



ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№2 (19) 2014

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

Главный редактор:
А.В. Рогачев (Беларусь)

Заместитель главного редактора:
О.М. Демиденко (Беларусь)

Редакционная коллегия:

В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

Ответственный секретарь:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

Адрес редакции:

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

Editor-in-Chief:
A.V. Rogachev (Belarus)

Deputy Editor-in-Chief:
O.M. Demidenko (Belarus)

Editorial board:

V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Webin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

Executive Secretary:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

Edition address:

F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издаётся с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 2 (19) 2014

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

- Андреев В.В.** Вычисление фейнмановских диаграмм техникой блоков 7
- Гришечкин Ю.А., Капшай В.Н.** Релятивистская задача о состояниях рассеяния двухчастичных систем с потенциалами однобозонного обмена 13
- Шматок Е.В., Остриков О.М.** Расчет напряжений и смещений в Ni_2MnGa у линзовидного двойника с использованием четырехфункциональной модели при непрерывном распределении двойнивающих дислокаций на двойниковых границах 19
- Шушкевич Г.Ч., Шушкевич С.В., Киселева Н.Н.** Проникновение звукового поля сферического излучателя через сферическую упругую оболочку 25

МАТЕМАТИКА

- Бородич Р.В., Бородич Е.Н., Селькин М.В.** О пересечении максимальных подгрупп заданных индексов в группах с операторами 33
- Васильева Т.И., Прокопенко А.И.** О построении π -классов Шунка конечных π -разрешимых групп 38
- Велесницкий В.Ф.** О сверхразрешимых группах 42
- Гальмак А.М., Щучкин Н.А.** Циклические n -арные группы и их обобщения 46
- Грицук Д.В.** Производная π -длина π -разрешимой группы, силовские p -подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок p^3 54
- Ковалева В.А., Йи Сяолан.** Конечные группы, все n -максимальные ($n = 2, 3$) подгруппы которых K - \mathcal{U} -субнормальны 59
- Мысловец Е.Н.** О конечных ca - \mathfrak{S} группах 64

ИНФОРМАТИКА

- Демиденко О.М., Сукач Е.И., Ратобильская Д.В., Жердецкий Ю.В.** Анализ надёжности электроэнергетических систем на основе вероятностно-алгебраического моделирования 69
- Маслович С.Ф., Галушко В.Н., Бахур С.В.** Математическое моделирование параметров надёжности и электропотребления 77
- Мельников И.И., Демиденков К.А., Евсеенко И.А.** Автоматизация процесса сбора и анализа данных о транспортных потоках для предупреждения образования заторов на дорогах г. Могилева 84
- Шевченко Д.Н., Кривенков С.В.** Методика тестирования и использования генераторов псевдослучайных последовательностей 89

ТЕХНИКА

- Аль-Дилами Ахмед Али Абдуллах, Врублевский И.А., Чернякова К.В., Пухир Г.А.** Поглощение энергии электромагнитного излучения в интерференционных диэлектрических структурах с нанопористым оксидом алюминия 96

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Г. Н. Петухова, Т. А. Фицнер*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 06.06.14. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 12,1. Уч.-изд. л. 10,5. Тираж 100 экз. Заказ № 400.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246019, Гомель.

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2014
© Проблемы физики, математики и техники, 2014
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2014

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 2 (19) 2014

CONTENTS

PHYSICS

Andreev V.V. Calculation of Feynman diagrams using the blocks technique	7
Grishechkin Yu.A., Kapshai V.N. Relativistic scattering problem for two-particle systems with one-boson exchange potentials	13
Shmatok E.V., Ostrikov O.M. Calculation of stresses and displacements in Ni ₂ MnGa have lenticular twin using tetrafunctional model with a continuous distribution of twinning dislocations at the twin boundaries	19
Shushkevich G.Ch., Shushkevich S.V., Kiseleva N.N. Penetration of the sound field of a spherical radiator through the spherical elastic shell	25

MATHEMATICS

Borodich R.V., Borodich E.N., Selkin M.V. On intersection of maximal subgroups of the set indexes in groups with operators	33
Vasil'eva T.I., Prokopenko A.I. On the construction of π -Schunk classes of finite π -soluble groups	38
Veliasnitski V.F. On supersoluble groups	42
Gal'mak A.M., Shchuchkin N.A. Cyclic n -ary groups and their generalizations	46
Gritsuk D.V. Derived π -length of a π -solvable group in which the Sylow p -subgroups are either bicyclic or of order p^3	54
Kovaleva V.A., Yi Xiaolan. Finite groups with all n -maximal ($n = 2, 3$) subgroups K - \mathcal{U} -subnormal	59
Myslovets E.N. On finite ca - \mathfrak{F} -groups	64

INFORMATION SCIENCE

Demidenko O.M., Sukach E.I., Ratobylskaya D.V., Zherdetsky Y.V. The reliability analysis of electric power systems based on the probabilistic-algebraic simulation	69
Maslovich S.F., Halushko V.N., Bakhur S.V. Mathematical simulation parameters of reliability and energy consumption	77
Melnikau I.A., Demedenkov K.A., Yeuseyenka I.A. Automation of the traffic flow data collection and analysis process to avoid traffic congestions in Mogilev	84
Shevchenko D.N., Krivenkov S.V. Technique of the testing and use of generator of pseudorandom sequences	89

TECHNICS

Al-Dilami Ahmed A., Vrublevsky I.A., Chernyakova K.V., Pykhir G.A. Absorption of energy of electromagnetic radiation in interference insulated structures with nanoporous alumina	96
--	----

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

- Technics (Informatics, Computer Science and Control);***
- Physics and Mathematics.***

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 530.1; 539.12

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФЕЙНМАНОВСКИХ ДИАГРАММ ТЕХНИКОЙ БЛОКОВ

В.В. Андреев

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

CALCULATION OF FEYNMAN DIAGRAMS USING THE BLOCKS TECHNIQUE

V.V. Andreev

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

В работе представлена методика вычисления матричных элементов реакций взаимодействия элементарных частиц с использованием техники «строительных» блоков (базовых элементов фейнмановских диаграмм). В данном подходе матричный элемент редуцируется к базовым матричным элементам с базисными спинорами. Такие блоки рассчитываются заранее в рамках метода базисных спиноров (МБС) и затем используются при дальнейших вычислениях.

Ключевые слова: базисный спинор, диаграмма Фейнмана, матрица Дирака, фермион.

A technique for calculating matrix elements of elementary particles interaction reactions using the “building” blocks (basic elements of Feynman diagrams) method is presented. In this approach, the matrix element is reduced to basic matrix elements involving basis spinors. Such blocks are calculated in advance using the Method of Basis Spinors (MBS) and then used for further calculations.

Keywords: basis spinor, Feynman diagram, Dirac matrix, fermion.

Введение

На начальных этапах развития физики высоких энергий изучались процессы с небольшим количеством неполяризованных частиц в конечном состоянии. Как правило, необходимая точность вычислений ограничивалась первым порядком теории возмущений по константе взаимодействия. Поэтому для получения наблюдаемых величин было достаточно расчета квадрата модуля матричного элемента с неполяризованными частицами.

Однако прогресс в области экспериментальной техники позволил изучать поляризационные эффекты, которые стали становиться источником новой и нетривиальной информации о процессах взаимодействия элементарных частиц.

Процесс вычисления сечений таких реакций показал, что традиционный метод становится достаточно громоздким. Так, например, вычисление процесса комптоновского рассеяния (в борновском приближении) с учетом поляризаций частиц требует расчетов следов от 12 матриц Дирака. Это приводит, в конечном счете, к тому, что квадрат матричного элемента комптоновского рассеяния содержит свыше 10 тысяч слагаемых. Поэтому вычисление наблюдаемых для некоторых сложных процессов длилось годами, и изложение результатов занимало несколько научных статей.

С ростом мощностей коллайдеров изучение процессов с большим количеством частиц в конечном состоянии (> 3) стало неотъемлемой частью научных программ в физике высоких энергий. В данной ситуации количество диаграмм

значительно возрастает по сравнению с бинарными реакциями, и метод вычисления квадрата модуля матричных элементов таких процессов приводит к резкому увеличению объемов вычислений.

Повышение точности измеряемых величин потребовало вычисления не только в первом порядке теории возмущений (древесное приближение), но и в более высоких порядках. Вычисления с высокой степенью точности становятся важной составляющей в расчетах процессов взаимодействия. Как и в случае с многочастичными конечными состояниями, в данном случае значительно возрастает число диаграмм Фейнмана и соответственно возрастет объем вычислительной работы.

Таким образом, расчет более высоких порядков теории возмущений, изучение многочастичных процессов, анализ поляризационных эффектов потребовали новых, более эффективных по сравнению с традиционной, схем вычисления наблюдаемых величин.

Метод непосредственного расчета матричных элементов в настоящее время стал альтернативным стандартному способу вычисления (расчету квадратов их модулей). Много различных подходов было разработано для непосредственного расчета матричных элементов [1]–[7] и др., и даже краткий обзор обширной литературы по этой теме выходит далеко за рамки этой статьи.

В данной работе развивается техника расчета с использованием редукции матричного элемента фейнмановской диаграммы к основным, заранее рассчитанным блокам. Эти блоки вычисляются в рамках подхода, разработанного в

работах [8], [9] и получившего название метода базисных спиноров (МБС). Отличительной особенностью МБС является отсутствие вычисления шпуров от матриц Дирака и элементов спинорной техники, а также возможность получить матричный элемент для всех спиновых состояний частиц одновременно.

1 Техника «строительных» блоков

Амплитуда процесса в квантовополевых теориях представляет собой в заданном порядке теории возмущений, сумму матричных элементов, каждому из которых можно сопоставить некоторую диаграмму Фейнмана. Простейший анализ позволяет выделить элементы фейнмановских диаграмм, которые возникают в следствие структуры лагранжианов теории. Таким элементам относится «фермионный» ток, который далее мы будем называть матричным элементом:

$$M_{\lambda_p, \lambda_k}(p, s_p; k, s_k) = \bar{w}_{\lambda_p}^A(p, s_p) Q w_{\lambda_k}^B(k, s_k), \quad (1.1)$$

где

$$w_{\lambda}^A(p, s_p) = \begin{cases} u_{\lambda}(p, s_p), & \text{если } A = 1 \text{ (фермион)}, \\ v_{\lambda}(p, s_p), & \text{если } A = -1 \text{ (антифермион)}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Оператор Q представляет собой комбинацию произведений матриц Дирака или их сверток с 4-векторами реакции. В зависимости от вида Q могут возникать различные блоки, такие как спинорные произведения, 4-вектор тока и др.

Наличие базовых элементов фейнмановских диаграмм позволяет сформировать технику вычислений амплитуд процессов, которую можно назвать **техникой «строительных» блоков**. Суть этой методики следующая: матричный элемент редуцируется к основным, заранее рассчитанным блокам. Сами блоки используются как явно скалярные функции. Такая редукция очевидно, позволяет уменьшить число вычисляемых фейнмановских графов за счет повторений «строительных» блоков. К наиболее удачным применениям расчетов такого типа следует отнести расчеты, которые реализованы в программе WRНАСТ [10].

В данной работе предлагаются для расчета (1.1) использовать блоки, построенные с использованием метода базисных спиноров (МБС), который был разработан в работах [8], [9].

2 Основные соотношения базисных спиноров

В пространстве Минковского введем четверку (тетраду) ортонормированных 4-векторов l_A ($A = 0, 1, 2, 3$), которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$(l_{\mu} l_{\nu}) = g_{\mu\nu}, \quad l_0^2 = -l_1^2 = -l_2^2 = -l_3^2 = 1, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} l_{\mu}^{\mu} l_{\nu}^{\nu} l_{\rho}^{\rho} l_{\sigma}^{\sigma} &= -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \\ \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} l_0^{\mu} l_1^{\nu} l_2^{\rho} l_3^{\sigma} &= \varepsilon^{0123} = 1. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Соотношения (2.2) отражают условие того, что тетрада ортонормированных векторов l_{μ} имеет фиксированную ориентацию в пространстве Минковского.

Метрический тензор g можно представить в виде линейной комбинации матриц-диад, составленных из этих векторов, т. е.

$$g^{\mu\nu} = l_0^{\mu} \cdot l_0^{\nu} - l_1^{\mu} \cdot l_1^{\nu} - l_2^{\mu} \cdot l_2^{\nu} - l_3^{\mu} \cdot l_3^{\nu}. \quad (2.3)$$

Используя векторы l_{μ} , определим светоподобные векторы, которые образуют изотропную тетраду в пространстве Минковского (об изотропной тетраде см. [11]):

$$b_{\rho} = \frac{l_0 + \rho l_3}{2}, \quad n_{\lambda} = \frac{\lambda l_1 + i l_2}{2}, \quad (\rho, \lambda = \pm 1). \quad (2.4)$$

Из соотношений (2.3), (2.4) следует:

$$(b_{\rho} b_{-\lambda}) = \frac{\delta_{\lambda, \rho}}{2}, \quad (n_{\lambda} n_{-\rho}) = \frac{\delta_{\lambda, \rho}}{2}, \quad (b_{\rho} n_{\lambda}) = 0, \quad (2.5)$$

$$g^{\mu\nu} = \sum_{\lambda=-1}^1 [\tilde{b}_{\lambda}^{\mu} \cdot b_{-\lambda}^{\nu} + \tilde{n}_{\lambda}^{\mu} \cdot n_{-\lambda}^{\nu}], \quad (2.6)$$

где

$$\tilde{b}_{\rho} = 2b_{\rho}, \quad \tilde{n}_{\lambda} = 2n_{\lambda}. \quad (2.7)$$

С помощью векторов изотропной тетрады (2.5) определим *безмассовые базисные спиноры* $u_{\lambda}(b_{-1})$ и $u_{\lambda}(b_1)$:

$$\hat{b}_{-1} u_{\lambda}(b_{-1}) = 0, \quad u_{\lambda}(b_1) = \hat{b}_1 u_{-\lambda}(b_{-1}), \quad (2.8)$$

$$\omega_{\lambda} u_{\lambda}(b_{\pm 1}) = u_{\lambda}(b_{\pm 1}) \quad (2.9)$$

с проективной матрицей

$$\omega_{\lambda} = \frac{1}{2}(I + \lambda \gamma_5) \quad (2.10)$$

и условием нормировки

$$u_{\lambda}(b_{\pm 1}) \bar{u}_{\lambda}(b_{\pm 1}) = \omega_{\lambda} \hat{b}_{\pm 1}, \quad \hat{b} = (b^{\mu} \gamma_{\mu}). \quad (2.11)$$

Фазовое соглашение, которое в случае безмассовых частиц будет определять связь между спинорами с разной спиральностью, выберем в виде

$$\hat{n}_{\lambda} u_{-\rho}(b_{-1}) = \delta_{\lambda, \rho} u_{\rho}(b_{-1}). \quad (2.12)$$

Соотношения (2.8), (2.9) и (2.12) можно записать в обобщенном виде:

$$\hat{b}_{\rho} u_{\lambda}(b_A) = \delta_{\rho, -A} u_{-\lambda}(b_{-A}), \quad (2.13)$$

$$\omega_{\lambda} u_{\rho}(b_A) = \delta_{\rho, \lambda} u_{\lambda}(b_A), \quad (2.14)$$

$$\hat{n}_{\rho} u_{\lambda}(b_A) = (-A) \delta_{\rho, A \times \lambda} u_{-\lambda}(b_A), \quad (2.15)$$

$(A, \rho, \lambda = \pm 1).$

Важным свойством спиноров (2.8) является соотношение полноты, которое доказывается с помощью (2.8), (2.9) и (2.11) и записывается в виде

$$\sum_{\lambda, A=-1}^1 u_{\lambda}(b_A) \bar{u}_{-\lambda}(b_{-A}) = I. \quad (2.16)$$

Спинорные произведения базисных спиноров (2.8) задаются простыми соотношениями

$$\bar{u}_\lambda(b_C)u_\rho(b_A) = \delta_{\lambda,-\rho} \delta_{C,-A}, \quad (2.17)$$

$(C, A, \lambda, \rho = \pm 1).$

Используя (2.6) матрицу Дирака γ^μ представим в виде

$$\gamma^\mu = \sum_{\lambda=-1}^1 [\hat{b}_{-\lambda} \tilde{b}_\lambda^\mu + \hat{n}_{-\lambda} \tilde{n}_\lambda^\mu]. \quad (2.18)$$

Тогда посредством соотношений (2.13), (2.15) и (2.18) получим уравнение

$$\gamma^\mu u_\lambda(b_A) = \tilde{b}_A^\mu u_{-\lambda}(b_{-A}) - A \tilde{n}_{-A \times \lambda}^\mu u_{-\lambda}(b_A), \quad (2.19)$$

которое трансформирует «действие» матрицы Дирака γ^μ в комбинацию векторов изотропной тетрады (2.4) на пространстве базисных спиноров (2.8).

Отметим также некоторые свойства базисных спиноров под действием преобразований представлений группы Пуанкаре. Преобразование представления буста $U[L_z(V_p)]$ вдоль оси Z , переводящее вектор состояния частицы массы $m = \sqrt{p^2}$ из системы покоя в систему с 4-импульсом $p = \{p_0, 0, 0, |\mathbf{p}|\}$ при действии на базисные спиноры приводит к соотношению:

$$U^{-1}[L_z(V_p)]u_\lambda(b_A) = \left(\frac{p_0 + Ap}{\sqrt{p^2}}\right)^{1/2} u_\lambda(b_A), \quad p = |\mathbf{p}|. \quad (2.20)$$

Для преобразования вращения $R(\varphi, \theta, -\varphi)$ можно показать, что

$$U^{-1}[R(\varphi, \theta, -\varphi)]u_\lambda(b_A) = \sum_{C=-1}^1 u_\lambda(b_C) D_{A\lambda/2, C\lambda/2}^{1/2}(\varphi, \theta, -\varphi), \quad (2.21)$$

где $D_{\lambda_1, \lambda_2}^j(\varphi, \theta, \phi) = \exp(-i\lambda_1\varphi) d_{\lambda_1, \lambda_2}^j(\theta) \exp(-i\lambda_2\phi)$ D – функция Вигнера.

Дираковский спинор $w_\lambda^A(p, s_p)$ массивного фермиона ($A=1$) и антифермиона ($A=-1$) с 4-импульсом p и произвольным вектором поляризации s_p построим с помощью проективных операторов спина 1/2 (о свойствах этих операторов см. [12]–[14])

$$w_\lambda^A(p, s_p) = \frac{(A\lambda)}{\sqrt{b_1(p + m_p s_p)}} \tau_\lambda^A(p) u_{-A \times \lambda}(b_1) = (A\lambda) \frac{(\hat{p} + Am_p)(1 + \lambda\gamma_5 \hat{s}_p)}{2\sqrt{b_1(p + m_p s_p)}} u_{-A \times \lambda}(b_1). \quad (2.22)$$

Безусловно, определение спиноров Дирака посредством (2.22) имеет фазовый произвол, связанный с вычислением нормировочного множителя.

В нашем случае фазовый множитель $(A\lambda)$ выбран таким образом, что явный вид дираковских спиноров при выборе представления γ -матриц совпадал с известными классическими формулами в литературе [15].

3 Базовый матричный элемент и «строительные» блоки МБС

Рассмотрим специальный случай матричного элемента (1.1), когда $p = b_C$ и $k = b_{-A}$ т. е.

$$\Gamma_{\rho, \sigma}^{C, A}[Q] = \bar{u}_\rho(b_C) Q u_{-\sigma}(b_{-A}), \quad (3.1)$$

который можно назвать **базовым матричным элементом**.

С помощью условия полноты (2.16) можно разбить матричный элемент (1.1), соответствующий в диаграмме Фейнмана фермионной линии, на комбинацию базовых матричных элементов (3.1):

$$M_{\lambda_p, \lambda_k}(p, s_p, k, s_k; Q) = \sum_{A, C, \sigma, \rho=-1}^1 \{ \bar{w}_{\lambda_p}^D(p, s_p) u_{-\sigma}(b_{-C}) \} \times \{ \bar{u}_\sigma(b_C) Q u_{-\rho}(b_{-A}) \} \{ \bar{u}_\rho(b_A) w_{\lambda_k}^F(k, s_k) \} = \sum_{\sigma, \rho=-1}^1 \sum_{A, C=-1}^1 \bar{s}_{\sigma, \lambda_p}^{(C, D)}(p, s_p) \Gamma_{\sigma, \rho}^{C, A}[Q] s_{\rho, \lambda_k}^{(A, F)}(k, s_k). \quad (3.2)$$

В соотношении (3.2) выделены коэффициенты разложения s, \bar{s} физических спиноров по базисным спинорам, которые сводятся к базовому матричному элементу $\Gamma[Q]$:

$$s_{\rho, \lambda}^{(A, D)}(p, s_p) = \bar{u}_\rho(b_A) w_\lambda^D(p, s_p) = \frac{(D\lambda)}{2\sqrt{b_1(p + m_p s_p)}} \Gamma_{\rho, D \times \lambda}^{A, -1} [(\hat{p} + Dm_p)(1 + \lambda\gamma_5 \hat{s}_p)], \quad (3.3)$$

$$\bar{s}_{\rho, \lambda}^{(A, B)}(p, s_p) = s_{-\rho, \lambda}^{*(-A, B)}(p, s_p). \quad (3.4)$$

Таким образом, МБС обладает возможностью, которая увеличивает его эффективность и делает достаточно мощным средством для расчетов сложных матричных элементов. Для повышения эффективности проведем расчет для базовых матричных элементов – «строительных» блоков МБС с различными операторами Q для спиральных состояний.

4 «Строительные» блоки МБС

Для спиральных состояний в качестве преобразования от системы покоя частицы массы m_p к системе, в которой ее 4-импульс равен p берется преобразование

$$H_p = R(\varphi_p, \theta_p, -\varphi_p) L_z(V_p), \quad (4.1)$$

где $L_z(V_p)$ преобразование буста вдоль оси Z , а преобразование $R(\varphi_p, \theta_p, -\varphi_p)$ задает поворот от оси Z к импульсу \mathbf{p} с сферическими углами

φ_p, θ_p . В этом случае вектор поляризации частицы ζ_p задается уравнением

$$\zeta_p = \left\{ \frac{|\mathbf{p}|}{m_p}, \frac{p_0}{m_p} \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \right\}. \quad (4.2)$$

А это и означает, что осью проекции спина является импульс частицы \mathbf{p} , т. е. мы имеем поляризационное состояние частицы с определенной спиральностью.

Найдем выражение для $Q = \hat{\varepsilon}_\sigma(k)$, где $\varepsilon_\sigma^\mu(k)$ – вектор поляризации фотона с 4-импульсом k . Данный 4-вектор может быть получен посредством преобразованием Лоренца H_k (4.1) из вектора изотропной тетрады \tilde{n}_σ т. е.

$$\begin{aligned} \varepsilon_\sigma(k) &= (-1) \frac{\sigma}{\sqrt{2}} H_k \tilde{n}_\sigma = \\ &= (-1) \frac{\sigma}{\sqrt{2}} R(\varphi_k, \theta_k, -\varphi_k) L_z(k) \tilde{n}_\sigma, \quad (4.3) \\ &(\sigma = \pm 1). \end{aligned}$$

Так как преобразование $L_z(k)$ оставляет 4-вектор \tilde{n}_σ неизменным, то для соответствующего базового матричного элемента имеем, что (смотри уравнение (2.21))

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho,\lambda}^{C,A} [\hat{\varepsilon}_\sigma(k)] &= \bar{u}_\rho(b_C) \hat{\varepsilon}_\sigma(k) u_{-\lambda}(b_{-A}) = \\ &= (-1) \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \bar{u}_\rho(b_C) U[R(\varphi_k, \theta_k, -\varphi_k)] \times \\ &\times \hat{n}_\sigma U^{-1}[R(\varphi_k, \theta_k, -\varphi_k)] u_{-\lambda}(b_{-A}) = \\ &= (-1) \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \sum_{\tau_1, \tau_2 = -1}^1 \bar{u}_\rho(b_{\tau_2}) \hat{n}_\sigma u_{-\lambda}(b_{\tau_1}) \times \\ &\times D_{C\rho/2, \tau_2\rho/2}^{*1/2}(\varphi_k, \theta_k, -\varphi_k) D_{A\lambda/2, -\tau_1\lambda/2}^{1/2}(\varphi_k, \theta_k, -\varphi_k). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Используя, что

$$\bar{u}_\rho(b_{\tau_2}) \hat{n}_\sigma u_{-\lambda}(b_{\tau_1}) = (-2\tau_1) \delta_{\rho,-\lambda} \delta_{\tau_2, -\tau_1} \delta_{\tau_1, -\sigma\lambda} \quad (4.5)$$

получаем выражение:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho,\lambda}^{C,A} [\hat{\varepsilon}_\sigma(k)] &= \\ &= (-1) \frac{C\sigma}{\sqrt{2}} \sqrt{3+AC} \delta_{\rho,-\lambda} D_{(A+C)\lambda/2, \sigma}^1(\varphi_k, \theta_k, -\varphi_k), \quad (4.6) \\ &(\sigma = \pm 1). \end{aligned}$$

Последнее соотношение получено с помощью разложения Клебша – Гордана для D -матриц:

$$\begin{aligned} D_{\lambda_1, \lambda_2}^{1/2}(\varphi, \theta, -\varphi) D_{\sigma_1, \sigma_2}^{1/2}(\varphi, \theta, -\varphi) &= \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(3+4\lambda_1\sigma_1)} \sqrt{(3+4\lambda_2\sigma_2)} \times \\ &\times D_{\lambda_1+\sigma_1, \lambda_2+\sigma_2}^1(\varphi, \theta, -\varphi) + \\ &+ 2\lambda_1\lambda_2 \delta_{\lambda_1, -\sigma_1} \delta_{\lambda_2, -\sigma_2}, \quad (\lambda_{1,2}, \sigma_{1,2} = \pm 1/2). \end{aligned} \quad (4.7)$$

По аналогии с вышеприведенными выкладками можно найти выражения и для других операторов Q .

Для базового матричного элемента $Q = \hat{\varepsilon}_\sigma(p)$, где $\varepsilon_\sigma^\mu(p)$ вектор поляризации векторного массивного бозона с 4-импульсом

$$p = \{p_0, |\mathbf{p}| \sin \theta_p \cos \varphi_p, |\mathbf{p}| \sin \theta_p \sin \varphi_p, |\mathbf{p}| \cos \theta_p\}$$

после ряда преобразований получим, что

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho,\lambda}^{C,A} [\hat{\varepsilon}_\sigma(p)] &= \left[\frac{p_0}{\sqrt{p^2}} \delta_{\sigma,0} - \sigma \delta_{\sigma^2,1} \right] \times \\ &\times \frac{C}{\sqrt{2}} \sqrt{3+AC} D_{(A+C)\lambda/2, \sigma}^1(\varphi_p, \theta_p, -\varphi_p) + \\ &+ \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{p^2}} \delta_{\sigma,0} \delta_{C,-A} \left[\delta_{\rho,-\lambda}, \quad (\sigma = 0, \pm 1). \right. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Выражение для базового матричного элемента $Q = \hat{p} \hat{\varepsilon}_\sigma(p)$ запишется в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho,\lambda}^{C,A} [\hat{p} \hat{\varepsilon}_\sigma(p)] &= \frac{C}{\sqrt{2}} \sqrt{3-AC} \times \\ &\times \left(\sigma \delta_{\sigma^2,1} (p_0 - \lambda \sigma |\mathbf{p}|) - \sqrt{p^2} \delta_{\sigma,0} \right) \times \\ &\times D_{(A-C)\lambda/2, \sigma}^1(\varphi_p, \theta_p, -\varphi_p) \delta_{\rho,\lambda}, \quad (\sigma = 0, \pm 1). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Более сложным примером базового элемента являются коэффициенты разложения биспинора (2.22) по базисным спинорам. Для спиральных состояний имеем, что [9]

$$\begin{aligned} s_{\rho,\lambda}^{(A,D)}(p, s_H) &= (D\lambda) f_{\rho\lambda,D} \sqrt{p_0 - (D\lambda\rho)|\mathbf{p}|} \times \\ &\times D_{A\rho/2, -D\lambda/2}^{*1/2}(\varphi_p, \theta_p, -\varphi_p), \end{aligned} \quad (4.10)$$

где

$$f_{\lambda\rho,D} = \delta_{\rho,-\lambda} + D \delta_{\rho,\lambda}. \quad (4.11)$$

Запишем еще ряд простых соотношений для базовых элементов:

$$\Gamma_{\rho,\lambda}^{C,A} [\omega_\alpha] = \delta_{\rho,\lambda} \delta_{C,A} \delta_{\alpha,-\lambda} \quad (\alpha = \pm 1), \quad (4.12)$$

$$\Gamma_{\rho,\lambda}^{C,A} \left[Q \sum_{\alpha=-1}^1 \omega_\alpha g_\alpha \right] = g_{-\lambda} \Gamma_{\rho,\lambda}^{C,A} [Q], \quad (\alpha = \pm 1), \quad (4.13)$$

$$\Gamma_{\rho,\sigma}^{C,A} [Q_1 Q_2] = \sum_{D,\lambda=-1}^1 \Gamma_{\rho,\lambda}^{C,D} [Q_1] \Gamma_{\lambda,\sigma}^{D,A} [Q_2]. \quad (4.14)$$

5 Пример расчета техники «строительных» блоков

Применим методику «строительных» блоков для вычисления борновской амплитуды векторного бозона V массы m_V и спиральности τ в пару фермионов

$$V(p, \tau) \rightarrow f_i(k_1, \lambda_{k_1}) + \bar{f}_j(k_2, \lambda_{k_2}), \quad (5.1)$$

где f фермион со спиральностью λ .

Матричный элемент распада запишется в обобщенном виде:

$$\begin{aligned} M_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}}^\tau (V \rightarrow f_i \bar{f}_j) &= \\ &= R_{ij}^V \bar{u}_{\lambda_{k_1}}(k_1, m_1) \hat{\varepsilon}_z(p) \left[\sum_{\alpha=-1}^1 \omega_\alpha g_\alpha^{V\bar{f}} \right] v_{\lambda_{k_2}}(k_2, m_2), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $g_{\pm 1}^{V\bar{f}} = L, R$ константы, генерируемые вершиной $V\bar{f}f$, а R_{ij}^V является функцией фермионных зарядов и элементов СКМ-матрицы.

Матричный элемент (5.2) с помощью соотношения полноты представим в виде блоков МБС (см. (3.2))

$$\begin{aligned} M_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}}^\tau (V \rightarrow f_i \bar{f}_j) &= \\ &= R_{ij}^V \sum_{\sigma, \rho=-1}^1 \sum_{A, C=-1}^1 \bar{s}_{\rho, \lambda_{k_1}}^{(C,1)}(k_1) \Gamma_{\rho, \sigma}^{C,A} \times \\ &\times \left[\hat{\varepsilon}_\tau(p) \sum_{\alpha=-1}^1 \omega_\alpha g_\alpha^{V\bar{f}} \right] s_{\sigma, \lambda_{k_2}}^{(A,-1)}(k_2) = \quad (5.3) \\ &= R_{ij}^V \sum_{\sigma, \rho=-1}^1 \sum_{A, C=-1}^1 g_{-\sigma}^{V\bar{f}} \bar{s}_{\rho, \lambda_{k_1}}^{(C,1)}(k_1) \times \\ &\times \Gamma_{\rho, \sigma}^{C,A} \left[\hat{\varepsilon}_\tau(p) \right] s_{\sigma, \lambda_{k_2}}^{(A,-1)}(k_2). \end{aligned}$$

Рассмотрим распад (5.1) в системе покоя бозона V т. е.

$$\begin{aligned} P^\mu &= (M_V, 0, 0, 0), \\ k_1^\mu &= (E_{k_1}, |\mathbf{k}| \sin \theta, 0, |\mathbf{k}| \cos \theta), \\ k_2^\mu &= (E_{k_2}, -|\mathbf{k}| \sin \theta, 0, -|\mathbf{k}| \cos \theta), \quad (5.4) \\ |\mathbf{k}| &= \frac{\sqrt{M_V^4 + (m_1^2 - m_2^2)^2 - 2M_V^2(m_1^2 + m_2^2)}}{2M_V} = M_V \kappa, \\ E_{k_1} &= \frac{M_V^2 - m_2^2 + m_1^2}{2M_V}, \\ E_{k_2} &= \frac{M_V^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M_V}. \quad (5.5) \end{aligned}$$

Используя коэффициенты разложения (4.10) и блок (4.8) для $\Gamma_{\rho, \sigma}^{C,A} \left[\hat{\varepsilon}_\tau(p) \right]$ получим, что

$$\begin{aligned} M_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}}^\tau (V \rightarrow f_i \bar{f}_j) &= \\ &= R_{ij}^V \sum_{\sigma=-1}^1 \sum_{A, C=-1}^1 g_{-\sigma}^{V\bar{f}} \sqrt{\frac{3+AC}{2}} \delta_{\sigma(C+A)/2, \tau} \times \\ &\times \left(\tau \delta_{\tau^2, 1} - \delta_{\tau, 0} \right) \sqrt{(E_{k_2} + \lambda_{k_2} \sigma |\mathbf{k}|)(E_{k_1} - \lambda_{k_1} \sigma |\mathbf{k}|)} \times \\ &\times D_{A\sigma/2, -\lambda_{k_2}/2}^{*1/2}(\varphi, \theta, -\varphi) D_{C\sigma/2, \lambda_{k_1}/2}^{*1/2}(\varphi, \theta, -\varphi) = \quad (5.6) \\ &= R_{ij}^V \sum_{\sigma=-1}^1 \sum_{A=-1}^1 g_{-\sigma}^{V\bar{f}} \sqrt{1+A\sigma\tau} \times \\ &\times \sqrt{(E_{k_2} + \lambda_{k_2} \sigma |\mathbf{k}|)(E_{k_1} - \lambda_{k_1} \sigma |\mathbf{k}|)} \times \\ &\times \left(\tau \delta_{\tau^2, 1} - \delta_{\tau, 0} \right) D_{A\sigma/2, -\lambda_{k_2}/2}^{*1/2}(\varphi, \theta, -\varphi) \times \\ &\times D_{\tau-A\sigma/2, \lambda_{k_1}/2}^{*1/2}(\varphi, \theta, -\varphi). \end{aligned}$$

С помощью разложения Клебша-Гордана для D -функций Вигнера (4.7) и с учетом того, что $\varphi = 0$ после суммирования по индексу A приходим к выражению

$$M_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}}^\tau (V \rightarrow f_i \bar{f}_j) =$$

$$\begin{aligned} &= d_{\tau, (\lambda_{k_1} - \lambda_{k_2})/2}^1(\theta) R_{ij}^V \left(\tau \delta_{\tau^2, 1} - \delta_{\tau, 0} \right) \sqrt{\frac{3 - \lambda_{k_1} \lambda_{k_2}}{2}} \times \\ &\times \sum_{\sigma=-1}^1 g_{-\sigma}^{V\bar{f}} \sqrt{(E_{k_2} + \lambda_{k_2} \sigma |\mathbf{k}|)(E_{k_1} - \lambda_{k_1} \sigma |\mathbf{k}|)}. \quad (5.7) \end{aligned}$$

Для функции $\sqrt{(E_{k_2} + \tau |\mathbf{k}|)(E_{k_1} + \rho |\mathbf{k}|)}$ после преобразований в системе покоя, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} &\sqrt{(E_{k_2} + \tau |\mathbf{k}|)(E_{k_1} + \rho |\mathbf{k}|)} = \\ &= \frac{M_V}{\sqrt{2}} \left[\delta_{\tau, \rho} \sqrt{1 - \tilde{m}_+ + 2\rho\kappa} + \delta_{\tau, -\rho} \sqrt{\tilde{m}_+ - \tilde{m}_- + 2\rho\tilde{m}_- \kappa} \right] = \\ &= \frac{M_V}{\sqrt{2}} \left[\delta_{\tau, \rho} Y_\rho^{(I)} + \delta_{\tau, -\rho} \sqrt{2} Y_\rho^{(II)} \right], \quad (5.8) \end{aligned}$$

где

$$\tilde{m}_\pm = \frac{m_1^2 \pm m_2^2}{M_V^2}, \quad \kappa = \frac{|\mathbf{k}|}{M_V}.$$

Тогда используя (5.8), получаем, что матричный элемент (5.7) принимает компактный вид

$$\begin{aligned} M_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}}^\tau (V \rightarrow f_i \bar{f}_j) &= \\ &= d_{\tau, (\lambda_{k_1} - \lambda_{k_2})/2}^1(\theta) R_{ij}^V \left(\tau \delta_{\tau^2, 1} - \delta_{\tau, 0} \right) M_V \times \quad (5.9) \\ &\times \sum_{\sigma=-1}^1 g_{-\sigma}^{V\bar{f}} \left[\delta_{\lambda_{k_2}, -\lambda_{k_1}} Y_{\lambda_{k_2} \sigma}^{(I)} + \delta_{\lambda_{k_2}, \lambda_{k_1}} Y_{\lambda_{k_2} \sigma}^{(II)} \right]. \end{aligned}$$

Если $m_1 = m_2 = 0$, то (5.9) редуцируется к виду

$$\begin{aligned} M_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}}^\tau (V \rightarrow f_i \bar{f}_j) &= \\ &= \delta_{\lambda_{k_2}, -\lambda_{k_1}} M_V g_{\lambda_{k_2}}^{V\bar{f}} R_{ij}^V \left(\tau \delta_{\tau^2, 1} - \delta_{\tau, 0} \right) d_{\tau, \lambda_{k_1}}^1(\theta). \quad (5.10) \end{aligned}$$

Парциальная ширина распада неполяризованного векторного бозона в неполяризованную фермионную пару в системе покоя определяется стандартным образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{d\Omega} &= \frac{1}{3} \frac{|\mathbf{k}|}{32\pi^2 M_V^2} \times \\ &\times \sum_{\tau=-1, 0}^1 \sum_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}=-1}^1 \left| M_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}}^\tau (V \rightarrow f_i \bar{f}_j) \right|^2. \quad (5.11) \end{aligned}$$

Ширина распада $V \rightarrow f_i \bar{f}_j$

$$\Gamma = \int \frac{d\Gamma}{d\Omega} d\Omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\varphi \frac{d\Gamma}{d\Omega} \quad (5.12)$$

с помощью соотношения

$$\frac{(2j+1)}{2} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left| d_{\sigma, \rho}^j(\theta) \right|^2 = 1 \quad (5.13)$$

и уравнения (5.9) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \Gamma(V \rightarrow f_i \bar{f}_j) &= \frac{|\mathbf{k}|}{24\pi} \left| R_{ij}^V \right|^2 \times \\ &\times \sum_{\lambda_{k_1}=-1}^1 \left(\left| \sum_{\sigma=-1}^1 g_{-\sigma}^{V\bar{f}} Y_{\lambda_{k_1} \sigma}^{(I)} \right|^2 + \left| \sum_{\sigma=-1}^1 g_{-\sigma}^{V\bar{f}} Y_{\lambda_{k_1} \sigma}^{(II)} \right|^2 \right). \quad (5.14) \end{aligned}$$

В качестве конкретного примера рассмотрим распад $W \rightarrow \ell \bar{\nu}_\ell$. В этом случае

$$M_V = M_W, m_1 = m_l, m_2 = 0$$

и

$$g_{\lambda}^{W\ell\nu} = \delta_{\lambda,-1} \frac{1}{\sqrt{2}s_W}, R_{ij}^{W} = (-1)\sqrt{4\pi\alpha}, \quad (5.15)$$

где α – постоянная тонкой структуры; s_W – синус угла Вайберга-Салама.

Тогда из (5.14), (5.15) и (5.8) следует, что

$$\Gamma(W \rightarrow \ell \bar{\nu}_\ell) = \frac{\alpha}{12s_W^2} \left(\frac{M_W^2 - m_\ell^2}{2M_W} \right) \left(1 - \frac{m_\ell^2}{2M_W^2} - \frac{m_\ell^4}{2M_W^4} \right). \quad (5.16)$$

Ширина распада (5.16) совпадает с известными в литературе выражениями (например, [16], [17]), что подтверждает правильность предлагаемой методики.

Заключение

В работе представлена методика расчета матричных элементов техникой строительных блоков, полученных в рамках МБС.

Согласно данной методики спинорная структура, соответствующая фермионной линии, сводится к суперпозиции базовых матричных элементов.

Большая часть базовых конструкций можно рассчитать отдельно и затем использовать как готовые функции при вычислении процессов взаимодействия элементарных частиц. Таким образом, задача вычисления фейнмановской диаграммы состоит в преобразовании возникающего аналитического выражения к базовым матричным элементам с последующей подстановкой и элементарным суммированием. При этом основная часть сумм, возникающих в процессе вычисления, снимается за счет присутствия символов Кронекера.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bellomo, E.* Sull'uso degli operatori di proiezione per ottenere gli elementi di matrice per particelle di spin 1/2 / *E. Bellomo* // *Nuovo Cimento*. – 1961. – Vol. 21, № 5. – P. 730–739.
2. *Богущ, А.А.* Ковариантное описание спиновых релятивистских частиц и его применение / *А.А. Богущ, Ф.И. Федоров* // *Весті АН БССР. Сер.фіз.-тэхн. навук*. – 1962. – № 2. – С. 26–38.
3. *Федоров, Ф.И.* Ковариантное вычисление матричных элементов / *Ф.И. Федоров* // *Известия Вузов. Физика*. – 1980. – № 2. – С. 32–45.

4. *Single bremsstrahlung processes in gauge theories* / F.A. Berends [et al.] // *Phys. Letters*. – 1981. – Vol. B103. – P. 124–129.

5. *Галынский, М.В.* Диагональный спиновый базис и вычисление процессов с поляризованными частицами / *М. В. Галынский, С. М. Сикач* // *ЭЧАЯ*. – 1998. – Т. 29. – С. 1133–1193.

6. *Ballestrero, A.* A new method for helicity calculations / *A. Ballestrero, E. Maina* // *Phys. Lett.* – 1995. – Vol. B350. – P. 225–233.

7. *Dittmaier, S.* Weyl-van-der-Waerden formalism for helicity amplitudes of massive particles / *S. Dittmaier* // *Phys. Rev.* – 1999. – Vol. D59. – P. 016007–1–14.

8. *Андреев, В.В.* Аналитическое вычисление фейнмановских амплитуд / *В. В. Андреев* // *Ядерная физика*. – 2003. – Т. 66, № 2. – С. 410–420.

9. *Андреев, В. В.* Пуанкаре-ковариантные модели двухчастичных систем с квантовополевыми потенциалами / *В. В. Андреев*. – Гомель: УО “Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины”, 2008. – 294 с.

10. *Accomando, E.* WPHACT 2.0: A fully massive Monte-Carlo generator for four fermion physics at e+ e- colliders / *E. Accomando, A. Ballestrero, E. Maina* // *Comput. Phys. Commun.* – 2003. – Vol. 150. – P. 166–196.

11. *Borodulin, V.I.* CORE -Compendium of Relations / *V.I. Borodulin, R.N. Rogalev, S.R. Slabospitsky*. – Protvino, Russia: IHEP, 1995. – 108 p. – (Preprint IHEP 95-90).

12. *Федоров, Ф.И.* Группа Лоренца / *Ф.И. Федоров*. – Москва: Наука, 1979. – 384 с.

13. *Богущ, А.А.* Введение в полевую теорию элементарных частиц / *А.А. Богущ*. – Минск: Наука и техника, 1981. – 390 с.

14. *Богущ, А.А.* Введение в калибровочную полевую теорию электрослабых взаимодействий / *А.А. Богущ*. – Минск: Наука и техника, 1987. – 359 с.

15. *Хелзен, Ф.* Кварки и лептоны. Введение в физику частиц / *Ф. Хелзен, А. Мартин*. – Москва: Мир, 1987. – 456 с.

16. *Denner, A.* The W-boson width / *A. Denner, T. Sack* // *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*. – 1990. – Vol. 46, № 4. – P. 653–663.

17. *Bardin, D.* The Standard Model in the Making Precision Study of the Electroweak Interactions / *D. Bardin, G. Passarino*. – Oxford University Press, 1999. – 704 p.

Поступила в редакцию 28.04.14.

УДК 539.12.01

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЗАДАЧА О СОСТОЯНИЯХ РАССЕЙНИЯ ДВУХЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМ С ПОТЕНЦИАЛАМИ ОДНОБОЗОННОГО ОБМЕНА

Ю.А. Гришечкин, В.Н. Капшай

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

RELATIVISTIC SCATTERING PROBLEM FOR TWO-PARTICLE SYSTEMS WITH ONE-BOSON EXCHANGE POTENTIALS

Yu.A. Grishechkin, V.N. Kapshai

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Найдены численные решения уравнений квантовой теории поля, описывающих s -состояния рассеяния систем двух скалярных частиц в случаях потенциалов однобозонного обмена и потенциала Юкавы. На основании полученных решений вычислены амплитуды рассеяния, длины рассеяния и фазовые сдвиги. Показано, что найденные амплитуды рассеяния удовлетворяют условию унитарности. Проведено сравнение полученных в такой простой модели результатов с экспериментальными данными для нейтрон-протонных систем.

Ключевые слова: двухчастичные уравнения, релятивистское конфигурационное представление, потенциал однобозонного обмена, амплитуда рассеяния, длина рассеяния, фазовый сдвиг, составные квадратуры Гаусса, дейтрон.

Numerical solutions of quantum field theory equations describing scattering s -states of two scalar particles are found in cases of a one-boson exchange potential and the Yukawa potential. Scattering amplitudes, scattering lengths and phase shifts are calculated on the basis of the solutions obtained. It is shown that the scattering amplitudes found satisfy a unitarity condition. The comparison of the results obtained in this simple model with experimental data for neutron-proton systems is carried out.

Keywords: two-particle equations, relativistic configurational representation, one-boson exchange potential, scattering amplitude, scattering length, phase shift, composite Gaussian quadrature, deuteron.

Introduction

Equations of the quasipotential type [1], [2] have found wide application in the study of relativistic composite systems. Especially successfully they have been used in the study of two-particle system bound states. One of the advantages of this approach is the possibility of simple quantum-mechanical analogy. Two-particle equations of the quasipotential type can be formulated in the momentum representation in the integral form and in the relativistic configurational representation (RCR) in the difference or integral forms [3]. In our previous papers [4], [5] the advantages of integral equations for bound states in the RCR were demonstrated. For example, in article [5] numerical solutions of two-particle equations were obtained by simple methods for the potentials in the RCR, equations for which in the momentum representation are singular. Numerical solution of singular integral equations is a complicated problem which requires using of special methods [6], [7].

In this paper numerical solutions of relativistic two-particle integral equations for s -scattering states are found in cases of a one-boson exchange potential and the Yukawa potential in the RCR. The scattering amplitudes, scattering lengths and phase shifts are calculated on the basis of the wave functions found. Comparison of these values with experimental data

for neutron-proton scattering is carried out. It should be noted that numerical solving of the two-particle equations for wave functions of scattering states in the momentum representation, as well as of the equations for the scattering amplitudes in the momentum representation causes serious difficulties since the Green functions (GF) in these all equations are singular.

1 Relativistic two-particle equations

Relativistic equations for the scattering s -states of two particles with equal masses m have in the RCR the form [8], [9]

$$\psi_{(j)}(\chi_q, r) = \sin(\chi_q mr) - \lambda \int_0^\infty dr' G_{(j)}(\chi_q, r, r') V(r') \psi_{(j)}(\chi_q, r'), \quad (1.1)$$

where index $j = 1, 2, 3, 4$ corresponds to one of the four variants of equations of the quasipotential type [1–3]: $j = 1$ ($j = 3$) – the Logunov – Tavkhelidze equation (modified), $j = 2$ ($j = 4$) – the Kadyshvsky equation (modified). The value $\psi_{(j)}(\chi_q, r)$ in equations (1.1) is the relative motion wave function, r is the modulus of radius-vector in the RCR, $\chi_q \geq 0$ is the rapidity connected with the energy of two-particle system $2E_q$ by relation

$2E_q = 2m \operatorname{ch} \chi_q$, λ is the coupling constant, $V(r)$ is the potential. Green functions $G_{(j)}(\chi_q, r, r')$ have the following form [8], [9]:

$$G_{(j)}(\chi_q, r, r') = G_{(j)}(\chi_q, r - r') - G_{(j)}(\chi_q, r + r'), \quad (1.2)$$

where

$$G_{(1)}(\chi_q, r) = \frac{-i \operatorname{sh}[(\pi/2 + i\chi_q)mr]}{K_q^{(1)} \operatorname{sh}(\pi mr/2)}, \quad (1.3)$$

$$G_{(2)}(\chi_q, r) = \frac{(4m \operatorname{ch} \chi_q)^{-1}}{\operatorname{ch}(\pi mr/2)} - \frac{i \operatorname{sh}[(\pi + i\chi_q)mr]}{K_q^{(2)} \operatorname{sh}(\pi mr)},$$

$$G_{(3)}(\chi_q, r) = \frac{-i \operatorname{ch}[(\pi/2 + i\chi_q)mr]}{K_q^{(3)} \operatorname{ch}(\pi mr/2)},$$

$$G_{(4)}(\chi_q, r) = \frac{-i \operatorname{sh}[(\pi + i\chi_q)mr]}{K_q^{(4)} \operatorname{sh}(\pi mr)}.$$

In expressions (1.3) we use the notations

$$K_q^{(1)} = K_q^{(2)} = m \operatorname{sh} 2\chi_q;$$

$$K_q^{(3)} = K_q^{(4)} = 2m \operatorname{sh} \chi_q.$$

Equations (1.1) for bound states become homogeneous, and rapidity becomes imaginary, namely $\chi_q = iw_q$, where $0 < w_q \leq \pi/2$ ($2E_q = 2m \cos w_q$, $2E_q < 2m$):

$$\psi_{(j)}(iw_q, r) = -\lambda \int_0^\infty dr' G_{(j)}(iw_q, r, r') V(r') \psi_{(j)}(iw_q, r'). \quad (1.4)$$

In what follows we need the asymptotic behavior of GFs (1.2) at $r \rightarrow \infty$:

$$G_{(j)}(\chi_q, r, r') \Big|_{r \rightarrow \infty} \cong \frac{-2}{K_q^{(j)}} \exp(i\chi_q mr) \sin(\chi_q mr'). \quad (1.5)$$

Let us find the wave functions asymptotics at $r \rightarrow \infty$ using equations (1.1) and expressions (1.5):

$$\psi_{(j)}(\chi_q, r) \Big|_{r \rightarrow \infty} \cong \sin(\chi_q mr) + q f_{(j)}(\chi_q) \exp(i\chi_q mr),$$

where $f_{(j)}(\chi_q)$ is used for the scattering amplitude which is determined by analogy with quantum mechanics as the coefficient at the scattered wave $\exp(i\chi_q mr)$ divided by $q = m \operatorname{sh} \chi_q$ [10], [11]:

$$f_{(j)}(\chi_q) = \frac{2\lambda}{qK_q^{(j)}} \int_0^\infty dr' \sin(\chi_q mr') V(r') \psi_{(j)}(\chi_q, r'). \quad (1.6)$$

The scattering amplitude is connected with the partial scattering cross section $\sigma_{0(j)}(\chi_q)$ and unitary S -matrix $S_{(j)}(\chi_q)$ by the relations

$$\sigma_{0(j)}(\chi_q) = 4\pi |f_{(j)}(\chi_q)|^2;$$

$$S_{(j)}(\chi_q) = 1 + 2iqf_{(j)}(\chi_q).$$

The unitarity of the S -matrix is reflected in the representation $S_{(j)}(\chi_q) = \exp(2i\phi_{(j)}(\chi_q))$, where $\phi_{(j)}(\chi_q)$ is the phase shift.

Let us determine the scattering length by analogy with quantum mechanics as $a_{(j)} = -f_{(j)}(0)$ [10], [11]. It is not difficult to obtain the expression for scattering length via wave function from formula (1.6):

$$a_{(j)} = -\lambda \int_0^\infty dr' r' V(r') \tilde{\psi}_{(j)}(r'), \quad (1.7)$$

where the denotation $\tilde{\psi}_{(j)}(r) = \lim_{\chi_q \rightarrow 0} \psi_{(j)}(\chi_q, r)/q$ is introduced. It is possible to find equations for functions $\tilde{\psi}_{(j)}(r)$. One can divide equations (1.1) by q and consider then their limit at $\chi_q \rightarrow 0$, it yields

$$\tilde{\psi}_{(j)}(r) = r - \lambda \int_0^\infty dr' G_{(j)}(0, r, r') V(r') \tilde{\psi}_{(j)}(r'). \quad (1.8)$$

Green functions at zero rapidity χ_q have the form

$$G_{(j)}(0, r, r') = G_{(j)}(0, r - r') - G_{(j)}(0, r + r'),$$

where

$$G_{(1)}(0, r) = \frac{1}{2} r \operatorname{coth} \frac{\pi mr}{2},$$

$$G_{(2)}(0, r) = \frac{1}{4m \operatorname{ch}(\pi mr/2)} + \frac{1}{2} r \operatorname{coth} \pi mr,$$

$$G_{(3)}(0, r) = \frac{1}{2} r \tanh \frac{\pi mr}{2},$$

$$G_{(4)}(0, r) = \frac{1}{2} r \operatorname{coth} \pi mr.$$

Taking into account expressions (1.7) one can represent the asymptotics of equations (1.8) at $r \rightarrow \infty$ in the form

$$\tilde{\psi}_{(j)}(r) \Big|_{r \rightarrow \infty} \cong r - a_{(j)}. \quad (1.9)$$

Formula (1.9) is much easier to use for the scattering length finding than the expression (1.7) since it does not contain integrals.

It is not difficult to see that the non-relativistic limit ($m \rightarrow \infty$, $\chi_q \rightarrow 0$) of all equations and formulas discussed gives corresponding equations and expressions of quantum mechanics [10], [11].

2 Methods of solving

To solve integral equations (1.1), (1.4) and (1.8) we used the composite Gaussian quadrature method [12]. Let us describe the essence of this method in case of equations (1.1). After replacing the upper infinite limit in the equations by a large value R , which can be chosen on the basis of the accuracy requirements for the solutions, and after presenting the integral as a sum of N integrals, we obtain

$$\psi_{(j)}(\chi_q, r) = \sin(\chi_q mr) - \lambda \sum_{k=1}^N \int_{r_{k-1}}^{r_k} dr' G_{(j)}(\chi_q, r, r') V(r') \psi_{(j)}(\chi_q, r'), \quad (2.1)$$

where $r_k = r_{k-1} + h_k$, $r_0 = 0$, $r_N = R$ and h_k is the step. Let us reduce every interval $r \in [r_{k-1}; r_k]$ in equations (2.1) to the interval $x \in [-1; 1]$ by the variable substitution

$$r = u_k(x) = \frac{h_k x}{2} + \frac{r_k + r_{k-1}}{2}$$

and let us then apply the Gaussian quadrature formula for M nodes for integrals obtained [12], [13]. As a result we yield the following expressions:

$$\begin{aligned} \psi_{(j)}(\chi_q, r) = & \sin(\chi_q m r) - \\ & - \lambda \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^M h_k \frac{C_i}{2} G_{(j)}(\chi_q, r, u_k(x_i)) \times \\ & \times V(u_k(x_i)) \psi_{(j)}(\chi_q, u_k(x_i)), \end{aligned} \quad (2.2)$$

where x_i , C_i are nodes and weights of the Gaussian quadrature on the interval $x \in [-1; 1]$. Taking formula (2.2) in the points

$$r_{s,l} = u_s(x_l) = \frac{h_s x_l}{2} + \frac{r_s + r_{s-1}}{2}$$

one can obtain linear algebraic systems ($\alpha = M(s-1) + l$, $\beta = M(k-1) + i$):

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=1}^{N \cdot M} [\delta_{\alpha\beta} + \lambda K_{\alpha\beta}] \psi_{\beta} &= b_{\alpha}; \\ K_{\alpha\beta} &= A_{\beta} G_{\alpha\beta}; \\ G_{\alpha\beta} &= G_{(j)}(\chi_q, u_s(x_l), u_k(x_i)); \\ A_{\beta} &= h_k C_i V \frac{u_k(x_i)}{2}; \\ b_{\alpha} &= \sin(\chi_q m u_s(x_l)); \\ \psi_{\beta} &= \psi_{(j)}(\chi_q, u_k(x_i)). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Application of standard solving methods [12], [13] for algebraic systems (2.3) gives the values of the wave function for every particular energy value $2E_q$. In articles [4], [5] this method was used to solve the two-particle relativistic equations in the RCR for the bound states for which the corresponding systems of equations were homogeneous.

3 Results of numerical calculations

Let us consider solving two-particle equations (1.1) and (1.8) in case of the one-boson exchange potential [3]

$$V(r) = \frac{\text{ch}(\pi - \alpha)mr}{r \text{sh } \pi mr} \quad (3.1)$$

and in case of the Yukawa potential

$$V(r) = \frac{\exp(-\mu r)}{r}, \quad (3.2)$$

where parameter α is connected to the exchange scalar boson mass μ as $\cos \alpha = 1 - \mu^2 / (2m^2)$. Potential (3.1) is a variant of relativistic generalization of the Yukawa potential. The main difference of the relativistic potential from the non-relativistic one is in its stronger singularity at $r = 0$.

Results of the scattering lengths calculations for the Logunov – Tavkhelidze and modified Kadyshvsky equations with potential (3.1) at $m = 1$, $\mu = 0.2$ are demonstrated in figure 3.1. It is shown in the figure that the scattering lengths increase sharply at certain values of the coupling constants. A similar behavior of the scattering length depending on the coupling constant is well known in the non-relativistic theory. For instance, the scattering length in case of the potential well has similar property [10]. We do not demonstrate scattering lengths for other equations with potential (3.1) as well as for all equations with potential (3.2) because they have similar behaviour.

The results of the scattering cross sections and phase shifts calculating for potential (3.1) at $m = 1$, $\mu = 0.2$, $\lambda = 1$ are demonstrated in figure 3.2.

Numerical calculations show that all the scattering amplitudes obtained satisfy the unitarity condition

$$\text{Im } f_{(j)}(\chi_q) = q |f_{(j)}(\chi_q)|^2, \quad (3.3)$$

which in case of superposition of two delta-function potentials in the RCR was proved exactly [14].

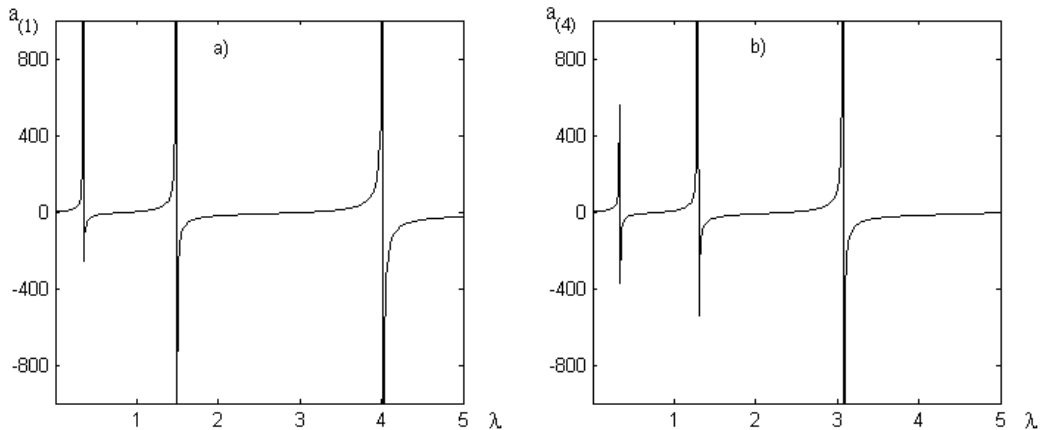


Figure 3.1 – Scattering lengths dependence on the coupling constant for the one-boson exchange potential: a) $j = 1$, b) $j = 4$

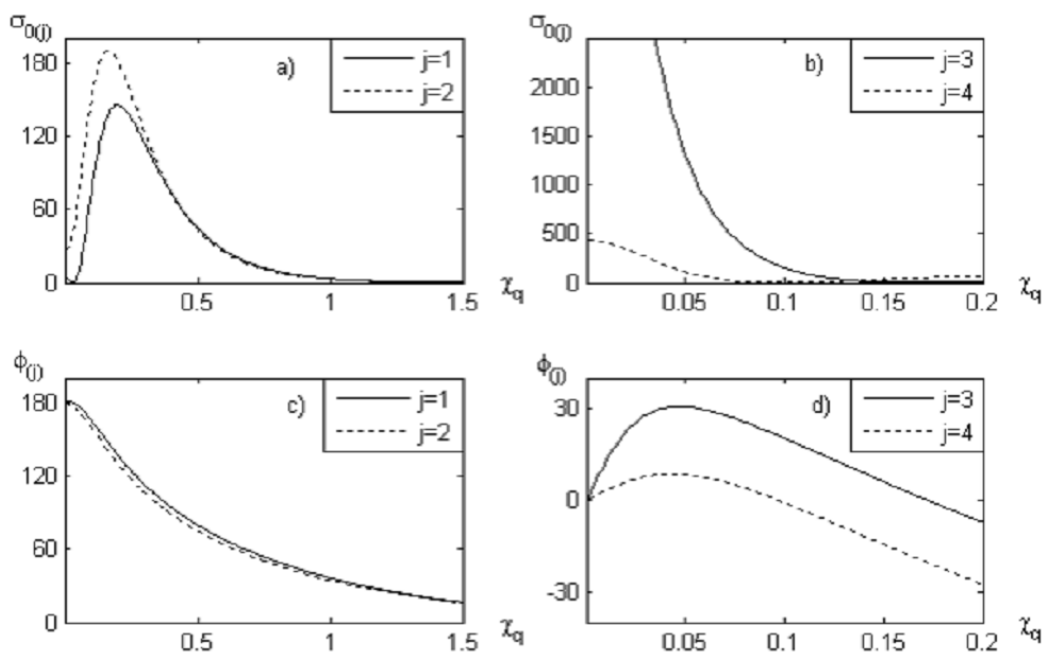


Figure 3.2 – Scattering cross sections (a, b) and respective phase shifts (c, d) dependence on the rapidity

Table 4.1 – Coupling constants for the deuteron binding energy and scattering lengths

Potential	Equation	Coupling constant λ	Scattering length $a_{(j)}$, Fm
Yukawa	$j = 0$	0.348536	5.43637
	$j = 1$	0.357978	5.47843
	$j = 2$	0.363810	5.48804
	$j = 3$	0.344018	5.43430
	$j = 4$	0.351273	5.44762
One-boson exchange	$j = 1$	0.354172	5.46913
	$j = 2$	0.360286	5.47941
	$j = 3$	0.338462	5.42058
	$j = 4$	0.346667	5.43618

4 A simplest model of two-particle system of the deuteron type

Let us consider as an example of application of two-particle equations with one-boson exchange potential some results of calculations for neutron-proton scattering and for neutron-proton bound state (deuteron). The two-particle relativistic equations under consideration and one-boson exchange potential (3.1) were obtained under the assumption of equal masses of both particles in the system. However proton and neutron have different masses. In addition the nucleons are spinor particles but equations (1.1) and potentials (3.1), (3.2) describe the system of two scalar particles. Nevertheless, not pretending to an excellent agreement with the experimental results we consider extremely simple scalar model of the deuteron type in which the mass m is the double reduced mass of the proton and neutron:

$$m = 2m_p m_n / (m_p + m_n),$$

where

$$m_p = 938.272013 \text{ MeV}, \quad m_n = 939.565346 \text{ MeV}$$

[15], when $m = 938.918234 \text{ MeV}$. We choose the mass of scalar exchange boson equal to the mass of π^0 -meson: $\mu = 134.9766 \text{ MeV}$ [15].

It is known from the experiments that binding energy of the deuteron is $2.224575(9) \text{ MeV}$ [16] and the scattering length for the proton-neutron triplet state is $5.424(4) \text{ Fm}$ [17]. Substituting this value of energy in equations (1.4) with potentials (3.1), (3.2) we find the eigenvalues of the coupling constants λ using the method discussed in [5]. Then we use the obtained values of the coupling constant for determining the scattering characteristics of the neutron-proton system: the scattering lengths, scattering cross sections and phase shifts. The results of calculation of the coupling constant and scattering lengths

are given in Table 4.1 for the four relativistic equations and for the Schrödinger equation ($j = 0$). A few values of the coupling constant in each case were found. They correspond to different states, i.e. this model does not match the experimentally established possibility of the existence of only one state of the deuteron. The coupling constants corresponding to the ground state of the system are given in table 4.1.

It is seen in the table that the best correspondence with experiment is given by the value of the scattering length, obtained by solving the modified Logunov – Tavkhelidze equation ($j = 3$) with the one-boson exchange potential.

The results of calculations of the phase shift for equation $j = 3$ with one-boson exchange potential and the experimental values in the dependence of the scattering energy [18] are demonstrated in figure 4.1. The figure shows that the results of calculations are located very close to the experimental values. Thus, this simple model gives good correspondence with the experimental value of the scattering length but gives not very good results for the phase shifts. In figure 4.2 the results of calculations of partial cross section also are represented corresponding to the phase shift in figure 4.1 for different values of energy.

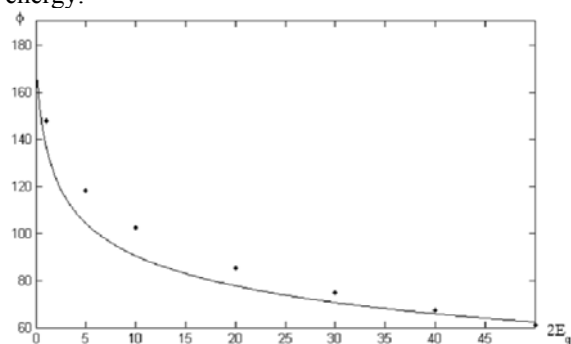


Figure 4.1 – Phase shifts in degrees dependence on energy (MeV): the experimental values are denoted by dots, calculated values by solid line

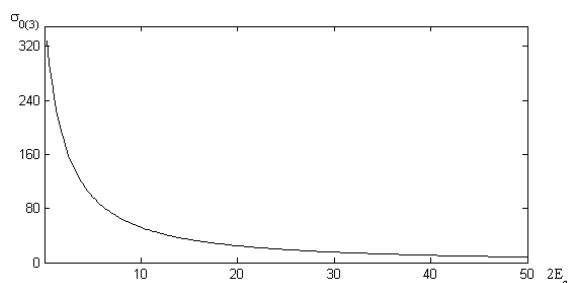


Figure 4.2 – Scattering cross section in (Fm^2) dependence on energy (MeV) for $j = 3$ equation

We do not represent figures with the results of calculations of the phase shifts and scattering cross sections for the other cases since they have similar

behavior and other phase shifts do not give better correspondence with experiment.

Conclusion

In this paper we found numerical solutions of the relativistic equations of quantum field theory describing the scattering s -states of two scalar particles with a variant of one-boson exchange potential and the Yukawa potential in the relativistic configurational representation. The scattering amplitudes, phase shifts and scattering lengths are calculated on the basis of the solutions obtained. It is shown that all numerical values of the scattering amplitudes found satisfy the unitarity condition. A comparison of the results obtained in this simple model with the experimental measurements for the triplet neutron-proton scattering was carried out. Comparison demonstrated good correspondence with the experimental results for the scattering length.

REFERENCES

1. Logunov, A.A. Quasi-Optical Approach in Quantum Field Theory / A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze // Nuovo Cimento. – 1963. – Vol. 29, № 2. – P. 380–399.
2. Kadyshesky, V.G. Quasipotential type equation for the relativistic scattering amplitude / V.G. Kadyshesky // Nucl. Phys. – 1968. – Vol. B6, № 1. – P. 125–148.
3. Кадышевский, В.Г. Трёхмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел / В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков // ЭЧАЯ. – 1972. – Т. 2, № 3. – С. 635–690.
4. Капшай, В.Н. Form-factors of relativistic bound state systems of two scalar particles with one-boson exchange potential / В.Н. Капшай, Ю.А. Гришечкин // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2011. – № 69 (6). – С. 70–74.
5. Grisechkin, Yu.A. Numerical solution of relativistic problems on bound states of systems of two spinless particles / Yu.A. Grisechkin, V.N. Kapshai // Russian Physics Journal. – 2013. – Vol. 56, № 4. – P. 435–443.
6. Delves, L.M. Numerical solution of integral equations / L.M. Delves, J. Walsh. – London : Oxford university press, 1974. – 339 p.
7. Deloff, A. Semi-Spectral Chebyshev Method in Quantum Mechanics / A. Deloff // Annals of Physics. – 2007. – Vol. 322. – P. 1373–1419.
8. Alferova, T.A. Expansion in terms of matrix elements of the Lorentz group unitary irreducible representations and integral equations for scattering states relativistic wave functions / T.A. Alferova, V.N. Kapshai // Nonlinear phenomena in complex systems: Proceed. of the Sixth Annual Seminar NPC'S'97 / Academy of Sciences of Belarus. Inst. of Phys. – Minsk, 1998. – P. 78–85.
9. Kapshai, V.N. Relativistic two-particle one-dimensional scattering problem for superposition of

- δ -potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // J. Phys. A. – 1999. – Vol. 32. – P. 5329–5342.
10. *Тейлор, Дж.* Теория рассеяния / Дж. Тейлор. – Москва : Мир, 1975. – 568 с.
11. *Ньютон, Р.* Теория рассеяния волн и частиц / Р. Ньютон. – Москва : Мир, 1969. – 608 с.
12. *Бахвалов, Н.С.* Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – 7-е изд. – Москва : Бином. Лаборатория знаний, 2011. – 636 с.
13. *Калиткин, Н.Н.* Численные методы / Н.Н. Калиткин. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.
14. *Kapshai, V.* Relativistic two-particle equations with superposition of delta-shell potentials: scattering and bound states [Electronic resource] / V. Kapshai, Yu. Grischehkin. – 2013. – Mode of access: <http://arxiv.org/pdf/quant-ph/1312.1902>. – Date of access: 06.12.2013.
15. *Review of Particle Physics* / K. Nakamura [et. al.] // Journal of Physics G. – 2010. – Vol. 37. – P. 075021.
16. *Van Der Leun, C.* The Deuteron Binding Energy / C. Van Der Leun, C. Alderliesten // Nucl. Phys. A. – 1982. – Vol. 380. – P. 261–269.
17. *Compilation of Coupling Constants and Low energy parameters* / O. Dumbrajs [et. al.] // Nucl. Physics B. – 1983. – Vol. 216. – P. 277–335.
18. *MacGregor, M.H.* Determination of the Nucleon-Nucleon Scattering Matrix. X. (p,p) and (n,p) Analysis from 1 to 450 MeV / M.H. MacGregor, R.A. Arndt, R.M. Wright // Phys. Rev. – 1969. – Vol. 182. – P. 1714–1728.

Поступила в редакцию 02.04.14.

расчета двойниковые границы линзовидного двойника в расчетной модели целесообразно представить состоящими из четырех участков (рисунок 1.1), форма каждого из которых описывается функциями $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$, $f_3(\xi)$ и $f_4(\xi)$. Тогда смещения u_i и напряжения σ_{ij} для рассматриваемого случая при неподвижных источниках внутренних напряжений будут рассчитываться по формулам:

$$u_i(x, y) = u_i^{(1)}(x, y) + u_i^{(2)}(x, y) + u_i^{(3)}(x, y) + u_i^{(4)}(x, y),$$

$$\sigma_{ij}(x, y) = \sigma_{ij}^{(1)}(x, y) + \sigma_{ij}^{(2)}(x, y) + \sigma_{ij}^{(3)}(x, y) + \sigma_{ij}^{(4)}(x, y),$$

где i, j принимают значения x, y или z ; $u_i^{(1)}(x, y)$, $u_i^{(2)}(x, y)$, $u_i^{(3)}(x, y)$, $u_i^{(4)}(x, y)$ и $\sigma_{ij}^{(1)}(x, y)$, $\sigma_{ij}^{(2)}(x, y)$, $\sigma_{ij}^{(3)}(x, y)$, $\sigma_{ij}^{(4)}(x, y)$ – смещения и напряжения соответственно, вызванные каждым из четырех выделенных участков границ линзовидного двойника. В соответствии с [1], [4], данные смещения и напряжения определяются по формулам:

$$u_i^{(1)}(x, y) = \int_0^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) u_i^{(1,0)}(x, y) d\xi,$$

$$u_i^{(2)}(x, y) = \int_0^L \sqrt{1 + (f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) u_i^{(2,0)}(x, y) d\xi,$$

$$u_i^{(3)}(x, y) = \int_{-L}^0 \sqrt{1 + (f_3'(\xi))^2} \rho_3(\xi) u_i^{(3,0)}(x, y) d\xi,$$

$$u_i^{(4)}(x, y) = \int_{-L}^0 \sqrt{1 + (f_4'(\xi))^2} \rho_4(\xi) u_i^{(4,0)}(x, y) d\xi;$$

$$\sigma_{ij}^{(1)}(x, y) = \int_0^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \sigma_{ij}^{(1,0)}(x, y) d\xi,$$

$$\sigma_{ij}^{(2)}(x, y) = \int_0^L \sqrt{1 + (f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \sigma_{ij}^{(2,0)}(x, y) d\xi,$$

$$\sigma_{ij}^{(3)}(x, y) = \int_{-L}^0 \sqrt{1 + (f_3'(\xi))^2} \rho_3(\xi) \sigma_{ij}^{(3,0)}(x, y) d\xi,$$

$$\sigma_{ij}^{(4)}(x, y) = \int_{-L}^0 \sqrt{1 + (f_4'(\xi))^2} \rho_4(\xi) \sigma_{ij}^{(4,0)}(x, y) d\xi.$$

Здесь L – половина длины двойника; $\rho_1(\xi)$, $\rho_2(\xi)$, $\rho_3(\xi)$ и $\rho_4(\xi)$ – плотности распределения двойникоующих дислокаций на заданных участках двойниковых границ; ξ – параметр интегрирования; $u_{ij}^{(1,0)}(x, y)$, $u_{ij}^{(2,0)}(x, y)$, $u_{ij}^{(3,0)}(x, y)$, $u_{ij}^{(4,0)}(x, y)$, $\sigma_{ij}^{(1,0)}(x, y)$, $\sigma_{ij}^{(2,0)}(x, y)$, $\sigma_{ij}^{(3,0)}(x, y)$ и $\sigma_{ij}^{(4,0)}(x, y)$ – смещения и напряжения соответственно, обусловленные единичной двойникоующей дислокацией, находящейся на границе двойника, и рассчитываемые из следующих формул [1], [4]:

$$u_x^{(1,0)}(x, y, \xi) = \frac{b_{\text{кп}}}{2\pi} \left[\arctg \frac{y - f_1(\xi)}{x - \xi} + \frac{(x - \xi)(y - f_1(\xi))}{2(1 - \nu)((x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2)} \right],$$

$$u_x^{(2,0)}(x, y, \xi) = \frac{b_{\text{кп}}}{2\pi} \left[\arctg \frac{y - f_2(\xi)}{x - \xi} + \frac{(x - \xi)(y - f_2(\xi))}{2(1 - \nu)((x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2)} \right],$$

$$u_x^{(3,0)}(x, y, \xi) = \frac{b_{\text{кп}}}{2\pi} \left[\arctg \frac{y - f_3(\xi)}{x - \xi} + \frac{(x - \xi)(y - f_3(\xi))}{2(1 - \nu)((x - \xi)^2 + (y - f_3(\xi))^2)} \right],$$

$$u_x^{(4,0)}(x, y, \xi) = \frac{b_{\text{кп}}}{2\pi} \left[\arctg \frac{y - f_4(\xi)}{x - \xi} + \frac{(x - \xi)(y - f_4(\xi))}{2(1 - \nu)((x - \xi)^2 + (y - f_4(\xi))^2)} \right],$$

$$u_y^{(1,0)}(x, y, \xi) = -\frac{b_{\text{кп}}}{2\pi} \left[\frac{1 - 2\nu}{4(1 - \nu)} \ln((x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2) + \frac{(x - \xi)^2 - (y - f_1(\xi))^2}{4(1 - \nu)((x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2)} \right],$$

$$u_y^{(2,0)}(x, y, \xi) = -\frac{b_{\text{кп}}}{2\pi} \left[\frac{1 - 2\nu}{4(1 - \nu)} \ln((x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2) + \frac{(x - \xi)^2 - (y - f_2(\xi))^2}{4(1 - \nu)((x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2)} \right],$$

$$u_y^{(3,0)}(x, y, \xi) = -\frac{b_{\text{кп}}}{2\pi} \left[\frac{1 - 2\nu}{4(1 - \nu)} \ln((x - \xi)^2 + (y - f_3(\xi))^2) + \frac{(x - \xi)^2 - (y - f_3(\xi))^2}{4(1 - \nu)((x - \xi)^2 + (y - f_3(\xi))^2)} \right],$$

$$u_y^{(4,0)}(x, y, \xi) = -\frac{b_{\text{кп}}}{2\pi} \left[\frac{1 - 2\nu}{4(1 - \nu)} \ln((x - \xi)^2 + (y - f_4(\xi))^2) + \frac{(x - \xi)^2 - (y - f_4(\xi))^2}{4(1 - \nu)((x - \xi)^2 + (y - f_4(\xi))^2)} \right],$$

$$u_z^{(1,0)}(x, y, \xi) = \frac{b_{\text{в}}}{2\pi} \arctg \frac{y - f_1(\xi)}{x - \xi},$$

$$u_z^{(2,0)}(x, y, \xi) = \frac{b_{\text{в}}}{2\pi} \arctg \frac{y - f_2(\xi)}{x - \xi},$$

$$\begin{aligned}
 u_z^{(3,0)}(x, y, \xi) &= \frac{b_b}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - f_3(\xi)}{x - \xi}, \\
 u_z^{(4,0)}(x, y, \xi) &= \frac{b_b}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y - f_4(\xi)}{x - \xi}; \\
 \sigma_{xx}^{(1,0)}(x, y, \xi) &= \\
 &= -\frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y - f_1(\xi))[3(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2]}{[(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2]^2}, \\
 \sigma_{xx}^{(2,0)}(x, y, \xi) &= \\
 &= -\frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y - f_2(\xi))[3(x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2]}{[(x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2]^2}, \\
 \sigma_{xx}^{(3,0)}(x, y, \xi) &= \\
 &= -\frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y - f_3(\xi))[3(x - \xi)^2 + (y - f_3(\xi))^2]}{[(x - \xi)^2 + (y - f_3(\xi))^2]^2}, \\
 \sigma_{xx}^{(4,0)}(x, y, \xi) &= \\
 &= -\frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y - f_4(\xi))[3(x - \xi)^2 + (y - f_4(\xi))^2]}{[(x - \xi)^2 + (y - f_4(\xi))^2]^2}, \\
 \sigma_{xy}^{(1,0)}(x, y, \xi) &= \\
 &= \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x - \xi)[(x - \xi)^2 - (y - f_1(\xi))^2]}{[(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2]^2}, \\
 \sigma_{xy}^{(2,0)}(x, y, \xi) &= \\
 &= \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x - \xi)[(x - \xi)^2 - (y - f_2(\xi))^2]}{[(x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2]^2}, \\
 \sigma_{xy}^{(3,0)}(x, y, \xi) &= \\
 &= \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x - \xi)[(x - \xi)^2 - (y - f_3(\xi))^2]}{[(x - \xi)^2 + (y - f_3(\xi))^2]^2}, \\
 \sigma_{xy}^{(4,0)}(x, y, \xi) &= \\
 &= \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x - \xi)[(x - \xi)^2 - (y - f_4(\xi))^2]}{[(x - \xi)^2 + (y - f_4(\xi))^2]^2}, \\
 \sigma_{yy}^{(1,0)}(x, y, \xi) &= \\
 &= \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y - f_1(\xi))[(x - \xi)^2 - (y - f_1(\xi))^2]}{[(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2]^2}, \\
 \sigma_{yy}^{(2,0)}(x, y, \xi) &= \\
 &= \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y - f_2(\xi))[(x - \xi)^2 - (y - f_2(\xi))^2]}{[(x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2]^2}, \\
 \sigma_{yy}^{(3,0)}(x, y, \xi) &= \\
 &= \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y - f_3(\xi))[(x - \xi)^2 - (y - f_3(\xi))^2]}{[(x - \xi)^2 + (y - f_3(\xi))^2]^2}, \\
 \sigma_{yy}^{(4,0)}(x, y, \xi) &= \\
 &= \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y - f_4(\xi))[(x - \xi)^2 - (y - f_4(\xi))^2]}{[(x - \xi)^2 + (y - f_4(\xi))^2]^2}, \\
 \sigma_{zz}^{(1,0)}(x, y, \xi) &= -\frac{\mu b_{\text{кр}} \nu}{2\pi(1-\nu)} \frac{y - f_1(\xi)}{(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz}^{(2,0)}(x, y, \xi) &= -\frac{\mu b_{\text{кр}} \nu}{2\pi(1-\nu)} \frac{y - f_2(\xi)}{(x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2}, \\
 \sigma_{zz}^{(3,0)}(x, y, \xi) &= -\frac{\mu b_{\text{кр}} \nu}{2\pi(1-\nu)} \frac{y - f_3(\xi)}{(x - \xi)^2 + (y - f_3(\xi))^2}, \\
 \sigma_{zz}^{(4,0)}(x, y, \xi) &= -\frac{\mu b_{\text{кр}} \nu}{2\pi(1-\nu)} \frac{y - f_4(\xi)}{(x - \xi)^2 + (y - f_4(\xi))^2}, \\
 \sigma_{zx}^{(1,0)}(x, y, \xi) &= -\frac{\mu b_b}{2\pi} \frac{y - f_1(\xi)}{(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2}, \\
 \sigma_{zx}^{(2,0)}(x, y, \xi) &= -\frac{\mu b_b}{2\pi} \frac{y - f_2(\xi)}{(x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2}, \\
 \sigma_{zx}^{(3,0)}(x, y, \xi) &= -\frac{\mu b_b}{2\pi} \frac{y - f_3(\xi)}{(x - \xi)^2 + (y - f_3(\xi))^2}, \\
 \sigma_{zx}^{(4,0)}(x, y, \xi) &= -\frac{\mu b_b}{2\pi} \frac{y - f_4(\xi)}{(x - \xi)^2 + (y - f_4(\xi))^2}, \\
 \sigma_{zy}^{(1,0)}(x, y, \xi) &= \frac{\mu b_b}{2\pi} \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + (y - f_1(\xi))^2}, \\
 \sigma_{zy}^{(2,0)}(x, y, \xi) &= \frac{\mu b_b}{2\pi} \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + (y - f_2(\xi))^2}, \\
 \sigma_{zy}^{(3,0)}(x, y, \xi) &= \frac{\mu b_b}{2\pi} \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + (y - f_3(\xi))^2}, \\
 \sigma_{zy}^{(4,0)}(x, y, \xi) &= \frac{\mu b_b}{2\pi} \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + (y - f_4(\xi))^2},
 \end{aligned}$$

где μ – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона; $b_{\text{кр}}$ и b_b – модули краевой и винтовой составляющих вектора Бюргерса частичной двойнивающей дислокации, соответственно.

В случае прямолинейных двойниковых границ четырех выделенных участков их форма может быть описана функциями:

$$\begin{aligned}
 f_1(\xi) &= -\frac{H}{2} \left(\frac{\xi}{L} - 1 \right), \\
 f_2(\xi) &= \frac{H}{2} \left(\frac{\xi}{L} - 1 \right), \\
 f_3(\xi) &= \frac{H}{2} \left(\frac{\xi}{L} + 1 \right), \\
 f_4(\xi) &= -\frac{H}{2} \left(\frac{\xi}{L} + 1 \right),
 \end{aligned}$$

где H – половина максимальной ширины двойника.

2 Результаты расчетов и их обсуждение

Результаты расчетов на основании представленной четырехфункциональной модели полей смещений и внутренних напряжений в сплошной конденсированной среде в окрестностях единичного остаточного линзовидного механического двойника, находящегося вдали от поверхности, представлены на рисунках 2.1 и 2.2. Для сплава Ni₂MnGa в качестве исходных данных принимались следующие значения:

$L = 60 \text{ мкм}$; $H = 20 \text{ мкм}$; $\rho_1(\xi) = \rho_2(\xi) = \text{const} = \rho = 10^6$; $\nu = 0,3$; $\mu = 19,231 \text{ ГПа}$; $b_{\text{кр}} = 2,91 \text{ \AA}$; $b_{\text{в}} = 2,74 \text{ \AA}$ [7]–[9].

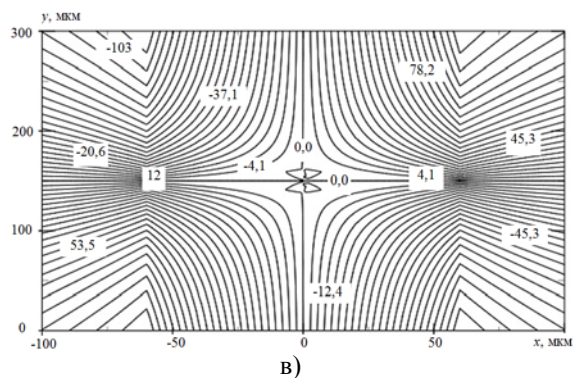
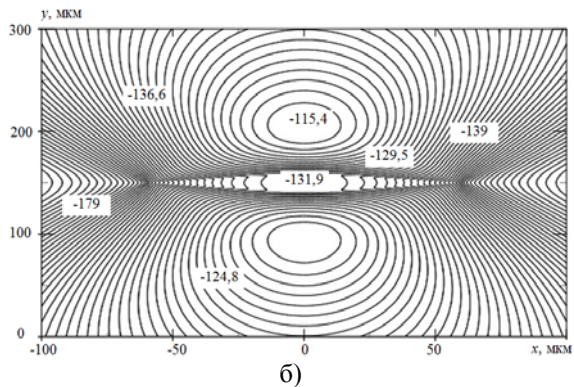
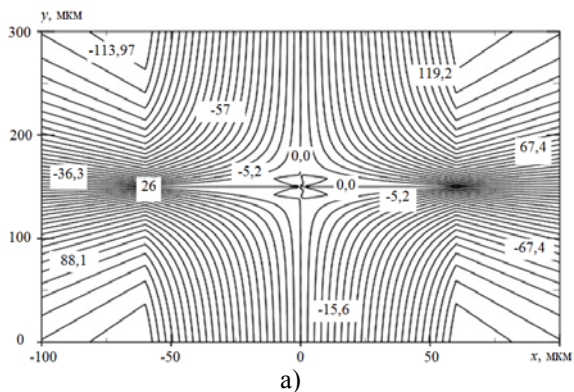
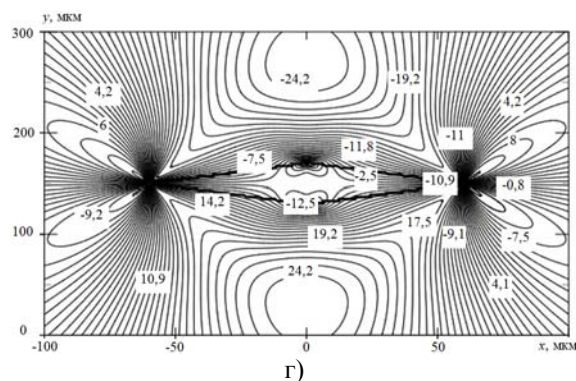
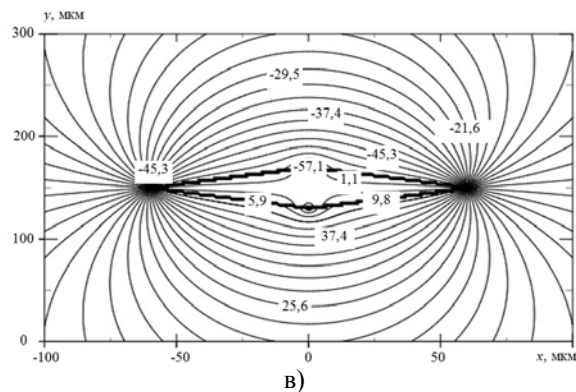
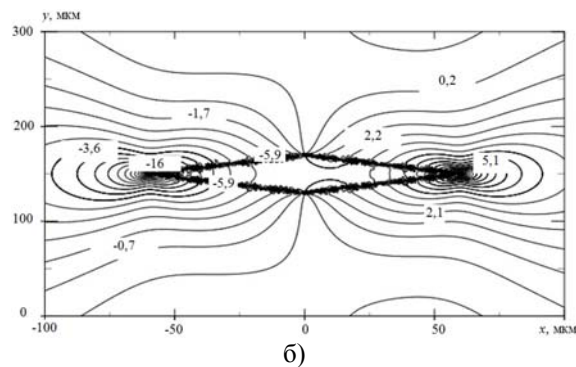
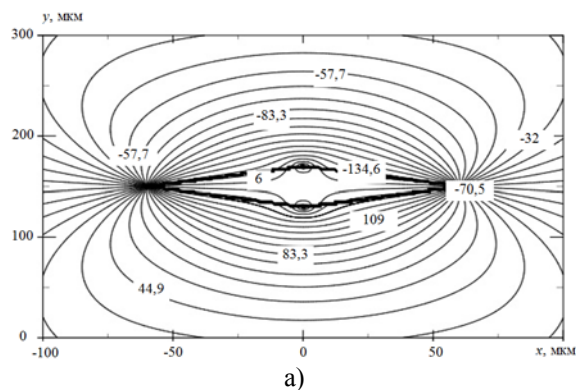


Рисунок 2.1 – Результаты расчета смещений u_i , обусловленных линзовидным двойником:
а) u_x ; б) u_y ; в) u_z

Расчеты компонент смещений u_i показаны на рисунке 2.1. Исходя из представленных результатов можно отметить, что линии равных величин для смещений u_x и u_z не имеют значительных различий (рисунок 2.1, а, в) по виду конфигурации распределения, за исключением численных значений в заданных точках. Обе компоненты u_x и u_z симметричны относительно центра двойника.

Конфигурация линий равных величин компоненты u_y (рисунок 2.1, б) имеет существенные различия в сравнении с компонентами u_x и u_z . Из рисунка видно, что участки с наибольшими смещениями располагаются у вершин двойников.

Графические результаты расчетов нормальных и сдвиговых компонент тензора напряжений σ_{ij} изображены на рисунке 2.2.



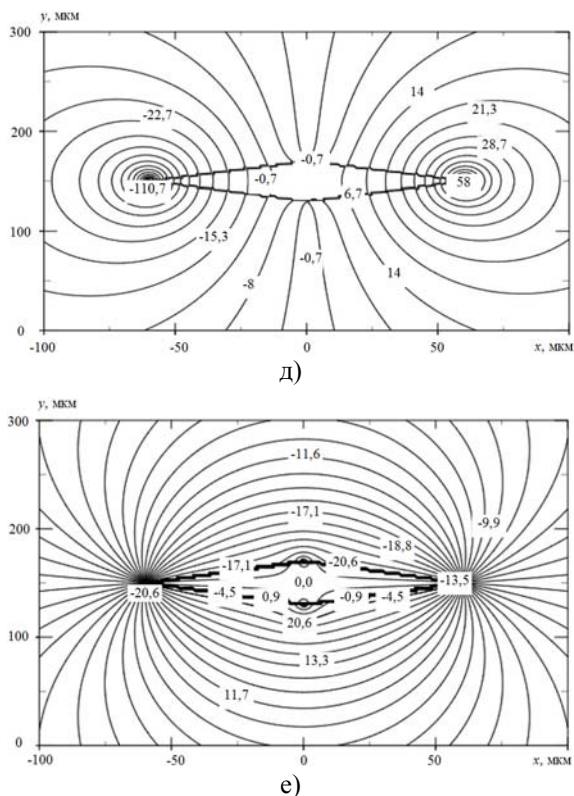


Рисунок 2.2 – Результаты расчета полей напряжений σ_{ij} , обусловленных линзовидным двойником:
а) σ_{xx} ; б) σ_{xy} ; в) σ_{xz} ; г) σ_{yy} ; д) σ_{yz} ; е) σ_{zz}

Наибольшие величины напряжений у нормальной компоненты тензора напряжений σ_{xx} (рисунок 2.2, а) главным образом локализованы у границ и вершин двойника, причем максимальные значения достигаются у границ. Общий уровень модулей численных значений напряжений вокруг двойника возрастает по мере продвижения к центру декартовой системы координат и симметричен относительно координатных осей.

Результат расчета сдвиговой компоненты σ_{xy} тензора напряжений представлен на рисунок 2.2, б. Распределение отражает увеличение общего фронта модулей численных значений напряжений при продвижении вдоль оси OX от центра двойника.

На рисунке 2.2, в показан результат распределения напряжений сдвиговой компоненты σ_{xz} . Полученный в данном случае результат распределения данной компоненты тензора напряжений симметричен относительно OX и схож с распределением нормальной компоненты σ_{xx} тензора, за исключением модульных значений напряжений в ключевых и периферийных точках. Данные значения в случае компоненты σ_{xz} ниже нормальных напряжений σ_{xx} в 2–3 раза.

Картина напряжений нормальной компоненты σ_{yy} тензора напряжений представлена на рисунок 2.3, г. Линии равных величин у данной компоненты имеют более сложный рельеф, образуя четыре области экстремальных значений. Данные максимумы симметричны относительно осей OX и OY декартовой системы координат, имеют зеркально симметричные одинаковые модульные значения пиков напряжений.

Расчетное поле напряжений сдвиговой компоненты σ_{yz} представлено на рисунке 2.3, д. Распределение данных напряжений симметрично относительно OY , а ее особенностью являются значительные перепады значений у вершин двойника, где они отличаются по модулю в 2 раза. Следует отметить, что напряжения σ_{yz} минимальны у средней части двойника.

Нормальная компонента тензора напряжений σ_{zz} имеет вид, представленный на рисунок 2.3, е. Конфигурация данных напряжений схожа с конфигурацией компонент σ_{xx} (рисунок 2.3, а) и σ_{xz} (рисунок 2.3, в), за исключением существенной разницы в численных значениях, которая достигает пятикратного и трехкратного различия соответственно.

Заключение

Исходя из принципа суперпозиции полей напряжений и смещений, предложен метод расчета для линзовидного остаточного механического двойника неправильной линзовидной формы. Метод использован для расчета смещений и напряжений у механического остаточного двойника в мартенситной фазе Ni_2MnGa , в которой двойники данного типа наблюдаются на эксперименте. В результате анализа данной модели были определены области концентрации напряжений у линзовидного двойника, а также изучен вид компонент смещений и тензора напряжений в окрестных областях двойника.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Остриков, О.М.* Механика двойникова твердых тел. Монография / О.М. Остриков. – Гомель : Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого», 2008. – 301 с.
2. *Остриков, О.М.* Исследование пластической деформации поверхности монокристалла Ni_2MnGa методом индентирования / О.М. Остриков, А.Л. Созинов, А.В. Сорока // Инженерно-физический журнал. – 2012. – Т. 85, № 5. – С. 1132–1141.
3. *Остриков, О.М.* Особенности механического двойникова, локального разрушения и формирования каналов Розе в монокристаллах Ni_2MnGa при индентировании их поверхности пирамидой Виккерса / О.М. Остриков, Е.В. Шматок

// Материалы. Технологии. Инструменты. – 2013. – Т. 18, № 3. – С. 5–10.

4. Остриков, О.М. Дислокационная макроскопическая модель клиновидного двойника / О.М. Остриков // Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого. – 2006, № 2. – С. 10–18.

5. Косевич, А.М. Дислокационная теория упругого двойникования кристаллов / А.М. Косевич, В.С. Бойко // Успехи физических наук. – 1971. – Т. 104, № 2. – С. 101–255.

6. Косевич, А.М. Дислокации в теории упругости. / А.М. Косевич. – Киев : Наук. Думка, 1978. – 220 с.

7. *Giant magnetic-field-induced strain in NiMnGa seven-layered martensitic phase* / A. Sozinov [et al.]

// Appl. Phys. Lett. – 2002. – Vol. 80. – P. 1746–1748.

8. Heczko, O. Temperature dependence and temperature limits of magnetic shape memory effect / O. Heczko, L. Straka // Journal of Applied Physics. – 2003. – Vol. 94, № 11. – P. 7139–7143.

9. Heczko, O. Magnetic properties and domain structure of magnetic shape memory Ni-Mn-Ga alloy / O. Heczko, K. Jurek, K. Ullakko // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 2001. – Vol. 226–230. – P. 996–998.

Поступила в редакцию 31.03.14.

УДК 534.26

ПРОНИКНОВЕНИЕ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ СФЕРИЧЕСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ ЧЕРЕЗ СФЕРИЧЕСКУЮ УПРУГУЮ ОБОЛОЧКУ

Г.Ч. Шушкевич, С.В. Шушкевич, Н.Н. Киселева

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

PENETRATION OF THE SOUND FIELD OF A SPHERICAL RADIATOR THROUGH THE SPHERICAL ELASTIC SHELL

G.Ch. Shushkevich, S.V. Shushkevich, N.N. Kiseleva

Y. Kupala Grodno State University, Grodno, Belarus

Построено аналитическое решение граничной задачи, описывающей процесс проникновения звукового поля сферического излучателя, расположенного внутри тонкой незамкнутой сферической оболочки, через упругую сферическую оболочку. Численно исследовано влияние некоторых параметров задачи на значение коэффициента ослабления (экранирования) звукового поля внутри сферической оболочки.

Ключевые слова: парные сумматорные уравнения по полиномам Лежандра, бесконечная система линейных алгебраических уравнений второго рода с вполне непрерывным оператором, коэффициент ослабления звукового поля.

The analytical solution of a boundary problem, describing the process of penetration of the sound field of a spherical radiator, located inside a thin unclosed spherical shell, through the elastic spherical shell is developed. Influence of some parameters of a problem on the value of the attenuation coefficient (screening) of a sound field inside the spherical shell is numerically investigated.

Keywords: dual series equations for Legendre polynomials, infinite system of linear algebraic equations of the second kind with a completely continuous operator, attenuation coefficient of a sound field.

Введение

Задачи взаимодействия звуковых волн с упругими объектами различной геометрической формы, в частности, сферической, представляют определенный теоретический и практический интерес для различных направлений акустики [1]–[3]. Задачам, относящимся к данной теме исследования, посвящено много научных работ.

Теория резонансного рассеяния используется для решения задачи рассеяния звука упругой, поперечно-изотропной, твердой сферой в акустически идеальной жидкой среде [4]. В [5] получено строгое решение задачи рассеяния плоской звуковой волны на двух упругих телах сферической формы, исследованы эффекты, обусловленные акустическим взаимодействием тел. Аналитическое решение задачи дифракции плоской звуковой волны на сферической полости построено в [6]. Методом аппроксимации проанализировано рассеяние звука на упругой сфере в идеально жидкой среде [7]. В статье [8] рассмотрено обратное рассеяние плоской акустической волны на двух упругих сферических оболочках. В работах [9]–[11] численно исследовано рассеяние плоской звуковой волны на сферах и сферических оболочках с покрытием в идеальной жидкости. Методом разделения переменных построено аналитическое решение задачи дифракции плоской звуковой волны на упругом шаре с произвольно расположенной сферической

полостью [12]. Рассеяние акустических волн упругими оболочками с помощью асимптотических методов исследовано в [13].

В данной работе построено точное осесимметричное решение задачи о проникновении звукового поля через сферический упругий слой. В качестве источника поля рассматривается сферический излучатель, расположенный внутри тонкой незамкнутой сферической оболочки. Используя соответствующие теоремы сложения, решение поставленной краевой задачи сведено к решению парных сумматорных уравнений по полиномам Лежандра, которые преобразованы к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода с вполне непрерывным оператором. Численно исследовано влияние некоторых параметров задачи на значение коэффициента ослабления (экранирования) звукового поля.

1 Постановка и представление решения задачи

Пусть пространство R^3 разделено concentрическими сферами $S_1(r_1 = a_1)$ и $S_2(r_1 = a_2)$ с центром в точке O_1 на три области $D_0(r_1 > a_1)$, $D_1(a_2 < r_1 < a_1)$, $D_2(0 \leq r_1 < a_2)$ (рисунок 1.1). В области D_0 находится идеально тонкая незамкнутая сферическая оболочка Γ_1 с углом раствора θ_0 , расположенная на сфере Γ радиуса a с центром в

точке O . Область пространства, ограниченную сферой Γ , обозначим через $D_0^{(0)}$ ($0 \leq r < a$) и $D_0^{(1)} = D_0 \setminus (D_0^{(0)} \cup \Gamma)$. Расстояние между точками O и O_1 обозначим через h .

В точке O расположен точечный излучатель звуковых волн, колеблющихся с круговой частотой ω . Области D_j , $j = 0, 2$, заполнены материалом, в котором не распространяются сдвиговые волны. Плотность среды и скорость звука в области D_j обозначим соответственно через $\tilde{\rho}_j$, c_j , $j = 0, 2$. Область D_2 – сферический упругий слой. Под воздействием звукового поля упругий слой совершает колебания, его деформация определяется вектором смещения \vec{u} , который удовлетворяет уравнению Ламе [14], [15]

$$\tilde{\mu} \Delta \vec{u} + (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) \text{grad div } \vec{u} + \omega^2 \tilde{\rho} \vec{u} = 0, \quad (1.1)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$ – коэффициенты Ламе, $\tilde{\rho}$ – плотность материала упругой среды.

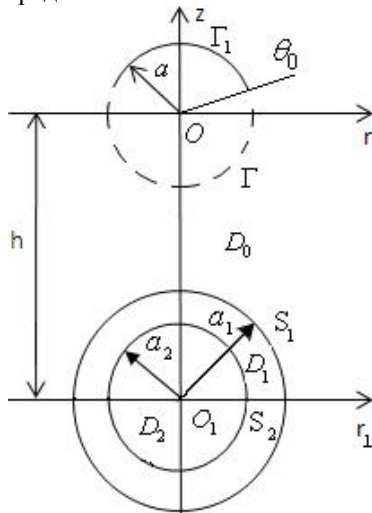


Рисунок 1.1 – Геометрия задачи

Для решения задачи свяжем с точками O и O_1 сферические координаты. Тонкая незамкнутая сферическая оболочка Γ_1 и сферические оболочки S_j , $j = 1, 2$, описываются следующим образом:

$$\Gamma_1 = \{r = a, 0 \leq \theta \leq \theta_0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

$$S_j = \{r_1 = a_j, 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Обозначим через p_c давление звукового поля источника, $p_0^{(0)}$ – давление рассеянного звукового поля в области $D_0^{(0)}$, $p_0 = p_0^{(1)} + p_0^{(2)}$ – давление рассеянного звукового поля в области $D_0^{(1)}$, p_2 – давление рассеянного звукового поля в области D_2 .

Реальное смещение и звуковое давление вычислим по формулам

$$\vec{U} = \text{Re}(\vec{u} e^{-i\omega t}), \quad P_j = \text{Re}(p_j e^{-i\omega t}), \quad j = 0, 2,$$

i – мнимая единица.

В установившемся режиме колебаний давления рассеянного звукового поля $p_0^{(j)}$, $j = 0, 1, 2$, p_2 , удовлетворяют уравнению Гельмгольца [15]–[17]

$$\Delta p_0^{(j)} + k_0^2 p_0^{(j)} = 0 \quad \text{в } D_0;$$

$$\Delta p_2 + k_2^2 p_2 = 0 \quad \text{в } D_2,$$

где $k_0 = \omega / c_0$, $k_2 = \omega / c_2$ – волновые числа.

В случае распространения малых возмущений в упругом теле для установившегося режима движения частиц тела вектор смещения \vec{u} определяется по формуле (осесимметричная задача) [14]

$$\vec{u} = \text{grad} \psi + \text{rot} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \vec{e}_\varphi \right) \quad (1.2)$$

где функции ψ , Φ удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$\Delta \psi + k_\ell^2 \psi = 0, \quad k_\ell = \omega / c_\ell, \quad c_\ell = \sqrt{(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}) / \tilde{\rho}},$$

$$\Delta \Phi + k_t^2 \Phi = 0, \quad k_t = \omega / c_t, \quad c_t = \sqrt{\tilde{\mu} / \tilde{\rho}},$$

c_ℓ , c_t – скорость распространения продольных и поперечных упругих волн соответственно.

В сферической системе координат компоненты вектора смещения \vec{u} связаны с функциями ψ , Φ соотношениями

$$u_r = \frac{\partial \psi}{\partial r_1} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left(r_1^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r_1} \right) + r_1 k_t^2 \Phi, \quad (1.3)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r_1} \frac{\partial \psi}{\partial \theta_1} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left(r_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \theta_1} \right).$$

Решение дифракционной задачи сводится к нахождению вектора смещения \vec{u} , давлений звукового поля $p_0^{(j)}$, $j = 0, 1, 2$, p_2 , которые удовлетворяют:

– граничному условию на поверхности сферической акустически жесткой оболочки Γ_1 ;

$$\frac{\partial}{\partial r} (p_c + p_0^{(0)}) \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad (1.4)$$

– граничным условиям взаимодействия звукового поля с упругим слоем на оболочках S_j , $j = 1, 2$ [15]:

$$u_r \Big|_{S_j} = \begin{cases} \omega^{-2} \tilde{\rho}_0^{-1} \frac{\partial p_0}{\partial r_1} \Big|_{S_1}, & j = 1, \\ \omega^{-2} \tilde{\rho}_2^{-1} \frac{\partial p_2}{\partial r_1} \Big|_{S_2}, & j = 2, \end{cases}$$

$$\frac{1}{r_1} \frac{\partial u_r}{\partial \theta_1} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r_1} - \frac{1}{r_1} u_\theta \Big|_{S_j} = 0,$$

$$(2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) \frac{\partial u_r}{\partial r_1} + \frac{2\tilde{\lambda}}{r_1} u_r + \frac{\tilde{\lambda}}{r_1} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta_1} + \frac{\tilde{\lambda}}{r_1} \text{ctg} \theta_1 u_\theta \Big|_{s_j} = \begin{cases} -p_0|_{s_1}, & j=1, \\ -p_2|_{s_2}, & j=2, \end{cases} \quad (1.5)$$

и условию на бесконечности [14]–[17]

$$\lim_{M \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial p_0(M)}{\partial r} - i k_0 p_0(M) \right) = 0, \quad (1.6)$$

где M – произвольная точка пространства.

Потребуем также выполнение условия непрерывности давлений на открытой части сферической оболочки $\Gamma \setminus \Gamma_1$:

$$(p_c + p_0^{(0)}) \Big|_{\Gamma \setminus \Gamma_1} = (p_0^{(1)} + p_0^{(2)}) \Big|_{\Gamma \setminus \Gamma_1}, \quad (1.7)$$

и непрерывности нормальной производной на поверхности сферы Γ :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{n}} (p_c + p_0^{(0)}) \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial}{\partial \bar{n}} (p_0^{(1)} + p_0^{(2)}) \Big|_{\Gamma}, \quad (1.8)$$

где \bar{n} – нормаль к поверхности Γ .

Давление исходного звукового поля представим в виде [17]

$$p_c(r, \theta) = P \frac{e^{ik_0 r}}{r} = ik_0 P h_0^{(1)}(kr) = P \sum_{n=0}^{\infty} f_n h_n^{(1)}(k_0 r) P_n(\cos \theta), \quad (1.9)$$

$$f_n = ik_0 \delta_{0n},$$

где $h_n^{(1)}(x)$ – сферические функции Ханкеля; $P_n(\cos \theta)$ – полиномы Лежандра [18]; δ_{0n} – символ Кронекера; $P = \text{const}$ [16].

Давления рассеянного звукового поля, функции ψ , Φ , с учетом условия на бесконечности (1.6), представим в виде суперпозиции базисных решений уравнения Гельмгольца в сферических координатах:

$$p_0^{(0)}(r, \theta) = P \sum_{n=0}^{\infty} c_n j_n(k_0 r) P_n(\cos \theta) \text{ в } D_0^{(0)}, \quad (1.10)$$

$$p_0^{(1)}(r, \theta) = P \sum_{n=0}^{\infty} x_n h_n^{(1)}(k_0 r) P_n(\cos \theta) \text{ в } D_0^{(1)}, \quad (1.11)$$

$$p_0^{(2)}(r_1, \theta_1) = P \sum_{n=0}^{\infty} y_n h_n^{(1)}(k_0 r_1) P_n(\cos \theta_1) \text{ в } D_0^{(1)}, \quad (1.12)$$

$$p_2(r_1, \theta_1) = P \sum_{n=0}^{\infty} d_n j_n(k_2 r_1) P_n(\cos \theta_1) \text{ в } D_2, \quad (1.13)$$

$$\psi(r_1, \theta_1) = P \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{a}_n^{(1)} j_n(k_l r_1) + \tilde{b}_n^{(1)} h_n^{(1)}(k_l r_1)) P_n(\cos \theta_1), \quad (1.14)$$

$$\Phi(r_1, \theta_1) = P \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^{(1)} j_n(k_l r_1) + b_n^{(1)} h_n^{(1)}(k_l r_1)) P_n(\cos \theta_1), \quad (1.15)$$

где $j_n(x)$ – сферические функции Бесселя первого рода [18].

Неизвестные коэффициенты $c_n, x_n, y_n, d_n, a_n^{(1)}, b_n^{(1)}, \tilde{a}_n^{(1)}, \tilde{b}_n^{(1)}$ подлежат определению из граничных условий.

2 Выполнение граничных условий

Для выполнения граничных условий (1.4), (1.7), (1.8) представим функцию $p_0^{(2)}(r_1, \theta_1)$ через сферические волновые функции в системе координат с началом в точке O . Используем формулу [19], связывающую цилиндрические и сферические волновые функции

$$h_n^{(1)}(k_0 r_1) P_n(\cos \theta_1) = \sum_{p=0}^{\infty} A_{np}(h) j_p(k_0 r) P_p(\cos \theta), \quad r_1 < h,$$

$$\text{где } A_{np}(h) = (2p+1) \sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} i^{\sigma+p-n} b_{\sigma}^{(n_0 p_0)} h_{\sigma}^{(1)}(k_0 h),$$

$b_{\sigma}^{(n_0 p_0)} = (nq00 | \sigma 0)^2, (nq00 | \sigma 0)$ – коэффициенты Клебша – Гордона [17].

Тогда

$$p_0^{(2)}(r, \theta) = P \sum_{n=0}^{\infty} T_n j_n(k_0 r) P_n(\cos \theta),$$

$$T_n = \sum_{k=0}^{\infty} y_k A_{kn}(h). \quad (2.1)$$

Согласно представлениям (1.9)–(1.11), (2.1), условие непрерывности (1.8), с учетом условия ортогональности полиномов Лежандра на отрезке $[0; \pi]$, примет вид

$$f_n \frac{d}{d\xi_0} h_n^{(1)}(\xi_0) + c_n \frac{d}{d\xi_0} j_n(\xi_0) = x_n \frac{d}{d\xi_0} h_n^{(1)}(\xi_0) + T_n \frac{d}{d\xi_0} j_n(\xi_0),$$

$$\xi_0 = k_0 a, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.2)$$

Выполним граничное условие (1.4) на поверхности сферической оболочки Γ и условие непрерывности (1.7). В полученных уравнениях исключим коэффициенты c_n , используя представление (2.2), и получим парные сумматорные уравнения по полиномам Лежандра вида

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{d}{d\xi_0} h_n^{(1)}(\xi_0) P_n(\cos \theta) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} T_n \frac{d}{d\xi_0} j_n(\xi_0) P_n(\cos \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < \theta_0, \quad (2.3) \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n - f_n}{d\xi_0} P_n(\cos \theta) = 0, \quad \theta_0 < \theta \leq \pi. \end{aligned} \right.$$

Преобразуем парные сумматорные уравнения (2.3). Для этого введем в рассмотрение новые коэффициенты X_n по формуле

$$x_n = X_n \frac{d}{d\xi_0} j_n(\xi_0) + f_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.4)$$

и малый параметр g_n по формуле

$$g_n = 1 + \frac{4i\xi_0^3}{2n+1} \frac{d}{d\xi_0} j_n(\xi_0) \frac{d}{d\xi_0} h_n^{(1)}(\xi_0),$$

$$g_n = O(n^{-2}) \text{ при } n \gg \xi_0.$$

В результате парные сумматорные уравнения (2.3) примут вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(1-g_n) X_n P_n(\cos\theta) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(\tilde{f}_n + \tilde{T}_n) P_n(\cos\theta), \quad 0 \leq \theta < \theta_0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} X_n P_n(\cos\theta) = 0, \quad \theta_0 < \theta \leq \pi, \end{aligned} \right. \quad (2.5)$$

где

$$\tilde{T}_n = 4i\xi_0^3 T_n \frac{d}{d\xi_0} j_n(\xi_0) / (2n+1),$$

$$\tilde{f}_n = 4i\xi_0^3 f_n \frac{d}{d\xi_0} h_n^{(1)}(\xi_0) / (2n+1). \quad (2.6)$$

Используя интегральные представления для полиномов Лежандра, парные сумматорные уравнения (2.5) преобразуем к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) второго рода с вполне непрерывным оператором [20], [21]

$$X_n - \sum_{k=0}^{\infty} g_k R_{nk} X_k = \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{T}_k + \tilde{f}_k) R_{nk}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.7)$$

$$R_{nk} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(n-k)\theta_0}{n-k} - \frac{\sin(n+k+1)\theta_0}{n+k+1} \right],$$

$$\left. \frac{\sin(n-k)\theta_0}{n-k} \right|_{n=k} = \theta_0.$$

Используя формулу [19], представим функцию $p_0^{(1)}(r, \theta)$ через сферические волновые функции в системе координат с началом в точке O_1

$$h_n^{(1)}(k_0 r) P_n(\cos\theta) =$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} B_{np}(h) j_p(k_0 r_1) P_p(\cos\theta_1), \quad r_1 < h,$$

$$B_{np}(h) = (2l+1) \sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} (-1)^\sigma i^{\sigma+p-n} b_\sigma^{(n0p0)} h_\sigma^{(1)}(k_0 h).$$

Тогда

$$p_0^{(1)}(r_1, \theta_1) = P \sum_{n=0}^{\infty} Z_n j_n(k_0 r_1) P_n(\cos\theta_1),$$

$$Z_n = \sum_{p=0}^{\infty} x_p B_{pn}(h). \quad (2.8)$$

Принимая во внимание представления (1.12)–(1.15), (2.8), выполняя граничные условия (1.5), учитывая [18], что

$$\frac{d^2}{d\theta^2} P_n(\cos\theta) + \text{ctg}\theta \frac{d}{d\theta} P_n(\cos\theta) =$$

$$= -n(n+1) P_n(\cos\theta),$$

$$\frac{d^2}{dr_1^2} f_n(kr_1) + \frac{1}{r_1} \frac{d}{dr_1} f_n(kr_1) +$$

$$+(k^2 - n(n+1)/r_1^2) f_n(kr_1) = 0,$$

где $f_n(kr_1)$ – сферическая функция, и ортогональность полиномов Лежандра $P_n(\cos\theta)$ на отрезке $[0, \pi]$, получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$M(n) \cdot V(n) = F(n) \cdot Z_n, \quad (2.9)$$

где

$$M(n) = \begin{pmatrix} m_{11}(n) & m_{12}(n) & m_{13}(n) & m_{14}(n) & m_{15}(n) & 0 \\ m_{21}(n) & m_{22}(n) & m_{23}(n) & m_{24}(n) & 0 & 0 \\ m_{31}(n) & m_{32}(n) & m_{33}(n) & m_{34}(n) & m_{35}(n) & 0 \\ m_{41}(n) & m_{42}(n) & m_{43}(n) & m_{44}(n) & 0 & m_{46}(n) \\ m_{51}(n) & m_{52}(n) & m_{53}(n) & m_{54}(n) & 0 & 0 \\ m_{61}(n) & m_{62}(n) & m_{63}(n) & m_{64}(n) & 0 & m_{66}(n) \end{pmatrix},$$

$$V(n) = \begin{pmatrix} a_n^{(1)} \\ b_n^{(1)} \\ \tilde{a}_n^{(1)} \\ \tilde{b}_n^{(1)} \\ y_n \\ d_n \end{pmatrix}, \quad F(n) = \begin{pmatrix} f_1(n) \\ 0 \\ f_3(n) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$m_{11}(n) = \frac{n(n+1)}{a_1} j_n(\xi_1^1),$$

$$m_{12}(n) = \frac{n(n+1)}{a_1} h_n^{(1)}(\xi_1^1),$$

$$m_{13}(n) = k_\ell \frac{d}{d\xi_\ell^1} j_n(\xi_\ell^1),$$

$$m_{14}(n) = k_\ell \frac{d}{d\xi_\ell^1} h_n^{(1)}(\xi_\ell^1),$$

$$m_{15}(n) = -\frac{k_0}{\tilde{\rho}_0 \omega^2} \frac{d}{d\xi_0^1} h_n^{(1)}(\xi_0^1),$$

$$m_{21}(n) = -\frac{2}{a_1} k_t \frac{d}{d\xi_t^1} j_n(\xi_t^1) +$$

$$+(2n(n+1)/a_1^2 - k_t^2 - 2/a_1) j_n(\xi_t^1),$$

$$m_{22}(n) = -\frac{2}{a_1} k_t \frac{d}{d\xi_t^1} h_n^{(1)}(\xi_t^1) +$$

$$+(2n(n+1)/a_1^2 - k_t^2 - 2/a_1) h_n^{(1)}(\xi_t^1),$$

$$m_{23}(n) = \frac{2k_\ell}{a_1} \frac{d}{d\xi_\ell^1} j_n(\xi_\ell^1) - \frac{2}{a_1^2} j_n(\xi_\ell^1),$$

$$m_{24}(n) = \frac{2k_\ell}{a_1} \frac{d}{d\xi_\ell^1} h_n^{(1)}(\xi_\ell^1) - \frac{2}{a_1^2} h_n^{(1)}(\xi_\ell^1),$$

$$\begin{aligned}
 m_{31}(n) &= \frac{2\tilde{\mu}n(n+1)}{a_1} \left(k_t \frac{d}{d\xi_t^1} j_n(\xi_t^1) - j_n(\xi_t^1) / a_1 \right), \\
 m_{32}(n) &= \frac{2\tilde{\mu}n(n+1)}{a_1} \left(k_t \frac{d}{d\xi_t^1} h_n^{(1)}(\xi_t^1) - h_n^{(1)}(\xi_t^1) / a_1 \right), \\
 m_{33}(n) &= -\frac{4\tilde{\mu}k_\ell}{a_1} \frac{d}{d\xi_\ell^1} j_n(\xi_\ell^1) - \\
 &\quad -(2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})k_\ell^2 j_n(\xi_\ell^1) + \frac{2\tilde{\mu}n(n+1)}{a_1^2} j_n(\xi_\ell^1), \\
 m_{34}(\lambda) &= -\frac{4\tilde{\mu}k_\ell}{a_1} \frac{d}{d\xi_\ell^1} h_n^{(1)}(\xi_\ell^1) - \\
 &\quad -(2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})k_\ell^2 h_n^{(1)}(\xi_\ell^1) + \frac{2\tilde{\mu}n(n+1)}{a_1^2} h_n^{(1)}(\xi_\ell^1), \\
 m_{35}(\lambda) &= h_n^{(1)}(\xi_0^1), \\
 m_{41}(n) &= \frac{n(n+1)}{a_2} j_n(\xi_t^2), \\
 m_{42}(n) &= \frac{n(n+1)}{a_2} h_n^{(1)}(\xi_t^2), \\
 m_{43}(n) &= k_\ell \frac{d}{d\xi_\ell^2} j_n(\xi_\ell^2), \\
 m_{44}(n) &= k_\ell \frac{d}{d\xi_\ell^2} h_n^{(1)}(\xi_\ell^2), \\
 m_{46}(n) &= -\frac{k_2}{\tilde{\rho}_2 \omega^2} \frac{d}{d\xi_2^2} j_n(\xi_2^2), \\
 m_{51}(n) &= -\frac{2}{a_2} k_t \frac{d}{d\xi_t^2} j_n(\xi_t^2) + \\
 &\quad + (2n(n+1) / a_2^2 - k_t^2 - 2 / a_2) j_n(\xi_t^2), \\
 m_{52}(n) &= -\frac{2}{a_2} k_t \frac{d}{d\xi_t^2} h_n^{(1)}(\xi_t^2) + \\
 &\quad + (2n(n+1) / a_2^2 - k_t^2 - 2 / a_2) h_n^{(1)}(\xi_t^2), \\
 m_{53}(n) &= \frac{2k_\ell}{a_2} \frac{d}{d\xi_\ell^2} j_n(\xi_\ell^2) - \frac{2}{a_2^2} j_n(\xi_\ell^2), \\
 m_{54}(n) &= \frac{2k_\ell}{a_2} \frac{d}{d\xi_\ell^2} h_n^{(1)}(\xi_\ell^2) - \frac{2}{a_2^2} h_n^{(1)}(\xi_\ell^2), \\
 m_{61}(n) &= \frac{2\tilde{\mu}n(n+1)}{a_2} \left(k_t \frac{d}{d\xi_t^2} j_n(\xi_t^2) - j_n(\xi_t^2) / a_2 \right), \\
 m_{62}(n) &= \frac{2\tilde{\mu}n(n+1)}{a_2} \left(k_t \frac{d}{d\xi_t^2} h_n^{(1)}(\xi_t^2) - h_n^{(1)}(\xi_t^2) / a_2 \right), \\
 m_{63}(n) &= -\frac{4\tilde{\mu}k_\ell}{a_2} \frac{d}{d\xi_\ell^2} j_n(\xi_\ell^2) - \\
 &\quad -(2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})k_\ell^2 j_n(\xi_\ell^2) + \frac{2\tilde{\mu}n(n+1)}{a_2^2} j_n(\xi_\ell^2), \\
 m_{64}(\lambda) &= -\frac{4\tilde{\mu}k_\ell}{a_2} \frac{d}{d\xi_\ell^2} h_n^{(1)}(\xi_\ell^2) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\quad -(2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})k_\ell^2 h_n^{(1)}(\xi_\ell^2) + \frac{2\tilde{\mu}n(n+1)}{a_2^2} h_n^{(1)}(\xi_\ell^2), \\
 m_{66}(n) &= j_n(\xi_2^2), \\
 f_1(n) &= \frac{k_0}{\tilde{\rho}_0 \omega^2} \frac{d}{d\xi_0^1} j_n(\xi_0^1), \quad f_3(n) = -j_n(\xi_0^1), \\
 \xi_0^1 &= k_0 a_1, \quad \xi_t^1 = k_t a_1, \quad \xi_\ell^1 = k_\ell a_1, \quad \xi_t^2 = k_t a_2, \\
 \xi_\ell^2 &= k_\ell a_2, \quad \xi_2^2 = k_2 a_2.
 \end{aligned}$$

Решая систему (2.9), находим представление для коэффициентов y_n :

$$y_n = |M_5(n)| Z_n / |M(n)|, \quad (2.10)$$

где $|M(n)|$ – определитель матрицы $M(n)$,

$|M_5(n)|$ – определитель матрицы $M_5(n)$,

$M_5(n)$ – матрица $M(n)$, в которой пятый столбец заменен на вектор $F(n)$.

Подставим коэффициенты y_n из (2.10) в (2.1) и установим связь между коэффициентами T_n и Z_k . В полученном выражении заменим коэффициенты Z_k представлением (2.8), коэффициенты x_n – (2.4) и получим связь между коэффициентами T_k и X_p :

$$T_k = \sum_{p=0}^{\infty} S_{pk} X_p + \tilde{f}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned}
 S_{pk} &= \frac{d}{d\xi_0^1} j_p(\xi_0^1) \sum_{s=0}^{\infty} |M_5(s)| / |M(s)| B_{ps}(h) A_{sk}(h), \\
 \tilde{f}_k &= ik_0 \sum_{s=0}^{\infty} |M_5(s)| / |M(s)| B_{0s}(h) A_{sk}(h).
 \end{aligned}$$

Преобразуем правую часть системы (2.7). Для этого исключим из правой части коэффициенты \tilde{T}_k с помощью представления (2.11), учитывая (2.6), и получим бесконечную СЛАУ второго рода:

$$\begin{aligned}
 X_n - \sum_{k=0}^{\infty} (g_k R_{nk} + \alpha_{nk}) X_k = \\
 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tilde{f}_k + 4i\xi_0^3 \frac{d}{d\xi_0^1} j_k(\xi_0^1) \tilde{f}_k / (2k+1) \right) R_{nk}, \quad (2.12) \\
 n = 0, 1, 2, \dots,
 \end{aligned}$$

где

$$\alpha_{nk} = 4i\xi_0^3 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{d}{d\xi_0^1} j_p(\xi_0^1) R_{np} S_{kp} / (2p+1).$$

Найдем связь между коэффициентами d_n , входящими в представление давления $p_2(r_1, \theta_1)$ в области D_2 , и коэффициентами X_n – решениями системы (2.12). Из системы (2.9) следует, что

$$d_n = |M_6(n)| Z_n / |M(n)|. \quad (2.13)$$

где $|M_6(n)|$ – определитель матрицы $M_6(n)$,

$M_6(n)$ – матрица $M(n)$, в которой шестой столбец заменен на вектор $F(n)$.

Из представлений (2.4), (2.8), (2.10) следует, что

$$d_n = |M_6(n)| / |M(n)| \times \sum_{p=0}^{\infty} \left(X_p \frac{d}{d\xi_0} j_p(\xi_0) + f_p \right) B_{pn}(h).$$

Коэффициент ослабления (экранирования) звукового поля в области D_2 вычислим по формуле

$$K(r_1, \theta_1) = |p_2(r_1, \theta_1)| / |p_c(r_1, \theta_1)|, \quad 0 \leq r_1 < a_2, \quad (2.14)$$

где

$$p_c(r_1, \theta_1) = \text{Pik}_0 \sum_{n=0}^{\infty} B_{0n}(h) j_n(k_2 r_1) P_n(\cos \theta_1).$$

3 Вычислительный эксперимент

В системе компьютерной алгебры MathCAD [2] были проведены вычисления коэффициента ослабления звукового поля $K(r_1, \theta_1)$ в области D_2 для некоторых параметров задачи.

Сферические функции

$$j_n(x), \quad h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + iy_n(x)$$

вычислены с помощью встроенных функций $js(n, x)$ и $ys(n, x)$, здесь $y_n(x)$ – сферическая функция Бесселя второго рода [18]. Производные сферических функций вычислены с помощью формулы [18, с. 258]

$$\frac{d}{dx} f_n(x) = n f_n(x) / x - f_{n+1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Коэффициенты Клебша – Гордона $b_{\sigma}^{(n_0 q_0)}$ вычислены по формуле (3.4.17) [17, с. 127].

Бесконечная система (2.12) решена методом усечения [17], [24]. Для получения достоверного решения конечной системы линейных алгебраических уравнений необходимо было проверить обусловленность системы. Матрица, соответствующая системе, считается хорошо обусловленной, если число обусловленности матрицы меньше 300 [23, с. 150]. Для вычисления числа обусловленности матрицы использовали встроенные функции cond1 (число обусловленности в норме L_1 [24]), cond2 (в норме L_2) и conde (в евклидовой норме). Вычислительный эксперимент показал, что для рассмотренных параметров задачи порядок усечения матрицы можно взять равным 25. Это обеспечивает решение конечной системы (2.12) с точностью 10^{-5} и число обусловленности не будет превосходить 25. Все бесконечные суммы, входящие в представление (2.12), вычислены с точностью 10^{-5} .

На рисунке 3.1 изображены графики коэффициента ослабления (экранирования) звукового поля $K(0,5; \theta_1)$, $0 \leq \theta_1 < \pi$, для некоторых значений

угла раствора θ_0 , если область D_0 заполнена морской водой ($\tilde{\rho}_0 = 1030 \text{ кг/м}^3$, $c_0 = 1533 \text{ м/с}$), область D_2 – машинным маслом ($\tilde{\rho}_2 = 900 \text{ кг/м}^3$, $c_2 = 1390 \text{ м/с}$), область D_1 – алюминием ($\tilde{\rho} = 2600 \text{ кг/м}^3$, $E = 65 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ – модуль Юнга, $\nu = 0,32$ – коэффициент Пуассона), $a_1 = 1 \text{ м}$, $a_2 = 0,8 \text{ м}$, $a = 0,3 \text{ м}$, $h = 3 \text{ м}$, $f = 100 \text{ Гц}$, $\omega = 2\pi f$. Коэффициенты Ламе связаны с модулем Юнга и коэффициентом Пуассона соотношениями

$$\tilde{\lambda} = \nu E / ((1 + \nu)(1 - 2\nu)), \quad \tilde{\mu} = E / (2 + 2\nu).$$

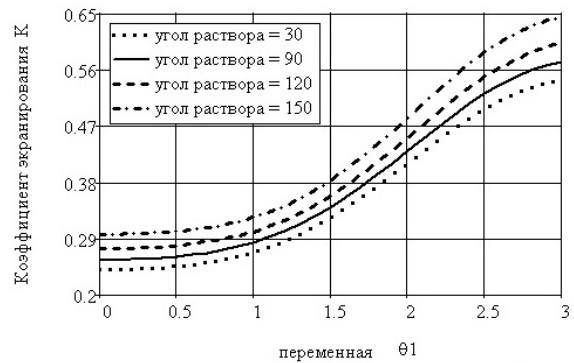


Рисунок 3.1 – Графики коэффициента ослабления звукового поля $K(0,5; \theta_1)$, $0 \leq \theta_1 < \pi$, для некоторых значений угла раствора θ_0 сферической оболочки Γ_1

На рисунке 3.2 изображены графики коэффициента ослабления (экранирования) звукового поля $K(0,3; \theta_1)$, $0 \leq \theta_1 < \pi$, если область D_0 заполнена водой ($\tilde{\rho}_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $c_0 = 1500 \text{ м/с}$), область D_1 – стеклом ($\tilde{\rho} = 2500 \text{ кг/м}^3$, $E = 49 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ – модуль Юнга, $\nu = 0,3$ – коэффициент Пуассона), область D_2 – эфиром ($\tilde{\rho}_2 = 710 \text{ кг/м}^3$, $c_2 = 985 \text{ м/с}$) – график 1, ацетоном ($\tilde{\rho}_2 = 780 \text{ кг/м}^3$, $c_2 = 1170 \text{ м/с}$) – график 2, машинным маслом ($\tilde{\rho}_2 = 900 \text{ кг/м}^3$, $c_2 = 1390 \text{ м/с}$) – график 3, морской водой ($\tilde{\rho}_0 = 1030 \text{ кг/м}^3$, $c_0 = 1533 \text{ м/с}$) – график 4, $a_1 = 1 \text{ м}$, $a_2 = 0,85 \text{ м}$, $a = 0,2 \text{ м}$, $h = 2,5 \text{ м}$, $\theta_0 = \pi/2$, $f = 50 \text{ Гц}$.

На рисунке 3.3 изображены графики коэффициента ослабления звукового поля $K(r_1, \theta_1)$, $0 \leq \theta_1 < \pi$, для некоторых значений переменной $r_1 < a_2$ ($r_1 = 0,1$ – график 1, $r_1 = 0,3$ – график 2, $r_1 = 0,6$ – график 3, $r_1 = 0,8$ – график 4), если область D_0 заполнена водой ($\tilde{\rho}_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $c_0 = 1500 \text{ м/с}$), область D_1 – каучуком ($\tilde{\rho} = 910 \text{ кг/м}^3$, $E = 79 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ – модуль Юнга, $\nu = 0,46$ – коэффициент Пуассона), область D_2 – машинным маслом ($\tilde{\rho}_2 = 900 \text{ кг/м}^3$, $c_2 = 1390 \text{ м/с}$), $a_1 = 1 \text{ м}$, $a_2 = 0,9 \text{ м}$, $a = 0,3 \text{ м}$, $h = 3 \text{ м}$, $\theta_0 = 2\pi/3$, $f = 20 \text{ Гц}$.

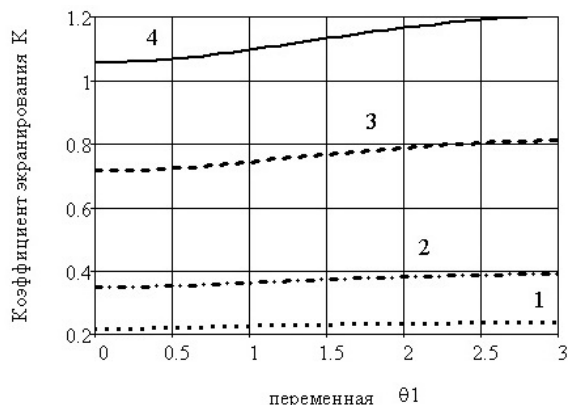


Рисунок 3.2 – Графики коэффициента ослабления звукового поля $K(0,3;\theta_1)$, $0 \leq \theta_1 < \pi$, в случае заполнения области D_2 различными веществами

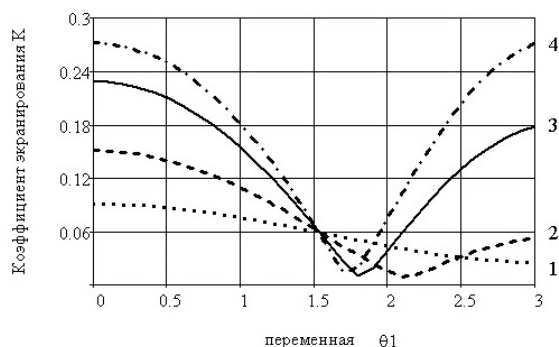


Рисунок 3.3 – Графики коэффициента ослабления звукового поля $K(r_1, \theta_1)$, $0 \leq \theta_1 < \pi$, для некоторых значений переменной r_1

На рисунке 3.4 изображены графики коэффициента ослабления звукового поля $K(0,1;\theta_1)$, $0 \leq \theta_1 < \pi$, для различных значений частоты исходного поля f и тех же геометрических параметров задачи и сред, как и на рисунке 3.3.

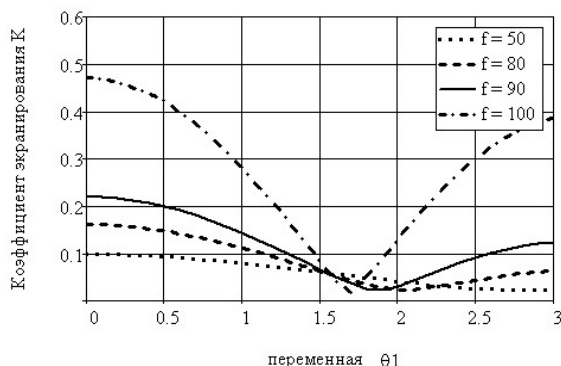


Рисунок 3.4 – Графики коэффициента ослабления звукового поля $K(0,1;\theta_1)$, $0 \leq \theta_1 < \pi$, для некоторых значений частоты исходного поля f

Заключение

Получено точное осесимметричное решение задачи о проникновении звукового поля через упругий сферический слой. В качестве источника звукового поля рассмотрен сферический излучатель, расположенный внутри тонкой незамкнутой сферической акустически жесткой оболочки. Используя теоремы сложения для сферических волновых функций, решение поставленной задачи сведено к решению парных сумматорных уравнений по полиномам Лежандра. Парные уравнения преобразованы к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода с вполне непрерывным оператором.

Численно исследовано влияние геометрических параметров задачи, плотности сред, частоты звукового источника, модуля Юнга, коэффициента Пуассона и скорости звука в средах на значение коэффициента ослабления звукового поля.

Разработанная методика и программное обеспечение могут найти практическое применение при разработке и конструировании звуковых экранов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Raichel, D.R. The science and applications of acoustics / D.R. Raichel // NY : Springer Science+Business Media. – 2006. – 663 p.
2. IFToMM International Conference on Engineering Vibration [Electronic resource]. – Режим доступа : <http://www.icovp.com>. – Дата доступа : 07.01.2014.
3. IV Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Защита населения от повышенного шумового воздействия» // [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://onlinereg.ru/noise2013>. – Дата доступа : 07.01.2014.
4. Хашеминеджад, С.М. Резонансное рассеяние звука погруженной анизотропной сферой / С.М. Хашеминеджад, М. Малек // Акустический журнал. – 2008. – № 2. – С. 205–218.
5. Лебедев, А.В. Рассеяние плоской волны на двух упругих шарах и сферических оболочках / А.В. Лебедев, А.И. Хилько // Акустический журнал. – 1997. – № 4. – С. 521–530.
6. Сивухин, Д.В. Дифракция плоской звуковой волны на сферической полости / Д.В. Сивухин // Акустический журнал. – 1955. – № 1. – С. 78–88.
7. Latard, V. Acoustic scattering of impulsive geometrical waves by a glass sphere in water / V. Latard [et al.] // Applied physics letters. – 1999. – Vol. 74. – P. 1918–1921.
8. Huang, H. Acoustic scattering of a plane wave by two spherical elastic shells / H. Huang, G.C. Gaunard // Journ. Soc. Amer. – 1995. – Vol. 98. – P. 2149–2156.
9. Hasheminejad, S.M. Effects of dynamic viscoelastic properties on acoustic diffraction by a solid

sphere submerged in a viscous fluid. / S.M. Hasheminejad, B. Harsini // Archives of Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 72. – P. 697–712.

10. Hasheminejad, S.M. Acoustic scattering from viscoelastically coated spheres and cylinders in viscous fluids / S.M. Hasheminejad, N. Safari // Journal of Sound and Vibration. – 2005. – Vol. 280. – P. 101–125.

11. Mitri, F.G. Acoustic radiation force acting on absorbing spherical shells / F.G. Mitri // Wave Motion. – 2005. – Vol. 43. – P. 12–19.

12. Толоконников, Л.А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом шаре с произвольно расположенной сферической полостью / Л.А. Толоконников, Ю.М. Филатова // Известия ТулГУ. Естественные науки. – 2010. Вып.1. – С. 115–123.

13. Ковалев, В.А. Математическое моделирование в задачах рассеяния акустических волн упругими оболочками с помощью асимптотических методов / В.А. Ковалев, Е.Д. Ковалева // Вестник СамГУ – Естественнонаучная серия. – 2008. – № 6 – С. 244 – 259.

14. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий – М. : Мир. – 1970. – 873 с.

15. Гринченко, В.Т. Основы акустики / В.Т. Гринченко, И.В. Вовк, В.Т. Мацыпура. – Киев : Наукова думка, 2007. – 640 с.

16. Шендарев, Е.Л. Излучение и рассеяние звука. / Е.Л. Шендарев. – Л. : Судостроение, 1989. – 304 с.

17. Иванов, Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах / Е.А. Иванов. – Минск : Наука и техника, 1968. – 584 с.

18. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами; под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 830 с.

19. Ерофеенко, В.Т. Теоремы сложения / В.Т. Ерофеенко. – Минск : Наука и техника, 1989. – 240 с.

20. Шушкевич, Г.Ч. Расчет электростатических полей методом парных, тройных уравнений с использованием теорем сложения / Г.Ч. Шушкевич. – Гродно : ГрГУ, 1999. – 238 с.

21. Резуненко, В.А. Дифракция плоской звуковой волны на сфере с круговым отверстием / В.А. Резуненко // Вісник Харків. нац. універ. ім. В.Н. Каразіна. Сер. «Мат., прик. мат. і мех.». – 2009. – № 850. – С. 71–77.

22. Шушкевич, Г.Ч. Компьютерные технологии в математике. Система Mathcad 14. Ч. 1. / Г.Ч. Шушкевич, С.В. Шушкевич. – Минск : Изд-во Гревцова, 2010. – 287 с.

23. Петров, Ю. Обеспечение достоверности и надежности компьютерных расчетов / Ю. Петров. – СПб. : БХВ-Петербург, 2012. – 160 с.

24. Вержбицкий, В.М. Основы численных методов / В.М. Вержбицкий. – М. : Высшая школа, 2002. – 848 с.

Поступила в редакцию 18.02.14.

УДК 512.542

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП ЗАДАННЫХ ИНДЕКСОВ В ГРУППАХ С ОПЕРАТОРАМИ

Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич, М.В. Селькин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

ON INTERSECTION OF MAXIMAL SUBGROUPS OF THE SET INDEXES IN GROUPS WITH OPERATORS

R.V. Borodich, E.N. Borodich, M.V. Selkin

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

В работе изучаются свойства пересечений максимальных подгрупп в группах с операторами.

Ключевые слова: максимальная подгруппа, формация, \mathfrak{F} -корадикал, группа операторов.

In the paper the properties of intersection of maximal subgroups in groups with the operators are studied.

Keywords: maximal subgroup, formation, \mathfrak{F} -residual, group of operators.

Введение

Все рассматриваемые в статье группы предполагаются конечными. Авторы придерживаются терминологии, введенной в монографиях [1], [2]. В теории групп объекты, экстремально расположенные в группе, всегда привлекали исследователей. К таким объектам, в первую очередь, относятся максимальные подгруппы. Свойства этих подгрупп, их пересечения оказывают существенное влияние на строение самой группы. Основопологающее влияние здесь сыграли исследования Г. Фраттини, О.Ю. Шмидта, Н. Ито, Б. Хуперта, К. Дерка, Р. Картера, Б. Фишера, Т. Хоукса, Д. Томпсона, В. Гашюца, Л.А. Шеметкова и др. Осознание общности различных конкретных результатов привело к возникновению теории формаций (В. Гашюц, Р. Картер, Т. Хоукс, Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба, М.В. Селькин, Х. Бетчел, М. Хофман, Д. Бейдлеман, А. Болистер-Болиншес, В.В. Шлык и др.). В последующем к формационному исследованию конечных групп был применен функторный метод, что позволило получить новое направление (Д. Барнс, О. Кегель, Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба, М.В. Селькин, С.Ф. Каморников и др.). А.Н. Скибой была предложена идея рассматривать максимальные подгруппы среди подгрупп, принадлежащих определенной формации [3]. В последние годы авторами данной статьи проводятся исследования свойств максимальных подгрупп и их пересечений в конечных группах с операторами, являющиеся дальнейшим развитием указанных выше направлений.

1 Определения и обозначения

Класс групп называют нормально наследственным (S_n -замкнутым), если вместе с каждой

своей группой G он содержит все нормальные подгруппы группы G .

Класс групп \mathfrak{F} называется формацией, если выполняются следующие условия:

- 1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$, то $G/N \in \mathfrak{F}$;
- 2) если $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$, то

$$G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}.$$

Формацию \mathfrak{F} называют локальной, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть \mathfrak{F} – формация. Тогда через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается \mathfrak{F} -корадикал группы G – пересечение всех нормальных подгрупп N группы, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$.

Максимальная подгруппа M группы G называется \mathfrak{F} -нормальной (\mathfrak{F} -абнормальной), если $G^{\mathfrak{F}}$ содержится (не содержится) в M .

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (пересечение всех подгрупп из G , сопряженных с подгруппой M).

Пусть даны группа G , множество A и отображение $f: A \rightarrow \text{End}(G)$, где $\text{End}(G)$ – гомоморфное отображение группы G в себя или эндоморфизм группы G . Подгруппа M называется A -допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A , то есть $M^\alpha \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Так как операторы действуют как соответствующие им эндоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A -допустимой для произвольной группы операторов.

Обозначим через $\Phi(G, A)$ пересечение ядер всех максимальных A -допустимых подгрупп.

Если таких подгрупп в группе G нет, то положим $\Phi(G, A) = G$.

Заметим, что максимальная A -допустимая подгруппа M либо целиком содержит \mathfrak{F} -корадикал группы G , либо $MG^{\mathfrak{F}} = G$. Действительно. Так как произведение A -допустимых подгрупп A -допустимо и $G^{\mathfrak{F}}$ – характеристическая подгруппа, а, следовательно, A -допустимая, то $MG^{\mathfrak{F}} = M$ или $MG^{\mathfrak{F}} = G$.

Пусть \mathfrak{F} – непустая формация и группа G имеет группу операторов A . Через $D^{\mathfrak{F}}(G, A)$ обозначим пересечение ядер всех максимальных A -допустимых подгрупп группы G , не содержащих \mathfrak{F} -корадикал группы G . Если в группе G все максимальные A -допустимые подгруппы содержат \mathfrak{F} -корадикал группы G , то положим $D^{\mathfrak{F}}(G, A) = G$.

В случае, когда \mathfrak{F} совпадает с формацией всех нильпотентных групп, подгруппу $D^{\mathfrak{F}}(G, A)$ будем обозначать $D^{\text{nl}}(G, A)$.

Пусть \mathfrak{F} – непустая формация и группа G имеет группу операторов A , π – множество простых чисел. Через $D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ обозначим пересечение ядер всех \mathfrak{F} -абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп группы G , не содержащих \mathfrak{F} -корадикал группы G , индексы которых не делятся на простые числа из π .

Обозначим далее через $\bar{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ пересечение ядер всех максимальных A -допустимых подгрупп группы G , не содержащих \mathfrak{F} -корадикал, не принадлежащих формации \mathfrak{F} , индекс каждой из которых не делится на простые числа из π .

В случае отсутствия в группе G указанных максимальных A -допустимых подгрупп полагаем эти пересечения равными самой группе G .

Отметим, если $A=1$, то подгруппы $D^{\mathfrak{F}}(G, A)$, $D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ и $\bar{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$ совпадают соответственно с подгруппами $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$, $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$ и $\bar{\Delta}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$, строение которых рассматривалось в работах многих авторов [1], [2].

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A -допустимой относительно некоторой группы операторов A , а также не всякая максимальная A -допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе. Примеры приведены в работе [4].

2 Вспомогательные результаты

Лемма 2.1 [1, с. 179]. Если подгруппа N пронормальна в G , то подгруппа $N_G(N)$ абнормальна в G .

Теорема 2.2 [5, с. 52]. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$ и подгруппа $\Phi_{\pi}(G, A)$ обладает свойством C_{π} . Тогда

$$\Phi_{\pi}(G, A) / O_{\pi}(G) = \Phi(G / O_{\pi}(G), A).$$

Теорема 2.3 [4, с. 58]. Пусть группа G имеет группу операторов A , \mathfrak{F} – ступенчатая формация. Тогда

$$D^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi(G, A) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Phi(G, A)).$$

Лемма 2.4. Пусть K – нормальная подгруппа группы G , обладающая свойством C_{π} и H – холлова подгруппа из K . Тогда $N_G(H)$ – абнормальная подгруппа группы G .

Доказательство. Заметим, что для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $\langle H, H^x \rangle \subseteq K$, то есть H является пронормальной подгруппой в G . Тогда по лемме 2.1 подгруппа $N_G(H)$ является абнормальной в G . Лемма доказана.

Из теоремы Силова следует, что любая подгруппа группы G обладает свойством C_p . Отсюда и из предыдущей леммы получаем, что в любой нормальной подгруппе нормализатор A -допустимой силовской подгруппы является абнормальной подгруппой группы G .

Лемма 2.5. Пусть группа G имеет группу операторов A . Тогда $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$.

Доказательство. Предположим, что $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G) \not\subseteq D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Тогда существует максимальная A -допустимая подгруппа M , не содержащая $G^{\mathfrak{F}}$, индекс которой не делится на числа из π , такая, что $M \not\subseteq \Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$. Так как $\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G)$ является характеристической подгруппой, то $M\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G) = G$. Так как M – максимальная A -допустимая подгруппа, не содержащая $G^{\mathfrak{F}}$, индекс которой не делится на числа из π , то она содержится в некоторой \mathfrak{F} -абнормальной максимальной подгруппе K группы G , индекс которой не делится на числа из π . Тогда получаем, что

$$G = M\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G) = K\Delta_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G) = K.$$

Полученное противоречие и доказывает лемму.

Лемма 2.6. Пусть группа G имеет группу операторов A , \mathfrak{F} – формация. Тогда если N – нормальная A -допустимая подгруппа группы G и $N \subseteq \bar{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$, то

$$\bar{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G / N, A) = \bar{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / N.$$

Доказательство. Если $N \subseteq \bar{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$, то $N \subseteq M$, где M – максимальная A -допустимая подгруппа группы G , не принадлежащая \mathfrak{F} и не содержащая \mathfrak{F} -корадикал. Тогда

$$\overline{D}^{\mathfrak{F}}(G/N, A) = \cap(M/N)_{G/N}, \quad (2.1)$$

где M/N пробегает множество максимальных A -допустимых подгрупп из G/N , не содержащих \mathfrak{F} -корадикал, не принадлежащих \mathfrak{F} .

Продолжим равенство (2.1):

$$\cap(M/N)_{G/N} = (\cap M_G) / N = \overline{D}^{\mathfrak{F}}(G, A) / N. \quad (2.2)$$

Из равенств (2.1) и (2.2) вытекает справедливость утверждения. Лемма доказана.

Лемма 2.7. Пусть группа G имеет группу операторов A , \mathfrak{F} – формация. Тогда если N – нормальная A -допустимая подгруппа группы G и $N \subseteq D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$, то

$$D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G/N, A) = D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / N.$$

Доказательство. Если $N \subseteq D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$, то $N \subseteq M$, где M – любая слабо \mathfrak{F} -абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа из G с индексом, не делимым на простые числа из π . Тогда

$$D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G/N, A) = \cap(M/N)_{G/N}, \quad (2.3)$$

где M/N пробегает множество всех слабо \mathfrak{F} -абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп из G/N с индексом, не делимым на простые числа из π .

Продолжая равенство (2.3), получаем

$$\cap(M/N)_{G/N} = (\cap M_G) / N = D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / N. \quad (2.4)$$

Из равенств (2.3) и (2.4) вытекает справедливость утверждения.

3 О влиянии индексов максимальных подгрупп

Теорема 3.1. Пусть \mathfrak{F} – формация, группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если в группе G подгруппа $\Phi_{\pi}(G, A)$ обладает свойством C_{π} , то

$$D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_{\pi}(G) = D^{\mathfrak{F}}(G / O_{\pi}(G), A).$$

Доказательство. Пусть $O_{\pi}(G) \neq 1$. По теореме 2.2

$$\Phi_{\pi}(G, A) / O_{\pi}(G) = \Phi(G / O_{\pi}(G), A).$$

Тогда теорема для факторгруппы $G / O_{\pi}(G)$ теорема верна по индукции. Следовательно,

$$\begin{aligned} D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G / O_{\pi}(G), A) / O_{\pi}(G / O_{\pi}(G)) &= \\ &= D^{\mathfrak{F}}(G / O_{\pi}(G) / O_{\pi}(G / O_{\pi}(G)), A). \end{aligned}$$

Так как $O_{\pi}(G / O_{\pi}(G)) = 1$ и

$$D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G / O_{\pi}(G), A) = D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_{\pi}(G),$$

то $D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_{\pi}(G) = D^{\mathfrak{F}}(G / O_{\pi}(G), A)$.

Пусть теперь $O_{\pi}(G) = 1$. Тогда по теореме 2.2 $\Phi_{\pi}(G, A) / O_{\pi}(G) = \Phi(G / O_{\pi}(G), A)$. Значит,

$$D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_{\pi}(G, A) = \Phi(G, A).$$

Пусть K/N – главный фактор группы G , причём,

$$\Phi(G, A) \subseteq N \subseteq K \subseteq D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A).$$

Так как

$$K \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(G, A),$$

то $N = N(K \cap G^{\mathfrak{F}}) = K \cap NG^{\mathfrak{F}}$.

Поэтому имеет место следующий изоморфизм:

$$\begin{aligned} KG^{\mathfrak{F}} / NG^{\mathfrak{F}} &= K / K \cap NG^{\mathfrak{F}} = \\ &= K / N(K \cap G^{\mathfrak{F}}) = K / N. \end{aligned}$$

Но $G / NG^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Поэтому главный фактор $KG^{\mathfrak{F}} / NG^{\mathfrak{F}}$ является \mathfrak{F} -центральным в G . Следовательно, главный фактор K/N также является \mathfrak{F} -центральным в G . Таким образом, $D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi(G, A)$ – \mathfrak{F} -гиперцентральная нормальная подгруппа группы $G / \Phi(G, A)$. Поэтому

$$D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi(G, A) \subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Phi(G, A)).$$

С другой стороны, на основании теоремы 2.3 имеем, что

$$\begin{aligned} D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi(G, A) &\supseteq D^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi(G, A) = \\ &= Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Phi(G, A)). \end{aligned}$$

Значит,

$$D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi(G, A) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Phi(G, A)).$$

Следовательно,

$$D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi(G, A) = D^{\mathfrak{F}}(G, A) / \Phi(G, A).$$

Следовательно, $D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) = D^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Теорема доказана.

Из теоремы 3.1 получаем следующее

Следствие 3.1. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$, \mathfrak{F} – локальная нормально наследственная формация, содержащая все нильпотентные группы, а подгруппа $\Phi(G, A)$ обладает свойством C_{π} , тогда $D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_{\pi}(G) \in \mathfrak{F}$.

В случае, когда \mathfrak{F} – формация всех нильпотентных групп, то из теоремы 3.1 получаем следующее

Следствие 3.2. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Если подгруппа $\Phi(G, A)$ обладает свойством C_{π} , то $D_{\pi}^{\mathfrak{N}}(G, A) / O_{\pi}(G) \in \mathfrak{N}$.

Пусть $\pi = \{p\}$, где p – простое число, $D_p^{\mathfrak{F}}(G, A)$ – пересечение ядер всех \mathfrak{F} -абнормальных максимальных A -допустимых подгрупп группы G , индексы которых не делятся на данное простое число p .

Ввиду теоремы Силова и теоремы 3.1 справедливы следующие утверждения.

Следствие 3.3. Пусть \mathfrak{F} – формация, группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Тогда

$$D_p^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_p(G) = D^{\mathfrak{F}}(G / O_p(G), A).$$

Следствие 3.4. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$, \mathfrak{F} – S_n -замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Тогда $D_p^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_p(G) \in \mathfrak{F}$.

Следствие 3.5. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$. Тогда $D_p^{\mathfrak{N}}(G, A) / O_p(G) \in \mathfrak{N}$.

Теорема 3.2. Пусть π и τ – множества простых чисел, таких, что $\pi \cap \tau = \emptyset$. Тогда для любой формации \mathfrak{F} и любой группы G с группой операторов A , такой, что $(|G|, |A|) = 1$, справедливо равенство,

$$D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap D_{\tau}^{\mathfrak{F}}(G, A) = D^{\mathfrak{F}}(G, A).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$D^{\mathfrak{F}}(G, A) \subseteq D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap D_{\tau}^{\mathfrak{F}}(G, A).$$

Пусть $D^{\mathfrak{F}}(G, A) \subset K = D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap D_{\tau}^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Тогда в G найдётся \mathfrak{F} -абнормальная максимальная A -допустимая подгруппа M , такая, что $G = MK$. Если $|G : M|$ не делится на числа из $\omega = \pi \cup \tau$, то $D_{\omega}^{\mathfrak{F}}(G, A) \subseteq M$. Следовательно, $KM = M$, что невозможно. Значит, индекс M в G делится одновременно на простые числа из π и τ .

Пусть $O_{\pi}(G) = 1$. Тогда ввиду теоремы 3.1 имеем равенство $D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) = D^{\mathfrak{F}}(G, A)$. Поэтому $K \subseteq M$, что противоречит определению подгруппы K . Значит, $O_{\pi}(G) \neq 1$. Если $O_{\pi}(G)M = G$, то $|G : M|$ делится на числа из π . Противоречие. Поэтому $O_{\pi}(G) \subseteq M$. На основании теоремы 3.1 имеем

$$\begin{aligned} D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_{\pi}(G) &= \\ &= D^{\mathfrak{F}}(G / O_{\pi}(G), A) \subseteq M / O_{\pi}(G). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \subseteq M$. Снова пришли к противоречию. Таким образом, остаётся заключить, что

$$D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap D_{\tau}^{\mathfrak{F}}(G, A) = D^{\mathfrak{F}}(G, A).$$

Теорема доказана.

Следствие 3.6. Пусть π и τ – множества простых чисел, таких, что $\pi \cap \tau = \emptyset$. Тогда для любой формации \mathfrak{F} и любой группы G с группой операторов A , такой, что $(|G|, |A|) = 1$,

$$D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap D_{\tau}^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}.$$

Следствие 3.7. Пусть p и q – различные простые числа. Тогда для любой формации \mathfrak{F} и любой группы G с группой операторов A , такой, что $(|G|, |A|) = 1$, справедливо равенство:

$$D_p^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap D_q^{\mathfrak{F}}(G, A) = D^{\mathfrak{F}}(G, A).$$

Следствие 3.8. Пусть p и q – различные простые числа. Если \mathfrak{F} – S_n -замкнутая локальная

формация, содержащая все нильпотентные группы, группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$, тогда

$$D_p^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap D_q^{\mathfrak{F}}(G, A) \in \mathfrak{F}.$$

Теорема 3.3. Пусть \mathfrak{F} – формация, группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$, и $\bar{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \neq G$. Если в группе G подгруппа $\Phi_{\pi}(G, A)$ обладает свойством C_{π} , то

$$\bar{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_{\pi}(G) = D^{\mathfrak{F}}(G / O_{\pi}(G), A).$$

Доказательство. Вначале покажем, что

$$K = \bar{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_{\pi}(G, A).$$

Пусть $K \not\subseteq \Phi_{\pi}(G, A)$. Тогда в G найдётся такая максимальная A -допустимая подгруппа M , индекс которой не делится на простое число из π , что $G = KM$. Понятно, что M не содержит $G^{\mathfrak{F}}$. Если $M \notin \mathfrak{F}$, то $K \subseteq \bar{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \subseteq M$, что невозможно. Следовательно, $M \in \mathfrak{F}$. Отсюда $G / K = MK / KM / M \cap K \in \mathfrak{F}$.

Поэтому $G^{\mathfrak{F}} \subseteq K \subseteq \bar{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A)$. А это противоречит существованию в группе G максимальной A -допустимой подгруппы, не содержащей \mathfrak{F} -корадикал группы G , индекс которой не делится на простые числа из π . Итак, $K \subseteq \Phi_{\pi}(G, A)$.

Пусть $O_{\pi}(G) \neq 1$. Тогда ввиду того, что

$$\Phi_{\pi}(G, A) / O_{\pi}(G) = \Phi(G / O_{\pi}(G), A),$$

получаем справедливость теоремы для группы $G / O_{\pi}(G)$ по индукции. Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G / O_{\pi}(G), A) / O_{\pi}(G / O_{\pi}(G)) &= \\ &= D^{\mathfrak{F}}(G / O_{\pi}(G) / O_{\pi}(G / O_{\pi}(G)), A). \end{aligned}$$

Так как $O_{\pi}(G / O_{\pi}(G)) = 1$ и

$$\bar{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G / O_{\pi}(G), A) = \bar{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_{\pi}(G),$$

то

$$\bar{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) / O_{\pi}(G) = D^{\mathfrak{F}}(G / O_{\pi}(G), A).$$

Пусть теперь $O_{\pi}(G) = 1$. Тогда

$$\bar{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi_{\pi}(G, A) = \Phi(G, A).$$

Пусть K / N – главный фактор группы G , причём,

$$\Phi(G, A) \subseteq N \subseteq K \subseteq \bar{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A).$$

Так как

$$K \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \bar{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G, A) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(G, A),$$

то

$$N = N(K \cap G^{\mathfrak{F}}) = K \cap NG^{\mathfrak{F}}.$$

Поэтому имеет место следующий изоморфизм:

$$\begin{aligned} KG^{\mathfrak{F}} / NG^{\mathfrak{F}} &\cong K / K \cap NG^{\mathfrak{F}} = \\ &= K / N(K \cap G^{\mathfrak{F}}) = K / N. \end{aligned}$$

Так как $G / NG^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, то главный фактор $KG^{\mathfrak{F}} / NG^{\mathfrak{F}}$ является \mathfrak{F} -центральным в G . Следовательно, главный фактор K / N также является

\mathfrak{F} -центральным в G . Таким образом, $\bar{D}_\pi^\mathfrak{F}(G, A) / \Phi(G, A)$ – \mathfrak{F} -гиперцентральная нормальная подгруппа группы $G / \Phi(G, A)$. Поэтому

$$\bar{D}_\pi^\mathfrak{F}(G, A) / \Phi(G, A) \subseteq Z_\infty^\mathfrak{F}(G / \Phi(G, A)).$$

С другой стороны, на основании теоремы 2.3 имеем, что

$$\begin{aligned} \bar{D}_\pi^\mathfrak{F}(G, A) / \Phi(G, A) &\supseteq D^\mathfrak{F}(G, A) / \Phi(G, A) = \\ &= Z_\infty^\mathfrak{F}(G / \Phi(G, A)). \end{aligned}$$

Значит,

$$\bar{D}_\pi^\mathfrak{F}(G, A) / \Phi(G, A) = Z_\infty^\mathfrak{F}(G / \Phi(G, A)).$$

Следовательно,

$$D_\pi^\mathfrak{F}(G, A) / \Phi(G, A) = D^\mathfrak{F}(G, A) / \Phi(G, A),$$

то есть $D_\pi^\mathfrak{F}(G, A) = D^\mathfrak{F}(G, A)$. Теорема доказана.

Следствие 3.9. Пусть группа G имеет группу операторов A , \mathfrak{F} – S_n -замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, и $\bar{D}_\pi^\mathfrak{F}(G, A) \neq G$. Если подгруппа $\Phi(G, A)$ обладает свойством C_π , то $\bar{D}_\pi^\mathfrak{F}(G, A) / O_\pi(G) \in \mathfrak{F}$.

Так как в любой группе G подгруппа $\Phi_p(G, A)$ обладает свойством C_p , то при $\pi = \{p\}$ получаем следующий результат.

Следствие 3.10. Пусть \mathfrak{F} – формация, группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\bar{D}_\pi^\mathfrak{F}(G, A) \neq G$. Тогда

$$\bar{D}_\pi^\mathfrak{F}(G, A) / O_p(G) = D^\mathfrak{F}(G / O_p(G), A).$$

Следствие 3.11. Пусть группа G имеет группу операторов A , такую, что $(|G|, |A|) = 1$, $\bar{D}_\pi^\mathfrak{F}(G, A) \neq G$. Если \mathfrak{F} – S_n -замкнутая локальная

формация, содержащая все нильпотентные группы, то $\bar{D}_\pi^\mathfrak{F}(G, A) / O_p(G) \in \mathfrak{F}$.

В случае, когда группа операторов единична, то из теорем 3.1, 3.2 и 3.3 получаем соответствующие результаты из работы [2].

Заключение

В данной работе описаны свойства подгруппы, равной пересечению максимальных A -допустимых подгрупп, не содержащих \mathfrak{F} -корадикала, индексы которых не делятся на простые числа из π .

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков – М.: Наука, 1978. – 267 с.
2. Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 144 с.
3. Скиба, А.Н. О пересечении всех максимальных \mathfrak{F} -подгрупп конечной группы / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 3 (4). – С. 56–62.
4. Бородич, Р.В. О пересечении подгрупп в группах с операторами / Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич, М.В. Селькин // Вестник БГУ. Серия 1. – 2012. – С. 54–62.
5. Бородич, Р.В. О влиянии индексов максимальных подгрупп на их пересечения / Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич, М.В. Селькин // Вестник Брестского университета. Серия 4. – 2011. – № 2. – С. 49–56.

Поступила в редакцию 20.11.13.

УДК 512.542

О ПОСТРОЕНИИ π -КЛАССОВ ШУНКА КОНЕЧНЫХ π -РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Т.И. Васильева, А.И. Прокопенко

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

ON THE CONSTRUCTION OF π -SCHUNK CLASSES OF FINITE π -SOLUBLE GROUPS

T.I. Vasil'eva, A.I. Prokopenko

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

В работе приведена серия π -разрешимых нормализаторных подгрупповых функторов. Построены новые примеры π -классов Шунка конечных π -разрешимых групп.

Ключевые слова: конечная группа, π -разрешимая группа, π -класс Шунка, нормализаторный подгрупповой функтор.

A series of π -soluble normalizer subgroup functors is given in this work. New examples of π -Schunk classes of finite π -soluble groups are constructed.

Keywords: finite group, π -soluble group, π -Schunk class, normalizer subgroup functor.

Введение

Подгрупповые функторы, т. е. функции, согласованные с изоморфизмами групп и выделяющие в группах некоторые системы подгрупп, тесно связаны с классами групп. В монографии [1] А.Н. Скибой метод подгрупповых функторов применен для изучения свойств локальных формаций, замкнутых относительно систем подгрупп, выделяемых подгрупповыми функторами. С.Ф. Каморниковым и М.В. Селькиным в [2] подгрупповые функторы использовались для нахождения свойств классов Шунка.

Важную роль среди подгрупповых функторов играют транзитивные регулярные подгрупповые функторы, простейшими из которых являются функторы, выделяющие в каждой конечной группе G множество $S(G)$ всех ее подгрупп; множество $sn(G)$ всех ее субнормальных подгрупп; множество $\{G\}$.

В работе [3] было предложено функторное обобщение введенного Манном [4] понятия X -нормальной подгруппы конечной группы. Приведенная в [3] новая серия транзитивных регулярных подгрупповых функторов, а именно: нормализаторных – была использована для построения в разрешимых группах классов Шунка.

В настоящей работе найдены π -разрешимые нормализаторные подгрупповые функторы, с помощью которых в π -разрешимых группах строятся π -классы Шунка.

1 Предварительные результаты

Рассматриваются только конечные группы.

Используются обозначения и определения из [5], [6]. Через π обозначается некоторое

множество простых чисел, π' – дополнение к π во множестве всех простых чисел, \mathfrak{S}^π – класс всех π -разрешимых групп. Пусть \mathfrak{X} – класс групп. Подгруппа H группы G называется \mathfrak{X} -проектором группы G , если HN/N является максимальной \mathfrak{X} -подгруппой в G/N для любой нормальной подгруппы N из G . Класс Шунка – это непустой гомоморф \mathfrak{X} , для которого из условия $G/Co_G(M) \in \mathfrak{X}$ для любой максимальной подгруппы M из G всегда следует, что $G \in \mathfrak{X}$. Класс групп \mathfrak{X} называется π -классом, если из $G/O_{\pi'}(G) \in \mathfrak{X}$ следует, что $G \in \mathfrak{X}$.

Отображение τ , которое ставит в соответствие каждой группе G некоторую непустую систему $\tau(G)$ ее подгрупп, называется подгрупповым функтором [2], если $(\tau(G))^\alpha = \tau(G^\alpha)$ для любого изоморфизма α группы G . Подгрупповой функтор τ называется [2]: 1) транзитивным, если из $S \in \tau(H)$ и $H \in \tau(G)$ следует, что $S \in \tau(G)$ для любой группы G ; 2) регулярным, если $(\tau(A))^\phi \subseteq \tau(B)$ и $(\tau(B))^{\phi^{-1}} \subseteq \tau(A)$ для любого эпиморфизма $\phi: A \rightarrow B$.

Определение 1.1 [3]. Пусть τ – подгрупповой функтор. Подгруппа R группы G называется τ -нормализатором подгруппы H в G (обозначается $N_G^\tau(H)$), если выполняются следующие условия:

- 1) $H \in \tau(R)$;

2) для подгруппы L группы G из $H \in \tau(L)$ всегда следует $L \subseteq R$.

Подгрупповой функтор τ называется нормализаторным [3], если всякая подгруппа группы G обладает τ -нормализатором в G .

Заметим, если $\tau = Sn$ – нормальный подгрупповой функтор, т. е. подгрупповой функтор, который в каждой группе выделяет все ее нормальные подгруппы, то всякая подгруппа группы обладает τ -нормализатором, так как в этом случае $N_G^{Sn}(H) = N_G(H)$. Если $\tau = sn$ – субнормальный подгрупповой функтор, т. е. подгрупповой функтор, который в каждой группе выделяет все ее субнормальные подгруппы, то существуют не обладающие sn -нормализаторами подгруппы группы [7].

Лемма 1.2 [3, лемма 1]. Пусть τ – подгрупповой функтор, H – подгруппа группы G . Тогда $N_G^\tau(H^\alpha) = (N_G^\tau(H))^\alpha$ для любого изоморфизма α группы G .

Определение 1.3 [3]. Пусть τ – подгрупповой функтор. Подгруппа H группы G называется X_τ -нормальной в G , если либо $H = G$, либо для любого эпиморфизма φ группы G такого, что $H^\varphi \neq G^\varphi$, в G^φ найдется собственная подгруппа, содержащая H^φ и принадлежащая $\tau(G^\varphi)$.

Через τ^* обозначается отображение, которое ставит в соответствие каждой группе G множество $\tau^*(G)$ всех X_τ -нормальных в G подгрупп.

Лемма 1.4 [3, лемма 2]. Пусть τ – подгрупповой функтор и G – группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) τ^* – подгрупповой функтор;
- 2) если τ_1 – подгрупповой функтор и $\tau_1(G) \subseteq \tau(G)$, то $\tau_1^*(G) \subseteq \tau^*(G)$;
- 3) если $(\tau(G))^\varphi \subseteq \tau(G^\varphi)$ для любого эпиморфизма φ группы G , то $\tau(G) \subseteq \tau^*(G)$.

Лемма 1.5 [3, лемма 3]. Пусть τ – регулярный подгрупповой функтор и N – нормальная подгруппа группы G . Тогда:

- 1) если H и R – подгруппы группы G такие, что $H \subseteq R$ и $H \in \tau^*(R)$, то $HN/N \in \tau^*(RN/N)$;
- 2) если $N \subseteq H$ и $H/N \in \tau^*(G/N)$, то $H \in \tau^*(G)$.

Лемма 1.6 [3, лемма 4]. Если τ – регулярный подгрупповой функтор, то τ^* – транзитивный регулярный подгрупповой функтор.

2 Построение π -классов Шунка в π -разрешимых группах

Лемма 2.1. Пусть τ – регулярный подгрупповой функтор. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если подгруппа H группы G обладает τ -нормализатором и τ^* -нормализатором, то $N_G^\tau(H) \subseteq N_G^{\tau^*}(H)$;

2) если M – максимальная подгруппа группы G и $M \notin \tau(G)$, то $M = N_G^{\tau^*}(M)$.

Доказательство. 1) следует из леммы 1.4 и определения 1.1 ввиду того, что $H \subseteq N_G^{\tau^*}(H)$.

Установим справедливость 2). Так как по лемме 1.6 τ^* – регулярный подгрупповой функтор, то $M \in \tau^*(M)$.

Если $M \in \tau^*(L)$ для подгруппы L группы G , то из $M \subseteq L$ и максимальной M в G получаем, что либо $L = M$, либо $L = G$. Случай $L = G$ невозможен, так как тогда из определения 1.3 следовало бы, что $M \in \tau(G)$. Таким образом, $L = M$ и $M = N_G^{\tau^*}(M)$. Лемма доказана.

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Будем говорить, что подгрупповой функтор τ обладает π -свойством, если для любой подгруппы H группы G из условия $H \cdot O_\pi(G) \in \tau(G)$ всегда следует, что H обладает τ^* -нормализатором.

Подгрупповой функтор, рассматриваемый на π -разрешимых группах, называется π -разрешимым подгрупповым функтором.

Теорема 2.2. Пусть π -разрешимый регулярный подгрупповой функтор τ обладает π -свойством. Тогда τ^* – π -разрешимый нормализаторный транзитивный регулярный подгрупповой функтор.

Доказательство. По лемме 1.6 τ^* – транзитивный регулярный подгрупповой функтор.

Пусть G – π -разрешимая группа наименьшего порядка такая, что в ней существует подгруппа H , которая не обладает τ^* -нормализатором в G . Если H – X_τ -нормальна в G , то $H \in \tau^*(G)$ и $G = N_G^{\tau^*}(H)$. Получаем противоречие. Поэтому H не является X_τ -нормальной в G .

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда $G/N \in \mathfrak{S}^\pi$ и HN/N обладает τ^* -нормализатором в G/N по выбору G . Обозначим $K/N = N_{G/N}^{\tau^*}(HN/N)$.

Предположим, что $K \neq G$. Если $K/N \in \tau^*(G/N)$, то $HN/N \in \tau^*(G/N)$ ввиду транзитивности τ^* . По определению 1.1 $G/N \subseteq K/N$. Тогда $G = K$. Получили противоречие. Поэтому $K/N \notin \tau^*(G/N)$. Тогда существует эпиморфизм φ группы G/N такой, что

$(K/N)^\varphi \neq (G/N)^\varphi$ и $(G/N)^\varphi$ не имеет собственных подгрупп, которые принадлежат $\tau((G/N)^\varphi)$ и содержат $(K/N)^\varphi$. Обозначим $\text{Ker } \varphi = D/N$. Ясно, что $KD \neq G$. Из $KD \in \mathfrak{S}^\pi$ следует существование $N_{KD}^{\tau^*}(H)$. Рассмотрим любую подгруппу L из G такую, что $H \in \tau^*(L)$. По 1) леммы 1.5 $HN/N \in \tau^*(LN/N)$. Из $K/N = N_{G/N}^{\tau^*}(HN/N)$ по определению 1.1 следует, что $LN/N \subseteq K/N$. Значит, $L \subseteq K \subseteq KD$. Отсюда и из $H \in \tau^*(L)$ вытекает $L \subseteq N_{KD}^{\tau^*}(H)$. Тем самым показано, что $N_{KD}^{\tau^*}(H) = N_G^{\tau^*}(H)$, что противоречит выбору H .

Пусть $K = G$. Тогда $HN/N \in \tau^*(G/N)$ для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G . Возможны два случая.

1. Существуют минимальные нормальные подгруппы N группы G , для которых $G/N \neq HN/N$. Пусть ψ – эпиморфизм группы G такой, что $H^\psi \neq G^\psi$ и $\text{Ker } \psi = S$. Тогда $HS/S \neq G/S$. Выберем в S минимальную нормальную подгруппу R группы G . Очевидно, что $HR/R \neq G/R$. Так как функтор τ^* является регулярным и $HR/R \in \tau^*(G/R)$ получаем, что $HS/S \in \tau^*(G/S)$. Таким образом, в G/S найдется собственная подгруппа, которая принадлежит $\tau(G/S)$ и содержит HS/S . Следовательно, $H \in \tau^*(G)$, т. е. $G = N_G^{\tau^*}(H)$. Получили противоречие с выбором H .

2. Для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G фактор-группа $G/N = HN/N$. Так как $H \neq G$, то H содержится в некоторой максимальной подгруппе M группы G и $G = MN$. Заметим, что $\text{Core}_G(M) = 1$.

Так как G – π -разрешимая группа и N – ее минимальная нормальная подгруппа, то N является либо π' -группой, либо абелевой p -группой для некоторого простого числа $p \in \pi$.

Если N – π' -группа, то $N \subseteq O_{\pi'}(G)$ и $H \cdot O_{\pi'}(G) = G \in \tau(G)$. Так как τ обладает π -свойством, в G существует τ^* -нормализатор подгруппы H . Это противоречит выбору H .

Пусть теперь N является абелевой p -группой. Тогда $M \cap N = 1$ и $G = MN = HN$. Из $M = H$ по 2) леммы 2.1 следует противоречие с выбором H . Теорема доказана.

Теорема 2.3. Пусть π -разрешимый регулярный подгрупповой функтор τ обладает π -свойством. Если H – подгруппа π -разрешимой группы G и $N \trianglelefteq G$, то

$$N_{G/N}^{\tau^*}(HN/N) = N_G^{\tau^*}(H)N/N.$$

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по $|G|$. Обозначим $K = N_G^{\tau^*}(H)$ и $D/N = N_{G/N}^{\tau^*}(HN/N)$, они существуют по теореме 2.2. Из $H \in \tau^*(K)$ и 1) леммы 1.5 следует, что $HN/N \in \tau^*(KN/N)$. Тогда $KN/N \subseteq D/N$.

Покажем, что $D/N \subseteq KN/N$.

Пусть $D/N \neq G/N$. Так как $D \in \mathfrak{S}^\pi$, по индукции $N_{D/N}^{\tau^*}(HN/N) = N_D^{\tau^*}(H)N/N$. По 1) определения 1.1 $HN/N \in \tau^*(D/N)$. Из 2) определения 1.1 следует, что $D/N \subseteq N_{D/N}^{\tau^*}(HN/N)$. Откуда $D/N = N_{D/N}^{\tau^*}(HN/N)$. Из $H \in \tau^*(N_D^{\tau^*}(H))$ следует, что $N_D^{\tau^*}(H) \subseteq K$. Таким образом,

$$D/N = N_D^{\tau^*}(H)N/N \subseteq KN/N.$$

Пусть теперь $D = G$. В этом случае $HN/N \in \tau^*(G/N)$. Если $H \in \tau^*(G)$, то $K = N_G^{\tau^*}(H) = G$. Отсюда $D/N = KN/N$. Допустим, что $H \notin \tau^*(G)$. Тогда $H \neq G$ и найдется эпиморфизм φ группы G такой, что $H^\varphi \neq G^\varphi$ и H^φ не содержится ни в одной собственной подгруппе группы G^φ , которая принадлежит $\tau(G^\varphi)$. Обозначим $\text{Ker } \varphi = R$. Тогда $HR/R \neq G/R$ и в G/R нет собственных подгрупп, содержащих HR/R и принадлежащих $\tau(G/N)$. Из того, что $HN/N \in \tau^*(G/N)$ и τ^* является регулярным подгрупповым функтором, заключаем, что

$$HN/N \cdot RN/N / RN/N \in \tau^*(G/N / RN/N).$$

Если $HNR \neq G$, то в $G/N / RN/N$ найдется собственная подгруппа $L/N / RN/N$, которая содержит $HN/N \cdot RN/N / RN/N$, причем $L/N / RN/N \in \tau(G/N / RN/N)$. Тогда $L \in \tau(G)$, откуда $L/R \in \tau(G/R)$. Получили противоречие с выбором φ , так как $HR/R \subseteq L/R \neq G/R$.

Значит, $HNR = G$. Пусть $B = HR$. Так как $HN/N \in \tau^*(G/N)$, то $BN/N = N_{BN/N}^{\tau^*}(HN/N)$. Пусть α – такой изоморфизм, что $(B/B \cap N)^\alpha = BN/N$. Тогда $(H(B \cap N)/B \cap N)^\alpha = HN/N$. По индукции подгруппа $N_{B/B \cap N}^{\tau^*}(H(B \cap N)/B \cap N) = N_B^{\tau^*}(H)(B \cap N)/B \cap N$. Для $B_1 = N_B^{\tau^*}(H)$ получаем, что $(B_1(B \cap N)/B \cap N)^\alpha = B_1N/N$. По лемме 1.2 $N_{BN/N}^{\tau^*}(HN/N) = B_1N/N$. Следовательно, $BN/N = B_1N/N$. Так как $H \in \tau^*(B_1)$, то $B_1 \subseteq K$.

Тогда $G/N = B_1N/N \subseteq KN/N$, т. е. $D/N = KN/N$. Теорема доказана.

Пусть \mathfrak{X} – непустой класс групп, состоящий из π -разрешимых групп, и τ – π -разрешимый подгрупповой функтор. Обозначим класс групп

$$\mathfrak{X}^\tau = \{G \in \mathfrak{S}^\pi \mid H \in \tau(G) \text{ для любого } \mathfrak{X}\text{-проектора } H \text{ группы } G\}.$$

Теорема 2.4. Пусть \mathfrak{X} – π -класс Шунка, состоящий из π -разрешимых групп, и π -разрешимый регулярный подгрупповой функтор τ обладает π -свойством. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) \mathfrak{X}^τ является π -классом Шунка;
- 2) если G – π -разрешимая группа и H – ее \mathfrak{X} -проектор, то $N_G^\tau(H)$ является \mathfrak{X}^τ -проектором группы G .

Доказательство. Покажем 1). Из леммы 1.5 вытекает, что класс \mathfrak{X}^τ является гомоморфом.

Пусть G – π -разрешимая группа и $G/\text{Core}_G(M) \in \mathfrak{X}^\tau$ для любой максимальной подгруппы M из G . По теореме 2.2 для любого \mathfrak{X} -проектора H группы G существует $N_G^\tau(H)$.

Обозначим $K = N_G^\tau(H)$. Очевидно, что $K \in \mathfrak{X}^\tau$. Пусть $K \subseteq L \subseteq G$ и $L \in \mathfrak{X}^\tau$. Так как $G \in \mathfrak{S}^\pi$ и \mathfrak{X} – π -класс Шунка, из $H \subseteq L$ следует, что H является \mathfrak{X} -проектором подгруппы L . Значит, $H \in \tau^*(L)$. По определению 1.1 $L \subseteq K$. Следовательно, $K = L$ и K является максимальной \mathfrak{X}^τ -подгруппой группы G .

Пусть N – произвольная нормальная подгруппа группы G . По теореме 2.3

$$N_{G/N}^\tau(HN/N) = KN/N.$$

Отсюда и по доказанному выше следует, что KN/N – максимальная \mathfrak{X}^τ -подгруппа группы G/N . Значит, K является \mathfrak{X}^τ -проектором группы G .

Тогда из $K \cdot \text{Core}_G(M) = G$ для любой максимальной подгруппы M из G вытекает, что $G = K \in \mathfrak{X}^\tau$. Итак, \mathfrak{X}^τ – класс Шунка.

Покажем, что \mathfrak{X}^τ является π -классом. Пусть $G/O_{\pi'}(G) \in \mathfrak{X}^\tau$. Возьмем произвольный \mathfrak{X} -проектор H группы G . Тогда $HO_{\pi'}(G)/O_{\pi'}(G)$ является \mathfrak{X} -проектором факторгруппы $G/O_{\pi'}(G)$.

Так как $G/O_{\pi'}(G) \in \mathfrak{X}^\tau$ то

$$HO_{\pi'}(G)/O_{\pi'}(G) \in \tau^*(G/O_{\pi'}(G)).$$

Поскольку $HO_{\pi'}(G)/O_{\pi'}(G) \in \mathfrak{X}$ и

$$O_{\pi'}(G) \subseteq O_{\pi'}(HO_{\pi'}(G)),$$

получаем, что

$$\begin{aligned} &HO_{\pi'}(G)/O_{\pi'}(HO_{\pi'}(G)) \cong \\ &\cong HO_{\pi'}(G)/O_{\pi'}(G)/O_{\pi'}(HO_{\pi'}(G))/O_{\pi'}(G) \in \mathfrak{X}. \end{aligned}$$

Так как \mathfrak{X} – π -класс, то $HO_{\pi'}(G) \in \mathfrak{X}$. Из того, что H – \mathfrak{X} -проектор в G , следует равенство $H = HO_{\pi'}(G)$. Тогда $H/O_{\pi'}(G) \in \tau^*(G/O_{\pi'}(G))$. Функтор τ^* является регулярным, поэтому $H \in \tau^*(G)$. Это означает, что $G \in \mathfrak{X}^\tau$ и \mathfrak{X}^τ является π -классом.

Утверждение 2) теоремы следует из доказательства утверждения 1). Теорема доказана.

Заключение

В работе указан способ построения в π -разрешимых группах π -классов Шунка с использованием π -разрешимых нормализаторных подгрупповых функторов.

Отметим, что для подгруппового функтора $\tau = \text{Sn}$ и π -класса Шунка \mathfrak{X} в классе π -разрешимых групп $N(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{X}^\tau$, где $N(\mathfrak{X}) = \{G \in \mathfrak{S}^\pi \mid N_G(H) = G \text{ для любого } \mathfrak{X}\text{-проектора } H \text{ группы } G\}$. Заметим, что $\mathfrak{X}^\tau \neq N(\mathfrak{X})$. Например, если $\pi = P$ – множество всех простых чисел, $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}_3$ – класс всех 3-групп и $G = S_4$ – симметрическая группа степени 4, то силовская 3-подгруппа H из G является \mathfrak{X} -проектором в G , причём $N_G(H) \neq G = N_G^\tau(H)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Мн. : Беларуская навука, 1997. – 240 с.
2. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Мн. : Бел. навука, 2003. – 254 с.
3. Васильев, А.Ф. Нормализаторные подгрупповые функторы конечных групп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Вестник БГУ. Серия 1. – 2006. – № 1. – С. 92–96.
4. Mann, A. On subgroups of finite soluble groups III / A. Mann // Israel J. Math. – 1973. – Vol. 16. – № 4. – P. 446–451.
5. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
6. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992. – 892 p.
7. Carter, R.W. Nilpotent self-normalizing subgroups and system normalizers / R.W. Carter // Proc. London Math. Soc. – 1962. – Vol. 3, № 12. – P. 535–563.

Поступила в редакцию 09.04.14.

О СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ

В.Ф. Велесницкий

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ON SUPERSOLUBLE GROUPS

V.F. Veliasnitski

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Работа посвящена характеристике сверхразрешимых групп с помощью обобщенно субнормальных подгрупп.

Ключевые слова: формация, силовская подгруппа, разрешимая группа, критическая подгруппа, подгруппа Фраттини, обобщенно субнормальная подгруппа.

The characterization of supersolvable groups with generalized subnormal subgroups is given.

Keywords: formation, Sylow subgroup, soluble group, critical subgroup, Frattini subgroup, generalized subnormal subgroup.

Введение

Все рассматриваемые группы в работе конечны. Согласно классическому результату Силова в любой конечной группе существуют силовские подгруппы. Данные подгруппы играют важную роль при изучении строения конечных групп. Например, группа, у которой все силовские подгруппы нормальны, нильпотентна. Свойство нильпотентности сохраняется и для групп с субнормальными силовскими подгруппами.

В теории конечных групп естественным обобщением понятия субнормальности является понятие обобщенной субнормальности (\mathfrak{F} -достижимости), предложенное Кегелем в работе [1].

Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Подгруппу H называют \mathfrak{F} -субнормальной в смысле Кегеля или \mathfrak{F} -достижимой, если существует цепь подгрупп $G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \dots \supseteq H_m = H$ такая, что для любого $i = 1, 2, \dots, m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1} , либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

В работе [2] рассматривается задача изучения свойств групп, в которых силовские подгруппы \mathfrak{F} -достижимы. Важнейший шаг в данном направлении получен в работе [3]. В ней, в частности, были доказаны следующие теоремы.

Теорема А [3]. Пусть \mathfrak{F} – непустая наследственная формация и $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) \mathfrak{F} содержит любую разрешимую группу G , у которой $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и любая силовская подгруппа из G \mathfrak{F} -достижима в G ;

2) любая разрешимая минимальная не \mathfrak{F} -группа G либо $G = G_p \rtimes G_q$, где $G_p = G^{\mathfrak{F}}$, либо $|G| = p$, где $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.

Теорема В [3]. Пусть \mathfrak{F} – непустая наследственная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) \mathfrak{F} содержит любую разрешимую группу G , у которой $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и любая бипримарная подгруппа из G \mathfrak{F} -достижима в G ;

2) любая разрешимая минимальная не \mathfrak{F} -группа G – группа одного из следующих типов:

a) $G = G_p \rtimes H$, $|\pi(G)| = 3$ и $G_p = G^{\mathfrak{F}}$;

b) $|\pi(G)| = 2$ и $G^{\mathfrak{F}}$ – примарная p -подгруппа, причем $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G_p$;

c) G – группа простого порядка p , где $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.

Из данных результатов следуют характеристика метанильпотентных групп и групп с p -длиной ≤ 1 .

Пусть \mathfrak{N}^2 – формация всех метанильпотентных групп. Разрешимая группа G метанильпотентна тогда и только тогда, когда любая ее бипримарная подгруппа \mathfrak{N}^2 -достижима в G .

Пусть \mathfrak{F} – формация всех разрешимых групп с p -длиной ≤ 1 . Разрешимая группа $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда любая ее бипримарная подгруппа \mathfrak{F} -достижима в G .

В данной работе была получена характеристика сверхразрешимых групп (\mathfrak{U} – класс всех сверхразрешимых групп) с помощью обобщенно субнормальных подгрупп. Доказаны следующие теоремы.

Теорема С. Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда в ней любая силовская подгруппа и любая бипримарная сверхразрешимая подгруппа \mathfrak{U} -достижимы.

Теорема D. Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда в фактор-группе $G/\Phi(G)$ любая силовская подгруппа и любая сверхразрешимая подгруппа Шмидта \mathcal{M} -достижимы.

1 Предварительные сведения

Необходимые обозначения и определения можно найти в монографии [4] Л.А. Шеметкова. Напомним лишь некоторые из них.

Если \mathfrak{F} – класс групп и G – группа, то корадикал G^δ – пересечение всех нормальных подгрупп N из G таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Формация – класс групп, замкнутый относительно фактор-групп и подпрямых произведений.

Формация \mathfrak{F} называется насыщенной, если $G/N \in \mathfrak{F}$, $N \subseteq \Phi(G)$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Формация \mathfrak{F} называется наследственной, если $G \in \mathfrak{F}$ и $H \subseteq G$, то $H \in \mathfrak{F}$.

\mathfrak{N} – класс всех нильпотентных групп.

\mathcal{M} – класс всех сверхразрешимых групп.

$\pi(\mathfrak{F})$ – множество всех простых делителей порядков всех групп из \mathfrak{F} .

$\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}$ – класс всех нильпотентных $\pi(\mathfrak{F})$ -групп.

Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{X} – непустые формации конечных групп. Напомним, что произведением формаций называется $\mathfrak{F}\mathfrak{X} = \{G \mid G^\mathfrak{X} \in \mathfrak{F}\}$.

\mathfrak{N}^2 – формация всех метанильпотентных групп.

Если \mathfrak{F} – класс групп, то группа называется минимальной не \mathfrak{F} -группой (критической группой), если она не принадлежит \mathfrak{F} , а любая её собственная подгруппа принадлежит \mathfrak{F} . Множество всех таких минимальных не \mathfrak{F} -групп обозначается $M(\mathfrak{F})$.

Напомним, что минимальная неабелева группа называется группой Миллера-Морено. Минимальная ненильпотентную группу называют группой Шмидта.

G_p – силовская p -подгруппа группы G .

$\pi(G)$ – множество различных простых делителей порядка группы G .

$|\pi(G)|$ – количество различных простых делителей порядка группы G .

Если $|\pi(G)|=2$, то группа G называется бипримарной.

В следующей лемме приводятся известные свойства обобщенных субнормальных подгрупп.

Лемма 1.1. Пусть \mathfrak{F} – непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если H – подгруппа группы G и $G^\delta \subseteq H$, то H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G ;

2) если H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G , то $H \cap K$ – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа K для любой подгруппы K группы G ;

3) если H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа K и K – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G , то H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G ;

4) если H_1 и H_2 – \mathfrak{F} -достижимые подгруппы группы G , то $H_1 \cap H_2$ – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G ;

5) если H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G , то H^x \mathfrak{F} -достижима в G для любых $x \in G$.

Доказательство. 1) Пусть H – подгруппа группы G и $G^\delta \subseteq H$. Так как $G/G^\delta \in \mathfrak{F}$ и \mathfrak{F} – наследственная формация, то подгруппа H/G^δ является \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой группы G/G^δ . Отсюда согласно определению \mathfrak{F} -субнормальной подгруппы существует максимальная цепь

$G/G^\delta = H_0/G^\delta \supseteq H_1/G^\delta \supseteq \dots \supseteq H_n/G^\delta = H/G^\delta$ такая, что $(H_{i-1}/G^\delta)^\delta \subseteq H_i/G^\delta$ для всех $i=1,2,\dots,n$. Отсюда получаем, что в группе G существует максимальная цепь

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \dots \supseteq H_n = H$$

такая, что $(H_{i-1})^\delta \subseteq H_i$ для всех $i=1,2,\dots,n$.

А это значит, что H – \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа группы G . Поскольку любая \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа группы G является \mathfrak{F} -достижимой в G , то H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G .

2) Пусть H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G . Тогда, по определению, существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \dots \supseteq H_m = H$$

такая, что для любого $i=1,2,\dots,m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1} , либо $(H_{i-1})^\delta \subseteq H_i$.

Пусть K – некоторая подгруппа из G . Рассмотрим цепь подгрупп:

$$K = H_0 \cap K \supseteq H_1 \cap K \supseteq \dots \supseteq H_m \cap K = H \cap K.$$

Если подгруппа H_i нормальна в H_{i-1} , то подгруппа $H_i \cap K$ нормальна в $H_{i-1} \cap K$. Пусть $(H_{i-1})^\delta \subseteq H_i$. Так как формация \mathfrak{F} наследственная, то из $H_{i-1}/(H_{i-1})^\delta \in \mathfrak{F}$ следует, что

$$(H_{i-1} \cap K)(H_{i-1})^\delta / (H_{i-1})^\delta \in \mathfrak{F}.$$

Теперь ввиду изоморфизма

$$(H_{i-1} \cap K)(H_{i-1})^\delta / (H_{i-1})^\delta \simeq H_{i-1} \cap K / H_{i-1} \cap K \cap (H_{i-1})^\delta$$

имеем

$$H_{i-1} \cap K / (H_{i-1})^\delta \cap K \in \mathfrak{F}.$$

Значит,

$$(H_{i-1} \cap K)^{\mathfrak{S}} \subseteq (H_{i-1})^{\mathfrak{S}} \cap K.$$

Так как $(H_{i-1})^{\mathfrak{S}} \subseteq H_i$, то $(H_{i-1} \cap K)^{\mathfrak{S}} \subseteq H_i \cap K$.
Итак, для каждого $i=1,2,\dots,m$ либо подгруппа $H_i \cap K$ нормальна в $H_{i-1} \cap K$, либо

$$(H_{i-1} \cap K)^{\mathfrak{S}} \subseteq H_i \cap K.$$

Отсюда, по определению, $H \cap K$ – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы K .

Утверждение 3) следует непосредственно из определения \mathfrak{F} -достижимой подгруппы.

Утверждение 4) следует теперь из утверждений 2) и 3).

Утверждение 5) следует непосредственно из определения \mathfrak{F} -достижимой подгруппы. Лемма доказана.

Напомним, что группа называется сверхразрешимой, если она имеет нормальный ряд с циклическими факторами.

Дисперсивная группа – конечная группа, обладающая нормальным рядом, факторы которого изоморфны силовским подгруппам. Дисперсивной по Оре группой называют конечную группу порядка $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}$, где $p_1 > p_2 > \dots > p_t$ – простые числа, обладающую нормальными подгруппами порядков

$$p_1^{a_1}, p_1^{a_1} p_2^{a_2}, \dots, p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_i^{a_i}, \dots, p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_{t-1}^{a_{t-1}}.$$

Сверхразрешимые группы дисперсивны по Оре.

Приведем ниже известные свойства минимальных несверхразрешимых групп.

Лемма 1.2 [5]. Пусть G – минимальная несверхразрешимая группа. Тогда выполняются следующие условия:

- 1) G разрешима и $\pi(G) \leq 3$;
- 2) если G не является группой Шмидта, то G дисперсивна по Оре;
- 3) G имеет единственную неединичную нормальную силовскую подгруппу $P = G^{\mathfrak{U}}$;
- 4) если S – дополнение к P в G , то $S/S \cap \Phi(G)$ – либо примарная циклическая группа, либо группа Миллера-Морено.

2 Доказательство теорем С и D

Доказательство теоремы С. Необходимость. Пусть G – сверхразрешимая группа и \mathfrak{U} – класс всех сверхразрешимых групп. Тогда $G^{\mathfrak{U}} = 1$. А это значит, что $G^{\mathfrak{U}} \subseteq H$, где H – произвольная подгруппа группы G . По лемме 1.1 H – \mathfrak{U} -достижима.

Достаточность. Пусть любая силовская подгруппа группы G и любая бипримарная сверхразрешимая подгруппа группы G \mathfrak{U} -достижимы в G . Пусть G – группа минимального порядка, для которой теорема неверна.

Пусть H – произвольная собственная подгруппа группы G . Покажем, что условия теоремы для H выполнимы. Действительно, пусть H_p – произвольная силовская p -подгруппа из H . По теореме силова H_p содержится в некоторой силовской подгруппе G_p группы G . По условию G_p – \mathfrak{U} -достижима в G . Так как $G_p \in \mathfrak{U}$, то $G_p^{\mathfrak{U}} = 1$. Тогда по лемме 1.1 H_p – \mathfrak{U} -достижима в G_p . Получаем по той же лемме 1.1, что H_p \mathfrak{U} -достижима в G .

Пусть B – произвольная бипримарная сверхразрешимая подгруппа из H . Тогда согласно условию B \mathfrak{U} -достижима в G . По лемме 1.1 B – \mathfrak{U} -достижима в H . Итак, условия теоремы для подгруппы H выполняются. Следовательно, по индукции H – сверхразрешима. Итак, G – минимальная несверхразрешимая группа.

Согласно лемме 1.2 G – группа одного из следующих типов.

а) Если $|\pi(G)| = 1$, то теорема очевидна.

б) Пусть $|\pi(G)| = 2$. Тогда по лемме 1.2 $G = G_p \rtimes G_q$ и $G_p = G^{\mathfrak{U}}$. Согласно условию G_q – \mathfrak{U} -достижимая подгруппа группы G . Тогда G_q содержится в максимальной подгруппе M группы G , причем M либо \mathfrak{U} -нормальна в G , либо нормальна в G . Если M \mathfrak{U} -нормальна в G , то $G^{\mathfrak{U}} \subseteq M$. Отсюда следует, что $G \subseteq M$, что невозможно. Пусть M – нормальная подгруппа G . Тогда $G = G^{\mathfrak{S}} M$. Очевидно, что $G/G^{\mathfrak{U}} \in \mathfrak{U}$ и $G/M \in \mathfrak{U}$. Так как \mathfrak{U} – формация, то $G/G^{\mathfrak{U}} \cap M \in \mathfrak{U}$. Отсюда следует, что $G^{\mathfrak{U}} \subseteq G^{\mathfrak{U}} \cap M$. А это значит, что $G \subseteq M$, что невозможно. Получили противоречие.

в) Пусть $|\pi(G)| = 3$. Тогда согласно лемме 1.2 $G_p = G^{\mathfrak{U}}$ и $G = G_p \rtimes G_q \rtimes G_r$, где $p > q > r$. Так как G – минимальная несверхразрешимая подгруппа, то $G_q G_r$ – сверхразрешима. По условию теоремы $G_q G_r$ – \mathfrak{U} -достижима в G . Как и выше, нетрудно показать, что это невозможно. Получили противоречие. Следовательно G – сверхразрешима. Теорема доказана.

Доказательство теоремы D. Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть G – группа минимального порядка, для которой теорема не верна. Как и в теореме С, нетрудно показать, что $G/\Phi(G)$ – минимальная несверхразрешимая группа. Поскольку $\Phi(G/\Phi(G)) = 1$, то дальнейшие рассуждения будем проводить для групп, у которых $\Phi(G) = 1$. Для $|\pi(G)| \leq 2$ рассуждения проводятся аналогичные доказательству теоремы С.

Пусть $|\pi(G)| = 3$. По лемме 1.2 $G_p = G^{\mathfrak{U}}$,
 $G_q G_r$ – группа Миллера-Морено и

$$G = G_p \rtimes G_q \rtimes G_r,$$

где $p > q > r$. Покажем, что $G_q G_r$ – группа Шмидта. Если $G_q G_r$ нильпотента, то $G_q \times G_r$, где G_q, G_r – абелевы, но тогда $G_q G_r$ – абелева, что невозможно. Итак, $G_q G_r$ – сверхразрешимая группа Шмидта. По условию теоремы $G_q G_r$ – \mathfrak{U} -достижима в G . Как и выше, нетрудно показать, что такое невозможно. Получили противоречие.

Итак, $G/\Phi(G) \in \mathfrak{U}$. В силу насыщенности класса всех сверхразрешимых групп \mathfrak{U} получаем, что G – сверхразрешима. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kegel, O.H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die Subnormalteilverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30. – P. 225–228.

2. Васильева, Т.И. О конечных группах с \mathfrak{F} -достижимыми силовскими подгруппами / Т.И. Васильева, А.И. Прокопенко // Гомель, 2006. – 18 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; № 4).

3. Шевчук, С.Н. Конечные группы с обобщенно субнормальными подгруппами / С.Н. Шевчук, В.Н. Семенчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 4 (5). – С. 57–60.

4. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков // М.: Наука. – 1978. – 272 с.

5. Döerk, K. Minimal nicht Überauflosbare, endliche Gruppen / K. Doerk // Math.Z. – 1966. – Vol. 91. – P. 198–205.

Поступила в редакцию 14.12.13.

УДК 512.548

ЦИКЛИЧЕСКИЕ n -АРНЫЕ ГРУППЫ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

А.М. Гальмак¹, Н.А. Щучкин²

¹Могилёвский государственный университет продовольствия, Могилёв, Беларусь

²Волгоградский государственный социально-педагогический университет, Волгоград, Россия

CYCLIC n -ARY GROUPS AND THEIR GENERALIZATIONS

A.M. Gal'mak¹, N.A. Shchuchkin²

¹Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev, Belarus

²Volgograd State Socio-Pedagogical University, Volgograd, Russia

Для любого делителя $m - 1$ натурального числа $n - 1$ определяются и изучаются m -полуциклические n -арные группы. Класс всех m -полуциклических n -арных групп входит в класс всех m -полуабелевых n -арных групп, которые были определены Э. Постом. Кроме того, класс всех m -полуциклических n -арных групп включает в себя класс всех циклических n -арных групп и входит в класс всех полуциклических n -арных групп. Установлены новый критерий циклическости n -арной группы и критерий m -полуциклическости n -арной группы, сформулированные с помощью одной из подгрупп универсальной обертывающей группы Поста.

Ключевые слова: n -арная группа, циклическая группа, полуциклическая группа, m -полуциклическая группа.

The authors define and study m -semicyclic n -ary groups for any divisor $m - 1$ of natural number $n - 1$. The class of all m -semicyclic n -ary groups is included in the class of all m -semiabelian n -ary groups identified by E. Post. Moreover, the class of all m -semicyclic n -ary groups includes the class of all cyclic n -ary groups and belongs to the class of all semicyclic n -ary groups. New criteria of cyclicity for n -ary group and for m -semicyclicity of n -ary group formulated by one of the subgroups of the universal covering group of Post are determined.

Keywords: n -ary group, cyclic group, semicyclic group, m -semicyclic group.

Введение

Пусть $\langle A, [] \rangle - n$ -арная группа, $F_A -$ свободная полугруппа над алфавитом A , $\theta_A -$ отношение эквивалентности Поста [1], определенное на F_A по правилу $(\alpha, \beta) \in \theta_A$ тогда и только тогда, когда существуют последовательности γ и δ из F_A такие, что $[\gamma\alpha\delta] = [\gamma\beta\delta]$. Легко проверяется, что $\theta_A -$ конгруэнция на полугруппе F_A , а полугруппа $A^* = F_A / \theta_A$ является группой.

Для всякого $i = 1, \dots, n - 1$ определим множество

$$A^{(i)} = \{\theta_A(\alpha) \mid \theta_A(\alpha) \in A^*, l(\alpha) = i\},$$

где $\theta_A(\alpha) -$ класс конгруэнции θ_A , содержащий последовательность α ; $l(\alpha) -$ длина последовательности α . В частности,

$$A' = \{\theta_A(a) \mid a \in A\},$$

$$A'' = \{\theta_A(ab) \mid a, b \in A\}.$$

Для сокращения записей множество $A^{(n-1)}$ будем обозначать распространенным в литературе по n -арным группам символом A_0 , то есть $A_0 = A^{(n-1)}$.

Справедливы равенства (см., например, [2, предложение 1.3.7])

$$A^* = \bigcup_{i=1}^{n-1} A^{(i)},$$

$$A^{(i)} \cap A^{(j)} = \emptyset, i, j \in \{1, \dots, n - 1\}, i \neq j.$$

Если зафиксировать $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ и элементы $a_1, \dots, a_{n-i} \in A$, то несложно убедиться в справедливости ещё одного равенства

$$A' = A^{(i)}\theta_A(a_1 \dots a_{n-i}). \quad (0.1)$$

Замечание 0.1. Если $n = k(m - 1) + 1$, где $n \geq 3$, $m \geq 2$, то легко проверяется, что множество $A^{(m-1)}$ является $(k + 1)$ -арной группой относительно $(k + 1)$ -арной операции

$$[\theta_A(\alpha_1)\theta_A(\alpha_2) \dots \theta_A(\alpha_{k+1})]_{k+1} = \theta_A(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{k+1}), \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1} \in A^{(m-1)}.$$

Если $m = 2$, то $k = n - 1$ и получаем n -арную операцию

$$[\theta_A(a_1)\theta_A(a_2) \dots \theta_A(a_n)]_n = \theta_A(a_1a_2 \dots a_n) = \theta_A([a_1a_2 \dots a_n]), a_1, a_2, \dots, a_n \in A.$$

При этом, как несложно установить, отображение $\varphi: a \rightarrow \theta_A(a)$ является изоморфизмом n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ на n -арную группу $\langle A', []_n \rangle$.

Если $m = n$, то $k = 1$ и получаем бинарную операцию

$$[\theta_A(a_1a_2 \dots a_{n-1})\theta_A(b_1b_2 \dots b_{n-1})]_2 = \theta_A(a_1a_2 \dots a_{n-1}b_1b_2 \dots b_{n-1}) = \theta_A([a_1a_2 \dots a_{n-1}b_1]b_2 \dots b_{n-1}),$$

где $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b_1, b_2, \dots, b_{n-1} \in A$. При этом группу $\langle A^{(n-1)} = A_0, []_2 \rangle$ называют *соответствующей* группой для n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ и

для сокращения записей обозначают одним символом A_0 .

Если $m - 1$ делит $n - 1$, где $n \geq 3$, $m \geq 2$, то положим

$${}^m A = \{\theta_A(\alpha) \in A^* \mid l(\alpha) \text{ кратно } m - 1\}.$$

При $m = 2$ множество ${}^m A$ совпадает с универсальной обертывающей группой Поста A^* , а при $m = n$ множество ${}^m A$ совпадает с соответствующей группой A_0 :

$${}^2 A = A^*, {}^n A = A_0.$$

1 Обобщение теоремы Поста о смежных классах

Следующую теорему можно рассматривать как обобщение теоремы Поста о смежных классах.

Теорема 1.1 [3]. Пусть $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, $n = k(m - 1) + 1$. Тогда:

- 1) $A_0 \subseteq {}^m A \subseteq A^*$;
- 2) ${}^m A = \bigcup_{i=1}^k A^{(i(m-1))}$;
- 3) ${}^m A$ – инвариантная подгруппа группы A^* ;
- 4) группа ${}^m A$ порождается множеством $A^{(m-1)}$;
- 5) ${}^m A / A_0 = \{A^{(m-1)}, A^{(2(m-1))}, \dots, A^{(k(m-1))} = A_0\}$ – циклическая группа порядка k , порождаемая элементом $A^{(m-1)}$;

6) $A^* / {}^m A$ – циклическая группа порядка $m - 1$.

Так как $A^{(i(m-1))} \cap A^{(j(m-1))} = \emptyset$ при $i \neq j$, то из 2) предыдущей теоремы вытекает

Следствие 1.1. Если $n = k(m - 1) + 1$, $\langle A, [] \rangle$ – конечная n -арная группа порядка γ , то порядок группы ${}^m A$ равен $k\gamma$.

Замечание 1.1. Если в теореме 1.1 положить $m = 2$, то тогда $k = n - 1$, ${}^m A = A^*$, а утверждения

1) – 6) примут следующий вид:

- 1) $A_0 \subseteq A^*$;
- 2) $A^* = \bigcup_{i=1}^{n-1} A^{(i)}$;
- 3) A^* – инвариантная подгруппа группы A^* ;
- 4) группа A^* порождается множеством A' ;
- 5) $A^* / A_0 = \{A', A'', \dots, A^{(n-1)} = A_0\}$ – циклическая группа порядка $n - 1$, порождаемая элементом A' ;
- 6) A^* / A^* – циклическая группа порядка 1.

Утверждения 3 и 6 тривиальны, а остальные утверждения содержатся в теореме Поста о смежных классах ([1], [2, теорема 1.3.2]).

Замечание 1.2. Если в теореме 1.1 положить $m = n$, то тогда $k = 1$, ${}^m A = A_0$, а утверждения 1) – 6) примут следующий вид:

- 1) $A_0 \subseteq A^*$;
- 2) $A_0 = A_0$;
- 3) A_0 – инвариантная подгруппа группы A^* ;
- 4) группа A_0 порождается множеством A_0 ;
- 5) A_0 / A_0 – циклическая группа порядка 1;
- 6) A^* / A_0 – циклическая группа порядка $n - 1$.

Утверждения 2, 4 и 5 тривиальны, а остальные утверждения содержатся в теореме Поста о смежных классах.

Таким образом, теорема 1.1 является обобщением теоремы Поста о смежных классах. При этом утверждение последней о том, что A^* / A_0 – циклическая группа порядка $n - 1$, может быть получено из теоремы 1.1 двояко: из утверждения 5) при $m = 2$; из утверждения 6) при $m = n$. Вообще говоря, указанное обобщение является формальным, так как утверждения теоремы 1.1 могут быть извлечены из теоремы Поста о смежных классах. Например, циклическость группы ${}^m A / A_0$ вытекает из того, что ${}^m A / A_0$ – подгруппа циклической группы A^* / A_0 ; а циклическость группы $A^* / {}^m A$ вытекает из циклическости группы A^* / A_0 и изоморфизма

$$(A^* / A_0) / ({}^m A / A_0) \cong A^* / {}^m A.$$

Используя утверждения 3) и 4) предложения 1.3.7 [2], несложно получить разложения групп A^* и ${}^m A$ на непересекающиеся смежные классы по подгруппам ${}^m A$ и A_0 соответственно.

Предложение 1.1. Пусть $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, $n = k(m - 1) + 1$, $b \in A$. Тогда:

$$1) A^* = {}^m A + \theta_A(b) {}^m A + \theta_A^2(b) {}^m A + \dots$$

$$\dots + \theta_A^{m-2}(b) {}^m A =$$

$$= {}^m A + {}^m A \theta_A(b) + {}^m A \theta_A^2(b) + \dots + {}^m A \theta_A^{m-2}(b);$$

$$2) {}^m A = A_0 + \theta_A(\underbrace{b \dots b}_{m-1}) A_0 +$$

$$+ \theta_A^2(\underbrace{b \dots b}_{m-1}) A_0 + \dots + \theta_A^{k-1}(\underbrace{b \dots b}_{m-1}) A_0 =$$

$$= A_0 + A_0 \theta_A(\underbrace{b \dots b}_{m-1}) + A_0 \theta_A^2(\underbrace{b \dots b}_{m-1}) + \dots$$

$$\dots + A_0 \theta_A^{k-1}(\underbrace{b \dots b}_{m-1}).$$

Известное разложение Поста ([1], [2, предложение 1.4.6])

$$A^* = A_0 + \theta_A(b) A_0 + \theta_A^2(b) A_0 + \dots + \theta_A^{n-2}(b) A_0 =$$

$$= A_0 + A_0 \theta_A(b) + A_0 \theta_A^2(b) + \dots + A_0 \theta_A^{n-2}(b)$$

может быть получено либо из 1) предыдущего предложения при $m = n$, либо из 2) этого же предложения при $m = 2$.

Замечание 1.3. Если $n = k(m - 1) + 1$, то несложно установить, что

$$A^{(i(m-1))} = A^{(m-1)} u^{i-1} = u^{i-1} A^{(m-1)}$$

для любого $u \in A^{(m-1)}$, $i = 1, \dots, k$.

Согласно Э. Посту [1], группа G называется обертывающей для n -арной группы $\langle A, [] \rangle$, если:

- 1) группа G порождается множеством A ;
- 2) для любых $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ бинарная и n -арная операции связаны равенством

$$[x_1 x_2 \dots x_n] = x_1 x_2 \dots x_n.$$

Любая обертывающая группа G n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ является гомоморфным образом универсальной обертывающей группы Поста A^* ([1], [2, теорема 1.4.9]).

Замечание 1.4. Из утверждения 4) теоремы 1.1 и определения $(k+1)$ -арной операции $[]_{k+1}$ следует, что группа ${}^m A$ является обертывающей для $(k+1)$ -арной группы $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$. Более того, группа ${}^m A$ изоморфна универсальной обертывающей группе Поста $(A^{(m-1)})^*$ для $(k+1)$ -арной группы $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$.

Группа A^* из теоремы Поста о смежных классах и её подгруппа A_0 используются при изучении n -арных групп. Яркими примерами эффективного использования этих групп являются описание В.А. Артамоновым свободных n -арных групп [4] и шрайеровых многообразий n -арных групп [5], а также разработанная Э. Постом [1] и С.А. Русаковым [6] силовская теория n -арных групп. В следующих разделах будет показано, что при изучении n -арных групп с успехом может быть использована и группа ${}^m A$, частными случаями которой, как отмечалось в конце введения, являются как сама группа A^* , так и её подгруппа A_0 .

2 Критерий m -полуабелевости n -арной группы

Напомним, что n -арная группа $\langle A, [] \rangle$ называется абелевой [7], если в ней для любой подстановки σ множества $\{1, \dots, n\}$ выполняется тождество

$$[a_1 a_2 \dots a_n] = [a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)} \dots a_{\sigma(n)}].$$

n -Арная группа $\langle A, [] \rangle$ называется полуабелевой [7], если в ней выполняется тождество

$$[aa_2 \dots a_{n-2} b] = [ba_2 \dots a_{n-2} a].$$

Э. Пост объединил абелевость и полуабелевость общим понятием, назвав [1] n -арную группу $\langle A, [] \rangle$ m -полуабелевой, если $m-1$ делит $n-1$ и

$$(aa_2 \dots a_{m-2} b, ba_2 \dots a_{m-2} a) \in \Theta_A$$

для всех $a, a_2, \dots, a_{m-2}, b \in A$.

Имеет место следующий критерий m -полуабелевости n -арной группы.

Теорема 2.1 [3]. n -Арная группа $\langle A, [] \rangle$ является m -полуабелевой тогда и только тогда, когда группа ${}^m A$ абелева.

Полагая в теореме 2.1 $m=2$, получим

Следствие 2.1 [1]. n -Арная группа $\langle A, [] \rangle$ является абелевой тогда и только тогда, когда её универсальная обертывающая группа Поста A^* абелева.

Полагая в теореме 2.1 $m=n$, получим

Следствие 2.2 [1]. n -Арная группа $\langle A, [] \rangle$ является полуабелевой тогда и только тогда, когда её соответствующая группа A_0 абелева.

При доказательстве теоремы 2.1 используется следующая лемма.

Лемма 2.1. n -Арная группа $\langle A, [] \rangle$ является m -полуабелевой тогда и только тогда, когда для любых $a_1, \dots, a_{m-1}, b_1, \dots, b_{m-1} \in A$ последовательности

$$a_1 \dots a_{m-1} b_1 \dots b_{m-1} \text{ и } b_1 \dots b_{m-1} a_1 \dots a_{m-1}$$

эквивалентны.

Замечание 2.1. Если $n = k(m-1) + 1$, то непосредственным следствием леммы 2.1 является равносильность m -полуабелевости n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ и абелевости $(k+1)$ -арной группы $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$ из замечания 0.1.

3 Циклические и полуциклические n -арные группы

Вначале напомним определения полиадической степени и циклической n -арной группы.

Для любого целого s и любого элемента a n -арной ($n \geq 3$) группы $\langle A, [] \rangle$ s -ая n -адическая степень $a^{[s]}$ этого элемента определяется следующим образом [1]:

$$a^{[s]} = a, \text{ если } s = 0;$$

$$a^{[s]} = [\underbrace{a \dots a}_{s(n-1)+1}], \text{ если } s > 0;$$

$a^{[s]}$ – решение уравнения $[x \underbrace{a \dots a}_{s(n-1)}] = a$, если $s < 0$.

Заметим, что использовать квадратные скобки в обозначении полиадической степени предложил Э. Пост. Эти скобки не связаны с символом n -арной операции.

n -Арную группу $\langle A, [] \rangle$, порождённую одноэлементным множеством $\{a\}$, называют циклической n -арной группой, порождённой элементом a [1]. Сам элемент a в этом случае называется порождающим.

Циклическая n -арная группа, порождённая элементом a , состоит из всех полиадических степеней этого элемента. Если $\langle A, [] \rangle$ – конечная порядка γ , то

$$A = \{a^{[0]}, a^{[1]}, a^{[2]}, \dots, a^{[\gamma-1]}\}.$$

Если же $\langle A, [] \rangle$ – бесконечная, то $A = \{a^{[s]} \mid s - \text{целое}\}.$

Более подробную информацию о циклических n -арных группах можно найти в [1], [2]. Здесь же мы сформулируем и докажем новый критерий цикличности n -арной группы.

Лемма 3.1. Пусть $n = k(m-1) + 1$, $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, у которой группа ${}^m A$ является циклической с порождающим элементом $\theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$, где $a_1, \dots, a_{m-1} \in A$. Тогда для любого $i = 1, \dots, k$ верно:

1) если $\langle A, [] \rangle$ – конечная порядка γ , то $A^{(i(m-1))} = \{ \theta_A^{rk+i}(a_1 \dots a_{m-1}) \mid r = 0, 1, \dots, \gamma-1 \};$

2) если $\langle A, [] \rangle$ – бесконечная, то $A^{(i(m-1))} = \{ \theta_A^{rk+i}(a_1 \dots a_{m-1}) \mid r - \text{целое} \}.$

Доказательство. 1) Положим

$$V_i = \{ \theta_A^{rk+i}(a_1 \dots a_{m-1}) \mid r = 0, 1, \dots, \gamma-1 \}.$$

Ясно, что

$$\bigcup_{i=1}^k V_i = \bigcup_{i=1}^k \{ \theta_A^{rk+i}(a_1 \dots a_{m-1}) \mid r = 0, 1, \dots, \gamma-1 \} =$$

$$= \{ \theta_A^{rk+i}(a_1 \dots a_{m-1}) \mid i = 1, \dots, k, r = 0, 1, \dots, \gamma-1 \} =$$

$$= \{ \theta_A^s(a_1 \dots a_{m-1}) \mid s = 1, \dots, \gamma k \},$$

то есть

$$\bigcup_{i=1}^k V_i = \{ \theta_A^s(a_1 \dots a_{m-1}) \mid s = 1, \dots, \gamma k \}.$$

А так как циклическая группа ${}^m A$ порождается элементом $\theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$ и имеет порядок γk , то из последнего равенства следует, что $\bigcup_{i=1}^k V_i = {}^m A$, откуда и из утверждения 2) теоремы 1.1 следует

$$\bigcup_{i=1}^k V_i = \bigcup_{i=1}^k A^{(i(m-1))}, \quad (3.1)$$

где для любых $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $i \neq j$ верно

$$A^{(i(m-1))} \cap A^{(j(m-1))} = \emptyset. \quad (3.2)$$

Так как

$$\theta_A^{rk+i}(a_1 \dots a_{m-1}) = \theta_A \underbrace{a_1 \dots a_{m-1} \dots a_1 \dots a_{m-1}}_{rk+i},$$

а длина последовательности $\underbrace{a_1 \dots a_{m-1} \dots a_1 \dots a_{m-1}}_{rk+i}$

равна

$$(rk+i)(m-1) = rk(m-1) + i(m-1) = r(n-1) + i(m-1),$$

то

$$V_i \subseteq A^{(i(m-1))}. \quad (3.3)$$

Предположим, что $V_i \neq A^{(i(m-1))}$, то есть существует элемент $u \in A^{(i(m-1))}$ такой, что $u \notin V_i$.

Тогда $u \in \bigcup_{i=1}^k A^{(i(m-1))}$, а из (3.2) и (3.3) вытекает

$u \notin \bigcup_{i=1}^k V_i$, что противоречит (3.1). Таким образом, $A^{(i(m-1))} = V_i$, то есть верно равенство из 1).

2) Доказательство проводится аналогично с заменой условия $r=0, 1, \dots, \gamma-1$ условием r – целое. Лемма доказана.

Лемма 3.2 [2]. Для любого элемента a n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ и любого целого s справедливо равенство $\theta_A(a^{[s]}) = (\theta_A(a))^{s(n-1)+1}$.

Теперь мы можем сформулировать новый критерий циклическости n -арной группы.

Теорема 3.1. Пусть $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа. Тогда:

1) если $\langle A, [] \rangle$ – циклическая, порождённая элементом a , то для любого t такого, что $n = k(m-1) + 1$, группа ${}^m A$ является циклической, порождённой элементом $\theta_A(\underbrace{a \dots a}_{m-1})$;

2) если для некоторого t такого, что $n = k(m-1) + 1$, группа ${}^m A$ является циклической, порождённой элементом $\theta_A(\underbrace{a \dots a}_{m-1})$, то $\langle A, [] \rangle$ – циклическая n -арная группа, порождённая элементом a .

Доказательство. Сразу же заметим, что n -арная группа $\langle A, [] \rangle$ и группа ${}^m A$ конечны или бесконечны одновременно.

1) Так как $A = \{a^{[r]} \mid r \in Z\}$, то, ввиду предложения 1.3.7 [2],

$$\begin{aligned} A^{(i(m-1))} &= \{ \theta_A(a^{[r]}) \underbrace{a \dots a}_{i(m-1)-1} \mid r \in Z \} = \\ &= \{ \theta_A(a^{[r]}) \theta_A(\underbrace{a \dots a}_{i(m-1)-1}) \mid r \in Z \}, \end{aligned}$$

откуда, учитывая лемму 3.2 и равенство $n = k(m-1) + 1$, имеем

$$\begin{aligned} A^{(i(m-1))} &= \{ (\theta_A(a))^{r(n-1)+1} (\theta_A(a))^{i(m-1)-1} \mid r \in Z \} = \\ &= \{ (\theta_A(a))^{rk(m-1)+1} (\theta_A(a))^{i(m-1)-1} \mid r \in Z \} = \\ &= \{ (\theta_A(a))^{(rk+i)(m-1)} \mid r \in Z \} = \\ &= \{ ((\theta_A(a))^{m-1})^{rk+i} \mid r \in Z \} = \\ &= \{ (\theta_A(\underbrace{a \dots a}_{m-1}))^{rk+i} \mid r \in Z \}, \end{aligned}$$

то есть

$$A^{(i(m-1))} = \{ (\theta_A(\underbrace{a \dots a}_{m-1}))^{rk+i} \mid r \in Z \}.$$

Тогда по теореме 1.1

$$\begin{aligned} {}^m A &= \bigcup_{i=1}^k A^{(i(m-1))} = \bigcup_{i=1}^k \{ (\theta_A(\underbrace{a \dots a}_{m-1}))^{rk+i} \mid r \in Z \} = \\ &= \{ (\theta_A(\underbrace{a \dots a}_{m-1}))^{rk+i} \mid i = 1, \dots, k, r \in Z \} = \\ &= \{ (\theta_A(\underbrace{a \dots a}_{m-1}))^s \mid s \in Z \}, \end{aligned}$$

то есть ${}^m A = \{ (\theta_A(\underbrace{a \dots a}_{m-1}))^s \mid s \in Z \}$. Следовательно, ${}^m A$ – циклическая группа, порождённая элементом $\theta_A(\underbrace{a \dots a}_{m-1})$.

2) По лемме 3.1

$$A^{(m-1)} = \{ \theta_A^{rk+1}(\underbrace{a \dots a}_{m-1}) \mid r - \text{целое} \}.$$

Тогда, используя равенство (0.1) при $i = m-1$, $a_1, \dots, a_{n-m+1} = a$, а также лемму 3.2, получим

$$\begin{aligned} A' &= A^{(m-1)} \theta_A(\underbrace{a \dots a}_{m-1}) = \\ &= \{ \theta_A^{rk+1}(\underbrace{a \dots a}_{m-1}) \theta_A(\underbrace{a \dots a}_{n-m+1}) \mid r - \text{целое} \} = \\ &= \{ (\theta_A(\underbrace{a \dots a}_{m-1}))^{rk+1} \theta_A(\underbrace{a \dots a}_{(k-1)(m-1)+1}) \mid r - \text{целое} \} = \\ &= \{ (\theta_A(\underbrace{a \dots a}_{m-1}))^{rk+1} (\theta_A(a))^{(k-1)(m-1)+1} \mid r - \text{целое} \} = \\ &= \{ (\theta_A(a))^{(rk+1)(m-1)} (\theta_A(a))^{(k-1)(m-1)+1} \mid r - \text{целое} \} = \\ &= \{ (\theta_A(a))^{(r+1)k(m-1)+1} \mid r - \text{целое} \} = \\ &= \{ (\theta_A(a))^{(r+1)(n-1)+1} \mid r - \text{целое} \} = \\ &= \{ (\theta_A(a^{[r+1]})) \mid r - \text{целое} \}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$A' = \{ (\theta_A(a^{[s]})) \mid s - \text{целое} \}.$$

А так как $A' = \{ \theta_A(b) \mid b \in A \}$, то $A = \{ a^{[s]} \mid s - \text{целое} \}$. Следовательно, $\langle A, [] \rangle$ – циклическая n -арная группа, порождённая элементом a . Теорема доказана.

Полагая в теореме 3.1 $m = 2$, получим
Следствие 3.1 ([1], [2], теорема 2.5.22)]. *n*-Арная группа $\langle A, [] \rangle$ является циклической с порождающим элементом a тогда и только тогда, когда её универсальная обертывающая группа Поста A^* – циклическая с порождающим элементом $\theta_A(a)$.

Напомним, что *n*-арная группа $\langle A, [] \rangle$ называется *полуциклической* [2], если её соответствующая группа A_0 циклическая. Так как для всякой *n*-арной группы $\langle A, [] \rangle$ мощности множеств A и A_0 совпадают, то любая *n*-арная группа простого порядка является *полуциклической*. Подробному изучению *полуциклических n*-арных групп посвящена статья [8].

Полагая в теореме 3.1 $m = n$, получим
Следствие 3.2 [2, теорема 2.5.23]. *n*-Арная группа $\langle A, [] \rangle$ является циклической с порождающим элементом a тогда и только тогда, когда её соответствующая группа A_0 – циклическая с порождающим элементом $\theta_A(\underbrace{a \dots a}_{n-1})$.

Сформулируем ещё одно следствие из теоремы 3.1.

Следствие 3.3. Пусть $\langle A, [] \rangle$ – *n*-арная группа. Если для некоторого элемента $a \in A$ и некоторого t такого, что $n = k(m - 1) + 1$, группа ${}^m A$ порождается элементом $\theta_A(\underbrace{a \dots a}_{m-1})$, то универсальная обертывающая группа Поста A^* порождается элементом $\theta_A(a)$.

4 *t*-Полуциклические *n*-арные группы

Как уже отмечалось, подгруппа ${}^m A$ группы A^* , как и её частные случаи – сама группа A^* и её подгруппа A_0 , могут быть использованы при изучении *n*-арных групп. Одним из примеров такого использования может служить теорема 2.1. Продемонстрируем это также на примере *t*-полуциклических *n*-арных групп, которые мы определим по аналогии с *t*-полуабелевыми *n*-арными группами, отталкиваясь от критерия *t*-полуабелевости *n*-арной группы, сформулированного в теореме 2.1.

Определение 4.1. Пусть $m - 1$ делит $n - 1$. *n*-Арная группа $\langle A, [] \rangle$ называется *t*-полуциклической, если существуют такие элементы $a_1, \dots, a_{m-1} \in A$, что группа ${}^m A$ является циклической с порождающим элементом $\theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$. Последовательность $a_1 \dots a_{m-1}$ в этом случае называется *порождающей* для *t*-полуциклической *n*-арной группы $\langle A, [] \rangle$.

Так как ${}^2 A = A^*$, то, согласно следствию 3.1, циклические *n*-арные группы – это в точности 2-полуциклические *n*-арные группы.

Так как ${}^n A = A_0$, то полуциклические *n*-арные группы – это в точности *n*-полуциклические *n*-арные группы.

Таким образом, циклические и полуциклические *n*-арные группы являются частными случаями *t*-полуциклических *n*-арных групп при $m = 2$ и $m = n$.

Имеет место

Предложение 4.1. Справедливы следующие утверждения:

- 1) всякая циклическая *n*-арная группа является *t*-полуциклической;
- 2) всякая *t*-полуциклическая *n*-арная группа является полуциклической;
- 3) всякая *t*-полуциклическая *n*-арная группа является *t*-полуабелевой.

Доказательство. 1) Если $\langle A, [] \rangle$ – циклическая *n*-арная группа, порождённая элементом a , то по теореме 3.1 группа ${}^m A$ является циклической, порождённой элементом $\theta_A(\underbrace{a \dots a}_{m-1})$. Тогда, согласно определению 4.1, $\langle A, [] \rangle$ – *t*-полуциклическая *n*-арная группа, порождённая последовательностью $\underbrace{a \dots a}_{m-1}$.

2) Следует из включения $A_0 \subseteq {}^m A$.

3) Следует из теоремы 2.1. Предложение доказано.

Пример 4.1. Пусть $\langle Z_2, [] \rangle$ – 7-арная группа, производная от циклической группы $Z_2 = \{1, a\}$ второго порядка с порождающим элементом a . Положим

$$u_i = \theta_A(\underbrace{1 \dots 1}_i), v_i = \theta_A(a \underbrace{1 \dots 1}_i), i = 1, \dots, 6.$$

Тогда: универсальная обертывающая группа Поста $Z_2^* = \{u_i, v_i \mid i = 1, \dots, 6\}$ имеет порядок 12 и является объединением множеств

$$Z_2^{(i)} = \{u_i, v_i\}, i = 1, \dots, 6;$$

подгруппа ${}^3 Z_2 = \{u_2, u_4, u_6, v_2, v_4, v_6\}$ группы Z_2^* имеет порядок 6 и является объединением множеств $Z_2^{(2)}, Z_2^{(4)}, Z_2^{(6)}$. Так как

$$v_2^2 = u_4, v_2^3 = v_6, v_2^4 = u_2, v_2^5 = v_4, v_2^6 = u_6,$$

то ${}^3 Z_2$ – циклическая группа с порождающим элементом $v_2 = \theta_A(a1)$. Следовательно, $\langle Z_2, [] \rangle$ – 3-полуциклическая 7-арная группа с порождающей последовательностью $a1$.

Так как

$$\underbrace{[1 \dots 1]}_7 = 1, \underbrace{[a \dots a]}_7 = a,$$

то 7-арная группа $\langle Z_2, [] \rangle$ не является циклической.

Пример 4.1 показывает, что в общем случае класс всех *t*-полуциклических *n*-арных групп шире класса всех циклических *n*-арных групп.

Пример 4.2. Пусть $B_3 = \{(12), (13), (23)\}$ – множество всех нечётных подстановок множества $\{1, 2, 3\}$, $\langle B_3, [] \rangle$ – 7-арная группа с 7-арной операцией, производной от операции в симметрической группе S_3 . Положим

$$u_i = \theta_A(\underbrace{(12) \dots (12)}_i), v_i = \theta_A(\underbrace{(13) (12) \dots (12)}_{i-1}),$$

$$w_i = \theta_A(\underbrace{(23) (12) \dots (12)}_{i-1}), i = 1, \dots, 6.$$

Тогда: универсальная обёртывающая группа Поста $B_3^* = \{u_i, v_i, w_i \mid i = 1, \dots, 6\}$ имеет порядок 18 и является объединением множеств $B_3^{(i)} = \{u_i, v_i, w_i\}$, $i = 1, \dots, 6$; подгруппа ${}^3B_3 = \{u_2, u_4, u_6, v_2, v_4, v_6, w_2, w_4, w_6\}$ группы B_3^* имеет порядок 9 и является объединением множеств $B_3^{(2)}$, $B_3^{(4)}$, $B_3^{(6)}$. Так как

$$\begin{aligned} u_2^2 &= u_4, u_2^3 = u_6, u_2^4 = u_2, \\ v_2^2 &= w_4, v_2^3 = u_6, v_2^4 = v_2, \end{aligned}$$

то $\{u_2, u_4, u_6\}$ и $\{v_2, w_4, u_6\}$ – две циклические подгруппы третьего порядка группы 3B_3 , которая по этой причине не является циклической. Следовательно, 7-арная группа $\langle B_3, [] \rangle$ не является 3-полуциклической. При этом $\langle B_3, [] \rangle$ как 7-арная группа простого порядка является полуциклической.

Пример 4.2 показывает, что в общем случае класс всех m -полуциклических n -арных групп уже класса всех полуциклических n -арных групп.

Критерий m -полуабелевости из замечания 2.1 наводит на мысль о существовании аналогичного критерия m -полуциклическости. Следующая теорема показывает, что это действительно так.

Теорема 4.1. *n -Арная группа $\langle A, [] \rangle$ является конечной (бесконечной) m -полуциклической с порождающей последовательностью $a_1 \dots a_{m-1}$ тогда и только тогда, когда $(k+1)$ -арная группа $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$ – конечная (бесконечная) циклическая, порожденная элементом $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$.*

Доказательство. Сразу же заметим, что множества A и $A^{(m-1)}$ равномощны.

Считаем вначале $\langle A, [] \rangle$ – конечная порядка γ .

Необходимость. Так как $\langle A, [] \rangle$ – m -полуциклическая n -арная группа с порождающей последовательностью $a_1 \dots a_{m-1}$, то $m-1$ делит $n-1$, а группа ${}^m A$ является циклической, порожденной элементом $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$.

Полагая в утверждении 1) леммы 3.1 $i = 1$, получим

$$A^{(m-1)} = \{v^{rk+1} \mid r = 0, 1, \dots, \gamma-1\}.$$

Для любого $r = 0, 1, \dots, \gamma-1$ имеем

$$\begin{aligned} v^{[0]} &= v, \\ v^{[r]} &= [\underbrace{v \dots v}_{rk+1}]_{k+1} = \\ &= [\underbrace{\theta_A(a_1 \dots a_{m-1}) \dots \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})}_{rk+1}]_{k+1} = \\ &= \theta_A(\underbrace{a_1 \dots a_{m-1} \dots a_1 \dots a_{m-1}}_{rk+1}) = \\ &= \underbrace{\theta_A(a_1 \dots a_{m-1}) \dots \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})}_{rk+1} = \\ &= (\theta_A(a_1 \dots a_{m-1}))^{rk+1} = v^{rk+1}, \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned} v^{[0]} &= v, v^{[1]} = v^{k+1}, \\ v^{[2]} &= v^{2k+1}, \dots, v^{[\gamma-1]} = v^{(\gamma-1)k+1}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

В правых частях равенств из (4.1) стоят степени элемента $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$, порождающего циклическую группу ${}^m A$. А так как порядки всех степеней в правых частях равенств из (4.1) не превосходят порядка γk группы ${}^m A$, то среди этих степеней нет одинаковых. Но тогда и среди стоящих в левых частях равенств из (4.1) полиадических степеней элемента $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$ $(k+1)$ -арной группы $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$ также нет одинаковых элементов. Таким образом, множество

$$\begin{aligned} A^{(m-1)} &= \{v, v^{k+1}, v^{2k+1}, \dots, v^{(\gamma-1)k+1}\} = \\ &= \{v^{[0]}, v^{[1]}, v^{[2]}, \dots, v^{[\gamma-1]}\} \end{aligned}$$

состоит из различных полиадических степеней элемента $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$. Следовательно, $(k+1)$ -арная группа $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$ является циклической, порожденной элементом $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$.

Достаточность. Так как $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$ – конечная циклическая $(k+1)$ -арная группа, порожденная элементом $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$, то

$$A^{(m-1)} = \{v^{[0]}, v^{[1]}, v^{[2]}, \dots, v^{[\gamma-1]}\},$$

откуда, ввиду (4.1), вытекает

$$A^{(m-1)} = \{v, v^{k+1}, v^{2k+1}, \dots, v^{(\gamma-1)k+1}\}.$$

Тогда, используя замечание 1.3, получим

$$A^{(i(m-1))} = A^{(m-1)} v^{i-1} = \{v^j, v^{k+i}, v^{2k+i}, \dots, v^{(\gamma-1)k+i}\}$$

для любого $i = 1, \dots, k$. Так как

$$\bigcup_{i=1}^k \{v^j, v^{k+i}, v^{2k+i}, \dots, v^{(\gamma-1)k+i}\} = \{v^s \mid s = 1, \dots, \gamma k\},$$

то из предыдущего равенства следует

$$\bigcup_{i=1}^k A^{(i(m-1))} = \{v^s \mid s = 1, \dots, \gamma k\}.$$

Следовательно, группа ${}^m A$ порождается элементом $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$. Соответственно, $\langle A, [] \rangle$ – конечная m -полуциклическая, порожденная последовательностью $a_1 \dots a_{m-1}$.

Считаем теперь n -арную группу $\langle A, [] \rangle$ бесконечной.

Необходимость. Снова ${}^m A$ – циклическая группа, порожденная элементом $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$.

Полагая в утверждении 2) леммы 4.1 $i = 1$, получим

$$A^{(m-1)} = \{\theta_A^{rk+i}(a_1 \dots a_{m-1}) \mid r - \text{целое}\}.$$

Так же, как и в конечном случае, получают равенства

$$v^{[0]} = v, v^{[1]} = v^{k+1}, v^{[2]} = v^{2k+1}, \dots, v^{[r]} = v^{rk+1}, \dots,$$

то есть $v^{[r]} = v^{rk+1}$ для любого целого $r \geq 0$.

Для целого $r < 0$ полиадическая степень $v^{[r]}$ элемента $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$ является решением уравнения $[x \underbrace{v \dots v}_{-rk}]_{k+1} = v$. Тогда последовательно

получаем

$$\begin{aligned} [v^{[r]} \underbrace{\theta_A(a_1 \dots a_{m-1}) \dots \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})}_{-rk}]_{k+1} &= \\ &= \theta_A(a_1 \dots a_{m-1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^{[r]} \underbrace{\theta_A(a_1 \dots a_{m-1}) \dots \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})}_{-rk} &= \\ &= \theta_A(a_1 \dots a_{m-1}), \\ v^{[r]} &= (\theta_A(a_1 \dots a_{m-1}))^{rk+1}, \end{aligned}$$

то есть $v^{[r]} = v^{rk+1}$ для любого целого $r < 0$.

Таким образом,

$$v^{[r]} = v^{rk+1}, \quad r - \text{целое.} \quad (4.2)$$

В правых частях равенств из (4.2) стоят степени элемента $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$, порождающего бесконечную циклическую группу ${}^m A$. Тогда среди стоящих в левых частях равенств из (4.2) полиадических степеней элемента $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$ нет одинаковых. Таким образом, множество

$$A^{(m-1)} = \{v^{rk+1} \mid r - \text{целое}\} = \{v^{[r]} \mid r - \text{целое}\}$$

состоит из различных полиадических степеней элемента $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$. Следовательно, $(k+1)$ -арная группа $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$ является бесконечной циклической, порождённой элементом $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$.

Достаточность Так как $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle -$ бесконечная циклическая $(k+1)$ -арная группа, порожденная элементом $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$, то

$$A^{(m-1)} = \{v^{[r]} \mid r - \text{целое}\},$$

откуда, ввиду (4.2), вытекает

$$A^{(m-1)} = \{v^{rk+1} \mid r - \text{целое}\}.$$

Тогда, используя замечание 1.3, получим

$$A^{(i(m-1))} = A^{(m-1)} v^{i-1} = \{v^{rk+i} \mid r - \text{целое}\}$$

для любого $i = 1, \dots, k$. Так как

$$\bigcup_{i=1}^k \{v^{rk+i} \mid r - \text{целое}\} = \{v^s \mid s - \text{целое}\},$$

то из предыдущего равенства следует

$$\bigcup_{i=1}^k A^{(i(m-1))} = \{v^s \mid s - \text{целое}\}.$$

Следовательно, бесконечная циклическая группа ${}^m A$ порождается элементом $v = \theta_A(a_1 \dots a_{m-1})$. Соответственно, $\langle A, [] \rangle -$ бесконечная t -полуциклическая, порожденная последовательностью $a_1 \dots a_{m-1}$. Теорема доказана.

Полагая в теореме 4.1 $m = 2$, получим

Следствие 4.1. *n -Арная группа $\langle A, [] \rangle$ является конечной (бесконечной) циклической, порожденной элементом a , тогда и только тогда, когда n -арная группа $\langle A', []_n \rangle$ из замечания 0.1 - конечная (бесконечная) циклическая, порожденная элементом $\theta_A(a)$.*

Заметим, что следствие 4.1 является также следствием изоморфизма $\varphi: a \rightarrow \theta_A(a)$ n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ на n -арную группу $\langle A', []_n \rangle$.

Полагая в теореме 4.1 $m = n$, получим

Следствие 4.2. *n -Арная группа $\langle A, [] \rangle$ является конечной (бесконечной) полуциклической, порожденной последовательностью $a_1 \dots a_{n-1}$, тогда и только тогда, когда группа $A_0 -$ конечная (бесконечная) циклическая, порожденная элементом $\theta_A(a_1 \dots a_{n-1})$.*

Как видим, следствие 4.2 равносильно определению t -полуциклической n -арной группы.

Замечание 4.1. Если полуциклическая n -арная группа порождается последовательностью $\underbrace{a \dots a}_{n-1}$, то по следствию 3.2 она является циклической, порожденной элементом a .

Приведём ещё один критерий t -полуциклическости n -арной группы. Для этого зафиксируем в n -арной группе $\langle A, [] \rangle$, где $n = k(m-1) + 1$, элементы c_1, \dots, c_{m-2} и определим на A $(k+1)$ -арную операцию $[]_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}}$ следующим образом:

$$[a_1 a_2 \dots a_{k+1}]_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}} =$$

$$= [a_1 c_1 \dots c_{m-2} a_2 c_1 \dots c_{m-2} \dots a_k c_1 \dots c_{m-2} a_{k+1}].$$

Проведя соответствующие вычисления (см., например, [2]), можно убедиться в том, что $\langle A, []_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}} \rangle - (k+1)$ -арная группа. Этот результат может быть получен и как следствие изоморфизма из следующей леммы.

Лемма 4.1. Пусть $n = k(m-1) + 1$, $\langle A, [] \rangle - n$ -арная группа, $c_1, \dots, c_{m-2} \in A$. Тогда $(k+1)$ -арные группы $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$ и $\langle A, []_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}} \rangle$ изоморфны.

Доказательство. Определим отображение $\tau: A^{(m-1)} \rightarrow A$ по правилу

$$\tau: \theta_A(a c_1 \dots c_{m-2}) \rightarrow a.$$

Ясно, что $\tau -$ биекция $A^{(m-1)}$ на A .

Для любых

$$\theta_A(a_1 c_1 \dots c_{m-2}), \dots, \theta_A(a_{k+1} c_1 \dots c_{m-2}) \in A^{(m-1)}$$

имеем

$$\begin{aligned} \tau([\theta_A(a_1 c_1 \dots c_{m-2}) \dots \theta_A(a_{k+1} c_1 \dots c_{m-2})]_{k+1}) &= \\ = \tau(\theta_A([a_1 c_1 \dots c_{m-2} \dots a_k c_1 \dots c_{m-2} a_{k+1}] c_1 \dots c_{m-2})) &= \\ = [a_1 c_1 \dots c_{m-2} \dots a_k c_1 \dots c_{m-2} a_{k+1}] &= \\ = [a_1 a_2 \dots a_{k+1}]_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}} &= \\ = [\tau(\theta_A(a_1 c_1 \dots c_{m-2})) \tau(\theta_A(a_2 c_1 \dots c_{m-2})) \dots & \\ \dots \tau(\theta_A(a_{k+1} c_1 \dots c_{m-2}))]_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}}, & \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned} \tau([\theta_A(a_1 c_1 \dots c_{m-2}) \dots \theta_A(a_{k+1} c_1 \dots c_{m-2})]_{k+1}) &= \\ = [\tau(\theta_A(a_1 c_1 \dots c_{m-2})) \dots & \\ \dots \tau(\theta_A(a_{k+1} c_1 \dots c_{m-2}))]_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}}. & \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 4.1 и лемма 4.1 позволяют сформулировать следующий критерий t -полуциклическости n -арной группы.

Теорема 4.2. Пусть $n = k(m-1) + 1$, $\langle A, [] \rangle - n$ -арная группа. Тогда:

1) если $\langle A, [] \rangle - t$ -полуциклическая с порождающей последовательностью $a_1 \dots a_{m-1}$, то для любых $c_1, \dots, c_{m-2} \in A$ $(k+1)$ -арная группа $\langle A, []_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}} \rangle -$ циклическая с порождающим элементом a , который однозначно

определяется из условия

$$\theta_A(a_1 \dots a_{m-1}) = \theta_A(ac_1 \dots c_{m-2});$$

2) если для некоторых $c_1, \dots, c_{m-2} \in A$ $(k+1)$ -арная группа $\langle A, []_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}} \rangle$ – циклическая с порождающим элементом a , то $\langle A, [] \rangle$ – m -полуциклическая с порождающей последовательностью $ac_1 \dots c_{m-2}$.

При $m=2$ оба утверждения теоремы 4.2 тривиальны.

Полагая в теореме 4.2 $m=n$, получим

Следствие 4.3. Пусть $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа. Тогда:

1) если $\langle A, [] \rangle$ – полуциклическая с порождающей последовательностью $a_1 \dots a_{n-1}$, то для любых $c_1, \dots, c_{n-2} \in A$ группа $\langle A, []_{2, c_1 \dots c_{n-2}} \rangle$ – циклическая с порождающим элементом a , который однозначно определяется из условия $\theta_A(a_1 \dots a_{n-1}) = \theta_A(ac_1 \dots c_{n-2})$;

2) если для некоторых $c_1, \dots, c_{n-2} \in A$ группа $\langle A, []_{2, c_1 \dots c_{n-2}} \rangle$ – циклическая с порождающим элементом a , то n -арная группа $\langle A, [] \rangle$ – полуциклическая с порождающей последовательностью $ac_1 \dots c_{n-2}$.

Замечание 4.2. Для обозначения операции $[]_{2, c_1 \dots c_{n-2}}$ используется также любой из символов \odot или \circ_c из теоремы Поста – Глускина – Хоссу [2], [9], где $cc_1 \dots c_{n-2}$ – нейтральная последовательность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
2. Гальмак, А.М. n -Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.
3. Гальмак, А.М. К теореме Поста о смежных классах / А.М. Гальмак, Н.А. Щучкин // XI Междунар конф. «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения»: тез. докл., Саратов, 10–16 сент. 2012. – С. 39–40.
4. Артамонов, В.А. Свободные n -группы / В.А. Артамонов // Мат. заметки. – 1970. – Т. 8, № 4. – С. 499–507.
5. Артамонов, В.А. О шрайеровых многообразиях n -групп и n -полугрупп / В.А. Артамонов // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – 1979. – Вып. 5. – С. 193–202.
6. Русаков, С.А. Алгебраические n -арные системы / С.А. Русаков. – Мн. : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
7. Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
8. Щучкин, Н.А. Полуциклические n -арные группы / Н.А. Щучкин // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2009. – № 3 (54). – С. 186–194.
9. Гальмак, А.М. О теореме Поста – Глускина – Хоссу / А.М. Гальмак, Г.Н. Воробьев // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (14). – С. 55–60.

Поступила в редакцию 10.07.13.

УДК 512.542

**ПРОИЗВОДНАЯ π -ДЛИНА π -РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ,
СИЛОВСКИЕ p -ПОДГРУППЫ КОТОРОЙ ЛИБО БИЦИКЛИЧЕСКИЕ,
ЛИБО ИМЕЮТ ПОРЯДОК p^3**

Д.В. Грицук

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

**DERIVED π -LENGTH OF A π -SOLVABLE GROUP
IN WHICH THE SYLOW p -SUBGROUPS ARE EITHER BICYCLIC
OR OF ORDER p^3**

D.V. Gritsuk

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Бициклической называют группу, являющуюся произведением двух циклических подгрупп. Доказывается, что производная π -длина конечной π -разрешимой группы, силовские p -подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок p^3 для всех $p \in \pi$ не превышает 7, а в случае, когда $2 \notin \pi$ не превышает 4.

Ключевые слова: конечная группа, π -разрешимая группа, бициклическая группа, силовская подгруппа, производная π -длина.

The group is called a bicyclic group if it is the product of two cyclic subgroups. It is proved that the derived π -length of the π -solvable groups in which the Sylow p -subgroups are either bicyclic or of order p^3 for any $p \in \pi$ is at most 7 and if $2 \notin \pi$ then the derived π -length is at most 4.

Keywords: finite group, π -solvable group, bicyclic group, Sylow subgroup, derived π -length.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все используемые понятия и обозначения соответствуют [1], [2].

Бициклической называют группу, являющуюся произведением двух циклических подгрупп. Бициклическая p -группа при нечетном p является метациклической, т.е. содержит нормальную циклическую подгруппу, факторгруппа по которой циклическая. Бициклическая 2-группа может быть не метациклической [2]. Инварианты (производная длина, нильпотентная длина, p -длина, ранг и т.д.) разрешимых групп с бициклическими силовскими подгруппами получены в [3]. В частности, производная длина таких групп не превышает 6, а нильпотентная длина не превышает 4. Разрешимые группы, обладающие нормальным рядом с бициклическими силовскими подгруппами в факторах, изучены в [4].

В.С. Монахов предложил новое понятие производной π -длины π -разрешимой группы [5]. Пусть G – π -разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots \supseteq G_{n-1} \supseteq G_n = 1, \quad (0.1)$$

факторы G_i / G_{i+1} которого являются либо π' -группами, либо абелевыми π -группами. Наименьшее

число абелевых π -факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется производной π -длиной π -разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^a(G)$. Ясно, что в случае, когда $\pi = \pi(G)$ значение $l_\pi^a(G)$ совпадает со значением производной длины группы G . Начальные свойства производной π -длины и некоторые результаты, связанные с этим понятием, установлены в работах [5]–[8].

В настоящей заметке исследуется производная π -длина π -разрешимой группы, силовские p -подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок p^3 . Доказывается, что в этом случае $l_\pi^a(G) \leq 7$, а если $2 \notin \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq 4$.

1 Используемые понятия

Пусть \mathbb{P} – множество всех простых чисел, а π – некоторое подмножество из \mathbb{P} . Дополнение к π во множестве \mathbb{P} обозначается через π' . Символом π обозначается также функция, определенная на множестве всех натуральных чисел \mathbb{N} следующим образом: $\pi(a)$ – множество простых чисел, делящих натуральное число a . Для группы G и ее подгруппы H считаем, что $\pi(G) = \pi(|G|)$ и $\pi(G:H) = \pi(|G:H|)$.

Зафиксируем множество простых чисел π . Если $\pi(m) \subseteq \pi$, то натуральное число m называется π -числом. Группа G называется π -группой, если $\pi(G) \subseteq \pi$, и π' -группой, если $\pi(G) \subseteq \pi'$. В последнем случае $\pi(G) \cap \pi = \emptyset$.

Цепочку подгрупп (0.1) называют субнормальным рядом группы G , если подгруппа G_{i+1} нормальна в G_i для каждого i . Фактор-группы G_i / G_{i+1} называют факторами ряда (0.1).

Группа называется π -разрешимой, если она обладает субнормальным рядом (0.1), факторы которого являются либо разрешимыми π -группами, либо π' -группами. Наименьшее число π -факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется π -длиной π -разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi(G)$.

Поскольку π -факторы субнормального ряда (0.1) π -разрешимой группы G разрешимы, то каждая π -разрешимая группа обладает субнормальным рядом, у которого все π -факторы нильпотентны. Наименьшее число нильпотентных π -факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется нильпотентной π -длиной π -разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^n(G)$. Если множество $\pi = \{p\}$ состоит из одного простого числа, то, очевидно, $l_\pi(G) = l_\pi^n(G) = l_p(G)$ для каждой π -разрешимой группы. Равенство $l_\pi(G) = l_\pi^n(G)$ сохраняется также у π -разрешимой группы с нильпотентной π -холловой подгруппой.

Пусть G – группа. Рассмотрим цепочку подгрупп группы G :

$$1 = F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots \subseteq F_t \subseteq \dots,$$

где $F_{i+1} / F_i = F(G / F_i)$. Здесь $F(X)$ подгруппа Фиттинга группы X . Если G разрешима, то существует натуральное число k такое, что $F_k = G$. Наименьшее натуральное число с таким свойством называют нильпотентной длиной группы G и обозначают через $n(G)$.

Производной длиной группы G называют наименьшее натуральное число m , для которого выполняется равенство $G^{(m)} = 1$, и обозначают через $d(G)$. Здесь G' – коммутант группы G и $G^{(i)} = (G^{(i-1)})'$.

Если G – неединичная p -разрешимая группа и p^n – наибольшая из степеней простого числа p , делящая порядок главных факторов группы G , то число $n = r_p(G)$ называется p -рангом группы G .

2 Вспомогательные леммы

Для доказательства теоремы понадобятся следующие леммы.

Лемма 2.1 [5]. Пусть G – π -разрешимая группа. Тогда:

1) если H – подгруппа группы G , то

$$l_\pi^a(H) \leq l_\pi^a(G);$$

2) если N – нормальная подгруппа группы G , то

$$l_\pi^a(G/N) \leq l_\pi^a(G), l_\pi^a(G) \leq l_\pi^a(G/N) + l_\pi^a(N);$$

3) если N – нормальная π' -подгруппа группы G , то $l_\pi^a(G/N) = l_\pi^a(G)$;

4) если G и V – π -разрешимые группы, то $l_\pi^a(G \times V) = \max\{l_\pi^a(G), l_\pi^a(V)\}$;

5) если N_1 и N_2 – нормальные подгруппы в G , то

$$l_\pi^a(G / (N_1 \cap N_2)) \leq \max\{l_\pi^a(G / N_1), l_\pi^a(G / N_2)\}.$$

Через G_π обозначается π -холлова подгруппа группы G .

Лемма 2.2 [5]. Если G – π -разрешимая группа, то $d(G_\pi) \leq l_\pi^a(G) \leq l_\pi(G)d(G_\pi)$.

Лемма 2.3 [7]. Если G – π -разрешимая группа и $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$, $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$, то

$$l_\pi(G) \leq l_{\pi_1}(G) + l_{\pi_2}(G).$$

Лемма 2.4 [9]. Пусть G – p -разрешимая группа. Если $l_p(G) = r_p(G)$, то либо $r_p(G) = 1$, либо $r_p(G) = 2$ и $p \in \{2, 3\}$. В частности, если $r_p(G) \geq 3$, то $l_p(G) \leq r_p(G) - 1$.

Лемма 2.5. Пусть G – p -разрешимая группа, а G_p – ее силовская p -подгруппа. Тогда:

1) если G_p имеет порядок p или p^2 , то $l_p^a(G) \leq 1$;

2) если G_p имеет порядок p^3 , то $l_p^a(G) \leq 2$ для всех p и $l_p(G) \leq 1$ для $p > 3$;

3) если G_p имеет порядок p^4 , то $l_p^a(G) \leq 2$ для $p \geq 5$ и $l_p^a(G) \leq 3$ для $p \in \{2, 3\}$. Кроме того, $l_p(G) \leq 2$ для всех p .

Доказательство. 1. Так как силовская p -подгруппа G_p имеет порядок p или p^2 , то G_p является абелевой. Поэтому по [2, VI.6.6] $l_p(G) \leq 1$. Применяя лемму 2.2, получаем $l_p^a(G) \leq 1$.

2. Если G_p абелева, то $l_p(G) \leq 1$ по [2, III.6.6]. Если G_p неабелева, то она изоморфна по [2, I.14.10] либо метациклической группе

$$M_3(p) = \langle a, b \mid a^{p^2} = b^p = 1, a^b = a^{1+p} \rangle = [\langle a \rangle] \langle b \rangle,$$

Либо группе экспоненты p . В любом случае

$l_p(G) \leq 2$ для любого p по [2, VI.6.6 b)]. Из [3, лемма 2] для метациклической группы имеем, что $l_p(G) \leq 1$ при $p > 2$. Пусть G_p является группой экспоненты p и $l_p(G) = 2$. По [2, III.10.2] подгруппа G_p регулярна. Так как G_p неабелева, то $p > 2$ и p – простое число Ферма по [10, IX.4.8. b)]. Теперь из [10, IX.5.5 b)] вытекает, что $p > 3$.

При $l_p(G) = 1$ из леммы 2.2 получаем, что $l_p^a(G) \leq 2$. Пусть $l_p(G) = 2$. Тогда существует (p', p) -ряд, в котором точно два p -фактора. Так как $|P| = p^3$, то порядки этих p -факторов не превышают p^2 и, следовательно, они абелевы. Поэтому $l_p^a(G) \leq 2$.

3. Пусть G_p – силовская p -подгруппа, $r_p(G)$ – p -ранг группы G . Если $r_p(G) = 4$, то G_p абелева и $l_p^a(G) \leq 1$.

Пусть $r_p(G) = 3$. Тогда у главного ряда группы G точно два p -фактора: один имеет порядок p^3 , другой – p . Так как главные p -факторы абелевы, то $l_p^a(G) \leq 2$.

Пусть $r_p(G) = 2$. Тогда порядки главных p -факторов могут располагаться в следующих последовательностях:

$$(p, p, p^2); (p, p^2, p); (p^2, p, p); (p^2, p^2).$$

Для последовательностей (p, p, p^2) , (p^2, p, p) и (p^2, p^2) группа G содержит нормальную подгруппу K такую, что силовские p -подгруппы в K и G/K имеют порядки p^2 . По первому пункту доказываемой леммы $l_p^a(K) \leq 1$ и $l_p^a(G/K) \leq 1$, а из леммы 2.1 следует $l_p^a(G) \leq 2$.

Остается рассмотреть последовательность (p, p^2, p) . Если $l_p(G) = 1$, то $l_p^a(G) \leq 2$ по лемме 2.2 поскольку $d(G_p) \leq 2$ [2, III.7.2.(d)]. Пусть $l_p(G) > 1$. Так как $l_p(G) \leq r_p(G) = 2$, то $l_p(G) = r_p(G) = 2$ и $p \in \{2, 3\}$ по лемме 2.4. Силовская p -подгруппа в $O_{p', p, p', p}(G)$ имеет порядок p^3 и $l_p^a(O_{p', p, p', p}(G)) \leq 2$ по второму пункту доказываемой леммы. Силовская p -подгруппа в фактор-группе $G/O_{p', p, p', p}(G)$ имеет порядок p , поэтому $l_p^a(G/O_{p', p, p', p}(G)) \leq 1$. Теперь $l_p^a(G) \leq 3$ по лемме 2.1(2). Лемма доказана.

Лемма 2.6 [5]. Пусть G – π -разрешимая группа, G_π – ее π -холлова подгруппа. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если G_π абелева, то $l_\pi^a(G) \leq 1$;

2) если $2 \notin \pi$ и G_π метабелева, то $l_\pi^a(G) \leq 3$.

Лемма 2.7 Пусть G – p -разрешимая группа с бициклической силовской p -подгруппой. Тогда:

1) если $p > 2$, то $l_p(G) \leq 1$ и $l_p^a(G) \leq 2$;

2) если $p = 2$, то $l_2^a(G) \leq 3$ и $G/O_{2', 2}(G)$ либо имеет нечетный порядок, либо изоморфна S_3 ; в частности, $l_2(G) \leq 2$.

Доказательство. По условию в группе G силовская p -подгруппа G_p бициклическая, поэтому подгруппа $(G_p)'$ абелева [1, 1.9] и $d(G_p) \leq 2$. Если $l_p(G) \leq 1$, то $l_p^a(G) \leq 2$ по лемме 2.6. Пусть $l_p(G) > 1$. Тогда по лемме из работы [3] число $p = 2$ и $G/O_{2', 2}(G)$ изоморфна симметрической группе S_3 . Из леммы 2.6 следует, что $l_2^a(G/O_{2', 2}(G)) \leq 1$. Поскольку $l_2(O_{2', 2}(G)) \leq 1$ и силовская 2-подгруппа из $O_{2', 2}(G)$ имеет абелевый коммутант, то $l_2^a(O_{2', 2}(G)) \leq 2$ по лемме 2.2. Теперь из леммы 2.1 (2) получаем, что $l_2^a(G) \leq 3$. Лемма доказана.

Лемма 2.8 Пусть H – неприводимая подгруппа нечетного порядка группы $GL(n, p)$. Тогда:

1) если $n = 2$, то подгруппа H циклическая и $|H|$ делит $p^2 - 1$;

2) если $n = 3$, то подгруппа H метабелева.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из [2, лемма VI.8.1], второе – из [11, теорема 4B].

Лемма 2.9 Если G – неединичная π -разрешимая группа и $O_\pi(G) = 1$, то $\Phi(G)$ – собственная подгруппа в $F(G)$.

Доказательство. Пусть G – неединичная π -разрешимая группа, $O_\pi(G) = 1$ и $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини. Тогда фактор-группа $G/\Phi(G)$ – неединичная π -разрешимая группа. Пусть $N/\Phi(G)$ – минимальная нормальная подгруппа в фактор-группе $G/\Phi(G)$. Известно, что в этом случае $N/\Phi(G)$ либо элементарная абелева p -группа, либо π' -группа.

Если $N/\Phi(G)$ – элементарная абелева p -группа, то $N/\Phi(G)$ нильпотентна и, следовательно, N – нильпотентная группа по теореме Гашюца [1, Теорема 3.24]. Отсюда, $N \leq F(G)$ и лемма доказана. Если $N/\Phi(G)$ – π' -группа, то $N = [\Phi(G)]K$ по [2, 1.18.1]. Теперь по лемме Фраттини [1, лемма 1.66]

$$G = N_G(K)N = N_G(K)\Phi(G) = N_G(K),$$

следовательно, K нормальна в G и $K \leq O_\pi(G) = 1$, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2.10 Пусть G – p -замкнутая группа нечетного порядка, а ее силовская p -подгруппа G_p является группой порядка p^3 или бициклической. Если $\Phi(G)=1$ и $C_G(G_p) \subseteq G_p$, то G_p – метабелева группа.

Доказательство. Поскольку G – разрешимая p -замкнутая группа, $\Phi(G)=1$ и $C_G(G_p) \subseteq G_p$, то $F(G)=G_p$ и $G=[G_p]G_{p'}$. Так как G_p нормальна в G , то $\Phi(G_p) \subseteq \Phi(G)=1$ и G_p элементарная абелева порядка не выше p^3 .

Если $F(G)$ – минимальная нормальная подгруппа группы G , то подгруппа G_p действует неприводимо на $F(G)$ и G_p метабелева по лемме 2.8.

Пусть теперь $F(G)$ не является минимальной нормальной подгруппой группы G . Тогда по [1, теорема 4.24] $F(G)$ будет прямым произведением минимальных нормальных подгрупп группы G . Прямые сомножители будут элементарными абелевыми подгруппами порядка p или p^2 и их не более трех. Пусть F_i – прямой сомножитель подгруппы $F(G)$, $i \leq 3$. Если $|F_i|=p$, то фактор-группа $G/C_G(F_i)$ циклическая. Если $|F_i|=p^2$, то по лемме 2.8 фактор-группа $G/C_G(F_i)$ циклическая. По [1, лемма 2.33] фактор-группа

$$G/\bigcap_{i \leq 3} C_G(F_i)$$

абелева. Так как

$$\bigcap_{i \leq 3} C_G(F_i) \subseteq C_G(F(G)) = F(G),$$

то G_p абелева. Лемма доказана.

Лемма 2.11 Пусть G – p -замкнутая группа нечетного порядка, а ее силовская p -подгруппа G_p является группой порядка p^2 или циклической группой. Если $C_G(G_p) \subseteq G_p$, то G_p – абелева группа.

Доказательство. Если G_p – циклическая группа, то G_p – абелева, как ее группа автоморфизмов [1, теорема 2.16]. Если G_p нециклическая, то она элементарная абелева группа порядка p^2 и повторяя рассуждения из доказательства леммы 2.10 получаем, что G_p абелева. Лемма доказана.

3 Оценка производной π -длины

Теорема 3.1 Пусть G – π -разрешимая группа, силовские p -подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок p^3 для всех $p \in \pi$. Тогда:

1) если $2 \notin \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq 4$;

2) если $2 \in \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq 7$.

Доказательство. 1. Воспользуемся индукцией по порядку группы G . По лемме 2.1 (3) можно считать, что $O_{\pi'}(G)=1$. Покажем, что в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа. Допустим противное. Пусть N_1 и N_2 – две минимальные нормальные подгруппы группы G . Так как $|G/N_i| < |G|$, $i=1,2$, то по предположению индукции $l_\pi^a(G/N_i) \leq 4$. По лемме 2.1(5) $l_\pi^a(G) \leq 4$. Итак, в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N .

Так как группа G π -разрешима и $O_{\pi'}(G)=1$, то $O_\pi(G) \neq 1$. Подгруппа $O_\pi(G)$ разрешима и неединична, поэтому ее подгруппа Фиттинга $F(O_\pi(G))$ отлична от единичной подгруппы и, очевидно,

$$F(O_\pi(G)) \subseteq F(G).$$

Из того, что $O_{\pi'}(G)=1$ следует, что $F(G)$ является π -подгруппой, поэтому

$$F(G) \subseteq F(O_\pi(G)), F(G) = F(O_\pi(G)).$$

Так как подгруппа $F(G)$ нильпотентна и в группе G минимальная нормальная подгруппа единственна, то

$$F(G) = F(O_\pi(G)) = O_p(G)$$

для некоторого простого $p \in \pi$.

Если $O_{p'}(G) \neq 1$, то в группе G будут существовать две различные минимальные нормальные подгруппы: p -подгруппа из $O_p(G)$ и p' -подгруппа из $O_{p'}(G)$. Имеем противоречие. Поэтому $O_{p'}(G)=1$ и

$$C_G(O_p(G)) \leq O_p(G), C_G(F(G)) \leq F(G).$$

Возможны два случая.

Случай 1: $F(G)=G_p$. По лемме 2.9 $\Phi(G)$ – собственная подгруппа в G_p , а по [1, лемма 4.2] $F(G/\Phi(G)) = G_p/\Phi(G)$. Из [12] следует, что

$$G_p \cap \Phi(G) = \Phi(G_p) = G_p \cap \Phi(G_\pi).$$

Так как $C_G(F(G)) \leq F(G)$, то $\Phi(G_\pi)$ – p -группа и $\Phi(G) = \Phi(G_p) = \Phi(G_\pi)$.

Если G_p бициклическая, то $G_p/\Phi(G)$ – элементарная абелева группа порядка p или p^2 . Если G_p небициклическая, то $G_p/\Phi(G)$ – элементарная абелева группа порядка p^2 или p^3 . Таким образом подгруппа $G_p/\Phi(G)$ – элементарная абелева группа порядка не выше p^3 . В любом случае $d(G_p) \leq 2$.

Если $|G_p / \Phi(G)| = p^3$, то $\Phi(G) = 1$ и подгруппа G_p – абелева. Из леммы 2.10 следует, что группа G_π / G_p является метабелевой. Тогда по лемме 2.6 $l_\pi^a(G / G_p) \leq 3$. Так как G_p абелева, то $l_\pi^a(G) \leq 4$ по лемме 2.1 (2). Если $G_p / \Phi(G)$ имеет порядок p или p^2 , то по лемме 2.11 группа G_π / G_p является абелевой группой. По лемме 2.6 $l_\pi^a(G / G_p) \leq 1$. Так как $d(G_p) \leq 2$, то по лемме 2.1 (2) получаем $l_\pi^a(G) \leq 3$.

Случай 2: $F(G) \subset G_p$. Если G_p – бициклическая группа, то по лемме 2.7 $l_p(G) \leq 1$. Так как $O_p(G) = 1$, то $F(G) = G_p$, противоречие. Пусть $|G_p| = p^3$. Тогда порядок $F(G)$ равен либо p либо p^2 . Если $|F(G)| = p$, то $G / F(G)$ абелева, как группа автоморфизмов циклической группы $F(G)$. Поэтому по лемме 2.6 (1) $l_\pi^a(G / F(G)) \leq 1$ и по лемме 2.1(2) получаем $l_\pi^a(G) \leq 2$. Если $|F(G)| = p^2$, то либо $F(G)$ – циклическая группа порядка p^2 , либо $F(G)$ является прямым произведением двух циклических групп порядка p . Если $F(G)$ – циклическая группа, то $G / F(G)$ абелева, как группа автоморфизмов циклической группы $F(G)$. Поэтому $l_\pi^a(G / F(G)) \leq 1$ и $l_\pi^a(G) \leq 2$ по лемме 2.1 (2). Пусть $F(G)$ является прямым произведением двух циклических групп порядка p . Так как $|F(G)| = p^2$ и $|G_p| = p^3$, то $l_p(G) > 1$. Поэтому из леммы 2.5 следует, что $p = 3$. Тогда фактор-группа $G / F(G)$ изоморфна подгруппе группы $GL(2, 3)$ порядка $2^4 \cdot 3$. Так как $2 \notin \pi$, то $\pi = \{3\}$ и $|G_\pi| = 3^3$. Тогда по лемме 2.5 $l_\pi^a(G) = l_p^a(G) \leq 2$.

2. Пусть $\pi_1 = \pi / \{2\}$. Тогда по лемме 2.3 $l_\pi^a(G) \leq l_{\pi_1}^a(G) + l_2^a(G)$. По первому пункту доказываемой теоремы $l_{\pi_1}^a(G) \leq 4$, а $l_2^a(G) \leq 3$ либо по лемме 2.5 (2), либо по лемме 2.7. Поэтому $l_\pi^a(G) \leq 7$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / В. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York. – 1967.
3. Монахов, В.С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В.С. Монахов, Е.Е. Грибовская // Математические заметки – 2001. – Том 70, № 4. – С. 603–612.
4. Monakhov, V.S. On a finite group having a normal series whose factors have bicyclic Sylow subgroups / V.S. Monakhov, A.A. Trofimuk // Communications in Algebra. – 2011. – Vol. 39, № 9. – P. 3178–3186.
5. Грицук, Д.В. О производной π -длине π -разрешимой группы / Д.В. Грицук, В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Вестник БГУ. Серия 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.
6. Грицук, Д.В. О конечных π -разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами / Д.В. Грицук, В.С. Монахов, О.А. Шпырко // Проблемы математики, физики и техники. – 2013. – №1 (14). – С. 61–66.
7. Грицук, Д.В. О разрешимых группах, силовские подгруппы которых абелевы или экстраспециальные / Д.В. Грицук, В.С. Монахов // Труды института математики НАН Беларуси. – 2012. – Т. 20, № 2. – С. 3–9.
8. Монахов, В.С. О производной π -длине конечной π -разрешимой группы с заданной π -холовой подгруппой / В.С. Монахов, Д.В. Грицук // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 18, № 3. – С. 215–223.
9. Монахов, В.С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сибирский математический журнал. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.
10. Huppert, B. Finite Groups II / В. Huppert, N. Blackburn. – Berlin, Heidelberg, New York. – 1982.
11. Palfy, P.P. Bounds for liner groups of odd order / P.P. Palfy // Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser. 2. – 1990. – Vol. 39, Suppl. 23. – P. 253–263.
12. Baer, R. Supersoluble immersion / R. Baer // Canad. J. Math. – 1959. – № 11. – P. 353–369.

Поступила в редакцию 11.02.14.

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, ВСЕ n -МАКСИМАЛЬНЫЕ ($n = 2, 3$) ПОДГРУППЫ КОТОРЫХ K - \mathcal{U} -СУБНОРМАЛЬНЫ

В.А. Ковалева¹, Сяолан Йи²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

²Чжэцзянский Научно-Технический университет, Ханчжоу, Китай

FINITE GROUPS WITH ALL n -MAXIMAL ($n = 2, 3$) SUBGROUPS K - \mathcal{U} -SUBNORMAL

V.A. Kovaleva¹, Xiaolan Yi²

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel

²Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou, China

Приведена полная классификация конечных групп, все n -максимальные ($n = 2, 3$) подгруппы которых являются K - \mathcal{U} -субнормальными.

Ключевые слова: n -максимальная подгруппа, K - \mathcal{U} -субнормальная подгруппа, \mathcal{U} -субнормальная подгруппа, сверхразрешимая группа, минимальная несверхразрешимая группа, SDH-группа.

A full classification of finite groups with all n -maximal ($n = 2, 3$) subgroups K - \mathcal{U} -subnormal is given.

Keywords: n -maximal subgroup, K - \mathcal{U} -subnormal subgroup, \mathcal{U} -subnormal subgroup, supersoluble group, minimal nonsupersoluble group, SDH-group.

Introduction

Throughout this paper, all groups are finite and G always denotes a finite group. We use \mathcal{U} to denote the class of all supersoluble groups; $G^{\mathcal{U}}$ denotes the intersection of all normal subgroups N of G with $G/N \in \mathcal{U}$. The symbol $\pi(G)$ denotes the set of prime divisors of the order of G .

A subgroup H of G is called a *2-maximal* (*second maximal*) subgroup of G whenever H is a maximal subgroup of some maximal subgroup M of G . Similarly we can define *3-maximal subgroups*, and so on. If H is n -maximal in G but not n -maximal in any proper subgroup of G , then H is said to be a *strictly n -maximal* subgroup of G .

One of the interesting and substantial direction in finite group theory consists in studying the relations between the structure of the group and its n -maximal subgroups. The earliest publications in this direction are the articles of L. Rédei [1] and B. Huppert [2]. L. Rédei described the nonsoluble groups with abelian two maximal subgroups. B. Huppert established the supersolubility of G whose all second maximal subgroups are normal. In the same article Huppert proved that if all 3-maximal subgroups of G are normal in G , then the commutator subgroup G' of G is nilpotent and the chief rank of G is at most 2. These results were developed by many authors. In particular, L.Ja. Poljakov [3] proved that G is supersoluble if every 2-maximal subgroup of G is permutable with every maximal

subgroup of G . He also established the solubility of G in the case when every maximal subgroup of G permutes with every 3-maximal subgroups of G . Some later, R.K. Agrawal [4] proved that G is supersoluble if any 2-maximal subgroup of G is permutable with every Sylow subgroup of G . In [5], Z. Janko described the groups whose 4-maximal subgroups are normal. A description of nonsoluble groups with all 2-maximal subgroups nilpotent was obtained by M. Suzuki [6] and Z. Janko [7]. In [8], T.M. Gagen and Z. Janko gave a description of simple groups whose 3-maximal subgroups are nilpotent. V.A. Belonogov [9] studied those groups in which every 2-maximal subgroup is nilpotent. Continuing this, V.N. Semenchuk [10] obtained a description of soluble groups whose all 2-maximal subgroups are supersoluble. A. Mann [11] studied the structure of the groups whose n -maximal subgroups are subnormal. He proved that if all n -maximal subgroups of a soluble group G are subnormal and $|\pi(G)| \geq n+1$, then G is nilpotent; but if $|\pi(G)| \geq n-1$, then G is φ -dispersive for some ordering φ of the set of all primes. Finally, in the case $|\pi(G)| = n$, Mann described G completely. A.E. Spencer [12] studied groups in which every n -maximal chain contains subnormal subgroup. In particular, Spencer proved that G is a Schmidt group with abelian Sylow subgroups if every 2-maximal chain of G contains subnormal subgroup. In [13], M. Asaad studied groups whose strictly

n -maximal subgroups are normal. P. Flavell [14] obtained an upper bound for the number of maximal subgroups containing a strictly 2-maximal subgroup and classify the extremal examples.

Among the recent results on n -maximal subgroups we can mention the paper of X.Y. Guo and K.P. Shum [15]. In this paper the authors proved that G is soluble if all its 2-maximal subgroups enjoy the cover-avoidance property. W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba and Li Baojun [16,17,18] gave new characterizations of supersoluble groups in terms of 2-maximal subgroups. Li Shirong [19] obtained a classification of nonnilpotent groups whose all 2-maximal subgroups are TI -subgroups. In the paper [20], W. Guo, H.V. Legchekova and A.N. Skiba described the groups whose every 3-maximal subgroup permutes with all maximal subgroups. In [21], W. Guo, Yu.V. Lutsenko and A.N. Skiba gave a description of nonnilpotent groups in which every two 3-maximal subgroups are permutable. Yu.V. Lutsenko and A.N. Skiba [22] obtained a description of the groups whose all 3-maximal subgroups are S -quasinormal. Subsequently, this result was strengthened by Yu.V. Lutsenko and A.N. Skiba in [23] to provide a description of the groups whose all 3-maximal subgroups are subnormal. Developing some of the above-mentioned results, D.P. Andreeva and A.N. Skiba [24] obtained a description of the groups in which every 3-maximal chain contains a proper S -quasinormal subgroup. Moreover, in [25], W. Guo, D.P. Andreeva and A.N. Skiba obtained the description of the groups in which every 3-maximal chain contains a proper subnormal subgroup. In [26], A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro and A.N. Skiba obtained a full classification of the groups in which the second maximal subgroups of the Sylow subgroups cover or avoid the chief factors of some of its chief series. In [27], V.N. Kniahina and V.S. Monakhov studied those groups G in which every n -maximal subgroup permutes with each Schmidt subgroup. In particular, it was proved that if $n=1,2,3$, then G is metanilpotent; but if $n \geq 4$ and G is soluble, then the nilpotent length of G is at most $n-1$.

Another interesting results on n -maximal subgroups were obtained by V.A. Kovaleva and A.N. Skiba in [28], [29] and V.S. Monakhov and V.N. Kniahina in [30]. In [28], the authors described the groups whose all n -maximal subgroups are \mathfrak{U} -subnormal. In [29] a description of the groups with all n -maximal subgroups \mathfrak{F} -subnormal for some saturated formation \mathfrak{F} was obtained. In [30], the groups with all 2-maximal subgroups \mathbb{P} -subnormal were studied.

Recall that a subgroup H of G is said to be:

(i) \mathfrak{U} -subnormal in G if there exists a chain of subgroups

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n = G$$

such that $H_i / (H_{i-1})_{H_i} \in \mathfrak{U}$, for $i=1, \dots, n$;

(ii) \mathfrak{U} -subnormal (in the sense of Kegel [31]) or K - \mathfrak{U} -subnormal [32, p. 236] in G if there exists a chain of subgroups

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_t = G$$

such that either H_{i-1} is normal in H_i or $H_i / (H_{i-1})_{H_i} \in \mathfrak{U}$ for all $i=1, \dots, t$. It is evident that every subnormal subgroup is K - \mathfrak{U} -subnormal. The inverse, in general, is not true. For example, in the group S_3 a subgroup of order 2 is K - \mathfrak{U} -subnormal and at the same time it is not subnormal. This elementary observation and the results in [23], [25] make natural the following question:

I. What is the structure of G under the condition that every 2-maximal subgroup of G is K - \mathfrak{U} -subnormal?

II. What is the structure of G under the condition that every 3-maximal subgroup of G is K - \mathfrak{U} -subnormal?

In this paper we give the solutions of these two questions.

1 Preliminary results

The solutions of Question I and Question II are based on the following results.

Lemma 1.1. Let H and K be subgroups of G such that H is K - \mathfrak{U} -subnormal in G .

(1) $H \cap K$ is K - \mathfrak{U} -subnormal in K [32, Lemma 6.1.7 (2)].

(2) If N is a normal subgroup in G , then HN/N is K - \mathfrak{U} -subnormal in G/N [32, Lemma 6.1.6 (3)].

(3) If K is K - \mathfrak{U} -subnormal in H , then K is K - \mathfrak{U} -subnormal in G [32, Lemma 6.1.6 (1)].

(4) If $G^{\mathfrak{U}} \leq K$, then K is K - \mathfrak{U} -subnormal in G [32, Lemma 6.1.7 (1)].

The next lemma is evident.

Lemma 1.2. If G is supersoluble, then every subgroup of G is K - \mathfrak{U} -subnormal in G .

Lemma 1.3. If every n -maximal subgroup of G is K - \mathfrak{U} -subnormal in G , then every $(n-1)$ -maximal subgroup of G is supersoluble and every $(n+1)$ -maximal subgroup of G is K - \mathfrak{U} -subnormal in G .

Proof. We first show that every $(n-1)$ -maximal subgroup of G is supersoluble. Let H be an $(n-1)$ -maximal subgroup of G and K any maximal subgroup of H . Then K is an n -maximal subgroup of G and so, by hypothesis, K is K - \mathfrak{U} -subnormal in G . Hence K is K - \mathfrak{U} -subnormal in H by Lemma 1.1 (1). Therefore either K is normal in H or $H/K_H \in \mathfrak{U}$. If K is normal in H , then $|H:K|$ is a prime in view of maximality of K in H . Let $H/K_H \in \mathfrak{U}$. Then we also get that

$$|H : K| = |H / K_H : K / K_H|$$

is a prime. Thus H is supersoluble.

Now, let E be an $(n+1)$ -maximal subgroup of G , and let E_1 and E_2 be an n -maximal and an $(n-1)$ -maximal subgroup of G , respectively, such that $E \leq E_1 \leq E_2$.

Then, by the above, E_2 is supersoluble, so E_1 is supersoluble. Hence it is easy to see that E is K - \mathfrak{U} -subnormal in E_1 . By hypothesis, E_1 is K - \mathfrak{U} -subnormal in G . Therefore E is K - \mathfrak{U} -subnormal in G by Lemma 1.1 (3). The lemma is proved.

Lemma 1.4. *If every 3-maximal subgroup of G is K - \mathfrak{U} -subnormal in G , then G is soluble.*

Proof. Suppose that lemma is false and let G be a counterexample with $|G|$ minimal. Since every 3-maximal subgroup of G is K - \mathfrak{U} -subnormal in G , every 2-maximal subgroup of G is supersoluble by Lemma 1.3. Hence every maximal subgroup of G is either supersoluble or a minimal nonsupersoluble group. Therefore all proper subgroups of G are soluble in view of [2]. Assume that all 3-maximal subgroups of G are identity. Then all 2-maximal subgroups of G have prime order and so every maximal subgroup of G is supersoluble. Hence G is either supersoluble or a minimal nonsupersoluble group. Thus in view of [2], G is soluble, a contradiction. Hence there is a 3-maximal subgroup T of G such that $T \neq 1$. Since T is K - \mathfrak{U} -subnormal in G , there exists a proper subgroup H of G such that $T \leq H$ and either $G/H_G \in \mathfrak{U}$ or H is normal in G . If $G/H_G \in \mathfrak{U}$, then G is soluble in view of solubility of H_G , a contradiction. Therefore H is normal in G . Let E/H be any 3-maximal subgroup of G/H . Then E is a 3-maximal subgroup of G , hence E is K - \mathfrak{U} -subnormal in G . Hence E/H is K - \mathfrak{U} -subnormal in G/H by Lemma 1.1 (2). Thus the hypothesis holds for G/H . Hence G/H is soluble by the choice of G . Therefore G is soluble. This contradiction completes the proof of the lemma.

2 Description of groups with all 2-maximal or all 3-maximal subgroups K - \mathfrak{U} -subnormal

Recall that G is called a *minimal nonsupersoluble group* provided G does not belong to \mathfrak{U} but every proper subgroup of G belongs to \mathfrak{U} . Such groups were described by B. Huppert [2] and K. Doerk [33]. We say that G is a *special Doerk-Huppert group* or an *SDH-group* if G is a minimal nonsupersoluble group such that $G^{\mathfrak{U}}$ is a minimal normal subgroup of G .

The solution of Question I originates to [28], [29], where, in particular, the following theorem was proved.

Theorem A*. *Every 2-maximal subgroup of G is \mathfrak{U} -subnormal in G if and only if G is either supersoluble or an SDH-group.*

If every 2-maximal subgroup of G is K - \mathfrak{U} -subnormal, then every maximal subgroup of G is supersoluble by Lemma 1.3. Therefore in this case G is either supersoluble or a minimal nonsupersoluble group, hence G is soluble by [2]. Thus we get the following

Theorem A. *Every 2-maximal subgroup of G is K - \mathfrak{U} -subnormal in G if and only if G is either supersoluble or an SDH-group.*

The solution of Question II is more complete. Note that since each subgroup of every supersoluble group is K - \mathfrak{U} -subnormal, we need, in fact, only consider the case when G is not supersoluble. But in this case, in view of [28] or [29], $|\pi(G)| \leq 4$.

The following theorems are proved.

Theorem B. *Let G be a nonsupersoluble group with $|\pi(G)| = 2$. Let p, q be distinct prime divisors of $|G|$ and G_p, G_q be Sylow p -subgroup and q -subgroup of G respectively. Every 3-maximal subgroup of G is K - \mathfrak{U} -subnormal in G if and only if G is a soluble group of one of the following types:*

I. *G is a minimal nonsupersoluble group and either $|\Phi(G^{\mathfrak{U}})|$ is a prime or $\Phi(G^{\mathfrak{U}}) = 1$.*

II. *$G = G_p \rtimes G_q$, where G_p is the unique minimal normal subgroup of G and every 2-maximal subgroup of G_q is an Abelian group of exponent dividing $p-1$. Moreover, every maximal subgroup of G containing G_p is either supersoluble or an SDH-group and at least one of the maximal subgroup of G is not supersoluble.*

III. *$G = (G_p \times Q_1) \rtimes Q_2$, where $G_q = Q_1 \rtimes Q_2$, G_p and Q_1 are minimal normal subgroups of G , $|Q_1| = q$, $G_p \rtimes Q_2$ is an SDH-group and every maximal subgroup of G containing $G_p \rtimes Q_1$ is supersoluble. Moreover, if $p < q$, then every 2-maximal subgroup of G is nilpotent.*

IV. *$G = G_p \rtimes G_q$, where G_p is a minimal normal subgroup of G , $O_q(G) \neq 1$, $\Phi(G) \neq 1$, every maximal subgroup of G containing G_p is either supersoluble or an SDH-group and $G/\Phi(G)$ is a group one of types II or III.*

V. *$G = (P_1 \times P_2) \rtimes G_q$, where $G_p = P_1 \times P_2$, P_1, P_2 are minimal normal subgroups of G , every maximal subgroup of G containing G_p is supersoluble, $P_1 \rtimes G_q$ is an SDH-group and $P_2 \rtimes G_q$ is either an SDH-group or a supersoluble group with $|P_2| = p$.*

VI. $G = G_p \rtimes G_q$, $\Phi(G_p)$ is a minimal normal subgroup of G , every maximal subgroup of G containing G_p is supersoluble and $\Phi(G_p) \rtimes G_q$ is an SDH-group.

VII. Every of the subgroups G_p and G_q is not normal in G and the following hold:

(i) if $p < q$, then $G = P_1 \rtimes (G_q \rtimes P_2)$, where $G_p = P_1 \rtimes P_2$, P_1 is a minimal normal subgroup of G , $|P_2| = p$, $G_q = \langle a \rangle$ is a cyclic group and $\langle a^q \rangle$ is normal in G . Moreover, G has precisely three classes of maximal subgroups whose representatives are $P_1 \rtimes G_q$, $G_q \rtimes P_2$, $\langle a^q \rangle \rtimes G_p$, where $P_1 \rtimes G_q$ is an SDH-group;

(ii) if $p > q$, then $G = P_1(G_q \rtimes P_2)$, where $G_p = P_1 P_2$, P_1 is a normal subgroup of G , $P_2 = \langle b \rangle$ is a cyclic group and $1 \neq P_1 \cap P_2 = \langle b^p \rangle$. Moreover, G has precisely three classes of maximal subgroups whose representatives are $P_1 \rtimes G_q$, $G_q \rtimes P_2$, G_p , where $|G : G_q \rtimes P_2| = p$, $P_1 \rtimes G_q$ is a supersoluble group and $G_q \rtimes P_2$ is an SDH-group.

Theorem C. Let G be a nonsupersoluble group with $|\pi(G)| = 3$. Let p, q, r be distinct prime divisors of $|G|$ and G_p, G_q, G_r be Sylow p -subgroup, q -subgroup and r -subgroup of G respectively. Every 3-maximal subgroup of G is K - \mathcal{U} -subnormal in G if and only if G is a soluble group of one of the following types:

I. G is a minimal nonsupersoluble group and either $|\Phi(G^{\mathcal{U}})|$ is a prime or $\Phi(G^{\mathcal{U}}) = 1$.

II. $G = G_p \rtimes (G_q \rtimes G_r)$, where G_p is a minimal normal subgroup of G , every maximal subgroup of G is either supersoluble or an SDH-group and at least one of the maximal subgroups of G is not supersoluble. Moreover, the following hold:

(i) if G_p is the unique minimal normal subgroup of G , then every 2-maximal subgroup of $G_q \rtimes G_r$ is an Abelian group of exponent dividing $p-1$;

(ii) if $G_q \rtimes G_r$ is an SDH-group, then every maximal subgroup of G containing $G_p G_q$ is supersoluble and $G_p \rtimes G_r$ is either an SDH-group or a supersoluble group with $|G_p| = p$.

III. $G = (P_1 \times P_2) \rtimes (G_q \rtimes G_r)$, where $G_p = P_1 \times P_2$, P_1, P_2 are minimal normal subgroups of G and G_q, G_r are cyclic groups. Moreover, every maximal subgroup of G containing G_p is supersoluble, $P_1 \rtimes (G_q \rtimes G_r)$ is an SDH-group and $P_2 \rtimes (G_q \rtimes G_r)$

is either an SDH-group or a supersoluble group with $|P_2| = p$.

IV. $G = G_p \rtimes (G_q \rtimes G_r)$, $\Phi(G_p)$ is a minimal normal subgroup of G , every maximal subgroup of G containing G_p is supersoluble and $\Phi(G_p) \rtimes (G_q \rtimes G_r)$ is an SDH-group.

Theorem D. Let G be a nonsupersoluble group with $|\pi(G)| = 4$. Let p, q, r, t be distinct prime divisors of $|G|$ ($p > q > r > t$) and G_p, G_q, G_r, G_t be Sylow p -subgroup, q -subgroup, r -subgroup and t -subgroup of G respectively. Every 3-maximal subgroup of G is K - \mathcal{U} -subnormal in G if and only if $G = G_p \rtimes (G_q \rtimes (G_r \rtimes G_t))$ is a soluble group such that G has precisely three classes of maximal subgroups whose representatives are $G_q G_r G_t, G_p G_q G_r \Phi(G_t), G_p G_q \Phi(G_r) G_t$ and $G_p \Phi(G_q) G_r G_t$, and every nonsupersoluble maximal subgroup of G is an SDH-group, G_r and G_t are cyclic groups and following hold:

(1) if $G_q G_r G_t$ is an SDH-group, then $G^{\mathcal{U}} = G_p \times G_q$, G_q is a minimal normal subgroup of G , the subgroups $G_p G_q G_r \Phi(G_t)$ and $G_p G_q \Phi(G_r) G_t$ are supersoluble and $G_p G_r G_t$ is either an SDH-group or a supersoluble group with $|G_p| = p$;

(2) if $G_q G_r G_t$ is a soluble group, then G_q is cyclic.

The classes of groups which are described in Theorems B and C are pairwise disjoint. It is easy to construct examples to show that all classes of the groups in this theorems and in Theorems A and D are not empty. Note also that Theorems B, C and D show that the class of the groups with all 3-maximal subgroups K - \mathcal{U} -subnormal is essentially wider than the class of the groups with all 3-maximal subgroups subnormal [23].

REFERENCES

1. Rédei, L. Ein Satz über die endlichen einfachen Gruppen / L. Rédei // Acta Math. – 1950. – Vol. 84. – P. 129–153.
2. Huppert, B. Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen / B. Huppert // Math. Z. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.
3. Poljakov, L.Ja. Finite groups with permutable subgroups, in Proc. Gomel Sem.: Finite groups / L.Ja. Poljakov. – Minsk.: Nauka i Tekhnika, 1966. – P. 75–88.
4. Agrawal, R.K. Generalized center and hypercenter of a finite group / R.K. Agrawal // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – Vol. 54. – P. 13–21.
5. Janko, Z. Finite groups with invariant fourth maximal subgroups / Z. Janko // Math. Zeitschr. – 1963. – Vol. 82. – P. 82–89.

6. Suzuki, M. The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order / M. Suzuki // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – Vol. 8, № 4. – P. 686–695.
7. Janko, Z. Endliche Gruppen mit lauter nilpotent zweitmaximalen Untergruppen / Z. Janko // Math. Z. – 1962. – Vol. 79. – P. 422–424.
8. Gagen, T.M. Finite simple groups with nilpotent third maximal subgroups / T.M. Gagen, Z. Janko // J. Austral. Math. Soc. – 1966. – Vol. 6, № 4. – P. 466–469.
9. Belonogov, V.A. Finite soluble groups with nilpotent 2-maximal subgroups / V.A. Belonogov // Math. Notes. – 1968. – Vol. 3, № 1. – P. 15–21.
10. Semenchuk, V.N. Soluble groups with supersoluble second maximal subgroup / V.N. Semenchuk // Voprosy Algebr. – 1985. – Vol. 1. – P. 86–96.
11. Mann, A. Finite groups whose n -maximal subgroups are subnormal / A. Mann // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – Vol. 132. – P. 395–409.
12. Spencer, A.E. Maximal nonnormal chains in finite groups / A.E. Spencer // Pacific J. of Math. – 1968. – Vol. 27, № 1. – P. 167–173.
13. Asaad, M. Finite groups some whose n -maximal subgroups are normal / Asaad // Acta Math. Hung. – 1989. – Vol. 54, № 1–2. – P. 9–27.
14. Flavell, P. Overgroups of second maximal subgroups / P. Flavell // Arch. Math. – 1995. – Vol. 64. – P. 277–282.
15. Guo, X.Y. Cover-avoidance properties and the structure of finite groups / X.Y. Guo, K.P. Shum // J. Pure Appl. Algebra. – 2003. – Vol. 181. – P. 297–308.
16. Guo, W. X -Semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 31–41.
17. Li, B. New characterizations of finite supersoluble groups / B. Li, A.N. Skiba // Sci. China Ser. A: Math. – 2008. – Vol. 50, № 1. – P. 827–841.
18. Guo, W. Finite groups with given s -embedded and n -embedded subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2009. – Vol. 321. – P. 2843–2860.
19. Li, Sh. Finite non-nilpotent groups all of whose second maximal subgroups are TI -groups / Sh. Li // Math. Proc. of the Royal Irish Academy. – 2000. – Vol. 100 A, № 1. – P. 65–71.
20. Guo, W. Finite groups in which every 3-maximal subgroup commutes with all maximal subgroups / W. Guo, E.V. Legchekova, A.N. Skiba // Math. Notes. – 2009. – Vol. 86, № 3–4. – P. 325–332.
21. Guo, W. On nonnilpotent groups with every two 3-maximal subgroups permutable / W. Guo, Yu.V. Lutsenko, A.N. Skiba // Siberian Math. J. – 2009. – Vol. 50, № 6. – P. 988–997.
22. Lutsenko, Yu.V. Structure of finite groups with S -quasinormal third maximal subgroups / Yu.V. Lutsenko, A.N. Skiba // Ukrainian Math. J. – 2009. – Vol. 61, № 12. – P. 1915–1922.
23. Lutsenko, Yu.V. Finite groups with subnormal second or third maximal subgroups / Yu.V. Lutsenko, A.N. Skiba // Math. Notes. – 2012. – Vol. 91, № 5–6. – P. 680–688.
24. Andreeva, D.P. Finite groups with given maximal chains of length ≤ 3 / D.P. Andreeva, A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2011. – Vol. 3. – P. 39–49.
25. Guo, W. Finite groups of Spencer height ≤ 3 / W. Guo, D.P. Andreeva, A.N. Skiba // Algebra Colloquium. – (in Press).
26. Ballester-Bolinches, A. On second maximal subgroups of Sylow subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro, A.N. Skiba // J. Pure Appl. Algebra. – 2011. – Vol. 215, № 4. – P. 705–714.
27. Kniahina, V.N. On the permutability of n -maximal subgroups with Schmidt subgroups / V.N. Kniahina, V.S. Monakhov // Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. – 2012. – Vol. 18, № 3. – P. 125–130.
28. Kovaleva, V.A. Finite solvable groups with all n -maximal subgroups \mathfrak{U} -subnormal / V.A. Kovaleva, A.N. Skiba // Sib. Math. J. – 2013. – Vol. 54, № 1. – P. 65–73.
29. Kovaleva, V.A. Finite soluble groups with all n -maximal subgroups \mathfrak{F} -subnormal / V.A. Kovaleva, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2014. – Vol. 17. – P. 273–290.
30. Monakhov, V.S. Finite groups with \mathbb{P} -subnormal subgroups / V.S. Monakhov, V.N. Kniahina // Ricerche di Matematica. – 2013. – Vol. 62, № 2. – P. 307–322.
31. Kegel, O.H. Zur Struktur mehrfach faktorialisierbarer endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1965. – Vol. 87. – P. 409–434.
32. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Springer-Verlag, 2006.
33. Doerk, K. Minimal nicht uberauflösbare, endliche Gruppen / K. Doerk // Math. Z. – 1966. – Vol. 91. – P. 198–205.

The research of the second author is supported by a NNSF grant of China (Grant # 11101369) and the Science Foundation of Zhejiang Sci-Tech University under grant 1013843-Y.

Поступила в редакцию 02.05.14.

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ca - \mathfrak{F} ГРУППАХ**Е.Н. Мысловец***Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель***ON FINITE ca - \mathfrak{F} -GROUPS****E.N. Myslovets***F. Scorina Gomel State University, Gomel*

Пусть \mathfrak{F} – класс групп. Конечная группа G называется ca - \mathfrak{F} -группой, если каждый ее абелевый главный фактор \mathfrak{F} -централен, а каждый неабелевый главный фактор является простой группой. Установлено, что класс всех ca - \mathfrak{F} -групп образует композиционную формацию. Исследованы свойства произведений нормальных ca - \mathfrak{F} -подгрупп конечных групп.

Ключевые слова: конечная группа, ca - \mathfrak{F} -группа, композиционная формация, радикальная формация, полурадикальная формация.

Let \mathfrak{F} be a class of groups. A finite group G is called a ca - \mathfrak{F} -group if its every abelian chief factor of G is \mathfrak{F} -central and every nonabelian chief factor of G is a simple group. It is established that the class of ca - \mathfrak{F} -groups forms a composite formation. The properties of the products of normal ca - \mathfrak{F} -subgroups of finite groups are investigated.

Keywords: finite group, ca - \mathfrak{F} -group, composition formation, radical formation, semiradical formation.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Центральными в теории классов групп являются концепции локальной и композиционной формации. Понятие локальной формации, введенное Гашюцем [1] в 1963 году, в настоящее время является классическим и активно применяется в исследовании различных вопросов теории групп и ее приложениях. Примерами локальных формаций являются классы всех разрешимых, нильпотентных и сверхразрешимых групп.

Определение композиционной формации было впервые введено Л.А. Шеметковым в [2] и Р. Бэром в неопубликованной работе [3, с. 370]. Каждая локальная формация является композиционной. Класс всех квазинильпотентных групп является примером композиционной формации, не являющейся локальной.

В 1988 году В.А. Ведерниковым в работе [4] был предложен целый ряд интересных классов групп и среди них класс \mathfrak{U}_c всех c -сверхразрешимых групп и класс \mathfrak{U}_{ca} всех ca -сверхразрешимых групп. Напомним, что группа G называется c -сверхразрешимой, если она обладает главным рядом, все факторы которого являются простыми группами, и ca -сверхразрешимой, если она является c -сверхразрешимой и каждый ее абелев фактор централен в G . Класс \mathfrak{U}_c был подробно изучен в работе А.Ф. Васильева и Т.И. Васильевой [5]. В частности, было доказано,

что класс \mathfrak{U}_c является композиционной, но не локальной формацией. В работе [6] Д. Робинсоном были найдены структурные свойства c -сверхразрешимых групп.

Ввиду роста приложений композиционных формаций в различных вопросах теории групп возникает задача нахождения новых примеров и серий композиционных формаций. Так, в работах [7], [8] А.Н. Скибой и Го Вэньбином была введена конструкция класса квази- \mathfrak{F} -групп, с помощью которой были получены новые примеры композиционных формаций, исследованы их свойства и приложения.

По аналогии с [7], [8] в настоящей работе введено понятие ca - \mathfrak{F} -группы. Доказано, что класс всех ca - \mathfrak{F} -групп является композиционной формацией, если \mathfrak{F} – насыщенная формация. Установлены свойства групп, представимых в произведение своих нормальных ca - \mathfrak{F} -подгрупп.

1 Предварительные сведения

В работе используются обозначения и определения из монографий [2], [3], [9]. Приведем некоторые из них.

$H \wr K$ – полупрямое произведение групп H и K ;

\mathfrak{F} – некоторый класс групп;

\mathfrak{U} – класс всех сверхразрешимых групп;

\mathfrak{N} – класс всех нильпотентных групп;

\mathfrak{N}_p – класс всех p -групп;

$G^{\mathfrak{S}}$ – \mathfrak{F} -корадикал группы G .

Формацией называется класс, замкнутый относительно факторгрупп и подпрямых произведений. Формация \mathfrak{F} называется насыщенной, если из $G/N \in \mathfrak{F}$, где $N \leq \Phi(G)$, следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Экраном [2] называется отображение f класса \mathfrak{G} всех групп в множество классов групп, если для любой группы G выполняются следующие условия:

- 1) $f(G)$ – формация;
- 2) $f(G) \subseteq f(G^\varphi) \cap f(\text{Ker } \varphi)$ для любого гомоморфизма φ группы G ;
- 3) $f(1) = \mathfrak{G}$.

При этом экран f называется локальным, если он p -постоянен для любого простого p ($f(R) = f(S) = f(p)$ для любых двух неединичных p -групп R и S) и $f(G) = \bigcap_{p \in \pi(G)} f(p)$ для любой группы $G \neq 1$. Экран f называется композиционным, если для любой группы $G \neq 1$ имеет место $f(G) = \bigcap f(H/K)$, где H/K пробегает все композиционные факторы группы G .

Формация \mathfrak{F} называется локальной, если она имеет хотя бы один локальный экран f , т. е.

$$\mathfrak{F} = \{G : G/C_G(H/K) \in f(p), \forall p \in \pi(H/K)\}.$$

Обозначается $\mathfrak{F} = LF(f)$. Формация \mathfrak{F} называется композиционной, если она имеет хотя бы один композиционный экран f , т. е.

$$\mathfrak{F} = \{G : G/C_G(H/K) \in f(A), \forall A \in K(H/K)\}.$$

Обозначается $\mathfrak{F} = CLF(f)$.

Теорема 1.1 [3, теорема 4.6]. Формация конечных групп насыщена тогда и только тогда, когда она локальна.

Внутренним экраном формации \mathfrak{F} называется такой экран f , что $f(G) \subseteq \langle f \rangle$ для любой неединичной группы G . Экран f называется максимальным внутренним локальным (композиционным) экраном формации \mathfrak{F} , если f является максимальным элементом множества всех внутренних локальных (композиционных) экранов формации \mathfrak{F} .

Класс групп \mathfrak{F} называется радикальным или классом Фиттинга [2], если \mathfrak{F} S_n -замкнут и R -замкнут, т. е. содержит всякую группу $G = HK$, где H и K – нормальные \mathfrak{F} -подгруппы в G .

Теорема 1.2 [2]. Пусть f – максимальный внутренний локальный экран формации \mathfrak{F} . Формация \mathfrak{F} R -замкнута тогда и только тогда, когда для любого просто p формация $f(p)$ R -замкнута.

Класс групп \mathfrak{F} называется полурадикальным [10], если \mathfrak{F} S_n -замкнут и содержит всякую группу $G = HK$, где H и K – нормальные в G \mathfrak{F} -подгруппы такие, что G/H и G/K не имеют общих (с точностью до изоморфизма) абелевых композиционных факторов.

Теорема 1.3 [10]. Пусть h – внутренний композиционный экран формации \mathfrak{F} . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если полурадикален экран h , то полурадикальна формация \mathfrak{F} ;

2) если полурадикальна формация \mathfrak{F} , то ее максимальный внутренний композиционный экран полурадикален.

Лемма 1.4 [2]. Пусть f – локальный экран формации \mathfrak{F} . Группа G тогда и только тогда принадлежит \mathfrak{F} , когда $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$.

Лемма 1.5 [5]. Пусть \mathfrak{F} – формация и N – минимальная нормальная подгруппа группы G такая, что $|N| = p^\alpha$ для некоторого простого числа p . Если N содержится в подгруппе H из G и $H/C_H(U/V) \in \mathfrak{F}$ для любого H -главного фактора U/V группы N , то $H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p \mathfrak{F}$.

2 Определение и свойства класса са- \mathfrak{F} -групп

Определение 2.1 [9]. Пусть \mathfrak{F} – класс групп. Главный фактор H/K группы G называется \mathfrak{F} -центральным, если

$$H/K \times G/C_G(H/K) \in \mathfrak{F}.$$

В противном случае фактор H/K называется \mathfrak{F} -эксцентральным.

Определение 2.2. Пусть \mathfrak{F} – класс групп. Будем говорить, что группа G является са- \mathfrak{F} -группой, если каждый ее абелевый главный фактор является \mathfrak{F} -центральным, а каждый неабелевый главный фактор является простой группой.

Класс всех са- \mathfrak{F} -групп обозначим через \mathfrak{S}_{sa} .

Лемма 2.3. Пусть \mathfrak{F} – класс групп. Тогда класс \mathfrak{S}_{sa} является непустой формацией.

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{S}_{sa}$ и $N \triangleleft G$. Докажем, что G/N также является са- \mathfrak{F} -группой. Рассмотрим главный ряд группы G , проходящий через подгруппу N :

$$1 = G_1 < \dots < G_i = N < G_{i+1} < \dots < G_n = G.$$

Тогда любой главный фактор G_{j+1}/G_j является \mathfrak{F} -центральным, если он абелев, и изоморфен простой группе, если неабелев. Рассмотрим главный ряд группы G/N :

$$1 = G_i/N < G_{i+1}/N < \dots < G_n/N = G/N.$$

В силу G -изоморфизма факторов

$$(G_{j+1}/N)/(G_j/N) \cong G_{j+1}/G_j$$

любой главный фактор $(G_{j+1}/N)/(G_j/N)$ является либо \mathfrak{F} -центральным, либо изоморфен простой группе. Следовательно, G/N – ca - \mathfrak{F} -группа.

Пусть $G/N_1 \in \mathfrak{F}_{ca}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}_{ca}$, $N_1 \triangleleft G$ и $N_2 \triangleleft G$. Из леммы 1.3 [2] следует, что любой главный фактор группы $G/(N_1 \cap N_2)$ G -изоморфен либо некоторому главному фактору группы G/N_1 , либо некоторому главному фактору группы G/N_2 . Отсюда следует, что группа $G/(N_1 \cap N_2) \in \mathfrak{F}_{ca}$.

Следовательно, класс \mathfrak{F}_{ca} является формацией. Лемма доказана.

Теорема 2.4. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация и f – ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда формация \mathfrak{F}_{ca} является композиционной и имеет максимальный внутренний композиционный экран h такой, что $h(N) = \mathfrak{F}_{ca}$, если N – простая неабелева группа и $h(N) = f(p)$, если N – простая p -группа, p – простое число.

Доказательство. Пусть h – композиционный экран такой, что для любой простой группы N значение экрана $h(N) = f(p)$, если N – p -группа и $h(N) = \mathfrak{F}_{ca}$, если N – неабелева группа. Обозначим через $\mathfrak{X} = CLF(h)$. Покажем, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}_{ca}$.

Предположим, что множество $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{F}_{ca}$ не пусто, и выберем в нем группу G наименьшего порядка. Так как \mathfrak{X} и \mathfrak{F}_{ca} являются формациями, то в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N , которая совпадает с \mathfrak{F}_{ca} -корадикалом группы G , т. е. $N = G^{\mathfrak{F}_{ca}}$.

Пусть N – неабелева группа. Если $N = G$, то G – простая группа и $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Противоречие. Будем считать, что $N \neq G$. Заметим, что $C_G(N) \cap N \triangleleft G$. Из неабелевости и минимальности N следует, что $C_G(N) = 1$. Так как $G \in \mathfrak{X}$, то $G/C_G(N) \cong G \in h(N) = \mathfrak{F}_{ca}$. Получили противоречие с выбором группы G .

Пусть N – абелева p -группа для некоторого простого числа p . Из $G \in \mathfrak{X}$ следует, что $G/C_G(N) \in h(N) = f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Рассмотрим полупрямое произведение $R = N \rtimes G/C_G(N)$. Заметим, что N – минимальная нормальная подгруппа в R и $C_R(N) = N = F(R) = F_p(R)$. Тогда $R/F_p(R) \cong G/C_G(N) \in h(p)$. По лемме 1.4 получаем, что $R \in \mathfrak{F}$. То есть фактор $N/1$ является

\mathfrak{F} -центральным в G . Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{F}_{ca}$ получаем $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}_{ca}$.

Докажем обратное включение. Предположим, что множество $\mathfrak{F}_{ca} \setminus \mathfrak{X}$ не пусто, и выберем в нем группу G наименьшего порядка. Так как \mathfrak{F}_{ca} и \mathfrak{X} – формации, то можно считать, что в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N такая, что $N = G^{\mathfrak{X}}$.

Пусть N – неабелева группа. Тогда $C_G(N) = 1$. Из $G/C_G(N) \cong G \in \mathfrak{F}_{ca} = h(N)$, следует, что главный фактор N является h -центральным в G . Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{X}$ получаем, что $G \in \mathfrak{X}$. Противоречие с выбором G .

Пусть N – абелева p -группа для некоторого простого p . Так как $G \in \mathfrak{F}_{ca}$, то N – \mathfrak{F} -центральна в G . Следовательно,

$$R = N \rtimes G/C_G(N) \in \mathfrak{F},$$

где N – минимальная нормальная подгруппа в R и $C_G(N) = N = F(R) = F_p(R)$. По лемме 1.4 получаем, что $R/F_p(R) \cong G/C_G(N) \in h(p)$. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{X}$ следует, что $G \in \mathfrak{X}$. Противоречие. Итак, $\mathfrak{F}_{ca} \subseteq \mathfrak{X}$, тем самым равенство $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}_{ca}$ установлено. Теорема доказана.

3 Свойства произведений нормальных ca - \mathfrak{F} -подгрупп

Установим свойства групп, представимых в произведение своих нормальных ca - \mathfrak{F} -подгрупп. Для этого нам потребуются следующие леммы.

Лемма 3.1. Пусть группа G имеет неабелеву единственную минимальную нормальную подгруппу N такую, что $G/N \in \mathfrak{F}_{ca}$. Если $G = HK$, где H и K – нормальные ca - \mathfrak{F} -подгруппы из G , то $G \in \mathfrak{F}_{ca}$.

Доказательство. Заметим, что $N \subseteq H \cap K$. Пусть R – минимальная нормальная подгруппа группы H , содержащаяся в N . Так как $H \in \mathfrak{F}_{ca}$, то R – простая неабелева группа. Прямой проверкой устанавливается, что $R^g \triangleleft H$ для любого $g \in G$. Из $N \triangleleft G$ следует, что произведение $R^x R^y \dots R^z \subseteq N$, где x, y, \dots, z – все элементы группы G . Из минимальности N получаем $N = R^x R^y \dots R^z$. Выберем элементы g_1, g_2, \dots, g_n группы G так, чтобы $N = R^{g_1} R^{g_2} \dots R^{g_n}$ и $R^{g_i} \neq R^{g_j}$ для любых $i \neq j$. Ввиду простоты R имеем $R^{g_i} \cap R^{g_j} = 1$ для $i \neq j$, т. е.

$$N = R^{g_1} \times R^{g_2} \times \dots \times R^{g_n}.$$

Аналогично, минимальная нормальная подгруппа L группы K , содержащаяся в N , обладает

следующими свойствами: L – простая неабелева группа; $L^h \triangleleft K$ для любого $h \in G$;

$$N = L^{h_1} \times L^{h_2} \times \dots \times L^{h_m},$$

где h_1, h_2, \dots, h_m – элементы группы G такие, что $L^{h_i} \neq L^{h_j}$ для любых $i \neq j$. Ввиду утверждения а) леммы 13.16 [11, гл. X] и простоты L для любого $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ имеем $L^{h_i} = R^{g_k}$ для некоторого $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Тогда из

$$N = R^{g_1} \times R^{g_2} \times \dots \times R^{g_n} = L^{h_1} \times L^{h_2} \times \dots \times L^{h_m}$$

получаем, что $n = m$, т. е.

$$\{R^{g_1} R^{g_2} \dots R^{g_n}\} = \{L^{h_1} L^{h_2} \dots L^{h_m}\}.$$

Так как $L^h = R^{g_k}$ для некоторого $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, то $N_G(L^h) = N_G(R^{g_k}) \supseteq HK = G$. Это означает, что $L^h \triangleleft G$. Отсюда и из минимальности N следует равенство $N = L^{h_1}$, т. е. N проста. Так как $G/N \in \mathfrak{F}_{ca}$, то $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. Если локальная формация \mathfrak{F} является S_n -замкнутой, то и формация \mathfrak{F}_{ca} также S_n -замкнута.

Доказательство. Пусть G – группа наименьшего порядка, такая, что $G \in \mathfrak{F}_{ca}$ и в G существует нормальная подгруппа R , которая не принадлежит \mathfrak{F}_{ca} . Выберем минимальную нормальную подгруппу N группы G , содержащуюся в R . По индукции $R/N \in \mathfrak{F}_{ca}$.

Пусть N – абелева p -группа для некоторого простого p . Так как $N \setminus G/C_G(N) \in \mathfrak{F}$ и формация \mathfrak{F} является S_n -замкнутой, то $N \in \mathfrak{F}$ и $G/C_G(N) \in h(p)$,

где h – максимальный внутренний локальный экран формации \mathfrak{F} . Так как формация \mathfrak{F} является S_n -замкнутой, то по теореме 4.7 из [2] формация $h(p)$ также S_n -замкнута. Тогда

$$RC_G(N)/C_G(N) \simeq R/C_R(N) \in h(p).$$

Нетрудно видеть, что любой главный фактор группы R , лежащий в R , является h -центральным в R , а следовательно и \mathfrak{F} -центральным в R . Отсюда и из $R/N \in \mathfrak{F}_{ca}$ следует, что $R \in \mathfrak{F}_{ca}$. Получили противоречие.

Если N – неабелева группа, то N – простая группа, так как $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Тогда $R \in \mathfrak{F}_{ca}$. Данное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 3.3. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная полурадикальная формация. Если группа $G = HK$, где H и K – нормальные в G са- \mathfrak{F} -подгруппы такие, что G/H и G/K не имеют общих (с точностью до изоморфизма) абелевых компо-

зиционных факторов, то G также является са- \mathfrak{F} -группой.

Доказательство. Пусть G – группа наименьшего порядка для которой утверждение леммы неверно. Обозначим через N – минимальную нормальную подгруппу группы G .

Покажем, что для G/N условия леммы выполняются. Рассмотрим

$$G/N = HN/N \cdot KN/N,$$

где $HN/N \triangleleft G$ и $KN/N \triangleleft G$. Группы

$$G/N/HN/N \simeq G/HN$$

и $G/N/KN/N \simeq G/KN$ не имеют общих абелевых композиционных факторов. По выбору группы G факторгруппа $G/N \in \mathfrak{F}_{ca}$.

Покажем, что N является единственной минимальной подгруппой в G . Предположим, что в G есть минимальная нормальная подгруппа $R \neq N$. Так как \mathfrak{F}_{ca} является формацией из $G/R \in \mathfrak{F}_{ca}$ и $G/N \in \mathfrak{F}_{ca}$ следует, что

$$G/R \cap N \in \mathfrak{F}_{ca}.$$

Из того, что R и N – минимальные нормальные подгруппы в G , следует, что $R \cap N = 1$ и $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Противоречие.

Таким образом, N – единственная минимальная подгруппа, причем $N = G^{\mathfrak{F}_{ca}}$ и $N \subseteq H \cap K$.

Пусть N – абелева p -группа для некоторого простого числа p . Рассмотрим максимальный внутренний композиционный экран h формации \mathfrak{F}_{ca} . Для любого H -главного фактора U/V группы N имеем

$$H/C_H(U/V) \in h(U/V) = h(p).$$

По лемме 1.5 имеем $H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p h(p) = h(p)$.

Аналогично $K/C_K(N) \in h(p)$. Рассмотрим группу $G/C_G(N) = HC_G(N)/C_G(N) \cdot KC_G(N)/C_G(N)$.

Тогда ее нормальные подгруппы

$$HC_G(N)/C_G(N) \simeq H/C_H(N) \in h(p)$$

и $KC_G(N)/C_G(N) \simeq K/C_K(N) \in h(p)$. Из теоремы 1.3 и из того, что $G/C_G(N)/HC_G(N)/C_G(N)$

и $G/C_G(N)/KC_G(N)/C_G(N)$ не имеют общих (с точностью до изоморфизма) абелевых композиционных факторов, следует, что $G/C_G(N) \in h(p)$.

Следовательно, N является h -центральным фактором группы G . Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{F}_{ca}$

следует, что $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Получили противоречие.

Если N – неабелева группа, то из леммы 3.1 следует, что $G \in \mathfrak{F}_{ca}$. Противоречие доказывает лемму.

Лемма 3.4. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная радикальная формация. Если группа $G = HK$, где H и K – нормальные в G са- \mathfrak{F} -подгруппы, то G также является са- \mathfrak{F} -группой.

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 3.3.

Теорема 3.5. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная радикальная формация. Тогда \mathfrak{F}_{ca} – радикальная формация.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из лемм 3.2 и 3.4.

Теорема 3.6. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная полурадикальная формация. Тогда \mathfrak{F}_{ca} – полурадикальная формация.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из лемм 3.2 и 3.3.

Следствие 3.7. Пусть \mathfrak{F} – разрешимая насыщенная формация. Если группа $G = HK$, где H и K – нормальные sa - \mathfrak{F} -подгруппы из G и $(|G:H|, |G:K|) = 1$, то G является sa - \mathfrak{F} -группой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gaschütz, W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen / W. Gaschutz // Math. Z. – 1963. – Bd. 80, № 4. – S. 300–305.

2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

3. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

4. Ведерников, В.А. О некоторых классах конечных групп / В.А. Ведерников // Доклады АН БССР. – 1988. – Т. 2, № 10. – С. 872–875.

5. Васильев, А.Ф. О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Известия вузов. Серия Математика. – 1997. – Т. 426, № 11. – С. 10–14.

6. Robinson, D.J.S. The structure of finite groups in which permutability is a transitive relation / D.J.S. Robinson // J. Austral. Math. Soc. – 2001. – Vol. 70. – P. 143–149.

7. Guo, W. On finite quazi- \mathfrak{F} -groups / W. Guo, A.N. Skiba // Communication in Algebra. – 2009. – Vol. 37. – P. 470–481.

8. Guo, W. On some classes of finite quazi- \mathfrak{F} -groups / W. Guo, A.N. Skiba // Journal of Group Theory. – 2009. – Vol. 12. – P. 407–417.

9. Шеметков, Л.Н. Формации алгебраических систем / Л.Н. Шеметков, А.Н. Скиба // М.: Наука, 1989 – 256 с.

10. Васильева, Т.И. Полурадикальные формации конечных групп / Т.И. Васильева // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 1999. – Т. 1, № 1 (15). – С. 71–77.

11. Huppert, B. Finite groups III / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin : Springer, 1982. – 454 p.

Поступила в редакцию 21.10.13.

УДК 519.876.5:62-192

АНАЛИЗ НАДЁЖНОСТИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ВЕРОЯТНОСТНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

О.М. Демиденко, Е.И. Сукач, Д.В. Ратобыльская, Ю.В. Жердецкий

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

THE RELIABILITY ANALYSIS OF ELECTRIC POWER SYSTEMS BASED ON THE PROBABILISTIC-ALGEBRAIC SIMULATION

O.M. Demidenko, E.I. Sukach, D.V. Ratobylskaya, Y.V. Zherdetsky

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Предлагается применение аппарата вероятностно-алгебраического моделирования для принятия решений при управлении электроэнергетическими системами. Излагается методика оценки вероятностных характеристик надёжности электросетевых структур, включающих множество элементов с вероятностными параметрами надёжности.

Ключевые слова: сетевая надёжность, вероятностные оценки надёжности, электроэнергетическая система.

The application of probabilistic-algebraic simulation is proposed to use in the control of the electro-power systems. The technique estimates the probabilistic characteristics of the reliability of the power grid structures including many elements with probabilistic reliability parameters.

Keywords: structurally-difficult system, network reliability, power systems.

Введение

Электроэнергетические системы по ряду признаков можно отнести к классу многоэлементных сложных систем графовой структуры. Надёжность их функционирования во многом определяется надёжностью работы их элементов, (оборудования, линий связи), которым при графической интерпретации соответствуют вершины графа или его рёбра. Элементы по-разному влияют на работу сети в целом и своевременное управление их состоянием позволяет организовать устойчивое функционирование всей исследуемой системы.

Такое управление может быть реализовано по циклической схеме, основным звеном которой является вероятностное моделирование, гарантирующее оперативное получение целой линейки результатов при изменении исходных данных моделирования. При этом любой из последовательных этапов схемы управления, включающих уточнение цели и условий проведения моделирования, корректировку модели с учётом предпочтений лица принимающего решение, анализ полученных результатов, может повторяться до тех пор, пока не будет найдено лучшее решение, удовлетворяющее критерию поиска. Существенную роль при этом играет выбор инструмента, используемого при моделировании.

Известные расчётные методы [1], [2], решающие задачи оценки надёжности сетевых структур, применимы при определённых ограничениях. Как правило, не учитывается нелинейность изменений, происходящих с элементами,

которые в процессе взаимодействия могут решающим образом изменять состояние сопряжённых с ними элементов и всей системы в целом, анализируется два состояния элементов и всей системы (работа/отказ), отсутствует возможность рассмотрения множества терминальных вершин исследуемого электросетевого объекта. Очевидно, что такие предположения значительно сокращают возможности методов при решении практических задач анализа надёжности сетевых объектов.

Имитационное моделирование, основанное на использовании метода Монте-Карло, при решении задач анализа надёжности сетевых структур в ряде случаев позволяет получить приближённые оценки результирующих вероятностных характеристик либо определить возможные границы надёжности исследуемых объектов [3].

В статье излагается подход к анализу надёжности электросетевых объектов с использованием аппарата вероятностно-алгебраического моделирования. Универсальность подхода заключается в возможности его применения для расчёта характеристик надёжности электроэнергетических систем различного уровня сложности. В результате реализации одного из методов вероятностно-алгебраического моделирования (метода расчёта надёжности простой графовой структуры [4]; методики расчёта надёжности структурно-сложной системы со многими состояниями [5]; методики расчёта надёжности системы-четырёхполюсника [6] (системы-трёхполюсника [7]); метода расчёта надёжности

структурно-сложной системы большой размерности [8]), выбор которого обусловлен числом элементов объекта и видом связей между ними, определяющим в совокупности структурную сложность исследуемого объекта, формируется вектор вероятностей состояний надёжности объекта в случае статического моделирования либо набор векторов при рассмотрении объекта в динамике. Сформированные вектора характеризуют исследуемый показатель надёжности для различного числа и сочетаний терминальных вершин, учитывают динамику происходящих процессов взаимодействия структурных элементов исследуемого объекта, свидетельствуют о доле отказов системы, обусловленных разными причинами, в общей оценке вероятности отказа.

Применение методологии вероятностно-алгебраического моделирования, имеющей теоретическое обоснование в виде стохастических алгебр [9] и средства автоматизации в виде системы PALS [10], позволяет последовательно решить типовые задачи моделирования в ходе анализа электроэнергетических систем, результаты которого могут служить основой принятия решения при управлении объектами различной структурной сложности.

1 Формализация объекта исследования

Объектом исследования являются существующие и проектируемые электроэнергетические системы, которые требуют проведения дополнительных исследований при вводе их в эксплуатацию.

В результате изучения класса электросетевых объектов с целью их моделирования были выделены его особенности:

- наличие множества потенциально ненадёжных элементов, к которым можно отнести как физические устройства, так и линии связи;
- существование множества режимов функционирования исследуемых электроэнергетических систем;
- потенциальная возможность возникновения отказов элементов, обусловленных различными причинами, определяющими состояния элементов;
- наличие восстанавливаемых и невосстанавливаемых элементов;
- необходимость учёта последовательности отключения исправных элементов в результате выведения из состава сети отказавших элементов.

Исследуемые объекты, даже в пределах ограниченного региона, включают большое число неоднородных по надёжности элементов, в качестве которых могут выступать как оборудование, имеющее вероятностные параметры надёжности, так и линии связи, которые подвержены износу и случайному воздействию факторов внешней среды. Они представляются в виде детальных схем, описывающих физическое расположение

структурных элементов электросетевых объектов, выполненных согласно установленным стандартам [11]. Упрощение подобных схем позволяет интерпретировать объекты в виде графов, в которых физическим элементам с вероятностными характеристиками надёжности ставятся в соответствие вершины или рёбра.

Графовая структура в силу перечисленных особенностей объекта исследования позволяет применить для исследования характеристик надёжности объекта аппарат вероятностно-алгебраического моделирования.

В качестве исходных данных при оценке надёжности электросетевых объектов используются вероятностные значения надёжности состояний отдельных узлов и линий связи, определяющих вероятность надёжного функционирования либо отказа с учётом его причины, вычисленные с учетом влияния случайных факторов за оговоренный период времени.

Для выделенных в процессе декомпозиции элементов системы с использованием накопленных статистических данных определяются значения вероятностей каждого из состояний (таблица 1.1). Состояние S_0 характеризует работу элемента, а все остальные определяют состояния отказа, возникшие вследствие ряда различных причин.

В самом общем случае структурными элементами системы могут быть и единицы оборудования, и линии связи. В этом случае число состояний структурных элементов исследуемого объекта увеличивается до 13, вероятности которых задаются векторами.

Для решения менее общих задач могут быть использованы как схема формализации «элементы-рёбра», так и схема формализации «элементы-вершины» [12].

2 Методика расчёта вероятностных характеристик надёжности электроэнергетических систем по вероятностным характеристикам надёжности их элементов

Применение методологии вероятностно-алгебраического моделирования для выбора решения при управлении электроэнергетическими системами достигается последовательностью следующих шагов.

Шаг 1. Представление варианта схемы электроэнергетической системы в виде графовой структуры с выделением элементов, имеющих вероятностный характер функционирования. При формировании графа $G(N, K)$ отмечаются элементы, определяющие места:

- поступления электроэнергии;
- трансформаторных подстанций (ТПС);
- потребителей электроэнергии;
- места сопряжения с внешними линиями электропередач (ЛЭП);

Таблица 1.1 – Описание состояний элементов электроэнергетической системы

Причины отказов элементов электроэнергетической системы	Тип элемента	Номер состояния элемента	Значение вероятности
Полностью работоспособен	любой	S_0	$P(S_0)$
Повреждение трансформаторной подстанции (ТПС)	узел	S_1	$P(S_1)$
Повреждение опоры воздушной линии (ВЛ) (6–10 Кв)	линия	S_2	$P(S_2)$
Повреждение концевой муфты кабельной линии (КЛ)	линия	S_3	$P(S_3)$
Отключение от внешних стихийных воздействий и грозовой деятельности	любой	S_4	$P(S_4)$
Перекрытие предохранителя (ПК) проходного изолятора (ПНБ)	узел	S_5	$P(S_5)$
Механическое повреждение КЛ, опоры ВЛ сторонними лицами	линия	S_6	$P(S_6)$
Завал дерева на провода ВЛ, перекрытие на технику	линия	S_7	$P(S_7)$
Пробой изолятора ВЛ, обрыв вязки, провода, шлейфа	линия	S_8	$P(S_8)$
Повреждение КЛ	линия	S_9	$P(S_9)$
Отключение питающих ВСЛ и ПС, 35–750Кв	узел	S_{10}	$P(S_{10})$
Причина не установлена	любой	S_{11}	$P(S_{11})$
Падение дерева, перекрытие на поросль	линия	S_{12}	$P(S_{12})$

– переключателей, определяющих места возможных разъединений в электроэнергетической сети.

Построение графа должно отражать условия и параметры взаимосвязей элементов h -го варианта организации электроэнергетической системы на выбранном уровне детализации.

Шаг 2. Подготовка исходной информации для проведения вероятностно-алгебраического моделирования h -го варианта электросетевого объекта в виде трёх наборов данных.

Первый набор данных определяет структуру объекта и включает описание:

– матрицы смежности графа $G(N, K)$

$$G = \|g_{ij}\|, i, j = \overline{1, m};$$

- числа линий связи ($M1$);
- численного состава оборудования ($M2$);
- числа входов/выходов ($N1$);
- списка входов/выходов ($N2$);
- типа элементов с вероятностными параметрами надёжности (линии связи/оборудование);
- типа линий связи (ВЛ-воздушные линии, КЛ-кабельные линии).

Второй набор данных содержит численные данные о возможных n отказах (с классификацией их по типам в зависимости от причины повреждения) i -ых выделенных элементов электроэнергетической системы. В результате чего определяется число состояний $S = \{S_j\}, j = \overline{0, n}$ элементов и рассчитываются значения векторов вероятностей состояний надёжности выделенных элементов:

$$P^i = (p_0^i, p_1^i, \dots, p_n^i), \sum_{j=0}^n p_j^i = 1, i = \overline{1, m} \quad (2.1)$$

Первые элементы векторов (2.1) p_0^i определяют вероятность работоспособности i -ых элементов,

остальные указывают на вероятности отказов n -ых типов, соответствующих i -ых элементов. Таким образом формируются функции плотностей вероятностей состояний надёжности выделенных элементов $f_i(\xi)$.

Третий набор данных предоставляет дополнительную информацию, необходимую для рассмотрения процесса функционирования исследуемой электроэнергетической системы в динамике. Для каждого i -го элемента системы, для которого учитывается возможность отказа, формируются функции плотностей вероятностей значений времени:

– безотказного функционирования элементов $P_{i1}(\tau_{BO})$;

– восстановления работоспособности отказавших и сопряжённых с ними элементов $P_{i2}(\tau_{BO})$.

Перечисленные данные служат исходной информацией для построения совокупности вероятностных моделей, отображающих временные изменения состояний надёжности элементов исследуемой электросети (параметрических функций, марковских дискретных моделей). Результатом эксплуатации этих моделей являются вектора вида:

$$P^{it} = (p_0^{it}, p_1^{it}, \dots, p_n^{it}), \sum_{j=0}^n p_j^{it} = 1, i = \overline{1, m}, t = \overline{1, T}, \quad (2.2)$$

которые являются исходными при проведении динамического вероятностно-алгебраического моделирования.

Кроме этого, указываются управляющие правила, срабатывающие в процессе моделирования. Они формируются в соответствии с экспертными оценками, которые определяют направленные управляющих воздействий (U), реализуемых

между итерациями моделирования (t). Правила указывают как на изменение вероятностных параметров надёжности структурных элементов модели, так и на структурные изменения графа модели. В последнем случае корректирующие воздействия реализуют процесс адаптации графовой структуры модели под текущие изменения параметров надёжности элементов и всей системы.

Шаг 3. Построение вероятностно-алгебраической модели, описывающей процесс функционирования электроэнергетической системы путём визуализации графовой структуры h -го варианта организации системы, учитывающей состав элементов, их физическое расположение и типы соединения элементов, определяющих функции их взаимодействия.

Шаг 4. Инициализация вероятностно-алгебраической модели и ввод исходной информации, представленной в виде трёх наборов данных, с использованием оконного интерфейса программного обеспечения.

Шаг 5. Выбор вида моделирования: статическое; динамическое. Для динамического моделирования предполагается задание временного интервала моделирования (числа итераций T).

Шаг 6. Реализация исходного варианта вероятностно-алгебраического моделирования для указанных данных с визуализацией и анализом результатов моделирования.

Результат моделирования h -го варианта вероятностно-алгебраической модели представляется в виде вектора вероятностей надёжности системы, имеющего вид:

$$P^s = (p_0^s, p_1^s, \dots, p_n^s), \quad \sum_{j=0}^n p_j^s = 1, \quad (2.3)$$

где p_j^s – вероятности состояний системы $S = \{S_j\}$, $j = \overline{0, n}$, характеризующих либо работу системы, либо отказ одного из типов. Таким образом формируется функция плотности вероятности состояний надёжности исследуемой системы $f(\xi)$ в выбранный момент времени.

В случае динамического вероятностно-алгебраического моделирования откликами являются вектора вероятностей состояний, характеризующие изменения надёжности h -го варианта организации системы во времени:

$$P^{st} = (p_0^{st}, p_1^{st}, \dots, p_n^{st}), \quad \sum_{j=0}^n p_j^{st} = 1, t = \overline{1, T}. \quad (2.4)$$

Кроме этого каждому вектору вероятностей (2.4), характеризующему надёжность системы на очередной итерации, соответствует вариант структурной организации системы G_{ht} .

3 Применение методологии вероятностно-алгебраического моделирования для решения типовых задач

Задача 1. Анализ надёжности h -го варианта организации электроэнергетической системы.

Рассматривается h -ый вариант организации электроэнергетической системы, представленный в виде графа G_h , в котором заданы элементы (линии связи, оборудование) с вероятностными параметрами надёжности (2.1).

В результате реализации одного из методов вероятностно-алгебраического моделирования формируется вектор вероятностей вида (2.3) в случае статического моделирования.

Значения вектора (2.3) определяют вероятность надёжной работы электросетевого объекта (p_0^s), указывают на минимальное значение вероятности отказа $p_{\min} = p_j^s$ и его тип, определяющий j -ое состояние системы S_j ; максимальное значение вероятности отказа $p_{\max} = p_k^s$ и его тип, определяющий k -ое состояние системы S_k . По результатам моделирования вычисляются математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение вероятностных значений отказов (m, σ) для исследуемого h -го варианта организации системы, указывающие на наиболее вероятный тип отказа и разброс случайной величины, определяющий тип отказа.

В случае рассмотрения системы в динамике вычисляются вектора вида (2.4) и рассчитываются аналогичные статистические характеристики.

Сформированные векторы вероятностей и статистические характеристики их изменения отображаются на графике и позволяют прогнозировать изменение надёжности системы при изменении надёжности составляющих её структурных элементов.

Задача 2. Оценка изменения надёжности организации электроэнергетических объектов в результате изменения параметров надёжности их структурных элементов.

В самом общем случае элементами электросетевых объектов являются одновременно линии связи и оборудование, которые подвержены отказам в ходе их эксплуатации. Очевидно, что при замене или реконструкции структурных элементов электросетей, уровень надёжности объектов повышается, что в свою очередь сказывается на надёжности и безопасности работы всей системы и её отдельных подсистем.

Для решения задачи проводится два модельных эксперимента. Первый эксперимент предполагает расчёт надёжности $h1$ -го варианта организации объекта исследования, в котором оценивается надёжность системы при условии существующих параметров надёжности её структурных элементов (например, при наличии воздушных линий передачи электроэнергии). Результатом расчёта является вектор P_{h1} вида (2.3), для которого вычисляются математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение (m_{h1}, σ_{h1}). Второй эксперимент проводится для обновлённых параметров надёжности структурных

элементов (например, при замене воздушных линий передачи на кабельные), которые в целом обеспечивают организацию работы $h2$ -го варианта. Результатом расчёта является вектор P_{h2} вида (2.3), для которого вычисляются математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение ($mh2, \sigma h2$).

Для каждого из вариантов рассчитывается обобщённый показатель эффективности организации электроэнергетической системы (W_h), значение которого должно быть максимальным. Он имеет следующий вид:

$$W_h = \delta_{1h} \cdot P_h + \delta_{2h} \cdot \frac{1}{Q_h}, \quad (3.1)$$

$$\sum_{i=1}^2 \delta_i = 1,$$

где $0 \leq \delta_{ih} \leq 1$ переменные, которые являются весовыми коэффициентами важности значения вероятности работоспособности h -го варианта системы (δ_{1h}) и стоимости работ по техническому обслуживанию h -го варианта организации исследуемой системы (δ_{2h}), P_h – вероятность надёжного функционирования h -го варианта, а Q_h – материальные затраты на техническое обслуживание и ликвидацию последствий отказов h -го варианта системы.

Сравнение полученных показателей эффективности обеспечивает математически обоснованный выбор варианта организации исследуемого объекта.

При этом рассчитывается выигрыш по эффективности при переходе от $h1$ -го варианта организации системы к $h2$ -му варианту, а именно:

$$W = W_{h2} - W_{h1}; \quad (3.2)$$

оценивается выигрыш по надёжности, при переходе от первого варианта структурной организации ко второму, а именно:

$$P = P_{h2} - P_{h1}; \quad (3.3)$$

определяется разность в стоимости технического обслуживания двух вариантов, включая материальные затраты на модификацию первого варианта:

$$Q = Q_{h2} - Q_{h1}. \quad (3.4)$$

Следует учитывать, что материальные затраты на ликвидацию последствий отказов исходного варианта объекта возрастают по мере роста суммарной вероятности отказов. Обновление же структурных элементов системы, требующее материальных затрат на ввод в эксплуатацию нового оборудования и линий связи позволит сэкономить расходы на обслуживание и поддержание на заданном уровне надёжности (безопасности) электросетевого объекта.

Задача 3. Сравнительный анализ надёжности вариантов структурной организации электроэнергетических объектов.

Аналогично задаче 2 проводится два модельных эксперимента. Первый эксперимент

предполагает расчёт надёжности $h1$ -го варианта структурной организации объекта при заданном составе элементов и их параметров надёжности. Второй эксперимент проводится для $h2$ -го варианта структурной организации объекта. Результатом расчёта является вектора P_{h1} и P_{h2} вида (2.3). Для каждого из вариантов рассчитывается интегральный показатель эффективности организации системы (3.1), определяющий выбор решения по изменению структуры объекта.

Задача 4. Выявление «узких мест» в электроэнергетической системе для h -го варианта структурной организации.

На основе экспертных оценок специалистов-предметников для исследуемого h -го варианта электроэнергетического объекта составляется список l -ых элементов L , являющихся потенциальными «узкими местами», снижение надёжности которых решающим образом сказывается на надёжности всей электроэнергетической системы.

Для каждого l -го элемента из списка L потенциальных «узких мест» проводится серия модельных экспериментов, предполагающих расчёт надёжности h -го варианта структурной организации объекта при неизменных текущих параметрах надёжности всех элементов, кроме параметров оцениваемого l -го элемента. Вероятность надёжной работы l -го элемента (p_0^l) варьируется с выбранным шагом hr в пределах от текущего (p_0^{actual}) до минимального допустимого значения (p_0^{min}). Как и в задаче 2, для проведенной серии экспериментов рассчитываются значения обобщённого показателя эффективности (3.1) при $\delta_2 = 0$. В том случае, если значение обобщённого показателя снижается на $D\%$ ($D \geq 70$), считается, что l -ый элемент является выявленным «узким местом».

Таким образом формируется список $L1$ «узких мест», требующих организационных и технических мер по повышению их надёжности. Элементы списка $L2 = L - L1$ не оказывают существенного влияния на надёжность исследуемого объекта и их эксплуатационные параметры можно оставить без изменения.

Задача 5. Сравнительный анализ мер по повышению уровня надёжности электроэнергетических объектов за счёт ликвидации «узких мест».

Устранение «узких мест» в электроэнергетическом объекте возможно двумя способами: путём повышения надёжности контрольных элементов; путём изменения структурной организации исследуемого объекта (использование резервирования энергоузлов без ограничения максимальной нагрузки).

При первом способе для l -ых элементов из списка $L1$ «узких мест», выявленных при решении

задачи 4, требующих мер по повышению их надёжности, проводится серия модельных экспериментов, предполагающих расчёт надёжности h -го варианта структурной организации объекта при неизменных текущих параметрах надёжности всех элементов, кроме параметров оцениваемого l -го элемента. Вероятность надёжной работы l -го элемента (p_0^l) варьируется с выбранным шагом hr в пределах от текущего ($p_0^{l\text{ actual}}$) до максимально возможного значения ($p_0^{l\text{ max}}$). Для проведенной серии экспериментов рассчитываются значения обобщённого показателя эффективности (3.1). Определяются номер эксперимента и параметры надёжности контрольного элемента, дающие максимальный рост обобщённого показателя.

Второй способ реализуется путём изменения структурной организации исследуемой системы при неизменных параметрах надёжности структурных элементов. Для контрольного элемента рассматриваются различные v -варианты резервирования (холодного, горячего, схемы мажоритарной логики). Для выбранных вариантов проводятся модельные эксперименты, результатом которых являются вектора $P_{h1}, P_{h2}, \dots, P_{hv}$ вида (2.3). Для каждого из v -вариантов рассчитывается интегральный показатель эффективности организации системы (3.1). Максимальное значение показателя эффективности определяет искомый v -вариант организации электроэнергетической системы, обеспечивающий высокий уровень надёжности при ограниченной стоимости реконструкции объекта.

Задача 6. Сравнительный анализ надёжности k -ых вариантов организации трансформаторной подстанции.

Способ формализации энергосетей в виде графовых иерархических структур позволяет рассчитать надёжность организации электрической части подстанций и оценить степень влияния их надёжности на надёжность организации сети в целом с учетом норм технологического проектирования, определяющих основные требования по проектированию электроэнергетической сети района (электрической части подстанций переменного тока энергосистем Республики Беларусь с высшим напряжением 35–750 кВ) [11].

Сравнение осуществляется на основе сопоставления значений обобщенных откликов (3.1), полученных для множества моделей k -ых вариантов организации исследуемой подстанции, и анализа состава исходных структурных элементов и их параметров надёжности, отвечающих требованиям по проектированию трансформаторных подстанций.

Формирование вариантов организации трансформаторных подстанций предполагает рассмотрение различных схем, включающих меры, как

по повышению надёжности элементов, так и изменению структуры объектов.

Задача 7. Динамическое моделирование электроэнергетической системы, функционирующей в условиях накопления повреждений структурными элементами (линиями связи, оборудованием).

Задача решается путём реализации многошаговой итерационной процедуры моделирования, включающей статическое вероятностно-алгебраическое моделирование на каждой итерации, и динамическое управление, позволяющее учесть при моделировании корреляционную зависимость элементов электроэнергетических систем.

Результатом моделирования является множество векторов вероятностей (2.4) и совокупность вариантов изменения структуры $\{G_{ht}\}$, позволяющих спланировать меры по управлению и адаптации исследуемого электроэнергетического объекта на предстоящий период эксплуатации с учётом изменений вероятностных характеристик надёжности, как отдельных элементов системы, так и групп элементов, образующих энергоузлы исследуемого объекта.

При этом установлено, что возрастание числа отказов элементов электроэнергетических систем и ликвидация последствий отказов оборудования и повреждений линий связи снижает показатели надёжности организации сетевого объекта в целом и увеличивает стоимость функционирования объекта по отношению к запланированным величинам. Это сказывается на обобщённых показателях эффективности (3.1), рассчитанных на каждом шаге моделирования. Переход к моделированию с управлением позволит избежать снижения обобщённого показателя эффективности и обеспечить функционирование объекта на приемлемом уровне.

Задача 8. Подбор параметров надёжности структурных элементов, обеспечивающих заданный уровень надёжности (безопасности) электроэнергетической системы.

Вероятностно-алгебраический аппарат позволяет решать не только прямые задачи 1–7, но и обратные. С этой целью задаётся вектор вероятностей (2.3) надёжности функционирования исследуемой электроэнергетической системы и рассчитываются вектора вероятностей структурных элементов вида (2.1). Значения полученных векторов позволяют разработать конкретные варианты технической реализации исследуемых энергообъектов.

Задача 9. Сравнительный анализ организации электроэнергетических систем со множеством входов/выходов.

Все задачи 1–8, планируемые для исследуемой электроэнергетической системы, могут быть решены как для двух терминальных вершин, определяющих поступление электроэнергии и её потребление, так и для случая трёх или четырёх

терминальных вершин, каждая из которых может соответствовать месту поступления и потребления энергии. Итогом выбранной схемы формализации является фрагмент графа, имеющий набор терминальных вершин $i = 3, 4$. Сама система в таком случае интерпретируется как система-трёхполюсник или система-четырёхполюсник, для расчёта надёжности которой может быть применена универсальная методика, реализованная в рамках вероятностно-алгебраической методологии.

Для исследуемой системы рассматриваются альтернативные v -варианты, отличающиеся числом и местом расположения терминальных вершин, при неизменном составе элементов, их структурной организации и параметрах надёжности. Результаты моделирования представляются в виде векторов вероятностей вида

$$P^s = (p_1^s, p_2^s, \dots, p_5^s), \quad \sum_{j=1}^5 p_j^s = 1,$$

$$P^s = (p_1^s, p_2^s, \dots, p_{15}^s), \quad \sum_{j=1}^{15} p_j^s = 1, \quad (3.5)$$

соответственно, для вариантов-трёхполюсников и вариантов-четырёхполюсников. Анализ вероятностей 5 состояний для вариантов-трёхполюсников и 15 состояний для вариантов-четырёхполюсников позволяет принять решение о предпочтительности одного из вариантов.

Задача 10. Оценка надёжности электроэнергетической системы большой размерности.

Задача решается поэтапно. Вначале граф исследуемой электроэнергетической системы представляется в виде совокупности подструктур n -полюсников ($n = 2, 3, 4$), выступающих в качестве элементов агрегированных объектов, надёжность которых оценивается путём решения задач 1, 9. Таким образом формируются значения векторов вероятностей (2.3), (3.5) для выделенных подсистем. Далее реализуется метод вероятностно-алгебраического моделирования систем большой размерности, в результате работы которого рассчитываются значения векторов (2.3) и (3.5), но уже для всей системы. С использованием обобщённого показателя (3.1) оценивается эффективность организации исследуемого варианта организации сетевого объекта.

Заключение

Представленная методология в виде совокупности методов вероятностно-алгебраического моделирования эффективна как при анализе вероятностных характеристик надёжности функционирующих электроэнергетических систем, так и при проектировании новых электросетевых объектов, предполагающих подключение новых линий электропередачи, оценку характеристик надёжности вариантов организации трансформаторных подстанций с целью повышения надёжности и безопасности организации всей системы.

Она позволяет адаптировать исследуемые электросетевые объекты под случайным образом изменяющуюся нагрузку и условия внешней среды, а также оперативно решить следующие задачи, возникающие при управлении электросетевыми объектами:

- анализ надёжности вариантов структурной организации электроэнергетической системы по заданному критерию эффективности;
- оценка изменения надёжности организации электроэнергетических объектов в результате изменения параметров надёжности их элементов;
- выявление «узких мест» в электроэнергетической системе;
- анализ надёжности вариантов организации трансформаторных подстанций;
- расчёт параметров надёжности элементов, обеспечивающих заданный уровень надёжности и безопасности электроэнергетической системы установленной структурной организации;
- сравнительный анализ вариантов внешнего резервирования фидеров электроэнергетической системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рябинин, И.А.* Надёжность и безопасность структурно-сложных систем / И.А. Рябинин. – СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2007. – 276 с.
2. *Можаев, А.С.* Универсальный графоаналитический метод, алгоритм и программный модуль построения монотонных и немонотонных логических функций работоспособности систем / А.С. Можаев // Труды третьей Международной научной школы «Моделирование и Анализ Безопасности и Риска (МА БР – 2003)», 20–23 августа, 2003. – СПб – 517 с.
3. *Демиденко, О.М.* Имитационное моделирование процессов отказов и восстановлений работоспособности оборудования вычислительной системы / И.В. Максимей, О.М. Демиденко, Е.И. Сукач // Реестрация, зберігання і обробка даних (Data Recording, Storage & Processing). – 2000. – Т. 2, № 1. – С. 33–46.
4. *Сукач, Е.И.* Использование логического моделирования для исследования сложных систем / Е.И. Сукач // Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. – 2004. – № 4 (25). – С. 60–64.
5. *Сукач, Е.И.* Методика расчета показателей надёжности многокомпонентных структурно-сложных систем со многими состояниями / Е.И. Сукач // Информатика. – 2011. – № 3. – С. 13–22.
6. *Сукач, Е.И.* Методика оценки вероятностных характеристик надёжности систем-четырёхполюсников / Е.И. Сукач // Доклады БГУИР. – 2012. – № 7 (69). – С. 71–77.
7. *Сукач, Е.И.* Вероятностная оценка надёжности сетевых структур-трёхполюсников /

Е.И. Сукач, Д.В. Ратобильская, С.Ф. Маслович // Информационные технологии в промышленности (ИТ*2012): тезисы докладов седьмой Международной научно-технической конференции (30-31 октября 2012 г., Минск). – Минск : ОИПИ НАН Беларуси, 2012. – С. 139–140.

8. Сукач, Е.И. Вероятностно-алгебраическое моделирование сложных систем графовой структуры / Е.И. Сукач; М-во образования РБ, Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2012. – 224 с.

9. Сукач, Е.И. Моделирование вероятностных характеристик сложных систем с использованием стохастических алгебр / Д.В. Ратобильская, В.Н. Кулага, Е.И. Сукач // V Международная конференция-форум «Информационные системы и технологии», Академия управления при Президенте Республики Беларусь, 16–17 ноября 2009 г. – Минск : А.Н. Варахсин. – 2009. – Ч. 1. – С. 178–181.

10. Система вероятностно-алгебраического моделирования «Probability Algebraic Simulation (PALS)»: свидетельство о регистрации компьютерной программы № 450 / Е.И. Сукач, Д.В. Ратобильская. – Минск: НЦИС, 2012. – Заявка № С20120049. – Дата подачи: 25.06.2012.

11. СТП 09110.20.524-12. Инструкция по разработке нормальных схем основной сети РУП-облэнерго, схем электрической сети 35–750 кВ РУП-облэнерго и нормальных схем электрических соединений энергообъектов. – Минск, ГПО «Белэнерго», 2012.– 47 с.

12. Способ формализации объектов графовой структуры с вероятностными параметрами функционирования / Е.И. Сукач [и др.] // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2012. – № 5 (74). – С. 195–202.

Поступила в редакцию 28.03.14.

УДК 622.23.08

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ НАДЕЖНОСТИ И ЭЛЕКТРОПОТРЕБЛЕНИЯ

С.Ф. Маслович¹, В.Н. Галушко², С.В. Бахур³

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

²Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

³Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель, Беларусь

MATHEMATICAL SIMULATION PARAMETERS OF RELIABILITY AND ENERGY CONSUMPTION

S.F. Maslovich¹, V.N. Halushko², S.V. Bakhur³

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

²Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

³P.O. Sukhoi Gomel State Technical University, Gomel, Belarus

Рассматривается идея создания программно-статистического инструментария, с помощью которого можно моделировать, анализировать и принимать решения по уменьшению последствий колебаний, несимметрии напряжения, отклонений частоты в электрической сети, повышению надежности электрических объектов и систем.

Ключевые слова: математическое моделирование, надежность, электропотребление, электрооборудование, электрическая схема.

The idea of creating software and statistical tools, with which you can simulate, analyze and take decisions to reduce the impact vibrations, voltage unbalance, frequency deviations in the electrical network and higher reliability of electric facilities and systems is considered.

Keywords: mathematical simulation, reliability, power consumption, electrics, electrical schema.

Введение

Для обеспечения безопасной и эффективной работы в режимах эксплуатации и ремонта электрооборудования необходимо знать фактический уровень надежности электрооборудования с учетом воздействия реальных эксплуатационных факторов [1]. Поэтому актуальной задачей является разработка методов и математических моделей количественной оценки показателей эксплуатационной надежности и эффективности работы электрооборудования, позволяющих учесть основные влияющие факторы.

Целью данной работы является создание программно-статистического инструментария для уменьшения последствий колебаний, несимметрии напряжения, отклонения частоты в электрической сети, повышения надежности электрических объектов и систем. Развитие теории и совершенствование методов расчета показателей эксплуатационной надежности электрооборудования с учетом условий и режимов работы.

1 Математическое моделирование эксплуатационной надежности и эффективности работы электрооборудования

Схема этапов математического моделирования представлена на рисунке 1.1.

Применение программных пакетов электрического моделирования (*Multisim*, *OrCad*, *Simulink*)

всех элементов систем электроснабжения по отдельности и в комплексе с целью проверки существующих результатов энергопотребления и прогнозирования изменения электропотребления при проведении энергоаудита по предложенным мероприятиям. По результатам моделирования электрических систем цехов и целых предприятий создана библиотека шаблонов, с помощью которых исследователю не требуется заново создавать рабочий прототип, а лишь составить свою схему. На данном этапе проводились приборные эксперименты по анализу влияния различных факторов (отклонения напряжения и частоты) на электропотребление (активная и реактивная мощности, гармонический состав тока и т. д.) для используемого и нового оборудования, рекомендованного при проведении энергоаудита на предприятиях машиностроения. Современные программные пакеты электрического моделирования позволяют значительно экономить время на аналитических расчетах, создавать библиотеки баз данных, программировать отказы элементов, подбирать рабочие прототипы схем с рабочими параметрами с помощью встроенного отладчика ошибок моделирования, указывать в модели элементы схем не подходящих по напряжению и току, использовать реальные и виртуальные элементы с заданными характеристиками, применять большое число виртуальных приборов, часто

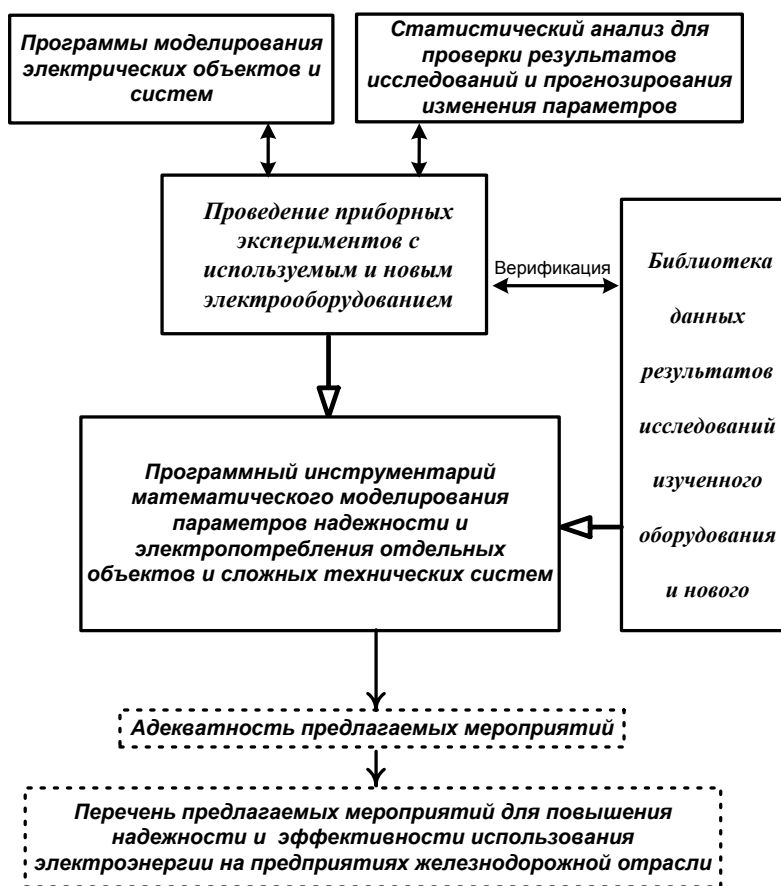


Рисунок 1.1 – Схема этапов математического моделирования

недоступных на практике (цифровой запоминающий осциллограф, плоттер Боде, частотомер, логический анализатор, измеритель нелинейных искажений, приборы LabVIEW), дают возможность разработки новых библиотек элементов на языках VHDL и SPICE, возможность объединения в пакет различных анализов или образцов одного и того же анализа для последовательного выполнения и т. д.

2 Примеры реализации моделирования электрических систем

Применение моделирования электрических систем позволяет не только установить условия работы электрооборудования, но и выявить причины, вызвавшие их отклонения.

Например, неблагоприятное влияние на питающую сеть оказывают дуговые печи, которые могут иметь мощность до 10 МВт и сооружаются как однофазные. Это приводит к нарушению симметрии токов и напряжений. Кроме того, дуговые печи, как и вентиляльные установки, являются нелинейными ЭП с малой инерционностью. Поэтому они приводят к несинусоидальности токов, а, следовательно, и напряжений. Электросварочные установки могут являться причиной нарушения нормальных условий работы для

других ЭП. В частности, сварочные агрегаты, мощность которых достигает 1500 кВт в единице, вызывают значительно большие колебания напряжения в электрических сетях, чем, например, пуск асинхронных двигателей с короткозамкнутым ротором. Кроме того, эти колебания напряжения происходят длительно и с широким диапазоном частот, в том числе и в самом неприятном для установок электрического освещения диапазоне (порядка 10 Гц) [2], [3].

Пример реализации части электрической схемы с помощью программного пакета Multisim представлен на рисунке 2.1.

3 Задачи статистического анализа, при изучении сложных многофакторных систем

Основная задача статистического анализа – создание эффективного инструментария оценки параметров надежности и электропотребления отдельных объектов и сложных технических систем. За основу приняты такие программы, как MS Excel, Statgraphics, Statistica, SPSS.

Рассмотрим некоторые виды задач многомерного статистического анализа, которые могут возникнуть при изучении сложных многофакторных систем.

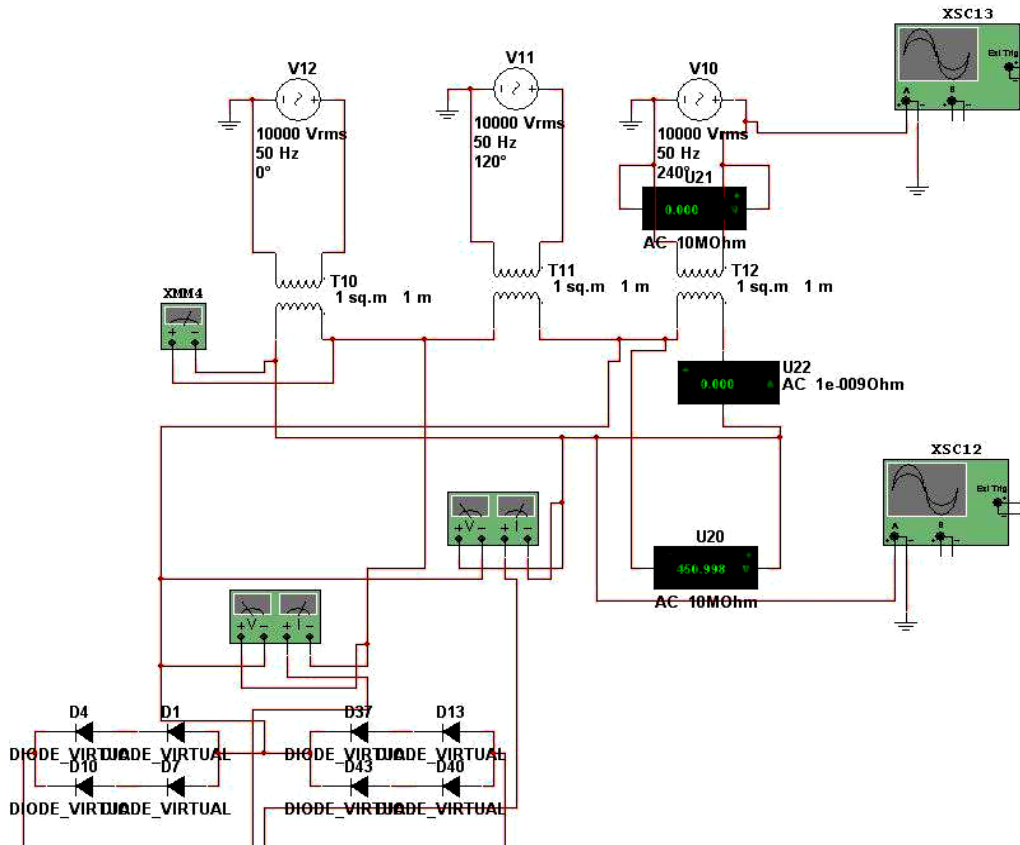


Рисунок 2.1 – Пример реализации части электрической цепи в Multisim10

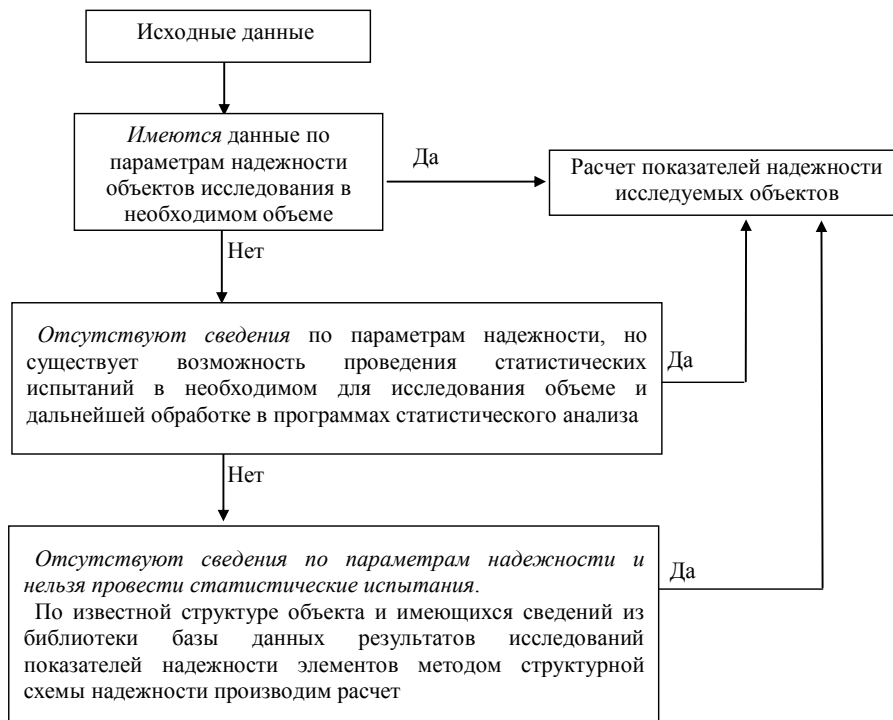


Рисунок 3.1 – Алгоритм определения показателей надежности объектов в зависимости от информационной базы данных

1. Существует ли связь между отдельными факторами.
2. Если между какими-то факторами есть связь, то насколько она тесная.
3. Если между какими-то факторами есть связь, то какой функцией ее представить.
4. Какие входные факторы оказывают на определенные выходные наибольшее влияние.
5. Какие входные факторы можно отбросить из процесса изучения на основании их слабого, сравнимого с шумом, влияния.
6. Существуют ли неучтенные факторы, которые необходимо рассматривать ввиду их существенного влияния на выходные.
7. Существуют ли обобщенные факторы, которыми можно заменить рассматриваемые.
8. Как связаны между собой зашумленные факторы и каковы характеристики шума.
9. Как выделить «полезную» информацию из зашумленной.

Все эти задачи можно решить с помощью методов многомерного статистического анализа, включающего в себя следующие анализы: корреляционный, регрессионный, конъюэнтный, дисперсионный, факторный, теорию фильтрации.

Каждый из этих разделов – совокупность методов и приемов математической статистики. Выбор методов диктуется лишь конкретной практической задачей. Так, например, задачи 1, 2 вышеприведенного списка решаются методами корреляционного анализа, задача типа 3 – регрессионного анализа. Задачи 4, 5, 6 относятся к задачам дисперсионного анализа, 7 – факторного, а 8 – конъюэнтного. Теория фильтрации позволяет решить задачи типа 9.

В зависимости от информационной составляющей исследуемого объекта и возможности проведения статистических испытаний выполнены разные подходы по определению параметров надежности (рисунок 3.1).

4 Структура программного инструментария

Структура программного инструментария включает в себя следующие элементы: шаблон исходных данных элементов исследуемого объекта и библиотека реализованных элементов (bibl. elementov); шаблон данных параметров моделирования в виде номинальных величин и отклонений от них (parametr. modelirov); дерево возможных связей между элементами; шаблон влияния различных факторов в виде процедуры аналитической зависимости для каждого элемента системы между показателями надежности и параметрами моделирования.

Результаты представляются в графическом или аналитическом виде. В качестве примера результатов можно привести часто используемую в других источниках [2], [3] зависимость характеристик ламп накаливания от напряжения,

но выполняемую применительно к современным источникам света.

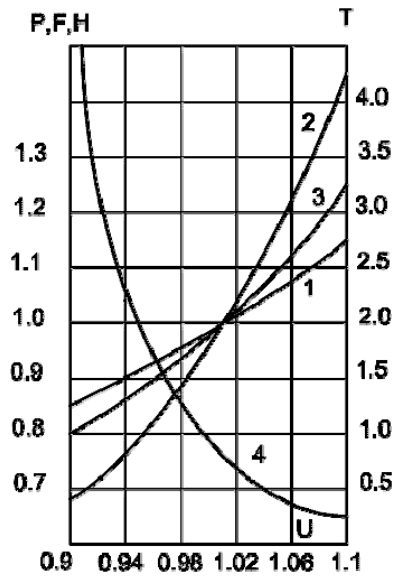


Рисунок 4.1 – Зависимости характеристик ламп накаливания от напряжения: 1 – потребляемая мощность, 2 – световой поток, 3 – световая отдача, 4 – срок службы

Например, срок службы изоляции T асинхронного двигателя при длительной работе и пониженном напряжении определяется по формуле:

$$T = \frac{T_{ном}}{R},$$

где $T_{ном}$ – срок службы изоляции двигателя при номинальном напряжении и номинальной нагрузке; R – коэффициент, зависящий от значения и знака отклонения напряжения, а также от коэффициента загрузки двигателя и равный:

$$R = \beta_1 \delta U^2 - \beta_2 \delta U^2 + 1.$$

Этап приборных экспериментов включает подбор соответствующего оборудования и методик испытаний. В перечень средств измерений входят: анализаторы качества электроэнергии, люксметры, тепловизоры, измерители плотности тепловых потоков, газоанализаторы и другие приборы.

5 Положения для математических моделей параметров надежности и электропотребления отдельных объектов и сложных технических систем

Библиотека данных по результатам накопленных сведений и проводимых исследований включает результаты исследований применяемого и нового оборудования. Ниже приводятся некоторые положения, составляющие часть информации математической модели параметров надежности и электропотребления отдельных объектов и сложных технических систем.

Влияние отклонений напряжения в электрической сети приводят к следующим последствиям:

- колебаниям светового потока осветительных приборов (фликер-эффект);
- ухудшению качества работы телевизионных приемников;
- нарушению в работе рентгеновского оборудования;
- ложной работе регулирующих устройств и ЭВМ;
- нарушениям в работе преобразователей;
- колебаниям момента на валу вращающихся машин, вызывающим дополнительные потери электроэнергии и увеличенный износ оборудования, а также нарушения технологических процессов, требующих стабильной скорости вращения.

При отклонении напряжения в положительную сторону расход энергии увеличивается, сокращаются сроки службы оборудования, особенно ламп накаливания. В Украине по данным Института электродинамики НАН Украины снижение качества электроэнергии увеличивает ее расход на 10–12 % [4].

Люминесцентные лампы менее чувствительны к отклонениям напряжения. При отклонениях напряжения на 10 % срок службы люминесцентных ламп в среднем снижается на 20–25 %. Существенным недостатком люминесцентных ламп является потребление ими реактивной мощности, которая растет с увеличением подводимого к ним напряжения.

При снижении напряжения уменьшается вращающий момент и частота вращения ротора асинхронного двигателя. Если производительность механизмов зависит от частоты вращения двигателя, то рекомендуется поддерживать напряжение не ниже номинального. При значительном снижении напряжения на выводах двигателей, работающих с полной нагрузкой, момент сопротивления механизма может превысить вращающий момент, что приводит к «опрокидыванию» двигателя, т. е. к его остановке. В случае снижения напряжения на зажимах двигателя реактивная мощность намагничивания уменьшается (на 2–3 % при снижении напряжения на 1 %), при той же потребляемой мощности увеличивается ток двигателя, что вызывает перегрев изоляции [5].

Резкие колебания напряжения отрицательно сказываются на динамике ведения поездов. Скачки тока и тягового усилия, вызываемые колебаниями напряжения, снижают надежность работы контакторов и опасны с точки зрения возникновения буксования. Для электроподвижного состава опасны колебания порядка 4–5 %.

Электросварочные установки переменного тока дуговой и контактной сварки представляют собой однофазную неравномерную и несинусоидальную нагрузку с низким коэффициентом мощности: 0,3 – для дуговой сварки и 0,7 – для

контактной. При снижении напряжения до $0,9 U_{\text{НОМ}}$ время сварки увеличивается на 20 %, а при выходе его за пределы (0,9... 1,1) $U_{\text{НОМ}}$ возникает брак сварных швов. Отклонения напряжения отрицательно влияют на работу электро-сварочных машин: например, для машин точечной сварки при изменении напряжения на 15 % получается 100 %-ный брак продукции.

Колебания напряжения более 10 % могут привести к погасанию газоразрядных ламп. Зажигание их в зависимости от типа ламп происходит через несколько секунд или даже минут. При глубоких колебаниях напряжения (более 15 %) могут отпасть контакты магнитных пускателей, вызвав нарушения технологии производства.

Колебания напряжения с размахом 10...15 % могут привести к выходу из строя конденсаторов, а также вентильных выпрямительных агрегатов.

Электрические печи чувствительны к отклонениям напряжения. Понижение напряжения электродуговых печей, например, на 7 % приводит к удлинению процесса плавки стали в 1,5 раза. Повышение напряжения выше 5 % приводит к перерасходу электроэнергии.

Влияние несимметрии напряжений на работу электрооборудования: при несимметрии напряжений в 2 % сроки службы асинхронных двигателей сокращаются на 10,8 %; синхронных – на 16,2 %; трансформаторов – на 4 %; конденсаторов – на 20 %. Срок службы полностью загруженного двигателя, работающего при несимметрии напряжения 4 %, сокращается в 2 раза. При несимметрии напряжения 5 % располагаемая мощность асинхронного двигателя уменьшается на 5–10 % [2], [3]. Скорость вращения асинхронных двигателей несколько снижается, возрастают вибрация вала и шум.

Несимметрия напряжения значительно ухудшает режимы работы многофазных вентильных выпрямителей: значительно увеличивается пульсация выпрямленного напряжения, ухудшаются условия работы системы импульсно-фазового управления тиристорных преобразователей.

Конденсаторные установки при несимметрии напряжений неравномерно загружаются реактивной мощностью по фазам, что делает невозможным полное использование установленной конденсаторной мощности. Кроме того, в этом случае усиливается уже существующая несимметрия, так как выдача реактивной мощности в сеть в фазе с наименьшим напряжением будет меньше, чем в остальных фазах (пропорционально квадрату напряжения на конденсаторной установке).

Влияние несинусоидальности напряжения. Наиболее серьезные нарушения имеют место в работе мощных управляемых вентильных преобразователей. Токи 3-й и 5-й гармоник газоразрядных ламп составляют 10 и 3 % от тока 1-й

гармоники. Эти токи совпадают по фазе в соответствующих линейных проводах сети и, складываясь в нулевом проводе сети 380/220 В, обуславливают ток в нем, почти равный току в фазном проводе.

Высшие гармоники тока и напряжения вызывают дополнительные потери активной мощности во всех элементах системы электроснабжения: в линиях электропередачи, трансформаторах, электрических машинах, статических конденсаторах, так как сопротивления этих элементов зависят от частоты. Так, например, емкостное сопротивление конденсаторов, устанавливаемых в целях компенсации реактивной мощности, с повышением частоты подводимого напряжения уменьшается. Поэтому, если в напряжении питающей сети есть высшие гармоники, то сопротивление конденсаторов на этих гармониках оказывается значительно ниже, чем на частоте 50 Гц. Из-за этого в конденсаторах, предназначенных для компенсации реактивной мощности, даже небольшие напряжения высших гармоник могут вызвать значительные токи гармоник. На предприятиях с большим удельным весом нелинейных нагрузок батареи конденсаторов работают плохо. Они или отключаются защитой от перегрузки по току или за короткий срок выходят из строя из-за вспучивания банок (или ускоренного старения изоляции) [6], [7].

Влияние отклонения частоты в энергосистеме на работу электроприемников. Различают электромагнитное и технологическое влияние отклонения частоты на работу электроприемников. Электромагнитная составляющая обуславливается

увеличением потерь активной мощности и ростом потребления активной и реактивной мощностей. Можно считать, что снижение частоты на 1 % увеличивает потери в сетях на 2 %.

Анализ работы предприятий с непрерывным циклом производства показал, что большинство основных технологических линий оборудовано механизмами с постоянным и вентиляторным моментами сопротивлений, а их приводами служат асинхронные двигатели. Частота вращения роторов двигателей пропорциональна изменению частоты сети, а производительность технологических линий зависит от частоты вращения двигателя.

Пониженная частота в электрической сети влияет на срок службы оборудования, содержащего элементы со сталью (электродвигатели, трансформаторы), за счет увеличения тока намагничивания в таких аппаратах и дополнительного нагрева стальных элементов.

Заключение

Практическое применение результатов исследования заключается в создании обоснованных предпосылок определения основных показателей надежности и потребляемой электроэнергии электрических систем при воздействии различных факторов. Результаты исследования позволят: прогнозировать показатели надежности электрооборудования в зависимости от условий эксплуатации; оценить степень опасности и установить «узкие места» электрических систем; разработать мероприятия по повышению эффективности функционирования электрооборудования.

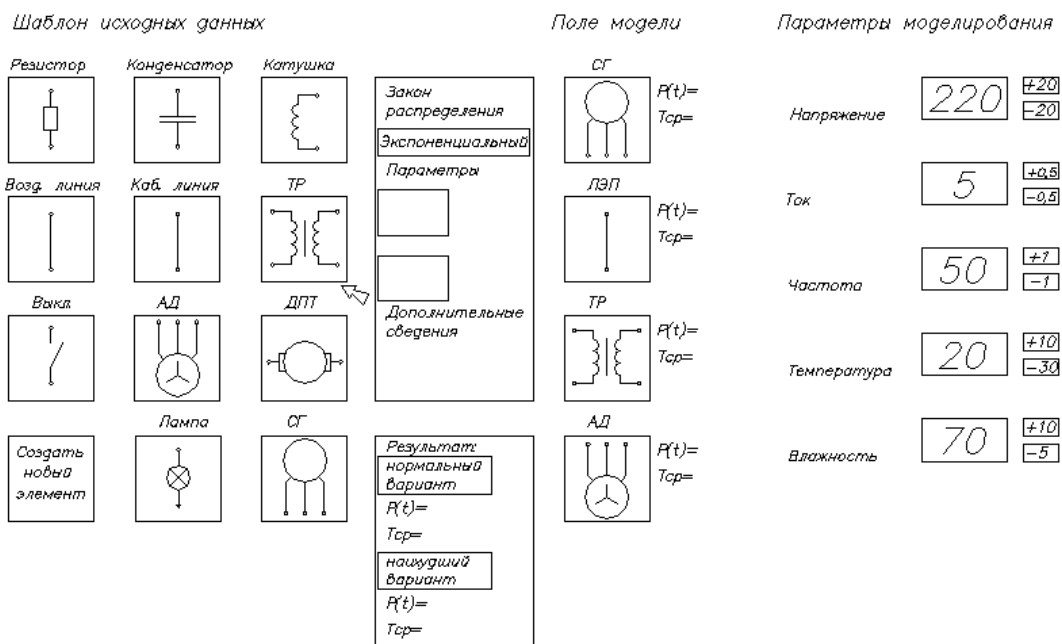


Рисунок 5.1 – Часть поля исходных данных математической модели расчета параметров надежности и электропотребления отдельных объектов и сложных технических систем

ЛИТЕРАТУРА

1. Назарычев, А.Н. Технология организации комплексной системы эксплуатации и ремонта электрооборудования по техническому состоянию / А.Н. Назарычев, Д.А. Андреев // Методы и средства оценки состояния энергетического оборудования. – ПЭИПК. – Иваново, 2004. – С. 15–24.

2. Оболенцев, Ю.Б. Электрическое освещение общепромышленных помещений / Ю.Б. Оболенцев, Э.Л. Гиндин. – М. : Энергоатомиздат, 1990. – 112 с.

3. Епанешников, М.М. Электрическое освещение / М.М. Епанешников. – М. : Энергия, 1973. – 352 с.

4. Сапрыка, А.В. Влияние низкого качества электроэнергии в сетях наружного освещения на энергоэффективность ламп высокого давления / А.В. Сапрыка // Вестник ХНАДУ. – 2007. – № 37. С. 25–32.

5. Головкин, П.И. Энергосистема и потребители электрической энергии. / П.И. Головкин. – М. : Энергия, 1979. – 350 с.

Поступила в редакцию 25.02.14.

УДК 656.13:004

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА СБОРА И АНАЛИЗА ДАННЫХ О ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКАХ ДЛЯ ПРЕДУПРЕЖДЕНИЯ ОБРАЗОВАНИЯ ЗАТОРОВ НА ДОРОГАХ г. МОГИЛЕВА

И.И. Мельников, К.А. Демиденков, И.А. Евсеенко

Белорусско-Российский университет, Могилев, Беларусь

AUTOMATION OF THE TRAFFIC FLOW DATA COLLECTION AND ANALYSIS PROCESS TO AVOID TRAFFIC CONGESTIONS IN MOGILEV

I.A. Melnikau, K.A. Demedenkov, I.A. Yeuseyenka

Belarusian-Russian University, Mogilev, Belarus

Проведен анализ часто используемых видов транспортных детекторов. Рассмотрены преимущества и недостатки оптических транспортных детекторов (видеокамер). Предложена модель автоматизированной системы сбора и анализа данных о транспортных потоках города. Предложен способ совершенствования многослойного статистического метода путем применения параллельных вычислений на базе графических процессоров. Результаты экспериментальных исследований показали, что данный способ позволил снизить время обработки одного кадра в 1,9 раза.

Ключевые слова: транспортный поток, транспортный детектор, плотность движения, интенсивность транспортного потока, статистический метод выделения переднего плана *Multi-Layer Background Subtraction*.

The analysis of commonly used traffic detectors and advantages and disadvantages of optical traffic detectors (IP-cameras) is given. The model of the traffic flow data collection and analysis automation system and the method of modification of the Multi-Layer Background Subtraction algorithm using parallel computing based on the graphic processors are suggested. The experimental investigations show that the modified method can help to decrease video frame processing speed in 1.9 times.

Keywords: traffic flow, traffic detector, traffic density, traffic flow intensity, Multi-Layer Background Subtraction algorithm.

Введение

Стремительное увеличение автопарка в Республике Беларусь, опережая рост пропускных способностей дорог, приводит к частому образованию заторов на дорогах крупных областных центров страны. По данным Министерства транспорта и коммуникаций Республики Беларусь по состоянию на 01.01.2010 г. он насчитывал 3433 тыс. автотранспортных средств, из которых 83,6% приходилось на автомобили [1]. За период с 2005 по 2009 гг. число автотранспортных средств возросло на 21 %, а уровень автомобилизации населения Беларуси повысился с 280 до 340 автотранспортных средств на 1 тыс. населения. Рост объема автопарка продолжается во всех областных центрах Республики Беларусь, в том числе в г. Могилеве.

Сегодня в г. Могилеве работает система управления дорожным движением, которая позволяет получать эффект «зеленой волны» на некоторых улицах и проспектах (ул. Челюскинцев, ул. Пионерская и др.), тем самым предупреждая образование заторов [2]. Однако использование такой системы становится не достаточно эффективным средством и количество заторов увеличивается. Необходимо оперативно собирать и обрабатывать информацию о характеристиках транспортного потока на различных

участках дорог всего города и быстро реагировать на изменение дорожно-транспортной обстановки (например, менять режимы работы светофоров), а также анализировать собранную информацию для составления прогнозов.

1 Транспортные потоки и их характеристики

Транспортные потоки можно разделить на два основных типа: непрерывный и прерывный. Интенсивность непрерывного транспортного потока регулируется характером взаимодействия транспортных средств между собой и поведения транспортных средств на трассе. Например, транспортные средства, движущиеся по автомагистрали, формируют непрерывный транспортный поток.

Интенсивность же прерывного транспортного потока регулируется внешними средствами, например, светофорными объектами. В режиме прерывного транспортного потока характер взаимодействия транспортных средств между собой и поведения транспортных средств на трассе играет второстепенную роль в формировании транспортного потока. Применительно к этому типу и решалась задача снижения количества заторов, поскольку прерывный транспортный поток свойственен городам.

Описание транспортного потока базируется на множестве характеристик. Рассмотрим наиболее часто используемые.

Скорость движения. Скорость движения транспортного средства определяется расстоянием, преодолеваемым этим транспортным средством за единицу времени. Большую часть времени скорость каждого транспортного средства, движущегося по трассе, так или иначе отличается от скорости других находящихся поблизости транспортных средств. Средняя скорость движения автотранспорта является одним из важнейших количественных параметров транспортного потока. Среднюю скорость, которую также называют средней скоростью движения на определенном участке, можно определить путем усреднения скоростей движения всех транспортных средств в районе исследования.

Интенсивность транспортного потока. Интенсивность транспортного потока характеризуется количеством транспортных средств, проходящих по данному участку дороги за определенный промежуток времени и обычно выражается количеством транспортных средств в час.

Плотность движения. Под плотностью движения понимают количество транспортных средств, находящихся на данном участке трассы. Обычно плотность движения выражается количеством транспортных средств на километр. Высокий показатель плотности движения указывает на то, что отдельные транспортные средства располагаются весьма близко друг от друга, а низкий показатель свидетельствует о том, что они расположены друг от друга на большем расстоянии.

Временной интервал следования. Временной интервал следования представляет показатель, характеризующий временной промежуток между двумя транспортными средствами. В частности, временной интервал следования это промежуток времени между прибытием впереди идущего и следующего сзади транспортного средства в назначенную контрольную точку. Временной интервал следования обычно выражается в секундах.

Дистанция следования. Дистанция следования – это физическое расстояние между передним бампером впереди идущего транспортного средства и передним бампером следующего сзади транспортного средства, обычно выражаемое в метрах. Дистанция следования включает в себя временной интервал следования, так как она характеризует то же самое расстояние, но иным способом. Дистанция следования математически представляет собой произведение скорости движения на временной интервал следования.

В проводимых исследованиях используются следующие характеристики: скорость движения, интенсивность транспортного потока и плотность движения. Данные показатели являются взаимозависимыми и в условиях непрерывного

транспортного потока могут быть представлены следующим образом:

$$q = k \cdot v, \quad (1.1)$$

где q – интенсивность транспортного потока, транспортные средства/ч; v – скорость движения, км/ч; k – плотность движения, транспортные средства/км.

В случае с прерывным транспортным потоком связь не столь очевидна, однако также прослеживается.

Для определения параметров, приведенных в формуле (1.1), наиболее быстро и точно инструментальными средствами можно измерить два: интенсивность транспортного потока и плотность движения. Скорость движения может быть рассчитана по формуле (1.1).

2 Средства измерения интенсивности транспортного потока и плотности движения

Сегодня для сбора данных о плотности движения и интенсивности транспортного потока применяются транспортные детекторы различного типа: контактного, фотоэлектрического, ультразвукового, магнитного и т. д. Ниже представлены преимущества и недостатки наиболее часто используемых типов детекторов (таблица 2.1) [3].

Как видно из таблицы 2.1, каждая технология обладает своими преимуществами и недостатками. Технология видеонаблюдения выглядит довольно перспективной. У нее большие преимущества перед детекторами другого типа, а некоторые недостатки могут быть успешно устранены. Так, на сегодняшний день существуют довольно эффективные алгоритмы [4], которые позволяют нивелировать отрицательный эффект воздействия внешней среды на камеру, а современные IP-камеры позволяют вести непрерывное наблюдение днем и ночью и упростить процесс обработки видеосигнала.

Видеокамеры могут применяться совместно с детекторами других типов, например, для одновременного измерения скорости движения автомобиля и его идентификации (распознавания номера, определение класса автомобиля, его цвета и т.п.), как показано на рисунке 2.1.

Для организации видеоконтроля применяется несколько типов камер, которые могут быть установлены в соответствии с одним из нескольких возможных вариантов (рисунок 2.2).

Первый тип – панорамные камеры низкого разрешения для мониторинга транспортного потока и определения нарушений. Обычно применяется одна камера на одно направление движения.

Второй тип камер – камеры высокого разрешения – применяются для фиксации номерных знаков транспортных средств. Обычно используется одна камера на две-три полосы движения.

Третий тип – роботизированная камера с возможностью масштабирования. Применяется

Таблица 2.1 – Преимущества и недостатки транспортных детекторов разных типов

Технология	Преимущества	Недостатки
Пассивная/активная инфракрасная	<ol style="list-style-type: none"> 1. Простота установки. 2. Надежность. 3. Устойчивость к воздействию окружающей среды. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Покрывает 1–2 полосы движения. 2. Классификация транспортных средств базируется на исследовании высоты объекта, а не длины. 3. Работа пассивных датчиков ухудшается при дожде и снегопаде.
Радар	<ol style="list-style-type: none"> 1. Тяжелые климатические условия не влияют на работу детектора. 2. Прямое измерение скорости. 3. Одновременно обслуживает несколько полос движения. 	<p>Плохо работает на перекрестках при подсчете объема транспортного потока.</p>
Ультразвуковая	<ol style="list-style-type: none"> 1. Простота установки. 2. Одновременно обслуживает несколько полос движения. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Работа ухудшается при сильных колебаниях температуры и турбулентности потока воздуха. 2. Измерение занятости полос на трассах при высоких скоростях может ухудшаться.
Видео	<ol style="list-style-type: none"> 1. Одновременно обслуживает несколько зон и несколько полос движения. 2. Простота установки и перенастройки детектируемых зон. 3. Возможность сбора больших массивов данных. 4. Широкая зона детектирования. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Воздействие тяжелых климатических условий, тени, резкие перемещения транспортных средств из одной полосы в другую, обледенение, смена дня и ночи могут влиять на работу камер. 2. Сильный ветер может приводить к вибрации несущих конструкций, а, следовательно, и камеры. 3. Большие объекты наблюдения могут загромождать маленькие.

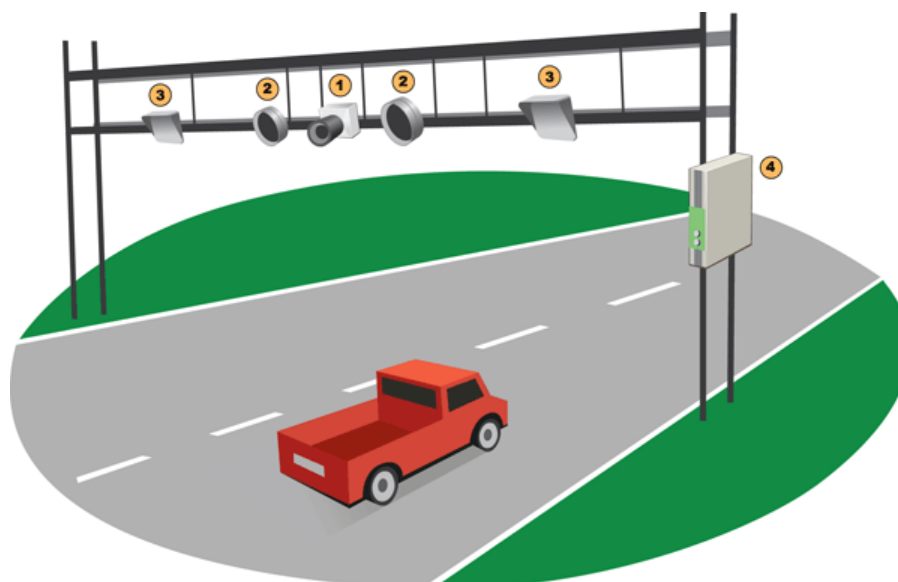


Рисунок 2.1 – Пример использования видеокамеры совместно с детекторами другого типа
 (1 – камера высокого разрешения; 2 – импульсный инфракрасный прожектор; 3 – радар; 4 – уличный сервер)

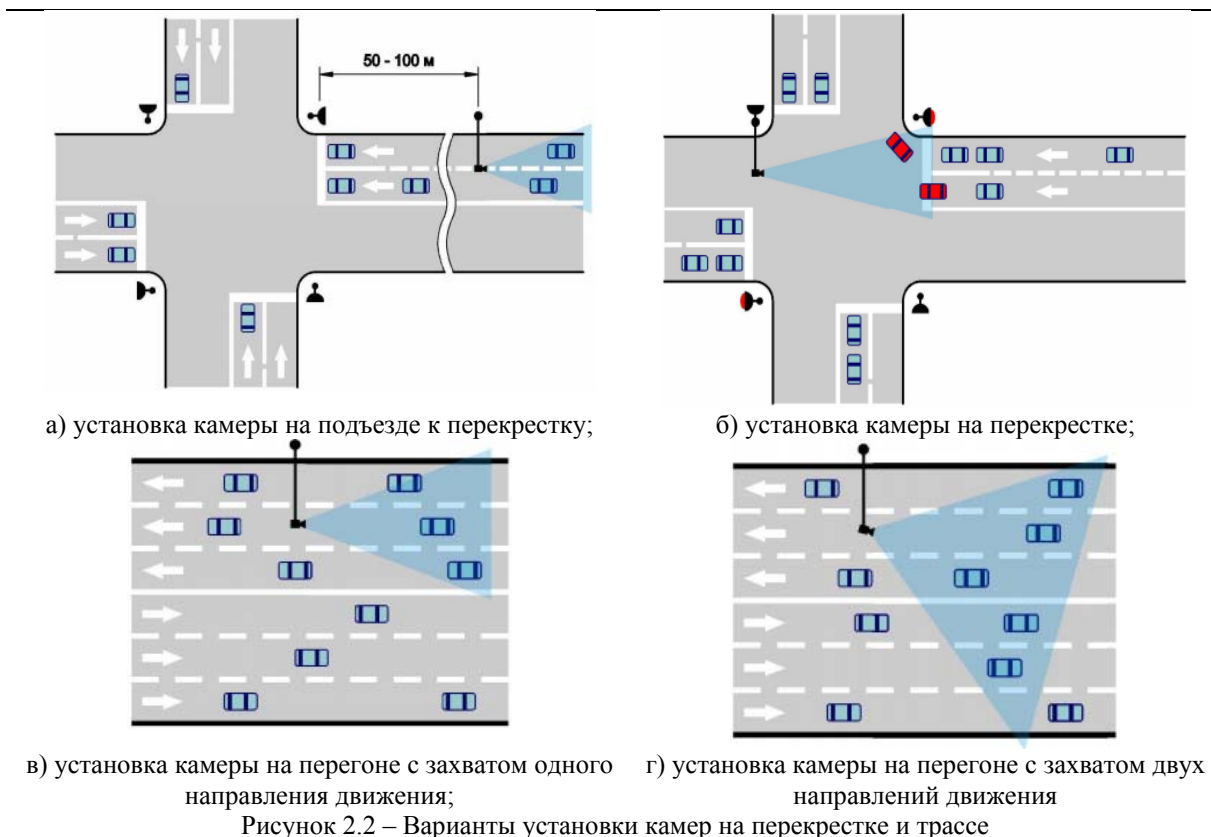


Рисунок 2.2 – Варианты установки камер на перекрестке и трассе

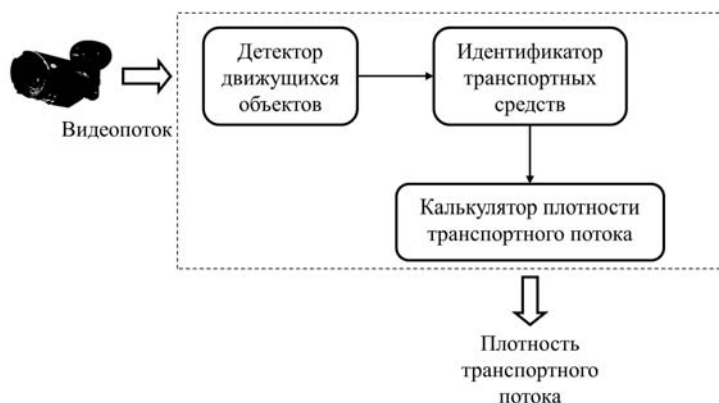


Рисунок 3.1 – Общая модель разрабатываемой системы

для общего наблюдения за перекрестком. Количество таких камер определяется сложностью дорожных ситуаций, возникающих на перекрестке.

Отличительной особенностью видеокамер является получение визуальной информации о дорожной обстановке сразу с нескольких полос благодаря широкому углу обзора. Но обработка видеоизображения, причем не всегда высокого качества, с последующим распознаванием движущихся объектов на нем является ресурсоемкой задачей, требующей нередко специализированного и дорого оборудования.

На дорогах г. Могилева на сегодняшний день отсутствуют транспортные детекторы инфракрасного, ультразвукового и акустического типа, зато установлено большое число видеокамер, предназначенных для наблюдения за безопасностью

дорожного движения. Однако потенциал видеокамер гораздо шире, и их можно использовать в качестве средств сбора данных о плотности движения и интенсивности транспортного потока.

3 Модель автоматизированной системы определения плотности движения и интенсивности транспортного потока на базе видеонаблюдения

Процесс обработки и анализа видеоизображения состоит из нескольких этапов:

- выделение переднего плана;
- выделение и классификация движущихся объектов;
- распознавание и описание движения найденных объектов.

На каждом этапе можно использовать различные алгоритмы, обладающие определенными достоинствами и недостатками.

Разрабатываемая система состоит из трех модулей (рисунок 3.1): детектора движущихся объектов, идентификатора транспортных средств, калькулятора характеристик транспортного потока. В детекторе движущихся объектов происходит выделение и классификация движущихся объектов. В идентификаторе транспортных средств – распознавание движущихся объектов на базе искусственных нейронных сетей. Калькулятор плотности движения (плотности транспортного потока) рассчитывает плотность транспортного потока и определяет его состав, используя информацию о транспортных средствах, успешно распознанных идентификатором транспортных средств.

Основная нагрузка возлагается на методы этапа выделения переднего плана. От того, насколько точно выбранный метод позволяет отделить точки изображения, принадлежащие движущимся объектам, от точек статического фона, во многом зависит качество работы методов последующих этапов, а значит и всей системы в целом. Именно на него большое влияние оказывает внешняя среда, и он, как правило, самый ресурсоемкий во всей цепочке методов обработки видеоизображения и обнаружения движущихся объектов [4]. Следовательно, необходимо спроектировать детектор движущихся объектов таким образом, чтобы добиться высокой устойчивости его работы и снизить время цифровой обработки видеосигнала, несмотря на рост ресурсоемкости.

В ходе экспериментальных исследований оценена эффективность работы наиболее распространенных алгоритмов по качеству выделения движущихся объектов: метода временной разности, вероятностного метода [5], статистического метода [6] и метода оптического потока на основе вычисления собственных значений и векторов блоков изображений [7].

Наилучший результат показал статистический метод, основанный на оценке цветовых уровней и текстуры. Однако недостатком данного метода является длительность обработки каждого кадра видеоизображения (от 700 мс до 2 с), что затрудняет его использование в рамках автоматизированной системы определения плотности движения на базе видеонаблюдения. Был предложен способ ускорения работы данного метода, основанный на использовании параллельных вычислений, новизна которого заключается в том, что модификация статистического метода выделения переднего плана была осуществлена путем распараллеливания алгоритма на ядрах графических процессоров.

Заключение

Проведенные эксперименты показали, что данный способ модификации позволил ускорить процесс обработки одного видеокadra разрешением 640x480 пикселей в 1,9 раза (с 1530 мс до 790 мс). Данный результат не является пределом, т. к. возможна дальнейшая модификация алгоритма.

Предложенный способ модификации статистического метода позволит достаточно точно выделять контуры движущихся объектов, не прибегая к методам кластеризации, что ускорит процесс обработки видеоизображения.

Разрабатываемая система представляет интерес для областного управления государственной автомобильной инспекции г. Могилева, т. к. она позволит автоматически собирать и систематизировать информацию о дорожно-транспортной обстановке в городе, поможет оперативно реагировать на стремительные изменения характеристик транспортного потока и составлять прогнозы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Состояние окружающей среды Республики Беларусь* : нац. доклад / М-во природ. ресур. и окружающей среды Республики Беларусь, Гос. науч. учр-е «Инс-т природопользования Нац. академ. наук Беларуси». – Минск : Белтаможсервис, 2010. – 150 с.
2. *История Госавтоинспекции Могилевской области* [Электронный ресурс] / Управление Госавтоинспекции УВД Могилевского Облсполкома. Режим доступа : <http://gai.mogilev.by/gai/history.htm>. – Дата доступа : 01.11.2013.
3. *Аналитический обзор детекторов транспорта* [Электронный ресурс] / AGA Group Inc. Режим доступа : <http://www.againc.net/ru/education/transport-engineering/10-detectors>. – Дата доступа : 01.11.2013.
4. *Лукьяница, А.А.* Цифровая обработка видеоизображений / А.А. Лукьяница, А.Г. Шишкин. – М. : «Ай-Эс-Эс Пресс», 2009. – 518 с.
5. *Zivkovic, Z.* Improved Adaptive Gaussian Mixture Model for Background Subtraction / Z. Zivkovic // Proceedings of the 17th International Conference on Pattern Recognition. – Vol. 2. – 2004. – P. 28–31.
6. *Jian, Yao.* Multi-Layer Background Subtraction Based on Color and Texture / Yao Jian, Jean-Marc Odobez // Proceedings of the Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. – Minneapolis, 2007. – P. 1–8.
7. *Oliver, N.M.* A Bayesian Computer Vision System for Modeling Human Interactions / N.M. Oliver, B. Rosario, A.P. Pentland // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – Vol. 22. – 2000. – P. 831–843.

Поступила в редакцию 03.12.13.

УДК 519.246

МЕТОДИКА ТЕСТИРОВАНИЯ И ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ГЕНЕРАТОРОВ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Д.Н. Шевченко, С.В. Кривенков

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

TECHNIQUE OF THE TESTING AND USE OF GENERATOR OF PSEUDORANDOM SEQUENCES

D.N. Shevchenko, S.V. Krivenkov

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

Рассмотрены существующие подходы к тестированию программных генераторов псевдослучайных последовательностей, их достоинства и недостатки. Предложена методика тестирования нескольких генераторов с целью выбора одного из них для использования в заданной предметной области. Представлены некоторые результаты тестирования наиболее известных генераторов для численного интегрирования методом статистических испытаний Монте-Карло.

Ключевые слова: программный генератор случайных чисел, псевдослучайная числовая последовательность, метод Монте-Карло, тестирование на случайность.

The existing approaches to software testing of pseudorandom sequences, their advantages and disadvantages are reviewed. The methods for testing multiple generators in order to select one of them for use in a certain subject area is offered. Some results of testing famous generators for the numerical integration by Monte Carlo method are shown.

Keywords: random number generator, pseudorandom number sequences, Monte Carlo method, testing of pseudorandom sequences.

Введение

Программные генераторы случайных чисел нашли самое широкое применение от игровой компьютерной индустрии до математического моделирования и криптологии. Основные требования к таким генераторам: независимость элементов генерируемой числовой последовательности, их равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$ (т.е. моделирование «базовой» случайной величины), скорость и криптостойкость. Реализуя некоторый алгоритм, программные генераторы вырабатывают числа в зависимости (хотя и неочевидной) от множества предшествующих значений, поэтому полученные числовые последовательности не являются истинно случайными и называются псевдослучайными (ПСП). На данный момент известно более тысячи программных генераторов ПСП, которые различаются алгоритмами и значениями параметров [1]. Существенно различаются и статистические свойства генерируемых ими числовых последовательностей.

1 Обзор подходов к тестированию ПСП

Перед ответственным использованием в математическом моделировании и криптологии программные генераторы ПСП должны быть протестированы. Тесты ПСП условно разделяют на две группы (таблица 1.1).

Эвристические тесты дают, как правило, относительную оценку нескольких альтернативных

генераторов (по отношению друг к другу), а статистические тесты выискивают в ПСП детерминированную составляющую и дают абсолютную оценку качества генератора. К сожалению, для многих тестов ПСП присущи следующие ограничения [2]:

- 1) проверяют лишь одно из вероятностных свойств, характеризующих ПСП;
- 2) не фиксируют семейство альтернатив;
- 3) не имеют теоретических оценок мощности.

Таблица 1.1 – Классификация тестов ПСП

1. Эвристические тесты	2. Статистические тесты (критерии)
<ul style="list-style-type: none"> – проверка скорости; – проверка периода; – на точность определения неких констант (например, числа Пи) методом Монте-Карло; – проверка на криптостойкость; – прочие. 	<ul style="list-style-type: none"> – равномерность распределения; – независимость элементов числовой последовательности; – совпадение числовых характеристик; – комплексные критерии, которые проверяют сразу несколько вышеуказанных требований.

Поэтому для всестороннего и объективного исследования генераторов ПСП необходимо применять сразу множество различных тестов. Определение необходимого и достаточного набора

тестов ПСП представляет пока нерешенную задачу [1], [3]. Другая мало изученная проблема – совместное тестирование нескольких генераторов ПСП используемых, например, для имитационного моделирования систем массового обслуживания [4]. Разработанных статистических тестов в данной области недостаточно.

Особое значение в создании и тестировании программных генераторов ПСП сыграли работы Джорджа Марсальи (1965) [5] и Дональда Кнута (1969) [1], которые предложили целые наборы тестов. Другими стандартными наборами тестов ПСП являются: стандарт NIST STS 800-22 Национального института стандартизации и технологий NIST [6]; стандарт FIPS 140-2 [7]; совокупность статистических критериев, реализованных в пакетах статистического анализа данных, например в Statgraphics. Кроме того, большая группа статистических критериев, пригодных для тестирования ПСП, приводится в справочнике [8]. В публикациях последних лет, например в [9], можно встретить новые оригинальные статистические тесты. Имеются и отечественные тесты ПСП для возможности применения в криптологии [2].

2 Обзор существующих наборов тестов ПСП и их применение

Подборка 14 тестов «Diehard» Дж. Марсальи была первой при комплексном тестировании генераторов ПСП. Подборка рассматривается как одна из наиболее строгих совокупностей тестов; реализована программно и доступна в Интернете [5]. Однако подборка тестов «Diehard» имеет ряд недостатков.

1. Отсутствует подробное описание тестов и методика трактовки результатов [6, с. 159].
2. Параметры тестирования жестко заданы. При этом независимо от длины тестируемой ПСП анализируется только определенное число байт [6, с. 159]. Более короткие ПСП протестировать невозможно.
3. Большинство тестов являются эвристическими и основаны на результатах испытаний, а не на теоретических моделях [6, с. 159].
4. Решение о прохождении теста может принимать только одно из двух значений (да / нет).

Таблица 2.1 – Некоторые результаты тестирования генераторов ПСП, применяемых в системах имитационного моделирования GPSS World и AnyLogic

№	Тест	GPSS World		AnyLogic	
1	Дни рождения (Birthday Spacings)	1,000000	–	0,431397	+
2	Пересекающиеся перестановки (Overlapping Permutations)	0,060425	+	0,008494	–
3	Ранги матриц (Ranks of matrices)	0,413445/ 0,536567/ 0,097624	+ / + / +	0,382749/ 0,342521/ 0,249165	+ / + / +
4	Поток битов (The bitstream test)	1,000000	–	0,482539*	+
5	Обезьяньи тесты (Monkey Tests)	0,585412*	+	0,494274*	+

Подборка тестов ПСП Д. Кнута использует семь оригинальных статистик и алгоритмов их подсчета. Однако данная подборка имеет ряд недостатков.

1. Все алгоритмы сводятся к вычислению статистических критериев, аппроксимирующихся только распределением χ^2 .
2. Отсутствуют рекомендации о параметрах тестирования. Некорректный выбор некоторых значений может привести к существенной зависимости от длины тестируемой последовательности, а также отрицательно сказываться на мощности статистического критерия [6, с.147].
3. Спорной видится [6, с.147] методика оценки результатов, когда случайными признаются последовательности, для которых P -value принадлежит интервалу (0,1; 0,9). Т. е. когда P -value > 0,9, результаты тестирования считаются слишком идеальными, чтобы считать числовую последовательность случайной.
4. Отсутствует оригинальная программная реализация предложенных тестов.

В работе [3] предлагается набор тестов для предварительной проверки качества случайных чисел и последовательностей на основе семи различных статистических тестов.

Кендэл М. и Смит Б. [10, с. 47] предложили использовать 4 теста с применением критерия χ^2 : 1) проверка частоты различных цифр x_1, x_2, \dots, x_N в таблице (тест частот); 2) проверка частоты различных двузначных чисел среди пар цифр $x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, \dots, x_{N-1}x_N$ (тест пар); 3) проверка частоты различных интервалов между двумя последовательными нулями (тест интервалов); 4) проверка частоты различных типов четверок (aaaa, aaab, aabc, aabb, abcd) среди четверок $x_1x_2x_3x_4, x_2x_3x_4x_5, x_3x_4x_5x_6, \dots, x_{N-3}x_{N-2}x_{N-1}x_N$; а также проверка частоты различных типов пятерок (покер-тест).

Стандарт NIST STS 800-22 Национального института стандартизации и технологий NIST [6] включает 15 тестов и ориентирован на тестирование битовых последовательностей, применяемых в задачах криптографической защиты информации.

Типичное применение тестов (в частности, Diehard) приводится, например, в докладе [11].

В таблице 2.1 вещественными числами обозначены P -value, которые должны превышать заданный уровень значимости гипотезы о случайности ПСП (по каждому критерию). Однако в докладе [11] спорно используется методика Д. Кнута браковки генераторов. А в некоторых случаях автор ошибочно ищет среднее арифметическое P -value по нескольким различным тестам.

При увеличении длины тестируемой ПСП (более 100 тыс.) многие статистические тесты начинают обнаруживать статистически значимые закономерности, которые не обнаруживались на выборках меньшего объема. Так, например, знаковый ранговый критерий (signed rank test, Уилкоксона), который является достаточно мощным [12, с. 223], бракует такие известные и качественные генераторы, как Блюма-Блюма-Шуба (BBS), Шамира (RSA), «Marsaglia Multicarry» и «Xorshift» Джорджа Марсальи, вихрь Мерсенна (MT19937), а также «истинно случайную последовательность» [13] уже на 1,5–2 тысячах элементов числовой последовательности.

Поэтому другой вариант представления результатов тестирования [14] предполагает указание длины битовой ПСП, реализуемой генератором, на которой начинают обнаруживаться статистически значимые признаки неслучайности. В таблице 2.2 символы « \leftarrow » указывают на то, что за время, отведенное на компьютерный анализ ПСП, статистически значимые закономерности обнаружены не были.

3 Методика тестирования и использования генераторов ПСП в различных предметных областях

Применение каждого из существующих наборов тестов не гарантирует того, что прошедший тесты генератор – качественный. Кроме того, существующие методики тестирования

генераторов не дают непосредственного решения двух важных задач:

1) выбор генераторов ПСП (из множества всех доступных генераторов, см. например, таблицу 3.1), которые можно использовать для тех или иных практических целей;

2) ранжирование генераторов по комплексному критерию, учитывающему область практического использования генератора.

Для решения поставленных задач можно предложить методику, включающую следующие положения.

I. При тестировании генераторов ПСП необходимо использовать как можно большее количество известных статистических критериев, отыскивая в ПСП все возможные закономерности. Данное предложение не оригинальное. Так в [7] делается попытка компьютерной реализации всех известных статистических тестов (набор DIEHARD, Д. Кнута, NIST и некоторые другие) для быстрой автоматической проверки генераторов ПСП.

II. Генератор можно использовать, если ни один из используемых статистических критериев не забракует его. При этом, учитывая, что количество тестов имеет порядок 50–70, то используемый уровень значимости должен иметь порядок 0,005–0,015. Увеличение уровня значимости до 0,02 = 1/50 приведет к тому, что в среднем каждый 50-ый тест будет браковать «истинно случайную» последовательность. А уменьшение уровня значимости ниже 0,005 приведет к отказу от браковки «весьма подозрительных» ПСП.

III. Тестирование нескольких генераторов должно проводиться на ПСП одинаковой длины. Это предложение обуславливается тем, что разные по мощности статистические критерии обнаруживают закономерности на числовых последовательностях разной длины.

Таблица 2.2 – Некоторые результаты тестирования генераторов ПСП тестами NIST и тестом «стопка книг» [14]

Генератор/Тест	Стопка книг	6. DFT	11. Serial
24(2, 16598013, 12820163)LCG	2^{16}	2^{21}	2^{23}
31(2, 65539, 0)LCG (RANDU)	2^{13}	2^{22}	2^{20}
32(2, 1099087573, 0)LCG	2^{20}	2^{23}	2^{23}
32(2, 69069, 1)LCG	2^{20}	–	–
32(2, 69069, 5)LCG	2^{20}	–	–
32(2, 1664525, 1013904223)LCG	2^{23}	2^{23}	–
32(2, 22695477, 1)LCG	2^{20}	–	–
32(2, 1103515245, 12345)LCG	2^{23}	–	–
32(2, 134775813, 1)LCG	2^{20}	–	–
32(2, 214013, 2531011)LCG	2^{19}	–	–
RC4	–	–	–
rand (C++ gcc 4.3.2)	–	–	–

Таблица 3.1 – Список основных тестируемых генераторов

1.	Встроенный генератор системы программирования Delphi 2007 (линейный конгруэнтный алгоритм, стартовое значение $X_0=1257$)
2.	встроенный генератор системы программирования Fortran (линейный конгруэнтный алгоритм, стартовое значение $X_0=13$) [1]
3.	Мультипликативный конгруэнтный генератор с параметрами, рекомендованными в книге [Астанин, Л.Ю. Применение программируемых калькуляторов для инженерных и научных расчетов / Л.Ю. Астанин – М.: Энергоиздат, 1986.]
4.	Мультипликативный конгруэнтный генератор RANDU [12, с. 22]
5.	Мультипликативный конгруэнтный генератор ($X_0=7$) с параметрами, рекомендованными в книге [12]
6.	Аддитивный генератор Митчелла – Мура (1958) на основе алгоритма Фибоначчи с запаздыванием 55/24 [1, с. 39]
7.	Мультипликативный генератор Марсальи на основе алгоритма Фибоначчи с запаздыванием 55/24 [1, с. 40]
8.	Генератор Левиса-Пэйна (1971) на основе алгоритма Фибоначчи с запаздыванием 55/24 [1, с. 44]
9.	Инверсивный конгруэнтный генератор (Эйченуэра – Лехна) с модулем $2^{31}-1$ [1, с. 45]
10.	Аддитивный генератор Фибоначчи с запаздыванием от Беловой с параметрами 97/33 [Белова, И.М. Компьютерное моделирование : учебно-методическое пособие для студентов направления «Прикладная математика и информатика» и «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем». / И.М. Белова. – М. : МГИУ, 2007. – 81 с.]
11.	Кубический конгруэнтный генератор [Мартынов, А.И. Методы и задачи криптографической защиты информации : учебное пособие для студентов специальности «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети» / А.И. Мартынов. – Ульяновск : УлГТУ, 2007. – 92 с.]
12.	MWC1616 – конкатенация двух 16-битных генераторов [5]
13.	Генератор «Xorshift» [5]
14.	Генератор «multiply-with-carry» [5]
15.	Генератор «Marsaglia Multicarry» [5]
16.	Генератор «MotherOfAll» [5]
17.	Комбинация Xor-Shift, линейного конгруэнтного и метода Фибоначчи [5]
18.	Генератор «COMBO» [5]
19.	Генератор «ULTRA» [5]
20.	Генератор «KISS» [5]
21.	Вихрь Мерсенна MT19937 (\$123, \$234, \$345, \$456) [Makoto Matsumoto, Takuji Nishimura, «Mersenne twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator», ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation (TOMACS), 8:1, jan. (1998), 3–30]
22.	Комбинация трех мультипликативных конгруэнтных генераторов от Б. Уичмана и И. Хилла (1982) [12, с. 22]
23.	Генератор Экуйера на основе двух мультипликативных конгруэнтных генераторов [Шнайер, Б. Прикладная криптография. Протоколы, алгоритмы, исходные тексты на языке Си. – М.: Триумф, 2002. – 816 с., с. 276]
24.	Генератор Блюм-Блюма-Шуба с $p=12647$, $q=12659$, $X_0=127$ [6]
25.	Генератор Макларена – Марсальи [1] на основе двух линейных конгруэнтных генераторов
26.	Генератор Макларена – Марсальи [1] на основе генератора «multiply-with-carry» и линейного конгруэнтного генератора (размер массива 256 чисел; адрес выбирается битами 9–16 числа Y_0)
27.	Истинно случайная последовательность из книги [13]

IV. За прохождение каждого теста генератору ПСП назначают «балл», характеризующий качество генератора по данному критерию. Для статистических критериев таким баллом может быть значение $P\text{-value} \in [0, 1]$, характеризующее вероятность того, что «ПСП неслучайна».

Использование баллов позволяет сравнивать результаты тестирования генераторов ПСП по нескольким различным тестам, причем в одинаковой количественной шкале.

V. Каждому тесту назначают «значимость» – важность для той или иной предметной области. Например, в криптологии наиболее высоки требования к «криптостойкости» генератора, а в имитационном моделировании – к «совпадению моментов» ПСП.

VI. Выбор генератора ПСП для использования в той или иной области определяется суммой баллов, набранных по различным тестам, нормированных их значимостью для данной предметной области.

Таблица 3.1 – Результаты тестирования генераторов RANDU и Marsaglia Multicarry с учетом баллов

Генераторы:		31(2,65539,0)LCG (RANDU)			Marsaglia Multicarry		
Тесты	Значимость	Результат	Балл	Взвеш. балл	Результат	Балл	Взвеш. балл
1. Эвристические тесты							
Период	8	Более 300 млн	8	64	Более 300 млн	9	72
Время генерации 1 млн. элементов	5	894,4 мс	7	35	873,7 мс	8	40
2. Статистические тесты Statgraphics Centurion							
2.1. Критерий Стьюдента (t-test)	9	$P=0,28$	6	54	$P=0,54$	8	72
2.2. Знаковый критерий (sign test)	6	$P=0,59$	8	48	$P=0,64$	8	48
2.3. Критерий согласия χ^2 Пирсона	9	$P=0,49$	8	72	$P=0,63$	8	72
2.4. Тест Бокса-Пирса	6	$P=0,55$	8	48	$P=0,08$	3	18
... всего 16 тестов							
3. Тесты Д. Кнута							
3.1. Тест интервалов (0,2, 0,5)	5	$1,49 < 12,6$	9	45	$6,7 < 12,6$	7	35
3.2. Тест непересекающихся перестановок	5	$20,2 < 35,2$	6	30	$12,87 < 35,2$	7	35
... всего 7 тестов							
4. Тесты «DIEHARD» Дж. Марсальи							
4.1. Тест пересекающихся перестановок	7	$29,9 < 35,2$	5	35	$17,6 < 35,2$	6	42
4.2. Тест «крэпс»	7	$8,5 < 12,6$	5	35	$13,3 \notin (0; 12,6)$	1	7
... всего 14 тестов							
5. Тесты NIST							
5.1. Частотный монобитный тест	6	$1,83 \in (-1,96; 1,96)$	4	24	$1,42 \in (-1,96; 1,96)$	6	36
... всего 16 тестов							
6. Общие статистические тесты							
6.1. Критерий серий	4	$1,59 \in (-1,96; 1,96)$	5	20	$0,89 \in (-1,96; 1,96)$	7	28
6.2. Критерий инверсий	5	$0,02 \in (-1,96; 1,96)$	8	40	$0,000138 \in (-1,96; 1,96)$	9	45
6.3. Критерий длин восходящих и нисходящих серий	5	$49,1 \notin (0; 5,99)$	0	0	$27,8 \notin (0; 5,99)$	1	5
6.4. Критерий согласия Морана	8	$-2,27 \notin (-1,96; 1,96)$	1	8	$-1,19 \in (-1,96; 1,96)$	6	48
6.5. Критерий серий Вальда – Волфовица	8	$-0,03 \in (-1,96; 1,96)$	8	64	$0,009 \in (-1,96; 1,96)$	8	64
6.6. Тест χ^2 на равномерность двумерного распределения	9	$7,69 < 25,0$	6	54	$8,99 < 25,0$	5	45
6.7. Тест χ^2 на равномерность трехмерного распределения	9	$19,3 < 23,7$	5	45	$13,0 < 23,7$	6	54
... всего 31 тест							
ИТОГО баллов по представленным тестам				721		766	

В различных предметных областях перед генераторами ПСП стоят различные задачи. Так в некоторых задачах компьютерного моделирования важно, чтобы ПСП в основном удовлетворяла тестам на «совпадение моментов», в других задачах – тестам на отсутствие авто- и взаимной корреляции, в третьих – на равномерность. Поэтому для решения различных задач следует применять различные генераторы ПСП, которые для данной группы задач набирают больше баллов, нормированных значимостью соответствующих тестов.

Не претендуя на окончательную объективность, представим таблицу баллов и значимости некоторых тестов для целей использования генераторов ПСП при решении задач численного интегрирования методом статистических испытаний Монте-Карло (таблица 3.1) на примере генераторов RANDU и Marsaglia Multicarry.

В примере, представленном в таблице 3.1, подсчет суммы баллов с учётом значимости тестов показал, что генератор «Marsaglia Multicarry» набрал большее количество баллов, чем генератор «RANDU», поэтому он может быть признан более целесообразным для использования в данной предметной области.

VII. Тестирование нескольких генераторов в совокупности имеет важное значение. При моделировании обычно используется несколько генераторов. При этом может оказаться, что получаемые ими числовые последовательности коррелированы. Это приведет к тому, что полученные результаты моделирования будут не корректны.

При совместном использовании нескольких генераторов ПСП необходимо дополнительное тестирование генераторов с определением характеристик, список которых на данный момент не разработан [4]. Здесь видится возможным применение статистических критериев с оценкой взаимной корреляционной функции, а также эвристический тест на оценку длины очереди системы массового обслуживания $M/M/1$ с как можно большей точностью.

Заключение

Таким образом, в работе предложена методика тестирования генераторов ПСП и формальный количественный критерий для выбора одного из нескольких доступных генераторов ПСП.

Для реализации предлагаемого подхода авторами разрабатывается программный комплекс тестирования генераторов ПСП, который будет включать в себя все известные статистические и эвристические тесты. Комплекс базируется на табличном процессоре Microsoft Excel, что обусловлено большим количеством встроенных математических и статистических функций, возможностью программирования на VBA, а также наглядностью реализации и тестирования программ,

созданных несколькими авторами. В настоящее время реализовано более 45 тестов ПСП, и база тестов пополняется.

В результате реализации данной методики будет создана информационная система, которая позволит выбирать качественный программный генератор ПСП для использования в той или иной предметной области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кнут, Д. Искусство программирования. Т. 2. Получисленные алгоритмы. / Д. Кнут. – 3-е изд. – М.: Вильямс, 2000. – 832 с.
2. Харин, Ю.С. Проверка гипотез о независимости и равномерном вероятностном распределении элементов случайной последовательности / Ю.С. Харин, А.И. Петлицкий // Вестник БГУ. Серия 1. – 2007. – № 3. – С. 74–80.
3. Акимова, Г.П. Методологический подход к оценке качества случайных чисел и последовательностей / Г.П. Акимова, Е.В. Пашкина, А.В. Соловьев // Труды ИСА РАН. – 2008. – Т. 38. – С. 156–167.
4. Алиев, Т.И. Проблема сочетания генераторов псевдослучайных величин в GPSS-моделях / Т.И. Алиев, Г.К. Асафьев // Пятая всероссийская научно-практическая конференция по имитационному моделированию и его применению в науке и промышленности «Имитационное моделирование. Теория и практика (ИММОД-2011)». – Санкт-Петербург. – 2011. – Т. 1. – С. 95–100.
5. Marsaglia, G. The Marsaglia Random Number CDROM including the Diehard Battery of Tests of Randomness, дата обращения 14 января 2013, Электронный ресурс: <http://www.stat.fsu.edu/pub/diehard>.
6. Иванов, М.А. Теория, применение и оценка качества генераторов псевдослучайных последовательностей / М.А. Иванов, И.В. Чугунков. – М.: КУДИЦ-ОБРАЗ, 2003. – 240 с.
7. Вильданов, Р.Р. Тесты псевдослучайных последовательностей и реализующее их программное средство / Р.Р. Вильданов, Р.В. Мещеряков, С.С. Бондарчук // Доклады ТУСУРа, № 1 (25), Ч. 2., июнь 2012. – С. 108–111.
8. Кобзарь, А.И. Прикладная математическая статистика: для инженеров и научных работников / А.И. Кобзарь. – М.: Физматлит, 2006. – 813 с.
9. Рябко, Б.Я. «Стопка книг» как новый статистический тест для случайных чисел / Б.Я. Рябко, А.И. Пестунов // Проблемы передачи информации. – 2004. – Т. 40, вып. 1. – С. 73–78.
10. Иванова, В.М. Случайные числа и их применение. – М.: Финансы и статистика, 1984. – 111 с.
11. Диденко, Д.Г. Качество генерации псевдослучайных чисел в системах имитационного моделирования OpenGPSS, GPSS World и AnyLogic / Д.Г. Диденко // Пятая всероссийская научно-практическая конференция по имитационному

моделированию и его применению в науке и промышленности «Имитационное моделирование. Теория и практика (ИММОД-2011)». – Санкт-Петербург. – 2011. – Т. 1. – С. 134–138.

12. Лагутин, М.Б. Наглядная математическая статистика : учебное пособие / М.Б. Лагутин. – 2-е изд., испр. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 472 с.

13. *The RAND Corporation. A Million Random Digits with 100 000 Normal Deviates.* – N.Y. : Free Press, 1966.

14. Миненко, А.И. Экспериментальное исследование эффективности тестов для проверки генераторов случайных чисел / А.И. Миненко // Вестник СибГУТИ. – 2010. – № 4. – С. 36–46.

Поступила в редакцию 23.12.13.

УДК 621.372.851.3

ПОГЛОЩЕНИЕ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ С НАНОПОРИСТЫМ ОКСИДОМ АЛЮМИНИЯ

Ахмед Али Абдуллах Аль-Дилами, И.А. Врублевский,
К.В. Чернякова, Г.А. Пухир

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

ABSORPTION OF ENERGY OF ELECTROMAGNETIC RADIATION IN INTERFERENCE INSULATED STRUCTURES WITH NANOPOROUS ALUMINA

Ahmed A. Al-Dilami, I.A. Vrublevsky, K.V. Chernyakova, G.A. Pykhir

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

Представлены спектры отражения и пропускания электромагнитного излучения двухслойными интерференционными структурами, состоящими из пластины ниобата лития и мембраны нанопористого оксида алюминия с напыленной пленкой нихрома. Исследовано влияние толщины металлического слоя нихрома в области четвертьволнового резонанса на коэффициент отражения предложенной двухслойной интерференционной структуры в частотном диапазоне 8–12 ГГц.

Ключевые слова: электромагнитное излучение, резонансное поглощение, коэффициент отражения, многослойная интерференционная структура, нанопористый оксид алюминия.

Transmittance and reflectance spectra of electromagnetic radiation by double-layer interference structures made of lithium niobate plate and nanoporous alumina membrane with evaporated thin nichrome film were studied. In the quarter-wave range the effect of nichrome film thickness on reflective characteristics of the proposed double-layer interference structures was also established in the frequency range of 8–12 GHz.

Keywords: electromagnetic radiation, resonant absorption, reflection coefficient, multi-layer interference structure, nanoporous alumina.

Введение

Работа бытовых радиоэлектронных устройств, окружающих современного человека, сопровождается электромагнитным излучением, высокий уровень которого может негативно влиять не только на работу самих радиоэлектронных устройств, но и на организм человека. Эффективным способом снижения уровня электромагнитного излучения (ЭМИ) является использование радиопоглощающих покрытий с низким коэффициентом отражения [1]. Такие покрытия позволяют обеспечить электромагнитную совместимость радиоэлектронного оборудования и защиту организма человека от неблагоприятного воздействия ЭМИ [2].

Одними из эффективных поглотителей ЭМИ являются многослойные структуры резонансного типа, использующие частичное или полное гашение отраженного от поверхности поглотителя излучения [3], [4]. Многослойные интерференционные структуры (МИС) состоят из набора слоев различных диэлектрических материалов с толщинами меньше, чем длина волны излучения. Поэтому применение такой конструкции позволяет значительно уменьшить толщину и, как результат, уменьшить вес и размеры поглотителя излучения. Принцип действия МИС

основан на интерференционных эффектах, возникающих внутри такой структуры при многократном отражении волны от границ раздела слоев с различными волновыми параметрами. Материалы отдельных слоев и их толщины определяют спектральную характеристику структуры. Для усиления поглощения ЭМИ в конструкции МИС могут быть использованы диэлектрические слои с напыленными тонкими пленками металла [5]. Надо отметить, что теоретическое описание работы МИС достаточно полно описано в литературе [6], тогда как, экспериментальные характеристики МИС практически отсутствуют и до настоящего времени предложено ограниченное число материалов для их создания [3], [4]. По-видимому, это связано с техническими сложностями получения тонких диэлектрических слоев толщиной порядка 50–100 мкм.

В качестве тонкого диэлектрического слоя МИС в работе предложено использовать мембраны нанопористого оксида алюминия, современные процессы получения которого, такие как электрохимическое окисление алюминия, позволяют формировать слои Al_2O_3 толщиной 10–200 мкм. Пористый оксид алюминия имеет регулярную упорядоченную ячеисто-пористую структуру, т. е. является локально неоднородным

материалом, в котором диэлектрическая постоянная в направлении вдоль поверхности периодически скачкообразно изменяется от 8 (стенки пор) до 1 (каналы пор) и от 1 до 8 [7]. Поэтому нанопористый оксид алюминия представляет большой интерес для СВЧ-техники и может быть использован в конструкциях градиентных радиопоглощающих экранов.

В работе изучали спектры отражения и ослабления ЭМИ двухслойной интерференционной структурой, состоящей из пластины ниобата лития (LiNbO_3) и мембраны нанопористого оксида алюминия (Al_2O_3) с напыленной пленкой никрома. Исследовали также влияние толщины (удельного поверхностного сопротивления, ρ_s) металлического слоя никрома в области четвертьволнового резонанса на коэффициент отражения предложенной структуры. Выбор ниобата лития обусловлен его высокой диэлектрической проницаемостью ($\epsilon \approx 38$ [8]), что необходимо для создания градиентной структуры с изменяющейся ϵ . Диэлектрическая проницаемость мембраны нанопористого оксида алюминия составляет 8 [9].

1 Экспериментальная часть

Для получения пленок нанопористого оксида алюминия на поверхности алюминия в экспериментах использовали алюминиевую фольгу (99,99 % чистоты) толщиной 100 мкм (Alfa-Aesar), из которой вырезали флажки, поверхность которых обезжировали: травили в 1,5 М растворе NaOH при 353 К в течение 15 с, потом в течение 120 с обрабатывали в 1,5 М растворе HNO_3 (для нейтрализации щелочи). Затем образцы высушивали на воздухе, погружали в 0,3 М водный раствор щавелевой кислоты и анодировали в гальваностатическом режиме (напряжение на участке стационарного роста составляло 60 В). Процесс проводили в двухэлектродной ячейке объемом 0,25 л при постоянной температуре $(291,0 \pm 0,1) \text{ K}$ (термостат F 12 (Julabo)) с использованием источника постоянного тока Б5–49 (РИАП). В качестве катода использовали платину. Растворы интенсивно перемешивали с помощью магнитной мешалки, скорость вращения магнита была приблизительно 2 об / с. Образцы после анодирования промывали дистиллированной водой и сушили на воздухе. Для получения мембран нанопористого оксида алюминия остаточный слой алюминия удаляли в селективном травителе на основе CuCl_2 и HCl . Поверхность полученных мембран нанопористого оксида алюминия исследовали с помощью сканирующего электронного микроскопа JSM 840A (JEOL).

На одну из сторон мембран пористого оксида алюминия методом ионно-лучевого испарения наносили слои никрома разной толщины, имеющие поверхностное сопротивление 295; 55,4; 27,4 и 12,4 Ом/кв. Поверхностное сопротивление пленок никрома измеряли на установке ИУС–2М.

Толщину образцов измеряли с помощью механического микрометра МК–50. Пластины ниобата лития имели толщину 1,0 мм, мембраны нанопористого оксида алюминия – 70 ± 5 мкм.

Экранирующие характеристики в диапазоне частот 8–12 ГГц определяли с помощью панорамного измерителя ослабления и коэффициента стоячей волны по напряжению (КСВН) Р2-61 с индикатором Я2Р-67; образцы зажимали между фланцами волноводов прибора. Такой способ регистрации спектров при малой толщине образцов считали эквивалентным использованию измерительной ячейки. В случае измерения КСВН с отражающей поверхностью непосредственно за исследуемым образцом устанавливали металлическую пластину. Полученные значения коэффициента передачи по абсолютной величине совпадали с ослаблением ЭМИ. Коэффициент отражения ЭМИ ($K_{\text{отр}}$) рассчитывали по формуле:

$$K_{\text{отр}} = 20 \lg \frac{\text{КСВН} - 1}{\text{КСВН} + 1},$$

где

$$\text{КСВН} = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma},$$

Γ – модуль коэффициента отражения по напряжению:

$$\Gamma = \sqrt{\frac{U_{\text{отр}}}{U_{\text{пад}}}},$$

где $U_{\text{отр}}$, $U_{\text{пад}}$ – соответственно амплитуды напряжений отраженной и падающей волн, зафиксированные детектором.

2 Морфология поверхности мембран нанопористого оксида алюминия

Нанопористый оксид алюминия, сформированный в 0,3 М растворе щавелевой кислоты при 60 В, имеет достаточно регулярную ячеистопористую структуру с порами диаметром приблизительно 42 нм (рисунок 2.1).

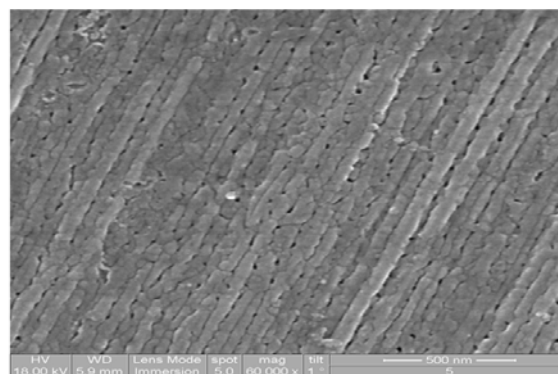


Рисунок 2.1 – Электронный снимок поверхности мембраны нанопористого оксида алюминия, сформированной в 0,3 М растворе щавелевой кислоты при 60 В

3 Спектры отражения ЭМИ двухслойной структурой LiNbO_3 -нанопористый Al_2O_3

В серии экспериментов без использования металлического отражателя, пластина ниобата лития имела достаточно высокое значение коэффициента отражения ЭМИ, $K_{\text{отр}} \approx -0,5$ дБ (рисунок 3.1, кривая 1) и, следовательно, плохо согласованное волновое сопротивление. Двухслойная структура, LiNbO_3 -нанопористый Al_2O_3 , также характеризовалась высоким коэффициентом отражения ЭМИ, приблизительно равным $-0,5$ дБ (кривая 2). Нанесение тонких пленок никрома на поверхность мембраны нанопористого оксида алюминия позволило снизить $K_{\text{отр}}$, что улучшило характеристики двухслойной структуры (кривые 3–6). Наиболее значительное влияние на отражающие характеристики структур оказали нанесенные пленки никрома с поверхностным сопротивлением 27,4 и 12,4 Ом/□, в этих случаях (кривые 5–6) $K_{\text{отр}}$ снизился соответственно до $-3,5$ и -7 дБ.

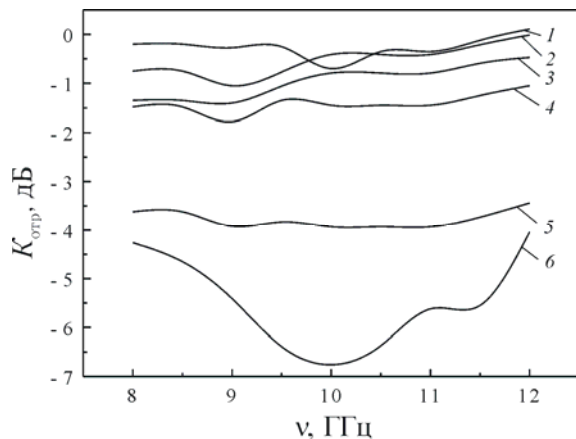


Рисунок 3.1 – Спектры отражения ЭМИ двухслойной структурой LiNbO_3 -нанопористый Al_2O_3 с напыленными пленками никрома с различным ρ_s (без использования металлического отражателя);

- 1 – LiNbO_3 ; 2 – LiNbO_3 -нанопористый Al_2O_3 ;
- 3 – LiNbO_3 -нанопористый Al_2O_3 с пленкой никрома 295 Ом/□; 4 – LiNbO_3 -нанопористый Al_2O_3 с пленкой никрома 55,4 Ом/□;
- 5 – LiNbO_3 -нанопористый Al_2O_3 с пленкой никрома 27,4 Ом/□; 6 – LiNbO_3 -нанопористый Al_2O_3 с пленкой никрома 12,4 Ом/□

Для структуры с напыленной пленкой никрома с $\rho_s = 12,4$ Ом/□ в спектре отражения появилась полоса поглощения, обусловленная четвертьволновым резонансом. Резонансный минимум коэффициента отражения на частоте 10 ГГц достигал -7 дБ (см. рисунок 3.1, кривая 6).

В серии экспериментов с использованием металлического отражателя отражающие характеристики исследуемых двухслойных структур существенно меняются (рисунок 3.2). Как видно из рисунка 3.1, на всех спектрах присутствует

четкий резонансный пик поглощения на частоте 9,5 ГГц. Причем, как и для серии экспериментов без металлического отражателя (рисунок 3.1) минимальное значение $K_{\text{отр}}$ имели двухслойные структуры с никромовой пленкой на поверхности мембраны нанопористого оксида алюминия. Использование пленок никрома с удельным поверхностным сопротивлением 27,4 и 12,4 Ом/□ позволило снизить коэффициенты отражения структур до соответственно $-7,5$ и $-8,5$ дБ (рисунок 3.2, кривые 5–6).

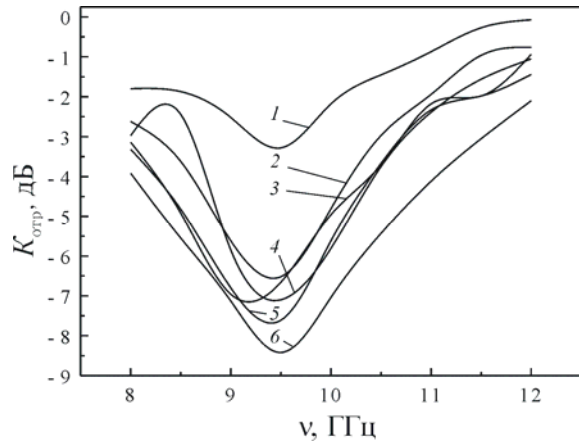


Рисунок 3.2 – Спектры отражения ЭМИ двухслойной структурой LiNbO_3 -нанопористый Al_2O_3 с напыленными пленками никрома с различным ρ_s (с использованием металлического отражателя);

- 1 – LiNbO_3 ; 2 – LiNbO_3 -нанопористый Al_2O_3 ;
- 3 – LiNbO_3 -нанопористый Al_2O_3 с пленкой никрома 295 Ом/□; 4 – LiNbO_3 -нанопористый Al_2O_3 с пленкой никрома 55,4 Ом/□;
- 5 – LiNbO_3 -нанопористый Al_2O_3 с пленкой никрома 27,4 Ом/□; 6 – LiNbO_3 -нанопористый Al_2O_3 с пленкой никрома 12,4 Ом/□

4 Спектры ослабления ЭМИ двухслойной структурой LiNbO_3 -нанопористый Al_2O_3

Как видно из рисунка 4.1 (кривые 3–4), уменьшение удельного поверхностного сопротивления напыленной пленки никрома до 27,4 Ом/□ не оказало заметного влияния на величину ослабления ЭМИ. Двухслойная структура с пленкой никрома и без нее, так же как и пластина ниобата лития ослабляли ЭМИ до 13–14 дБ.

Использование в конструкции МИС пленок никрома с удельным поверхностным сопротивлением 27,4 и 12,4 Ом/□ позволило повысить ослабление ЭМИ соответственно до 20 и 22 дБ (рисунок 4.1, кривые 5–6). Следует отметить, что уменьшение $K_{\text{отр}}$ в структуре с напыленными пленками никрома с удельным поверхностным сопротивлением меньшим, чем 27,6 Ом/□ (рисунок 3.1, кривые 5–6) с одновременным увеличением ослабления (рисунок 4.1, кривые 5–6) свидетельствует о появлении процессов волновой интерференции и, как следствие, перераспределения

волновой энергии. В результате возникновения резонансного эффекта интерференционного поглощения волновой энергии, ослабление ЭМИ в двухслойной структуре при сохранении тех же геометрических размеров увеличивается от 13–14 до 20–22 дБ. Полученные характеристики позволяют применять двухслойные структуры LiNbO_3 –нанопористый Al_2O_3 с напыленными пленками нихрома вместо металлических экранов, что может существенно уменьшить коэффициент отражения ЭМИ без существенного ухудшения характеристики ослабления.

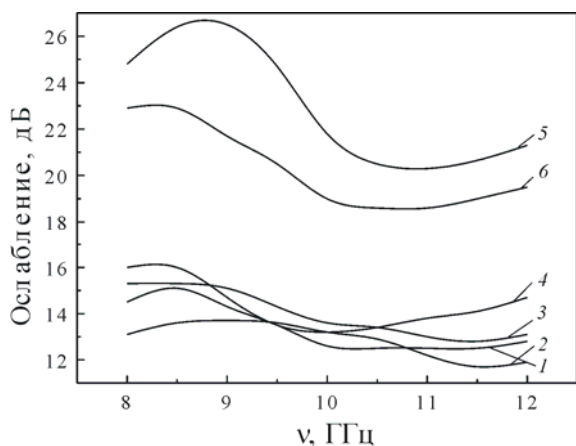


Рисунок 4.1 – Спектры ослабления ЭМИ двухслойной структурой LiNbO_3 –нанопористый Al_2O_3 с напыленными пленками нихрома с различным ρ_s ;
 1 – LiNbO_3 ; 2 – LiNbO_3 –нанопористый Al_2O_3 ;
 3 – LiNbO_3 –нанопористый Al_2O_3 с пленкой нихрома 295 Ом/□; 4 – LiNbO_3 –нанопористый Al_2O_3 с пленкой нихрома 55,4 Ом/□;
 5 – LiNbO_3 –нанопористый Al_2O_3 с пленкой нихрома 27,4 Ом/□; 6 – LiNbO_3 –нанопористый Al_2O_3 с пленкой нихрома 12,4 Ом/□

Заключение

Двухслойная структура, состоящая из пластины ниобата лития и мембраны нанопористого оксида алюминия с напыленной пленкой нихрома, может быть использована для создания интерференционных структур с резонансным поглощением энергии ЭМИ.

Напыление на поверхность нанопористого оксида алюминия пленок нихрома с удельным поверхностным сопротивлением менее 27,4 Ом/□ в двухслойной структуре LiNbO_3 –нанопористый Al_2O_3 приводит к волновой интерференции и перераспределению волновой энергии. В результате в такой структуре коэффициент отражения ЭМИ заметно уменьшается с одновременным увеличением ослабления ЭМИ.

По сравнению с металлическими экранами использование МИС позволяет существенно уменьшить коэффициент отражения ЭМИ без существенного ухудшения характеристик ослабления, что является важным для обеспечения электромагнитной совместимости электронного оборудования. Результаты исследований могут быть полезны при создании компактных поглощающих структур, снижающих общий уровень ЭМИ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Казанцева, Н.Е. Перспективные материалы для поглотителей электромагнитных волн сверхвысокочастотного диапазона / Н.Е. Казанцева, Н.Г. Рывкина, И.А. Чмутин // Радиотехника и электроника. – 2003. – Т. 48, № 2. – С. 196–209.

2. Новые материалы для экранов электромагнитного излучения / Л.М. Лыньков [и др.] // Доклады БГУИР. – 2004. – № 3. – С. 152–167.

3. Резонансные эффекты полного интерференционного поглощения волновой энергии в тонких слабопоглощающих слоях / А.Н. Баскаков [и др.] // Письма в ЖТФ. – 1976. – Т. 2, № 19. – С. 891–893.

4. Козарь, А.В. Распределение напряженности электрического поля в многослойных системах резонансного типа / А.В. Козарь, В.С. Колесников, Ю.А. Пирогов // Вестник московского университета, Физика, астрономия. – 1978. – Т. 9, № 1. – С. 78–86.

5. Резонансное отражение электромагнитного излучения от структур с нанометровыми металлическими слоями / Д.А. Усанов, А.В. Скрипаль, А.В. Абрамов, А.С. Боголюбов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2006, – Т. 9, № 3, – С. 59–63.

6. Бреховских, Л. М. Волны в слоистых средах / Л.М. Бреховских. – 2-е изд., доп. и перераб. – М.: Наука, 1973. – 343 с.

7. Структура пленок пористого оксида алюминия, формируемых в электролитах на основе органических кислот / И.А. Врублевский [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – Т. 12, № 3. – С. 101–105.

8. Кузьминов Ю.С. Электрооптический и нелинейно оптический кристалл ниобата лития / Ю.С. Кузьминов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 264 с.

9. Embedded space charge in porous alumina films formed in phosphoric acid / I. Vrublevsky [et al.] // Electrochimica Acta. – 2007. – Vol. 53. – P. 300–304.

Поступила в редакцию 27.02.14.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25 % в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;

- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It pro-

vides the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).