groupoid. A nonempty subset A of S is called a left (resp. right) ideal of S if the followings hold:*

(i) $SA \subseteq A$ *(resp.* $AS \subseteq A$);

(ii) *for* $x \in A$ *and* $y \in S$, $y \leq x$ *implies* $y \in A$.

Equivalently $(SA] \subseteq A$ *(resp.* $(AS] \subseteq A$).

If A is both a left and a right ideal of S, then A is called a two-sided ideal or an ideal of S.

A nonempty subset A of an ordered $\mathcal{AG}$-groupoid $(S,\cdot,\leq)$ is called $\mathcal{AG}$-subgroupoid of S if $xy \in A$ for all $x, y \in A$.

It is clear to see that every left and right ideals of an ordered $\mathcal{AG}$-groupoid is an $\mathcal{AG}$-subgroupoid.

Let $(S,\cdot,\leq)$ be an ordered $\mathcal{AG}$-groupoid and let A and B be nonempty subsets of S, then the following was proved in [13]:

(i) $A \subseteq (A]$;

(ii) If $A \subseteq B$, then $(A] \subseteq (B]$;

(iii) $(A](B] \subseteq (AB]$;

(iv) $(A] = ((A]]$;

(vi) $((A](B]] = (AB]$.

Also for every left (resp. right) ideal T of S, $(T] = T$.

The concept of (m,n)-ideals in ordered semigroups were given by J. Sanborisoot and T. Changphas in [11]. It's natural to ask whether the concept of (m,n)-ideals in ordered $\mathcal{AG}$-groupoids is valid or not? The aim of this paper is to deal with (m,n)-ideals in ordered $\mathcal{AG}$-groupoids. We introduce the concept of (m,n)-ideals in ordered $\mathcal{AG}$-groupoids as follows:

***Definition* 0.3.** *Let $(S,\cdot,\leq)$ be an ordered $\mathcal{AG}$-groupoid and let m, n be non-negative integers. An $\mathcal{AG}$-subgroupoid A of S is called an (m,n)-ideal of S if the followings hold:*

(i) $A^m S \cdot A^n \subseteq A$;

(ii) *for* $x \in A$ *and* $y \in S$, $y \leq x$ *implies* $y \in A$.

Here, A^0 *is defined as* $A^0 S \cdot A^n = SA^n$ *and* $A^m S \cdot A^0 = A^m S$.

Equivalently an $\mathcal{AG}$-subgroupoid A of S is called an (m,n)-ideal of S if

$$(A^m S \cdot A^n] \subseteq A.$$

If $m = n = 1$, then an (m,n)-ideal A of an ordered $\mathcal{AG}$-groupoid $(S,\cdot,\leq)$ is called a bi-ideal of S.

1 0-*minimal* $(0,2)$-*bi-ideals in ordered* $\mathcal{AG}$-*groupoid*

In this section, we study and generalize the work of W. Jantanan and T. Changphas [2] by converting it from an associative ordered structure in to a non-associative ordered structure. We use the concept of (m,n)-ideals and investigate $(0,2)$-ideals, $(1,2)$-ideals and 0-minimal $(0,2)$-ideals in ordered $\mathcal{AG}$-groupoids. All the results of this section can be obtain for an $\mathcal{AG}$-groupoid without order.

***Defintion* 1.1.** *If there is an element 0 of an ordered $\mathcal{AG}$-groupoid $(S,\cdot,\leq)$ such that $x \cdot 0 = 0 \cdot x = x$ for all $x \in S$, we call 0 a zero element of S.*

***Example* 1.1.** Let $S = \{a,b,c,d,e\}$ with a left identity d. Then the following multiplication table and order shows that $(S,\cdot,\leq)$ is a unitary ordered $\mathcal{AG}$-groupoid with a zero element a.

$\cdot$	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	e	e	c	e
c	a	e	e	b	e
d	a	b	c	d	e
e	a	e	e	e	e

$$\leq := \{(a,a),(a,b),(c,c),(a,c),(d,d),(a,e),(e,e),(b,b)\}.$$

If S is a unitary ordered $\mathcal{AG}$-groupoid, then it is easy to see that $(S^2] = S$, $(SA^2] = (A^2 S]$ and $A \subseteq (SA]$ $\forall A \subseteq S$. Note that every right ideal of a unitary ordered $\mathcal{AG}$-groupoid S is a left ideal of S but the converse is not true in general. Example 1.1 shows that there exists a subset $\{a,b,e\}$ of S which is a left ideal of S but not a right ideal of S. It is easy to see that $(SA]$ and $(SA^2]$ are the left and right ideals of a unitary ordered $\mathcal{AG}$-groupoid S. Thus $(SA^2]$ is an ideal of a unitary ordered $\mathcal{AG}$-groupoid S.

We characterize of $(0,2)$-ideals of an ordered $\mathcal{AG}$-groupoid in terms of left ideals as follows:

***Lemma* 1.1.** *Let $(S,\cdot,\leq)$ be a unitary ordered $\mathcal{AG}$-groupoid. Then A is a $(0,2)$-ideal of S if and only if A is an ideal of some left ideal of S.*

Proof. Let A be a $(0,2)$-ideal of S, then

$$((SA] \cdot A] = (SA \cdot A] = (AA \cdot S] = (SA^2] \subseteq A,$$

and

$$(A \cdot (SA]] = (A \cdot SA] = (S \cdot AA] = (SA^2] \subseteq A.$$

Hence A is an ideal of a left ideal $(SA]$ of S.

Conversely, assume that A is a left ideal of some left ideal L of S, then

$$(SA^2] = (AA \cdot S] = (SA \cdot A] \subseteq$$
$$\subseteq (SL \cdot A] \subseteq ((SL] \cdot A] \subseteq (LA] \subseteq A,$$

and clearly A is an $\mathcal{AG}$-subgroupoid of S, therefore A is a (0,2)-ideal of S.

***Corollary* 1.1.** *Let $(S,\cdot,\leq)$ be a unitary ordered $\mathcal{AG}$-groupoid. Then A is a $(0,2)$-ideal of S if and only if A is a left ideal of some left ideal of S.*

Now we characterize the $(0,2)$-bi-ideals of an ordered $\mathcal{AG}$-groupoid in terms of right ideals as follows:

***Lemma* 1.2.** *Let $(S,\cdot,\leq)$ be a unitary ordered $\mathcal{AG}$-groupoid. Then A is a $(0,2)$-bi-ideal of S if and only if A is an ideal of some right ideal of S.*

Proof. Let A be a $(0,2)$-bi-ideal of S, then

$$((SA^2]\cdot A]=(SA^2\cdot A]=(A^2S\cdot A]=$$
$$=(AS\cdot A^2]\subseteq(SA^2]\subseteq A,$$

and

$$(A\cdot(SA^2]]=(A\cdot SA^2]=$$
$$=(A\cdot(S^2]A^2]\subseteq((A]\cdot(S^2](A^2]]\subseteq((A\cdot S^2A^2]]=$$
$$=(A\cdot S^2A^2]=(SS\cdot AA^2]=$$
$$=(A^2A\cdot SS]=(SA\cdot A^2]\subseteq(SA^2]\subseteq A.$$

Hence A is an ideal of some right ideal $(SA^2]$ of S.

Conversely, assume that A is an ideal of some right ideal R of S, then

$$(SA^2]=(A\cdot SA]\subseteq((A]\cdot(S^2](A]]\subseteq$$
$$\subseteq((A\cdot S^2A]]=(A\cdot S^2A]=$$
$$=(A\cdot(AS)S]\subseteq(A\cdot(RS)R]\subseteq(A\cdot((RS])R]$$
$$\subseteq(A\cdot(RS]]\subseteq(AR]\subseteq A,$$

and $(AS\cdot A]\subseteq((RS]\cdot A]\subseteq(RA]\subseteq A$, which shows that A is a $(0,2)$-ideal of S.

The following result gives some characterizations of $(1,2)$-ideals of an ordered $\mathcal{AG}$-groupoid.

***Theorem* 1.1.** *Let $(S,\cdot,\leq)$ be a unitary ordered $\mathcal{AG}$-groupoid. Then the following statements are equivalent.*

(i) A is a $(1,2)$-ideal of S;

(ii) A is a left ideal of some bi-ideal of S;

(iii) A is a bi-ideal of some ideal of S;

(iv) A is a $(0,2)$-ideal of some right ideal of S;

(v) A is a left ideal of some $(0,2)$-ideal of S.

Proof. $(i)\Rightarrow(ii)$: It is easy to see that $(SA^2\cdot S]$ is a bi-ideal of S. Let A be a $(1,2)$-ideal of S, then

$$(((SA^2\cdot S])A]\subseteq((SA^2\cdot SS)A]=$$
$$=((SS\cdot A^2S)A]\subseteq(((S^2]\cdot A^2S)A]=$$
$$=((S\cdot A^2S)A]=((A^2\cdot SS)A]\subseteq(A^2S\cdot A]=$$
$$=(AS\cdot A^2]\subseteq A,$$

which shows that A is a left ideal of some bi-ideal $(SA^2\cdot S]$ of S.

$(ii)\Rightarrow(iii)$: Let A be a left ideal of some bi-ideal B of S and e be a left identity of S, then

$$((A\cdot(SA^2])A]\subseteq((A\cdot SA^2)A]=((S\cdot AA^2)A]=$$
$$=e((S\cdot AA^2)A]\subseteq(S]((S\cdot AA^2)A]\subseteq$$
$$\subseteq((S(SA\cdot AA))A]=$$
$$=((S(AA\cdot AS))A]=((AA\cdot S(AS))A]=$$
$$=(((S(AS)\cdot A)A)A]=(((A(SS)\cdot A)A)A]\subseteq$$
$$\subseteq(((AS\cdot A)A)A]\subseteq(((BS\cdot B)A)A]\subseteq$$
$$\subseteq(BA\cdot A]\subseteq A,$$

which shows that A is a bi-ideal of an ideal $(SA^2]$ of S.

$(iii)\Rightarrow(iv)$: Let A be a bi-ideal of some ideal I of S, then

$$((SA^2]\cdot A^2]=(SA^2\cdot A^2]=((A^2\cdot AA)S]=$$
$$=((A\cdot A^2A)S]\subseteq((A\cdot((AI)A])S]\subseteq(AA\cdot S]=$$
$$=(SA\cdot A]\subseteq((SI]\cdot S]\subseteq I,$$

which shows that A is a $(0,2)$-ideal of a right ideal $(SA^2]$ of S.

$(iv)\Rightarrow(v)$: It is easy to see that $(SA^3]$ is a $(0,2)$-ideal of S. Let A be a $(0,2)$-ideal of a right ideal R of S, then

$$(A\cdot(SA^3]]\subseteq(A(SS\cdot A^2A)]\subseteq$$
$$\subseteq(A(AA^2\cdot S)]\subseteq(A((SA\cdot AA)S)]$$
$$=(A((AA\cdot AS)S)]=((AA)((A\cdot AS)S)]$$
$$=((S\cdot A(AS))A^2]=((A\cdot S(AS))A^2]$$
$$\subseteq((RS]\cdot A^2]\subseteq(RA^2]\subseteq A,$$

which shows that A is a left ideal of a $(0,2)$-ideal $(SA^3]$ of S.

$(v)\Rightarrow(i)$: Let A be a left ideal of a $(0,2)$-ideal O of S, then

$$(AS\cdot A^2]\subseteq((AA\cdot SS)A]\subseteq(SA^2\cdot A]\subseteq$$
$$\subseteq((SO^2]\cdot A]\subseteq(OA]\subseteq A,$$

which shows that A is a $(1,2)$-ideal of S.

The following characterizes $(1,2)$-ideals in terms of left and right ideals of an ordered $\mathcal{AG}$-groupoid.

***Lemma* 1.3.** *Let $(S,\cdot,\leq)$ be a unitary ordered $\mathcal{AG}$-groupoid and A be an idempotent subset of S. Then A is a $(1,2)$-ideal of S if and only if there exist a left ideal L and a right ideal R of S such that $(RL]\subseteq A\subseteq R\cap L$.*

Proof. Assume that A is a $(1,2)$-ideal of S such that A is idempotent.

Setting L=(SA] and R=(SA ^{2}], then

$$(RL]=((SA^2]\cdot(SA]]\subseteq(A^2S\cdot SA]\subseteq(A^2S^2\cdot SA]=$$
$$=((SA\cdot SS)A^2]=$$
$$=((SS\cdot AS)A^2]\subseteq((S(AA\cdot SS))A^2]=$$
$$=((S(SS\cdot AA))A^2]=$$
$$=((S(A(SS\cdot A)))A^2]\subseteq((A(S\cdot SA))A^2]\subseteq$$
$$\subseteq(AS\cdot A^2]\subseteq A.$$

It is clear that $A \subseteq R \cap L$.

Conversely, let R be a right ideal and L be a left ideal of S such that $(RL] \subseteq A \subseteq R \cap L$, then

$$(AS \cdot A^2] = (AS \cdot AA] \subseteq ((RS] \cdot (SL]] \subseteq (RL] \subseteq A.$$

***Definition* 1.2.** *A (0,2)-ideal A of an ordered* $\mathcal{AG}$*-groupoid* $(S,\cdot,\leq)$ *with zero is said to be* 0*-minimal if* $A \neq \{0\}$ *and* $\{0\}$ *is the only* $(0,2)$*-ideal of S properly contained in A.*

***Remark* 1.1.** *Assume that* $(S,\cdot,\leq)$ *is a unitary ordered* $\mathcal{AG}$*-groupoid with zero. Then it is easy to see that every left (right) ideal of* S *is a* $(0,2)$*-ideal of* S. *Hence if* O *is a* 0*-minimal* $(0,2)$*-ideal of* S *and A is a left (right) ideal of S contained in O, then either* $A=\{0\}$ *or* $A=O$.

***Lemma* 1.4.** *Let* $(S,\cdot,\leq)$ *be a unitary ordered* $\mathcal{AG}$*-groupoid with zero. Assume that A is a* 0*-minimal ideal of* S *and* O *is an* $\mathcal{AG}$*-subgroupoid of* A. *Then* O *is a* $(0,2)$*-ideal of* S *contained in* A *if and only if* $O^2=\{0\}$ *or* $O=A$.

Proof. Let O be a $(0,2)$-ideal of S contained in a 0-minimal ideal A of S. Then $(SO^2] \subseteq O \subseteq A$. Since $(SO^2]$ is an ideal of S, therefore by minimality of A, $(SO^2]=\{0\}$ or $(SO^2]=A$. If $(SO^2]=A$, then $A=(SO^2] \subseteq O$ and therefore $O=A$. Let $(SO^2]=\{0\}$, then

$$(O^2S] \subseteq (O^2S^2] = (S^2O^2] \subseteq (SO^2] = \{0\} \subseteq O^2,$$

which shows that O^2 is a right ideal of S, and hence an ideal of S contained in A, therefore by minimality of A, we have $O^2=\{0\}$ or $O^2=A$. Now if $O^2=A$, then $O=A$.

Conversely, let $O^2=\{0\}$, then

$$(SO^2] \subseteq (O^2S] = (\{0\}S] = \{0\} = (O].$$

Now if $O=A$, then

$$(SO^2] \subseteq (SS \cdot OO] \subseteq ((SA] \cdot (SA]] \subseteq A = O,$$

which shows that O is a $(0,2)$-ideal of S contained in A.

***Corollary* 1.2.** *Let* $(S,\cdot,\leq)$ *be a unitary ordered* $\mathcal{AG}$ *-groupoid with zero. Assume that* A *is a* 0*-minimal left ideal of* S *and* O *is an* $\mathcal{AG}$*-subgroupoid of* A. *Then* O *is a* $(0,2)$*-ideal of* S *contained in* A *if and only if* $O^2=\{0\}$ *or* $O=A$.

***Lemma* 1.5.** *Let* $(S,\cdot,\leq)$ *be a unitary ordered* $\mathcal{AG}$*-groupoid with zero and* O *be a* 0*-minimal* $(0,2)$*-ideal of* S. *Then* $O^2=\{0\}$ *or* O *is a* 0*-minimal right (left) ideal of* S.

Proof. Let O be a 0-minimal $(0,2)$-ideal of S, then

$$(S(O^2)^2] \subseteq (SS \cdot O^2O^2] \subseteq (O^2O^2 \cdot S] = (SO^2 \cdot O^2]$$
$$\subseteq ((SO^2] \cdot O^2] \subseteq (OO^2] \subseteq O^2,$$

which shows that O^2 is a $(0,2)$-ideal of S contained in O, therefore by minimality of O, $O^2=\{0\}$ or $O^2=O$. Suppose that $O^2=O$, then

$$(OS] \subseteq (OO \cdot SS] \subseteq (SO^2] \subseteq O,$$

which shows that O is a right ideal of S. Let R be a right ideal of S contained in O, then

$$(R^2S] = (RR \cdot S] \subseteq ((RS] \cdot S] \subseteq R.$$

Thus R is a $(0,2)$-ideal of S contained in O, and again by minimality of O, $R=\{0\}$ or $R=O$.

The following Corollary follows from Lemma 1.2 and Corollary 1.2.

***Corollary* 1.3.** *Let* $(S,\cdot,\leq)$ *be a unitary ordered* $\mathcal{AG}$*-groupoid. Then O is a minimal* $(0,2)$*-ideal of S if and only if O is a minimal left ideal of S.*

***Theorem* 1.2.** *Let* $(S,\cdot,\leq)$ *be a unitary ordered* $\mathcal{AG}$*-groupoid. Then* A *is a minimal* $(2,1)$*-ideal of S if and only if A is a minimal bi-ideal of S.*

Proof. Let A be a minimal $(2,1)$-ideal of S. Then

$$((((A^2S \cdot A])^2 S)((A^2S \cdot A])] \subseteq$$
$$\subseteq (((A^2S \cdot A)^2 S)(A^2S \cdot A)] =$$
$$= ((((A^2S \cdot A)(A^2S \cdot A))S)(A^2S \cdot A)] \subseteq$$
$$\subseteq ((((AS \cdot A)(AS \cdot A))S)(AS \cdot A)] =$$
$$= ((((AS \cdot AS)(AA))S)(AS \cdot A)] \subseteq$$
$$\subseteq (((A^2S \cdot AA)S)(AS \cdot A)] \subseteq$$
$$\subseteq (((AS \cdot AS)S)(AS \cdot A)] \subseteq$$
$$\subseteq ((A^2S \cdot S)(AS \cdot A)] \subseteq$$
$$\subseteq ((AS \cdot S)(AS \cdot A)] = ((AS \cdot AS)(SA)] \subseteq$$
$$\subseteq (A^2S \cdot SA] = (AS \cdot SA^2] = ((SA^2 \cdot S)A]$$
$$\subseteq ((A^2S \cdot S)A] = ((SS \cdot AA)A] = (A^2S \cdot A],$$

and similarly we can show that $(A^2S \cdot A]^2 \subseteq \subseteq (A^2S \cdot A]$. Thus $(A^2S \cdot A]$ is a $(2,1)$-ideal of S contained in A, therefore by minimality of A, $(A^2S \cdot A] = A$. Now

$$(AS \cdot A] = ((AS)(A^2S \cdot A)] =$$
$$= (((A^2S \cdot A)S)A] = ((SA \cdot A^2S)A] =$$
$$= ((A^2(SA \cdot S))A] \subseteq (A^2S \cdot A] = A,$$

It follows that A is a bi-ideal of S. Suppose that there exists a bi-ideal B of S contained in A, then $(B^2S \cdot B] \subseteq (BS \cdot B] \subseteq B$, so B is a $(2,1)$-ideal of S contained in A, therefore $B=A$.

Conversely, assume that A is a minimal bi-ideal of S, then it is easy to see that A is a $(2,1)$-ideal of S. Let C be a $(2,1)$-ideal of S contained in A, then

$$((((C^2S\cdot C])S)((C^2S\cdot C])]\subseteq$$
$$\subseteq (((C^2S\cdot C)S)(C^2S\cdot C)]=$$
$$=((SC\cdot C^2S)(C^2S\cdot C)]=$$
$$=((SC^2\cdot CS)(C^2S\cdot C)]=$$
$$=((C(SC^2\cdot S))(C^2S\cdot C)]=$$
$$=(((C^2S\cdot C)(SC^2\cdot SS))C]\subseteq$$
$$\subseteq (((C^2S\cdot C)(S\cdot C^2S))C]\subseteq$$
$$\subseteq (((C^2S\cdot C)(C^2S))C]\subseteq$$
$$=((C^2((C^2S\cdot C)S))C]\subseteq (C^2S\cdot C].$$

This shows that $(C^2S\cdot C]$ is a bi-ideal of S, and by minimality of A, $(C^2S\cdot C]=A.$ Thus

$$A=(C^2S\cdot C]\subseteq C,$$

and therefore A is a minimal $(2,1)$-ideal of S.

***Theorem* 1.3.** *Let A be 0-minimal $(0,2)$-bi-ideal of a unitary ordered $\mathcal{AG}$-groupoid $(S,\cdot,\leq)$ with zero. Then exactly one of the following cases occurs:*

(i) $A=(\{0,a\}],$ $a^2=0;$

(ii) *for all* $a\in A\setminus\{0\},$ $(Sa^2]=A.$

Proof. Assume that A is a 0-minimal $(0,2)$-bi-ideal of S. Let $a\in A\setminus\{0\},$ then $(Sa^2]\subseteq A.$ Also $(Sa^2]$ is a $(0,2)$-bi-ideal of S, therefore $(Sa^2]=\{0\}$ or $(Sa^2]=A.$

Let $(Sa^2]=\{0\}.$ Since $a^2\in A,$ we have either $a^2=a$ or $a^2=0$ or $a^2\in A\setminus\{0,a\}.$ If $a^2=a,$ then $a^3=a^2a=a,$ which is impossible because $a^3\in(a^2S]\subseteq(Sa^2]=\{0\}.$ Let $a^2\in A\setminus\{0,a\},$ we have

$$(S\cdot(\{0,a^2\}\{0,a^2\}]]\subseteq(SS\cdot a^2a^2]=$$
$$=(Sa^2\cdot Sa^2]=\{0\}\subseteq(\{0,a^2\}],$$

and

$$(((\{0,a^2\}]S)(\{0,a^2\}]]\subseteq(\{0,a^2S\}\{0,a^2\}]=$$
$$=(a^2S\cdot a^2]\subseteq(Sa^2]=\{0\}\subseteq(\{0,a^2\}].$$

Therefore $(\{0,a^2\}]$ is a $(0,2)$-bi-ideal of S contained in $A.$ We observe that $(\{0,a^2\}]\neq\{0\}$ and $(\{0,a^2\}]\neq A.$ This is a contradiction to the fact that A is a 0-minimal $(0,2)$-bi-ideal of S. Therefore $a^2=0$ and $A=(\{0,a\}].$ If $(Sa^2]\neq\{0\},$ then $(Sa^2]=A.$

***Corollary* 1.4.** *Let A be 0-minimal $(0,2)$-bi-ideal of a unitary ordered $\mathcal{AG}$-groupoid $(S,\cdot,\leq)$ with zero such that $(A^2]\neq 0.$ Then $A=(Sa^2]$ for every $a\in A\setminus\{0\}.$*

***Lemma* 1.6.** *Let $(S,\cdot,\leq)$ be a unitary ordered $\mathcal{AG}$-groupoid. Then every right ideal of S is a $(0,2)$-bi-ideal of S.*

Proof. Assume that A is a right ideal of S, then

$$(SA^2]\subseteq(AA\cdot SS]\subseteq((AS]\cdot(AS]]\subseteq$$
$$\subseteq(AA]\subseteq(AS]\subseteq A,\ (AS\cdot A]\subseteq A,$$

and clearly $A^2\subseteq A,$ therefore A is a (0,2)-bi-ideal of S.

The converse of Lemma 1.2 is not true in general. Example 2.1 shows that there exists a $(0,2)$-bi-ideal $A=\{a,c,e\}$ of S which is not a right ideal of S.

***Definition* 1.3.** *An ordered $\mathcal{AG}$-groupoid $(S,\cdot,\leq)$ with zero is said to be 0-$(0,2)$-bisimple if $(S^2]\neq\{0\}$ and $\{0\}$ is the only proper $(0,2)$-bi-ideal of S.*

***Theorem* 1.4.** *Let $(S,\cdot,\leq)$ be a unitary ordered $\mathcal{AG}$-groupoid with zero. Then $(Sa^2]=S$ for all $a\in S\setminus\{0\}$ if and only if S is 0-$(0,2)$-bisimple if and only if S is right 0-simple.*

Proof. Assume that $(Sa^2]=S$ for every $a\in S\setminus\{0\}.$ Let A be a $(0,2)$-bi-ideal of S such that $A\neq\{0\}.$ Let $a\in A\setminus\{0\},$ then

$$S=(Sa^2]\subseteq(SA^2]\subseteq A.$$

Therefore $S=A.$ Since $S=(Sa^2]\subseteq(S^2],$ we have $(S^2]=S\neq\{0\}.$ Thus S is 0-$(0,2)$-bisimple. The converse statement follows from Corollary 1.2.

Let R be a right ideal of 0-$(0,2)$-bisimple S. Then by Lemma 1.2, R is a $(0,2)$-bi-ideal of S and so $R=\{0\}$ or $R=S.$ Conversely, assume that S is right 0-simple. Let $a\in S\setminus\{0\}$, then $(Sa^2]=S.$ Hence S is 0-$(0,2)$-bisimple.

***Theorem* 1.5.** *Let A be a 0-minimal $(0,2)$-bi-ideal of a unitary ordered $\mathcal{AG}$-groupoid $(S,\cdot,\leq)$ with zero. Then either $(A^2]=\{0\}$ or A is right 0-simple.*

Proof. Assume that A is 0-minimal $(0,2)$-bi-ideal of S such that $(A^2]\neq\{0\}.$ Then by using Corollary 1.2, $(Sa^2]=A$ for every $a\in A\setminus\{0\}.$ Since $a^2\in A\setminus\{0\}$ for every $a\in A\setminus\{0\},$ we have $a^4=(a^2)^2\in A\setminus\{0\}$ for every $a\in A\setminus\{0\}.$ Let $a\in A\setminus\{0\},$ then

$$((Aa^2]S\cdot(Aa^2]]=(a^2A\cdot S(Aa^2)]=$$
$$=(((S\cdot Aa^2)A)a^2]\subseteq(((S\cdot A)A)a^2]$$
$$\subseteq((AA\cdot SS)a^2]\subseteq((SA^2]\cdot a^2]\subseteq(Aa^2],$$

and

$$(S(Aa^2]^2]=(S((Aa^2]\cdot(Aa^2])]=$$
$$=(S((a^2A]\cdot(a^2A])]=(S(a^2(a^2A\cdot A))]=$$
$$=((aa)(S(a^2A\cdot A))]=(((a^2A\cdot A)S)a^2]\subseteq$$
$$\subseteq((AA\cdot SS)a^2]\subseteq((SA^2]\cdot a^2]\subseteq(Aa^2],$$

which shows that $(Aa^2]$ is a $(0,2)$-bi-ideal of S contained in A. Hence $(Aa^2]=\{0\}$ or $(Aa^2]=A$. Since $a^4\in(Aa^2]$ and $a^4\in A\setminus\{0\}$, we get $(Aa^2]=A$. Thus by using Theorem 1.2, A is right 0-simple.

2 Ideals in intra-regular ordered $\mathcal{AG}$-groupoid

Ideal theory plays a very important role in studying and exploring the structural properties of different algebraic structures. Here we study left (right) ideals which usually allow us to characterize an ordered $\mathcal{AG}$-groupoid and play the role in an ordered $\mathcal{AG}$-groupoid which is played by normal subgroups in ordered group theory and by ideals in ordered ring theory.

***Definition* 2.1.** *An element a of an ordered $\mathcal{AG}$-groupoid $(S,\cdot,\le)$ is called an intra-regular element of S if there exist some $x,y\in S$ such that $a\le xa^2\cdot y$ and S is called intra-regular if every element of S is intra-regular or equivalently, $A\subseteq(SA^2\cdot S]$ for all $A\subseteq S$ and $a\in(Sa^2\cdot S]$ for all $a\in S$.*

***Example* 2.1.** Let $S=\{a,b,c,d,e\}$ be an ordered $\mathcal{AG}$-groupoid with the following multiplication table and order below.

$\cdot$	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b	b	b	b
c	a	b	d	e	c
d	a	b	c	d	e
e	a	b	e	c	d

$\le:=\{(a,a),(a,b),(c,c),(d,d),(e,e),(b,b)\}.$

By routine calculation, it is easy to verify that S is intra-regular.

***Definition* 2.2.** *An ordered $\mathcal{AG}$-groupoid $(S,\cdot,\le)$ is called left (resp. right) simple if it has no proper left (resp. right) ideal and is called simple if it has no proper ideal.*

***Theorem* 2.1.** *The following conditions are equivalent for a unitary ordered $\mathcal{AG}$-groupoid $(S,\cdot,\le)$:*

(i) $(aS]=S$, *for some* $a\in S$;

(ii) $(Sa]=S$, *for some* $a\in S$;

(iii) S *is simple;*

(iv) $(AS]=S=(SA]$, *where A is any two-sided ideal of S;*

(v) S *is intra-regular.*

Proof. $(i)\Rightarrow(ii)$: Let S be a unitary ordered $\mathcal{AG}$-groupoid and assume that $(aS]=S$ holds for some $a\in S$. Since $(aS]$ and $(Sa]$ are the left ideals of S, then $(aS]=aS$ and $(Sa]=Sa$. Therefore

$$S=(SS]=((aS]\cdot S]=(aS\cdot S]=(SS\cdot a]=(Sa].$$

$(ii)\Rightarrow(iii)$: Let S be a unitary ordered $\mathcal{AG}$-groupoid such that $(aS]=S$ holds for some $a\in S$. Suppose that S is not left simple and let L be a proper left ideal of S, then

$$\begin{aligned}(SL]&\subseteq L\subseteq S=\\ &=(SS]\subseteq(Sa\cdot S]\subseteq((SS\cdot ea)S]=\\ &=((ae\cdot SS)S]\subseteq((ae\cdot S)(SS)]=\\ &=((Se\cdot a)(SS)]=((SS)(a\cdot Se)]=\\ &=(a(SS\cdot Se)]\subseteq(aS],\end{aligned}$$

implies that $sl\le at$ for some $a,s,t\in S$ and $l\in L$. Since $sl\in L$, therefore $at\in L$, but $at\in(aS]$. Thus $(aS]\subseteq L$ and therefore we have $S=(aS]\subseteq L$, which implies that $S=L$, which contradicts the given assumption. Thus S is left simple and similarly we can show that S is right simple, which shows that S is simple.

$(iii)\Rightarrow(iv)$: Let S be a simple unitary ordered $\mathcal{AG}$-groupoid and let A be any two-sided ideal of S, then $A=S$. Therefore, we have $(AS]=(SS]=(SA]$.

$(iv)\Rightarrow(v)$: Let S be a unitary ordered $\mathcal{AG}$-groupoid such that $(AS]=S=(SA]$ holds for any two-sided ideal A of S. Since $(a^2S]$ is two-sided ideal of S such that $(a^2S\cdot S]=S=(S\cdot a^2S]$. Let $a\in S$, then

$$\begin{aligned}a\in S&=(a^2S\cdot S]\subseteq((aa\cdot SS)S]=\\ &=((SS\cdot aa)S]\subseteq(Sa^2\cdot S],\end{aligned}$$

that is $a\le(xa^2)y$ for some $x,y\in S$. Thus S is intra-regular

$(v)\Rightarrow(i)$: Let S be a unitary intra-regular ordered $\mathcal{AG}$-groupoid. Let $a\in S$, then there exist $x,y\in S$ such that $a\le(xa^2)y$. Thus

$$\begin{aligned}a&\le(xa^2)y=(ex\cdot aa)y=(aa\cdot ex)y\\ &=(y\cdot ex)(aa)=a((y\cdot ex)a)\in aS,\end{aligned}$$

which shows that $S\subseteq(Sa]$ and $(Sa]\subseteq S$ is obvious. Thus $(Sa]=S$ holds for some $a\in S$.

***Corollary* 2.1.** *The following conditions are equivalent for any unitary ordered $\mathcal{AG}$-groupoid $(S,\cdot,\le)$:*

(i) $(aS]=S$, *for some* $a\in S$;

(ii) $(Sa]=S$, *for some* $a\in S$;

(iii) S *is right simple*;

(iv) $(AS]=S=(SA]$, *where A is any right ideal of S*;

(v) S *is fully regular.*

***Corollary* 2.2.** *If $(S,\cdot,\le)$ is a unitary ordered $\mathcal{AG}$-groupoid, then the following conditions are equivalent:*

(i) $(Sa] = S$, *for some* $a \in S$;

(ii) $(aS] = S$, *for some* $a \in S$.

***Corollary* 2.3.** *If* $(S, \cdot, \leq)$ *is a unitary ordered* $\mathcal{AG}$*-groupoid, then* $(eS] = S = (Se]$ *holds for* $e \in S$, *where* e *is a left identity of* S.

***Corollary* 2.4.** *The following conditions are equivalent for any unitary ordered* $\mathcal{AG}$*-groupoid* $(S, \cdot, \leq)$:

(i) S *is intra-regular;*

(ii) $(Sa] = S = (aS]$ *for some* $a \in S$.

***Definition* 2.3.** *A left (resp. right) ideal* A *of an ordered* $\mathcal{AG}$*-groupoid* $(S, \cdot, \leq)$ *is called semiprime if* $a \in A$ *implies* $a^2 \in A$.

***Lemma* 2.1.** *The following conditions are equivalent for a unitary ordered* $\mathcal{AG}$*-groupoid* $(S, \cdot, \leq)$:

(i) S *is intra-regular*;

(ii) *Every right ideal of* S *is semiprime.*

Proof. $(i) \Rightarrow (ii)$: Let T be a right ideal of a unitary intra-regular ordered $\mathcal{AG}$-groupoid S. For $a \in S$ there exist $x, y \in S$ such that $a \leq xa^2 \cdot y$. Let $a^2 \in T$, then

$$a \leq (ex \cdot a^2)y = (a^2 \cdot xe)y = (y \cdot xe)a^2 =$$
$$= a^2(xe \cdot y) \in TS \subseteq (TS] \subseteq T,$$

which implies that T is semiprime.

Now $(ii) \Rightarrow (i)$: Since $(a^2S]$ is a right ideal of a unitary ordered $\mathcal{AG}$-groupoid S containing a^2 so $a \in (a^2S]$. Thus

$$a \in (a^2S] \subseteq (a^2 \cdot SS] = (S \cdot a^2S] \subseteq (SS \cdot a^2S] =$$
$$= (Sa^2 \cdot SS] \subseteq (Sa^2 \cdot S].$$

Hence S is intra-regular.

***Corollary* 2.5.** *The following conditions are equivalent for any unitary ordered* $\mathcal{AG}$*-groupoid* $(S, \cdot, \leq)$:

(i) S *is intra-regular;*

(ii) *every ideal of* S *is semiprime.*

***Theorem* 2.2.** *The following conditions are equivalent for a unitary ordered* $\mathcal{AG}$*-groupoid* $(S, \cdot, \leq)$:

(i) S *is intra-regular*;

(ii) $L \cap R \subseteq (LR]$ *for every semiprime right ideal* R *and every left ideal* L *of* S;

(iii) $L \cap R \subseteq (LR \cdot L]$ *for every semiprime right ideal* R *and every left ideal* L *of* S.

Proof. $(i) \Rightarrow (iii)$: Let S be a unitary intra-regular ordered $\mathcal{AG}$-groupoid and L, R be any left and right ideals of S respectively such that $k \in L \cap R$. Then there exist $x, y \in S$ such that $k \leq xk^2 \cdot y$. Thus

$$k \leq (x \cdot kk)y = (k \cdot xk)y =$$
$$= (y \cdot xk)k \leq \left(y\left(x\left(xk^2 \cdot y\right)\right)\right)k =$$
$$= \left(y\left(xk^2 \cdot xy\right)\right)k = \left(xk^2 \cdot y(xy)\right)k =$$
$$= \left(x(kk) \cdot y(xy)\right)k =$$
$$= \left(k(xk) \cdot y(xy)\right)k \in \left((R \cdot SL)S\right)L \subseteq \left(RL \cdot S\right)L =$$
$$= LS \cdot RL = LR \cdot SL \subseteq LR \cdot L,$$

which implies that $L \cap R \subseteq (LR \cdot L]$. Also by Lemma 1.3, R is semiprime.

$(iii) \Rightarrow (ii)$: Let R and L be the left and right ideals of S respectively and R be semiprime, then

$$L \cap R = R \cap L \subseteq (RL \cdot R] \subseteq$$
$$\subseteq (RL \cdot S] \subseteq (RL \cdot SS] = (SS \cdot LR]$$
$$= (L(SS \cdot R)] = (L(RS \cdot S)] \subseteq (L \cdot (RS]] \subseteq (LR].$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: Since $a \in (Sa]$, which is a left ideal of S, and $a^2 \in (a^2S]$, which is a semiprime right ideal of S, therefore by given assumption $a \in (a^2S]$. Thus

$$a \in (Sa] \cap (a^2S] \subseteq ((Sa] \cdot (a^2S]] \subseteq (Sa \cdot a^2S] \subseteq$$
$$\subseteq (SS \cdot a^2S] = (Sa^2 \cdot SS] \subseteq (Sa^2 \cdot S].$$

Hence S is intra-regular.

***Lemma* 2.2.** *The following conditions are equivalent for a unitary ordered* $\mathcal{AG}$*-groupoid* $(S, \cdot, \leq)$:

(i) S *is intra-regular*;

(ii) *every left ideal of* S *is idempotent.*

Proof. It is simple. We omit the proof.

***Theorem* 2.3.** *The following conditions are equivalent for a unitary ordered* $\mathcal{AG}$*-groupoid* $(S, \cdot, \leq)$:

(i) S *is intra-regular*;

(ii) $A = ((SA)^2]$, *where A is any left ideal of S.*

Proof. $(i) \Rightarrow (ii)$: Let A be a left ideal of a unitary intra-regular ordered $\mathcal{AG}$-groupoid, then $(SA] \subseteq A$ and by Lemma 1.3, $((SA)^2] = (SA] \subseteq A$. Now $A = (AA] \subseteq (SA] = ((SA)^2]$, which implies that $A = ((SA)^2]$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Let A be a left ideal of S, then $A = ((SA)^2] \subseteq (A^2]$, which implies that A is idempotent and by using Lemma 1.3, S is intra-regular.

REFERENCES

1. *Holgate*, *P*. Groupoids satisfying a simple invertive law / P. Holgate // Math. Student. – 1992. – Vol. 61. – № 1–4. – P. 101–106.

2. *Jantanan*, *W*. On 0-minimal $(0,2)$-bi-ideals in ordered semigroups / W. Jantanan, T. Changphas // Quasigroups and related Systems. – 2013. – Vol. 21. – P. 83– 90.

3. *Kazim*, *M.A.* On almost semigroups / M.A. Kazim, M. Naseeruddin // Aligarh Bull. Math. – 1972. – Vol. 2. – P. 1–7.

4. *Lajos*, *S.* Generalized ideals in semigroups / S. Lajos // Acta Sci. Math. – 1961. – Vol. 22. – P. 217–222.

5. *Mushtaq*, *Q.* On LA-semigroups / Q. Mushtaq, S.M. Yusuf // Aligarh Bull. Math. – 1978. – Vol. 8. – P. 65–70.

6. *Mushtaq*, *Q.* On locally associative LA-semigroups / Q. Mushtaq, S.M. Yusuf // J. Nat. Sci. Math. – 1979. – Vol. 19. – P. 57–62.

7. *Mushtaq*, *Q.* On LA-semigroup defined by a commutative inverse semigroup / Q. Mushtaq, S.M. Yusuf // Mat. Vesnik. – 1988. – Vol. 40. – P. 59–62.

8. *Mushtaq*, *Q. n* LA-semigroups with weak associative law / Q. Mushtaq, M.S. Kamran // Scientific Khyber. – 1989. – Vol. 1. – P. 69–71.

9. *Mushtaq*, *Q.* Ideals in left almost semigroups / Q. Mushtaq, M. Khan // Proceedings of 4th International Pure Mathematics Conference. – 2003. – P. 65–77.

10. *Protić*, *P.V.* AG-test and some general properties of Abel-Grassmann's groupoids / P.V. Protić, N. Stevanović // Pure Mathematics and Applications. – 1995. – Vol. 6. – P. 371–383.

11. *Sanborisoot*, *J.* On Characterizations of (m,n)-regular ordered semigroups / J. Sanborisoot, T. Changphas // Far East J. Math. Sci. – 2012. – Vol. 65. – P. 75–86.

12. *Stevanović*, *N.* Composition of Abel-Grassmann's 3-bands / N. Stevanović, P. V. Protić // Novi Sad, J. Math. – 2004. – Vol. 34. – P. 175–182.

13. *Xie*, *X.Y.* Fuzzy radicals and prime fuzzy ideals of ordered semigroups / X.Y. Xie, J. Tang // Inform. Sci. – 2008. – Vol. 178. – P. 4357–4374.

14. *Yousafzai*, *F.* Left regular $\mathcal{AG}$-groupoids in terms of fuzzy interior ideals / F. Yousafzai, N. Yaqoob, A. Ghareeb // Afrika Mathematika. – 2013. – Vol. 24. – P. 577–587.

15. *Yousafzai*, *F.* On fully regular $\mathcal{AG}$-groupoids / F. Yousafzai, A. Khan, B. Davvaz // Afrika Mathematika. – 2014. – Vol. 25. – P. 449–459.

16. *Yousafzai*, *F.* On fuzzy fully regular ordered $\mathcal{AG}$-groupoids / F. Yousafzai, A. Khan, V. Amjad, A. Zeb // Journal of Intelligent & Fuzzy Systems. – 2014. – Vol. 26. – P. 2973–2982.

Research of the first author is supported by the NNSF of China (#11371335).

Поступила в редакцию 31.10.14.

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О РЕШЕТКАХ ОБОБЩЕННО СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ МЕТАНИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ

А.Ф. Васильев, И.Н. Халимончик

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

ON LATTICES OF GENERALIZED SUBNORMAL SUBGROUPS IN FINITE METANILPOTENT GROUPS

A.F. Vasil'ev, I.N. Khalimonchik

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Решена проблема Шеметкова об описании наследственных насыщенных решеточных формаций и решеточных подгрупповых функторов в классе всех конечных метанильпотентных групп.

Ключевые слова: *конечная группа*, *решеточная формация*, *решеточный подгрупповой функтор*, $\mathfrak{F}$ *-субнормальная подгруппа.*

The Shemetkov problem about description of hereditary saturated lattice formations and lattice subgroup functors in the class of all finite metanilpotent groups has been solved.

Keywords: *finite group*, *lattice formation*, *lattice subgroup functor*, $\mathfrak{F}$ *-subnormal subgroup.*

Introduction

All groups considered are finite. In 1939 H. Wielandt [1] showed that the set of all subnormal subgroups of a group G forms a sublattice of the lattice of all subgroups of G. Now there are various generalizations of the concept of subnormal subgroups. In 1969 T. Hawkes [2] introduced the definition of $\mathfrak{F}$-subnormal subgroup in the class of soluble groups. In 1978 L.A. Shemetkov [3] extended the concept of $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups to arbitrary finite groups. He set up the problem at number 12 [3, p. 93]: in which cases the set of all $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups of G forms a lattice?

Let $\mathfrak{X}$ be a class of groups. The formation $\mathfrak{F}$ is called a lattice formation in $\mathfrak{X}$ if the set of all $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups forms a sublattice of the lattice of all subgroups in every $\mathfrak{X}$-group.

Noted above the Shemetkov problem can be formulated as follows:

***Problem* 1.** *Let* $\mathfrak{X}$ *be a hereditary saturated formation. Describe all saturated lattice formations in* $\mathfrak{X}$.

In the work [4] authors established hereditary saturated lattice formations in class of all soluble groups.

This result was extended for normally-hereditary saturated lattice formations in the work [5]. In [5] also described hereditary saturated lattice formations in class of all groups.

In [6] authors investigated non-saturated hereditary lattice formations in class of all soluble groups.

In [7], [8] the Problem 1 was solved in the class $\mathfrak{N}^k$ for $k \geq 3$ and in class $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ respectively.

In [9] A.F. Vasil′ev and S.F. Kamornikov developed a general functor method of studing subgroup lattices similar to the lattice of subnormal subgroups. They introduced the concept of NTL-functor (natural transitive lattice subgroup functor) and described all NTL-functors in the class of all soluble groups. They showed that the NTL-functor in the soluble universe is exactly the functor of all $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups for some hereditary saturated lattice formation $\mathfrak{F}$.

In [10] S.F. Kamornikov constructed a continuum of many NTL-functors that do not correspond to any hereditary lattice formations in the class of all finite groups.

The above-noted results lead to the following problem:

***Problem* 2.** *Let* $\mathfrak{X}$ *be a hereditary saturated formation. To describe all lattice subgroup functors in* $\mathfrak{X}$.

In [7] the Problem 2 was solved in the class $\mathfrak{N}^k$ for $k \geq 3$.

In this paper Problem 1 and Problem 2 has been solved in the class $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}^2$ of all metanilpotent groups.

1 Preliminary results

All definitions, notations and results correspond to [11], [12]. We denote by: $S(G)$ the set of all subgroups of group G; $[K]H$ the semidirect product of normal subgroup K and subgroup H;

Z_p the group of prime order p; $\mathfrak{N}$ the class of all nilpotent groups; $\mathfrak{S}$ the class of all soluble groups; $\mathfrak{N}_\pi$ the class of all nilpotent π-groups; $\mathfrak{N}^2$ the class of all metanilpotent groups; $\mathfrak{N}^n$ the class of all soluble groups nilpotent length of which does not exceed a given positive integer n; $\mathbb{P}$ the set of all prime numbers.

The class of groups is called a formation if it is closed under factorgroups and subdirect products. The formation is called hereditary if it is closed under subgroups. The formation is called normally hereditary if it is closed under normal subgroups. The formation is called saturated if $\mathfrak{F}=(G \mid$ if $N \triangleleft G, N \subseteq \Phi(G)$, then $G/N \in \mathfrak{F})$. Let h be a function which associates with each prime p a class $h(p)$ of finite groups. Recall [12] h a local function if $h(p)$ is a formation for all prime number p. Let h be a local function, and let $\mathfrak{X}$ be a local formation. The h is called: integrated if $h(p) \subseteq \mathfrak{X}$ for all $p \in \mathbb{P}$; full if $h(p)=\mathfrak{N}_p h(p)$ for all $p \in \mathbb{P}$. The uniquely determined full and integrated formation function defining a local formation $\mathfrak{F}$ was called [12] the canonical local definition of $\mathfrak{F}$.

Formation $\mathfrak{F}$ is called Shemetkov formation in class $\mathfrak{X}$ if every minimal non-$\mathfrak{F}$-group of $\mathfrak{X}$ is Schmidt group or group of prime order.

***Definition* 1.1** [13, p. 13]. *Let $\mathfrak{X}$ be a class of groups. And let θ be a function mapping each group $G \in \mathfrak{X}$ into a some non-empty system $\theta(G)$ of its subgroups. The map θ is called a subgroup $\mathfrak{X}$-functor (a subgroup functor in $\mathfrak{X}$) if the following condition is satisfied: $(\theta(G))^{\phi}=\theta(G^{\phi})$ for any isomorphism ϕ of every group $G \in \mathfrak{X}$.*

***Definition* 1.2**. *Let $\mathfrak{X}$ be a class of groups. A subgroup functor θ in $\mathfrak{X}$ is called*:

1) *lowerlattice (briefly, L_*-functor), if from $G \in \mathfrak{X}$, $A \in \theta(G)$ and $B \in \theta(G)$ always implies $A \cap B \in \theta(G)$;*

2) *upperlattice (briefly, L^*-functor), if from $G \in \mathfrak{X}$, $A \in \theta(G)$ and $B \in \theta(G)$ always implies $\langle A, B\rangle \in \theta(G)$;*

3) *semilattice (briefly, L_0-functor), if θ is L_*-functor in $\mathfrak{X}$ and from $G \in \mathfrak{X}$, $A \in \theta(G)$, $B \in \theta(G)$ and $AB=BA$ always implies $AB \in \theta(G)$;*

4) *lattice (briefly, L-functor), if θ is the L_* and L^*-functor in $\mathfrak{X}$ at the same time.*

***Definition* 1.3** [13, p. 14]. *Let $\mathfrak{X}$ be a homomorph. A subgroup $\mathfrak{X}$-functor θ is called functor of Skiba in $\mathfrak{X}$, if the following conditions for any group $G \in \mathfrak{X}$ and $N \triangleleft G$ are satisfied*:

1) *$H \in \theta(G)$ then $HN/N \in \theta(G/N)$;*

2) *$H/N \in \theta(G/N)$ then $H \in \theta(G)$.*

Let H be a subgroup of G. Then $H \cap \theta(G)=\{H \cap L \mid L \in \theta(G)\}$.

***Definition* 1.4** [13, p. 15]. *Let $\mathfrak{X}$ be a class of groups. A subgroup $\mathfrak{X}$-functor θ is called*:

1) *hereditary, if $H \cap \theta(G) \subseteq \theta(H)$ for any $\mathfrak{X}$-subgroup H of $G \in \mathfrak{X}$;*

2) *transitive, if from $S \in \theta(H)$ and $H \in \theta(G) \cap \mathfrak{X}$, it follows that $S \in \theta(G)$ for any group $G \in \mathfrak{X}$.*

In this paper all considered subgroup functors we assume as hereditary transitive subgroup functors of Skiba in class of groups $\mathfrak{X}$. The example of such subgroup functors is $\theta=sn_{\mathfrak{F}}$, where $\mathfrak{F}$ is a hereditary formation and $\theta(G)=sn_{\mathfrak{F}}(G)$ is the set of all $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups for any group G.

***Lemma* 1.1.** *Let X be a hereditary saturated formation and θ be a subgroup functor in $\mathfrak{X}$. Let $Z_p \in \mathfrak{X}$ and $1 \in \theta(Z_p)$. Then $\theta(P)=S(P)$ for any p-group P.*

The proof is similar to lemma 3.2.1 [13].

Let $\mathfrak{X}$ be a class of groups and θ be a subgroup $\mathfrak{X}$-functor. We denote by $\Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$ the class $(G \in \mathfrak{X} \mid 1 \in \theta(G)$ and $P \in \theta(G)$ for any Sylow subgroup P from $G)$.

***Lemma* 1.2.** *Let $\mathfrak{X}$ be a hereditary formation and θ be a subgroup L_*-functor in $\mathfrak{X}$. Then $\Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$ is a hereditary formation.*

Proof. Let $G \in \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$ and $N \triangleleft G$. Since $1 \in \theta(G)$, it follows that $N/N \in \theta(G/N)$. Let H/N be a Sylow subgroup of G/N. There is a Sylow subgroup P of group G such that $HN/N=PN/N$. From $P \in \theta(G)$ and 1) definition 1.3 we obtain $PN/N=H/N \in \theta(G/N)$. Therefore $G/N \in \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$.

Let $N_1, N_2 \triangleleft G$ and $N_1 \cap N_2=1$. Assume $G/N_i \in \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$, $i=1,2$. If P is Sylow subgroup of G, then $PN_i/N_i \in \theta(G/N_i)$, $i=1,2$. From 2) definition 1.3 we have $PN_i \in \theta(G)$, $i=1,2$. Since θ is L_*-functor,

$$PN_1 \cap PN_2=P(N_1 \cap N_2)=P \in \theta(G).$$

From $N_i/N_i \in \theta(G/N_i)$ we conclude $N_i \in \theta(G)$, $i=1,2$. Then $N_1 \cap N_2=1 \in \theta(G)$. Hence $\Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$ is a formation.

Let H be a subgroup of G. Suppose that P is arbitrary Sylow subgroup of H. Then $P \subseteq S$ where S is some Sylow subgroup of G. Since $S \in \theta(G)$ and by hereditary of functor θ, we have $P=S \cap H \in \theta(H)$. From $1 \in \theta(G)$ we conclude that

$1 \cap H = 1 \in \theta(H)$. Therefore $\Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$ is a hereditary formation.

***Definition* 1.5.** Let $\mathfrak{X}$ be a class of groups. The set $\pi(\theta)$ of all primes p for which $1 \in \theta(Z_p)$ where $Z_p \in \mathfrak{X}$ is called a characteristic of subgroup $\mathfrak{X}$-functor θ.

***Lemma* 1.3.** *Let $\mathfrak{X}$ be a hereditary saturated formation and π is characteristic of subgroup L_*-functor in $\mathfrak{X}$. Then $\mathfrak{N}_{\pi(\theta)} \subseteq \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$.*

Proof. Let $p \in \pi$. By lemma 1.1, $\theta(P) = S(P)$ for any p-subgroup P. Hence $P \in \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$. Since $\Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$ is formation, we have $\mathfrak{N}_{\pi} \subseteq \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$.

Let θ be a subgroup functor in class of groups $\mathfrak{X}$. We will denote the class $(G \in \mathfrak{X} \mid \theta(G) = S(G))$ by $S_{\mathfrak{X}}(\theta)$.

***Lemma* 1.4.** *Let $\mathfrak{X}$ be a hereditary formation of soluble groups and let θ be a subgroup L_0-functor in $\mathfrak{X}$. Then $\Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta) = S_{\mathfrak{X}}(\theta)$.*

Proof. It is clear that $S_{\mathfrak{X}}(\theta) \subseteq \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$. Let $G \in \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$. Then $P \in \theta(G)$ for any Sylow subgroup P of G. From $1 \in \theta(G)$ and by the properties of the functor θ we conclude $1 = 1 \cap P \in \theta(P)$. By lemma 1.1 $\theta(P) = S(P)$ for any Sylow subgroup P of G. From the transitivity of θ we obtain $S(P) \subseteq \theta(G)$ for any Sylow subgroup P of G. Let H be any subgroup. Since H is soluble, according to Hall's theorem (see [12]) there is Sylow basis $P_1, \cdots, P_n$ in H. Since $H = P_1 P_2 \cdots P_n$ and θ is L_0-functor we have $H \in \theta(G)$. Therefore $G \in S_{\mathfrak{X}}(\theta)$.

***Lemma* 1.5** [13, p. 148]. *Let θ be a subgroup L-functor. Then and only then $G \in S_{\mathfrak{S}}(\theta)$ when $1 \in \theta(G)$ and $P \in \theta(G)$ for any Sylow subgroup P of G.*

***Lemma* 1.6** [13, p. 148]. *Let θ be a subgroup L-functor. Let $G = [P] < A, B >$ where P is p-subgroup, $< A, B >$ is q-group, p, q is primes, $p \neq q$. If $PA \in S_{\mathfrak{S}}(\theta)$ and $PB \in S_{\mathfrak{S}}(\theta)$, then $G \in S_{\mathfrak{S}}(\theta)$.*

***Definition* 1.6.** Formation $\mathfrak{F}$ is called Fitting formation in class of group $\mathfrak{X}$ if the following conditions are satisfied:

1) $\mathfrak{F}$ is normally hereditary formation;

2) if $G = AB$ where $G \in X$, $A \lhd G$, $B \lhd G$, $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$ then $G \in \mathfrak{F}$.

***Lemma* 1.7.** *Let $\mathfrak{X}$ be a hereditary formation of soluble groups and θ be a subgroup L_0-functor in $\mathfrak{X}$. Then $\Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$ is a Fitting formation in $\mathfrak{X}$.*

Proof. By lemma 1.2 $\Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$ is a hereditary formation. Let $G \in \mathfrak{X}$ be a group of minimal order such that $G = MN$, where $M, N \lhd G$ and $M, N \in \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$, but $G \notin \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$.

Since $\Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$ is a formation, it follows that G has the unique minimal normal subgroup $D = G^{\Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)}$. Let P be an arbitrary Sylow subgroup of G. By theorem 6.4 [12],

$$P = P \cap MN = (P \cap M)(P \cap N),$$

where $P \cap M$ and $P \cap N$ are Sylow subgroups of M and N respectively. Since $M \in \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$, we have $P \cap M \in \theta(M)$. From $G / D \in \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta) = S_{\mathfrak{X}}(\theta)$ we conclude that $M / D \in \theta(G / D)$. Therefore $M \in \theta(G)$. By the transitivity of θ, $P \cap M \in \theta(G)$. Similarly, $P \cap N \in \theta(G)$. Since θ is L_0-functor in $\mathfrak{X}$, it follows that $P \in \theta(G)$. Hence $G \in \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$. A contradiction. Therefore $\Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$ is Fitting formation in $\mathfrak{X}$.

***Lemma* 1.8.** *Let $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}^2$ and θ be a subgroup L_0-functor in $\mathfrak{X}$. If $R \in \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$ be a p-closed $\{p, q\}$-group of Schmidt and $\Phi(R) = 1$, then $\Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$ contains all extensions of p-groups by cyclic q-groups.*

Proof. By [3], there is the unique (up to isomorphism) p-closed $\{p, q\}$-group of Schmid $R = [N]Z_q$ where N is the unique minimal normal subgroup of R, $\Phi(R) = 1$. Assume that $R \in \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$. Let us first prove that $\Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$ contains all extensions of p-groups by a group of prime order q.

Let $G = PZ_q$ where P is p-group and $P \lhd G$. We use induction on $|G|$ to prove $G \in \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$.

Let $Z_q \lhd G$. Then $G = P \times Z_q$. From $R \in \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$ and from hereditary class $\Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$ it follows that $\{p, q\} \subseteq \pi(\Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta))$. By lemma 1.3, $\mathfrak{N}_{\pi} \subseteq \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$ where $\pi = \pi(\Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta))$. Hence $G \in \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$. Therefore we assume that Z_q is not normal in G. Let K is minimal normal subgroup of group G. Suppose that $K \neq P$. It is clear that $K \subseteq P$ and $KZ_q \neq G$. By induction $G / K \in \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$. Therefore

$$KZ_q / K \in \theta(G / K)$$

and $KZ_q \in \theta(G)$. As $|KZ_q| < |G|$ we have $KZ_q \in \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$. Hence $Z_q \in \theta(G)$. From $G / P \in \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$ we obtain that $P / P \in \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$. So $P \in \theta(G)$. Thus any Sylow subgroup from G contains in $\theta(G)$. From $P \in \theta(G)$ and $Z_q \in \theta(G)$ it follows that $1 = P \cap Z_q \in \theta(G)$. Therefore $G \in \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$.

Suppose that $K = P$. Then G is a Schmid group and $\Phi(G) = 1$. Therefore $G \in \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$. We proved that any extension p-group by the group of prime order q belongs to $\Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$.

Let now $G = PZ_{q^n}$, where P is a p-group and Z_{q^n} is a cyclic q-group of order q^n. We prove that $G \in \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$ by induction on n. By the above, for $n = 1$ the statement is true. Let $n > 1$. Consider the group $E = Pwr(Z_q wr Z_{q^{n-1}})$. By theorem 18.9A [12], G is isomorphic to a subgroup from E. Note that $Z_q wr Z_{q^{n-1}} = [B]Z_{q^{n-1}}$, where B is the base of wreath $Z_q wr Z_{q^{n-1}}$. Denote by P^* the Sylow p-subgroup of E. Then $E = P^*([B]Z_{q^{n-1}})$. Since

$$E / P^* \simeq [B]Z_{q^{n-1}} \in \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta),$$

it follows that $P^* Z_{q^{n-1}} / P^* \in \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$. Hence $P^* Z_{q^{n-1}} \in \theta(E)$. By induction $P^* Z_{q^{n-1}} \in \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$. Then $Z_{q^{n-1}} \in \theta(P^* Z_{q^{n-1}})$ and $P^* \in \theta(P^* Z_{q^{n-1}})$. From the transitivity of θ we conclude that $Z_{q^{n-1}} \in \theta(E)$ and $P^* \in \theta(E)$.

Similarly $P^*B / P^* \in \theta(E / P^*)$. Hence $P^*B \in \theta(E)$. Since $B \simeq Z_q \times \cdots \times Z_q$, by induction (case $n = 1$), by lemmas 1.6 and 1.4, it follows that $P^*B \in \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$. Then $B \in \theta(P^*B)$. By the transitivity of θ, $B \in \theta(G)$. Since θ is L_0-functor, we obtain $< B, Z_{q^{n-1}} >= [B]Z_{q^{n-1}} \in \theta(E)$. By lemmas 1.5 and 1.4, $E \in \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$. Since $\Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$ is a hereditary class, it follows that $G \in \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$.

***Lemma* 1.9** [14]. *Let $\mathfrak{F}$ be a hereditary local formation, h be the canonical local function of $\mathfrak{F}$. Let $\mathfrak{X}$ be a hereditary local formation, x be the canonical hereditary local function of $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Then and only then formation $\mathfrak{F}$ is a Shemetkov formation in $\mathfrak{X}$ when it's canonical hereditary local x-function f:*

1) *$f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))} \cap x(p)$ for any $p \in \pi(\mathfrak{F})$;*

2) *$f(p) = \varnothing$ for any $p \in \pi'(\mathfrak{F})$.*

***Lemma* 1.10.** *Let $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}^2$. If θ is a subgroup L_0-functor in $\mathfrak{X}$, then $\Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$ is a saturated formation.*

Proof. Denote $\mathfrak{F} = \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$. Let group G be a counterexample of minimal order. Then $\Phi(G) \neq 1$ and $G / \Phi(G) \in \mathfrak{F}$, but $G \notin \mathfrak{F}$.

Let N be a minimal normal subgroup of G. Then $\Phi(G)N / N \subseteq \Phi(G / N)$. Since $G / N / \Phi(G)N / N \simeq G / \Phi(G)N$ and $G / \Phi(G) \in \mathfrak{F}$ it follows that $G / N / \Phi(G)N / N \in \mathfrak{F}$. By the choice of G we get $G / N \in \mathfrak{F}$.

If K is a minimal normal subgroup of G and $K \neq N$, then $G / K \in \mathfrak{F}$. Since $\mathfrak{F}$ is a formation, we have $G / K \cap N \simeq G \in \mathfrak{F}$. The contradiction. Therefore G has the unique minimal normal subgroup N, where $N \subseteq \Phi(G)$ and N is a p-group for some prime p. It is easy to show that the Fitting subgroup $F(G)$ is a p-group.

Let G_q be a Sylow q-subgroup, where $q \neq p$. From $G \in \mathfrak{N}^2$, we conclude that $G_q F(G) \lhd G$.

Consider the subgroup $G_q F(G)$. Since $\mathfrak{F}$ is a hereditary formation, $G_q F(G) / N \in \mathfrak{F}$. Since $N \subseteq \Phi(G)$, we conclude $G_q F(G) / \Phi(G) \in \mathfrak{F}$.

If $G_q F(G) \in \mathfrak{N}$, then

$$G_q \subseteq C_{G_q F(G)}(F(G)) \subseteq C_G(F(G)) = F(G).$$

The contradiction. Therefore $G_q F(G)$ is a non-nilpotent p-closed group. Note that $G_q F(G) / N$ is a non-nilpotent p-closed $\{p, q\}$-group. Formation $\mathfrak{F}$ is hereditary. There is p-closed $\{p, q\}$-group of Schmidt R, $\Phi(R) = 1$ and $R \in \mathfrak{F}$. By lemmas 1.8 and 1.7 $G_q F(G) \in \mathfrak{F}$. Since this result holds for any Sylow subgroup of G, it follows that G is a product of their normal $\mathfrak{F}$-subgroups. Since $\mathfrak{F}$ is a Fitting formation in $\mathfrak{N}^2$, we obtain $G \in \mathfrak{F}$. The contradiction. Therefore $\mathfrak{F}$ is a saturated formation.

2 Main results

***Theorem* 2.1.** *Let θ be a subgroup L-functor in $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}^2$. Then:*

1) *the class $\mathfrak{F} = \Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)$ is a hereditary saturated Shemetkov formation in $\mathfrak{N}^2$ and has the canonical local function $f : f(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_{\pi(f(p))}$ for any $p \in \pi(\mathfrak{F})$; $f(p) = \varnothing$ for any $p \in \pi'(\mathfrak{F})$;*

2) *$\theta(G) = sn_{\Lambda_{\mathfrak{X}}(\theta)}(G)$ for any group $G \in \mathfrak{X}$.*

***Theorem* 2.2.** *Let $\mathfrak{F}$ be a saturated formation, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^2$. Then statements are equivalent:*

1) *$\mathfrak{F}$ is a lattice formation in $\mathfrak{N}^2$;*

2) *$\mathfrak{F}$ is a Shemetkov formation in $\mathfrak{N}^2$;*

3) *$\mathfrak{F}$ has the canonical local function f: $f(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_{\pi(f(p))}$ for any $p \in \pi(\mathfrak{F})$; $f(p) = \varnothing$ for any $p \in \pi'(\mathfrak{F})$.*

REFERENCES

1. *Wielandt*, *H.* Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen / H. Wielandt // Math. Z. – 1939. – Bd. 45. – S. 209–244.

2. *Hawkes*, *T.* On formations subgroups of a finite soluble groups / T. Hawkes // J. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 44. – P. 243–250.

3. *Shemetkov*, *L.A.* Formations of finite groups / L.A. Shemetkov. – M.: Nauka, 1978.

4. *Ballester-Bolinches*, A. On the lattice on $\mathfrak{F}$-subnormal subgroups / A. Ballester-Bolinches, K. Doerk, M.D. Perez-Ramos // J. Algebra. – 1992. – Vol. 115. – P. 393–396.

5. *Vasil'ev*, *A.F.* On lattices of subgroups of finite groups / A.F. Vasil'ev, S.F. Kamornikov, V.N. Semenchuk // In N.S. Chernikov editor, Infinite groups and related algebraic structures. Institut Matematiki AN Ukrainy. – Kiev. – 1993. – P. 27–54.

6. *Vasil'ev*, *A.F.* On Kegel-Shemetkov problem on lattices of generalized subnormal subgroups of finite groups / A.F. Vasil'ev, S.F. Kamornikov // Algebra Logika. – 2002. – Vol. 41, № 4. – P. 411–428.

7. *Khalimonchik*, *I.N.* On lattices of subgroups subnormal type in finite groups / I.N. Khalimonchik, A.F. Vasil'ev // Proceedings of the Institute of Mathematics. – 2013. – Vol. 21, № 1. – P. 25–34.

8. *Khalimonchik*, *I.N.* Conditionally lattice formations of finite groups / I.N. Khalimonchik, A.F. Vasil'ev // Proceedings of the F.Scorina Gomel State University. – 2008. – Vol. 47, № 2. – P. 50–55.

9. *Vasil'ev*, *A.F.* On the functor method for studing of lattices of subgroups of finite groups / A.F. Vasil'ev, S.F. Kamornikov // Sibirsk. Math. Zh. – 2001. – Vol. 2. – P. 30–40.

10. *Kamornikov*, *S.F.* On a class of lattice subgroup functors / S.F. Kamornikov // Mathematical Notes. – 2011. – Vol. 89, № 3–4. – P. 340–348.

11. *Ballester-Bolinches*, *A*. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Springer, 2006.

12. *Doerk*, *K*. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992.

13. *Kamornikov*, *S.F.* Subgroup functors and classes of finite groups / S.F. Kamornikov, M.V. Selkin. – Minsk: Belaruskaya nauka, 2003.

14. *Khalimonchik*, *I.N.* Shemetkov formation in class $\mathfrak{X}$ / I.N. Khalimnchik // Proceedings of the F. Scorina Gomel State University. – 2009. – Vol. 55, № 4. – P. 219–223.

Поступила в редакцию 11.02.15.

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С *S*-НОРМАЛЬНЫМИ МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Н.С. Косенок

Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации, Гомель, Беларусь

FINITE GROUPS WITH *S*-NORMAL MAXIMAL SUBGROUPS

N.S. Kosenok

Belarusian Trade and Economics University of Consumer Cooperatives, Gomel, Belarus

Подгруппа H группы G называется s-нормальной в G, если G имеет такую субнормальную подгруппу T, что $G = HT$ и $H \cap T \subseteq H_{sG}$. На основе этого определения получены новые критерии p-разрешимости и разрешимости конечных групп.

Ключевые слова: *конечная группа, разрешимая группа, максимальная подгруппа, субнормальная подгруппа.*

Subgroup H of G is called s-normal in G, if G has a subnormal subgroup T such that $G = HT$ and $H \cap T \subseteq H_{sG}$. New criteria for the p-solvability and solvability of finite groups are obtained on the basis of this definition.

Keywords: *finite group, solvable group, maximal subgroup, subnormal subgroup.*

Введение

Подгруппа M группы G называется максимальной, если $M<G$ и в G нет такой собственной подгруппы T, которая содержит M собственным образом. Поскольку всякая конечная неединичная группа обладает максимальными подгруппами, это понятие особенно полезно в теории конечных групп и результаты, связанные с изучением строения группы в зависимости от свойств ее максимальных подгрупп, а также от свойств максимальных подгрупп некоторых ее собственных подгрупп, составили важное направление современной теории групп, обогащенное большим числом глубоких теорем и содержательных примеров.

Многие из наиболее важных классов конечных групп могут быть охарактеризованы на основе свойств их максимальных подгрупп. Напомним, например, что конечная группа нильпотентна тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы нормальны. Согласно знаменитой теореме Хупперта конечная группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда индексы ее максимальных подгрупп – простые числа. Согласно [1] конечная группа G является разрешимой тогда и только тогда, когда для любой ее максимальной подгруппы M имеет место $|G:M| = |G:M|_n$ (здесь $|G:M|_n$ – нормальный индекс M в G, который совпадает с порядком главного фактора H / K, где $K \subseteq M$ и $H \nsubseteq M$). Отметим, что в действительности, как это показано в теории формаций конечных групп, все наиболее известные классы конечных групп, замкнутые относительно фраттиниевых расширений своих групп, могут быть охарактеризованы по свойствам их максимальных подгрупп [2], [3].

Свойства максимальных подгрупп лежат и в основе многих признаков принадлежности конечной группы тому или иному классу. Напомним некоторые из наиболее известных результатов в этом направлении. Согласно неопубликованному результату Ф. Холла, конечная группа разрешима, если индекс любой ее максимальной подгруппы является либо простым числом, либо квадратом простого числа [4, с. 267]. Это важное наблюдение Холла дало толчок серии глубоких исследований, связанных с изучением конечных групп, у которых индексы максимальных подгрупп обладают тем или иным свойством. В этой связи следует прежде всего отметить монографию М.В. Селькина [5], где найдена связь между теорией классов Шунка и теорией максимальных подгрупп с заданными индексами, а также работу С.Ф. Каморникова [6], где было впервые дано описание конечных групп, у которых индексы всех максимальных подгрупп являются либо простыми числами, либо квадратами простых чисел, и статью Е. Грибовской и В.С. Монахова [7], где было получено описание разрешимых конечных групп с ограниченными примарными индексами максимальных подгрупп. В работе Томпсона [8] было доказано, что конечная группа G является разрешимой и в случае, когда она обладает максимальной нильпотентной подгруппой нечетного порядка. В дальнейшем Янко [9] и Дескинс [10] установили, что конечная группа разрешима, если она обладает максимальной нильпотентной подгруппой, у которой силовская 2-подгруппа имеет класс, не превосходящий 2.

Целью данной работы является дальнейшее изучение строения групп в зависимости от свойств их максимальных подгрупп.

1 Некоторые предварительные сведения

Символом $H_{..G}$ будем обозначать наибольшую субнормальную подгруппу конечной группы G, содержащуюся в H.

Определение. *Подгруппа H конечной группы G называется s-нормальной в G если G имеет такую субнормальную подгруппу T, что G = HT и* $H \cap T \subseteq H_{..G}$.

Следующая лемма очевидна.

***Лемма* 1.1.** *Пусть* G *– конечная группа, и пусть* $K \trianglelefteq G$, *и* $K \leq H$. *Тогда* H *s-нормальна в* G, *если и только если* H / K *s-нормальна в* G / K.

Пусть M – максимальная подгруппа конечной группы G. Тогда нормальным индексом [1] этой подгруппы называют порядок главного фактора H / M_G.

2 Критерии p-разрешимости и разрешимости конечных групп

***Теорема* 2.1.** *Пусть G – конечная группа и N – нетривиальная нормальная подгруппа группы G. Тогда N p-разрешима в том и только в том случае, когда каждая максимальная подгруппа группы G, не содержащая N и чей нормальный индекс делится на p, s-нормальна в G.*

Доказательство. Предположим, что каждая максимальная подгруппа M группы G с $N \not\subseteq M$ и такая, чей нормальный индекс делится на p, s-нормальна в G. Пусть R – минимальная нормальная подгруппа группы G. Допустим, что M / R – максимальная подгруппа группы G / R такая, что $RN / R \not\subseteq M / R$, и такая, чей нормальный индекс в G / R делится на p. Тогда M – максимальная подгруппа группы G такая, что $N \not\subseteq M$. Кроме того, если $H / R / (M / R)_{G / R} = (H / R) / (M_G / R)$ – главный фактор в G / R, то H / M_G – главный фактор в G. Следовательно, p делит нормальный индекс M в G. По нашему предположению, M s-нормальна в G, и следовательно, M / R s-нормальна в G / R, по лемме 1.1. Значит, по индукции, RN / R – p-разрешимая группа. Если $R \cap N = 1$, тогда $N \simeq RN / R$ p-разрешима. Следовательно, каждая минимальная нормальная подгруппа группы G содержится в N. Тривиальные рассуждения также показывают, что $R = Soc(G)$ и $R \not\subseteq \Phi(G)$.

Допустим, что R не является p-разрешимой группой. Тогда p делит $|R|$ и если $E = N_G(P)$, где P – силовская p-подгруппа группы R, то по аргументу Фраттини, мы имеем, что $G = RE$. Так как R не является p-разрешимой группой, то $E \neq G$.

Пусть M – максимальная подгруппа группы G такая, что $E \leq M$. Тогда $R \not\subseteq M$ и $N \not\subseteq M$. Так как $|R|$ совпадает с нормальным индексом M, то p делит нормальный индекс M. Следовательно, по нашему предположению, M s-нормальна в G.

Пусть G_p – силовская p-подгруппа группы G такая, что $P = R \cap G_p$. Тогда P нормальна в G_p. Поэтому $G_p \subseteq E$, и поэтому p не делит $|G{:}M|$.

Пусть T – субнормальная подгруппа группы G такая, что $TM = G$ и $T \cap M \leq M_{..G}$. Прежде предположим, что $M_{..G} \neq 1$, или же пусть A – минимальная субнормальная подгруппа группы G, содержащаяся в $M_{..G}$. Ясно, что A – простая группа. Допустим, что $A \not\subseteq R$. Тогда $A \cap R = 1$. Но так как $R \not\subseteq N_G(A)$ [3, с. 47], мы имеем $RA = R \times A$. Отсюда следует, что $A \subseteq C_G(R) = 1$. Это противоречие показывает, что $A \subseteq R$. Так как $R = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$, где $A_1 \simeq A_2 \simeq \ldots \simeq A_t$ есть простая неабелева группа, и A субнормальна в R, мы имеем $A \in \{A_1, A_2, \ldots, A_t\}$. Пусть $A = A_1$. Так как

$$A_1^G = A_1^{RM} = A_1^M = R$$

и $A_1 \subseteq M$, мы имеем $R \leq M$, противоречие. Следовательно, $M_{..G} = 1$, и поэтому $T \cap M = 1$. Это показывает, что $|G| = |T||M|$, т. е. $|T| = |G{:}M|$.

Пусть A – минимальная субнормальная подгруппа группы G, содержащаяся в T. Тогда из выше сказанного, мы знаем, что $A = A_i$ для некоторого $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$.

Пусть P_1 – силовская p-подгруппа в A_1. Тогда $|P| = |P_1|^t$. Следовательно, p делит $|A_i|$. Но тогда p делит $|T| = |G{:}M|$, противоречие. Следовательно, R – p-разрешимая группа, и следовательно, N p-разрешима.

Теперь предположим, что $N \trianglelefteq G$, и N – p-разрешимая группа. Пусть M – максимальная подгруппа группы G такая, что $N \not\subseteq M$ и чей нормальный индекс делится на p. И пусть $1 = N_0 \leq N_1 \leq N_2 \leq \ldots \leq N_{t-1} \leq N_t = N$, где N_i / N_{i-1} ($i = 1, 2, \ldots, t$) – главный фактор группы G. Мы можем выбрать индекс i такой, что $N_i \not\subseteq M$ и $N_{i-1} \subseteq M$. Тогда $N_i M = G$. Рассмотрим главные факторы $N_i M_G / M_G$ и N_i / N_{i-1}. Первый из них G-изоморфен главному фактору $N_i / N_i \cap M_G$, при этом $N_{i-1} \subseteq N_i \cap M_G$. Значит, факторы $N_i M_G / M_G$ и N_i / N_{i-1} изоморфны и поэтому p делит $|N_i / N_{i-1}|$. Следовательно, N_i / N_{i-1} – абелева р-группа.

Теперь ясно, что $N_i \cap M \trianglelefteq M$ *и* $N_i \cap M \trianglelefteq N_i$. Поэтому $N_i \cap M \subseteq M_G \subseteq M_{..G}$.

Теорема доказана.

Аналогично теореме 2.1. может быть доказана следующая теорема.

***Теорема* 2.2.** *Конечная группа G p-разрешима тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа группы G, чей нормальный индекс делится на p, слабо c-нормальна в G.*

***Следствие* 2.1** [11]. *Конечная группа G разрешима тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа группы G c-нормальна в G.*

***Следствие* 2.2** [12]. *Конечная группа G разрешима тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа группы G c-нормальна в G.*

***Теорема* 2.3**. *Конечная группа p-разрешима в том и только в том случае, когда в ней существует p-разрешимая максимальная подгруппа, которая* *либо s-нормальна в G, либо имеет нормальный индекс, не делящийся на p.*

Доказательство. Ввиду теоремы 2.1, нам только надо доказать достаточность.

Допустим, что утверждение неверно, и G – контрпример минимального порядка. Пусть R – минимальная нормальная подгруппа группы G, M – такая p-разрешимая максимальная в G подгруппа, которая либо s-нормальна в G, либо имеет нормальный индекс, не делящийся на p. Если $R \not\subseteq M$, то $G / R = RM / R \simeq M / R \cap M$ разрешима. С другой стороны, если $R \subseteq M$, то M / R – такая p-разрешимая максимальная подгруппа в G / R, которая либо s-нормальна в G / R, либо имеет нормальный индекс в G / R, не делящийся на p. Следовательно, G / R – p-разрешимая группа по выбору группы G. Поэтому R – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как M – разрешимая группа, $R \not\subseteq M$ и R – неабелева группа, чей порядок делится на p, то по нашему предположению, M s-нормальна в G.

Пусть T – субнормальная подгруппа группы G такая, что $G = TM$ и $T \cap M \leq M_{..G}$. Ясно, что $M_{..G} = 1$ (см. доказательство теоремы 2.1.) и, следовательно, $T \cap M = 1$. Отсюда следует, что $|M| = |G{:}T|$. Пусть

$$1 = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_n = \\ = T = T_0 \leq T_1 \leq \ldots \leq T_m = G \qquad (2.1)$$

– композиционный ряд группы G. Тогда

$$|G{:}T| = |T_1 / T_0||T_2 / T_1| \ldots |T_m / T_{m-1}|.$$

Рассмотрим следующий ряд

$$1 = T_0 \cap M \leq T_1 \cap M \leq \ldots \leq T_{m-1} \cap M \leq \\ \leq T_m \cap M = M \qquad (2.2)$$

Ясно, что $T_{i-1} \cap M \trianglelefteq T_i \cap M$ для всех $i = 1,2,\ldots,m$.

Заметим, что

$$|(T_1 \cap M) / (T_0 \cap M)| \, |(T_2 \cap M)/(T_1 \cap M)| \ldots \times \\ \times |(T_m \cap M)/(T_{m-1} \cap M)| = |M| = |G{:}T| = \\ = |T_1 / T_0||T_2 / T_1| \ldots |T_m / T_{m-1}|.$$

Так как

$$(T_i \cap M) / (T_{i-1} \cap M) = (T_i \cap M) / (T_i \cap M) \cap T_{i-1} \simeq \\ \simeq T_{i-1}(T_i \cap M) / T_{i-1} \leq T_i / T_{i-1},$$

$|(T_i \cap M) / (T_{i-1} \cap M)| \leq |T_i / T_{i-1}|$ для всех $i = 1,2,\ldots,m$.

Следовательно, $(T_i \cap M) / (T_{i-1} \cap M) \simeq T_i / T_{i-1}$ есть простая группа для всех $i = 1,2,\ldots,m$. Это показывает, что ряд (2.2) есть композиционный ряд группы M. По нашему предположению, M – p-разрешимая группа. Следовательно, каждый фактор ряда (2.2) либо является p'-группой, либо он абелев и имеет порядок p. Следовательно, каждый из факторов T_1 / T_0, T_2 / T_1, … , T_m / T_{m-1} – либо простая p'-группа, либо группа порядка p. Рассмотрим следующий композиционный ряд группы G:

$$1 \leq A_1 \leq A_1A_2 \leq \ldots \leq A_1A_2 \ldots A_{t-1} \leq R = \\ = K_0 \leq K_1 \leq \ldots \leq K_r = G,$$

где $R = A_1 \times \ldots \times A_t$ – прямое разложение группы R в произведение изоморфных простых групп. Ввиду теоремы Жордана – Гельдера, существуют индексы $i_1, i_2, \ldots, i_t$ такие, что

$$A_1 \simeq H_{i1} / H_{i1-1},\ A_2 / A_1 \simeq H_{i2} / H_{i2-1}, \ldots, \\ R / A_1A_2 \ldots A_{t-1} \simeq Hi_t / H_{it-1}.$$

Следовательно, $|R| \leq |T| = |G{:}M|$. Так как $|G| = \dfrac{|M||R|}{|M \cap R|}$, мы имеем $|G{:}M| \leq |R|$.

Следовательно, $|R| = |T|$, и вследствие этого, $R \cap M = 1$. Применяя теперь основной результат работы [13], получаем, что группа M не является p-разрешимой. Это противоречит условию. Теорема доказана.

Заключение

На основе определения s-нормальной подгруппы установлены новые критерии p-разрешимости и разрешимости конечных групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Deskins*, *W.E.* On maximal subgroups / W.E. Deskins // Proc. Symp. Pure Math. – 1959. – Vol. 1. – P. 100–104.
2. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
3. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992. – 889 p.
4. *Robinson*, *D.* A course in the theory of groups / D. Robinson. – Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin. – 1982. – 502 p.
5. *Селькин*, *М.В.* Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 144 с.
6. *Каморников*, *С.Ф.* К теореме Ф.Холла / С.Ф. Каморников // Вопросы алгебры. – 1990. – Вып 5. – С. 45–52.
7. *Монахов*, *В.С.* О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В.С. Монахов, Е.Е. Грибовская // Математические заметки. – 2001. – Т. 70, вып. 4. – С. 603–612.
8. *Thompson*, *J.G.* Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order / J.G. Thompson // Proc Nat. Acad. Sci. USA. – 1959. – Vol. 45. – P. 578–581.
9. *Janko*, *Z.* Finite groups with a nilpotent maximal subgroup / Z. Janko // J. Austral. Math. Soc. – 1964. – Vol. 4 – P. 449–451.
10. *Deskins*, *W.E.* A condition for solvability of a finite group / W.E. Deskins // Illinois J. Math. – 1961. – Vol. 5. – P. 306–313.
11. *Wang*, *Y.* *c*-Normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. – 1996. – № 180. – P. 954–965.
12. *Zhu*, *L.* Weakly *c*-normal subgroups of finite groups and their properties / L. Zhu, W. Guo, K.P. Shum // Comm. Algebra. – 2002. – № 30. – P. 5505–5512.
13. *Lafuente*, *J.* Eine Note uber nichtabelsche Hauptfactoren und maximale Untergruppen einer endlichen Gruppe / J. Lafuente // Comm. Algebra. – 1985. – Vol. 13, № 9. – P. 2025–2036.

Поступила в редакцию 14.05.15.

УДК 512.542

КРИТЕРИИ *P*-СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В.О. Лукьяненко, Т.В. Тихоненко

Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель, Беларусь

CRITERIA OF *P*-SUPERSOLUBILITY OF FINITE GROUPS

V.O. Lukyanenko, T.V. Tihonenko

P. Sukhoi Gomel State Technical University, Gomel, Belarus

Пусть H – подгруппа конечной группы G. Будем говорить, что подгруппа H τ-квазинормальной в G, если H перестановочна с каждой силовской подгруппой Q из G, такой что $(|H|, |Q|) = 1$ и $(|H|, |Q^G|) \neq 1$. Доказан следующий результат. Пусть $G = AT$, где A – холлова π-подгруппа группы G и T – p-нильпотентная подгруппа для некоторого простого числа $p \notin \pi$. Пусть P – силовская p-подгруппа в T и предположим, что подгруппа A τ-квазинормальна в G. Предположим, что существует такое число p^k, что $1 < p^k < |P|$ и A перестановочна с каждой подгруппой из P порядка p^k и с каждой циклической подгруппой из P порядка 4 (если $p^k = 2$ и P – неабелева подгруппа). Тогда группа G p-сверхразрешима.

***Ключевые слова**: τ-квазинормальная подгруппа, силовская подгруппа, холлова подгруппа, p-разрешимая группа, p-сверхразрешимая группа.*

Let G be a finite group and H a subgroup of G. We say that H is τ-quasinormal in G if H permutes with all Sylow subgroups Q of G such that $(|Q|, |H|) = 1$ and $(|H|, |Q^G|) \neq 1$. The main result here is the following: Let $G = AT$, where A is a Hall π-subgroup of G and T is p-nilpotent for some prime $p \notin \pi$, let P denote a Sylow p-subgroup of T and assume that A is τ-quasinormal in G. Suppose that there is a number p^k such that $1 < p^k < |P|$ and A permutes with every subgroup of P of order p^k and with every cyclic subgroup of P of order 4 (if $p^k = 2$ and P is non-abelian). Then G is p-supersoluble.

Keywords: *τ-quasinormal subgroup, Sylow subgroup, Hall subgroup, p-soluble group, p-supersoluble group.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы.

Пусть H – подгруппа группы G. Тогда $\pi(G)$ обозначает множество всех простых делителей порядка $|G|$, H^G – номарльное замыкание подгруппы H в группе G, т. е. пересечение всех нормальных подгрупп из G, содержащих подгруппу H. Напомним, что подгруппа A группы G называется перестановочной с подгруппой B, если выполняется условие $AB = BA$. Подгруппа H группы G называется $\pi(G)$-перестановочной или $\pi(G)$-квазинормальной в G [1], если подгруппа H перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G.

В данной статье мы анализируем следующее обобщение $\pi(G)$-квазинормальности: подгруппа H τ-квазинормальной в G [2], если H перестановочна с каждой силовской подгруппой Q из G, такой, что $(|H|, |Q|) = 1$ и $(|H|, |Q^G|) \neq 1$. Очевидно, что каждая $\pi(G)$-квазинормальная подгруппа группы G τ-квазинормальна в G. Пример 1.2 в [2] показывает, что обратное утверждение в общем случае не верно.

Согласно известной теореме Ф. Холла [3], группа G разрешима, если каждая ее силовская подгруппа P имеет дополнение T в G, т. е. $PT = G$ и $P \cap T = 1$. Пример альтернативной группы A_5 показывает, что такое утверждение в общем случае не верно, если рассматривать только силовские p-подгруппы для некоторого фиксированного числа p.

Тем не менее, Б. Хупперт [4] доказал, что если силовская p-подгруппа P группы G имеет дополнение T в G, $|P| > p$ и T перестановочна с каждой максимальной подгруппой из P, тогда группа G p-разрешима. Этот результат в одном направлении был усилен В.И. Сергиенко [5]. Основываясь на данном результате, он доказал, что если силовская p-подгруппа P группы G имеет дополнение T в G, существует такое число p^k, что $1 < p^k < |P|$ и T перестановочна со всеми подгруппами из P порядка p^k и P является абелевой группой, если $p^k = 2$, тогда группа G p-разрешима и ее p-длина равняется 1. В дальнейшем М.Т. Боровиков [6] доказал, что группа G в этом случае также является p-сверхразрешимой. В. Го, К.П. Шам и А.Н. Скиба показали [7], что если $G = AT$, где A – холлова π-подгруппа группы G, T – нильпотентная подгруппа и A перестановочна со всеми силовскими подгруппами из T и со всеми максимальными подгруппами любой силовской подгруппы из T, тогда группа G p-сверхразрешима для каждого такого простого числа $p \in \pi$, что T содержит силовскую p-подгруппу P с порядком $|P| > p$.

В данной работе доказано следующее обобщение этих результатов.

***Теорема* 0.1.** *Пусть $G = AT$, где A – холлова π-подгруппа группы G и T – p-нильпотентная подгруппа для некоторого простого числа $p \notin \pi$. Пусть P – силовская p-подгруппа в T и предположим, что подгруппа A τ-квазинормальна в G.*

Предположим, что существует такое число p^k, что $1 < p^k < |P|$ и A перестановочна с каждой подгруппой из P порядка p^k и с каждой циклической подгруппой из P порядка 4 (если $p^k = 2$ и P – неабелева подгруппа). Тогда группа G p-сверхразрешима.

Из данной теоремы вытекают следующие следствия.

***Следствие* 0.1** [5, теоремы 2 и 3]. *Пусть $G = PA$, где P – силовская p-подгруппа группы G и A – холлова p'-подгруппа в G. Предположим, что существует такое число p^k, что $1 < p^k < |P|$ и A перестановочна со всеми подгруппами из P порядка p^k и P является абелевой группой, если $p^k = 2$. Тогда группа G p-разрешима и ее p-длина равняется* 1.

***Следствие* 0.2** [6, теорема]. *Пусть $G = PA$, где P – силовская p-подгруппа группы G и A – холлова p'-подгруппа в G. Предположим, что существует такое число p^k, что $1 < p^k < |P|$ и A перестановочна со всеми подгруппами из P порядка p^k и P является абелевой группой, если $p^k = 2$, тогда группа G p-сверхразрешима.*

***Следствие* 0.3** [7, теорема C]. *Пусть $G = AT$, где A – холлова π-подгруппа группы G и T – нильпотентная подгруппа для некоторого простого числа $p \in \pi$. Если A перестановочна со всеми силовскими подгруппами из T и со всеми максимальными подгруппами любой силовской подгруппы из T, тогда группа G p-сверхразрешима для каждого такого простого числа $p \in \pi$, что T содержит силовскую p-подгруппу P с порядком $|P| > p$.*

***Следствие* 0.4** [8, теорема 4.6] *Пусть $G = AT$, где A – холлова π-подгруппа группы G, T – нильпотентная подгруппа и A перестановочна со всеми силовскими подгруппами из T и со всеми максимальными подгруппами любой силовской подгруппы из T, тогда группа G p-сверхразрешима для каждого такого простого числа $p \in \pi$, что T содержит силовскую p-подгруппу P с порядком $|P| > p$.*

***Следствие* 0.5** [9, теорема 1.1]. *Пусть $G = AT$, где A – холлова π-подгруппа группы G и T – p-нильпотентная подгруппа для некоторого простого числа $p \in \pi$. Пусть P – силовская p-подгруппа в T и предположим, что подгруппа A перестановочна со всеми силовскими подгруппами из T. Предположим, что существует такое число p^k, что $1 < p^k < |P|$ и A перестановочна с каждой подгруппой из P порядка p^k и с каждой циклической подгруппой из P порядка* 4 (*если $p^k = 2$ и P – неабелева подгруппа*). *Тогда группа G p-сверхразрешима.*

В качестве приложения теоремы 0.1 можно доказать следующий результат.

***Теорема* 0.2.** *Пусть $G = AT$, где A – холлова π-подгруппа группы G и T – p-сверхразрешимая подгруппа для некоторого простого числа $p \in \pi$. Предположим, что подгруппа A τ-квазинормальна в G. Если A перестановочна с каждой максимальной подгруппой некоторой силовской p-подгруппы P из T, тогда группа G p-сверхразрешима.*

Критерии p-сверхразрешимости конечной группы с заданными обобщенно перестановочными подгруппами также рассматривались в статье [10].

Определения и обозначения стандартны, их можно найти в [11]–[12].

1 Предварительные результаты

***Лемма* 1.1** [2, лемма 2.2]. *Пусть H – нормальная подгруппа группы G. Тогда фактор-группа EH / H τ-квазинормальна в G / H для любой τ-квазинормальной подгруппы E в G такой, что $(|H|, |E|) = 1$.*

***Лемма* 1.2** [9, лемма 2.1]. *Пусть N – элементарная абелева нормальная p-подгруппа группы G для некоторого простого числа p и A – холлова p'-подгруппа в G. Предположим, что существует такое число p^k, что $1 < p^k < |N|$ и A перестановочна с каждой подгруппой из N порядка p^k. Тогда некоторая максимальная подгруппа из N нормальна в G.*

***Лемма* 1.3** [9, лемма 2.4]. *Пусть $G=AP$ – p-разрешимая группа, где P – силовская p-подгруппа в G и A – холлова p'-подгруппа в G. Предположим, что существует такое число p^k, что $1 < p^k < p^{k+1} < |P|$ и A перестановочна с каждой подгруппой из P порядка p^k и с каждой циклической подгруппой из P порядка* 4 (*если $p^k = 2$ и P – неабелева подгруппа*). *Тогда $l_p(G) = 1$.*

***Лемма* 1.4** [9, лемма 2.2]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, и G – группа с разрешимым $\mathfrak{F}$-радикалом $P = G^{\mathfrak{F}}$. Предположим, что каждая максимальная подгруппа группы G, не содержащая P, принадлежит $\mathfrak{F}$. Тогда P является p-группой для некоторого простого числа p. Кроме того, если A – холлова p-подгруппа в G и A перестановочна со всеми циклическими подгруппами из P простого порядка и порядка* 4 (*если $p = 2$ и P – неабелева подгруппа*), *тогда $|P / \Phi(P)| = p$.*

***Лемма* 1.5** [9, лемма 2.3]. *Пусть V – подгруппа порядка 4 группы G и Q – холлова 2'-подгруппа в G такая, что $VQ = QV$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если $V = A{\times}B$, где $|A| = |B| = 2$ и $AQ = QA$, тогда $BQ = QB$;*

(2) *если $V = \langle x\rangle$ – циклическая группа, тогда $\langle x^2\rangle Q = Q\langle x^2\rangle$.*

2 Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 0.1. Предположим, что утверждение теоремы неверно, и пусть группа G – контрпример минимального порядка. Разобъем доказательство теоремы на несколько этапов.

(1) $O_{\pi'}(G) = 1$, *где* $\pi_1 = \pi' \setminus \{p\}$.

Предположим, что $Y = O_{\pi_1}(G) \neq 1$. Покажем, что условия теоремы выполняются для фактор-группы G / Y. Действительно, $Y \cap P = 1$ и $G / Y = (AY / Y)(T / Y)$, где $AY / Y \simeq A$ – холлова π-подгруппа группы G / Y, T / Y – p-нильпотентна и $PY / Y \simeq P$ – силовская p-подгруппа в T / Y. Ввиду леммы 1.1, подгруппа AY / Y τ-квазинормальна в фактор-группе G / Y. Пусть H^* / Y – подгруппа группы PY / Y такая, что $|H^* / Y| = p^k$. Тогда $H^* = [Y] (H^* \cap P)$, где $H^* \cap P$ – силовская p-подгруппа в H^* такая, что $|H^* \cap P| = p^k$. Согласно предположению, $A(H^* \cap P) = (H^* \cap P)A$. Следовательно, подгруппа AY / Y перестановочна с H^* / Y в группе G / Y. Если $p^k = 2$ и PY / Y – неабелева подгруппа, тогда подгруппа P неабелева, и, согласно гипотезе, подгруппа A перестановочна с каждой циклической подгруппой из P порядка 4. Следовательно, подгруппа AY / Y перестановочна с каждой циклической подгруппой фактор-группы PY / Y порядка 4. Таким образом, условия теоремы выполняются для фактор-группы G / Y. Поскольку $|G / Y| < |G|$, то фактор-группа G / Y p-сверхразрешима согласно выбору группы G. Отсюда следует, что группа G p-сверхразрешима, противоречие. Таким образом, утверждение (1) верно.

(2) *Подгруппа A перестановочна с каждой силовской q-подгруппа группы G, где* $q \in \pi'$.

Пусть Q – силовская q-подгруппа группы G для некоторого простого числа $q \in \pi'$. Если $(|A|, |Q^G|) \neq 1$, тогда по условию теоремы $AQ = QA$. Предположим, что $(|A|, |Q^G|) = 1$. Поскольку $G = AT$, то $Q^G \leq T$. Тогда подгруппа Q^G p-нильпотентна. Поскольку $O_{p'}(Q^G)$ *char* Q^G, а Q^G – нормальная подгруппа группы G, то $O_{p'}(Q^G) \leq O_{\pi_1}(G) = 1$ ввиду (1). Следовательно, $Q^G = Q$. Если $q \neq p$, то мы получаем противоречие ввиду (1). Поэтому $q = p$. Следовательно, подгруппа $Q = P$ нормальна в группе G, и значит $AQ = QA$. Таким образом, подгруппа A перестановочна с каждой силовской q-подгруппой группы G, где $q \in \pi'$.

(3) $O_{p'}(G) = 1$.

Предположим, что $V = O_{p'}(G) \neq 1$. Покажем, что условия теоремы выполняются для фактор-группы G / V. Действительно, $V \cap P = 1$ и $G / V = (AV / V)(TV / V)$, где $AV / V \simeq A / V \cap A$ – холлова π-подгруппа группы G / V, подгруппа $TV / V \simeq T / V \cap T$ p-нильпотентна и $PV / V \simeq P$ – силовская p-подгруппа в TV / V. Пусть Q / V – силовская q-подгруппа группы G / V, где $q \in \pi'$. Тогда для некоторой силовской q-подгруппы G_q группы G имеем $Q = G_qV$. Ввиду (2),

$$(AV / V)(Q / V) = (AV / V)(G_qV / V) = \\ = (Q / V)(AV / V),$$

следовательно подгруппа AV / V перестановочна с каждой силовской q-подгруппой группы G / V, где $q \in \pi'$. Таким образом, подгруппа AV / V τ-квазинормальна в G / V. Кроме того, аналогично как показано в пункте (1) получаем, что подгруппа AV / V перестановочна с каждой подгруппой группы PV / V порядка p^k и с каждой циклической подгруппой из PV / V порядка 4 (если $p^k = 2$ и подгруппа PV / V неабелева). Таким образом, условия теоремы выполняются для фактор-группы G / V. Поскольку $|G / V| < |G|$, то фактор-группа G / V p-сверхразрешима согласно выбору группы G. Это означает, что группа G p-сверхразрешима, противоречие. Следовательно, утверждение (3) верно.

(4) $T = P$.

Предположим, что $T \neq P$. Пусть S – холлова p'-подгруппа в T. Поскольку A – холлова π-подгруппа группы G, то каждая силовская подгруппа из A является силовской подгруппой в G. Тогда [13, лемма 11.6] влечет, что подгруппа A перестановочна с каждой силовской q-подгруппой группы T, где $q \in \pi$. Следовательно, ввиду (2), подгруппа A перестановочна с каждой силовской подгруппой из T, поэтому $AS = SA$. Согласно условию теоремы, подгруппа S нормальна в T. Тогда $S^G = S^{AT} = S^A \leq AS$. Это означает, что $O_{p'}(G) \neq 1$, что противоречит (3). Таким образом, утверждение (4) доказано.

(5) *Группа G не является простой группой*.

Предположим, что G – простая неабелева группа. Согласно предположению, подгруппа A перестановочна с каждой подгруппой H из P такой, что $|H| = p^k$. Поскольку ввиду (4), $G = AP$, то для произвольного элемента $x \in G$ имеем $x = ta$, где $t \in P$ и $a \in A$. Тогда $H^t \leq P$. Следовательно, $AH^t = H^{\,t}A$, поэтому $(AH^t)^a = AH^x$ – подгруппа группы G. Поскольку p не принадлежит π, то $H \cap A = 1$. Таким образом, группа G не является простой согласно [14, теорема 3]. Это противоречие завершает доказательство утверждения (5).

(6) $|P| > p^{k+1}$.

Предположим, что $|P| = p^{k+1}$. Тогда ввиду [4, теорема 5], группа G – p-разрешима. Пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда L является p-группа ввиду (3), поэтому $L \leq P$. Покажем, что фактор-группа G / L p-сверхразрешима. Действительно, если $|P / L| \leq p$, это очевидно. С другой стороны, если $|P / L| > p$, тогда условия теоремы выполняются для фактор-группы G / L. Таким образом, G / L p-сверхразрешима ввиду выбора группы G. Ясно, что $|L| > p$ и L не входит в подгруппу Фраттини $\Phi(P)$. Пусть V – максимальная подгруппа группы P такая, что L не входит в V. Тогда $AV = VA$, поэтому $D = V^G = V^{PA} = V^A \leq AV$. Теперь из того, что $P = VL$, V – максимальная подгруппа в P и $|L| \neq p$, получаем, что $V \cap L \neq 1$. Следовательно, $D \cap L$ – нетривиальная подгруппа в L и $D \cap L$ нормальна в группе G, что противоречит минимальности подгруппы L. Следовательно, утверждение (6) верно.

(7) $|N| \le p^k$ *для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G, которая содержится в P.*

Предположим, что $p^k < |N|$. Следовательно, подгруппа A перестановочна с каждой подгруппой H из N такой, что $|H| = p^k$. Тогда ввиду леммы 1.2 некоторая максимальная подгруппа из N нормальна в группе G, противоречие. Таким образом, утверждение (7) доказано.

(8) *Если N – собственная нормальная подгруппа группы G, тогда N p-разрешима.*

Ввиду (3), число p делит порядок $|N|$. Сперва предположим, что $A \le N$. Тогда ввиду (4), $|G:N| = p^a$ для некоторого числа $a \in N$. Следовательно, $N = N_pA$, где $N_p = N \cap P$ – силовская p-подгруппа из N. Пусть P_1 – максимальная подгруппа из P такая, что $N_p \le P_1$. Тогда $P_1N = P_1A$ – собственная подгруппа группы G. Ввиду (6) условия теоремы справедливы для подгруппы P_1A. Поскольку $|P_1A| < |G|$, то группа P_1A p-сверхразрешима согласно выбору группы G. Отсюда следует, что подгруппа N p-разрешима. Предположим теперь, что подгруппа A не входит в N. Очевидно, что $N = (A \cap N)(P \cap N)$. Пусть $E = (A \cap N)P$ и пусть H – подгруппа из P такая, что $AH = HA$. Тогда

$$AH \cap (A \cap N)P = (A \cap (A \cap N)P)H = \\ = (A \cap N)(A \cap P)H = (A \cap N)H = H(A \cap N).$$

Это показывает, что условия теоремы выполняются для подгруппы E. Если $E = G$, тогда $A = A \cap (A \cap N)P = (A \cap N)(A \cap P) = A \cap N$, противоречие. Следовательно, подгруппа E p-сверхразрешима согласно выбору группы G. Отсюда следует, что подгруппа $N \le E$ p-разрешима.

(9) $k > 1$.

Предположим, что $k = 1$. Ввиду(5), G не является простой группой. Пусть $L = (A \cap L)(P \cap L)$ – максимальная нормальная подгруппа группы G. Ввиду (8), подгруппа L p-разрешима и согласно (3), $Lp = P \cap L \ne 1$. Кроме того, поскольку ввиду (3), $O_{p'}(G) = 1$, $O_{p'}(L)$ *char* L и L – нормальная подгруппа в G, то $O_{p'}(L) = 1$. Если подгруппа L_p циклическая или $|L_p| = p^2$, тогда $l_p(L) = 1$ согласно [15, VI, Hilfssatz 6.10]. В противном случае, поскольку $k = 1$, условия теоремы справедливы для подгруппы L, поэтому снова $l_p(L) = 1$ согласно лемме 1.3. Поскольку $O_{p'}(L) = 1$, то подгруппа L_p нормальна в L. Более того, поскольку L_p – силовская подгруппа в L, а сама подгруппа L нормальна в группе G, то подгруппа L_p нормальна в G.

Предположим теперь, что $p = 2$. Тогда ввиду (6), $2^3 \le |P|$. Поскольку подгруппа L не является 2-нильпотентной группой, она является 2-замкнутой подгруппой Шмидта [15, IV, Satz 5.4] вида $K = [K_2]\, K_q$, где $K_2 \le L_p$. Для некоторого элемента $x \in G$ имеем $K_q^x \le A$ и $K^x = [K_2]^x K_q^x$. Поскольку подгруппа L_p нормальна в группе G, то $K_2^x \le L_p \le P$. Пусть V – циклическая подгруппа в K_2^x порядка 2 или порядка 4 (если K_2^x – неабелева группа). Тогда $VA=AV$ согласно условию теоремы, поэтому

$$VA \cap K_2^x K_q^x = (VA \cap K_2^x) K_q^x = \\ =(V(A \cap K_2^x))K_q^x = VK_q^x = K_q^x V.$$

Таким образом, подгруппа K_q^x перестановочна с каждой циклической подгруппой из K_2^x порядка 2 и порядка 4 (если K_2^x – неабелева группа). Из леммы 1.4 следует, что $|K_2^x / \Phi(K_2^x)| = 2$. Следовательно, $|K_2| = 2$. Значит, подгруппа K нильпотентна, что противоречит выбору K.

Таким образом, $p > 2$. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в L_p и $C = C_G(N)$. Тогда $|N| = p$ ввиду (7). Следовательно, $N \le Z(P)$. Предположим, что $C = G$. Пусть $a \in A$, $z \in N$ и $X = \langle x \rangle$ – произвольная подгруппа из L_p такая, что $|X| = p$. Тогда $z^a = z$ и поскольку $X = L_p \cap AX$ нормальна в AX, то $x^a = x^n$ для некоторого числа $n \in N$. Поскольку $z \in Z(P)$, то $|xz| = p$. Следовательно,

$$\langle xz \rangle = \{x^i z^i \mid i = 1,...,p\}$$

и $(xz)^a = x^a z^a = x^n z \in \langle xz \rangle$, откуда $n = 1$. Таким образом, $A / C_A(L_p)$ действует тривиально на $\Omega_1(L_p)$. Следовательно, $A / C_A(L_p) = 1$ ввиду [16, 5, теорема 3.10], поэтому

$$A \cap L \le A = C_A(L_p) \le C_G(L_p).$$

Следовательно, $L = L_p(A \cap L)$ – нормальная p-нильпотентная подгруппа группы G, противоречие. Таким образом, $C \ne G$. Ввиду (8), подгруппа C p-разрешима. Поскольку $|N| = p$, то фактор-группа G / C циклическая и мы заключаем, что группа G p-разрешима. Тогда согласно лемме 1.3 и ввиду (3) и (6), подгруппа P нормальна в группе G. Пусть $R = G^{\mathfrak{F}}$, где $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация всех p-сверхразрешимых групп и $\Phi = \Phi(R)$. Очевидно, что $R \le P$. Тогда условия теоремы справедливы для каждой максимальной подгруппы M группы G, не содержащей R. Следовательно, подгруппа M p-сверхразрешима согласно выбору группы G, поэтому $|R / \Phi| = p$ ввиду леммы 1.4. Тогда [17, лемма 2.16] влечет, что $G / \Phi \in \mathfrak{F}$. Но тогда $R \le \Phi$, следовательно, $R = \Phi$, противоречие. Таким образом, $k > 1$.

(10) *Если P – неабелева 2-группа, тогда $k > 2$.*

Предположим, что $k = 2$. Поскольку подгруппа P неабелева, то она содержит такую циклическую подгруппу $H = \langle x \rangle$, что $|H| = 4$. Согласно предположению, подгруппа A перестановочна с H. Тогда A перестановочна и с подгруппой $\langle x^2 \rangle$ ввиду леммы 1.5 (2). Покажем теперь, что если группа G содержит такую подгруппу $V = B \times C$ порядка 4, что $|B| = 2$ и подгруппа A перестановочна с B, тогда A перестановочна с подгруппами V и C. Действительно, поскольку $|V| = 4$, то подгруппа A перестановочна с V. Следовательно, A перестановочна с подгруппой C

ввиду леммы 1.5 (1). Таким образом, подгруппа A перестановочна с некоторой подгруппой Z из центра $Z(P)$ порядка $|Z| = 2$, поэтому A перестановочна с каждой подгруппой из P порядка 2 согласно лемме 1.5 (1), что противоречит (9).

(11) *Если N – минимальная нормальная подгруппа группы G, которая содержится в P, тогда условия теоремы справедливы для фактор-группы G / N.*

Ввиду (6), $|P| > p^{k+1}$. Кроме того, если либо $p > 2$ и $|N| < p^k$ или $p = 2$ и $|N| < 2^{k-1}$, то условия теоремы справедливы для фактор-группы G / N. Пусть либо $p > 2$ и $|N| = p^k$, либо $p = 2$ и $|N| \in \{2^k, 2^{k-1}\}$. Согласно (9), $k > 1$. Предположим, что $|N| = p^k$. Тогда подгруппа N не является циклической и, следовательно, каждая подгруппа группы G, которая содержит N, также не является циклической. Пусть $N \le K \le P$, где $|K:N| = p$. Поскольку подгруппа K не является циклической, то она содержит максимальную подгруппу $F \ne N$. Тогда подгруппа A перестановочна с $K = FN$, поскольку подгруппа K является произведением двух подгрупп, перестановочных с A. Таким образом, если $p > 2$ или подгруппа P / N абелева, то условия теоремы справедливы для фактор-группы G / N. Предположим теперь, что P / N – неабелева 2-группа. Тогда подгруппа P неабелева, поэтому $k > 2$ ввиду (10). Пусть $N \le K \le V$, где $|V:N| = 4$ и $|V:K| = 2$. Пусть K_1 – максимальная подгруппа из V такая, что $V = K_1K$. Предположим, что подгруппа K_1 циклическая. Тогда K_1 не содержит подгруппу N, поэтому $V = K_1N$, откуда получаем $|N| = 4$ или $|N| = 2$. Но тогда $k = 2$ или $k = 1$, противоречие. Следовательно, подгруппа K_1 не является циклической. Поэтому как показано выше подгруппа A перестановочна с K_1 и, следовательно, A перестановочна с V. Таким образом, снова получаем, что условия теоремы справедливы для фактор-группы G / N. Предположим теперь, что $|N| = p^{k-1}$. Если $|N| > 2$, тогда, как показано выше подгруппа AN / N перестановочна с каждой циклической подгруппой из P / N порядка 2 и порядка 4 (если подгруппа P / N неабелева). Предположим наконец, что $|N| = 2$ и подгруппа P / N неабелева. Тогда подгруппа P неабелева и $k = 2$, что противоречит (10). Следовательно, утверждение (11) доказано.

Заключительное противоречие.

Согласно (3), (6) и лемме 1.3, $P = O_p(G)$. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G, которая содержится в подгруппе P. Тогда ввиду (7), $N < P$. Поскольку класс всех p-сверхразрешимых групп является насыщенной формацией, то, ввиду (11), подгруппа N не содержится в $\Phi(G)$ и N является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G. Пусть M – максимальная подгруппа группы G такая, что $G = [N] M$. Тогда

$$P = P \cap NM = N (P \cap M).$$

Поскольку $P = F(G) \le C_G(N)$, получаем, что подгруппа $P \cap M$ нормальна в G, поэтому $P \cap M = 1$. Следовательно, $N = O_p(G) = P$. Это противоречие завершает доказательство теоремы.

Используем теорему 0.1 для доказательства теоремы 0.2.

Доказательство теоремы 0.2. Предположим, что утверждение теоремы неверно, и пусть группа G – контрпример минимального порядка. Разобъем доказательство теоремы на несколько этапов.

(1) *$O_{\pi_1}(G)$=1, где $\pi_1 = \pi' / \{p\}$ (аналогично доказательству утверждения* (1) *в теореме* 0.1).

(2) $O_p(G) = 1$.

Предположим, что $O_p(G) \ne 1$. Пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы G, которая содержится в $O_p(G)$. Тогда $L \le P$. Покажем, что фактор-группа G / L p-сверхразрешима. Действительно, если $|P / L| \le p$, то это очевидно. С другой стороны, если $|P / L| > p$, тогда условия теоремы справедливы для фактор-группы G / L ввиду леммы 1.1. Таким образом, G / L p-сверхразрешима согласно выбору группы G. Очевидно, что $|L| > p$ и подгруппа L не содержится в $\Phi(T)$. Пусть V – максимальная подгруппа из T такая, что $T = LV$. Поскольку подгруппа T p-сверхразрешима, то $|T:V| = p$ согласно [15, VI, Satz 9.2(a)]. Тогда $L \cap V \ne 1$ и подгруппа $L \cap V$ нормальна в T. Пусть $V_p = V \cap P$. Тогда подгруппа V_p максимальна в P. Согласно условию теоремы, $AV_p = V_pA$, поэтому $L \cap V = L \cap V_p = L \cap AV_p$ нормальна в AV_p. Следовательно, $A \le N_G(L \cap V)$. Отсюда следует, что $L \cap V$ – нетривиальная подгруппа в L и $L \cap V$ нормальна в группе G, что противоречит минимальному выбору подгруппы L. Следовательно, утверждение (2) доказано.

(3) *Подгруппа A перестановочна с каждой силовской q-подгруппой группы G, где $q \in \pi'$.*

Пусть Q – силовская q-подгруппа группы G для некоторого простого числа $q \in \pi'$. Если $(|A|, |Q^G|) \ne 1$, тогда $AQ = QA$ согласно условию теоремы. Предположим, что $(|A|, |Q^G|) = 1$. Поскольку $G = AT$, то $Q^G \le T$. Тогда подгруппа Q^G p-сверхразрешима. Следовательно, либо $O_p(Q^G) \ne 1$, либо $O_{p'}(Q^G) = O_{\pi_1}(Q^G) \ne 1$. Поскольку $O_p(Q^G)$ и $O_{p'}(Q^G)$ – характеристические подгруппы в Q^G, то мы получаем противоречие ввиду (1) или (2). Таким образом, утверждение (3) доказано.

(4) $O_{p'}(G) = 1$ (*аналогично доказательству утверждения* (3) *в теореме* 0.1).

Заключительное противоречие.

Поскольку $p \in \pi'$, то $AP = PA$ согласно (3). Тогда ввиду теоремы 0.1 имеем $G \ne AP$ и подгруппа AP p-сверхразрешима. Предположим теперь, что $O_{p'}(T) \ne 1$. Пусть Q – силовская q-подгруппа из T такая, что $q \ne p$ и $Y = O_q(T) \ne 1$. Если $q \in \pi$, тогда [13, лемма 11.6] влечет, что подгруппа A перестановочна с Q. В противном случае, $AQ = QA$ согласно (3). Следовательно,

$Y^G = Y^{AT} = Y^A \le AQ$. Это означает, что $O_{p'}(G) \neq 1$, что противоречит (4). Таким образом, $O_{p'}(T) = 1$ и ввиду [18, лемма 3.3], подгруппа T сверхразрешима. Следовательно, p – наибольший простой делитель порядка $|T|$, поэтому подгруппа P нормальна в T. Таким образом, $P^G = P^{AT} = P^A \le AP$, поэтому подгруппа P^G p-сверхразрешима. Поскольку ввиду (4), $O_{p'}(G) = 1$, $O_{p'}(P^G)$ *char* P^G и подгруппа P^G нормальна в группе G, то $O_{p'}(P^G) = 1$. Тогда ввиду [7, лемма 3.3], подгруппа P^G сверхразрешима. Таким образом, подгруппа P нормальна в группе G, что противоречит (2). Это противоречие завершает доказательство теоремы.

Как следствие теоремы 0.2 мы имеем следующий результат.

***Следствие* 2.1** [9, теорема 1.2]. *Пусть $G = AT$, где A – холлова π-подгруппа группы G и T – p-сверхразрешимая подгруппа для некоторого простого числа $p \in \pi$. Предположим, что подгруппа A перестановочна с каждой силовской подгруппой из T и с каждой максимальной подгруппой некоторой силовской p-подгруппы P из T. Тогда группа G p-сверхразрешима.*

Доказательство. Пусть G_q – произвольная силовская q-подгруппа группы G для некоторого простого числа $q \in \pi'$. Тогда для некоторой силовской q-подгруппы Q из T имеем $G_q = Q^x$, где $x \in G$. Поскольку $G = TA$, то $x = ta$, где $t \in T$ и $a \in A$. Следовательно, $Q^x = Q^{ta} = (Q^t)^a$, поэтому $AG_q = AQ^x = A(Q^t)^a = (AQ^t)^a = (Q^tA)^a = Q^xA = G_qA$. Таким образом, подгруппа A перестановочна с каждой силовской q-подгруппой группы G, где $q \in \pi'$. Следовательно, A τ-квазинормальна в G, поэтому группа G p-сверхразрешима согласно теореме 0.2. Следствие доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kegel*, *O.H.* Sylow-Gruppen and Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1962. – Vol. 78. – P. 205–221.

2. *Lukyanenko*, *V.O.* On weakly τ-quasinormal subgroups of finite groups / V.O. Lukyanenko, A.N. Skiba // Acta Math. Hungar. – 2009. – Vol. 125, № 3. – P. 237–248.

3. *Hall*, *P.* A characteristic property of soluble groups / P. Hall // J. London Math. Soc. – 1937. – Vol. 12, № 2. – P. 188–200.

4. *Huppert*, *B.* Zur Sylow struktur auflosbarer Gruppen / B. Huppert // Arch. Math. – 1961. – Vol. 12. – P. 161–169.

5. *Sergienko*, *V.I.* A criterion for the p-solubility of finite groups / V.I. Sergienko // Math. Notes. – 1971. – Vol. 9. – P. 216–220.

6. *Боровиков*, *М.Т.* Группы с перестановочными подгруппами взаимно простого порядка / М.Т. Боровиков // Вопросы алгебры. – 1990. – № 5. – С. 80–82.

7. *Guo*, *W.* Criteria of existence of Hall subgroups in non-soluble finite groups / W. Guo, A.N. Skiba // Acta Math. Sinica, English Series. – 2010. – Vol. 26, № 2. – P. 295–304.

8. *Guo*, *W.* Finite groups with some given systems of X_m-semipermutable subgroups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Math. Nahcr. – 2010. – Vol. 283, № 11. – P. 1603–1612.

9. *Lukyanenko*, *V.O.* A criterion for the p-supersolubility of finite groups / V.O. Lukyanenko, A.N. Skiba // J. Algebra Appl. – 2010. – Vol. 9, № 1. – P. 17–26.

10. *Сяолан*, *И.* О некоторых обобщениях перестановочности и S-перестановочности / И Сяолан, А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 4 (17). – С. 47–54.

11. *Doerk*, *K.* Finite Soluble Grooups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992.

12. *Ballester-Bolinches*, *A.* Classes of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer, 2006.

13. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М : Наука, 1978.

14. *Kegel*, *O.H.* Produkte nilpotenter Gruppen / O.H. Kegel // Arch. Math. –1961. – Vol. 12. – P. 90–93.

15. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1967.

16. *Gorenstein*, *D.* Finite Groups / D. Gorenstein. – New York, Evanston, London: Harper & Row Publishers, 1968.

17. *Skiba*, *A.N.* On weakly S-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 192–209.

18. *Guo*, *W.* G-covering subgroup systems for the classes of p-supersoluble and p-nilpotent groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Siberian Math. J. – 2004. – Vol. 45, № 3. – P. 75–92.

Поступила в редакцию 15.05.15.

Проблемы физики, математики и техники, № 2 (23), 2015

МАТЕМАТИКА

УДК 517.925

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

В.И. Мироненко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

ON PERIODIC SOLUTIONS OF RICCATI EQUATIONS

V.I. Mironenko

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

На примере уравнения Риккати описан метод построения дифференциальных уравнений с заданным частным решением, эквивалентных заданному уравнению в смысле совпадения отражающих функций.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение, отражающая функция, периодическое решение.*

On the example of the Riccati equation the method of construction of differential equations with a given partial solution and the same reflecting function as the given equation is described.

Keywords: *differential equation, reflecting function, periodic solution.*

Введение

В работе [1] для дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x), \tag{0.1}$$

где $t \in R,\ x \in R^n$, с общим решением в форме Коши $x = \varphi(t;t_0,x_0)$, было введено понятие отражающей функции $F(t,x)$. Отражающая функция определяется формулой

$$F(t,x) := \varphi(-t;t,x).$$

Основное свойство отражающей функции состоит в том, что для любого решения $x(t)$ системы (0.1) верно тождество $F(t,x(t)) \equiv x(-t)$. Благодаря этому для 2ω-периодической по t системы (0.1) отображение Пуанкаре $\Pi(x)$ за период $[-\omega,\omega]$ задается формулой $\Pi(x) \equiv F(-\omega,x)$. Поэтому решение $\varphi(t;\omega,x_0)$ системы (0.1) будет 2ω-периодическим тогда и только тогда, когда оно продолжимо на $[-\omega,\omega]$ и $F(-\omega,x_0) = x_0$.

Отображение Пуанкаре для системы (0.1) определяется [2, с. 280] через общее решение этой системы. Поэтому создается впечатление, что формулу для вычисления отображения Пуанкаре в явном виде можно получить только тогда, когда система (0.1) интегрируется хотя бы в квадратурах. Это мнение ошибочно, так как отображение Пуанкаре можно найти через отражающую функцию по формуле

$$\Pi(x) = F(-\omega,x),$$

а для отражающей функции верно

***Утверждение* 0.1** [3, 4]. *Дифференцируемая функция $F(t,x)$ является отражающей функцией системы (0.1) тогда и только тогда, когда эта функция является решением задачи Коши*

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}X(t,x) + X(-t,F) = 0,$$

$$F(0,x) \equiv x. \tag{0.2}$$

Решение задачи (0.2) иногда удается найти даже тогда, когда система (0.1) не может быть проинтегрирована в квадратурах. Такой случай, например, представляется тогда, когда $X(t,x)$ нечетна по t, т. е. когда $X(-t,x) + X(t,x) \equiv 0$.

В этом случае функция $F(t,x) \equiv x$ является решением задачи (0.2) и, значит, отражающей функцией системы (0.1). Другие случаи нахождения отражающей функции читатель найдет в [3], [4], а также в работах Альсевич Л.А., Бельского В.А. [5], Варениковой Е.В. [6], Вересовича П.П., Кастрицы О.А., Майоровской С.В., Мироненко В.В., Zhou Zhengxin и других.

Все системы вида (0.1), обладающие одной и той же отражающей функцией, образуют класс эквивалентности, который весь описывается системами вида

$$\frac{dx}{dt} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial t} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{-1} R(t,x) - R(-t,F),$$

где $R(t,x)$ есть любая непрерывно дифференцируемая вектор-функция $F^T = (F_1,\ldots,F_n)^T$ (здесь T есть знак транспонирования).

Важные применения находит

***Утверждение* 0.2** [3, 4]. *Пусть* $\Delta_i(t,x)$, $i = 1,2,3,\ldots,$ *– решения системы*

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} + \frac{\partial \Delta}{\partial x}X(t,x) - \frac{\partial X(t,x)}{\partial x}\Delta(t,x) = 0. \tag{0.3}$$

Тогда все системы вида

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x) + \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_k(t)\Delta_k(t,x),$$

где $\alpha_k(t)$ *– нечетные непрерывные скалярные функции, эквивалентны между собой и эквивалентны системе* (0.1).

В данной работе это утверждение применяется к изучению уравнения Риккати

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t), \tag{0.4}$$

что следует рассматривать как пример использования утверждения 0.2 к уравнениям и системам (0.1) с полиномиальной относительно координат фазового вектора правой частью.

1 О поиске периодических решений уравнения Риккати

Отметим, что заменой в уравнении (0.4) переменной x на $(x + x_0)$, где x_0 есть корень уравнения

$$a(0)x^2 + b(0)x + c(0) = 0,$$

мы всегда добьёмся того, чтобы для уравнения (0.4) выполнялось условие $c(0) = 0$. Поэтому далее будем считать, что это условие всюду выполняется.

***Теорема* 1.1**. *Пусть для уравнения* (0.4) *функции* $m_0(t)$, $m_1(t)$ *и* $m_2(t)$ *являются решениями системы*

$$\begin{gathered} \dot m_0 + m_1 c - b m_0 = 0, \\ \dot m_1 + 2m_2 c - 2a m_0 = 0, \\ \dot m_2 + m_2 b - a m_1 = 0. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Тогда для них выполнено соотношение

$$m_1^2 - 4m_0 m_2 = const, \tag{1.6}$$

и для любой нечетной непрерывной функции $\alpha(t)$ *уравнение*

$$\dot x = (a + \alpha m_2)x^2 + (b + \alpha m_1)x + (c + \alpha m_0) \tag{1.7}$$

эквивалентно уравнению (0.4) *в смысле совпадения отражающих функций.*

Доказательство. Подстановкой

$$\Delta := m_2 x^2 + m_1 x + m_0$$

в уравнение (0.3), где $X(t, x)$ есть правая часть уравнения (0.4), убеждаемся в том, что функция Δ является решением уравнения (0.4).

Дифференцируя выражение $m_1^2 - 4m_1 m_2$ и используя равенства (1.5), убеждаемся в том, что соотношение (1.6) задает первый интеграл системы (1.5). Этот факт и завершает доказательство теоремы.

В том случае, когда $c + \alpha m_0 \equiv 0$, уравнение (1.7) имеет нулевое решение $x(t) \equiv 0$. Поэтому если решение $x(t; -\omega, 0)$ 2ω-периодического уравнения (0.4) продолжимо на $[-\omega; \omega]$, то оно 2ω-периодично. Следующая теорема указывает условия, при которых описанная ситуация возможна.

***Теорема* 1.2.** *Пусть для* 2ω*-периодического по* t *уравнения* (0.4) *существует нечетная функция* $\alpha = \alpha(t)$, *при которой функции*

$$m_0 := \frac{c}{\alpha}, \quad m_1 := \frac{b m_0 - \dot m_0}{c}$$

доопределяются до непрерывно дифференцируемых на R *функций, а* $k := m_1^2 + \dfrac{2\dot m_1 - 4a m_0}{\alpha}$ *не зависит от* t.

Тогда решение $x = \varphi(t; \omega, 0)$ *уравнения* (0.4) 2ω*-периодично, если только оно продолжимо на отрезок* $[-\omega, \omega]$.

Доказательство теоремы состоит в проверке того факта, что при заданных условиях функции

$$m_0 := \frac{c}{\alpha},$$

$$m_1 := \frac{b m_0 - \dot m_0}{c};$$

$$m_2 := \frac{m_1^2 - k}{4m_0}$$

образуют решение системы (1.5). Поэтому уравнение (0.4) эквивалентно уравнению Бернулли

$$\dot x = (a - \alpha m_2)x^2 + (b - \alpha m_1)x$$

с нулевым решением. Этому нулевому решению и соответствует 2ω-периодическое решение $x = \varphi(t; \omega, 0)$ уравнения (0.4).

2 Построение уравнений Риккати, к которым целесообразно применять разработанную методику

Для построения конкретных примеров уравнений (0.4), удовлетворяющих условиям теоремы, можно поступить следующим образом:

1. Выбираем нечетную непрерывную функцию $\alpha(t)$ и дифференцируемые функции $m_1(t)$ и $b(t)$ произвольным образом.

2. Функцию $m_0(t)$ строим по формуле

$$m_0(t) := c_0 \exp \int_0^t (b(\tau) - \alpha(\tau) m_1(\tau)) d\tau,$$

где c_0 – произвольная постоянная.

3. Строим функцию

$$m_2(t) := \frac{m_1^2 - k}{4m_0},$$

где k – произвольная постоянная.

4. Строим функции $c(t) := \alpha(t) m_0(t)$ и $a(t) := \dfrac{\dot m_1 + 2m_2 c}{2m_0}$.

5. Записываем нужное нам уравнение (0.4).

Заключение

Данная работа предлагает метод, позволяющий в определенных случаях находить начальные данные периодических решений дифференциальных уравнений полиномиального типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мироненко*, *В.И.* Отражающая функция и классификация периодических дифференциальных систем / В.И. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 1984. – Т. XX, № 9. – С. 1635–1638.

2. *Хенри*, *Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. – М.: 1985. – 376 с.

3. *Мироненко*, *В.И.* Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И. Мироненко. – Минск: изд-во «Университетское», 1986. – 76 с.

4. *Мироненко*, *В.И.* Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем: Монография / В.И. Мироненко. – Мин. образов. РБ, УО «ГГУ им. Ф. Скорины». – Гомель, 2004. – 196 с.

5. *Бельский*, *В.А*. О построении уравнений Абеля, эквивалентных уравнению вида $\dot{x} = A(t)(\xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \xi_3 x^3)$ В.А. Бельский, В.И. Мироненко // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 2 (11). – С. 55–61.

6. *Варенникова*, *Е.В*. О решениях двухточечной краевой задачи для одной неавтономной дифференциальной системы с квадратичной по фазовым переменным правой частью / Е.В. Варенникова // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 1 (18). – С. 39–42.

Поступила в редакцию 18.12.14.

Проблемы физики, математики и техники, № 2 (23), 2015

МАТЕМАТИКА

УДК 517.936

ОБ ИНТЕГРАЛАХ ЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ

А.Ф. Проневич, П.Б. Павлючик

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

ABOUT INTEGRALS OF LINEAR NONAUTONOMOUS MULTIDIMENSIONAL DIFFERENTIAL SYSTEMS WHICH ARE INTEGRATED IN CLOSED FORM

A.F. Pranevich, P.B. Pauliuchyk

Y. Kupala Grodno State University, Grodno, Belarus

Рассмотрены три класса вполне разрешимых линейных неавтономных многомерных дифференциалных систем (треугольные, диагонализуемые и системы Лаппо-Данилевского) в комплексной области. Разработаны регулярные методы построения в явном виде первых интегралов этих дифференциальных систем. Приведены примеры, которые иллюстрируют полученные результаты.

Ключевые слова*: система уравнений в полных дифференциалах, первый интеграл.*

Three classes of completely solvable linear nonautonomous multidimensional differential systems (diagonalizable systems, triangular systems, the Lappo-Danilevsky systems) are considered. The regular methods of building first integrals for these differential systems are developed. In addition, some examples are given to illustrate the obtained results.

Keywords*: system of total differential equations, first integral.*

Введение

Рассмотрим линейную неавтономную систему уравнений в полных дифференциалах

$$dw = \sum_{j=1}^{m} (U_j(z)w + g_j(z))dz_j, \qquad (0.1)$$

где точки w и z из пространств $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^m$ соответственно, вектор $dw = \operatorname{colon}(dw_1, \ldots, dw_n)$, а элементы квадратных матриц

$$U_j z \to U_j(z) \quad \forall z \in G$$

порядка n и векторных функций $g_j G \to \mathbb{C}^n$, $j = \overline{1,m}$, голоморфны на односвязной области $G \subset \mathbb{C}^m$.

Неоднородной системе (0.1) соответствуют линейные дифференциальные операторы

$$\mathfrak{W}_j(z,w) = \partial_{z_j} + (U_j(z)w + g_j(z))\partial_w$$

$$\forall (z,w) \in G \times \mathbb{C}^n, \quad j = \overline{1,m},$$

и линейная однородная система уравнений в полных дифференциалах

$$dw = \sum_{j=1}^{m} U_j(z)\, w dz_j \qquad (0.2)$$

с дифференциальными операторами

$$\mathfrak{V}_j(z,w) = \partial_{z_j} + U_j(z)\, w\partial_w$$

$$\forall (z,w) \in G \times \mathbb{C}^n, \ j = \overline{1,m}.$$

В настоящей статье дано решение задачи Дарбу о построении первых интегралов [1] для трех классов линейных систем уравнений в полных дифференциалах вида (0.1): треугольных, диагонализуемых и систем Лаппо-Данилевского. Задача решается при условии, что система (0.1) является вполне разрешимой на области $G \times \mathbb{C}^n$, т. е. для системы (0.1) выполняются условия Фробениуса [2, с. 41; 3, с. 43–44]

$$\begin{aligned} &\partial_{z_j} U_\xi(z) + U_\xi(z)\, U_j(z) = \\ &= \partial_{z_\xi} U_j(z) + U_j(z)\, U_\xi(z) \quad \forall z \in G, \end{aligned} \qquad (0.3)$$

$$\begin{aligned} &\partial_{z_j} g_\xi(z) + U_\xi(z)\, g_j(z) = \\ &= \partial_{z_\xi} g_j(z) + U_j(z)\, g_\xi(z) \\ &\forall z \in G, \quad j = \overline{1,m}, \xi = \overline{1,m}. \end{aligned}$$

Работа является продолжением исследований авторов статьи по построению интегральных базисов линейных дифференциальных систем [4]–[9]. Подробный обзор литературы и современное состояние теории интегралов приведены в монографиях В.В. Козлова [10], В.Н. Горбузова [11] и A. Goriely [12]. С целью однозначного толкования используемых в статье понятий, следуя в основном монографии [11], сформулируем основные определения и положения теории интегралов многомерных дифференциальных систем.

Голоморфную функцию $W\Lambda \to \mathbb{C}$ назовем *первым интегралом* на области $\Lambda \subset G \times \mathbb{C}^n$ системы уравнений в полных дифференциалах (0.1), если

$$\mathfrak{W}_j W(z,w) = 0 \ \ \forall (z,w) \in \Lambda, \ \ j = \overline{1,m}.$$

Совокупность функционально независимых на области $\Lambda \subset G \times \mathbb{C}^n$ первых интегралов $W_l : \Lambda \to \mathbb{C}, l = 1,...,k,$ системы (0.1) назовем *базисом первых интегралов* на области Λ системы (0.1), если у этой системы любой первый интеграл $\Psi : \Lambda \to \mathbb{C}$ можно представить в виде

$$\Psi(z,w) = \Phi(W_1(z,w),...,W_k(z,w)) \ \ \forall (z,w) \in \Lambda,$$

где Φ – некоторая голоморфная функция на множестве значений функции

$$W : (z,w) \to (W_1(z,w),...,W_k(z,w)) \ \ \forall (z,w) \in \Lambda.$$

Число k при этом назовем *размерностью* базиса первых интегралов системы (0.1).

Интегральный базис вполне разрешимой на области $G \times \mathbb{C}^n$ системы (0.1) состоит из n функционально независимых первых интегралов [11, с. 28–34]. В случае неполной разрешимости системы (0.1) с дефектом r, $0 < r \le n$, ее базис первых интегралов в окрестности любой точки из области разрешимости имеет размерность $n - r$ [11, с. 53–59].

1 Треугольные системы

Пусть у системы уравнений в полных дифференциалах (0.1) матрицы коэффициентов U_j, $j = \overline{1,m}$, являются верхними треугольными, т. е. система имеет вид

$$dw_i = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{\xi=i}^{n} u_{i\xi}^j(z) w_\xi + g_{ji}(z) \right) dz_j, \ i = \overline{1,n}, \quad (1.1)$$

где голоморфные функции $u_{i\xi}^j G \to \mathbb{C}$ и $g_{ji} G \to \mathbb{C}$ такие, что на односвязной области G выполняются условия Фробениуса полной разрешимости (0.3).

Согласно [13, с. 103], любая линейная вполне разрешимая система уравнений в полных дифференциалах (0.1) с помощью унитарного преобразования может быть приведена к линейной треугольной дифференциальной системе вида (1.1).

При построении интегрального базиса треугольной системы (1.1) используется

***Теорема* 1.1.** *Первыми интегралами линейной треугольной вполне разрешимой системы в полных дифференциалах* (1.1) *на области* $G \times \mathbb{C}^n$ *будут функции*

$$W_\tau : (z,w) \to w_{n+1-\tau} \varphi_{n+1-\tau}(z) - \sum_{\xi=1}^{\tau-1} A_{\tau\xi}(z) W_\xi(z,w) - B_\tau(z), \ \ \tau = \overline{1,n}, \quad (1.2)$$

где скалярные функции

$$A_{\tau\xi} : z \to \int \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{\tau-\xi} u^j_{n+1-\tau,n+1-\tau+k}(z) \psi_{n+1-\tau+k}(z) A_{\tau-k,\xi}(z) \right) \times \varphi_{n+1-\tau}(z) dz_j,$$

$$\xi = \overline{1,\tau-1}, \ \tau = \overline{1,n},$$

$$A_{\zeta\zeta} : z \to 1, \ \zeta = \overline{1,n-1},$$

$$A_{10} : z \to 0 \ \forall z \in G,$$

$$B_\tau : z \to \int \sum_{j=1}^{m} \left(g_{j,n+1-\tau}(z) + \sum_{\xi=1}^{\tau-1} u^j_{n+1-\tau,n+1-\tau+\xi}(z) \psi_{n+1-\tau+\xi}(z) B_{\tau-\xi}(z) \right) \times \varphi_{n+1-\tau}(z) dz_j,$$

$$\varphi_\tau : z \to \exp\left(-\int \sum_{j=1}^{m} u^j_{\tau\tau}(z) dz_j \right),$$

$$\psi_\tau : z \to \exp \int \sum_{j=1}^{m} u^j_{\tau\tau}(z) dz_j \ \ \forall z \in G, \tau = \overline{1,n}.$$

Доказательство проведем методом математической индукции. При $\tau = 1$ получаем, что

$$W_1 : (z,w) \to w_n \varphi_n(z) - B_1(z) \quad \forall (t,x) \in G \times \mathbb{C}^n$$

будет первым интегралом вполне разрешимой треугольной системы (1.1):

$$\mathfrak{W}_j W_1(z,w) = -u^j_{nn}(z) \varphi_n(z) w_n + (u^j_{nn}(z) w_n + g_{jn}(z)) \varphi_n(z) - \partial_{z_j} \int \sum_{j=1}^{m} g_{jn}(z) \phi_n(z) dz_j = 0.$$

Пусть функции $W_\tau, \tau = \overline{1,\varepsilon-1}$, являются первыми интегралами системы (1.1). Тогда производные Ли в силу системы (1.1) функции W_ε на области $G \times \mathbb{C}^n$ равны:

$$\mathfrak{B}_j W_\varepsilon(z,w) = \sum_{\xi=1}^{\varepsilon-1} u^j_{n+1-\varepsilon,n+1-\varepsilon+\xi}(z) \psi_{n+1-\varepsilon+\xi}(z) \times \left(w_{n+1-\varepsilon+\xi} \varphi_{n+1-\varepsilon-\xi}(z) - \sum_{k=1}^{\varepsilon-\xi-1} A_{\varepsilon-\xi,k}(z) W_k(z,w) - B_{\varepsilon-\xi}(z) - A_{\varepsilon-\xi,\varepsilon-\xi}(z) W_{\varepsilon-\xi}(z,w) \right) \varphi_{n+1-\varepsilon}(z) = 0, j = \overline{1,m}.$$

Следовательно, функция $W_\varepsilon : G \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ будет первым интегралом системы (1.1).

Учитывая способ построения функций (1.2), получаем, что они будут функционально независимыми первыми интегралами вполне разрешимой системы (1.1). Теорема доказана.

***Замечание* 1.1.** При доказательстве теоремы 1.1 было учтено, что дифференциальные 1-формы, стоящие под знаком криволинейного интеграла в функциях $A_{\tau\xi}, B_\tau$ и φ_τ, при выполнении условий (0.3) являются точными на односвязной области G.

***Пример* 1.1.** Линейную систему в полных дифференциалах (0.2) с матрицами

$$U_j : z \to \begin{Vmatrix} u_{11}^j(z) & \frac{\sqrt{2}}{2}(u_{12}^j(z) - u_{13}^j(z)) & \frac{\sqrt{2}}{2}(u_{12}^j(z) + u_{13}^j(z)) \\ 0 & \frac{1}{2}(u_{22}^j(z) + u_{33}^j(z) - u_{23}^j(z)) & \frac{1}{2}(u_{22}^j(z) + u_{23}^j(z) - u_{33}^j(z)) \\ 0 & \frac{1}{2}(u_{22}^j(z) - u_{23}^j(z) - u_{33}^j(z)) & \frac{1}{2}(u_{22}^j(z) + u_{23}^j(z) + u_{33}^j(z)) \end{Vmatrix}, \; j = 1, 2, \qquad (1.3)$$

такими, что функции $u_{i\xi}^j : G \to \mathbb{C}$ удовлетворяют условиям полной разрешимости

$$\partial_{z_2} u_{ii}^1(z) = \partial_{z_1} u_{ii}^2(z), \; i = \overline{1,3},$$

$$\partial_{z_2} u_{13}^1(z) - u_{13}^1(z) u_{11}^2(z) +$$
$$+ u_{12}^1(z) u_{23}^2(z) + u_{13}^1(z) u_{33}^2(z) =$$
$$= \partial_{z_1} u_{13}^2(z) - u_{11}^1(z) u_{13}^2(z) + u_{12}^2(z) u_{23}^1(z) +$$
$$+ u_{13}^2(z) u_{33}^1(z) \quad \forall z \in G, \quad G \in \mathbb{C}^2,$$

$$\partial_{z_2} u_{12}^1(z) - u_{12}^1(z) u_{11}^2(z) + u_{12}^1(z) u_{22}^2(z) =$$
$$= \partial_{z_1} u_{12}^2(z) - u_{11}^1(z) u_{12}^2(z) + u_{12}^2(z) u_{22}^1(z) \quad \forall z \in G,$$

$$\partial_{z_2} u_{23}^1(z) - u_{23}^1(z) u_{22}^2(z) + u_{23}^1(z) u_{33}^2(z) =$$
$$= \partial_{z_1} u_{23}^2(z) - u_{22}^1(z) u_{23}^2(z) + u_{23}^2(z) u_{33}^1(z) \quad \forall z \in G,$$

с помощью ортогонального преобразования

$$w_1 = y_1, \; w_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(y_2 - y_3), \; w_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(y_2 + y_3)$$

приводим к треугольному виду

$$dy_i = \sum_{\xi=i}^{3} u_{i\xi}^1(z) y_\xi dz_1 + \sum_{\xi=i}^{3} u_{i\xi}^2(z) y_\xi dz_2, \; i = \overline{1,3}.$$

Используя теорему 1.1 и обратное ортогональное преобразование строим интегральный базис на односвязной области $G \times \mathbb{C}^3$ системы (0.2) с матрицами (1.3):

$$W_1 : (z, w) \to \frac{\sqrt{2}}{2}(w_3 - w_2)\varphi_3(z),$$

$$W_2 : (z, w) \to \frac{\sqrt{2}}{2}(w_2 + w_3)\varphi_2(z) - A_{21}(z) W_1(z, w),$$

$$W_3 : (z, w) \to w_1 \varphi_1(z) -$$
$$- \int \varphi_1(z)((u_{12}^1(z)\psi_2(z) A_{21}(z) + u_{13}^1(z)\psi_3(z))dz_1 +$$
$$+ (u_{12}^2(z)\psi_2(z) A_{21}(z) + u_{13}^2(z)\psi_3(z))dz_2) W_1(z, w) +$$
$$+ \int \varphi_1(z)\psi_2(z)(u_{12}^1(z)dz_1 + u_{12}^2(z)dz_2) W_2(z, w),$$

где скалярные функции

$$\varphi_i : z \to \exp\left(-\int u_{ii}^1(z)dz_1 + u_{ii}^2(z)dz_2\right),$$

$$\psi_i : z \to (\varphi_i(z))^{-1}, \; i = \overline{1,3},$$

$$A_{21} : z \to \int \varphi_2(z)\psi_3(z)(u_{23}^1(z)dz_1 + u_{23}^2(z)dz_2) \; \forall z \in G.$$

2 Диагонализуемые системы

Пусть у системы уравнений в полных дифференциалах (0.1) матрицы коэффициентов $U_j, \, j = \overline{1,m}$, одновременно диагонализуемы с помощью постоянной трансформирующей матрицы [13, с. 61] и выполняются условия Фробениуса полной разрешимости (0.3). Тогда для построения интегрального базиса диагонализуемой системы (0.1) используется

***Теорема* 2.1** [7]. *Пусть* $\nu \in \mathbb{C}^n$ *есть общий собственный вектор матриц* $V_j : z \to V_j(z)$ $\forall z \in G$, *транспонированных к матрицам*

$$U_j : z \to U_j(z) \; \forall z \in G$$

соответственно, которому соответствуют собственные функции

$$\lambda_j : z \to \lambda_j(z) \; \forall z \in G, \; j = \overline{1,m}.$$

Тогда первым интегралом вполне разрешимой диагонализуемой системы (0.1) *будет функция*

$$W : (z, w) \to \nu w \varphi(z) - \int \sum_{j=1}^{m} \nu g_j(z)\varphi(z) dz_j$$

$$\forall (z, w) \in G \times \mathbb{C}^n,$$

где экспоненциальная функция

$$\varphi : z \to \exp\left(-\int \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(z) dz_j\right) \quad \forall z \in G.$$

***Пример* 2.1.** Для вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах

$$dw_1 = ((2z_2^2 - z_1)\, w_1 - 2(z_2^2 - z_1)\, w_2)dz_1 +$$
$$+ ((4z_1 z_2 - z_2)\, w_1 - 2(2z_1 z_2 - z_2)\, w_2)dz_2,$$
$$dw_2 = ((z_2^2 - z_1)\, w_1 - (z_2^2 - 2z_1)\, w_2)dz_1 +$$
$$+ ((2z_1 z_2 - z_2)\, w_1 - 2(z_1 z_2 - z_2)\, w_2)dz_2$$

по общим собственным векторам $\nu^1 = (1, -1)$ и $\nu^2 = (-1, 2)$, которым соответствуют собственные функции

$$\lambda_1^1 : (z_1, z_2) \to z_2^2,$$

$$\lambda_2^1 : (z_1, z_2) \to 2z_1 z_2 \quad \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$$

и

$$\lambda_1^2 : (z_1, z_2) \to \operatorname{sh} z_1,$$

$$\lambda_2^2 : (z_1, z_2) \to \operatorname{ch} z_2 \quad \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,$$

строим (теорема 2.1) базис первых интегралов

$$W_1 : (z, w) \to (w_1 - w_2)\exp(-z_1 z_2^2),$$

$$W_2 : (z, w) \to (2w_2 - w_1)\exp(-z_1 - z_2) \; \forall (z, w) \in \mathbb{C}^4.$$

3 Системы Лаппо-Данилевского

Пусть у системы уравнений в полных дифференциалах (0.1) матрицы коэффициентов

$$U_j : z \to \sum_{k=1}^{s_j} \alpha_{jk}(z) U_{jk} \quad \forall z \in G, \; s_j \in \mathbb{N}, \quad (3.1)$$

где голоморфные функции $\alpha_{jk} : G \to \mathbb{C},\ k = \overline{1, s_j}$, линейно независимы на области G при каждом индексе $j = \overline{1, m}$, постоянные матрицы n-го порядка $U_{jk}, k = \overline{1, s_j},\ j = \overline{1, m}$, попарно перестановочны, и выполняются условия Фробениуса полной разрешимости (0.3).

Система (0.1) при (3.1) является системой Лаппо-Данилевского [3, с. 63], т. е. удовлетворяет требованию перестановочности матрицы коэффициентов со своим интегралом [14].

Частные интегралы. Линейная однородная функция

$$p : w \to \nu w \ \ \forall w \in \mathbb{C}^n,\ \ \nu \in \mathbb{C}^n, \qquad (3.2)$$

будет частным интегралом системы (0.2), если и только если

$$\begin{gathered}\mathfrak{V}_j\, p(w) = \lambda_j(z)\, p(w) \\ \forall (z, w) \in G \times \mathbb{C}^n,\ \ j = \overline{1, m},\end{gathered} \qquad (3.3)$$

где функции $\lambda_j : G \to \mathbb{C},\ j = \overline{1, m}$. Эта система тождеств распадается на линейную систему

$$\left(\sum_{k=1}^{s_j} \alpha_{jk}(z)\, V_{jk} - \lambda_j(z) E\right)\nu = 0 \ \forall z \in G,\ j = \overline{1, m}, \ (3.4)$$

где E – единичная матрица n-го порядка, а постоянные матрицы n-го порядка V_{jk} являются транспонированными к матрицам U_{jk} соответственно.

Условие перестановочности матриц определяет связи между собственными числами и общими собственными векторами матриц V_{jk} [15, с. 203–207], на основании которых доказываем основополагающие для построения первых интегралов закономерности.

***Лемма* 3.1.** *Пусть* ν *– общий собственный вектор матриц* V_{jk}, *которому соответствуют собственные числа* $\lambda_{jk}, k = \overline{1, s_j},\ j = \overline{1, m}$. *Тогда функция* (3.2) *будет частным интегралом системы* (0.2) *при* (3.1), *а функции*

$$\lambda_j : z \to \sum_{k=1}^{s_j} \lambda_{jk} \alpha_{jk}(z) \ \ \forall z \in G,\ \ j = \overline{1, m}.$$

Доказательство. Если ν – общий собственный вектор матриц V_{jk}, которому соответствуют собственные числа $\lambda_{jk}, k = \overline{1, s_j},\ j = \overline{1, m}$, то он является общим собственным вектором матриц

$$V_j : z \to \sum_{k=1}^{s_j} \alpha_{jk}(z) V_{jk} \ \ \ \forall z \in G,$$

которому соответствуют собственные функции

$$\lambda_j : z \to \sum_{k=1}^{s_j} \lambda_{jk} \alpha_{jk}(z) \ \ \forall z \in G,\ j = \overline{1, m}.$$

Тогда ν будет решением системы (3.4), а значит, выполняется система тождеств (3.3). Следовательно, линейная функция (3.2) есть частный интеграл системы в полных дифференциалах (0.2) при (3.1). Лемма доказана.

В случае наличия кратных элементарных делителей у матриц V_{jk} будем использовать понятие присоединенного вектора [11, с. 252] и основываться на леммах 3.2 и 3.3.

Пусть $\lambda_{\xi\zeta}$ – собственное число матрицы

$$V_{\xi\zeta},\ \ \zeta \in \{1, \ldots, s_\xi\},\ \ \xi \in \{1, \ldots, m\},$$

которому соответствуют элементарный делитель кратности $\varkappa \geq 2$ и собственный вектор ν^0. Тогда *l-ым присоединенным вектором* матрицы $V_{\xi\zeta}$, соответствующим собственному числу $\lambda_{\xi\zeta}$, назовем вектор $\nu^l, l = \overline{1, \varkappa - 1}$, являющийся решением линейной системы

$$(V_{\xi\zeta} - \lambda_{\xi\zeta}\, E)\nu^l = l \cdot \nu^{l-1}. \qquad (3.5)$$

***Лемма* 3.2.** *Пусть выполняются условия*:

1) ν^0 *– общий собственный вектор матриц* V_{jk}, *которому соответствуют собственные числа* $\lambda_{jk}, k = \overline{1, s_j},\ j = \overline{1, m}$;

2) $\nu^l, l = \overline{1, \varkappa - 1}$, *– присоединенные векторы матрицы* $V_{\xi\zeta}$, *соответствующие собственному числу* $\lambda_{\xi\zeta}$ *с элементарным делителем кратности* $\varkappa \geq 2$;

3) *обыкновенная дифференциальная система* $\dfrac{dw}{dz} = U_{\xi\zeta} w$ *не имеет первых интегралов*

$$\begin{gathered}W_{jkl} : w \to \mathfrak{x}_{jk} \Psi_l(w) \\ \forall w \in \Omega,\ l = \overline{1, \varkappa - 1},\ k = \overline{1, s_j},\ j = \overline{1, m} \\ (k \neq \zeta \text{ при } j = \xi).\end{gathered} \qquad (3.6)$$

Тогда имеют место тождества

$$\begin{gathered}\mathfrak{x}_{\xi\zeta} \Psi_1(w) = 1 \ \ \forall w \in \Omega, \\ \mathfrak{x}_{\xi\zeta} \Psi_l(w) = 0 \ \ \forall w \in \Omega,\ \ l = \overline{2, \varkappa - 1}, \\ \mathfrak{x}_{jk} \Psi_l(w) = \mu_{jkl} = \mathrm{const} \ \ \forall w \in \Omega, \\ l = \overline{1, \varkappa - 1},\ \ k = \overline{1, s_j},\ \ j = \overline{1, m} \ \ (k \neq \zeta \text{ при } j = \xi),\end{gathered} \qquad (3.7)$$

где операторы $\mathfrak{x}_{jk}(w) = U_{jk} w \partial_w \ \ \forall w \in \mathbb{C}^n$, *а функции* $\Psi_l : \Omega \to \mathbb{C}$ *находятся из системы*

$$\begin{gathered}\nu^l w = \sum_{\delta=1}^{l} \binom{l-1}{\delta-1} \Psi_\delta(w) \nu^{l-\delta} w \ \ \forall w \in \Omega, \\ l = \overline{1, \varkappa - 1},\ \ \Omega \subset \{w : \nu^0 w \neq 0\}.\end{gathered} \qquad (3.8)$$

Доказательство. Функциональную систему (3.8) всегда можно разрешить относительно Ψ_δ, так как ее определитель равен $(\nu^0 w)^{\varkappa - 1}$ и отличен от тождественного нуля на любой области $\Omega \subset \{w : \nu^0 w \neq 0\}$. Докажем, что для функций Ψ_δ справедливы тождества (3.7).

Пусть $j = \xi, k = \zeta$. Тогда верность тождеств (3.7) при $\varkappa = 2$ и $\varkappa = 3$ проверяется непосредственно на основании системы тождеств

$$\mathfrak{x}_{\xi\zeta}\nu^0 w=\lambda_{\xi\zeta}\nu^0 w \quad \forall w\in\mathbb{C}^n,$$
$$\mathfrak{x}_{\xi\zeta}\nu^l w=\lambda_{\xi\zeta}\nu^l w+l\nu^{l-1}w \quad \forall w\in\mathbb{C}^n,\ l=\overline{1,\varkappa-1}, \tag{3.9}$$

которые непосредственно следуют из леммы 3.1 и системы равенств (3.5). Доказательство тождеств (3.7) для случая $\varkappa>3$ проведем методом математической индукции.

Предположим, что система тождеств (3.7) имеет место при $\varkappa=\varepsilon$. Тогда, на основании тождества (3.8) при $\varkappa=\varepsilon+1, l=\varepsilon$, вычислим действие оператора $\mathfrak{x}_{\xi\zeta}$ на линейную функцию $w\to\nu^\varepsilon w\ \forall w\in\mathbb{C}^n$, с учетом тождеств (3.7) при $\varkappa=\varepsilon$ и системы тождеств (3.9):

$$\mathfrak{x}_{\xi\zeta}\nu^\varepsilon w=\lambda_{\xi\zeta}\sum_{\delta=1}^{\varepsilon}\binom{\varepsilon-1}{\delta-1}\Psi_\delta(w)\nu^{\varepsilon-\delta}w+$$
$$+(\varepsilon-1)\sum_{\delta=1}^{\varepsilon-1}\binom{\varepsilon-2}{\delta-1}\Psi_\delta(w)\nu^{\varepsilon-\delta-1}w+$$
$$+\nu^{\varepsilon-1}w+\nu^0 w\mathfrak{x}_{\xi\zeta}\Psi_\varepsilon(w)\quad\forall w\in\Omega.$$

Отсюда, в силу системы (3.8) при $l=\varepsilon-1$ и $l=\varepsilon$, тождеств (3.9) при $l=\varepsilon$ и того, что $\nu^0 w$ тождественно не равна нулю на пространстве $\mathbb{C}^n$, получаем: $\mathfrak{x}_{\xi\zeta}\Psi_\varepsilon(w)=0\ \forall w\in\Omega.$

Следовательно, при $\varkappa=\varepsilon+1$ система тождеств (3.7) имеет место.

Учитывая, что у вполне разрешимой системы (0.2) при условии (3.1) линейные дифференциальные операторы $\mathfrak{x}_{jk}$, $k=\overline{1,s_j}$, $j=\overline{1,m}$, перестановочны, а линейная обыкновенная дифференциальная система $\dfrac{dw}{dz}=U_{\xi\zeta}w$ не имеет первых интегралов вида (3.6), получаем, что тождества (3.7) имеют место и при $k\neq\zeta$. Лемма доказана.

***Лемма* 3.3.** *Пусть выполняются условия леммы* 3.2. *Тогда на области* Ω *имеем*

$$\mathfrak{x}_{jk}\nu^l w=\sum_{\delta=0}^{l}\binom{l}{\delta}\mu_{jk\delta}\nu^{l-\delta}w$$
$$(\mu_{jk0}=\lambda_{jk},\ \mu_{jkl}=\mathfrak{x}_{jk}\Psi_l), \tag{3.10}$$
$$k=\overline{1,s_j},\ j=\overline{1,m},\ l=\overline{1,\varkappa-1}.$$

Доказательство. При $\varkappa=2$ из системы (3.8) получаем, что $\nu^1 w=\Psi_1(w)\nu^0 w\forall w\in\Omega.$ Отсюда, используя леммы 3.1 и 3.2, имеем

$$\mathfrak{x}_{jk}\ \nu^1 w=\mu_{jk0}\nu^1 w+\mu_{jk1}\nu^0 w$$
$$\forall w\in\Omega,\ k=\overline{1,s_j},\ \ j=\overline{1,m}.$$

Следовательно, тождества (3.10) при $\varkappa=2$ верны.

Пусть тождества (3.10) выполняются при $\varkappa=\varepsilon$. Тогда из (3.8) при $\varkappa=\varepsilon+1$ находим

$$\mathfrak{x}_{jk}\nu^\varepsilon w=\sum_{\delta=1}^{\varepsilon}\binom{\varepsilon-1}{\delta-1}\mu_{jk\delta}\nu^{\varepsilon-\delta}w+$$
$$+\sum_{\delta=1}^{\varepsilon}\binom{\varepsilon-1}{\delta-1}\Psi_\delta(w)\sum_{\gamma=0}^{\varepsilon-\delta}\binom{\varepsilon-\delta}{\gamma}\mu_{jk\gamma}\nu^{\varepsilon-\delta-\gamma}w,\ k=\overline{1,s_j},\ j=\overline{1,m}.$$

Сгруппировав выражения при $\mu_{jk\delta}$ и учитывая (3.8) при $\varkappa=\varepsilon+1$, получаем

$$\mathfrak{x}_{jk}\nu^\varepsilon w=\sum_{\delta=1}^{\varepsilon}\binom{\varepsilon-1}{\delta-1}\mu_{jk\delta}\nu^{\varepsilon-\delta}w+$$
$$+\sum_{\tau=0}^{\varepsilon-1}\binom{\varepsilon-1}{\tau}\mu_{jk\tau}\sum_{\eta=1}^{\varepsilon-\tau}\binom{\varepsilon-\tau-1}{\eta-1}\Psi_\eta(w)\nu^{(\varepsilon-\tau)-\eta}w=$$
$$=\sum_{\delta=1}^{\varepsilon}\binom{\varepsilon-1}{\delta-1}\mu_{jk\delta}\nu^{\varepsilon-\delta}w+\sum_{\tau=0}^{\varepsilon-1}\binom{\varepsilon-1}{\tau}\mu_{jk\tau}\nu^{\varepsilon-\tau}w=$$
$$=\sum_{\delta=0}^{\varepsilon}\binom{\varepsilon}{\delta}\mu_{jk\delta}\nu^{\varepsilon-\delta}w\quad\forall w\in\Omega,\ k=\overline{1,s_j},\ \ j=\overline{1,m}.$$

Таким образом, при $\varkappa=\varepsilon+1$ тождества (3.10) справедливы, а значит, система тождеств (3.10) имеет место при любом натуральном $\varkappa\geq 2.$ Лемма доказана.

Первые интегралы. Построение интегрального базиса основано на теоремах 3.1–3.3.

***Теорема* 3.1.** *Пусть выполняются условия леммы* 3.1. *Тогда первым интегралом вполне разрешимой системы* (0.1) *при условии* (3.1) *будет функция*

$$W:(z,w)\to\nu w\varphi(z)-\int\sum_{j=1}^{m}\nu g_j(z)\varphi(z)dz_j \tag{3.11}$$
$$\forall(z,w)\in G\times\mathbb{C}^n,$$

где экспоненциальная функция

$$\varphi:z\to\exp\left(-\int\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{s_j}\lambda_{jk}\alpha_{jk}(z)dz_j\right)\quad\forall z\in G. \tag{3.12}$$

Доказательство. Из тождеств (0.3) следует, что 1-форма $\omega:z\to\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{s_j}\lambda_{jk}\alpha_{jk}(z)dz_j$ является замкнутой на односвязной области $G.$ С учетом этого, для гладкой дифференциальной 1-формы $\widetilde{\omega}:z\to\sum_{j=1}^{m}\nu g_j(z)\varphi(z)dz_j\ \ \forall z\in G$ внешний дифференциал

$$d\widetilde{\omega}(z)=\varphi(z)\sum_{j=1}^{m}\sum_{\xi=1}^{m}\Bigg(\partial_{z_\xi}\nu g_j(z)-$$
$$-\sum_{k=1}^{s_\xi}\lambda_{\xi k}\alpha_{\xi k}(z)\nu g_j(z)\Bigg)dz_\xi\wedge dz_j\quad\forall z\in G.$$

Отсюда с учетом условий Фробениуса (0.3) и того, что

$$dz_j\wedge dz_j=0,$$
$$dz_\xi\wedge dz_j=-dz_j\wedge dz_\xi,\ \ \xi=\overline{1,m},j=\overline{1,m},$$

получаем, что 1-форма $\widetilde{\omega}$ будет замкнутой на области $G.$ Тогда по теореме Пуанкаре [11, с. 14] 1-формы ω и $\widetilde{\omega}$ будут точными на односвязной области $G,$ а значит, криволинейные интегралы $\int\omega$ и $\int\widetilde{\omega}$ в области G не зависят от пути интегрирования.

Используя лемму 3.1 и то, что 1-формы ω и $\tilde{\omega}$ являются точными на односвязной области G, вычислим производные Ли функции (3.11) в силу системы (0.1):

$$\mathfrak{W}_j\, W(z,w) = \nu w \partial_{z_j} \varphi(z) -$$

$$-\partial_{z_j} \int \sum_{j=1}^{m} \nu g_j(z)\varphi(z) dz_j +$$

$$+(\mathfrak{V}_j \nu w + g_j(z)\partial_w \nu w)\varphi(z) = 0,\ \ j = \overline{1,m}.$$

Следовательно, функция (3.11) будет первым интегралом вполне разрешимой дифференциальной системы (0.1) при условии (3.1). Теорема доказана.

***Пример* 3.1.** Для системы уравнений Лаппо-Данилевского в полных дифференциалах

$$dw_1 = ((2z_1z_2 - a\sin z_1)w_1 + 3a\sin z_1 w_2)dz_1 +$$

$$+((z_1^2 - 12z_2^3 - 5b(2z_2))w_1 + 6b(2z_2)w_2)dz_2,$$

$$dw_2 = (-2a\sin z_1 w_1 + (4a\sin z_1 + 2z_1z_2)w_2)dz_1 +$$

$$+(-3b(2z_2)w_1 + (z_1^2 - 12z_2^3 + 4b(2z_2))w_2)dz_2,$$

где a и b числа из поля $\mathbb{C}$, с функциями

$$\alpha_{11} : (z_1,z_2) \to a\sin z_1,$$

$$\alpha_{12} : (z_1,z_2) \to 2z_1z_2,$$

$$\alpha_{21} : (z_1,z_2) \to b(2z_2),$$

$$\alpha_{22} : (z_1,z_2) \to 12z_1^2 - 6z_2^3\ \ \forall (z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2,$$

общим вещественным собственным вектором $\nu^1 = (1,-1)$ матриц

$$V_{11} = \begin{Vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix},\ \ V_{12} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$V_{21} = \begin{Vmatrix} -5 & -3 \\ 6 & 4 \end{Vmatrix},\ \ V_{22} = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix},$$

которым соответствуют собственные числа $\lambda_{11,1} = \lambda_{12,1} = 1, \lambda_{21,1} = -2, \lambda_{22,1} = 2,$ строим (теорема 3.1) на пространстве $\mathbb{C}^4$ первый интеграл

$$W : (z,w) \to (w_1 - w_2)\exp(a\cos z_1 +$$

$$+b(2z_2) - z_1^2 z_2 + 3z_2^4)\ \ \forall (z,w) \in \mathbb{C}^4.$$

***Теорема* 3.2.** *Пусть выполняются условия леммы* 3.2. *Тогда первыми интегралами вполне разрешимой дифференциальной системы* (0.1) *при* (3.1) *будут функции*

$$W_l : (z,w) \to \nu^l w\varphi(z) -$$

$$-\sum_{\tau=1}^{l} K_{\tau-1}^{l}(z) W_{\tau-1}(z,w) - C_l(z) \qquad (3.13)$$

$$\forall (z,w) \in G\times\Omega,\ \ l = \overline{0,\varkappa-1},$$

где область $\Omega \subset \{w : \nu^0 w \neq 0\}$, *функция* $\varphi : G \to \mathbb{C}$ *находится по формуле* (3.12), *а*

$$K_{\tau-1}^{l} : z \to \int \sum_{j=1}^{m} \left(\binom{l}{\tau-1} \mu_{j,l-\tau+1}(z) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\delta=1}^{l-\tau} \binom{l}{\delta} \mu_{j\delta}(z) K_{\tau-1}^{l-\delta}(z) \right) dz_j\ \ \forall z \in G, \tau = \overline{1,l}, l = \overline{1,-1},$$

$$C_l : z \to \int \sum_{j=1}^{m} \left(\nu^l g_j(z)\varphi(z) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\tau=1}^{l} \binom{l}{\tau} \mu_{j\tau}(z) C_{l-\tau}(z) \right) dz_j\ \ \forall z \in G,\ l = \overline{0,-1},$$

$$\mu_{jl} : z \to \sum_{k=1}^{s_j} \mu_{jkl}\alpha_{jk}(z)\ \ \forall z \in G$$

$$(\mu_{jkl} = \mathfrak{x}_{jk}\Psi_l(w), k = \overline{1,s_j}),\ j = \overline{1,m}, l = \overline{0,\varkappa-1}.$$

Доказательство. Методом, аналогичным использованному в теореме 3.1, устанавливается, что 1-формы стоящие под знаком криволинейного интеграла в функциях $K_{\tau-1}^{l}$ и C_l являются точными на односвязной области G. При $\varkappa = 1$ имеем утверждение теоремы 3.1.

Пусть $\varkappa = 2$. Тогда в соответствии с теоремой 3.1 и леммой 3.3 получаем, что функция $W_1 : G\times\Omega \to \mathbb{C}$ будет первым интегралом системы (0.1) при (3.1):

$$\mathfrak{W}_j W_1(z,w) = \mu_{j1}(z)(\nu^0 w\varphi(z) - C_0(z) -$$

$$-W_0(z,w)) = 0\ \forall (z,w) \in G\times\Omega,\ \ j = \overline{1,m}.$$

Предположим, что функции (3.13) при $\varkappa = \varepsilon$ будут первыми интегралами системы (0.1) при (3.1). Тогда, используя лемму 3.3, на области $G\times\Omega$ при $j = \overline{1,m}$ имеем

$$\mathfrak{W}_j W_\varepsilon(z,w) = \sum_{\tau=1}^{\varepsilon} \binom{\varepsilon}{\tau} \mu_{j\tau}(z) \left(\left(\nu^{\varepsilon-\tau} w\varphi(z) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{\delta=1}^{\varepsilon-\tau} K_{\delta-1}^{\varepsilon-\tau}(z) W_{\delta-1}(z,w) - C_{\varepsilon-\tau}(z) \right) - W_{\varepsilon-\tau}(z,w) \right) = 0.$$

При $\varkappa = \varepsilon + 1$ функция $W_\varepsilon : G\times\Omega \to \mathbb{C}$ является первым интегралом системы (0.1).

Таким образом, учитывая способ построения функций (3.13), получаем, что они будут функционально независимыми первыми интегралами системы (0.1). Теорема доказана.

Подобно теореме 3.2 доказывается

***Теорема* 3.3.** *Пусть выполняются условия леммы* 3.2. *Тогда первыми интегралами вполне разрешимой системы* (0.2) *при условии* (3.1) *будут функции*

$$W_l : (z,w) \to \Psi_l(w) - \int \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{s_j} \mu_{jkl}\alpha_{jk}(z) dz_j$$

$$\forall (z,w) \in G\times\Omega,\ \ l = \overline{1,-1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Darboux*, *G.* Mémoire sur les équations differentielles algebriques du premier ordre et du premier degré / G. Darboux // Bulletin des Sciences Mathématiques. – 1878. – Vol. 2. – P. 60–96, 123–144, 151–200.

2. *Амелькин*, *В.В.* Автономные и линейные многомерные дифференциальные уравнения / В.В. Амелькин. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 144 с.

3. *Гайшун*, *И.В.* Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения / И.В. Гайшун. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 272 с.

4. *Горбузов*, *В.Н.* Спектральный метод построения интегрального базиса якобиевой системы в частных производных / В.Н. Горбузов, А.Ф. Проневич // Дифференц. уравнения и процессы управления. – 2001. – № 3. – С. 17–45.

5. *Горбузов*, *В.Н.* Построение интегралов линейной дифференциальной системы / В.Н. Горбузов, А.Ф. Проневич // Веснік Гродзенскага дзяржаунага ун-та. Сер. 2. – 2003. – № 2 (22). – С. 50–60.

6. *Горбузов*, *В.Н.* Интегралы *R*-линейных систем в полных дифференциалах / В.Н. Горбузов, А.Ф. Проневич // Доклады НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 1. – С. 49–52.

7. *Горбузов*, *В.Н.* Построение первых интегралов линейных нестационарных многомерных дифференциальных систем простой матричной структуры / В.Н. Горбузов, А.Ф. Проневич // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2008. – № 2. – С. 75–79.

8. *Проневич*, *А.Ф.* R-дифференцируемые интегралы систем в полных дифференциалах / А.Ф. Проневич. – Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. – 104 с.

9. *Gorbuzov*, *V.N.* First integrals of ordinary linear differential systems / V.N. Gorbuzov, A.F. Pranevich // Mathematics.Dynamical Systems (1201.4141v1 [math.DS], Cornell Univ., Ithaca, New York). – 2012. – P. 1–75.

10. *Козлов*, *В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике / В.В. Козлов. – Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 1995. – 432 с.

11. *Горбузов*, *В.Н.* Интегралы дифференциальных систем / В.Н. Горбузов. – Гродно: ГрГУ, 2006. – 447 с.

12. *Goriely*, *A.* Integrability and nonintegrability of dynamical systems / A. Goriely. – World Scientific: Advanced series on nonlinear dynamics, 2001. – Vol. 19. – 436 p.

13. *Хорн*, *Р.* Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 655 с.

14. *Лаппо-Данилевский*, *И.А.* Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / И.А. Лаппо-Данилевский. – М.: Гостехиздат, 1957. – 456 с.

15. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966. – 576 с.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (*грант* Ф11М–206).

Поступила в редакцию 08.01.15.

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ, В КОТОРЫХ КАЖДАЯ ПОДГРУППА ЛИБО $\mathfrak{F}$-СУБНОРМАЛЬНА, ЛИБО $\mathfrak{F}$-АБНОРМАЛЬНА

В.Н. Семенчук, А.Н. Скиба

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

ON FINITE GROUPS IN WHICH EVERY SUBGROUP IS EITHER $\mathfrak{F}$-SUBNORMAL OR $\mathfrak{F}$-ABNORMAL

V.N. Semenchuk, A.N. Skiba

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Изучается строение конечных групп, у которых любая собственная подгруппа либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна, где $\mathfrak{F}$ – насыщенная наследственная формация Шеметкова, содержащая все нильпотентные группы. В частности, получено описание таких групп в случаях, когда $\mathfrak{F}$ – формация всех p-нильпотентных или всех p-разложимых групп.

Ключевые слова: *конечная группа, $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа, $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа, насыщенная формация, формация с условием Шеметкова.*

The structure of finite groups in which every proper subgroup is either $\mathfrak{F}$-subnormal or $\mathfrak{F}$-abnormal, where $\mathfrak{F}$ is a saturated hereditary formation with the Shemetkov property containing all nilpotent groups is studied. In particular, descriptions of these groups in the cases when $\mathfrak{F}$ is either the formation of all p-nilpotent groups or all p-decomposable groups were obtained.

Keywords: *finite group, $\mathfrak{F}$-subnormal subgroup, $\mathfrak{F}$-abnormal subgroup, saturated formation, formation with the Shemetkov property.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы. В работе [1] Фаттачи описал группы, у которых любая собственная подгруппа либо нормальна, либо абнормальна. Расширяя этот результат, Эберт и Бауман в работе [2] классифицировали группы, у которых любая собственная подгруппа либо субнормальна, либо абнормальна.

В теории классов конечных групп естественными обобщениями понятий субнормальности и абнормальности являются, соответственно, понятия $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы и $\mathfrak{F}$-абнормальной подгруппы.

В 1986 году Ферстер и В.Н. Семенчук, соответственно в работах [3], [4], исследовали строение групп, у которых все собственные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны. В последствии В.Н. Семенчук и С.Н. Шевчук в работе [5] исследовали группы, у которых все примарные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны. В работе В.Н. Семенчука и А.Н. Скибы [6] были описаны группы, у которых каждая собственная подгруппа либо $\mathfrak{U}$-субнормальна, либо $\mathfrak{U}$-абнормальна для случая, когда $\mathfrak{U}$ – формация всех сверхразрешимых групп.

Дальнейшему развитию данного направления посвящена и настоящая работа.

1 Предварительные сведения

Необходимые определения и обозначения можно найти в [7]. Напомним некоторые из них. Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел. Если $p \in \mathbb{P}$ и $\pi \subseteq \mathbb{P}$, то $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$ и $p' = \mathbb{P} \setminus \{p\}$.

$\pi(G)$ – множество простых делителей порядка группы G.

Формация $\mathfrak{F}$ – класс групп, замкнутых относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *наследственной*, если она замкнута относительно взятия подгрупп.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если она замкнута относительно фраттиниевых расширений.

Если $\mathfrak{F}$ – класс групп и G – группа, то $G^{\mathfrak{F}}$ – пересечение всех нормальных подгрупп N из G таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая непустая формация. Подгруппа H группы G называется:

1) $\mathfrak{F}$-*субнормальной*, если существует максимальная цепь

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H$$

такая, что для любого $i \geq 1$ подгруппа H_i $\mathfrak{F}$-нормальна в H_{i-1};

2) $\mathfrak{F}$-*абнормальной*, если для любой максимальной цепи

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H$$

подгруппа H_i $\mathfrak{F}$-абнормальна в H_{i-1} для любого $i \geq 1$.

Группа называется *минимальной не $\mathfrak{F}$-группой*, если она не принадлежит $\mathfrak{F}$, но все собственные подгруппы ее принадлежат $\mathfrak{F}$. В частности, ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется *группой Шмидта*.

Важную роль в дальнейших исследованиях сыграли формации со свойством Шеметкова, т. е. формации $\mathfrak{F}$, для которых каждая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка. Как следует из работ Ито [8], С.А. Чунихина и И.К. Чунихиной [9], примерами формации со свойством Шеметкова являются формации всех p-нильпотентных и всех p-разложимых групп.

2 Основные результаты

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Нетрудно показать, что любая разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа с единичной подгруппой Фраттини является группой, у которой все собственные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны. Дальнейшая связь таких групп найдена в следующей теореме.

***Теорема* 2.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа разрешима, то и любая группа, не принадлежащая $\mathfrak{F}$, у которой все собственные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны, также разрешима.*

***Следствие* 2.1.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех p-нильпотентных групп. Тогда любая не p-нильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны, разрешима.*

***Следствие* 2.1.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех p-разложимых групп. Тогда любая не p-разложимая группа, у которой все собственные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны, разрешима.*

Следствие 2.1.3 [6]. *Пусть $\mathfrak{U}$ – формация всех сверхразрешимых групп. Тогда любая группа, у которой все собственные подгруппы либо $\mathfrak{U}$-субнормальны, либо $\mathfrak{U}$-абнормальны, разрешима.*

Важную роль в дальнейших исследованиях сыграла следующая теорема.

***Теорема* 2.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация, у которой любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа разрешима. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *любая группа G, у которой все силовские подгруппы принадлежат $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$-субнормальны в G, принадлежит $\mathfrak{F}$;*

2) *любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо бипримарной p-замкнутой ($p \in \pi(G)$), либо примарной группой.*

***Следствие* 2.2.1** [10]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех p-нильпотентных групп. Группа является p-нильпотентной тогда и только тогда, когда у нее все силовские подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальны.*

Следствие 2.2.2 [10]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех p-разложимых групп. Группа является p-разложимой тогда и только тогда, когда у нее все силовские подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальны.*

Следствие 2.2.3. *Группа является абелевой тогда и только тогда, когда все ее силовские подгруппы абелевы и субнормальны.*

***Теорема* 2.3.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная наследственная формация со свойством Шеметкова, содержащая все нильпотентные группы. Если в группе G все примарные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны, то в G все собственные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны.*

***Следствие* 2.3.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех p-нильпотентных групп. Если в группе G все примарные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны, то в G все собственные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны.*

***Следствие* 2.3.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех p-разложимых групп. Если в группе G все примарные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны, то в G все собственные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны.*

***Теорема* 2.4.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная наследственная формация со свойством Шеметкова, содержащая все нильпотентные группы. Тогда и только тогда любая собственная подгруппа группы $G \notin \mathfrak{F}$ либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна, когда G имеет следующее строение:*

1) *G – разрешимая группа;*

2) *$G = G_{q'} \rtimes G_q$, где $G_{q'} = G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, G_q – циклическая подгруппа Картера;*

3) *любая максимальная подгруппа из G_q нормальна в G.*

***Следствие* 2.4.1** [5]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех p-нильпотентных групп. Тогда и только тогда любая собственная подгруппа группы G,* *не принадлежащей* $\mathfrak{F}$, *либо* $\mathfrak{F}$*-субнормальна, либо* $\mathfrak{F}$*-абнормальна, когда* $G = G_p \rtimes G_q$, *где* $q \neq p$, G_q *– циклическая подгруппа Картера, любая максимальная подгруппа из* G_q *нормальна в* G, $G_p = G^{\mathfrak{F}}$.

***Следствие* 2.4.2.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– формация всех p-разложимых групп. Тогда и только тогда любая собственная подгруппа не p-разложимой группы G либо* $\mathfrak{F}$*-субнормальна, либо* $\mathfrak{F}$*-абнормальна, когда G – разрешимая группа одного из следующих типов*:

1) $G = G_p \rtimes G_q$, *где* $q \neq p$, G_q *– циклическая подгруппа Картера, любая максимальная подгруппа из* G_q *нормальна в G*, $G_p = G^{\mathfrak{F}}$.

2) $G = G_{p'} \rtimes G_p$, *где* $G_{p'} = G^{\mathfrak{F}}$, G_p *– циклическая подгруппа Картера и любая максимальная подгруппа из* G_p *нормальна в G.*

*Пример***.** Пусть $H = S_3$ и V – проективная оболочка тривиального $\mathbb{F}_3[H]$-модуля. Пусть $E = [V]H$. Тогда $\Phi(E) = R(V)$ и $C_H(V) = O_{3'}(H)$ [11]. Следовательно, E имеет фраттиниев главный фактор K/L такой, что $|K/L| > 3$. Пусть $G = E/L$. Тогда G – 3-замкнутая $\{2,3\}$-группа, не являющаяся группой Шмидта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fattachi*, *A.* Groups with only normal and abnormal subgroups / A. Fattachi // J. Algebra. – 1974. – Vol. 28, № 1. – P. 15–19.

2. *Ebert*, *G.* A note on subnormal and abnormal chains / G. Ebert, S. Bauman // J. Algebra. – 1975. – Vol. 36, № 2. – P. 287–293.

3. *Förster*, *P.* Finite groups all of whose subgroups are $\mathfrak{F}$-subnormal or $\mathfrak{F}$-subabnormal / P. Förster // J. Algebra. –1986. – № 1. – P. 285–293.

4. *Семенчук*, *В.Н.* Строение конечных групп с $\mathfrak{F}$-абнормальными или $\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами / В.Н. Семенчук // Вопросы алгебры. – Минск: Изд-во «Университетское». – 1986. – № 2. – С. 50–55.

5. *Семенчук*, *В.Н.* Конечные группы, у которых примарные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны / В.Н. Семенчук, С.Н. Шевчук // Известия вузов. Математика. – 2011. – № 8. – С. 46–55.

6. *Semenchuk*, *V.N.* On one generalization of finite $\mathfrak{U}$-critical groups / V.N. Semenchuk, A.N. Skiba // arXiv:1412.5469v1 [math.GR].

7. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука. – 1978. – 267 с.

8. *Ito*, *N.* Note on (LM)-groups of finite order / N. Ito // Kodai Math. Sem. Rep. – 1951. – Vol. 1–2. – P. 1–6.

9. *Чунихина*, *И.К.* О *p*-разложимых группах / И.К. Чунихина, С.А. Чунихин // Мат. сборник. – 1944. – Vol. 15, № 57:2. – С. 325–342.

10. *Шевчук*, *С.Н.* Конечные группы с обобщенно абнормальными подгруппами / С.Н. Шевчук, В.Н. Семенчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 4 (5). – С. 57–60.

11. *Willems*, *W.* On the projectives of a group algebra / W. Willems // Math. Z. – 1980. – № 171. – P. 163–174.

Поступила в редакцию 17.02.15.

Проблемы физики, математики и техники, № 2 (23), 2015

МАТЕМАТИКА

УДК 517.984

О ПРИВОДИМОСТИ ОПЕРАТОРОВ ВЗВЕШЕННОЙ КОМПОЗИЦИИ

Теубе С. Мбаинаисем, Серинь А. Ло, Мусса О.А. Салем

Университет в Дакаре, Дакар, Сенегал

ON REDUCIBILITY OF THE WEIGHTED COMPOSITION OPERATORS

Teube Cyrille Mbainaissem, Serine Alou Lo, Moussa Ould Ahmed Salem

University Cheikh Anta Diop de Dakar, Dakar, Senegal

Рассматривается вопрос о приводимости оператора взвешенной композиции с помощью преобразования Ляпунова к оператору с коэффициентом, инвариантным относительно отображения, порождающего оператор. В случае периодического отображения описаны топологические препятствия для приводимости. Получен явный вид соответствующего преобразования Ляпунова.

Ключевые слова: *оператор взвешенной композиции, преобразование Ляпунова, индекс Коши, приводимость, гомологическое уравнение.*

The question under consideration is reduction of a weighted composition operator to an operator with invariant coefficient by Liapunov transformation. Topological obstruction to be reducible is described in the case of periodic mapping generating operator. Explicit form of the corresponding Liapunov transformation is given.

Keywords: *weighted composition operator, Liapunov transformation, Cauchy index, reducibility, homological equation.*

Введение

Линейный ограниченный оператор B, действующий в банаховом пространстве $F(X)$ функций на множестве X, называется *оператором взвешенной композиции* или *оператором взвешенного сдвига* (ОВС) , если он может быть представлен в виде

$$Bu(x) = a(x)u(\alpha(x)),\ x \in X, \tag{0.1}$$

где $\alpha : X \to X$ есть некоторое отображение, $a(x)$ – заданная функция на X. Операторы вида

$$T_\alpha u(x) = u(\alpha(x)),\ x \in X, \tag{0.2}$$

называют *операторами композиции* или *операторами сдвига*.

Такие операторы, а также порожденные ими операторные алгебры и связанные с ними функциональные уравнения изучались многими авторами в различных функциональных пространствах как самостоятельный объект и в связи с различными приложениями [1]–[4], [6]–[11].

Исследование конкретного класса операторов тесно связано с исследованием банаховой алгебры, порожденной такими операторами. При этом коммутативные алгебры устроены существенно проще, что помогает при исследовании соответствующих операторов. Рассматриваемые операторы (с фиксированным α) порождают некоммутативную банахову алгебру. Но, если ограничится рассмотрением операторов, коэффициенты которых постоянны или инвариантны относительно сдвига $(a(\alpha(x)) = a(x))$, то соответствующая операторная алгебра коммутативна.

Поэтому представляет интерес вопрос о сведении исследования заданного оператора к рассмотрению другого оператора, имеющего более «хороший» коэффициент – постоянный или инвариантный.

Подобные задачи рассматривались при исследовании других видов операторов. Например, одним из аналогов рассматриваемой задачи является задача о приведении дифференциального оператора с частными производными к каноническому виду.

Другой аналог известен в теории линейных систем дифференциальных уравнений вида

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t). \tag{0.3}$$

Пусть матрица-функция $D(t)$ ограничена, обратима и ее обратная $D(t)^{-1}$ также ограничена и их производные также ограничены. Замена в системе (0.3) неизвестной функции на $z(t) = D(t)u(t)$ называется *преобразованием Ляпунова* системы.

Линейная система (0.3) называется *приводимой*, если существует преобразование Ляпунова, приводящее эту систему к системе с постоянным коэффициентом [5].

По аналогии с теорией дифференциальных уравнений *преобразованием Ляпунова* будем называть обратимый оператор D умножения на непрерывную функцию $d \in C(X)$:

$$Du(x) = d(x)u(x).$$

ОВС B будем называть *приводимым к оператору с постоянным коэффициентом*, если существует преобразование Ляпунова такое, что

$$DBD^{-1} = a_0 T_\alpha, a_0 \in C. \tag{0.4}$$

ОВС B будем называть *приводимым к оператору с инвариантным коэффициентом,* если существует преобразование Ляпунова такое, что

$$DBD^{-1} = a_0(x)T_\alpha, \qquad (0.5)$$

где $a_0(\alpha(x)) = a_0(x)$.

С операторной точки зрения эти определения означают, что оператор $B = aT_\alpha$ подобен оператору a_0T_α с инвариантным или постоянным коэффициентом. Как уже отмечалось, банахова алгебра, порожденная такими операторами взвешенного сдвига, является коммутативной, а в случае, когда операторы рассматриваются в пространстве $L_2(X,\mu)$, является C^* – алгеброй. Это позволяет, например, получить спектральную теорему для приводимых операторов взвешенного сдвига.

В работе рассмотрен вопрос о приводимости для операторов взвешенного сдвига с непрерывными коэффициентами, порожденных непрерывными периодическими отображениями компактного отделимого топологического пространства X. Такие операторы действуют в классических банаховых пространствах функций на X – пространствах $L_p(X,\mu)$ и $C(X)$. Для произвольных отображений α спектр ОВС зависит от рассматриваемого функционального пространства, но в случае периодического отображения α спектр ОВС одинаков во всех указанных классических пространствах. Полученные в статье результаты также справедливы при рассмотрении операторов в любом банаховом пространстве функций на X, в котором эти операторы ограничены.

1 Факторизация со сдвигом и гомологическое уравнение

Прежде всего заметим, что, в силу компактности X, условие обратимости оператора умножения на непрерывную функцию, входящее в определение преобразования Ляпунова, записывается как условие, что $d(x) \neq 0$ для всех x.

Любое преобразование Ляпунова переводит оператор взвешенного сдвига (0.1) с непрерывным коэффициентом в оператор взвешенного сдвига (с другим непрерывным коэффициентом):

$$DBD^{-1} = DaT_\alpha D^{-1} = a(x)\frac{d(x)}{d(\alpha(x))}T_\alpha.$$

Поэтому вопрос о приводимости оператора эквивалентен вопросу о представлении коэффициента a в виде

$$a(x) = a_0(x)\frac{d(\alpha(x))}{d(x)}, \qquad (1.1)$$

с постоянным или инвариантным a_0. Такое представление называется *факторизацией со сдвигом* функции a. Заметим, что если функция d инвариантная, то при преобразовании Ляпунова оператор переходит в себя. Поэтому функция d определена с точностью до инвариантного множителя.

Подход, основанный на факторизации со сдвигом коэффициента, применялся в основном при рассмотрении операторов взвешенного сдвига на контуре [3], [4]. Эти работы связаны с исследованием сингулярных интегро-функциональных уравнений на контуре Γ, содержащих сингулярный интегральный оператор Коши

$$Su(z) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{u(\xi)}{\xi - z}d\xi.$$

Заметим, что оператор $SD - DS$ является компактным в случае непрерывной функции d и не является компактным в случае кусочно-непрерывной функции. Поэтому условие непрерывности функции d существенно в теории сингулярных интегро-функциональных уравнений.

Вопрос о существовании факторизации со сдвигом для заданной функции тесно связан с разрешимостью гомологического уравнения, соответствующего заданному отображению. Так называются [2], [6], [7], [11] функциональные уравнения вида

$$\varphi(\alpha(x)) - \varphi(x) = f(x). \qquad (1.2)$$

Действительно, пусть $a(x) > 0$ для всех x. Обозначив

$$\varphi(x) = \ln s(x),$$
$$g(x) = \ln a(x),$$
$$\xi(x) = \ln a_0(x)$$

и прологарифмировав равенство (1.1), получаем для функции φ гомологическое уравнение

$$\varphi(\alpha(x)) - \varphi(x) = g(x) - \xi(x).$$

Левая часть гомологического уравнения (1.2) имеет вид $(T_\alpha - I)\varphi$. Поэтому уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда правая часть f принадлежит образу оператора $T_\alpha - I$. В общем случае образ оператора $T_\alpha - I$ незамкнут и, следовательно, не существует явных необходимых и достаточных условий разрешимости гомологического уравнения. Классическим примером гомологического уравнения, обладающего «плохими» свойствами, является уравнение, связанное с иррациональным поворотом окружности [6], [7] . Если окружность реализовать как единичную окружность на комплексной плоскости

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

то такое отображение действует по формуле $\alpha(z) = e^{i2\pi h}z$, где h – иррациональное число.

Патологические свойства соответствующего гомологического уравнения хорошо известны. Например, в [7] доказано, что для любой функции, которая не является полиномом от z, существует такое h, что решение является неизмеримой функцией. Поэтому существование непрерывного или ограниченного решения (и соответственно, приводимость оператора, порожденного иррациональным поворотом, к оператору с постоянным коэффициентом) является исключительным случаем; множество коэффициентов a, для которых возможна факторизация со сдвигом, есть некоторое незамкнутое подмножество в $C(X)$, которое не описывается явно и существенно зависит от арифметических свойств иррационального числа h.

Случай периодического отображения здесь особый: образ оператора $T_\alpha - I$ замкнут, гомологическое уравнение нормально разрешимо и более доступно для исследования. В работе [11] показано, что этот случай единственный: если отображение α обратимо, то гомологическое уравнение нормально разрешимо в пространстве $C(X)$ непрерывных функций на компактном пространстве тогда и только тогда, когда отображение α является периодическим.

Напомним некоторые понятия, связанные со свойством периодичности отображения.

Пусть $\alpha_0(x) \equiv x, \alpha_k(x) = \alpha(\alpha_{k-1}(x)),\ k = 1,2,\ldots$

Отображение α называется *периодическим* с периодом m, если $\alpha_m = \alpha_0$ и $\alpha_k \neq \alpha_0$ для $1 \le k < m$.

Точка x называется *периодической* с периодом $p(x)$, если $\alpha_{p(x)}(x) = x$ и $\alpha_k(x) \neq x$ для $1 \le k < p(x)$.

Если отображение α периодическое с периодом m, то каждая точка x является периодической и число $p(x)$ является делителем m. Заметим, что при этом может быть, что $p(x) < m$ для всех x.

***Пример* 1.1.** Пусть

$$X = \left\{ z = re^{i2\pi t} : 0 \le r \le 1; t = \frac{k}{12}, k \in \{0,1,\ldots,11\} \right\}.$$

Как множество на комплексной плоскости, это пространство состоит из шести отрезков длины 2, середины которых есть точка 0. Отображение $\alpha : X \to X$, заданное формулой

$$\alpha(z) = \begin{cases} e^{i\frac{2}{3}\pi}, & k = 0,2,\ldots,10, \\ -z, & k = 1,3,\ldots,11, \end{cases}$$

является периодическим с периодом 6, но здесь точка 0 неподвижная (имеет период 1), периоды отличных от нуля точек, соответствующих четным k, есть 3, периоды отличных от нуля точек, соответствующих нечетным k, есть 2 и нет точек с периодом 6.

Топологическое пространство X называется α-*приводимым*, если существует разбиение X на два непустые замкнутые подмножества X' и X'', инвариантные относительно отображения α. Топологическое пространство X называется α-*связным*, если такое разбиение невозможно. Заметим, что α-связное пространство может быть несвязным.

Рассматриваемый вопрос связан также со свойством алгебраичности оператора, введенным фон Нейманом. Если отображение α периодическое, то любой оператор взвешенного сдвига с постоянным коэффициентом является алгебраическим. Поэтому необходимым условием приводимости к оператору с постоянным коэффициентом является его алгебраичность.

Линейный оператор A называется *алгебраическим*, если существует полином

$$P(z) = z^l + p_{l-1}z^{l-1} + \ldots + p_0,\ p_k \in \mathbb{C},$$

такой, что $P(A) = 0$.

Такой полином наименьшей степени называется *характеристическим полиномом* оператора и обозначается $Ch_A(z)$. Корни $Ch_A(z)$ называются *характеристическими числами* оператора A.

В конечномерном пространстве любой оператор является алгебраическим. Он является корнем своего характеристического многочлена (теорема Гамильтона – Келли). Частными случаями алгебраических операторов являются *нильпотентные* операторы $(A^m = 0)$, *идемпотентные* операторы $(A^2 = A)$, *инволютивные* операторы $(A^2 = I)$ и *обобщенно инволютивные* операторы $(A^m = I)$. Теория алгебраических операторов построена, например, в [8]. Уравнения с обобщенно инволютивными операторами изучались в [3].

Условие алгебраичности оператора является достаточно сильным и из алгебраичности вытекает ряд свойств, не выполненных для произвольных операторов, но типичных для операторов в конечномерных пространствах. Спектр алгебраического оператора является конечным множеством и совпадает с множеством характеристических чисел. При этом образ оператора $A - \lambda I$ замкнут при любом спектральном значении λ, что не выполнено для произвольных операторов, у которых спектр является конечным множеством.

Необходимые и достаточные условия алгебраичности операторов композиции (без весового коэффициента) были получены в [9]. В работе [10] были получены условия алгебраичности для более сложных операторов взвешенного сдвига и описаны их характеристические полиномы. Нам потребуется основной результат из [10].

Обозначим

$$a_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} a(\alpha_j(x)).$$

***Теорема* 1.1.** *Для оператора взвешенного сдвига B с непрерывным коэффициентом a следующие условия эквивалентны:*

i) *существует полином*

$$P(z) = z^l + p_{l-1}z^{l-1} + \ldots + p_0, p_k \in C, \text{где } p_0 \neq 0,$$

такой, что $P(B) = 0$;

ii) *отображение* α *является периодическим с периодом* m, $a(x) \neq 0$ *для всех* x *и функция* $a_m(x)$ *принимает конечное множество значений.*

При выполнении указанных условий характеристический полином $Ch_B(z)$ *имеет вид*

$$Ch_B(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - \lambda_k), \qquad (1.3)$$

где $n \leq m, n \leq l$, $\lambda_k \neq 0$ *и* $\lambda_k \neq \lambda_j$ *при* $k \neq j$, *т. е. все характеристические числа простые.*

Если, кроме того, пространство X *является* α*-связным, то для алгебраического оператора* $a_m(x) \equiv C = const$ и $\lambda_k^m = C$ для всех k.

При этом в общем случае не все корни степени m *из числа* C *являются характеристическими числами.*

2 Приводимые операторы взвешенного сдвига

Связь задачи факторизации с гомологическим уравнением для функций, принимающих положительные значения, показана выше. В случае комплексно-значных функций при сведении к гомологическому уравнению возникают дополнительные осложнения, связанные с тем, что логарифм является многозначной функцией.

Будем говорить, что *существует непрерывная ветвь логарифма* функции $a(x)$, если существует непрерывная на X вещественно-значная функция ψ такая, что

$$a(x) = e^{\ln|a(x)| + i2\pi\psi(x)}.$$

***Теорема* 2.1.** *Пусть пространство* X *является* α*-связным, отображение* α *является периодическим и* $a(x) \neq 0$ *для всех* x. *Если существует непрерывная на* X *ветвь логарифма коэффициента* a, *то оператор* aT_α *приводится к оператору с инвариантным коэффициентом.*

При этом оператор приводится к оператору с постоянным коэффициентом тогда и только тогда, когда он является алгебраическим.

Доказательство. Рассмотрим гомологическое уравнение

$$\varphi(\alpha(x)) - \varphi(x) = f(x), \qquad (2.1)$$

где

$$f(x) = g(x) - \xi(x),$$
$$g(x) = \ell n\,|\,a(x)\,| + i2\pi\psi(x).$$

Здесь g есть заданная непрерывная функция, а φ и $\xi(x)$ – неизвестные функции.

В силу периодичности отображения α оператор T_α является алгебраическим и имеет, согласно теореме 1.1, простой спектр. Поэтому применимы общие методы исследования алгебраических операторов [8].

Кроме того, здесь имеем равенство $T_\alpha^m = I$, из которого следует, что отображение

$$\mathbb{Z}_m \ni k \to T_\alpha^k \qquad (2.2)$$

есть линейное представление конечной циклической группы $\mathbb{Z}_m$ в пространстве $C(X)$. Применение теории представлений групп [12] позволяет получить более явные результаты, чем в случае произвольных алгебраических операторов.

Заметим, что обычно рассматриваются линейные представления групп в гильбертовы пространства. Но в случае конечных групп основные факты теории представлений имеют чисто алгебраический характер и справедливы в случае представлений в банаховы пространства, в частности, для линейных представлений в пространстве $C(X)$.

Конечная коммутативная группа $\mathbb{Z}_m$ имеет m неприводимых представлений ϱ_j, эти представления одномерны и действуют по формуле

$$\mathbb{Z}_m \ni k \to \varrho_j(k) = \omega^{kj}, \qquad (2.3)$$

где $\omega = e^{\frac{i2\pi}{m}}$, $j = 0, \ldots, m-1$.

Любое линейное представление группы $\mathbb{Z}_m$ разлагается по неприводимым представлениям. Это разложение строится следующим образом. Операторы

$$P_j = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \omega^{-kj} T_\alpha^k \qquad (2.4)$$

являются ограниченными проекторами, при этом

$$\sum_{j=1}^{m-1} P_j = I,\ P_k P_j = 0 \text{ для } k \neq j;$$
$$T_\alpha = \sum_{j=0}^{m-1} \omega^j P_j. \qquad (2.5)$$

Первое и второе из этих равенств означают, что пространство $C(X)$ разлагается в прямую сумму замкнутых векторных подпространств $E_j = ImP_j$, а последнее равенство означает, что на подпространстве E_j оператор T_α действует как умножение на число ω^j.

Сделаем еще одно замечание. Здесь имеем $T_\alpha^m = I$, откуда следует, что все характеристические числа являются корнями из 1 степени m, т.е. имеют вид ω^j. Но может быть, что не все числа ω^j являются характеристическими. Иначе говоря, существуют периодические отображения с периодом m, такие, что характеристический полином для T_α имеет вид

$$Ch_T(z) = \prod_{j=1}^{p} (z^{m_j} - 1),$$

где $m = \prod_{j=1}^{p} m_j$, а степень характеристического полинома есть число $\sum_{j=1}^{p} m_j < m$. В этом случае проектор P_j ненулевой тогда и только тогда, когда ω^j является характеристическим числом оператора T_α.

Отображение с такими свойствами рассмотрено в примере 1.1. В этом примере отображение α является периодическим с периодом $m = 6$, а характеристический полином есть полином степени 4

$$Ch_T(z) = (z+1)(z^3 - 1),$$

характеристические числа есть $\omega^0 = 1, \omega^2$, $\omega^3 = -1, \omega^4$, а числа ω и ω^5 не являются характеристическими для рассматриваемого оператора T_α.

С точки зрения теории представлений это замечание означает, что в общем случае в разложение представления (2.2) входят не все неприводимые представления.

Но пространство E_0 нетривиально, так как содержит постоянные; поэтому число $\omega^0 = 1$ всегда является характеристическим и проектор

$$P_0 = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} T_\alpha^k$$

всегда ненулевой.

Полученное разложение представления позволяет детально исследовать уравнение (2.1). Из (2.5) получаем, что

$$T_\alpha - I = \sum_{j=1}^{m-1} (\omega^j - 1) P_j$$

и

$$Im(T_\alpha - I) = Im\left[\sum_{j=1}^{m-1} P_j\right] = Im(I - P_0) = Ker\ P_0.$$

Таким образом, равенство

$$P_0 f = 0 \qquad (2.6)$$

является необходимым и достаточным условием существования решения уравнения (2.1).

В рассматриваемом гомологическом уравнении правая часть $f(x) = g(x) - \xi(x)$ содержит неизвестную функцию ξ. Поэтому условие разрешимости

$$P_0 f \equiv P_0 g - P_0 \xi = 0 \qquad (2.7)$$

рассматриваем как уравнение относительно функции ξ. Существует много функций ξ, для которых выполнено это равенство. Но нас интересует инвариантная функция ξ. Из условия инвариантности $(T_\alpha \xi = \xi)$ следует, что $P_0 \xi = \xi$; поэтому из (2.7) однозначно находится инвариантная функция

$$\xi(x) = (P_0 g)(x) = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} g(\alpha_j(x)), \qquad (2.8)$$

для которой выполнено условие разрешимости. При сделанном выборе функции ξ выполнено условие разрешимости уравнения (2.1), при этом разные решения отличаются на инвариантную функцию. Поэтому для построения преобразования Ляпунова достаточно построить одно из решений. Такое решение может быть задано выражением

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{\omega^j - 1} P_j f = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{\omega^j - 1}\left[\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \omega^{-kj} T_\alpha^k\right] f.$$

В силу инвариантности функции ξ получаем, что

$$\sum_{k=0}^{m-1} \omega^{-kj} T_\alpha^k \xi = \left[\sum_{k=0}^{m-1} \omega^{-kj}\right] \xi = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{\omega^j - 1}\left[\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \omega^{-kj} T_\alpha^k\right] g = \\ &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left[\sum_{j=1}^{m-1} \frac{\omega^{-kj}}{\omega^j - 1}\right] T_\alpha^k g.\end{aligned} \qquad (2.9)$$

Теперь, положив $d(x) = e^{\varphi(x)}$ и $a_0(x) = e^{\xi(x)}$, из гомологического уравнения получаем факторизацию со сдвигом коэффициента a, что и требовалось.

Здесь выполнено равенство

$$a_0(x)^m = \prod_{j=0}^{m-1} a(\alpha_k(x)),$$

которое означает, что функция $a_0(x)$ есть непрерывная ветвь корня степени m из функции

$$\prod_{j=0}^{m-1} a(\alpha_k(x)).$$

Функция a_0 постоянна (и оператор приводится к оператору с постоянным коэффициентом), тогда и только тогда, когда

$$\prod_{j=0}^{m-1} a(\alpha_k(x)) = const.$$

Согласно теореме 1.1, это есть условие алгебраичности оператора B.

Обозначим

$$\gamma_k = \frac{1}{m}\left[\sum_{j=1}^{m-1} \frac{\omega^{-kj}}{\omega^j - 1}\right].$$

Эти числа не являются целыми и выражение $a(\alpha_k(x))^{\gamma_k}$ задает многозначную функцию. При этом может оказаться, что у этой функции не существует ветви, непрерывной на X. Из (2.9) следует что d представляется в виде

$$d(x) = \prod_{j=0}^{m-1} a(\alpha_k(x))^{\gamma_k},$$

где под правой частью понимается одна из непрерывных ветвей соответствующей многозначной функции, существование которой следует из условий теоремы. Теорема доказана.

Следствие. *Если отображение периодическое, то любой оператор взвешеного сдвига приводится к оператору* $a_0 T_\alpha$, *у которого* $|a_0(x)|$ *является инвариантной функцией.*

Доказательство. Рассмотрим гомологическое уравнение

$$\varphi(\alpha(x)) - \varphi(x) = f(x), \qquad (2.10)$$

где

$$f(x) = g(x) - \xi(x), \quad g(x) = \ell n\,|\,a(x)\,|.$$

Это уравнение разрешимо, если, как выше, взять

$$\xi(x) = (P_0 g)(x) = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} g(\alpha_j(x)).$$

Тогда функция $d(x) = e^{\varphi(x)}$ порождает требуемую факторизацию со сдвигом коэффициента a.

3 Топологические препятствия для приводимости

Использованное в теореме 2.1 условие существования непрерывной ветви логарифма не является необходимым. Покажем на примере, что это условие существенно.

***Пример* 3.1**. Пусть $X = \mathbb{S}^1$ и $\alpha(z) = \overline{z}$, это пример отображения, изменяющего ориентацию окружности. Для коэффициента $a(z) = z$ здесь выполнено $a(z)a(\alpha(z)) = z\overline{z} = 1$ и оператор

$$Bu(z) = zu(\overline{z}))$$

является алгебраическим.

Но для коэффициента $a(z) = z$ не существует факторизация вида

$$a(z) = a_0(z)\frac{d(\overline{z})}{d(z)}. \qquad (3.1)$$

Препятствием для факторизации здесь является индекс Коши $ind[a]$ непрерывной невырождающейся функции a, который определяется как приращение аргумента при обходе контура, деленное на 2π. В этом примере условие существования непрерывной ветви логарифма есть условие $ind[a] = 0$, для функции $a(z) = z$ это условие не выполнено – имеем $ind[a] = 1$.

Предположим, что выполнено (3.1), где функция $a_0(z)$ инвариантна:

$$a_0(\overline{z}) = a_0(z).$$

Из инвариантности функции $a_0(z)$ следует, что $ind[a_0] = 0$. Кроме того,

$$ind[d(\overline{z})] = ind\left[\frac{1}{d(z)}\right] = -ind[d(z)],$$

откуда следует, что

$$ind\left[a_0(z)\frac{d(\overline{z})}{d(z)}\right] = -2ind[d].$$

Таким образом, индекс Коши правой части из (3.1) является четным числом. Поэтому, если индекс Коши коэффициента a является нечетным числом, факторизация невозможна. В приведенном примере $ind[a] = 1$ и равенство (3.1) невозможно.

В общем случае возникают аналогичные препятствия для приводимости оператора. Пусть X есть произвольное компактное пространство и

$$\gamma : [0,1] \ni t \to \gamma(t) \in X$$

есть нетривиальная петля в X (непрерывное отображение, такое, что $\gamma(0) = \gamma(1)$, негомотопное постоянному). Тогда функция $a(\gamma(t))$ является непрерывной комплексно-значной функцией на $[0,1]$, такой, что $a(\gamma(0)) = a(\gamma(1))$. Приращение непрерывной ветви аргумента этой функции на $[0,1]$ кратно 2π, что позволяет определить понятие индекса Коши $ind_\gamma[a]$ на петле. Таким образом, в общем случае может существовать много топологических инвариантов (индексы Коши на каждой нетривиальной петле), от которых зависит приводимость оператора.

4 Условия приводимости оператора, порожденного симметрией квадрата

Рассмотрим детально вопрос о препятствиях к приводимости для конкретного примера. Пусть X есть граф, представляющий собой квадрат на плоскости с двумя средними линиями:

$$X = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \{-1, 0, 1\},$$
$$x_2 \in [-1,1]\} \bigcup \{(x_1, x_2) : x_1 \in [-1,1],$$
$$x_2 \in \{-1, 0, 1\}\}.$$

Построим граф Y, полученный разрезанием графа X в вершинах квадрата. Это означает, что вместо каждой из вершин $(\pm1, \pm1)$ рассматриваем две точки $(\pm1, \pm1)^{\pm}$, считая, что одна из этих точек принадлежит одной стороне квадрата, примыкающей к вершине, а вторая точка принадлежит другой стороне квадрата, примыкающей к то же вершине. Граф Y может быть реализован как подмножество в $\mathbb{R}^3$, состоящее из шести отрезков:

$$Y = \{(0, x_2, 0) : x_2 \in [-1,1]\} \bigcup$$
$$\bigcup \{(x_1, 0, 0) : x_1 \in [-1,1]\} \bigcup$$
$$\bigcup \{(-1, x_2, x_2) : x_2 \in [-1,1]\} \bigcup$$
$$\bigcup \{(1, x_2, -x_2) : x_2 \in [-1,1]\} \bigcup$$
$$\bigcup \{(x_1, -1, -x_1) : x_1 \in [-1,1]\} \bigcup$$
$$\bigcup \{(x_1, 1, x_1) : x_1 \in [-1,1]\}.$$

При такой реализации графа получаем, что

$$(\pm1, \pm1)^{\pm} = (\pm1, \pm1, \pm1) \in Y.$$

Выбор знаков здесь сделан так, чтобы при обходе сторон квадрата против часовой стрелки в каждой вершине мы переходили от точки $(\pm1, \pm1)^-$ к точке $(\pm1, \pm1)^+$.

Функция $a \in C(X)$ естественным образом задает функцию $\tilde{a}(x_1, x_2, x_3) = a(x_1, x_2)$, непрерывную на Y, при этом

$$\tilde{a}((\pm1, \pm1)^+) = \tilde{a}((\pm1, \pm1)^-).$$

Граф Y не содержит нетривиальных петель, поэтому у функции $\tilde{a}$ на Y существует непрерывная ветвь логарифма, т. е. имеется представление

$$\tilde{a}(x) = e^{g(x)},\ g(x) = \ell n\,|\,a(x)\,| + i2\pi\psi(x),$$

при этом функция $\psi(x)$ непрерывна на Y, но может быть разрывной на X. Но разность

$$\chi(a;(\pm1,\pm1)) := \psi((\pm1,\pm1)^{+}) - \psi((\pm1,\pm1)^{-})$$

является целым числом. Таким образом, для рассматриваемого пространства X получаем четыре индекса Коши $\chi(a;(\pm1,\pm1))$, являющиеся топологическими инвариантами – это скачки функции ψ в соответствующих точках. Приводимость оператора зависит от этих топологических инвариантов, эта зависимость для разных отображении имеет разный характер.

***Теорема* 4.1.** *Пусть* α *есть отражение относительно диагонали* $x_1 = x_2$, *т. е.*

$$\alpha(x_1, x_2) = (x_2, x_1).$$

Оператор $B = aT_\alpha$ *на* X *приводим к оператору с инвариантным коэффициентом тогда и только тогда*, *когда выполнены три условия*

1) *число* $\chi(a;(1,1))$ *является четным*;

2) *число* $\chi(a;(-1,-1))$ *является четным*;

3) *число* $\chi(a;(-1,1)) + \chi(a;(1,-1))$ *является четным.*

Доказательство. Поскольку на Y существует непрерывная ветвь логарифма функции $\tilde{a}$ на Y, для этой функции, согласно теореме 2.1, существует факторизация со сдвигом:

$$\tilde{a}(x) = \tilde{a}_0(x)\frac{\tilde{d}(\alpha(x))}{\tilde{d}(x)}. \tag{4.1}$$

Здесь отображение α имеет период 2, оператор T_α задает представление группы $\mathbb{Z}_2$. Эта группа имеет только два неприводимых представления. Поэтому, согласно приведенным выше формулам,

$$\tilde{a}_0(x) = e^{\zeta(x)},$$

$$\begin{aligned}\zeta(x) &= \frac{1}{2}[g(x) + g(\alpha(x))] = \\ &= \frac{1}{2}[\ell n\,|\,a(x)\,| + \ell n\,|\,a(\alpha(x))\,|] + \\ &+ i2\pi\frac{1}{2}[\psi(x) + \psi(\alpha(x))],\end{aligned} \tag{4.2}$$

Инвариантная функция a_0 на Y порождает на X инвариантную непрерывную функцию $a_0(x_1, x_2) = \tilde{a}(x_1, x_2, x_3)$ тогда и только тогда, когда

$$\tilde{a}_0((\pm1,\pm1)^{+}) = \tilde{a}_0((\pm1,\pm1)^{-}).$$

Это условие выполнено тогда и только тогда, когда скачок функции

$$\tilde{\zeta}(x) = \frac{1}{2}[\psi(x) + \psi(\alpha(x))]$$

в каждой из четырех точек $(\pm1,\pm1)$ является целым числом. Обозначим через $\kappa(\tilde{\zeta};(\pm1,\pm1))$ скачок функции $\tilde{\zeta}$ в точке $(\pm1,\pm1)$.

Функция $\tilde{\zeta}$ непрерывна в точках $(1,1)$ и $(-1,-1)$, т. е.

$$\kappa(\tilde{\zeta},(1,1) = \kappa(\tilde{\zeta},(-1,-1) = 0.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned}&\kappa(\tilde{\zeta};(-1,1)) = -\kappa(\tilde{\zeta};(1,-1)) = \\ &= \frac{1}{2}[\chi(a;(-1,1)) - \chi(a;(1,-1))].\end{aligned}$$

Таким образом, условием непрерывности функции a_0 является четность числа

$$\chi(a;(-1,1)) - \chi(a;(1,-1)).$$

Аналогично, имеем

$$\tilde{d}(x) = e^{\varphi(x)},$$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= -\frac{1}{4}[g(x) - g(\alpha(x))] = \\ &= \frac{1}{4}[\ell n\,|\,a(x)\,| - \ell n\,|\,a(\alpha(x))\,|] + \\ &+ i2\pi\frac{1}{4}[\psi(x) - \psi(\alpha(x))],\end{aligned} \tag{4.3}$$

Функция $\tilde{d}$ порождает на X непрерывную функцию d, если

$$\tilde{d}((\pm1,\pm1)^{+} = \tilde{d}((\pm1,\pm1)^{-}.$$

Это условие выполнено тогда и только тогда, когда скачок $\kappa(\tilde{\psi};(\pm1,\pm1))$ функции

$$\tilde{\psi}(x) = \frac{1}{4}[\psi(x) - \psi(\alpha(x))]$$

в каждой из точек $(\pm1,\pm1)$ является целым числом.

Непосредственные вычисления показывают, что эти скачки есть числа:

$$\kappa(\tilde{\psi};(1,1)) = \frac{1}{2}\chi(a;(1,1));$$

$$\kappa(\tilde{\psi};(-1,-1)) = \frac{1}{2}\chi(a;(-1,-1));$$

$$\begin{aligned}&\kappa(\tilde{\psi};(-1,1)) = -\kappa(\tilde{\psi};(1,-1)) = \\ &= \frac{1}{2}[\chi(a;(-1,1)) + \chi(a;(1,-1))].\end{aligned}$$

Таким образом, условием непрерывности функции a_0 является четность чисел $\chi(a;(1,1))$, $\chi(a;(-1,-1))$ и $\chi(a;(-1,1)) + \chi(a;(1,-1))$. Заметим, что число $\chi(a;(-1,1)) + \chi(a;(1,-1))$ четно тогда и только тогда, когда четно $\chi(a;(-1,1)) - \chi(a;(1,-1))$. Теорема доказана.

Заметим, что из формулы (4.2) получаем, что в рассматриваемом примере

$$a_0(x) = [a(x)a(\alpha(x))]^{\frac{1}{2}},$$

причем существование непрерывной на X ветви квадратного корня следует из условия 3) теоремы.

Из формулы (4.3) следует, что

$$d_0(x) = \left[\frac{a(x)}{a(\alpha(x))}\right]^{\frac{1}{4}},$$

причем условия 1)–3) из формулировки теоремы есть условия существования непрерывной на X ветви корня четвертной степени.

Серинь Алиу Ло выражает благодарность кафедре функционального анализа БГУ за внимание во время стажировки в Белорусском государственном университете, одним из результатов которой является данная работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Антоневич*, *А.Б.* Линейные функциональные уравнения. Операторный подход / А.Б. Антоневич. – Минск: Университетское. – 1988. – 230 с.

2. *Katok*, *A.* Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems / A. Katok, B.Hasselblatt. – Cambridge: Cambridge University Press. – 1997. – 803 p.

3. *Karapetiants*, *N.* Equation with involutive operators / N. Karapetiants, S. Samko. – Boston: Birkh*ä*usser. – 2001. – 427 p.

4. *Kravchenko*, *V.G.* Introduction to the theory of singular integral operators with shift / V.G. Kravchenko, G.S. Litvinchuk. – Dordrecht: Kluver Acad. Publ. – 1994. – 288 p.

5. *Еругин*, *Н.П.* Приводимые системы / Н.П. Еругин // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – 1946. – Т. 13. – С. 3–96.

6. *Аносов*, *Д.В.* Аддитивное функциональное гомологическое уравнение, связанное с эргодическим поворотом окружности / Д.В. Аносов // Изв. АН СССР, Сер. мат. – 1973. – Т. 37, № 6. – С. 1259–1274.

7. *Гордон*, *А.Я.* Достаточное условие неразрешимости аддитивного функционального гомологического уравнения, связанного с эргодическим поворотом окружности / А.Я. Гордон // Функц. анализ и прил. – Т. 9, № 6. – С. 71–72.

8. *Przeworska – Rolewicz*, *D.* Equations with transformed argument / D.Przeworska – Rolewicz. – Amsterdam and Warsaw: Elsevier scientific Publ. Comp. and Polish Scientific Publishers, 1973.

9. *Bottcher*, *A.* Algebraic compositions operators / A. Bottcher, H. Heidler // Integral equations and operator theory. – 1992. – Vol. 15. – P. 389–411.

10. *Ло*, *С.А.* Условия алгебраичности оператора взвешенного сдвига, порожденного потенциально периодическим отображением / Серинь Алиу Ло, Мусса О.А. Салем // Доклады НАН Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 3. – С. 17–20.

11. *Belitskii*, *G.* On the normal solvability of cohomological equations on topological spaces / G. Belitskii, Y. Lyubich // Operator theory: Advances and applications. – 1998. – Vol. 103. – P. 75–87.

12. *Желобенко*, *Д.П.* Введение в теорию представлений / Д.П. Желобенко. – М.: Факториал Пресс, 2001. – 136 с.

Поступила в редакцию 14.02.15.

УДК 517.553

ОБ ОПЕРАТОРЕ СЛЕДА В АНАЛИТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ БЕРГМАНА В ОБЛАСТЯХ ЗИГЕЛЯ ВТОРОГО ТИПА

Р.Ф. Шамоян, С.М. Куриленко

Брянский государственный университет, Брянск, Россия

ON A TRACE OPERATOR IN BERGMAN TYPE ANALYTIC SPACES IN SIEGEL DOMAINS OF THE SECOND TYPE

R.F. Shamoyan, S.M. Kurilenko

Bryansk State University, Bryansk, Russia

Получен новый точный результат для оператора следа в аналитических пространствах Бергмана на произведениях областей Зигеля второго типа, этот результат обобщает ранее известные результаты в областях менее общего типа. Это первые результаты такого рода для областей данного типа.

Ключевые слова: *следы, пространства Зигеля, аналитические функции, пространства Бергмана.*

A new sharp result for a trace operator in analytic Bergman spaces in products of Siegel domains of the second type extending previously known assertions in less general domains is provided. These are the first results of this type for such a type product-domains.

Keywords: *Traces, Siegel domains, analytic functions, Bergman-type spaces.*

Mathematics Subject Classification (2010): Primary 42B15, Secondary 42B30.

Introduction

The most classical example of the most typical bounded Siegel domain is a bounded strictly pseudoconvex domain Ω with smooth boundary in C^n is a unit ball $B=\{z:|z|<1\}$. The basic facts of the theory of analytic functions by each variable in products of unit balls $B\times...\times B$ were developed recently in [9], [10], [18]. It is natural to pose various problems even in more general situations, namely to consider various problems in products of more general Siegel domains in C^n. It is a well-known fact that products of bounded strictly pseudoconvex Ω domains in C^n are again bounded and pseudoconvex and the paper [20] was probably the first one where interpolation properties of analytic functions on such product domains $\Omega\times...\times\Omega$ were studied (see also recent paper [14] and references there). Later various results in products of such pseudoconvex domains appeared in literature (see, for example, [21] and references there). The natural question is to consider products of even more general unbounded Siegel and bounded Siegel domains in C^n simultaneously (in very particular case it is a simple polydisk). And the most general examples here are general Siegel domains of the second type (direct generalizations of bounded strictly pseudoconvex and unbounded tubular domains over symmetric cones simultaneously), namely $\Omega\times...\times\Omega\subset C^{mn}$. Note for $m=1$ case these general Siegel domains of the second type in C^n were studied before (see, for example [1], [2], [16], [19], and [6] and various references there). This paper is a continuation of a long series of papers of the first author on traces in analytic function spaces on product domains. The main goal of this paper is to try to find complete analogues of our previous sharp results on traces of analytic function spaces in a unit ball (and products of unit balls) $B\times...\times B$ in C^n in more general case of Siegel domains of second type (and even in products of such domains). Namely in this note we plan to extend our sharp results on a trace operator in Bergman spaces from [10]. In [10] it is given for the unit ball of C^n case. We intend to extend that result to the case of general Siegel domains of the second type. See also for related results on traces [7], [4], [11], [12], [18] and references there. The base of all our proofs are properties of Bergman projections in Siegel domains of the second type given in [1]–[2] and in [16], [19]. The estimates of Bergman kernel and the Bergman representation formula from [1]–[2] and [16], [19] are also playing an important role in our proofs below. Note in addition to the arguments we used in this paper are very close to the arguments which were used before in [4] and [7], [11] in less general domains. Let us mention [13], [14], [17] where recently some new sharp results on products of the most typical bounded and unbounded Siegel domains of the second type (bounded strictly pseudoconvex and tubular domains over symmetric cones) were also obtained. We denote various constants as usual by C or c with indexes. We finally mention also [12] where trace theorems in certain unusual domains were proved. We alert the reader our exposition is sometimes sketchy. And the reason here is that all our proofs have similarities with parallel assertions and proofs in simpler domains.

1 Notations, definitions and preliminaries

We first recall some basic facts on Siegel domains of the second type and establish basic notations to formulate our main theorems in Siegel domains of the second type and in products of such Siegel domains. All facts we indicate below can be seen in [1], [2], [3], [16] and [19]. Recall first the explicit formula for the Bergman kernel function is known for very few domains. The explicit forms and zeros of the Bergman kernel function for Hartogs domains and Hartogs type domains (Cartan-Hartogs domains) were found only recently. On the other hand in strictly pseudoconvex domains the principle part of the Bergman kernel can be expressed explicitly by kernels closely related to the so-called Henkin-Ramirez kernel (see, for example, [20], [3], [6], [17] and references there). The Bergman kernel

$$b\big((\tau_1,\tau_2),(\tau_3,\tau_4)\big)$$

for Siegel domain of the second type was computed explicitly (see [1], [2], [3], [16], [19]). It is an integral via V^* a convex homogeneous open irreducible cone of rank l in R^n, a conjugate cone of V cone and which also contains no straight line and in that integral the fixed Hermitian form from definition of D Siegel domain(see below for definition) participates.(see for details of this [1], [2] and also an important paper [3]). This fact was heavily used in [1], [2] in solutions of several classical problems in Siegel domains of the second type. We will need now some short, but more concrete review of certain results from [1], [2] to make this exposition more complete. To be more precise the authors in [1], [2] showed that on homogeneous Siegel domain of type 2 under certain conditions on parameters the subspace of a weighted L^p space on D for all positive p consisting of holomorphic functions are reproduced by a concrete weighted Bergman kernel which we just mentioned. They also obtain some standard L^p estimates for weighted Bergman projections in this case. The proof relies on direct generalization of the Plancherel-Gindikin formula for the Bergman space A^2 (see [1], [2]). We remind the reader that the Siegel domain of type 2 associated with the open convex homogeneous irreducible cone V of rank l which contains no straight line, $V \in R^n$, and a V – Hermitian homogeneous form F which act from product of two C^m into C^n is a set of points (w,τ) from C^{m+n} so that the difference D of $\Im w$ and the value of F on (τ,τ) is in V cone. This domain is affine homogeneous and we now should recall the following expression for the Bergman kernel of

$$D = D(V,F).$$

Let D be an affine-homogeneous Siegel domain of type 2. Let $dv(z)$ or $(d\nu(z))$ denote the Lebesgue measure on D domain and let $H(D)$ denote the space of all holomorphic functions on D. The Bergman kernel is given by the following formula (see [1]) for $(\tau_1,\tau_2)\in D$ and $(\tau_3,\tau_4)\in D$

$$b\big((\tau_1,\tau_2),(\tau_3,\tau_4)\big) = \left(\frac{\tau_1-\overline{\tau}_3}{2i} - (F(\tau_2,\tau_4))^{2d-q},\right.$$

$$\left.\text{and we put also for}\quad m\in N\right),$$

$$b^m\big((\tau_1,\tau_2),(\tau_3,\tau_4)\big) = \left(\frac{\tau_1-\overline{\tau}_3}{2i} - F(\tau_2,\tau_4)^{(2d-q)m}\right),$$

(see [1], [2]), where two vectors $q=(q_i)$ and $d=(d_i)$ and in addition $n=(n_i)$, (here the i index is running from 1 to l) are specified via $n_{i,k}$, where these $n_{i,k}$ numbers are dimensions of certain $(R_{i,k})$ and $(C_{i,j})$ subspaces of the certain canonical decomposition of C^{m+n} and R^n via the V cone from definition of our D domain (see for some additional details about this [1], [2], [16]). We will call this family of triples parameters of a Siegel domain D of the second type. They will constantly appear in all our main theorems. As usual $H(D)$ is endowed with the topology of uniform convergence on compact subsets of D.

The Bergman projection P of D is as usual the orthogonal projection of Hilbert space $L^2(D,d\nu)$ onto its subspace $A^2(D)$ consisting of holomorphic functions. Moreover it is known P is the integral operator defined on Hilbert space $L^2(D,d\nu)$ by the Bergman kernel $b(z,\zeta)$ which for our D domains was computed for example in [3].

Let r be a real number, for example. We fix it. Since D is homogeneous the $\zeta\to B(\zeta,\zeta)$ function does not vanish on D, we can set weighted L^p spaces as follows.

$$L^{p,r}(D) = L^p(D, b^{-r}(\zeta,\zeta)d\nu(\zeta)), 0<p<\infty,$$

(see [1], [2]).

Let p be an arbitrary positive number. The weighted Bergman space will be denoted as usual by $A^{p,r}(D)$, it is the analytic part of $L^{p,r}(D)$, with usual modification for $p=\infty$ case (see [1], [2]). We also put $A^{p,0}=A^p(D)$. The so-called weighted Bergman projection P_ε is the orthogonal projection of Hilbert space $L^{2,\varepsilon}(D)$ onto $A^{2,\varepsilon}(D)$. These facts can be found in [1], [2]. It is proved in [1], [2] that there exists a real number $\varepsilon_D<0$ such that $A^{2,\varepsilon}(D)=\{0\}$ if $\varepsilon\le\varepsilon_D$; and that for $\varepsilon>\varepsilon_D$, P_ε is the integral operator defined on $L^{2,\varepsilon}(D)$ by the weighted Bergman kernel $c_\varepsilon b^{1+\varepsilon}(\zeta,z)$. In all our work we shall assume that $\varepsilon > \varepsilon_D$.

The norm $\| \ \|_{p,r}$ of $A^{p,r}(D)$ with $r > \varepsilon_D$ is defined by

$$\|f\|_{p,r} = \left(\int_D |f(z)|^p \, b^{-r}(z,z)d\nu(z)\right)^{\frac{1}{p}}, \ f \in A^{p,r}(D)$$

with usual modification for $p=\infty$ case. Let further $dv_\beta = b^{-\beta}(z,z)dv(z)$, $\beta \in R$, $z \in D$.

We need some assertions (see [1], [2], [16]), namely some basic facts on Bergman kernel and Bergman projection in Siegel domains of the second type. They will be partially used by us below in proofs of our theorems. Some proofs of these preliminaries are rather intricate [1], [2], [16]. We indicate for readers in advance that some assertions below involving integrals can be easily extended to m-products of Siegel domains of second type by simple application of "one variable" result m-times by each variable separately. This procedure iswell- known in much simpler case of polydisk (see, for example, [4], [5]).

***Lemma* 1.1.** *Let $h \in L^\infty(D)$. Take $\rho > \rho_0$, for a large fixed ρ_0. Then the function*

$$z \to G(z) = \int_D b^{1+\rho}(z,\zeta)h(\zeta)d\nu(\zeta)$$

satisfies the estimate $\sup\limits_{z\in D} |G(z)|\, b^{-\rho}(z,z) \le c\|h\|_\infty$ *and $G \in H(D)$.*

The following lemma is a complete analogue of the so-called Forelly-Rudin type estimate for our Siegel domains of the second type.

***Lemma* 1.2.** *Let α and ε be in R^l, $(\zeta,v) \in D$. Then we have*

$$\int_D |b^{1+\alpha}((\zeta,v),(z,u))|\, b^{-\varepsilon}((z,u),(z,u))dv(z,u) < \infty$$

if and only if $\varepsilon_i > \dfrac{n_i+2}{2(2d-q)_i}$ *and*

$$\alpha_i - \varepsilon_i > \frac{n_i}{-2(2d-q)_i}, \ i = 1,\dots,l.$$

The following lemma is another complete analogue of the so-called Forelly-Rudin type estimates for our Siegel domains of the second type (note these type estimates are well-known in simpler domains)

***Lemma* 1.3.** *Let α and ε be in R^l, $(\zeta,v) \in D$. Then for* $\varepsilon_i > \dfrac{n_i+2}{2(2d-q)_i}$ *and* $\alpha_i - \varepsilon_i > \dfrac{n_i}{-2(2d-q)_i}$, $i = 1,\dots,l$

$$\int_D |b^{1+\alpha}((\zeta,v),(z,u))|\, b^{-\varepsilon}((z,u),(z,u))dv(z,u) = $$
$$= c_{\alpha,\varepsilon} b^{\alpha-\varepsilon}((\zeta,v),(\zeta,v)).$$

The following lemma is a version of classical reproducing Bergman formula for Bergman spaces in Siegel domains of the second type.

***Lemma* 1.4.** *Let r be a vector of R^l such that* $r_i > \dfrac{n_i+2}{2(2d-q)_i}$ *for all $i = 1,\dots,l$ and a p is a real number such that*

$$1 \le p < \min\left\{\frac{n_i - 2(2d-q)_i(1+r_i)}{n_i}\right\} = \tilde{q}.$$

Then for all $\varepsilon \in R^l$ such that

$$\varepsilon_i > \frac{n_i+2}{2(2d-q)_i}\frac{p-1}{p} + \frac{r_i}{p}, \ i = 1 \dots l$$

the following equality holds $P_\varepsilon f = f$, $f \in A^{p,r}$.

We list in lemma 1.5 some other properties of Bergman kernel. The last estimate in assertion below is an embedding theorem. It relates the so-called growth spaces with Bergman spaces. (see also the complete analogue of this result in other simpler domains in [11], [12] and in [4], [5]).

***Lemma* 1.5.** *Let $\alpha \in R^l$; $\alpha_j > 0$ or $\alpha_j = 0$, $j = 1,\dots,l$. Then*

$$|b^\alpha((\zeta,v),(z,u))| \le c_\alpha b^\alpha((\zeta,v),(\zeta,v))$$

and

$$|b^\alpha((\zeta,v)+(\zeta',v');(z,u)+(z',u'))| \le$$
$$\le c_\alpha b^\alpha((\zeta,v),(\zeta,v))$$

for all $(\zeta,v),(\zeta',v'),(z,u),(z',u)$ in D. For all $f \in A^{p,r}(D)$, $p>0$

$$|f(z,u)|^p \le c b^{1+r}((z,u),(z,u))\|f\|_{p,r}^p,$$

for all (z,u) points taken from D.

The following result is crucial for the proof of our theorems. It concerns the boundedness of Bergman type projection in weighted Bergman spaces. Note, this fact is classical in simpler domains and it has also many applications in analytic function theory (see [4], [5]).

***Proposition* 1.1.** *Let k and r be in R^l such that* $k_i > \dfrac{1}{(2d-q)_i}$ *and* $r_i > \dfrac{n_i+2}{2(2d-q)_i}$, $i = 1,\dots,l$. *Then P_k is bounded from $L^{p,r}(D)$ into $A^{p,r}(D)$ if*

$$\max_{i=1,\dots,l}\left\{1, \frac{2n_i + 2 - 2(2d-q)_i r_i}{n_i + 2 - 2(2d-q)_i k_i}\right\} < p <$$
$$< \min_{i=1,\dots,l}\left\{\frac{2n_i + 2 - 2(2d-q)_i r_i}{n_i}\right\}.$$

We denote below everywhere by p_1 and by p_0 the right and the left end of the interval for p parameter which can be seen in proposition 1.1. The following assertion is a base of proof of theorem 2.3. It provides an integral representation for the so-called analytic "growth space" on Siegel domains of the second type.

***Proposition* 1.2.** *Let r and ε be two vectors of R^l such that*

$$\varepsilon_i > \frac{n_i}{-2(2d-q)_i}; \ r_i > \frac{n_i+2}{2(2d-q)_i} + \varepsilon_i, \ i = 1,...,l.$$

Let G be in $H(D)$ so that

$$\|G\|_{A_\varepsilon^\infty} = \sup_{z\in D}\{| G(z) | b^{-\varepsilon}(z,z)\} < \infty.$$

Then $P_r G = G$.

The following result explains the structure of functions from Bergman spaces on Siegel domains of the second type. It is an extension of a classical theorem on atomic decomposition of Bergman spaces in the unit disk on a complex plane (see, for example, [19] and references there).

***Proposition* 1.3.** *Let $D \subset C^n$ be a symmetric Siegel domain of type II, $p \in \left(\frac{2n}{2n+1}, 1\right)$, $r \in R^l$; $r_i > \frac{n_i+2}{2(2d-q)_i}$. Then there are two constants $c = c(p,r)$ and $c_1 = c_1(p,r)$ such that for every $f \in A^{p,r}(D)$ there exists an l^p sequence $\{\lambda_i\}$ such that*

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i b^{\alpha/p}(z,z_i) b^{\frac{1+r-\alpha}{p}}(z_i,z_i)$$

where $\{z_i\}$ is a lattice in D and the following estimate holds

$$c\|f\|_{p,r}^p \le \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^p \le c_1 \|f\|_{p,r}^p,$$

where α is a special fixed vector depending on p,r and parameters of Siegel domain (see for this vector [19]).

2 Sharp theorems on traces in analytic spaces of Bergman type on Siegel domains and on products of Siegel domains of the second type

The goal of this main section is to extend the main result of [10], [18] on traces given there for particular case of the unit ball to general homogeneous Siegel domains of the second type. We start, however, with some interesting discussion related with these issues. First we define and fix some properties of Bergman-type spaces on products of Siegel domains of the second type $A^{p_1,...,p_m,\varepsilon_1,...,\varepsilon_m}(D^m)$, $m > 1$. These spaces in particular case of the unit ball are closely related to Trace operator and multifunctional analytic function spaces in higher dimension (see, for example, [9], [10], [18] and various references there). More precisely we consider spaces of all analytic functions (analytic by each variable separately) $f(z_1,...,z_m) \in H(D\times...\times D)$. Then we define for $p_i \in (0,\infty)$, $\varepsilon_i \in R$, $\varepsilon_i > \varepsilon_D$, $i = 1,...,m$ the following spaces on product domains. We define first a subset of Locally integrable functions on D^m.

$$(L^{p_1,...,p_m,\varepsilon_1,...,\varepsilon_m})(D^m) =$$

$$= \left\{ \text{locally integrable} : \|f\|_{\vec{p},\vec{\varepsilon}} = \right.$$

$$= \left(\int_D \left(\int_D \dots \left(\int_D | f(z_1,...,z_m) |^{p_1} b^{-\varepsilon_1}(z_1,z_1) dv(z_1) \right)^{p_2/p_1} \times \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \times b^{-\varepsilon_2}(z_2,z_2) dv(z_2) \right) \right)^{1/p_m} < \infty \right\}, m \in N,$$

and $A^{\vec{p},\vec{\varepsilon}} = H(D^m) \bigcap L^{\vec{p},\vec{\varepsilon}}(D^m)$. Many general issues related to various functional spaces on product domains can be seen in [15]. Later this topic was developed by many authors (see, for example, for some new analytic spaces on products domains [18] and references there). Bergman-type mixed norm spaces in products of Siegel domains of the second type for $\min_i(p_i) > 1$, $j = 1,...,m$ are Banach spaces and complete metric for other values of parameters. Note for very particular case when D is C_+ (upper half space) or when D is a unit disk on a complex plane C and all $p_j = p$ for each j from 1 to m these are well-known analytic Bergman type spaces in a polydisk or polyhalspace (see [4], [5] and [18]).

A natural question is to try to understand the structure of these new interesting spaces, and in particular to extend results obtained for $m = 1$ in [1]–[2] to this general $m > 1$ case. In this paper we consider only particular $p_j = p$ case, where $j = 1,...,m$. Our last theorems are sharp trace theorems for these spaces for this particular case. In addition many questions concerning various embedding between such analytic Bergman type spaces with vector p also arise naturally. We note also the study of these type classes on product domains in most typical Siegel domains (bounded or unbounded)bounded strictly pseudoconvex domains or tubular domains over symmetric cones or polyball was started in particular recently in papers of first author and coauthors (see [13], [14], [17]). We mention also [20] and [21] for some results in this area. Some new results about these spaces in particular case of a polyball can be seen in [18].We will need the following simple observation. In some situations using by each variable separately *m*-times the “one dimensional result” we get a similar result but for $D\times...\times D$ product domains. This observation can be applied to various assertions we had above.

As an example we note easily that, for example, based on last part of Lemma 1.5 we have.

$$(\sup_{z_1,...,z_m}) | f(z_1,...,z_m) |^p \times$$

$$\times b^{-(1+r_1)}(z_1,z_1)...b^{-(r_m+1)}(z_m,z_m) \le C_k(f) \le$$

$$\le c\int_D \dots \int_D |f(z_1,...,z_m)|^p \prod_{j=1}^m b(z_j,z_j)^{-r_j} dv(z_1)...dv(z_m)$$

where

$$C_k(f) = \sup_{z_1,...,z_k} \int_D \dots \int_D |f(z_1,...,z_k,z_{k+1},...,z_m)|^p \times$$

$$\times \left(\prod_{j=k+1}^m b(z_j,z_j)^{-r_j} \right) dv(z_{k+1})...dv(z_m) \times$$

$$\times\left(\prod_{j=1}^{k} b(z_j,z_j)^{-(1+r_j)}\right).$$

Since $C_k(f)\le \tilde{C}_k(f)\le c\|f\|_{A^{\vec{p},\vec{r}}}$ where

$$\tilde{C}_k(f)=\sup_{z_1,\dots,z_{k-1}}\int_D\dots\int_D\left[\sup_{z_k}|f(\vec{z})|^p\, b^{-(1+r_k)}(z_k,z_k)\right]\times$$

$$\times\prod_{j=k+1}^{m} b(z_j,z_j)^{-r_j}\,dv(z_{k+1})...dv(z_m)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{k-1} b^{-(1+r_j)}(z_j,z_j).$$

Defining $L^{\vec{p},\vec{\varepsilon}}$ and $A^{\vec{p},\vec{\varepsilon}}$ it is natural also to consider $p_i=\infty$ cases . For $m=2$ case these "norms" will look like

$$\sup_{z_2}\left(\int_D|f(z_1,z_2)|^{p_1}(b^{-\varepsilon}(z_1,z_1))dv(z_1)\right)^{p_2/p_1}(b^{-\varepsilon}(z_2,z_2))$$

for $A_\varepsilon^{p_1,\infty}$ or

$$\int_D\left(\sup|f(z_1,z_2)|(b^{-\varepsilon}(z_1,z_1))\right)^{p_2}(b^{-\varepsilon}(z_2,z_2))dv(z_2)$$

for $A_\varepsilon^{\infty,p_2}$. We define $A_s^{\infty,\infty}(D^m)$ using same ideas.

Next we can easily note that almost all lemmas above can be extended to the product $D\times...\times D$ case. For example, using Bergman reproducing formula we discussed in lemmas above, namely the $P_\varepsilon f=f$ equation by each variable separately we will set the reproducing formula for $A^{p,r}(D^m)$ spaces on product domains, if as Bergman kernel we put m-products of one dimensional kernels (see the same idea in [4], [5] for much simpler cases of the unit disk and the unit polydisk). This simple observation is crucial for the proof of the theorem of this note, namely for our sharp theorem on traces in products of Siegel domains of the second type.

Below we present an embedding for analytic Bergman type spaces on products of Siegel domains of the second type as one more application of productive idea we discussed. The study of these new analytic spaces from various points is an interesting and separate problem.

***Lemma* 2.1.** *We have the following estimate*

$$\left(\int_D\dots\int_D|f(z_1,...,z_m)|\left(\prod_{i=1}^{m}b^{-\rho_i}(z_i,z_i)\right)dv(z_1)...dv(z_m)\right)^p\le$$

$$\le\int_D\dots\int_D|f(z_1,...,z_m)|^p\left(\prod_{i=1}^{m}b^{-\alpha_i}(z_i,z_i)\right)dv(z_1)...dv(z_m);$$

$$\text{where } p\in(0,1);\rho_i=\frac{1+\alpha_i}{p}-1, i=1,...,m.$$

The proof follows from estimate above and the equality $|f|=|f|^{1-p}|f|^p$, $p\in(0,1)$ and estimate of lemma 1.5 $|f(z)|\le cb^{\frac{1+\alpha}{p}}(z,z)\|f\|_{p,\alpha}$ for $z\in D$, $f\in H(D)$. Note for $m=1$ case this long estimate can be seen in [2].

The following theorem was proved in [1]. It serves as a base for our proofs.

***Theorem* 2.1.** *Let p_0 and p_1 be fixed numbers defined above. Let also r and k be two vectors belonging to R^l. Let*

$$k_i>\frac{1}{(2d-q)_i}\ \text{and}\ r_i>\frac{n_i+2}{2(2d-q)_i},\ i=1,\cdots,l.$$

Let $p\in(1,\infty)$ and $p\in(p_0,p_1)$, Then P_k^* is a bounded operator on $L^{p,r}(D)$, where

$$P_k^*f(\xi)=C_k\int_D|b^{1+k}(\xi,z)|(b^{-k}(z,z))|f(z)|dv(z),$$

and ξ is any point from D. It is a bounded Bergman projection with positive Bergman kernel, for some positive constant C_k.

Let us note this theorem can be easily extended (for $p=1$ case) to the product of Siegel domains of second type following standard procedure of adding variables and remarks we did above.

This section is devoted to formulations and proofs of all main results of this paper. As in previous cases of analytic functions in a unit disk, polydisk, unit ball and upperhalfspace C_+ and in case of spaces of harmonic functions in Euclidean space [4], [7], [10], [11], [22] the role of the Bergman representation formula is crucial in these issues and our proofs are heavily basedon it and some lemmas we provided above and they are parallel to cases we considered before [7], [10], [18]. The crucial role is playing the expanded Bergman projection T_β, in this paper we always assume that β is large enough and $\frac{\beta+1}{m}$ is a natural number.

It is known a variant of Bergman representation formula is available also in Bergman-type analytic function spaces in tubular domains over symmetric cones and this known fact (see [13]), is crucial also in various trace problems in analytic function spaces in tubular domains (see [13] and various references there). It is also used in all our proofs below. We start from A_s^p case, where $p>1$ or $p=1$ in homogeneous Siegel domains of the second type then turn to A_s^∞ spaces in any Siegel domain of the second type. Note in the first part of our theorem the fact that the Siegel domain is homogeneous is essential.

***Theorem* 2.2.** *Let $f\in A_\nu^p(D^m)$, where $p=1$ or $p>1$, $\nu\in R^m$, $\nu_j>\nu_0$, $j=1,...,m$, for some fixed large enough ν_0, depending on parameters of Siegel domain and p.*

Then $f(z,...,z)\in A_s^p(D)$, where

$$-s=\sum_{j=1}^{m}(-\nu_j-1)+1$$

with related estimates for norms. And the reverse is also true. For each function, $g \in A_s^p(D)$ *there is a function* $F \in A_\nu^p(D^m)$, *such that* $F(z,...,z) = g(z)$, *for all* $p \geq 1$.

Let in addition

$$(T_\beta f)(z_1,...,z_m) = C_\beta \int_D f(w) \prod_{j=1}^m b^t((z_j,w)) dv_\beta(w),$$

$mt = \beta + 1$, $z_j \in D$, $j = 1,...,m$, *where* C_β *is a Bergman constant.*

Let also $\beta > \beta_0$ *for some fixed large enough positive number* β_0 *depending on parameters of Siegel domain. Then the* T_β *Bergman-type integral operator* (*expanded Bergman projection*) *is acting as a bounded operator from* $A_s^p(D)$ *into* $A_\nu^p(D^m)$, *where* $\nu = (\nu_1,...,\nu_m)$, *for all* $\nu_j > \nu_0$, $j = 1,...,m$, *where* ν_0 *is alarge enough number depending on parameters of Siegel domain and* p.

The proof of theorem 2.2.

During the proof of theorem 2.2 various restrictions on p appears, this restrictions can be removed if we consider $A_\nu^p(D^m)$ spaces, where $\nu = (\nu_1,...,\nu_m)$, and for all ν_j, $\nu_j > \nu_0$, $j = 1,...,m$, where ν_0 is a large enough number depending on parameters of Siegel domain and p.

We follow the proof of the unit ball case (see [10]) and actually repeat arguments from there for this general case, using preliminaries of the previous section.

First we show the second part of this theorem. Let

$$T_\beta[f(z_1,...,z_m)] =$$

$$= C_\beta \int_D f(w) \left[\prod_{j=1}^m b^t(z_i,w) \right] dv_\beta(w),$$

$$mt = (\beta+1); z_j \in D, j = 1,...,m;$$

β is large enough. Then $(T_\beta f)(z,...,z) = f(z)$; $z \in D$, $f \in A_s^p$; $1 \leq p < \tilde{q}$ by lemma 1.4. We show that T_β acts from (A_s^p) to (A_ν^p), if β is large enough.

This finishes the proof of one part our theorem.

For this we use lemma 1.3.

For T_β we have integral operator (expanded Bergman projector).

First we have using Holder's inequality twice and lemma 1.3 for $\gamma_1 + \gamma_2 = t$; $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p_1} = 1$;

$$\gamma_2 p_1 m - 1 - \beta > \max A_i;$$

$$\gamma_1 p - 1 + \tau - \nu_j > \max A_i;$$

$$\nu_j - \tau > \max B_i,$$

where

$$B_i = \frac{n_i + 2}{2(2d-q)_i},$$

$$A_i = \frac{n_i}{-2(2d-q)_i}, \ i = 1,...,l, \ j = 1,...,m.$$

$$\left(\int_D |f(w)| \prod_{j=1}^m |b^t(z_j,w)| dv_\beta(w) \right)^p \leq C(I \cdot J) =$$

$$= \widetilde{C} \left(\int_D |f(w)|^p \prod_{j=1}^m |b^{\gamma_1 p}(z_j,w)| dv_\beta(w) \right) \times$$

$$\times \left(\int_D \prod_{j=1}^m |b^{\gamma_2 p_1}(z_j,w)| dv_\beta(w) \right)^{\frac{p}{p_1}}, z_j \in D, j = 1,...,m.$$

$$J \leq C \prod_{j=1}^m \left(\int_D f(w) |b^{\gamma_2 p_1 m}(z_j,w)| dv_\beta(w) \right)^{\frac{p}{p_1 m}} \leq$$

$$\leq \tilde{C}_1 \left(\prod_{j=1}^m b^\tau(z_j,z_j) \right), z_j \in D, j = 1,...,m;$$

for $m\left(\dfrac{p_1}{p}\right)\tau = (\gamma_2 p_1 m) - \beta - 1$; and hence we have now the following estimate

$$\int_D ... \int_D |(T_\beta f)(z_1,...,z_m)|^p \, (b^{-\nu_1}(z_1,z_1))...(b^{-\nu_m}(z_m,z_m)) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^m dv(z_j) \leq \widetilde{C} \|f\|_{A_s^p}^p,$$

$z_j = x_j + iy_j, j = 1,...,m,$ $z_j \in D$. The last estimate again follows directly from inequality of lemma 1.3 and Fubini's theorem and some calculations based on estimate

$$\int_D ... \int_D [b^{-\nu_1+\tau}(z_1,z_1)]...[b^{-\nu_m+\tau}(z_m,z_m)] \times$$

$$\times \prod_{j=1}^m |b^{\gamma_1 p}(z_j,w)| \prod_{j=1}^m dv(z_j) \leq \tilde{C}_3[b^v(w,w)], w \in D.$$

The close inspection of conditions on parameters based on elemental calculations easily shows that such γ_1 and γ_2 can be chosen if β and ν_j are large enough. The proof of one part of theorem 1 is now complete. To show the first assertion of theorem 1 for $p = 1$ or $p \in (p_1,p_2)$ separately we refer the reader to [10] where parallel arguments in the unit ball based on estimates for Bergman kernel can be seen. Note in this case we must consider another Bergman type operator operators following again the proof of the unit ball case.

Let $f \in A_\nu^p(D^m)$, $1 \leq p < \infty$. We consider $p = 1$ case, refrying for $p > 1$ to the unit ball case.

Let

$$(T_\varepsilon f)(z_1,...,z_m) =$$

$$= c_\varepsilon \int_D ... \int_D f(w_1,...,w_m) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^m b^{t_j}(z_j,w_j) dv_{\varepsilon_1}(w_1)...dv_{\varepsilon_m}(w_m),$$

$t_j = \varepsilon_j + 1,\ \ \varepsilon_j > \varepsilon_0,\ \ j = 1,...,m,$ where ε_0 is large enough.

Put $z_j = z,\ \ j = 1,...,m.$ Then we have by our lemma on integral representation

$$(T_\varepsilon f)(z) = f(z,...,z),\ z \in D.$$

Note for $p = 1$ now it is enough to integrate both sides by Siegel domain D and then apply Lemma 1.4 (as we did in the unit ball). We have then

$$\|(T_\varepsilon f)\|_{A_s^1(D)} \le c\|f\|_{A_\nu^1(D^m)};$$

where $s = \sum_{j=1}^m (\nu_j + 1) - 1.$

Since

$$\int_D \left|\prod_{j=1}^m b^{t_j}(z, w_j)\right| dv_s(z) \le$$

$$\le \prod_{j=1}^m \left(\int_D |b^{mt_j}(z, w_j)|\, b(z,z)^{(-\nu_j-1)m+1} dv(z)\right)^{\frac{1}{m}} \le$$

$$\le c\prod_{j=1}^m b(w_j, w_j)^{-\nu_j+\varepsilon_j};\ \ w_j \in D,\ \ j = 1,...,m.$$

Let $p > 1$ now. We again follow unit ball case. Let

$$\sum_{j=1}^m \gamma_j + \sum_{j=1}^m \alpha_j + \sum_{j=1}^m \beta_j = 1,$$

$$(\tilde{T}g)(\vec{z}) = \prod_{j=1}^m (b(z_j, z_j))^{\gamma_j} \int_D g(w) \times$$

$$\times (b(w,w))^{\sum_{j=1}^m \alpha_j} \prod_{j=1}^m b^{\beta_j}(z_j, w) dv(w)$$

for some $\gamma_j,\ \beta_j,\ \alpha_j,\ j = 1,...,m$ depending on ε. Then $(\tilde{T}g)$ maps for $1 < q < \tilde{q}$ and for some fixed values of $\gamma_j,\ \beta_j,\ \alpha_j,\ j = 1,...,m,\ A_s^q(D)$ to $A_\nu^q(D^m)$ as it was shown above. Next fix $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j),$ so that $\tilde{T}^* = (T_\varepsilon)$ and it is known (see [16]) $(A_\nu^q)^* = A_\nu^p$ for $p \in (p_0, \tilde{q}),\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$ where $p_0 = p_0(d_i, n_i, m_i).$ Thus (T_ε) maps $(A_\nu^p)(D^m)$ to $(A_s^p(D))$ for all $p \in (p_0, \tilde{q}).$ Thus the proof of theorem 2.2 is finished.

Indeed put

$$(T_\varepsilon g)(w) = \int_D \dots \int_D g(z_1,...,z_m) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^m b^{\varepsilon_j+1}(z_j, w) dv_{\varepsilon_1}(z_1)...dv_{\varepsilon_m}(z_m),$$

$$(\tilde{T}g)(\vec{z}) = \left[\prod_{j=1}^m (b(z_j, z_j))^{-\varepsilon_j+\nu_j}\right] \int_D f(w) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^m b^{\tilde{\beta}_j}(z_j, w) b(w,w)^{1+\sum_{j=1}^m(-1-\nu_j)} dv(w),$$

$$\tilde{\beta}_j = \varepsilon_j + 1,\ \ \nu_j > \nu_0,\ \ \varepsilon_j > \varepsilon_0,\ \ j = 1,...,m.$$

Theorem 2.3 follows directly from Bergman reproducing formula provided in the previous section for A_s^∞ spaces and some elementary estimates like Holder inequality for m functions. We provide detailed proof.

***Theorem* 2.3.** *Let* $f \in A_\nu^\infty(D^m),\ \ \nu \in R^m,\ \nu > \nu_0,$ *for some large enough positive* ν_0 . *Then* $f(z,...,z) \in A_s^\infty(D),$ *where* $s = \sum_{j=1}^m \nu_j.$ *And the reverse is also true. For each function* $g \in A_s^\infty(D)$ *there is a function,* $F \in A_\nu^\infty(D^m),$ *such that* $F(z,...,z) = g(z).$ *Let in addition*

$$(T_\beta f)(z_1,...,z_m) = C_\beta \int_D f(w) \prod_{j=1}^m b^t(z_j, w) dv_\beta(w),$$

$mt = \beta + 1,\ \ z_j \in D, j = 1,...,m.$ *Let also* $\beta > \beta_0$ *for some fixed large enough positive* β_0.

Then the T_β *Bergman-type integral operator* (*expanded Bergman projection*) *is a bounded operator acting from* $A_s^\infty(D)$ *to* $A_\nu^\infty(D^m),$

$$\nu = (\nu_1,...,\nu_m), \nu > \nu_0,\ \ s = \sum_{j=1}^m \nu_j,$$

for all large enough ν_0.

Proof of theorem 2.3.

Note, using the obvious property of $b^\tau(z,z)$ function we have one part of the theorem since we have obviously that

$$\sup_{z \in D} |f(z,...,z)|[b^\tau(z,z)] \le$$

$$\le \sup_{z_1 \in D} ... \sup_{z_m \in D} |f(z_1,...,z_m)|[b^{\tau_1}(z_1,z_1)]... \times$$

$$\times [b^{\tau_m}(z_m,z_m)]; \tau_1 + ... + \tau_m = \tau, \tau_j > \tau_0, j = 1,...,m.$$

Let us show the reverse implication for this theorem. For this we have to use two assertions which we formulated above, namely lemma 1.3 and proposition 1.2.

First we have that if

$$f \in A_s^\infty(D); s = \sum_{j=1}^m \nu_j$$

and if

$$(T_\beta f)(z_1,...,z_m) =$$

$$= C_\beta \int_D f(w) \left[\prod_{j=1}^m b^t(z_j, w)\right] dv_\beta(w),$$

$$mt = \beta + 1; \beta > \beta_0, z_j \in D, j = 1,...,m$$

then $(T_\beta f)(z,...,z) = f(z), z \in D$ by proposition 1.2 for all $\beta, \beta > \beta_0,\ \ \beta_0$ is large enough, $z_j \in D,$ $j = 1,...,m.$

Then we have that by Holder's inequality for m functions and Lemma 1.3

$$|(T_\beta f)(z_1,...,z_m)|[b^{-\nu_1}(z_1,z_1)...b^{-\nu_m}(z_m,z_m)] \le$$

$$\le C_\beta \|f\|_{A_s^\infty}\left(\int_D \prod_{j=1}^m b^t(z_j,w)dv_{\beta_1}(w)\right)\left[\prod_{j=1}^m b^{-\nu_j}(z_j,z_j)\right] \le$$

$$\le C_\beta \|f\|_{A_s^\infty}\left[\int_D \prod_{j=1}^m \left|b^t(z_j,w)\right| dv_{\beta_1}(w)\right]\prod_{j=1}^m b^{-\nu_j}(z_j,z_j) \le$$

$$\le C_\beta \prod_{j=1}^m \left(\int_D b^{-\beta+\nu_j m}(w,w)\,|\,b^{\beta+1}(z_j,w)\,|\,dudv\right)^{\frac{1}{m}} \times$$

$$\times\left[\prod_{j=1}^m b^{-\nu_j}(z_j,z_j)\right]\|f\|_{A_s^\infty} < \infty$$

for all $\beta > \beta_0$ and $\nu_j > \nu_0, w \in D, j = 1,...,m.$

Hence we have

$$|\,(T_\beta f)(z_1,...,z_m)\,|\prod_{j=1}^m b^{\nu_j}(z_j,z_j) \le$$

$$\le \tilde{C}_\beta \|f\|_{A_s^\infty},\ z_j \in D,\ j = 1,...,m.$$

The proof of theorem 2.3 is complete now.

REFERENCES

1. *Bekolle*, *D.* Reproducing properties and L^p estimates for Bergman projections in Siegel domains of type II / D. Bekolle, A.T.Kagou // Studia Math. – 1995. – Vol. 15, № 3. – P. 219–239.

2. *Kagou*, *A.T.* Domains de Siegel de type II, noyau de Bergman. These de doctorate de 3 eme cycles / A.T. Kagou. – Yaounde, 1993.

3. *Gindikin*, *S.* Analysis in homogeneous domains / S. Gindikin // Russia Math. Surveys. – 1964. – Vol. 19, № 4. – P. 1–89.

4. *Shamoyan*, *F.* Topics in the theory of A^p_α spaces / F.Shamoyan, A. Djrbashian. – Teubner Texte zur Mathematics, Leipzig. – 1988.

5. *Rudin*, *W.* Function theory in polydisks / W. Rudin. – New-York, Academic press, 1969.

6. *Shamoyan*, *R.* On extremal problems in two Siegel domains / R. Shamoyan // ROMAI Journal. – 2012. – Vol. 8, № 2. – P. 167–180.

7. *Jevtic*, *M.* A note on diagonal mapping theorem in spaces of analytic functions in the polydisk / M. Jevtic, M. Pavlovic, R. Shamoyan // Publ. Math. Debrechen. – 2009. – Vol. 74, № 1/2. – P. 1–14.

8. *Shamoyan*, *R.* On extremal problems in analytic Bergman type spaces in tubular domains over symmetric cones / R. Shamoyan, S. Kurilenko // Issues of Analysis. – 2014. – Vol. 3, № 21. – P. 44–65.

9. *Shamoyan*, *R.* On a new space of analytic functions in polyball / R. Shamoyan, O. Mihic // Palestine Journal. – 2014. – № 2. – P. 213–216.

10. *Shamoyan*, *R.* On trace of holomorphic functions on the unit polyball / R. Shamoyan, O. Mihic // Appl. Anal. Discrete Mathematics. – 2009. – № 3. – P. 198–211.

11. *Ren*, *G.* The diagonal mapping theorem in mixed norm spaces / G. Ren, J. Shi // Studia Math. – 2004. – Vol. 163, № 2. – P. 103–117.

12. *Clark*, *D.* Restriction of H^p functions in the polydisk / D. Clark // American Journal of Mathematics. – 1988. – № 110. – P. 1119–1152.

13. *Shamoyan*, *R.* Sharp theorems on traces in Bergman type spaces in tubular domains over symmetric cones / R. Shamoyan, E. Povprits // Journal of Siberian Federal University. – 2013. – Vol. 6, № 4. – P. 527–538.

14. *Shamoyan*, *R.* Multifunctional analytic spaces products of bounded strictly pseudoconvex domains and embedding theorems / R. Shamoyan, E. Povprits // Kragujevac Mathematical Journal. – 2013. – Vol. 37. – P. 221–244.

15. *Chang*, *S-Y.* Some recent developments in Fourier analysis and H^p theory on product domains / S-Y. Chang, R. Fefferman // Bulletin Amer. Math. Society. – 1985. – Vol. 12, № 1. – P. 1–43.

16. *Kagou*, *A.* The duals of Bergman spaces in Siegel domains of second type / A. Kagou // IMHOTEP. – 1997. – Vol. 1. – P. 38–86.

17. *Arsenovic*, *M.* On distance estimates and atomic decomposition on spaces of analytic functions on strictly pseudoconvex domains / M. Arsenovic, R. Shamoyan // Bulletin Korean Mathematical Society. – 2014. – Vol. 2. – P. 314–325.

18. *Shamoyan*, *R.* On traces of Q_p type spaces and mixed norm analytic spaces in polyballs / R. Shamoyan, O. Mihic // Siauliau Mathematical Seminar. – 2010. – Vol. 13, № 5. – P. 110–119.

19. *Bekolle*, *D.* Molecular decomposition and interpolation / D. Bekolle, A. Kagou // Integral Equations and Operator theory. – 1998. – Vol. 31, № 22. – P. 150–177.

20. *Jimb*, *T.* Interpolation manifolds for products of strictly pseudoconevx domains / T. Jimb, A. Sakai // Complex Variables. – 1987. – № 8. – P. 222–341.

21. *Jakobczak*, *P.* The boundary regularity of the solution of the df equation in products of strictly pseudoconvex domains / P. Jakobczak // Pacific Journal of Mathematics. – 1986. – Vol. 121, № 2. – P. 371–386.

22. *Arsenovic*, *M.* On embeddings traces and multipliers in harmonic function spaces / M. Arsenovic, R. Shamoyan // Kragujevac Math. Journal. – 2013. – Vol. 37, № 1. – P. 45–65.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (*grant* 13–353 01–97508) *and by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation* (*grant* 1.1704.2014K).

Поступила в редакцию 16.02.15.

УДК 62.544

РАСХОДОМЕРНАЯ АСУ ТЕНЗОМЕТРИЧЕСКОГО ТИПА С ПРОПОРЦИОНАЛЬНО-ДИСКРЕТНЫМ АЛГОРИТМОМ УПРАВЛЕНИЯ НА КОНТРОЛЛЕРЕ ADAM 5510TCP

Ю.Р. Бейтюк, В.М. Рамазанов, Г.П. Себровская, О.И. Садовская

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

FLOW-MESURING ACS OF TENSOMETRIC TYPE WITH PROPORTIONAL AND DISCRETE ALGORITHM OF MANAGEMENT ON THE ADAM 5510TCP CONTROLER

Yu.R. Beytuk, V.M. Ramazanov, G.P. Sebrovskaya, O.I. Sadovskaya

Y. Kupala Grodno State University, Grodno, Belarus

Описаны области приложений аппаратных моделей исследуемого типа. Целью исследования является оптимизация производительности и временных характеристик систем расхода с учетом интеграции результатов в состав типового вычислительного ядра расходомерных систем с web-доступом.

Ключевые слова: *истечение жидкости при переменном напоре, тензометрическая АСУ расходом, пропорционально-дискретное управление, функция обратного вызова, IP-протокол, PC-совместимый контроллер.*

The application area of hardware models of the type studied is described. The purpose of this study is to optimize performance and time characteristics of flow systems based on the integration of the results of the computational core flow model systems with web-access.

Keywords: *fluid outflow at variable pressure, strain gauge automated system flow control, proportional-digital control, callback function, IP-protocol PC-compatible controller.*

Введение

АСУ расходом жидких/сыпучих материалов является важнейшим элементом всех современных [1]–[3] производственных линий по изготовлению весовой продукции, как промышленного, так и бытового назначения. Диапазон видов тарируемой продукции варьируется от отпускаемых горюче-смазочных материалов, до фасовки кондитерской продукции. Основными количественными показателями таких систем являются: погрешность установки выходного расхода/массы и времени выпуска единицы продукции при управляемом абсолютном значении ее объема/массы. Кроме того, обычно требуется интеграция процессов обработки этих показателей в системы бухгалтерского учета и экономического планирования с использованием сетей TCP/IP масштаба предприятия.

1 Использование алгоритмов пропорционально-дискретного управления для построения расходомерных АСУ

Аналитически рассматриваемая задача относится к классу задач об истечении жидкости при переменном напоре и может быть сведена к определению времени опорожнения или наполнения всего резервуара или некоторой его части в зависимости от начального наполнения, формы, размеров сосуда и наполнительного отверстия.

В данном случае имеет место неустановившееся движение жидкости, что делает неприемлемым обычное уравнение Бернулли [4]. Поэтому полное время наполнения необходимо разделить на бесконечно малые промежутки, в течение каждого из которых считать напор постоянным, а движение установившимся, т. е. независимым от времени.

Элементарный объем жидкости dV, прошедшей через отверстие площадью f за бесконечно малый промежуток времени dt можно определить следующим образом:

$$dV = Qdt = \mu f 2gHdt, \qquad (1.1)$$

где H – высота жидкости в сосуде для некоторого положения ее уровня, который можно приближенно считать постоянным, μ – коэффициент расхода жидкости, зависящий от числа Рейнольдса [5].

В действительности, однако, за это же время уровень жидкости в сосуде с поперечным сечением F поднимется на dH и объем жидкости в нем изменится на величину $dW=FdH$. Вследствие неразрывности движения $dV=dW$, или

$$\mu f \sqrt{2gH}\,dt = FdH, \qquad (1.2)$$

откуда

$$dt = \frac{FdH}{\mu f \sqrt{2gH}}. \qquad (1.3)$$

Полное время t наполнения можно определить в результате интегрирования выражения (1.3)

$$\int_0^t dt = \int_0^{H_H} \frac{FdH}{\mu f\sqrt{2gH}}, \qquad (1.4)$$

где H_H – глубина жидкости в конце наполнения.

Принимая $\mu=const$, получим

$$t = \frac{F}{\mu f\sqrt{2g}}\int_0^{H_H} \frac{dH}{\sqrt{H}} = \frac{2F\sqrt{H_H}}{\mu f\sqrt{2g}}. \qquad (1.5)$$

Для определения времени, необходимого для понижения уровня жидкости в сосуде на некоторую величину от H_1 до H_2 (уменьшения массы/объема), будем исходить из того же уравнения (1.5), интегрируя его в пределах от H_1 до H_2

$$t = \frac{F}{\mu f\sqrt{2g}}\int_{H_1}^{H_2} \frac{dH}{\sqrt{H}} = \frac{2F\left(\sqrt{H_1}-\sqrt{H_2}\right)}{\mu f\sqrt{2g}}. \qquad (1.6)$$

При необходимости учета типа насадки на подаче жидкости задача потребует учета факторов увеличения расхода жидкости, при значительном снижении скорости истечения.

Время частичного наполнения может быть найдено как

$$t = \frac{2F}{\mu f\sqrt{2g}}\times$$
$$\times\left(\sqrt{H}-\sqrt{H_1}+\sqrt{H_0}\ln\left(\frac{\sqrt{H_0}-\sqrt{H}}{\sqrt{H_0}-\sqrt{H_1}}\right)\right), \qquad (1.7)$$

где H_0 – постоянный напор при установившемся движении при расходе равном притоку

$$H_0 = \frac{(Q_H)^2}{(\mu f)^2 2g}, \qquad (1.8)$$

где Q_H – производительность насоса.

Для практической реализации показателя управления расходом (1.8) с временными характеристиками (1.6), (1.7) можно предложить эталонную структуру системы, представленную на рисунке 1.1.

Устройство управления (УУ), сравнивая текущее показание тензометрического измерителя расхода (ТИР) со значением уставки, управляет моментами включения регуляторов расхода (РР), добиваясь достижения равенства этих показателей. Регулирование параметров расхода возможно как в сторону их увеличения (РР+), так и в сторону уменьшения (РР–). Два инерционных звена (Δt_1 и Δt_2) эмулируют задержку цепей измерения и регулировки соответственно. В этом случае элемент, осуществляющий взаимодействие УУ с верхним уровнем АСУ, удобно реализовать в виде независимого IP-узла. На аппаратном уровне возможно объединение функций УУ и IP-узла в один элемент – контроллер управления. Такой подход позволит четко отделить оборудование управления и организации web-доступа от устройств низовой автоматики, к которым относятся все остальные элементы эталонной структуры на рисунке 1.1.

2 Типовые структуры аппаратных средств организации Web-доступа к оборудованию низовой автоматики АСУ

На сегодняшний день стандартом «де-факто» стало наличие у промышленных контроллеров либо встроенных портов, либо внешних средств поддержки IP-протокола. Это относится как к контроллерам, решающим задачи сбора данных и управления, так и контроллерам, на базе которых создаются различного рода специализированные системы: например, системы телемеханики. Большинство моделей контроллеров имеют встроенные Ethernet-порты, для остальных же существуют отдельные дополнительные коммуникационные модули, выполняющие роль Ethernet-шлюзов. Учитывая весьма широкую номенклатуру выпускаемых аппаратных средств, ниже предложены варианты типовых структур, обеспечивающие решение таких задач.

Относительно простой способ, не требующий вспомогательных устройств для преобразования различных протоколов передачи данных в сетевой протокол, представлен на рисунке 2.1.

Способ реализуется при условии, что все устройства имеют встроенные интерфейсы с поддержкой TCP/IP. В этом случае контроллер управления имеет конфигурируемый IP-адрес и набор библиотечных функций для работы с ним.

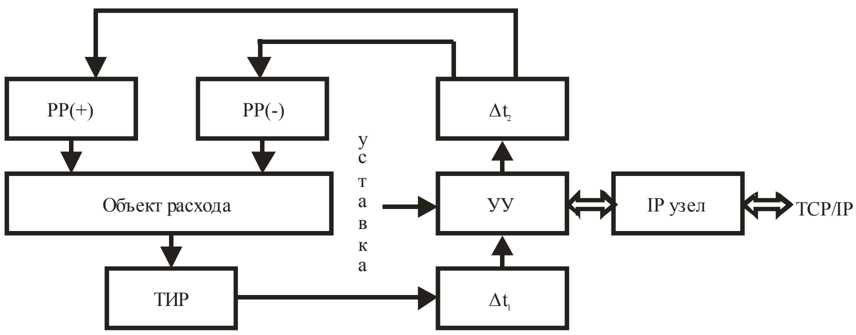


Рисунок 1.1 – Эталонная структура расходомерной АСУ тензометрического типа с пропорционально-дискретным управлением и web-доступом

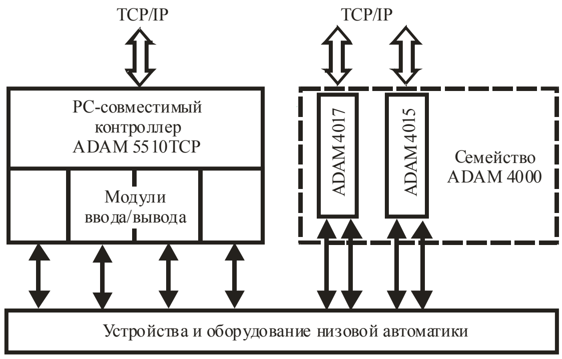


Рисунок 2.1 – Структура IP-узла с непосредственным web-доступом и использованием контроллеров семейств ADAM 5000, 4000

Двунаправленный обмен данными с оборудованием осуществляется через набор переменных, доступных за счет использования встроенных средств высокоуровневых сред разработки Web-приложений диспетчерского уровня. Как видно из рисунка 2.1, на аппаратном уровне такой доступ обеспечивается производителем как для отдельных модулей ввода-вывода (серии ADAM 4000), так и для модулей, входящих в состав контроллера (серии ADAM 5000).

В тех случаях, когда контроллер или обслуживающее оборудование низовой автоматики не имеют Web-интерфейса, и в то же время требуется их подключение в ЛВС предприятия, целесообразно использовать аппаратные преобразователи интерфейсов (ADAM 4570). На рисунке 2.2 приведена схема подобного подключения.

Доступ к оборудованию осуществляется программным обеспечением диспетчерского уровня, используя технологию виртуальных COM-портов. При этом требуется предварительная инсталляция map-утилиты на ПК верхнего уровня, обеспечивающей преобразование IP-адреса контроллера/оборудования в выбираемый пользователем номер виртуального COM-порта на диспетчерской host-машине. Единственным ограничением подобной технологии является требование наличия аппаратных интерфейсов RS232/422 /485 на контроллере/оборудовании.

В случае наличия разветвленной сети контроллеров и обслуживающих устройств низовой автоматики, либо значительного количества разнородного управляемого/измерительного оборудования, становится целесообразным использование коммуникационных контроллеров, выполняющих роль интеллектуальных интерфейсных шлюзов. На рисунке 2.3 приведена подобная структура, в которой в качестве шлюза используется коммуникационный контроллер ADAM 6500 со встроенной ОС типа WinCE, конфигурируемым IP-адресом, встроенной html-страницей и набором интерфейсов RS232/422/485.

Подобная организация на аппаратном уровне приводит к тому, что сигналы периферийного оборудования становятся «прозрачными» и доступными средствами, как стандартных браузеров, так и специализированных SCADA-пакетов. Наличие ОС в составе коммуникационного контроллера позволяет разместить высокоуровневую логику управления и диспетчеризации на нем, а на контроллеры низовой автоматики возложить

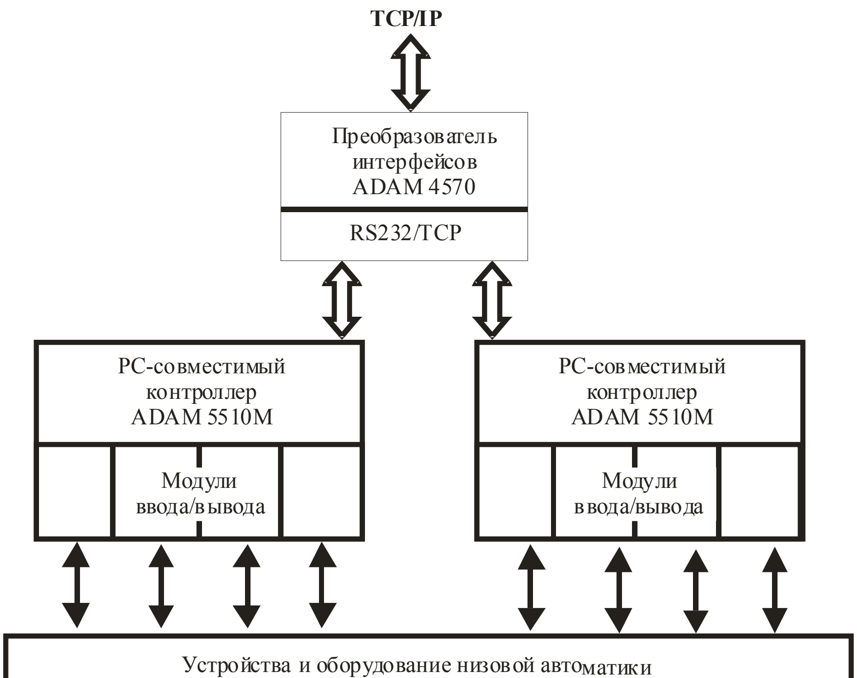


Рисунок 2.2 – Использование преобразователя интерфейсов ADAM 4570 для организации IP-узла

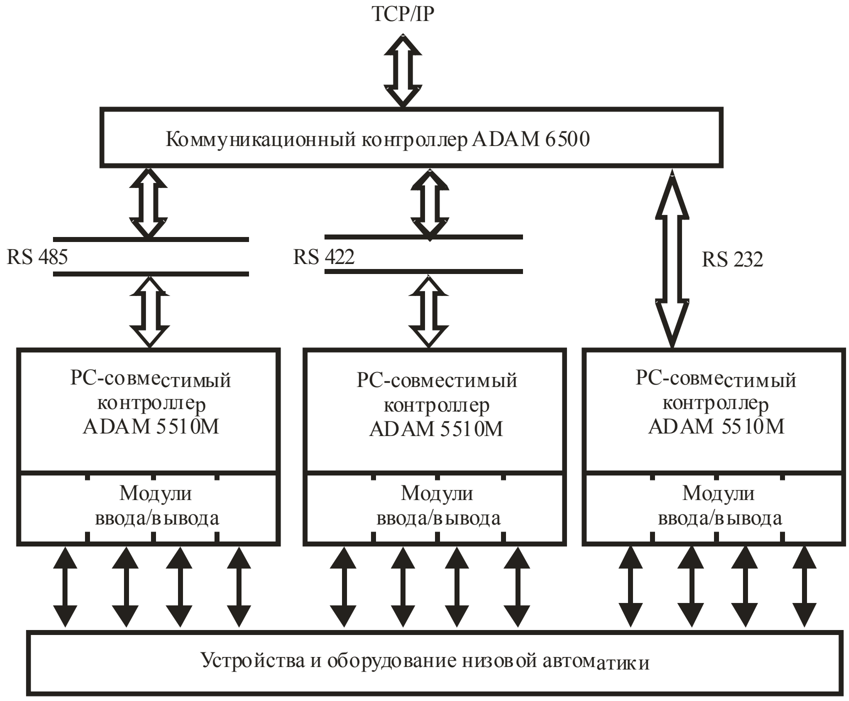


Рисунок 2.3 – Структура организации IP-узла для иерархической АСУ

задачи сбора данных и исключительно дискретного/аналогового управления. Использование коммуникационных контроллеров особенно актуально в случаях, когда сеть предприятия характеризуется всеми тремя типами интерфейсов, как сетевых RS422/485, так и соединений типа P2P. Примером подобных систем на практике являются АСУ теплоснабжением и горячим водоснабжением, когда в 485 сети включаются два или более регулятора, а приборы коммерческого учета (счетчики) доступны только по интерфейсу RS232.

Таким образом, фактически все многообразие аппаратных средств, обеспечивающих в АСУ ТП получение web-доступа к оборудованию низовой автоматики, укладываются в три достаточно общие структуры. Для выбора одной из них можно использовать набор следующих критериев:

– минимум аппаратных средств для получения доступа при использовании SCADA-систем, технологий OPC и средств стандартных браузеров (рисунок 2.1);

– обеспечение минимальной стоимости эксплуатации системы (рисунок 2.2);

– наличие разветвленной сети и разнородного оборудования при необходимости обеспечения доступа к средствам низовой автоматики (рисунок 2.3).

3 Аппаратная модель расходомерной АСУ тензометрического типа

На рисунке 3.1 приведен пример аппаратной структуры системы управления расходом, использующей контроллер ADAM 5510TCP.

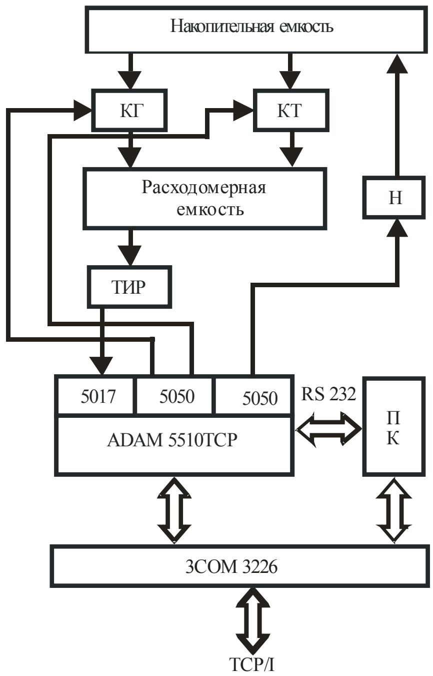


Рисунок 3.1 – Аппаратная структура расходомерной АСУ тензометрического типа на контроллере ADAM 5510TCP

Материал, расход которого подлежит управлению, содержится в накопительной емкости. Величиной расхода управляют два клапана: клапан грубого расхода (КГ) и клапан точного расхода (КТ), имеющие различное сечение пропускного отверстия. Диаметры сечения могут обеспечивать фиксированный диапазон расхода от 0,1 г/с до 100 г/с. В качестве клапанов использованы электроклапаны-распределители модели

П-РЭ3/2,5-112 УХЛ4 (ТУ2-053-1612), подключенные к выходам модулей дискретного ввода-вывода ADAM 5050. Суммарная задержка переключения, определяющаяся инерционностью самих клапанов и точностью таймеров контроллера, составляет 60 мс. Масса материала, поступившего в расходомерную емкость, измеряется тензометрическим измерителем расхода (ТИР). В качестве ТИР используется самоустанавливающийся стальной тензометрический датчик типа DSB1-10K со встроенным усилителем. При необходимости, изменение коэффициента усиления этого усилителя позволяет формировать напряжение на входе АЦП модуля аналогового ввода ADAM 5017, равное объемному расходу материала с учетом его плотности. Результирующая задержка измерения составляет 10 мс при погрешности не более 0,01 г. Управление клапанами осуществляется в соответствие с (1.8) и позволяет осуществлять пропорционально-дискретное увеличение расхода с заданной точностью. Максимальная инструментальная погрешность расхода, достигаемая при таком способе управления, не превышает 1% от расхода КТ. Дальнейшее снижение погрешности обеспечивается электронасосом Н типа YTR9-TE, имеющем фиксированную производительность 20 г/с, инерционность переключения не более 0,2 с с собственной погрешностью не более 0,05 г/с. Насос позволяет снизить абсолютное значение расхода в случаях перерегулирования его суммарной величины цепями клапанов прямого расхода. В этом случае комбинируя управление клапанами КТ и КГ с последующим включением насоса на время (1.6), (1.7), удается снизить максимальную погрешность до 0,3% при фиксированном времени работы АСУ и заданных показателях расхода.

Аппаратный формат организации IP-узла для web-доступа к оборудованию системы соответствует рисунку 2.1 и использует встроенный интерфейс Ethernet 10/100Base-T контроллера. Интеграция в диспетчерский уровень масштаба предприятия реализована с использованием управляемого коммутатора 3COM 3226 и персонального компьютера.

Предварительно перед началом работы контроллер необходимо сконфигурировать. Для этого используется интерфейс RS232 контроллера и утилита ADAM 5510 SeriesUtility (рисунок 3.2). Для контроллера устанавливаются все необходимые статические параметры IP соединения: адреса контроллера, основного шлюза и предпочитаемого DNS сервера в составе ЛВС предприятия. В случае использования встроенных HTTP/FTP серверов можно также сконфигурировать параметры доступа к ним: имена, пароли,

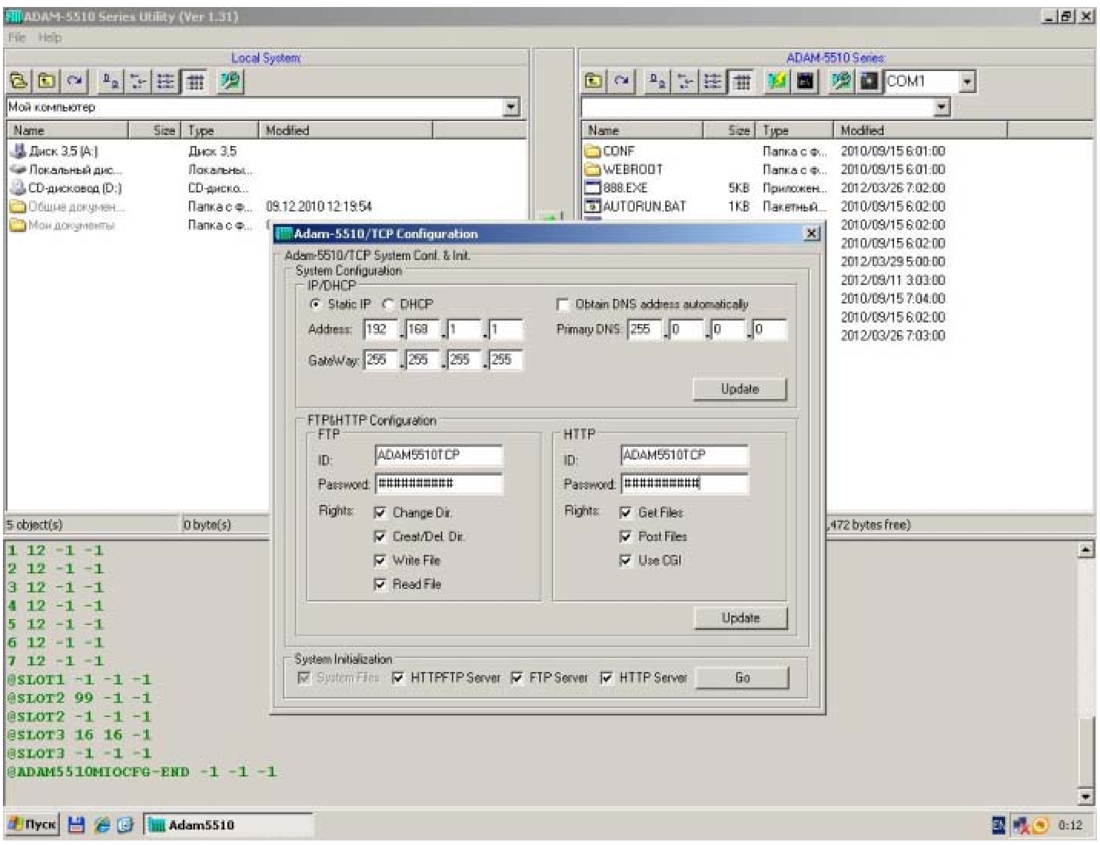


Рисунок 3.2 – Интерфейс конфигурации контроллера ADAM 5510TCP с использованием утилиты ADAM 5510 SeriesUtility

права на операции с файлами и т. д. С помощью утилиты осуществляется также программирование контроллера, в этом случае она предоставляет стандартные файловые возможности Commander оболочек. В автономном режиме или режиме web управления, 232-ой интерфейс может быть отключен.

4 Обобщенный алгоритм функционирования контроллера АСУ

На алгоритмическом уровне программное обеспечение контроллера АСУ решает две основные задачи:

– пропорционально-дискретное управление исполнительными устройствами в соответствие с алгоритмами, предложенными в (1.6–1.8);

– создание и поддержку HTTP-сервера с обеспечением функционирования IP-узла и формированием динамически управляемой html-страницы.

Реализация алгоритмов измерения (для модуля ADAM 5017) и управления (для модуля ADAM 5050) базируется на использовании стандартных библиотек stdio.h, io.h, process.h, stdlib.h, string.h, 5510drv.h, предоставляемых средами разработки и производителем [6]. На этой стадии осуществляется конфигурирование модулей ввода-вывода, формирование массивов переменных, отвечающих за прием-передачу данных от HTTP сервера, измерение текущего расхода и генерация временных интервалов включения-выключения клапанов грубого и точного расходов. Везде далее указанные алгоритмы будут использоваться в качестве вызываемых процедур в теле основного алгоритма работы АСУ.

Алгоритм создания и поддержки HTTP-сервера основан на использовании предоставляемого производителем [6] встроенного Web-сервера для контроллера ADAM 5510TCP (httpFtpd.exe) и средств CGI интерфейса для его взаимодействия с исполняемым модулем (ASU.exe) – с одной стороны, и html-представ-лением (index.html), передаваемым браузеру– с другой. Схема такого взаимодействия приведена на рисунке 4.1 и, кроме указанных компонентов, содержит только файлы конфигурации сети (socket.cfg и socket.upw).

В этом случае исполняемый файл ASU.exe, управляет контроллером на основании данных, полученных от web-сервера. В свою очередь сервер принимает команды управления, вводимые на html-странице в окне браузера, или выводит на нее состояния выбранных переменных, получаемых от модуля ASU.exe. Программное взаимодействие web-сервера и исполняемой программы обеспечивается подключаемой в ее тело библиотекой CGI_Lib. При этом серверное ядро httpFtpd.exe запускается модулем ASU.exe и работает в резидентном режиме (в силу однозадачности MS-DOS, установленной на контроллере ADAM 5510TCP).

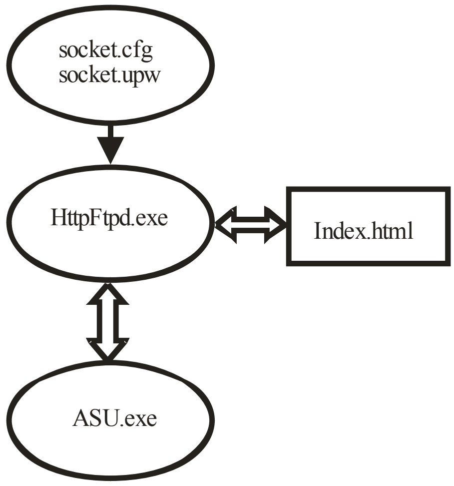


Рисунок 4.1 – Схема взаимодействия программных средств IP-узла на контроллере ADAM 5510TCP

Конфигурационные файлы сокетов содержат параметры IP соединения, пароли/права доступа пользователей к соответствующим директориям, файлам и операциям с ними в текстовом формате. Файл представления (index.html) размещен на FLASH диске контроллера и передается программой Web-сервера пользователю при выборе IP-адреса контроллера в окне браузера. В простейшем случае файл создается стандартными средствами html-разметки и содержит одну форму с элементами управления и вывода. Элементы управления обеспечивают возможность управления клапанами расхода, используя тег inputtype="button" со встроенным обработчиком нажатия в тело программы ASU.exe. Для вывода используется тег output, определяющий область страницы, в которую осуществляется вывод данных об измеренной величине текущего расхода материала.

Связь между резидентно запущенным сервером и исполняемым модулем осуществляется посредством использования в теле модуля ASU.exe функций обратного вызова (CallBack-Function). Web-сервер реагирует на события, происходящие на html-странице, и вызывает функцию обратного вызова в исполняемой программе. После выполнения она передает, принятые с html-страницы, данные внутреннему обработчику модуля ASU.exe и возвращает значение, которое может означать, что она еще занята обработкой принятых сервером данных, успешно выполнила обработку этих данных или завершила работу с ошибкой. Получив данные, ASU.exe обрабатывает их и выполняет необходимые действия на контроллере, возвращая серверу состояния внутренних переменных. Сервер же в свою очередь генерирует соответствующие изменения на html-странице браузера, формируя ее обновленный html-код.

На рисунке 4.2 приведена обобщенная блок-схема алгоритма функционирования программного обеспечения контроллера ADAM 5510TCP, управляющего тензометрической АСУ. Рассмотрим ее основные составляющие с учетом разработки исходного кода для рекомендуемого производителем компилятора BorlandTurbo C++ 3.0:

– работа программы начинается с выполнения инструкций тела функции main(), в котором регистрируется html-страница и запрещается доступ к ней посторонних пользователей;

– выполняется функция обратного вызова Callback(), вызываемая сервером при любых событиях на html-странице. Функция, путем взаимодействия с httpFtpd.exe реализует следующие операции:

– прием данных с html-странички и перезапись их в файл data.txt. В качестве данных могут выступать величины интервалов (1.6), (1.7) работы клапанов КГ, КТ и насоса Н на рисунке 3.1 и требуемое значение расхода (1.8). Это реализуется с помощью функции HttpGetData() и позволяет отследить данные с http-сервера, в которых хранится информация о действиях оператора по управлению системой на html-странице;

– формирование текстового образа принятой html-страницы в виде текстового файла index.txt, содержимое которого переписывается в строковый массив Re_Htm_Content(), являющийся параметром функции, отсылающей данные на сервер. Так формируется статическая (неизменная) часть html-страницы, в которую в последствие добавляются динамические (обновляемые) атрибуты перед отправкой на сервер. В частном случае это может быть мгновенное измеренное значение расхода;

– в файле data.txt хранится информация о введенных на html-странице параметрах и уставках расхода. Из-за того, что при каждом нажатии кнопки на html-странице функция Callback() вызывается автоматически, происходит инициализация всех переменных в этой функции, что делает невозможным хранение в них введенных параметров. Поэтому информация о действиях оператора сохраняется в созданном специально для этой цели файле data.txt (обобщенный формат записи «событие – символ»). Посимвольное чтение этого файла с соответствующим декодированием и вызовом функций Set5050, Get_Data_5017 реализует тензометрическое измерение расхода и пропорционально-дискретное управление клапанами в соответствие с выражениями (1.6), (1.7);

– добавление на html-страницу величины измеренного расхода (1.8) путём записи соответствующего тега в массив Re_Htm_Content с отсылкой его серверу с использованием функции HttpSendData. На основании полученных данных сервер формирует обновленную html-страницу, которая отправляется браузеру;

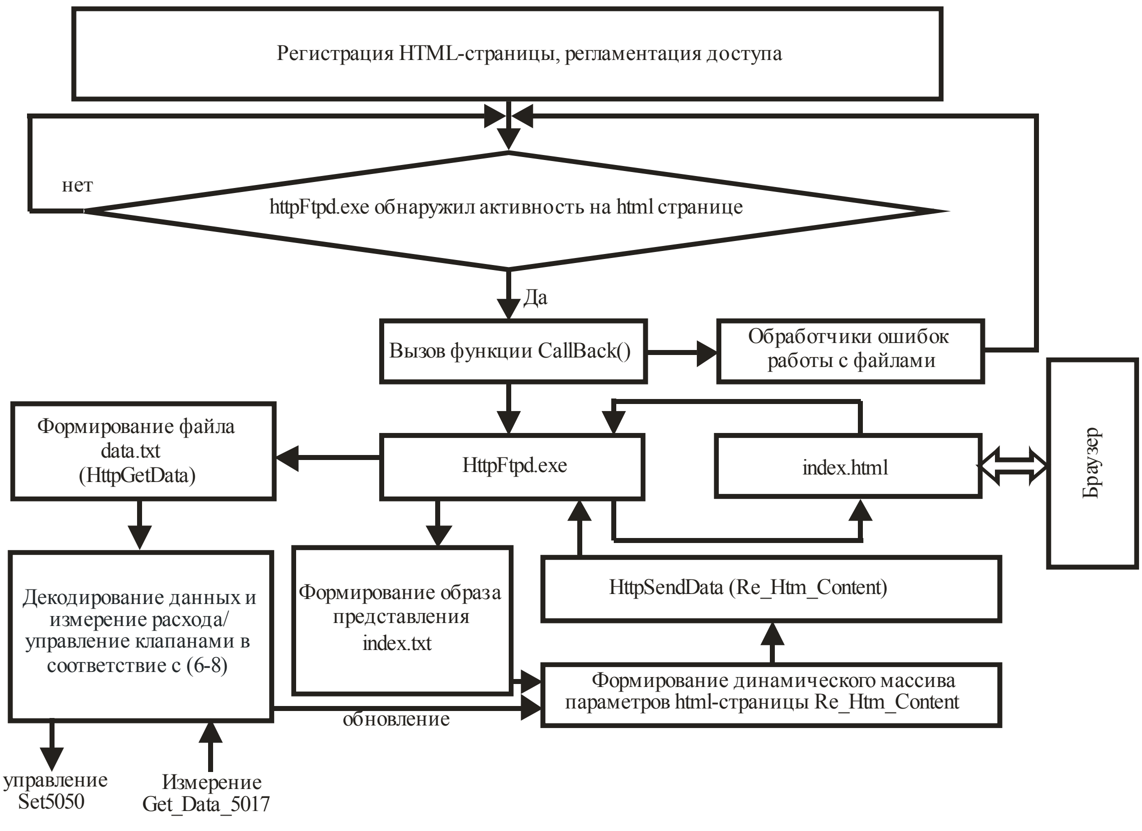


Рисунок 4.2 – Блок-схема обобщенного алгоритма функционирования тензометрической АСУ

– при возникновении ошибок приема, чтения или декодирования происходит выход из функции Callback() с передачей управления программе сервера.

Заключение

В работе показано, что использование пропорционально-дискретного алгоритма управления приборами расхода жидких материалов позволяет минимизировать временные затраты на достижение фиксированных уровней наполнения. Реализована эталонная структура тензометрической АСУ, обеспечивающая решение задач наполнения (расхода) жидких материалов с заданными временными характеристиками за счет снижения влияния аппаратных систематических погрешностей на характеристики контуров регулирования. Данный метод может быть использован для построения тензометрических АСУ расходом с web-доступом. Предложенная в статье структура позволяет получить функционально-законченное технологическое решение для всего комплекса задач, традиционно возлагаемых на АСУ: от сбора данных (измерение технологических параметров), управления (реализация алгоритмов), вычисления (параметры и уставки), до коммуникационных (по выбранному интерфейсу) за счет использования PC-совместимых контроллеров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соломенцев*, *Ю.М.* Технологические основы гибких производственных систем / Ю.М. Соломенцев. – 2-е изд. – М.: Высшая школа, 2000. – 255 с.

2. *Проектирование систем автоматизации технологических процессов*: справочное пособие / А.С. Клюев [и др.]; под общ. ред. А.С. Клюева. – 2-е изд. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 464 с.

3. *Олссон*, *Г.* Цифровые системы автоматизации и управления / Г. Олссон, Д. Пиани. – СПб: Невский Диалект, 2001. – 557 с.

4. *Гидравлика*, *гидромашины и гидроприводы* / Т.М. Башта [и др.]. – М.: Машиностроение, 1982. – 423 с.

5. *Справочное пособие по гидравлике, гидромашинам и гидроприводам.* Под редакцией Б.Б. Некрасова. – Минск, 1985. – 382 с.

6. *Advantech – industrial computer*, *embedded computer*, *industrial automation*, *industrial motherboard*, *network security appliance*, *digital video surveillance*, *panel PC*, *industrial IO* [Electronic resource] / Support & Download. – USA, 1983. – Mode of access: http://support.advantech.com/support/DownloadSRDetail_New.aspx?SR_ID=1-2LY0ZJ&Doc_Source=Download. – Date of access: 25.04.2014.

Поступила в редакцию 29.12.14.

УДК 53.087.92:66.063.6

ДАТЧИК ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ЖИДКОДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ

В.А. Гольдаде[1,2], И.В. Шаламов[3], Е.А. Цветкова[1], Т.В. Рябченко[2]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь*
[2]*Институт механики металлополимерных систем им. В.А. Белого НАН Беларуси, Гомель, Беларусь*
[3]*ООО «ВИНЭКС», Минск, Беларусь*

DETECTOR FOR INVESTIGATION MULTICOMPONENT LIQUID-DISPERSED SYSTEMS

V.A. Goldade[1,2], I.V. Shalamov[3], E.A. Tsvetkova[1], T.V. Rjabchenko[2]

[1]*F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus*
[2]*V.A. Belyi Metal-Polymer Research Institute of NAS of Belarus, Gomel, Belarus*
[3]*Limited liability company «VINEX», Minsk, Belarus*

Рассмотрены конструктивные особенности конусного датчика, предназначенного для исследования многокомпонентных жидкодисперсных систем электрофизическим методом. Использование датчика позволяет изучать строение таких систем в лабораторных и промышленных условиях, а также осуществлять контроль состава двух- и многокомпонентных жидких сред, например, биологических жидкостей, буровых растворов, растворов полимеров. Датчик характеризуется высокой структурной чувствительностью и точностью измерений тока деполяризации и производных от него физико-химических параметров.

Ключевые слова: *датчик, структурная чувствительность, измерительный электрод, ток деполяризации, жидкодисперсная система.*

Design philosophy of conical detector is considered. It is intended for investigation of multicomponent liquid-dispersed systems using the complex electrophysical method. Utilization of the detector allows studing the constitution of such systems in laboratory and industrial conditions as well as to control the composition of bi- and multicomponent liquid systems, for example biological liquids, drilling fluids and polymer solutions. The detector is characterized by high structural perceptibility, measurement accuracy of depolarization current and its derivatives such as physico-chemical parameters.

Keywords: *structural perceptibility, measuring electrode, depolarization current, multicomponent liquid-dispersed systems.*

Введение

Жидкодисперсные системы, например, полимерные гели, буровые растворы, различные биологические жидкости содержат дисперсные компоненты, которые по-разному ведут себя в электрическом поле: происходит ориентация дипольных молекул, разнополярно заряженных частиц и надмолекулярных образований, квазидиполей; перемещение на макрорасстояния физических носителей заряда. В результате в образце появляется асимметрия в распределении заряженных частиц, и он поляризуется. После снятия поляризующего поля исследуемый образец релаксирует к первоначальному равновесному состоянию, отдавая накопленную энергию. В течение времени релаксации поляризационного заряда по внешней электрической цепи течет ток деполяризации, сила и кинетика снижения которого полностью определяются составом и структурой дисперсной системы [1]. Существование тока деполяризации означает сохранение в течение некоторого времени поляризованного состояния жидкодисперсной системы и соответствует проявлению ею квазиэлектретного эффекта [2]–[4]. Для оценки такого поляризованного состояния жидкодисперсных систем требуется высокая точность измерений.

В лабораториях и промышленных условиях для изучения строения, определения и контроля состава двух- и многокомпонентных жидкодисперсных систем и исследования протекающих в них процессов обычно применяют физико-химический анализ, заключающийся в измерении их электрофизических свойств, в частности, метод изотермической деполяризации с использованием датчиков различных конструкций. Основным требованием к датчикам такого типа является высокая структурная чувствительность, т. е. способность регистрировать изменения пространственных структур поляризованных молекул сложного состава путем измерения тока деполяризации. В разных типах жидких сред многокомпонентного состава формируются различные виды поляризационных структур и релаксационных механизмов, в силу чего обеспечение высокой структурной чувствительности достигается экспериментальным подбором конструктивных параметров датчика для конкретного вида жидкой или жидкодисперсной среды.

На практике для исследования жидкостей используют стандартный датчик [5], который содержит корпус, два металлических электрода, расположенных на фиксированном расстоянии друг от друга, причем каждый из электродов покрыт электроизоляционным материалом и имеет чувствительную часть в виде металлической поверхности. Такой датчик очень эффективен для исследования однокомпонентных систем. Например, в работах [6] и [7] для исследования биологических жидкостей методом изотермической деполяризации используют датчик, содержащий плоскопараллельные электроды. Однако, использование плоскопараллельного датчика при контроле расстояния между электродами по нониусу [8] не обеспечивает высокую оперативность при практической работе в лабораторных условиях.

В силу этого использование в экспериментах датчика с плоскопараллельными электродами не обеспечивает достаточную структурную чувствительность и высокую точность измерений при исследовании жидких сред различных видов, а также многокомпонентных сред изменяющегося состава. В связи с этим, разработка конструкции датчика для исследования жидких сред методом изотермической деполяризации остается актуальной проблемой.

1 Методика эксперимента

В экспериментах использовали компьютеризированный комплекс АДС-1 (анализатор дисперсных систем) [9]–[10]. Принцип действия анализатора состоит в наложении электромагнитного возмущения на жидкодисперсную систему, находящуюся в замкнутом объеме, с последующей регистрацией ее отклика. Для регистрации отклика системы в АДС-1 использован применяемый для контроля жидкодисперсных систем метод изотермической деполяризации (ИТД). Схема измерительной установки прибора представлена на рисунке 1.1.

В работах [11]–[13] экспериментально показано, что жидкодисперсные системы с выраженной структурой гелей имеют на логарифмической зависимости тока деполяризации от времени несколько отчетливо выраженных линейных участков. Это означает, что в общем процессе релаксационного разряда электрически поляризованной системы в отдельные интервалы времени преобладает релаксация зарядов, локализованных на частицах различной природы или размера [2]. Графически это представляется в виде ломаной линии, изгибы, прямолинейные участки и углы наклона которой соответствуют поляризации компонентов дисперсной системы.

Для повышения структурной чувствительности датчика, повышения точности, достоверности измерений и удобства работы в лабораторных условиях при подборе конструктивных параметров датчика для конкретного вида исследуемой жидкой среды разработан датчик, схема которого представлена на рисунке 1.2.

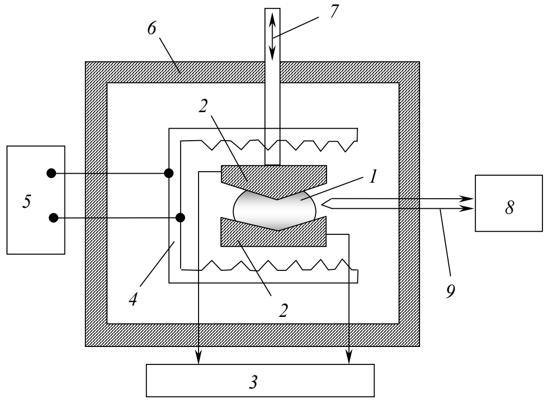


Рисунок 1.1 – Блок-схема экспериментальной установки для проведения изотермической деполяризации. *1* – исследуемый образец; *2* – электроды; *3* – АДС-1; *4* – нагреватель; *5* – источник питания для нагревателя; *6* – термостатированная измерительная камера; *7* – микрометрический винт; *8* – вольтметр; *9* – термопара

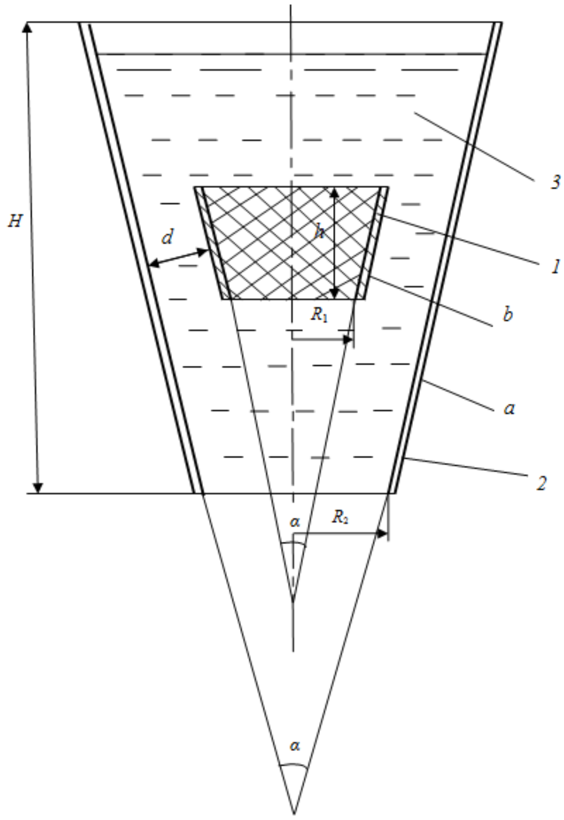


Рисунок 1.2 – Конусный датчик для исследования жидкостей: *1*, *2* – электроды, *3* – исследуемая жидкость; R_1 и R_2 – наименьшие радиусы электродов, h и H – размеры электродов по оси, d – межэлектродное расстояние

Датчик содержит два измерительных электрода (*1* и *2*) в форме полых усеченных конусов.

Электрод *1* (подвижный внутренний) может перемещаться по одной оси с наружным электродом *2* без изменения уровня исследуемой жидкости *3*. Поскольку угол α при вершине обоих конусов одинаков, то образующие a и b конусов сохраняют параллельность при перемещении внутреннего электрода, и при этом не изменяется площадь электрического контакта измерительного объема с электродами, но изменяется расстояние d между электродами. При условии малости отношения d / h электрическое поле можно описать формулами для плоскопараллельного конденсатора [9], [14], при этом изменяется толщина межэлектродного зазора, а сам межэлектродный зазор сохраняет форму тела вращения, образованного двумя параллельными образующими a и b.

В качестве исследуемых жидкодисперсных систем использовали:

1) буровой раствор следующего состава: 20 мас.ч. гипана, 1 мас.ч. медного купороса, 4 мас.ч. глины, 20 мас.ч. пластификатора (сильвит), 100 мас.ч. воды;

2) сыворотку крови человека.

В исследуемых жидкостях при их электрической поляризации возникает пространственный заряд, величина которого определяется структурой и составом жидкости, а также зависит от параметров поляризующего электрического поля. Плотность и однородность электрического поля определяется размерами и формой электродов, их взаимным расположением. Неправильный выбор последних способен инициировать в жидкой среде процессы, ограничивающие формирование пространственного заряда, приводящие к его ускоренной релаксации, что препятствует регистрации и правильной интерпретации результатов измерений.

2 Результаты исследования и обсуждение

Регистрация тока деполяризации, возникающего в связи с релаксацией пространственного заряда, позволяет определить индивидуальные структурные признаки жидкодисперсной среды, ее состав, а также их изменения, что является основой для оценки производных физико-химических, биологических и иных свойств.

В результате проведенных исследований по изучению влияния размеров межэлектродного зазора на характеристики датчика установлена зависимость структурной чувствительности от отношения длины меньшего электрода h к ширине зазора d (или по-иному – расстояния между чувствительными частями электродов) и определены оптимальные значения этого параметра (h / d), при которых структурная чувствительность и точность достигают высоких значений: отношение длины меньшего электрода к ширине зазора не превышает десяти, но не меньше шести, т. е. $6 \leq h / d \leq 10$.

Ниже представлены результаты экспериментальных исследований по влиянию параметра h / d на структурную чувствительность при измерениях тока деполяризации для двух различных жидкостей – бурового раствора и сыворотки крови человека.

На рисунке 2.1 приведены зависимости логарифма отношения текущего значения тока деполяризации $I(t)$ к его начальному значению I_0 от времени t, т. е. $\ln[I(t) / I_0]$, полученные при исследовании бурового раствора. Кривая *1* соответствует конструкции датчика с соотношением $h / d = 7$, кривая *2* – $h / d = 6$, кривая *3* – $h / d = 10$. На рисунке показаны также сравнительные результаты измерений $\ln(I / I_0)$ для конструкций датчиков, отличающихся отношением h / d, где кривая *4* соответствует $h / d = 5$, кривая *5* – $h / d = 13$.

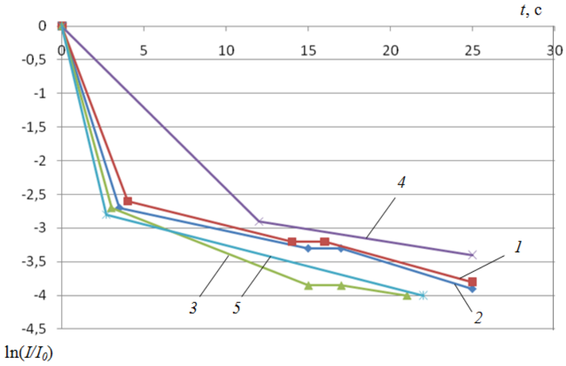


Рисунок 2.1 – Результаты исследования бурового раствора конусным датчиком с различным соотношением h / d: *1* – 7, *2* – 6, *3* – 10, *4* – 5, *5* – 13

Как видно из рисунка 2.1, кривые *1* – *3* имеют характерно выраженные точки пересечения прямолинейных отрезков разного наклона, а также горизонтальные отрезки (участки), свидетельствующие об изменениях структуры жидкости (т. е. датчики чувствительны к изменениям структуры). Кривые *4* и *5* не имеют горизонтальных участков, что свидетельствует о недостаточной структурной чувствительности датчиков с таким соотношением h / d, т. е. они не позволяют с достаточной точностью идентифицировать измерения структуры жидкодисперсной системы.

На рисунке 2.2 приведена зависимость $\ln(I / I_0)$ от времени деполяризации t сыворотки крови человека, измеренная конусным датчиком с различным соотношением h / d. Излом на кривой *1* свидетельствует об изменении механизма поляризации, т.е. о перестройке структуры жидкости, в то время как плавный ход изменения зависимости *2* не позволяет судить о структурных перестройках в сыворотке крови.

Таким образом, при выборе размеров датчика из указанного интервала соотношений h / d обеспечивается необходимая и достаточно высокая структурная чувствительность для любых типов и видов поляризованных жидкодисперсных систем, что обеспечивает возможность точного измерения в них тока деполяризации и производных от него физико-химических свойств. Благодаря этому, один и тот же датчик может быть использован для исследования различных двух- и многокомпонентных жидкодисперсных систем.

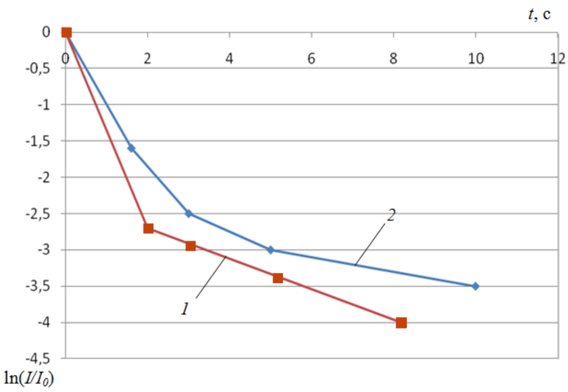


Рисунок 2.2 – Результаты исследования сыворотки крови конусным датчиком с соотношением *h* / *d*: *1* – 6, *2* – 30

Если размеры межэлектродного зазора таковы, что отношения длины меньшего электрода к ширине зазора между электродами меньше 6 или больше 10 (h / d<6 или h / d >10), то структурная чувствительность для большинства жидкодисперсных систем становится неудовлетворительной, что ограничивает возможности точных и достоверных измерений тока деполяризации в таких системах.

Заключение

Использование конусного датчика дает значительное повышение качества измерений за счет плавного изменения рабочего зазора, обеспечивающего высокую точность измерений, особенно при применении микрометрических винтов.

В отличие от датчика с плоскопараллельными электродами, конусный датчик позволяет обеспечить высокую структурную чувствительность и точность измерений тока деполяризации и производных от него физико-химических параметров. Высокая структурная чувствительность и точность измерений позволяют использовать датчик для контроля состояния жидкодисперсных сред как стабильного, так и переменного состава и для исследования протекающих в них процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шаламов*, *И.В.* Об электрофизических и физико-химических свойствах буровых растворов // И.В. Шаламов. – Проблемы комплексного изучения геологии и полезных ископаемых БССР. – Минск, БелНИГРИ, 1985. – С. 137–140.

2. *Electrets* / Ed. G.M. Sessler. – Berlin: Springer-Verlag, 1987. – 453 p.

3. *Пинчук*, *Л.С.* Электретные материалы в машиностроении / Л.С. Пинчук, В.А. Гольдаде. – Гомель: Инфотрибо, 1998. – 288 с.

4. *Гольдаде*, *В.А.* Электретные пластмассы: физика и материаловедение / В.А. Гольдаде, Л.С. Пинчук. – Минск: Наука и техника, 1987. – 231 с.

5. *Применение метода изотермической деполяризации для анализа дисперсных систем* // В.Ш. Шмавонянц [и др.]. – Весці Акадэміі навук БССР. Серыя хімічных навук. – 1985. – № 3. – С. 28–29.

6. *Сорока*, *И.Ф.* Электрофизиологическое исследование сыворотки крови больных ревматическими заболеваниями в сочетании с инфицированием вируса гепатита С // И.Ф. Сорока. – Российский гастроэнтерологический журнал. – 1998. – № 4. – С. 22.

7. *Патент РБ на полезную модель* 3764, G01N 33/48. Устройство для диагностики вируса гепатита С / С.В. Губкин [и др.]; дата публ.: 30.08.2007.

8. *Свидетельство на полезную модель* RU 29588, G01N27/02. Датчик для исследования жидкостей / Шаламов И.В. [и др.]; дата публ.: 20.05.2003.

9. *Шаламов*, *И.В.* Исследование электрофизических свойств жидкодисперсных систем методом изотермической деполяризации / И.В. Шаламов, И.Ю. Ухарцева, Е.А. Цветкова, В.А. Гольдаде. – Материаловедение. – 2003, № 3. – С. 26–30.

10. *Шаламов*, *И.В.* Программно-аппаратный комплекс для контроля жидкодисперсных систем / И.В. Шаламов, И.Ю. Ухарцева, Е.А. Цветкова, В.А. Гольдаде. – Приборы и техника эксперимента. – 2002. – № 6. – С. 143–144.

11. *Шаламов*, *И.В.* Получение малоглинистых буровых растворов с заданными характеристиками по их электрофизическим свойствам: Обзорн. информ. / И.В. Шаламов, Л.К. Мухин, В.Ш. Шмавонянц, И.Н. Полосина / Серия Техника и технол. геолого-развед. работ; орг. пр-ва. – М.: ВИЭМС. 1986. – 63 с.

12. *Ухарцева*, *И.Ю.* Поляризационные характеристики наполненных гелей на основе поливинилового спирта / И.Ю. Ухарцева, И.В. Шаламов, Е.А.Цветкова и др.// Пластические массы. – 1998. – № 6. – С. 40–42.

13. *Ukhartseva*, *I.* Filled gels on water - soluble polymers / I. Ukhartseva, E. Tsvetkova. – 7 th European Polymer Federetion Symposium on Polymeric Materials, Szczecin, Poland, September 20–24, 1998. – P. 115.

14. *Шаламов*, *И.В.* Применение кондуктометрического метода при изучении структуры полимерных растворов / И.В. Шаламов, В.А. Гольдаде, Е.А. Цветкова. – Материалы. Технологии. Инструменты. – 2007. – Т. 12, № 3. – С. 94–101.

Поступила в редакцию 10.11.14.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

– соответствовать профилю журнала;

– являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;

– содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

– сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;

– сведения об авторах;

– экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;

– договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу http://pfmt.gsu.by.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

– the paper should be in agreement with the type of the journal;

– the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

– the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

– covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;

– information about the authors;

– expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;

– treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charters top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site http://pfmt.gsu.by.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).