



ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№1 (18) 2014

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»

Главный редактор:
А.В. Рогачев (Беларусь)

Заместитель главного редактора:
О.М. Демиденко (Беларусь)

Редакционная коллегия:

В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
П.Д. Кухарчик (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

Ответственный секретарь:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

Адрес редакции:

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by

Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»

Editor-in-Chief:
A.V. Rogachev (Belarus)

Deputy Editor-in-Chief:
O.M. Demidenko (Belarus)

Editorial board:

V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Webin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
P.D. Kuharchik (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

Executive Secretary:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

Edition address:

F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 1 (18) 2014

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

Баев А.Р., Гуделев В.Г., Кулак Г.В., Митьковец А.И., Матвеева А.Г., Ропот П.И. Оптико-акустическая диагностика дефектов на поверхности твердых тел	7
Белко А.В., Валько Н.Г. Исследование влияния рентгеновского излучения на электроосаждение никеля с наночастицами SiO ₂ методом полного факторного эксперимента	12
Бин Чжоу, Рогачёв А.В., Пилипцов Д.Г., Руденков А.С., Федосенко Н.Н., Сяохун Цзян, Бин И. Размерные эффекты в наноразмерных двухслойных покрытиях титан-углерод. 2. Зависимость структуры и свойств от толщины углеродного слоя	16
Изданешан Х., Гременок В.Ф. Влияние толщины на структурные свойства отожженных In ₂ S ₃ тонких пленок, осажденных термическим испарением	21
Хассан Сейди, Гременок В.Ф., Иванов В.А. Структурные свойства тонких пленок Pb _{1-x} Sn _x Te, полученных методом «горячей стенки»	26

МАТЕМАТИКА

Автушко Т.С. Ассоциированные фундаментальные матрицы, функции Коши и вронскианы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций	31
Вареникова Е.В. О решениях двухточечной краевой задачи для одной неавтономной дифференциальной системы с квадратичной по фазовым переменным правой частью	39
Гальмак А.М. О единицах n -арной группы	43
Каморников С.Ф. Об одном классе конечных расщепляемых групп	52
Махбуб Абид, Хуо Лицзюнь, Лу Цзинхуа. О полупокрывающих-изолирующих подгруппах или S -квазинормально вложенных подгруппах конечных групп	57
Можджер Г.Т. Первые интегралы нелинейного дифференциального уравнения пятого порядка	63
Сазонова А.Т. О решениях одной упрощенной системы нелинейных дифференциальных уравнений, связанной с задачей четырех тел	69
Старовойтов А.П. Асимптотика квадратичных аппроксимаций Эрмита – Паде экспоненциальных функций	74
Чжиньсинь Чжоу. О периодических решениях рациональных дифференциальных уравнений	81
Якубович О.В., Дудовская Ю.Е. Исследование многорежимной сети массового обслуживания с абстрактным описанием состояний	85

ТЕХНИКА

Гольдаде В.А., Кузьменкова Н.В., Кравченко В.В., Сыцко В.Е. Окрашивание полиэфирных волокон для защиты ценных бумаг	90
Мурашко И.А., Храбров Д.Е. Применение клеточных автоматов с расширенным набором правил для генерирования псевдослучайных тестовых последовательностей	98

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Г. Н. Петухова, Т. А. Фицнер*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 10.03.14. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 12,6. Уч.-изд. л. 10,9. Тираж 100 экз. Заказ № 147.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246019, Гомель.

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2014
© Проблемы физики, математики и техники, 2014
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2014

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 1 (18) 2014

CONTENTS

PHYSICS

Baev A.R., Gudelev V.G., Kulak G.V., Mitskovets A.I., Matveeva A.G., Ropot P.I. Optical-acoustic diagnostics of defects on the surface of solids	7
Belko A.V., Valko N.G. Study of the effect of the X-ray irradiation on nickel electro deposition with nanoparticles SiO ₂ by the method of full factorial experiment	12
Bing Zhou, Rogachev A.V., Piliptsov D.G., Rudenkov A.S., Fedosenko N.N., Xiaohong Jiang, Bing Ye. Size effect in the bilayer coatings of titanium-carbon. 2. The dependence of structure and properties on the thickness of carbon layer	16
Izadneshan H., Gremenok V.F. Influence of thickness on structural properties of annealed In ₂ S ₃ thin films deposited by thermal evaporation	21
Hassan Seidi, Gremenok V.F., Ivanov V.A. Structural properties of Pb _{1-x} Sn _x Te thin films prepared by the "hot wall" method	26

MATHEMATICS

Autushka T.S. Associated fundamental matrices, Cauchy functions and wronskians of linear differential equations of the second order with generalized coefficients in the algebra of mnemofunctions..	31
Varenikova E.V. On solutions of the two-point boundary problem for one non-autonomous differential system with a quadratic at phase variables right-hand side	39
Gal'mak A.M. On identities of n -ary group	43
Kamornikov S.F. On one class of finite splittable groups	52
Mahboob Abid, Huo Lijun, Lu Jinghua. On semi cover-avoiding or S -quasinormally embedded subgroups of finite groups	57
Mozhdzher G.T. The first integrals of the fifth order nonlinear differential equations	63
Sazonava A.T. On solutions of simplified systems of nonlinear differential equations related to the problem of four bodies	69
Starovoitov A.P. Asymptotics of quadratic Hermite – Padé approximants of the exponential functions	74
Zhengxin Zhou. On the periodic solutions of the rational differential equations	81
Yakubovich O.V., Dudovskaya Y.E. Research of the multiregime queueing network with abstract description of the conditions	85

TECHNICS

Goldade V.A., Kuzmenkova N.V., Kravchenko V.V., Sytsko V.E. Coloration of polyester fibers for securities protection from falsification	90
Murashko I.A., Hrabrov D.E. Application of cellular automata with an expanded set of rules to generate pseudo-random test sequences	98

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

- Technics (Informatics, Computer Science and Control);***
- Physics and Mathematics.***

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 534.8:535.5

ОПТИКО-АКУСТИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА ДЕФЕКТОВ НА ПОВЕРХНОСТИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

А.Р. Баев¹, В.Г. Гуделев², Г.В. Кулак³, А.И. Митьковец²,
А.Г. Матвеева³, П.И. Ропот²

¹Институт прикладной физики НАН Беларуси, Минск, Беларусь

²Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Беларусь

³Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина, Мозырь, Беларусь

OPTICAL-ACOUSTIC DIAGNOSTICS OF DEFECTS ON THE SURFACE OF SOLIDS

A.R. Baev¹, V.G. Gudelev², G.V. Kulak³, A.I. Mitskovets²,
A.G. Matveeva³, P.I. Ropot²

¹Institute of Applied Physics of NAS Belarus, Minsk, Belarus

²B.I. Stepanov Institute of Physics of NAS Belarus, Minsk, Belarus

³I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University, Mozyr, Belarus

Исследованы особенности рассеяния возбуждаемых оптико-акустическим методом поверхностных акустических волн на трещине, имеющей форму трапеции. Показано, что форма и амплитуда рассеянного импульса поверхностных акустических волн зависит от ширины трещины и ее местоположения относительно источника и приемника ультразвука. Экспериментальное исследование влияния импульсно-лазерного излучения на амплитуду и форму ультразвукового сигнала, возбуждаемого при перемещении пятна лазерного луча прямоугольной формы через поверхностную несплошность в виде усталостной трещины микронного размера, показало хорошее качественное согласие с проведенными теоретическими исследованиями.

Ключевые слова: поверхностная акустическая волна, рассеяние ультразвука, ультразвуковой импульс, поверхностная трещина.

Participants of the surface acoustic waves scattering excited by means of optical-acoustic method on the crack which has trapezium form is investigated. It is shown that the form and amplitude of the scattered impulse of the surface acoustical wave is depended on the crack width and its locality relative to the ultrasonic source and receiver. Experimental investigation of the influence of the impulse-laser radiator on the form and amplitude of the ultrasonic signal excited under traveling laser spot of the rectangular form over the fatigues crack of micron dimensions has show good quality accordance with conducted theoretical investigations.

Keywords: surface acoustic wave, ultrasonic scattering, ultrasonic impulse, surface crack.

Введение

Оптико-акустические (ОА) источники ультразвуковых (УЗ) волн имеют ряд преимуществ перед традиционными (пьезоэлектрическими и электромагнитно-акустическими), включая отсутствие контакта со средой, возможность легкого изменения геометрических параметров акустической антенны, диагностики объектов, движущихся с любой скоростью [1]–[5]. Для возбуждения коротких акустических импульсов перспективно применение ОА методов при импульсном лазерном воздействии [2], [3]. Среди режимов генерации поверхностных акустических волн (ПАВ) предпочтительным является именно термоупругий режим, реализуемый в отсутствие абляции материала и минимальном шумовом фоне, создаваемым продольной и сдвиговой модами [1]–[3]. Возбуждение ПАВ Рэлея при поглощении лазерных импульсов наносекундной длительности в материале из плавленого кварца исследовано в работе [4]. Исследованы особенности

диагностики неоднородностей в виде полосок из золота на поверхности плавленого кварца.

Схема возбуждения и рассеяния ПАВ поверхностным дефектом, имеющим форму трапеции, представлена на рисунке 0.1.

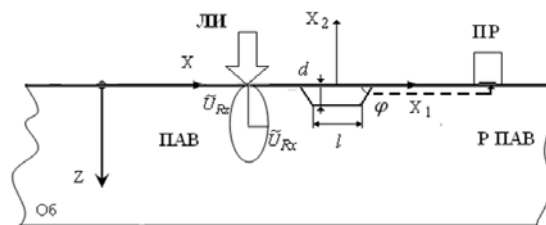


Рисунок 0.1 – Схема рассеяния ПАВ на трещине, имеющей форму трапеции (Об – образец, ПАВ – падающая УЗ волна, Р ПАВ – рассеянная УЗ волна, ЛИ – лазерный импульс; ПР – приемник УЗ волны; d – глубина трещины, l – ширина трещины, φ – угол наклона боковой грани трещины)

1 Данные расчета и их обсуждение

Поверхностный дефект сечением в форме трапеции имеет ширину l и глубину залегания d ; угол наклона боковой стороны трапеции φ (рисунк 0.1). Область возбуждения гиперзвука имеет вид прямоугольника шириной a и длиной b [5]. Лазерный импульс длительностью τ распространяется вдоль оси Z и возбуждает высокочастотные УЗ волны разной поляризации и пространственно-углового распределения. Предположим, что ОА-возбуждение осуществляется в термоупругом (линейном) режиме [1], причем лазерный импульс имеет гауссово амплитудное распределение во времени – $f(t) = \exp(-t^2 / \tau^2)$. Тогда гауссов акустический импульс имеет длительность τ_a превосходящую длительность лазерного импульса. УЗ волна затухает в пространстве при наличии поглощения среды с коэффициентом поглощения $\alpha_s = \Gamma \Omega^2$, где Γ – некоторый коэффициент, зависящий от рода материала и его физических свойств. Импульс УЗ смещенный ПАВ имеет ширину спектра $\Delta\Omega \sim 1/\tau_a$ и центральную частоту $\Omega_0 \sim \Delta\Omega$. Частотный спектр акустического импульса, возбуждаемого на поверхности твердого тела, имеет вид: $F(\Omega) = \tau_a \sqrt{\pi} \exp(-\tau_a^2 \Omega^2 / 4)$, где Ω – круговая частота УЗ волны. Фурье-спектр составляющих рэлеевской ПАВ вдоль Z - и X - направлений имеет вид [5]:

$$\tilde{U}_{Rz}(\Omega) = \frac{P_f S_{пол} F(\Omega) \eta^2 e^{-\alpha_s \rho}}{4\mu} \times \sqrt{\frac{2k_R}{\pi\rho} \frac{\sqrt{1-\gamma^2\eta^2}}{C_0} \frac{\sin(A_R)}{A_R} \frac{\sin(B_R)}{B_R}} e^{i\varphi_R}, \quad (1.1)$$

$$\tilde{U}_{Rx}(\Omega) = \frac{\tilde{U}_{Rz}(\Omega)(1-\eta^2/2)}{\sqrt{1-\gamma^2\eta^2}},$$

$$A_R = ak_R/2, \quad B_R = b(k_R \sin \alpha)/2, \quad (1.2)$$

где $S_{пол} = ab$, a (b) – размер полоски возбуждения вдоль оси X (Z); α – азимутальный угол, отсчитываемый от оси X , P_f – давление на поверхность твердого тела в области лазерного воздействия; ρ – расстояние от области возбуждения до дефекта; $\varphi_R = k_R \rho - \Omega t + \pi/4$; $k_R = \Omega / v_R$, v_R – фазовая скорость ПАВ, $\eta = \frac{0,87 + 1,12\nu}{1 + \nu}$, причем ν – коэффициент Пуассона; $\gamma = \mu / (\lambda + 2\mu)$, где λ , μ – постоянные Ламе;

$$C_0 = 2(2 - \eta^2) - \frac{C_1}{C_2} - \frac{C_2}{C_1} - 2C_1 C_2,$$

где $C_1 = \sqrt{1 - \eta^2}$, $C_2 = \sqrt{1 - \eta^2 \gamma^2}$. Отметим, что частотно-угловое распределение ПАВ, возбуждаемых лазерным импульсом, определяется их функцией рассеяния в области ОА-возбуждения

и частотным спектром падающей акустической волны, т. е. $F(\Omega) \sin(A_R) / A_R \sin(B_R) / B_R$.

Падающая рэлеевская УЗ волна частотой Ω направляется на дефект и рассеивается на нем в прямом ($x_1 > 0$) или обратном ($x_1 < 0$) направлении. С использованием двумерной функции Грина в плоскости $X_1 X_2$ (в системе координат $X_1 X_2 X_3$) амплитуду рассеянной ПАВ можно найти из выражения [6]:

$$U_{Ri}^{sc}(\mathbf{r}') = - \int_s n_p(\mathbf{r}') C_{jpmn} \frac{\partial}{\partial x_n} G_{im}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') [U_{Rj}(\mathbf{r})] dS_r, \quad (1.3)$$

где n_p – компоненты единичного вектора нормали к поверхности (S) трещины, C_{jpmn} – упругие модули материала; $[U_{Rj}(\mathbf{r})]$ – компоненты смещения в области открытой трещины, индуцированные ПАВ Рэлея; функция Грина для смещения в возбуждаемой волне имеет вид [6]:

$$G_{im}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{\alpha=L,T} \left(\frac{i}{4\pi\mu} \right) \left(\frac{k_L}{k_T} \right)^2 \times \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \xi^2)^{-1/2} d_i^\alpha(\xi) d_m^\alpha(\xi) e^{i(\alpha p(\mathbf{r}-\mathbf{r}'))} d\xi, \quad (1.4)$$

где k_L , k_T – волновые числа продольной и сдвиговой объемной УЗ волны в материале звукопровода; полагается, что векторы, входящие в (1.4), имеют вид:

$$\mathbf{p} = (\xi, \sqrt{1-\xi^2}), \quad d^L = \mathbf{p}, \quad d^T = [e_3 \mathbf{p}] (e_3 \parallel X_3).$$

Выполнив асимптотическую оценку интеграла (1.4) и подставив полученное выражение в (1.3), можно, произведя интегрирование по внутренней поверхности дефекта трапециевидной формы, получить выражение для компонент вектора смещений рассеянной ПАВ:

$$U_{Rx,z}^{sc} = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi\rho' k_{L,T}}} e^{-i\pi/4} |U_{Rz,x}| Q_{L,T} I_{L,T}, \quad (1.5)$$

где

$$Q_L = -\frac{k_L^3 \lambda}{4k_T^2 \mu}, \quad Q_T = \frac{k_T}{4},$$

$$I_{L,T} = \frac{\sin[(\pm k_{L,T} + k_R)(l/2 + d \cos \phi)]}{(\pm k_{L,T} + k_R)},$$

причем знак «+» в выражении (1.5) соответствует рассеянию ПАВ в прямом направлении, а знак «-» – рассеянию в обратном направлении; ρ' – расстояние от рассеивающего центра до приемника УЗ волн.

Временная форма рассеянного акустического импульса определяется интегралом [1], [3]:

$$U_{Rx,z}^{sc}(\tilde{t}_R) = \int_{-\infty}^{+\infty} U_{Rx,z}^{sc}(\Omega) e^{-i\Omega \tilde{t}_R} d\Omega, \quad (1.6)$$

где $\tilde{t}_R = t - (\rho + \rho') / \eta v_s$.

Подставив выражения (1.5) в (1.6), и, выполнив интегрирование численными методами, получим временную форму продольной ($U_{Rz}^{sc}(t)$) и поперечной ($U_{Rz}^{sc}(t)$) составляющих рассеянного акустического импульса рэлеевских УЗ волн в области приемника. При численных расчетах применялся алгоритм быстрого преобразования Фурье и метод сплайн-интерполяции.

Численные расчеты проводились для ПАВ Рэлея, распространяющейся по свободной поверхности материала, выполненного из стали (Fe). При этом полагалось, что $P_f=100$ МПа, $v_f=5100$ м/с, $v_s=3200$ м/с, $a=132$ мкм, $b=20$ мм, $\lambda=4,9 \cdot 10^{10}$ Па, $\mu=7,84 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho=2$ мм, $\rho'=10$ мм, $\Gamma=10^{-10}$ Гц⁻¹. Предполагалось, что модельный дефект шириной l имеет плоскую границу и ориентирован вдоль оси ОХ. Использование ПАВ, падающей под малым углом наклона α к оси X_1 , позволяет разделить в пространстве падающую и рассеянную УЗ волну при обратном рассеянии (рисунок 0.1).

На рисунке 2.1 представлена осциллограмма рассеянной ПАВ в прямом направлении при рассеянии на дефекте прямоугольной формы (угол $\varphi=90^\circ$ на рисунке 0.1).

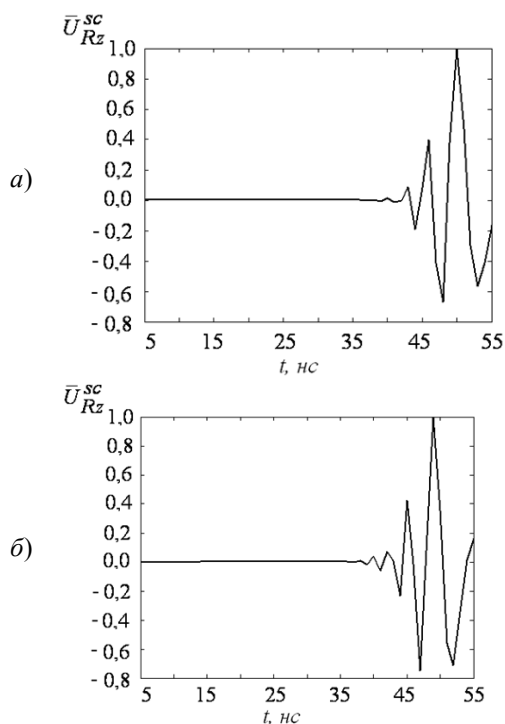


Рисунок 2.1 – Осциллограммы нормированной на максимальное значение поперечной составляющей \bar{U}_{Rz}^{sc} рэлеевских ПАВ, рассеянных в прямом направлении от времени t при $\rho=0,5$ мм, $l=0,8$ мм (а), $\rho=3$ мм, $l=0,2$ мм (б) ($\rho'=10$ мм, $a=132$ мкм, $b=20$ мм, $\varphi=90^\circ$, $d=1$ мм, Fe)

Из рисунка 2.1 следует, что вид осциллограмм изменяется при изменении расстояния до дефекта и его ширины. С увеличением ширины трещины значительно изменяется форма вступительной и заключительной части импульса рассеянной ПАВ.

На рисунке 2.2 представлены зависимости амплитуды Z - составляющей рассеянной ПАВ от положения источника лазерного УЗ возбуждения.

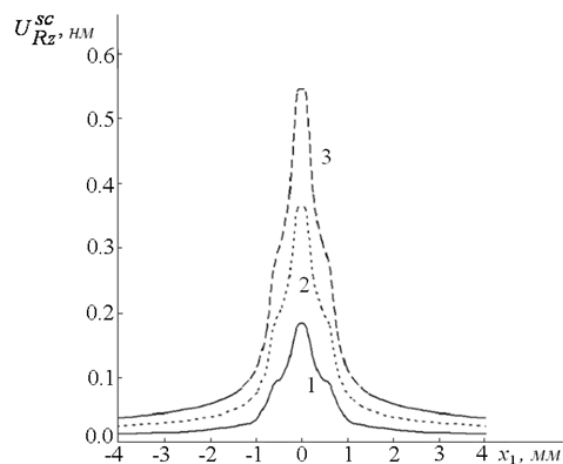


Рисунок 2.2 – Зависимость амплитуды поперечной составляющей U_{Rz}^{sc} импульса рэлеевских ПАВ при изменении положения точки возбуждения x_1 относительно трещины при различных ширинах полоски лазерного возбуждения a : 1 – 44, 2 – 88, 3 – 132 мкм ($\alpha=0$, $\rho'=10$ мм, $l=0,2$ мм, $b=30$ мм, $\varphi=90^\circ$, $d=1$ мм, Fe)

Как видно из рисунка при перемещении лазерного пучка относительно трещины имеет место ярко выраженный максимум, достигаемый при расположении центра лазерного пучка в окрестности центра трещины ($x_1=0$). Численные расчеты на основании выражений (1.6) дают типичные осциллограммы рассеянных ПАВ на дефекте в форме трещины, приведенные в работе [7].

2 Эксперимент

В эксперименте источником импульсно-лазерного излучения с длиной волны 1,06 мкм служил генератор ЛТИПЧ с устройством коррекции сечения пятна лазерного луча (ПЛЛ). ПАВ принималась пьезопреобразователем, сигнал с которого подавался после усиления на вход «Spectronic» TDS 3052B для анализа его спектра и амплитуды. Частота следования лазерных импульсов составила 10 Гц. PLL формировалось в виде вытянутой полосы с изменяемым поперечным сечением. Предполагалось, что режим возбуждения ПАВ является термоупругим. Значимые результаты экспериментальных исследований приведены на рисунках 2.1 и 2.2, на которых

представлены характерные осциллограммы возбуждаемых ПАВ и зависимости их амплитуды от координаты и безразмерной ширины ПЛЛ $d^* = a / \lambda_{\text{ПАВ}}$, где $\lambda_{\text{ПАВ}}$ – длина волны ПАВ.

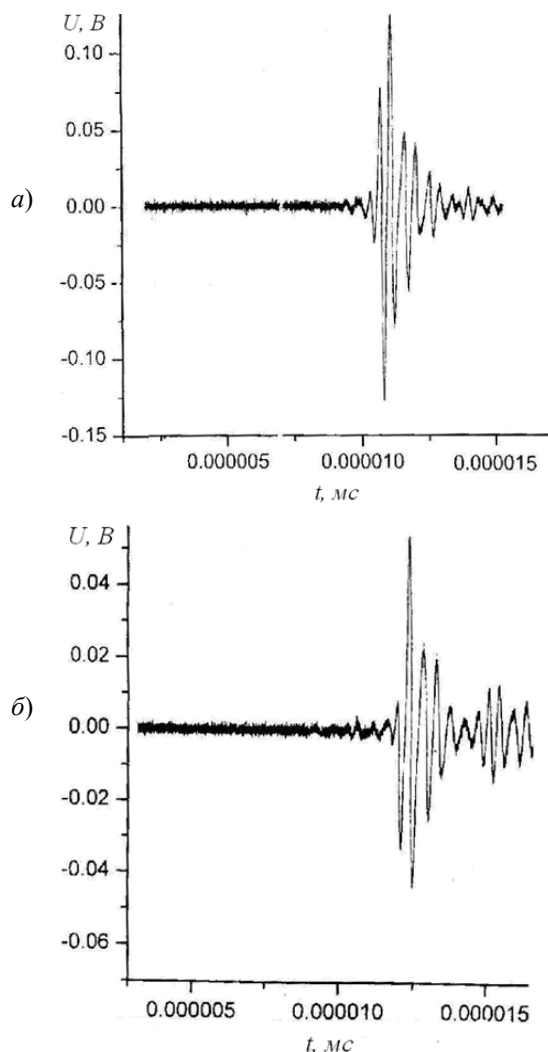


Рисунок 2.1 – Осциллограммы ПАВ при изменении положения ПЛЛ (типа длинной полосы) на образце с трещиной шириной 4 мкм, глубиной 400–500 мкм и длиной 25 мм: $x_1 = 0,5$ мм (а); $x_1 = 3$ мм (б); ось ординат в вольтах (В), а ось абсцисс – в мс

Как видно из рисунка, при пересечении ПЛЛ трещины наблюдается существенное изменение не только амплитуды, но и «вступительной» части импульса, занимающего временной интервал его осцилляции $\tau = (2-3)f^{-1}$, где f – характерная частота ПАВ. Этот эффект сопровождается изменением спектра импульса, а также появлением «сателлитов» ПАВ, появляющихся, по-видимому, в результате отражения от стенок трещины обратной волны, генерируемой ПЛЛ. Признаком, характеризующим наличие дефекта, может служить форма «вступительной» части осцилляции импульса, обусловленная

сложным характером формирования поля ПАВ в окрестности трещины. Необходимо отметить, что ранее в работе [8] при изучении подобного эффекта на образце с длинной искусственной трещиной шириной $l=50$ мкм влияние параметра d^* на амплитуду возбуждаемой ПАВ не изучалось.

Зависимость нормированной амплитуды рассеянной ПАВ \bar{U}_{Rz}^{sc} имеет ярко выраженный максимум, достигаемый при расположении центра ПЛЛ в окрестности трещины ($x_1 = 0$). Максимальное же увеличение амплитуды сигнала достигается, если ширина ПЛЛ выбрана оптимальной величины, характеризуемой безразмерным параметром $d^* = a / \lambda_{\text{ПАВ}} = 1,8-2,2$, в окрестности $-4 \text{ мм} \leq x_1 \leq 4 \text{ мм}$.

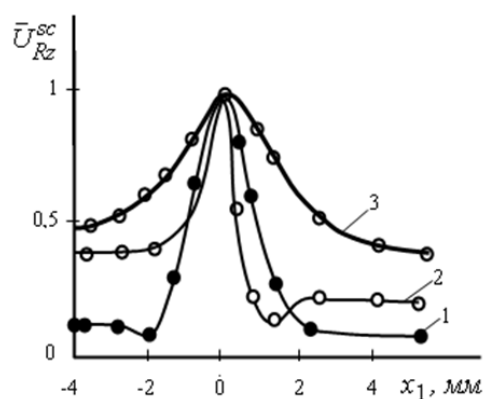


Рисунок 2.2 – Амплитуда ПАВ в зависимости от положения ПЛЛ типа длинной полосы при различных значениях параметра d^* : 1 – 2,2; 2 – 0,2; 3 – 5 ($l = 4$ мкм, $d = 400-500$ мкм, $b = 20$ мм)

Проведенные исследования показали, что путем уменьшения поперечного сечения ПЛЛ представляется возможным достаточно легко обнаруживать несплошности типа поры с поперечным размером, составляющим доли миллиметра.

Если учесть, что на бездефектной поверхности всего лишь 50% энергии ПАВ распространяется по направлению к приемному преобразователю, то при локализации ПЛЛ в окрестности трещины ($x_1 \approx 0$) произойдет повышение плотности энергии ПАВ, направленной к приемному преобразователю вследствие их отражения от стенок трещины.

Заключение

Показано, что при увеличении ширины трещины амплитуда рассеянного импульса растет для попутного и обратного рассеяния. При расположении центра пучка лазерного возбуждения в окрестности трещины достигается максимум рассеянных ПАВ, величина которого быстро уменьшается при отклонении от центра

трещины в условиях попутного и обратного рассеяния. Экспериментально исследовано влияние импульсно-лазерного излучения на амплитуду и форму сигнала ПАВ, возбуждаемого при перемещении пятна лазерного луча прямоугольной формы через поверхностную несплошность в виде усталостной трещины микронного раскрытия. Показано хорошее качественное согласие с теоретическими исследованиями на основе метода функций Грина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусев, В.Э. Лазерная оптоакустика / В.Э. Гусев, А.А. Карабутов. – Москва : Наука. – 304 с.
2. Tam, A.C. Pulsed-laser generation of ultrashort acoustic pulsed : Application for thin film ultrasonic measurement / A.C. Tam // Appl. Phys. Lett. – 1984. – Vol. 45, № 5. – P. 510–512.
3. *Experimental study of laser-generated shear waves using interferometry* / S.Y. Zang [et. al.] // Res. Nondestr. Eval. – 1991. – Vol. 2. – P. 143–155.
4. Lin, H.N. Study of vibrational modes of gold nanostructures by picosecond ultrasonic / H.N. Lin,

H.J. Maris, L.B. Freund // Appl. Phys. – 1993. – Vol. 73, № 2. – P. 37–45.

5. Буденков, Г.А. Динамические задачи теории упругости / Г.А. Буденков, О.В. Недзвецкая. – М. : Физматлит, 2004. – 135 с.

6. Hirose, S. Ultrasonic Inversion for Determining crack in a solid / S. Hirose // J. of The Faculty of Environmental Science and Technology. – 1997. – Vol. 2, № 1. – P. 89–98.

7. *Опτικο-акустический метод обнаружения поверхностных несплошностей* / А.Р. Баев [и др.] // Материалы IX Международной научной конференции «Лазерная физика и оптические технологии», Гродно, 30 мая – 2 июня 2012 г. – Гродно. – 2012. – Т. 2. – С. 134–137.

8. Krishnaswamy, S. Theory and Application of Laser-Ultrasonic Techniques / S. Krishnaswamy // In Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation / D.O. Thompson and D.E. Chimenti, Eds. – Plenum Press, New York. – 2003. – Vol. 20A. – P. 436–492.

Поступила в редакцию 25.11.13.

УДК 544.542.1; 621.357.9

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ЭЛЕКТРООСАЖДЕНИЕ НИКЕЛЯ С НАНОЧАСТИЦАМИ SiO₂ МЕТОДОМ ПОЛНОГО ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

А.В. Белко, Н.Г. Валько

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

STUDY OF THE EFFECT OF THE X-RAY IRRADIATION ON NICKEL ELECTRO DEPOSITION WITH NANOPARTICLES SiO₂ BY THE METHOD OF FULL FACTORIAL EXPERIMENT

A.V. Belko, N.G. Valko

Y. Kupala Grodno State University, Grodno, Belarus

Исследовано влияние рентгеновского излучения на электролитическое осаждение композиционных покрытий на основе никеля с наночастицами SiO₂ (7–15 нм) на низкоуглеродистую сталь. Обнаружены зависимости скорости осаждения композиционных покрытий от режимов электролиза и концентрации наночастиц SiO₂ в электролите. На основании экспериментальных данных разработана статистическая модель электроосаждения композиционных покрытий в поле рентгеновского излучения. В соответствии с методом полного факторного эксперимента рассмотрено влияние вариаций плотности катодного тока осаждения, температуры, концентрации наночастиц SiO₂ в электролите и рентгеновского излучения на выход по току на двух уровнях.

Ключевые слова: электрокристаллизация, рентгеновское излучение, выход по току, уравнение регрессии, фактор, критерии.

The results of the study of nickel electrodeposition with nanopowder SiO₂ (7–15 nm) on mild steel in the X-Ray field in this paper are submitted. The dependence of the rate of deposition from irradiating, electrolysis mode and concentrator of nanoparticles in electrolyte is observed. The statistical model of electrodeposition in the X-rays field and without irradiation is developed on the basis of experimental data. The influence of current density variations, temperature and concentration of nanoparticles in the electrolyte at two levels according to the method of full factorial experiment for electrodeposition in the X-Ray irradiation are considered.

Keywords: electrodeposition, X-rays irradiation, the current efficiency, regression equations, the criteria.

Введение

Создание защитных слоев на поверхности деталей и металлических конструкций посредством электролитического нанесения композиционных покрытий (КЭП) на основе никеля с наночастицами SiO₂ является актуальной задачей современного машиностроения, решение которой представляет как практическую, так и высокую экономическую значимость.

Устойчивый интерес проявляется к исследованиям в области радиационного материаловедения, направленных на получение покрытий с требуемыми эксплуатационными свойствами при воздействии рентгеновского излучения [1]–[4]. В работе [2] показано, что действие рентгеновского излучения в процессе формирования металлических покрытий приводит к существенным изменениям их структуры и физико-механических свойств. Осажденные в поле рентгеновского излучения слои характеризуются повышенным выходом металла по току, равномерностью распределения по подложке и улучшенными эксплуатационными характеристиками [3]. Следует также отметить, что облучение рентгеновским излучением электролита в процессе электролиза

в результате радиационно-химических реакций, протекающих в облучаемых электролитах, является одним из способов, препятствующих адсорбции на поверхности подложки оксидных и гидроксидных пленок [4]. Вследствие ингибирования труднорастворимой пленки из продуктов промежуточного восстановления металла на поверхности катода происходит увеличение вероятности включения в матрицу металла частиц второй фазы и увеличение скорости осаждения и выхода по току КЭП.

Подробное исследование влияния рентгеновского излучения на электролит, концентрации наночастиц в электролите, температуры и других факторов и, тем более, возможное их воздействие на скорость осаждения, структуру и свойства КЭП посредством прямых экспериментов – сложная задача. Для оптимизации задачи изучения влияния облучения и режимов электролиза на электролитическое осаждение КЭП можно использовать метод полного факторного эксперимента (ПФЭ). Он позволяет получить математические зависимости влияния различных факторов на выходной параметр при ограниченном числе опытов.

Целью данной работы являлось, на основании экспериментальных данных, полученных при электроосаждении КЭП на основе никеля с наночастицами SiO₂ в поле рентгеновского излучения, с помощью ПФЭ построить статистическую модель, учитывающую влияние вариаций плотности катодного тока осаждения, температуры, концентрации наночастиц в электролите и рентгеновского излучения.

1 Методика эксперимента

При планировании опытов использовали методику ПФЭ первого порядка с двухуровневым варьированием факторов (плотности силы тока i , температуры окружающей среды t , концентрации наночастиц SiO₂, мощность экспозиционной дозы рентгеновского излучения P). В качестве выходного параметра рассматривался выход по току (ВТ_к) КЭП при электроосаждении на подложку. Статистической моделью объекта исследования являлась функция отклика (выход по току КЭП), связывающая выходной параметр ВТ_к с факторами (i , t , [SiO₂], P), которые варьировались при проведении опытов.

В таблице 1.1 представлены данные, полученные при преобразовании независимых переменных в натуральном масштабе (i , t , [SiO₂], P) соответственно к безразмерным переменным (x_1 , x_2 , x_3 , x_4) с кодируемыми значениями: -1, +1.

Таблица 1.1 – Значения факторов

Безразмерные переменные x_1, x_2, x_3, x_4	-1	+1
Плотность тока, i , мА/дм ²	1,2	4
Температура t , °С	22	40
Концентрация наночастиц SiO ₂ , г/см ³	0,1	1
Мощность экспозиционной дозы рентгеновского излучения P , кВт/см ²	0	100

На первоначальном этапе была построена матрица планирования эксперимента в соответствии с ПФЭ [5]–[6], включающая в себя все возможные комбинации факторов, и получены покрытия при соответствующих режимах электроосаждения.

КЭП осаждали на подложках из низкоуглеродистой стали 08 кп в течение 1 ч из электролита следующего состава: NiSO₄·7H₂O – 240 г/л; MgSO₄·7H₂O – 30 г/л; H₃BO₃ – 25 г/л; NaCl – 15 г/л; Na₂SO₄ – 50 г/л. Концентрация наночастиц и режимы электролиза варьировались в соответствии с таблицей 1.1. Размер наночастиц от 7 до 15 нм. В качестве источника рентгеновского излучения была использована установка при напряжении на рентгеновской трубке 50 кВ и токе 15 мА с молибденовым анодом. Электроосаждение КЭП проводилось в электрохимической термостатируемой

ячейке на расстоянии 10 см от источника излучения. При данных условиях облучения мощность экспозиционной дозы рентгеновского излучения составляет 100 кР/ч. ВТ_к рассчитывался по отношению реального прироста массы к теоретическому, найденному по закону Фарадея.

В соответствии с ПФЭ для всех возможных комбинаций факторов при соответствующих режимах электроосаждения получено по 2 серии покрытий. Для построения статистической модели (уравнения регрессии) была проведена проверка гипотез об однородности оценок дисперсии по критерию Кохрена, полученных для разных опытов; о значимости коэффициентов регрессии по t -критерием Стьюдента; об адекватности уравнений экспериментальным данным с помощью F -критерия Фишера [5], [6].

2 Результаты эксперимента и их обсуждение

В таблице 2.1 представлены результаты вычисления величины ВТ_к для контрольных образцов и образцов, сформированных в условиях облучения, а также все возможные комбинации факторов, влияющих на ВТ_к.

Таблица 2.1 – Комбинации факторов и соответствующие им значения ВТ_к для КЭП на основе никеля с наночастицами SiO₂

Номер комбинации факторов, u	Факторы				Выход по току	
	x_1	x_2	x_3	x_4	ВТ _{1м} , %	ВТ _{2м} , %
1	-1	-1	-1	-1	67	64
2	+1	-1	-1	-1	91	88
3	-1	+1	-1	-1	37	41
4	+1	+1	-1	-1	86	81
5	-1	-1	+1	-1	72	72
6	+1	-1	+1	-1	78	84
7	-1	+1	+1	-1	37	40
8	+1	+1	+1	-1	79	75
9	-1	-1	-1	+1	71	74
10	+1	-1	-1	+1	92	95
11	-1	+1	-1	+1	69	71
12	+1	+1	-1	+1	91	94
13	-1	-1	+1	+1	82	84
14	+1	-1	+1	+1	96	99
15	-1	+1	+1	+1	51	48
16	+1	+1	+1	+1	89	90

Как видно из таблицы 2.1, действие рентгеновского излучения на электролитическое осаждение КЭП на основе никеля с наночастицами SiO₂ приводит к увеличению ВТ_к. Поскольку площадь осаждения КЭП была фиксированная и одинаковая для всех покрытий, то увеличение ВТ_к указывает на возрастание скорости осаждения вещества. Под влиянием рентгеновского излучения электролит подвержен радиолизу и, обусловленные им радиационно-химические реакции

способствуют активному кластерообразованию восстанавливаемого металла непосредственно в объеме раствора, значительно облегчающему разряд металла на подложке. Кроме того, вследствие радиолитического в электролите возникают активные и подвижные частицы, способствующие естественному перемешиванию раствора и интенсифицирующие процесс электроосаждения.

Анализ экспериментальных данных показал, что при электроосаждении из электролита с содержанием наночастиц SiO₂, равном 0,1 г/л, при плотности тока 1,2 А/дм², температуре термостатирования 22 °С, в поле рентгеновского излучения формируются КЭП, у которых ВТ_к несколько ниже, чем у КЭП, осажденных из электролитов с концентрацией модификатора 1 г/л, но при этом значительно выше, чем у контрольных образцов. Увеличение температуры термостатирования до 40 °С приводит к существенному снижению ВТ_к, что связано, в первую очередь, с возрастанием процессов наводороживания при повышенных температурах, препятствующих разрядке ионов никеля на катоде. Для контрольных КЭП, осажденных из электролитов с концентрацией SiO₂ 0,1% среднее значение ВТ_к снижается до 39% , в случае концентрации SiO₂, равной 1% – до 38%. Аналогично, для КЭП, осажденных в условиях облучения, среднее значение ВТ_к уменьшается до 70% и 50% для электролитов с концентрацией SiO₂ 0,1% и 1%, соответственно.

Поскольку ВТ_к у КЭП, осажденных в поле рентгеновского излучения из электролита с содержанием наночастиц SiO₂ 0,1 г/л на 30% выше, чем у контрольных КЭП, а для КЭП с концентрацией наночастиц 1 г/л эта разница составляет более 10%, то можно заключить, что действие рентгеновского излучения на электролит способствует осаждению равномерных и плотных покрытий с повышенным ВТ_к по сравнению с контрольными КЭП. Это может быть вызвано не только интенсификацией массопереноса под облучением, но и уменьшением наводороживания катода, т. к. вследствие радиолитического электролита увеличивается вероятность восстановления водорода непосредственно в объеме электролита.

Учитывая данные, приведенные в таблице 2.1, была построена математическая модель электроосаждения КЭП при воздействии рентгеновского излучения в виде уравнения регрессии, показывающего зависимость величины ВТ_к от плотности катодного тока, температуры и концентрации наночастиц SiO₂ в электролите в поле рентгеновского излучения.

Уравнение регрессии при осаждении покрытий в поле рентгеновского излучения в общем виде имеют вид (для ПФЭ первого порядка):

$$\begin{aligned}
 BT = & b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_{12}x_1x_2 + \\
 & + b_{13}x_1x_3 + b_{14}x_1x_4 + b_{23}x_2x_3 + b_{24}x_2x_4 + \\
 & + b_{34}x_3x_4 + b_{123}x_1x_2x_3 + b_{124}x_1x_2x_4 + \\
 & + b_{134}x_1x_3x_4 + b_{234}x_2x_3x_4 + b_{1234}x_1x_2x_3x_4,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где b_i – коэффициенты в уравнении регрессии; i – индекс, который указывает на факторы соответствующие коэффициенту.

При проверке гипотезы об однородности дисперсий было рассчитано значение критерия Кохрена [5]–[7]. Его значение равно 0,18. Согласно [5], [6] значение расчетного критерия Кохрена меньше критического, равного 0,4 для уровня значимости 5%. В связи с этим было рассчитано значение дисперсии однородности, которое приняло значение, равное 5,79.

Значимость коэффициентов b_i в уравнении регрессии (2.1) рассчитывались по t -критерию Стьюдента. Для каждого из коэффициентов уравнений регрессии проведено сравнение полученного значения с критическим значением, равным 2,31 для уровня значимости 5%. Рассчитанные значения коэффициентов b_i и соответствующие им t -критерии Стьюдента представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Значения коэффициентов и t -критериев для электроосаждения в поле рентгеновского облучения

Индекс i	Коэффициенты b_i	t_i -критерии Стьюдента
0	74,5	175
1	13,3	31,3
2	-7,18	16,9
3	-1,21	2,84
4	6,47	15,2
12	4,8	11
13	-0,8	1,83
14	-1,06	2,49
23	-2,8	6,5
24	1,6	3,8
34	0,14	0,32
123	2,1	4,9
124	-1,4	3,28
134	2,12	4,98
234	-2	4,72
1234	1,02	2,4

Анализ таблицы 2.2 показал, что значимыми являются все коэффициенты за исключением тех, которые учитывают взаимное парное влияние концентрации наночастиц SiO₂ и рентгеновского излучения (значение t -критерия Стьюдента равно 0,32), плотности силы тока и концентрации наночастиц SiO₂ (значение t -критерия Стьюдента равно 1,83). В этом случае математическая модель электроосаждения в поле рентгеновского излучения может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned}
 BT_k = & 74,5 + 13,3x_1 - 7,18x_2 - 1,21x_3 + \\
 & + 6,47x_4 + 4,8x_1x_2 - 1,06x_1x_4 - 2,8x_2x_3 + \\
 & + 1,6x_2x_4 + 2,1x_1x_2x_3 - 1,4x_1x_2x_4 + \\
 & + 2,12x_1x_3x_4 - 2x_2x_3x_4 + 1,02x_1x_2x_3x_4.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Используя расчетные значения дисперсии адекватности $D_{ad} = 9,96$ и дисперсии однородности

$D=5,79$, был определен критерий Фишера, значение которого оказалось (1,72) меньше критического значения (3,6) для уровня значимости 5% [6]. На основании полученных данных было сделано заключение об адекватности регрессионной модели (2.2) экспериментальным данным.

Анализ коэффициентов в уравнении 2.2 при факторах показывает, что увеличению выхода по току КЭП на основе никеля с наночастицами SiO₂ наиболее способствует рост плотности катодного тока осаждения (значение коэффициента при факторе плотности тока равно 13,3), что вполне понятно, поскольку плотность тока осаждения является основным параметром регулирующим скорость осаждения вещества на катоде. Действие рентгеновского излучения на электролит в процессе осаждения (значение при факторе мощности экспозиционной дозы рентгеновского излучения 6,47) также вносит существенный вклад в увеличение VT_K , что коррелирует с экспериментальными данными: покрытия, осажденные в поле рентгеновского излучения характеризуются повышенным VT_K в сравнении с контрольными КЭП. Следует отметить, что взаимное влияние температуры и плотности тока осаждения также оказывает влияние на VT_K (значение коэффициента при парном взаимодействии фактор температуры и плотности тока осаждения равно 4,8).

Таким образом, на основании функциональной зависимости, представленной в регрессионном уравнении 2.2, можно определить параметры электроосаждения для осаждения компактных покрытий с высоким VT_K , что позволяет значительно сократить число экспериментов.

При переходе от кодированных значений факторов x_1, x_2, x_3, x_4 в уравнении (2.2) соответственно к факторам в натуральном масштабе ($i, t, [SiO_2], P$) было получено уравнение для электроосаждения в поле рентгеновского излучения и в его отсутствии (2.3):

$$\begin{aligned}
 VT(P, i, t, [SiO_2]) = & 72,8 + 11,9i - 1,09t + \\
 & + 5,82[SiO_2] - 24,2P + 0,008it - 9,16i[SiO_2] + \\
 & + 0,008t[SiO_2] + 7,81iP + 1,64tP + \\
 & + 42,1[SiO_2]P + 0,19it[SiO_2] - 0,42itP - \\
 & - 4,42i[SiO_2]P - 1,92t[SiO_2]P + 0,36it[SiO_2]P.
 \end{aligned}
 \quad (2.3)$$

Заключение

В ходе экспериментальных исследований было установлено, что действие рентгеновского излучения на процесс электроосаждения композиционных покрытий на основе никеля с наночастицами SiO₂ на подложки из низкоуглеродистой стали 08кп приводит к возрастанию выхода сплава по току и скорости наращивания покрытий за счет увеличения потоков диффундирующих ионов восстанавливаемых металлов к катоду и уменьшения наводороживания катода вследствие радиолитического электролиза электролита.

На основании экспериментальных значений VT_K для композиционных покрытий, осажденных при различных условиях электролиза, из электролитов с различной концентрацией наночастиц SiO₂ размером от 7 нм до 15 нм с помощью метода полного факторного эксперимента разработана модель, определяющая математическую зависимость между катодным выходом по току металла и плотностью тока осаждения, температурой электроосаждения и концентрацией наночастиц SiO₂ в электролите в поле рентгеновского излучения.

Анализ регрессионных уравнений позволил установить, что действие рентгеновского излучения на электролит в процессе электроосаждения КЭП позволяет расширить интервал рабочей плотности тока осаждения КЭП и уменьшить зависимость скорости осаждения массы на катоде от концентрации наночастиц в растворе.

Разработанная модель позволяет адекватно определить оптимальные режимы осаждения КЭП на основе никеля при воздействии рентгеновского излучения для получения КЭП с заданными скоростями осаждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Структура и свойства гальванических покрытий Zn-Ni, сформированных при воздействии рентгеновского излучения / В.М. Анищик [и др.] // Физика и химия обработки материалов. – 2010. – № 6. – С. 1–6.
 2. Анищик, В.М. Влияние рентгеновского излучения на электроосаждение покрытий Zn-Ni из кислого электролита / В.М. Анищик, Н.Г. Валько, Н.И. Поляк // Весці НАН Беларусі. Сер. Фізіка-матэматычных навук. – 2012. – № 3. – С. 101–105.
 3. Валько, Н.Г. Электрические свойства сплавов Co-Ni, электроосажденных при воздействии рентгеновского излучения / Н.Г. Валько, В.Г. Гуртовой // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 3. – С. 15–18.
 4. Пикаев, А.К. Современная радиационная химия. Радиолитиз газов и жидкостей / А.К. Пикаев. – М.: Наука, 1986. – 440 с.
 5. Адлер, Ю.П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю.П. Адлер, Е.В. Маркова, Ю.В. Грановский. – М.: Наука. – 1976. – 278 с.
 6. Закгейм, А.Ю. Введение в моделирование химико-технологических процессов. – М.: Химия. – 1982. – 288 с.
 7. Белко, А.В. Моделирование электроосаждения никеля при воздействии рентгеновского излучения / А.В. Белко, Н.Г. Валько // Вестн. Гродн. гос. ун-та. Сер. 2. Математика. Физика. Информатика. Вычислительная техника и управление. – 2013. – № 2. – С. 86–92.
- Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (Ф12МВ-044) и МО Республики Беларусь.

Поступила в редакцию 06.09.13.

УДК 669.14.018.8: 621.45.038.72

РАЗМЕРНЫЕ ЭФФЕКТЫ В НАНОРАЗМЕРНЫХ ДВУХСЛОЙНЫХ ПОКРЫТИЯХ ТИТАН-УГЛЕРОД. 2. ЗАВИСИМОСТЬ СТРУКТУРЫ И СВОЙСТВ ОТ ТОЛЩИНЫ УГЛЕРОДНОГО СЛОЯ

Чжоу Бин^{1,2}, А.В. Рогачёв¹, Д.Г. Пилипцов¹, А.С. Руденков¹,
Н.Н. Федосенко¹, Цзян Сяохун², И Бин²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

²Нанкинский университет науки и технологии, Нанкин, Китай

SIZE EFFECT IN THE BILAYER COATINGS OF TITANIUM-CARBON. 2. THE DEPENDENCE OF STRUCTURE AND PROPERTIES ON THE THICKNESS OF CARBON LAYER

Zhou Bing^{1,2}, A.V. Rogachev¹, D.G. Pilipstov¹, A.S. Rudenkov¹,
N.N. Fedosenko¹, Jiang Xiaohong², Ye Bing²

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

²Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, China

Определены зависимости фазового состава, механических свойств углеродных слоев, нанесенных на наноподслой титана от их толщины. Установлено, что каталитическое влияние подложки наиболее сильно проявляется при толщине углеродного слоя менее 90 нм. В более толстых слоях характер размерных зависимостей структуры и фазового состава аналогичен зависимостям, характерным для покрытий углерода, осажденных без подслоя. Показано, что размерные зависимости оптических свойств, проявляющиеся в повышении прозрачности и изменении ширины запрещенной зоны с ростом толщины углеродного слоя, связаны с протеканием процессов диффузии на границе раздела фаз.

Ключевые слова: алмазоподобный углерод, двухслойное покрытие, структура, морфология, твердость, внутренние напряжения, оптические свойства.

The dependence of the phase composition and mechanical properties of carbon layers deposited on titanium nano-interlayer on their thickness has been determined. It is found that the catalytic effect of the substrate is most pronounced in the carbon layer with a thickness of less than 90 nm. In thicker layers the character of size effect on the structure and phase composition is similar to that of the carbon coatings without interlayer. It is shown that the size dependence of optical properties manifested in improving the transparency and changing the band gap with increasing the thickness of carbon layer is associated with the occurrence of diffusion process at the interphase.

Keywords: diamond-like carbon, bilayer coating, structure, morphology, hardness, internal stress, optical properties.

Введение

Многослойные покрытия на основе металлов и углерода в сравнении с однокомпонентными пленочными материалами характеризуются более высокими прочностью адгезионного соединения, триботехническими свойствами и относительно низким уровнем внутренних механических напряжений [1]–[4]. При использовании в качестве элементов покрытия металлических наноразмерных слоев, свойства которых определяются размером [3], [4], следует ожидать проявление специфических структурных эффектов, зависимость параметров покрытия от толщины таких элементов. В [5] показано, что для металл-углеродного покрытия, которое характеризуется высокой гетерогенностью и представляет собой систему преимущественно из наноразмерных частиц с графитоподобными sp^2 или алмазоподобными sp^3 связями, такая зависимость проявляется в изменении размера и степени упорядоченности Csp^2 кластеров, их распределения в слое и определяется в

значительной степени каталитической активностью металлической поверхности, диффузией и процессами химического взаимодействия, протекающими на границе раздела фаз [6], [7]. При формировании многослойных систем из наноразмерных элементов проявляется их взаимное влияние, которое и определяет макроскопические свойства покрытия в целом. Изучение фазового, структурного состояния, механических свойств таких систем, проявляющихся в них размерных эффектов, представляет не только практический интерес, но и значительно расширяет представления о механизме процессов структурообразования, межфазного взаимодействия в наноматериалах.

Основной целью настоящей работы является установление зависимости фазового состава, структуры углеродного слоя в бислойных покрытиях (Ti/C), содержащих наноподслой титана, от толщины слоя углерода и влияния на нее термобработки.

1 Методика эксперимента

Для получения двухслойных покрытий титан-углерод использовалась установка вакуумного напыления УВНИПА-1-001, содержащая газовый ионный источник, с помощью которого производится очистка и нагрев подложек, источник плазмы катодно-дугового разряда с металлическим (титановым) катодом, источник плазмы импульсного катодно-дугового разряда с катодом из графита, используемым для нанесения углеродных покрытий. Углеродные покрытия наносились при напряжении разряда 250–300 В и частоте импульсов от 1 до 35 Гц. Подслой титана наносился электродуговым испарением титанового катода при токе дуги 90 А с использованием сепарации летучих частиц в магнитном поле. Толщина слоя титана составляла 20 нм, при которой, по данным работы [6], проявляется наиболее активно каталитическое влияние титана на процессы структурообразования. Нанесение покрытия производилось при остаточном давлении в камере $\sim 4 \cdot 10^{-3}$ Па.

Термообработка покрытий осуществлялась в вакууме в течение 30 минут при температуре 500°C.

Измерения микротвердости проводились при постоянной нагрузке на индентор с помощью микротвердомера Leica VMHT MOT (Кноор). Для оценки напряжений в покрытии использовался рентгеновский дифракционный анализ [8].

Химический состав и структура связей углеродных слоев оценивали методами РФЭС (PHI Quantera) и КР спектроскопии (длина волны возбуждающего излучения 514,6 нм и мощность 20 мВт).

Изучение морфологии покрытий осуществляли методом атомно-силовой микроскопии (NT-MDT, Solver-PRO P47) в режимах измерения топографии и фазового контраста.

Спектроскопические исследования в оптическом диапазоне и определение ширины запрещенной зоны покрытий проводили с помощью УФ-Вид-Ближнего ИК спектрофотометра (Varian, Cary-50).

2 Результаты и их обсуждение

Из представленных на рисунке 2.1 спектров КР следует, что интенсивность локализованного при волновом числе 1560 см^{-1} пика комбинационного рассеяния покрытия Ti/C, определяющего концентрацию углеродных связей sp^2 - и sp^3 -гибридизации [5], [9], [10], немонотонно изменяется с увеличением толщины углеродного слоя, что свидетельствует о сложном характере распределения фаз в граничном слое. Отметим, что при осаждении углеродного покрытия на кремний без подслоя такая зависимость является монотонной (рисунок 2.1, в). При этом в двухслойном покрытии в сравнении с однослойным при толщине углеродного слоя менее 12 нм интенсивность пика значительно ниже, что объясняется химическим взаимодействием углерода с титаном и уменьшением, таким образом, их участия в образовании связей между собой. Анализ представленных спектров показывает, что при толщине слоя более 80 нм доля атомов углерода с sp^2 - и sp^3 -гибридизацией, оцениваемая как отношение высоты пика к толщине слоя, существенно снижается, что является результатом более интенсивного образования аморфных структур.

На основании разложения широкого пика рассеяния с помощью двух кривых Гаусса с центром в 1360 см^{-1} (D-пик) и 1570 см^{-1} (G-пик) проведен анализ изменения фазового состава углеродного слоя при увеличении его толщины (рисунок 2.2).

При увеличении толщины углеродного слоя, нанесенного на подслоя титана толщиной до 30 нм, отношение I_D/I_G возрастает, а ширина G-пика снижается и его максимум смещается в область меньших значений волновых чисел. С ростом слоя углерода от 30 нм до 106 нм отношение I_D/I_G уменьшается, а ширина G-пика увеличивается и положение его максимума возрастает. При дальнейшем повышении толщины слоя углерода характер зависимостей меняется на противоположный.

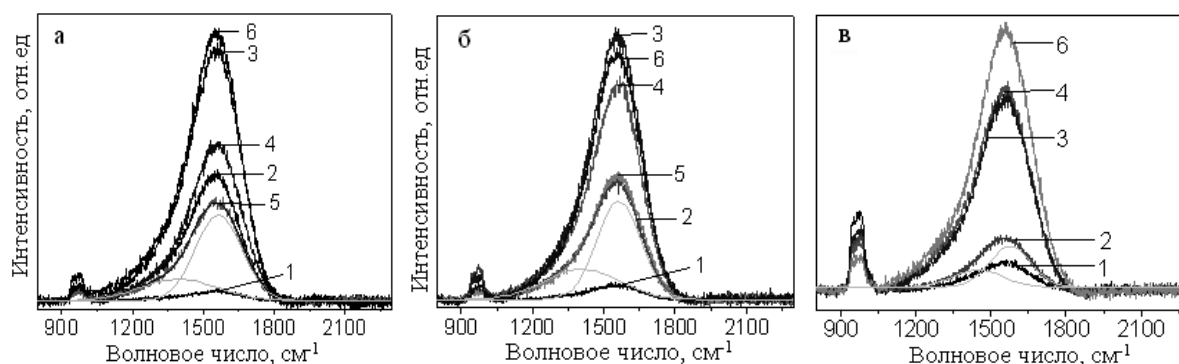


Рисунок 2.1 – Спектры КР покрытий типа Ti/C (а, б) и углеродного покрытия на кремнии (в), 1 – толщина углеродного слоя 12 нм; 2 – 30 нм; 3 – 65 нм; 4 – 80 нм; 5 – 135 нм; 6 – 170 нм
а – без отжига; б – отжиг при 500°C в вакууме

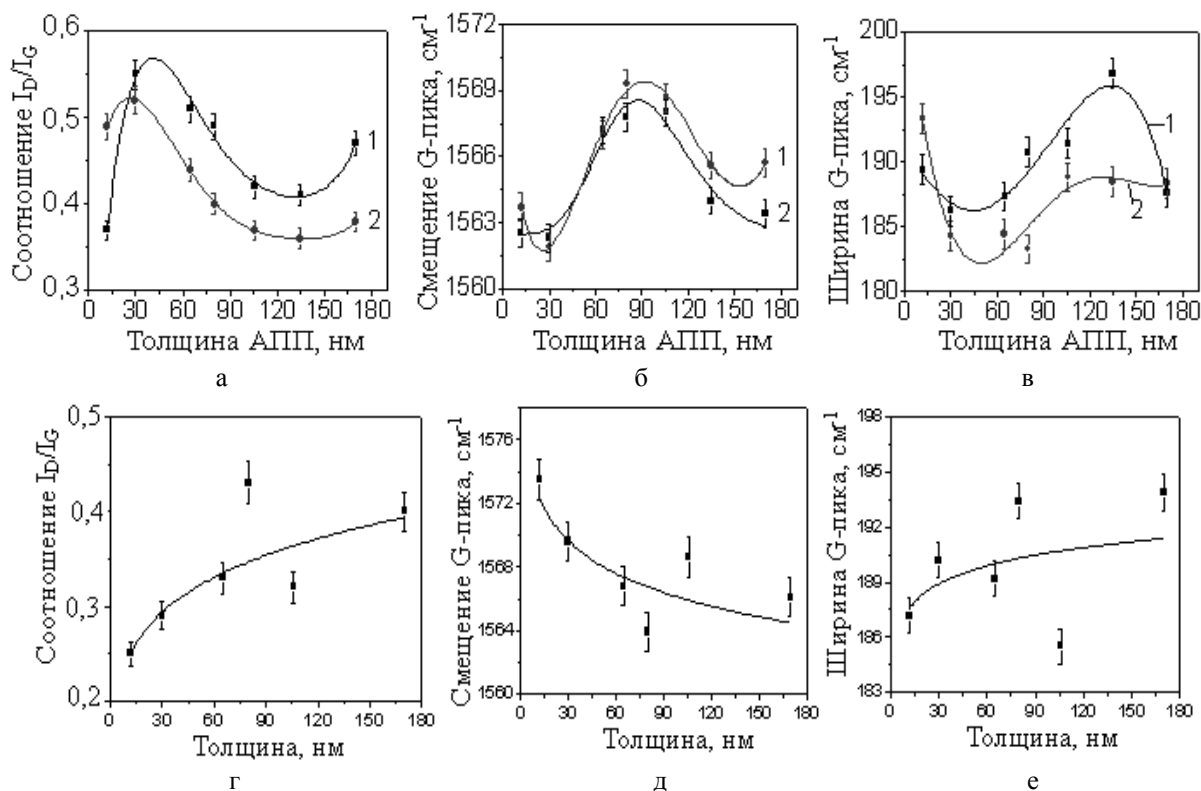


Рисунок 2.2 – Зависимость отношения I_D/I_G (а, г), смещения координаты максимума G-пика (б, д) и его ширина (в, е) от толщины углеродного слоя, нанесенного на наноподслой титана (а, б, в), кремний (г, д, е): 1 – без отжига; 2 – отжиг при 500°C в вакууме

Отметим, что наблюдаемые экстремальные зависимости характерны при осаждении на подслой титана, при формировании же углеродного покрытия на кремневую подложку без подслоя наблюдаются монотонные зависимости (рисунок 2.2, г, д, е): с ростом толщины покрытия отношение I_D/I_G возрастает, ширина G-пика снижается и его положение смещается в область больших значений волнового числа.

Если размер углеродного кластера Csp^2 превышает 2 нм, то, в соответствии с [11], отношение I_D/I_G растет при увеличении степени разупорядоченности или при уменьшении размера Csp^2 -кластеров. В углеродном слое при увеличении его толщины до 30 нм снижается размер Csp^2 -кластеров, количества тетраэдрических связей ($Csp^2 - Csp^3$ или $Csp^3 - Csp^3$) и возрастает доля атомов с Csp^3 связями. При дальнейшем росте покрытия до 90 нм в слое углерода формируется мелкодисперсная структура. Смещение G-пика в область больших частот и относительно невысокие значения его ширины указывают на увеличение числа атомов углерода с sp^2 -гибридизацией [5], [12]. В слоях углерода (толщина более 90 нм) характер зависимостей параметров спектров КР от толщины свидетельствует об увеличении доли атомов с Csp^3 связями. Отжиг покрытий не оказывает заметного влияния на

характер изменения параметров спектров КР и, соответственно, распределение фаз в наноразмерном слое углерода.

Из представленных на рисунке 2.2 данных следует, что при осаждении углеродного покрытия на кремний с увеличением его толщины образуется больше разупорядоченных Csp^2 -кластеров и растет число атомов с Csp^3 -конфигурацией.

Как следствие фазовых и структурных изменений при увеличении толщины углеродного слоя следует рассматривать и приведенные на рисунке 2.3 размерные зависимости микротвердости и внутренних напряжений.

Твердость Ti/C покрытия возрастает с увеличением толщины слоя углерода до 90...100 нм, а затем уменьшается с ростом толщины вследствие формирования, как уже отмечалось, мелкодисперсной структуры и повышения доли атомов углерода с Csp^2 -конфигурацией. Сжимающие механические напряжения возрастают с увеличением толщины углеродного слоя, что может быть связано с уменьшением влияния подслоя на релаксацию напряжений.

Толщина углеродного слоя оказывает влияние и на оптические свойства двуслойных покрытий Ti/C (рисунок 2.4 и 2.5).

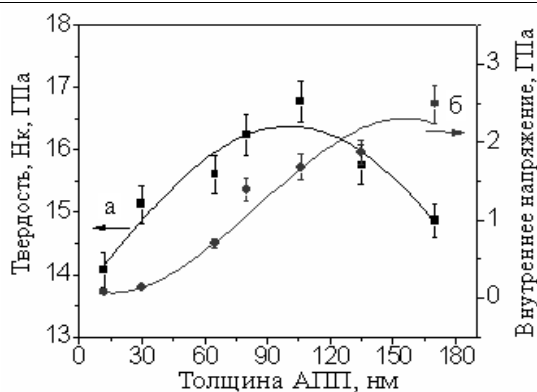


Рисунок 2.3 – Зависимость микротвердости (а) и внутренних напряжений (б) от толщины углеродного слоя в покрытии Ti/C

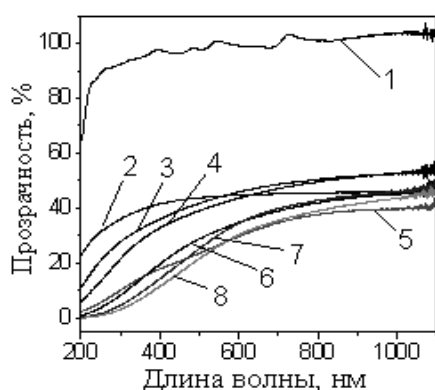


Рисунок 2.4 – УФ – Вид спектры пропускания бислоев Ti/C (1 – кварцевое стекло; 2 – 12 нм; 3 – 30 нм; 4 – 65 нм; 5 – 80 нм; 6 – 106 нм; 7 – 142 нм; 8 – 170 нм)

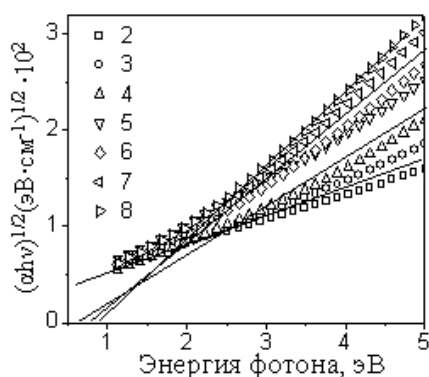


Рисунок 2.5 – Зависимость $(\alpha h\nu)^{1/2}$ от энергии фотонов покрытий Ti/C (1 – кварцевое стекло; 2 – 12 нм; 3 – 30 нм; 4 – 65 нм; 5 – 80 нм; 6 – 106 нм; 7 – 142 нм; 8 – 170 нм)

Из рисунка 2.4 следует, что прозрачность систем типа Ti/C в диапазоне длин волн 400...1100 нм из-за влияния подслоя титана составляет около 30–40%, что меньше, если сравнивать с пропусканием однокомпонентных покрытий углерода. Отметим, что с увеличением

толщины слоя углерода до 65 нм прозрачность слоистых систем увеличивается, а при большей толщине – практически не изменяется. Данный эффект может быть объяснен перераспределением диффундирующих атомов титана в граничном слое и, в результате этого, снижением их концентрации, что и определило повышение прозрачности слоя. При этом толщину слоя равную 50...60 нм можно рассматривать как размер диффузионной зоны, влияющей, как отмечалось, на характер структурного размерного эффекта. Данный вывод согласуется с результатами изучения диффузионных процессов, приведенных в [6].

Значение ширины запрещенной зоны (E_g) двухслойных покрытий, определяемое экстраполяцией линейной части кривой зависимости $(\alpha h\nu)^{1/2}$ (α – коэффициент поглощения материала; $h\nu$ – энергия фотона) от энергии фотона [13] (рисунок 2.5), составляет 0,2...0,87 эВ и несколько возрастает с увеличением толщины углеродного слоя до 65 нм, оставаясь при этом ниже значения, характерного для углеродного покрытия без подслоя.

Выводы

Определены закономерности изменения фазового состава, структуры и механических свойств двухслойных покрытий Ti/C при увеличении толщины углеродного слоя. Установлено, что каталитическое влияние подложки наиболее сильно проявляется при толщине углеродного слоя менее 90 нм; при толщине углеродного слоя менее 30 нм снижается размер Csp^2 -кластеров, и возрастает доля атомов с Csp^3 связями. При дальнейшем росте покрытия до 90 нм в слое углерода формируется мелкодисперсная структура, определяющая относительно высокие значения микротвердости покрытия. В более толстых слоях углерода (более 90 нм), с увеличением их толщины, возрастает доля атомов с Csp^3 связями. Отжиг покрытий не оказывает заметного влияния на характер изменения фазового состава и структуры покрытий при увеличении толщины углеродного слоя. Показано, что размерные зависимости оптических свойств, проявляющиеся в повышении прозрачности и изменении ширины запрещенной зоны с ростом толщины углеродного слоя, связаны с протеканием процессов взаимной диффузии в межфазной зоне.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Multilayers of amorphous carbon prepared by cathodic arc deposition* / S. Anders [et al.] // Surf. Coat. Technol. – 1997. – Vol. 94–95. – P. 189–193.
2. *Studies of nanostructured copper / hydrogenated amorphous carbon multilayer films* / N. Dwivedi [et al.] // Journal of Alloys and Compounds. – 2011. – Vol. 509. – P. 1285–1293.

3. *On the influence of a TiN interlayer on DLC coatings produced by pulsed vacuum arc discharge: Compositional and morphological study* / B. Segura-Giraldo [et al.] // *Appl. Surf. Sci.* – 2009. – Vol. 256. – P. 136–141.

4. *The effect of deposition parameters on the properties of gradient α -C:H/Ti layers* / D. Batory [et al.] // *J. Achieve, Mater. Manuf. Eng.* – 2009. – Vol. 37. – P. 381–386.

5. *Robertson, J. Diamond-like amorphous carbon* / J. Robertson // *Materials Science and Engineering R.* – Vol. 37 (4–6). – P. 129–281.

6. *Growth and characteristics of diamond-like carbon films with titanium and titanium nitride functional layers by cathode arc plasma* / Bing Zhou [et al.] // *Surface and Coatings Technology.* – 2013. – Vol. 223 – P. 17–23.

7. *Structure and mechanical properties of diamond-like carbon films with copper functional layer by cathode arc evaporation* / Bing Zhou [et al.] // *Surface and Coatings Technology.* – 2012. – Vol. 208. – P. 101 – 108.

8. *Micromechanical properties of amorphous carbon coatings deposited by different deposition techniques* / B.K. Gupta [et al.] // *Thin Solid Films.* – 1995. – Vol. 270 – P. 391–398.

9. *Thickness dependence of the structure of diamond-like carbon films by Raman spectroscopy* / F.X. Liu [et al.] // *Surf. Coat. Technol.* – 2009. – Vol. 203. – P. 1829–1832.

10. *Interpretation of Raman spectra of disordered and amorphous carbon* / A.C. Ferrari [et al.] // *Phys. Rev. B.* – 2000. – Vol. 61. – P. 14095–14107.

11. *Raman spectrum of graphite* / F. Tuinstra [et al.] // *Journal of Physics Chemistry.* – 1970. – Vol. 53. – P. 1126–1130.

12. *A perspective on the optimisation of hard carbon and related coatings for engineering applications* / S. Neuville [et al.] // *Thin Solid Films.* – 2007. – Vol. 515. – P. 6619–6653.

13. *Optical properties and electronic structure of amorphous germanium* / J. Tauc [et al.] // *Phys. Status Solidi.* – 1966. – Vol. 15. – P. 627–637.

Поступила в редакцию 29.01.14.

УДК 538.911

ВЛИЯНИЕ ТОЛЩИНЫ НА СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА ОТОЖЕННЫХ In_2S_3 ТОНКИХ ПЛЕНОК, ОСАЖДЕННЫХ ТЕРМИЧЕСКИМ ИСПАРЕНИЕМ

Х. Изаднешан^{1,2}, В.Ф. Гременок²

¹Исламский Азад Университет Марвдашта, Марвдашт, Иран

²Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению, Минск, Беларусь

INFLUENCE OF THICKNESS ON STRUCTURAL PROPERTIES OF ANNEALED In_2S_3 THIN FILMS DEPOSITED BY THERMAL EVAPORATION

H. Izadneshan^{1,2}, V.F. Gremenok²

¹Islamic Azad University of Marvdasht, Marvdasht, Iran

²Scientific-Practical Materials Research Centre of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

In_2S_3 тонкие пленки различной толщины осаждены на стеклянные подложки методом термического испарения. Толщины In_2S_3 пленок регулировались параметрами осаждения и были 1200 нм, 470 нм и 50 нм. Все полученные тонкие пленки отжигались при 400^oC в течение 60 мин. Структурные свойства и морфология исследовались методами рентгеновской дифракции, спектроскопии комбинационного рассеяния и атомно-силовой микроскопии. Результаты рентгенографии показали, что для пленок In_2S_3 толщиной 1200 нм и 470 нм характерны рефлексы тетрагональной структуры. Спектроскопия комбинационного рассеяния показала, что интенсивность пиков зависит от толщины пленок. Средняя шероховатость (R_a) и среднеквадратичная шероховатость (R_{RMS}) увеличивается с толщиной, что связано с увеличением размера зерен в In_2S_3 пленках.

Ключевые слова: In_2S_3 тонкие пленки, термическое испарение, структурные и морфологические свойства, размер зерна.

In_2S_3 thin films of various thicknesses were deposited onto glass substrates by thermal evaporation technique. Thicknesses of In_2S_3 films were defined by controlling the deposition parameters and were 1200 nm, 470 nm and 50 nm. All prepared thin films were annealed at 400^oC for 60 min. The structural properties and morphology have been studied by X-ray diffraction, Raman spectroscopy and Atomic force microscopy. X-ray diffraction results of In_2S_3 thin films with thicknesses of 1200 nm and 470 nm demonstrated peaks revealed in tetragonal structure. Raman spectroscopy shows that the intensity of peaks is affected by the film thickness. The average roughness (R_a) and the root mean square roughness (R_{RMS}) increases with thickness. This is associated with the increase of grain size in the In_2S_3 films.

Keywords: In_2S_3 thin films, thermal evaporation, structural and morphological properties, grain size.

Introduction

In recent years, indium sulphide (In_2S_3) has become a prominent wide band gap semiconductor, used as low cost buffer layer in solar cells based on *n*-type TiO_2 and *p*-type $\text{Cu}(\text{In,Ga})(\text{Se,S})_2$ (CIGS) [1], [2]. In_2S_3 thin films also used as a dye in an electrochemical dye-sensitized solar cells directly [3]–[5]. These applications are based on the exploitation of solar radiation; the former to produce energy, the latter to degrade organic pollutant.

Efficiency gain of the thin film solar cells greatly depends upon the quality and thickness of the buffer layer [6], [7]. The standard CIGS solar cell needs optimized thickness of buffer layer between the absorber layer and the transparent front contact layer to improve efficiency. It drives out the photo generated carriers with minimal losses while coupling light to the junction with minimum absorption losses, yielding a highly efficient solar cell. Wide band gap buffer layer allows more light towards the junction in contrast with optimal low band

gap absorber layer. This provides the most reliable way of increasing the efficiency of the cell [8], [9].

The influence of buffer layer thickness on the physical properties has aroused great interest in solar cell devices [10]. Investigation on structural properties in relation to the thickness has a greater importance in order to obtain thin films that are capable to assure stable and efficient devices. In this work, we study the effect of film thickness on the structure and morphological properties of annealed In_2S_3 thin films deposited onto glass substrates by thermal evaporation method.

1 Experimental details

High-transparent indium sulfide films have been thermally deposited with average velocity 0,5 nm/s on glass substrates at temperatures $T_s = 220\text{--}240^\circ\text{C}$ at a pressure of 5×10^{-4} Pa. Thickness h of the films was defined by controlling the deposition time in the region 1–30 min accordance with the required film thickness. The thicknesses of In_2S_3 thin films were

1200 nm, 470 nm and 50 nm. The deposited thin films were annealed at 400°C for 60 min. Before and after annealing, the structural Raman spectroscopy and morphological properties of thin films were measured [11], [12].

The structural properties was carried out by X-ray diffraction (XRD) techniques in the range $2\theta = 10^{\circ}$ – 60° . The XRD patterns were recorded by an automatically controlled Siemens D-5000 diffractometer operating at the Cu $K\alpha$ radiation ($\lambda = 1.5405 \text{ \AA}$). The Raman spectra were performed in backscattering configuration at room temperature with unpolarized light using DILOR XY 800 spectrometer and an AR laser with 514.5 nm wavelength as a light source. Special software Origin 8 was used for analyzing and fitting XRD and Raman spectra. The morphology composition of the In_2S_3 thin films are examined by atomic forces microscopy (AFM Model JSPM-4210).

2 Results and discussions

Figure 2.1 shows the XRD spectra of In_2S_3 thin films deposited by vacuum thermal evaporation on glass substrate and annealed at 400°C ($t = 60 \text{ min}$) with different thicknesses. X-ray diffraction spectra of the In_2S_3 with thicknesses 1200 (nm) demonstrate several peaks produced by the (103), (211), (008), (204), (206), (318) and strong peak at (220) crystal-line planes of the tetragonal In_2S_3 phase (JCPDS no. 25–0390) [13]. Measurements revealed that In_2S_3 thin films with thicknesses 470 (nm) were of tetragonal structure with weak intensive peaks (Figure 2.1 (b)). The X-ray diffraction spectra of the films with thickness 470 nm showed two main peaks that correspond to the (008) and (204) and weak peaks at (206), (220) and (318) planes of the tetragonal In_2S_3 [14]. XRD spectra for lower thickness (50 nm) have not any clear pick (Figure 2.1 (c)). This was due to the poor crystallinity of the films with more amorphous background so that the generated XRD signals were of low intensity at lower thickness. The intensity of the diffraction peaks (specially (220) became more intense and sharp, and new modes appear at (211) and (103) with increase of film thickness, which indicates an improvement in the crystallinity of the grown layers. In general, an increase of film thickness increases the probability of crystallization [15]. This can be observed from Figure 2.1 where the location of the diffraction peaks for preferred orientation changed with increase of film thickness. With increase of film thickness, the preferred orientation became more intense and narrow, which indicates that increase of film thickness results in larger grains. Similar observations were also reported by Mergel et al [16]. The lattice parameters a and c for In_2S_3 thin films were calculated using the Bragg's equation and Selection rules for the Miller indices [17]. They were $a = 7,62 \text{ \AA}$, $c = 32,34 \text{ \AA}$ and $a = 7,61 \text{ \AA}$, $c = 32,01 \text{ \AA}$ for films with thicknesses 1200 nm and 470 nm, respectively.

The evaluated lattice parameters are in agreement with the standard JCPDS data [13]. The increase of lattice parameters with film thickness might be due to the change in density and nature of native imperfections [10].

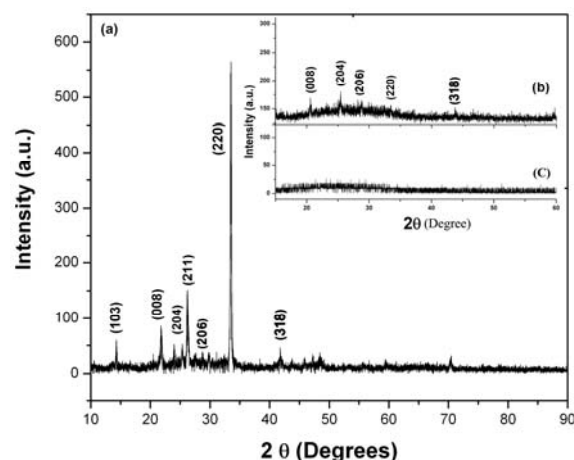


Figure 2.1 – XRD spectra of In_2S_3 thin films with thickness, (a) $d=1200 \text{ (nm)}$, (b) $d=470 \text{ (nm)}$, (c) $d=50 \text{ (nm)}$ annealed at 400°C for 60 min

Figure 2.2 exhibits Raman spectra measured on In_2S_3 thin films with different thicknesses 1200 (nm), 470 (nm) and 50 nm respectively annealed at 400°C ($t = 60 \text{ min}$) in the spectral range 0–500 cm^{-1} . The important information about the Raman spectrum is about the presence of certain types of bonds inside of compound. Two problems occurred during the spectroscopic measurements. The scattering of the laser light on the rough surface weakened the intensity of the Raman signal, so an increase in the number of scans was necessary. The other problem was that for low thickness In_2S_3 thin films didn't detect clear picks. Therefore each spectrum was calculated as the average of 10 scans, which required about 5 min measurement time. The results show that as the thicknesses increased the intensity of picks increased and all modes are totally symmetric. By increasing the thickness of In_2S_3 thin films, the Raman active phonon modes become more prominent and their intensities with respect to the background increase with increasing thickness.

Raman spectroscopy of In_2S_3 thin films with thickness 50 nm presents active modes at 186 cm^{-1} , 290 cm^{-1} and 482 cm^{-1} indicated the presence of the $\beta\text{-In}_2\text{S}_3$ defect spinel structure. Also there were seen low intensive modes at 72 cm^{-1} and 166 cm^{-1} that related to tetragonal structure from literatures [18], [19]. Fifteen normal modes of vibrations were observed for $\beta\text{-In}_2\text{S}_3$ dendrites from Raman spectra, which exactly correspond to those given by a sample of $\beta\text{-In}_2\text{S}_3$ with un-polarized light [20]. Raman spectroscopy of In_2S_3 thin films with thickness 470 nm shows more intensive and narrow pick at 159 cm^{-1} . The increase of intensity points to the fact that the crystalline of tetragonal In_2S_3 thin films improve with thickness.

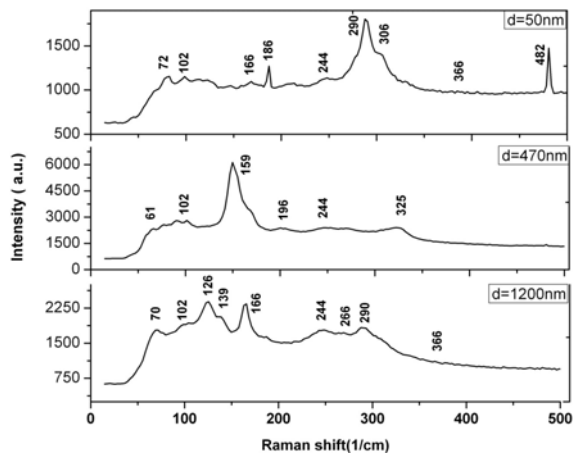


Figure 2.2 - Raman spectroscopy of In_2S_3 thin films with thicknesses $d = 1200$ (nm), $d = 470$ (nm), and $d = 50$ (nm) annealed at 400°C for 60 min

By increasing the thickness of In_2S_3 thin films, the Raman active phonon modes become more prominent and their intensities with respect to the background increase with increasing thickness. For Raman spectroscopy of In_2S_3 thin films with thickness 1200 nm, new modes appear at 70 cm^{-1} , 126 cm^{-1} , 244 cm^{-1} and 266 cm^{-1} . With the increasing thickness, the peak at 159 cm^{-1} loses its intensity gradually, while other peaks increase their intensities. The phase parameters can be assigned to the tetragonal $\beta\text{-In}_2\text{S}_3$ phase stable at room temperature (space group $I4_1/amd$). Certainly the shape and intensity of peaks have been affected by the thickness of thin films. With the increasing thickness, the tensile stress in the In_2S_3 thin films is released gradually, which might account for the variation of intensity and the shift of Raman peaks [10], [21].

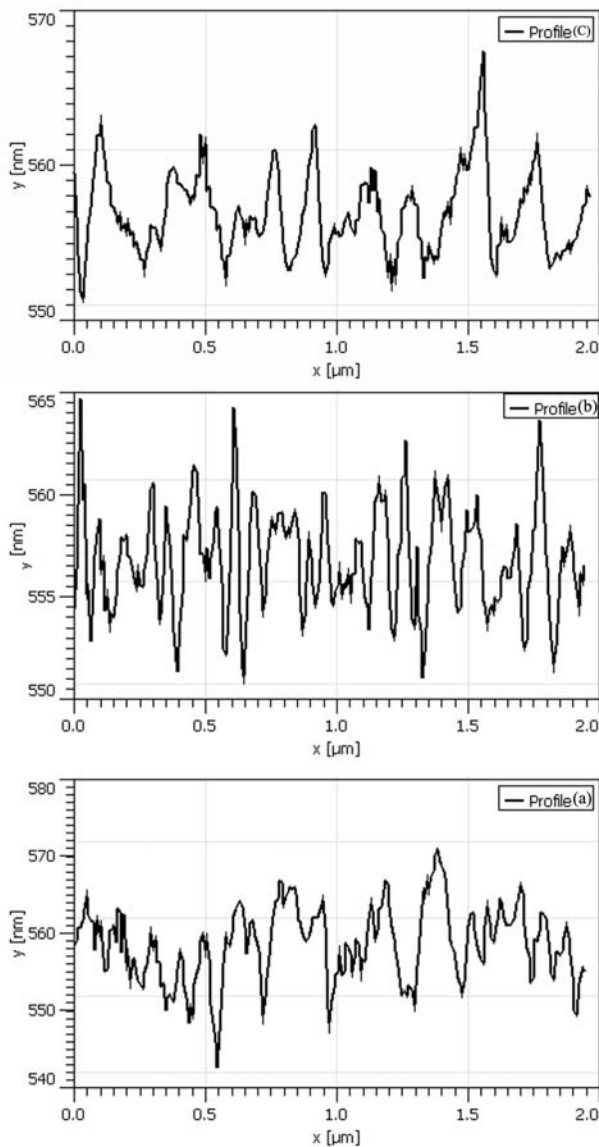
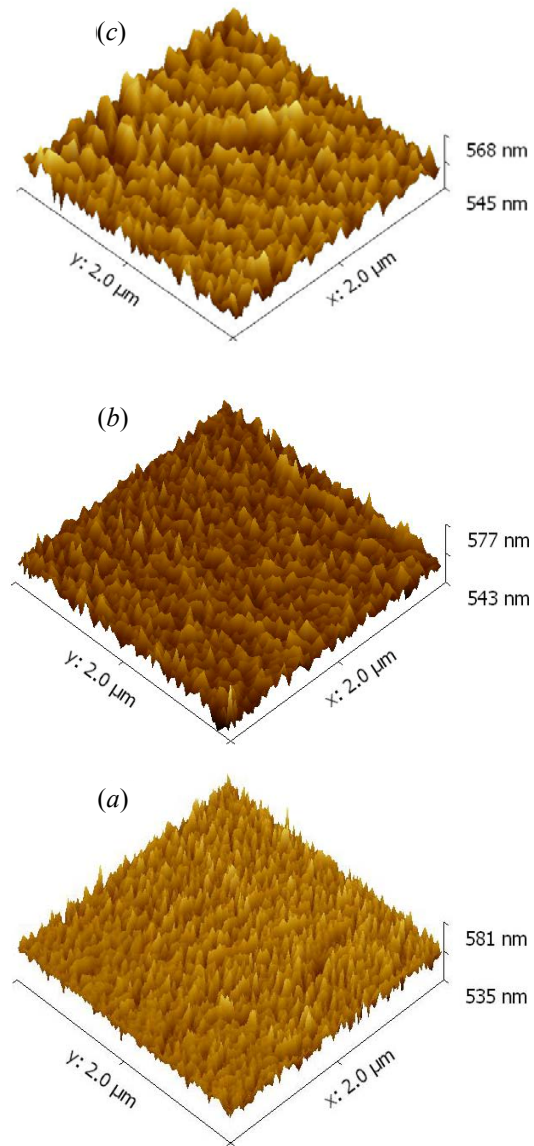


Figure 2.3 – 3D AFM images and roughness profiles of In_2S_3 thin films with different thicknesses: (a) $d = 1200$ (nm), (b) $d = 470$ (nm), and (c) $d = 50$ (nm) annealed at 400°C for 60 min



The surface morphology of In_2S_3 thin films had been investigated by atomic force microscopy (AFM). Figure 2.3 shows the AFM images and roughness profiles of In_2S_3 thin films prepared with different thicknesses, 50 nm, 470 nm and 1200 nm. The surface images are studied over an area of $2\mu\text{m} \times 2\mu\text{m}$. From the AFM images, it was observed that the grain size and surface roughness increased with the increase of film thickness.

The film prepared at lower thicknesses (50 nm) shows irregular grains on the film surface, which might be due to the different crystalline structures presented in the thinner film. A similar behavior was reported by Ramirez et al. in CdS films grown by CBD method [22].

It is observed from the images that the average roughness varied in the range, 555 nm ($d = 50$ nm) up to 565 nm ($d = 1200$ nm) with the increase of film thickness. Further, it was noticed that the surface topography of the as-grown layers varied with film thickness.

The topography and parameters of In_2S_3 thin films with thickness 1200 nm, 470 nm and 50 nm obtained by AFM images are listed in Table 2.1.

Table 2.1 – Topography parameters of In_2S_3 thin films with different thickness

Parameters	$d = 50$ nm	$d = 470$ nm	$D = 1200$ nm
Minimum roughness	545,17 nm	543,20 nm	534,83 nm
Maximum roughness	567,83 nm	577,04 nm	581,36 nm
R_a	2,04 nm	2,11 nm	3,74 nm
R_{RMS}	2,50 nm	2,66 nm	4,76 nm

It also can be seen that the Average roughness, R_a and the root mean square (R_{RMS}) roughness increased with thickness. The increase of surface roughness with thickness is associated with the increase of grain size in the films. The films that had higher thickness consisted of densely packed crystallites with better connectivity between them. Hence, the enhanced deposition time leads to the growth of thicker films that play a critical role in producing the films with better morphology. A similar behavior was observed by other authors [23], [24].

Conclusions

The thickness dependence on the structure and morphology of annealed In_2S_3 thin films deposited by thermal evaporation method has been studied. A good correlation between the results obtained from different characterization techniques with respect to film thickness was observed. The XRD results showed that the crystal structure of In_2S_3 thin films evaluates as function of thickness. The evaluated lattice parameters are in agreement with the standard JCPDS data. Raman spectroscopy of In_2S_3 thin films

showed that the shape and intensity of peaks was affected by thickness of thin films. With the increasing thickness, the tensile stress in the In_2S_3 thin films is released which might be accounted for the variation of intensity and the shift of Raman peaks. The topography results of In_2S_3 thin films show that the average roughness (R_a) and the root mean square (R_{RMS}) roughness increased with thickness.

REFERENCES

1. Mott – Schottky and charge-transport analysis of nanoporous titanium dioxide films in air / R.O. Hayre [et al.] // Journal of Physical Chemistry C. – 2007. – Vol. 111. – P. 4809–4814.
2. Buffer layers and transparent conducting oxides for chalcopyrite $\text{Cu}(\text{In,Ga})(\text{S,Se})_2$ based thin film photovoltaics: present status and current developments / N. Naghavi [et al.] // Progress in Photovoltaics. – 2010. – Vol. 18. – P. 411–433.
3. In_2S_3 atomic layer deposition and its application as a sensitizer on TiO_2 nanotube arrays for solar energy conversion / S.K. Sarkar [et al.] // Journal of Physical Chemistry C. – 2010. – Vol. 114. – P. 8032–8039.
4. A new application of nanocrystal In_2S_3 in efficient degradation of organic pollutants under visible light irradiation / Y. He [et al.] // Journal of Physical Chemistry C. – 2009. – Vol. 113. – P. 5254–5262.
5. Preparation and visible-light photocatalytic activity of $\text{In}_2\text{S}_3/\text{TiO}_2$ composite / C. Gao [et al.] // Materials Chemistry and Physics. – 2010. – Vol. 122. – P. 183–187.
6. Hariskos, D. Buffer layers in $\text{Cu}(\text{In,Ga})\text{Se}_2$ solar cells and modules / D. Hariskos, S. Spiering // Thin solid films. – 2005. – Vol. 480. – P. 99–109.
7. Atomic layer deposition of zinc oxide and indium sulfide layers for $\text{Cu}(\text{In,Ga})\text{Se}_2$ thin-film solar cells / E.B. Yousfi [et al.] // Thin Solid Films. – 2001. – Vol. 387. – P. 29–32.
8. Large-area Cd-free CIGS solar modules with In_2S_3 buffer layer deposited by ALCVD / S. Spiering [et al.] // Thin Solid Films. – 2004. – Vol. 451. – P. 562–566.
9. Surface photovoltage analyses of $\text{Cu}(\text{In,Ga})\text{S}_2/\text{CdS}$ and $\text{Cu}(\text{In,Ga})\text{S}_2/\text{In}_2\text{S}_3$ photovoltaic junctions / S. Merdes [et al.] // Applied Physics Letters. – 2013. – Vol. 102. – P. 2139021-3.
10. Revathi, N. Thickness dependent physical properties of close space evaporated In_2S_3 thin films / N. Revathi, P. Prathap, K.T. Ramakrishna // Solid State Sciences. – 2009. – Vol. 11. – P. 1288–1296.
11. Izadneshan, H. In_2S_3 Thin Films Produced by Thermal Evaporation for Solar Cell Applications / H. Izadneshan, V. F. Gremenok // Proceeding of the 9 th Belarusian-Russian Workshop Semiconductor Lasers and Systems. – Minsk, 28–31 May 2013 / Belarus. – National Academy of Sciences of Belarus. – Stepanov Institute of Physics. – Minsk, 2013. – P. 241–244.

12. *Goncharova, O.V.* Microstructure and optical properties of In₂S₃ films produced by thermal evaporation / O.V. Goncharova, V.F. Gremenok // *Semiconductors*. – 2009. – Vol. 43. – P. 96–101.
13. *Powder Diffraction File*. Joint Committee on Powder Diffraction Standards. – ASTM, Philadelphia. – PA, 1967. – Card 250390.
14. *Vallejo, W.* CGS Based Solar Cells with In₂S₃ Buffer Layer Deposited by CBD and Coevaporation / W. Vallejo, J. Clavijo, G. Gordillo // *Brazilian Journal of Physics*. – 2010. – Vol. 40. – P. 30–37.
15. *Raman and infrared spectroscopic study of the defect spinel In_{21.333}S₃₂* / H. Tao [et al.] // *Optoelectronics and Advanced Materials, Rapid Communications*. – 2008. – Vol. 2. – P. 356–359.
16. *A novel in situ oxidization-sulfidation growth route via self-purification process to β -In₂S₃ dendrites* / Y. Xiong [et al.] // *Journal of Solid State Chemistry*. – 2002. – Vol. 166. – P. 336–340.
17. *Kittel, C.* Introduction to solid state physics / C. Kittel. – New York, 2005. – 25 p.
18. *Far Infrared and Raman Optical Study of α - and β -In₂S₃ Compounds* / K. Kambas, J. Spyridelis, M. Balkanski // *Physica Status Solidi*. – 1981. – Vol. 105. – P. 291–296.
19. *Guillen, C.* Polycrystalline growth and recrystallization processes in sputtered ITO thin films / C. Guillén, J. Herrero // *Thin Solid Films*. – 2006. – Vol. 510. – P. 260–264.
20. *Properties of In₂S₃ thin films deposited onto ITO/glass substrates by chemical bath deposition* / B. Asenjo [et al.] // *J. Phys. Chem. Solids*. – 2010. – Vol. 71. – P. 1629–1633.
21. *Kevin, F.* Raman scattering as a technique of measuring film thickness: interference effects in thin growing films / F. Kevin // *Applied Optics*. – 1987. – Vol. 26. – P. 4482–4486.
22. *Structural transition of chemically deposited CdS films on thermal annealing* / R. Ramirez [et al.] // *J. Phys. Cond. Matter*. – 1997. – Vol. 9. – P. 10051–10058.
23. *The effect of the ion beam energy on the properties of indium tin oxide thin films prepared by ion beam assisted deposition* / L.J. Meng [et al.] // *Thin Solid Films*. – 2008. – Vol. 516. – P. 1365–1369.
24. *The influence of the silicon substrate temperature on structural and optical properties of thin-film cadmium sulfide formed with femtosecond laser deposition* / X.L. Tong [et al.] // *Physics B*. – 2006. – Vol. 382. – P. 105–109.

Поступила в редакцию 17.02.14.

УДК 538.911

СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА ТОНКИХ ПЛЕНОК $Pb_{1-x}Sn_xTe$, ПОЛУЧЕННЫХ МЕТОДОМ «ГОРЯЧЕЙ СТЕНКИ»

Хассан Сейди^{1,2}, В.Ф. Гременок², В.А. Иванов²

¹Исламский Азад университет Такестана, Такестан, Иран

²Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению, Минск, Беларусь

STRUCTURAL PROPERTIES OF $Pb_{1-x}Sn_xTe$ THIN FILMS PREPARED BY THE “HOT WALL” METHOD

Hassan Seidi^{1,2}, V.F. Gremenok², V.A. Ivanov²

¹Islamic Azad University of Takestan, Takestan, Iran

²Scientific-Practical Materials Research Centre of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus

Исследованы кристаллическая микроструктура, химический состав и морфология тонких пленок $Pb_{1-x}Sn_xTe$ ($0,05 \leq x \leq 0,80$), полученных на стеклянных подложках методом «горячей стенки». Рентгеноструктурные исследования показали, что пленки были однофазными и имели кубическую структуру. Постоянная решетки пленок в зависимости от состава изменялась по закону Vegard. Полученные пленки были однородными с воспроизводимым составом. Микроструктура пленок состояла из плотноупакованных зерен размером 0,3–4,0 мкм, выращенных перпендикулярно плоскости подложки.

Ключевые слова: теллурид свинца-олова, метод «горячей стенки», поликристаллические пленки, кристаллическая структура, параметр решетки, химический состав.

In this paper, crystalline microstructure, chemical composition and morphology of $Pb_{1-x}Sn_xTe$ thin films with the composition range of $0,05 \leq x \leq 0,80$ prepared by the “hot wall” method on glass substrates were investigated. The X-ray diffraction studies showed a polycrystalline single phase cubic crystalline structure with the dependence of the lattice constant on composition x with a linear behavior described by the Vegard’s law. The energy dispersive analysis showed that the obtained films are homogeneous and the compositions of the films are reproducible. Scanning electron microscopy revealed the thin films microstructure consisted of densely packed crystals with dimensions of 0,3–4,0 μm and crystallite growth direction is perpendicular to substrate plane.

Keywords: lead tin telluride, “hot wall” method, polycrystalline films, crystalline structure, lattice parameter, chemical composition.

Introduction

Lead tin telluride ($Pb_{1-x}Sn_xTe$) ternary solid solution is a narrow gap semiconductor with a rock salt crystalline structure that has been investigated for many decades and applied in the fabrication of mid-infrared photodetectors and diode lasers, for which it is easily possible to vary the wavelength by adjusting the composition of the solid solution [1]–[4]. A proper technique of growing of high-quality $Pb_{1-x}Sn_xTe$ single crystalline films is a key aspect of the manufacturing of high-performance devices [5]. $Pb_{1-x}Sn_xTe$ alloy layers for the practical applications are grown by diffusion, hot-wall epitaxy, liquid-phase epitaxy, as well as molecular beam epitaxy [6]–[9] on glass, BaF_2 , Si(100) and Si(111) (with CaF_2 or BaF_2 buffer layers) substrates [2], [10]–[12], allowing to compensate the lattice mismatch and thermal expansion coefficient differences. Preparing of $Pb_{1-x}Sn_xTe$ thin films with strictly controlled composition is, in general, problematic because of the controlling of Te due to its low vapor pressure [13]. Moreover, the crystalline quality of $Pb_{1-x}Sn_xTe$

thin films is an important subject during the fabrication of infrared detectors, because their physical properties depend significantly on the crystallinity, structural and chemical lattice imperfections [1]. The conductivity types and the carrier concentrations of undoped PbTe and $Pb_{1-x}Sn_xTe$ crystal layers strongly depend on the non-stoichiometry of the crystals [13], [14]. The conductivity types of undoped PbTe and $Pb_{1-x}Sn_xTe$ grown by the Bridgman method without application of vapor pressure are usually p -type [5], [13], but the conversion the conductivity type is achievable using annealing [5]. A prospective direction in the field is the fabrication of polycrystalline $Pb_{1-x}Sn_xTe$ films with fine nm-sized grain [15], [16], which would be beneficial for the efficiency of optoelectronic and thermoelectric systems [17], [18]. On the other hand, the surface morphology of the lead chalcogenide-based films can be modified on the micro- and nanoscale using dry etching techniques [19]. The aim of the present work was to develop hot wall deposition regimes for stable high-quality polycrystalline $Pb_{1-x}Sn_xTe$

($0,05 \leq x \leq 0,80$) thin films on glass substrates and to investigate microstructure properties.

1 Experimental details

Polycrystalline $Pb_{1-x}Sn_xTe$ ($0,05 \leq x \leq 0,80$) films were grown using hot wall deposition (HWD) on Corning 7059 glass substrates according to a well-established technique as follows [14], [15]. Initially, high purity (99,999%) mixtures of constituent elements (Pb, Sn, and Te) in stoichiometric proportions (with an accuracy of 0,5 mg) were sealed into silica tubes at the pressure of 10^{-3} Torr. The evacuated tubes were then placed into an electric furnace and kept at 450°C for 7 days and after that at 700°C for 10 days. The tubes were gradually cooled with a cooling rate of about $20^\circ\text{C}/\text{h}$ to room temperature in order to obtain polycrystalline $Pb_{1-x}Sn_xTe$ compounds [20]. The main feature of the HWD system is the heated linear quartz tube of 1,2 cm diameter, which was placed inside the vacuum chamber and served to enclose and direct the vapor from the source to the substrate. The quartz tube was kept at $\sim 600^\circ\text{C}$ and was loaded with $Pb_{1-x}Sn_xTe$ powder, so that $Pb_{1-x}Sn_xTe$ films were deposited on chemically cleaned glass plates with substrate temperature varied from 230 to 340°C . The pressure in the chamber was about 10^{-5} Torr during the evaporation. The deposition duration varied from 10 min to 50 min in order to obtain thin films in wide range of thicknesses. The evaluated thickness varied from 0,7 to $4,0 \mu\text{m}$.

Morphology of the films was studied with scanning electron microscopy (SEM) using JEOL JSM-6400 and Supra 40 Carl Zeiss microscopes. Crystalline structure and the phase composition of the $Pb_{1-x}Sn_xTe$ films were investigated by X-ray diffraction (XRD) using a Siemens D-5000 diffractometer with CuK_α ($\lambda = 1,54056 \text{ \AA}$) radiation. The angle 2θ was measured in the range from 15° to 100° with a step of $0,01^\circ$. The observed phases were determined by comparing the d -spacing with the Joint Committee on Powder Diffraction Standard (JCPDS) data files. Local elemental composition of the films was determined from energy dispersive X-ray (EDX) data, using AN 10000 EDX spectrometer mounted in the Stereoscan-360 electron microscope with and INCAx-act Oxford Instruments EDX spectrometer in the Supra 40 electron microscope.

Table 2.1 – Characteristics of the $Pb_{1-x}Sn_xTe$ thin films

Mole Fraction	Composition, at. %			Lattice parameter, \AA	$T_{\text{Sub.}}, ^\circ\text{C}$	D, nm
	Pb	Sn	Te			
$Pb_{0,05}Sn_{0,95}Te$	2,26	46,6	51,14	$6,311 \pm 0,002$	338	45
$Pb_{0,10}Sn_{0,90}Te$	4,52	44,79	50,69	$6,322 \pm 0,002$	335	95
$Pb_{0,15}Sn_{0,85}Te$	7,87	41,72	50,41	$6,330 \pm 0,002$	340	105
$Pb_{0,20}Sn_{0,80}Te$	9,77	37,75	52,47	$6,343 \pm 0,002$	335	145
$Pb_{0,40}Sn_{0,60}Te$	22,14	25,36	52,5	$6,370 \pm 0,002$	335	90
$Pb_{0,55}Sn_{0,45}Te$	26,31	21,85	51,85	$6,404 \pm 0,002$	340	105
$Pb_{0,70}Sn_{0,30}Te$	35,59	13,67	50,74	$6,419 \pm 0,002$	330	110
$Pb_{0,80}Sn_{0,20}Te$	42,39	7,79	49,82	$6,422 \pm 0,002$	290	95

2 Structural properties of the films

The influence of substrate temperature on the phase formation and crystalline structure of the $Pb_{1-x}Sn_xTe$ thin films were studied by X-ray diffraction. The XRD spectra of hot wall deposited layers showed that all the films exhibited polycrystalline nature, supporting the visual SEM data. The thin film powder patterns matched the powder target pattern satisfactorily and indicated the absence of any binary phases. Some minor differences in the relative intensities between the powder target and experimental patterns could be attributed to some minor texturing of the films. All the thin films exhibited a strong (200) peak representing the preferable orientation. The spectrum also showed other peaks in addition to the (200) peak. The most intensive peaks corresponds to (220), (400) and (420) orientations. Typical XRD spectra for $Pb_{0,70}Sn_{0,30}Te$, $Pb_{0,40}Sn_{0,60}Te$, and $Pb_{0,05}Sn_{0,95}Te$ thin films on glass substrates are shown in Figure 2.1.

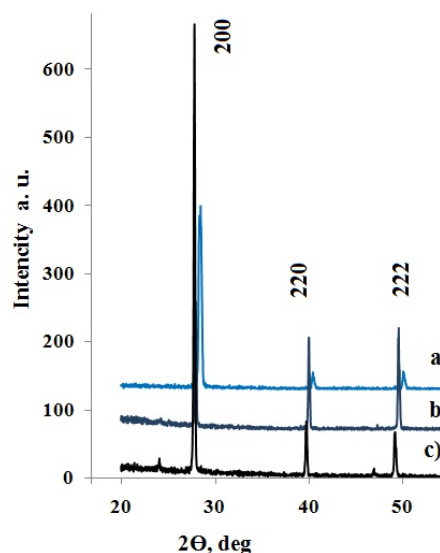


Figure 2.1 – Typical XRD spectra for $Pb_{0,70}Sn_{0,30}Te$, $Pb_{0,40}Sn_{0,60}Te$, and $Pb_{0,05}Sn_{0,95}Te$ thin films on glass substrates

All the deposited $Pb_{1-x}Sn_xTe$ films showed a single phase cubic structure (space group $O5h-Fm3m$). The lattice constant was evaluated using the standard equation for a cubic crystal structure (Table 2.1).

The evaluated interplanar spacing (d -values) and the lattice parameters of SnTe films ($a = 6,304 \pm 0,002 \text{ \AA}$) and PbTe films ($a = 6,450 \pm 0,002 \text{ \AA}$) are in agreement with the standard JCPDS data (cards No. 46-1210 and No. 78-1905, respectively). The similar behavior was also observed [21] for the vacuum-evaporated PbTe, SnTe and $\text{Pb}_{1-x}\text{Sn}_x\text{Te}$ films with varying substrate temperature. A linear relationship between the lattice parameter (a) and the composition of the $\text{Pb}_{1-x}\text{Sn}_x\text{Te}$ solid solution was established in the least squares approximation to be as follows:

$$a = 0,167x + 6,305 \text{ \AA} \quad (2.1)$$

Figure 2.2 shows the dependence of $\text{Pb}_{1-x}\text{Sn}_x\text{Te}$ thin film lattice parameters on the atomic composition.

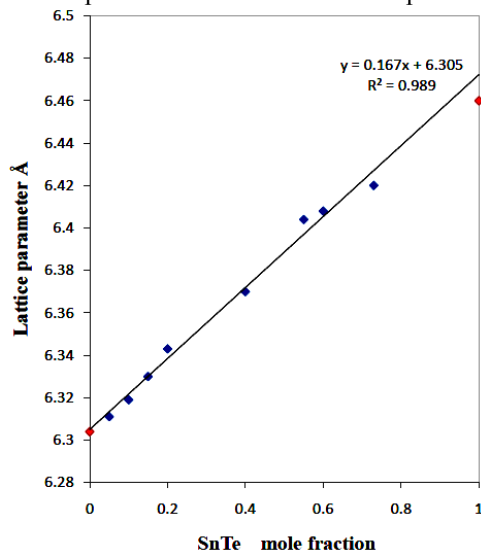


Figure 2.2 – Dependence of $\text{Pb}_{1-x}\text{Sn}_x\text{Te}$ thin film lattice parameters on the composition

The value of the lattice parameter gradually increases from PbTe to SnTe in agreement with the published data on lead tin telluride alloy bulk materials, where there was reported similar linear dependence of lattice constant on composition in $\text{Pb}_{1-x}\text{Sn}_x\text{Te}$ alloys with tellurium excess according to Vegard's law [22], [23].

To calculate the mean grain size in thin films we used the Debye – Scherrer formula:

$$D = \frac{K\lambda}{B \cos \theta} \quad (2.2)$$

Where D is the grain size, B is a broadening of peak intensity at half maximum (FWHM) in radian, λ is the X-ray wavelength used ($\text{Cu K}\alpha = 1,54056 \text{ \AA}$), θ is the Bragg angle and K is a dimensionless constant that may range from 0,89 to 1,39 depending on the specific geometry of the scattering objects. For a perfect two-dimensional lattice, where every point on the lattice emits a spherical wave, numerical calculations yield the lower bound of 0,89 for K . A cubic three-dimensional crystal is best described by $K = 0,94$ [24]. The crystal size found by X-ray analysis is determined by the smallest crystallites

through the entire thickness of the film where SEM image does not reflect the grain size calculation based on X-ray data [25]. On the other hand, SEM images may not have the capability to reveal crystalline film substructures [26].

3 Chemical composition of the films

The physical properties of $\text{Pb}_{1-x}\text{Sn}_x\text{Te}$ thin films, obviously, are strongly influenced by the elemental composition; therefore it is crucially to control the latter. The energy dispersive analysis of all the as-deposited films showed that the obtained films are homogeneous and the compositions of the films are reproducible in the framework of the HWD technique. Figure 3.1 shows a typical EDX spectra for the obtained $\text{Pb}_{1-x}\text{Sn}_x\text{Te}$ thin films with different composition ($\text{Pb}_{0,70}\text{Sn}_{0,30}\text{Te}$, $\text{Pb}_{0,40}\text{Sn}_{0,60}\text{Te}$, and $\text{Pb}_{0,05}\text{Sn}_{0,95}\text{Te}$) measured using AN 10000 EDX spectrometer in the 1–6 keV range with the designation of the respective peaks of lead, tin and tellurium.

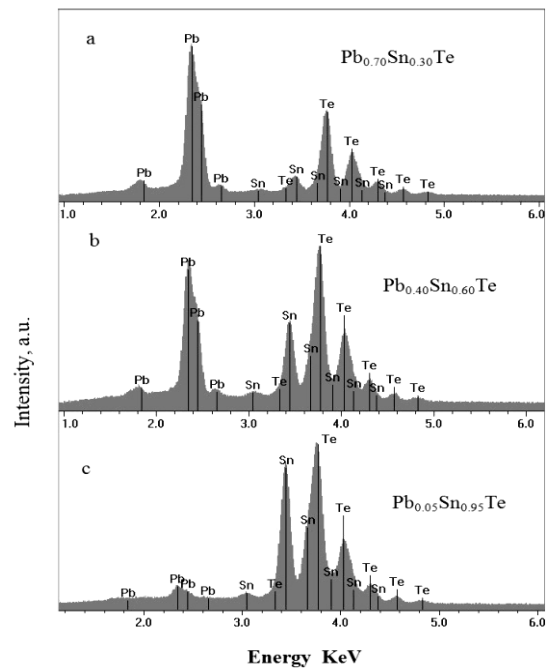


Figure 3.1 – EDX spectra for $\text{Pb}_{0,70}\text{Sn}_{0,30}\text{Te}$ (a), $\text{Pb}_{0,40}\text{Sn}_{0,60}\text{Te}$ (b) and $\text{Pb}_{0,05}\text{Sn}_{0,95}\text{Te}$ (c) films

From the numerical calculations, EDX showed a deviation from the stoichiometric composition towards the excess tellurium (Table 2.1).

4 Morphological properties of the films

SEM studies of the cross-sections of as-deposited $\text{Pb}_{1-x}\text{Sn}_x\text{Te}$ films on glass substrates demonstrated that the films had a strongly pronounced columnar structure with the crystal lateral dimensions of 0,3–4,0 μm and with densely packed crystals, with the films grown at higher temperature generally consisting of larger crystallites. The surface roughness for all the $\text{Pb}_{1-x}\text{Sn}_x\text{Te}$ films was 10–40 nm and the crystallites with distinct boundaries

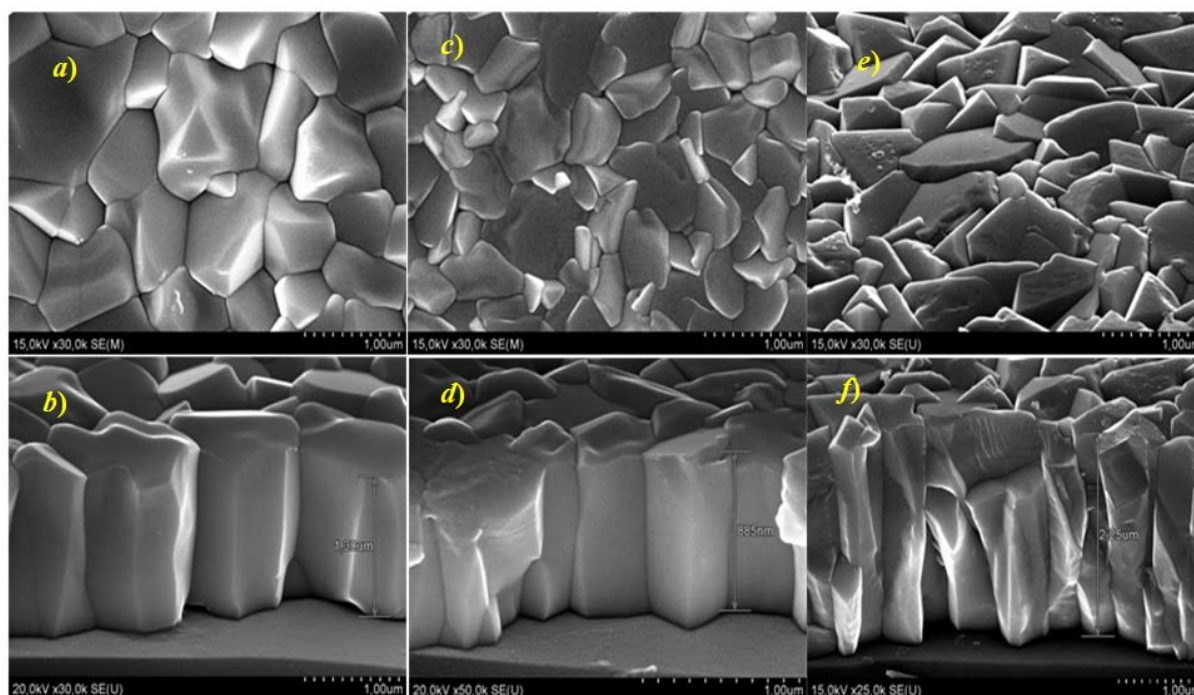


Figure 4.1 – SEM images of the surface morphology and cross-sections of $Pb_{0.70}Sn_{0.30}Te$ (a, b), $Pb_{0.55}Sn_{0.45}Te$ (c, d) and $Pb_{0.05}Sn_{0.95}Te$ (e, f) thin films on glass substrates

were clearly observed. Typical SEM images of the surface and cross-sections on the example of $Pb_{0.70}Sn_{0.30}Te$, $Pb_{0.55}Sn_{0.45}Te$ and $Pb_{0.05}Sn_{0.95}Te$ films are shown in Figure 4.1.

SEM studies also demonstrated that the thickness of the layers depends on growth conditions. The increase in substrate temperature at constant deposition time leads to the increase in the film thickness. The temperature dependence of films thickness could be explained by the availability of thermal energy for nucleation at different substrate temperatures which in turn increases with the increasing substrate temperature. The fact that the crystals are densely connected to each other is essential for the development of device structures with *p-n*-junctions based on polycrystalline $Pb_{1-x}Sn_xTe$ films. The overall density of the films is of critical importance, since it would prevent the diffusion of atoms during the growth of the other material layers during the fabrication of electronic devices.

Conclusions

Lead tin telluride films $Pb_xSn_{1-x}Te$ with the composition range of $0,05 \leq x \leq 0,80$ were successfully deposited at different substrate temperatures from 230°C to 340°C by hot wall vacuum deposition of bulk material onto glass substrates. X-ray diffraction measurements showed that the grown $Pb_xSn_{1-x}Te$ films have a cubic crystal structure and demonstrated the lattice constant dependence on composition *x* with linear behavior according to the Vegard's law. The energy dispersive analysis showed the homogeneous characteristic of the obtained

films. The compositions of the films are reproducible. SEM morphology and cross sections revealed the thin films microstructure consisted of pinhole free and densely packed columnar grains and crystallite growth direction is perpendicular to substrate plane.

REFERENCES

1. Das, S.C. Electron microscopic studies of vacuum-evaporated $Pb_{1-x}Sn_xTe$ thin films / S.C. Das, S. Bhattacharjee, A.K. Chaudhuri // *Bull. Mater. Sci.* – 1993. – Vol. 16, № 3. – P. 159–170.
2. *Molecular beam epitaxial growth of PbTe and PbSnTe on Si (100) substrates for heterojunction infrared detector* / C. Boschetti [et al.] // *Infrared Phys. Technol.* – 2001. – Vol. 42, № 2. – P. 91–99.
3. *Experimental observation of band inversion in the PbSnTe system* / S.O. Ferreira [et al.] // *J. Appl. Phys.* – 1999. – Vol. 86, № 12. – P. 7198–7200.
4. *High resolution X-ray diffraction imaging of lead tin telluride* / B. Steiner [et al.] // *J. Crystal Growth* – 1991. – Vol. 114, № 4. – P. 707–714.
5. *Growth and crystal properties of TI-doped PbTe crystals grown by Bridgman method under Pb and Te vapor pressure* / W. Nugraha [et al.] // *J. Cryst. Growth*. – 2001. – Vol. 222, № 1. – P. 38–43.
6. *IV–VI compound heterostructures grown by molecular beam epitaxy* / A.Y. Ueta [et al.] // *J. Microelectron.* – 2002. – Vol. 33, № 4. – P. 331–335.
7. *Liquid phase epitaxy grown PbSnSeTe/PbSe double heterostructure diode lasers* / Z. Feit [et al.] // *Infrared Phys. Technol.* – 1996. – Vol. 37, № 4. – P. 439–443.

8. Nishijima, Y. PbSnTe double-heterostructure lasers and PbEuTe double-heterostructure lasers by hot-wall epitaxy / Y. Nishijima // *J. Appl. Phys.* – 1989. – Vol. 65, № 3. – P. 935–940.
9. Yoshikawa, M. Continuous operation over 1500 h of a PbTe/PbSnTe double heterostructure laser at 77 K / M. Yoshikawa, K. Shinohara, R. Ueda // *Appl. Phys. Lett.* – 1977. – Vol. 31, № 10. – P. 699–701.
10. *Experimental study of the effect of quantum-well structures on the thermoelectric figure of merit* / L.D. Hicks [et al.] // *Phys. Rev. B.* – 1996. – Vol. 53, № 16. – P. 10493–10496.
11. *Growth of narrow gap epilayers p-n junctions on silicon for infrared detectors arrays* / C. Boschetti [et al.] // *Infrared Phys. Technol.* – 1993. – Vol. 34, № 3. – P. 281–287.
12. *Effect of substrate type and optimization of the preparation condition for PbSnTe films used as IR photoconductors* / M.A. Rafea [et al.] // *Optoelectron. Adv. Mater.* – 2009. – Vol. 3, № 6. – P. 543–552.
13. *Effect of substrate temperature on the galvanomagnetic, photoelectrical and optical properties of Pb_{0.8}Sn_{0.2}Te thin films* / M.A. Rafea [et al.] // *Chalcogenide Lett.* – 2009. – Vol. 6, № 3. – P. 115–123.
14. *Electrical properties of hot wall deposited PbTe–SnTe thin films* / V.A. Ivanov [et al.] // *Journal of Nanosystems: Physics, Chemistry and Mathematics.* – 2013. – Vol. 4, № 6. – P. 816–822.
15. *Electrical properties of Pb_xSn_{1-x}S thin films prepared by hot wall deposition method* / D.M. Unuchak [et al.] // *Cryst. Res. Technol.* – 2010. – Vol. 45, № 11. – P. 1113–1116.
16. *Bashkurov, S.A. Physical properties of SnS thin films fabricated by hot wall deposition* / S.A. Bashkurov, V.F. Gremenok, V.A. Ivanov // *Semicond.* – 2011. – Vol. 45, № 6. – P. 749–752.
17. *Lead salt thin film Semiconductors for microelectronic applications* / S. Mukherjee [et al.] // *Transworld Research Network.* – 2010. – P. 1–88.
18. *Dmitriev, A.V. Current trends in the physics of thermoelectric materials* / A.V. Dmitriev, I.P. Zvyagin // *Phys. Usp.* – 2010. – Vol. 53, № 8. – P. 789–803.
19. *Micromasking effect and nanostructure self-formation on the surface of lead chalcogenide epitaxial films on Si substrates during argon plasma treatment* / S.P. Zimin [et al.] // *J. Phys. D: Appl. Phys.* – 2009. – Vol. 42, № 16. – P. 165205–6.
20. *Seidi, H. Preparation and investigation of microstructural properties of Pb_xSn_{1-x}Te bulk alloys* / H. Seidi, V.F. Gremenok, V.A. Ivanov // *Problems of Physics, Mathematics and Technics.* – 2013. – Vol. 4, № 17. – P. 1–4.
21. *Arachchige, I.U. Anomalous Band Gap Evolution from Band Inversion in Pb_{1-x}Sn_xTe Nanocrystals* / I.U. Arachchige, M.G. Kanatzidis // *Nano Lett.* – 2009. – Vol. 9, № 4. – P. 1583–1587.
22. *Molecular beam epitaxial growth of high quality Pb_{1-x}Sn_xTe layers with 0 ≤ x ≤ 1* / P.H.O. Rappl [et al.] // *J. Cryst. Growth.* – 1998. – Vol. 191, № 3. – P. 466–471.
23. *Bis, R.F. Applicability of Vegard's Law to the Pb_xSn_{1-x}Te Alloy System* / R.F. Bis, J.R. Dixon // *J. Appl. Phys.* – 1969. – Vol. 40, № 4. – P. 1918–1921.
24. *CdS thin films formed on flexible plastic substrates by pulsed-laser deposition* / K.P. Acharya [et al.] // *J. Phys.: Condens. Matter.* – 2007. – Vol. 19, № 19. – P. 196221.
25. *The grain size in microcrystalline silicon: correlation between atomic force microscopy, UV reflectometry, ellipsometry, and X-ray diffractometry* / E. Bardet [et al.] // *J. Non-Cryst. Solids.* – 1996. – Vol. 198–200, № 2. – P. 867–870.
26. *Texture and surface analysis of thin-film GaAs on glass formed by pulsed-laser deposition* / A. Erlacher [et al.] // *J. Non-Cryst. Solids.* – 2006. – Vol. 352, № 2. – P. 193–196.

This work has been financially supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research.

Поступила в редакцию 17.02.14.

УДК 517.9

**АССОЦИИРОВАННЫЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ,
ФУНКЦИИ КОШИ И ВРОНСКИАНЫ ЛИНЕЙНЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА
С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В АЛГЕБРЕ МНЕМОФУНКЦИЙ**

Т.С. Автушко

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

**ASSOCIATED FUNDAMENTAL MATRICES, CAUCHY FUNCTIONS
AND WRONSKIAN OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS
OF THE SECOND ORDER WITH GENERALIZED COEFFICIENTS
IN THE ALGEBRA OF MNEMOFUNCTIONS**

T.S. Autushka

Belarusian State University, Minsk, Belarus

В статье исследуются задачи Коши для линейного однородного и линейного неоднородного дифференциальных уравнений второго порядка с обобщёнными коэффициентами в алгебре мнемифункций. Введены и исследованы ассоциированные функции Коши и ассоциированные вронскианы, найдены выражения для функций Коши и фундаментальных матриц через фундаментальные системы решений, даны представления ассоциированных решений неоднородной задачи Коши через функции Коши.

Ключевые слова: линейное дифференциальное уравнение второго порядка, алгебра мнемифункций, ассоциированные решения, фундаментальные системы решений, ассоциированные фундаментальные матрицы, ассоциированные функции Коши, ассоциированные вронскианы.

In the paper Cauchy problems for a homogeneous and nonhomogeneous linear differential equations with generalized coefficients in algebra mnemofunctions are investigated. Associated Cauchy functions and associated Wronskians are introduced and studied. Expressions for the Cauchy functions and for the fundamental matrices are found by the fundamental system of solutions. Representations associated solutions of the Cauchy problem are given by means of Cauchy functions.

Keywords: linear differential equation of the second order, algebra mnemofunctions, associated solutions, associated fundamental matrices, fundamental systems of solutions, associated Cauchy functions, associated Wronskians.

Введение

В работе исследуется задача Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с обобщёнными коэффициентами

$$\begin{cases} Y''(t) + a'(t)Y'(t) + \sigma'(t)Y(t) + f'(t) = 0, \\ Y(0) = c_1, \\ Y'(0) = c_2, \end{cases} \quad (0.1)$$

где $t \in T = [0, b]$, $b, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma, a, f: T \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации, σ', a', f' – их обобщённые производные.

Рассматриваемая задача является некорректной, поскольку в уравнении присутствуют произведения обобщённых функций. Изучением подобных задач как линейных, так и нелинейных занимались многие авторы (см., напр., [1]–[5]). В настоящем сообщении задача Коши (0.1) исследуется в прямом произведении алгебр мнемифункций [6]. В работе введены и исследованы ассоциированные функции Коши и ассоциированные вронскианы, найдены выражения для функций Коши и фундаментальных матриц через фундаментальные системы решений, даны

представления ассоциированных решений через функции Коши.

Перепишем задачу (0.1) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} X'(t) = L'(t)X(t) + F'(t), t \in T, \\ X(0) = X_0, \end{cases} \quad (0.2)$$

здесь

$$\begin{aligned} X_1(t) &= Y(t), X_2(t) = Y'(t), \\ X(t) &= \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}, X_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, F'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -f'(t) \end{pmatrix}, \\ L'(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sigma'(t) & -a'(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В прямом произведении алгебр мнемифункций задача Коши (0.2) будет иметь следующий вид

$$\begin{cases} d_{\tilde{h}} \tilde{X}(\tilde{t}) = d_{\tilde{h}} \tilde{L}(\tilde{t}) \tilde{X}(\tilde{t}) + d_{\tilde{h}} \tilde{F}(\tilde{t}), \tilde{t} \in \tilde{T}, \\ \tilde{X}|_{[\tilde{0}, \tilde{h}]} = \tilde{X}_0(\tilde{t}), \end{cases} \quad (0.3)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\tilde{t}) &= (\tilde{X}_1(\tilde{t}), \tilde{X}_2(\tilde{t}))^T = \\ &= \left(\left[(X_n^1(t_n)) \right], \left[(X_n^2(t_n)) \right] \right)^T, \\ \tilde{F}(\tilde{t}) &= (\tilde{0}, \tilde{f}(\tilde{t}))^T = \left(\left[(0) \right], \left[(f_n(t_n)) \right] \right)^T, \\ \tilde{L}(\tilde{t}) &= \begin{pmatrix} \tilde{0} & \tilde{t} \\ -\tilde{\sigma}(\tilde{t}) & -\tilde{a}(\tilde{t}) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \left[(0) \right] & \left[(t_n) \right] \\ \left[(-\sigma_n(t_n)) \right] & \left[(-a_n(t_n)) \right] \end{pmatrix}, \\ \tilde{h} &= \left[(h_n) \right]. \end{aligned}$$

или на уровне представителей

$$\begin{cases} X_n(t+h_n) - X_n(t) = \\ = [L_n(t+h_n) - L_n(t)]X_n(t) + \\ + [F_n(t+h_n) - F_n(t)], t \in T, \\ X_n|_{[0, h_n]} = X_{n_0}(t). \end{cases} \quad (0.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} X_n(t) &= \begin{pmatrix} X_n^1(t) \\ X_n^2(t) \end{pmatrix}, X_{n_0}(t) = \begin{pmatrix} X_{n_0}^1(t) \\ X_{n_0}^2(t) \end{pmatrix}, \\ F_n(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -f_n(t) \end{pmatrix}, \\ L_n(t) &= \begin{pmatrix} 0 & t \\ -\sigma_n(t) & -a_n(t) \end{pmatrix}, \\ a_n(t) &= (a * \rho_n^1)(t), \quad \rho_n^1(t) = n\rho(nt), \\ f_n(t) &= (f * \rho_n^1)(t), \\ \sigma_n(t) &= (\sigma * \rho_n^2)(t), \quad \rho_n^2(t) = \gamma(n)\rho(\gamma(n)t), \\ \gamma(n) &\rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty, \\ \rho &\geq 0, \rho \in C^\infty(\mathbb{R}), \text{supp}(\rho) \subseteq [0, 1], \int_0^1 \rho(s) ds = 1. \end{aligned}$$

Знак $(\cdot)^T$ означает транспонирование.

1 Ассоциированные решения задачи Коши

Замечание 1.1. Используя следствие 2.1 из работы [7], несложно показать, что для любых $a, \sigma, f: T \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывных справа функций ограниченной вариации решение задачи (0.4) при $n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0, \gamma(n) \rightarrow \infty$ сходится покоординатно в $L^1(T)$ только при $1/n=O(h_n), 1/\gamma(n)=O(h_n)$, или $1/n=O(h_n), h_n=O(1/\gamma(n))$, или $h_n=O(1/n), 1/\gamma(n)=O(h_n)$, или $h_n=O(1/n), h_n=O(1/\gamma(n))$.

Теорема 1.1 [8]. Пусть $a, \sigma, f: T \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации и

$$\sup_{t \in [0, h_n]} \|X_{n_0}(t) - X_0\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0} 0, \quad (1.1)$$

тогда при $n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0, \gamma(n) \rightarrow \infty$ для $i = \overline{1, 4}$

$$\int_T \|X_n(t) - X^i(t)\| dt \rightarrow 0,$$

где $X_n(t)$ – решение задачи Коши (0.4), а $X^i(t), i = \overline{1, 4}$ – решения интегральных уравнений

$$\begin{aligned} X^i(t) &= X(0) + \int_0^t L^i(s) X^i(s) + \\ &+ F(t) - F(0), t \in T, i = \overline{1, 4}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

интеграл понимается в смысле неклассического интеграла Римана – Стильбеса,

$$L^i(t) = L^c(t) + \sum_{\mu_l \leq t} \Delta L^i(\mu_l), t \in T, i = \overline{1, 4}, \quad (1.3)$$

$L^c(t)$ – непрерывная составляющая функции $L(t), \mu_l, l \in \mathbb{N}$ – точки разрыва функций $a(t)$ и $\sigma(t), t \in T$, занумерованные одним индексом, и при $n \rightarrow \infty, h_n \rightarrow 0, \gamma(n) \rightarrow \infty$

$$\Delta L^1(\mu_l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\Delta\sigma(\mu_l) & -\Delta a(\mu_l) \end{pmatrix},$$

если $1/n=O(h_n)$ и $1/\gamma(n)=O(h_n)$;

$$\Delta L^2(\mu_l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\Delta\sigma(\mu_l) & e^{-\Delta a(\mu_l)} - 1 \end{pmatrix},$$

если $1/n=O(h_n)$ и $h_n=O(1/\gamma(n))$;

$$\Delta L^3(\mu_l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\Delta\sigma(\mu_l)(1 - \Delta a(\mu_l)) & -\Delta a(\mu_l) \end{pmatrix},$$

если $h_n=O(1/n)$ и $1/\gamma(n)=O(h_n)$;

$$\Delta L^4(\mu_l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\Delta\sigma(\mu_l)}{\Delta a(\mu_l)} (e^{-\Delta a(\mu_l)} - 1) & e^{-\Delta a(\mu_l)} - 1 \end{pmatrix}$$

при $\Delta a(\mu_l) \neq 0$, и

$$\Delta L^4(\mu_l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\Delta\sigma(\mu_l) & 0 \end{pmatrix}$$

при $\Delta a(\mu_l) = 0, l = 1, 2, \dots$, если

$$h_n=O(1/n) \text{ и } h_n=O(1/\gamma(n)).$$

Интегралы и дифференциалы от матрично-значных функций берем покоординатно,

$$\Delta L(t) = L(t) - L(t-0),$$

$$\|Y\| = \sum_{i=1}^n |Y_i|, Y \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|X\| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |X_{ij}|, X \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Используя теорему 8.24 из монографии [9, с. 393], в работе [10] было показано, что решения уравнений (1.2), $i = \overline{1, 4}$, для любых начальных условий существуют и единственны для каждого i , причем каждые координаты решений являются непрерывными справа функциями ограниченной вариации.

Функция $X(t) = (X_1(t), X_2(t))^T$ называется ассоциированным решением задачи Коши (0.3), если для любых представителей мнемофункций $\tilde{\sigma}, \tilde{a}, \tilde{f}, \tilde{X}_0^1, \tilde{X}_0^2$ решение задачи (0.4)

$$X_n(t) = (X_n^1(t), X_n^2(t))^T$$

при $n \rightarrow \infty$ поординатно в $L^1(T)$ сходится к $X(t) = (X_1(t), X_2(t))^T$ и $[(X_n^j(t)), n \in \mathbb{N}], j = 1, 2$ являются элементами алгебры.

При выполнении условий бесконечной дифференцируемости начальных условий задачи (0.3), существования конечных односторонних производных всех порядков в нуле, условия (1.1), ассоциированные решения задачи Коши (0.3) являются решениями систем (1.2), $i = \overline{1, 4}$, причем первые координаты решений

$$X^i(t) = (X_1^i(t), X_2^i(t))^T, t \in T, i = \overline{1, 4},$$

систем (1.2) абсолютно непрерывны [8].

2 Ассоциированные фундаментальные матрицы, функции Коши, вронскианы

Рассмотрим однородные интегральные уравнения

$$X^i(t) = X^i(s) + \int_s^t dL^i(r) X^i(r), i = \overline{1, 4}, \quad (2.1)$$

$t \in T, \forall$ фиксированное $s \in T$.

Ассоциированные фундаментальные матрицы $B^i(t, r), r, t \in T, i = \overline{1, 4}$, в статье [8] определялись как решения интегральных уравнений

$$B^i(t, r) = E + \int_r^t dL^i(s) B^i(s, r), r, t \in T, i = \overline{1, 4}, \quad (2.2)$$

где матрицы $L^i, i = \overline{1, 4}$ из теоремы 1.1.

Ассоциированными функциями Коши назовем функции $K^i(t, r): T \times T \rightarrow \mathbb{R}$, которые при любом фиксированном $r \in T$ являются первыми координатами решений уравнений

$$\begin{pmatrix} K^i(t, r) \\ K_1^i(t, r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_r^t dL^i(s) \begin{pmatrix} K^i(s, r) \\ K_1^i(s, r) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

$$t \in T, i = \overline{1, 4}.$$

Решения уравнений (2.2), $i = \overline{1, 4}$, существуют и единственны для каждого i , и каждые координаты решений являются непрерывными справа функциями ограниченной вариации [8]. Это же верно и для уравнений (2.3), $i = \overline{1, 4}$.

Утверждение 2.1. Ассоциированные функции Коши $K^i(t, r), i = \overline{1, 4}$ абсолютно непрерывны по $t \in T$ для любого фиксированного $r \in T$.

Доказательство. Первые уравнения систем (2.3) для любой из четырех возможных матриц ΔL^i имеют вид

$$K^i(t, r) = \int_r^t K_1^i(s, r) ds, i = \overline{1, 4}. \quad (2.4)$$

Поскольку функции $K_1^i(t, r), i = \overline{1, 4}$ по переменной t интегрируемые, а в уравнениях (2.4) присутствует интеграл Лебега с переменным верхним пределом, который абсолютно непрерывен для любого фиксированного $r \in T$, заключаем, что $K^i(t, r), t \in T, \forall$ fix $r \in T, i = \overline{1, 4}$ абсолютно непрерывны.

Утверждение 2.2. $K_1^i(t, r) = (K^i(t, r))'_t, \forall t, r \in T$ и $K_1^i(t, r)$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации, $i = \overline{1, 4}$.

Доказательство. Так как функции Коши $K^i(t, r), i = \overline{1, 4}$ абсолютно непрерывны по $t \in T$ для любого фиксированного $r \in T$, то для любого фиксированного $r \in T \exists \varphi^i(t, r)$ такие, что для любого $t \in T$ [11, с. 90]

$$K^i(t, r) = \int_r^t \varphi^i(s, r) ds, i = \overline{1, 4}, \quad (2.5)$$

где $\varphi^i(t, r) = (K^i(t, r))'_t$ – обобщенные производные функций Коши $K^i(t, r)$ по переменной t .

Из 1-ых уравнений систем (2.3) имеем равенства (2.4). Из утверждения 2.1 функции $K^i(t, r)$ абсолютно непрерывные, из теоремы 8.24 монографии [9] $K_1^i(t, r)$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации. Из равенств (2.4) и (2.5) получаем

$$\int_r^t \varphi^i(s, r) ds = \int_r^t K_1^i(s, r) ds, \forall \text{ fix } r \in T.$$

Откуда следует $\varphi^i(s, r) = K_1^i(s, r)$, т. е.

$$(K^i(t, r))'_t = K_1^i(t, r), \forall \text{ fix } r \in T, i = \overline{1, 4}.$$

Последнее равенство для каждого i определено с точностью до меры Лебега нуль, в точках непрерывности $K_1^i(t, r)$ совпадают с $(K^i(t, r))'_t$, в точках разрыва $K_1^i(t, r)$ доопределяем по непрерывности справа.

Рассмотрим матрицы

$$\varphi^i(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1^i(t) & \varphi_2^i(t) \\ (\varphi_1^i(t))' & (\varphi_2^i(t))' \end{pmatrix}, t \in T, i = \overline{1, 4}, \quad (2.6)$$

где $\varphi_1^i(t), \varphi_2^i(t)$ – первые координаты любых двух решений системы (2.1), $i = \overline{1, 4}$.

Утверждение 2.3. Пусть $\varphi_1^i(t), \varphi_2^i(t), t \in T, i = \overline{1, 4}$ – первые координаты любых двух решений i -го матричного уравнения (2.1). Тогда

их обобщенные производные $(\phi_j^i(t))'$, $j=1,2$ являются вторыми координатами решений i -го уравнения (2.1) и $(\phi_j^i(t))'$, $j=1,2$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации.

Доказательство. Поскольку функции $\phi_1^i(t)$, $\phi_2^i(t)$, $i=\overline{1,4}$ абсолютно непрерывны, то существуют обобщенные производные $(\phi_j^i(t))'$, $j=1,2$, $i=\overline{1,4}$, которые равны

$$\phi_j^i(t) - \phi_j^i(s) = \int_s^t (\phi_j^i(\tau))' d\tau.$$

Первое уравнение системы (2.1) имеет вид $X_1^i(t) = X_1^i(s) + \int_s^t X_2^i(\tau) d\tau$. Подставляя сюда вместо $X_1^i(t)$ функцию $\phi_j^i(t)$, получаем

$$\int_s^t X_2^i(\tau) d\tau = \int_s^t (\phi_j^i(\tau))' d\tau.$$

Откуда видно, что $(\phi_j^i(\tau))' = X_2^i(\tau)$.

Ассоциированными вронскианами $W^i(t)$, $i=\overline{1,4}$, $t \in T$ i -ых уравнений (2.1) назовем определители матричнозначных функций ϕ^i из определения (2.6).

Произвольную линейно независимую систему первых координат решений уравнений (2.1) $\phi_1^i(t)$ и $\phi_2^i(t)$, $i=\overline{1,4}$ назовем *фундаментальной системой решений* соответствующего i -го уравнения (2.1).

В следующей теореме доказаны аналоги формул Лиувилля – Остроградского – Якоби для нахождения вронскиана решений интегральных уравнений (2.1), $i=\overline{1,4}$.

Теорема 2.1 [8]. Пусть $a, \sigma: T \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации, тогда для ассоциированных вронскианов $W^i(t)$ справедливы формулы

$$W^i(t) = \exp \left\{ - \int_s^t da^c(r) \right\} \times \prod_{s < \mu_i \leq t} (1 - \Delta a(\mu_i)) W^i(s), \quad i=1,3, \quad (2.7)$$

$$W^i(t) = \exp \left\{ - \int_s^t da(r) \right\} W^i(s), \quad i=2,4. \quad (2.8)$$

Теорема 2.2 [8]. Если первые координаты решений уравнений (2.1) $\phi_1^i(t)$ и $\phi_2^i(t)$, $\forall t \in T$, $i=\overline{1,4}$ линейно зависимы, то $W^i(t) \equiv 0$, $t \in T$. Если $\exists t_0 \in T$, $W^i(t_0) = 0$, то решения $\phi_1^i(t)$, $\phi_2^i(t)$, соответствующего i -го уравнения (2.1) линейно зависимы, $i=\overline{1,4}$.

Следствие 2.1 [12]. Если $\exists t \in T$, $W^i(t) \neq 0$, то решения $\phi_1^i(t)$, $\phi_2^i(t)$ уравнений (2.1), $i=\overline{1,4}$ образуют фундаментальную систему решений.

Доказательство теоремы 2.2 проводится аналогично доказательству теоремы 12.5 из монографии [4].

3 Конструкции ассоциированных фундаментальных матриц и ассоциированных функций Коши

Утверждение 3.1. Пусть $\phi_1^i(t)$, $\phi_2^i(t)$ – произвольная фундаментальная система решений соответствующего i -го уравнения (2.1) и для $i=1,3$ $\Delta a(\mu_i) \neq 1 \quad \forall \mu_i$, μ_i – точки разрыва функции $a(t)$, тогда существуют обратные матрицы $(\phi^i(t))^{-1}$, $i=\overline{1,4}$.

Теорема 3.1. Пусть $\phi_1^i(t)$, $\phi_2^i(t)$ – произвольная фундаментальная система решений соответствующего i -го уравнения (2.1) и для $i=1,3$ $\Delta a(\mu_i) \neq 1 \quad \forall \mu_i$, μ_i – точки разрыва функции $a(t)$, тогда ассоциированные фундаментальные матрицы $B^i(t,s)$, $i=\overline{1,4}$ уравнений (2.1) представимы в виде

$$B^i(t,s) = \phi^i(t) (\phi^i(s))^{-1}, \quad \forall s, t \in T, \quad i=\overline{1,4}. \quad (3.1)$$

Доказательство. Функции $\phi^i(t)$ являются решениями уравнений (2.1), $i=\overline{1,4}$, т.е. $\phi^i(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\phi^i(t) = \phi^i(s) + \int_s^t dL^i(r) \phi^i(r), \quad t \in T, \quad i=\overline{1,4}$$

для произвольного фиксированного $s \in T$, поскольку каждый столбец матрицы $\phi^i(t)$, $i=\overline{1,4}$ есть решение соответствующего i -ого уравнения.

Учитывая утверждение 3.1, матрицы $(\phi^i(s))^{-1}$, $i=\overline{1,4}$ существуют. Умножая справа последнее уравнение на $(\phi^i(s))^{-1}$, получим

$$\begin{aligned} \phi^i(t) (\phi^i(s))^{-1} &= \phi^i(s) (\phi^i(s))^{-1} + \\ &+ \left(\int_s^t dL^i(r) \phi^i(r) \right) (\phi^i(s))^{-1}, \quad i=\overline{1,4}, \\ \phi^i(t) (\phi^i(s))^{-1} &= \\ &= E + \int_s^t \left(dL^i(r) \phi^i(r) (\phi^i(s))^{-1} \right), \quad i=\overline{1,4}. \end{aligned}$$

Сравнивая получившееся уравнение с уравнением (2.2), получаем представление (3.1), так как по переменной t при любом фиксированном $s \in T$ решение (2.2) существует и единственно.

Теорема 3.2. Пусть $\phi_1^i(t)$ и $\phi_2^i(t)$, $i=\overline{1,4}$ произвольная фундаментальная система решений

соответствующего i -го уравнения (2.1) и при $i = 1, 3$ $\Delta a(\mu_i) \neq 1 \forall \mu_i$, где μ_i – точки разрыва функции a на отрезке $[s, t]$, тогда функции Коши имеют вид

$$K^i(t, s) = \frac{1}{W^i(s)} \det \begin{pmatrix} \varphi_1^i(s) & \varphi_2^i(s) \\ \varphi_1^i(t) & \varphi_2^i(t) \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

$$\forall s, t \in T, i = \overline{1, 4},$$

а ассоциированные фундаментальные матрицы $B^i(t, s)$, $i = \overline{1, 4}$, соответствующие уравнениям (2.1), имеют следующую конструкцию

$$B^i(t, s) = \quad (3.3)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \frac{\varphi_1^i(t)(\varphi_2^i(s))' - \varphi_2^i(t)(\varphi_1^i(s))'}{W^i(s)} & K^i(t, s) \\ \hline \frac{(\varphi_1^i(t))'(\varphi_2^i(s))' - (\varphi_2^i(t))'(\varphi_1^i(s))'}{W^i(s)} & K_i^{i'}(t, s) \end{array} \right),$$

$$\forall s, t \in T, i = \overline{1, 4}.$$

Доказательство. Используя представления (3.1), распишем матрицы $B^i(t, s)$

$$B^i(t, s) = \phi^i(t)(\phi^i(s))^{-1} = \quad (3.4)$$

$$= \frac{1}{W^i(s)} \begin{pmatrix} \varphi_1^i(t) & \varphi_2^i(t) \\ (\varphi_1^i(t))' & (\varphi_2^i(t))' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\varphi_2^i(s))' & -\varphi_2^i(s) \\ -(\varphi_1^i(s))' & \varphi_1^i(s) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{W^i(s)} \left(\begin{array}{c|c} \varphi_1^i(t)(\varphi_2^i(s))' - & -\varphi_1^i(t)\varphi_2^i(s) + \\ -\varphi_2^i(t)(\varphi_1^i(s))' & +\varphi_2^i(t)\varphi_1^i(s) \\ \hline (\varphi_1^i(t))'(\varphi_2^i(s))' - & -(\varphi_1^i(t))'\varphi_2^i(s) + \\ -(\varphi_2^i(t))'(\varphi_1^i(s))' & +(\varphi_2^i(t))'\varphi_1^i(s) \end{array} \right).$$

С другой стороны, исходя из определения функций Коши $K^i(t, s)$ и утверждения 2.2 элементы последних столбцов в ассоциированных фундаментальных матрицах $B^i(t, s)$ есть соответствующие функции Коши и их производные по первой переменной, т. е.

$$B^i(t, s) = \begin{pmatrix} \beta^i(t, s) & K^i(t, s) \\ \beta_i^{i'}(t, s) & K_i^{i'}(t, s) \end{pmatrix}, i = \overline{1, 4}. \quad (3.5)$$

Приравнивая поэлементно представления (3.4) и (3.5) матриц $B^i(t, s)$, $i = \overline{1, 4}$, получаем формулы (3.2) и (3.3).

Заметим, что случай $[\Delta L^i(\mu_i)]^2 = 0, \forall \mu_i$ – точек разрыва L , был рассмотрен в монографии [4]. При выполнении этого условия $L^i(t) = L^1(t)$, $i = \overline{1, 4}$ и формулы (3.2), (3.3) совпадают соответственно с формулами (14.3) и (13.7) из монографии [4].

Теорема 3.3. Если $\Delta a(\mu_i) \neq 1$ для любых μ_i

– точек разрыва функций a и σ , то ассоциированные фундаментальные матрицы $B^i(t, r)$, $\forall t, r \in T, i = \overline{1, 3}$ представляются в виде

$$B^1(t, r) = \left(\begin{array}{c|c} 1 - \int_r^t K^1(t, s) d\sigma^c(s) - & K^1(t, r) \\ - \sum_{r < \mu_i \leq t} K^1(t, \mu_i -) \frac{\Delta\sigma(\mu_i)}{1 - \Delta a(\mu_i)} & \\ \hline - \int_r^t K_i^{1'}(t, s) d\sigma^c(s) - & K_i^{1'}(t, r) \\ - \sum_{r < \mu_i \leq t} K_i^{1'}(t, \mu_i -) \frac{\Delta\sigma(\mu_i)}{1 - \Delta a(\mu_i)} & \end{array} \right),$$

$$B^3(t, r) = \left(\begin{array}{c|c} 1 - \int_r^t K^3(t, s) d\sigma^c(s) - & K^3(t, r) \\ - \sum_{r < \mu_i \leq t} K^3(t, \mu_i -) \Delta\sigma(\mu_i) & \\ \hline - \int_r^t K_i^{3'}(t, s) d\sigma^c(s) - & K_i^{3'}(t, r) \\ - \sum_{r < \mu_i \leq t} K_i^{3'}(t, \mu_i -) \Delta\sigma(\mu_i) & \end{array} \right).$$

Для фундаментальной матрицы $B^4(t, r)$, $t, r \in T$, имеет место представление

$$B^4(t, r) = \left(\begin{array}{c|c} 1 - \int_r^t K^4(t, s) d\sigma^c(s) - & K^4(t, r) \\ - \sum_{r < \mu_i \leq t} K^4(t, \mu_i -) \frac{\Delta\sigma(\mu_i)}{\Delta a(\mu_i)} \times & \\ \times (1 - e^{\Delta a(\mu_i)}) & \\ \hline - \int_r^t K_i^{4'}(t, s) d\sigma^c(s) - & \\ \sum_{r < \mu_i \leq t} K_i^{4'}(t, \mu_i -) \frac{\Delta\sigma(\mu_i)}{\Delta a(\mu_i)} \times & K_i^{4'}(t, r) \\ \times (1 - e^{\Delta a(\mu_i)}) & \end{array} \right),$$

если $\Delta a(\mu_i) \neq 0$ для любых μ_i – точек разрыва функций a и σ ,

$$B^4(t, r) = \left(\begin{array}{c|c} 1 - \int_r^t K^4(t, s) d\sigma^c(s) - & K^4(t, r) \\ - \sum_{r < \mu_i \leq t} K^4(t, \mu_i -) \Delta\sigma(\mu_i) & \\ \hline - \int_r^t K_i^{4'}(t, s) d\sigma^c(s) - & \\ - \sum_{r < \mu_i \leq t} K_i^{4'}(t, \mu_i -) \Delta\sigma(\mu_i) & K_i^{4'}(t, r) \end{array} \right),$$

$\Delta a(\mu_i) = 0$ для всех μ_i – точек разрыва функций a и σ .

$$B^2(t, r) = \begin{pmatrix} 1 - \int_r^t K^2(t, s) d\sigma^c(s) - \sum_{r < \mu_i \leq t} K^2(t, \mu_i -) \Delta\sigma(\mu_i) e^{\Delta a(\mu_i)} & K^2(t, r) \\ - \int_r^t K_i^{2'}(t, s) d\sigma^c(s) - \sum_{r < \mu_i \leq t} K_i^{2'}(t, \mu_i -) \Delta\sigma(\mu_i) e^{\Delta a(\mu_i)} & K_i^{2'}(t, r) \end{pmatrix},$$

$\forall t, r \in T$.

Доказательство. Для доказательства нам понадобится следующая теорема.

Теорема 3.4 [10]. Пусть $a, \sigma: T \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации и для $i=1,3 \forall \mu_i \Delta a(\mu_i) \neq 1, \mu_i$ – точки разрыва функции $a(t)$, тогда ассоциированные фундаментальные матрицы $B^i(t, r), i = \overline{1,4}$ по второй переменной удовлетворяют уравнениям

$$B^i(t, r) = E + \int_r^t B^i(t, s) d\widehat{L}^i(s), \quad (3.6)$$

$$r, t \in T, i = \overline{1,4},$$

где

$$\widehat{L}^i(t) = L^c(t) + \sum_{r < \mu_i \leq t} [E + \Delta L^i(\mu_i)]^{-1} \Delta L^i(\mu_i),$$

$$L^c(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -\sigma^c(t) & -a^c(t) \end{pmatrix}.$$

Доказательство проведем для случая $i = 1$. Для остальных случаев, $i = \overline{2,4}$, доказательство проводится аналогично.

Найдя по определению обратной матрицы матрицу $[E + \Delta L^1(\mu_i)]^{-1}$, несложно получить

$$[E + \Delta L^1(\mu_i)]^{-1} \Delta L^1(\mu_i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\Delta\sigma(\mu_i) & -\Delta a(\mu_i) \\ 1 - \Delta a(\mu_i) & 1 - \Delta a(\mu_i) \end{pmatrix},$$

$$\Delta a(\mu_i) \neq 1.$$

Подставляем представление (3.5) матрицы $B^1(t, r)$ и найденную матрицу

$$[E + \Delta L^1(\mu_i)]^{-1} \Delta L^1(\mu_i)$$

в равенство (3.6)

$$\begin{pmatrix} \beta^1(t, r) & K^1(t, r) \\ \beta_i^{1'}(t, r) & K_i^{1'}(t, r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \int_r^t \begin{pmatrix} \beta^1(t, s) & K^1(t, s) \\ \beta_i^{1'}(t, s) & K_i^{1'}(t, s) \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} 0 & s \\ -\sigma^c(s) & -a^c(s) \end{pmatrix} + \sum_{r < \mu_i \leq t} \begin{pmatrix} \beta^1(t, \mu_i -) & K^1(t, \mu_i -) \\ \beta_i^{1'}(t, \mu_i -) & K_i^{1'}(t, \mu_i -) \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\Delta\sigma(\mu_i) & -\Delta a(\mu_i) \\ 1 - \Delta a(\mu_i) & 1 - \Delta a(\mu_i) \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} \beta^1(t, r) & K^1(t, r) \\ \beta_i^{1'}(t, r) & K_i^{1'}(t, r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \int_r^t \begin{pmatrix} -K^1(t, s) d\sigma^c(s) & \beta^1(t, s) ds - K^1(t, s) da^c(s) \\ -K_i^{1'}(t, s) d\sigma^c(s) & \beta_i^{1'}(t, s) ds - K_i^{1'}(t, s) da^c(s) \end{pmatrix} + \sum_{r < \mu_i \leq t} \begin{pmatrix} -K^1(t, \mu_i -) \times \frac{\Delta\sigma(\mu_i)}{1 - \Delta a(\mu_i)} & -K^1(t, \mu_i -) \times \frac{\Delta a(\mu_i)}{1 - \Delta a(\mu_i)} \\ -K_i^{1'}(t, \mu_i -) \times \frac{\Delta\sigma(\mu_i)}{1 - \Delta a(\mu_i)} & -K_i^{1'}(t, \mu_i -) \times \frac{\Delta a(\mu_i)}{1 - \Delta a(\mu_i)} \end{pmatrix}.$$

Приравнявая поэлементно, находим $\beta^1(t, r)$ и $\beta_i^{1'}(t, r)$

$$\beta^1(t, r) = 1 - \int_r^t K^1(t, s) d\sigma^c(s) - \sum_{r < \mu_i \leq t} K^1(t, \mu_i -) \frac{\Delta\sigma(\mu_i)}{1 - \Delta a(\mu_i)},$$

$$\beta_i^{1'}(t, r) = 1 - \int_r^t K_i^{1'}(t, s) d\sigma^c(s) - \sum_{r < \mu_i \leq t} K_i^{1'}(t, \mu_i -) \frac{\Delta\sigma(\mu_i)}{1 - \Delta a(\mu_i)}.$$

Замечание 3.1. При $[\Delta L^i(\mu_i)]^2 = 0, i = \overline{1,4}$ для любых μ_i – точек разрыва $L, B^i(t, r) = B^i(t, r) \forall i = \overline{1,4}$. При этом фундаментальная матрица $B^1(t, r)$ имеет вид

$$B^1(t, r) = \begin{pmatrix} 1 - \int_r^t K^1(t, s) d\sigma(s) & K^1(t, r) \\ - \int_r^t K_i^{1'}(t, s) d\sigma(s) & K_i^{1'}(t, r) \end{pmatrix}, \forall t, r \in T$$

причем

$$1 - \int_r^t K^1(t, s) d\sigma(s) = K^{1(1)}(t, r) = -K_r^{1'}(t, r) + K^1(t, r) a'(r),$$

где $K^{1(1)}(t, r)$ – квазипроизводная функции Коши по второй переменной в смысле сопряженного уравнения (с. 122, с. 148 из монографии [4]).

4 Представление ассоциированных решений через функции Коши

Теорема 4.1 [10]. Если при $i = 1,3$ для любых μ_i , таких что $\Delta a(\mu_i) \neq 1$, где μ_i – точки разрыва функции a , то решения интегральных уравнений (1.2) представляются в виде

$$X^i(t) = B^i(t, 0)X^i(0) + \int_0^t B^i(t, \tau)dF^c(\tau) + \sum_{0 < s \leq t} B^i(t, s)\Delta F(s), \quad t \in T, i = \overline{1, 4}. \quad (4.1)$$

Найдем представление ассоциированных решений линейных неоднородных уравнений (1.2) через функции Коши. Для этого понадобятся теорема 3.3 и теорема 4.1.

Теорема 4.2. Если $\Delta a(\mu_i) \neq 1, \forall \mu_i$ – точек разрыва функции a, σ, f , то решения интегральных уравнений (1.2) при $i = 1, 3 \forall t \in T$ представимы в виде

$$X_1^1(t) = \left(1 - \int_0^t K^1(t, s)d\sigma^c(s) - \sum_{0 < \mu_i \leq t} K^1(t, \mu_i) \frac{\Delta\sigma(\mu_i)}{1 - \Delta a(\mu_i)} \right) c_1 + K^1(t, 0)c_2 - \int_0^t K^1(t, s)df^c(s) - \sum_{0 < \mu_i \leq t} K^1(t, \mu_i)\Delta f(\mu_i),$$

$$X_1^3(t) = \left(1 - \int_0^t K^3(t, s)d\sigma(s) \right) c_1 + K^3(t, 0)c_2 - \int_0^t K^3(t, s)df^c(s) - \sum_{0 < \mu_i \leq t} K^3(t, \mu_i)\Delta f(\mu_i).$$

Если $\Delta a(\mu_i) \neq 0 \forall \mu_i$, то решение интегрального уравнения (1.2) при $i = 4 \forall t \in T$ представимо в виде

$$X_1^4(t) = \left(1 - \int_0^t K^4(t, s)d\sigma^c(s) - \sum_{0 < \mu_i \leq t} K^4(t, \mu_i) \frac{\Delta\sigma(\mu_i)}{\Delta a(\mu_i)} (1 - e^{\Delta a(\mu_i)}) \right) c_1 + K^4(t, 0)c_2 - \int_0^t K^4(t, s)df^c(s) - \sum_{0 < \mu_i \leq t} K^4(t, \mu_i)\Delta f(\mu_i),$$

если $\Delta a(\mu_i) = 0 \forall \mu_i$, то

$$X_1^4(t) = \left(1 - \int_0^t K^4(t, s)d\sigma(s) \right) c_1 + K^4(t, 0)c_2 - \int_0^t K^4(t, s)df^c(s) - \sum_{0 < \mu_i \leq t} K^4(t, \mu_i)\Delta f(\mu_i).$$

Решение интегрального уравнения (1.2) при $i = 2 \forall t \in T$ имеет вид

$$X_1^2(t) = \left(1 - \int_0^t K^2(t, s)d\sigma^c(s) - \sum_{0 < \mu_i \leq t} K^2(t, \mu_i) \Delta\sigma(\mu_i) e^{\Delta a(\mu_i)} \right) c_1 + K^2(t, 0)c_2 - \int_0^t K^2(t, s)df^c(s) - \sum_{0 < \mu_i \leq t} K^2(t, \mu_i)\Delta f(\mu_i).$$

Доказательство. Приведем доказательство для случая $i = 1$. Подставляем представление матрицы $B^1(t, s)$ из теоремы 3.3 в равенство (4.1).

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \int_r^t K^1(t, s)d\sigma^c(s) - \sum_{r < \mu_i \leq t} K^1(t, \mu_i) \frac{\Delta\sigma(\mu_i)}{1 - \Delta a(\mu_i)} & K^1(t, r) \\ - \int_r^t K_t^{1'}(t, s)d\sigma^c(s) - \sum_{r < \mu_i \leq t} K_t^{1'}(t, \mu_i) \frac{\Delta\sigma(\mu_i)}{1 - \Delta a(\mu_i)} & K_t^{1'}(t, r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 - \int_\tau^t K^1(t, s)d\sigma^c(s) - \sum_{\tau < \mu_i \leq t} K^1(t, \mu_i) \times \frac{\Delta\sigma(\mu_i)}{1 - \Delta a(\mu_i)} & K^1(t, \tau) \\ - \int_\tau^t K_t^{1'}(t, s)d\sigma^c(s) - \sum_{\tau < \mu_i \leq t} K_t^{1'}(t, \mu_i) \times \frac{\Delta\sigma(\mu_i)}{1 - \Delta a(\mu_i)} & K_t^{1'}(t, \tau) \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} 0 \\ -f^c(\tau) \end{pmatrix} + \sum_{0 < s \leq t} \begin{pmatrix} 1 - \int_s^t K^1(t, r)d\sigma^c(r) - \sum_{s < \mu_i \leq t} K^1(t, \mu_i) \times \frac{\Delta\sigma(\mu_i)}{1 - \Delta a(\mu_i)} & K^1(t, s) \\ - \int_s^t K_t^{1'}(t, r)d\sigma^c(r) - \sum_{s < \mu_i \leq t} K_t^{1'}(t, \mu_i) \times \frac{\Delta\sigma(\mu_i)}{1 - \Delta a(\mu_i)} & K_t^{1'}(t, s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\Delta f(s) \end{pmatrix}.$$

Из первого уравнения системы получаем

$$X_1^1(t) = \left(1 - \int_0^t K^1(t, s)d\sigma^c(s) - \sum_{0 < \mu_i \leq t} K^1(t, \mu_i) \frac{\Delta\sigma(\mu_i)}{1 - \Delta a(\mu_i)} \right) c_1 + K^1(t, 0)c_2 - \int_0^t K^1(t, s)df^c(s) - \sum_{0 < \mu_i \leq t} K^1(t, \mu_i)\Delta f(\mu_i).$$

Замечание 4.1. При $[\Delta L^i(\mu_i)]^2 = 0, \forall \mu_i$ – точек разрыва функции L , представления решений уравнений (1.2), полученные в теореме 4.2,

совпадают с представлением решения, полученным в теореме 16.10 на с. 127 в монографии [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ligeza, J.* On generalized solutions of some differential nonlinear equations of order n / *J. Ligeza* // *Ann. Pol. Math.* 1975 – Vol. 31, № 2. – P. 115–120.
2. *Завалицин, С.Т.* Импульсные процессы: модели и приложения / *С.Т. Завалицин, А.Н. Себекин* – М. : Наука. 1991. – 256 с.
3. *Pandit, S.G.* Differential systems involving impulses / *S.G. Pandit, S.G. Deo* – *Lect. Notes Math, Berlin* : Springer-Verlag. 1982. – 102 p.
4. *Узагальнені квазідиференціальні рівняння* / *Р.М. Тацій [і інш.]*. – Дрогобич, Коло. 2011. – 301 с.
5. *Антоневич, А.Б.* Об общем методе построения алгебр обобщенных функций / *А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно* // *Доклады АН СССР*. – 1991. – Т. 318, № 2. – С. 267–270.
6. *Лазакевич, Н.В.* Задача Коши для систем дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в прямом произведении алгебр мнемифункций / *Н.В. Лазакевич, О.Л. Яблонский, А.К. Хмызов* // *Доклады НАН РБ*. – 2011. – Т. 55, № 2. – С. 5–9.
7. *Bedziuk, N.V.* Solutions of nonlinear differential equations / *N.V. Bedziuk, A.L. Yablonski* // *Nonlinear Differential Equations and Applications*. – 2010. – Vol. 17, № 2. – P. 249–270.

8. *Автушко, Т.С.* Ассоциированные вронскианы линейного дифференциального уравнения второго порядка с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемифункций / *Т.С. Автушко* // *Весці БДПУ. Серія 3*. – 2013. – № 2. – С. 21–25.

9. *Миллер, Б.М.* Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями: монография / *Б.М. Миллер, Е.Я. Рубинович*. – М. : Наука. – 2005. – 429 с.

10. *Автушко, Т.С.* Задача Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с обобщенными коэффициентами / *Т.С. Автушко, А.Ю. Русецкий* // *XI Белорусская математическая конференция: тезисы докладов Международ. науч. конф.* – Минск, 4–9 ноября 2012 г. Институт математики НАН Беларуси. – Минск. – 2012. – Ч. 1. – С. 30–31.

11. *Антоневич, А.Б.* Функциональный анализ и интегральные уравнения: учебник / *А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно*. – 2-е издание. – Минск : БГУ. – 2006. – 430 с.

12. *Автушко, Т.С.* Представление вронскиана линейного дифференциального уравнения второго порядка с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемифункций / *Т.С. Автушко* // *XV Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения – 2013)* : тезисы докладов. – Гродно, 15–17 мая 2013 г. – Ч. 2. – С. 29.

Поступила в редакцию 01.07.13.

УДК 517.9

О РЕШЕНИЯХ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОЙ НЕАВТОНОМНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С КВАДРАТИЧНОЙ ПО ФАЗОВЫМ ПЕРЕМЕННЫМ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Е.В. Вареникова

Брянский государственный университет им. И.Г. Петровского, Новозыбков, Россия

ON SOLUTIONS OF THE TWO-POINT BOUNDARY PROBLEM FOR ONE NON-AUTONOMOUS DIFFERENTIAL SYSTEM WITH A QUADRATIC AT PHASE VARIABLES RIGHT-HAND SIDE

E.V. Varenikova

I.G. Petrovski Briansk State University, Novozybkov, Russia

В работе рассматривается система вида $\dot{x} = ax + by + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2$, $\dot{y} = -bx + ay + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2$, где $a_{ij} = a_{ij}(t)$, $b_{ij} = b_{ij}(t)$ – непрерывные функции; a и b – постоянные. Для нее установлены условия, при которых эта система имеет линейную отражающую функцию Мироненко и, значит, линейное отображение за период $[-\omega; \omega]$. Полученные условия позволяют указать начальные данные решений двухточечной краевой задачи $\Phi(x(\omega), y(\omega), x(-\omega), y(-\omega)) = 0$ и, значит, начальные данные 2ω -периодических решений рассматриваемой системы в том случае, когда ее коэффициенты 2ω -периодические непрерывные функции.

Ключевые слова: отражающая функция Мироненко, отображение за период, краевая задача, периодические решения.

In the paper we consider the system $\dot{x} = ax + by + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2$, $\dot{y} = -bx + ay + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2$, where $a_{ij} = a_{ij}(t)$, $b_{ij} = b_{ij}(t)$ are the continued functions; a and b are the constants. For this system we established conditions under which this system has a linear Mironenko reflecting function and therefore a linear mapping in period $[-\omega; \omega]$. The obtained conditions allow us point out the initial data of the solutions of the two-point boundary task $\Phi(x(\omega), y(\omega), x(-\omega), y(-\omega)) = 0$ and therefore, the initial data of the 2ω -periodic solutions of the system (1) in the case when its coefficients are 2ω periodic continued functions.

Keywords: reflective function Mironenko, in-period transformation, boundary problem, periodic solutions.

Введение

Исследование многомерных дифференциальных систем связано со значительными математическими трудностями. Начало их систематическому исследованию положили А.Пуанкаре и А.М.Ляпунов. Их методы до сих пор являются основными при качественном исследовании систем дифференциальных уравнений. Применение этих методов в каждом конкретном случае наталкивается на огромные трудности. Это вынуждает исследователей искать другие пути, облегчающие работу по изучению свойств решений дифференциальных систем.

Два десятилетия назад Мироненко В.И. предложил новый метод – метод отражающей функции. С его помощью удается находить начальные данные периодических решений периодических дифференциальных систем и исследовать эти решения на устойчивость. Конкретные примеры такого исследования можно найти как в [1] так и в [2], а также в работах других исследователей. Это прежде всего работы [3]–[9], а

также работы [10]–[11], в которых предложен новый подход к использованию понятия отражающей функции.

1 Основные положения теории отражающей функции

Приведем здесь основные положения теории отражающей функции необходимые для понимания дальнейшего изложения.

Для каждой дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \quad t \in R, \quad x \in D \subset R^n, \quad (1.1)$$

удовлетворяющей условиям теоремы существования и единственности с общим решением в форме Коши $\varphi(t; t_0, x_0)$ отражающая функция $F(t, x)$ определяется формулой $F(t, x) := \varphi(-t; t, x)$. Такое определение позволяет сразу заметить, что в том случае, когда система (1.1) 2ω -периодична, отображение $x \mapsto F(-\omega, x)$ является отображением А. Пуанкаре (отображением за период $[-\omega; \omega]$).

Функция $F(t, x)$ является отражающей функцией системы (1.1) тогда и только тогда, когда она является решением задачи Коши

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} X(t, x) + X(-t, F) = 0, \\ F(0, x) \equiv x. \quad (1.2)$$

Основные применения отражающей функции основаны на том, что эта функция по состоянию системы $x(t)$ позволяет найти состояние $x(-t) \equiv F(t, x(t))$. Это свойство позволяет при известной отражающей функции $F(t, x)$ находить начальные данные краевой задачи $\Phi(x(\omega), x(-\omega)) = 0$ из конечного уравнения $\Phi(x(\omega), F(\omega, x(\omega))) = 0$, а значит находить и начальные данные 2ω -периодических решений и определять характер их устойчивости (подробнее см. по этому поводу [1]) для 2ω -периодических систем (1.1).

2 Отражающая функция квадратичной системы

В работе рассматривается система вида

$$\dot{x} = ax + by + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \\ \dot{y} = -bx + ay + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2, \quad (2.1)$$

где $a_{ij} = a_{ij}(t)$, $b_{ij} = b_{ij}(t)$ – непрерывные функции; a и b – постоянные.

Используя основное соотношение для отражающей функции (1.2) для системы (2.1) установлены условия

$$a_{20} \cos 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau - b_{20} \sin 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + \\ + \bar{a}_{20} \cos^2 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + \bar{a}_{11} \frac{1}{2} \sin 4 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + \\ + \bar{a}_{02} \sin^2 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau = 0, \\ a_{11} \cos 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau - b_{11} \sin 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau - \\ - \bar{a}_{20} \sin 4 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + \bar{a}_{11} \cos 4 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + \\ + \bar{a}_{02} \sin 4 \int_0^t b_q(\tau) d\tau = 0, \\ a_{02} \cos 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau - b_{02} \sin 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + \\ + \bar{a}_{20} \sin^2 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau - \bar{a}_{11} \frac{1}{2} \sin 4 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + \\ + \bar{a}_{02} \cos^2 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau = 0, \\ a_{20} \sin 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + b_{20} \cos 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau +$$

$$+ \bar{b}_{20} \cos^2 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + \bar{b}_{11} \frac{1}{2} \sin 4 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + \\ + \bar{b}_{02} \sin^2 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau = 0, \\ a_{11} \sin 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + b_{11} \cos 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau - \\ - \bar{b}_{20} \sin 4 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + \bar{b}_{11} \cos 4 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + \\ + \bar{b}_{02} \sin 4 \int_0^t b_q(\tau) d\tau = 0, \\ a_{02} \sin 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + b_{02} \cos 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + \\ + \bar{b}_{20} \sin^2 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau - \bar{b}_{11} \frac{1}{2} \sin 4 \int_0^t b_q(\tau) d\tau + \\ + \bar{b}_{02} \cos^2 2 \int_0^t b_q(\tau) d\tau = 0, \quad (2.2)$$

при которых эта система имеет такую же отражающую функцию, что и линейная система

$$\dot{x} = ax + by, \\ \dot{y} = -bx + ay,$$

и, значит, линейное отображение за период $[-\omega; \omega]$.

Полученные условия позволяют указать начальные данные решений двухточечной краевой задачи $\Phi(x(\omega), y(\omega), x(-\omega), y(-\omega)) = 0$ и, значит, начальные данные 2ω -периодических решений рассматриваемой системы в том случае, когда ее коэффициенты 2ω -периодические непрерывные функции.

Теорема 2.1. Пусть для системы (2.1) с непрерывными коэффициентами выполнены условия (2.2). Тогда для краевой задачи (2.1) и

$$a_1 x(\omega) + a_2 y(\omega) + a_3 x(-\omega) + a_4 y(-\omega) = c_1, \\ b_1 x(\omega) + b_2 y(\omega) + b_3 x(-\omega) + b_4 y(-\omega) = c_2, \quad (2.3)$$

верны следующие положения:

1. Если число

$$D := (a_1 b_2 + a_3 b_4 - a_2 b_1 - a_4 b_3) + \\ + (a_3 b_1 + a_4 b_3 - a_1 b_3 - a_2 b_4) \times \\ \times e^{-2 \int_0^\omega a_q(\tau) d\tau} \sin 2 \int_0^\omega b_q(\tau) d\tau + \\ + (a_1 b_4 + a_3 b_2 - a_2 b_3 - a_4 b_1) \times \\ \times e^{-2 \int_0^\omega a_q(\tau) d\tau} \cos 2 \int_0^\omega b_q(\tau) d\tau \neq 0,$$

то краевая задача (2.3) имеет единственное решение, начинающееся при $t = \omega$ в точке $(x(\omega), y(\omega))$, удовлетворяющей системе алгебраических уравнений

$$M \cdot x(\omega) + N \cdot y(\omega) = c_1, \\ P \cdot x(\omega) + Q \cdot y(\omega) = c_2, \quad (2.4)$$

где числа

$$\begin{aligned}
 M &:= a_1 + a_3 e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \cos 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau + \\
 &+ a_4 e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \sin 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau, \\
 N &:= a_2 - a_3 e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \sin 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau + \\
 &+ a_4 e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \cos 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau, \\
 P &:= b_1 + b_3 e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \cos 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau + \\
 &+ b_4 e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \sin 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau, \\
 Q &:= b_2 - b_3 e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \sin 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau + \\
 &+ b_4 e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \cos 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

(если только это решение продолжимо на $[-\omega, \omega]$). Если же это решение не продолжимо на $[-\omega, \omega]$, то задача (2.3) для системы (2.1) решений не имеет).

2. Если число $D = 0$ и

$$\frac{P}{M} = \frac{Q}{N} \neq \frac{c_2}{c_1}, \quad (2.5)$$

то краевая задача (2.3) не имеет решений.

3. если число $D = 0$ и

$$\frac{P}{M} = \frac{Q}{N} = \frac{c_2}{c_1} \quad (2.6)$$

то краевая задача (2.3) имеет бесконечно много решений, причем при $t = \omega$ множество начальных данных $(x(\omega), y(\omega))$ этих решений находится на прямой

$$M \cdot x(\omega) + N \cdot y(\omega) = c_1.$$

4. Если $M = N = P = Q = c_1 = c_2 = 0$, то краевая задача (2.3) имеет своими решениями все решения системы (2.1) продолжимые на $[-\omega, \omega]$.

Доказательство. Ранее было доказано [12], что продолжимое на $[-\omega; \omega]$ решение $(x(t), y(t))$ системы (2.1) будет удовлетворять условию

$$\Phi(x(\omega), y(\omega), x(-\omega), y(-\omega)) = 0$$

тогда и только тогда, когда начальная точка $(x(\omega), y(\omega))$ этого решения удовлетворяет условию

$$\begin{aligned}
 &\Phi(x(\omega), y(\omega), F_1(\omega, x(\omega), y(\omega)), \\
 &F_2(\omega, x(\omega), y(\omega))) = 0.
 \end{aligned}$$

В нашем случае F_1 и F_2 определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
 F(t, x(t), y(t)) &= \begin{pmatrix} F_1(t, x(t), y(t)) \\ F_2(t, x(t), y(t)) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} e^{-2\int_0^t a_y(\tau) d\tau} \left(x \cos 2\int_0^t b_y(\tau) d\tau - y \sin 2\int_0^t b_y(\tau) d\tau \right) \\ e^{-2\int_0^t a_y(\tau) d\tau} \left(x \sin 2\int_0^t b_y(\tau) d\tau + y \cos 2\int_0^t b_y(\tau) d\tau \right) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Поэтому предыдущее условие примет вид

$$\begin{aligned}
 &\Phi \left(x(\omega), y(\omega), e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \left(x(\omega) \cos 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - y(\omega) \sin 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau \right) \right) \\
 &e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \left(x(\omega) \sin 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau + \right. \\
 &\quad \left. + y(\omega) \cos 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Учтем теперь, что в нашем случае функция Φ определяется соотношениями (2.3). Поэтому решение $(x(t), y(t))$ будет удовлетворять нужным краевым условиям тогда и только тогда, когда $x(\omega), y(\omega)$ удовлетворяют системе (2.4).

Запишем ее в виде:

$$A \begin{pmatrix} x(\omega) \\ y(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

где $A = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}$,

Найдём определитель матрицы A :

$$\begin{aligned}
 \det A &= M \cdot Q - N \cdot P = \\
 &= \left(a_1 + a_3 e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \cos 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau + \right. \\
 &\quad \left. + a_4 e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \sin 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau \right) \times \\
 &\times \left(b_2 - b_3 e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \sin 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau + \right. \\
 &\quad \left. + b_4 e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \cos 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau \right) - \\
 &- \left(a_2 - a_3 e^{-2\int_0^\omega a_y(\tau) d\tau} \sin 2\int_0^\omega b_y(\tau) d\tau + \right.
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} &+ a_4 e^{-2 \int_0^{\omega} a_q(\tau) d\tau} \cos 2 \int_0^{\omega} b_q(\tau) d\tau \right) \times \\ &\times \left(\begin{aligned} &b_1 + b_3 e^{-2 \int_0^{\omega} a_q(\tau) d\tau} \cos 2 \int_0^{\omega} b_q(\tau) d\tau + \\ &+ b_4 e^{-2 \int_0^{\omega} a_q(\tau) d\tau} \sin 2 \int_0^{\omega} b_q(\tau) d\tau \end{aligned} \right).$$

Выполнив элементарные преобразования, получим

$$\begin{aligned} \det A = & (a_1 b_2 + a_3 b_4 - a_2 b_1 - a_4 b_3) + \\ & + (a_3 b_1 + a_4 b_3 - a_1 b_3 - a_2 b_4) e^{-2 \int_0^{\omega} a_q(\tau) d\tau} \sin 2 \int_0^{\omega} b_q(\tau) d\tau + \\ & + (a_1 b_4 + a_3 b_2 - a_2 b_3 - a_4 b_1) e^{-2 \int_0^{\omega} a_q(\tau) d\tau} \cos 2 \int_0^{\omega} b_q(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Так как $D := \det A$, то система (2.4) будет иметь единственное решение если $D \neq 0$. Если же $D = 0$, то при выполнении условий (2.5) система не имеет решений, а при выполнении условий (2.6) существует бесконечное множество решений. В случае, когда $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $c_1 = c_2 = 0$, система (2.3) вырождается в тождество.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. МIRONENKO, В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И. МIRONENKO. – Минск : изд-во «Университетское», 1986. – 76 с.
2. МIRONENKO, В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В.И. МIRONENKO. – Гомель : УО «ГГУ» им. Ф.Скорины», 2004. – 196 с.
3. Musafirov, E.V. Differential systems, the mapping over period for which is represented by a

product of three exponential matrixes / E.V. Musafirov // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2007. – Vol. 329. – P. 647–654.

4. Musafirov, E.V. Reflecting function and periodic solutions of differential systems with small parameter / E.V. Musafirov // Indian Journal of Mathematics. – 2008. – Vol. 50, № 1. – P. 63–76.

5. Zhou, Zhengxin. On the Poincare mapping and periodic solutions of nonautonomous differential systems / Zhengxin Zhou // Commun. Pure Appl. Anal. – 2007. – Vol. 6, № 2. – P. 541–547.

6. Zhang, Shanlin. On the equivalence of the Abel equation / Shanlin Zhang, Zhengxin Zhou // Ann. Differ. Equations. – 2006. – Vol. 22, № 3. – P. 461–466.

7. Zhou, Zhengxin. Stability of differential systems / Zhengxin Zhou // Appl. Math., Ser. B (Engl. Ed.). – 2006. – Vol. 21, № 3. – P. 327–334.

8. Zhou, Zhengxin. On the reflective function of polynomial differential system / Zhengxin Zhou // J. Math. Anal. Appl. – 2003. – Vol. 278, № 1. – P. 18–26.

9. Zhou, Zhengxin. The nonlinear reflective function of differential system / Zhengxin Zhou, Yuxin Yan // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. – 2003. – Vol. 53, № 6 (A). – P. 733–741.

10. МIRONENKO, В.И. Возмущения систем, не изменяющие временных симметрий и отображения Пуанкаре / В.И. МIRONENKO, В.В. МIRONENKO // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1347–1352.

11. Mironenko, V.I. How to construct equivalent differential systems / V.I. Mironenko, V.V. Mironenko // Applied Mathematic Letters. – 2009. – Vol. 22. – P. 1356–1359.

12. Вареникова, Е.В. Отражающая функция и решения двухточечных краевых задач для неавтономных двумерных дифференциальных систем / Е.В. Вареникова // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т.48, №1. – С. 143–147.

Поступила в редакцию 02.09.13.

УДК 512.548

О ЕДИНИЦАХ n -АРНОЙ ГРУППЫ

А.М. Гальмак

Могилёвский государственный университет продовольствия, Могилёв, Беларусь

ON IDENTITIES OF n -ARY GROUP

A.M. Gal'mak

Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev, Belarus

В статье приводятся как уже известные, так и новые результаты о единицах n -арной группы.

Ключевые слова: n -арная группа, единица, идемпотент.

The known and new results on identities of n -ary group are stated in this paper.

Keywords: n -ary group, identity, idempotent.

Введение

n -Арные группы являются очень широким обобщением понятия группы. Поэтому в исследованиях по n -арным группам целесообразно выделять классы n -арных групп в той или иной мере близкие к классу всех групп. Одним из таких классов является класс всех n -арных групп, обладающих единицами. Согласно В. Дёрнте [1], элемент $e \in A$ n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ называется *единицей* этой n -арной группы, если для любого $x \in A$ и любого $i = 1, 2, \dots, n$ верно

$$\begin{aligned} [x \underbrace{e \dots e}_{n-1}] &= [e x \underbrace{e \dots e}_{n-2}] = \dots \\ &= [\underbrace{e \dots e}_{n-2} x e] = [\underbrace{e \dots e}_{n-1} x] = x. \end{aligned}$$

Это определение обобщает на n -арный случай определение единицы группы A как элемента $e \in A$ такого, что $ex = xe = x$ для любого $x \in A$.

В n -арной группе при $n > 2$ может быть только одна единица, но, в отличие от бинарного случая, может не быть единиц, а может быть и несколько единиц. Более того, существуют n -арные группы, в которых все элементы являются единицами. Ограничимся только одним примером.

Пример 0.1. Пусть $n \geq 3$, $\mathbf{P}(M)$ – множество всех подмножеств некоторого множества M , $\langle \mathbf{P}(M), [] \rangle$ – n -арная группа, производная от абелевой группы $\langle \mathbf{P}(M), \Delta \rangle$ с операцией симметрической разности

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Единицей этой группы является пустое множество, а порядки всех неединичных элементов равны двум. Поэтому множество $\mathbf{E}(\mathbf{P}(M))$ всех единиц n -арной группы $\langle \mathbf{P}(M), [] \rangle$ имеет следующий вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{P}(M)) = \begin{cases} \{\emptyset\}, & \text{если } n - \text{чётное,} \\ \mathbf{P}(M), & \text{если } n - \text{нечётное.} \end{cases}$$

Так как в n -арной группе, в отличие от группы, может быть несколько единиц, то в теории n -арных групп в рамках общей задачи изучения множества всех идемпотентов n -арной группы актуальна также задача изучения множества всех единиц n -арной группы. В данной работе получены новые результаты о множестве всех единиц полиадической группы, арность которой, в частности, имеет вид $p^\alpha + 1$, где p – простое.

1 Предварительные сведения

Согласно В. Дёрнте [1], универсальная алгебра $\langle A, [] \rangle$ с одной n -арной ($n \geq 2$) операцией $[]: A^n \rightarrow A$ называется n -арной группой, если операция $[]$ ассоциативна и однозначно обратима на каждом месте. На практике иногда удобнее пользоваться определениями n -арной группы, отличными от определения В. Дёрнте. К числу таких определений относятся, например, определения Э. Поста [2], С.А. Русакова [3], А.Н. Скибы и В.И. Тютютина [4], А.М. Гальмака [5]. В определениях Э. Поста, А.Н. Скибы и В.И. Тютютина обратимость n -арной операции постулируется только на крайних местах или даже на одном месте, отличном от крайнего. В определениях С.А. Русакова и некоторых других авторов помимо n -арной операции присутствует также унарная операция, которую обычно обозначают символом $\bar{}$. В определениях А.М. Гальмака разрешимость уравнений с одной неизвестной заменяется разрешимостью уравнений с любым числом неизвестных, в частности равным $n - 1$.

Приведём несколько примеров n -арных групп, которые будут встречаться в дальнейшем изложении.

Пример 1.1. Определим на группе A n -арную операцию

$$[a_1 a_2 \dots a_n] = a_1 a_2 \dots a_n a,$$

где a – элемент из центра группы A . Тогда $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа. В частности, при $a = 1$, где 1 – единица группы A , получаем n -арную группу $\langle A, [] \rangle$ с n -арной операцией

$$[a_1 a_2 \dots a_n] = a_1 a_2 \dots a_n,$$

которая называется [1] *производной n -арной группой* от группы A .

Рассматривают и более общую ситуацию. n -Арную группу $\langle A, [] \rangle$ называют [2] *производной* от m -арной группы $\langle A, () \rangle$, где $n = s(m-1) + 1$, $s \geq 1$, если

$$[a_1 \dots a_n] = ((\dots ((a_1 \dots a_m) a_{m+1} \dots a_{2m-1}) \dots) a_{(s-1)(m-1)+2} \dots a_{s(m-1)+1})$$

для любых $a_1, \dots, a_n \in A$. Ввиду ассоциативности m -арной операции $()$, правую часть последнего равенства записывают в виде $(a_1 \dots a_n)$, опуская обозначения внутренних операций. При этом само указанное равенство принимает вид

$$[a_1 \dots a_n] = (a_1 \dots a_n).$$

Как показывает следующий пример, n -арную групповую операцию можно построить при помощи групповой операции на множестве, которое относительно групповой операции не является группой.

Пример 1.2. Пусть \mathbf{D}_n – диэдральная группа, то есть полная группа преобразований симметрии правильного n -угольника. Поворот с n -угольника в его плоскости на угол $2\pi/n$ вокруг центра n -угольника порождает циклическую подгруппу

$$\mathbf{C}_n = \{e, c, c^2, \dots, c^{n-1}\}$$

поворотов. Диэдральная группа содержит еще n отражений. Если b – отражение, то

$$\mathbf{B}_n = \{b, bc, \dots, bc^{n-1}\}$$

есть множество всех отражений. Определим на \mathbf{B}_n тернарную операцию $[\varphi\psi\theta] = \varphi\psi\theta$. Тогда $\langle \mathbf{B}_n, [] \rangle$ – тернарная группа [6].

Пусть $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, B – подмножество множества A , замкнутое относительно n -арной операции $[]$. В этом случае операция $[]$ индуцирует на множестве B n -арную операцию, которую обозначают тем же символом $[]$. Если при этом $\langle B, [] \rangle$ – n -арная группа, то ее называют n -арной подгруппой n -арной группы $\langle A, [] \rangle$.

В n -арных группах возникают ситуации, невозможные в группах. Например, группа, в виду наличия в каждой её подгруппе единичного элемента, не может быть объединением своих непересекающихся подгрупп. Однако, при $n \geq 3$ n -арная группа может быть объединением своих непересекающихся n -арных подгрупп.

Так как тернарная группа $\langle \mathbf{B}_n, [] \rangle$ и тернарная группа $\langle \mathbf{C}_n, [] \rangle$, производная от группы \mathbf{C}_n , не имеют общих элементов, то тернарная группа $\langle \mathbf{D}_n, [] \rangle$, производная от диэдральной группы \mathbf{D}_n , является объединением своих непересекающихся тернарных подгрупп $\langle \mathbf{B}_n, [] \rangle$ и $\langle \mathbf{C}_n, [] \rangle$.

Аналогично, тернарная группа $\langle \mathbf{S}_n, [] \rangle$, производная от симметрической группы \mathbf{S}_n является

непересекающимся объединением тернарной группы $\langle \mathbf{A}_n, [] \rangle$, производной от знакопеременной группы \mathbf{A}_n , и тернарной группы $\langle \mathbf{T}_n, [] \rangle$ всех нечётных подстановок.

Точно также, тернарная группа, производная от унимодулярной группы всех матриц порядка n над некоторым полем, определитель которых равен ± 1 , является объединением своих непересекающихся тернарных подгрупп: тернарной группы, производной от специальной линейной группы над тем же полем, и тернарной подгруппы всех матриц с определителем равным -1 .

Важными примерами n -арных групп являются n -арные группы n -арных подстановок и n -арные группы n -арных автоморфизмов.

Обозначим через $\mathbf{S}_{A_1, \dots, A_{n-1}}$ множество всех упорядоченных наборов $(f_1, f_2, \dots, f_{n-1})$ биекций

$$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-2}} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_1$$

равномощных множеств A_1, \dots, A_{n-1} . На множестве $\mathbf{S}_{A_1, \dots, A_{n-1}}$ Э. Пост определил [2] n -арную операцию $[]_n$ следующим образом:

$$[f_1 \dots f_n]_n = \{g_1, \dots, g_{n-1}\},$$

где

$$g_j = f_{1j} f_{2(j+1)} \dots f_{(n-j)(n-1)} f_{(n-j+1)} \dots f_{(n-1)(j-1)} f_{nj}.$$

Теорема 1.1 [2], [5]. *Универсальная алгебра $\langle \mathbf{S}_{A_1, \dots, A_{n-1}}, []_n \rangle$ является n -арной группой.*

Элементы множества $\mathbf{S}_{A_1, \dots, A_{n-1}}$, в случае конечности множеств A_1, \dots, A_{n-1} , Э. Пост назвал *n -арными подстановками*. Ясно, что при $n = 1$ n -арные подстановки это обычные подстановки, а n -арная группа $\langle \mathbf{S}_{A_1, \dots, A_{n-1}}, []_n \rangle$ совпадает с симметрической группой \mathbf{S}_{A_1} .

Если все A_1, \dots, A_{n-1} – однотипные универсальные алгебры, а все f_1, \dots, f_{n-1} – изоморфизмы, то упорядоченный набор $(f_1, f_2, \dots, f_{n-1})$ называется *n -арным автоморфизмом* [5]. Множество всех n -арных автоморфизмов обозначается символом $\mathbf{Aut}(A_1, \dots, A_{n-1})$.

Теорема 1.2 [5]. *Универсальная алгебра $\mathbf{Aut}(A_1, \dots, A_{n-1})$ является n -арной группой.*

n -Арная группа $\langle A, [] \rangle$ называется *конечной*, если множество A конечно. В этом случае число $|A|$ элементов множества A называется *порядком n -арной группы $\langle A, [] \rangle$* . Если A – бесконечное множество, то говорят, что она имеет *бесконечный порядок*.

Для n -арных групп имеет место аналог теоремы Лагранжа для групп.

Теорема 1.3 [2]. *Порядок конечной n -арной группы делится на порядок любой ее n -арной подгруппы.*

Существуют различные способы построения n -арных групп с помощью групп. Простейший из них – построение производной n -арной группы для данной группы (пример 1.1). Универсальные методы конструирования n -арных групп дает теорема Поста о смежных классах [2]

и теорема Поста – Глускина – Хоссу [2], [7], [8]. Укажем еще один общий метод [9] конструирования n -арных групп, подробно описанный в книге [10]. Пусть A – полугруппа, $k \geq 2$, $l \geq 2$, σ – подстановка из S_k . Определим на A^k l -арную операцию

$$[x_1 x_2 \dots x_l]_{l, \sigma, k} = (y_1, y_2, \dots, y_k),$$

где

$$y_j = x_{1_j} x_{2_{\sigma(j)}} \dots x_{(l-1)_{\sigma^{l-2}(j)}} x_{l_{\sigma^{l-1}(j)}}.$$

Теорема 1.4 [9], [10]. Если A – группа, порядок подстановки σ из S_k делит $l-1$, то $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа.

Обозначим через $GL_n(k, P)$ k -ую декартову степень $(GL_n(P))^k$ полной линейной группы $GL_n(P)$ над ассоциативным коммутативным кольцом P с единицей. Аналогично, $SL_n(k, P) = (SL_n(P))^k$, где $SL_n(P)$ – специальная линейная группа над P . Если в теореме 1.4 положить вначале $A = GL_n(P)$, а затем $A = SL_n(P)$, то получится

Теорема 1.5 [11], [12]. Если порядок подстановки σ из S_k делит $l-1$, то универсальные алгебры $\langle GL_n(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ и $\langle SL_n(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ являются l -арными группами.

Ясно, что $\langle SL_n(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ – l -арная подгруппа l -арной группы $\langle GL_n(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$.

Из теоремы 1.5 при $l = k + 1$, $\sigma = (12 \dots k)$, $P = C$ – поле комплексных чисел получается следующий результат Э. Поста.

Теорема 1.6 [2]. Универсальная алгебра $\langle GL_n(k, C), []_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$ является $(k+1)$ -арной группой.

Полиадические операции на множествах упорядоченных наборов матриц изучал также А.К. Слипенко [13], [14].

Если в определении l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$ конечную группу S_k заменить бесконечной группой S_J , где J – произвольное множество, то получим определение l -арной операции $[]_{l, \sigma, J}$ из [15]. Для этой операции справедливы результаты, обобщающие теоремы 1.4 и 1.5.

2 n -Арные аналоги единицы

Как уже отмечалось во введении, в n -арной группе при $n > 2$ может быть только одна единица, но в отличие от бинарного случая, может быть и несколько единиц. Более того, существуют n -арные группы, в которых все элементы являются единицами. Большое число примеров подобного рода имеется в [5], [16].

Существуют также n -арные группы ($n > 2$) любого конечного порядка, в которых вообще нет единиц. Например, в тернарной группе $\langle B_n, [] \rangle$ из примера 1.2 все элементы являются идемпотентами, среди которых нет единиц [6]. Не имеют единиц также неоднородные n -арные группы $\langle S_{A_1, \dots, A_{n-1}}, []_n \rangle$ и $\text{Aut}(A_1, \dots, A_{n-1})$ из теорем 1.1 и 1.2. Если A – неоднородная группа, порядок нетождественной подстановки σ из S_k делит $l-1$, то l -арная группа $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$

из теоремы 1.4 также не имеет единиц [10]. Соответственно, в случае нетождественности подстановки σ , порядок которой делит $l-1$, не имеют единиц [15] и l -арные группы $\langle GL_n(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ и $\langle SL_n(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ из теоремы 1.5, а также [2] $(k+1)$ -арная группа $\langle GL_n(k, C), []_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$ из теоремы 1.6.

В. Дёрнте установил [1], что производные n -арные группы – это в точности n -арные группы с единицами. Конкретно он доказал, что: 1) если $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, производная от бинарной группы A , то единица e группы A является и единицей n -арной группы $\langle A, [] \rangle$; 2) если e – единица n -арной группы $\langle A, [] \rangle$, то эта n -арная группа является производной от группы $\langle A, \circ_e \rangle$ с единицей e и бинарной операцией \circ_e :

$$x \circ_e y = [x \underbrace{e \dots e}_{n-2} y].$$

Кратко критерий В. Дёрнте формулируется следующим образом.

Теорема 2.1 [1]. n -Арная группа является производной от группы тогда и только тогда, когда она обладает единицей.

При $n \geq 3$ множество всех производных n -арных групп не является многообразием сигнатуры $\{[], \bar{\ } \}$, так как в производных n -арных группах могут быть n -арные подгруппы, не являющиеся производными от групп. Например, в тернарной группе $\langle D_n, [] \rangle$, производной от диэдральной группы D_n , множество B_n из примера 1.2 является тернарной подгруппой, в которой нет единиц. Как отметил А.Г. Курош в книге [17], множество всех производных n -арных групп можно превратить в многообразие, если сигнатуру $\{[], \bar{\ } \}$ дополнить нулевой операцией e , а к тождествам, определяющим n -арную группу, добавить тождество $\bar{e} = e$. Последнее тождество равносильно тождеству

$$[\underbrace{e \dots e}_n] = e.$$

Элемент e n -арной группы $\langle A, [] \rangle$, удовлетворяющий этому тождеству, называется ее идемпотентом. n -Арную группу, в которой все элементы являются идемпотентами, называют идемпотентной.

Ясно, что идемпотент n -арной группы, как и её единица, является n -арным аналогом единицы группы. Еще одним n -арным аналогом единицы группы является понятие нейтральной последовательности.

Последовательность $e_1 \dots e_{k(n-1)}$, где $k \geq 1$, элементов n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ называется [2] нейтральной, если

$$[e_1 \dots e_{k(n-1)} x] = [x e_1 \dots e_{k(n-1)}] = x$$

для любого $x \in A$.

Понятия нейтральной последовательности и единицы n -арной группы являются частными случаями следующего определения.

Последовательность $e_1 \dots e_{m-1}$ элементов n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ называется [18] m -нейтральной ($n = k(m-1) + 1, k \geq 1$), если

$$[\underbrace{e_1 \dots e_{m-1} \dots e_1 \dots e_{m-1}}_{i-1} x \underbrace{e_1 \dots e_{m-1} \dots e_1 \dots e_{m-1}}_{k-i+1}] = x$$

для любого $x \in A$ и любого $i = 1, \dots, k+1$.

n -Нейтральные последовательности элементов n -арной группы – это в точности ее нейтральные последовательности, а единицы n -арной группы – это в точности ее 2-нейтральные последовательности.

Теорема 2.2 [2]. n -Арная группа является производной от m -арной группы тогда и только тогда, когда она обладает m -нейтральной последовательностью.

Из этой теоремы при $m = 2$ получается критерий В. Дёрнте (теорема 2.1). Заметим, что Э. Пост при формулировке своего критерия не использовал понятие m -нейтральной последовательности

Одним определением можно объединить также понятия идемпотента и единицы n -арной группы.

Элемент e n -арной группы $\langle A, [] \rangle$, где $n = k(m-1) + 1, k \geq 1$, называется [18] m -идемпотентом, если

$$[\underbrace{e \dots e \dots e}_{m-1} \dots \underbrace{e x e}_{m-1} \dots \underbrace{e \dots e}_{m-1} \dots \underbrace{e}_{m-1}] = x$$

для любого $x \in A$ и любого $i = 1, \dots, k+1$.

Легко проверяется, что n -идемпотенты n -арной группы – это в точности ее идемпотенты, а 2-идемпотенты – это в точности ее единицы.

3 Основные результаты

Так как в n -арной группе, в отличие от группы, может быть несколько единиц, то возникает задача изучения множества $E(A)$ всех единиц произвольной n -арной группы $\langle A, [] \rangle$. Строение множества $E(A)$ подробно изучено в [5], [16]. Здесь же напомним только некоторые результаты. Для этого нам понадобится понятие центра n -арной группы. Центром n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ называется [2] множество $Z(A)$ всех её элементов z таких, что

$$[zx_1x_2 \dots x_{n-1}] = [x_1zx_2 \dots x_{n-1}] = \dots \\ \dots = [x_1 \dots x_{n-2}zx_{n-1}] = [x_1x_2 \dots x_{n-1}z]$$

для всех $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in A$. Э. Пост установил [2], что $\langle Z(A), [] \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, [] \rangle$.

Замечание 3.1. Центр $Z(A)$ n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ производной от группы A совпадает с центром группы A [5, 16]. Поэтому можно употреблять общее обозначение $Z(A)$ и для центра n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ и для центра группы A .

Теорема 3.1 [5], [16]. Если $E(A) \neq \emptyset$, то $\langle E(A), [] \rangle$ – характеристическая n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, [] \rangle$, лежащая в её центре.

Если $E(A) \neq \emptyset$, то n -арную подгруппу $\langle E(A), [] \rangle$ называют n -арной подгруппой единиц n -арной группы $\langle A, [] \rangle$.

Ясно, что если $e \in E(A)$, то $\langle e, [] \rangle$ – n -арная подгруппа в $\langle E(A), [] \rangle$.

В n -арной подгруппе единиц при $n > 2$ могут существовать n -арные подгруппы, отличные от одноэлементных и от самой n -арной подгруппы $\langle E(A), [] \rangle$.

Предложение 3.1 [5, 16]. Если $\langle A, [] \rangle$ – тернарная группа, $e_1, e_2 \in E(A)$, то $\langle \{e_1, e_2\}, [] \rangle$ – тернарная подгруппа тернарной группы $\langle E(A), [] \rangle$.

Следствие 3.1 [5, 16]. Если конечная тернарная группа содержит более одной единицы, то её тернарная подгруппа единиц, её центр и она сама имеют четные порядки.

Предложение 3.2 [5, 16]. Если a, b, c – различные единицы тернарной группы $\langle A, [] \rangle$, то $\langle \{a, b, c, [abc]\}, [] \rangle$ – тернарная подгруппа четвертого порядка в $\langle E(A), [] \rangle$.

Следствие 3.2. Если конечная тернарная группа содержит более двух единиц, то порядки её тернарной подгруппы единиц, её центра и её самой делятся на 4.

Теорема 3.2 [5, 16]. Если $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, производная от группы A с единицей e , то

$$E(A) = \{a \in Z(A) \mid a^{n-1} = e\}.$$

Теорема 3.1 впервые была опубликована в 1998 году в препринте [16]. После этого некоторые авторы, знакомые с результатами работы [16], стали включать эту теорему, а также следствие 3.1 и предложение 3.1 в свои статьи без ссылок на препринт [16].

Покажем, что предложения 3.1 и 3.2, а также следствия 3.1 и 3.2 являются частными случаями более общих результатов, которые мы приведем ниже.

Замечание 3.2. Любой идемпотент n -арной группы $\langle A, [] \rangle$, производной от группы A , имеет в группе A порядок, делящий $n-1$. Действительно, если a – идемпотент в $\langle A, [] \rangle$, то из

$$\underbrace{[a \dots a]}_n = a$$

следует $a^n = a$, откуда $a^{n-1} = e$, где e – единица группы A .

Замечание 3.3. Простой проверкой устанавливается следующий факт. Если $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, производная от группы A , B – подгруппа в A , то $\langle B, [] \rangle$ – n -арная подгруппа в $\langle A, [] \rangle$.

Если $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, $M \subseteq A$, то пересечение всех n -арных подгрупп n -арной группы $\langle A, [] \rangle$, содержащих множество M , называют [3] n -арной подгруппой, порожденной множеством M .

В формулировке следующего предложения присутствует полуциклическая n -арная группа.

Соответствующее определение есть в [18]. Здесь же отметим, что согласно этому определению, n -арная группа $\langle A, [] \rangle$, производная от группы A с единицей e , является полуциклической тогда и только тогда, когда группа $\langle A, \circ_e \rangle$ циклическая.

Предложение 3.3. Пусть $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, производная от группы A с единицей e , элемент $a \in A$ является идемпотентом в $\langle A, [] \rangle$ и имеет в группе A порядок $r \geq 1$, пусть также

$$\langle e, a \rangle = \{a_i = [\underbrace{e \dots e}_{n-i} \underbrace{a \dots a}_i] \mid i = 1, \dots, r\}.$$

Тогда: $\langle e, a \rangle$ – циклическая подгруппа порядка r группы A , порождаемая элементом a ; $\langle \langle e, a \rangle, [] \rangle$ – полуциклическая идемпотентная n -арная подгруппа порядка r n -арной группы $\langle A, [] \rangle$, порождаемая при $r > 1$ двухэлементным множеством $\{e, a\}$.

Доказательство. Равенства, определяющие элементы a_i , корректны, так как, согласно замечанию 3.2, r не превосходит $n - 1$. Если $r = 1$, то $\langle e, a \rangle = \{a = e\}$, $\langle \langle e, a \rangle, [] \rangle$ – одноэлементная n -арная подгруппа в $\langle A, [] \rangle$. Поэтому считаем $r > 1$.

Так как

$$a_i = e^{n-i} a^i = a^i, i = 1, \dots, r,$$

то

$$a_1 = a, a_2 = a^2, \dots, a_{r-1} = a^{r-1}, a_r = a^r = e.$$

А так как r – порядок элемента a в группе A , то во множестве $\langle e, a \rangle$ все элементы различны, а само оно является циклической подгруппой порядка r группы A . Согласно замечанию 3.3, $\langle \langle e, a \rangle, [] \rangle$ – n -арная подгруппа в $\langle A, [] \rangle$. Легко проверяется, что n -арная группа, производная от циклической группы, является полуциклической. Поэтому $\langle \langle e, a \rangle, [] \rangle$ – полуциклическая.

Так как a – идемпотент, то для любого $i = 1, \dots, r$ имеем

$$[\underbrace{a_i \dots a_i}_n] = a_i^n = (a^i)^n = (a^n)^i = (\underbrace{[a \dots a]}_n)^i = a^i = a_i,$$

то есть

$$[\underbrace{a_i \dots a_i}_n] = a_i.$$

Следовательно, a_i – идемпотент.

Обозначим через $\langle D, [] \rangle$ n -арную подгруппу, порождённую в $\langle A, [] \rangle$ множеством $\{e, a\}$. Ясно, что $D \subseteq \langle e, a \rangle$. Если $\langle H, [] \rangle$ – любая n -арная подгруппа в $\langle A, [] \rangle$, включающая множество $\{e, a\}$, то из равенств, определяющих элементы a_i , в виду замкнутости множества H относительно операции $[]$, следует $\langle e, a \rangle \subseteq H$. Следовательно, $\langle e, a \rangle \subseteq D$. Из полученных включений следует равенство $\langle e, a \rangle = D$. Предложение доказано.

Замечание 3.4. Утверждение предложения 3.3 о полуциклическости n -арной подгруппы $\langle \langle e, a \rangle, [] \rangle$ и её порождаемости при $r > 1$

двухэлементным множеством $\{e, a\}$ может быть получено применением следующей леммы.

Лемма 3.1. n -Арная группа $\langle A, [] \rangle$, производная от циклической группы A с единицей e и порождающим элементом $a \in A$, является полуциклической, порождаемой множеством $\{e, a\}$.

Теорема 3.3. Пусть n -арная группа $\langle A, [] \rangle$ имеет более одной единицы. Тогда:

1) если зафиксировать единицу $e \in \mathbf{E}(A)$, то любая единица $a \in \mathbf{E}(A)$, отличная от e , имеет в группе $\langle A, \circ_e \rangle$ порядок $r > 1$, делящий $n - 1$;

2) если порядки всех элементов в группе $\langle \mathbf{E}(A), \circ_e \rangle$ ограничены в совокупности, то период группы $\langle \mathbf{E}(A), \circ_e \rangle$ делит $n - 1$;

3) если $\langle \mathbf{E}(A), [] \rangle$ – конечная, то период группы $\langle \mathbf{E}(A), \circ_e \rangle$ является общим делителем порядка n -арной группы $\langle \mathbf{E}(A), [] \rangle$ и числа $n - 1$.

Доказательство. Так как в $\langle A, [] \rangle$ более одной единицы, то $n \geq 3$.

1) По теореме 2.1 n -арная группа $\langle A, [] \rangle$ является производной от группы $\langle A, \circ_e \rangle$ с единицей e . Так как $e \neq a$, то в группе $\langle A, \circ_e \rangle$ элемент a имеет порядок $r > 1$, который, ввиду замечания 3.2, делит $n - 1$.

2) Вытекает из 1) и определения периода группы.

3) Вытекает из 2) и того факта, что период любой конечной группы делит её порядок. Теорема доказана.

Полагая в теореме 3.3 $n = p^\alpha + 1$, где p – простое, получим

Следствие 3.3. Пусть $(p^\alpha + 1)$ -арная группа $\langle A, [] \rangle$, где p – простое, $\alpha \geq 1$, имеет более одной единицы. Тогда:

1) если зафиксировать единицу $e \in \mathbf{E}(A)$, то любая единица $a \in \mathbf{E}(A)$, отличная от e , имеет в группе $\langle A, \circ_e \rangle$ порядок p^β , где $1 \leq \beta \leq \alpha$;

2) если порядки всех элементов в группе $\langle \mathbf{E}(A), \circ_e \rangle$ ограничены в совокупности, то период группы $\langle \mathbf{E}(A), \circ_e \rangle$ является степенью p ;

3) если $\langle \mathbf{E}(A), [] \rangle$ – конечная, то её порядок является степенью p .

Замечание 3.5. Утверждение 3) следствия 3.3 вытекает из утверждения 1) этого же следствия, так как конечная группа, в которой порядки всех элементов являются степенью некоторого простого числа, имеет порядок, являющийся степенью того же простого числа.

Из теоремы 3.1 и утверждения 3) следствия 3.3 вытекает

Следствие 3.4. Если конечная $(p^\alpha + 1)$ -арная группа $\langle A, [] \rangle$, где p – простое, $\alpha \geq 1$, имеет более одной единицы, то порядки её $(p^\alpha + 1)$ -арной подгруппы единиц, её центра и её самой делятся на p .

При $p = 2$, $\alpha = 1$ из следствия 3.4 получается следствие 3.1.

Так как n -арная подгруппа $\langle \mathbf{E}(A), [] \rangle$ n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ является производной от группы $\langle \mathbf{E}(A), \circ_u \rangle$ с единицей u для любого $u \in \mathbf{E}(A)$, то из предложения 3.3 легко извлекается ещё одно

Предложение 3.4. Если n -арная группа $\langle A, [] \rangle$ имеет более одной единицы, то любые две различные единицы $u, v \in \mathbf{E}(A)$ порождают в $\langle \mathbf{E}(A), [] \rangle$ полуциклическую n -арную подгруппу $\langle \langle u, v \rangle, [] \rangle$ порядка $r > 1$, где

$$\langle u, v \rangle = \{ \underbrace{[u \dots u]_{n-i}} \underbrace{[v \dots v]_i} \mid i = 1, \dots, r \}.$$

r – порядок элемента v в группе $\langle A, \circ_u \rangle$.

Предложение 3.4 и замечание 3.2 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.4. Если $(p+1)$ -арная группа $\langle A, [] \rangle$, где p – простое, имеет более одной единицы, то любые две различные единицы $u, v \in \mathbf{E}(A)$ порождают в $\langle \mathbf{E}(A), [] \rangle$ полуциклическую $(p+1)$ -арную подгруппу $\langle \langle u, v \rangle, [] \rangle$ порядка p , где

$$\langle u, v \rangle = \{ \underbrace{[u \dots u]_{p+1-i}} \underbrace{[v \dots v]_i} \mid i = 1, \dots, p \}.$$

Предложение 3.1 получается из теоремы 3.4 при $p = 2$.

Замечание 3.6. Пусть $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа из теоремы 3.4, u – фиксированная единица из $\mathbf{E}(A)$. Так как любой элемент v из $\mathbf{E}(A)$, отличный от u , имеет в группе $\langle \mathbf{E}(A), \circ_u \rangle$ порядок p , то $\langle \mathbf{E}(A), \circ_u \rangle$ – элементарная абелева p -группа.

Предложение 3.5. Пусть $k \geq 1$, $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, u, v_1, \dots, v_k – её единицы ($v_1 \neq u, \dots, v_k \neq u$), r_1, \dots, r_k – соответственно порядки элементов v_1, \dots, v_k в группе $\langle A, \circ_u \rangle$; для любого $j = 1, \dots, k$ положим

$$\langle u, v_j \rangle = \{ \underbrace{[u \dots u]_{n-i}} \underbrace{[v_j \dots v_j]_i} \mid i = 1, \dots, r_j \},$$

$$\begin{aligned} & \langle u, v_1, \dots, v_j \rangle = \\ & = [\langle u, v_1 \rangle \underbrace{[u \dots u]_{n-2}} \langle u, v_2 \rangle \underbrace{[u \dots u]_{n-2}} \dots \underbrace{[u \dots u]_{n-2}} \langle u, v_j \rangle]. \end{aligned}$$

Тогда для любого $j = 1, \dots, k$ справедливы следующие утверждения:

1) $\langle \langle u, v_j \rangle, [] \rangle$ – полуциклическая n -арная подгруппа в $\langle \mathbf{E}(A), [] \rangle$ порядка $r_j > 1$;

2) $\langle \langle u, v_1, \dots, v_j \rangle, [] \rangle$ – n -арная подгруппа в $\langle \mathbf{E}(A), [] \rangle$, порождаемая множеством $\{u, v_1, \dots, v_j\}$, и имеющая порядок, который является делителем числа $r_1 r_2 \dots r_j$;

3) $\langle u, v_1, \dots, v_{j-1} \rangle \subseteq \langle u, v_1, \dots, v_j \rangle$.

Доказательство. Так как в $\langle A, [] \rangle$ более одной единицы, то $n \geq 3$.

1) По предложению 3.4 для любого $j = 1, \dots, k$ $\langle \langle u, v_j \rangle, [] \rangle$ – полуциклическая n -арная подгруппа в $\langle \mathbf{E}(A), [] \rangle$ порядка $r_j > 1$.

2) Так как $\langle \langle u, v_l \rangle, \circ_u \rangle$ и $\langle \langle u, v_m \rangle, \circ_u \rangle$ – перестановочные подгруппы в группе $\langle \mathbf{E}(A), \circ_u \rangle$ для любых $l, m = 1, \dots, k$, то произведение

$\langle \langle u, v_1 \rangle \circ_u \langle u, v_2 \rangle \circ_u \dots \circ_u \langle u, v_j \rangle \rangle$ является подгруппой в $\langle \mathbf{E}(A), \circ_u \rangle$, порядок которой делит произведение $r_1 r_2 \dots r_j$.

А так как

$$\begin{aligned} & \langle u, v_1 \rangle \circ_u \langle u, v_2 \rangle \circ_u \dots \circ_u \langle u, v_j \rangle = \\ & = [\langle u, v_1 \rangle \underbrace{[u \dots u]_{n-2}} \langle u, v_2 \rangle \underbrace{[u \dots u]_{n-2}} \dots \underbrace{[u \dots u]_{n-2}} \langle u, v_j \rangle], \end{aligned}$$

то $\langle \langle u, v_1, \dots, v_j \rangle, \circ_u \rangle$ – подгруппа в $\langle \mathbf{E}(A), \circ_u \rangle$, порядок которой делит произведение $r_1 r_2 \dots r_j$. Тогда, согласно замечанию 3.3,

$$\langle \langle u, v_1, \dots, v_j \rangle, [] \rangle$$

– n -арная подгруппа в $\langle \mathbf{E}(A), [] \rangle$. Кроме того, из определения множества $\langle u, v_1, \dots, v_j \rangle$ следует

$$\{u, v_1, \dots, v_j\} \subseteq \langle u, v_1, \dots, v_j \rangle.$$

Таким образом, обозначив через $\langle D, [] \rangle$ n -арную подгруппу, порожждённую в $\langle \mathbf{E}(A), [] \rangle$ множеством $\{u, v_1, \dots, v_j\}$, получим включение $D \subseteq \langle u, v_1, \dots, v_j \rangle$. Если теперь $\langle H, [] \rangle$ – любая n -арная подгруппа в $\langle \mathbf{E}(A), [] \rangle$, включающая множество $\{u, v_1, \dots, v_j\}$, то из равенства, определяющего множество $\langle u, v_1, \dots, v_j \rangle$, в виду замкнутости множества H относительно операции $[]$, следует $\langle u, v_1, \dots, v_j \rangle \subseteq H$. Следовательно, $\langle u, v_1, \dots, v_j \rangle \subseteq D$. Из полученных включений следует равенство $\langle u, v_1, \dots, v_j \rangle = D$.

3) Заметим, что при $j = 1$ левая часть доказываемого равенства не определена. Поэтому считаем $j = 2, \dots, k$.

Так как $u \in \langle u, v_j \rangle$, то

$$[\langle u, v_1 \rangle \underbrace{[u \dots u]_{n-2}} \dots \underbrace{[u \dots u]_{n-2}} \langle u, v_{j-1} \rangle] =$$

$$\begin{aligned} & = [\langle u, v_1 \rangle \underbrace{[u \dots u]_{n-2}} \dots \underbrace{[u \dots u]_{n-2}} \langle u, v_{j-1} \rangle \underbrace{[u \dots u]_{n-2}}] \subseteq \\ & \subseteq [\langle u, v_1 \rangle \underbrace{[u \dots u]_{n-2}} \dots \underbrace{[u \dots u]_{n-2}} \langle u, v_{j-1} \rangle \underbrace{[u \dots u]_{n-2}} \langle u, v_j \rangle]. \end{aligned}$$

Следовательно, верно доказываемое равенство. Предложение доказано.

Замечание 3.7. В предложении 3.5 некоторые или даже все единицы из множества $\{v_1, \dots, v_k\}$ могут совпадать.

Полагая в предложении 3.5 $k = 2$, получим

Следствие 3.5. Пусть $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, u, v и w – её единицы ($v \neq u, w \neq u$), r и s – соответственно порядки элементов v и w в группе $\langle A, \circ_u \rangle$; положим

$$\langle u, v \rangle = \{ \underbrace{[u \dots u]_{n-i}} \underbrace{[v \dots v]_i} \mid i = 1, \dots, r \},$$

$$\langle u, w \rangle = \{ \underbrace{[u \dots u]_{n-i}} \underbrace{[w \dots w]_i} \mid i = 1, \dots, s \},$$

$$\langle u, v, w \rangle = [\langle u, v \rangle \underbrace{[u \dots u]_{n-2}} \langle u, w \rangle].$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\langle \langle u, v \rangle, [] \rangle$ и $\langle \langle u, w \rangle, [] \rangle$ – полуциклические n -арные подгруппы в $\langle \mathbf{E}(A), [] \rangle$ порядков r и s – соответственно;

2) $\langle \langle u, v, w \rangle, [] \rangle$ – n -арная подгруппа в $\langle \mathbf{E}(A), [] \rangle$, порождаемая множеством $\{u, v, w\}$,

u имеющая порядок, который является делителем числа rs ;

$$3) \langle u, v \rangle \subseteq \langle u, v, w \rangle.$$

Замечание 3.8. Так как подгруппы

$$\langle \langle u, v \rangle, \circ_u \rangle \text{ и } \langle \langle u, w \rangle, \circ_u \rangle$$

из следствия 3.5 перестановочны, то

$$\langle u, v, w \rangle = [\langle u, w \rangle \underbrace{u \dots u}_{n-2} \langle u, v \rangle],$$

$$\langle u, v, w \rangle = [\underbrace{u \dots u}_{n-2} \langle u, w \rangle \langle u, v \rangle],$$

$$\langle u, v, w \rangle = [\underbrace{u \dots u}_{n-2} \langle u, v \rangle \langle u, w \rangle],$$

$$\langle u, v, w \rangle = [\langle u, v \rangle \langle u, w \rangle \underbrace{u \dots u}_{n-2}],$$

$$\langle u, v, w \rangle = [\langle u, w \rangle \langle u, v \rangle \underbrace{u \dots u}_{n-2}].$$

Аналогично, все n -арные подгруппы, стоящие под знаком n -арной операции в правой части равенства, определяющего множество $\langle u, v_1, \dots, v_j \rangle$ в предложении 3.5, могут быть переставлены произвольным образом.

Теорема 3.5. Пусть $k \geq 1$, p – простое, $\langle A, [] \rangle$ – $(p+1)$ -арная группа, u, v_1, \dots, v_k – её единицы; для любого $j = 1, \dots, k$ положим

$$\langle u, v_j \rangle = \{ \underbrace{u \dots u}_{p+1-i} \underbrace{v_j \dots v_j}_i \mid i = 1, \dots, p \},$$

$$\langle u, v_1, \dots, v_j \rangle = [\langle u, v_1 \rangle \underbrace{u \dots u}_{p-1} \langle u, v_2 \rangle \underbrace{u \dots u}_{p-1} \dots \underbrace{u \dots u}_{p-1} \langle u, v_j \rangle];$$

пусть также

$$v_1 \neq u, v_j \notin \langle u, v_1, \dots, v_{j-1} \rangle, j = 2, \dots, k.$$

Тогда для любого $j = 1, \dots, k$ справедливы следующие утверждения:

1) $\langle \langle u, v_j \rangle, [] \rangle$ – полуциклическая $(p+1)$ -арная подгруппа в $\langle \mathbf{E}(A), [] \rangle$ порядка p ;

2) $\langle \langle u, v_1, \dots, v_j \rangle, [] \rangle$ – $(p+1)$ -арная подгруппа в $\langle \mathbf{E}(A), [] \rangle$ порядка p^j , порождаемая множеством $\{u, v_1, \dots, v_j\}$;

$$3) \langle u, v_1, \dots, v_{j-1} \rangle \subset \langle u, v_1, \dots, v_j \rangle.$$

Доказательство. 1) По условию теоремы $v_1 \neq u$. Кроме того, из равенства, определяющего множество $\langle u, v_1, \dots, v_j \rangle$ следует

$$\{u, v_1, \dots, v_j\} \subseteq \langle u, v_1, \dots, v_j \rangle, j = 1, \dots, k,$$

откуда, полагая $j = 2, \dots, k$ в условии

$$v_j \notin \langle u, v_1, \dots, v_{j-1} \rangle,$$

получаем $v_2 \neq u, \dots, v_k \neq u$. Таким образом, $v_1 \neq u, v_2 \neq u, \dots, v_k \neq u$. Поэтому, согласно утверждению 1) теоремы 3.3, порядки элементов v_1, \dots, v_k в группе $\langle A, \circ_u \rangle$ равны p . Тогда, согласно утверждению 1) предложения 3.5, для любого $j = 1, \dots, k$ $\langle \langle u, v_j \rangle, [] \rangle$ – полуциклическая $(p+1)$ -арная подгруппа в $\langle \mathbf{E}(A), [] \rangle$ порядка p .

2) Согласно утверждению 2) предложения 3.5, $\langle \langle u, v_1, \dots, v_j \rangle, [] \rangle$ – $(p+1)$ -арная подгруппа в $\langle \mathbf{E}(A), [] \rangle$, порождаемая множеством $\{u, v_1, \dots, v_j\}$.

Так как $u \in \langle u, v_1, v_2 \rangle$, то $\langle \langle u, v_1, v_2 \rangle, \circ_u \rangle$ – подгруппа в $\langle \mathbf{E}(A), \circ_u \rangle$. Кроме того, так как

$$\langle u, v_1, v_2 \rangle = [\langle u, v_1 \rangle \underbrace{u \dots u}_{p-1} \langle u, v_2 \rangle],$$

то

$$\langle u, v_1, v_2 \rangle = \langle u, v_1 \rangle \circ_u \langle u, v_2 \rangle,$$

где $\langle \langle u, v_1 \rangle, \circ_u \rangle$ и $\langle \langle u, v_2 \rangle, \circ_u \rangle$ – подгруппы порядка p группы $\langle \langle u, v_1, v_2 \rangle, \circ_u \rangle$. Если указанные подгруппы пересекаются по единице u , то из последнего равенства следует, что порядок группы $\langle \langle u, v_1, v_2 \rangle, \circ_u \rangle$, а значит и $(p+1)$ -арной группы $\langle \langle u, v_1, v_2 \rangle, [] \rangle$ равен p^2 . Если же пересечение указанных подгрупп отлично от единицы u , то, ввиду простоты их порядков, $\langle u, v_1 \rangle = \langle u, v_2 \rangle$, что противоречит условию $v_2 \notin \langle u, v_1 \rangle$.

Рассуждая аналогично, устанавливаем, что порядок $(p+1)$ -арной группы $\langle \langle u, v_1, \dots, v_{k-1} \rangle, [] \rangle$ равен p^{k-1} .

Так как

$$u \in \langle u, v_1, \dots, v_k \rangle,$$

то $\langle \langle u, v_1, \dots, v_k \rangle, \circ_u \rangle$ – подгруппа в $\langle \mathbf{E}(A), \circ_u \rangle$. Кроме того, так как

$$\langle u, v_1, \dots, v_k \rangle = [\langle u, v_1, \dots, v_{k-1} \rangle \underbrace{u \dots u}_{p-1} \langle u, v_k \rangle],$$

то

$$\langle u, v_1, \dots, v_k \rangle = \langle u, v_1, \dots, v_{k-1} \rangle \circ_u \langle u, v_k \rangle,$$

где $\langle \langle u, v_1, \dots, v_{k-1} \rangle, \circ_u \rangle$ и $\langle \langle u, v_k \rangle, \circ_u \rangle$ – подгруппы в $\langle \langle u, v_1, \dots, v_k \rangle, \circ_u \rangle$ соответственно порядков p^{k-1} и p . Если указанные подгруппы пересекаются по единице u , то из последнего равенства следует, что порядок группы $\langle \langle u, v_1, \dots, v_k \rangle, \circ_u \rangle$, а значит и $(p+1)$ -арной группы $\langle \langle u, v_1, \dots, v_k \rangle, [] \rangle$ равен p^k . Если же пересечение указанных подгрупп отлично от единицы u , то, ввиду простоты порядка группы $\langle \langle u, v_k \rangle, \circ_u \rangle$, $\langle u, v_k \rangle \subseteq \langle u, v_1, \dots, v_{k-1} \rangle$, что противоречит условию $v_k \notin \langle u, v_1, \dots, v_{k-1} \rangle$.

3) Применяется утверждение 3) предложения 3.5 и утверждение 2) данного предложения. Теорема доказана.

4 Некоторые следствия из теоремы 3.5

Полагая в теореме 3.5 $k = 2$, получим

Следствие 4.1. Пусть p – простое, $\langle A, [] \rangle$ – $(p+1)$ -арная группа, u, v и w – её единицы; положим

$$\langle u, v \rangle = \{ \underbrace{u \dots u}_{p+1-i} \underbrace{v \dots v}_i \mid i = 1, \dots, p \},$$

$$\langle u, w \rangle = \{ \underbrace{u \dots u}_{p+1-i} \underbrace{w \dots w}_i \mid i = 1, \dots, p \},$$

$$\langle u, v, w \rangle = [\langle u, v \rangle \underbrace{u \dots u}_{p-1} \langle u, w \rangle];$$

пусть также $v \neq u, w \notin \langle u, v \rangle$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\langle \langle u, v \rangle, [] \rangle \circ_u \langle \langle u, w \rangle, [] \rangle$ – полуциклические $(p+1)$ -арные подгруппы в $\langle \mathbf{E}(A), [] \rangle$ порядка p ;

2) $\langle\langle u, v, w \rangle, [] \rangle - (p + 1)$ -арная подгруппа в $\mathbf{E}(A, [])$ порядка p^2 , порождаемая множеством $\{u, v, w\}$;

3) $\langle u, v \rangle \subset \langle u, v, w \rangle$.

Если в следствии 4.1 положить $p = 2$, то

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \{u, v\}, \langle u, w \rangle = \{u, w\}, \\ \langle u, v, w \rangle &= [\langle u, v \rangle \langle u, w \rangle] = \\ &= [\{u, v\} \{u, w\}] = \\ &= \{[uuv], [uvw], [vuw], [vuw]\} = \\ &= \{u, w, v, [vuw]\}. \end{aligned}$$

Так как условие $v \neq u, w \notin \langle u, v \rangle$ равносильно условию $v \neq u, w \neq u, w \neq v$ и, кроме того, по следствию 4.1 $\langle u, v, w \rangle -$ четырёхэлементное множество, то предложение 3.2 вытекает из следствия 4.1.

Следствие 4.2. Если $a, b, c, d -$ различные единицы тернарной группы $\langle A, [] \rangle$, причём, $d \neq [abc]$, то

$\langle \{a, b, c, d, [abc], [abd], [acd], [bcd]\}, [] \rangle -$ тернарная подгруппа восьмого порядка в $\mathbf{E}(A, [])$.

Доказательство. Положим в теореме 3.5 $k = 3, p = 2$,

$$u = a, v_1 = b, v_2 = c, v_3 = d \neq [abc].$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle u, v_1 \rangle &= \{a, b\}, \langle u, v_2 \rangle = \\ &= \{a, c\}, \langle u, v_3 \rangle = \{a, d\}, \\ \langle u, v_1, v_2 \rangle &= [\langle a, b \rangle \langle a, c \rangle] = \{a, b, c, [abc]\}. \end{aligned}$$

Согласно утверждению 2) теоремы 3.5, $\langle\langle u, v_1, v_2, v_3 \rangle, [] \rangle -$ тернарная подгруппа в $\mathbf{E}(A, [])$ порядка $2^3 = 8$, где

$$\begin{aligned} \langle u, v_1, v_2, v_3 \rangle &= [\langle u, v_1, v_2 \rangle \langle u, v_3 \rangle] = \\ &= [\{a, b, c, [abc]\} \{a, d\}] = \\ &= \{a, b, c, d, [abc], [abd], [acd], [bcd]\}. \end{aligned}$$

Следствие доказано.

Следствие 4.3. Если конечная тернарная группа имеет более четырёх единиц, то порядка её тернарной подгруппы единиц, её центра и её самой делятся на 8.

Следствие 4.4. Если u, v и $w -$ такие единицы 4-арной группы $\langle A, [] \rangle$, что

$$v \neq u, w \neq u, w \neq v, w \neq [uuvv],$$

то

$$\langle \{u, v, w, [uuvv], [uuvw], [vuvw], [uvvw], [uvvw], [] \rangle$$

$-$ 4-арная подгруппа девятого порядка в $\mathbf{E}(A, [])$.

Доказательство. Положим в следствии 4.1 $p = 3$. Тогда

$$\langle u, v \rangle = \{u, v, [uuvv]\}, \langle u, w \rangle = \{u, w, [uuvw]\}.$$

Согласно утверждению 2) следствия 4.1, $\langle\langle u, v, w \rangle, [] \rangle -$ 4-арная подгруппа в $\mathbf{E}(A, [])$ порядка $3^2 = 9$, где

$$\begin{aligned} \langle u, v, w \rangle &= [\langle u, v \rangle \langle u, w \rangle] = \\ &= [\{u, v, [uuvv]\} \{u, w, [uuvw]\}] = \\ &= \{[uuuu], [uuvw], [uuu[uuvw]], \\ & \quad [vuuu], [vuvw], [vu[uuvw]], \\ & \quad [uuvv]uuu, [[uuvv]uuvw], [[uuvv]uu[uuvw]]\} = \\ &= \{u, w, [uuvw], v, [uuvw], [uvvw], \\ & \quad [uuvv], [uvvw], [vuvw]\}. \end{aligned}$$

Следствие доказано.

Следствие 4.5. Если конечная 4-арная группа имеет более трёх единиц, то порядка её 4-арной подгруппы единиц, её центра и её самой делятся на 9.

Следствия 3.1, 3.2, 4.3 и 4.5 вытекают из следующего более общего утверждения.

Предложение 4.1. Если $k \geq 1, p -$ простое, конечная $(p + 1)$ -арная группа $\langle A, [] \rangle$ имеет более p^{k-1} единиц, то порядка её $(p + 1)$ -арной подгруппы единиц, её центра и её самой делятся на p^k .

Доказательство. Зафиксируем две различные единицы u, v_1 из $\mathbf{E}(A)$. По теореме 3.5 множество $\langle u, v_1 \rangle$ содержит p различных единиц. Выберем в $\mathbf{E}(A)$ единицу $v_2 \notin \langle u, v_1 \rangle$ и применим теорему 3.5 при $k = j = 2$. Согласно утверждению 2) этой теоремы, множество $\langle u, v_1, v_2 \rangle$ содержит p^2 различных единиц. Продолжая, получим $k - 1$ единиц v_1, \dots, v_{k-1} из $\mathbf{E}(A)$ таких, что множество $\langle u, v_1, \dots, v_{k-1} \rangle$ содержит p^{k-1} различных единиц. Если теперь выбрать в $\mathbf{E}(A)$ единицу $v_k \notin \langle u, v_1, \dots, v_{k-1} \rangle$ и применить теорему 3.5 при $j = k$, то согласно утверждению 2) этой теоремы, множество $\langle u, v_1, \dots, v_k \rangle$ содержит p^k различных единиц из $\mathbf{E}(A)$. Осталось применить теоремы 3.1 и 1.3. Предложение доказано.

Сформулируем следствия из предложения 4.1 для $k = 1$ и $k = 2$.

Следствие 4.6. Если конечная $(p + 1)$ -арная группа, где $p -$ простое, имеет более одной единицы, то порядка её $(p + 1)$ -арной подгруппы единиц, её центра и её самой делятся на p .

Следствие 4.7. Если конечная $(p + 1)$ -арная группа, где $p -$ простое, имеет более p единиц, то порядка её $(p + 1)$ -арной подгруппы единиц, её центра и её самой делятся на p^2 .

Следствие 3.1 получается из следствия 4.6 при $p = 2$. Заметим, что само следствие 4.6 вытекает не только из предложения 4.1, но и из следствия 3.4 при $\alpha = 1$. Следствия 3.2 и 4.5 получаются из следствия 4.7 при $p = 2$ и $p = 3$ соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
2. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
3. Русаков, С.А. Алгебраические n -арные системы / С.А. Русаков. – Мн. : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
4. Тютин, В.И. К аксиоматике n -арных групп / В.И. Тютин // Докл. АН БССР. – 1985. – Т. 29, № 8. – С. 691–693.
5. Гальмак, А.М. n -Арные группы. Часть 2 / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2007. – 324 с.

6. Гальмак, А.М. Тернарные группы отражений / А.М. Гальмак, Г.Н. Воробьев. – Минск : Беларуская навука, 1998. – 128 с.
7. Глускин, Л.М. Позиционные оперативы / Л.М. Глускин // Мат.сборник. – 1965. – Т. 68 (110), № 3. – С. 444–472.
8. Hosszu, M. On the explicit form of n -group operations / M. Hosszu // Publ. Math. – 1963. – Vol. 10, № 1–4. – P. 88–92.
9. Гальмак, А.М. Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
10. Гальмак, А.М. Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
11. Гальмак, А.М. Транспонированные вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 52–56.
12. Гальмак, А.М. Вектор-определители и определители вектор-матриц / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 2 (7). – С. 58–64.
13. Слипенко, А.К. Абстрактная характеристика матричных оперативов / А.К. Слипенко // Укр. мат. журнал. – 1974. – Т. 26, № 1. – С. 112–114.
14. Слипенко, А.К. Про матричні оперативи / А.К. Слипенко // Доповіді АН УРСР. – 1975. – А, № 3. – С. 207–208.
15. Гальмак, А.М. Многоместные операции на множествах функций / А.М. Гальмак, Ю.И. Кулаженко. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2013. – 192 с.
16. Гальмак, А.М. n -Арная подгруппа единиц / А.М. Гальмак // Препринт ГГУ им. Ф. Скорины. – 1998. – № 77. – 23 с.
17. Курош, А.Г. Общая алгебра : Лекции 1969/70 учебного года / А.Г. Курош. – М. : Наука, 1974. – 160 с.
18. Гальмак, А.М. n -Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.

Поступила в редакцию 15.10.13.

УДК 512.542

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНЕЧНЫХ РАСЩЕПЛЯЕМЫХ ГРУПП

С.Ф. Каморников

Международный университет «МИТСО», Гомельский филиал, Гомель, Беларусь

ON ONE CLASS OF FINITE SPLITTABLE GROUPS

S.F. Kamornikov

Gomel Branch of International University «MITSO», Gomel, Belarus

Для локальной формации \mathfrak{F} развивается теорема Л.А. Шеметкова о дополняемости \mathfrak{F} -корадикала конечной разрешимой группы.

Ключевые слова: конечная группа, формация, корадикал, дополняемая подгруппа, локальная формация.

The L.A. Shemetkov's theorem on the complementability of \mathfrak{F} -residual of finite soluble group is developed for a local formation \mathfrak{F} .

Keywords: finite group, formation, residual, complement, local formation.

Введение

Понятие \mathfrak{F} -корадикала группы является одним из центральных в теории формаций конечных групп. Интерес к нему обусловлен следующими двумя обстоятельствами.

1. Понятие \mathfrak{F} -корадикала лежит в основе определения целого ряда ключевых объектов теории групп. В частности, оно является базой понятия \mathfrak{F} -субнормальной подгруппы и, следовательно, формирует направления, связанные с изучением ряда специальных классов формаций (формаций с условием Виландта, гиперрадикальных и сверхрадикальных формаций [1]–[3]).

2. Понятие \mathfrak{F} -корадикала, характеризующее степень вхождения группы в формацию \mathfrak{F} , инициировало исследование целого ряда важных проблем теории формаций, одна из которых связана с существованием в группе дополнений к \mathfrak{F} -корадикалу.

Начало исследованию проблемы дополняемости \mathfrak{F} -корадикала (\mathfrak{F} – насыщенная формация) положила следующая теорема, принадлежащая Хигмену, Картеру, Хоуксу и Шульцу.

Теорема 0.1 [4]–[6]. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация и G – конечная группа, \mathfrak{F} -корадикал которой является абелевым. Тогда \mathfrak{F} -корадикал группы G дополняем в G и любые два дополнения к \mathfrak{F} -корадикалу сопряжены. Кроме того, каждое дополнение \mathfrak{F} -корадикала одновременно является \mathfrak{F} -нормализатором и \mathfrak{F} -проектором группы G .

Замечательное развитие теорема 0.1 получила в работах Л.А. Шеметкова.

Теорема 0.2 [7]–[8]. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация и G – конечная группа, в которой все силовские подгруппы \mathfrak{F} -корадикала являются абелевыми. Тогда \mathfrak{F} -корадикал группы G дополняем в G .

Как отмечено в [9], условие абелевости силовских подгрупп из \mathfrak{F} -корадикала группы в теореме 0.2 без введения дополнительных ограничений на группу G ослабить нельзя. В данной работе такое ограничение связано с рассмотрением разрешимой группы G , а прогресс в развитии теоремы 0.2 достигается за счет прямой редукции к теореме 0.1.

Основная цель данной работы – доказательство следующей теоремы 0.3, ослабляющей главное условие теоремы 0.2 до условия абелевости силовских подгрупп специальных факторов \mathfrak{F} -корадикала. Отметим, что центральная идея работы частично перекликается с подходами, нашедшими отражение в работе Картера [10].

Теорема 0.3. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация, G – конечная разрешимая группа. Если $t(G) = t$ – длина \mathfrak{F} -ряда группы G и для любого $i = 1, 2, \dots, t$ факторгруппа $G^{\mathfrak{N}^{i-1}\mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{N}^i\mathfrak{F}}$ является абелевой, то найдутся такие подгруппы H_0, H_1, \dots, H_m , что группа G представима в виде $G = H_m H_{m-1} \dots H_1 H_0$, причем для любых $k, l \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ таких, что $k > l$, справедливы утверждения:

$$1) H_k H_{k-1} \dots H_{l+1} = (H_k H_{k-1} \dots H_1 H_0)^{\mathfrak{N}^l \mathfrak{F}};$$

2) $H_l H_{l-1} \dots H_1 H_0$ – $\mathfrak{N}^l \mathfrak{F}$ -нормализатор подгруппы $H_k H_{k-1} \dots H_1 H_0$;

- 3) $H_k H_{k-1} \dots H_{l+1} \cap H_l H_{l-1} \dots H_1 H_0 = 1$;
- 4) $H_l \subseteq N_G(H_k)$;
- 5) H_k – неединичная абелева группа для всех $k > 0$;
- 6) $H_k \cap H_l = 1$;
- 7) $H_m H_{m-1} \dots H_{l+1} = G^{\mathcal{N}^l \mathcal{F}}$;
- 8) $H_l H_{l-1} \dots H_1 H_0$ – $\mathcal{N}^l \mathcal{F}$ -нормализатор группы G ;
- 9) $G^{\mathcal{N}^l \mathcal{F}} \cap H_l H_{l-1} \dots H_1 H_0 = 1$.

Из теоремы 0.3, в частности, следует, что в разрешимой группе с абелевыми силовскими подгруппами из \mathcal{F} -корадикала на самом деле имеет место не просто дополняемость \mathcal{F} -корадикала, а определенная «тотальная» расщепляемость.

1 Основные определения и предварительные результаты

В данной работе под группой всегда понимается конечная разрешимая группа. Используются определения и обозначения, принятые в [11]–[12].

Напомним, что *формація* – это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формація \mathcal{F} называется *насыщенной*, если из включения $G/\Phi(G) \in \mathcal{F}$ всегда следует $G \in \mathcal{F}$.

Если \mathcal{F} – непустая формація, то через $G^{\mathcal{F}}$ обозначается пересечение всех тех нормальных подгрупп N группы G , для которых $G/N \in \mathcal{F}$ (подгруппа $G^{\mathcal{F}}$ называется *\mathcal{F} -корадикалом* группы G).

Пусть \mathcal{F} – непустой класс групп. Подгруппа H группы G называется *\mathcal{F} -проектором*, если выполняются следующие условия:

- 1) $H \in \mathcal{F}$;
- 2) из $H \subseteq U \subseteq G$ и $U/U_0 \in \mathcal{F}$ всегда следует $HU_0 = U$.

Пусть \mathbf{P} – множество всех простых чисел. Тогда функция

$$f: \mathbf{P} \rightarrow \{\text{формації конечных групп}\}$$

называется *формаціонной функцией*.

Для формаціонной функции f главный фактор A/B группы G называется *f -центральным* (*f -эксцентральным*), если

$$G/C_G(A/B) \cong \text{Aut}(A/B) \in f(p)$$

для всех простых $p \in \pi(A/B)$ (соответственно $G/C_G(A/B)$ не принадлежит $f(p)$ хотя бы для одного простого числа $p \in \pi(A/B)$). Класс групп $\mathcal{F} = LF(f)$ называется *локальной формаціей*, если он состоит из всех групп G таких, что либо $G = 1$, либо $G \neq 1$ и любой главный фактор

A/B группы G является f -центральным. При этом говорят, что локальная формація \mathcal{F} *определяется с помощью формаціонной функции f* , а f – *локальное определение* формації \mathcal{F} .

Пусть \mathcal{E}_p – класс всех p -групп, f – формаціонная функция и $\mathcal{F} = LF(f)$. Тогда f называется:

- (а) *внутренней*, если $f(p) \subseteq \mathcal{F}$ для всех $p \in \mathbf{P}$;
- (в) *полной*, если $f(p) = \mathcal{E}_p f(p)$ для всех $p \in \mathbf{P}$;
- (с) *канонической*, если она является полной и внутренней.

Как показано в ([11], теорема IV.3.7), для любой локальной формації \mathcal{F} существует единственная каноническая формаціонная функция f такая, что $\mathcal{F} = LF(f)$. Эта функция называется *каноническим локальным определением* формації \mathcal{F} .

Следуя определению 5.5 из [12], главный фактор H/K будем называть *\mathcal{F} -центральным* (*\mathcal{F} -эксцентральным*), если H/K f -централен (соответственно f -эксцентрален) для некоторого внутреннего локального определения f формації \mathcal{F} .

Отметим, что на основании теоремы Гашюца – Любезедер – Шмида ([11], теорема IV.4.6) формація \mathcal{F} является насыщенной тогда и только тогда, когда она локальна. Отсюда, в частности, следует, что для любой насыщенной формації \mathcal{F} существует каноническое локальное определение f такое, что $\mathcal{F} = LF(f)$.

Дадим теперь определение \mathcal{F} -нормализатора произвольной конечной группы для случая, когда \mathcal{F} – насыщенная формація.

Нормальная подгруппа R группы G называется *\mathcal{F} -предельной нормальной подгруппой*, если $R/R \cap \Phi(G)$ является \mathcal{F} -эксцентральным главным фактором группы G . Максимальная подгруппа M группы G называется *\mathcal{F} -критической* в G , если в G найдется такая \mathcal{F} -предельная нормальная подгруппа R , что $MR = G$. Подгруппа H называется *\mathcal{F} -нормализатором* группы G , если $H \in \mathcal{F}$ и существует максимальная цепь

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G \quad (n \geq 0),$$

в которой подгруппа H_{i-1} \mathcal{F} -критична в H_i для всех $i = 1, 2, \dots, n$. По определению, каждая группа G обладает по крайней мере одним \mathcal{F} -нормализатором.

Пусть $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G . Система Σ холловых подгрупп разрешимой группы G называется *холловой системой* группы G , если выполняются следующие два условия:

- 1) для любого подмножества π множества $\pi(G)$ система Σ содержит в точности одну холлову π -подгруппу группы G ;
- 2) если H и K – подгруппы из Σ , то $HK = KH$.

В случае разрешимой группы G для любого \mathfrak{F} -нормализатора H (\mathfrak{F} – насыщенная формация) найдется такая холлова система Σ (см., например, [11]), что

$$H = G_{\pi(\mathfrak{F})} \cap \left(\bigcap_{p \in \pi(\mathfrak{F})} N_G(G_{p'} \cap G^{f(p)}) \right),$$

где $\pi(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} \pi(G)$, f – каноническое локальное определение формации \mathfrak{F} и $G_{p'} \in \Sigma$ для всех $p \in \pi(\mathfrak{F})$. В частности, если \mathfrak{F} – формация всех нильпотентных групп, то \mathfrak{F} -нормализатор группы G – это ее некоторый системный нормализатор.

Понятие \mathfrak{F} -корадикала лежит в основе определения произведения формаций. Пусть \mathfrak{F}_1 и \mathfrak{F}_2 – непустые формации. Тогда класс $\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2$ всех тех групп G , для которых $G^{\mathfrak{F}_2} \in \mathfrak{F}_1$, называется *произведением* формаций \mathfrak{F}_1 и \mathfrak{F}_2 . Произведение нескольких формаций $\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \dots \mathfrak{F}_n$ и n -ая степень \mathfrak{F}^n формации \mathfrak{F} определяются как результат последовательного умножения (при этом полагается, что \mathfrak{F}^0 – единичная формация).

Центральное место в работе занимает понятие \mathfrak{F} -ряда.

Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация. Обозначим через $m(G)$ наименьшее целое число m , для которого $G \in \mathfrak{N}^m \mathfrak{F}$, где \mathfrak{N} – формация всех нильпотентных групп. При этом полагаем, что $m(G) = 0$ тогда и только тогда, когда $G \in \mathfrak{F}$. Из разрешимости группы G следует, что $m(G)$ совпадает с нильпотентной длиной \mathfrak{F} -корадикала $G^{\mathfrak{F}}$ группы G .

Следуя [11], ряд подгрупп

$$f: G = G_m \supset G_{m-1} \supset \dots \supset G_1 \supset G_0 \cong 1$$

будем называть \mathfrak{F} -рядом, если G_i – $\mathfrak{N}^i \mathfrak{F}$ -проектор группы G_{i+1} для любого $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$. Число $m(G)$ называется *длиной* \mathfrak{F} -ряда группы G .

Замечание 1.1. Так как $G \notin \mathfrak{N}^{m-1} \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{N}^{m-1} \mathfrak{F}$ -проектор группы G – собственная подгруппа группы G . А так как подгруппа G_{m-1} покрывает факторгруппу $G/G^{\mathfrak{N}^{m-1} \mathfrak{F}}$, то отсюда

следует, что $G_{m-1} \in \mathfrak{N}^{m-1} \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{N}^{m-2} \mathfrak{F}$. Далее индукцией по длине ряда f легко устанавливается, что G_{i-1} – собственная подгруппа группы G_i для всех $i = 1, 2, \dots, m$ (подгруппа G_0 может быть единичной).

Замечание 1.2. Ввиду теоремы V.4.3 из [11] подгруппа G_i является $\mathfrak{N}^i \mathfrak{F}$ -нормализатором группы G для всех $i = 0, 1, 2, \dots, m$. В частности, G_0 – \mathfrak{F} -нормализатор группы G .

2 Доказательство теоремы 0.3

Рассмотрим \mathfrak{F} -ряд

$$f: G = G_m \supset G_{m-1} \supset \dots \supset G_1 \supset G_0 \cong 1$$

группы G . Обозначим $H_i = G_i^{\mathfrak{N}^{i-1} \mathfrak{F}}$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, а также положим $H_0 = G_0$. Отсюда, в частности, следует, что $H_m = G_m^{\mathfrak{N}^{m-1} \mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{N}^{m-1} \mathfrak{F}}$.

Будем вести индукцию по величине $m(G)$. Ясно, что при $m(G) = 0$ теорема выполняется. Значит, $m(G) > 0$. Предположим, что теорема верна для всех тех групп, длина \mathfrak{F} -ряда которых меньше m .

Так как ввиду условия теоремы 0.3 $\mathfrak{N}^{m-1} \mathfrak{F}$ -корадикал группы G является абелевым, то на основании теоремы 0.1 подгруппа G_{m-1} является дополнением в G подгруппы $H_m = G^{\mathfrak{N}^{m-1} \mathfrak{F}}$, т. е. $G = H_m G_{m-1}$ и $H_m \cap G_{m-1} = 1$.

Пусть $k < m$. Тогда, очевидно, $H_m \subseteq G^{\mathfrak{N}^k \mathfrak{F}}$ и

$$\begin{aligned} G / G^{\mathfrak{N}^k \mathfrak{F}} &= G_{m-1} H_m / G^{\mathfrak{N}^k \mathfrak{F}} \cong \\ &\cong G_{m-1} / G_{m-1} \cap G^{\mathfrak{N}^k \mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}^k \mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Следовательно, $G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k \mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{N}^k \mathfrak{F}}$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} G / G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k \mathfrak{F}} H_m &= G_{m-1} H_m / G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k \mathfrak{F}} H_m \cong \\ &\cong G_{m-1} / G_{m-1} \cap G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k \mathfrak{F}} H_m = \\ &= G_{m-1} / G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k \mathfrak{F}} (G_{m-1} \cap H_m) = G_{m-1} / G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k \mathfrak{F}}. \end{aligned}$$

Поэтому $G^{\mathfrak{N}^k \mathfrak{F}} \subseteq G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k \mathfrak{F}} H_m$. На основании тождества Дедекинда из равенства $H_m \cap G_{m-1} = 1$ имеем

$$\begin{aligned} G^{\mathfrak{N}^k \mathfrak{F}} \cap G_{m-1} &\subseteq G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k \mathfrak{F}} H_m \cap G_{m-1} = \\ &= G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k \mathfrak{F}} (H_m \cap G_{m-1}) = G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k \mathfrak{F}}. \end{aligned}$$

Следовательно, $G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k \mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{N}^k \mathfrak{F}} \cap G_{m-1}$ и

$$G^{\mathfrak{N}^k \mathfrak{F}} = H_m (G^{\mathfrak{N}^k \mathfrak{F}} \cap G_{m-1}) = H_m G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k \mathfrak{F}}$$

для всех $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$.

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} G^{\mathfrak{N}^{k-1} \mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{N}^k \mathfrak{F}} &= G_{m-1}^{\mathfrak{N}^{k-1} \mathfrak{F}} H_m / G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k \mathfrak{F}} H_m \cong \\ &\cong G_{m-1}^{\mathfrak{N}^{k-1} \mathfrak{F}} / G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k \mathfrak{F}} \cap G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k \mathfrak{F}} H_m = \\ &= G_{m-1}^{\mathfrak{N}^{k-1} \mathfrak{F}} / G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k \mathfrak{F}} (G_{m-1}^{\mathfrak{N}^{k-1} \mathfrak{F}} \cap H_m) = G_{m-1}^{\mathfrak{N}^{k-1} \mathfrak{F}} / G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k \mathfrak{F}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для любого $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ факторгруппа $G_{m-1}^{\mathfrak{N}^{k-1}\mathfrak{F}} / G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}}$ является абелевой, т. е. все условия теоремы 0.3 для группы G_{m-1} выполняются.

Так как $m(G_{m-1}) = m-1 < m$, то ввиду предположения индукции для группы G_{m-1} теорема 0.3 верна. Кроме того, по определению

$$G_{m-1} \supset G_{m-2} \supset \dots \supset G_1 \supset G_0 \supseteq 1$$

– \mathfrak{F} -ряд группы G_{m-1} . Поэтому группа G_{m-1} представима в виде $G_{m-1} = H_{m-1} \dots H_1 H_0$, причем для любых $k, l \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ таких, что $k > l$, справедливы утверждения:

- 1) $H_k H_{k-1} \dots H_{l+1} = (H_k H_{k-1} \dots H_1 H_0)^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}}$;
- 2) $H_l H_{l-1} \dots H_1 H_0$ – $\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}$ -нормализатор подгруппы $H_k H_{k-1} \dots H_1 H_0$;
- 3) $H_k H_{k-1} \dots H_{l+1} \cap H_l H_{l-1} \dots H_1 H_0 = 1$;
- 4) $H_l \subseteq N_{G_{m-1}}(H_k)$;
- 5) H_k – неединичная абелева группа для всех $k > 0$;
- 6) $H_k \cap H_l = 1$.

На основании определения подгруппы H_i ($i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$) справедливо равенство

$$H_k H_{k-1} \dots H_1 H_0 = G_k$$

и, в частности, равенство $G_{m-1} = H_{m-1} \dots H_1 H_0$.

Как показано выше, $G^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}} = H_m G_{m-1}^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}}$. Кроме того, подгруппа $H_m = G^{\mathfrak{N}^{m-1}\mathfrak{F}}$ нормальна в группе G . Поэтому справедливо равенство

$$G^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}} = H_m (H_{m-1} \dots H_{l+1}) = H_m H_{m-1} \dots H_{l+1},$$

т. е. $H_m H_{m-1} \dots H_{l+1} = G^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}} = (H_m H_{m-1} \dots H_1 H_0)^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}}$.

Тот факт, что подгруппа $H_l H_{l-1} \dots H_1 H_0$ является $\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}$ -нормализатором группы G , следует из равенства $H_l H_{l-1} \dots H_1 H_0 = G_l$ и замечания 1.2.

Сравнивая порядки групп G и $H_m G_{m-1}^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}} G_l$, из равенств $H_m \cap G_{m-1} = 1$, $G_{m-1}^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}} \cap G_l = 1$ и $G = H_m (G_{m-1}^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}} G_l) = (H_m G_{m-1}^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}}) G_l$ получаем, что

$$H_m H_{m-1} \dots H_{l+1} \cap H_l H_{l-1} \dots H_1 H_0 = G^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}} \cap G_l = 1.$$

Тот факт, что H_k – неединичная абелева группа для всех $k = 1, 2, \dots, m$, следует из условия теоремы, ее справедливости для группы G_{m-1} и изоморфизма

$$\begin{aligned} & G^{\mathfrak{N}^{k-1}\mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}} = \\ & = (H_m H_{m-1} \dots H_1 H_0)^{\mathfrak{N}^{k-1}\mathfrak{F}} / (H_m H_{m-1} \dots H_1 H_0)^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}} = \\ & = H_m H_{m-1} \dots H_k / H_m H_{m-1} \dots H_{k+1} \cong \\ & \cong H_k / H_k \cap H_m H_{m-1} \dots H_{k+1} \cong H_k. \end{aligned}$$

Равенство $H_k \cap H_l = 1$ для всех $l < m$ следует из справедливости теоремы для группы G_{m-1} и равенства $H_m \cap G_{m-1} = 1$.

Теорема доказана.

3 Некоторые следствия

Теорема 0.3 включает в себя многие известные результаты о дополняемости \mathfrak{F} -корадикала разрешимой группы (в частности, если $m(G) = 1$, то она включает отмеченную выше теорему Хигмена, Картера, Хоукса и Шульца из [4]–[6]).

Следствие 3.1. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация, G – разрешимая группа. Пусть $m(G) = m$ и для любого $i = 1, 2, \dots, m$ факторгруппа $G^{\mathfrak{N}^{i-1}\mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{N}^i\mathfrak{F}}$ абелева. Если

$$G = G_m \supset G_{m-1} \supset \dots \supset G_1 \supset G_0 \supseteq 1$$

– \mathfrak{F} -ряд группы G , то для любого $k = 0, 1, 2, \dots, m$ подгруппа G_k является дополнением $\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}$ -корадикала группы G .

В случае разрешимой группы условие абелевости силовских подгрупп \mathfrak{F} -корадикала группы приводит к ее «тотальной» расцепляемости.

Следствие 3.2. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация, G – разрешимая группа, у которой все силовские подгруппы из $G^{\mathfrak{F}}$ абелевы. Если $G = G_m \supset G_{m-1} \supset \dots \supset G_1 \supset G_0 \supseteq 1$ – \mathfrak{F} -ряд группы G , то найдутся такие подгруппы H_0, H_1, \dots, H_m , что группа G представима в виде $G = H_m H_{m-1} \dots H_1 H_0$, причем для любых $k, l \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$ таких, что $k > l$, справедливы утверждения:

- 1) $H_k H_{k-1} \dots H_{l+1} = (H_k H_{k-1} \dots H_1 H_0)^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}}$;
- 2) $H_l H_{l-1} \dots H_1 H_0$ – $\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}$ -нормализатор подгруппы $H_k H_{k-1} \dots H_1 H_0$;
- 3) $H_k H_{k-1} \dots H_{l+1} \cap H_l H_{l-1} \dots H_1 H_0 = 1$;
- 4) $H_l \subseteq N_G(H_k)$;
- 5) H_k – неединичная абелева группа для всех $k > 0$;
- 6) $H_k \cap H_l = 1$;
- 7) $H_m H_{m-1} \dots H_{l+1} = G^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}}$;
- 8) $H_l H_{l-1} \dots H_1 H_0$ – $\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}$ -нормализатор группы G ;
- 9) $G^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}} \cap H_l H_{l-1} \dots H_1 H_0 = 1$.

В случае разрешимой группы при $l = 0$ и $k = m$ следствие 3.2 включает выводы приведенной выше теоремы 2 Л.А. Шеметкова из [7]–[8]. При этом уточняется, что дополнение H_0 к \mathfrak{F} -корадикалу группы G является \mathfrak{F} -нормализатором группы G .

Следствие 3.3. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация, G – разрешимая группа, у которой все силовские подгруппы из $G^{\mathfrak{F}}$ абелевы. Если

$$G = G_m \supset G_{m-1} \supset \dots \supset G_1 \supset G_0 \supseteq 1$$

– \mathfrak{F} -ряд группы G , то для любого $k = 0, 1, 2, \dots, m$ подгруппа G_k является дополнением $\mathfrak{N}^k \mathfrak{F}$ -корадикала группы G .

Отметим также следующий результат Картера, который выводится из теоремы 0.3.

Следствие 3.4 [10]. Если G – разрешимая группа и подгруппа $G^{\mathfrak{N}^n}$ является абелевой для некоторого $n \geq 1$, то нормализатор в G силовской системы подгруппы $G^{\mathfrak{N}^{n-1}}$ является дополнением к $G^{\mathfrak{N}^n}$ в G .

Замечание. Можно показать, что в условии теоремы 0.3 требование разрешимости группы G может быть ослаблено до условия разрешимости ее \mathfrak{F} -корадикала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск: Беларуская навука, 2003. – 256 с.
2. Каморников, С.Ф. Критические группы наследственной локальной сверхрадикальной формации / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и физики. – 2013. – № 2 (15). – С. 66–75.

3. Каморников, С.Ф. Разрешимые гиперрадикальные формации / С.Ф. Каморников // Проблемы физики, математики и физики. – 2013. – № 4 (17). – С. 55–58.

4. Higman, G. Complementation of abelian normal subgroups / G. Higman // Publ. Math. Debrecen. – 1956. – Vol. 4. – P. 455–458.

5. Carter, R. The \mathfrak{F} -normalisers of a finite soluble group / R. Carter, T. Hawkes // J. Algebra. – 1967. – Vol. 5, № 2. – P. 175–202.

6. Shult, E. A note on splitting in solvable groups / E. Shult // Proc. Amer. Math. Soc. – 1966. – Vol. 17. – P. 318–320.

7. Шеметков, Л.А. О формационных свойствах конечных групп / Л.А. Шеметков // ДАН СССР. – 1972. – Т. 204, № 6. – С. 1324–1327.

8. Шеметков, Л.А. Ступенчатые формации групп / Л.А. Шеметков // Матем. сб. – 1974. – Т. 94, № 4. – С. 628–648.

9. Шеметков, Л.А. Два направления в развитии теории непростых конечных групп / Л.А. Шеметков // Успехи мат. наук. – 1975. – Т. 30, № 2. – С. 179–198.

10. Carter, R. Splitting properties of solvable groups / R. Carter // J. London Math. Soc. – 1961. – Vol. 36, № 1. – P. 89–94.

11. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

12. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

Поступила в редакцию 25.11.13.

УДК 512.542

О ПОЛУПОКРЫВАЮЩИХ-ИЗОЛИРУЮЩИХ ПОДГРУППАХ ИЛИ S-КВАЗИНОРМАЛЬНО ВЛОЖЕННЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Абид Махбуб¹, Лицзюнь Хуо¹, Цзинхуа Лу²¹Университет Науки и Технологии Китая, Хэфэй, Китай²Юго-западный университет Науки и Технологии, Мянъян, Китай

ON SEMI COVER-AVOIDING OR S-QUASINORMALLY EMBEDDED SUBGROUPS OF FINITE GROUPS

Abid Mahboob¹, Lijun Huo¹, Jinghua Lu²¹University of Science and Technology of China, Hefei, China²Southwest University of Science and Technology, Mianyang, China

В данной работе мы изучаем нильпотентность и сверхразрешимость конечных групп G , некоторые примарные подгруппы которых являются либо полупокрывающими-изолирующими, либо S -квазинормально вложенными в G . Получено обобщение некоторых известных результатов.

Ключевые слова: полупокрывающая-изолирующая подгруппа; S -квазинормально вложенная подгруппа; p -нильпотентная группа; сверхразрешимая группа.

In this paper, we characterize the nilpotency and supersolvability of a finite group G by assuming some subgroups of prime power order are either semi cover-avoiding or S -quasinormally embedded in G . Some known results are generalized.

Keywords: semi cover-avoiding subgroup; S -quasinormally embedded subgroup; p -nilpotent group; supersolvable group.

Introduction

All groups considered in this paper are finite and G always denotes a finite group. The following notations are used in the paper: $O_p(G)$ is the maximal normal p -subgroup of G , $\Phi(G)$ is the Frattini subgroup of G and \mathcal{U} is the class of all supersolvable groups. A class of groups \mathcal{F} is called a formation if \mathcal{F} is closed under taking homomorphic images and subdirect products. A formation \mathcal{F} is said to be saturated if $G \in \mathcal{F}$ whenever $G/\Phi(G) \in \mathcal{F}$. All unexplained terminology and notations are standard, as in [13], [9].

If M and N are normal subgroups of G with $N < M$, then we call M/N a normal factor of G . A subgroup H of G is said to cover the normal factor M/N of G provided that $HM = HN$, and H is said to avoid M/N provided that $H \cap M = H \cap N$. If H either covers or avoids each chief factor of G , then H is said to possess the cover-avoiding property in G . This concept was introduced by Gaschütz [6] in 1962 and studied by many authors (see, for example, [7], [12], [22], [18]). In 2006, Fan, Guo and Shum [5] introduced the semi cover-avoiding property: a subgroup H is said to be semi cover-avoiding in G if there is a chief series $1 = G_0 < G_1 < \dots < G_l = G$ of G such that H either covers or avoids G_j/G_{j-1} for every $j = 1, \dots, l$. Many authors have investigated the structures of the

group G under the assumption that some subgroups of G is semi cover-avoiding in G and obtained some interesting results (see [10], [11], [25]).

Recall that a subgroup H of G is called S -quasinormal [14] in G provided that H permutes with all Sylow subgroups of G . A subgroup H of a group G is said to be S -quasinormally embedded [3] in G if for each prime p dividing the order of H , a Sylow p -subgroup of H is also a Sylow p -subgroup of some S -quasinormal subgroup of G . By using S -quasinormally embedded subgroups, some authors have obtained many interesting results (see, for example, [1], [2], [15], [17]).

The following examples show that semi cover-avoiding subgroups and S -quasinormally embedded subgroups are two independent concepts.

Example 0.1. Let $G = A_4 \times Z_2$, where A_4 is an alternating group and $Z_2 = \langle c \rangle$ is a cyclic group of order 2. Let $K_4 = \langle a, b \rangle$ be the Sylow 2-group of A_4 generated by two elements a and b of order 2 and let $H = \langle a, bc \rangle$. Then $1 \trianglelefteq Z_2 \trianglelefteq K_4 Z_2 \trianglelefteq G$ is a chief series of G . It is easy to prove that H covers $K_4 Z_2 / Z_2$ and avoids the factors $G / K_4 Z_2$ and $Z_2 / 1$, but H is not S -quasinormally embedded in G .

Example 0.2. Let $G = A_5$ be the alternative group of degree 5. Since A_5 is simple, there is no nontrivial semi cover-avoiding subgroup in A_5 .

However, if H is any Sylow subgroup of G , then clearly H is S -quasinormally embedded in G .

In this paper, we investigate the structure of a group G under the assumption that all maximal subgroups of a Sylow subgroup is either semi cover-avoiding or S -quasinormally embedded subgroups in G . Some new characterizations on the structure of finite groups are obtained and some known results are generalized.

1 Preliminaries

In this section, we list some known results which will be useful for the proofs of our main results.

Lemma 1.1 [20]. *Let H be a p -subgroup of G for some prime p . Then H is S -quasinormal in G if and only if $O^p(G) \leq N_G(H)$.*

Lemma 1.2. *If H is an S -quasinormal subgroup of G , then*

- (1) H is subnormal in G [14];
- (2) H/H_G is nilpotent [4].

Lemma 1.3 [1]. *Let H be a subgroup of G . Then the following two statements are equivalent:*

- (1) H is an S -quasinormal nilpotent subgroup of G .
- (2) The Sylow subgroups of H are S -quasinormal in G .

Lemma 1.4 [11]. *Let H be a subgroup of G . If H is semi cover-avoiding in G , then H is semi cover-avoiding in K for every subgroup K of G with $H \leq K$.*

Lemma 1.5 [5]. *Let N be a normal subgroup of G and let H be a subgroup of G which is semi cover-avoiding in G . Then HN/N is semi cover-avoiding in G/N if one of the following holds:*

- (1) $N \leq H$;
- (2) $(|N|, |H|) = 1$.

Lemma 1.6 [3]. *Suppose that U is an S -quasinormally embedded subgroup of G and K is a normal subgroup of G . Then*

- (1) U is S -quasinormally embedded in H whenever $U \leq H \leq G$.
- (2) UK is S -quasinormally embedded in G and UK/K is S -quasinormally embedded in G/K .

Lemma 1.7 [11]. *Let p be a prime dividing the order of G with $(|G|, p-1) = 1$ and P be a Sylow p -subgroup of G . If there is a maximal subgroup P_1 of P such that P_1 is semi cover-avoiding in G , then G is p -solvable.*

Lemma 1.8 [21]. *Let \mathcal{F} be a saturated formation containing all supersolvable groups and G has a normal subgroup E such that $G/E \in \mathcal{F}$. If E is cyclic, then $G \in \mathcal{F}$.*

Lemma 1.9 [24]. *Let K be an S -quasinormal subgroup of G and P a Sylow p -subgroup of K , where p is a prime. If either $P \leq O_p(G)$ or $K_G = 1$, then P is S -quasinormal in G .*

Lemma 1.10 [9]. *Let N be a nontrivial solvable normal subgroup of G . If $N \cap \Phi(G) = 1$, then the Fitting subgroup $F(N)$ of N is the direct product of minimal normal subgroups of G contained in N .*

2 Main results

Theorem 2.1. *Let p be an odd prime dividing the order of G and P a Sylow p -subgroup of G . If $N_G(P)$ is p -nilpotent and every maximal subgroup of P is either semi cover-avoiding or S -quasinormally embedded in G , then G is p -nilpotent.*

Proof. Suppose that the theorem is false, and let G be a counterexample of minimal order. Then:

- (1) $O_{p'}(G) = 1$.

Suppose that $D = O_p(G) \neq 1$. Obviously, PD/D is a Sylow p -subgroup of G/D . Let T/D be a maximal subgroup of PD/D . Then $T = P_1D$ for some maximal subgroup P_1 of P . By Lemmas 1.5 and 1.6 (2), P_1D/D is either semi cover-avoiding or S -quasinormally embedded in G/D . On the other hand, since

$$N_{G/D}(PD/D) = N_G(P)D/D$$

by [9], we see that $N_{G/D}(PD/D)$ is p -nilpotent. This shows that G/D satisfies the hypothesis of the theorem. Thus G/D is p -nilpotent. It follows that G is p -nilpotent, a contradiction.

- (2) *If M is a proper subgroup of G with $P \leq M$, then M is p -nilpotent.*

Clearly, $N_M(P)$ is p -nilpotent. By Lemmas 1.4 and 1.6 (1), we see that M satisfies the hypothesis. The minimal choice of G implies that M is p -nilpotent.

- (3) $G = PQ$ and $O_p(G) \neq 1$, where Q is a Sylow q -subgroup of G with $q \neq p$.

Since G is not p -nilpotent, by Thompson's theorem [23], there is a nonidentity characteristic subgroup H of P such that $N_G(H)$ is not p -nilpotent. Since $N_G(P)$ is p -nilpotent, we may choose a characteristic subgroup H of P such that $N_G(H)$ is not p -nilpotent, but $N_G(K)$ is p -nilpotent for every characteristic subgroup K of P with $H < K \leq P$. Since $H \text{ char } P \trianglelefteq N_G(P)$, we have $H \trianglelefteq N_G(P)$, and so $N_G(P) < N_G(H)$. Then by (2), we have $G = N_G(H)$. This shows that $H \leq O_p(G) \neq 1$ and $N_G(K)$ is p -nilpotent for any characteristic subgroup K of P with $O_p(G) < K \leq P$ (if exists). In this case, using Thompson's theorem again, we see that $G/O_p(G)$ is p -nilpotent and so G is p -solvable. Thus for any prime divisor q of $|G|$ with $q \neq p$, there exists a Sylow q -subgroup Q of G such that PQ is a subgroup of G (see [8, Chapter

6, Theorem 3.5]). If $PQ < G$, then PQ is p -nilpotent by (2). It follows from (1) that

$$Q \leq C_G(O_p(G)) = O_p(G),$$

a contradiction. Hence $G = PQ$.

(4) G has a unique minimal normal subgroup N such that $G = N \rtimes M$, where M is a maximal subgroup of G , $N = O_p(G) = C_G(N)$.

Let N be a minimal normal subgroup of G . Then by (1) and (3), N is an elementary abelian p -group, and $N \subseteq O_p(G) < P$. It is easy to see that G/N satisfies the hypothesis. Hence G/N is p -nilpotent by the choice of G . Since the class of all p -nilpotent groups is a saturated formation, N is the unique minimal normal subgroup of G and $N \not\leq \Phi(G)$. Consequently, $G = N \rtimes M$ for some maximal subgroup M of G . Clearly, $N = O_p(G)$.

(5) *Final contradiction.*

Since $P \not\triangleleft G$ and $P = NM_p$, we see that $N \not\leq \Phi(G)$. Hence there exists a maximal subgroup P_1 of P such that $N \not\leq P_1$. If $P_1 = 1$, then P is a cyclic subgroup of order p . It follows that $N_G(P) = C_G(P)$ since $N_G(P)$ is p -nilpotent. Hence G is p -nilpotent by Burnside Theorem, a contradiction. Hence we assume that $P_1 \neq 1$.

Assume that P_1 is semi cover-avoiding in G . Then there is a chief factor series

$$1 = G_0 < G_1 < \dots < G_l = G$$

such that for every $j = 1, \dots, l$, P_1 either covers or avoids G_j / G_{j-1} . In particular, P_1 covers or avoids $G_1 / 1$, which means that $G_1 P_1 = P_1$ or $G_1 \cap P_1 = 1$. By (3), $G_1 = N$. If $N P_1 = P_1$, then $N \leq P_1$, a contradiction. Hence $N \cap P_1 = 1$ and so $|N| = p$. It follows that $P = N(P \cap M) = N \times (P \cap M)$, which contradicts (4).

Now assume that G has an S -quasinormal subgroup K such that P_1 is a Sylow p -subgroup of K . If $K_G \neq 1$, then $N \leq K_G \leq K$, and thereby $N \leq P_1$, a contradiction. Therefore $K_G = 1$. Then by Lemmas 1.2 (2) and 1.3, P_1 is S -quasinormal in G . Thus P_1 is subnormal in G by Lemma 1.2(1). By [9], we have that $P_1 \leq O_p(G) = N \leq P$. Since P_1 is a maximal subgroup of P , $P_1 = N$, a contradiction also. The final contradiction completes the proof of the theorem.

Corollary 2.2. *Let H be a normal subgroup of G such that G/H is p -nilpotent, where p is a prime dividing the order of G . If there exists a Sylow p -subgroup P of H such that $N_G(P)$ is either semi cover-avoiding or S -quasinormally embedded in G , then G is p -nilpotent.*

Proof. By Lemmas 1.4 and 1.6 (1) and Theorem 2.1, H is p -nilpotent. Let $H_{p'}$ be a normal Hall p' -subgroup of H . Assume that $H_{p'} \neq 1$. Then clearly, $(G/H_{p'})/(H/H_{p'}) \cong G/H$ is p -nilpotent. Applying Lemmas 1.5 and 1.6 (2) and [9], we see that $G/H_{p'}$ satisfies the hypothesis. Hence by induction on $|G|$, $G/H_{p'}$ is p -nilpotent. It follows that G is p -nilpotent. We may, therefore, assume $H_{p'} = 1$. Then $H = P$ is a p -group. In this case, $G = N_G(P)$ is p -nilpotent.

Theorem 2.3. *Let p be the smallest prime dividing $|G|$ and P be a Sylow p -subgroup of G . If every maximal subgroup of P is either semi cover-avoiding or S -quasinormally embedded in G , then G is p -nilpotent.*

Proof. Suppose that the theorem is false and let G be a counterexample of minimal order. We prove it via the following steps.

$$(1) O_{p'}(G) = 1.$$

If $O_{p'}(G) \neq 1$, then $PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ is a Sylow p -subgroup of $G/O_{p'}(G)$. Suppose that $M/O_{p'}(G)$ is a maximal subgroup of $PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$. Then there exists a maximal subgroup P_1 of P such that $M = P_1 O_{p'}(G)$. By the hypothesis, P_1 is either semi cover-avoiding or S -quasinormally embedded in G . Then $M/O_{p'}(G) = P_1 O_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ is either semi cover-avoiding or S -quasinormally embedded in $G/O_{p'}(G)$ by Lemmas 1.5 and 1.6(2). The minimal choice of G implies that $G/O_{p'}(G)$ is p -nilpotent, and so G is p -nilpotent, a contradiction. Therefore, we have $O_{p'}(G) = 1$.

$$(2) O_p(G) \neq 1.$$

If all maximal subgroups of P are S -quasinormally embedded in G , then G is p -nilpotent by [1]. Hence there exists at least a maximal subgroup P_1 of P which is semi cover-avoiding in G . By Lemma 1.7, G is p -solvable. It follows from (1) that $O_p(G) \neq 1$.

$$(3) G \text{ is solvable.}$$

If G is not solvable, then $p = 2$ by Feit-Thompson's theorem. Suppose that $M/O_2(G)$ is a maximal subgroup of $P/O_2(G)$. Then M is a maximal subgroup of P . By Lemmas 1.5 and 1.6(2), $M/O_2(G)$ is either semi cover-avoiding or S -quasinormally embedded in $G/O_2(G)$. Therefore $G/O_2(G)$ satisfies the hypothesis. The minimal choice of G implies that $G/O_2(G)$ is 2-nilpotent, and so $G/O_2(G)$ is solvable. It follows that G is solvable, a contradiction. Thus (3) holds.

(4) G has a unique minimal normal subgroup $N = O_p(G)$, $G = NM$, where M is p -nilpotent and $|N| > p$.

Let N be a minimal normal subgroup of G . By (3), N is an elementary abelian subgroup. Since $O_p(G) = 1$, $N \leq O_p(G)$. It is easy to see that G/N satisfies the hypothesis. The choice of G implies that G/N is p -nilpotent. Since the class of all p -nilpotent groups is a saturated formation, N is a unique minimal normal subgroup of G and $N \not\leq \Phi(G)$. This implies that $G = N \rtimes M$, $N = O_p(G)$ and M is p -nilpotent. If $|N| = p$, then $G/C_G(N)$ is an abelian group exponent $p-1$. It follows that $N \leq Z(G)$ and so G is p -nilpotent, a contradiction.

(5) *Final contradiction.*

Clearly, $P = N(P \cap M)$ and $P \cap M < P$. Thus, there exists a maximal subgroup P_1 of P such that P_1 containing $P \cap M$. Then $P = NP_1$ and $P_1 \neq 1$. By the hypothesis, P_1 is either semi cover-avoiding or S -quasinormally embedded in G . Suppose that P_1 is semi cover-avoiding in G . Then P_1 covers or avoids $N/1$. If $P_1N = P_1$, then $N \leq P_1$, a contradiction. Hence $P_1 \cap N = 1$. Consequently $|N| = p$, a contradiction. Now assume that P_1 is S -quasinormally embedded in G . Then there exists an S -quasinormal subgroup K such that P_1 is a Sylow p -subgroup of K . If $K_G \neq 1$, then $N \leq K_G \leq K$ by (4) and so $N \leq P_1$. This contradiction shows that $K_G = 1$. Then by Lemmas 1.2 (2) and 1.3, P_1 is S -quasinormal in G . It follows from Lemma 1.2 (1) that P_1 is subnormal in G . Now by [9], we have that $P_1 \leq O_p(G) = N$. The final contradiction completes the proof.

Corollary 2.4. *Let p be the smallest prime dividing $|G|$ and H a normal subgroup of G such that G/H is p -nilpotent. If there exists a Sylow p -subgroup P of H such that every maximal subgroup of P is either semi cover-avoiding or S -quasinormally embedded in G , then G is p -nilpotent.*

Proof. By Lemmas 1.4 and 1.6 (1), every maximal subgroup of P is either semi cover-avoiding or S -quasinormally embedded in H . Applying Theorem 2.3, H is p -nilpotent. Let $H_{p'}$ be the normal p -complement of H . Then $H_{p'}$ is normal in G . By using the same argument as in the proof of Corollary 2.2, we may assume $H_{p'} = 1$ and so $H = P$ is a p -group. Since G/H is p -nilpotent, we may let K/H be the normal p -complement of G/H . By Schur-Zassenhaus's theorem, there exists

a Hall p' -subgroup $K_{p'}$ of K such that $K = HK_{p'}$. By Theorem 2.3 again, we see that K is p -nilpotent. Hence $K = H \times K_{p'}$. In this case, $K_{p'}$ is a normal p -complement of G , thus G is p -nilpotent.

Corollary 2.5. *Suppose that every maximal subgroup of any Sylow subgroup of G is either semi cover-avoiding or S -quasinormally embedded in G . Then G is a Sylow tower group of supersolvable type.*

Corollary 2.6 [11, Theorem 3.2]. *Let p be the smallest prime dividing the order of G and let P be a Sylow p -subgroup of G . If P is cyclic or every maximal subgroup of P is semi cover-avoiding in G , then G is p -nilpotent.*

Proof. If P is a cyclic group, then by [19], G is p -nilpotent. Hence we assume that every maximal subgroup of P is semi cover-avoiding in G . By Corollary 2.3, G is p -nilpotent.

Theorem 2.7. *Let \mathcal{F} be a saturated formation containing \mathcal{U} . Then $G \in \mathcal{F}$ if and only if there is a normal subgroup H of G such that $G/H \in \mathcal{F}$ and every maximal subgroup of the Sylow subgroup of H is either semi cover-avoiding or S -quasinormally embedded in G .*

Proof. The necessity is obvious. We only need to prove the sufficiency. Assume that it is false and let G be a counterexample of minimal order. Then:

(1) *There is a normal Sylow subgroup P of G contained in H .*

By Corollary 2.5, H has a Sylow tower of supersolvable type. Let p be the largest prime divisor of $|H|$ and let P be a Sylow p -subgroup of H . Then P is normal in H . Since $P \text{ char } H \trianglelefteq G$, we have that $P \trianglelefteq G$.

(2) *Let N be a minimal normal subgroup of G contained in P . Then $G/N \in \mathcal{F}$ and $N = P$.*

It is easy to see that

$$(G/N)/(H/N) \cong G/H \in \mathcal{F}.$$

Let P_1/N be a maximal subgroup of P/N . By Lemmas 1.5 and 1.6, P_1/N is either semi cover-avoiding property or S -quasinormally embedded in G/N . Let Q be a Sylow q -subgroup of H , where $q \neq p$, and M_1/N be a maximal subgroup of the Sylow q -subgroup QN/N of H/N . It is clear that $M_1 = Q_1N$ for some maximal subgroup Q_1 of Q . By the hypothesis, Q_1 is either semi cover-avoiding or S -quasinormally embedded in G . Hence M_1/N is either semi cover-avoiding or S -quasinormally embedded in G/N by Lemmas 1.5 and 1.6. Thus G/N satisfies the hypothesis of the theorem. The choice of G implies that $G/N \in \mathcal{F}$. Since \mathcal{F} is a saturated formation, N is the unique minimal normal subgroup of G contained in P , $\Phi(P) = 1$ and $N \not\leq \Phi(G)$. It follows from Lemma 1.10 that $P = F(P) = N$.

(3) *Final contradiction.*

Suppose that every maximal subgroup of P is S -quasinormally embedded in G . Then by [1], $G \in \mathcal{F}$, a contradiction. So we may assume that there is some maximal subgroup P_1 of P such that P_1 is semi cover-avoiding in G . Then there exists a chief series of G

$$1 = G_0 < G_1 < \dots < G_t = G$$

such that P_1 covers or avoids every factor G_j / G_{j-1} , $j = 1, \dots, t$. Since $N = P$ is a minimal normal in G , there exists j such that $G_j \cap N = N$ and $G_{j-1} \cap N = 1$. If P_1 covers G_j / G_{j-1} , then $P_1 G_j = P_1 G_{j-1}$. It follows that $P_1(G_j \cap N) = P_1(G_{j-1} \cap N)$, that is, $P_1 N = P_1$, a contradiction. If P_1 avoids G_j / G_{j-1} , then $P_1 \cap G_j = P_1 \cap G_{j-1}$ and so

$$P_1 \cap G_j \cap N = P_1 \cap G_{j-1} \cap N.$$

This means that $P_1 = 1$ and so $|N| = p$. Then by (2) and Lemma 1.8, $G \in \mathcal{F}$. This contradiction completes the proof.

Corollary 2.8 [16, Theorem 3.6]. *Let \mathcal{F} be a saturated formation containing \mathcal{U} . If there is a normal Hall subgroup H of G such that $G/H \in \mathcal{F}$ and every maximal subgroup of any Sylow subgroup of H has the semi cover-avoiding property in G , then $G \in \mathcal{F}$.*

Theorem 2.9. *Let \mathcal{F} be a saturated formation containing \mathcal{U} and H be a solvable normal subgroup of G such that $G/H \in \mathcal{F}$. If every maximal subgroup of any Sylow subgroup of $F(H)$ is either semi cover-avoiding or S -quasinormally embedded in G , then $G \in \mathcal{F}$.*

Proof. Assume that the theorem is false and let (G, H) be a counterexample with $|G| + |H|$ is minimal.

Firstly, assume that $H \cap \Phi(G) \neq 1$. Let Q be a Sylow q -subgroup of H , where q is a prime divisor of $|H|$. Since $Q \text{ char } H \trianglelefteq G$, we have that $Q \trianglelefteq G$ and so $(G/Q)/(H/Q) \cong G/H \in \mathcal{F}$. By [13, Chapter 3, Theorem 3.5], $F(H/Q) = F(H)/Q$. It is easy to see that $(G/Q, H/Q)$ satisfies the hypothesis of the theorem. Hence $G/Q \in \mathcal{F}$ by minimal choice of G . Since $Q \leq \Phi(G)$ and \mathcal{F} is a saturated formation, we have that $G \in \mathcal{F}$. This contradiction shows that $H \cap \Phi(G) = 1$. By Lemma 1.10, $F(H)$ is the direct product of minimal normal subgroups of G contained in H . Let P be the Sylow p -subgroup of $F(H)$ and assume that $P = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_t$, where N_1, \dots, N_t are minimal normal subgroups of G . We now prove that $|N_i| = p$ for each $i \in \{1, \dots, t\}$. If P is cyclic, then it

is clear. Assume that P is not cyclic and there exists some N_i such that $|N_i| > p$. Without loss of generality, we may assume that $i = 1$. Clearly, there exists a maximal subgroup M of G such that $G = N_1 M$ and $N_1 \cap M = 1$. Let M_p be a Sylow p -subgroup of M . Then $G_p = N_1 M_p = P M_p$ is a Sylow p -subgroup of G . Take a maximal subgroup G_p^* of G_p containing M_p and let $P_1 = G_p^* \cap P$. Then

$$G_p^* = G_p^* \cap P M_p = (G_p^* \cap P) M_p = P_1 M_p$$

and

$$\begin{aligned} P_1 &= G_p^* \cap (N_1 \times N_2 \times \dots \times N_t) = \\ &= (G_p^* \cap N_1) N_2 \dots N_t = N_1^* N_2 \dots N_t, \end{aligned}$$

where $N_1^* = G_p^* \cap N_1$. Since

$$|N_1 : G_p^* \cap N_1| = |N_1 G_p^* : G_p^*| = |G_p : G_p^*| = p,$$

$N_1^* = G_p^* \cap N_1$ is a maximal subgroup of N_1 . This implies that $P_1 = N_1^* N_2 \dots N_t$ is a maximal subgroup of P . By the hypothesis, P_1 is semi cover-avoiding or S -quasinormal embedded in G . Let $T = N_2 \times \dots \times N_t$.

Assume that P_1 is semi cover-avoiding in G . Then by Lemma 1.5, P_1/T is semi cover-avoiding in G/T . Let

$$1 = \overline{T} \trianglelefteq G_1/T = \overline{G_1} \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G/T = \overline{G_n}$$

be the chief series of G/T such that P_1 either covers or avoids every factor of this series. Let i be the smallest index in $\{1, \dots, n\}$ such that P_1/T covers $\overline{G_{i+1}}/\overline{G_i}$. Then it is easy to see that $G_i \cap P_1 = T$ and

$$G_{i+1} \leq G_i P_1 = G_i N_1^*.$$

It follows that $G_{i+1} = G_i(N_1^* \cap G_{i+1})$, and so $N_1^* \cap G_{i+1} > 1$. But since N_1 is a minimal normal subgroup of G , we obtain that $N_1 \leq G_{i+1}$ and $N_1 \cap G_i = 1$. Therefore,

$$|N_1| = |G_{i+1}/G_i| = |N_1^* \cap G_{i+1}| = |N_1^*|.$$

This contradiction shows that P_1/T avoids every chief factor $\overline{G_{i+1}}/\overline{G_i}$, for $i = 0, 1, \dots, n$. This implies that $P_1/T = 1$ and $|N_1| = p$, a contradiction. Now we assume that there is an S -quasinormal subgroup K of G such that P_1 is a Sylow p -subgroup of K . Clearly, $P_1 \leq O_p(G)$. Hence by Lemma 1.9, P_1 is S -quasinormal in G . It follows from Lemma 1.1 that $O^p(G) \leq N_G(P_1)$. Since G_p^* and P are both normal in G_p , we have that $P_1 = G_p^* \cap P \trianglelefteq G_p$. Hence $G = G_p O^p(G) \leq N_G(P_1)$. Consequently, $P_1 \trianglelefteq G$. Since $N_1 \not\leq P_1$, we have $P_1 \cap N_1 = 1$. This induces that $|N_1| = p$, a contradiction again.

The above discussion shows that $F(H) = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$, where R_i is the minimal normal subgroup of G of prime order for all $i = 1, \dots, n$. Since $G/C_G(R_i)$ is isomorphic to some subgroup of $\text{Aut}(R_i)$, $G/C_G(R_i)$ is abelian. It follows that $G/C_G(F(G)) = G/\bigcap_{i=1}^n C_G(R_i)$ is abelian and hence $G/C_G(F(G)) \in \mathcal{F}$. Then since $G/H \in \mathcal{F}$, we see that

$$G/(H \cap C_G(F(H))) = G/C_H(F(H)) \in \mathcal{F}.$$

Since $F(H)$ is abelian, $F(H) \leq C_H(F(H))$. On the other hand, since H is solvable,

$$C_H(F(H)) \leq F(H).$$

Thus $F(H) = C_H(F(H))$ and so $G/F(H) \in \mathcal{F}$. Now by Theorem 2.7, we obtain that $G \in \mathcal{F}$, a contradiction. This completes the proof.

REFERENCES

1. *Asaad, M.* On S -quasinormally embedded subgroups of finite groups / M. Asaad, A.A. Heliel // J. Pure Appl. Algebra. – 2001. – Vol. 165. – P. 129–135.
2. *Asaad, M.* Finite groups with some subgroups of prime power order S -quasinormally embedded / M. Asaad, A.A. Heliel, M. Ezzat Mohamed // Comm. Algebra. – 2004. – Vol. 32, № 5. – P. 2019–2027.
3. *Ballester-Bolinches, A.* Sufficient conditions for supersolubility of finite group / A. Ballester-Bolinches, M.C. Pedraza-Aguilera // J. Pure Appl. Algebra. – 1998. – Vol. 127, № 2. – P. 113–118.
4. *Deskins, W.E.* On quasinormal subgroups of finite groups / W.E. Deskins // Math. Z. – 1963. – Vol. 82. – P. 125–132.
5. *Fan, Y.* Remarks on two generalizations of normality of subgroups / Y. Fan, X. Guo, K.P. Shum // Chinese Ann. Math. Ser. A. – 2006. – Vol. 27, № 2. – P. 169–176.
6. *Gaschütz, W.* Praefrattinigruppen / W. Gaschütz // Arch. Math. (Basel). – 1962. – Vol. 13. – P. 418–426.
7. *Gillam, J.D.* Cover-avoid subgroups in finite solvable groups / J.D. Gillam // J. Algebra. – 1974. – Vol. 29. – P. 324–329.
8. *Gorenstein, D.* Finite Groups / D. Gorenstein. – New York, Evanston, London: Harper & Row Publishers, 1968.
9. *Guo, W.* The Theory of Class of Groups / W. Guo. – Beijing, New York, Dordrecht, Boston. London: Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000.
10. *Guo, X.* On finite groups with some semi cover-avoiding subgroups / X. Guo, L. Wang // Acta Math Sinica. English Series. – 2007. – Vol. 23. – P. 1689–1696.
11. *Guo, X.* On semi cover-avoiding subgroups of finite group / X. Guo, P. Guo, K.P. Shum // J. Pure Appl. Algebra. – 2007. – Vol. 209. – P. 151–158.
12. *Guo, X.* Cover-avoidance properties and the structure of finite groups / X. Guo, K.P. Shum // J. Pure Appl. Algebra. – 2003. – Vol. 181, № 2–3. – P. 297–308.
13. *Huppert, B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1967.
14. *Kegel, O.H.* Sylow gruppen und subnormalteiler endlicher gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1962. – Vol. 78. – P. 205–221.
15. *Li, Y.* Finite groups with some S -quasinormally embedded subgroups / Y. Li // Comm. Algebra. – 2010. – Vol. 38, № 11. – P. 4202–4211.
16. *Lii, X.* Semi CAP-subgroups and the structure of finite groups / X. Li, Y. Yang // Acta Math. Sin. – 2008. – Vol. 51. – P. 1181–1187.
17. *Li, Y.* On p -nilpotency of finite groups with some subgroups π -quasinormally embedded / Y. Li, Y. Wang, H. Wei // Acta Math Hungarica. – 2005. – Vol. 108, № 4. – P. 283–298.
18. *Petrillo, J.* CAP-subgroups in a direct product of finite groups / J. Petrillo // J. Algebra. – 2006. – Vol. 306, № 2. – P. 432–438.
19. *Robinson, D.J.S.* A Course in the Theory of Groups / D.J.S. Robinson. – New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1982.
20. *Schmid, P.* Subgroups permutable with all Sylow subgroups / P. Schmid // J. Algebra. – 1998. – Vol. 207. – P. 285–293.
21. *Skiba, A.N.* On weakly s -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 192–209.
22. *Tomkinson, M.J.* Cover-avoidance properties in finite soluble groups / M.J. Tomkinson // Canad. Math. Bull. – 1976. – Vol. 19, № 2. – P. 213–216.
23. *Thompson, J.C.* Normal p -complements for finite groups / J.C. Thompson // J. Algebra. – 1964. – Vol. 1. – P. 43–46.
24. *Wei, H.* On c^* -normality and its properties / H. Wei, Y. Wang // J. Group Theory. – 2007. – Vol. 10. – P. 211–223.
25. *Zhao, T.* Semi cover-avoiding properties of finite groups / T. Zhao, X. Li // Front. Math. China. – 2010. – Vol. 5, № 4. – P. 793–800.

Research is supported by a NNSF grant of China (grant #11371335) and Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant 20113402110036).

Поступила в редакцию 21.11.13.

УДК 917.925

ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Г.Т. Можджер

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

THE FIRST INTEGRALS OF THE FIFTH ORDER NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

G.T. Mozhdzher

Y. Kupala Grodno State University, Grodno, Belarus

Объектом исследования является нелинейное дифференциальное уравнение пятого порядка с рациональной правой частью. Целью исследования является нахождение условий существования первых интегралов у рассматриваемого уравнения и изучение аналитических свойств полученных первых интегралов. В основной части для нелинейного дифференциального уравнения пятого порядка получены: уравнение для вычетов и резонансное уравнение. В зависимости от корней резонансного уравнения найдены достаточные условия наличия первых интегралов рассматриваемого нелинейного дифференциального уравнения пятого порядка с рациональной правой частью. Для этих дифференциальных уравнений приведены первые интегралы в рассмотренных в данной работе случаях. Полученные результаты могут быть использованы в аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение пятого порядка, первый интеграл, резонансы, уравнение для вычетов, характеристическое уравнение.

The object of study is a nonlinear fifth-order differential equation with a rational right-hand side. The goal of the study is to find the conditions for the existence of the first integrals of the equation and study the analytical properties of the obtained first integrals. In main part of the nonlinear differential fifth-order equation obtained the equations for residues and the resonance equation. Depending on the roots of the resonance equation, the necessary conditions of existence of the first integrals of nonlinear differential equation of the fifth order with a rational right-hand side is found. For these differential equation corresponding first integrals considered in this paper special cases are given. The obtained results can be used in the analytical theory of the ordinary differential equations.

Keywords: differential equation of the fifth order, first integral, resonances, equation for residues, characteristic equation.

Введение

Рассмотрим дифференциальное уравнение пятого порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned}
 y^{(V)} = & a_1 \frac{y'y^{(IV)}}{y} + a_2 \frac{y''y'''}{y} + a_3 \frac{y'^2y'''}{y^2} + \\
 & + a_4 \frac{y'y''^2}{y^2} + a_5 \frac{y'^3y''}{y^3} + a_6 \frac{y'^5}{y^4} + \\
 & + a_7 y y^{(IV)} + a_8 y' y''' + a_9 y''^2 + a_{10} \frac{y'^2 y''}{y} + \\
 & + a_{11} \frac{y'^4}{y^2} + a_{12} y^2 y''' + a_{13} y y' y'' + a_{14} y'^3 + \\
 & + a_{15} y^3 y'' + a_{16} y^2 y'^2 + a_{17} y^4 y' + a_{18} y^6.
 \end{aligned} \quad (0.1)$$

Найдем условия, при которых уравнение (0.1) имеет первый интеграл.

Упрощенным к уравнению (0.1) является уравнение

$$\begin{aligned}
 y^{(V)} = & a_1 \frac{y'y^{(IV)}}{y} + a_2 \frac{y''y'''}{y} + a_3 \frac{y'^2y'''}{y^2} + \\
 & + a_4 \frac{y'y''^2}{y^2} + a_5 \frac{y'^3y''}{y^3} + a_6 \frac{y'^5}{y^4}.
 \end{aligned} \quad (0.2)$$

Решение уравнения (0.2) можно представить в виде ряда

$$\begin{aligned}
 y = & h_0 \tau^{-s} + \dots + h_r \tau^{r-s} + \dots, \tau = z - z_0, \\
 & s \neq 0, h_0 \neq 0.
 \end{aligned} \quad (0.3)$$

Для данного уравнения (0.1) характеристический многочлен $\varphi(\lambda)$ имеет вид [1]

$$\begin{aligned}
 \varphi(\lambda) = & 24\lambda^4 + (6a_1 + 2a_2 + 46)\lambda^3 + \\
 & + (7a_1 + a_2 - 2a_3 - a_4 + 29)\lambda^2 + \\
 & + (2a_1 - a_3 + a_5 + 6)\lambda - a_6 = 0.
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 6a_1 + 2a_2 + 46 = & -24(\alpha + \beta + \gamma + \delta), \\
 7a_1 + a_2 - 2a_3 - a_4 + 29 = & \\
 = 24(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\delta + \beta\delta + \gamma\delta), & \\
 2a_1 - a_3 + a_5 + 6 = & \\
 = -24(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta), & \\
 a_6 = & -24\alpha\beta\gamma\delta,
 \end{aligned}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – корни характеристического многочлена $\varphi(\lambda)$.

В работе [1] показано, что при

$$a_1 = a - (4\alpha + 3), \quad a_2 = a + 2b,$$

$$a_3 = c + (4\alpha + 2)a, \quad a_4 = 2c + (4\alpha + 2)b, \quad (0.4)$$

$$a_5 = 4d + (4\alpha + 1)c, \quad a_6 = 4d\alpha,$$

где

$$b = 2a + 10\alpha + 5, \quad (0.5)$$

$$d = \alpha(c - (4\alpha + 1)(a + 4\alpha + 2)),$$

уравнение (0.2) имеет первый интеграл вида

$$y^{4\alpha+3} y^{IV} = ay^{4\alpha+2} y' y''' + by^{4\alpha+2} y''^2 + cy^{4\alpha+1} y'^2 y'' + dy^{4\alpha} y'^4 + H,$$

где H – постоянная интегрирования.

Если же

$$a_1 = a - (4\alpha + 3), \quad (0.6)$$

$$a_2 = a + 2b,$$

$$a_3 = c + (4\alpha + 2)a + 4p,$$

$$a_4 = 2c + (4\alpha + 2)b - 2p,$$

$$a_5 = 4d + (4\alpha + 1)c - 4p(a + 4\alpha + 2),$$

$$a_6 = \frac{d}{\alpha}(4\alpha^2 - p)$$

и b и d удовлетворяют (0.5), то уравнение (0.2) имеет первый интеграл вида

$$(y^{4\alpha+3} y^{IV} - ay^{4\alpha+2} y' y''' - by^{4\alpha+2} y''^2 - cy^{4\alpha+1} y'^2 y'' - dy^{4\alpha} y'^4)^2 =$$

$$= p \left(2y^{4\alpha+2} y' y''' - y^{4\alpha+2} y''^2 - 2(a + 4\alpha + 2)y^{4\alpha+1} y'^2 y'' - \frac{d}{2\alpha} y^{4\alpha} y'^4 \right)^2 + H,$$

где H – постоянная интегрирования.

1. Вывод характеристического уравнения и уравнения резонансов для уравнения (0.1)

Рассмотрим дифференциальное уравнение (0.1). Если решение уравнения (0.1) искать в виде ряда (0.3), то найдем, что $s = 1$. Тогда ряд (0.3) будет иметь вид

$$y = h_0 \tau^{-1} + \dots + h_r \tau^{r-1} + \dots, \quad (1.1)$$

$$\tau = z - z_0, \quad h_0 \neq 0.$$

Подставляя (1.1) в (0.1) получим, что вычеты h_0 и резонансы r будут удовлетворять уравнениям

$$a_{18} h_0^5 - a_{17} h_0^4 + (2a_{15} + a_{16}) h_0^3 - (6a_{12} + 2a_{13} + a_{14}) h_0^2 + (24a_7 + 6a_8 + 4a_9 + 2a_{10} + a_{11}) h_0 + 120 - 24a_1 - 12a_2 - 6a_3 - 4a_4 - 2a_5 - a_6 = 0, \quad (1.2)$$

$$(r + 1)(r^4 - Mr^3 + Kr^2 - Nr + G) = 0, \quad (1.3)$$

где

$$M = 16 - a_1 + a_7 h_0,$$

$$K = 101 - 11a_1 - 2a_2 - a_3 + (11a_7 + a_8) h_0 - a_{12} h_0^2,$$

$$N = 326 - 46a_1 - 20a_2 - 7a_3 - 4a_4 - a_5 + (46a_7 + 7a_8 + 4a_9 + a_{10}) h_0 - (7a_{12} + a_{13}) h_0^2 + a_{15} h_0^3, \quad (1.4)$$

$$G = 5(120 - 24a_1 - 12a_2 - 6a_3 - 4a_4 - 2a_5 - a_6) + 4(24a_7 + 6a_8 + 4a_9 + 2a_{10} + a_{11}) h_0 - 3(6a_{12} + 2a_{13} + a_{14}) h_0^2 + 2(2a_{15} + a_{16}) h_0^3 - a_{17} h_0^4.$$

Будем предполагать, что уравнения (1.2) и (1.3) не имеют кратных корней.

Рассмотрим следующие случаи:

$$1^0. a_{18} \neq 0;$$

$$2^0. a_{18} = 0, a_{17} \neq 0;$$

$$3^0. a_{18} = a_{17} = 0, 2a_{15} + a_{16} \neq 0;$$

$$4^0. a_{18} = a_{17} = 0, 2a_{15} + a_{16} = 0, 6a_{12} + 2a_{13} + a_{14} \neq 0;$$

$$5^0. a_{18} = a_{17} = 0, 2a_{15} + a_{16} = 0, 6a_{12} + 2a_{13} + a_{14} = 0, 24a_7 + 6a_8 + 4a_9 + 2a_{10} + a_{11} \neq 0;$$

$$6^0. a_{18} = a_{17} = 0, 2a_{15} + a_{16} = 0, 6a_{12} + 2a_{13} + a_{14} = 0, 24a_7 + 6a_8 + 4a_9 + 2a_{10} + a_{11} = 0. \quad (1.5)$$

2 Первые интегралы уравнения (0.1) в случае 1^0 из (1.5)

Пусть в уравнении (0.1) $a_{18} \neq 0$. Предположим, что имеют место соотношения (0.6). Тогда уравнение (1.2) примет вид

$$a_{18} h_0^5 - a_{17} h_0^4 + (2a_{15} + a_{16}) h_0^3 - (6a_{12} + 2a_{13} + a_{14}) h_0^2 + (24a_7 + 6a_8 + 4a_9 + 2a_{10} + a_{11}) h_0 + (4(\alpha + 2)^2 - p) \times ((4\alpha - 7)(a + 4\alpha + 2) - c + 16) = 0. \quad (2.1)$$

Один из корней уравнения (2.1) будем считать равным двум, так как масштабным преобразованием искомой функции можно добиться желаемого результата.

Предположим, что левую часть уравнения (2.1) можно разложить на сомножители следующим образом

$$a_{18} h_0^5 - a_{17} h_0^4 + (2a_{15} + a_{16}) h_0^3 - (6a_{12} + 2a_{13} + a_{14}) h_0^2 + (24a_7 + 6a_8 + 4a_9 + 2a_{10} + a_{11}) h_0 + (4(\alpha + 2)^2 - p) \times ((4\alpha - 7)(a + 4\alpha + 2) - c + 16) =$$

$$= -\frac{1}{96} (h_0 - 2)(ph_0^2 - 4ph_0 - 4(4(\alpha + 2)^2 - p)) \times (nh_0^2 + 4nh_0 - 12((4\alpha - 7)(a + 4\alpha + 2) - c + 16)),$$

где

$$n = 80\alpha^2 + 96\alpha + 12a\alpha + 17a + c + 8.$$

Следовательно, будут иметь место следующие соотношения

$$\begin{aligned} a_{18} &= -\frac{1}{96}np, \quad a_{17} = -\frac{1}{48}np, \\ 2a_{15} + a_{16} &= \\ &= \frac{1}{24}(3p((4\alpha - 7)(a + 4\alpha + 2) - c + 16) + \\ &\quad + n(4(\alpha + 2)^2 + 3p)), \\ 6a_{12} + 2a_{13} + a_{14} &= \\ &= \frac{1}{12}(9p((4\alpha - 7)(a + 4\alpha + 2) - c + 16) - \\ &\quad - n(4(\alpha + 2)^2 - 5p)), \\ 24a_7 + 6a_8 + 4a_9 + 2a_{10} + a_{11} &= \\ &= -\frac{1}{6}(3(4(\alpha + 2)^2 - 3p)((4\alpha - 7)(a + 4\alpha + 2) - \\ &\quad - c + 16) + 2n(4(\alpha + 2)^2 - p)). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Уравнение (2.1) с учетом (2.2) примет вид

$$(h_0 - 2)(ph_0^2 - 4ph_0 - 4(4(\alpha + 2)^2 - p)) \times (nh_0^2 + 4nh_0 - 12((4\alpha - 7)(a + 4\alpha + 2) - c + 16)) = 0. \quad (2.4)$$

Тогда из (2.4) получим $h_0 - 2 = 0$, или

$$ph_0^2 - 4ph_0 - 4(4(\alpha + 2)^2 - p) = 0, \quad (2.5)$$

или

$$nh_0^2 + 4nh_0 - 12((4\alpha - 7)(a + 4\alpha + 2) - c + 16) = 0.$$

Из (2.5) найдем

$$h_{01} + h_{02} = 4, \quad h_{01}h_{02} = -\frac{4(4(\alpha + 2)^2 - p)}{p},$$

при этом $h_{01} \neq h_{02}$.

Если $r = 8\alpha + 16$ является корнем уравнения резонансов (1.2) при h_{01} и h_{02} , взятых из (2.5), то имеем

$$\begin{aligned} (8\alpha + 16)^4 - M_i(8\alpha + 16)^3 + K_i(8\alpha + 16)^2 - \\ - N_i(8\alpha + 16) + G_i = 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Следовательно, получим

$$\begin{aligned} -(M_1 - M_2)(8\alpha + 16)^3 + (K_1 - K_2)(8\alpha + 16)^2 - \\ - (N_1 - N_2)(8\alpha + 16) + (G_1 - G_2) = 0. \quad (2.6) \end{aligned}$$

Учитывая, что $h_{01} \neq h_{02}$, (1.4), (2.3) и (2.5) из (2.6) найдем

$$\begin{aligned} a_{10} &= -a_7((8\alpha + 5)(8\alpha + 16) + 46) + a_8(8\alpha + 9) - \\ &\quad - 4a_9 - 4a_{12}(8\alpha + 9) + 4a_{13} - \\ &\quad - \frac{4}{p}a_{15}(4(\alpha + 2)^2 + 3p) - \\ &\quad - \frac{1}{2}(\alpha + 2)((4\alpha - 7)(a + 4\alpha + 2) - c + 16) + \\ &\quad + \frac{n}{6p}(\alpha + 2)(4(\alpha + 2)^2 + 7p). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Коэффициенты уравнения (1.3) можно записать в виде

$$M_i = p_i + q_i + m_i + 8\alpha + 16, \quad (2.8)$$

$$K_i = p_i q_i + p_i m_i + q_i m_i + (p_i + q_i + m_i)(8\alpha + 16),$$

$$N_i = p_i q_i m_i + (p_i q_i + p_i m_i + q_i m_i)(8\alpha + 16),$$

$$G_i = p_i q_i m_i (8\alpha + 16),$$

где p_i, q_i, m_i – корни уравнения (1.3), отличные от -1 и $8\alpha + 16$, $i = 1, 2$.

Из (1.4), (2.8) с учетом (0.6), (2.3) и (2.7) получим следующие соотношения

$$\begin{aligned} p_i + q_i + m_i &= -a - 4\alpha + 3 + a_7 h_{0i}, \\ p_i q_i + p_i m_i + q_i m_i &= \\ &= 2(16\alpha^2 + 22\alpha + 33) + a(4\alpha - 7) - c - 4p - \\ &\quad - a_7(8\alpha + 5)h_{0i} + a_8 h_{0i} - a_{12} h_{0i}^2, \\ p_i q_i m_i &= -4(4(\alpha + 2)^2 - p)(a + 12\alpha + 13) - \\ &\quad - 4a_{12}(8\alpha + 9)h_{0i} + 4a_{13}h_{0i} - \\ &\quad - \frac{4}{p}a_{15}(4(\alpha + 2)^2 + 3p)h_{0i} - \\ &\quad - \frac{1}{2}(\alpha + 2)((4\alpha - 7)(a + 4\alpha + 2) - c + 16)h_{0i} + \\ &\quad + \frac{1}{6p}n(\alpha + 2)(4(\alpha + 2)^2 + 7p)h_{0i} + \\ &\quad + a_{12}(8\alpha + 9)h_{0i}^2 - a_{13}h_{0i}^2 + a_{15}h_{0i}^3, \\ &\quad \frac{1}{48}p(48p(4(\alpha + 2)^2 - p) \times \\ &\quad \times (464\alpha^2 + 1084\alpha + 52a\alpha + 29a - 5c + 842) - \\ &\quad - 32(8n(\alpha + 2)^4 + 4p(\alpha + 2)^2 \times \\ &\quad \times (464\alpha^2 + 498\alpha + 72a\alpha + 83a + 4c + 47) - \\ &\quad - p^2(304\alpha^2 + 12\alpha + 60a\alpha - 29a - 7c + 34) - \\ &\quad - 48pa_{12}(\alpha + 2)(8\alpha + 9) + \\ &\quad + 48pa_{13}(\alpha + 2) - 48a_{15}(\alpha + 2)(4(\alpha + 2)^2 + 3p))h_{0i} + \\ &\quad + 24p(2n(\alpha + 2)^2 - \\ &\quad - p(272\alpha^2 + 150\alpha + 48a\alpha + 11a - 2c + 29) - \\ &\quad - 16a_{12}(\alpha + 2)(8\alpha + 9) + \\ &\quad + 16a_{13}(\alpha + 2)h_{0i}^2 + 8p(2n(\alpha + 2)^2 + \\ &\quad + 3p(8\alpha + 5)(a + 6\alpha + 1) - \\ &\quad - 48a_{15}(\alpha + 2)h_{0i}^3 + p^2nh_{0i}^4) = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Рассмотрим четвертое соотношение из (2.9).

Если положить

$$\begin{aligned} a_7 &= \frac{1}{2}(a + 6\alpha + 1), \\ a_8 &= 4p, \\ a_9 &= -2(\alpha + 1)(a + 6\alpha + 1) - p, \\ a_{12} &= p, \\ a_{13} &= \frac{1}{3}(2\alpha + 1)(4\alpha + 3)(a + 4\alpha + 4) - \\ &\quad - \frac{1}{2}\alpha(4\alpha + 1)(a + 4\alpha + 2) - \\ &\quad - \frac{1}{6}c(\alpha + 2) - \frac{2}{3}a_7(8\alpha^2 + 29\alpha + 20) - \\ &\quad - p(a + 4\alpha + 4 + 4a_7), \end{aligned}$$

$$a_{15} = -\frac{1}{12}(2\alpha+1)(4\alpha+3)(a+4\alpha+4) + \frac{1}{8}\alpha(4\alpha+1)(a+4\alpha+2) + \frac{1}{24}c(\alpha+2) + \frac{1}{6}a_7(8\alpha^2+29\alpha+20) - a_7p,$$

то четвертое соотношение из (2.9) с учетом (2.5) обратится в тождество.

Следовательно, соотношение (2.7) и последние три соотношения из (2.3) примут вид

$$a_{10} = \frac{3}{2}\alpha(4\alpha+1)(a+4\alpha+2) - \frac{1}{2}(4\alpha+3)(4\alpha+4)(a+6\alpha+1) - k(2\alpha+1) + \frac{1}{2}c(\alpha+2) - 2p(3a+14\alpha+7),$$

$$a_{11} = \frac{1}{2}(4\alpha+1)(a+4\alpha+2)(\alpha(4\alpha+2)+p) - \frac{2}{3}k((2\alpha+1)^2-p) + \frac{1}{6}c((\alpha+2)(4\alpha+2)-7p),$$

$$a_{14} = -\frac{1}{3}n(\alpha+1)(\alpha+2) + \frac{1}{6}p(2n+3(8\alpha+9)(a+6\alpha+1)-2c),$$

$$a_{16} = \frac{1}{12}n(\alpha+2)(2\alpha+3) + \frac{1}{4}p(8\alpha+9)(a+6\alpha+1),$$

где $k = 10\alpha+5+(4\alpha+4)(a+4\alpha+2)+ (8\alpha+6)(a+6\alpha+1).$

Таким образом, получаем

$$a_7 = \frac{1}{2}(a+6\alpha+1),$$

$$a_8 = 4p,$$

$$a_9 = -2(\alpha+1)(a+6\alpha+1) - p,$$

$$a_{10} = \frac{3}{2}\alpha(4\alpha+1)(a+4\alpha+2) - \frac{1}{2}(4\alpha+3)(4\alpha+4)(a+6\alpha+1) - k(2\alpha+1) + \frac{1}{2}c(\alpha+2) - 2p(3a+14\alpha+7),$$

$$a_{11} = \frac{1}{2}(4\alpha+1)(a+4\alpha+2)(\alpha(4\alpha+2)+p) - \frac{2}{3}k((2\alpha+1)^2-p) + \frac{1}{6}c((\alpha+2)(4\alpha+2)-7p),$$

$$a_{12} = p,$$

$$a_{13} = -\frac{1}{6}n(\alpha+2) - p(3a+16\alpha+6),$$

$$a_{14} = -\frac{1}{3}n(\alpha+1)(\alpha+2) +$$

(2.10)

$$+\frac{1}{6}p(2n+3(8\alpha+9)(a+6\alpha+1)-2c),$$

$$a_{15} = \frac{1}{24}n(\alpha+2) - \frac{1}{2}p(a+6\alpha+1),$$

$$a_{16} = \frac{1}{12}n(\alpha+2)(2\alpha+3) +$$

$$+\frac{1}{4}p(8\alpha+9)(a+6\alpha+1),$$

$$a_{17} = -\frac{1}{48}np, \quad a_{18} = -\frac{1}{96}np.$$

Умножая уравнение (0.1) на интегрирующий множитель

$$A = 2y^{4\alpha+3} \left(y^{4\alpha+3} y^{IV} - ay^{4\alpha+2} y' y''' - by^{4\alpha+2} y''^2 - cy^{4\alpha+1} y'^2 y'' - dy^{4\alpha} y'^4 - \frac{1}{2}(a+6\alpha+1)y^{4\alpha+4} y''' + 2(\alpha+1)(a+6\alpha+1)y^{4\alpha+3} y' y'' - \left(\frac{1}{2}\alpha(4\alpha+1)(a+4\alpha+2) - \frac{1}{3}k(2\alpha+1) + \frac{1}{6}c(\alpha+2) \right) y^{4\alpha+2} y'^3 + \frac{1}{12}n(\alpha+2)y^{4\alpha+4} y'^2 - \frac{1}{24}n(\alpha+2)y^{4\alpha+6} y' \right)$$

и интегрируя его с учетом (0.6) и (2.10), получим

$$(y^{4\alpha+3} y^{IV} - ay^{4\alpha+2} y' y''' - by^{4\alpha+2} y''^2 - cy^{4\alpha+1} y'^2 y'' - dy^{4\alpha} y'^4 - \frac{1}{2}(a+6\alpha+1)y^{4\alpha+4} y''' + 2(\alpha+1)(a+6\alpha+1)y^{4\alpha+3} y' y'' - \left(\frac{1}{2}\alpha(4\alpha+1)(a+4\alpha+2) - \frac{1}{3}k(2\alpha+1) + \frac{1}{6}c(\alpha+2) \right) y^{4\alpha+2} y'^3 + \frac{1}{12}n(\alpha+2)y^{4\alpha+4} y'^2 - \frac{1}{24}n(\alpha+2)y^{4\alpha+6} y')^2 =$$

$$= p \left(2y^{4\alpha+2} y' y''' - y^{4\alpha+2} y''^2 - 2(a+4\alpha+2)y^{4\alpha+1} y'^2 y'' - \frac{d}{2\alpha} y^{4\alpha} y'^4 + y^{4\alpha+4} y''' - (2a+10\alpha+5)y^{4\alpha+3} y' y'' + \frac{1}{3}(k-c)y^{4\alpha+2} y'^3 - \frac{1}{2}(a+6\alpha+1)y^{4\alpha+5} y'' + \frac{1}{4}(8\alpha+9)(a+6\alpha+1)y^{4\alpha+4} y'^2 - \frac{1}{96}ny^{4\alpha+8} \right) + H,$$

где H – постоянная интегрирования.

Теорема 2.1. Пусть коэффициенты уравнения (0.1) подчинены условиям (0.6) и (2.10). Если $r = 8\alpha+16$ является корнем уравнения (1.3) при

h_{01} и h_{02} из (2.5), то уравнение (0.1) имеет первый интеграл вида (2.11).

3 Первые интегралы уравнения (0.1) в случаях 2^0-5^0 из (1.5)

Пусть в уравнении (0.1) $a_{18} = 0, a_{17} \neq 0$. Предположим, что имеют место соотношения (0.4). Тогда уравнение (1.2) будет иметь вид

$$a_{17}h_0^4 = (2a_{15} + a_{16})h_0^3 - (6a_{12} + 2a_{13} + a_{14})h_0^2 + (24a_7 + 6a_8 + 4a_9 + 2a_{10} + a_{11})h_0 + 4(\alpha + 2)(24 - 6a - 4b - 2c - d). \quad (3.1)$$

Предположим, что $r = 4\alpha + 8$ является общим корнем уравнения резонансов (1.3), при h_{0i} , $i = \overline{1, 4}$ взятых из (1.2). При этом можно записать

$$-(M_1 - M_i)(4\alpha + 8)^3 + (K_1 - K_i)(4\alpha + 8)^2 - (N_1 - N_i)(4\alpha + 8) + (G_1 - G_i) = 0, i = \overline{2, 4}.$$

Из (3.2) при условии, что $h_{01} \neq h_{02}$, $h_{01} \neq h_{03}$, $h_{01} \neq h_{04}$ и (1.4), получим

$$(a_7(4\alpha + 4) - a_8)(16\alpha^2 + 36\alpha + 26) + 4a_9(4\alpha + 5) + a_{10}(4\alpha + 2) - 3a_{11} + (a_{12}(4\alpha + 4)(4\alpha + 5) - a_{13}(4\alpha + 4) + 2a_{14})(h_{01} + h_{0i}) + (a_{15}(4\alpha + 6) - a_{16})(h_{01}^2 + h_{01}h_{0i} + h_{0i}^2) = 0, i = \overline{2, 4}. \quad (3.3)$$

Учитывая, что $h_{02} \neq h_{03}$, $h_{02} \neq h_{04}$, то будем иметь

$$a_{12}(4\alpha + 4)(4\alpha + 5) - a_{13}(4\alpha + 4) + 2a_{14} + (a_{15}(4\alpha + 6) - a_{16})(h_{01} + h_{02} + h_{0i}) = 0, i = \overline{3, 4}.$$

Так как $h_{03} \neq h_{04}$, то находим

$$a_{16} = a_{15}(4\alpha + 6). \quad (3.5)$$

Следовательно, из (3.4) получим

$$a_{12}(4\alpha + 4)(4\alpha + 5) - a_{13}(4\alpha + 4) + 2a_{14} = 0.$$

Положим $a_{14} = m(4\alpha + 4)$, тогда из последнего соотношения будем иметь

$$a_{13} = 2m + a_{12}(4\alpha + 5). \quad (3.6)$$

Учитывая (3.5) и (3.6) из (3.3) запишем

$$(a_7(4\alpha + 4) - a_8 + a_9)(16\alpha^2 + 36\alpha + 26) - a_9(4\alpha + 2)(4\alpha + 3) + a_{10}(4\alpha + 2) - 3a_{11} = 0. \quad (3.7)$$

Пусть $a_8 = a_7(4\alpha + 4) + a_9$. Тогда соотношение (3.7) примет вид

$$a_9(4\alpha + 2)(4\alpha + 3) - a_{10}(4\alpha + 2) + 3a_{11} = 0.$$

Если положить $a_{11} = p(4\alpha + 2)$, то из последнего соотношения найдем

$$a_{10} = a_9(4\alpha + 3) + 3p.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} a_8 &= a_7(4\alpha + 4) + a_9, \\ a_{10} &= a_9(4\alpha + 3) + 3p, \\ a_{11} &= p(4\alpha + 2), \\ a_{13} &= 2m + a_{12}(4\alpha + 5), \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$a_{14} = m(4\alpha + 4), \quad a_{16} = a_{15}(4\alpha + 6).$$

Умножая уравнение (0.1) с учетом (0.4) и (3.8) на интегрирующий множитель $A = y^{4\alpha+3}$ и интегрируя его, будем иметь

$$\begin{aligned} y^{4\alpha+3} y^{IV} &= ay^{4\alpha+2} y' y''' + by^{4\alpha+2} y''^2 + cy^{4\alpha+1} y'^2 y'' + \\ &+ dy^{4\alpha} y'^4 + a_7 y^{4\alpha+4} y''' + a_9 y^{4\alpha+3} y' y'' + py^{4\alpha+2} y'^3 + \\ &+ a_{12} y^{4\alpha+5} y'' + my^{4\alpha+4} y'^2 + \\ &+ a_{15} y^{4\alpha+6} y' + \frac{a_{17}}{4\alpha+8} y^{4\alpha+8} + H, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где H – постоянная интегрирования.

Теорема 3.1. Пусть коэффициенты уравнения (0.1) подчинены условиям $a_{18} = 0, a_{17} \neq 0$, (0.4) и (3.8). Если $r = 4\alpha + 8$ является корнем уравнения (1.3) при h_{01}, h_{02}, h_{03} и h_{04} взятых из (3.1), то первый интеграл уравнения (0.1) имеет вид (3.9).

Следствие 3.1.

1. Если выполнены условия 3^0 из (1.5), то первый интеграл уравнения (0.1) имеет вид (3.9) при $a_{17} = 0$.

2. Если выполнены условия 4^0 из (1.5), то первый интеграл уравнения (0.1) имеет вид (3.9) при $a_{15} = a_{17} = 0$.

3. Если выполнены условия 5^0 из (1.5), то первый интеграл уравнения (0.1) имеет вид (3.9) при $m = -2a_{12}, a_{15} = a_{17} = 0$.

4 Первые интегралы уравнения (0.1) в случае 6^0 из (1.5)

Пусть теперь в уравнении (0.1)

$$\begin{aligned} a_{18} &= a_{17} = 0, \quad a_{16} = -2a_{15}, \\ a_{14} &= -6a_{12} - 2a_{13}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$a_{11} = -24a_7 - 6a_8 - 4a_9 - 2a_{10}$$

и имеют место соотношения (0.4).

Тогда, если

$$(\alpha + 2)(24 - 6a - 4b - 2c - d) = 0,$$

то h_0 в (1.2) будет произвольным.

Предположим, что $r = 4\alpha + 8$ является корнем уравнения резонансов (1.3), отличным от -1 и 0 . Отсюда, если $\alpha = -2$, то $r = 0$ и

$$\begin{aligned} a_1 &= a + 5, \quad a_2 = a + 2b, \\ a_3 &= c - 6a, \quad a_4 = 2c - 6b, \\ a_5 &= 4d - 7c, \quad a_6 = -8d. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Если положить $a_9 = 0, a_8 = -4a_7$, то получим, что $a_{11} = -2a_{10}$.

Таким образом, получили

$$\begin{aligned} a_8 &= -4a_7, \quad a_9 = 0, \\ a_{11} &= -2a_{10}, \quad a_{14} = -6a_{12} - 2a_{13}, \\ a_{16} &= -2a_{15}, \quad a_{17} = a_{18} = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Умножая уравнение (0.1) с учетом (4.2) и (4.3) на интегрирующий множитель $A = y^{-5}$ и

интегрируя его, будем иметь первый интеграл (3.9) при

$$\alpha = -2, a_9 = 0, p = \frac{a_{10}}{3}, \quad (4.4)$$

$$m = \frac{3}{2}a_{12} + \frac{a_{13}}{2}, a_{17} = 0.$$

Если же $d = 24 - 6a - 4b - 2c$, то соотношения (0.4) примут вид

$$a_1 = a - 4\alpha - 3, a_2 = a + 2b, \quad (4.5)$$

$$a_3 = c + (4\alpha + 2)a, a_4 = 2c + (4\alpha + 2)b,$$

$$a_5 = 96 - 24a - 16b + (4\alpha - 7)c,$$

$$a_6 = 4\alpha(24 - 6a - 4b - 2c).$$

Тогда в (1.4) получим $G = 0$ и коэффициенты M, K, N будут

$$M = 19 + 4\alpha - a + a_7 h_0,$$

$$K = 134 + 44\alpha - a(4\alpha + 15) -$$

$$-4b - c + (11a_7 + a_8)h_0 - a_{12}h_0^2,$$

$$N = 4(\alpha + 2)(46 - 7a - 4b - c) +$$

$$+ (46a_7 + 7a_8 + 4a_9 + a_{10})h_0 -$$

$$- (7a_{12} + a_{13})h_0^2 + a_{15}h_0^3. \quad (4.6)$$

Пусть p, q – корни уравнения (1.3) отличные от -1 и $4\alpha + 8$. Тогда коэффициенты уравнения (1.3) можно записать в виде

$$M = p + q + 4\alpha + 8,$$

$$K = pq + (p + q)(4\alpha + 8),$$

$$N = pq(4\alpha + 8).$$

Отсюда с учетом (4.6) будем иметь

$$p + q = 11 - a + a_7 h_0, \quad (4.7)$$

$$pq = 46 - 7a - 4b - c - (a_7(4\alpha - 3) - a_8)h_0 - a_{12}h_0^2,$$

$$a_{15}h_0^3 + (a_{12}(4\alpha + 1) - a_{13})h_0^2 +$$

$$+ (a_7((4\alpha - 3)(4\alpha + 8) + 46) -$$

$$- a_8(4\alpha + 1) + 4a_9 + a_{10})h_0 = 0.$$

Так как $h_0 \neq 0$, то из последнего соотношения в (4.7) получаем

$$a_{15}h_0^2 + (a_{12}(4\alpha + 1) - a_{13})h_0 +$$

$$+ a_7((4\alpha - 3)(4\alpha + 8) + 46) -$$

$$- a_8(4\alpha + 1) + 4a_9 + a_{10} = 0.$$

Для того чтобы h_0 было произвольным, необходимо

$$a_{15} = 0, \quad a_{12}(4\alpha + 1) - a_{13} = 0, \quad (4.8)$$

$$a_7((4\alpha - 3)(4\alpha + 8) + 46) -$$

$$- a_8(4\alpha + 1) + 4a_9 + a_{10} = 0.$$

Пусть

$$a_8 = a_7(4\alpha + 4) + a_9,$$

то второе и третье соотношения из (4.8) и третье и четвертое соотношения из (4.1) примут вид

$$a_{10} = -18a_7 + a_9(4\alpha - 3),$$

$$a_{11} = -2(4\alpha + 2)(3a_7 + a_9),$$

$$a_{13} = a_{12}(4\alpha + 1),$$

$$a_{14} = -2a_{12}(4\alpha + 4).$$

Таким образом, получили

$$a_8 = a_7(4\alpha + 4) + a_9, \quad (4.9)$$

$$a_{10} = -18a_7 + a_9(4\alpha - 3),$$

$$a_{11} = -2(4\alpha + 2)(3a_7 + a_9),$$

$$a_{13} = a_{12}(4\alpha + 1),$$

$$a_{14} = -2a_{12}(4\alpha + 4),$$

$$a_{15} = a_{16} = a_{17} = a_{18} = 0.$$

Умножая уравнение (0.1) с учетом (4.5) и (4.9) на интегрирующий множитель $A = y^{4\alpha+3}$ и интегрируя его, получим первый интеграл вида (3.9) при условии

$$a_{17} = a_{15} = 0, p = -6a_7, m = -2a_{12}. \quad (4.10)$$

Теорема 4.1. Пусть $r = 4\alpha + 8$ является корнем уравнения (1.3) и имеют место соотношения 6^0 из (1.5). Тогда

1) если в уравнении (0.1) коэффициенты подчинены условиям (4.2) и (4.3), то первый интеграл имеет вид (3.9), где надо считать, что имеет место (4.4);

2) если в уравнении (0.1) коэффициенты подчинены условиям (4.5) и (4.9), то первый интеграл имеет вид (3.9), где надо считать, что имеет место (4.10).

Заключение

В работе найдены достаточные условия наличия первых интегралов дифференциального уравнения пятого порядка (0.1) в случаях (1.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартынов, И.П. О первых интегралах одного уравнения пятого порядка / И.П. Мартынов, Г.Т. Можджер // Вестник ГрГУ. Серия 2. – 2001. – № 2 (6). – С. 3–7.

Поступила в редакцию 14.11.13.

УДК 517.925

**О РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ УПРОЩЕННОЙ СИСТЕМЫ
НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ,
СВЯЗАННОЙ С ЗАДАЧЕЙ ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ**

А.Т. Сазонова

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

**ON SOLUTIONS OF SIMPLIFIED SYSTEMS
OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS
RELATED TO THE PROBLEM OF FOUR BODIES**

A.T. Sazonava

Y. Kupala Grodno State University, Grodno, Belarus

В основной части рассматривается система, описывающая движение четырех тел под действием сил гравитации. С помощью элементарных алгебраических преобразований установлена упрощенная система, состоящая из нелинейных дифференциальных уравнений, каждое из которых имеет второй порядок. Получено 21 нелинейное автономное дифференциальное уравнение первого порядка относительно одной из компонент системы, общее решение которого обладает свойством Пенлеве. Установлены необходимые и достаточные условия наличия свойства Пенлеве у исследуемой системы.

Ключевые слова: движение четырех тел, константа взаимодействия, свойство Пенлеве, мероморфное решение.

In the main part we consider a system describing the motion of four bodies under the action of gravity. Using the set of elementary algebraic transformations, a simplified system consisting of nonlinear differential equations, each of which has the second order was developed. 21 autonomous nonlinear differential equation of the first order with respect to one of the components of the system, whose general solution has the Painlevé property were obtained. Necessary and sufficient conditions for Painlevé properties in the studied system were established.

Keywords: movement of four bodies, constant interaction Painlevé property, meromorphic solution.

Введение

Одной из важнейших задач аналитической теории дифференциальных уравнений является задача выделения классов уравнений и систем, решения которых имеют те или иные свойства, в особенности уравнений типа Пенлеве.

Весьма большое число различных задач механики, математической физики, инженерных наук и различных других областей знания приводится к интегрированию дифференциальных уравнений. Математические трудности, которые встречаются при интегрировании этих уравнений, часто задерживают решение прикладных задач. Примером может служить знаменитая задача о движении тел под действием сил гравитации, невозможность полного разрешения которой обуславливается отсутствием методов интеграции уравнений такого типа, какие встречаются в этой задаче, и возможностью до конца исследовать их решения.

Решение задачи о движении одного тела содержится уже в первом законе Ньютона – законе инерции.

Решение задачи двух тел также было получено Ньютоном. Опираясь на законы Кеплера движения планет и некоторые другие результаты своих предшественников, Ньютон открыл закон

всемирного тяготения, то есть по заданному движению планеты была найдена сила ее взаимодействия с Солнцем.

В отличие от задачи двух тел задача трех тел не допускает общего решения, позволяющего для произвольных значений координат и скоростей тел в начальный момент времени $t = 0$ предсказать положение каждого из трех тел для любого будущего момента времени $t > 0$. И это несмотря на то, что ввиду своей важности задача трех тел привлекала к себе внимание многих математиков и механиков, среди которых были выдающиеся. Крупнейшие математики Ж. Лагранж, К. Якоби, А. Пуанкаре, Дж. Биркгоф и др. затрачивали на эту задачу много лет упорного труда, выдавая поток блестящих идей и получив много ценных методов и результатов, но построить общее решение так и не удалось.

В работе Силушик Агнешки «Проблема устойчивости по Ляпунову стационарных решений некоторых гамильтоновых систем космической динамики» были получены и обоснованы необходимые и достаточные условия существования точек относительного равновесия гамильтоновой системы дифференциальных уравнений шестого порядка, описывающей ограниченную проблему 8-и тел с неполной симметрией, определено

множество начальных условий, порождающих такие стационарные решения.

Объектом исследования предложенной работы является система трех нелинейных дифференциальных уравнений, которая является математической моделью движение четырех тел под действием сил гравитации.

1 Разрешимые случаи в задаче четырех тел

В последнее время значительный интерес представляет исследование следующей системы, состоящей из N обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\zeta_n'' = 2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{m=N} a_{nm} \frac{\zeta_n' \zeta_m'}{\zeta_n - \zeta_m}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (1.1)$$

Зависимые переменные $\zeta_n = \zeta_n(\tau)$ являются комплексными. Константы взаимодействия a_{nm} априори произвольны, за исключением требования симметрии

$$a_{nm} = a_{mn}.$$

Интерес к системе также вызывает тот факт, что при отождествлении комплексной ζ -плоскости с физической плоскостью и при ограничении на вещественное τ (интерпретируемое как «физическое время») движение N точек ζ_n соответствует решению задачи многих тел в плоскости, характеризуемой ньютоновскими уравнениями движения с интересным свойством: среди решений задачи многих тел имеются много решений с полностью периодическими траекториями.

Несмотря на кажущуюся простоту формул, аналитического решения данной задачи в общем виде для $N > 3$ пока не найдено.

В данной работе рассматривается задача о движении четырех тел.

Из (1.1) видно, что центр масс $Z \equiv Z(\tau)$,

$$Z = \frac{\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4}{4},$$

движется равномерно:

$$Z'' = 0,$$

$$Z(\tau) = Z(0) + Z'(0)\tau = Z(0) + V\tau.$$

Положим

$$a_{12} = a_{21} = a, a_{13} = a_{31} = c, a_{14} = a_{41} = d,$$

$$a_{23} = a_{32} = b, a_{24} = a_{42} = e, a_{34} = a_{43} = f.$$

Существует также интеграл движения (что непосредственно следует из (1.1) [1]):

$$K = \zeta_1' \zeta_2' \zeta_3' \zeta_4' (\zeta_1 - \zeta_2)^{2a} (\zeta_2 - \zeta_3)^{2b} \times (\zeta_3 - \zeta_1)^{2c} (\zeta_4 - \zeta_1)^{2d} (\zeta_2 - \zeta_4)^{2e} (\zeta_3 - \zeta_4)^{2f}.$$

Введем координаты относительно центра масс

$$u_n = \zeta_n - Z, \quad n = 1, 2, 3, 4,$$

чтобы выполнялось

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0.$$

Для удобства обозначений положим

$$u_1 = x, u_2 = y, u_3 = z, u_4 = -x - y - z.$$

С помощью несложных алгебраических преобразований можно теперь записать уравнения движения и интеграл движения в терминах переменных x, y, z :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2a \frac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y} + 2c \frac{(\dot{x}+V)(\dot{z}+V)}{x-z} - \\ - 2d \frac{(\dot{x}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}+V)}{2x+y+z}, \\ \ddot{y} = -2a \frac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y} + 2b \frac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z} - \\ - 2e \frac{(\dot{y}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}+V)}{x+2y+z}, \\ \ddot{z} = -2c \frac{(\dot{x}+V)(\dot{z}+V)}{x-z} - 2b \frac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z} - \\ - 2f \frac{(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}+V)}{x+y+2z}, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$K = (\dot{x}+V)(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}-V) \times \\ \times (x-y)^{2a} (y-z)^{2b} (z-x)^{2c} \times \\ \times (2x+y+z)^{2d} (x+2y+z)^{2e} (x+y+2z)^{2f},$$

где $x = x(\tau), y = y(\tau), z = z(\tau), \tau = t - t_0, V = Z'(0), K = const.$

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2a \frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} - 2d \frac{\dot{x}(\dot{x}+\dot{y})}{2x+y}, \\ \ddot{y} = -2a \frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} - 2e \frac{\dot{y}(\dot{x}+\dot{y})}{x+2y}, \\ \ddot{z} = -2c \frac{\dot{x}(\dot{z}+V)}{x} - 2b \frac{\dot{y}(\dot{z}+V)}{y} - \\ - 2f \frac{(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y})}{x+y}, \end{cases} \quad (1.3)$$

которая является инвариантной при замене переменных $(\tau, x, y, z; \varepsilon\tau, x, y, \varepsilon z), \varepsilon$ – параметр, а значит, является упрощенной для (1.2).

Согласно [1] справедлива

Лемма 1.1. Для того, чтобы все решения (1.1) являлись мероморфными функциями от τ , необходимо, чтобы все показатели $\gamma_n, \beta_n, \Gamma, n = \overline{1, 6}$, определяемые через константы a, b, c, d, e, f с помощью соотношений

$$\gamma_n = \frac{1}{1+a_n},$$

$$\beta_n = -2a_n,$$

$$\Gamma = \frac{2}{2+a+b+c+d+e+f},$$

$$a_n \in \{a, b, c, d, e, f\},$$

принимали целочисленные или бесконечные значения.

Рассмотрим первое и второе уравнения системы (1.3)

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2a \frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} - 2d \frac{\dot{x}(\dot{x}+\dot{y})}{2x+y}, \\ \ddot{y} = -2a \frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} - 2e \frac{\dot{y}(\dot{x}+\dot{y})}{x+2y}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Из [2] имеем

Лемма 1.2. Для наличия у (1.4) свойства Пенлеве необходимо

- 1) $a = d = -\frac{1}{2}, e = 0,$
- 2) $a = -\frac{1}{2}, d = 0, e = -1,$
- 3) $a = e = -\frac{1}{2}, d = 0.$

Рассмотрим каждый из случаев леммы 1.2.

Пусть $a = d = -\frac{1}{2}, e = 0.$ Тогда система (1.4)

примет вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} + \frac{\dot{x}(\dot{x}+\dot{y})}{2x+y}, \\ \ddot{y} = \frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} \end{cases} \quad (1.5)$$

и соответствующий интеграл движения

$$K = \frac{\dot{x}\dot{y}(\dot{x}+\dot{y})}{(x-y)(2x+y)}.$$

Легко проверить, что общее решение (1.5) имеет вид

$$\begin{aligned} x &= -\frac{K}{3}\tau^3 + M_1\tau^2 + M_2\tau + M_3, \\ y &= \frac{K}{6}\tau^3 + L_1\tau^2 + L_3, \end{aligned}$$

где L_1, L_3 – произвольные постоянные, а M_1, M_2, M_3 определяются из соотношений

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{3L_3K^2}{8L_1^2} - L_1, \\ M_2 &= \frac{3L_3K}{2L_1}, \\ M_3 &= L_3. \end{aligned}$$

Интегрируя третье уравнение системы (1.3), получим первый интеграл

$$\dot{z} = Ax^{-2c}y^{-2b}(x+y)^{-2f} - V, \quad (1.6)$$

где A – произвольная постоянная.

С учетом условия леммы 1.1, а также первого условия леммы 1.2 положим, что

$a = d = -\frac{1}{2}, e = 0,$ а константы c, b, f принимают одно из значений, приведенных в таблице 1.1.

Для каждого из 20 наборов значений констант взаимодействия c, b, f в соответствии с (1.6) можно найти общее решение системы (1.3).

Таблица 1.1. – Значения констант c, b, f

c	b	f
-1	-1	-1
0	-1	-1
-1	0	-1
-1	-1	0
0	0	-1
0	-1	0
-1	0	0
-0,5	0	0
0	-0,5	0
0	0	-0,5
-0,5	-0,5	0
-0,5	0	-0,5
0	-0,5	-0,5
-0,5	-0,5	-0,5
-1,5	0	0
0	-1,5	0
0	0	-1,5
-1,5	-1,5	0
-1,5	0	-1,5
0	-1,5	-1,5

Ниже приведенные функции $F_k(\tau), k = \overline{1, 20}$, являются полиномами по τ .

- 1) $c = b = f = -1, \dot{z} = Ax^2y^2(x+y)^2 - V, z = F_1(\tau), \deg F_1(\tau) = 19;$
- 2) $c = 0, b = f = -1, \dot{z} = Ay^2(x+y)^2 - V, z = F_2(\tau), \deg F_2(\tau) = 13;$
- 3) $b = 0, c = f = -1, \dot{z} = Ax^2(x+y)^2 - V, z = F_3(\tau), \deg F_3(\tau) = 13;$
- 4) $c = b = -1, f = 0, \dot{z} = Ax^2y^2 - V, z = F_4(\tau), \deg F_4(\tau) = 13;$
- 5) $c = b = 0, f = -1, \dot{z} = A(x+y)^2 - V, z = F_5(\tau), \deg F_5(\tau) = 7;$
- 6) $c = f = 0, b = -1, \dot{z} = Ay^2 - V, z = F_6(\tau), \deg F_6(\tau) = 7;$
- 7) $c = -1, b = f = 0, \dot{z} = Ax^2 - V, z = F_7(\tau), \deg F_7(\tau) = 7;$
- 8) $c = -\frac{1}{2}, b = f = 0, \dot{z} = Ax - V, z = F_8(\tau), \deg F_8(\tau) = 4;$
- 9) $b = -\frac{1}{2}, c = f = 0, \dot{z} = Ay - V, z = F_9(\tau), \deg F_9(\tau) = 4;$
- 10) $c = b = 0, f = -\frac{1}{2}, \dot{z} = A(x+y) - V, z = F_{10}(\tau), \deg F_{10}(\tau) = 4;$
- 11) $c = b = -\frac{1}{2}, f = 0, \dot{z} = Axy - V, z = F_{11}(\tau), \deg F_{11}(\tau) = 7;$

12) $b = 0, c = f = -\frac{1}{2}, \dot{z} = Ax(x+y) - V,$
 $z = F_{12}(\tau), \deg F_{12}(\tau) = 7;$

13) $c = 0, b = f = -\frac{1}{2}, \dot{z} = Ay(x+y) - V,$
 $z = F_{13}(\tau), \deg F_{13}(\tau) = 7;$

14) $c = b = f = -\frac{1}{2}, \dot{z} = Axy(x+y) - V,$
 $z = F_{14}(\tau), \deg F_{14}(\tau) = 10;$

15) $c = -\frac{3}{2}, b = f = 0, \dot{z} = Ax^3 - V,$
 $z = F_{15}(\tau), \deg F_{15}(\tau) = 10;$

16) $b = -\frac{3}{2}, c = f = 0, \dot{z} = Ay^3 - V,$
 $z = F_{16}(\tau), \deg F_{16}(\tau) = 10;$

17) $c = b = 0, f = -\frac{3}{2}, \dot{z} = A(x+y)^3 - V,$
 $z = F_{17}(\tau), \deg F_{17}(\tau) = 10;$

18) $c = b = -\frac{3}{2}, f = 0, \dot{z} = Ax^3y^3 - V,$
 $z = F_{18}(\tau), \deg F_{18}(\tau) = 19;$

19) $c = f = -\frac{3}{2}, b = 0, \dot{z} = Ax^3(x+y)^3 - V,$
 $z = F_{19}(\tau), \deg F_{19}(\tau) = 19;$

20) $c = 0, b = f = -\frac{3}{2}, \dot{z} = Ay^3(x+y)^3 - V,$
 $z = F_{20}(\tau), \deg F_{20}(\tau) = 19.$

Пусть теперь $a = -\frac{1}{2}, d = 0, e = -1.$

Систему (1.3) перепишем в виде

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y}, \\ \ddot{y} = \frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} + 2\frac{\dot{x}(\dot{x}+\dot{y})}{x+2y} \end{cases} \quad (1.7)$$

и соответствующий первый интеграл

$$\frac{\dot{x}\dot{y}(\dot{x}+\dot{y})}{(x-y)(x+2y)^2} = K. \quad (1.8)$$

Логарифмическое дифференцирование первого уравнения системы (1.7) дает

$$\frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = 2\frac{\dot{x}\dot{y}}{x+2y}.$$

Возводя последнее уравнение в квадрат, с учетом равенства

$$\dot{y} = -\frac{\ddot{x}^2}{4K\dot{x}} - \dot{x},$$

получим уравнение вида

$$x^{(IV)} - 2K\dot{x} = 0. \quad (1.9)$$

Лемма 1.3. Уравнение (1.9) имеет общее решение

$$x = G_3 + e^{H\tau}(G_2\tau^2 + G_1\tau + G_0),$$

где $H = \sqrt[3]{2K}, G_3, G_2, G_1, G_0, K$ – произвольные постоянные, $\tau = t - t_0.$

Таким образом, справедлива

Лемма 1.4. Система (1.7) имеет общее решение

$$\begin{aligned} x &= G_3 + e^{H\tau}(G_2\tau^2 + G_1\tau + G_0), \\ y &= G_3 + e^{H\tau}(G_2\tau^2 + G_1\tau + G_0) - \\ &\frac{1}{4K} \frac{F_3^2(\tau)F_1(\tau) + 4KF_1^2(\tau)F_2(\tau)}{2KF_2^2(\tau)}, \end{aligned}$$

где $H = \sqrt[3]{2K}, G_3, G_2, G_1, G_0, K$ – произвольные постоянные, $\tau = t - t_0,$

$$F_1(\tau) = e^{H\tau}(HG_2\tau^2 + (HG_1 + 2G_2)\tau + G_1 + HG_0),$$

$$F_2(\tau) = e^{H\tau}(H^2G_2\tau^2 + (H^2G_1 + 4HG_2)\tau + 2HG_1 + H^2G_0 + 2G_2),$$

$$F_3(\tau) = e^{H\tau}(H^3G_2\tau^2 + (H^3G_1 + 6H^2G_2)\tau + 3H^2G_1 + H^3G_0 + 6HG_2).$$

С учетом леммы 1.1, леммы 1.2 и уравнения (1.6) положим, что $a = -0,5; d = 0, e = -1,$ а константы c, b, f принимают одно из значений таблицы 1.1, а значения $b = c = f = -\frac{3}{2}.$

В соответствии с уравнением (1.4) и таблицей 1.1 были получены 20 обыкновенных дифференциальных уравнений для функции $z.$ В дополнение к выше приведенным, при $b = c = f = -\frac{3}{2}$ будем иметь $\dot{z} = Ax^3y^3(x+y)^3 - V.$

Если $a = e = -\frac{1}{2}, d = 0,$ то система (1.3) примет вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y}, \\ \ddot{y} = \frac{\dot{x}\dot{y}}{x-y} + \frac{\dot{y}(\dot{x}+\dot{y})}{x+2y}. \end{cases} \quad (1.10)$$

При этом общее решение системы (1.10) можно записать в виде

$$x = -\frac{K}{6}\tau^3 + C_1\tau^2 + C_2\tau + C_3, \quad (1.11)$$

$$y = \frac{K}{3}\tau^3 + D_1\tau^2 + D_2\tau + D_3,$$

C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные, а D_1, D_2, D_3 находятся из соотношений

$$D_1 = \frac{3K^2C_3 - 2KC_1C_2 - 8C_1^3}{4C_2K + 8C_1^2},$$

$$D_2 = -4\frac{C_1}{K}D_1 - 4\frac{C_1^2}{K}, \quad (1.12)$$

$$D_3 = C_3 - 2\frac{C_1C_2}{K}D_1, \tau = t - t_0.$$

В соответствии с условиями леммы 1.1, а также третьим условием леммы 1.2 получим, что если $a = e = -\frac{1}{2}, d = 0$, а константы c, b, f принимают одно из значений, приведенных в таблице 1.1, то система (1.3) обладает свойством Пенлеве.

Для каждого из наборов значений констант взаимодействия c, b, f таблицы 1.1 можно найти 20 обыкновенных дифференциальных уравнений для функции z , при этом x, y определены соотношениями (1.11) и (1.12).

Из всего вышеизложенного заключаем, что верна следующая теорема.

2 Необходимые и достаточные условия наличия свойства Пенлеве у системы (1.3)

Теорема 2.1. Для наличия у системы (1.3) свойства Пенлеве необходимо и достаточно выполнение одного из условий:

1) $a = d = -\frac{1}{2}, e = 0$, константы c, b, f приведены в таблице 1.1;

2) $a = -\frac{1}{2}, d = 0, e = -1$, константы c, b, f приведены в таблице 1.1, а также $b = c = f = -\frac{3}{2}$;

3) $a = e = -\frac{1}{2}, d = 0$, константы c, b, f приведены в таблице 1.1.

Заключение

Для системы (1.2) трех нелинейных дифференциальных уравнений, описывающей движение четырех тел, с помощью замены переменных

$(\tau, x, y, z; \varepsilon\tau, x, y, \varepsilon z)$ получена упрощенная система (1.3). Для данной упрощенной системы найдены необходимые условия наличия мероморфных решений, которые приведены в лемме 1.2. Для каждого из необходимых условий получены достаточные, которые включают в себя наборы констант межчастичного взаимодействия из таблицы 1.1.

Во всех трех случаях леммы 1.2 записаны упрощенные системы, а также найдены их общие решения. Для последнего уравнения системы (1.3) в соответствии с наборами констант из таблицы 1.1 для функции z получены простейшие дифференциальные уравнения, общее решение которых можно записать в замкнутом виде.

Показано, что при найденных наборах значений констант межчастичного взаимодействия в задаче четырех тел в плоскости компоненты общего решения системы (1.3) являются полиномами по t .

ЛИТЕРАТУРА

1. Калоджеро, Ф. Разрешимая задача трех тел и гипотезы Пенлеве / Ф. Калоджеро. – 2-е изд. – Москва : Наука, 2002. – Т. 133: Теоретическая и математическая физика. – 149 с.
2. Лозовская, А.Т. Тест Пенлеве для некоторых систем дифференциальных уравнений, связанных с задачей трех тел / А.Т. Лозовская // Наука-2009 : сб. ст. аспирантов и магистрантов ГрГУ / ГрГУ им. Я. Купалы ; отв.ред. А.Ф. Проневич. – Гродно : ГрГУ, 2009. – С. 48–52.

Поступила в редакцию 16.09.13.

УДК 517.538.52+517.538.53

АСИМПТОТИКА КВАДРАТИЧНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ПАДЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

А.П. Старовойтов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ASYMPTOTICS OF QUADRATIC HERMITE – PADÉ APPROXIMANTS OF THE EXPONENTIAL FUNCTIONS

A.P. Starovoitov

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В работе изучаются асимптотические свойства квадратичных диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде I типа для системы экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=0}^2$ с произвольными различными действительными показателями $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. Доказанные теоремы дополняют известные результаты П. Борвейна и Ф. Вилонского.

Ключевые слова: аппроксимации Эрмита – Паде I типа, квадратичные аппроксимации Эрмита – Паде, асимптотические равенства, метод перевала.

The paper deals with asymptotic properties of diagonal quadratic Hermite – Padé approximants of type I for exponential system $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=0}^2$ with arbitrary real $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. The proved theorems complement the known results of P. Borwein, F. Wielonsky.

Keywords: Hermite – Padé approximants of type I, quadratic and Hermite – Padé approximants, asymptotic equality, saddle-point method.

Введение

Будем рассматривать два типа диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде экспоненциальных функций (по поводу терминологии см. [1]). Один из этих типов (German type – тип II) состоит из совместных рациональных аппроксимаций $\pi_{kn, kn}^j(z; e^{jz}) = P_{kn}^j(z) / Q_{kn}(z)$, $j = 1, 2, \dots, k$ набора экспонент $\{e^{jz}\}_{j=1}^k$, где многочлены P_{kn}^j , Q_{kn} имеют степень не выше kn и определяются из условий

$$Q_{kn}(z)e^{jz} - P_{kn}^j(z) = O(z^{kn+n+1}), z \rightarrow 0. \quad (0.1)$$

Впервые такие конструкции рациональных дробей рассматривал Ш. Эрмит (1873 г.) в связи с доказательством трансцендентности числа e [2], [3]. При доказательстве трансцендентности числа π Линдeman (1882 г.) использовал аналоги дробей Эрмита, построенные уже для системы экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где λ_j – различные алгебраические числа (см. [3]).

Позже (1883 г.) Эрмит [4] ввёл другой тип аппроксимаций (Latin type – тип I). Для набора функций $\{e^{jz}\}_{j=0}^k$ эти аппроксимации совпадают с многочленами $A_0(z), A_1(z), \dots, A_k(z)$ степени не выше $n-1$, для которых

$$\sum_{p=0}^k A_p(z)e^{pz} = O(z^{kn+n-1}), z \rightarrow 0. \quad (0.2)$$

Предполагается, что хотя бы один из многочленов $A_p(z)$ тождественно не равен нулю. К. Малером [5] было показано, что с помощью этого типа аппроксимаций также можно доказать трансцендентность числа e .

В одномерном случае ($k=1$) общая постановка задачи о нахождении полиномов, удовлетворяющих равенствам (0.1), (0.2) принадлежит Паде [6], а построенные два типа полиномов совпадают. В многомерном случае ($k \geq 2$) систематическое изучение аппроксимаций Эрмита – Паде I и II типов связано с появлением работ К. Малера [1], [5] (об участии других авторов в создании формальной теории см. обзоры [7], [8]). Оба типа аппроксимаций Эрмита – Паде, явно различные в многомерном случае, имеют множество применений в теории чисел, в частности, для измерения иррациональности [9], в доказательствах трансцендентности [10] и в исследованиях алгебраической природы математических констант, например, значений дзета функции Римана в натуральных точках, постоянной Эйлера [11] (о других приложениях см. [12], [8], [13]). Как уже было сказано ранее, при $k=1$ мы приходим к классическим аппроксимациям Паде. В этом случае теорема Паде утверждает, что для полиномов $A_0(z) = -P_{n-1}^1(z)$, $A_1(z) = Q_{n-1}(z)$, нормированных так, что $A_1(0) = 1$, при $n \rightarrow \infty$ локально равномерно по $z \in \mathbb{C}$, т. е. на любом

компакте в \mathbb{C} , справедливы асимптотические равенства

$$A_0(z) = -e^{z/2} (1 + O(1/n)),$$

$$A_1(z) = e^{z/2} (1 + O(1/n)).$$

С помощью явных формул П. Борвейн [14] нашёл асимптотику квадратичных ($k = 2$) аппроксимаций Эрмита – Паде I типа. Этот результат был обобщён Ф. Вилонским [15] на случай произвольного k . Равномерная сходимость аппроксимаций Эрмита – Паде II типа $\pi_{kn, kn}^j(z; e^{j\xi})$ к e^{jz} , $j = 1, 2, \dots, k$ на компактах в \mathbb{C} была доказана А.И. Аптекаревым [16]. Им же установлена равномерная сходимость аппроксимаций Эрмита – Паде II типа, построенных для системы экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где λ_j – произвольные отличные от нуля комплексные числа. В работах автора [17], [18] найдена асимптотика таких аппроксимаций соответственно для систем $\{e^{jz}\}_{j=1}^k$ и $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где λ_j – произвольные отличные от нуля действительные числа.

Целью данной статьи является обобщение результатов П. Борвейна о квадратичных диагональных аппроксимациях I типа на системы экспонент $\{e^{\lambda_0 z}, e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}\}$ с произвольными различными действительными показателями $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. Такое обобщение получено в результате исследования асимптотических свойств интегральных представлений многочленов $\{A_n^j(z)\}_{j=0}^2$, $\deg A_n^j \leq n-1$, удовлетворяющих условиям:

$$\sum_{p=0}^2 A_n^p(z) e^{\lambda_p z} = O(z^{3n-1}), z \rightarrow 0. \quad (0.3)$$

При исследовании применяются эффективные для такого анализа методы Лапласа и перевала. Технология их применения является результатом синтеза методов доказательства основных результатов в работах [15], [17] и может быть использована для изучения асимптотических свойств аппроксимаций Эрмита – Паде I рода для систем $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$ при произвольных действительных λ_j и $k > 2$.

Без ограничения общности в дальнейшем будем считать, что $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Общий случай сводится к рассматриваемому. Для этого достаточно равенство (0.3) умножить на $e^{-\lambda^* z}$, где $\lambda^* = \min\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\}$.

1 Предварительные результаты

Полиномы $A_n^0(z)$, $A_n^1(z)$, $A_n^2(z)$, удовлетворяющие равенствам (0.3), могут быть получены решением линейной системы $3n-1$ однородных уравнений с $3n$ неизвестными коэффициентами.

Поэтому нетривиальное решение всегда существует. Легко показать, что такие нетривиальные решения могут быть выписаны в явном виде. Действительно, пусть C_p – граница круга с центром в точке λ_p столь малого радиуса, что все остальные λ_j лежат во внешности этого круга. Используя теорему Коши о вычетах, легко показать, что функции

$$A_n^p(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i} \int_{C_p} \frac{ed\xi}{[\varphi(\xi)]^n}, 0 \leq p \leq 2, \quad (1.1)$$

где $\varphi(\xi) = \xi(\xi - \lambda_1)(\xi - \lambda_2)$, удовлетворяют (0.3) и всем другим условиям.

Далее при изучении асимптотики полиномов (1.1) будем использовать известные методы комплексного анализа. Приведем без доказательств в удобном для нас виде необходимые утверждения [19, с. 398, с. 415].

Утверждение 1.1 (Метод Лапласа). Пусть $f(x)$, $S(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ функции, при этом $S(x)$ принимает только действительные значения, а $f(x)$ может быть комплекснозначной. Полагаем

$$I_n = \int_a^b f(x) e^{nS(x)} dx.$$

Предполагаем, что $S(x)$ в точке $x_0 \in (a, b)$ имеет абсолютный максимум на отрезке $[a, b]$, т. е. $S(x) < S(x_0)$, $x \neq x_0$, $S''(x_0) \neq 0$, и функции $f(x)$, $S(x)$ бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0 . Тогда при $n \rightarrow +\infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$I_n = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_0)}} e^{nS(x_0)} \{f(x_0) + O(1/n)\}. \quad (1.2)$$

Утверждение 1.2 (Метод перевала). Пусть функции $f(z)$ и $S(z)$ регулярны в некоторой односвязной области G , содержащей кусочно гладкую кривую γ и

$$F_n = \int_{\gamma} f(\xi) e^{nS(\xi)} d\xi.$$

Предположим, что $\max_{\xi \in \gamma} \operatorname{Re} S(\xi)$ достигается только в точке z_0 , которая является внутренней точкой контура и простой точкой перевала, т. е. $S'(z_0) = 0$, $S''(z_0) \neq 0$. Считаем также, что в окрестности z_0 контур γ проходит через оба сектора [19, с. 414], в которых $\operatorname{Re} S(\xi) < \operatorname{Re} S(z_0)$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$F_n = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(z_0)}} e^{nS(z_0)} \{f(z_0) + O(1/n)\}. \quad (1.3)$$

Выбор ветви корня в (1.3) определяется из условий

$$\arg \sqrt{-\frac{1}{S''(z_0)}} = \varphi_0,$$

где φ_0 – угол между касательной к кривой l в точке z_0 и положительным направлением действительной оси, а l – линия наибоыстрейшего спуска, проходящая через точку z_0 , т. е. для l в окрестности z_0 выполняются условия: $ImS(z) = ImS(z_0)$ при $z \in l$, $ReS(z) < ReS(z_0)$ при $z \in l$, $z \neq z_0$.

2 Асимптотика квадратичных аппроксимаций Эрмита – Паде

Перейдём непосредственно к изучению асимптотики полиномов A_n^p , $0 \leq p \leq 2$. С этой целью введём необходимые обозначения. Пусть x_i , $i = 1, 2$ нули функции $\varphi'(\xi)$, т. е. $\varphi'(x_i) = 0$, $i = 1, 2$. Ясно, что x_i – действительные числа и $x_1 \in (0, \lambda_1)$, $x_2 \in (\lambda_1, \lambda_2)$. При $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_j\}_{j=0}^2$ рассмотрим однозначную функцию (главную ветвь логарифма)

$$S(\xi) = -\ln \varphi(\xi) = -\ln |\varphi(\xi)| - i \arg_0 \varphi(\xi),$$

где $\arg_0 \varphi(\xi) \in (-\pi, \pi]$. В области её определения справедливы равенства

$$S'(\xi) = -\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)} = -\frac{1}{\xi} - \frac{1}{(\xi - \lambda_1)} - \frac{1}{(\xi - \lambda_2)},$$

$$S''(\xi) = -\frac{\varphi''(\xi)\varphi(\xi) - [\varphi'(\xi)]^2}{\varphi^2(\xi)} =$$

$$= \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{(\xi - \lambda_1)^2} + \frac{1}{(\xi - \lambda_2)^2},$$

из которых следует, что $S'(x_j) = 0$,

$$S''(x_j) = -\varphi''(x_j) / \varphi(x_j) > 0, \quad j = 1, 2.$$

Теорема 2.1. При $n \rightarrow \infty$ локально равномерно по z

$$A_n^0(z) = \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_1)}} e^{nS(x_1)} e^{x_1 z} (1 + O(1/n)), \quad (2.1)$$

$$A_n^1(z) = \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_2)}} e^{nS(x_2)} e^{(x_2 - \lambda_1)z} (1 + O(1/n)) -$$

$$- \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_1)}} e^{nS(x_1)} e^{(x_1 - \lambda_1)z} (1 + O(1/n)), \quad (2.2)$$

$$A_n^2(z) = -\sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_2)}} e^{nS(x_2)} e^{(x_2 - \lambda_2)z} (1 + O(1/n)). \quad (2.3)$$

Доказательство. Исходя из интегрального представления

$$A_n^0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} e^{\xi z} e^{nS(\xi)} d\xi, \quad (2.4)$$

докажем равенство (2.1) для каждого фиксированного $z \in \mathbb{C}$. Для этого в интеграле (2.4) деформируем контур интегрирования C_0 в

прямоугольник R , принадлежащий области $\{z: -\infty < Re z < \lambda_1\}$, с вершинами в точках $A(-a', -r)$, $B(-a', r)$, $C(a, r)$, $D(a, -r)$, где r – достаточно большое положительное число, $a \in (0, \lambda_1)$, $a' > 0$. Тогда на вертикальном отрезке, соединяющем точки A и B , максимум функции $ReS(\xi)$ достигается в единственной точке $-a'$. Аналогично на вертикальном отрезке, соединяющем точки C и D , максимум этой функции достигается в единственной точке a . На оставшихся двух горизонтальных отрезках при достаточно большом r значения $ReS(\xi)$ меньше каждого из значений $ReS(\xi)$ в точках $-a'$ и a . Действительно, пусть, например, $\xi \in [B, C]$, т. е. $\xi = t + ir$, $t \in [-a', a]$. Тогда

$$|\varphi(\xi)| = \sqrt{(t^2 + r^2)((t - \lambda_1)^2 + r^2)((t - \lambda_2)^2 + r^2)} >$$

$$> \min\{|\varphi(-a')|, |\varphi(a)|\},$$

если только $r > 2 \max\{a', \lambda_2\}$. Отсюда и определения $S(\xi)$ следует, что для всех $\xi \in [B, C]$ $ReS(\xi) < \min\{ReS(-a'), ReS(a)\}$. Определимся теперь с выбором a' и a . Положим $a = x_1$, а a' возьмём таким, чтобы $ReS(-a') < ReS(x_1)$. Такой выбор возможен, так как $\ln |\varphi(t)|^{-1} \rightarrow -\infty$ при $t \in \mathbb{R}$ и $t \rightarrow -\infty$.

Считаем положительным направление обхода произвольного отрезка $[L, N]$ направление от L к N и полагаем

$$F_n^{[L, N]}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{[L, N]} e^{\xi z} e^{nS(\xi)} d\xi.$$

Применим метод перевала (утверждение 1.2) к интегралу $F_n^{[D, C]}(z)$. Тогда

$$F_n^{[D, C]}(z) = \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_1)}} e^{nS(x_1)} e^{x_1 z} (1 + O(1/n)). \quad (2.5)$$

Выбираем ветвь корня в (2.5) с учётом того, что в рассматриваемом случае угол $\varphi_0 = \pi/2$. Тогда окончательно получим, что при $n \rightarrow \infty$

$$F_n^{[D, C]}(z) = \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_1)}} e^{nS(x_1)} e^{x_1 z} (1 + O(1/n)). \quad (2.6)$$

Применяя к интегралу $F_n^{[B, A]}(z)$ утверждение 1.2 и учитывая выбор точки $-a'$, нетрудно показать, что локально равномерно по z

$$|F_n^{[B, A]}(z)| \leq \theta |e^{n(S(x_1) - \delta)}|,$$

где θ и δ – положительные постоянные. Это значит, что при $n \rightarrow \infty$ интеграл $F_n^{[B, A]}(z)$ экспоненциально мал по сравнению с $e^{nS(x_1)}$. Это утверждение справедливо и по отношению к интегралам $F_n^{[C, B]}(z)$, $F_n^{[A, D]}(z)$. Значит основной

вклад в асимптотику $A_n^0(z)$ вносит интеграл по отрезку $[D, C]$. Поэтому из (2.6) следует справедливость равенства (2.1) для любого фиксированного $z \in \mathbb{C}$.

Равенство (2.3) доказывается аналогично, с той лишь разницей, что при применении метода перевала к соответствующему интегралу ветвь корня выбирается с учётом того, что угол $\varphi_0 = -\pi/2$.

Перейдем к доказательству равенства (2.2). Зафиксируем произвольное $z \in \mathbb{C}$ и представим многочлен $A_n^1(z)$ в виде

$$A_n^1(z) = \frac{e^{-\lambda_1 z}}{2\pi i} \int_{C_1} e^{\xi z} e^{nS(\xi)} d\xi. \quad (2.7)$$

В интеграле (2.7) деформируем контур интегрирования C_1 в прямоугольник R^* , принадлежащий области $\{z: 0 < \operatorname{Re} z < \lambda_2\}$ с вершинами в точках $A^*(a', -r)$, $B^*(a', r)$, $C^*(a, r)$, $D^*(a, -r)$, где r – достаточно большое положительное число, $a' \in (0, \lambda_1)$, $a \in (\lambda_1, \lambda_2)$. Тогда на вертикальном отрезке, соединяющем точки A^* и B^* , максимум функции $\operatorname{Re} S(\xi)$ достигается в единственной точке a' , а на отрезке $[D^*, C^*]$ он достигается в единственной точке a . При достаточно большом r ($r > 3\lambda_2$) значения $\operatorname{Re} S(\xi)$ на оставшихся двух горизонтальных отрезках $[B^*, C^*]$ и $[A^*, D^*]$ меньше каждого из значений $\operatorname{Re} S(\xi)$ в точках a' и a . Если положить $a' = x_1$, $a = x_2$, то отсюда следует, что основной вклад в асимптотику $A_n^1(z)$ будут вносить интегралы по отрезкам $[A^*, B^*]$ и $[D^*, C^*]$. Применяя к ним утверждение 1.2, при $n \rightarrow \infty$ получим, что

$$F_n^{[D, C]}(z) = \frac{e^{-\lambda_1 z}}{2\pi i} \sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_2)}} e^{nS(x_2)} e^{x_2 z} (1 + O(1/n)). \quad (2.8)$$

$$F_n^{[B, A]}(z) = \frac{e^{-\lambda_1 z}}{2\pi i} \sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_1)}} e^{nS(x_1)} e^{x_1 z} (1 + O(1/n)). \quad (2.9)$$

Заметим, что при выборе ветви корня в (2.8) $\varphi_0 = \pi/2$, а при выборе ветви корня в (2.9) $\varphi_0 = -\pi/2$. С учётом этого, из (2.8) и (2.9) следует равенство (2.2). Таким образом, для каждого фиксированного z асимптотические равенства (2.1)–(2.3) доказаны. Справедливость равенств (2.1)–(2.3) равномерно на компактах в \mathbb{C} будет обоснована при доказательстве теоремы 2.2.

Следствие 2.1. При $n \rightarrow \infty$

$$A_n^0(0) = \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_1)}} e^{nS(x_1)} (1 + O(1/n)),$$

$$A_n^1(0) = \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_2)}} e^{nS(x_2)} (1 + O(1/n)) -$$

$$-\sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_1)}} e^{nS(x_1)} (1 + O(1/n)), \quad (2.10)$$

$$A_n^2(0) = -\sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_2)}} e^{nS(x_2)} (1 + O(1/n)),$$

Из равенств (2.10) следует, что при достаточно больших n $A_n^0(0) \neq 0$ и $A_n^2(0) \neq 0$. При таких n определим две последовательности нормированных полиномов

$$\tilde{A}_n^0(z) = A_n^0(z) / A_n^0(0),$$

$$\tilde{A}_n^2(z) = A_n^2(z) / A_n^2(0).$$

Выясним, когда $A_n^1(0) \neq 0$. Обозначим через

$$p = \sqrt{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2}, \quad h = 5\lambda_1 \lambda_2 - 2\lambda_1^2 - 2\lambda_2^2.$$

Тогда несложные вычисления приводят к равенствам

$$x_1 = (\lambda_1 + \lambda_2 - p) / 3, \quad x_2 = (\lambda_1 + \lambda_2 + p) / 3,$$

$$\varphi(x_1) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)h + 2p^3}{27}, \quad (2.11)$$

$$\varphi(x_2) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)h - 2p^3}{27},$$

$$S''(x_1) = \ln \frac{54p}{(\lambda_1 + \lambda_2)h + 2p^3},$$

$$S''(x_2) = \ln \frac{-54p}{(\lambda_1 + \lambda_2)h - 2p^3}.$$

Из (2.11) следует, что если $A_n^1(0) = 0$, то необходимо чтобы $h = 0$, т. е. $\lambda_2 = 2\lambda_1$. В этом случае

$$S(x_1) = \ln(27 / p^3),$$

$$S(x_2) = \ln(27 / p^3) + i\pi,$$

$$S''(x_1) = S''(x_2) = 27 / p^2.$$

Поэтому при $\lambda_2 = 2\lambda_1$ из второго равенства в (2.10) вытекает, что при $n \rightarrow \infty$

$$A_n^1(0) = \sqrt{\frac{p^2}{54\pi n}} \left[(-1)^n \left(\frac{27}{p^3} \right)^n (1 + O(1/n)) - \left(\frac{27}{p^3} \right)^n (1 + O(1/n)) \right].$$

Следовательно, при достаточно больших n $A_{2n+1}^1(0) \neq 0$ и поэтому определена последовательность нормированных многочленов

$$\tilde{A}_{2n+1}^1(z) = A_{2n+1}^1(z) / A_{2n+1}^1(0).$$

Производную многочлена $A_n^1(z)$ можно представить в виде

$$\frac{dA_n^1}{dz}(z) = \frac{e^{-\lambda_1 z}}{2\pi i} \int_{C_1} (\xi - \lambda_1) e^{\xi z} e^{nS(\xi)} d\xi.$$

Аналогично, как и при нахождении асимптотики $A_n^1(z)$, применив к интегралу в правой части последнего равенства при $z = 0$ метод перевала, получим

$$\frac{dA_n^1}{dz}(0) = \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_2)}} (x_2 - \lambda_1) e^{nS(x_2)} (1 + O(1/n)) - \sqrt{\frac{1}{2\pi n S''(x_1)}} (x_1 - \lambda_1) e^{nS(x_1)} (1 + O(1/n)).$$

Тогда при $\lambda_2 = 2\lambda_1$ и $n \rightarrow \infty$ справедливо равенство

$$\frac{dA_n^1}{dz}(0) = \sqrt{\frac{p^2}{54\pi n}} \left(\frac{27}{p^3}\right)^n (x_2 - x_1) (1 + O(1/n)),$$

из которого следует, что при больших n $(A_{2n}^1)'(0) \neq 0$. Поэтому в случае, когда $\lambda_2 = 2\lambda_1$, определена последовательность нормированных полиномов $\tilde{A}_{2n}^1(z) = A_{2n}^1(z) / (A_{2n}^1)'(0)$.

Теорема 2.2. *Локально равномерно по z при $n \rightarrow \infty$*

$$\tilde{A}_n^0(z) \Rightarrow e^{x_1 z}, \quad \tilde{A}_n^2(z) \Rightarrow e^{(x_2 - \lambda_2)z}. \quad (2.12)$$

Если $\lambda_2 \neq 2\lambda_1$, то локально равномерно по z при $n \rightarrow \infty$

$$\tilde{A}_n^1(z) \Rightarrow e^{(x_2 - \lambda_4)z}, \quad (2.13)$$

а при $\lambda_2 = 2\lambda_1$ и $n \rightarrow \infty$ локально равномерно по z

$$\tilde{A}_{2n+1}^1(z) \Rightarrow \frac{1}{2} (e^{(x_2 - \lambda_4)z} + e^{(x_1 - \lambda_4)z}), \quad (2.14)$$

$$\tilde{A}_{2n}^1(z) \Rightarrow \frac{1}{x_2 - x_1} (e^{(x_2 - \lambda_4)z} - e^{(x_1 - \lambda_4)z}). \quad (2.15)$$

Доказательство. Поточечная сходимость в (2.12)–(2.15) доказана в теореме 2.1. Остается доказать, что нормированные многочлены $\tilde{A}_n^0(z)$, $\tilde{A}_n^2(z)$, $\tilde{A}_n^1(z)$, $\tilde{A}_{2n+1}^1(z)$ и $\tilde{A}_{2n}^1(z)$ равномерно сходятся на компактах в \mathbb{C} к соответствующим функциям. Докажем это, например, для $\tilde{A}_n^0(z)$.

Если предположить, что $|z| \leq \rho$ и $\xi \in R$, то модуль $e^{\xi z}$ ограничен $M = e^{4\rho \max\{\lambda_1, \lambda_2\}}$. Учитывая равенство (2.4), в этом случае получим, что

$$|A_n^0(z)| \leq \frac{M}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} e^{n \operatorname{Re} S(\zeta(t))} |\zeta'(t)| dt$$

при условии, что контур интегрирования R прежний и параметризуется вещественным параметром $t \in [\alpha, \beta]$. Для нахождения асимптотики интеграла в правой части предыдущего неравенства применим метод Лапласа (утверждение 1.1). В результате получим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{n \operatorname{Re} S(\zeta(t))} |\zeta'(t)| dt = \sqrt{\frac{-2\pi}{n [\operatorname{Re} S(\zeta(t))]'_{t=t_0}}} e^{n \operatorname{Re} S(x_1)} |\zeta'(t_0)| (1 + O(1/n)), \quad (2.16)$$

где t_0 выбрано так, что $\zeta(t_0) = x_1$. Из того, что t_0 является точкой максимума функции $\operatorname{Re} S(\zeta(t))$, следует

$$[\operatorname{Re} S(\zeta(t))]'_{t=t_0} = S''(x_1) [\zeta'(t_0)]^2 < 0.$$

Отсюда, учитывая (2.10), (2.16), при $n \geq n_0$ получаем неравенство $|A_n^0(z)| \leq 2M$, из которого следует, что последовательность $\{A_n^0(z)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена по модулю в круге $\{z : |z| \leq \rho\}$. Тогда по теореме Витали [20, с. 371] эта последовательность равномерно сходится к функции $e^{x_1 z}$ на любом компакте из круга $\{z : |z| \leq \rho\}$. Аналогичные рассуждения применимы и к другим последовательностям из теоремы 2.2. Теорема 2.2 доказана.

Для сравнения переформулируем, с учётом принятых обозначений, аналогичный результат об асимптотике аппроксимаций Эрмита-Паде II рода [18].

Теорема 2.3. *Пусть $\pi_{2n,2n}^j(z; e^{\lambda_j z})$, $j = 1, 2$ – аппроксимации Эрмита – Паде II рода для набора $\{e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}\}$, где λ_1, λ_2 – различные действительные числа. Тогда локально равномерно по z при $n \rightarrow \infty$*

$$\begin{aligned} & e^{\lambda_1 z} - \pi_{2n,2n}^1(z; e^{\lambda_1 z}) = \\ &= \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} e^{(\lambda_1 + \lambda_2)z/3} \sqrt{\frac{2\pi}{n S''(x_1)}} e^{-n S(x_1)} e^{(\lambda_1 - x_1)z} (1 + O(1/n)), \\ & e^{\lambda_2 z} - \pi_{2n,2n}^2(z; e^{\lambda_2 z}) = \\ &= \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} e^{\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)z}{3}} \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{n S''(x_1)}} e^{-n S(x_1)} e^{(\lambda_2 - x_1)z} (1 + O(1/n)) + \right. \\ & \left. + (-1)^n \sqrt{\frac{2\pi}{n S''(x_2)}} e^{-n S(x_2)} e^{(\lambda_2 - x_2)z} (1 + O(1/n)) \right\}. \end{aligned}$$

3 Сравнение двух типов аппроксимаций.

Примеры

Проиллюстрируем теорему 2.1, рассмотрев конкретные примеры. Кроме этого, сравним полученные результаты с аналогичными утверждениями для аппроксимаций Эрмита – Паде II типа.

Напомним, что две бесконечно большие или две бесконечно малые последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ называют эквивалентными ($\alpha_n \sim \beta_n$) при

$$n \rightarrow \infty, \text{ если } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1.$$

Пусть $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \xi(\xi - 1)(\xi - 2), \\ x_1 &= 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ S(x_1) &= \ln(3\sqrt{3}/2), \\ S(x_2) &= \ln(3\sqrt{3}/2) + i\pi, \\ S''(x_1) &= S''(x_2) = 9. \end{aligned}$$

Поэтому из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 3.1. При $n \rightarrow \infty$

$$A_n^0(z) \sim \frac{1}{3\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{(1-1/\sqrt{3})z}, \quad (3.1)$$

$$A_n^1(z) \sim (-1)^n \frac{1}{3\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^n \left(e^{z/\sqrt{3}} + (-1)^{n-1} e^{-z/\sqrt{3}}\right),$$

$$A_n^2(z) \sim (-1)^{n-1} \frac{1}{3\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{(-1+1/\sqrt{3})z}.$$

Асимптотические равенства (3.1) согласуются с соответствующими утверждениями из работ [14] и [15]. Их полезно сравнить со следующим следствием теоремы 2.3.

Следствие 3.2. Пусть $\pi_{2n,2n}^j(z; e^{j\xi})$, $j = 1, 2$ – аппроксимации Эрмита – Паде II рода для набора $\{e^z, e^{2z}\}$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$e^z - \pi_{2n,2n}^1(z; e^\xi) \sim \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} e^z \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n e^{z/\sqrt{3}},$$

$$e^{\lambda_2 z} - \pi_{2n,2n}^1(z; e^{\lambda_2 \xi}) \sim$$

$$\sim \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} e^{2z} \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n \left(e^{z/\sqrt{3}} + (-1)^n e^{-z/\sqrt{3}}\right).$$

Пусть теперь $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + \varepsilon$. Будем считать, что $0 < \varepsilon < 1$. Случай $\varepsilon = 1$ рассмотрен в следствиях 2.1 и 3.1. Тогда

$$p = \sqrt{1 + \varepsilon + \varepsilon^2} \rightarrow 1, \quad h = 1 + \varepsilon - 2\varepsilon^2 \rightarrow 1$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, и

$$\varphi(\xi) = \xi(\xi - 1)(\xi - 1 - \varepsilon),$$

$$x_1 = \frac{2 + \varepsilon - p}{3}, \quad x_2 = \frac{2 + \varepsilon + p}{3},$$

$$S(x_1) = \ln \frac{27}{2p^3 + (2 + \varepsilon)h},$$

$$S(x_2) = \ln \frac{27}{2p^3 - (2 + \varepsilon)h} + i\pi,$$

$$S^n(x_1) = \frac{54p}{2p^3 + (2 + \varepsilon)h}, \quad S^n(x_2) = \frac{54p}{2p^3 - (2 + \varepsilon)h}.$$

В этом случае из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 3.3. При $n \rightarrow \infty$

$$\tilde{A}_n^0(z) \sim$$

$$\sim \sqrt{\frac{2p^3 + (2 + \varepsilon)h}{108\pi pn}} \left(\frac{27}{2p^3 + (2 + \varepsilon)h}\right)^n e^{\frac{(2+\varepsilon-p)z}{3}},$$

$$\tilde{A}_n^1(z) \sim$$

$$\sim (-1)^n \sqrt{\frac{2p^3 - (2 + \varepsilon)h}{108\pi pn}} \left(\frac{27}{2p^3 - (2 + \varepsilon)h}\right)^n e^{\frac{(-1+\varepsilon+p)z}{3}}, \quad (3.2)$$

$$\tilde{A}_n^2(z) \sim$$

$$\sim (-1)^n \sqrt{\frac{2p^3 - (2 + \varepsilon)h}{108\pi pn}} \left(\frac{27}{2p^3 - (2 + \varepsilon)h}\right)^n e^{\frac{(-1-2\varepsilon+p)z}{3}}.$$

Соответственно, теорема 2.3 в этом случае выглядит следующим образом.

Следствие 3.4. Пусть

$$\pi_{2n,2n}^1(z; e^\xi), \quad \pi_{2n,2n}^2(z; e^{(1+\varepsilon)\xi})$$

– аппроксимации Эрмита – Паде II рода для набора $\{e^z, e^{(1+\varepsilon)z}\}$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & e^z - \pi_{2n,2n}^1(z; e^\xi) \sim \\ & \sim \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} \sqrt{\frac{\pi(2p^3 + (2 + \varepsilon)h)}{27pn}} \left(\frac{2p^3 + (2 + \varepsilon)h}{27}\right)^n e^{\frac{(3+p)z}{3}}, \\ & e^{(1+\varepsilon)z} - \pi_{2n,2n}^2(z; e^{(1+\varepsilon)\xi}) \sim \\ & \sim \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} \sqrt{\frac{\pi(2p^3 + (2 + \varepsilon)h)}{27pn}} \times \\ & \times \left(\frac{2p^3 + (2 + \varepsilon)h}{27}\right)^n e^{\frac{(3+3\varepsilon+p)z}{3}}. \end{aligned}$$

Сравним как ведут себя асимптотики соответствующих аппроксимаций для набора функций $\{e^z, e^{(1+\varepsilon)z}\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Из равенств (3.2) следует, что главные члены асимптотик полиномов $\tilde{A}_n^1(z)$ и $\tilde{A}_n^2(z)$ отличаются на множитель $e^{\varepsilon z}$, который локально равномерно стремится к единице. Следствие 3.4 позволяет утверждать, что при малых значениях ε асимптотики соответствующих уклонений аппроксимаций Эрмита – Паде II рода отличаются несущественно и с убыванием ε к нулю стремятся к общему значению. При этом зависящий от ε множитель $(2p^3 + (2 + \varepsilon)h) / 27)^n$, определяющий поведение главного члена асимптотики, стремится к $(2 / (3\sqrt{3}))^{2n}$. Это несколько неожиданно, если принять во внимание первое утверждение следствия 3.2, так как наблюдается эффект существенного роста (почти в $(2 / (3\sqrt{3}))^n$ раз) скорости приближения функции e^z аппроксимациями Эрмита – Паде из следствия 3.4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mahler, K. Perfect systems / K. Mahler // Comp. Math. – 1968. – V. 19. – P. 95–166.
2. Hermite, C. Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Akad. Sci. (Paris) – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.
3. Клейн, Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 1 / Ф. Клейн. – М.: Наука, 1933.
4. Hermite, C. Sur la généralisation des fractions continues algébriques / C. Hermite // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A – 1883. – Vol. 21. – P. 289–308.
5. Mahler, K. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I, II / K. Mahler // J. Reine Angew. Math. – 1931. – Vol. 166. – P. 118–150.

6. *Padé, H.* Memoire sur les developpements en fractions continues de la fonctial exponential // Ann. École Norm. Sup. Paris. – 1899. – Vol. 16. № 3. – P. 394–426.
7. *Aptekarev, A.I.* Asymptotics of Hermite-Padé polynomials, in “Progress in Approximation Theory” (A.A. Gonchar and E.B. Saff, Eds.) – P. 127–167 / A.I. Aptekarev, H. Stahl. – New York / Berlin : Springer-Verlag, 1992.
8. *Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены* / А.И. Аптекарев [и др.] // Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 6 (402). – С. 37–122.
9. *Mahler, K.* Applications of some formulas by Hermite to the approximation of exponentials and logarithms / K. Mahler // Math. Ann. – 1967. – Vol. 1668. – P. 200–227.
10. *Chudnovsky, G.V.* Hermite-Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π , in “Lecture Notes in Math” / G.V. Chudnovsky. – New York / Berlin : Springer-Verlag. – 1982. – Vol. 925. – P. 299–322.
11. *Аптекарев, А.И.* Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения / А.И. Аптекарев // Сборник статей. Совр. пробл. матем / А.И. Аптекарев (ред.). – М. : МИАН. – 1988. – Т. 9. – С. 1–71.
12. *Калягин, В.А.* Аппроксимации Эрмита – Паде и спектральный анализ несимметричных операторов / В.А. Калягин // Матем. сборник. – 1994. – Т. 185, № 6. – С. 79–100.
13. *Суетин, С.П.* Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда / С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2002. – Т. 57, № 1 – С. 45–142.
14. *Borwein, P.B.* Quadratic Hermite – Padé approximation to the exponential function / P.B. Borwein // Const. Approx. – 1986. – Vol. 62. – P. 291–302.
15. *Wielonsky, F.* Asymptotics of Diagonal Hermite – Padé Approximants to e^z / F. Wielonsky // J. Approx. Theory. – 1997. – Vol. 90, № 2. – P. 283–298.
16. *Аптекарев, А.И.* О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент / А.И. Аптекарев // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика. Механика. – 1981. – № 1. – С. 68–74.
17. *Старовойтов, А.П.* Асимптотика эрмитовой аппроксимации экспонент / А.П. Старовойтов // Известия Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины. – 2012. – № 5 (74). – С. 163–171.
18. *Старовойтов, А.П.* Аппроксимации Эрмита – Паде для системы функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (14). – С. 81–87.
19. *Сидоров, Ю.В.* Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – М. : Наука, 1989.
20. *Маркушевич, А.И.* Теория аналитических функций. Том 1 / А.И. Маркушевич. – М. : Наука, 1967.

Поступила в редакцию 29.01.14.

УДК 517.925

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Чжиньсинь Чжоу

Янчжоуский университет, Янчжоу, Китай

ON THE PERIODIC SOLUTIONS OF THE RATIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Zhengxin Zhou

Yangzhou University, Yangzhou, China

В работе используется метод Мироненко для изучения периодических рациональных дифференциальных уравнений. Полученные результаты применяются для получения достаточных условий центра особых точек полиномиальных дифференциальных систем.

Ключевые слова: отражающая функция; условия центра; периодические решения.

In this paper Mironenko method to study the periodic solutions of the rational differential equations is used. The obtained results to derive the sufficient conditions for a critical point of some polynomial differential systems to be a center are applied.

Keywords: reflecting function; center conditions; periodic solution.

AMS subject classifications: 34A12.

Introduction

This paper deals with the qualitative behavior of solutions of rational differential equation

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 + a_4 r^4}{b_0 + b_1 r + r^2} := X(\theta, r) \quad (0.1)$$

which has a continuous differentiable right-hand side and a unique solution for the initial value problem,

$$a_i := a_i(\theta), i = 0, 1, 2, 3, 4; b_j := b_j(\theta), j = 0, 1.$$

The main reason of great interest in these equations is that they are closely related to planar vector fields. It is known [1]–[3], for polynomial differential system

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=1}^{n+1} p_{ij} x^i y^j, \\ \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=1}^{n+1} q_{ij} x^i y^j, \end{cases} \quad (0.2)$$

where p_{ij}, q_{ij} are real constants. There has been a longstanding problem, called the Poincaré center-focus problem, for the system (0.2) one can find explicit conditions of p_{ij}, q_{ij} under which (0.2) has a center at the origin $(0, 0)$, i. e., all the orbits nearby are closed. This problem is equivalent to an analogue for a corresponding periodic equation

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i(\theta) r^{i+1}}{\sum_{i=0}^n b_i(\theta) r^i}. \quad (0.3)$$

To see this let us note that the phase curves of

(0.2) near the origin $(0, 0)$ in polar coordinates $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ are determined by (0.3), where $a_i(\theta), b_i(\theta), i = 0, 1, 2, \dots, n$ are polynomials in $\cos \theta, \sin \theta$.

The limit cycles of (0.2) correspond to 2π -periodic solutions of (0.3). The planar vector field (0.2) has a center at $(0, 0)$ if and only if the equation (0.3) has a center at $r = 0$, i. e., all the solutions nearby are 2π -periodic [1]–[3].

The method of Lyapunov is often used to study the center-focus problem, but for high-order systems it is very difficult to give the center conditions. In this paper the method of reflecting function to study the behavior of solutions of (0.1) with the sufficient conditions for $r = 0$ to be a center is applied.

Now the concept of the reflecting function, which will be used throughout the rest of this article is introduced.

1 The main facts from the theory of reflecting function

Consider differential system

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), t \in R, x \in R^n \quad (1.1)$$

which has a continuous differentiable right-hand side and general solution $\varphi(t; t_0, x_0)$.

For each such system, the reflecting function is defined (see [4]) as $F(t, x) := \varphi(-t; t, x)$. Therefore, for any solution $x(t)$ of (1.1)

$$F(t, x(t)) = x(-t), F(0, x) = 0.$$

If the system (1.1) is 2ω -periodic with respect to t , and $F(t, x)$ is its reflecting function, then

$$T(x) := F(-\omega, x) = \varphi(\omega; -\omega, x)$$

is the Poincaré mapping of (1.1) over the period $[-\omega, \omega]$. Thus, the solution $x = \varphi(t; -\omega, x_0)$ of (1.1) defined on $[-\omega, \omega]$ is 2ω -periodic if and only if x_0 is a fixed point of $T(x)$. The stability of this periodic solution is equivalent to the stability of the fixed point x_0 .

A differentiable function $F(t, x)$ is a reflecting function of the system (1.1) if and only if it is a solution of the Cauchy problem

$$F_t + F_x X(t, x) + X(-t, F) = 0, \\ F(0, x) = x$$

There are many papers which are also devoted to the investigations of qualitative behavior of solutions of differential systems with the help of reflecting functions [4]–[14].

2 Reflecting function and periodic solutions of the equation

Let us consider differential equation (0.1).

Theorem 2.1. Suppose that functions

$$\alpha_0 := a_4, \\ \alpha_1 := a_3 - a_4 b_1,$$

$$\alpha_2 := a_2 - a_3 b_1 - 2a_4 b_0 + \frac{1}{4} a_4 b_1^2$$

are odd functions and

$$a_1 + a_3 b_0 + \frac{1}{2} a_3 b_1^2 - a_2 b_1 - 2a_4 b_1 b_0 + \frac{1}{2} b_1 b_1' - b_0' = 0;$$

$$a_0 + \frac{1}{2} a_3 b_1 b_0 + \frac{1}{8} a_3 b_1^2 - a_2 b_1^2 - \frac{1}{2} a_4 b_0 b_1^2 -$$

$$-a_4 b_0^2 - \frac{1}{2} b_1 b_1' + \frac{1}{2} b_0 b_1' + \frac{1}{8} b_1^2 b_1' = 0.$$

Then the reflecting function $F(\theta, r)$ of equation (0.1) satisfies the following relation

$$F + \frac{\bar{b}_1^2 - 4\bar{b}_0}{4F + 2\bar{b}_1} = r + \frac{b_1^2 - 4b_0}{4r + 2b_1}, \quad (2.1)$$

where $\bar{b}_0 := b_0(-\theta)$, $\bar{b}_1 := b_1(-\theta)$.

Proof. To prove the present result one only needs to check that the function F implied from (2.1), satisfies

$$F_\theta + F_r X(\theta, r) + X(-\theta, F) = 0, \\ F(0, r) = 0. \quad (2.2)$$

Let

$$\Phi := F + \frac{\bar{b}_1^2 - 4\bar{b}_0}{4F + 2\bar{b}_1} - r - \frac{b_1^2 - 4b_0}{4r + 2b_1},$$

then

$$F_\theta = -\frac{\Phi_\theta}{\Phi_F}, \quad F_r = -\frac{\Phi_r}{\Phi_F}.$$

Substituting it into (2.2)

$$\frac{(\bar{b}_1^2 - 4\bar{b}_0)'(4F + 2\bar{b}_1) - 2\bar{b}_1'(\bar{b}_1^2 - 4\bar{b}_0)}{(4F + 2\bar{b}_1)^2} -$$

$$\frac{(b_1^2 - 4b_0)'(4r + 2b_1) - 2b_1'(b_1^2 - 4b_0)}{(4r + 2b_1)^2} =$$

$$= \left(1 - \frac{4(\bar{b}_1^2 - 4\bar{b}_0)}{(4F + 2\bar{b}_1)^2} \right) \bar{X} - \left(\frac{4(b_1^2 - 4b_0)}{(4r + 2b_1)^2} - 1 \right) X,$$

where $\bar{X} := X(-\theta, F)$.

On the other hand, by simple computation

$$\left(\frac{4(b_1^2 - 4b_0)}{(4r + 2b_1)^2} - 1 \right) X -$$

$$- \frac{(b_1^2 - 4b_0)'(4r + 2b_1) - 2b_1'(b_1^2 - 4b_0)}{(4r + 2b_1)^2} =$$

$$= - \left(\alpha_0 + \alpha_1 \left(r + \frac{b_1^2 - 4b_0}{4r + 2b_1} \right) + \alpha_2 \left(r + \frac{b_1^2 - 4b_0}{4r + 2b_1} \right)^2 \right),$$

$$\left(1 - \frac{4(\bar{b}_1^2 - 4\bar{b}_0)}{(4F + 2\bar{b}_1)^2} \right) \bar{X} -$$

$$- \frac{(\bar{b}_1^2 - 4\bar{b}_0)'(4F + 2\bar{b}_1) - 2\bar{b}_1'(\bar{b}_1^2 - 4\bar{b}_0)}{(4F + 2\bar{b}_1)^2} =$$

$$= \bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_1 \left(F + \frac{\bar{b}_1^2 - 4\bar{b}_0}{4F + 2\bar{b}_1} \right) + \bar{\alpha}_2 \left(F + \frac{\bar{b}_1^2 - 4\bar{b}_0}{4F + 2\bar{b}_1} \right)^2.$$

Thus the identity (2.2) becomes

$$\alpha_0 + \alpha_1 \left(r + \frac{b_1^2 - 4b_0}{4r + 2b_1} \right) + \alpha_2 \left(r + \frac{b_1^2 - 4b_0}{4r + 2b_1} \right)^2 + \\ + \bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_1 \left(F + \frac{\bar{b}_1^2 - 4\bar{b}_0}{4F + 2\bar{b}_1} \right) + \bar{\alpha}_2 \left(F + \frac{\bar{b}_1^2 - 4\bar{b}_0}{4F + 2\bar{b}_1} \right)^2 = 0.$$

As $\Phi = 0$, thus the identity (2.2) is correct, i. e., the function $F(\theta, r)$ implied from (2.1) is a reflecting function of (0.1). The proof is finished.

Corollary 2.1. Suppose that all the conditions of Theorem 2.1 are satisfied, and $a_i(\theta), b_j(\theta)$ $i = 0, 1, 2, \dots, 4, j = 0, 1$ are 2π -periodic functions, then all the solutions of (0.1) defined on $[-\pi, \pi]$ are 2π -periodic.

Proof. From the above assumptions it follows that the reflecting function $F(\theta, r)$ of (0.1) satisfies the identity (2.1) and is 2π -periodic, then by [4], all the solutions of (0.1) defined on $[-\pi, \pi]$ are 2π -periodic.

Now let us rewrite (0.1) in the following form

$$\frac{dr}{d\theta} = c_0 + c_1 r + a_4 r^2 + \frac{d_0 + d_1 r}{b_0 + b_1 r + r^2} := Y(\theta, r), \quad (2.3)$$

where

$$c_1 := a_3 - a_4 b_1,$$

$$c_0 := a_2 - a_4 b_0 - b_1 c_1,$$

$$d_1 := a_1 - b_0 c_1 - b_1 c_0,$$

$$d_0 := a_0 - b_0 c_0.$$

Theorem 2.2 Suppose that

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{a_4}{\bar{a}_4} &= -1; \quad a_4^2 d_1 + \bar{a}_4^2 \bar{d}_1 = 0; \\ \bar{d}_0 + d_0 f_1^3 - \bar{b}_1 \bar{d}_1 + b_1 \bar{d}_1 f_1 - \bar{d}_1 f_0 &= 0; \\ d_0 \bar{b}_1 f_1^2 + \bar{d}_0 b_1 + b_1 \bar{d}_1 f_0 + d_1 \bar{b}_1 f_0 f_1 + \\ + (b_0 \bar{d}_1 + \bar{b}_0 d_1) f_1 + 2d_0 f_0 f_1^2 + d_1 f_0^2 f_1 &= 0; \\ d_0 \bar{b}_0 f_1 + b_0 \bar{d}_0 + d_0 \bar{b}_1 f_0 f_1 + d_0 f_0^2 f_1 + b_0 \bar{d}_1 f_0 &= 0; \\ f_0' + \bar{c}_0 + \bar{c}_1 f_0 + \bar{a}_4 f_0^2 + c_0 f_1 &= 0, \end{aligned}$$

where

$$f_1 = -\frac{a_4}{\bar{a}_4}, \quad f_0 = \frac{f_1' + (c_1 + \bar{c}_1) f_1}{2a_4}.$$

Then $F(\theta, r) = f_0 + f_1 r$ is the reflecting function of equation (2.3).

In addition, if $a_i(\theta), b_j(\theta) \quad i = 0, 1, 2, \dots, 4, j = 0, 1$ are 2π -periodic functions, then all the solutions of (2.3) defined on $[-\pi, \pi]$ are 2π -periodic.

Proof. Using the above conditions, it is not difficult to check that $F(\theta, r) = f_0 + f_1 r$ is the solution of the Cauchy problem

$$\begin{aligned} F_\theta + F_r Y(\theta, r) + Y(-\theta, F) &= 0, \\ F(0, r) &= 0. \end{aligned}$$

Therefore, $F(\theta, r) = f_0 + f_1 r$ is the reflecting function of (2.3). On the other hand, as $a_4(\theta), c_1(\theta)$ are 2π -periodic, then $F(\theta, r) = f_0 + f_1 r$ is 2π -periodic, so all the solutions of (2.3) defined on $[-\pi, \pi]$ are 2π -periodic.

Now consider the equation

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{a_2 r^2 + a_3 r^3 + a_4 r^4}{1 + b_1 r + b_2 r^2} := Z(\theta, r) \quad (2.4)$$

which has a continuous differentiable right-hand side and possesses a unique solution for the initial value problem,

$$a_i := a_i(\theta), b_j := b_j(\theta) \quad (i = 2, 3, 4, j = 1, 2).$$

Denoting:

$$\begin{aligned} \delta_1 &:= a_3 - a_2 b_1, \quad \delta_2 := a_4 - a_2 b_2, \\ \alpha &:= \int_0^\theta (a_2(s) + a_2(-s)) ds. \end{aligned}$$

Theorem 2.3. Suppose that δ_1 is an odd function and

$$\begin{aligned} \alpha \delta_1 + \delta_2 + \bar{\delta}_2 + b_1 \bar{\delta}_1 + \bar{b}_1 \delta_1 &= 0; \\ \alpha(\delta_2 - \bar{\delta}_2) + \bar{b}_1 \delta_2 + b_1 \bar{\delta}_2 + \bar{b}_2 \delta_1 + b_2 \bar{\delta}_1 &= 0; \\ \alpha^2(\delta_2 + \bar{\delta}_2) + \alpha(\bar{b}_1 \delta_2 - b_1 \bar{\delta}_2 + b_2 \bar{\delta}_1 - \bar{b}_2 \delta_1) + \\ + 2\bar{b}_2 \delta_2 + 2b_2 \bar{\delta}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Then $F = \frac{r}{1 + \alpha r}$ is the reflecting function of

(2.4). Besides, if $a_i(\theta), b_j(\theta) \quad i = 0, 1, 2, \dots, 4, j = 0, 1$ are 2π -periodic functions, then all the solutions of (2.4) defined on $[-\pi, \pi]$ are 2π -periodic.

Proof. Using the above assumptions, it is not

difficult to check that $F = \frac{r}{1 + \alpha r}$ is the solution of the Cauchy problem

$$\begin{aligned} F_\theta + F_r Z(\theta, r) + Z(-\theta, F) &= 0, \\ F(0, r) &= 0. \end{aligned}$$

Thus, $F = \frac{r}{1 + \alpha r}$ is the reflecting function of (2.4) and 2π -periodic, therefore, the present result is true.

3 Example

Consider polynomial differential system:

$$\begin{cases} x' = -y + P_2 + P_3 + \\ \quad + x(p_{40}x^3 + p_{31}x^2y + p_{22}xy^2 + p_{03}y^3), \\ y' = x + Q_2 + Q_3 + \\ \quad + y(p_{40}x^3 + p_{31}x^2y + p_{22}xy^2 + p_{03}y^3), \end{cases} \quad (3.1)$$

where

$$\begin{aligned} P_k &= \sum_{i+j=k} p_{ij} x^i y^j, \\ Q_k &= \sum_{i+j=k} q_{ij} x^i y^j, \\ p_{ij}, q_{ij} \quad (k = 2, 3) \end{aligned}$$

are constants.

Taking $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, the system (3.1) becomes to (2.4) with

$$\begin{aligned} a_2 &= p_{20} C^3 + (p_{11} + q_{20}) C^2 S + (p_{02} + q_{11}) C S^2 + q_{02} S^3; \\ a_3 &= p_{30} C^4 + (p_{21} + q_{30}) C^3 S + \\ &+ (p_{12} + q_{21}) C^2 S^2 + (p_{03} + q_{12}) C S^3 + q_{03} S^4; \\ a_4 &= p_{40} C^3 + p_{31} C^2 S + p_{13} S^3 + p_{22} C S^2; \\ b_1 &= q_{20} C^3 + (q_{11} - p_{20}) C^2 S + (q_{12} - p_{11}) C S^2 - p_{02} S^3; \\ b_2 &= q_{30} C^4 + (q_{21} - p_{30}) C^3 S + \\ &+ (q_{12} - p_{21}) C^2 S^2 + (q_{03} - p_{12}) C S^3 - p_{03} S^4, \end{aligned}$$

where $C := \cos \theta, S := \sin \theta$.

If all the conditions of Theorem 2.3 are satisfied, then the origin point (0,0) of system (3.1) is the center.

Conclusion

The paper shows that, applying Mironenko method for reflecting function, one can easily get the center conditions for the above system. While using Lyapunov method, obviously, it is difficult to determine when the origin (0,0) is a center. Therefore, sometimes it is better to solve the center-focus problem using the method of reflecting function than the method of Lyapunov.

REFERENCES

1. Alwash, M.A.M. Non-autonomous equations related to polynomial two-dimensional systems / M.A.M. Alwash, N.G. Lloyd // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. – 1987. – Vol. A 105. – P. 129–152.

2. Yang, Lijun. Some new results on Abel equations / Yang Lijun, Tang Yuan // *J. Math. Anal. Appl.* – 2001. – Vol. 261. – P. 100–112.
3. Sadowski, A.P. Polynomial ideals and manifold / A.P. Sadowski // Minsk : University Press, 2008.
4. Mironenko, V.I. Analysis of reflective function and multivariate differential system / V.I. Mironenko. – Gomel : University Press, 2004. – 196 p.
5. Arnold, V.I. Ordinary differential equation / V.I. Arnold. – Moscow : Science Press, 1971. – P. 198–240.
6. Mironenko, V.I. The reflecting function of a family of functions / V.I. Mironenko // *Differ. Equ.* – 2000. – Vol. 36, № 12. – P. 1636–1641.
7. Alisevich, L.A. On linear system with triangular reflective function / L.A. Alisevich // *Differ. Equ.* – 1989. – Vol. 25, №3. – P. 1446–1449.
8. Musafirov, E.V. Differential systems, the mapping over period for which is represented by a product of three exponential matrixes / E.V. Musafirov // *J. Math. Anal. Appl.* – 2007. – Vol. 329. – P. 647–654.
9. Mironenko, V.V. Time symmetry preserving perturbations of differential systems / V.V. Mironenko // *Differ. Equ.* – 2004. – Vol. 40, №20. – P. 1395–1403.
10. Verecovich, P.P. Nonautonomous second order quadric system equivalent to linear system / P.P. Verecovich // *Differ. Equ.* – 1998. – Vol. 34, №12. – P. 2257–2259.
11. Maiorovskaya, S.V. Quadratic systems with a linear reflecting function / S.V. Maiorovskaya // *Differ. Equ.* – 2009. – Vol. 45, № 2. – P. 271–273.
12. Zhengxin, Zhou. On the reflective function of polynomial differential system / Zhou Zhengxin // *J. Math. Anal. Appl.* – 2003. – Vol. 278, № 1. – P. 18–26.
13. Zhengxin, Zhou. The structure of reflective function of polynomial differential systems / Zhou Zhengxin // *Nonlinear Analysis.* – 2009. – Vol. 71. – P. 391–398.
14. Zhengxin, Zhou. Research on the properties of some planar polynomial differential equations / Zhou Zhengxin // *Appl. Math. Comput.* – 2012. – Vol. 218. – P. 5671–5681.

Поступила в редакцию 14.11.13.

УДК 517.2

ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОРЕЖИМНОЙ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С АБСТРАКТНЫМ ОПИСАНИЕМ СОСТОЯНИЙ

О.В. Якубович, Ю.Е. Дудовская

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

RESEARCH OF THE MULTIREGIME QUEUEING NETWORK WITH ABSTRACT DESCRIPTION OF THE CONDITIONS

O.V. Yakubovich, Y.E. Dudovskaya

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Исследуется модель открытой сети массового обслуживания с различными типами заявок и многорежимными стратегиями обслуживания. Каждый узел сети может работать в нескольких режимах, отвечающих разной степени его работоспособности. Состояние узла описывается абстрактно и может не совпадать с числом заявок в нем. Устанавливаются условия мультипликативности и аналитический вид стационарного распределения вероятностей состояний исследуемой сети.

Ключевые слова: сеть массового обслуживания, различные типы заявок, многорежимное обслуживание, абстрактное описание, стационарное распределение.

Open queueing network with different types of customers and multiregime service strategies is investigated. Every node can operate in several regimes answering different degrees of their working capacity. The condition of the node is described abstractly and can not coincide with number of the customers in it. The conditions of multiplicativity and an analytical view of stationary distribution of the network states probabilities are found.

Keywords: queueing network, different types of customers, multiregime service, abstract description, stationary distribution.

Введение

Сети массового обслуживания являются адекватными математическими моделями разнообразных случайных процессов в информационно-вычислительных сетях, сетях передачи данных, связи и многих других объектах, имеющих сетевую структуру. Сложные реальные объекты стимулируют появление новых моделей сетей и их исследование. Нахождение стационарного распределения вероятностей состояний сетей массового обслуживания всегда является центральным в аналитических исследованиях и дает основу для дальнейшего изучения сетей.

В настоящей работе исследуется открытая сеть массового обслуживания с простейшим входящим потоком заявок, экспоненциальным обслуживанием и марковской маршрутизацией. Заявки, циркулирующие в сети, могут быть различных типов.

В сети допускается наличие внутренних переходов в узлах. Внутренние переходы обусловлены не поступлением или обслуживанием заявок в узлах, а внутренними изменениями в узлах и переходами из одного режима работы в другой с сохранением числа заявок каждого типа в узлах. Режимы, в которых могут работать узлы сети, пронумерованы, каждый режим отличается своим набором показателей. Например, при переходе узла в режим с большим номером производительность узла уменьшается, ухудшается

процесс обслуживания. При переходе узла в режим с меньшим номером происходит восстановление показателей процесса обслуживания, улучшается качество обслуживания. Сети с многорежимными стратегиями обслуживания позволяют моделировать ситуации, когда узлы сети могут работать в нескольких режимах, отвечающих разной степени их работоспособности.

Состояние узла описывается абстрактно, что позволяет не учитывать дисциплину обслуживания и обобщить модели сетей с многорежимными стратегиями обслуживания и различными типами заявок.

Сети с многорежимными стратегиями обслуживания и несколькими типами заявок исследованы в работах [1], [2].

1 Вспомогательная модель системы

Рассмотрим систему массового обслуживания, в которую поступают M независимых пуассоновских потоков с параметрами α_u , где α_u есть интенсивность поступления заявок типа u ($u = \overline{1, M}$).

Система может находиться в одном из l режимов работы ($l = \overline{0, r}$). Пусть $x(t)$ – состояние системы в момент времени t . Состояние системы описывается абстрактно и может не совпадать с числом заявок в ней. Процесс $x(t)$ имеет не

более чем счётное пространство состояний X . Обозначим через 0 такое состояние системы, когда в ней отсутствуют заявки, и система работает в режиме 0 ; $|x|_u$ – число заявок типа u ($u = \overline{1, M}$) в системе, которая находится в состоянии $x \in X$; $R(x)$ – режим функционирования системы, которая находится в состоянии $x \in X$. При описании системы введены обозначения, аналогичные обозначениям, введённым в работе [3].

Введём следующие обозначения для $x \in X$, $u = \overline{1, M}$:

$$\Omega^+(u, x, R(x)) = \{ \tilde{x} \in X : |\tilde{x}|_u = |x|_u + 1; |\tilde{x}|_m = |x|_m,$$

$$m \in \{1, 2, \dots, M\} \setminus \{u\}; R(\tilde{x}) = R(x) \},$$

$$\Omega^-(u, x, R(x)) = \{ \tilde{x} \in X : |\tilde{x}|_u = |x|_u - 1, |x|_u \neq 0;$$

$$|\tilde{x}|_m = |x|_m, m \in \{1, 2, \dots, M\} \setminus \{u\}; R(\tilde{x}) = R(x) \},$$

$$\Theta^+(x, R(x)) = \{ \tilde{x} \in X : R(\tilde{x}) = R(x) + 1, R(x) \neq r;$$

$$|\tilde{x}|_m = |x|_m, m \in \{1, 2, \dots, M\} \},$$

$$\Theta^-(x, R(x)) = \{ \tilde{x} \in X : R(\tilde{x}) = R(x) - 1, R(x) \neq 0;$$

$$|\tilde{x}|_m = |x|_m, m \in \{1, 2, \dots, M\} \}.$$

Пусть $\pi_u(x, \tilde{x})$ – условная вероятность того, что система перейдёт в состояние $\tilde{x} \in \Omega^+(u, x, R(x))$, если в неё поступит заявка типа u , заставшая её в состоянии $x \in X$.

Пусть $\mu_u(x, \tilde{x})$ – интенсивность перехода системы из состояния $x \in X$ в состояние $\tilde{x} \in \Omega^-(u, x, R(x))$ за счёт обслуживания заявки типа u .

В рассматриваемой системе предполагаются возможными внутренние переходы из состояния $x \in X$ в другое состояние $\tilde{x} \in X$ с тем же числом заявок. Это значит, что такие переходы обусловлены не поступлением или обслуживанием заявок, а внутренними изменениями в системе и переходами из одного режима работы в другой с сохранением числа заявок каждого типа.

Назовём режим 0 основным режимом работы. Время работы системы, находящейся в состоянии $x \in X$, в режиме $R(x)$ ($R(x) = \overline{0, r}$) имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью $\nu(x, \tilde{x})$ система переходит в состояние $\tilde{x} \in \Theta^+(x, R(x))$, а с интенсивностью $\varphi(x, \tilde{x})$ – в состояние $\tilde{x} \in \Theta^-(x, R(x))$. Предполагается, что $\nu(x, \tilde{x}) = 0$, когда система находится в состоянии x с режимом r , и $\varphi(x, \tilde{x}) = 0$, когда система находится в состоянии x с режимом 0 .

При сделанных предположениях $x(t)$ – однородный марковский процесс с не более чем счётным пространством состояний X .

Инфинитезимальные интенсивности переходов процесса $x(t)$ из состояния $x \in X$ в состояние $\tilde{x} \in X$ ($x \neq \tilde{x}$) принимают следующий вид:

$$q(x, \tilde{x}) = \alpha_u \pi_u(x, \tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \Omega^+(u, x, R(x)),$$

$$q(x, \tilde{x}) = \mu_u(x, \tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \Omega^-(u, x, R(x)),$$

$$q(x, \tilde{x}) = \nu(x, \tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \Theta^+(x, R(x)),$$

$$q(x, \tilde{x}) = \varphi(x, \tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \Theta^-(x, R(x)).$$

Для всех остальных состояний \tilde{x} интенсивность перехода $q(x, \tilde{x}) = 0$. Здесь

$$\pi_u(x, \tilde{x}) \geq 0, \quad \sum_{\tilde{x} \in \Omega^+(u, x, R(x))} \pi_u(x, \tilde{x}) = 1;$$

$$\mu_u(x, \tilde{x}) \geq 0, \quad \mu_u(x) = \sum_{\tilde{x} \in \Omega^-(u, x, R(x))} \mu_u(x, \tilde{x})$$

– интенсивность обслуживания системой заявок типа u , когда она находится в состоянии x ; $\nu(x, \tilde{x}) \geq 0, \quad \varphi(x, \tilde{x}) \geq 0, \quad \nu(x) = \sum_{\tilde{x} \in \Theta^+(x, R(x))} \nu(x, \tilde{x}),$

$\varphi(x) = \sum_{\tilde{x} \in \Theta^-(x, R(x))} \varphi(x, \tilde{x})$ – интенсивности выхода из состояния x за счёт внутренних переходов.

Пусть $\{p(x), x \in X\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний марковского процесса $x(t)$.

Уравнения обратимости для рассматриваемой системы имеют вид

$$\alpha_u \pi_u(x, \tilde{x}) p(x) = \mu_u(\tilde{x}, x) p(\tilde{x}),$$

$$\tilde{x} \in \Omega^+(u, x, R(x)), R(x) = \overline{0, r};$$

$$\nu(x, \tilde{x}) p(x) = \varphi(\tilde{x}, x) p(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \Theta^+(x, R(x));$$

$$x \in X, u = \overline{1, M}.$$

Предположим, что для каждого $u = \overline{1, M}$, $x_1, x_2 \in X, |x_1|_u = |x_2|_u, \tilde{x}_1 \in \Omega^-(u, x_1, R(x_1)), \tilde{x}_2 \in \Omega^-(u, x_2, R(x_2)), R(x_1) = R(x_2), R(x_1), R(x_2) = \overline{0, r}$

выполняется равенство

$$\frac{\pi_u(\tilde{x}_1, x_1)}{\mu_u(x_1, \tilde{x}_1)} = \frac{\pi_u(\tilde{x}_2, x_2)}{\mu_u(x_2, \tilde{x}_2)},$$

и для $x_1, x_2 \in X, |x_1|_u = |x_2|_u, u = \overline{1, M}$,

$$\tilde{x}_1 \in \Theta^-(x_1, R(x_1)), \tilde{x}_2 \in \Theta^-(x_2, R(x_2))$$

$$\frac{\nu(\tilde{x}_1, x_1)}{\varphi(x_1, \tilde{x}_1)} = \frac{\nu(\tilde{x}_2, x_2)}{\varphi(x_2, \tilde{x}_2)}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\frac{\pi_u(\tilde{x}_1, x_1)}{\mu_u(x_1, \tilde{x}_1)} = \frac{\pi_u(\tilde{x}_2, x_2)}{\mu_u(x_2, \tilde{x}_2)} = \rho_u(|x_1|_u, R(x_1)),$$

$$\frac{\nu(\tilde{x}_1, x_1)}{\varphi(x_1, \tilde{x}_1)} = \frac{\nu(\tilde{x}_2, x_2)}{\varphi(x_2, \tilde{x}_2)} = \tau(|x_1|_1, |x_1|_2, \dots, |x_1|_M, R(x_1)).$$

Лемма. Для обратимости системы необходимо и достаточно выполнения условий

$$\rho_u(|x|_u, R(x) - 1) \tau(|x|_1, |x|_2, \dots, |x|_u, \dots, |x|_M, R(x)) =$$

$$= \rho_u (|x|_u, R(x)) \tau (|x|_1, |x|_2, \dots, |x|_u - 1, \dots, |x|_M, R(x)),$$

$$u = \overline{1, M}, |x|_u \neq 0, x \in X, R(x) = \overline{1, r}.$$

Доказательство леммы проводится с использованием циклического условия Колмогорова [4].

Из уравнений обратимости определяются стационарные вероятности состояний системы

$$p(x) = \prod_{u=1}^M \prod_{k_u=1}^{|x|_u} \alpha_u \rho_u(k_u, R(x)) \prod_{s=1}^{R(x)} \tau(0, \dots, 0, s) p(0),$$

$$x \in X,$$

$$p(0) = \left(\sum_{x \in X} \prod_{u=1}^M \prod_{k_u=1}^{|x|_u} \alpha_u \rho_u(k_u, R(x)) \prod_{s=1}^{R(x)} \tau(0, \dots, 0, s) \right)^{-1}.$$

Здесь произведение, в котором верхний индекс меньше нижнего, положим равным единице.

2 Склеивание узлов в открытую сеть

В сеть, состоящую из N узлов, поступает простейший поток заявок с параметром λ . Заявки могут быть M типов. Каждая заявка входного потока независимо от других заявок направляется в i -ый узел и становится заявкой типа u с вероятностью $p_{0(i,u)}$ ($i = \overline{1, N}, u = \overline{1, M}$),

$$\sum_{i=1}^N \sum_{u=1}^M p_{0(i,u)} = 1.$$

Предполагается, что i -ый узел может находиться в одном из l_i режимов работы ($l_i = \overline{0, r_i}, i = \overline{1, N}$). Состояние сети в момент времени t описывается вектором $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$, где $x_i(t)$ – состояние i -го узла в момент времени t . Состояние узла описывается абстрактно и может не совпадать с числом заявок в нём. Процесс $x(t)$ имеет не более чем счётное пространство состояний $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N$.

Обозначим через 0 такое состояние i -го узла, когда в нём отсутствуют заявки, и узел находится в режиме работы 0 ; $|x|_u$ – число заявок типа u ($u = \overline{1, M}$) в i -ом узле, который находится в состоянии $x_i \in X_i$; $R(x_i)$ – режим функционирования i -го узла, который находится в состоянии $x_i \in X_i$.

Множества

$$\Omega^+(i, u, x_i, R(x_i)), \quad \Omega^-(i, u, x_i, R(x_i)),$$

$$\Theta^+(i, x_i, R(x_i)), \quad \Theta^-(i, x_i, R(x_i))$$

вводятся так же, как и в предыдущем разделе, но с указанием номера узла:

$$\Omega^+(i, u, x_i, R(x_i)) = \{ \tilde{x}_i \in X_i : |\tilde{x}_i|_u = |x_i|_u + 1;$$

$$|\tilde{x}_i|_m = |x_i|_m, m \in \{1, 2, \dots, M\} \setminus \{u\}; R(\tilde{x}_i) = R(x_i) \},$$

$$\Omega^-(i, u, x_i, R(x_i)) =$$

$$= \{ \tilde{x}_i \in X_i : |\tilde{x}_i|_u = |x_i|_u - 1, |x_i|_u \neq 0; |\tilde{x}_i|_m = |x_i|_m,$$

$$m \in \{1, 2, \dots, M\} \setminus \{u\}; R(\tilde{x}_i) = R(x_i) \},$$

$$\Theta^+(i, x_i, R(x_i)) = \{ \tilde{x}_i \in X_i : R(\tilde{x}_i) = R(x_i) + 1,$$

$$R(x_i) \neq r_i; |\tilde{x}_i|_m = |x_i|_m, m \in \{1, 2, \dots, M\} \},$$

$$\Theta^-(i, x_i, R(x_i)) = \{ \tilde{x}_i \in X_i : R(\tilde{x}_i) = R(x_i) - 1,$$

$$R(x_i) \neq 0; |\tilde{x}_i|_m = |x_i|_m, m \in \{1, 2, \dots, M\} \}.$$

Пусть $\pi_{iu}(x_i, \tilde{x}_i)$ – условная вероятность того, что узел перейдёт в состояние $\tilde{x}_i \in \Omega^+(i, u, x_i, R(x_i))$, если в него поступит заявка типа u , заставшая его в состоянии $x_i \in X_i$.

Пусть $\mu_{iu}(x_i, \tilde{x}_i)$ – интенсивность перехода узла из состояния $x_i \in X_i$ в состояние $\tilde{x}_i \in \Omega^-(i, u, x_i, R(x_i))$ за счёт обслуживания заявки типа u .

В каждом узле предполагаются возможные внутренние переходы из состояния $x_i \in X_i$ в другое состояние $\tilde{x}_i \in X_i$ с тем же числом заявок каждого типа. Это значит, что такие переходы обусловлены не поступлением или обслуживанием заявок, а внутренними изменениями в узле и переходами с одного режима работы в другой с сохранением числа заявок каждого типа.

Назовём режим 0 основным режимом работы. Время работы узла, находящегося в состоянии $x_i \in X_i$, в режиме $R(x_i)$ ($R(x_i) = \overline{0, r_i}$) имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью $\nu_i(x_i, \tilde{x}_i)$ узел переходит в состояние $\tilde{x}_i \in \Theta^+(i, x_i, R(x_i))$, а с интенсивностью $\varphi_i(x_i, \tilde{x}_i)$ – в состояние $\tilde{x}_i \in \Theta^-(i, x_i, R(x_i))$. Предполагается, что $\nu_i(x_i, \tilde{x}_i) = 0$, когда узел находится в состоянии x_i с режимом r_i , и $\varphi_i(x_i, \tilde{x}_i) = 0$, когда узел находится в состоянии x_i с режимом 0 .

Заявка типа u , обслуженная в i -ом узле, независимо от других заявок мгновенно направляется в j -ый узел и становится заявкой типа v с вероятностью $p_{(i,u)(j,v)}$, а с вероятностью $p_{(i,u)0}$ покидает сеть ($i, j = \overline{1, N}; u, v = \overline{1, M}$),

$$\sum_{j=1}^N \sum_{v=1}^M p_{(i,u)(j,v)} + p_{(i,u)0} = 1.$$

Предполагается, что матрица вероятностей переходов ($p_{(i,u)(j,v)} : i, j = \overline{0, N}, u, v = \overline{1, M}$), где $p_{(0,u)(0,v)} = 0$, неприводима. Система уравнений трафика принимает вид

$$\varepsilon_{iu} = p_{0(i,u)} + \sum_{j=1}^N \sum_{v=1}^M \varepsilon_{jv} p_{(j,v)(i,u)},$$

$$i = \overline{1, N}, u = \overline{1, M}. \quad (2.1)$$

Система уравнений трафика имеет единственное положительное решение $(\varepsilon_{iu}, i = \overline{1, N}, u = \overline{1, M})$, что можно доказать, перенумеровав соответствующим образом элементы матрицы вероятностей переходов. В результате получаем систему уравнений трафика сети Джексона, для которой доказано существование единственного положительного решения [5].

При сделанных предположениях $x(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и не более чем счётным пространством состояний $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N$.

Обозначим через $\alpha_{iu} = \lambda \varepsilon_{iu}$ интенсивность поступления заявок типа u в i -ый узел. Инфинитезимальные интенсивности переходов процесса $x_i(t)$ из состояния $x_i \in X_i$ в состояние $\tilde{x}_i \in X_i$ ($x_i \neq \tilde{x}_i$) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} q_i(x_i, \tilde{x}_i) &= \alpha_{iu} \pi_{iu}(x_i, \tilde{x}_i), \quad \tilde{x}_i \in \Omega^+(i, u, x_i, R(x_i)), \\ q_i(x_i, \tilde{x}_i) &= \mu_{iu}(x_i, \tilde{x}_i), \quad \tilde{x}_i \in \Omega^-(i, u, x_i, R(x_i)), \\ q_i(x_i, \tilde{x}_i) &= \nu_i(x_i, \tilde{x}_i), \quad \tilde{x}_i \in \Theta^+(i, x_i, R(x_i)), \\ q_i(x_i, \tilde{x}_i) &= \varphi_i(x_i, \tilde{x}_i), \quad \tilde{x}_i \in \Theta^-(i, x_i, R(x_i)). \end{aligned}$$

Для всех остальных состояний \tilde{x}_i интенсивность перехода $q_i(x_i, \tilde{x}_i) = 0$. Здесь

$$\begin{aligned} \pi_{iu}(x_i, \tilde{x}_i) &\geq 0, \quad \sum_{\tilde{x}_i \in \Omega^+(i, u, x_i, R(x_i))} \pi_{iu}(x_i, \tilde{x}_i) = 1; \\ \mu_{iu}(x_i, \tilde{x}_i) &\geq 0, \quad \mu_{iu}(x_i) = \sum_{\tilde{x}_i \in \Omega^-(i, u, x_i, R(x_i))} \mu_{iu}(x_i, \tilde{x}_i) \end{aligned}$$

– интенсивность обслуживания i -ым узлом заявок типа u , когда он находится в состоянии x_i ;

$$\begin{aligned} \nu_i(x_i, \tilde{x}_i) &\geq 0, \quad \varphi_i(x_i, \tilde{x}_i) \geq 0, \\ \nu_i(x_i) &= \sum_{\tilde{x}_i \in \Theta^+(i, x_i, R(x_i))} \nu_i(x_i, \tilde{x}_i), \\ \varphi_i(x_i) &= \sum_{\tilde{x}_i \in \Theta^-(i, x_i, R(x_i))} \varphi_i(x_i, \tilde{x}_i) \end{aligned}$$

– интенсивности выхода из состояния x_i за счет внутренних переходов ($i = \overline{1, N}$).

Рассмотрим изолированный i -ый узел в фиктивной окружающей среде (окружающая среда является фиктивной, т. к. в сети суммарные потоки заявок в узлы, вообще говоря, не являются простейшими), предполагая, что в него поступают M независимых простейших потоков заявок с интенсивностями $\lambda \varepsilon_{i1}, \lambda \varepsilon_{i2}, \dots, \lambda \varepsilon_{iM}$, где $(\varepsilon_{iu}, i = \overline{1, N}, u = \overline{1, M})$ – решение системы уравнений трафика (2.1). Пусть $\{p_i(x_i), x_i \in X_i\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $x_i(t)$. Предположим, что i -ый узел обратим. Уравнения обратимости для изолированного i -го узла сети принимают вид

$$\begin{aligned} \alpha_{iu} \pi_{iu}(x_i, \tilde{x}_i) p_i(x_i) &= \mu_{iu}(\tilde{x}_i, x_i) p_i(\tilde{x}_i), \\ \tilde{x}_i &\in \Omega^+(i, u, x_i, R(x_i)), \quad R(x_i) = \overline{0, r_i}; \\ \nu_i(x_i, \tilde{x}_i) p_i(x_i) &= \varphi_i(\tilde{x}_i, x_i) p_i(\tilde{x}_i), \\ \tilde{x}_i &\in \Theta^+(i, x_i, R(x_i)); \\ x_i &\in X_i, \quad u = \overline{1, M}, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Предположим, что для всех

$$i = \overline{1, N}, \quad u = \overline{1, M}, \quad x_{i1}, x_{i2} \in X_i, \quad |x_{i1}|_u = |x_{i2}|_u,$$

$$\tilde{x}_{i1} \in \Omega^-(i, u, x_{i1}, R(x_{i1})), \quad \tilde{x}_{i2} \in \Omega^-(i, u, x_{i2}, R(x_{i2})),$$

$R(x_{i1}) = R(x_{i2}), \quad R(x_{i1}), R(x_{i2}) = \overline{0, r_i}$ выполняется следующее равенство

$$\frac{\pi_{iu}(\tilde{x}_{i1}, x_{i1})}{\mu_{iu}(x_{i1}, \tilde{x}_{i1})} = \frac{\pi_{iu}(\tilde{x}_{i2}, x_{i2})}{\mu_{iu}(x_{i2}, \tilde{x}_{i2})}$$

и для $x_{i1}, x_{i2} \in X_i, |x_{i1}|_u = |x_{i2}|_u, u = \overline{1, M}$,

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{i1} &\in \Theta^-(i, x_{i1}, R(x_{i1})), \quad \tilde{x}_{i2} \in \Theta^-(i, x_{i2}, R(x_{i2})) \\ \frac{\nu_i(\tilde{x}_{i1}, x_{i1})}{\varphi_i(x_{i1}, \tilde{x}_{i1})} &= \frac{\nu_i(\tilde{x}_{i2}, x_{i2})}{\varphi_i(x_{i2}, \tilde{x}_{i2})}. \end{aligned}$$

Введем обозначения, аналогичные обозначениям, введенным в предыдущем разделе

$$\frac{\pi_{iu}(\tilde{x}_{i1}, x_{i1})}{\mu_{iu}(x_{i1}, \tilde{x}_{i1})} = \frac{\pi_{iu}(\tilde{x}_{i2}, x_{i2})}{\mu_{iu}(x_{i2}, \tilde{x}_{i2})} = \rho_{iu}(|x_{i1}|_u, R(x_{i1})),$$

$$\frac{\nu_i(\tilde{x}_{i1}, x_{i1})}{\varphi_i(x_{i1}, \tilde{x}_{i1})} = \frac{\nu_i(\tilde{x}_{i2}, x_{i2})}{\varphi_i(x_{i2}, \tilde{x}_{i2})} =$$

$$= \tau_i(|x_{i1}|_1, |x_{i1}|_2, \dots, |x_{i1}|_M, R(x_{i1})).$$

Стационарное распределение вероятностей состояний изолированного узла сети имеет вид

$$\begin{aligned} p_i(x_i) &= \\ &= \prod_{u=1}^M \prod_{k_u=1}^{|x_i|_u} \alpha_{iu} \rho_{iu}(k_u, R(x_i)) \prod_{s=1}^{R(x_i)} \tau_i(0, \dots, 0, s) p_i(0), \\ & \quad x_i \in X_i, \quad i = \overline{1, N}, \\ & \quad p_i(0) = \\ &= \left(\sum_{x_i \in X_i} \prod_{u=1}^M \prod_{k_u=1}^{|x_i|_u} \alpha_{iu} \rho_{iu}(k_u, R(x_i)) \prod_{s=1}^{R(x_i)} \tau_i(0, \dots, 0, s) \right)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

3 Стационарное распределение сети

Обозначим через $[\tilde{x}_i]$ N -мерный вектор $\tilde{x} \in X$, у которого все координаты, кроме i -ой, совпадают с координатами вектора $x \in X$, а i -ая координата равна $\tilde{x}_i \in X_i$. Через $[\tilde{x}_i, \tilde{x}_j]$ обозначим N -мерный вектор $\tilde{x} \in X$, у которого все координаты, кроме i -ой и j -ой, совпадают с координатами вектора $x \in X$, а i -ая координата равна $\tilde{x}_i \in X_i$, j -ая координата равна $\tilde{x}_j \in X_j$. Если $q(x, y)$ – интенсивность перехода процесса $x(t)$ из состояния $x \in X$ в состояние $y \in X$, $q(x) = \sum_{y \neq x} q(x, y)$ – интенсивность выхода из

состояния x , то интенсивности переходов процесса $x(t)$ имеют вид

$$\begin{aligned} q(x, [\tilde{x}_i]) &= \lambda p_{0(i,u)} \pi_{iu}(x_i, \tilde{x}_i), \tilde{x}_i \in \Omega^+(i, u, x_i, R(x_i)), \\ q(x, [\tilde{x}_i]) &= \mu_{iu}(x_i, \tilde{x}_i) p_{(i,u)0}, \tilde{x}_i \in \Omega^-(i, u, x_i, R(x_i)), \\ q(x, [\tilde{x}_i]) &= \nu_i(x_i, \tilde{x}_i), \tilde{x}_i \in \Theta^+(i, x_i, R(x_i)), \\ q(x, [\tilde{x}_i]) &= \varphi_i(x_i, \tilde{x}_i), \tilde{x}_i \in \Theta^-(i, x_i, R(x_i)), \\ q(x, [\tilde{x}_i, \tilde{x}_j]) &= \mu_{iu}(x_i, \tilde{x}_i) p_{(i,u)(j,v)} \pi_{jv}(x_j, \tilde{x}_j), \\ \tilde{x}_i &\in \Omega^-(i, u, x_i, R(x_i)), \tilde{x}_j \in \Omega^+(j, v, x_j, R(x_j)), \\ u, v &= \overline{1, M}; i, j = \overline{1, N}, x \in X. \end{aligned}$$

Для всех остальных состояний $y \in X$ $q(x, y) = 0$. Интенсивность выхода получается сложением указанных интенсивностей:

$$\begin{aligned} q(x) &= \lambda + \sum_{i=1}^N \sum_{u=1}^M \mu_{iu}(x_i) I_{(|x_i|_{iu} \neq 0)} + \\ &+ \sum_{i=1}^N \left[\nu_i(x_i) I_{(R(x_i) \neq r_i)} + \varphi_i(x_i) I_{(R(x_i) \neq 0)} \right], \quad x \in X. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Теорема. Если для всех $i = \overline{1, N}$ выполняются условия обратимости

$$\begin{aligned} &\rho_{iu}(|x_i|_{iu}, R(x_i) - 1) \times \\ &\times \tau_i(|x_i|_1, |x_i|_2, \dots, |x_i|_u, \dots, |x_i|_M, R(x_i)) = \\ &= \rho_{iu}(|x_i|_{iu}, R(x_i)) \times \\ &\times \tau_i(|x_i|_1, |x_i|_2, \dots, |x_i|_u - 1, \dots, |x_i|_M, R(x_i)), \\ &u = \overline{1, M}, |x_i|_{iu} \neq 0, x_i \in X_i, R(x_i) = \overline{1, r_i}, \end{aligned}$$

и сходится ряд

$$\sum_{x \in X} q(x) \prod_{i=1}^N \prod_{u=1}^M \prod_{k_{iu}=1}^{|x_i|_{iu}} \alpha_{iu} \rho_{iu}(k_{iu}, R(x_i)) \prod_{s=1}^{R(x_i)} \tau_i(0, \dots, 0, s),$$

где $q(x)$ – интенсивность выхода из состояния x , определяемая равенством (3.1), то марковский процесс $x(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение имеет форму произведения

$$p(x) = p_1(x_1) p_2(x_2) \dots p_N(x_N), \quad x \in X,$$

где $p_i(x_i)$ определяется (2.2).

Доказательство проводится стандартным образом: подстановкой стационарных вероятностей в уравнения равновесия. Условие эргодичности находится из теоремы Фостера [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ерёмина, А.Р.* Инвариантность стационарного распределения состояний сети с многорежимными стратегиями в случае зависимости параметров процессов обслуживания и переключения от состояния узла / А.Р. Ерёмина // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 2 (11). – С. 76–80.

2. *Якубович, О.В.* Многорежимная сеть массового обслуживания со случайным временем пребывания различных типов отрицательных заявок / О.В. Якубович, Ю.Е. Дудовская // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 4 (13). – С. 74–77.

3. *Малинковский, Ю.В.* Критерий предельности стационарного распределения состояний открытой марковской сети обслуживания с несколькими классами заявок в форме произведения / Ю.В. Малинковский // Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 4. – С. 75–83.

4. *Колмогоров, А.Н.* К теории цепей Маркова / А.Н. Колмогоров // Теория вероятностей и математическая статистика: сб. статей. – М.: Наука, 1986. – С. 173–178.

5. *Jackson, J.R.* Jobshop-like Queueing Systems / J.R. Jackson // Manag. Sci. – 1963. – Vol. 10, № 1. – P. 131–142.

6. *Бочаров, П.П.* Теория массового обслуживания: учебник / П.П. Бочаров, А.В. Печинкин. – М.: РУДН, 1995. – 529 с.

Поступила в редакцию 02.10.13.

УДК 677.57

ОКРАШИВАНИЕ ПОЛИЭФИРНЫХ ВОЛОКОН ДЛЯ ЗАЩИТЫ ЦЕННЫХ БУМАГ

В.А. Гольдаде^{1,2}, Н.В. Кузьменкова³, В.В. Кравченко¹, В.Е. Сыцко³

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

²Институт механики металлополимерных систем им. В.А. Белого НАН Беларуси, Гомель, Беларусь

³Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации, Гомель, Беларусь

COLORATION OF POLYESTER FIBERS FOR SECURITIES PROTECTION FROM FALSIFICATION

V.A. Goldade^{1,2}, N.V. Kuzmenkova³, V.V. Kravchenko¹, V.E. Sytsko³

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

²V.A. Belyi Metal-Polymer Institute of National Academy of Sciences of Belarus, Gomel, Belarus

³Belarusian Trade and Economics University of Consumer Cooperatives, Gomel, Belarus

Исследована люминесценция полиэфирных волокон, окрашенных различными люминофорами по механизму крейзинга. Разработано устройство для прерывистого модифицирования волокон люминесцентными красителями. Определена оптимальная толщина пучка волокон, подвергаемых модифицированию, которая составляет $31,5 \pm 1,6$ текс ($90 \div 100$ волокон). Эффективное окрашивание волокон происходит при кратности вытяжки в пределах от 2 до 3. Показано, что самой высокой интенсивностью люминесценции при облучении УФ светом характеризуются волокна, модифицированные оксазином и родамином.

Ключевые слова: полиэфирные волокна, крейзинг, модифицирование, люминесцентные красители, спектры люминесценции.

Luminescence of polyester fibers colored by different luminophores using crazing mechanism was investigated. Arrangement for interrupted modification of fibers by luminescent colorants was designed. Optimal thickness of fiber bundle ($90 \div 100$ fibers) subjected to modification was estimated. Effective fiber coloration takes place when the drawing out degree is between 2 and 3. It was shown that fibers modified by Oksasin and Rodamin are characterized by the highest intensity of luminescence in UV radiation.

Keywords: polyester fibers, crazing, modification, luminescent colorants, luminescence spectrum.

Введение

В настоящее время на отечественном и мировом рынках находятся в обращении тысячи видов разнообразных ценных бумаг и документов. Развитие и широкое распространение в обществе и производстве полиграфических технологий стимулирует увеличение количества подделок. По оценкам международных организаций, потери от подделок ценных бумаг и документов в мире составляют сотни млрд долларов США в год [1].

По данным отечественной статистики [2, с. 87] на территории Белоруссии удельный вес зарегистрированных случаев изготовления, хранения либо сбыта поддельных денег или ценных бумаг составляет около 40% от общего числа преступлений в сфере экономической деятельности.

Все государства мира уделяют значительное внимание разработке новых средств защиты, основанных на последних достижениях науки и техники. В мировой практике используются многоуровневые системы защиты, включающие такой комплекс методов и средств, который обеспечивает нецелесообразность подделки ценных бумаг [3].

Несмотря на широкое внедрение электронных технологий, преобладающая часть документов и ценных бумаг по-прежнему изготавливается на бумажном носителе. Поэтому защита бумажного полотна позволяет минимизировать риск любого из известных видов фальсификации, включая самые совершенные аналоговые методы. По данным Национальной ассоциации производителей ценных и деловых бумаг США, 70% надежности защиты полиграфического продукта от фальсификации приходится именно на долю бумажного полотна [4].

Технологические методы, направленные на защиту бумажного носителя, достаточно просты и надежны. Они основаны на соблюдении особых требований к составу и свойствам бумаги, структуре ее поверхности. Бумажный носитель защищают путем введения в бумажную массу защитных волокон, нитей, плашек, специальных химических добавок, нанесением на поверхность бумаги водяных знаков и др.

Эффективным средством защиты бумажной основы документов являются синтетические волокна, которые позволяют реализовать одновременно несколько элементов защиты одновременно.

Носителем основного элемента защиты являются цвет волокна и его люминесцентные свойства, дополнительными элементами защиты выступают особая форма поперечного сечения волокна, ферромагнитные свойства и др.

Защитные волокна представляют собой короткие отрезки волокна длиной до 10 мм, хаотично распределенные в структуре бумаги. Недостатком большинства люминесцентных синтетических волокон является низкая стойкость окраски, обнаруживаемая при переработке бумажной массы. Указанный недостаток преодолевается путем обработки волокон по механизму крейзинга, позволяющей вводить в крейзы и закрепить в поверхностном слое волокна любые добавки.

Настоящая статья посвящена исследованию люминесцентных свойств полиэфирных волокон, модифицированных различными красителями в процессе ориентационной вытяжки волокон по механизму крейзинга.

1 Технология крейзинга полимеров

Крейзинг полимеров – это процесс образования в деформируемом полимерном образце системы поперечных трещин, стенки которых соединены фибриллярными структурами [5]–[9]. Он происходит в процессе ориентационной вытяжки волокон, осуществляемой в жидкой адсорбционно-активной среде. В нем выделяют несколько стадий. На первых этапах растяжения на поверхности волокон образуются крейзы (микротрещины, стенки которых соединены фибриллярными тяжами). При дальнейшей деформировании крейзы растут в направлении, перпендикулярном оси растяжения образца [6]. На следующей стадии крейзы расширяются в направлении оси растяжения, а волокно переходит в ориентированное фибриллярное состояние. При растяжении волокон в жидкой технологической среде возникающие крейзы мгновенно заполняются жидкой фазой, что дает возможность ввести в структуру полимера любые, даже несовместимые с ним добавки (бактерициды, антипирены, красители и др. [10], [11]), обеспечивая их равномерное распределение в поверхностном слое волокон [8]. Захваченные крейзами добавки удерживаются в поверхностном слое волокна. Экспериментально подтверждена возможность окрашивания синтетических волокон водорастворимыми красителями с использованием метода крейзинга [12].

При модифицировании люминесцентными красителями по механизму крейзинга волокна подвергаются вытяжке в поверхностно-активной жидкой среде, содержащей люминофор. Такая технология позволяет получать волокно с устойчивой окраской, отличается высокой производительностью, легко вписывается в стандартный процесс изготовления химических волокон, не требует значительной модификации технологического

оборудования. Технология крейзинга позволяет совмещать крашение с введением в структуру волокна любых модифицирующих добавок для придания волокну дополнительных полезных свойств (способности поглощать излучение, намагниченность отдельных участков волокна и др.). Это открывает широкие возможности для окрашивания волокон на участках, чередующихся с неокрашенными, и представляется наиболее перспективным методом получения волокон, реализующих разнообразные механизмы защиты ценных бумаг.

2 Волокна и красители

Потребительские свойства полиэфирных защитных волокон, прежде всего, специфичность и надежность окраски, формируются в процессе их изготовления, при этом решающее значение имеют выбор красителя и технологии крашения волокна.

Модифицированию подвергали неориентированные волокна из полиэтилентерефталата (ПЭТ) марки А номинальной линейной плотности 0,33 текс (ТУ 6-13-020477-92-88 «Волокно полиэфирное для текстильной промышленности») производства ОАО «Могилевхимволокно».

Для окрашивания волокон использовали растворы люминесцентных красителей (феналемин 160, оксазин 17, родамин С, флуоресцеин, эозин Н) в 2-пропаноле. Экспериментальные образцы полиэфирных волокон изготавливали с помощью разработанного нами лабораторного устройства, которое обеспечивает прерывистую (шаг 3–5 мм) окраску волокна в процессе его вытяжки.

Выбор подходящей толщины пучка волокон осуществляли следующим образом. Пучки волокон толщиной от 14,85 до 196,68 текс, окрашенные в люминесцентных растворах, рассматривали при дневном освещении и при облучении УФ светом. Установлено, что чем меньше толщина пучка, тем равномернее окраска волокон и их люминесценция в УФ свете. При толщине свыше 64,02 текс на поверхности волокон заметны участки, отличающиеся насыщенностью окраски. При окрашивании пучков волокон толщиной 19,8 текс и менее краситель распределяется равномерно, однако повышается вероятность обрыва волокон в процессе модифицирования. Таким образом, оптимальной толщиной пучка волокон при окрашивании по механизму крейзинга является $31,5 \pm 1,6$ текс (90–100 волокон).

3 Методика окрашивания полиэфирных волокон люминесцентными красителями

В мировой практике для прерывистого окрашивания волокон применяют изошпренные технологии: на волокна наносят «маски», изолирующие их поверхность от контакта с красителем на участках, не подлежащих окрашиванию

[13]; волокна с определенным усилием скручивают в пряжу, которую окрашивают и после сушки разрезают на короткие отрезки [14]; подвергают двум стадиям вытяжки, сначала – в ванне с адсорбционно-активной жидкостью, содержащей краситель, а затем, после промывки водой, – на воздухе [15]. Эти способы включают много вспомогательных операций, которые осуществляются с помощью специального оборудования и конструктивно сложной оснастки [16].

Для прерывистого модифицирования химических волокон по механизму крейзинга нами разработано оригинальное устройство [17], которое имеет сравнительно простую конструкцию. Основными элементами устройства (рисунок 3.1) являются: пара тянущих валков (8, 9) и зубчатый валок 7 с шагом зубьев, равным длине окрашенного участка волокна. Зона контакта зубчатого валка с контртелом, которым служит гладкая опорная пластина на дне ванны 4, погружена в поверхностно-активную жидкость, содержащую краситель.

Валок 7 вращается от независимого привода со скоростью n_1 и имеет шаг зубьев l . Пучок 2 прижат к контртелу зубчатым валком регулируемым усилием F_1 . Из ванны пучок волокон поступает в зазор между парой гладких валков 8 и 9. Валок 8 приводится во вращение со скоростью $n_2 > n_1$ с помощью регулируемого привода и прижат к валку 9 с заданным усилием $F_2 > F_1$. Регулируя усилия F_1 и F_2 и скорости n_1 и n_2 , устанавливают наибольшую степень вытяжки пучка волокон (соответствует позиции, когда пучок зажат между зубом валка 7 и дном ванны) $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$, где ε_0 – минимальная степень вытяжки, при которой для выбранных химических волокон и смачивающей их поверхностно-активной жидкости начинается крейзообразование.

Точка вытяжки модифицируемого волокна, в которой при соответствующей степени вытяжки и смачивании волокна поверхностно-активной жидкостью начинается образование крейзов, находится на выходе волокна из контакта зубчатого валка с контртелом. Пучок волокон 2, скользя по дну ванны 4, может находиться в двух крайних позициях. Если волокно прижато зубом к контртелу, степень вытяжки ε_1 максимальна и достаточна для образования крейзов. Участок волокна на выходе из контакта окрашивается, благодаря захвату красителя крейзами. Когда, скользя по контртелу, волокно находится в промежутке между зубьями, степень его вытяжки ε_2 недостаточна для крейзообразования. Соответственно, участок волокна между позициями, в которых волокно было прижато к контртелу соседними зубьями, остается неокрашенным. В результате такой обработки пучок волокон оказывается окрашенным на участках длиной l , чередующихся с неокрашенными участками той же длины.

По сравнению с традиционными методами модифицирование волокон по механизму крейзинга позволяет существенно расширить ассортимент используемых красителей. Известным недостатком полиэфирных волокон является сложность их окрашивания, что объясняется особенностями их структуры и свойств (компактностью структуры макромолекулы, низкой способностью к набуханию в водных средах, а также небольшим числом функциональных групп, способных к химическому взаимодействию) [12]. Модифицирование волокон по механизму крейзинга позволяет значительно увеличить доступный внутренний объем волокна, что способствует ускорению диффузии красителей внутрь волокна.

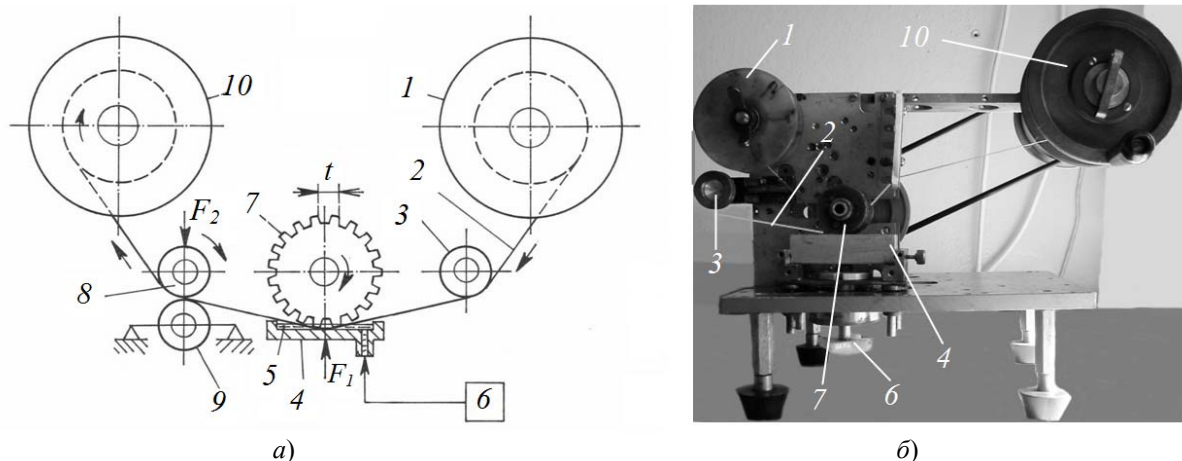


Рисунок 3.1 – Устройство для прерывистого модифицирования волокон:

а – схема; б – внешний вид.

- 1 – бобина; 2 – пучок волокон; 3 – направляющий ролик; 4 – ванна;
5 – модифицирующая жидкость; 6 – узел регулирования уровня жидкости; 7 – зубчатый валок;
8, 9 – пара гладких валков; 10 – приемная бобина

При модифицировании по механизму крейзинга молекулы красителя или другого модифицирующего вещества адсорбируются и удерживаются в поверхностном слое волокна, что позволяет окрашивать волокно люминофорами, большинство которых имеет низкую светостойкость, а также обеспечивает высокую надежность окрашивания.

4 Исследование структуры и люминесцентных свойств окрашенных волокон

Структуру поверхности модифицированных волокон и глубину образовавшихся крейзов изучали методом атомно-силовой микроскопии (АСМ) с помощью прибора NT-206 (ОДО «Микротестмашины», Беларусь).

Многофункциональный сканирующий зондовый микроскоп NT-206 представляет собой атомно-силовой микроскоп в комплексе с аппаратными и программными средствами, необходимыми для измерения и анализа микро- и субмикрорельефа поверхностей, объектов микро- и нанометрового размерного диапазона, их микромеханических и других свойств с высоким разрешением.

Для проведения исследования обеспечивали неподвижность образца путем закрепления волокна на подложке из фиксирующего материала. Подготовленный образец помещали на предметный столик таким образом, чтобы волокно располагалось перпендикулярно направлению сканирования. Перед началом сканирования устанавливали максимальное поле сканирования и необходимые параметры для количества точек по осям X и Y . Показатели ширины и глубины крейза определяли с помощью программного обеспечения к прибору NT-206 на основе данных, отраженных на графиках.

Люминесценцию окрашенных волокон в УФ области спектра визуально регистрировали с помощью прибора «Пеленг ВК-04» для контроля акцизных марок, внесенного в Государственный реестр приборов для контроля подлинности ценных бумаг и документов. Прибор оснащён ртутной дуговой лампой (наиболее интенсивные линии – 184.9499, 253.6517, 365.0153 и 404.6563 нм).

Спектры люминесценции получены на малогабаритном спектрометре с системой регистрации на ПЗС-линейке (ГГУ им. Ф. Скорины). При малых габаритах прибор обеспечивает разрешение не хуже 0,3 нм и имеет чувствительность, позволяющую регистрировать спектры люминесценции растворов органических красителей в концентрациях до 10^{-10} М/л. Рабочая область спектрометра составляет 400÷820 нм. Источник возбуждения спектров люминесценции – полупроводниковый лазер с длиной волны 405 нм, или газовый лазер ЛГИ21 с длиной волны 337 нм. Спектрометр управляется компьютером, имеет простое и удобное программное обеспечение.

Основными блоками устройства являются оптическая система, фотоприемный модуль ПЗС-камеры и плата управления камерой и ввода информации в компьютер. В качестве фотоприемника используется ПЗС-линейка ILX-511 (Sony), состоящая из 2048 элементов с размерами 14×200 мкм. Режимы работы задаются программно, время накопления сигнала составляет от 10 мс до 50 с.

Диффузно рассеянное излучение от источника света поступает через входную щель корпуса в объектив коллиматора, где преобразуется в параллельный пучок света. Полученный пучок отражается поворотным зеркалом, проходит через кювету с исследуемым веществом или закрепленный пучок волокон, затем собирается камерным объективом и подается в фотоприемный модуль на ПЗС-линейку. Внутри корпуса спектрометра под плитой основания находится плата, посредством которой осуществляется управление камерой и ввод информации в компьютер.

Для аппроксимации данных, характеризующих спектры люминесценции растворов красителей, применяли метод наименьших квадратов, который позволяет достичь высокой точности аппроксимации, и Фурье-фильтрацию. Последняя широко применяется при спектральном анализе для очистки сигнала от шума и сглаживания спектра. Обработку данных осуществляли с использованием программ Statistica v.6.1 и Origin-Pro v.7.0.

5 Результаты и их обсуждение

Степень (кратность) вытяжки волокна влияет на сорбцию модифицирующего вещества [7], [10]. Деформация волокон при вытяжке от 50 до 250% приводит к увеличению количества красителя, захваченного крейзами. По достижении степени вытяжки $\varepsilon^* = 3,0 \div 3,5$ (т. е. $\varepsilon = 200 \div 250$ %), когда начинается коллапс крейзов и переход от рыхлой структуры волокна к компактной, начинается обратный процесс – растворитель выдавливается из крейзов. Расстояния между фибриллами волокна в процессе вытяжки непрерывно уменьшаются и в конце концов оказываются соизмеримыми с размерами молекул красителя. В итоге происходит своеобразная ультрафилтрация раствора красителя на молекулярном уровне, в результате которой молекулы красителя захватываются структурой волокна, а в ванну отфильтровывается в основном чистый растворитель. Для получения полностью ориентированного образца степень вытяжки должна составлять 3,8÷4,5 [12]. Чем выше степень ориентации, тем меньше разница в длинах волокон, меньше напряженность молекулярных цепей в фибриллах и соответственно – выше прочность волокна [18, с. 123].

Таким образом, более интенсивное крейзообразование происходит при кратности вытяжки

ε^* в пределах от 2 до 3. При кратности вытяжки $\varepsilon^* < 2$ поверхность волокна захватывает недостаточное количество модифицирующего вещества, а при достижении кратности вытяжки $\varepsilon^* \approx 3$ крейзы максимально заполняются модифицирующими частицами и адсорбция большего количества частиц невозможна.

Внешний вид волокон, прерывисто окрашенных люминесцентными красителями, показан на рисунке 5.1.

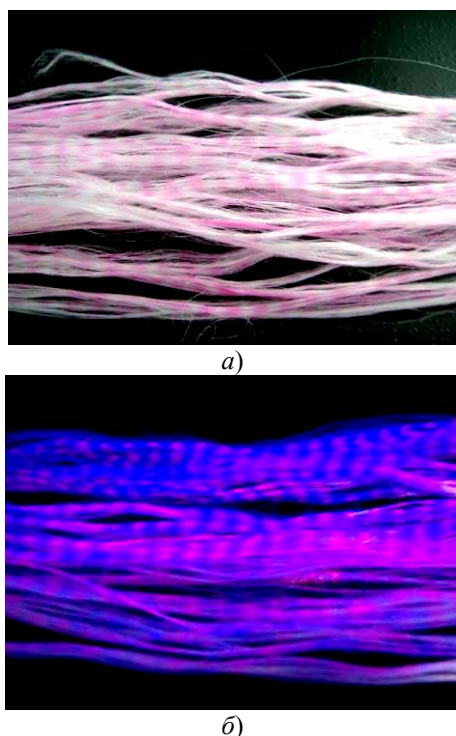


Рисунок 5.1 – Вид ПЭТ волокон, прерывисто окрашенных оксазином, в видимом свете (а) и в УФ излучении (б)

Способ и условия обработки волокон оказывают существенное влияние на структуру их поверхности. Структура поверхности модифицированных волокон показана на рисунках 5.2 и 5.3 на примере волокон, обработанных растворами люминесцентных красителей (родамина и феналемина). Гофрообразная структура поверхности характерна для всех модифицированных волокон. Крейзы обнаружены на поверхности волокон, обработанных родамином (рисунок 5.2), глубина крейзов составляет в среднем 104,6 нм, а ширина – 637,8 нм. Частицы модификатора, проникшие в крейзы, не позволили стенкам сомкнуться полностью. На волокнах, модифицированных феналемином (рисунок 5.3), заметны лишь следы сомкнувшихся крейзов. Это обусловлено меньшим размером молекул красителя, позволившим стенкам крейзов сомкнуться полностью.

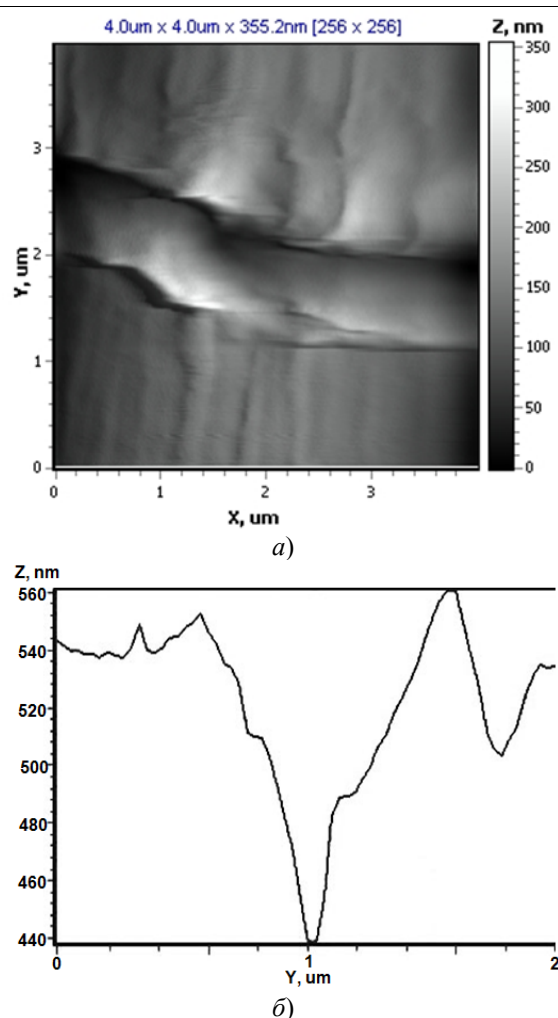


Рисунок 5.2 – АСМ-изображение топографии поверхности (а) и профиль крейза (б) ПЭТ волокна, модифицированного родамином

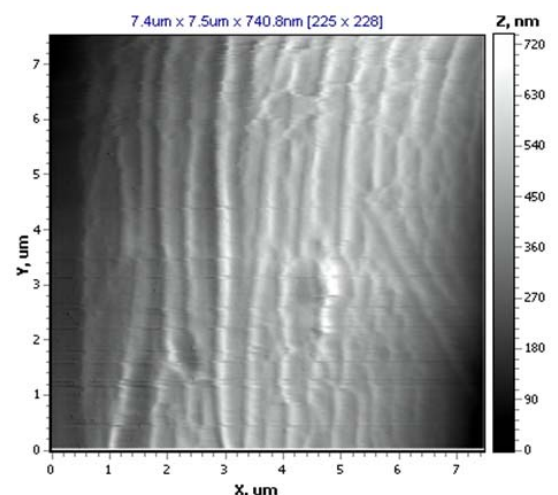


Рисунок 5.3 – АСМ-изображение топографии поверхности ПЭТ волокна, модифицированного феналемином

Для изучения влияния концентрации красителя в модифицирующей жидкости на интенсивность люминесценции изучали спектральные

характеристики растворов родамина при концентрации красителя $0,05 \div 4$ г/л и модифицированных ими волокон. По мере увеличения концентрации красителя изменяется не только интенсивность люминесценции раствора, но и их спектральные характеристики (рисунок 5.4). Наиболее интенсивной люминесценцией обладает композиция, в которой концентрация родамина составляет $0,1$ г/л (спектр 2). При дальнейшем повышении концентрации красителя начинается концентрационное тушение, а максимум люминесценции смещается в длинноволновую область спектра. При концентрации красителя выше 1 г/л интенсивность люминесценции низкая и изменяется незначительно.

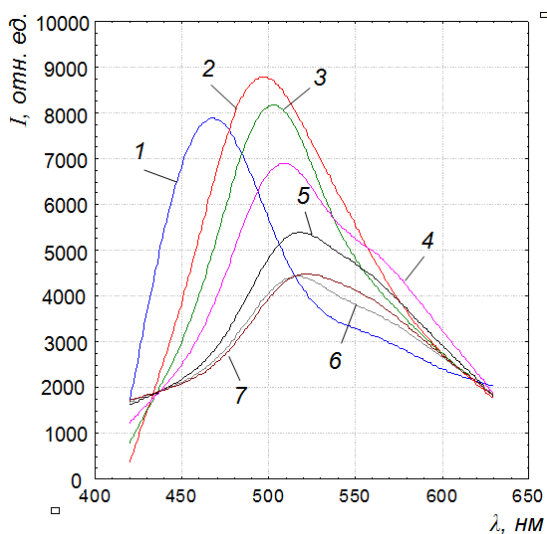


Рисунок 5.4 – Люминесценция растворов родамина в 2-пропаноле при концентрации красителя: 1 – $0,05$ г/л; 2 – $0,1$ г/л; 3 – $0,2$ г/л; 4 – $0,5$ г/л; 5 – 1 г/л; 6 – 2 г/л; 7 – 4 г/л

При модифицировании люминесцентными красителями с ростом концентрации красителя в растворе цвет люминесценции волокон изменяется от розового до красновато-оранжевого.

При одних и тех же концентрациях красителя в растворе спектры люминесценции окрашенных волокон (рисунок 5.5) заметно отличаются от спектров люминесценции растворов красителей (рисунок 5.4). Причинами различий между спектрами служат разные агрегатные состояния и коэффициенты светопреломления люминесцентных сред. Кроме того, различие между спектрами растворов красителей и люминесцентных волокон, по нашему мнению, обусловлено наличием собственной люминесценции исходного волокна. Можно предположить, что при обработке волокна раствором красителя происходит наложение полосы люминесценции красителя на длинноволновую край полосы люминесценции волокна. В связи с этим окрашенные волокна люминесцируют в более широкой полосе спектра, чем растворы красителя. При повышении

концентрации максимум люминесценции окрашенных волокон смещается из синей в красную область спектра. Максимальную интенсивность люминесценции имеют волокна, обработанные композицией, содержащей $0,5$ г красителя на 1 л раствора изопропилового спирта.

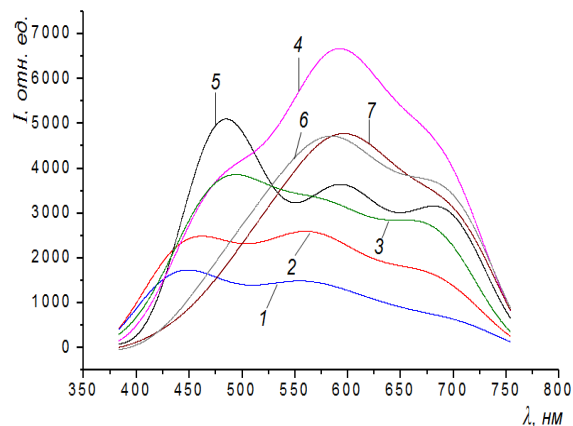


Рисунок 5.5 – Люминесценция волокон, обработанных растворами родамина в 2-пропаноле при концентрации красителя: 1 – $0,05$ г/л; 2 – $0,1$ г/л; 3 – $0,2$ г/л; 4 – $0,5$ г/л; 5 – 1 г/л; 6 – 2 г/л; 7 – 4 г/л

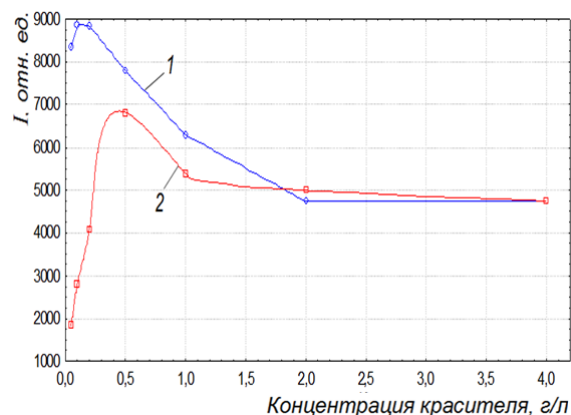


Рисунок 5.6 – Зависимость яркости люминесценции от концентрации красителя: 1 – в растворах; 2 – в окрашенных волокнах

Зависимость интенсивности люминесценции растворов красителей и обработанных ими волокон от концентрации красителя носит нелинейный характер (рисунок 5.6). Чем выше концентрация красителя в растворе, тем большее количество молекул красителя адсорбируется в поверхностном слое волокна (кривая 2). Концентрационное тушение люминесценции волокон начинается при их обработке растворами с концентрацией красителя, превышающей $0,5$ г/л.

Оптимальной концентрацией красителя в растворе для окрашивания волокон, исходя из данных рисунок 5.6, следует считать $0,4 \div 0,5$ г красителя на 1 л раствора.

Спектры люминесценции волокон, модифицированных разными видами красителей, показаны на рисунке 5.7. Интенсивность люминесценции этих волокон повышается в ряду: феналемин → флуоресцеин → эозин → родамин → оксазин, тогда как интенсивность люминесценции использованных растворов растет в другом порядке: феналемин → флуоресцеин → оксазин → родамин → эозин. Можно предположить, что наложение спектров растворов красителя на спектр люминесценции полиэфирного волокна приводит к сдвигу максимумов люминесценции в красную область спектра, при этом полоса люминесценции расширяется.

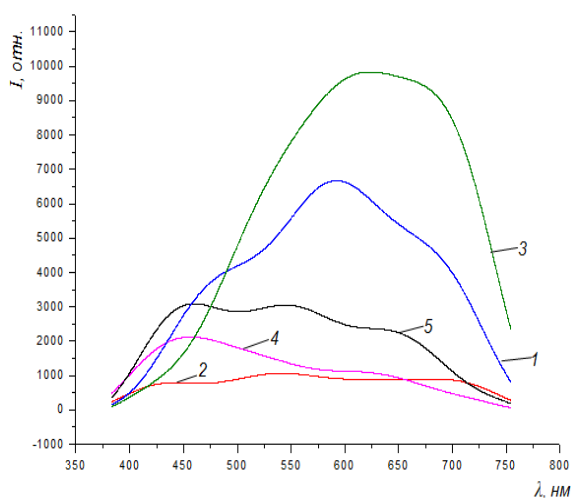


Рисунок 5.7 – Люминесценция волокон, обработанных растворами красителей в 2-пропанол при концентрации красителя 0,5 г/л: 1 – родамина; 2 – феналемина; 3 – оксазина; 4 – флуоресцеина; 5 – эозина

Волокна, обработанные оксазином и родамином, характеризуются одинаковым цветом и свечением в УФ свете, различны лишь оттенки розового цвета. Особенность волокон, обработанных флуоресцеином и эозином, состоит в том, что цвета этих волокон при дневном освещении и при облучении УФ лучами различаются. По нашему мнению, оба типа волокон можно применять для защиты документов от подделки совместно или в сочетании с другими типами защитных волокон, поскольку стандартные требования регламентируют необходимость введения в бумажную массу не менее двух разновидностей защитных волокон.

Волокна, модифицированные родамином (рисунок 5.7, кривая 1), имеют максимумы люминесценции в областях красного, фиолетового и синего диапазонов спектра, что обуславливает яркий оранжево-розовый цвет свечения.

Волокна, окрашенные феналемином (кривая 2), имеют наименьшую интенсивность свечения, причем сложно выделить четкие максимумы,

соответствующие какому-либо определенному участку спектра. В УФ свете они имеют слабую сиренево-розовую окраску.

Волокна, обработанные оксазином (кривая 3), имеют максимум люминесценции примерно в тех же областях диапазона, что и волокна, модифицированные родамином. Интенсивность люминесценции этих волокон наиболее высока по сравнению с прочими образцами, цвет свечения – красновато-розовый.

Краситель флуоресцеин (кривая 4) дает максимумы люминесценции в областях желтого и синего диапазонов спектра, что обуславливает желтовато-зеленый цвет свечения. Эозин (кривая 5) придает волокнам неяркий розовато-оранжевый цвет свечения в УФ лучах.

Из рассмотренных вариантов менее эффективны для защиты документов от подделки волокна, окрашенные феналемином, поскольку они отличаются невысокой интенсивностью люминесценции по сравнению с другими волокнами. Более надежную защиту документов обеспечат волокна, обработанные другими видами красителей, в особенности, оксазином и родамином, которые обеспечивают интенсивную люминесценцию волокна в УФ излучении.

Заключение

1. Показано, что интенсивность и цвет свечения волокон существенно зависят от вида и концентрации красителя в модифицирующем растворе. Наибольшую интенсивность свечения ярко красным цветом среди всех видов исследованных волокон показали волокна с красителем оксазин. На спектре люминесценции они дают максимум интенсивности свечения в области длин волн 620÷700 нм, что соответствует красному свету. Волокна с другими исследованными красителями имеют более низкую интенсивность свечения, а соответствующие им максимумы интенсивности сдвинуты в область более коротких длин волн. Соответственно цвет их свечения – от оранжевого до зеленого.

2. Установлено, что концентрация красителя в модифицирующей жидкости влияет на интенсивность свечения волокон в УФ свете и даже (в некоторой степени) – на цвет свечения. На примере родамина показано, что наибольшей интенсивностью (яркостью) свечения обладают волокна, модифицированные раствором с содержанием красителя 0,5 г/л. Уменьшение концентрации красителя приводит, во-первых, к резкому снижению интенсивности свечения волокон и, во-вторых, к некоторому смещению максимума интенсивности на спектре в сторону меньших длин волн, т. е. от ярко красного до желтого и желто-зеленого. Увеличение концентрации красителя свыше 0,5 г/л практически не влияет на цвет свечения волокон, но несколько снижает его интенсивность.

3. Разработаны методика прерывистого модифицирования полиэфирных волокон в процессе ориентационной вытяжки и конструкция устройства для получения волокон с чередованием люминесцирующих окрашенных и неокрашенных участков заданной длины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубовик, С. Научное обоснование голографической защиты / С. Дубовик // Веды. – 2012. – 6 авг. – С. 2.

2. *Правонарушения в Республике Беларусь: статистический сборник* / Национальный статистический комитет Республики Беларусь. – Минск, 2012. – 170 с.

3. Кислухин, С. Защита официальных бумаг, бланков и документов от подделки в Республике Беларусь / С. Кислухин, Л. Корочкин // Банкаўскі веснік. – 2002. – № 6. – С. 36–40.

4. Коншин, А.А. Защита полиграфической продукции от фальсификации / А.А. Коншин. – М.: ООО «Синус», 1999. – 160 с.

5. Kramer, E.J. Fundamental processes of craze growth and fracture / E.J. Kramer, L.L. Berger // Adv. Polym. Sci. – 1990. – Vol. 91/92. – P. 1–68.

6. Крейзинг в жидких средах – основа для создания уникального метода модификации полимеров / А.Л. Волынский [и др.] // Российский химический журнал. – 2005. – Т. XLIX, № 6. – С. 118–128.

7. Волынский, А.Л. Структурная самоорганизация аморфных полимеров / А.Л. Волынский, Н.Ф. Бакеев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 232 с.

8. Волынский, А.Л. Эффект Ребиндера в полимерах / А.Л. Волынский // Природа. – 2006. – № 11. – С. 11–18.

9. Волынский, А.Л. Универсальный метод получения нанокомпозитов на полимерной основе / А.Л. Волынский, Л.М. Ярышева, Н.Ф. Бакеев // Наноисследования и разработки. – 2006. – Т. 2, № 3–4. – С. 11–18.

10. Использование крейзинга полимеров для создания антимикробных полиэфирных волокон / Н.С. Винидиктова [и др.] // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – Минск, сентябрь–октябрь 2009. – Т. 53, № 5. – С. 108–112.

11. Goldade, V.A. Modification of polyester fibers by bactericides using crazing mechanism / V.A. Goldade, L.S. Pinchuk, N.S. Vinidictova // Int. Polymer Processing. – 2010. – Vol. 25, № 3. – P. 199–204.

12. Крашение полиэфирных волокон с использованием метода крейзинга / А.П. Андропова

[и др.] // Химические волокна. – 2011. – № 1. – С. 71–74.

13. *Способ изготовления защитной нити*: пат. 2188268 RU, МПК D 21 Н 21/42, В 42 D 15/00, В 41 М 3/14 / Дзонг-Киу Ким, Йонг-Хван Парк; заявитель Корея Секьюрити Принтинг Энд Минтинг Корпорейшн. – № 2000124869/12; заявл. 26.02.99; опубл. 27.08.2002 // Патенты России. Сводный индекс. RU 15.01.1994–27.03.2010 [Электронный ресурс]: описания полезных моделей. Электрон. текстовые дан. – М.: ФГУ ФИПС, 2010. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM): цв.

14. *Способ изготовления защитного волокна, защитное волокно и защищенная от подделки бумага*: пат. 2190716 RU, МПК D 21 Н 21/40, D 44 F 1/12 / Дзонг-Киу Ким, Йонг-Хван Парк; заявитель Корея Секьюрити Принтинг Энд Минтинг Корпорейшн. – № 2000124882/12; заявл. 26.02.99; опубл. 10.09.99 // Патенты России. Сводный индекс. RU 15.01.1994–27.03.2010 [Электронный ресурс]: описания полезных моделей. Электрон. текстовые дан. – М.: ФГУ ФИПС, 2010. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM): цв.

15. *Окрашенное химическое многофиламентное волокно для защиты бумаги от подделки*: пат. 2217543 RU, МПК D 21 Н 21/40, D 21 Н 21/42, В 42 D 15/00, В 44 F 1/12 / А.Е.Микушев, М.П. Голомазова, С.Ю. Вязалов и др.; заявитель Объединение «Гознак». – № 2002122542/12; заявл. 22.08.02; опубл. 27.11.03 // Патенты России. Сводный индекс. RU 15.01.1994–27.03.2010 [Электронный ресурс]: описания полезных моделей. Электрон. текстовые дан. – М.: ФГУ ФИПС, 2010. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM): цв.

16. *Технологии получения окрашенных химических волокон для защиты ценных бумаг* / Н.В. Кузьменкова [и др.] // Материалы, технологии, инструменты. – 2012. – Т. 17, № 1. – С. 83–87.

17. *Устройство для прерывистого окрашивания химических волокон*: заявка № а20111216 от 19.09.2011 г. на выдачу патента РБ на изобретение, МПК D06B 1/02, D06B 3/02 / Л.С. Пинчук, Н.В. Кузьменкова, В.А. Гольдаде [и др.]: заявитель ИММС НАН Беларуси. – Опубл. 30.04.2013 // Официальный бюллетень № 2, с. 21; www.belgospatent.org.by / Решение о выдаче патента на изобретение от 13.02.2014 г.

18. Перепелкин, К.Е. Структура и свойства волокон / К.Е. Перепелкин. – М.: Химия, 1985. – 208 с.

Поступила в редакцию 25.11.13.

УДК 004.3

ПРИМЕНЕНИЕ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ С РАСШИРЕННЫМ НАБОРОМ ПРАВИЛ ДЛЯ ГЕНЕРИРОВАНИЯ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ТЕСТОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

И.А. Мурашко, Д.Е. Храбров

Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель, Беларусь

APPLICATION OF CELLULAR AUTOMATA WITH AN EXPANDED SET OF RULES TO GENERATE PSEUDO-RANDOM TEST SEQUENCES

I.A. Murashko, D.E. Hrabrov

P.O. Sukhoi Gomel State Technical University, Gomel, Belarus

В статье рассматриваются вопросы классификации правил функционирования клеточных автоматов в контексте генерирования псевдослучайной последовательности максимальной возможной длины. Проведен анализ возможных наборов правил, выявлены заведомо неудачные конфигурации. Предложена методика выбора конкретного набора правил для различных ситуаций.

Ключевые слова: псевдослучайная последовательность максимальной длины; генератор псевдослучайной тестовой последовательности; клеточный автомат; циклические граничные условия.

The article deals with the cellular automata rules classification in the context of generating pseudo-random sequence of the maximum possible length. The analysis of the possible sets of rules was successful and wittingly failed configurations were identified. The technique for selecting a specific set of rules for different situations has been proposed.

Keywords: maximum length pseudorandom sequence, pseudorandom test sequence, cellular automata, cyclic boundary conditions.

Введение

Важнейшим элементом встроенного самотестирования (англ. Built-in Self-test, BIST) является генератор псевдослучайных тестовых воздействий [1]. Самым используемым методом генерации тестовых воздействий максимальной длины является регистр сдвига с линейной обратной связью (англ. Linear feedback shift register, LFSR). Основным достоинством LFSR является его изученность и простота аппаратной реализации, для которой требуется лишь регистр сдвига и многоходовой сумматор по модулю два [2]. Однако использование LFSR не всегда оправдано для схем встроенного самотестирования ввиду сильной корреляции между последовательностями, формируемыми на различных разрядах генератора. Так что в последнее время внимание учёных направлено на использование альтернативных методов генерации псевдослучайных последовательностей максимальной длины, так же называемых M-последовательностями. В частности, в качестве генераторов M-последовательностей рассматриваются генераторы на клеточных автоматах (КА) [3], [4].

Наиболее полно исследованы клеточные автоматы на основании правил 90 и 150 с нулевыми граничными условиями [5]. Для них созданы таблицы конфигураций, позволяющих формировать M-последовательности [6].

В последнее время большое внимания уделяется клеточным автоматам с циклическими граничными условиями (ЦГУ). Например, в [7] рассмотрена возможность отражения результатов моделирования КА относительно временной оси. Проблема обратимости линейных клеточных автоматов с нулевыми граничными условиями была подробно рассмотрена в [4], однако только в двоичном поле Галуа GF(2). Возможность обращения генерирования последовательности важна, так как иначе предыдущую последовательность можно узнать только прибегнув к полному моделированию работы клеточного автомата. Подробно описание работ по обратимым клеточным автоматам можно найти в [8].

В статье рассматриваются вопросы классификации правил функционирования клеточных автоматов в контексте генерирования псевдослучайной последовательности максимальной возможной длины. Проведен анализ возможных наборов правил, выявлены заведомо неудачные конфигурации. Предложена методика выбора конкретного набора правил для различных ситуаций.

1 Клеточные автоматы

В общем случае клеточный автомат может быть рассмотрен как простая модель пространственно протяжённого устройства, состоящего из ряда ячеек. Связи между ячейками ограничены

локальным взаимодействием, то есть каждая ячейка находится в каком-либо состоянии, которое изменяется с течением времени в зависимости от предыдущего значения самой ячейки и значений её ближайших соседей. В данной работе рассматриваются только одномерные клеточные автоматы. Если на крайние ячейки автомата постоянно подаётся логический ноль, то такие граничные условия называются нулевыми. Если автомат «завёрнут» в кольцо (то есть последняя ячейка связана с первой и наоборот), то такие граничные условия называются циклическими.

В данной работе использован набор правил: 0, 170, 204, 102, 240, 90, 60, 150. Эти 8 правил представляют из себя все вариации одной клетки и двух соседей при использовании только сумматоров по модулю два. Особое значение здесь играют правила 0 и 204, при их использовании клетка никогда не поменяет своё значение, что фактически означает превращение клеточного автомата из циклического в линейный автомат с фиксированными граничными условиями.

Расширенный набор правил можно записать в виде битовой таблицы (таблица 1.1). В этой таблице первая строка – используемые правилом значения. Например, 011 в первой строке обозначает, что следующее значение будет вычисляться при помощи суммирования предыдущего значения клетки и значения правого соседа. Первый столбец – предыдущие значения левого соседа, ячейки и правого соседа. Крайний правый столбец – «вес» текущего значения. Последняя строка – название правила, которое является суммой значений (основная часть таблицы), умноженных на вес.

Таблица 1.1 – Битовая таблица расширенного набора правил

	000	001	010	011	100	101	110	111	
000	0	0	0	0	0	0	0	0	1
001	0	1	0	1	0	1	0	1	2
010	0	0	1	1	0	0	1	1	4
011	0	1	1	0	0	1	1	0	8
100	0	0	0	0	1	1	1	1	16
101	0	1	0	1	1	0	1	0	32
110	0	0	1	1	1	1	0	0	64
111	0	1	1	0	1	0	0	1	128
Правило:	0	170	204	102	240	90	60	150	

Таблица 1.3 – Примеры обращения наборов правил

Полином	Набор правил	Обратный набор	Полином
$1+x^3+x^5$	[240, 240, 240, 60, 60]	[170, 170, 170, 102, 102]	$1+x^3+x^5$
$1+x^3+x^5$	[240, 60, 60, 90, 90]	[170, 102, 102, 90, 90]	$1+x+x^2+x^3+x^5$
$1+x^3+x^5$	[240, 150, 60, 60, 60]	[170, 150, 102, 102, 102]	$x^2+x^3+x^5$
$1+x^2+x^5$	[240, 150, 60, 60, 150]	[170, 150, 102, 102, 150]	$1+x^2+x^5$
$1+x^2+x^5$	[90, 60, 60, 150, 60]	[90, 102, 102, 150, 102]	$1+x^2+x^5$
$1+x^3+x^5$	[240, 90, 150, 240, 60]	[170, 90, 150, 170, 102]	$1+x+x^2+x^3+x^5$
$1+x^3+x^5$	[240, 240, 150, 60, 90]	[170, 170, 150, 102, 90]	$1+x+x^3+x^5$

В первой строке таблицы 1.1 можно увидеть закономерность: если есть правило 100, то будет правило 001. Назовём это инвертированием правила, или обращением. На рисунке 1.1 показана общая идея обращения правил клеточного автомата: если использовалось значение только правого соседа, то после инвертирования будет использоваться значение только левого.

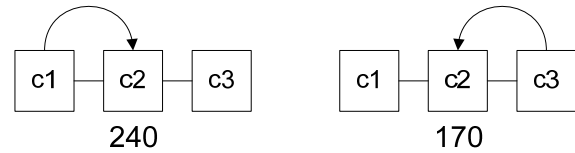


Рисунок 1.1 – Иллюстрация процесса инвертирования (обращения)

В таблице 1.2 показан полный расширенный набор и его обращение. Цветом в таблице отмечены правила 0 и 204, так как используют только значение самой клетки и по сути сводят циклический клеточный автомат к автомату с нулевыми граничными условиями, но меньшей размерности. Столбцы «зависимость» и «обратная» обозначают, используются ли в данном правиле значения левого соседа, самой клетки, и правого соседа.

Таблица 1.2 – Расширенный набор правил и его обращение

Правило	0	170	204	102	240	90	60	150
Прямая зависимость	000	001	010	011	100	101	110	111
Обратная зависимость	000	100	010	110	001	101	011	111
Обратное правило	0	240	204	60	170	90	102	150

В таблице 1.3 можно увидеть практическое применения обращения правил. Как видно из первых трёх строк, при обращении правил одного и того же примитивного полинома может получиться тот же самый полином, другой примитивный или другой не примитивный. Причём, как видно из строк 3 и 4, замена всего одной ячейки может существенно изменить результат.

В таблице 1.4 представлены примеры корректных векторов правил, построенных на двух правилах. Вектора собраны по парам – прямой и инвертированный. Инвертированный набор правил может быть построен в соответствии с таблицей 1.2. Следует заметить, что всего было найдено 3 пары правил, на которых можно построить удачные конфигурации: 60 и 240, 60 и 150, 90 и 240. Также корректные вектора можно построить на обратных к ним правилам: 102 и 170, 102 и 150, 90 и 170.

Таблица 1.4 – Корректные вектора, построенные на 2 правилах

Полином	Вектор правил								П1	П2
	240	240	240	240	240	240	60	60		
$1+x^6+x^7$	240	240	240	240	240	240	60	60	240	
$1+x^6+x^7$	170	170	170	170	170	170	102	102	170	
$1+x^6+x^7$	60	150	60	150	150	150	150	60	150	
$1+x^6+x^7$	102	150	102	150	150	150	150	102	150	
$1+x^3+x^7$	240	90	240	90	240	90	90	90	240	
$1+x^3+x^7$	170	90	170	90	170	90	90	90	170	

В таблице 1.4 приведены примеры конфигураций, при обращении дающих тот же самый порождающий полином.

2 Правила функционирования клеточных автоматов

В работе [9] в генераторах на клеточных автоматах с циклическими граничными условиями предложено использовать 8 правил: 0, 170, 204, 102, 240, 90, 60, 150. Там же предложено разделить правила на два класса: сдвигающие и суммирующие. Сдвигающие правила имеют направленность, т. е. кроме значения ячеек они могут брать значения либо из левого, либо из правого соседа. Одновременное использование или неиспользование значений соседей является отличительной особенностью суммирующих правил: 0, 204, 90 и 150. Остальные правила являются сдвигающими, что рассмотрено в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Виды правил

	Суммирующие				Сдвигающие			
Правило:	0	204	90	150	60	102	240	170
Значения:	000	010	101	111	110	011	100	001
τ :	0	0	1	2	1	1	0	0

В строке «значения» таблицы 2.1 показано бинарное представление используемых правил значений: левого соседа, предыдущее значение ячейки и правого соседа. Строка « τ » означает количество двухходовых сумматоров, необходимых для функционирования данного правила.

Отдельное место в этом наборе занимают правила 0 и 204, так как по сути сводят циклический клеточный автомат к автомату с нулевыми граничными условиями, но меньшей размерности. Это показано на рисунке 2.1.

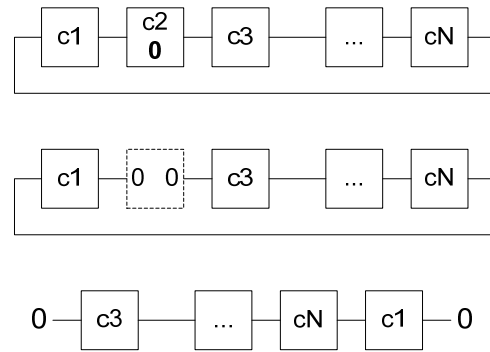


Рисунок 2.1 – Использование правила 0 в клеточном автомате с циклическими граничными условиями

В данной работе исследуется проблема классификации наборов правил КА, на которых генератор сможет выдавать последовательность максимальной длины. По рисунку 2.1 видно, что при использовании правила 0 клеточный автомат фактически будет уменьшен на степень (то есть иметь размерность $n-1$), соответственно такой автомат не сможет генерировать последовательность длины 2^n-1 , только $2^{n-1}-1$. Аналогичные результаты получаются для правила 204, которое формирует единичные граничные условия. Как следствие, для рассмотрения остались 6 правил: 170, 102, 240, 90, 60, 150.

Для классификации было проведено моделирование всех конфигураций клеточных автоматов на различных наборах правил. Для каждой из степеней были найдены все удачные конфигурации. В таблице 2.2 рассмотрены все возможные конфигурации при использовании только двух правил.

По аналогии были найдены конфигурации из трёх и четырёх правил, которые позволяют генерировать M-последовательность: 60, 90, 240 / 102, 90, 170; 60, 90, 150 / 102, 90, 150; 90, 150, 240 / 90, 150, 170; 60, 150, 240 / 102, 150, 170; 60, 90, 150, 240 / 90, 102, 150, 170.

Для пар правил авторами предлагается следующая классификация:

– Дающие корректный примитивный характеристический полином.

1. Прямые: 60–240 (110–100), 60–150 (101–111), 90–240 (101–100).

2. Инвертированные: 102–170 (011–001), 102–150 (011–111), 90–170 (101–001).

– Не дающие корректный полином.

1. Симметричные сами себе: 60–102 (110–011), 90–150 (101–111), 170–240 (001–100)

2. Сдвигающие, противоположно направленные: 60–170 (110–001), 102–240 (011–100)

3. Другие: 60–90 (110–101), 90–102 (101–011), 150–170 (111–001), 150–240 (111–100)

Таблица 2.2 – Возможные пары правил

№	Правила	Битовые	Комментарий
1	60–90	(110–101)	удачных конфигураций найдено не было
2	60–102	(110–011)	удачных нет, правила симметричны
3	60–150	(110–111)	примеры удачной конфигурации: $1+x^2+x^3$ [60, 60, 150]
4	60–170	(110–001)	удачных конфигураций найдено не было
5	60–240	(110–100)	примеры: $1+x^3+x^4$ [240, 240, 240, 60], $1+x^4+x^5+x^6+x^7$ [240, 240, 60, 240, 60, 240, 60]
6	90–102	(101–011)	удачных нет, набор обратный к (60–90)
7	90–150	(101–111)	удачных нет, правила симметричны
8	90–170	(101–001)	$1+x+x^3$ [170, 170, 90], $1+x^3+x^7$ [170, 90, 170, 90, 170, 90, 90]
9	90–240	(101–100)	$1+x^3+x^5$ [240, 90, 240, 90, 90], $1+x^3+x^7$ [240, 90, 240, 90, 240, 90, 90]
10	102–150	(011–111)	$1+x^2+x^3+x^4+x^5$ [102, 150, 102, 150, 150], $1+x^6+x^7$ [102, 102, 150, 102, 150, 102, 150]
11	102–170	(011–001)	$1+x^2+x^3$ [170, 170, 102], $1+x^5+x^6$ [170, 170, 170, 170, 170, 102]
12	102–240	(011–100)	(60–170), удачных нет
13	150–170	(111–001)	удачных нет
14	150–240	(111–100)	(150–170)
15	170–240	(001–100)	удачных нет, правила симметричны

Как видно из классификации, корректные порождающие вектора могут давать наборы как чисто сдвигающих правил (60–240), так и комбинации сдвигающих с суммирующими (60–150). Инвертировав правила из корректного набора так же получим правила, дающие корректные порождающие вектора: 60–240 и 102–170, 60–150 и 102–150.

В ходе исследования было выявлено, что при наличии в наборе противоположно направленных правил (рисунок 2.2) невозможно получить корректную конфигурацию. На рисунке знаком «>» обозначены правила, сдвигающие значение вправо, «<» – влево, «+» – суммирующие правила, «0» – ячейка, в которую собираются все значения.

>>>>0<<<

Рисунок 2.2 – Противоположная направленность правил

Из рисунка видно, что левая и правая части автомата по сути сдвигают все свои значения в ячейку «0». Так как значения оттуда не берутся, то получается «дыра», место куда значения уходят. В то же время крайняя левая и крайняя правая ячейки новых значений ниоткуда не берут, в не зависимости от граничных условий. Даже если на начальном этапе в этих ячейках было значение 1, то уже через 2 хода это значение будет перемещено далее и более никогда не появится.

3 Классификация наборов правил

При построении генератора на клеточных автоматах могут быть использованы различные

комбинации правил, однако далеко не все полученные генераторы смогут выдавать последовательность максимальной длины. Классификацию генераторов на клеточных автоматах по количеству используемых правил можно увидеть на рисунке 3.1.



Рисунок 3.1 – Классификация генераторов на клеточных автоматах по количеству используемых правил

В таблице 3.1 собраны сведения о неинвертированных наборах правил, генераторы на которых могут выдавать последовательность максимальной длины.

Исследования показали, что примитивные полиномы конкретной степени существуют не для всех пар правил. Например, столбец «E» отвечает за ошибку (Error) – то есть, если для определенной степени не было найдено ни одного вектора правил на данном наборе и дающего M-последовательность, то такое состояние называется ошибкой. «Ошибка в» показывает, для каких именно степеней нет векторов на данном наборе правил.

Таблица 3.1 – Выбор набора правил

Набор	E	Ошибка в	I	P	A_{sp}	A_{min}	A_{max}	L_{min}	L_{max}	L_{avg}
60, 150	6	4, 6, 8, 10, 12, 14	12	12	1,5	1,13	1,8	0,3	0,85	0,57
90, 240	6	4, 6, 8, 10, 12, 14	12	12	0,5	0,13	0,86			
60, 240	4	8, 12, 13, 14	11	11	0,5	0,06	0,93			
60, 90, 240	0	–	6	10	0,6	0,21	0,92			
60, 90, 150	0	–	6	10	1,3	1,07	1,76			
60, 150, 240	0	–	9	9	1	0,3	1,61			
90, 150, 240	0	–	6	8	1	0,23	1,61			
60, 90, 150, 240	0	–	0	0	1	0,38	1,61			

Столбец « I » – количество не пройденных тестов на неприводимость (Irreducibility). Тест на неприводимость считается не пройденным, если были найдены не все неприводимые характеристические полиномы для данной степени. « P » – количество проваленных тестов на примитивность (Primitiveness). Все примитивные полиномы неприводимы, обратное неверно [10]. Однако тест на неприводимость имеет гораздо меньшую сложность, чем тест на примитивность. Поэтому сначала используется достаточно быстрый тест на неприводимость [11] и в случае его прохождения выполняется тест на примитивность. Столбец « A_{sp} » отвечает за удельные аппаратные затраты, считая, что правила в наборе равновероятны. Известно, что аппаратная реализация генераторов на клеточных автоматах выполняется с использованием только триггеров и сумматоров по модулю два [12]. Например, значение «0,5» в столбце « A_{sp} » означает, что удельные аппаратные затраты для данного набора равны половине сумматора по модулю два на разряд. В столбцах « A_{min} » и « A_{max} » приведены минимальные и максимальные аппаратные затраты для генератора на различных конфигурациях правил.

Также для аналогии рассмотрим все LFSR тринадцатой степени, генерирующие последовательность максимальной длины. Пример порождающего полинома с минимальными аппаратными затратами для LFSR: $x^{13} + x^4 + x^3 + x + 1$. Аппаратные затраты в этом случае составляют один пятиходовой сумматор по модулю два, который можно представить как 4 двухходовых сумматора, то есть $LFSR_{min} = L_{min} = 4/13 = 0,3$. В наихудшем с точки зрения аппаратных затрат полиноме содержится 12 членов, то есть аппаратные затраты составляют 11 двухходовых сумматоров по модулю два: $LFSR_{max} = 11/13 = 0,85$. Можно предположить, что в среднем аппаратные затраты будут равны:

$$LFSR_{avg} = (LFSR_{max} + LFSR_{min}) / 2 = 0,58.$$

Общий вид LFSR и клеточного автомата с циклическими граничными условиями представлен на рисунке 3.2. Видно, что рисунки 3.2, а) и 3.2, б) отличаются только наличием у LFSR обратной связи с пятой ячейки. Однако именно эта обратная связь не позволяет представить LFSR в

видах, представленных на рисунках 3.2, в) и 3.2, г). Рисунок 3.2, в) представляет минимальное представление клеточного автомата с циклическими граничными условиями: все связи локальные и имеют малую длину. Рисунок 3.2, г) показывает представление клеточного автомата в виде кольца, аналогично можно расположить ячейки по любому другому пути, необходимому для данной конкретной реализации. У LFSR данное преимущество отсутствует.

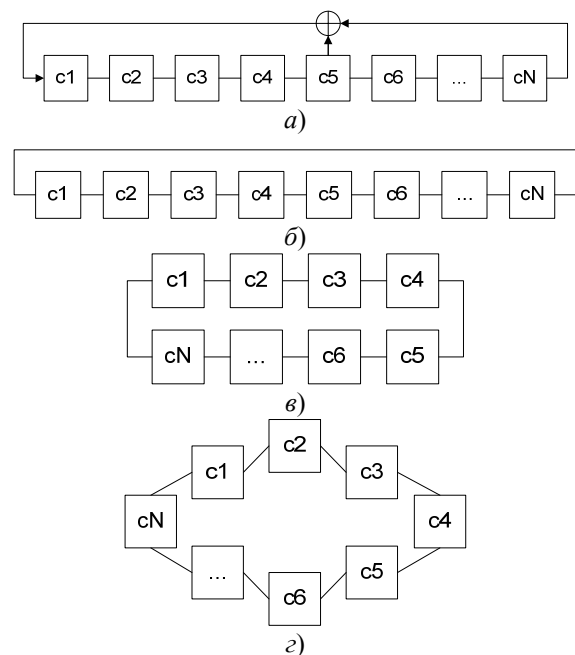


Рисунок 3.2 – Конечные автоматы:
 а) – LFSR; б) – КА с ЦГУ; в) – «минимальное» представление КА с ЦГУ;
 г) – КА «свёрнутый» в кольцо

Рассмотрим задачу: необходимо найти порождающий вектор размерности N , построенный на двух правилах и генератор на котором должен выдавать последовательность максимальной длины. Если нужно найти вектор размерности строго N , причём N нечётное, то лучше использовать пару правил 90, 240. В противном случае – 60, 240. Пару правил 60, 150 использовать не рекомендуется, так как она выдаёт такие статистические результаты, как и 90, 240, но имеет гораздо

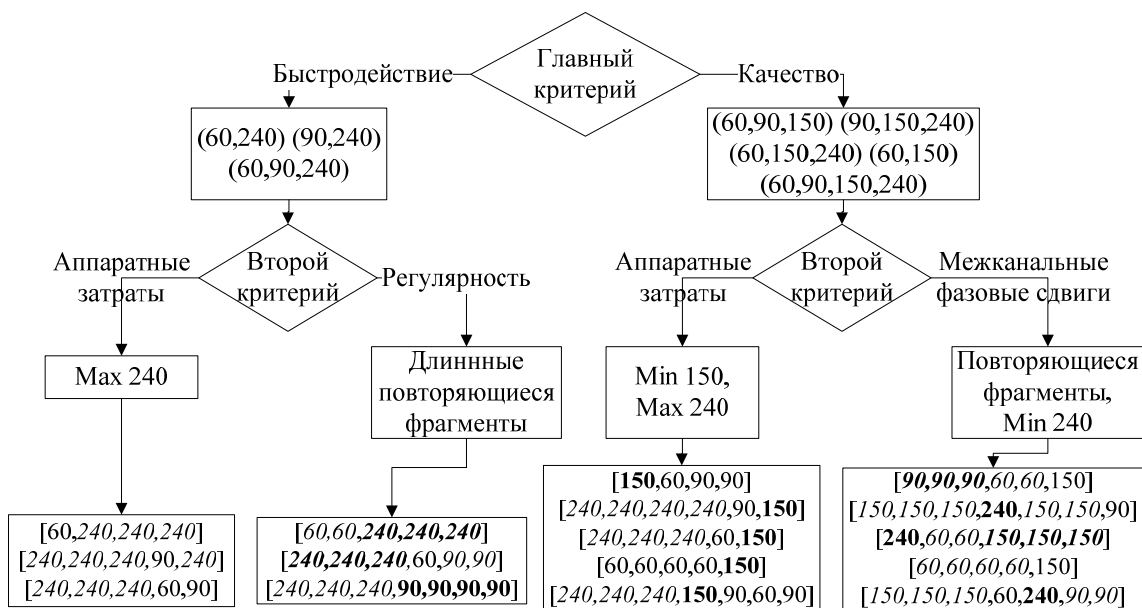


Рисунок 3.3 – Схема выбора набора правил

большие удельные аппаратные затраты. В таблице 3.1 видно, что пара 60, 240 имеет наилучшие статистические результаты среди пар правил, однако ошибка трудно предсказуема, в то время как пары 60, 150 и 90, 240 стабильно имеют ошибки на чётных степенях.

Тройки правил не имеют ошибок вообще, то есть высока вероятность, что при использовании набора из трёх правил будет получен вектор нужной размерности. Если важны удельные аппаратные затраты, то лучше использовать 60, 90, 240. В противном случае наилучшим выбором является 90, 150, 240, так как этот набор имеет лучшие статистические характеристики и относительно малые аппаратные затраты.

Если есть возможность использовать набор из 4 правил (60, 90, 150, 240) – то лучше использовать его ввиду отличных статистических характеристик и малых аппаратных затрат полученного генератора. Однако задача поиска вектора на 4 правилах значительно сложнее, чем поиск векторов на двух или трёх правилах.

Методика выбора конкретного набора правил для генератора в зависимости от критерия приведена на рисунке 3.3.

Минимальная реализация может быть выполнена на правилах 240 (0 сумматоров), 60 и 90 (по одному сумматору). Соответственно, генератор на этих правилах содержит максимум один сумматор по модулю два на разряд. В то же время, если используется большое количество ячеек с правилом 240, то аппаратные затраты снижаются (таблица 3.1). Однако их недостаток в том, что в этом случае фрагменты генератора повторяют работу LFSR. Чтобы улучшить качество, мы можем использовать конфигурации, содержащие

правила 60 и 90. Эти правила формируют достаточно большие фазовые сдвиги М-последовательности между соседними каналами, что повышает качество генерируемой последовательности.

С другой стороны, если главным критерием является качество, то тогда необходимо минимизировать число ячеек с правилом 240 (межканальный сдвиг для этого разряда равен единице). Заметим, что расчёт фазовых сдвигов упрощается при регулярной структуре генераторов, то есть наличии фрагментов с одинаковыми правилами функционирования. Соответственно, можно выбирать конфигурации, включающие правила 150, и 60, и 240. Можно набирать любую доступную конфигурацию, при этом минимизируя количество ячеек с правилом 240.

Заключение

В работе исследована проблема проектирования генераторов псевдослучайных тестовых наборов на клеточных автоматах с расширенным набором правил – 0, 170, 204, 102, 240, 90, 60, 150. Рассмотрена проблема выбора наилучшего поднабора из приведенных правил. Выяснено, что генераторы далеко не на всех выборках способны генерировать последовательность максимальной длины. Предложен метод выбора наилучшего набора правил для каждой конкретной ситуации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Agrawal, V. Essentials of Electronic Testing for Digital, Memory, and Mixed-Signal VLSI Circuits / V. Agrawal, M. Bushnell. – Springer, 2000. – 712 p.

2. *Golomb, S.W.* Shift register sequences / S.W. Golomb. – San Francisco : Holden-Day. – 1967. – 224 p.
3. *Hortensius, P.D.* Parallel random number generation for VLSI systems using cellular automata / P.D. Hortensius // IEEE Transactions on Computers. – 1989. – Vol. 38, № 10. – P. 1466–1473.
4. *del Reya, A.M.* Reversibility of linear cellular automata / A.M. del Reya, G.R. Sanchez // Applied Mathematics and Computation. – 2011. – Vol. 217. – P. 8360–8366.
5. *Ярмолик, В.Н.* Реализация генератора псевдослучайной последовательности на клеточных автоматах / В.Н. Ярмолик, И.А. Мурашко // Автоматика и вычислительная техника. – 1993. – № 3. – С. 9–13.
6. *Cattell, K.* Minimal cost one-dimensional linear hybrid cellular automata of degree through 500 / K. Cattell, S. Zhang // Journal of Electronic Testing : Theory and Applications. – 1995. – Vol. 6. – P. 255–258.
7. *Cinki, Z.* Reversibility of 1D cellular automata with periodic boundary over finite fields Z_p / Z. Cinki, H. Akin, I. Siap // Journal of Statistical Physics. – 2011. – Vol. 143, № 4. – P. 807–823.
8. *Kari, J.* Reversible cellular automata // Lecture Notes in Computer Science. – 2005. – Vol. 3572. – P. 57–68.
9. *Voorhees, B.* Nearest neighbor cellular automata over Z_2 with periodical boundary conditions // Physica D. – 1990. – Vol. 45. – P. 26–35.
10. *Лидл, Р.* Конечные поля : В 2-х т., пер. с англ. / Р. Лидл, Г. Нидеррайтер // М. : Мир. – 1988. – Т. 1. – 820 с.
11. *Brent, R.P.* Three ways to test irreducibility // INRIA, Nancy France. – 2008. – P. 1–20.
12. *Мурашко, И.А.* Встроенное самотестирование. Методы минимизации энергопотребления / И.А. Мурашко, В.Н. Ярмолик // Saarbrücken : LAP Lambert Academic Publishing. – 2012. – 348 с.

Поступила в редакцию 14.11.13.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25 % в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;

- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It pro-

vides the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).