



ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№ 2 (11) 2012

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

Главный редактор:
А.В. Рогачев (Беларусь)

Заместители главного редактора:
О.М. Демиденко (Беларусь)
Л.А. Шеметков (Беларусь)

Редакционная коллегия:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
П.Д. Кухарчик (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

Ответственный секретарь:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

Адрес редакции:
Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

Editor-in-Chief:
A.V. Rogachev (Belarus)

Deputy Editor-in-Chief:
O.M. Demidenko (Belarus)
L.A. Shemetkov (Belarus)

Editorial board:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Webin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
P.D. Kuharchik (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

Executive Secretary:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

Edition address:
F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 2 (11) 2012

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

Андреев Василий В., Панков А.А. Дифференциация эффектов Z' -бозона и аномальных констант на ускорителе ИС в процессе $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$	7
Анисимова А.Е. Акустооптическая диагностика ультразвуковых волн Лэмба высоких порядков	13
Ахраменко Н.А., Булавко Л.М., Сердюков А.Н. Поле тяготения сферической оболочки в релятивистской гравистатике Бриллюэна	18
Зарубин А.В., Конопляников В.Ф., Шульга С.Г. Калибровка передних калориметров детектора CMS с помощью физических процессов	21
Ковтун-Кужель В.А., Дынич Р.А., Понявина А.Н. Локализация и рассеяние электромагнитного излучения в упорядоченных ансамблях конечных цилиндров	27
Овсюк Е.М., Веко О.В., Редьков В.М. Полугруппы Мюллера ранга 1 и 2	34
Поляков А.В., Жуковский А.В. Нелинейные эффекты в оптоволоконных рециркуляционных запоминающих устройствах со спектральным уплотнением информационных каналов	41
Сидский В.В., Семченко А.В., Гайшун В.Е., Колос В.В., Турцевич А.С., Сорока С.А., Асадчий А.Н. Сегнетоэлектрические свойства SBT-пленок, синтезированных золь-гель методом	50

МАТЕМАТИКА

Бельский В.А., Мироненко В.И. О построении уравнений Абеля, эквивалентных уравнению вида $\dot{x} = A(t)(\xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \xi_3 x^3)$	55
Васильев А.Ф., Васильева Т.И., Сыроквашин А.В. Заметка о пересечениях некоторых максимальных подгрупп конечных групп	62
Вересович П.П. Отражающая функция одной двумерной дифференциальной системы	65
Гальмак А.М. Полиадические группы пространственных матриц	68
Ерёмина А.Р. Инвариантность стационарного распределения состояний сети с многорежимными стратегиями в случае зависимости параметров процессов обслуживания и переключения от состояния узла	76
Кузьменков Д.С. Оптимальное управление тепловым процессом в стержне с теплообменом на обоих концах	81
Лемешев И.В., Монахов В.С. Признаки разрешимости конечных групп с ограничениями на кофакторы максимальных подгрупп	88
Тютянов В.Н., Бычков П.В. Простые неабелевы группы с D_n -подгруппами Шмидта	95

ИНФОРМАТИКА

Быховцев В.Е., Торгонская С.В. Компьютерный анализ влияния пустот в грунтовом основании на осадку фундамента	99
Маслович С.Ф. Оценка влияния режимов обработки информации вычислительного процесса в многопроцессорной вычислительной системе на время счета распределенной задачи	104
Сморodin В.С. Синтез структуры технологического цикла управляемых производственных систем	108

К 75-летию Л.А. ШЕМЕТКОВА

Научная школа профессора Л.А. Шеметкова	112
---	-----

**Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»**

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**
– **физико-математические (физика, математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Г. Н. Петухова, Е. В. Убоженко*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 11.06.12. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 13,5. Уч.-изд. л. 11,7. Тираж 100 экз. Заказ № 410.

Издатель – УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»
246019, Гомель, ул. Советская, 104
Лицензия № 02330/0549481 от 14.05.09.

Отпечатано на полиграфической технике УО «ГГУ им. Ф. Скорины»
Лицензия № 02330/0150450 от 03.02.09.

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 2 (11) 2012

CONTENTS

PHYSICS

Andreev Vasili V., Pankov A.A. Discrimination between Z' -boson and anomalous gauge couplings effects in $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ at ILC	7
Anisimova A.E. Acoustooptical diagnostics of ultrasonic Lamb waves of high-orders	13
Akhramenko N.A., Bulauko L.M., Serdyukov A.N. The field of gravitation of the spherical surface in relativistic Brillouin gravistatics	18
Zarubin A.V., Konopliyanikov V.F., Shulga S.G. Calibration of CMS forward calorimeters by physical processes	21
Kovtun-Kuszhel V.A., Dynich R.A., Ponyavina A.N. Localization and scattering of electromagnetic waves in ordered arrays of finite cylinders	27
Ovsiyuk E.M., Veko O.V., Red'kov V.M. Mueller semigroups of the rank 1 and 2	34
Polyakov A.V., Zhukouski A.V. Nonlinear effects in fibre-optical recirculating memories with spectral multiplexing of information channels	41
Sidsky V.V., Semchenko A.V., Gaishun V.E., Kolo V.V.s, Turtsevich A.S., Soroka S.A., Asadchiy A.N. Ferroelectric properties of SBT-films synthesized by sol-gel method	50

MATHEMATICS

Belsky V.A., Mironenko V.I. Constructing of Abel equations equivalented to the equation of the form $\dot{x} = A(t)(\xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \xi_3 x^3)$	55
Vasilyev A.F., Vasilyeva T.I., Syrokvashin A.V. A note on intersections of some maximal subgroups of finite groups	62
Veresovich P.P. The reflecting function of one two dimensional differential system	65
Gal'mak A.M. Polyadic groups of spacematrix	68
Eryomina A.R. Insensibility of stationary distribution of queueing network with multimode strategies states when parameters of the servicing and switching processes are dependent on unit state ..	76
Kuzmenkov D.S. Optimal control problem of a thermal process in the rod with heat exchange on both ends	81
Lemeshev I.V., Monakhov V.S. The solvability criteria for finite groups with restrictions on cofactors of maximal subgroups	88
Tyutyaynov N.V., Bychkov P.V. Simple non abelian group with D_π Schmidt subgroups	95

INFORMATION SCIENCE

Bykhautsau V.E., Torgonskaya S.V. Computer analysis of the influence of emptiness in the earth basis on the deposit of the base	99
Maslovich S.F. Assesment of the influence of the information processing modes of computational process in a multiprocessor computer systems on the computing time of distributed tasks	104
Smorodin V.S. Synthesis of structure of the technological cycle of managed production systems ...	108

ON THE OCCASION OF THE 75-th ANNIVERSARY OF L.A. SHEMETKOV

Scientific school of Professor L.A. Shemetkov	112
--	-----

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

- Technics (Informatics, Computer Science and Control);***
- Physics and Mathematics.***

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

УДК 530.1; 539.12

ДИФФЕРЕНЦИАЦИЯ ЭФФЕКТОВ Z' -БОЗОНА И АНОМАЛЬНЫХ КОНСТАНТ НА УСКОРИТЕЛЕ ILC В ПРОЦЕССЕ $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$

Василий В. Андреев¹, А.А. Панков²¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель²Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель

DISCRIMINATION BETWEEN Z' -BOSON AND ANOMALOUS GAUGE COUPLINGS EFFECTS IN $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ AT ILC

Vasili V. Andreev¹, A.A. Pankov²¹F. Scorina Gomel State University, Gomel²P.O. Sukhoi Gomel State Technical University, Gomel

В работе обсуждается ожидаемая чувствительность сечения парного рождения W^\pm -бозонов в процессе электрон-позитронной аннигиляции по отношению к эффектам, генерируемым Z' -бозоном, в условиях Международного линейного коллайдера (ILC). Особый упор делается на анализ потенциальных возможностей разделения наблюдаемых эффектов, индуцируемых Z' -бозоном, от эффектов, генерируемых аномальными калибровочными константами (АКК). Модельно независимый анализ эффектов Z' -бозона позволяет дифференцировать весь класс Z' моделей (за исключением так называемой SSM модели) от таковых с АКК. Результаты модельно зависимого анализа эффектов Z' -бозона представлены в виде так называемых порогов обнаружения и идентификации в терминах угла $Z-Z'$ смешивания и массы Z' -бозона.

Ключевые слова: Z' -бозон, аномальные калибровочные константы, $Z-Z'$ смешивание.

We discuss the foreseeable sensitivity to Z' 's of W^\pm -pair production cross sections at the e^+e^- International Linear Collider (ILC), especially as regards the potential of distinguishing observable effects of the Z' from the analogous ones due to competitor models with anomalous trilinear gauge couplings (AGC) that can lead to the same or similar new physics experimental signatures at the ILC. The model independent analysis of the Z' effects in the process $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ allows to differentiate the full class of vector Z' models (except sequential SM (SSM)-like models) from those with anomalous trilinear gauge couplings. Results of model dependent analysis of a specific Z' are expressed in terms of discovery and identification reaches on the $Z-Z'$ mixing angle and the Z' mass.

Keywords: Z' -boson, anomalous gauge couplings, $Z-Z'$ mixing.

Введение

Процесс парного рождения W^\pm бозонов

$$e^+ + e^- \rightarrow W^+ + W^- \quad (0.1)$$

в e^+e^- аннигиляции является одним из важнейших для изучения электрослабой калибровочной симметрии. Свойства слабых калибровочных бозонов тесно связаны с нарушением электрослабой симметрии и структурой калибровочного сектора в целом. Поэтому детальное исследование процесса (0.1) на ускорителе ILC позволит проверить этот сектор Стандартной модели (СМ) с наивысшей точностью, а также пролить свет на «новую» физику, которая может быть обнаружена за рамками СМ.

В СМ процесс (0.1) описывается амплитудами с обменом фотоном и Z -бозоном в s -канале, а также амплитудой с обменом нейтрино в t -канале. Следовательно, данная реакция является особенно чувствительной как по отношению к лептонным константам связи, так и по отношению к трехбозонным константам связи

W -бозонов с Z -бозоном, а также любым новым тяжелым нейтральным бозоном, обмен которым происходит в s -канале. Популярным примером в этом отношении могут служить Z' -бозоны, предсказываемые электрослабыми сценариями, основанными на спонтанном нарушении «расширенных» калибровочных симметрий, масса которых намного превышает массу Z -бозона M_Z , а константы связи имеют отличные от СМ значения. Количество предлагаемых Z' моделей достаточно велико. Поэтому вместо всестороннего анализа в настоящей работе будет сделан акцент на феноменологические эффекты так называемых Z'_{SSM} , Z'_{E_6} и Z'_{LR} моделей в процессе (0.1) [1]–[6].

Нижние пределы на массу Z' -бозона $M_{Z'}$, полученные в процессах Дрелл-Яна на коллайдере LHC в CERN при энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ и светимости $L_{int} \approx 1.2$ фб⁻¹, лежат в области 1.50–1.65 ТэВ в зависимости от конкретной

тестируемой Z' модели [7], [8]. Так как масса Z' -бозона, по-видимому, велика, можно наблюдать лишь косвенные эффекты, которые выражаются в виде отклонений сечений и других наблюдаемых величин от предсказаний СМ. Очевидно, что исследования такого рода эффектов требуют высокой точности. Поэтому весьма желательно, чтобы ускоритель гарантировал крайне высокую светимость, такую, например, как планируется достичь на ИЛС. Косвенные ограничения на массу Z' -бозона, полученные на основе анализа высокоточных данных ускорителя LEP на пике Z -бозона, дают нижние границы в интервале $\sim 0.4-1.8$ ТэВ в зависимости от модели [5], [6].

В настоящей работе изучаются возможные косвенные эффекты вышеупомянутых Z' -бозонов в процессе парного рождения W^\pm -бозонов (0.1) на e^+e^- ускорителе следующего поколения ИЛС при энергии $\sqrt{s} = 0.5$ ТэВ и типичной интегральной светимости $L_{\text{int}} \sim 0.5 \text{ аб}^{-1}$ [9], [10]. Ожидается, что отклонения сечений от СМ будут расти с увеличением энергии \sqrt{s} из-за нарушения механизма калибровочного сокращения, играющего важную роль в СМ, что в свою очередь увеличивает чувствительность к эффектам «новой» физики.

Вместе с оценкой предполагаемой чувствительности процесса (0.1) по отношению к рассматриваемым Z' моделям будет исследована проблема разделения эффектов Z' -бозона, в случае их регистрации, от других конкурирующих моделей новой физики, которые могут индуцировать похожие отклонения сечений от предсказаний СМ.

В качестве таких моделей рассматриваются однопараметрические модели с аномальными калибровочными константами, эффекты которых сравниваются с вкладами Z' -бозона.

1 Рассматриваемые модели

В настоящей работе рассматриваются следующие Z' модели [1]–[4]:

1. Модели, вытекающие из спонтанного нарушения симметрии группы E_6 . При этом появляется по крайней мере один дополнительный $U(1)'$ -фактор

$$(E_6 \rightarrow SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times U(1)_{Y'}).$$

В этих моделях имеет место линейная комбинация, связанная с группой $U(1)_{Y'}$:

$$Z' = Z'_\chi \cos \beta + Z'_\psi \sin \beta.$$

Конкретные значения угла β : $\beta = 0$, $\beta = \pi/2$, $\beta = -\arctg \sqrt{5/3}$ и $\beta = \arctg \sqrt{3/5}$ определяют наиболее популярные модели Z'_χ , Z'_ψ , Z'_η , и Z'_I соответственно.

2. Лево-правые модели, которые основаны на спонтанном нарушении симметрии группы

$$SO(10). \quad \chi^2 = \sum_{\{P_L, \bar{P}_L\}} \sum_i^{\text{bins}} \left[\frac{N_{Z'}(i) - N_{\text{AGC}}(i)}{\delta N_{Z'}(i)} \right]^2 \text{-бозон}$$

связан с линейной комбинацией правосторонних и $B-L$ нейтральных токов (B и L – барионное и лептонное квантовые числа соответственно):

$$J_{\text{LR}}^\mu = \alpha_{\text{LR}} J_{3R}^\mu - \frac{1}{2\alpha_{\text{LR}}} J_{B-L}^\mu \quad \text{с} \quad \alpha_{\text{LR}} = \sqrt{\frac{c_W^2}{s_W^2} \kappa^2 - 1}.$$

3. Здесь $s_W = \sin \theta_W$, $c_W = \sqrt{1 - s_W^2}$, θ_W – угол Вайнберга, а $\kappa = g_R/g_L$ – отношение $SU(2)_{\text{LR}}$ – калибровочных констант связи. Параметр α_{LR} лежит в пределах $\sqrt{2/3} \leq \alpha_{\text{LR}} \leq 1.52$. В данной работе будет рассматриваться модель Z'_{LRS} , соответствующая значению $\alpha_{\text{LR}} \approx 1.52$.

4. Так называемая последовательная стандартная модель Z'_{SSM} , в которой константы связи Z' -бозона с фермионами такие же, как и у Z -бозона.

Детальное описание этих моделей можно найти, например, в работах [1]–[4].

2 Параметризация эффектов Z' -бозона

Для начала определим амплитуду процесса (0.1). В борновском приближении ее можно записать в виде суммы t -канальной и s -канальной компонент. В СМ, для нулевых масс фермионов, последняя часть может быть схематически записана как:

$$M_s^{(\lambda)} = \left(-\frac{1}{s} + \frac{\text{ctg} \theta_W (v - 2\lambda a)}{s - M_Z^2} \right) \times G^{(\lambda)}(s, \theta),$$

где s и θ – квадрат энергии начальных пучков в С.Ц.И. и угол вылета W^- -бозона соответственно. Векторная и аксиально-векторная константы связи Z -бозона с электроном могут быть записаны как $v = (T_{3,e} - 2Q_e s_W^2)/(2s_W c_W)$ и $a = T_{3,e}'/(2s_W c_W)$ соответственно, где $T_{3,e} = -1/2$, а λ обозначает спиральность электрона. Наконец, $G^{(\lambda)}(s, \theta)$ – кинематический коэффициент, зависящий от поляризации W^\pm -бозонов. Явный вид амплитуды можно найти в литературе (см., например, работы [11], [12]).

В расширенных калибровочных моделях выражение для амплитуды с обменом дополнительным Z' -бозоном может быть представлено в следующем виде:

$$M_s^{(\lambda)} = \left(-\frac{1}{s} + \frac{g_{WWZ_1}(v_1 - 2\lambda a_1)}{s - M_1^2} + \frac{g_{WWZ_2}(v_2 - 2\lambda a_2)}{s - M_2^2} \right) \times G^{(\lambda)}(s, \theta), \quad (2.1)$$

где $M_{1,2}$ – масса $Z_{1,2}$ бозона (собственные массовые состояния Z и Z' -бозонов), $v_{1,2}$ и $a_{1,2}$ – векторные и аксиально-векторные константы связи $Z_{1,2}$ бозонов соответственно,

$$g_{WWZ_1} = \cos \varphi \times g_{WWZ}, \quad g_{WWZ_2} = -\sin \varphi \times g_{WWZ},$$

$$g_{WWZ} = \text{tg} \theta_W,$$

φ – угол $Z - Z'$ смешивания.

Удобно переписать формулу (2.1) в следующем виде [13]:

$$M_s^{(\lambda)} = \left(-\frac{g_{WW\gamma}}{s} + \frac{g_{WWZ}(v - 2\lambda a)}{s - M_Z^2} \right) \times G^{(\lambda)}(s, \theta),$$

где «эффективные» трехбозонные константы $g_{WW\gamma}$ и g_{WWZ} определяются как:

$$g_{WW\gamma} = 1 + \Delta_\gamma = 1 + \Delta_\gamma(Z_1) + \Delta_\gamma(Z_2),$$

$$g_{WWZ} = \text{ctg} \theta_W + \Delta_Z = \text{ctg} \theta_W + \Delta_Z(Z_1) + \Delta_Z(Z_2),$$

с

$$\Delta_\gamma(Z_1) = v \text{ctg} \theta_W \left(\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta v}{v} \right) (1 + \Delta\chi) \chi,$$

$$\Delta_\gamma(Z_2) = v g_{WWZ_2} \left(\frac{a_2}{a} - \frac{v_2}{v} \right) \chi_2,$$

$$\Delta_Z(Z_1) = \Delta g_{WWZ} + \text{ctg} \theta_W \left(\frac{\Delta a}{a} + \Delta\chi \right),$$

$$\Delta_Z(Z_2) = g_{WWZ_2} \frac{a_2}{a} \frac{\chi_2}{\chi}.$$

В приведенных выше выражениях были введены следующие обозначения: $\Delta v = v_1 - v$, $\Delta a = a_1 - a$ и $\Delta g_{WWZ} = g_{WWZ_1} - \text{ctg} \theta_W$. Бозонные пропагаторы имеют следующий вид:

$$\chi(s) = \frac{s}{s - M_Z^2}, \quad \chi_2(s) = \frac{s}{s - M_2^2},$$

$$\Delta\chi(s) = -\frac{2M_Z \Delta M}{s - M_Z^2},$$

где $\Delta M = M_Z - M_1$ – сдвиг по массе между Z и Z_1 состояниями. Таким образом, имеем два параметра (Δ_γ и Δ_Z), «эффективно» описывающих эффекты Z' -бозона.

3 Параметризация лагранжиана с аномальными константами связи

Используя обозначения, представленные в работах [11], [12], эффективный лагранжиан трехбозонных ($WW\gamma$ и WWZ) взаимодействий инвариантный относительно градиентных преобразований группы $U(1)_{em}$ и содержащий C - и P -инвариантные члены, может быть записан в следующем виде: ($e = \sqrt{4\pi\alpha_{em}}$):

$$L_{\text{eff}} = -ie \left[A_\mu \left(W^{-\mu\nu} W_\nu^+ - W^{+\mu\nu} W_\nu^- \right) + F_{\mu\nu} W^{+\mu} W^{-\nu} \right] -$$

$$-ie (\text{ctg} \theta_W + \delta_Z) \times$$

$$\times \left[Z_\mu \left(W^{-\mu\nu} W_\nu^+ - W^{+\mu\nu} W_\nu^- \right) + Z_{\mu\nu} W^{+\mu} W^{-\nu} \right] -$$

$$-ie x_\gamma F_{\mu\nu} W^{+\mu} W^{-\nu} - ie x_Z Z_{\mu\nu} W^{+\mu} W^{-\nu} +$$

$$+ ie \frac{y_\gamma}{M_W^2} F^{\nu\lambda} W_{\lambda\mu}^- W_\nu^{+\mu} + ie \frac{y_Z}{M_W^2} Z^{\nu\lambda} W_{\lambda\mu}^- W_\nu^{+\mu},$$

где $W_{\mu\nu}^\pm = \partial_\mu W_\nu^\pm - \partial_\nu W_\mu^\pm$ и $Z_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$. В СМ аномальные калибровочные константы (АКК) в выражении (3.1) равны нулю, т. е. $\delta_Z = x_\gamma = x_Z = y_\gamma = y_Z = 0$. В формуле (3.1) присутствует пять независимых аномальных параметров.

В данной работе будем рассматривать однопараметрические модели, в которых какой-либо один из аномальных параметров не равен 0, в то время как все остальные равны нулю.

4 Выбор наблюдаемых величин

В качестве наблюдаемых величин будут использоваться дифференциальные сечения процесса (0.1). Общее выражение для данных сечений с продольно-поляризованными электронными и позитронными пучками можно записать как:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{1}{4} \left[(1 + P_L)(1 - \bar{P}_L) \frac{d\sigma^+}{d\cos\theta} + \right.$$

$$\left. + (1 - P_L)(1 + \bar{P}_L) \frac{d\sigma^-}{d\cos\theta} \right],$$

где P_L и \bar{P}_L – степени поляризации электронных и позитронных пучков соответственно; σ^\pm – сечения для право поляризованных ($\lambda = -\lambda' = 1/2$) и лево поляризованных ($\lambda = -\lambda' = -1/2$) электронов; λ' – спиральность позитрона.

Поляризованные сечения, входящие в формулу (4.1), могут быть записаны как:

$$\frac{d\sigma^\pm}{d\cos\theta} = \frac{|\mathbf{p}|}{16\pi s \sqrt{s}} \sum_{\tau, \tau'} |M_{\lambda, \tau\tau'}(s, \cos\theta)|^2.$$

Здесь спиральности W^- и W^+ бозонов обозначены как $\tau, \tau' = \pm 1, 0$. Структуру спиральных амплитуд $M_{\lambda, \tau\tau'}(s, \cos\theta)$ можно найти, например, в работе [14].

5 Пороги обнаружения и идентификации

Чувствительность дифференциальных сечений к параметрам Δ_γ и Δ_Z оценивается путем разделения интервала углов рассеяния θ ($|\cos\theta| \leq 0.98$) на 10 бинов и определения функции χ^2 в терминах ожидаемого числа событий $N(i)$ в каждом из этих бинов:

$$\chi^2 = \chi^2(\sqrt{s}, \Delta_\gamma, \Delta_Z) =$$

$$= \sum_{\{P_L, \bar{P}_L\}}^{\text{bins}} \sum_i \left[\frac{N_{\text{SM}+Z'}(i) - N_{\text{SM}}(i)}{\delta N_{\text{SM}}(i)} \right]^2, \quad (5.1)$$

где $N(i) = L_{int} \sigma_i \varepsilon_W$, L_{int} – интегральная светимость, а $(z = \cos \theta)$:

$$\sigma_i = \sigma(z_i, z_{i+1}) = \int_{z_i}^{z_{i+1}} \left(\frac{d\sigma}{dz} \right) dz.$$

Здесь ε_W – эффективность реконструкции событий рождения пары W^+W^- , для которых была выбрана так называемая «полулептонная» мода распада (в пару кварков $q + \bar{q}$ и пару лептонов $e\nu_e + \mu\nu_\mu$). Эффективность можно вычислить исходя из соответствующих сечений распада W^\pm бозонов: $\varepsilon_W = 0.3$. Неточность в определении числа событий $\delta N_{SM(i)}$ включает в себя как статистические, так и систематические ошибки.

В качестве критерия для получения ограничений на эффективные параметры в случае, когда не было обнаружено статистически значимых отклонений от СМ, берется следующее неравенство (так называемый порог обнаружения):

$$\chi^2 \leq \chi_{min}^2 + \chi_{CL}^2, \quad (5.2)$$

где χ_{CL}^2 – число, определяющее выбранный уровень достоверности (С.Л.), а χ_{min}^2 – минимальное значение функции χ^2 . Уровень достоверности в работе выбирается равным 95%.

При помощи вышеупомянутой процедуры численных расчетов была получена разрешенная область на параметры Δ_γ и Δ_Z , определенная на основе анализа поляризованных дифференциальных сечений. Она представлена на рисунке 5.1 для $L_{int} = 500 \text{ фб}^{-1}$. Согласно условию (5.2), значения параметров Δ_γ и Δ_Z , для которых эффекты Z' -бозона могут быть обнаружены на ускорителе ИС, лежат в области за рамками эллипса. Также на рисунке 5.1 представлены области, соответствующие ограничениям на весь класс E_6 (и LR) моделей, получаемые путем варьирования параметров $\cos \beta$ и α_{LR} .

Следует заметить, что ограничения на параметры Δ_γ и Δ_Z являются модельно независимыми в том смысле, что они справедливы для всего класса рассматриваемых Z' моделей.

Модельно независимые ограничения на параметры Δ_γ и Δ_Z можно преобразовать в ограничения на угол $Z-Z'$ смешивания φ и массу M_2 для любой конкретной Z' модели. Эти модельные ограничения будут представлены ниже вкюпе с соответствующими порогами идентификации. При фиксированных значениях φ и M_2 каждая модель представляет собой точку на плоскости параметров $(\Delta_\gamma, \Delta_Z)$. Если варьировать угол смешивания φ , точка, соответствующая

выбранной Z' модели, двигается вдоль своей линии.

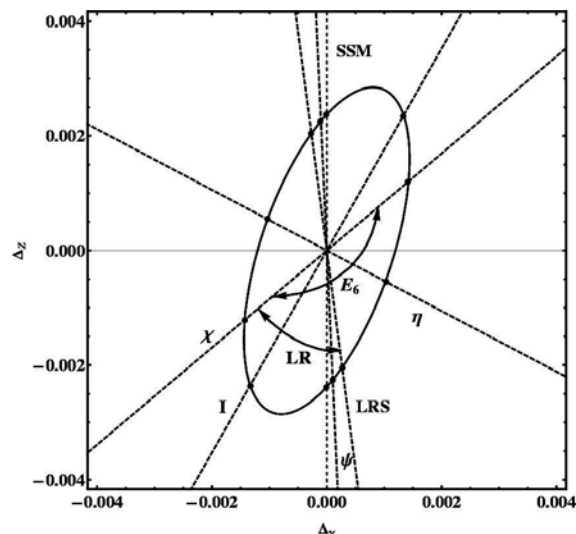


Рисунок 5.1 – Порог обнаружения с уровнем достоверности 95% на параметры Z' -бозона Δ_γ, Δ_Z , полученный из анализа поляризованных дифференциальных сечений с $P_L = \pm 0.8$, $\bar{P}_L = \mp 0.5$, $\sqrt{s} = 0.5$ ТэВ и $L_{int} = 0.5 \text{ аб}^{-1}$. Штриховые линии соответствуют различным моделям с расширенным калибровочным сектором (χ , ψ , η , I и LRS). Сегменты эллипса соответствуют всему классу E_6 и лево-правых моделей

Пересечение линий с эллиптическим контуром дает координаты порога обнаружения для рассматриваемых моделей в терминах параметров Δ_γ и Δ_Z .

После пересчета можно определить ограничения на параметры φ и M_2 для выбранных моделей. Считается, что какая-либо из Z' моделей идентифицирована, когда измеренные значения параметров Δ_γ и Δ_Z со статистической точки зрения отличны от значений этих же параметров, соответствующих другим Z' моделям и конкурирующим моделям с АКК.

Предположим, что некоторые экспериментальные данные согласуются с одной из Z' моделей, которую мы назовем «правильной» моделью. Нам необходимо оценить уровень, при котором эта «правильная» модель различима относительно моделей с АКК, являющихся ее моделями-конкурентами. Модели с АКК будем называть «тестируемыми» моделями. Определим «расстояние» между выбранной «правильной» и «тестируемой» моделью при помощи функции χ^2 следующим образом (по аналогии с (5.1)):

$$\chi^2 = \sum_{\{P_L, \bar{P}_L\}} \sum_i^{\text{bins}} \left[\frac{N_{Z'}(i) - N_{AGC}(i)}{\delta N_{Z'}(i)} \right]^2.$$

Здесь величина $\delta N_{Z'}(i)$ определена аналогично $\delta N_{SM(i)}$, однако статистические неопределенности вычисляются уже в рамках Z' моделей и зависят от параметров Δ_γ и Δ_Z .

С помощью такой функции χ^2 можно выяснить, есть ли возможность с определенным уровнем достоверности (полагается равным 95%) исключить конкурирующую гипотезу о том, что эффекты генерируются «тестируемыми» моделями, или нет. Для этого используется неравенство, аналогичное (5.2).

Проводя сканирование всех значений параметров Δ_γ , Δ_Z вплоть до порога обнаружения, определяем итерационным методом области, где эффекты, порождаемые моделью с каждым из ненулевых аномальных параметров ($x_\gamma, x_Z, y_\gamma, y_Z, \delta_Z \neq 0$), неотличимы от таковых, генерируемых одной или целым классом Z' моделей. Такие области назовём областями неразличимости, а их границы – порогами идентификации.

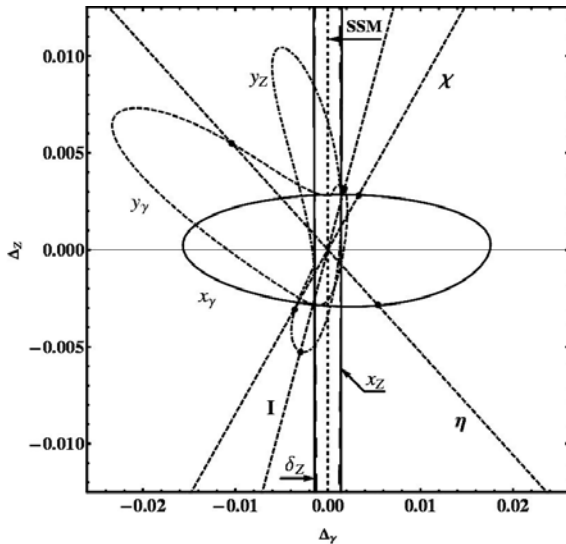


Рисунок 5.2 – Области неразличимости (95% C.L.) для $\sqrt{s} = 0.5$ ТэВ и $L_{int} = 0.5$ аб⁻¹ на плоскости параметров $(\Delta_\gamma, \Delta_Z)$ между Z' моделями и моделями с различными ненулевыми аномальными параметрами: $x_\gamma, x_Z, y_\gamma, y_Z$ и δ_Z . Прямые штриховые линии соответствуют различным моделям с расширенным калибровочным сектором (χ, η, I и SSM)

На рисунке 5.2 показаны области неразличимости на плоскости параметров Z' модели, за границами которых модели с Z' -бозоном могут быть с уровнем достоверности 95% идентифицированы относительно моделей с АКК при любых значениях каждого из ненулевых параметров. Области получены на основе анализа поляризованного сечения с $P_L = \pm 0.8$ и $\bar{P}_L = \mp 0.5$, а также

с неполяризованными конечными состояниями. Для того чтобы не «перегружать» рисунок, были убраны линии, соответствующие моделям LRS и ψ .

Как было упомянуто выше, области параметров Δ_γ и Δ_Z для конкретных моделей на рисунках 5.1 и 5.2, соответствующие порогам обнаружения и идентификации, могут быть преобразованы в аналогичные пороги, но уже в терминах угла смешивания φ и массы тяжелого бозона M_2 при помощи формул (2.2)–(2.3). Они представлены в таблице 5.1 для $M_2 = 2$ ТэВ.

Таблица 5.1. – Пороги обнаружения и идентификации на угол $Z-Z'$ смешивания φ для различных Z' моделей с $M_2 = 2$ ТэВ, полученные на основе анализа сечений с поляризованными начальными ($P_L = \pm 0.8, \bar{P}_L = \mp 0.5$) и с неполяризованными конечными состояниями

Z' модель	χ	ψ	η	I	LRS	SSM
$\varphi^{disc}, 10^{-3}$	± 1.5	± 2.3	± 1.6	± 2.0	± 1.4	± 1.2
$\varphi^{ID}, 10^{-3}$	± 3.8	± 36.8	± 17.4	± 4.3	± 8.1	–

Заключение

В работе исследована ожидаемая чувствительность к эффектам Z' -бозона сечений процесса парного рождения W^\pm -бозонов на ускорителе ILC. Детально рассмотрены возможности потенциальной различимости эффектов Z' -бозона от эффектов, генерируемых однопараметрическими моделями с аномальными калибровочными константами, которые могут индуцировать похожие отклонения экспериментальных наблюдаемых величин от предсказаний СМ.

Показано, что чувствительность ускорителя ILC к $Z-Z'$ смешиванию и его способность к разделению двух вышеупомянутых эффектов новой физики являются значительными, когда рассматриваются поляризованные начальные пучки. Таким образом, при энергии $\sqrt{s} = 0.5$ ТэВ и интегральной светимости $L_{int} = 500$ фб⁻¹ ускоритель ILC будет способен получить ограничения на угол $Z-Z'$ смешивания φ на уровне 10^{-3} . Также можно будет идентифицировать большинство Z' моделей от моделей с АКК при $\varphi \sim 4-8 \times 10^{-3}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Langacker, P. The Physics of Heavy Z' Gauge Bosons / P. Langacker // Rev. Mod. Phys. – 2009. – Vol. 81. – P. 1199–1228.
2. Rizzo, T.G. Z' phenomenology and the LHC [Electronic resource] / T. G. Rizzo. – 2006. – Mode

of access : <http://arxiv.org/pdf/hep-ph/0610104>. – Date of access : 14.04.2007.

3. Leike, A. The Phenomenology of extra neutral gauge bosons / A. Leike // Phys. Rept. – 1999. – Vol. 317. – P. 143–250.

4. Hewett, J.L. Low-Energy Phenomenology of Superstring Inspired E(6) Models / J.L. Hewett, T.G. Rizzo // Phys. Rept. – 1999. – Vol. 183. – P. 193–381.

5. Improved Constraints on Z-prime Bosons from Electroweak Precision Data / J. Erler [et al.] // JHEP. – 2009. – Vol. 0908. – P. 017–035.

6. Langacker, P. Z' Physics at the LHC [Electronic resource] / P.Langacker . – 2009. – Mode of access : <http://arxiv.org/pdf/hep-ph/0911.4294>. – Date of access : 17.01.2010.

7. A Search for Heavy Resonances in the Dilepton Channel [Electronic resource] / D. Hayden [et al.] – 2012. – Mode of access : <http://arxiv.org/pdf/hep-ex/1201.4721>. – Date of access: 11.03.2012.

8. Search for High-Mass Resonances in the Dilepton Final State with the CMS Detector [Electronic resource] / V. Timciuc [et al.] – 2011. – Mode of access : <http://arxiv.org/pdf/hep-ex/1111.4528v1> – Date of access : 24.12.2011.

9. ILC Reference Design Report Volume 1 – Executive Summary [Electronic resource] / J. Brau [et al.] – 2007. – Mode of access : <http://arxiv.org/pdf/physics.acc-ph/0712.1950> – Date of access : 12.01.2008.

10. International Linear Collider Reference Design Report Volume 2: Physics at the ILC [Electronic resource] / G. Aarons [et al.] – 2007. – Mode of access : <http://arxiv.org/pdf/hep-ph/0709.1893> – Date of access : 15.10.2007.

11. Tests of alternative models at a 500 GeV NLC / G. Gounaris [et al.] – Proceedings of the Workshop *e⁺e⁻ Collisions at 500 GeV: the Physics Potential*, Ed. P.M. Zerwas (1992), DESY 92-123B, 735 p.

12. Analytic expressions of cross-sections, asymmetries and W density matrices for $e^+ + e^- \rightarrow W^+ + W^-$ with general three boson couplings / G. Gounaris [et al.] // Int. J. Mod. Phys. – 1993. – Vol. A8. – P. 3285–3320.

13. Pankov, A.A. Z-prime effects and anomalous gauge couplings at LC with polarization / A.A. Pankov, N. Paver, C. Verzegnassi // Int. J. Mod. Phys. – 1998. – Vol. A13. – P. 1629–1650.

14. Andreev, Vasili V. Constraints on the Z–Z-prime mixing angle from data measured for the process $e^+ + e^- \rightarrow W^+ + W^-$ at the LEP2 collider / Vasili V. Andreev, A. A. Pankov // Phys. Atom. Nucl. – 2012. – Vol. 75. – P.76–89.

Авторы выражают благодарность Белорусскому республиканскому фонду фундаментальных исследований (БРФФИ) за финансовую поддержку данной работы.

Поступила в редакцию 10.05.12.

УДК 535.42:534.8

АКУСТООПТИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН ЛЭМБА ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ

А.Е. Анисимова

Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина, Мозырь

ACOUSTOOPTICAL DIAGNOSTICS OF ULTRASONIC LAMB WAVES OF HIGH-ORDERS

A.E. Anisimova

I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University, Mozyr

Исследована акустооптическая брэгговская дифракция света на волнах Лэмба высших порядков пластины из изотропного твердого тела. Показано, что наибольшая глубина акустооптической амплитудной модуляции достигается для прошедших дифрагированных волн первого порядка. Установлено, что моды Лэмба высших порядков могут быть раздельно диагностированы акустооптическим методом вследствие фотоупругого эффекта.

Ключевые слова: волны Лэмба, акустооптическая дифракция, амплитудная модуляция, коэффициенты отражения и пропускания.

The acoustooptical Bragg diffraction of light by the Lamb's waves of higher order of a plate from isotropic solid material is investigated. It is shown that acoustooptical modulation deep is reached for diffraction of transmitted waves of the first order. Lamb's modes are stated to be separately diagnosed by means of the acoustooptical method.

Keywords: Lamb's waves, acoustooptical diffraction, amplitude modulation, coefficients of reflection and transmission.

Введение

В работе [1] теоретически и экспериментально исследованы многослойные акустооптические структуры на основе кристаллов кремния, окиси цинка, кварца и парателлуриата. Показано [1], [2], что в многослойных структурах при возбуждении поверхностных акустических волн (ПАВ) интенсивности ультразвуковых (УЗ) волн в тонком слое толщиной $h \sim 1$ мм могут достигать ~ 1 МВт/см² и амплитуда деформации ультразвуковой (УЗ) волны $U \sim 10^{-2}$. В работе [3] впервые исследовано отражение и пропускание дифрагированных волн в плоскопараллельном периодически модулированном (возмущенном) слое. В работе [4] исследована дифракция световых волн в плоскопараллельном слое с однородным распределением упругих деформаций, а в [5] – в слое, возбужденном волнами Лява. К настоящему времени хорошо изучены ультразвуковые волны Лэмба пластины со сложным неоднородным распределением упругих деформаций по ее сечению, широко применяемые для неразрушающего контроля и создания акустоэлектронных устройств обработки сигналов [6]. В работе [7] экспериментально исследована акустооптическая диагностика волн Лэмба высших порядков при их распространении и отражении от края пластины из кварца. При этом теоретические исследования ограничились лишь изучением геометрических соотношений при дифракции света на ультразвуке.

В настоящей работе теоретически исследованы особенности брэгговской акустооптической (АО) дифракции световых волн s -поляризации на поверхностных бегущих УЗ волнах Лэмба высоких порядков пластины с целью их диагностики.

1 Теоретические результаты

Положим, что плоскопараллельный слой толщиной h с диэлектрической проницаемостью ε_2 расположен между однородными прозрачными средами с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_3 . Начало системы координат XYZ расположено на верхней границе слоя, а ось Y перпендикулярна плоскости падения. При условии $h \gg \Lambda_l / (2\pi)$, где Λ_l – длина волны объемной сдвиговой УЗ волны в слое, в нем распространяются моды Лэмба высших порядков вдоль оси X , и искривлением границ слоя можно пренебречь [6]. Другие ограничения на толщину слоя обусловлены условиями брэгговской дифракции света в слое $\frac{\lambda_0 h f^2}{2n_2 \nu^2} \gg 1$ [2], где $f(\nu)$ – частота (фазовая скорость) УЗ волны, λ_0 – длина световой волны в вакууме, $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$.

Дисперсионные уравнения для волн Лэмба находятся с использованием непрерывности УЗ смещений и напряжений на границах слоя [6]. При этом рассматриваются симметричные (s) и антисимметричные (a) бегущие волны Лэмба бесконечного плоскопараллельного слоя.

Компоненты вектора смещений для симметричной моды имеют вид:

$$U_x = U_0 \left[\frac{\text{ch}(qz)}{\text{sh}(qh)} - \frac{2qs}{(K^2 + s^2)} \frac{\text{ch}(sz)}{\text{sh}(sh)} \right] e^{i(Kx - \Omega t)}, \quad (1.1)$$

$$U_z = -iU_0 \frac{q}{K} \left[\frac{\text{sh}(qz)}{\text{sh}(qh)} - \frac{2K^2}{(K^2 + s^2)} \frac{\text{ch}(sz)}{\text{sh}(sh)} \right] e^{i(Kx - \Omega t)},$$

где U_0 – амплитуда волны; $K = \Omega/\nu$ (Ω – циклическая частота, ν – фазовая скорость УЗ волны); $q = (K^2 - K_l^2)^{1/2}$, $s = (K^2 - K_s^2)^{1/2}$, где $K_l = \Omega/\nu_l$, $K_s = \Omega/\nu_s$ (ν_l (ν_s) – фазовая скорость продольной (сдвиговой) УЗ волны). Поле смещений для антисимметричной моды Лэмба дается соотношениями:

$$U_x = U_0 \left[\frac{\text{sh}(qz)}{\text{ch}(qh)} - \frac{2qs}{(K^2 + s^2)} \frac{\text{sh}(sz)}{\text{ch}(sh)} \right] e^{i(Kx - \Omega t)}, \quad (1.2)$$

$$U_z = -iU_0 \frac{q}{K} \left[\frac{\text{ch}(qz)}{\text{ch}(qh)} - \frac{2K^2}{(K^2 + s^2)} \frac{\text{ch}(sz)}{\text{ch}(sh)} \right] e^{i(Kx - \Omega t)}.$$

Фазовую скорость симметричной и антисимметричной моды Лэмба находим соответственно из соотношений:

$$\frac{\text{th}(sh)}{\text{th}(qh)} = \frac{4K^2qs}{(K^2 + S^2)^2}, \quad \frac{\text{th}(sh)}{\text{th}(qh)} = \frac{(K^2 + S^2)^2}{4K^2qs}. \quad (1.3)$$

УЗ волна (1.1) и (1.2) создает периодическую в пространстве и во времени решетку диэлектрической проницаемости вдоль оси X и пространственно-неоднородную вдоль оси Z :

$$\varepsilon_2(x, z, t) = \varepsilon_2 + \Delta\varepsilon_2(z) e^{i(Kx - \Omega t)}, \quad (1.4)$$

где $\Delta\varepsilon_2 = -\varepsilon_2^2 P_{\text{эф}} U_{\text{эф}}(z)$ ($U_{\text{эф}}(z)$ – эффективная амплитуда деформации УЗ волны, $P_{\text{эф}}$ – эффективная фотоупругая постоянная).

Предположим, что плоская световая волна с частотой $\omega \gg \Omega$ и волновым вектором

$$\vec{k}_1 = \vec{e}_x k_{1x} + \vec{e}_z k_{1z}$$

($k_{1x} = kn_1 \sin \varphi_1$, $k_{1z} = kn_1 \cos \varphi_1$, $k = \omega/c$, $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}$) имеет s -поляризацию. Угол преломления $\varphi_2 = \arcsin(\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2} \sin \varphi_1)$ близок к углу Брэгга $\varphi_2 \approx \varphi_B \approx K/(2k_2)$, где $k_2 = kn_2$.

Решение волнового уравнения для дифрагированного поля электромагнитной волны в слое имеет вид [3]:

$$E = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_m(z) \exp[i(K_{mz}z - \omega_m t - \pi m/2)], \quad (1.5)$$

где $k_{mz} = k_{0z} + mK$, $\omega_m = \omega + m\Omega$.

При $k_{0z} \approx K/2$ из совокупности (1.5) дифрагированных волн выделяют две наиболее существенные с дифракционными порядками $m=0$ и $m=-1$. Система неоднородных уравнений связанных волн имеет вид:

$$\frac{d^2 A_0}{dz^2} + k_{0z}^2 A_0 - i\eta(z) k_2^2 A_{-1} = 0,$$

$$\frac{d^2 A_{-1}}{dz^2} + k_{-1z}^2 A_0 + i\eta(z) k_2^2 A_0 = 0, \quad (1.6)$$

где

$$k_{0z} = (k_2^2 - k_{0x}^2)^{1/2}, \quad k_{-1z} = (k_2^2 - k_{-1x}^2)^{1/2},$$

$$k_{-1x} \approx k_{0x} = k_2 \sin \varphi_B,$$

$$\eta(z) = -\frac{n_2^2 P_{\text{эф}} U_{\text{эф}}(z)}{2 \cos \varphi_2}.$$

С учетом результатов работ [3]–[5], решение системы уравнений (1.6) в брэгговском режиме дифракции можно представить в виде:

$$A_0 = (U_2 + U_1)/2, \quad A_{-1} = (U_2 - U_1)/2.$$

Величины $U_{1,2}$ находим из решения неоднородного уравнения:

$$\frac{d^2 U_{1,2}}{dz^2} + k_2^2 \left[\cos^2 \varphi_2 \pm \frac{1}{2} \eta(z) \right] U_{1,2} = 0. \quad (1.7)$$

Решение уравнений (7) в ВКБ-приближении имеет вид [8]:

$$U_{1,2} = C_1^\pm e^{ik_2^\pm(z)} + C_2^\pm e^{-ik_2^\pm(z)}, \quad (1.8)$$

где

$$k_2^\pm(z) = k_2 z \left[\left(1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \right) \sin^2 \varphi_1 \pm \frac{n_2^2 P_{\text{эф}} U}{4K \cos \varphi_2} \int_0^z U_{\text{эф}}(z) dz \right];$$

$C_{1,2}^\pm$ – постоянные коэффициенты, определяемые из граничных условий, U – амплитуда деформации. В рамках приближения ВКБ предполагается, что множители перед экспонентами в (1.8) слабо изменяются по сравнению с экспоненциальными сомножителями, содержащими большой параметр $k_2 z \gg 1$.

Сшивая напряженности электрического и магнитных полей в слое [3]–[5], а также в областях $z < 0$ и $z > h$, находим коэффициенты отражения и пропускания (относительные интенсивности) дифрагированных волн на границе слоя. Решение системы восьми алгебраических уравнений можно найти в замкнутой форме. Эффективные волновые числа $k_{xs}^{b,a}$ для антисимметричных волн Лэмба даются соотношением:

$$k_{xs}^{b,a} = k_2 \left\{ \left(1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \right) \sin^2 \varphi_1 \pm \frac{P_{\text{эф}}^\pm U}{2h \cos \varphi_2} \left[\frac{\text{sh}(qh/2)}{K \text{ch}(qh)} - \frac{4qK \text{sh}(sh/2)}{s(K^2 + s^2) \text{ch}(sh)} \right] \right\}. \quad (1.9)$$

В случае дифракции на симметричных модах Лэмба следует положить:

$$k_{xs}^{b,a} = k_2 \left\{ \left(1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \right) \sin^2 \varphi_1 \pm \frac{P_{\text{эф}}^\pm U}{2h \cos \varphi_2} \left[\frac{\text{sh}(qh/2)}{q \text{sh}(qh)} - \frac{4q \text{sh}(sh/2)}{(K^2 + s^2) \text{sh}(sh)} \right] \right\}. \quad (1.10)$$

Коэффициенты отражения (R_{0s}) и пропускания (T_{0s}) s -поляризованных составляющих дифрагированных волн соответственно нулевого и первого (R_{1s}, T_{1s}) порядков определяются соотношениями:

$$R_{0s} = \left| \frac{\Delta_{0s}^r}{\Delta} \right|^2, \quad R_{1s} = \left| \frac{2\Delta_{1s}^r}{n_1\Delta} \right|^2, \quad (1.11)$$

$$T_{0s} = \frac{n_3}{n_1} \left| \frac{2\Delta_{0s}^t}{n_3\Delta} \right|^2, \quad T_{1s} = \frac{n_3}{n_1} \left| \frac{2\Delta_{1s}^t}{n_3\Delta} \right|^2$$

где

$$\Delta = (-\alpha_{1+}^- \alpha_{3+}^+ e_1^{-*} + \alpha_{1-}^- \alpha_{3-}^+ e_1^-) (\alpha_{1+}^+ \alpha_{3+}^+ e_1^{+*} - \alpha_{1-}^+ \alpha_{3-}^+ e_1^+) +$$

$$+ (\alpha_{1-}^+ \alpha_{3+}^+ e_1^+ - \alpha_{1+}^+ \alpha_{3+}^+ e_1^{+*}) (\alpha_{1+}^- \alpha_{3+}^+ e_1^{-*} - \alpha_{1-}^- \alpha_{3-}^+ e_1^-),$$

$$\Delta_0^r = (-\alpha_{1+}^- \alpha_{3+}^- e_1^{-*} + \alpha_{1-}^- \alpha_{3-}^- e_1^-) (\alpha_{1+}^+ \alpha_{3+}^+ e_1^{+*} - \alpha_{1-}^+ \alpha_{3-}^+ e_1^+) +$$

$$+ (-\alpha_{1+}^+ \alpha_{3+}^+ e_1^{+*} + \alpha_{1-}^+ \alpha_{3+}^+ e_1^+) (\alpha_{1-}^- \alpha_{3-}^- e_1^{-*} - \alpha_{1-}^- \alpha_{3-}^- e_1^-),$$

$$\Delta_1^r = (b_1^- - b_1^+) (\alpha_{3+}^- \alpha_{3+}^+ e_1^{-*} - \alpha_{3+}^- \alpha_{3-}^+ e_1^{+*}) +$$

$$+ (b_1^- - b_1^+) [(\alpha_{3-}^-)^2 e_1^- e_1^{-*} - (\alpha_{3+}^+)^2 e_1^+ e_1^{+*}], \quad (1.12)$$

$$\Delta_{0,1}^t = \mp \alpha_{1+}^+ e_1^{+*} [\alpha_{3+}^- b_1^- + n_2 \alpha_{3+}^- + \alpha_{3-}^- (b_1^- - b_1^+) / 2] \pm$$

$$\pm \alpha_{1-}^- e_1^- [\alpha_{3-}^- b_1^- + n_2 \alpha_{3-}^- + \alpha_{3+}^- (b_1^- - b_1^+) / 2] -$$

$$- \alpha_{1+}^- e_1^{-*} [\alpha_{3+}^+ b_1^+ + n_2 \alpha_{3+}^+ + \alpha_{3-}^+ (b_1^+ - b_1^-) / 2] +$$

$$\alpha_{1-}^+ e_1^+ [\alpha_{3-}^+ b_1^+ + n_2 \alpha_{3-}^+ + \alpha_{3+}^+ (b_1^+ - b_1^-) / 2].$$

Здесь введены обозначения: $\alpha_{1,3+}^{\pm} = (1 + n_{1,3}^{-1} b_1^{\pm})$, $\alpha_{1,3-}^{\pm} = (1 - n_{1,3}^{-1} b_1^{\pm})$, $b_1^{\pm} = k_{xs}^{b,a} / k$, $e_1^{\pm} = \exp(ihk_{xs}^{b,a})$; знаком «*» обозначено комплексное сопряжение. При рассмотрении дифракции световых волн p -поляризации в (1.11), (1.12) следует выполнить замены: $s \rightarrow p$, $p_{\text{эф}}^{\perp} \rightarrow p_{\text{эф}}^{\parallel}$, $n_{1,2} \cos \varphi_{1,2} \rightarrow \frac{1}{n_{1,2} \cos \varphi_{1,2}}$ для коэффициентов пропускания ($T_{0,1p}$) и отражения ($R_{0,1p}$).

Из выражений (1.11), (1.12) следует, что выполняются соотношения: $R_{0p,s} + R_{1p,s} + T_{0p,s} + T_{1p,s} = 1$.

2 Результаты расчетов

Численные расчеты проводились для плоскопараллельного слоя из плавленного кварца (SiO_2) в случае дифракции линейно поляризованного излучения He-Ne -лазера s -поляризации с длиной волны $\lambda_0 = 0,6328$ мкм на симметричных и антисимметричных УЗ волнах Лэмба различных порядков. Предполагалось, что слой материала ($n_2=1,457$) граничит с воздухом ($n_1 = n_3 = 1$).

Амплитуда тензора деформаций $U = \left(\frac{2I_a}{\rho v_k^3} \right)^{1/2}$,

где I_a – интенсивность УЗ волны Лэмба; v_k – фазовая скорость УЗ волны Лэмба, причем k – ее порядок [7]; ρ – плотность кристалла. Эффективная фотоупругая постоянная $p_{\text{эф}}^{\perp} = p_{12} = 0,27$ [2].

В случае дифракции световой волны p -поляризации эффективная компонента тензора возмущений диэлектрической проницаемости имеет z -составляющую: $\Delta \varepsilon_3 = -\varepsilon_2^2 K (P_{11} U_z + P_{12} U_x)$.

Зависимости коэффициентов пропускания T_{1s} дифрагированной волны первого порядка для дифракции на девятой (а) и десятой (б) антисимметричной моде Лэмба, возбуждаемой в пластинке из плавленного кварца, от толщины пластинки h и амплитуды деформации УЗ волны U представлены на рисунке 2.1.

Из рисунка 2.1 следует, что коэффициент пропускания T_{1s} достигает максимального значения лишь в узком интервале толщин пластины $\Delta h \sim 0,01$ мм. При увеличении амплитуды деформации U коэффициент пропускания возрастает, достигая максимального значения.

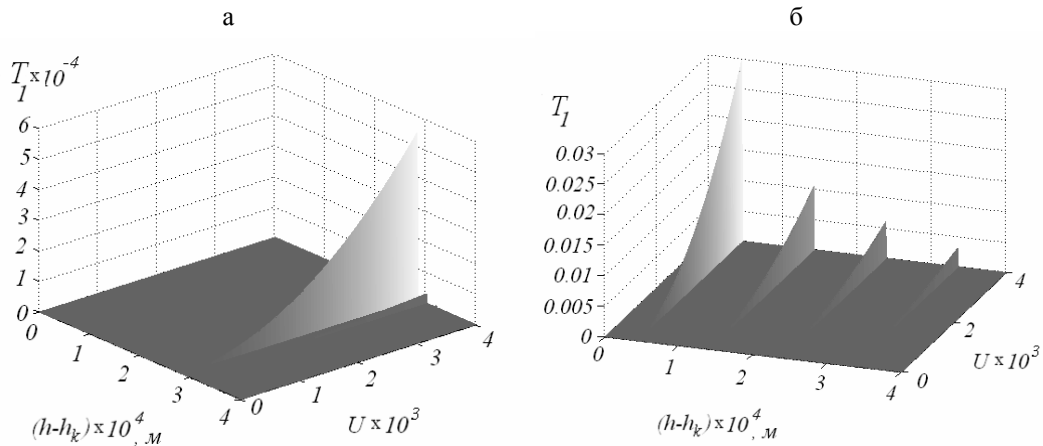


Рисунок 2.1. – Зависимость коэффициента пропускания T_{1s} от амплитуды деформации УЗ волны U и толщин слоя h для антисимметричных мод Лэмба ($\nu_9=8054$ м/с, $h_9=0,2467$ мм (а), $\nu_{10}=10798$ м/с, $h_{10}=0,2965$ мм (б), $f= 700$ МГц, s – поляризация; структура: воздух – SiO_2 – воздух)

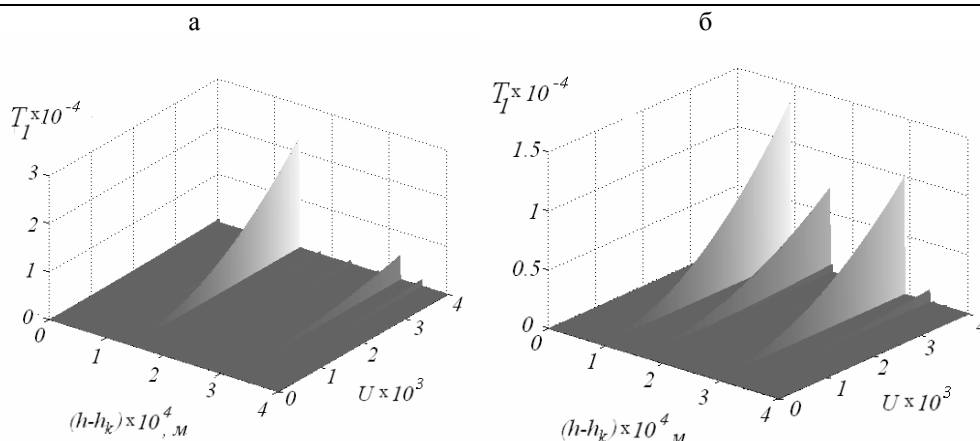


Рисунок 2.2. – Зависимость коэффициента пропускания T_{1s} от амплитуды деформации УЗ волны U и толщин слоя h для симметричных мод Лэмба ($\nu_9=8061$ м/с, $h_0=0,24667$ мм (а), $\nu_{10}=10339$ м/с, $h_{10}=0,29005$ мм (б), $f=700$ МГц, s – поляризация; структура: воздух – SiO_2 – воздух)

Расчеты проводились для толщины пластинки, начиная с критической толщины h_k для каждой из мод Лэмба. Резонансный характер коэффициента пропускания объясняется тем, что в поперечном сечении пластины формируется квазистоячая УЗ волна, образуемая наложением продольных УЗ составляющих волны Лэмба [6]. Максимальный коэффициент пропускания $T_{1s}=0,03$ достигается для антисимметричной моды Лэмба порядка $k=10$. Это объясняется тем, что для этой моды толщина пластинки, равная длине АО взаимодействия, соответствует оптимальной эффективности брэгговской дифракции света в слое вследствие фотоупругого эффекта.

На рисунке 2.2 представлена зависимость коэффициента пропускания дифрагированной волны первого порядка для девятой (а) и десятой (б) симметричной моды Лэмба, возбуждаемой в пластине из плавленного кварца, от ее толщины h и амплитуды деформации УЗ волны U .

Как следует из рисунка, зависимость коэффициента пропускания T_{1s} от толщины слоя h также имеет резонансный характер; максимальное значение T_{1s} достигается в узком интервале толщины пластинки $\Delta h \sim 0,01$ мм. При расчетах полагалось, что толщина пластинки увеличивается, начиная с толщины отсечки h_k соответствующей симметричной моды Лэмба. Резонансное поведение коэффициента пропускания объясняется формированием квазистоячей УЗ волны в поперечном сечении пластинки при наложении сдвиговых УЗ составляющих симметричной волны Лэмба. Максимальный коэффициент пропускания $T_{1s}=0,0003$ достигается для симметричной моды Лэмба порядка $k=9$. Это объясняется оптимальными условиями АО взаимодействия на сдвиговой УЗ составляющей в слое вследствие фотоупругого эффекта для данной моды.

Коэффициенты пропускания дифрагированных волн нулевого порядка достигают максимального значения $T_{0s}=1$ за счет, в основном,

френелевского отражения на границах слоя для тех же диапазонов изменения толщин слоя и амплитуд УЗ деформации. Однако при этом глубина амплитудной АО модуляции незначительна. Коэффициенты отражения дифрагированных волн нулевого порядка также определяются, в основном, френелевским отражением на границах слоя и достигают максимальных значений: $R_{0s} \sim 0,15$ (антисимметричная мода) и $R_{0s} \sim 0,2$ (симметричная мода). Величины коэффициентов отражения дифрагированных мод первого порядка достигают соответственно значений: $R_{1s} \sim 10^{-3}$ (антисимметричная мода) и $R_{1s} \sim 10^{-5}$ (симметричная мода).

Заключение

Акустооптический метод позволяет осуществить диагностику ультразвуковых волн Лэмба высоких порядков в режиме дифракции Брэгга. Наибольший интерес представляют прошедшие дифрагированные волны первого порядка, для которых достигается наибольшая глубина акустооптической модуляции. В случае дифракции света на низших модах Лэмба, включая основную (s_0, a_0), наибольший вклад в эффективность дифракции света вносит не фотоупругий эффект, а искривления границ слоя, и рассмотренная выше теория не применима [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Sunita, J. Thin film layered structure for acousto-optic devices / J. Sunita, M. Abhai // J. Appl. Phys. – 1992. – Vol. 25. – P. 1116–1121.
2. Яковкин, Н.Б. Дифракция света на акустических волнах / Н.Б. Яковкин, Р.В. Петров. – Новосибирск, 1979. – 194 с.
3. Kong, J.A. Second-order coupled-mode equations for spatially periodic media / J.A. Kong // J. Opt. Soc. Am. – 1977. – Vol. 67, № 6. – P. 825–829.

4. Кулак Г.В. Дифракция света на ультразвуке в условиях френелевского отражения / Г.В. Кулак // Опт. и спектр. – 1994. – Т. 76, № 6. – С. 1027–1029.

5. Кулак, Г.В. Дифракция света на ультразвуковых волнах Лява / Г.В. Кулак, Т.В. Николаенко, П.И. Ропот // Опт. и спектр. – 2008. – Т. 104, № 3. – С. 508–512.

6. Викторов, И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэля и Лэмба в технике / И.А. Викторов. – М. : Наука, 1966. – 167 с.

7. Diodati, P. Lamb wave reflection at the plate edges / P. Diodati, G. Tassi, A. Alippi // Appl. Phys. Lett. – 1985. – Vol. 47, № 6. – P. 573–575.

8. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М. : Наука, 1971. – 576 с.

9. Ярив, А. Оптические волны в кристаллах / А. Ярив, П. Юх. – М. : Мир, 1987. – 616 с.

Поступила в редакцию 09.01.12.

УДК 531.51:531.18:530.12

ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГРАВИСТАТИКЕ БРИЛЛЮЭНА

Н.А. Ахраменко¹, Л.М. Булавко¹, А.Н. Сердюков²

¹Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

THE FIELD OF GRAVITATION OF THE SPHERICAL SURFACE IN RELATIVISTIC BRILLOUIN GRAVISTATICS

N.A. Akhramenko¹, L.M. Bulauko¹, A.N. Serdyukov²

¹Belarusian State University of Transport, Gomel

²F.Scorina Gomel State University, Gomel

Получены соотношения, определяющие напряженность статического гравитационного поля массивной сферической оболочки в релятивистской гравистатике Бриллюэна. Показано, что значение напряженности поля на самой оболочке в два раза меньше ее значения вблизи внешней поверхности.

Ключевые слова: релятивистская теория тяготения, граничная задача, нелинейная гравистатика.

The relations determining the intensity of static gravitational field of the massive spherical surface in relativistic Brillouin gravitational statics have been fixed. It has been shown that the value of intensity of the field on the surface itself is half as high as its value near external surface.

Keywords: relativistic theory of gravitation, boundary problem, nonlinear gravistatics.

Введение

Известно, что в формировании гравитационного поля вместе с массой вещества должна участвовать наравне и масса самого поля [1]. При построении поля тяготения сферически симметричного источника Бриллюэн обращает внимание на связанный с этим нелинейный характер гравистатики и обобщает уравнение тяготения Ньютона с учетом окружающего источник распределения полевой массы.

Напряжённость $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{r})$ статического поля тяготения или ускорение свободного падения, создаваемого неподвижной гравитирующей пылевидной материей с распределенной в пространстве объёмной плотностью массы $\mu = \mu(\mathbf{r})$, удовлетворяет уравнениям релятивистской гравистатики [2]:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{g} - \frac{1}{2c^2} \mathbf{g}^2 &= -4\pi G \mu, \\ \nabla \times \mathbf{g} &= 0, \end{aligned} \quad (0.1)$$

где c – скорость света в вакууме, G – гравитационная постоянная.

Из (0.1) следует условие потенциальности поля напряженности $\mathbf{g} = -\nabla \Phi$.

В области пространства, внешней по отношению к гравитирующим телам, где $\mu = 0$, напряжённость \mathbf{g} удовлетворяет нелинейному уравнению Бриллюэна [1]

$$\nabla \mathbf{g} - \frac{1}{2c^2} \mathbf{g}^2 = 0, \quad (0.2)$$

а потенциал – уравнению

$$\nabla^2 \Phi + \frac{1}{2c^2} (\nabla \Phi)^2 = 0,$$

представляющему нелинейное обобщение уравнения Лапласа.

Появление в уравнении (0.2) члена, нелинейного по полю \mathbf{g} , обосновывается Бриллюэном необходимостью включения распределенной в пространстве массы гравитационного поля в источник самого поля.

1 Поле тяготения шарового слоя

Рассмотрим сферически симметричный источник статического гравитационного поля – массивную пылевидную сферическую оболочку радиуса R . Если радиус-вектор \mathbf{r} проведен из центра сферы, то, очевидно, $\mu(\mathbf{r}) = \mu(r)$. Из соображений симметрии следует, что создаваемое таким источником поле будет обладать сферической симметрией:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -g(r) \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Поле оболочки с равномерно распределенной на ней свободной массой M_0 определим как предельный случай поля шарового слоя с радиусами внешней и внутренней сфер R_+ и R_- соответственно, когда толщина слоя $\Delta r = R_+ - R_-$ стремится к нулю. Воспользуемся решением [3] для поля массивного шарового слоя в трёх пространственных областях – в сферической полости, в слое и во внешней области. Напряжённость

поля в полости ($r < R_-$) $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = 0$. Поле в слое ($R_- < r < R_+$) задается выражением

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -2c^2 K \times \left(\frac{(1+KR_-)e^{-K(R-r)} + (1-KR_-)e^{K(R-r)} - 1}{(1+KR_-)e^{-K(R-r)} - (1-KR_-)e^{K(R-r)} - Kr} \right) \mathbf{r} \quad (1.1)$$

где $K = \sqrt{2\pi G\mu}/c$. В пространстве, окружающем источник, для $r > R_+$ напряжённость поля имеет вид:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r^2 \left(1 - \frac{GM}{2c^2 r}\right)} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (1.2)$$

Параметр M , определяющий это поле, есть полная масса всей гравитирующей системы, включая массу самого поля:

$$M = \int_{(V)} \left(\mu + \frac{1}{8\pi Gc^2} g^2 \right) e^{\phi/c^2} dV,$$

где интегрирование проводится по всему пространству.

Полная масса M однородного сферического слоя выражается через внутренний и внешний радиусы R_- , R_+ и плотность μ следующим образом [3]:

$$M = \frac{2c^2}{GK} \times \left(\frac{(KR_+ + 1)(KR_- - 1)e^{-K(R_+ - R_-)}}{(KR_- - 1)e^{-K(R_+ - R_-)} - (KR_+ + 1)e^{K(R_+ - R_-)}} - \frac{(KR_+ - 1)(KR_+ + 1)e^{K(R_+ - R_-)}}{(KR_- - 1)e^{-K(R_+ - R_-)} - (KR_+ + 1)e^{K(R_+ - R_-)}} \right) \quad (1.3)$$

При этом полагается, что потенциал Φ на бесконечности принят равным нулю.

2 Поле пылевидной гравитирующей сферы

Напряжённость поля на самой сферической оболочке определим как среднее значение напряженности поля в слое при стремлении толщины слоя $\Delta r = R_+ - R_-$ к нулю (с учетом выражения (1.1)):

$$g_{cp} = \frac{1}{R_+ - R_-} \int_{R_-}^{R_+} -2c^2 K \times \left(\frac{(1+KR_-)e^{-K(R-r)} + (1-KR_-)e^{K(R-r)} - 1}{(1+KR_-)e^{-K(R-r)} - (1-KR_-)e^{K(R-r)} - Kr} \right) dr.$$

После вычислений получаем следующее выражение:

$$g_{cp} = -2c^2 K + \frac{2c^2}{R_+ - R_-} \times \ln \frac{2KR_+}{(1+KR_-) - (1-KR_-)e^{-2K(R_+ - R_-)}}.$$

Далее нужно найти предел этого выражения при стремлении толщины слоя $\Delta r = R_+ - R_-$ к нулю. При этом плотность массы μ вместе с

параметром $K = \sqrt{2\pi G\mu}/c$ устремляются к бесконечности. Установим, каким образом связаны между собой величины Δr и K .

С этой целью представим выражение (1.3) в виде

$$M = \frac{2c^2}{GK} \times \frac{(KR_+ + 1)(KR_- - 1) - (KR_+ - 1)(KR_- + 1)e^{2K\Delta r}}{(KR_- - 1) - (KR_- + 1)e^{2K\Delta r}}$$

и, учтя, что толщина слоя $\Delta r = R_+ - R_-$ (или $R_+ = R_- + \Delta r$) стремится к нулю, разложив экспоненту по степеням, получим:

$$M = \frac{2c^2 (K(R_- + \Delta r) + 1)p - (K(R_- + \Delta r) - 1)qd}{GK(p - qd)},$$

где $p = (KR_- - 1)$,

$$q = (KR_- + 1),$$

$$d = (1 + 2K\Delta r + 2K^2\Delta r^2 + \dots).$$

После преобразований и отброса менее значимых членов получим:

$$K^2\Delta r = \frac{1}{\frac{2c^2 R_-^2}{GM} - R_-}$$

Напряжённость поля, преобразуя, представим в виде:

$$g_{cp} = -\frac{2c^2}{R_+ - R_-} \times \ln \frac{\text{sh}(K(R_+ - R_-)) + KR_- \text{ch}(K(R_+ - R_-))}{KR_+}$$

Разложив в ряд по степеням гиперболический синус и косинус, получим:

$$g_{cp} = -\frac{2c^2}{\Delta r} \ln \left(1 + \frac{R_-}{R_+} \frac{K^2\Delta r^2}{2} + \frac{K^2\Delta r^3}{6R_+} + \dots \right).$$

Теперь, воспользовавшись разложением логарифма в ряд и отбросив менее значимые члены, получим:

$$g_{cp} = -c^2 K^2 \Delta r.$$

Подставив ранее найденное произведение $K^2\Delta r$, получим

$$g_{cp} = -c^2 \frac{1}{\frac{2c^2 R_-^2}{GM} - R_-} = -\frac{GM}{2R_-^2 \left(1 - \frac{GM}{2c^2 R_-}\right)}.$$

Окончательно для напряженности поля на поверхности сферы можно записать:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{2R^2 \left(1 - \frac{GM}{2c^2 R}\right)} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

В результате статическое гравитационное поле массивной пылевидной сферической оболочки радиуса R с равномерно распределенной на ней свободной массой M_0 представляется в виде:

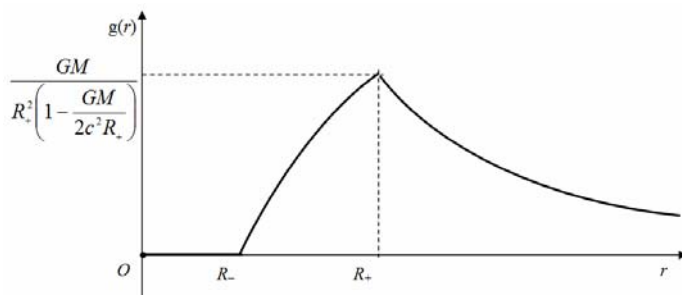


Рисунок 2.1

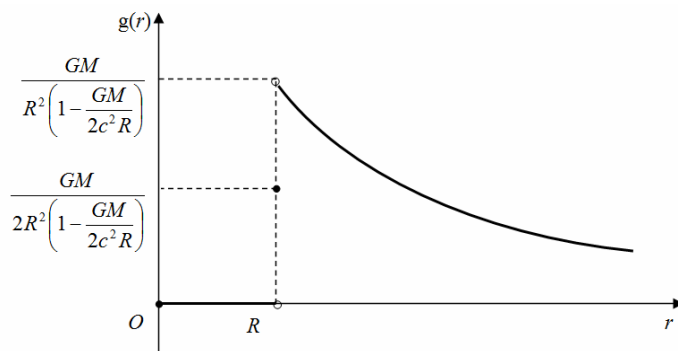


Рисунок 2.2

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \text{при } r < R; \\ -\frac{GM}{2R^2 \left(1 - \frac{GM}{2c^2 R}\right)} \frac{\mathbf{r}}{r}, & \text{при } r = R; \\ -\frac{GM}{r^2 \left(1 - \frac{GM}{2c^2 r}\right)} \frac{\mathbf{r}}{r}, & \text{при } r > R. \end{cases} \quad (2.1)$$

Из полученных соотношений следует, что величина напряжённости поля тяготения бесконечно тонкой оболочки на её поверхности оказывается в два раза меньше предела при $r \rightarrow R$ для поля вне оболочки.

Графическая зависимость для напряженности поля шарового слоя с учетом (1.1) и (1.2), представленная на рисунке 2.1, при стремлении толщины слоя к нулю трансформируется в графическую зависимость для напряженности поля сферической оболочки, представленную на рисунке 2.2.

При переходе через поверхность график на рисунке 2.2 имеет разрыв, включающий обособленную точку.

В ньютоновском приближении из формулы (2.1) получаем:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \text{при } r < R; \\ -\frac{GM}{2R^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, & \text{при } r = R; \\ -\frac{GM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, & \text{при } r > R. \end{cases}$$

Таким образом, использование решения граничной задачи нелинейной гравистатики Бриллюэна для шарового слоя позволяет путем соответствующего предельного перехода построить корректное решение для гравитационного поля, создаваемого бесконечно тонкой сферической оболочкой. Как и в соответствующей линейной задаче электростатики [4], напряженность поля на самой оболочке оказывается в два раза слабее напряженности в бесконечно близкой окрестности вне оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бриллюэн, Л. Новый взгляд на теорию относительности / Л. Бриллюэн. – М. : Мир, 1972. – 142 с.
2. Сердюков, А.Н. Минимальная модель тяготения в рамках стандартных ограничений теории классических полей / А.Н. Сердюков // Письма в ЭЧАЯ. – 2009. – Т. 6, № 3 (152). – С. 312–331
3. Сердюков, А.Н. Калибровочная теория скалярного гравитационного поля / А.Н. Сердюков. – Гомель : изд-во Гомельского гос. ун-та, 2005. – 257 с.
4. Ахраменко, Н.А. К определению электрического поля равномерно заряженной сферы / Н.А. Ахраменко, Л.М. Булавко // Вестник БГУ. – 2005. – Серия 1, № 3. – С. 40–43.

Поступила в редакцию 18.05.12.

УДК 539.12

КАЛИБРОВКА ПЕРЕДНИХ КАЛОРИМЕТРОВ ДЕТЕКТОРА CMS С ПОМОЩЬЮ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

А.В. Зарубин¹, В.Ф. Конопляников^{1,2}, С.Г. Шульга²

¹Лаборатория физики высоких энергий им. В.И. Векслера и А.М. Балдина ОИЯИ, Дубна, Россия

²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

CALIBRATION OF CMS FORWARD CALORIMETERS BY PHYSICAL PROCESSES

A.V. Zarubin¹, V.F. Konopliyanikov^{1,2}, S.G. Shulga²

¹Veksler and Baldin Laboratory of High Energy Physics, JINR, Dubna, Russia

²F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Исследована методика калибровки передних калориметров детектора CMS на Большом адронном коллайдере, основанная на использовании баланса электромагнитной и адронной составляющих поперечного импульса одноструйных событий с прямыми фотонами и двухструйных КХД-событий, содержащих фотоны с достаточно большими энергиями. Определены правила отбора событий для калибровки и условия применимости методики.

Ключевые слова: большой адронный коллайдер, адронный калориметр, электромагнитный калориметр, калибровка.

The technique of the forward calorimeters of CMS detector at Large hadron collider based on the use of the electromagnetic and hadron components of transverse momentum balance in single-jet events with direct photons and di-jet QCD events containing photons with sufficiently high energies is investigated. The event selection rules and the condition of applicability of the technique are defined.

Keywords: large hadron collider, hadron calorimeter, electromagnetic calorimeter, calibration.

Введение

Работа посвящена калибровке передних калориметров (HF) детектора CMS на Большом адронном коллайдере (LHC) с помощью физических процессов. Анализируется методика калибровки, основанная на использовании баланса события по поперечному импульсу (P_T -баланса).

P_T -баланс, в частности, соблюдается между электромагнитной и адронной составляющей поперечного импульса события. Если событие содержит фотоны больших энергий, попадающих в область электромагнитного калориметра, то электромагнитная составляющая события может быть достаточно точно измерена, что позволяет ввести поправки на энергии, измеренные с помощью башен адронного калориметра (HCAL). Эта методика ранее была предложена в работах [1], [2]. Между тем, вопрос о ее применимости к калибровке HF не был достаточно исследован.

Калибровку передних калориметров можно осуществить также на основе соотношения P_T -баланса между прямым фотоном и основной струей в событиях с прямыми фотонами [3], [4] с использованием, например, алгоритма L3 [5], [6]. Однако, излучения в начальном и конечном состояниях (ISR и FSR), другие физические эффекты и эффекты, связанные с регистрацией событий в установке, нарушают этот баланс и

приводят к погрешностям калибровки, которые также требуют исследования.

В настоящей работе рассматривается возможность использования для калибровки HF как P_T -баланса всего события, так и P_T -баланса между фотоном и струей в событиях с прямыми фотонами. Анализируются как эффекты на уровне генератора событий, так и эффекты, связанные с регистрацией событий в установке при начальной и предельной энергиях pp -столкновений на LHC ($E_{CM}=7$ и 14 ТэВ). Исследуется чувствительность калибровочных коэффициентов к поперечным энергиям и псевдобыстро-там фотонов и струй в калибровочных выборках, а также к ограничениям на выделения энергии в ячейках HCAL.

1 Использование P_T -баланса фотона и струи

Условия применимости калибровки HF с использованием P_T -баланса между фотоном и струей ($P_T^{\gamma} = P_T^{jet}$) в событиях с прямыми фотонами ($qg \rightarrow q+\gamma$ и $qq \rightarrow g+\gamma$), прежде всего, определяются степенью нарушения этого баланса, вызванного физическими эффектами: ISR, FSR и фрагментацией кварков и глюонов [3], [4]. Для изучения влияния этих эффектов на точность калибровки был выполнен анализ P_T -баланса

фотона и струи в этих событиях на партонном уровне и уровне частиц. Рассмотрены следующие случаи:

– «ISR» – анализ на партонном уровне без учета эффектов FSR и фрагментации. В качестве источника основной струи рассматривается конечный партон (кварк или глюон) процесса жесткого pp -столкновения.

– «FSR» – анализ на уровне частиц с учетом FSR и фрагментации. В качестве основной струи рассматривается струя частиц с наибольшим поперечным импульсом, собранная в конусе радиуса 0,5 в пространстве псевдобыстрот и полярных углов: $[\eta, \phi]$.

– « $\Delta\phi > 3$ » – случай «FSR» с ограничением на ϕ -интервал между прямым фотоном и основной струей: $\Delta\phi > 3$.

Анализ выполнялся с использованием генератора событий PYTHIA-6. В этом генераторе конечные партоны жесткого процесса записываются в 7 и 8 строки массива частиц (рисунок 1.1). Суммарный поперечный импульс \mathbf{P}'_7 (\mathbf{P}'_8) частиц, рожденных непосредственно от партона 7 (8) строки, не равен импульсу \mathbf{P}_7 (\mathbf{P}_8) этого партона:

$$\mathbf{P}'_7 = \mathbf{P}_7 - \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{P}'_8 = \mathbf{P}_8 + \mathbf{P}_0.$$

Таким образом, имеет место передача импульса между конечными партонами, и при отсутствии ISR P_T -баланс соблюдается либо для партонов 7 и 8 строк:

$$\mathbf{P}_{T,7} + \mathbf{P}_{T,8} = 0,$$

либо для частиц, рожденных от партонов 7 и 8 строк:

$$\mathbf{P}'_{T,7} + \mathbf{P}'_{T,8} = 0. \quad (1.1)$$

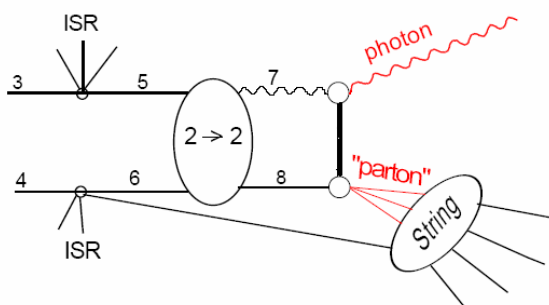


Рисунок 1.1 – Пример диаграммы генератора PYTHIA для события с прямым фотоном

В данном анализе событий с прямыми фотонами в качестве фотона рассматривается не промежуточный фотон 7 (8) строки, а регистрируемый фотон. Соответственно, соотношение P_T -баланса события берется в виде (1), и если, например, фотону соответствует 7 строка, то полагается:

$$P_T^\gamma = P'_{T,7}, \quad P_T^{parton} = P'_{T,8}.$$

Излучение в начальном состоянии нарушает баланс фотона и партона по поперечным импульсам и приводит к некоторому 2-мерному распределению $[P_T^{parton}, P_T^\gamma]$ (рисунок 1.2 а). Ограничение на суммарную энергию фотона и партона:

$$P_T^\gamma \cosh(\eta^\gamma) + P_T^{parton} \cosh(\eta^{parton}) < E_{CM}/c \quad (1.2)$$

приводит к тому, что 2-мерное распределение $[P_T^{parton}, P_T^\gamma]$ из симметричного превращается в асимметричное относительно линии $P_T^{parton} = P_T^\gamma$, и эта асимметрия особенно выражена при достаточно больших поперечных импульсах фотонов и псевдобыстротах партонов (рисунок 1.2 б).

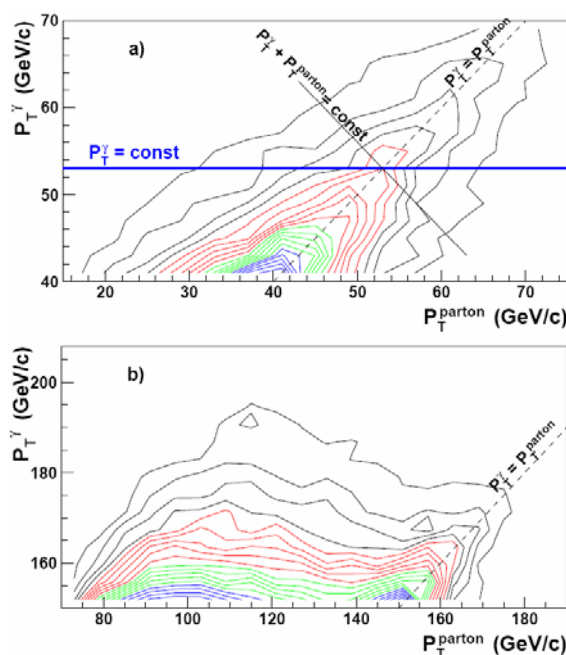


Рисунок 1.2 – Плотности функций двумерного распределения поперечных импульсов фотона и партона в событиях с прямыми фотонами:

- а) $P_T^\gamma > 40$ ГэВ, $0 < \eta^{parton} < 2.5$;
- б) $P_T^\gamma > 150$ ГэВ, $\eta^{parton} > 4$

Нарушение указанного баланса при $E_{CM} = 14$ ТэВ анализировалось в работе [4]. Среднее значение дисбаланса

$$\delta \equiv (P_T^\gamma - P_T^{parton})/P_T^\gamma$$

в интервалах по P_T^γ составляет при данной энергии для всех значений P_T^a более 12% при $\eta_{parton} > 3$ и более 16% при $\eta_{parton} > 4$. С понижением энергии столкновения возможности рассматриваемой методики для калибровки передних калориметров еще более сужаются из-за нарушения P_T -баланса фотона и струи, вызванного ограничением (1.2). Для $E_{CM} = 7$ ТэВ согласно рисунку 1.3 $\langle \delta \rangle > 14\%$ при $\eta_{parton} > 3$ и $\langle \delta \rangle > 26\%$ при $\eta_{parton} > 4$. Наложение ограничения на

полярный угол между фотоном и струей уменьшает этот дисбаланс лишь частично (примерно вдвое).

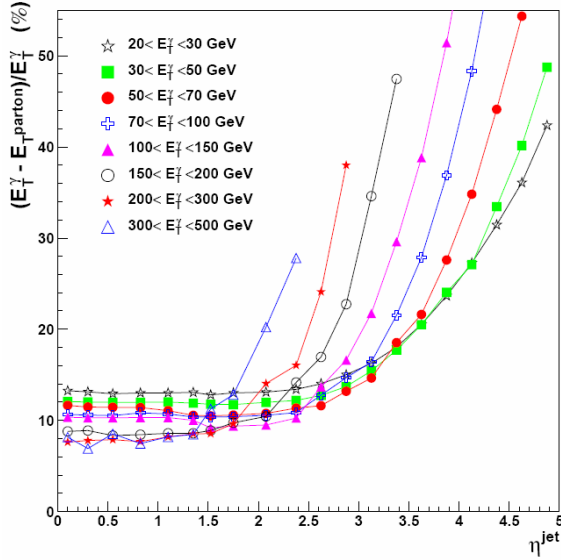


Рисунок 1.3 – Средние значения дисбаланса поперечных энергий прямого фотона и конечного партона жесткого процесса, рассчитанные в интервалах по E_T^γ , в зависимости от псевдобыстроты основной струи при различных значениях поперечного импульса прямого фотона ($E_{CM} = 7$ ТэВ)

Предельные возможности методики для выборок, соответствующих интегральной светимости 1 fb^{-1} , демонстрируют рисунки 1.4, 1.5. На рисунках принято обозначение $P_T \equiv cE_T$ и использованы интервалы по P_T^{sp} :

$$P_T^{sp} \equiv \frac{P_T^\gamma + P_T^{parton}}{2},$$

в которых наблюдается лучший средний P_T -баланс фотона и партона (рисунок 1.2). Если калибровку выполнять в этих интервалах без ограничения на поперечные энергии фотона и партона, то вклад P_T -дисбаланса фотона и партона в погрешность калибровки составляет более 5% при $E_T^{sp} > 20$ ГэВ и $\eta^{jet} > 4$ (рисунок 1.4).

Дисбаланс фотона и партона при малых поперечных импульсах ($E_T^{sp} > 20$ ГэВ) детально иллюстрирует рисунок 1.5. Согласно этому рисунку при отсутствии излучения в конечном состоянии, когда основная струя отождествляется с конечным партоном, P_T -дисбаланс фотона и партона находится в пределах 2% при $\eta^{jet} < 4$ и достаточно близких значениях псевдобыстрот фотона и струи. Эта же ситуация сохраняется при наличии излучения в конечном состоянии, если исключить события с фотонами в центральной области калориметра.

Отметим, что P_T -дисбаланс фотона и партона (или струи) рассчитывался с использованием событий, сгенерированных без ограничений на поперечные импульсы жесткого процесса, что в полтора и более раз увеличивало значения дисбаланса по сравнению с генерациями, использующими такие ограничения.

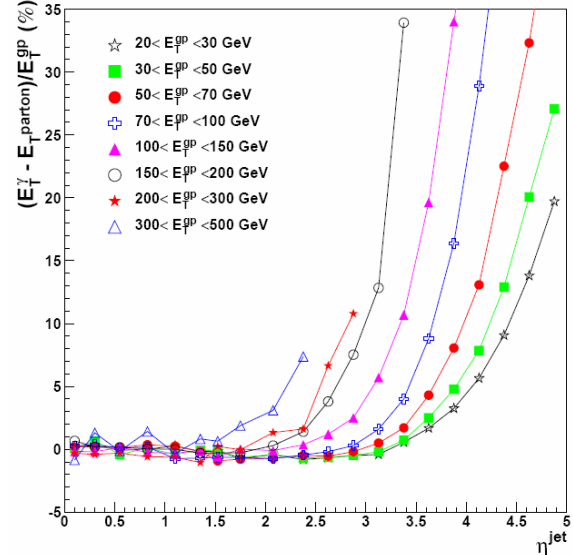


Рисунок 1.4 – Средние значения дисбаланса поперечных энергий прямого фотона и конечного партона жесткого процесса, рассчитанные в интервалах по E_T^{sp} , в зависимости от псевдобыстроты основной струи ($E_{CM} = 7$ ТэВ)

2 Использование P_T -баланса события

Метод, предложенный в работе [1], позволяет найти поправки C_i на энергии, измеренные в модулях адронного калориметра ($i = 1, 2, \dots, 41$) с фиксированными значениями абсолютных величин псевдобыстрот (η_i) и различными значениями полярных углов.

Определив (E_X^{ECAL}, E_Y^{ECAL}) и (E_X^i, E_Y^i) как X - и Y - составляющие поперечной энергии события, измеренной соответственно электромагнитным калориметром и отдельными модулями адронного калориметра, можем записать полную поперечную энергию события с учетом поправок:

$$E_T^2 \equiv E_X^2 + E_Y^2,$$

$$\text{где } E_X \equiv E_X^{ECAL} + \sum_{i=1}^{41} C_i E_X^i,$$

$$E_Y \equiv E_Y^{ECAL} + \sum_{i=1}^{41} C_i E_Y^i.$$

Минимизацией суммы по достаточно большому количеству событий $\sum_{events}^{N_{events}} E_T^2$ можно определить неизвестные коэффициенты C_i .

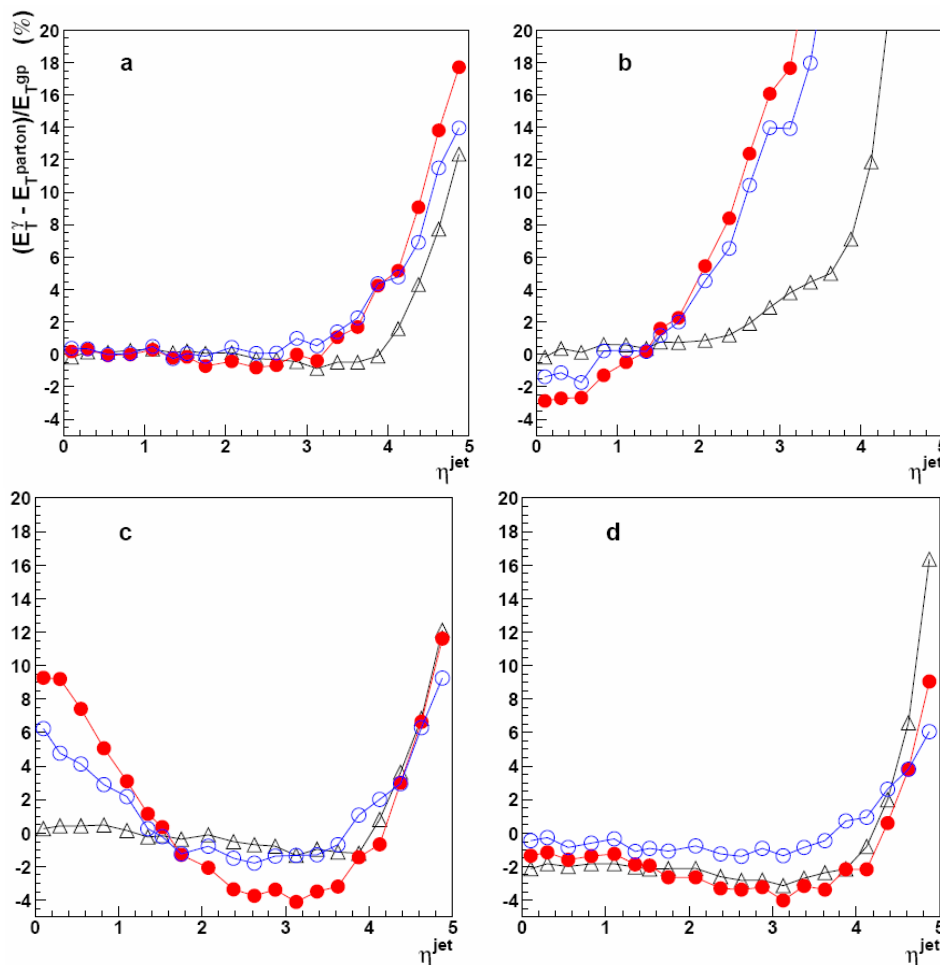


Рисунок 1.5 – Средние значения дисбаланса поперечных энергий прямого фотона и конечного партона жесткого процесса, рассчитанные в интервалах по E_T^{sp} , в зависимости от псевдобыстроты струи при $E_T^{sp} > 20$ ГэВ для различных значений псевдобыстроты фотона и случаев:

Δ – «ISR», \bullet – «FSR», \circ – $\Delta\phi > 3$ ($E_{CM} = 7$ ТэВ)

На значения полученных коэффициентов влияют как физические эффекты:

- взаимодействия сохранившихся партонов, не участвовавших в жестком процессе;
- множественные взаимодействия (дополнительные события, записанные в процессе сбора информации по сигналу триггера, или в некотором интервале времени до срабатывания триггера);
- так и эффекты, связанные с регистрацией событий установкой:

- магнитное поле;
- различный отклик калориметра на электромагнитную и адронную компоненты;
- шумы электроники и их подавление введением ограничений на измеренные энергии, выделенные в ячейках калориметров;
- несущие конструкции детектора и технологические промежутки;
- выход ливня за пределы калориметра.

Некоторые из этих эффектов (например, дополнительные события) могут существенно

увеличивать измеренную энергию по сравнению с энергией, соответствующей детектируемому событию. Это приводит к уменьшению значений C_i по отношению к истинным значениям. Другие эффекты (например, ограничения на измеренные энергии в ячейках), наоборот, приводят к завышенным значениям C_i .

Анализ методики выполнен с использованием выборок смоделированных событий с прямыми фотонами и фоновыми событиями, содержащими фотоны с поперечными энергиями $E_T^\gamma = E_{T,0}^\gamma(1 \pm 0.1)$, $E_{T,0}^\gamma = 20, 30, 40, 60, 100, 150, 200, 300$ и 500 ГэВ. Генерация событий осуществлялась помощью генератора PYTHIA.6. Выполнялось полное моделирование условий детектирования с использованием программы ORCA.894 с наложением дополнительных событий, соответствующих светимости $L = 2 \times 10^{33} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ и энергии $E_{CM} = 14 \text{ TeV}$. Размеры выборок составляли от 15000 до 20000 событий соответственно для $E_{T,0}^\gamma$ от 20 до 500 ГэВ.

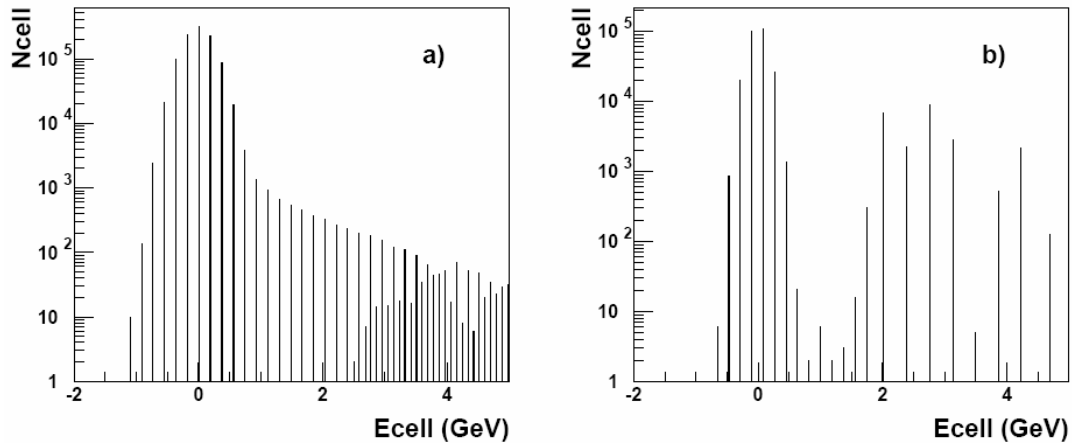


Рисунок 2.1 – Энергии сигнала и шумов электроники в башнях адронного калориметра:

a) $|\eta| < 3$, b) $|\eta| > 3$ ($E_T^\gamma > 30$ ГэВ)

Для исследования чувствительности калибровочных коэффициентов к ограничениям на измеренные энергии в ячейках генерация выполнялась без этих ограничений. На рисунке 2.1 представлены энергии, зарегистрированные в отдельных ячейках адронного калориметра. Видно, что сигнал (энергия физического события) частично перекрывается с шумом электроники, и ограничение для подавления шума $E_{cell} > 3\sigma \approx 1$ ГэВ (σ – среднеквадратичное отклонение шума электроники) в области $|\eta| < 3$ приводит к частичному подавлению сигнала. В то же время в областях передних калориметров сигнал превышает шум, и данное ограничение не приводит к подавлению сигнала и не влияет на значения C_i .

На рисунках 2.2, 2.3 представлены результаты расчета коэффициентов C_i с помощью программы MINUIT/ROOT без ограничения и с ограничением на измеренные значения поперечных энергий в ячейках адронных калориметров $E_{T,cell} > 0.8$ ГэВ. Эти рисунки иллюстрируют неоднозначность коэффициентов C_i , которая проявляется в их сильной зависимости от E_T^γ и введением ограничений E_{cell} устраняется лишь частично. При этом в центральной области адронного калориметра указанная неоднозначность сохраняется даже при $E_T^\gamma > 500$ ГэВ (рисунок 2.4). В то же время в области передних калориметров при ограничении $E_{T,cell} > 0.8$ ГэВ значения калибровочных коэффициентов с точностью до статистических погрешностей не зависят от поперечных энергий фотонов, начиная со значений $E_T^\gamma = 40-60$ ГэВ (рисунок 2.5). В этом заключается преимущество применения данного метода калибровки для области передних калориметров по сравнению центральной областью адронного калориметра.

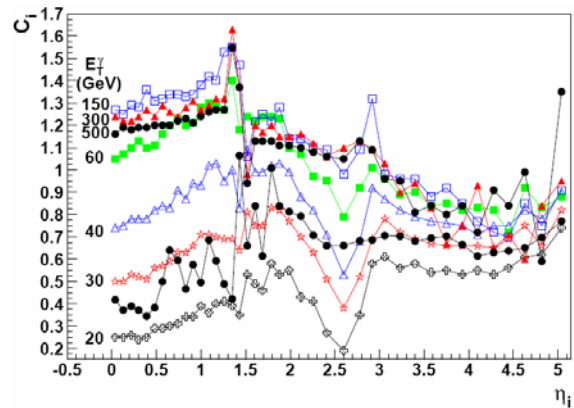


Рисунок 2.2 – Значения калибровочных коэффициентов C_i , рассчитанные без ограничения на измеренные значения энергий в ячейках адронного калориметра

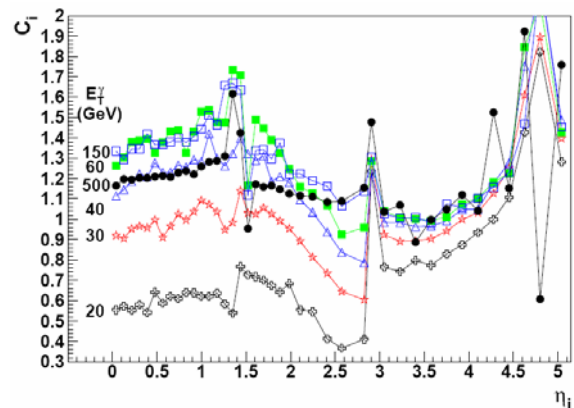


Рисунок 2.3 – Значения калибровочных коэффициентов C_i , рассчитанные с ограничением на измеренные значения поперечных энергий в ячейках адронного калориметра $E_{T,cell} > 0.8$ ГэВ

Другой мерой для подавления эффектов, приводящих к завышению значений измеренных энергий в ячейках передних калориметров, может быть исключение из калибровочных

выборки событий, не содержащих струй с достаточно большими энергиями в калибруемой области. Как видно из рисунка 2.5, эта мера приводит к эффекту, аналогичному ограничению на

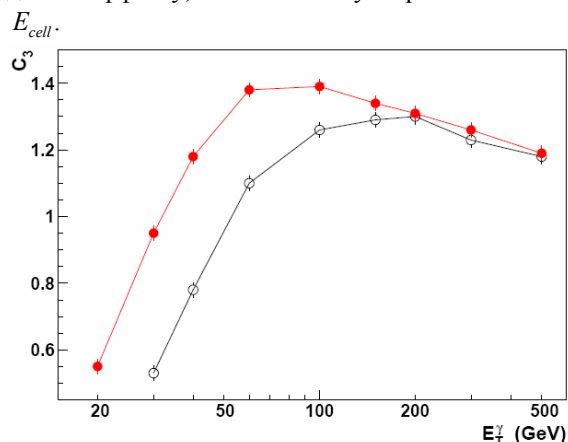


Рисунок 2.4 – Значения калибровочного коэффициента C_3 ($\eta_i = 0.22$) в зависимости от поперечных энергий фотонов в калибровочных выборках в случаях: \circ – без ограничения, \bullet – с ограничением на измеренные значения поперечных энергий в ячейках адронных калориметров $E_{T,cell} > 0.8$ ГэВ

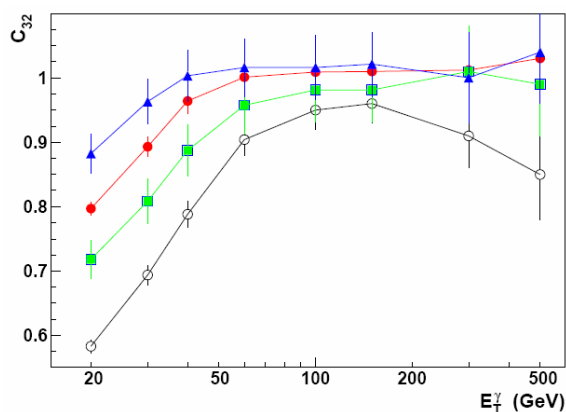


Рисунок 2.5 – Значения калибровочного коэффициента C_{32} ($\eta_i = 3.40$) в зависимости от поперечных энергий фотонов в калибровочных выборках для случаев: \circ – без ограничения на измеренные значения поперечных энергий в ячейках HF ($E_{T,cell}$) и на η^{jet} ; \square – без ограничения на $E_{T,cell}$, $\eta^{jet} = 3.4 \pm 0.4$; \bullet – $E_{T,cell} > 0.8$ ГэВ, без ограничения на η^{jet} ; \triangle – $E_{T,cell} > 0.8$ ГэВ, $\eta^{jet} = 3.4 \pm 0.4$

Заключение

Анализ методики калибровки HF с использованием P_T -баланса фотона и струи в событиях с прямыми фотонами показывает наличие существенных ограничений на условия применимости этой методики, накладываемых физическими

эффектами (ISR, FSR и фрагментации). Эти ограничения связаны с нарушением указанного баланса, вызванного, прежде всего, излучением в начальном состоянии, которое может приводить к погрешностям калибровки, превышающим 10%. На погрешность калибровки менее 5% можно рассчитывать лишь при использовании калибровочных выборок с достаточно малыми значениями поперечных энергий фотонов ($E_T^\gamma < 50$ ГэВ) и абсолютных значений псевдобыстрот $|\eta^{jet}| < \eta_{max}$, где η_{max} изменяется в пределах 3,5–4 в зависимости от E_T^γ .

Метод, основанный на использовании P_T -баланса события, позволяет осуществить калибровку HF с помощью событий, содержащих достаточно энергичные фотоны. При наложении ограничений на выделенные в башнях калориметра энергии ($E_{T,cell} > 0,8$ ГэВ) для событий с $E_T^\gamma > 60$ ГэВ систематические неопределенности калибровки, связанные с зависимостью калибровочных коэффициентов от E_T^γ , не превышают среднеквадратичных отклонений статистических неопределенностей, составляющих примерно 3% для 50000 событий в выборке. При использовании событий с основной струей в области калибруемых башен минимальный порог на E_T^γ понижается примерно в два раза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Doroshkevich, E. Calibration of HF Based on Minimisation of Missing Et / E. Doroshkevich, V. Gavrilov // CMS NOTE 1999/038. – Geneva. – 1999. – 10 p.
2. Semenov, S. HCAL calibration using gamma+jet events / S. Semenov, A. Ulyanov // Proceedings of 11th Annual RDMS CMS Collaboration Conference, 12–16 September, 2006; Varna, Bulgaria. – CMS Document: RDMS-2006. – 2006. – Vol. 2. – P. 225.
3. V. Konopliyanikov, A. Jet Calibration Using Gamma+jet Events in the CMS Detector / V. Konopliyanikov, A. Uliyanov, O. Kodolova // Eur. Phys. J., C. s01. – 2006. – Vol. 46. – P. 37–43.
4. Установка шкалы энергии струи на калориметре CMS с помощью событий с прямыми фотонами / И.А. Голутвин [и др.] // Письма в ЭЧАЯ. – 2008. – Т. 5. – № 5 (147). – С. 752–765.
5. Results of L3 BGO Calorimeter Calibration using an RFQ accelerator / U. Chaturvedi [et al.] // IEEE Transactions of Nuclear Science. – 2000. – Vol. 47, № 6. – P. 2101–2105.
6. Intercalibration using L3 and Householder methods applied to the ECAL testbeam 2006 / L. Agostino [et al.] // CMS DN-2007/003. – Geneva. – 2007. – 30 p.

Поступила в редакцию 12.03.12.

УДК 535.37:621.373

ЛОКАЛИЗАЦИЯ И РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В УПОРЯДОЧЕННЫХ АНСАМБЛЯХ КОНЕЧНЫХ ЦИЛИНДРОВ

В.А. Ковтун-Кужель¹, Р.А. Дынич², А.Н. Понявина²

¹Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно

²Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск

LOCALIZATION AND SCATTERING OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN ORDERED ARRAYS OF FINITE CYLINDERS

V.A. Kovtun-Kuszhel¹, R.A. Dynich², A.N. Ponyavina²

¹Y. Kupala Grodno State University, Grodno

²B.I. Stepanov Institute of Physics National Academy of Sciences of Belarus, Minsk

Исследованы особенности локализации и рассеяния электромагнитного излучения упорядоченными ансамблями, состоящими из параллельных друг другу круговых цилиндров конечной длины (т. н. «мультимеры»). С применением формализма объемного интегрального уравнения изучены прямые и инверсные системы с сотовой структурой. Проанализирована зависимость диаграмм направленности, а также картин распределения внутреннего и ближнего поля от размеров цилиндров и образованных ими мультимеров при условии падения излучения вдоль оси цилиндров.

Ключевые слова: упорядоченные ансамбли цилиндров, диаграммы направленности, распределение ближнего поля.

We considered a high-ordered array of a finite number of circular cylinders characterized by a defined length and oriented perpendicularly to a planar substrate (so called "multimers"). On the base of the volume integral equation formalism we studied both straight and inverse dielectric systems with a honeycomb structure. The scattering direction diagrams and a field distribution into/near the cylinders included into a multimer were analyzed at different cylinder and multimer sizes and for a number of materials under condition of incident light directed along a pore axis.

Keywords: space-ordered cylinders, direction diagrams, near-field distribution.

Введение

В настоящее время проблема распространения, рассеяния и локализации электромагнитного излучения в неоднородных пространственно упорядоченных структурах является одной из наиболее актуальных задач фотоники и радиофизики. Частотная и пространственная фильтрация излучения такими структурами рассматривается как высокоэффективный способ управления прохождением волн, который может быть использован для значительного расширения возможностей обработки сигналов.

Важнейшей причиной, вызывающей существенную трансформацию спектральных и угловых характеристик электромагнитного излучения при его взаимодействии с системой рассеивателей, является многократное рассеяние. В случае пространственно упорядоченных структур многократное рассеяние в значительной степени определяется эффектами когерентной природы, которые предполагают интерференционное суммирование полей, рассеянных отдельными рассеивателями. Интерференция многократно рассеянных волн в условиях строгой периодичности структуры, как это имеет место в фотонных кристаллах (ФК), может приводить к формированию спектральных и пространственно-частотных зон, в которых распространение электромагнитного

излучения полностью запрещено или существенно подавлено [1]. Другим немаловажным обстоятельством, роль которого усиливается в системах близкорасположенных рассеивателей, является неоднородность поля вблизи их поверхности. При разработке способов управления спектральными и рассеивающими свойствами объектов за счет целенаправленного выбора их структурных параметров выявление особенностей формирования внутренних и ближних полей является полезным и даже необходимым этапом исследования.

Для ряда практических применений наиболее перспективными являются 2D пространственно-упорядоченные структуры, для которых характерна периодичность строения в двух измерениях. К их числу относятся и т.н. сотовые пористые (канальные) и гексагональные столбчатые структуры, представляющие собой упорядоченные системы одинаково ориентированных цилиндров конечной длины. Например, известно, что нанопористые тонкие пленки с сотовой структурой, сформированные электрохимическим анодированием алюминия, обладают свойствами спектральной и угловой селективности [1], [2]. Установлено также, что допирование таких пористых сотовых структур ионами редкоземельных элементов сопровождается существенным

усилением люминесценции и изменением ее углового распределения [3]. Кроме того, использование электродинамически связанных цилиндров конечной длины представляется весьма эффективным способом управления диаграммами направленности излучателей для терагерцового и микроволнового диапазонов [4]. Выявление особенностей формирования внутренних полей в системах такого рода способствует разработке способов управления спектральными и рассеивающими свойствами за счет целенаправленного выбора их структурных параметров.

1 Метод расчета

При практическом использовании оптических элементов на основе канальных или столбчатых структур часто реализуется ситуация, когда излучение падает перпендикулярно поверхности образца, то есть вдоль оси цилиндрической неоднородности [1]–[3].

В настоящей работе мы рассмотрели ансамбль из конечного числа одинаковых круговых цилиндров (т. н. мультимер), оси которых ориентированы вдоль направления распространения падающего света, то есть вдоль оси OZ . Шесть цилиндров располагаются симметрично по окружности диаметром $D=2R$, центр которой определяется положением центрального цилиндра (рисунок 1.1).

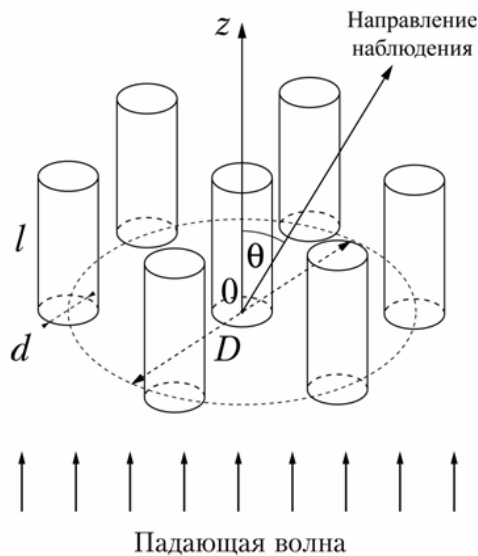


Рисунок 1.1 – Гексагональный мультимер из одинаковых цилиндров

Такой тип мультимера воспроизводит топологию элементарных ячеек для систем с сотовой структурой и гексагональной симметрией.

Следует отметить, что в случае конечного числа упорядоченных рассеивателей неприменимы хорошо развитые к настоящему времени методы численного исследования спектральных и угловых характеристик фотонных кристаллов с бесконечными размерами [5]. С нашей точки

зрения, наиболее эффективное рассмотрение характеристик мультимеров может быть проведено в рамках теории многократного рассеяния волн (ТМРВ) на конечном числе рассеивателей [6]. ТМРВ базируется на использовании рассеивающих характеристик изолированных цилиндрических частиц, находящихся в поле падающей волны. В то же время задача рассеяния на цилиндре конечной длины, который является составной частью рассматриваемого нами мультимера, не имеет точного аналитического решения. Для описания характеристик рассеяния и поглощения конечными цилиндрами наиболее часто в настоящее время применяются численные методы, основанные на методе Т-матрицы или на применении к решению дифференциальных или интегральных уравнений Максвелла конечно-разностных схем в частотной или временной области (см. ссылки в [6]). Применительно к телам вращения развиты также численные методы решения интегральных уравнений относительно истинных или эквивалентных токов на поверхностях раздела [4].

В настоящей работе мы использовали модель взаимодействия электромагнитной волны с мультимером, базирующуюся на формализме объемного интегрального уравнения [7], [8]. Основой метода VIEF служит интегральное уравнение Максвелла, согласно которому напряженность электрического поля в любой точке пространства определяется как:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_1) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_1) + \frac{k^2}{4\pi} \iiint [m^2(\mathbf{r}_2) - 1] \mathbf{E}(\mathbf{r}_2) G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d^3(\mathbf{r}_2), \quad (1.1)$$

где \mathbf{E} обозначает полное поле в рассматриваемой точке, \mathbf{E}_0 – поле падающей волны, \mathbf{G} – диадная функция Грина, m – комплексный относительный показатель преломления, \mathbf{k} – волновой вектор падающей волны.

Далее рассматриваемый объект разбивается на N одинаковых по размерам элементарных кубических ячеек, показатель преломления которых сопоставляется соответствующему материалу. При этом интегральное уравнение (1.1) сводится к матричному уравнению, определенному в $3N$ -мерном пространстве комплексных чисел:

$$\mathbf{A}\mathbf{E}_v = \mathbf{E}_v^{in}. \quad (1.2)$$

Здесь \mathbf{A} – квадратная матрица, описывающая рассеяние элементарных ячеек в условиях электро-динамического взаимодействия между ними, \mathbf{E}_v – вектор-столбец, содержащий значения искомого поля в каждой ячейке, \mathbf{E}_v^{in} – вектор-столбец, содержащий значения падающего поля в ячейках. Матричное уравнение (1.2) в дальнейшем решается численными методами, путем минимизации функции $|\mathbf{A}\mathbf{E}_v - \mathbf{E}_v^{in}|^2$.

Такой подход позволяет рассчитать оптические сечения рассматриваемого объекта (см.,

например, [8]), а также амплитудные функции рассеяния $S_1(\theta)$, $S_2(\theta)$, соответствующие ортогональным поляризациям падающего света, и значения поля в любой точке исследуемого пространства (в том числе внутри частицы и в ближней от нее зоне).

В настоящей работе метод применяется для расчета диаграмм направленности $I(\theta)$ отдельных цилиндров и образованных ими гексагональных мультимеров. Диаграммы направленности (ДН) определялись из следующих соотношений:

$$I(\theta) = \frac{|S(\theta)|^2}{\pi \rho_{d(D)}^2 Q_{sca}},$$

$$|S(\theta)|^2 = \frac{1}{2} (|S_1(\theta)|^2 + |S_2(\theta)|^2),$$

$$|S_i(\theta)|^2 = [\text{Re } S_i(\theta)]^2 + [\text{Im } S_i(\theta)]^2.$$

Здесь фактор эффективности рассеяния Q_{sca} и дифракционный параметр $\rho_{d(D)} = \pi d(D) / \lambda$ соответствуют рассматриваемому объекту, т. е. отдельному цилиндру или мультимеру.

Сопутствующий расчет и анализ характеристик распределения ближнего поля проводился с целью выявления особенностей электродинамических взаимодействий, определяющих формирование ДН мультимера.

2 Обсуждение результатов

Численные исследования диаграмм направленности и картин распределения внутреннего и ближнего полей проводились с целью установления их зависимости от размеров цилиндров и мультимеров, а также от диэлектрических свойств материалов цилиндров и окружающей их матрицы. С использованием формализма объемного интегрального уравнения изучались как прямые, так и инверсные диэлектрические системы цилиндров. Напомним, что под инверсными системами понимаются структуры, для которых показатель преломления матрицы превышает показатель преломления внедренных в нее цилиндров.

На рисунке 2.1 представлены картины распределения внутреннего и ближнего поля для одиночного цилиндра, находящегося в поле плоской электромагнитной волны, которая распространяется вдоль оси OZ , имеет единичную амплитуду $E_0=1$ и поляризована вдоль оси OY . Изменение цвета от черного к белому на рисунке соответствует увеличению амплитуды локального поля. В верхней панели (панель 1) приведены данные для цилиндра из органического стекла, размещенного в воздухе, а в средней (2) и нижней (3) панелях – для воздушной цилиндрической поры в оргстекле.

Как видно из приведенных рисунков, распределение внутреннего и ближнего поля зависит от ориентации электрического вектора падающей волны относительно рассматриваемого

сечения. Общим для прямого и инверсного случаев (при $\lambda=600$ нм) является немонотонное изменение интенсивности поля по длине цилиндра в приграничной области, а также смещение «горячих пятен» в переднюю полусферу, где отношение

$$k = \frac{|E|^2}{|E_0|^2}$$

достигает максимальных значений $k_{\max} = 0.8$ для цилиндра из оргстекла и $k_{\max} = 1.5$ для воздушной поры с теми же размерами. Интересно отметить, что уменьшение длины волны падающего излучения до $\lambda=300$ нм приводит в инверсном случае к существенной трансформации внутреннего поля. Как видно из приведенных рисунков, в этом случае внутри воздушных цилиндров формируется «холодная» область, а излучение локализуется на границе воздуха и оргстекла на поверхности цилиндра ($k_{\max} = 2$).

При объединении цилиндров в мультимер топология внутреннего и ближнего поля изменяется. Область «горячих пятен» смещается внутрь мультимера и по направлению к плоскости входа в него излучения. Чем меньше диаметр окружности, на которой расположены цилиндры, тем более однородным становится внутреннее поле (рисунок 2.2).

На рисунках 2.3 и 2.4 представлены картины распределения внутренних и ближних полей в сечениях ZOY (а), ZOX (б) для мультимеров с радиусами 100 нм и 140 нм соответственно. Мультимеры образованы цилиндрическими воздушными порами в органическом стекле. Параметры цилиндров соответствуют указанным в подписях к рисунку 2.1. Длина волны падающего излучения равна 300 нм (панель 1) и 600 нм (панель 2). Как видно из рисунков, при уменьшении длины волны падающего излучения для инверсных мультимеров сохраняется тенденция локализации внутреннего поля у внешней поверхности, отмеченная выше при анализе внутренних полей в отдельной воздушной поре.

Основной причиной изменений, отмеченных в характере распределения внутреннего поля внутри мультимеров по сравнению с изолированными цилиндрами, являются, по-видимому, коллективные электродинамические взаимодействия и эффекты фотонного ограничения, вызванные пространственным упорядочением цилиндров. Эти изменения находят свое отражение и в трансформации диаграмм направленности рассеянного излучения. В частности, изменения локальных характеристик поля внутри мультимера сопровождаются изменениями эффективно-го поля, воздействующего на каждый из элементарных рассеивателей, и отражаются на форме ДН мультимеров.

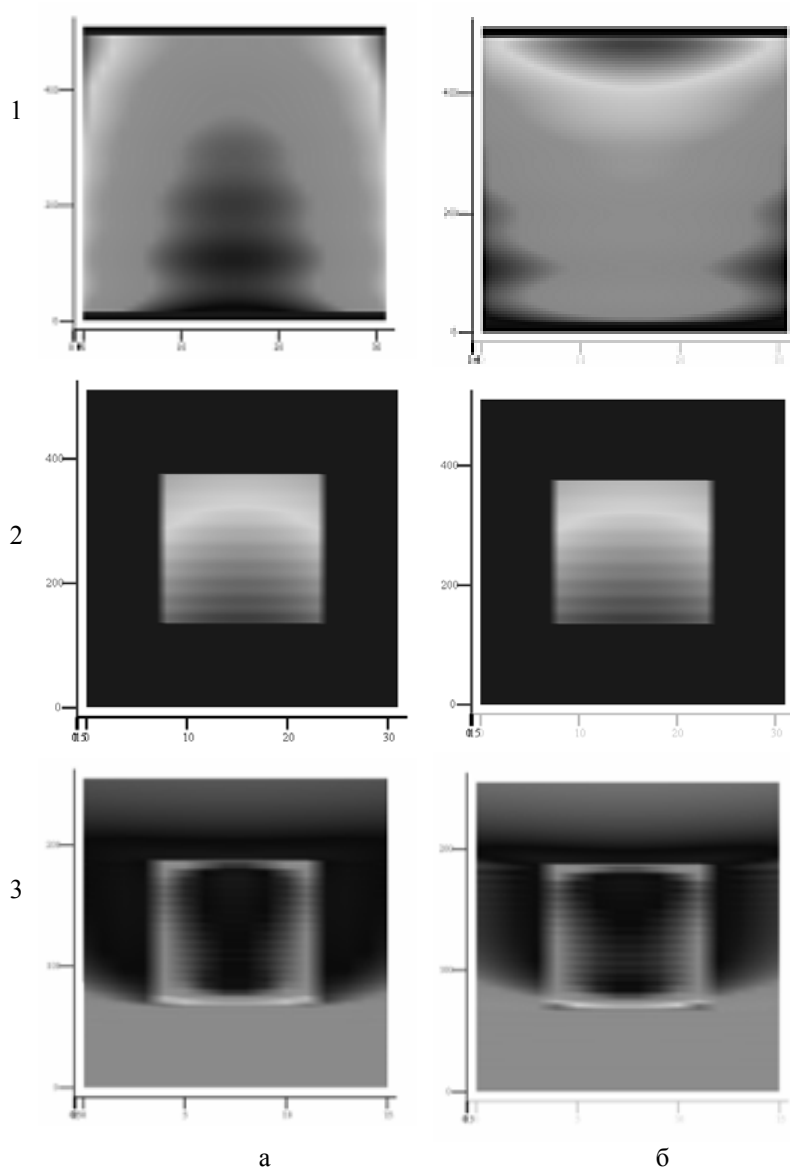


Рисунок 2.1 – Картины распределения поля в центральных сечениях отдельного цилиндра из оргстекла в воздухе (панель 1) и воздушной цилиндрической поры в оргстекле (панели 2 и 3): сечение ZOY (а), ZOX (б). Длина волны излучения 600 нм (панель 1 и 2) и 300 нм (панель 3), длина цилиндра 1500 нм, диаметр 100 нм

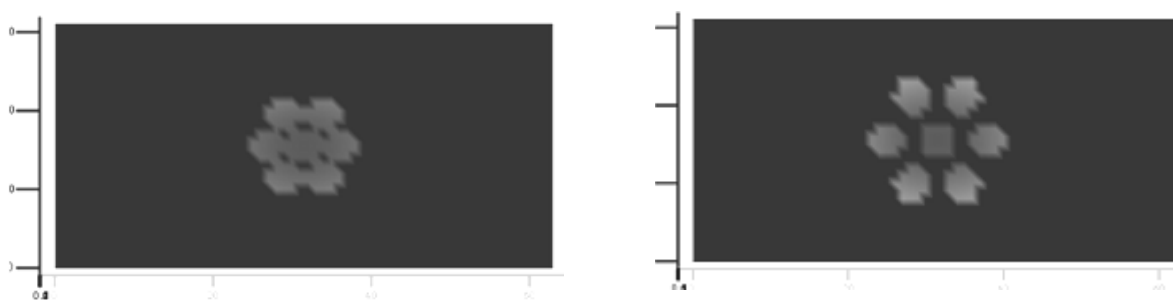


Рисунок 2.2 – Картины распределения ближнего поля в центральном сечении XOY для мультимеров с $R=100$ нм (а) и $R=140$ нм (б). Длина волны падающего излучения 600 нм, длина каждого цилиндра из органического стекла $l=1500$ нм, диаметр $d=100$ нм

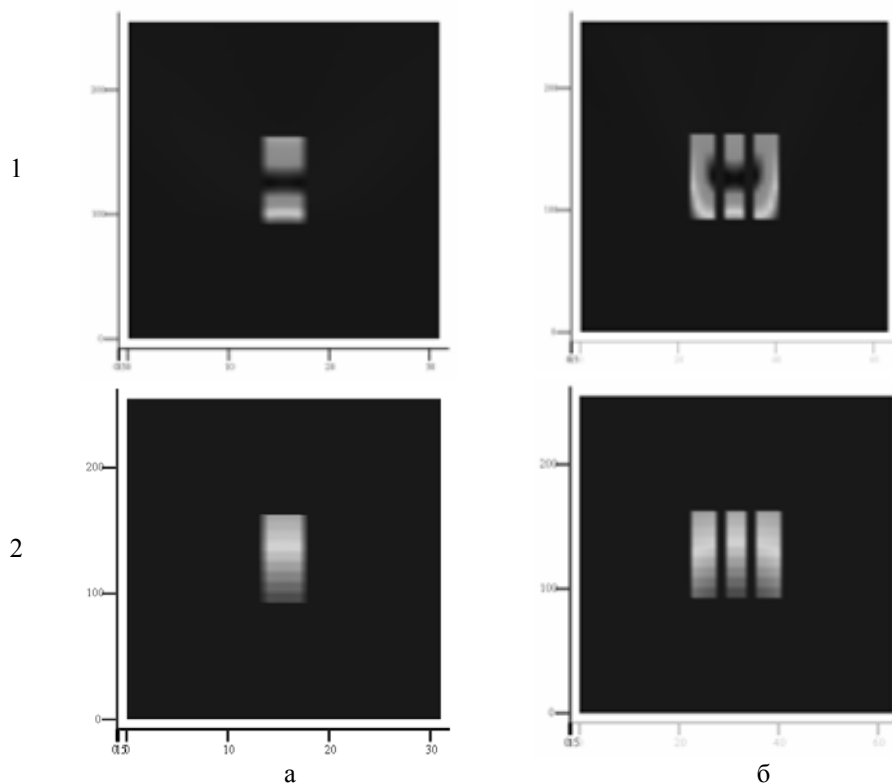


Рисунок 2.3 – Инверсный гексагональный мультимер с радиусом 100 нм, образованный цилиндрическими порами в органическом стекле. Длина цилиндрических пор 1500 нм, диаметр 100 нм. Верхняя панель – длина волны 300 нм, нижняя – 600 нм

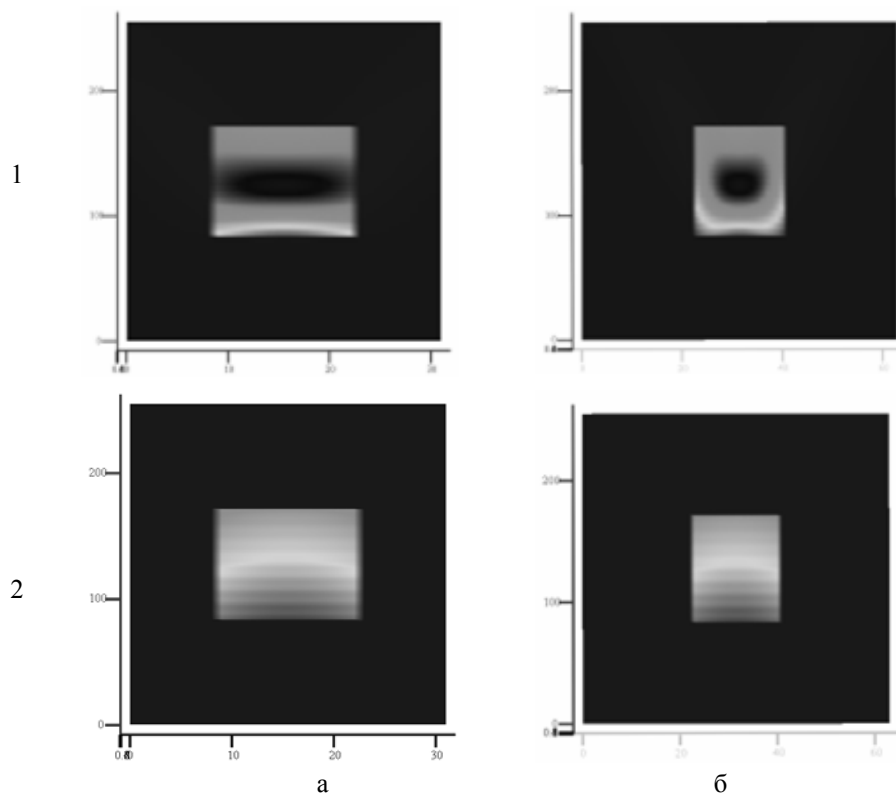


Рисунок 2.4 – Инверсный гексагональный мультимер с радиусом 140 нм, образованный цилиндрическими порами в органическом стекле. Длина цилиндрических пор 1500 нм, диаметр 100 нм. Верхняя панель – длина волны 300 нм, нижняя – 600 нм

В зависимости от геометрических и диэлектрических свойств элементарных излучателей может наблюдаться как увеличение, так и уменьшение степени анизотропии ДН мультимера по сравнению с ДН отдельного цилиндра. Интерференционное усиление или гашение излучения в отдельных направлениях может приводить к изменению интенсивности определенных угловых лепестков ДН, определяемых параметрами отдельных цилиндров, их угловому смещению и даже появлению дополнительных лепестков в ДН мультимера.

Например, в случае, рассмотренном на рисунке 2.5, объединение цилиндров в мультимер приводит к значительному усилению интенсивности рассеяния как в направлении вперед (примерно на порядок), так и в направлении, обратном направлению распространения падающего излучения (примерно на два порядка). Наблюдается также угловое смещение боковых лепестков в диаграмме направленности, особенно существенное в области углов рассеяния $80\text{--}130^\circ$. Это можно объяснить тем, что значительные электродинамические взаимодействия между цилиндрами при их плотной упаковке приводят к тому, что мультимер можно рассматривать как единый эффективный рассеиватель с более низким фактором асимметрии, чем образующие его отдельные цилиндры, что и приводит к увеличению степени диффузности ДН мультимера.

Вместе с тем, уменьшение расстояний между цилиндрами из оргстекла в мультимере ($R = 140$ нм и $R = 100$ нм) проявляется, главным образом, лишь в незначительном уменьшении степени вытянутости ДН и изменении интенсивности рассеяния в боковых лепестках для углов рассеяния $100\text{--}130^\circ$. В области передней полушеры изменение поперечных размеров рассматриваемого мультимера практически не влияет на характеристики его диаграммы направленности.

При переходе от прямых к инверсным системам, как показывает сравнение данных на рисунках 2.5 и 2.6, вытянутость диаграммы направленности отдельного цилиндра увеличивается. Рассеяние в области малых углов возрастает, первый минимум рассеяния на ДН смещается в область меньших углов (от 60° к 30°). Можно предположить, что это приводит к ослаблению переоблучения цилиндрами внутри мультимера. Это предположение подтверждается и наличием характерных холодных областей в картинах распределения внутреннего поля для инверсных мультимеров. В результате более заметным становится угловое смещение боковых лепестков при объединении цилиндров в мультимер, которое определяется интерференционным усилением или гашением излучения, рассеянного отдельными цилиндрами. В целом трансформация ДН инверсного мультимера определяется как понижением его фактора асимметрии по сравнению с цилиндром, так и возрастанием значения дифракционного параметра, определяемого характерными поперечными размерами объекта. С уменьшением длины волны падающего излучения эти особенности ДН для инверсного случая проявляются все более отчетливо (рисунок 2.7).

Следует отметить, что в силу зависимости характеристик рассеяния от относительных размерных параметров соответствующее масштабирование позволяет распространить полученные результаты и на микроволновую область. Например, приведенные на рисунках 2.2, 2.5 данные одинаково справедливы как для длины волны оптического диапазона 600 нм при размерах цилиндра $l=1500$ нм, $d=100$ нм и радиусах окружности мультимеров 100 нм и 140 нм, так и для длины волны 6 см при размерах цилиндра $l=15$ см, $d=1$ см и радиусах окружности мультимеров 1 см и 1.4 см.

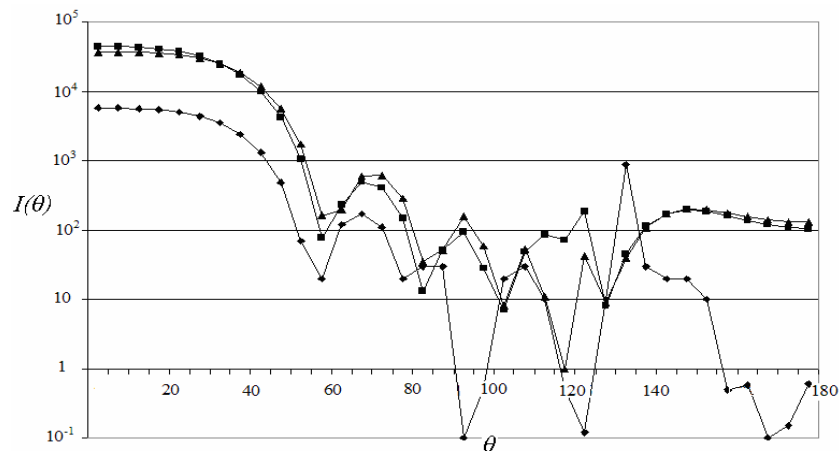


Рисунок 2.5 – Диаграммы направленности для отдельного цилиндра и мультимеров с радиусами 100 нм и 140 нм. Длина волны падающего излучения 600 нм, длина каждого цилиндра из органического стекла 1500 нм, диаметр – 100 нм ((1) — Цилиндр из органического стекла; (2) — Мультимер из органического стекла, $R=140$ нм; (3) — Мультимер из органического стекла, $R=100$ нм)

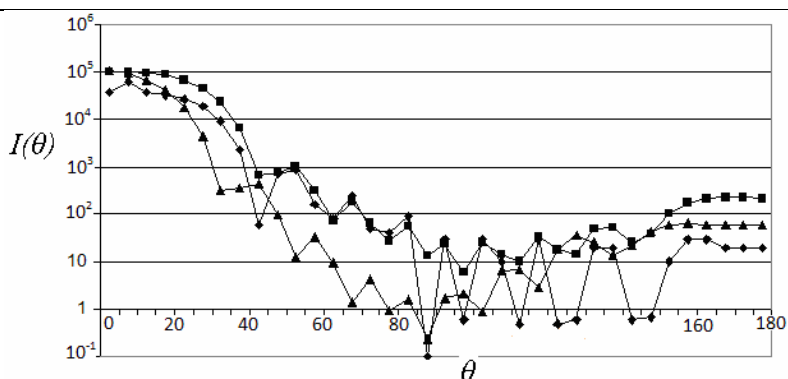


Рисунок 2.6 – Диаграммы направленности для отдельной цилиндрической воздушной поры в оргстекле и инверсных мультимеров с радиусами 100 нм и 140 нм. Длина волны падающего излучения 600 нм, длина каждого цилиндра 1500 нм, диаметр – 100 нм ((1) — Цилиндрическая воздушная пора в оргстекле, $d=100$ нм, $l=1500$ нм; (2) — Инверсный мультимер, $R=140$ нм; (3) — Инверсный мультимер, $R=100$ нм)

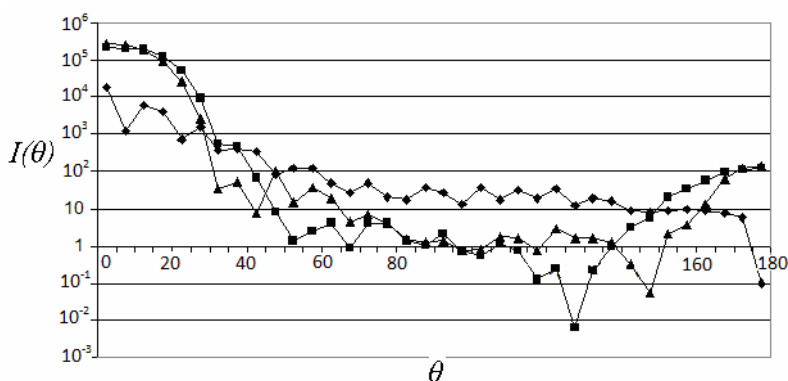


Рисунок 2.7 – Диаграммы направленности для отдельной цилиндрической воздушной поры в оргстекле и инверсных мультимеров с радиусами 100 нм и 140 нм. Длина волны падающего излучения 300 нм, длина каждого цилиндра 1500 нм, диаметр – 100 нм ((1) — Цилиндрическая воздушная пора в оргстекле; (2) — Инверсный мультимер, $R=140$ нм; (3) — Инверсный мультимер, $R=100$ нм)

Заключение

Проведенные исследования показывают, что как картины распределения внутреннего поля, так и угловое распределение излучения, рассеянного системой пространственно упорядоченных цилиндров, могут существенно отличаться от соответствующих характеристик изолированных цилиндров. Трансформация формы диаграммы направленности мультимера определяется совокупным действием эффектов электродинамического взаимодействия и пространственного ограничения, степень проявления которых зависит как от микрофизических характеристик отдельных цилиндров, так и от геометрических характеристик мультимера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гапоненко, С.В. Оптика наноструктур / С.В. Гапоненко. – С.-Пб. : Недра, 2005. – 326 с.
2. Selective Scattering of Light by Column Nanosize Dielectric Structures / A.N. Ponyavina [et al.] // Physics, Chemistry and Application of Nanosttructures. – Singapore, World Scientific. – 1999. – P. 100–102.

3. Enhanced Luminescence of Europium in Porous Anodic Alumina Films / N.V. Gaponenko [et al.] // Solid State Phen. – 2004. – № 97–98. – P. 251–258.

4. Васильев, Е.Н. Возбуждение тел вращения / Е.Н.Васильев. – М. : Радио и связь, 1987. – 270 с.

5. Sokolis, C.M. Photonic Crystals and Light Localization in the 21st Century 2001 Springer / M. Sokolis. – 2001. – 605 p.

6. Mishchenko, M.I. Scattering, Absorption and Emission of Light by Small Particles / M.I. Mishchenko, L.D. Travis, A.A. Lacis // Cambridge, University press, 2002. – 445 p.

7. Hage, J. I. Scattering from arbitrarily shaped particles: theory and experiment / J.I. Hage, J.M. Greenberg, R.T. Wang // Applied Optics, 1991. – Vol. 30. – P. 1141–1152.

8. Vereshchagin, V.G. Application of the Method of Integral Equations to the Calculation of the Coherent Transmittance of a Monolayer of Cylindrical Particles / V.G. Vereshchagin, R.A. Dynich, A.N. Ponyavina // Opt. Spectrosc, 1999. – Vol. 87. – P. 116–121.

Поступила в редакцию 30.04.12.

УДК 535.51

ПОЛУГРУППЫ МЮЛЛЕРА РАНГА 1 И 2

Е.М. Овсиюк¹, О.В. Веко¹, В.М. Редьков²

¹Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина, Мозырь

²Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск

MUELLER SEMIGROUPS OF THE RANK 1 AND 2

E.M. Ovsyuk¹, O.V. Veko¹, V.M. Red'kov²

¹I.P. Shamyakin Mosyr State Pedagogical University, Mozyr

²B.I. Stepanov Institute of Physics National Academy of Sciences of Belarus, Minsk

С использованием линейного разложения вещественных 4×4 -матриц по дираковскому базису построены явно некоторые простые множества вырожденных матриц Мюллера рангов 1 и 2, обладающие структурой полугрупп; исследованы их свойства, важные в поляризационной оптике.

Ключевые слова: матрицы Мюллера, поляризационная оптика, полугруппа.

Several simple sets of degenerated Mueller matrices of the rank 1 and 2 having the structure of semigroups are constructed explicitly with the use of a linear expansion of real 4×4 -matrices in terms of Dirac matrices. The properties important in polarization optics are considered.

Keywords: Mueller matrix, polarization optics, semigroup.

Введение

В поляризационной оптике большое значение имеют матрицы Мюллера [1]. Из них выделяют важное подмножество матриц Мюллера, образующих групповую структуру, изоморфную группе Лоренца [2]–[8]. В отдельный класс выделяют вырожденные матрицы Мюллера, определитель которых равен нулю. Для описания таких матриц невозможно использовать теоретико-групповые методы. Основная цель настоящей работы – сформулировать общий подход в исследовании вырожденных матриц Мюллера и детально рассмотреть описание некоторых множеств таких матриц.

1 О параметризации линейной группы $GL(4, C)$

Так как матрицы Мюллера – это вещественные 4×4 -матрицы, действующие на вещественный 4-мерный вектор Стокса, то для исследования всех возможных матриц Мюллера можно воспользоваться параметризацией 4-мерных матриц, получаемой на основе матриц Дирака [9]–[12]. При этом произвольная 4-мерная матрица с комплексными элементами представима в виде (будем использовать спинорный базис):

$$\begin{vmatrix} k_0 + \mathbf{k} \vec{\sigma} & n_0 + \mathbf{n} \vec{\sigma} \\ l_0 + \mathbf{l} \vec{\sigma} & m_0 + \mathbf{m} \vec{\sigma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K & N \\ L & M \end{vmatrix}. \quad (1.1)$$

Параметры матрицы-произведения представим следующими формулами:

$$\begin{aligned} k''_0 &= k_0 k_0 + \mathbf{k}' \mathbf{k} + n'_0 l_0 + \mathbf{n}' \mathbf{l}, \\ m''_0 &= m_0 m_0 + \mathbf{m}' \mathbf{m} + l'_0 n_0 + \mathbf{l}' \mathbf{n}, \end{aligned}$$

$$n''_0 = k_0 n_0 + \mathbf{k}' \mathbf{n} + n'_0 m_0 + \mathbf{n}' \mathbf{m},$$

$$l''_0 = l_0 k_0 + \mathbf{l}' \mathbf{k} + m'_0 l_0 + \mathbf{m}' \mathbf{l},$$

$$\mathbf{k}'' = k'_0 \mathbf{k} + \mathbf{k}' k_0 + i \mathbf{k}' \times \mathbf{k} + n_0 \mathbf{l} + \mathbf{n}' l_0 + i \mathbf{n}' \times \mathbf{l},$$

$$\mathbf{m}'' = m'_0 \mathbf{m} + \mathbf{m}' m_0 + i \mathbf{m}' \times \mathbf{m} + l_0 \mathbf{n} + \mathbf{l}' n_0 + i \mathbf{l}' \times \mathbf{n},$$

$$\mathbf{n}'' = k'_0 \mathbf{n} + \mathbf{k}' n_0 + i \mathbf{k}' \times \mathbf{n} + n_0 \mathbf{m} + \mathbf{n}' m_0 + i \mathbf{n}' \times \mathbf{m},$$

$$\mathbf{l}'' = l'_0 \mathbf{l} + \mathbf{l}' l_0 + i \mathbf{l}' \times \mathbf{l} + m_0 \mathbf{l} + \mathbf{m}' l_0 + i \mathbf{m}' \times \mathbf{l}. \quad (1.2)$$

Для получения множества вещественных матриц достаточно потребовать, чтобы компоненты параметров (k, m, l, n) , отмеченные индексом 2, были мнимыми, а все остальные компоненты – вещественными. Вырожденными матрицами Мюллера называют матрицы Мюллера с равным нулю определителем. Множества таких матриц обладают структурой полугрупп (элементы множества можно перемножать, но обратные элементы не существуют). Из числа вырожденных матриц Мюллера можно выделить подклассы, основываясь на понятии ранга матрицы: класс матриц с рангом 3, с рангом 2, с рангом 1. Далее представим описание некоторых классов вырожденных матриц Мюллера с рангом 1 и 2.

2 Общий анализ возможных подмножеств в $GL(4, C)$

Предположим, что некоторые интересные подгруппы (или подмножества) матриц можно получить, накладывая на параметры матриц дополнительные условия линейной зависимости

$$\begin{aligned} A \mathbf{k} + B \mathbf{m} + C \mathbf{n} + D \mathbf{l} &= 0, \\ \alpha k_0 + \beta m_0 + s n_0 + t l_0 &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В данной работе проанализируем матрицы с одним независимым вектором – вариант $\mathbf{I}(\mathbf{k})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= A \mathbf{k}, & n_0 &= \alpha k_0, \\ \mathbf{m} &= B \mathbf{k}, & m_0 &= \beta k_0, \\ \mathbf{l} &= D \mathbf{k}, & l_0 &= t k_0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Можно рассматривать и варианты, основанные на других векторах $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{l}$.

3 Один независимый вектор

При выполнении (2.2) формулы умножения параметров (1.2) принимают вид:

$$\begin{aligned} k''_0 &= k_0 k_0 + \mathbf{k}' \mathbf{k} + \alpha t k'_0 k_0 + AD \mathbf{k}' \mathbf{k}, \\ m''_0 &= \beta^2 k_0 k_0 + B^2 \mathbf{k}' \mathbf{k} + t \alpha k'_0 k_0 + DA \mathbf{k}' \mathbf{k}, \\ n''_0 &= \alpha k_0 k_0 + A \mathbf{k}' \mathbf{k} + \alpha \beta k'_0 k_0 + AB \mathbf{k}' \mathbf{k}, \\ l''_0 &= t k_0 k_0 + D \mathbf{k}' \mathbf{k} + \beta t k'_0 k_0 + BD \mathbf{k}' \mathbf{k}, \\ \mathbf{k}'' &= k'_0 \mathbf{k} + \mathbf{k}' k_0 + i \mathbf{k}' \times \mathbf{k} + \\ &+ \alpha D k_0 \mathbf{k} + At \mathbf{k}' k_0 + iAD \mathbf{k}' \times \mathbf{k}, \\ \mathbf{m}'' &= \beta B k'_0 \mathbf{k} + B \beta \mathbf{k}' k_0 + iB^2 \mathbf{k}' \times \mathbf{k} + \\ &+ tA k_0 \mathbf{k} + D \alpha \mathbf{k}' k_0 + iDA \mathbf{k}' \times \mathbf{k}, \\ \mathbf{n}'' &= A k'_0 \mathbf{k} + \alpha \mathbf{k}' k_0 + iA \mathbf{k}' \times \mathbf{k} + \\ &+ \alpha B k_0 \mathbf{k} + A \beta \mathbf{k}' k_0 + iAB \mathbf{k}' \times \mathbf{k}, \\ \mathbf{l}'' &= t k'_0 \mathbf{k} + D \mathbf{k}' k_0 + iD \mathbf{k}' \times \mathbf{k} + \\ &+ \beta D k_0 \mathbf{k} + Bt \mathbf{k}' k_0 + iBD \mathbf{k}' \times \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

При выполнении соотношений (2.2) для параметров, отмеченных двумя штрихами, из формул (3.1) следует система уравнений, связывающих коэффициенты, содержащиеся в (2.2):

$$\begin{aligned} \alpha(1 + \beta) &= \alpha(1 + \alpha t), & A(1 + B) &= \alpha(1 + AD), \\ (\beta^2 + t\alpha) &= \beta(1 + \alpha t), & (B^2 + DA) &= \beta(1 + AD), \\ t(1 + \beta) &= t(1 + \alpha t), & D(1 + B) &= t(1 + AD), \\ (A + \alpha B) &= A(1 + \alpha D), & (\alpha + A\beta) &= A(1 + At), \\ A(1 + B) &= A(1 + AD), & (\beta B + tA) &= B(1 + \alpha D), \\ (B\beta + D\alpha) &= B(1 + At), & (B^2 + AD) &= B(1 + AD), \\ (t + \beta D) &= D(1 + \alpha D), & (D + Bt) &= D(1 + At), \\ D(1 + B) &= D(1 + AD). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Каждое решение этой системы соответствует или некоторой подгруппе, или некоторой подполугруппе (множеству матриц с равными нулю определителями, замкнутое относительно операции умножения). Наша задача состоит в нахождении всех решений этой системы.

Прежде всего, отметим, что система уравнений (3.2) имеет тривиальное решение при условии трех равных нулю блоков (будем обозначать решения уравнений как $(K-1)$ и т. п.), и решение $(K-1)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} A = \alpha = 0, & \quad B = \beta = 0, \quad D = t = 0, \\ G &= \begin{vmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \end{aligned} \quad (3.3)$$

все 4-мерные матрицы в (3.3) вырождены: их определитель равен нулю. Ранг матриц равен 2

или 1 (в последнем случае должно выполняться условие $\det K = 0$).

Исследуем решения, получаемые при условии равенства нулю двух блоков; при этом есть три возможности.

Сначала предположим, что $A = \alpha = 0, \quad D = t = 0;$

при этом из системы (3.2) следует, что

$$\beta^2 = \beta, \quad B^2 = B, \quad \beta B = B, \quad B^2 = B;$$

и (в дополнение к уже рассмотренному тривиальному решению (3.3), которое имеет место при $B = \beta = 0$) получаем новое:

$$\begin{aligned} (K-2), \quad A = \alpha = 0, \quad D = t = 0, \quad B = \beta = +1, \\ G = \begin{vmatrix} k_0 + \mathbf{k}\bar{\sigma} & 0 \\ 0 & k_0 + \mathbf{k}\bar{\sigma} \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

соответствующее множеству невырожденных матриц со структурой подгруппы.

Теперь предположим, что $A = \alpha = 0, \quad B = \beta = 0;$

тогда из системы (3.2) следуют соотношения:

$$\begin{aligned} 0 = 0, \quad A = 0, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0, \quad t = t, \quad D = t, \\ 0 = 0, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0, \\ t = D, \quad D = D, \quad D = D, \end{aligned}$$

с учетом которых получаем решение:

$$\begin{aligned} (K-3), \quad A = \alpha = 0, \quad B = \beta = 0, \quad D = t, \\ G = \begin{vmatrix} K & 0 \\ DK & 0 \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$G'G = \begin{vmatrix} K' & 0 \\ DK' & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K & 0 \\ DK & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K'K & 0 \\ DK'K & 0 \end{vmatrix},$$

соответствующее множеству вырожденных матриц ранга 2 со структурой полугруппы.

Допустим, что

$$B = \beta = 0, \quad D = t = 0;$$

при этом из системы (3.2) получим

$$\begin{aligned} \alpha = \alpha, \quad A = \alpha, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0, \\ A = A, \quad \alpha = A, \quad A = A, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0, \\ 0 = 0, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0 \end{aligned}$$

и найдем решение

$$\begin{aligned} (K-4), \quad A = \alpha, \quad B = \beta = 0, \quad D = t = 0, \\ G = \begin{vmatrix} K & AK \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \\ G'G = \begin{vmatrix} K' & AK' \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K & AK \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K'K & AK'K \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

которым определяется множество вырожденных матриц ранга 2 со структурой полугруппы.

Исследуем решения при наличии в матрице одного нулевого блока.

При $A = \alpha = 0$ из системы (3.2) получим

$$\begin{aligned} 0 = 0, \quad 0 = 0, \quad \beta^2 = \beta, \quad B^2 = B, \\ t(1 + \beta) = t, \quad D(1 + B) = t, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0, \\ \beta B = B, \quad B\beta = B, \quad B^2 = B, \end{aligned}$$

$$(t + \beta D) = D, \quad (D + Bt) = D, \quad D(1 + B) = D. \quad (3.7)$$

Уравнения имеют только два (уже найденные) решения:

$$(K-3), \quad A = \alpha = 0, \quad B = \beta = 0, \quad t = D,$$

$$G = \begin{vmatrix} K & 0 \\ DK & 0 \end{vmatrix}$$

и $(K-2)$, $A = \alpha = 0$, $B = \beta = +1$, $D = t = 0$,

$$G = \begin{vmatrix} k_0 + \mathbf{k}\bar{\sigma} & 0 \\ 0 & k_0 + \mathbf{k}\bar{\sigma} \end{vmatrix}.$$

Исследуем второй случай при одном нулевом блоке $D = t = 0$ из системы (3.2) найдем:

$$\alpha\beta = 0, \quad A(1+B) = \alpha, \quad \beta^2 = \beta, \quad B^2 = \beta,$$

$$0 = 0, \quad 0 = 0,$$

$$(A + \alpha B) = A, \quad (\alpha + A\beta) = A, \quad AB = 0,$$

$$\beta B = B, \quad B\beta = B, \quad B^2 = B,$$

$$0 = 0, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0. \quad (3.8)$$

Анализируя систему (3.8), выявляем две (уже известные) возможности:

$$(K-2), \quad A = \alpha = 0, \quad B = +1, \quad \beta = +1, \quad D = t = 0,$$

$$G = \begin{vmatrix} k_0 + \mathbf{k}\bar{\sigma} & 0 \\ 0 & k_0 + \mathbf{k}\bar{\sigma} \end{vmatrix}.$$

$$(K-1), \quad A = \alpha, \quad B = \beta = 0, \quad D = t = 0,$$

$$G = \begin{vmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Рассматривая третий случай при одном нулевом блоке: $B = \beta = 0$, из системы (3.2) получим

$$0 = \alpha^2 t, \quad A = \alpha(1 + AD), \quad t\alpha = 0, \quad DA = 0,$$

$$0 = \alpha t^2, \quad D = t(1 + AD),$$

$$0 = A\alpha D, \quad \alpha = A(1 + At), \quad 0 = A^2 D,$$

$$tA = 0, \quad D\alpha = 0, \quad AD = 0,$$

$$t = D(1 + \alpha D), \quad 0 = DA t, \quad 0 = AD^2. \quad (3.9)$$

Этой системе соотношений удовлетворяют только два (уже описанные выше) решения:

$$(K-4), \quad A = \alpha, \quad B = \beta = 0, \quad D = t = 0,$$

$$G = \begin{vmatrix} K & AK \\ 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$(K-3), \quad A = \alpha = 0, \quad B = \beta = 0, \quad D = t,$$

$$G = \begin{vmatrix} K & 0 \\ DK & 0 \end{vmatrix}.$$

Теперь рассмотрим ситуацию, когда нулевых блоков нет:

$$A, \alpha \neq 0, \quad B, \beta \neq 0, \quad D, t \neq 0;$$

при этом из системы уравнений (3.2) следуют соотношения

$$\beta = +\alpha t, \quad A(1+B) = \alpha(1+AD),$$

$$(\beta^2 + t\alpha) = \beta(1+\alpha t), \quad (B^2 + DA) = \beta(1+AD),$$

$$\beta = +\alpha t, \quad D(1+B) = t(1+AD),$$

$$B = AD, \quad (\alpha + A\beta) = A(1+At), \quad B = AD,$$

$$(\beta B + tA) = B(1+\alpha D), \quad (B\beta + D\alpha) = B(1+At),$$

$$(B^2 + AD) = B(1+AD),$$

$$(t + \beta D) = D(1+\alpha D), \quad B = AD, \quad B = AD.$$

Исключим из уравнений B и β :

$$B = AD, \quad \beta = \alpha t;$$

и запишем оставшиеся независимые уравнения:

$$(A - \alpha)(1 + AD) = 0, \quad (AD - \alpha t)(1 + AD) = 0,$$

$$(D - t)(1 + AD) = 0, \quad (A - \alpha)(1 + At) = 0,$$

$$(D - t)(1 + \alpha D) = 0. \quad (3.10)$$

Рассмотрим сначала частный случай, когда $A = \alpha$ и система (3.10) примет вид

$$A = \alpha, \quad (D - t)(1 + AD) = 0.$$

Решая эту систему, получим два новых решения: решение

$$(K-5), \quad A = \alpha, \quad B = \beta = AD, \quad D = t;$$

$$G = \begin{vmatrix} K & AK \\ DK & ADK \end{vmatrix}, \quad (3.11)$$

соответствующее множеству вырожденных матриц ранга 2; легко убедиться, что для элементов этих матриц закон умножения выполняется:

$$\begin{vmatrix} K' & AK' \\ DK' & ADK' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K & AK \\ DK & ADK \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (K'K + ADK'K) & A(K'K + ADK'K) \\ D(K'K + ADK'K) & AD(K'K + ADK'K) \end{vmatrix}.$$

Отметим, что если выбрать $D = -A^{-1}$, то результат умножения двух матриц всегда будет равен нулю.

Решение $(K-5)$ имеет место при

$$A = \alpha, \quad B = \beta = -1, \quad D = t;$$

$$G = \begin{vmatrix} K & AK \\ -A^{-1}K & -K \end{vmatrix}, \quad G'G = 0; \quad (3.12)$$

$(K-6)$, при

$$A = \alpha, \quad B = -1, \quad \beta = -At, \quad D = -\frac{1}{A},$$

$$G = \begin{vmatrix} k_0 + \bar{k}\bar{\sigma} & Ak_0 + A\bar{k}\bar{\sigma} \\ tk_0 - A^{-1}\bar{k}\bar{\sigma} & Atk_0 - \bar{k}\bar{\sigma} \end{vmatrix}, \quad (3.13)$$

это также вырожденные матрицы ранга 2.

Можно выделить два более простых частных случая:

$$\text{при } t = A, \quad G = \begin{vmatrix} k_0 + \bar{k}\bar{\sigma} & Ak_0 + A\bar{k}\bar{\sigma} \\ Ak_0 - A^{-1}\bar{k}\bar{\sigma} & A^2k_0 - \bar{k}\bar{\sigma} \end{vmatrix};$$

$$\text{при } t = A^{-1}, \quad G = \begin{vmatrix} k_0 + \bar{k}\bar{\sigma} & Ak_0 + A\bar{k}\bar{\sigma} \\ A^{-1}k_0 - A^{-1}\bar{k}\bar{\sigma} & k_0 - \bar{k}\bar{\sigma} \end{vmatrix}.$$

Проверим выполнимость закона умножения – условия, при котором матрица имеет структуру полугруппы во множестве (3.13):

$$G'G \begin{vmatrix} k_0 + \bar{k}\bar{\sigma} & Ak_0 + A\bar{k}\bar{\sigma} \\ tk_0 - A^{-1}\bar{k}\bar{\sigma} & Atk_0 - \bar{k}\bar{\sigma} \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} k_0 + \bar{k}\bar{\sigma} & Ak_0 + A\bar{k}\bar{\sigma} \\ tk_0 - A^{-1}\bar{k}\bar{\sigma} & Atk_0 - \bar{k}\bar{\sigma} \end{vmatrix} = G''.$$

Результат умножения запишем по блокам (обозначим блоки парами цифр (ij)):

$$\begin{aligned} (11) &= (1 + At) k'_0 k_0 + (1 + At) \bar{k}'_0 k_0 \bar{\sigma}, \\ (12) &= A \left[(1 + At) k'_0 k_0 + (1 + At) \bar{k}'_0 k_0 \bar{\sigma} \right], \\ (21) &= t (1 + At) k'_0 k_0 - A^{-1} (1 + At) \bar{k}'_0 k_0 \bar{\sigma}, \\ (22) &= At (1 + At) k'_0 k_0 - (1 + At) \bar{k}'_0 k_0 \bar{\sigma} \end{aligned}$$

или

$$k_0 = (1 + At) k_0 k'_0, \quad \bar{k}'' = (1 + At) k_0 \bar{k}'_0;$$

другими словами, структура матрицы $G'' = G'G$ в большей степени подобна структуре матрицы G .

Теперь определим решения системы (3.10) при

$$A \neq \alpha, \quad 1 + AD = 0;$$

получим единственное решение:

$$\begin{aligned} (K-7), \quad B = -1, \quad \beta = -\frac{\alpha}{A}, \quad D = t = -\frac{1}{A}, \\ G = \begin{vmatrix} k_0 + \bar{k}\bar{\sigma} & \alpha k_0 + A\bar{k}\bar{\sigma} \\ -A^{-1}(k_0 + \bar{k}\bar{\sigma}) & -A^{-1}\alpha k_0 - \bar{k}\bar{\sigma} \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

соответствующее множеству вырожденных матриц ранга 2. Перемножим две матрицы вида (3.14) (записывая результат умножения по блокам):

$$\begin{aligned} (11) &= \left(1 - \frac{\alpha}{A}\right) k_0 k_0 + \left(1 - \frac{\alpha}{A}\right) k'_0 \bar{k} \bar{\sigma}, \\ (12) &= \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{A}\right) k_0 k_0 + A \left(1 - \frac{\alpha}{A}\right) k'_0 \bar{k} \bar{\sigma}, \\ (21) &= -A^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{A}\right) k_0 k_0 - A^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{A}\right) k'_0 \bar{k} \bar{\sigma}, \\ (22) &= -A^{-1} \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{A}\right) k_0 k_0 - \left(1 - \frac{\alpha}{A}\right) k'_0 \bar{k} \bar{\sigma}. \end{aligned}$$

Следовательно, закон умножения (в полугруппе) имеет вид:

$$\begin{aligned} G'' = G'G, \\ k''_0 = \left(1 - \frac{\alpha}{A}\right) k_0 k_0, \quad \bar{k}'' = \left(1 - \frac{\alpha}{A}\right) k'_0 \bar{k}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Таким образом, анализ варианта **I(k)** завершен полностью: найдено 7 типов решений; одно из них определяет структуру подгрупп, остальные 6 соответствуют разным по структуре полугруппам.

4 О структуре полугруппы матриц Мюллера с рангом 1

Рассмотрим детально частный случай вырожденных матриц Мюллера ранга 1, воспользовавшись выражением для вырожденной вещественной матрицы Мюллера ранга 2 (производим при этом замену $k_2 \Rightarrow ik_2$)

$$M = \begin{vmatrix} k_0 + k_3 & k_1 + k_2 & 0 & 0 \\ k_1 - k_2 & k_0 - k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (4.1)$$

Если определитель 2-мерной матрицы равен нулю, то получаем вырожденную матрицу ранга 1, для которой выполняются соотношения

$$k_1 - k_2 = \mu(k_0 + k_3), \quad k_0 - k_3 = \mu(k_1 + k_2), \quad (4.2)$$

отсюда следуют равенства

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1 + \mu^2}{2\mu} k_0 - \frac{1 - \mu^2}{2\mu} k_3, \\ k_2 &= \frac{1 - \mu^2}{2\mu} k_0 - \frac{1 + \mu^2}{2\mu} k_3. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Введем обозначения

$$k_0 + k_3 = A, \quad k_0 - k_3 = B \quad (4.4)$$

и преобразуем матрицу Мюллера к виду (следим за блоком 2×2):

$$M = \begin{vmatrix} k_0 + k_3 & \mu^{-1}(k_0 - k_3) \\ \mu(k_0 + k_3) & k_0 - k_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & \mu^{-1}B \\ \mu A & B \end{vmatrix}. \quad (4.5)$$

Результат действия на 4-вектор Стокса матрицы Мюллера задается выражениями:

$$\begin{aligned} S'_0 &= AS_0 + \frac{B}{\mu} S_1, \quad S'_1 = \mu AS_0 + BS_1, \\ (S'_0)^2 - (S'_1)^2 &= A^2(1 - \mu^2) S_0^2 + \\ &+ 2AB \left(\frac{1}{\mu} - \mu \right) S_0 S_1 + B^2 \left(\frac{1}{\mu^2} - 1 \right) S_1^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Заметим, что при этом выполняется равенство (свойство частично поляризованного света)

$$\begin{aligned} (S'_0)^2 - (S'_1)^2 &= \\ &= \left[A\sqrt{1 - \mu^2} S_0 + B \frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{\mu} S_1 \right]^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Очевидно, что необходимо ввести ограничение

$$\mu^2 \leq +1. \quad (4.8)$$

Значения $\mu = \pm 1$ соответствуют полной поляризации пучка; при этом $(S'_0)^2 - (S'_1)^2 = 0$. Отметим, что из общих формул следуют, в частности, матрицы Мюллера для однородных идеальных линейных поляризаторов, записанные в [1, с. 318]:

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad \mu = \pm 1, \quad M = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & \pm 1 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (4.9)$$

Найдем вид закона умножения матриц вида (4.5). Запишем

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A' & \mu'^{-1}B' \\ \mu'A' & B' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & \mu^{-1}B \\ \mu A & B \end{vmatrix} &= \\ = \begin{vmatrix} (A'A + \mu'^{-1}B'\mu A) & (A'\mu^{-1}B + \mu'^{-1}B'B) \\ (\mu'A'A + B'\mu A) & (\mu'A'\mu^{-1}B + B'B) \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (4.10)$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} A'' &= A'A + \mu'^{-1} \mu B'A, \\ B'' &= \mu' \mu'^{-1} A'B + B'B \end{aligned} \quad (4.11)$$

и

$$\begin{aligned} \mu'' &= \frac{\mu' A'A + B' \mu A}{A'A + \mu'^{-1} \mu B'A} = \\ &= \frac{\mu'^2 A'A + \mu' \mu B'A}{\mu' A'A + \mu B'A} = \mu', \\ \mu''^{-1} &= \frac{A' \mu'^{-1} B + \mu'^{-1} B'B}{\mu' \mu'^{-1} A'B + B'B} = \\ &= \frac{\mu' A'A + \mu B'A}{\mu'^2 A'A + \mu' \mu B'A} = \frac{1}{\mu'}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Есть еще одно требование, которому должны удовлетворять матрицы Мюллера: знак компонента 4-вектора Стокса, отмеченного индексом ноль, не может быть отрицательным. В соответствии с (4.6) имеем:

$$S'_0 = AS_0 + \frac{B}{\mu} S_1 \geq 0, \quad S'_1 = \mu AS_0 + BS_1.$$

Очевидно, что результат преобразования при этом существенно зависит от свойств начального пучка. Например, если у начального пучка $S_1 > 0$ и выбрать положительными все три параметра:

$$A > 0, \quad B > 0, \quad \mu > 0, \quad (4.13)$$

то в результате последовательного комбинирования таких элементов мы не будем выходить за пределы множества мюллеровских матриц (4.13), при этом всегда $S'_1 \geq 0$. Если же у начального пучка $S_1 < 0$, то имеем два положительных параметра и один отрицательный:

$$A > 0, \quad B > 0, \quad \mu < 0, \quad (4.14)$$

и в результате последовательного комбинирования таких элементов мы не будем выходить за пределы множества мюллеровских матриц (4.14); при этом всегда $S'_1 \leq 0$. Таким образом, возможны два класса оптических элементов с плавно меняющимися характеристиками A, B, μ . Матрицы Мюллера идеальных поляризаторов (4.9) соответствуют этим двум классам.

5 О структуре подгруппы матриц Мюллера с рангом 2

Запишем матрицу

$$M = \begin{pmatrix} k_0 + k_3 & k_1 + k_2 & 0 & 0 \\ k_1 - k_2 & k_0 - k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

$$k_0^2 - k_1^2 + k_2^2 - k_3^2 \neq 0.$$

Найдем результат действия этой матрицы на компоненты 4-вектора Стокса:

$$\begin{aligned} S'_0 &= (k_0 + k_3)S_0 + (k_1 + k_2)S_1, \\ S'_1 &= (k_1 - k_2)S_0 + (k_0 - k_3)S_1, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$S'^2_0 - S'^2_1 =$$

$$= (S^2_0 - S^2_1)(k_0^2 + k_3^2 - k_1^2 - k_2^2) + 2S_0 S_1 (k_1 k_2 + k_0 k_3) + 4(S^2_0 + S^2_1)(k_0 k_2 + k_1 k_3). \quad (5.3)$$

С использованием обозначений

$$A = k_0^2 + k_3^2 - k_1^2 - k_2^2,$$

$$B = 4(k_0 k_2 + k_1 k_3),$$

$$C = (k_1 k_2 + k_0 k_3)$$

предыдущему равенству придадим вид:

$$\begin{aligned} S'^2_0 - S'^2_1 &= \\ &= (A + B)S^2_0 + 2CS_0 S_1 + (B - A)S^2_1. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Анализируя полученное соотношение, убеждаемся, что не все матрицы этого множества могут быть использованы в качестве мюллеровских.

Попытаемся найти решения на другой основе. В группе преобразований (5.2) есть три нетривиальные подгруппы, и довольно легко решить вопрос об их пригодности для использования в качестве (2-мерных) мюллеровских матриц. Для первой подгруппы матриц выполняются соотношения

$$\begin{aligned} (k_2 = 0, k_3 = 0) \quad k_0 &= D \operatorname{ch} \beta, \quad k_1 = D \operatorname{sh} \beta, \\ S'_0 &= D \operatorname{ch} \beta S_0 + D \operatorname{sh} \beta S_1, \\ S'_1 &= D \operatorname{sh} \beta S_0 + D \operatorname{ch} \beta S_1, \\ S'^2_0 - S'^2_1 &= D^2(S^2_0 - S^2_1). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Она вполне пригодна для описания 2-мерных мюллеровских матриц. Наиболее простой вариант подгруппы этого типа имеем при $D = +1$.

Для второй подгруппы матриц

$$\begin{aligned} (k_1 = 0, k_2 = 0) \quad k_0 &= D \operatorname{ch} \lambda, \quad k_3 = D \operatorname{sh} \lambda, \\ S'_0 &= D (\operatorname{ch} \lambda + \operatorname{sh} \lambda) S_0 = D e^{+\lambda} S_0, \\ S'_1 &= D (\operatorname{ch} \lambda - \operatorname{sh} \lambda) S_1 = D e^{-\lambda} S_1, \\ S'^2_0 - S'^2_1 &= D^2 (e^{+2\lambda} S^2_0 - e^{-2\lambda} S^2_1), \quad (S^2_0 \geq S^2_1). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Эти матрицы пригодны для использования в качестве мюллеровских, хотя имеют довольно необычные свойства. Так, если для простоты предположить, что $D^2 = +1$, то из (5.6) получим

$$\begin{aligned} S'_0 &= e^{+\lambda} S_0, \quad S'_1 = e^{-\lambda} S_1, \\ S'^2_0 - S'^2_1 &= e^{+2\lambda} S^2_0 - e^{-2\lambda} S^2_1, \quad (S^2_0 \geq S^2_1). \end{aligned} \quad (5.7)$$

При увеличении положительных значений λ интенсивность пучка монотонно растет, а степень поляризации монотонно стремится к нулю. При отрицательных значениях λ , но таких, что $e^{4\lambda} > S^2_1/S^2_0$, интенсивность света уменьшается с убыванием модуля показателя степени, а степень поляризации увеличивается, достигая максимума, когда $e^{4\lambda} = S^2_1/S^2_0$. Следовательно, матрицы такой структуры пригодны для задания матриц Мюллера, только если выполнены условия

$$-\ln \left(\frac{S^2_0}{S^2_1} \right) \leq \lambda < +\infty. \quad (5.8)$$

В общем случае ограничение (5.8) несовместимо с глобальной структурой этой подгруппы. Действительно, закон умножения абелев: $\lambda'' = \lambda' + \lambda$, и условие (5.8) будет нарушаться при умножении элементов этой группы (если параметры отрицательны и достаточно велики по модулю). Однако очевидно, что существует вполне интерпретируемая подгруппа при всех $\lambda \in [0, +\infty)$; вероятно, именно ее и следует рассматривать как представляющую интерес в поляризационной оптике.

Из общих соображений понятно, что всякое произведение двух матриц

$$M(\beta)M(\lambda) = \begin{vmatrix} \text{ch } \beta & \text{sh } \beta & e^{+\lambda} & 0 \\ \text{sh } \beta & \text{ch } \beta & 0 & e^{-\lambda} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{+\lambda} \text{ch } \beta & e^{-\lambda} \text{sh } \beta \\ e^{+\lambda} \text{sh } \beta & e^{-\lambda} \text{ch } \beta \end{vmatrix} \quad (5.9)$$

заведомо будет описывать вырожденную мюллеровскую матрицу ранга 2. Действительно,

$$\begin{aligned} S'_0 &= e^{+\lambda} \text{ch } \beta S_0 + e^{-\lambda} \text{sh } \beta S_1, \\ S'_1 &= e^{+\lambda} \text{sh } \beta S_0 + e^{-\lambda} \text{ch } \beta S_1, \\ S'^2_0 - S'^2_1 &= e^{2\lambda} S_0^2 - e^{-2\lambda} S_1^2. \end{aligned} \quad (5.10)$$

В результате перемножения получаются матрицы со следующей структурой:

$$M(\beta)M(\lambda) = \begin{vmatrix} e^{+\lambda} \text{ch } \beta & e^{-\lambda} \text{sh } \beta \\ e^{+\lambda} \text{sh } \beta & e^{-\lambda} \text{ch } \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_0 + k_3 & k_1 + k_2 \\ k_1 - k_2 & k_0 - k_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} k_0 &= \text{ch } \lambda \text{ ch } \beta, \\ k_3 &= \text{sh } \lambda \text{ ch } \beta, \\ k_1 &= \text{ch } \lambda \text{ sh } \beta, \\ k_2 &= -\text{sh } \lambda \text{ sh } \beta, \\ k_0 k_2 + k_1 k_3 &= 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Однако, полученное при этом 2-параметрическое множество матриц (5.11) не образует группы.

Если перемножать матрицы в обратном порядке:

$$M(\lambda)M(\beta) = \begin{vmatrix} e^{+\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{ch } \beta & \text{sh } \beta \\ \text{sh } \beta & \text{ch } \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{+\lambda} \text{ch } \beta & e^{+\lambda} \text{sh } \beta \\ e^{-\lambda} \text{sh } \beta & e^{-\lambda} \text{ch } \beta \end{vmatrix} \quad (5.12)$$

то основное неравенство также выполняется –

$$\begin{aligned} S'^2_0 - S'^2_1 &= e^{2\lambda} (\text{ch } \beta S_0 + \text{sh } \beta S_1)^2 - \\ &- e^{-2\lambda} (\text{sh } \beta S_0 + \text{ch } \beta S_1)^2 > 0; \end{aligned} \quad (5.13)$$

в результате получаются матрицы вида

$$M(\lambda)M(\beta) = \begin{vmatrix} e^{+\lambda} \text{ch } \beta & e^{+\lambda} \text{sh } \beta \\ e^{-\lambda} \text{sh } \beta & e^{-\lambda} \text{ch } \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_0 + k_3 & k_1 + k_2 \\ k_1 - k_2 & k_0 - k_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} k_0 &= \text{ch } \lambda \text{ ch } \beta, \\ k_3 &= \text{sh } \lambda \text{ ch } \beta, \\ k_1 &= \text{ch } \lambda \text{ sh } \beta, \\ k_2 &= +\text{sh } \lambda \text{ sh } \beta, \\ k_0 k_2 - k_1 k_3 &= 0, \end{aligned} \quad (5.14)$$

2-параметрическое множество которых также не образует группы.

Для матриц третьей подгруппы ($k_1 = 0, k_3 = 0$) $k_0 = D \cos \alpha, k_2 = D \sin \alpha,$

$$\begin{aligned} S'_0 &= D (\cos \alpha S_0 + \sin \alpha S_1), \\ S'_1 &= D (-\sin \alpha S_0 + \cos \alpha S_1), \\ S'^2_0 - S'^2_1 &= \\ &= D^2 [(S_0^2 - S_1^2) \cos 2\alpha + 2S_0 S_1 \sin 2\alpha]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Последнее выражение может быть как положительным, так и отрицательным. Это означает, что вся подгруппа в целом не может рассматриваться как пригодная для задания подгруппы матриц Мюллера.

Заключение

В заключение отметим, что в работе методом анализа структуры полугрупп исследована только небольшая часть вырожденных матриц Мюллера. Данная методика может быть обобщена и использована для анализа и других вырожденных матриц Мюллера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Снопко, В.Н. Поляризационные характеристики оптического излучения / В.Н. Снопко. – Минск : Наука и техника, 1992. – 336с.
2. Федоров, Ф.И. Группа Лоренца / Ф.И. Федоров. – М. : Наука, 1979. – 384 с.
3. Бикватернионы и матрицы Мюллера / А.А. Богуш [и др.]. // Доклады НАН Беларуси. – 2007. – Т. 51, № 5. – С. 71–76.
4. Длугунович, В.А. Векторная параметризация преобразованной группы Лоренца и полярное разложение матриц Мюллера / В.А. Длугунович, Ю.А. Курочкин // Оптика и спектроскопия. – 2009. – Т. 107, № 2. – С. 312–317.
5. Dlugunovich, V.A. The Polar Decomposition And Vector Parametrization Of The Mueller Matrices / V.A. Dlugunovich, Yu.A. Kurochkin. // AIP Conference Proceedings. – 2010. – Vol. 1205. – P. 65–71.
6. Редьков, В.М. Спинорный формализм группы Лоренца и поляризованный свет / В.М. Редьков // Вестник Брестского университета. Серия 4. Физика, математика. – 2010. – № 1. – С. 37–45.
7. Red'kov, V.M. Lorentz group and polarization of the light / V.M. Red'kov // Advances in Applied Clifford Algebras. – 2011. – Vol. 21. – P. 203–220.

8. Редьков, В.М. О нахождении матрицы Мюллера оптического элемента по результатам поляризационных экспериментов, теоретико-групповой анализ / В.М. Редьков, Е.М. Овсюк // Оптика неоднородных структур – 2011: Материалы III Международной научно-практической конференции, г. Могилев, 16–17 февраля 2011 г. / УО «МГУ им. А.А. Кулешова»; редкол.: В.А. Карпенко (отв. редактор) [и др.]. – Могилев: УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2011. – С. 32–35.

9. Богуш, А.А. О четырехмерной векторной параметризации группы и некоторых ее подгрупп / А.А. Богуш, В.М. Редьков // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 3. – С. 57–63.

10. Bogush, A.A. On Unique parametrization of the linear group $GL(4, C)$ and its subgroups by using the Dirac algebra basis / A.A. Bogush, V.M. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2008. – Vol. 11, № 1. – P. 1–24.

11. Богуш, А.А. О вектор-параметрах 4-мерных матриц обратных преобразований в теории группы $GL(4, C)$ / А.А. Богуш, Н.Г. Токаревская, В.М. Редьков // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 3. – С. 64–69.

12. Red'kov, V.M. On Parametrization of the Linear $GL(4, C)$ and Unitary $SU(4)$ Groups in Terms of Dirac Matrices / V.M. Red'kov, A.A. Bogush, N.G. Tokarevskaya // SIGMA. – 2008. – Vol. 4, Paper 021. – 46 pages.

Поступила в редакцию 12.12.11.

УДК 681.327.68

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ОПТОВОЛОКОННЫХ РЕЦИРКУЛЯЦИОННЫХ ЗАПОМИНАЮЩИХ УСТРОЙСТВАХ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ УПЛОТНЕНИЕМ ИНФОРМАЦИОННЫХ КАНАЛОВ

А.В. Поляков, А.В. Жуковский

Белорусский государственный университет, Минск

NONLINEAR EFFECTS IN FIBRE-OPTICAL RECIRCULATING MEMORIES WITH SPECTRAL MULTIPLEXING OF INFORMATION CHANNELS

A.V. Polyakov, A.V. Zhukouski

Belarusian State University, Minsk

Разработана структура волоконно-оптического динамического запоминающего устройства с последовательно-параллельными каналами ввода-вывода цифровой информации и оптической регенерацией. Исследовано влияние нелинейных явлений в волоконном световоде на информационные характеристики таких систем с учетом флуктуационных источников и эффекта межсимвольных помех в волоконно-оптическом контуре при спектральном уплотнении информационных каналов.

Ключевые слова: волоконно-оптическое запоминающее устройство, временной джиттер, нелинейные явления, информационные параметры.

The structure of a fiber-optical dynamic memory with series-parallel channels of input-output of the digital information and optical regeneration is developed. Influence of nonlinear phenomena in the information characteristics of such systems in view of fluctuation sources and effect of intersymbol interference in a fiber-optical contour at spectral multiplexing of information channels is investigated.

Keywords: fiber-optical memory, timing jitter, nonlinear phenomena, information parameters.

Введение

Волоконно-оптические информационные системы (ВОИС) занимают в настоящее время одно из ведущих мест среди устройств, предназначенных для высокоскоростной передачи и обработки потоков данных. Перспективным направлением использования оптоэлектронного процессора является обеспечение ввода больших массивов оптической информации, например, при лазерно-локационном зондировании, в вычислительный канал суперкомпьютера БГУ «СКИФ К1000-2». Практически любая ВОИС, независимо от функционального назначения, состоит из трех основных оптоэлектронных компонентов: модулируемого источника излучения, волоконно-оптической линии задержки и фотоприемного устройства. Источниками излучения служат полупроводниковые инжекционные лазеры (ИЛ). В качестве фотоприемников используются лавинные фотодиоды (ЛФД), позволяющие за счет внутреннего усиления повысить отношение сигнал/шум при слабой мощности сигнала на выходе оптоволоконной линии.

Несмотря на рост количества передаваемой по волоконному световоду (ВС) информации и разработку фазовых и частотных методов модуляции, основным форматом модуляции остается бинарное амплитудное кодирование (ASK—amplitude shift keying). Популярность ASK—форматов

не падает благодаря простоте их реализации и малой стоимости приемопередающей аппаратуры. Под цифровой оптической системой передачи и обработки данных понимается система, в которой информационный поток в двоичной системе счисления передается путем модуляции источника излучения таким образом, что излучаемая им энергия во время передачи бита информации была равна одному из двух уровней. Эта оптическая энергия может иметь высокий или низкий уровень, соответствующий информационным «1» или «0». В передатчиках с прямой модуляцией в соответствии с информационной последовательностью $m(k)$ модулируется ток накачки, при этом обеспечивается максимальная скорость передачи до 10 Гбит/с. Наиболее популярными среди амплитудных форматов являются формат без возвращения к нулю NRZ (non return to zero) и формат с возвращением к нулю RZ (return to zero). В NRZ—формате сигнал, соответствующий логической единице, формируется оптическим импульсом, длительность которого τ_0 равна периоду следования символов (тактовому интервалу) $\tau_0 = T_i = 1/B$, где B — скорость передачи информации. В RZ—формате любой символ «1» представляет собой импульс, длительность которого τ_0 может варьироваться, но всегда $\tau_0 < T_i$. В ВОИС со скоростью передачи до

10 Гбит/с *RZ*-формат получил широкое распространение из-за более высокой устойчивости к нелинейности волокна. Эту особенность можно объяснить тем фактом, что, когда импульс изолирован (в отличие от *NRZ*), каждый «1» символ не зависит от своих соседей. В *NRZ* последовательности «1» порождают непрерывные пакеты световых сигналов, нестабильных при нелинейном распространении в периферии. Помимо стойкости к нелинейным искажениям при распространении, сигналы *RZ*-формата имеют дополнительное преимущество: они более устойчивы к поляризационной модовой дисперсии, чем *NRZ*-сигналы. Одним из самосинхронизирующихся *RZ*-форматов является достаточно широко используемый код Манчестер II.

Основным способом повышения пропускной способности оптоволоконных информационных каналов является технология плотного спектрального (частотного) мультиплексирования (уплотнения) каналов с разделением по длинам волн, получившей название *DWDM*-технологии (*dense wavelength division multiplexing*). Экономичность *DWDM*-систем с большой суммарной скоростью передачи данных в значительной степени зависит от эффективности использования рабочего спектра для передачи информации, от увеличения так называемой спектральной эффективности. Сделать это можно двумя путями: уменьшить спектральный интервал между каналами и увеличить канальную скорость *B*. Второй путь экономически более перспективен, так как увеличение *B* приводит к снижению стоимости единицы передаваемой информации. По оценкам [1], увеличение канальной скорости в четыре раза обеспечивает снижение стоимости единицы передаваемой информации примерно в 2,5 раза.

Однако наряду с отмеченными преимуществами увеличение скорости передачи информации сопровождается ростом искажений цифровых сигналов. В частности, искажения, вызываемые хроматической дисперсией, растут пропорционально квадрату канальной битовой скорости, искажения из-за воздействия поляризационной модовой дисперсии в первом приближении пропорциональны первой степени канальной битовой скорости. Мощность шумов также пропорциональна битовой скорости.

Перспективным направлением развития ВОИС является разработка волоконно-оптических динамических запоминающих устройств (ВОДЗУ) регенеративного типа, которые могут использоваться в качестве быстродействующей динамической буферной памяти в оптических процессорах [2], оптоволоконных линиях связи; при исследовании быстропротекающих процессов для записи, хранения и обработке поступающих с большой скоростью оптических информационных полей и т. п. Достоинством ВОДЗУ является то, что запись информационного потока

в них осуществляется в реальном масштабе времени, а хранение данных в цифровой и аналоговой форме возможно в течение времени, необходимого для их последующей обработки. Кроме того, в таких оптоволоконных системах существует возможность организации по одному световоду одновременно нескольких информационных каналов, используя *DWDM*-технологии.

Особенностью динамического хранения информации в ВОДЗУ является эффект накопления искажений в процессе рециркуляции. Одним из факторов, определяющим возникновение ошибок в информационном потоке, является наличие нелинейных явлений в ВС. Исследование влияния нелинейных эффектов на информационные параметры ВОДЗУ, предлагаемого в качестве модуля ввода больших массивов оптической информации в вычислительный канал суперкомпьютера, является актуальной задачей.

1 Анализ нелинейных явлений в ВОДЗУ

Анализ волоконно-оптических информационных систем обычно проводится в предположении их линейности, что вполне допустимо для исследования поведения этих систем при умеренной мощности (несколько мВт) и на битовых скоростях до 2,5 Гбит/с. Однако внедрение технологии спектрального уплотнения *WDM/DWDM*, которая ведет к значительному возрастанию вводимой в ВС мощности, а также повышение скорости передачи до 10 Гбит/с и выше требуют учета нелинейных эффектов в ВС при исследовании ВОИС. Наиболее существенными из них являются: вынужденное рассеяние Манделштама-Бриллюэна (ВРМБ), или *stimulated Brillouin scattering (SBS)*; вынужденное комбинационное (рамановское) рассеяние (ВКР), или *stimulated Raman scattering (SRS)*; четырехволновое смешение, или *four-wave mixing (FWM)*; фазовая автомодуляция, или *self-phase modulation (SPM)*, и перекрестная фазовая модуляция, или *cross-phase modulation (CPM)*.

Вынужденное рассеяние Манделштама-Бриллюэна проявляется в виде генерации стоксовой волны, распространяющейся в обратном относительно волны накачки направлении и содержащей значительную часть начальной энергии. Процесс ВРМБ можно описать классически как параметрическое взаимодействие между волнами накачки, стоксовой и акустической, возникающее в результате рассеяния света на акустических фонах, т. е. в результате рассеяния на бегущей звуковой волне. Звуковая волна представляет собой механические колебания материала волокна. Эти колебания в виде сгустков сжатия и разряжения, называемые фонами, распространяются по волокну с относительно малой скоростью (~5,9 км/с), вызывая временное локальное изменение свойств волокна. Свет, распространяясь вдоль сердцевины оптического

волокна, способен возбуждать бегущую звуковую волну, приводящую к периодической модуляции показателя преломления. На этой индуцированной решетке показателя преломления сигнал испытывает рассеяние в обратном направлении в результате брэгговской дифракции. Поскольку дифракция света происходит на бегущей звуковой волне, то в силу эффекта Доплера отраженный сигнал сдвинут на частоту звуковой волны, и для $\lambda=1550$ нм этот сдвиг составляет $\Delta\lambda=0,09$ нм [3]. При попадании этого излучения обратно в лазер это может привести к нестабильности его работы по мощности и спектру.

Порог возникновения ВРМБ при импульсной накачке, если спектр накачки имеет лоренцевский профиль с шириной на полувысоте Δf_s , можно оценить по следующей формуле [4]:

$$P_{th} = \frac{21bA_e}{g_B L_e} \left(1 + \frac{\Delta f_s}{\Delta f_B} \right), \quad (1.1)$$

где A_e – эффективная площадь сечения одномодового световода; L_e – эффективная длина взаимодействия; g_B – коэффициент ВРМБ-усиления; Δf_B – ширина спектра ВРМБ-усиления; b – коэффициент, зависящий от поляризации волн излучения накачки и Стокса. Для $\lambda=1,55$ мкм, $A_e=50$ мкм², $L_e=15$ км (длина волокна 25 км, потери 0,2 дБ/км), $g_B \approx 4 \cdot 10^{-11}$ м/Вт, $\Delta f_B=20$ –50 МГц, $\Delta f_s=200$ МГц, $b=1$ согласно формуле (1.1) $P_{th}=20$ мВт. Современное оборудование ВОИС включает в себя системы подавления SBS (изоляторы, создание дополнительной модуляции излучения лазера, например, с частотой 200 МГц, использование внешнего модулятора и т. д.), что позволяет поднять порог до 80 мВт.

Рамановское рассеяние в оптическом световоде возникает из-за рассеяния света на оптических фононах, т. к. в процесс комбинирования энергии, кроме квантов падающего света, вовлекается колебательная и вращательная энергия молекул. В результате появляется сигнал, сдвинутый на 13 ТГц (~ 100 нм) [1] от длины волны задающего источника. В отличие от ВРМБ рамановский сигнал широкополосный (до 40 ТГц, т. е. 320 нм) [5], при этом излучение ВКР в основном идет в прямом направлении. По этой причине в системах *DWDM* наблюдается эффект усиления длинноволновой части спектра за счет коротковолновой. Это приводит к падению оптического отношения сигнал/шум для каналов коротковолнового диапазона и насыщению приемников, работающих с длинноволновой частью спектра. Однако ВКР имеет существенно более высокий порог возникновения по сравнению с ВРМБ. ВКР-порог рассчитывается согласно выражению [4]:

$$P_{th} = \frac{16A_e}{g_R L_e}, \quad (1.2)$$

где g_R – коэффициент комбинационного усиления, равный $g_R = 6 \cdot 10^{-14}$ м/Вт. В этом случае порог ВКР составляет около 800 мВт.

В [6] показано, что для того, чтобы в *DWDM* системе с 32 каналами с интервалами 0,8 нм (100 ГГц) запас мощности из-за влияния ВКР на каждый канал не превышал 0,5 дБ, пиковая мощность не должна превышать 15 мВт на канал.

В *WDM* системах еще одним важным нелинейным эффектом является смещение четырех длин волн. При достижении критического уровня мощности излучения лазера нелинейность волокна приводит к взаимодействию трех волн с частотами ω_i , ω_j , ω_k и появлению новой четвертой волны на частоте $\omega_i \pm \omega_j \pm \omega_k$. В зависимости от отдельных частот этот пульсирующий сигнал может соответствовать или быть очень близким по частоте одному из отдельных каналов, что приводит к значительным перекрестным помехам в этом канале. В отличие от фазовой и перекрестной фазовой модуляции, которые значимы в системах с высокими битовыми скоростями, эффект смещения четырех волн не зависит от битовой скорости, а определяется канальными интервалами и дисперсией волокна. При этом уменьшение канальных интервалов и дисперсии увеличивает эффект четырехволнового смещения, в связи с чем эффект *FWM* необходимо учитывать даже для систем с умеренными битовыми скоростями, когда каналы расположены близко друг к другу или используется волокно со смещенной дисперсией. Основным и самым эффективным способом борьбы с *FWM* является использование стандартного одномодового волокна (*SMF*) или волокна с ненулевой смещенной дисперсией (*NZDSF*), а также использование межканальных интервалов не менее 50 ГГц.

В процессах, зависящих от показателя преломления, при высоком уровне мощности сигнала необходимо учитывать нелинейность показателя преломления:

$$n = n_0 + \bar{n}I,$$

где n_0 – показатель преломления волокна, \bar{n} – коэффициент нелинейности показателя преломления волокна ($(2...3) \cdot 10^{-16}$ см²/Вт для кварцевого волокна), I – интенсивность оптического сигнала.

Коэффициент преломления сердцевинны волокна под действием сильного поля изменяется, и вместе с ним изменяются и другие параметры волокна, в том числе скорость распространения, дисперсия и т. д. В системах *WDM* нелинейные эффекты, зависящие от интенсивности волн, усиливаются вследствие того, что объединенный

сигнал всех каналов может быть достаточно интенсивным, даже когда отдельные каналы функционируют с умеренной мощностью. Из-за наличия сигналов на других каналах фазовое смещение, зависящее от их интенсивности, усиливает вызванное *SPM* изменение линейной частотной модуляции импульса. Это явление называется перекрестной фазовой модуляцией (*CPM*). На практике эффект *CPM* в системах *WDM*, функционирующих с использованием стандартного одномодового волокна, может быть существенно уменьшен посредством увеличения интервалов длин волн между отдельными каналами. Благодаря дисперсии волокна постоянные распространения этих каналов изменяются и импульсы, соответствующие отдельным каналам, удаляются друг от друга, что имеет место, например, при канальных интервалах 100 ГГц [6]. Благодаря этому явлению импульсы, которые изначально совпадали по времени, перестают совпадать после прохождения некоторого расстояния по волокну и больше не могут взаимодействовать, снижая тем самым эффект *CPM*.

Учитывая все выше изложенное, для минимизации влияния нелинейных эффектов были выбраны следующие параметры для волоконно-оптического запоминающего устройства. Применялась *DWDM*-технология с $k=8, 16, 32$ информационными каналами, имевшими межканальный интервал 100 ГГц. В качестве линии задержки использовался комбинированный световод с коррекцией хроматической дисперсии, состоящий из стандартного одномодового волокна (дисперсия 16,5 пс/нм·км на $\lambda=1550$ нм) и компенсирующего волокна (дисперсия минус 66 пс/нм·км на $\lambda=1550$ нм), в результате чего средняя хроматическая дисперсия на всем участке ВС составляла $D_{xp} = 0,05$ пс/нм·км [7]. Поляризационная модовая дисперсия равнялась $D_{PMD} = 0,1$ пс/км^{1/2}, потери – $\alpha = 0,25$ дБ/км. В качестве источников излучения использовались лазеры, согласованные с отрезками волокна, на которых сформированы брэгговские решетки (ВБР). Использование решеток позволяет гибко варьировать длину волны лазерной генерации в пределах контура усиления активной среды лазера, обеспечить стабильность генерации, уменьшить ширину лазерной линии, реализовать ее перестройку. Описанные в [8] ВБР-лазеры обладали высокой температурной стабильностью и в окрестностях рабочей длины волны 1550 нм при прямой модуляции со скоростью до 10 Гбит/с имели мощность излучения $P_0 = 2-4$ мВт и ширину линии генерации не более 0,02 нм. В этом случае доминирующим нелинейным эффектом являлась фазовая автомодуляция (*SPM*).

Фазовая автомодуляция возникает вследствие того, что показатель преломления волокна содержит нелинейно-зависимую от интенсивности компоненту, которая вызывает смещение

фазы, пропорциональное интенсивности импульса. По этой причине различные составляющие импульса претерпевают различные фазовые смещения, обуславливая изменение линейной частотной модуляции (ЛЧМ) импульсов вне зависимости от их формы. Изменение ЛЧМ импульсов в свою очередь приводит к увеличению их длительности из-за дисперсии. Таким образом, *SPM* модифицирует влияние дисперсии на расширение импульса. Так как этот эффект изменения ЛЧМ пропорционален мощности передаваемого сигнала, *SPM* более ощутим в системах, использующих высокие мощности передачи. Поэтому вызванное *SPM* изменение ЛЧМ оказывает влияние на расширение импульса вследствие дисперсии и в связи с этим должно учитываться в системах с высокими битовыми скоростями, которые уже обладают значительными ограничениями из-за дисперсии.

2 Влияние фазовой автомодуляции на информационные характеристики запоминающего устройства

Было проведено исследование динамики изменения длительности циркулирующих импульсов в волоконно-оптическом запоминающем устройстве в зависимости от числа спектральных каналов и скорости записи информации с учетом дисперсионных свойств ВС и фазовой автомодуляции. В [6] приведена приближенная формула изменения длительности импульса τ под воздействием фазовой автомодуляции для гауссовского импульса:

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \sqrt{1 + \sqrt{2} \gamma P L_e \frac{L}{L_D} + \left(1 + \frac{4}{3\sqrt{3}} (\gamma P L_e)^2\right) \frac{L^2}{L_D^2}}, \quad (2.1)$$

где τ_0 – длительность исходного импульса на полувысоте ($\tau_0 = 0,2$ нс, что соответствует половине тактового интервала для $B = 2,5$ Гбит/с, и $\tau_0 = 0,05$ нс, что соответствует половине тактового интервала для $B = 10$ Гбит/с); L – длина волоконного световода; L_e – эффективная длина; L_D – дисперсионная длина; γ – нелинейный параметр; P – пиковая мощность излучения информационного импульса в оптоволоконном контуре.

Нелинейное взаимодействие зависит от длины ВС и площади поперечного сечения волокна, при этом, чем длиннее волокно, тем сильнее взаимодействие и значительнее влияние нелинейного явления. Однако по мере того, как сигнал распространяется по ВС, его мощность уменьшается. Моделирование этих явлений может быть довольно сложным процессом, однако на практике оказалось, что простая модель, предполагающая, что мощность является постоянной на протяжении некоторой эффективной длины L_e , позволяет достаточно адекватно исследовать влияние нелинейных явлений. Если

принять, что мощность с расстоянием x изменяется по закону $P(x) = P_0 e^{-\alpha x}$, тогда можно записать:

$$P_0 L_e = \int_0^L P(x) dx,$$

откуда

$$L_e = \frac{1 - e^{-\alpha L}}{\alpha}. \quad (2.2)$$

В рециркуляционных системах необходимо учитывать тот факт, что волоконно-оптический усилитель восстанавливает мощность после каждого цикла рециркуляции, поэтому возрастает влияние эффекта нелинейности и эффективная длина в ВОДЗУ определяется суммой эффективных длин каждого цикла:

$$L_e = \frac{1 - e^{-\alpha L}}{\alpha} N, \quad (2.3)$$

где N – число циклов рециркуляции.

Для гауссовского импульса нелинейный параметр описывается следующим выражением [9]:

$$\gamma = \frac{2\pi\bar{n}}{\lambda A_e}, \quad (2.4)$$

где A_e – эффективная область поперечного сечения волокна, равная 50 мкм^2 ; \bar{n} – коэффициент нелинейности показателя преломления, $\bar{n} = 3,2 \cdot 10^{-8} \text{ мкм}^2/\text{Вт}$.

Для $\lambda = 1,55 \text{ мкм}$ $\gamma = 2,6 (\text{Вт} \cdot \text{км})^{-1}$.

Величина $L_D = \tau_0^2 / |\beta_2|$ называется дисперсионной длиной, где β_2 – параметр дисперсии групповой скорости, который определяет степень увеличения длительности импульса вследствие хроматической дисперсии и находится из формулы:

$$D_{\text{xp}} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2. \quad (2.5)$$

Эффект положительного изменения линейной частотной модуляции импульса зависит от знака параметра β_2 . Если $\beta_2 > 0$, дисперсия считается нормальной. Импульсы в кварцевом волокне испытывают влияние нормальной дисперсии ниже длины волны с нулевой дисперсией, которая для стандартного одномодового волокна находится в области $1,3 \text{ мкм}$. Когда $\beta_2 < 0$, дисперсия считается аномальной и имеет место во всем диапазоне в окрестностях $1,55 \text{ мкм}$ для стандартного одномодового волокна.

Выражение (2.1) получено в приближении практически монохроматического излучения и не учитывает влияние поляризационной модовой дисперсии *PMD* (polarization mode dispersion). Влияние *PMD* становится существенным при гигабитных скоростях передачи сигналов на большие расстояния на длине волны, близкой к длине волны нулевой дисперсии волокна, или

когда используются методы компенсации хроматической дисперсии.

Для уменьшения величины хроматической дисперсии необходимо использовать узкополосные источники излучения, что может быть обеспечено при помощи полупроводниковых лазеров, согласованные с отрезками волокна, на которых сформированы дифракционные брэгговские решетки. Однако ширина спектра импульсного сигнала не может быть бесконечно малой, поскольку это не совместимо с очень короткими импульсами передачи, что следует из спектрального и временного преобразования Фурье. Ширина спектра $\Delta\nu$ импульсного сигнала, выраженная в Гц, обратно пропорциональна длительности светового сигнала. Чем короче импульс, тем шире спектр. Таким образом, ширина спектра не может быть меньше некоторого предельного значения, пропорционального скорости записи двоичной информации. Минимальная величина ширины спектра, выраженная в длинах волн, может быть оценена по формуле [10]:

$$\Delta\lambda_{\text{min}} \approx 2 \frac{\lambda^2}{c} B.$$

Так, для $B = 10 \text{ Гбит/с}$ и $\lambda = 1,55 \text{ мкм}$ получаем $\Delta\lambda_{\text{min}} = 0,16 \text{ нм}$ и для $B = 2,5 \text{ Гбит/с}$ $\Delta\lambda_{\text{min}} = 0,04 \text{ нм}$.

Таким образом, при расчете длительности циркулирующих импульсов на выходе решающего устройства учитывались хроматическая дисперсия, поляризационная модовая дисперсия, а также фазовая автомодуляция. С учетом выше изложенного, формула (2.1) применительно к волоконно-оптическому запоминающему устройству рециркуляционного типа со спектральным уплотнением информационных каналов записывается следующим образом:

$$\tau = \left(\tau_0^2 - \tau_0^2 \left[\sqrt{2} \gamma k P L_e \frac{NL}{L_D} - \left(1 + \frac{4}{3\sqrt{3}} (\gamma k P L_e)^2 \right) \frac{N^2 L^2}{L_D^2} \right] + (D_{\text{xp}} \Delta\lambda NL)^2 + D_{\text{PMD}}^2 NL \right)^{1/2}. \quad (2.6)$$

На рисунке 2.1 приведены полученные с помощью аналитических выражений (2.3)–(2.6) относительные изменения длительности информационных импульсов τ к величине тактового интервала T_i в зависимости от числа циркуляций N .

Объяснить полученные зависимости можно следующим образом. Импульсы, излучаемые полупроводниковыми лазерами с непосредственной модуляцией, представляют собой частотно-модулированные импульсы. Поскольку для стандартного одномодового волокна для длин волн, больших $1,3 \text{ мкм}$, $\beta_2 < 0$ и вызванное *SPM* изменение ЛЧМ положительно, то рециркулирующие

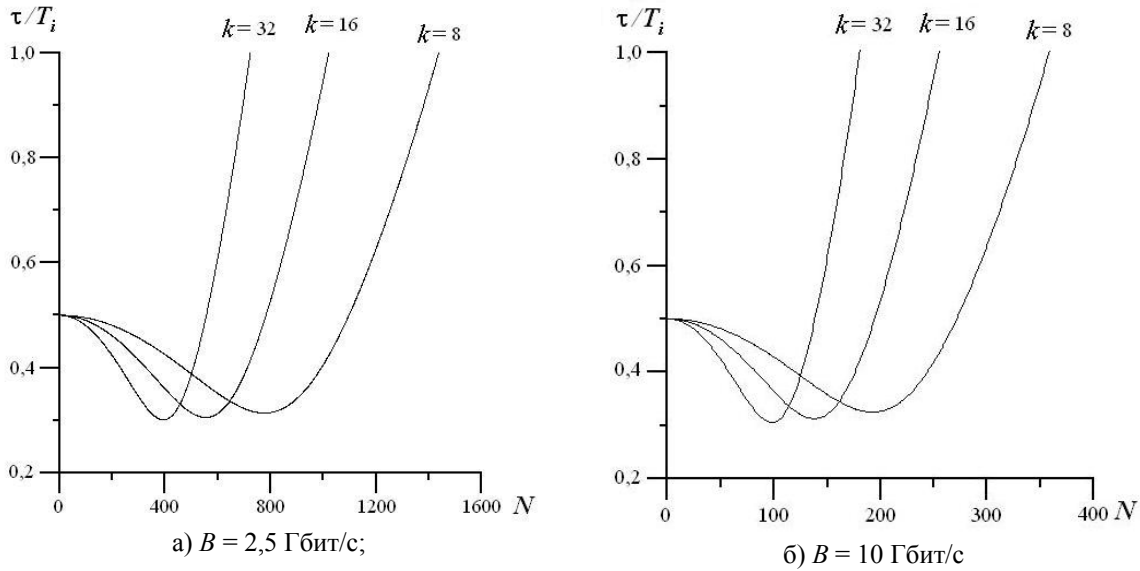


Рисунок 2.1 – Динамика изменения длительности информационных импульсов от числа циркуляций при различном числе информационных каналов

импульсы сначала подвергаются сжатию, а затем расширению. Данный эффект усиливается с возрастанием передаваемой мощности (т. е. увеличением числа информационных каналов), поэтому наблюдается увеличение степени начального сжатия и скорости последующего расширения импульсов с увеличением передаваемой мощности, что оказывает существенное влияние на информационные параметры оптоволоконной памяти.

Особенностью процесса динамического хранения информации в замкнутом оптоэлектронном контуре является накопление искажений в процессе рециркуляции. Количество циклов рециркуляции N определялось из следующих условий:

1) значение вероятности ошибки при приеме информационных сигналов в битовом формате (BER – bit error rate) должно удовлетворять условию $BER \leq BER_0 = 10^{-9}$;

2) длительность циркулирующих импульсов τ не должны превышать величины тактового интервала T_i $\tau < T_i$.

Значение BER_a , обусловленное шумовыми источниками, рассчитывается согласно следующей формуле [11]:

$$BER_a = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\xi}}{2\sqrt{2}} \right), \quad (2.7)$$

где erfc – функция ошибок; ξ – отношение сигнал/шум на выходе приемного устройства.

Согласно исследуемой структуре ВОДЗУ, основными источниками шумов являются дробовые шумы фотодетектора, тепловые шумы нагрузочного сопротивления, шумы волоконных эрбиевых оптических усилителей, флуктуаций излучения инжекционного лазера, шумы,

связанные с флуктуациями фототока, а также шумы, вызванные биениями между сигналом и усиленным спонтанным излучением [12]. Кроме этого, на время хранения информации влияют межсимвольные помехи, обусловленные тем, что часть энергии, относящаяся к одному тактовому периоду, поступает на фотоприемник в течение следующего периода:

$$P = 10^{-0,08B\tau \exp(2B\tau)} P_0 K_1, \quad (2.8)$$

$$K_1 = 10^{-0,1(\alpha_{MUX} + 2\alpha_c + \alpha_{3dB})},$$

где α_{MUX} – потери на мультиплексоре (дБ); α_c – потери на соединении (дБ); α_{3dB} – потери на ответвителе (дБ).

Кроме величины межсимвольных помех, от длительности циркулирующих импульсов зависит также величина временных флуктуаций положения информационных импульсов относительно своего тактового интервала, известные как временной джиттер (ВД):

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{2} \frac{S_{sp}}{E_0} \sigma_\tau^2 \left[N + N(Nd + \alpha_{ch})^2 \right], \quad (2.9)$$

где σ_τ – среднеквадратичная длительность импульса (для гауссовой формы импульсов $\sigma_\tau = 0,425\tau$), E_0 – энергия информационного импульса; α_{ch} – представляет собой чирп-фактор ИЛ.

Спектральная плотность «белого» шума линейного волоконного эрбиевого усилителя вычисляется по формуле:

$$S_{sp} = (G_1 - 1) n_{sp} h\nu, \quad (2.10)$$

где G_1 – коэффициент усиления усилителя, n_{sp} – коэффициент спонтанной эмиссии, зависящий от заселенности уровней эрбия.

Коэффициент дисперсии групповой скорости имеет вид:

$$d = -\frac{D_{\text{xp}} \lambda^2 L}{2\pi c \tau^2}. \quad (2.11)$$

Таким образом, уровень BER_j , обусловленный эффектом ВД, можно представить как:

$$BER_j = \operatorname{erfc}\left(\frac{T_i}{2\sqrt{2}\sigma_j}\right) \approx \frac{4\sigma_j}{\sqrt{2\pi}T_i} \exp\left(-\frac{T_i^2}{8\sigma_j^2}\right). \quad (2.12)$$

Результирующее значение уровня ошибок определяется как

$$BER = \sqrt{BER_a^2 + BER_j^2}. \quad (2.13)$$

Проблема увеличения времени динамического хранения информации в контуре ВОДЗУ находится в неразрывной связи с вопросом информационной емкости этого контура. Поэтому эти два параметра ВОДЗУ необходимо исследовать совместно. Информационная емкость W рассматриваемой системы зависит от скорости поступающего потока данных B следующим образом:

$$W = kBLn/c. \quad (2.14)$$

На основе разработанной математической модели (2.7)–(2.14) с учетом явления фазовой автомодуляции (2.3)–(2.6) были проведены исследования информационных характеристик ВОДЗУ со спектральным уплотнением каналов. Установлено (рисунок 2.2), что при увеличении числа информационных каналов с 8 до 32 максимальное время хранения информации уменьшается с 43 мс до 23 мс, при этом длина оптоволоконной петли, при которой наблюдается максимальное время хранения информации, увеличивается от 30 км до 50 км. В этом случае для обеспечения средней хроматической дисперсии $D_{\text{xp}} = 0,05$ пс/нм·км волоконный световод должен состоять из отрезка стандартного волокна длиной 40 км и отрезка ВС длиной 10,4 км с отрицательной дисперсией. Наличие максимума в

зависимости $t_{\text{xp}}(L)$ обусловлено тем, что при увеличении длины ВС вначале время хранения информации при заданной вероятности ошибки определяется отношением сигнал/шум на выходе фотоприемника, затем величина t_{xp} начинает зависеть от временного джиттера, усиленного действием фазовой автомодуляции, и связанной с дисперсионными свойствами волоконного световода. Показано, что, как следует из рисунка 2.3, изменение скорости информационного потока практически не влияет на величину длины ВС, обеспечивающую максимальное t_{xp} при заданном числе спектральных информационных каналов, и это следует учитывать при проектировании ВОДЗУ.

Проведен многопараметрический анализ процесса рециркуляции информационного потока в замкнутом оптоэлектронном контуре с учетом шумовых источников, временного джиттера, нелинейных эффектов, а также эффекта межсимвольных помех. Для оценки возможностей использования рассматриваемых ВОДЗУ в качестве буферной памяти проведены совместные исследования времени хранения и информационной емкости при заданной вероятности ошибки. Из графиков на рисунке 2.4 можно определить, что, например, для скорости информационного потока $B=10$ Гбит/с и числа спектральных информационных каналов $k=32$ время хранения информации при заданной вероятности ошибки равно $t_{\text{xp1}}=28$ мс, информационная емкость составляет $W_1=9,4$ МБайт; для $B=2,5$ Гбит/с $t_{\text{xp2}}=0,12$ с, $W_2=2,6$ МБайт. Увеличение времени хранения информации требует использования специальных методов оптической регенерации, которые обеспечивают восстановление информационной импульсной последовательности не только по амплитуде, но и по форме и временному положению, так называемой 3R-регенерации (re-amplification, re-shaping, re-timing).

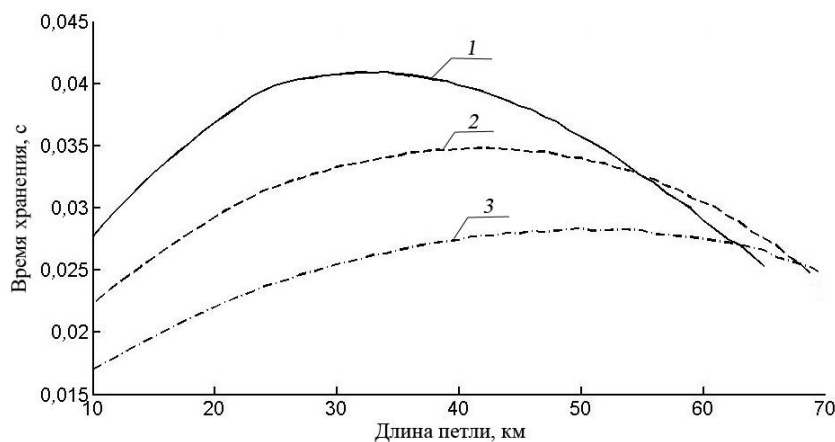


Рисунок 2.2 – Зависимость времени хранения от длины оптоволоконной петли при различном числе спектральных информационных каналов для скорости информационного потока $B=10$ ГГбит/с (1 – $k=8$, 2 – $k=16$, 3 – $k=32$)

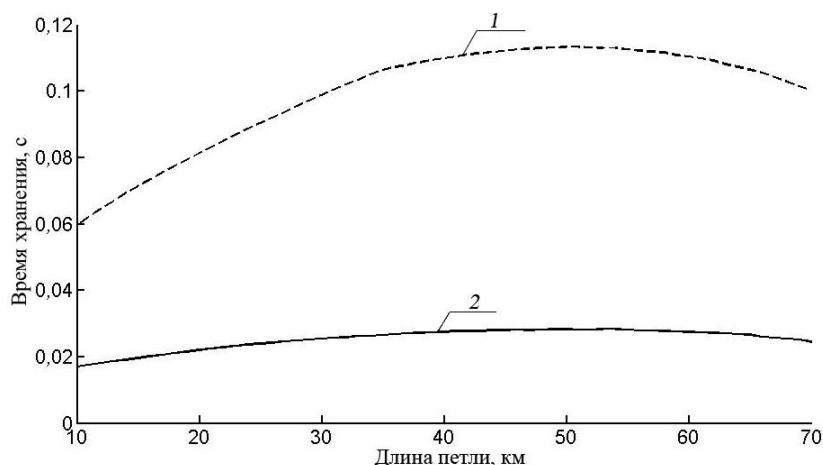


Рисунок 2.3 – Зависимость времени хранения информации от длины волоконного световода при разной скорости записи информации для числа информационных каналов $k=32$ (1 – $V=2,5$ Гбит/с, 2 – $V=10$ Гбит/с)

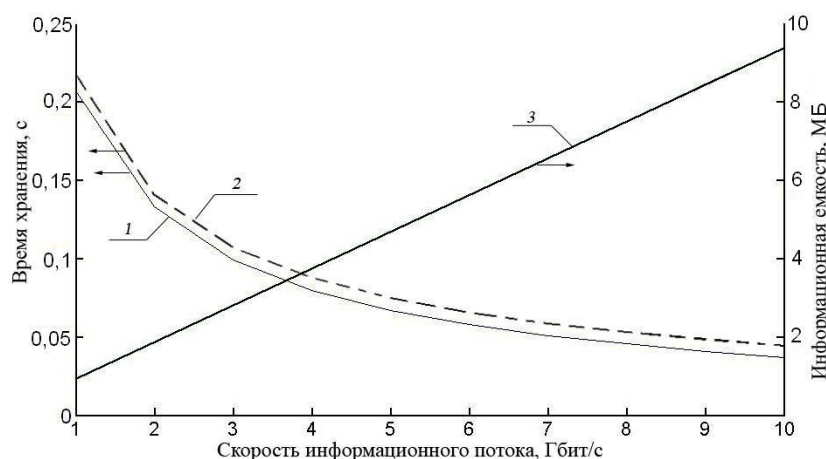


Рисунок 2.4 – Информационные параметры ВОДЗУ при различной скорости информационного потока (1 – время хранения с учетом фазовой автомодуляции, 2 – время хранения без учета нелинейных эффектов, 3 – информационная емкость)

Заключение

Таким образом, для задачи повышения быстродействия при вводе в вычислительный канал суперкомпьютера больших массивов оптической информации предложен новый принцип адаптивной матричной вариативности оптической памяти и разработана структура волоконно-оптического динамического запоминающего устройства с последовательно-параллельными каналами ввода-вывода и оптической регенерацией. Исследовано влияние нелинейных явлений в волоконном световоде на информационные характеристики таких систем с учетом флуктуационных источников и эффекта межсимвольных помех в волоконно-оптическом контуре при спектральном уплотнении информационных каналов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Величко, М.А. Новые форматы модуляции в оптических системах связи / М.А. Величко,

О.Е. Наний, А.А. Сусьян // Lightwave Russian Edition. – 2005. – № 4. – С. 21–30.

2. Малевич, И.А. Оптоэлектронный процессор обработки оптической информации при лазерно-локационном зондировании / И.А. Малевич, А.В. Поляков, С.И. Чубаров // Информационные системы и технологии: Материалы Межд. научного конгресса по информатике, Минск, 31 октября-3 ноября 2011г.: в 2ч. Ч.1 / БГУ. – Минск, 2011. – С. 277–282.

3. Буров, В.Н. Мониторинг DWDM-линий связи / В.Н. Буров, А.Ю. Шапошников // Фотон-экспресс. – 2004. – С. 18–19.

4. Agrawal, G.P. Lightwave technology: telecommunication systems. / G.P. Agrawal. – NJ.: Wiley-Interscience, 2005. – 480 p.

5. Фриман, Р. Волоконно-оптические системы связи / Р. Фриман – М.: Техносфера, 2006. – 496 с.

6. Иванов, А.Б. Волоконная оптика. Компоненты, системы передачи, измерения / А.Б. Иванов. – М.: Сайрус систем, 1999. – 671 с.
7. Murai, H. Carrier-suppressed dispersion managed soliton transmission using novel OTDM technique / H. Murai, T. Yamada, K. Fujii // IEEE Leos Newsletter. – 2001. – Vol. 15, № 5. – P. 24–25.
8. *10 Gbit/s directly modulated, high temperature-stability external fibre grating laser for dense WDM networks* / F.N. Timofeev [et. al.] // Electron. Lett. – 1999. – Vol. 35, № 20. – P. 1737–1739.
9. Agrawal, G.P. Nonlinear fiber optics. / G.P. Agrawal. NY. : Academic Press, 2001. – 461 p.
10. Наний, О.Е. Основы цифровых волоконно-оптических систем связи / О.Е. Наний // Light-wave Russian Edition. – 2003. – № 1. – С. 48–52.
11. Srivastava, R. Large capacity optical router based on arrayed waveguide gratings and optical loop buffer / R. Srivastava, R.K. Singh, Y.N. Singh // Optical and Quantum Electronics. – 2009. – Vol. 41, № 6. – P. 463–480.
12. Malevich, I.A. Multichannel fiber optic recirculating memory / I.A. Malevich, A.V. Polyakov, S.I. Chubarov // Proc. 11th Annual International Conference on Laser and Fiber-Optical Networks Modeling, LFNМ*2011, Kharkov, Ukraine, September 5–8, 2011. – Kharkov, 2011. – P. 153–154.

Поступила в редакцию 25.01.12.

УДК 661.862

СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА SBT-ПЛЕНОК, СИНТЕЗИРОВАННЫХ ЗОЛЬ-ГЕЛЬ МЕТОДОМ

В.В. Сидский¹, А.В. Семченко¹, В.Е. Гайшун¹, В.В. Колос²,
А.С. Турцевич², С.А. Сорока², А.Н. Асадчий²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель
²ОАО «ИНТЕГРАЛ», Минск

FERROELECTRIC PROPERTIES OF SBT-FILMS SYNTHESIZED BY SOL-GEL METHOD

V.V. Sidsky¹, A.V. Semchenko¹, V.E. Gaishun¹, V.V. Kolos²,
A.S. Turtsevich², S.A. Soroka², A.N. Asadchiy²

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel
²Joint Stock Company «Integral», Minsk

В работе рассматривается взаимосвязь между структурными и сегнетоэлектрическими свойствами слоев состава $Sr_{1+y}Bi_{2+x}Ta_2O_9$, синтезированных золь-гель методом. Показано, что варьирование стехиометрического соотношения между исходными компонентами, входящими в структурную формулу SBT-материала, приводит к изменению структурных, и, как следствие, сегнетоэлектрических свойств SBT-пленок. С приближением к области неустойчивости системы снижается также значение точки Кюри.

Ключевые слова: золь-гель, SBT-плёнки, петли гистерезиса, диэлектрическая проницаемость, температура Кюри.

This paper examines the relationship between the ferroelectric and structural properties of the films of $Sr_{1+y}Bi_{2+x}Ta_2O_9$, synthesized by the sol-gel method. It is shown that the variation of the stoichiometric ratio between the source components included in the structural formula of SBT-material leads to a structural change, and therefore the ferroelectric properties of SBT-layers. As we approach the region of instability of the system as the value of the Curie point decreases.

Keywords: sol-gel, SBT-films, hysteresis loop, dielectric constant, Curie temperature.

Введение

Сегнетоэлектрики на основе оксидного соединения $Sr(Bi_xTa_x)O_9$ (SBT) привлекли внимание большого количества научных исследователей из-за их особых сегнетоэлектрических свойств, в частности пьезоэлектрических и пироэлектрических [1]. Они известны хорошими усталостными характеристиками (сохраняют поляризованное состояние даже после многократного количества повторяющихся циклов переключений поляризации), и, следовательно, их можно использовать для применения в энергонезависимых запоминающих устройствах. Сегнетоэлектрик с общей формулой $Sr(Bi_xTa_x)O_9$ (SBT) имеет значительные преимущества по сравнению с сегнетоэлектрическим материалом на основе соединения $Pb(Zr_xTi_{1-x})O_3$ (PZT), в котором после многократного количества повторяющихся циклов переключений поляризация не сохраняется [2], [3]. Однако применение этого сегнетоэлектрика ограничивается сложностью технологической схемы его синтеза. Так, применение известных вакуумных технологий при формировании $SrBi_2Ta_2O_9$ пленок не обеспечивает не только формирование кристаллической структуры с кубической объемноцентрированной симметрией элементарной ячейки, но часто

и твердой фазы стехиометрического состава $SrBi_2Ta_2O_9$. Поэтому в последние годы активно развивается золь-гель метод синтеза сегнетоэлектрических пленок, который дает наибольшие преимущества. В основе этого метода синтеза лежат последовательные структурные изменения по схеме «раствор-золь-гель-оксид». В данной работе рассматривается взаимосвязь между структурными и сегнетоэлектрическими свойствами слоев состава $Sr_{1+y}Bi_{2+x}Ta_2O_9$, синтезированных золь-гель методом.

1 Методика эксперимента

Исследование основных диэлектрических свойств сегнетоэлектриков проводили осциллографическим методом по методике, описанной в лабораторной работе [4], в зависимости от напряженности внешнего электрического поля и температуры. Диэлектрическую проницаемость ϵ_r находили по формуле

$$\epsilon_r = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{C_2 d U_y}{\epsilon_0 S U_x}, \quad (1.1)$$

где d – толщина сегнетоэлектрика; S – площадь пластины сегнетоэлектрика; R_1 и R_2 – сопротивления делителя; C_1 – исследуемый конденсатор; C_2 – эталонный конденсатор; ϵ_0 – диэлектрическая

постоянная; U_x и U_y – горизонтальное и вертикальное отклонения луча осциллографа.

Переменное напряжение ~ 110 В подводится от источника питания на делитель, состоящий из сопротивлений R_1 и R_2 . Параллельно делителю включены две последовательно соединённые ёмкости: исследуемый конденсатор C_1 , заполненный сегнетоэлектриком, и эталонный C_2 . При подаче напряжения в электрическую цепь обеспечивается поляризуемость сегнетокерамического конденсатора C_1 – исследуемого образца сегнетоэлектрика.

Величину спонтанной поляризации P_{en} и ее зависимость от температуры $P_{en}=f(T)$ можно найти, используя метод диэлектрического гистерезиса. Разность потенциалов U (напряжение сети частотой 50 Гц) прикладывается к параллельно соединённым эталонному линейному конденсатору C_2 и исследуемому сегнетоэлектрику C_1 . Приложенное напряжение падает на исследуемом образце, так как $C_1 \gg C_2$. Это же напряжение подается на горизонтальное отклонение луча осциллографа. На вертикальное отклонение луча осциллографа подается напряжение U_2 с эталонного конденсатора, пропорциональное его заряду и заряду на конденсаторе C_2 . Исходя из соотношения $C_2 U_2 = C_1 U_1$, где Q – заряд на конденсаторе с учетом соотношений $P = \delta$ и $Q = \delta S$, где δ – плотность заряда, S – площадь конденсатора, P – поляризация, получим:

$$P = \frac{C_2 U_2}{S}. \quad (1.2)$$

Как видно из соотношения (1.1), для измерения поляризации в рассматриваемой схеме необходимо знать площадь конденсатора с сегнетоэлектриком и величину U_2 , пропорциональную отклонению луча осциллографа по вертикали [3].

Рассмотренные свойства сегнетоэлектриков проявляются лишь при определенных температурах ($20 \div 500$ °С). Зависимость диэлектрической проницаемости от температуры $\varepsilon = f(T)$ можно найти, сняв зависимость ёмкости исследуемого образца от температуры (рисунок 1.1).

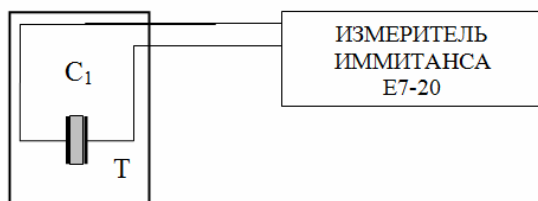


Рисунок 1.1 – Схема установки для определения зависимости $\varepsilon = f(T)$, T – термостат; C_1 – образец исследуемого сегнетоэлектрика

На рисунке 1.1 приводится схема установки для определения зависимости $\varepsilon = f(T)$. Для измерения диэлектрической проницаемости от

температуры используется термостат и измеритель иммитанса E7-20. При нагревании образца взаимодействие дипольных моментов молекул ослабляется и при некоторой температуре T_0 , называемой температурой Кюри, происходит разрушение доменов. Спонтанная поляризация образца исчезает, и он из сегнетоэлектрика превращается в обычный диэлектрик.

Измеритель иммитанса (RLC) E7-20 – прецизионный прибор класса точности 0,1 с широким диапазоном рабочих частот 25 Гц – 1 МГц и высокой скоростью измерений до 25 измерений в сек. Измеряемые параметры: индуктивность (L_s, L_p), емкость (C_s, C_p), сопротивление (R_s, R_p), проводимость (G_p), фактор потерь (D), добротность (Q), модуль комплексного сопротивления Z , реактивное сопротивление (X_s), угол фазового сдвига; ток утечки (I) [5].

2 Результаты и их обсуждение

На рисунке 2.1 представлены петли гистерезиса SBT – плёнок, полученных золь-гель методом на основе неорганических соединений металлов со следующим мольным соотношением Sr:Bi:Ta:

- (а) 1,4:2,2:2,0;
- (б) 1,2:2,2:2,0;
- (в) 1:2,4:2,0;
- (г) 1,2:2,3:2,0;
- (д) 0,8:2,2:2,0.

Значения остаточной поляризации и коэрцитивной силы синтезированных SBT-пленок приведены в таблице 2.1.

Увеличение остаточной поляризации (P_r), подсчитанной по формуле (1.2) и коэрцитивной силы (E_c) в полученных золь-гель методом SBT-плёнках происходит при приближении стехиометрического соотношения между компонентами к теоретически рассчитанному и равному 1:2:2. В силу особенностей взаимодействия оксида висмута с материалом подложки необходимо обеспечить небольшое превышение содержания висмутом указанного соотношения. «Рабочим» ионом, обеспечивающим поляризационные свойства SBT-структур, является ион стронция. Действительно, при снижении его содержания ниже теоретически рассчитанного значение остаточной поляризации P_r резко падает (образец 5), что делает неэффективным использование SBT-структур данного состава в качестве конденсаторных слоев в энергонезависимой памяти. Образец, имеющий состав № 3, имеет большую по сравнению с остальными площадь петли гистерезиса, которая, как известно, равна работе, затрачиваемой на единичный цикл записи информации. Поэтому его использование в качестве элемента энергонезависимой памяти также менее эффективно, чем образцов 1, 2, 4. Для пленок на основе органического соединения тантала (на рисунках не приведены) с такими же

мольными соотношениями Sr:Bi:Ta, как в таблице 2.1, самое высокое значение остаточной поляризации $P_r = 1,1 \mu\text{C}/\text{cm}^2$ имел образец состава № 1. Как было показано ранее [6], при использовании золя на основе неорганических соединений металлов степень кристалличности пленки, отожженной на воздухе при температуре 750°C в течение 2 часов, увеличивается по сравнению с пленками, синтезированными из золя на основе органического соединения тантала. Эти данные согласуются с ростом сегнетоэлектрических свойств SBT-пленок при переходе к золю на основе неорганических соединений металлов.

Температурные и частотные зависимости диэлектрической проницаемости SBT-пленок на платиновом подслое, отожженных при 750°C в течение 2 часов в атмосфере кислорода на основе

неорганических соединений металлов с мольным соотношением Sr:Bi:Ta:

- (а) 1,4:2,2:2,0; (б) 1,2:2,2:2,0; (в) 1:2,4:2,0;
- (г) 1,2:2,3:2,0; (д) 0,8:2,2:2,0,

приведены на рисунке 2.2. Все SBT-пленки имеют пик диэлектрической проницаемости при температуре Кюри T_c , что свидетельствует о сегнетоэлектрических переходах в парафазе. Из рисунка 2.3 видно, что все SBT-пленки характеризуются максимальной диэлектрической проницаемостью на частоте 100 Гц. Кроме того, пики диэлектрической проницаемости для SBT – пленки с мольным соотношением Sr:Bi:Ta 1,2:2,3:2,0 слегка расширены. Характер кривых для образца 5 свидетельствует о нарушении фазового состава, приводящего к ухудшению сегнетоэлектрических свойств и снижению температуры Кюри T_c с 380 до 300°C .

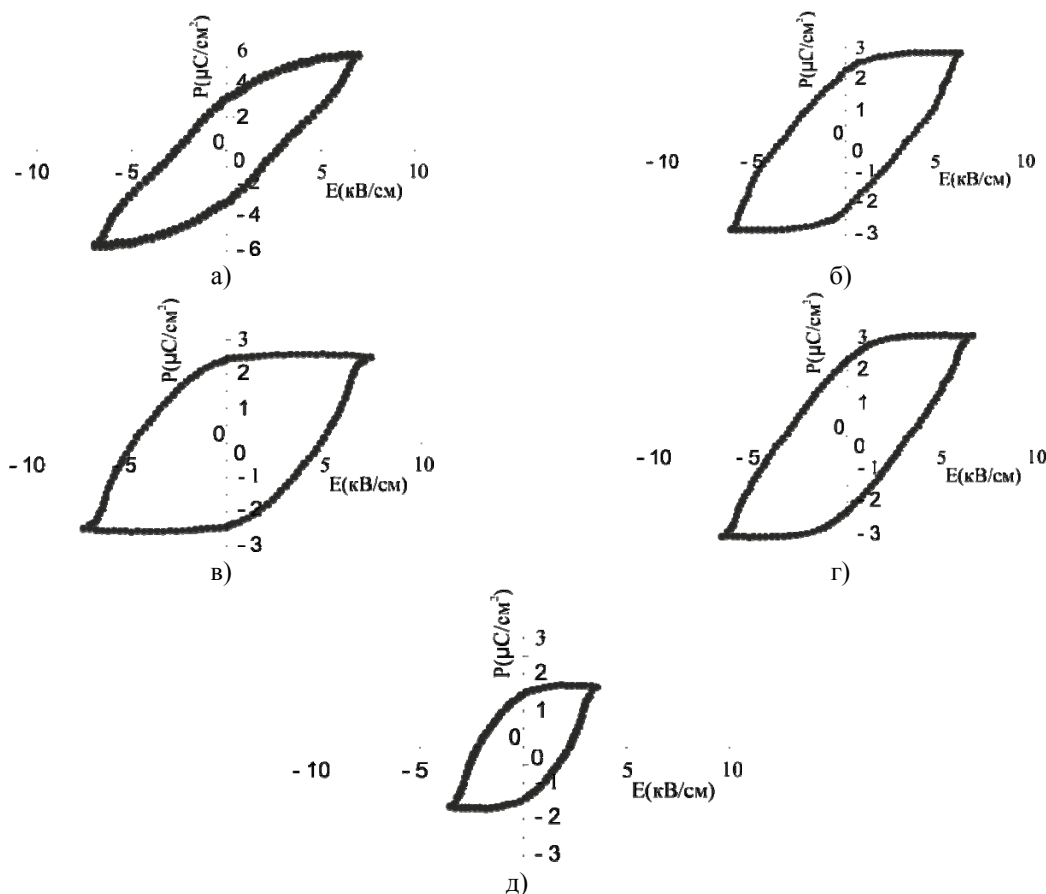


Рисунок 2.1 – Петли гистерезиса SBT-пленок, полученных золь гель методом на основе неорганических соединений металлов с мольным соотношением Sr:Bi:Ta:

- (а) 1,4:2,2:2,0; (б) 1,2:2,2:2,0; (в) 1:2,4:2,0; (г) 1,2:2,3:2,0; (д) 0,8:2,2:2,0

Таблица 2.1 – Сегнетоэлектрические свойства SBT – пленок, полученных золь-гель методом

Образцы	Мольное соотношение Sr:Bi:Ta				
	1,4:2,2:2,0	1,2:2,2:2,0	1:2,4:2,0	1,2:2,3:2,0	0,8:2,2:2,0
P_r	3,7	2,3	2,4	2,4	1,6
E_c	7,2	6,3	6,9	6,5	3,3

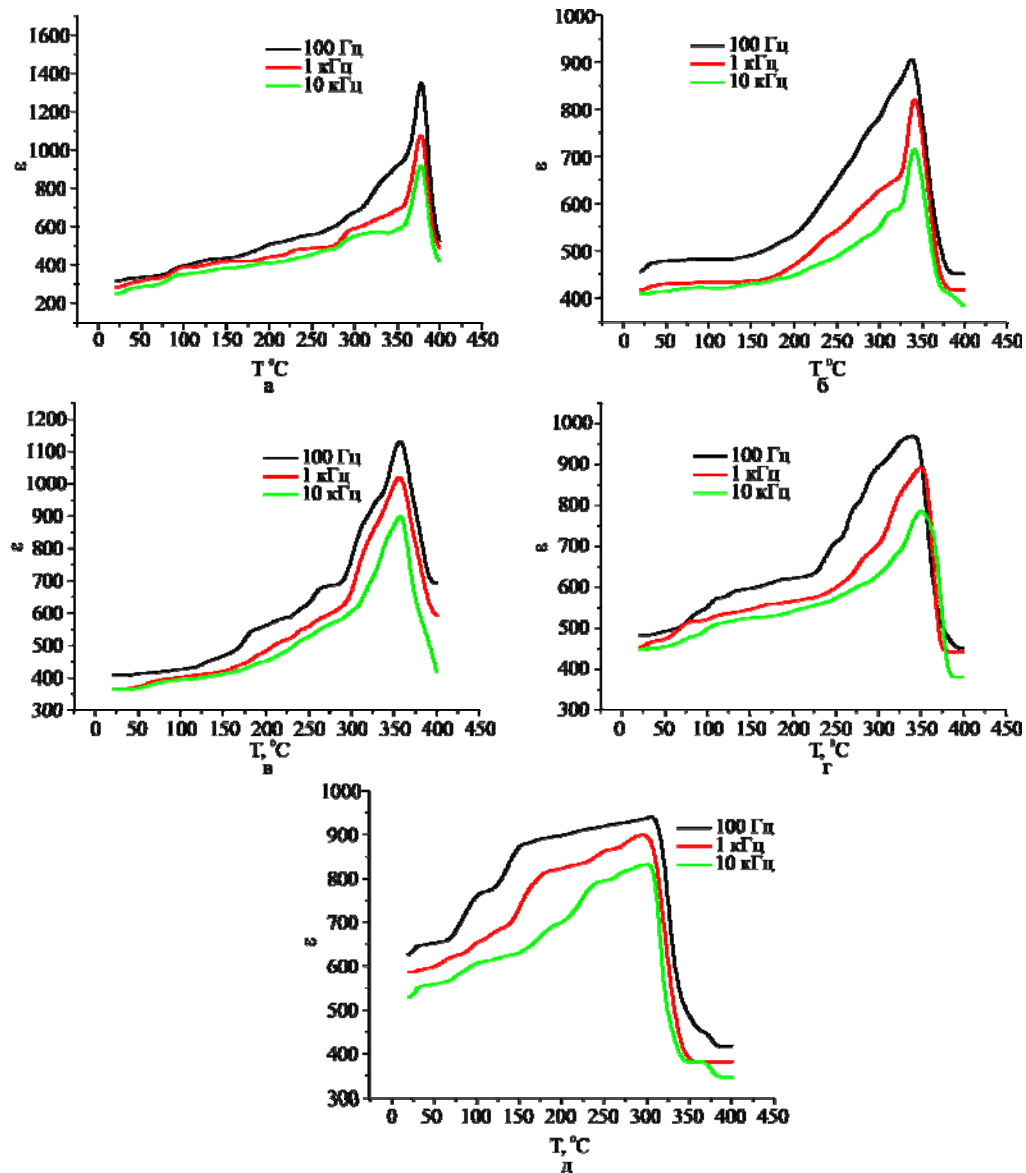


Рисунок 2.2 – Температурные и частотные зависимости диэлектрической проницаемости SBT-плёнок, отожженных при 750°C в течение 2 часов в атмосфере кислорода с мольным соотношением Sr:Bi:Ta: (а) 1,4:2,2:2,0; (б) 1,2:2,2:2,0; (в) 1:2,4:2,0; (г) 1,2:2,3:2,0; (д) 0,8:2,2:2,0

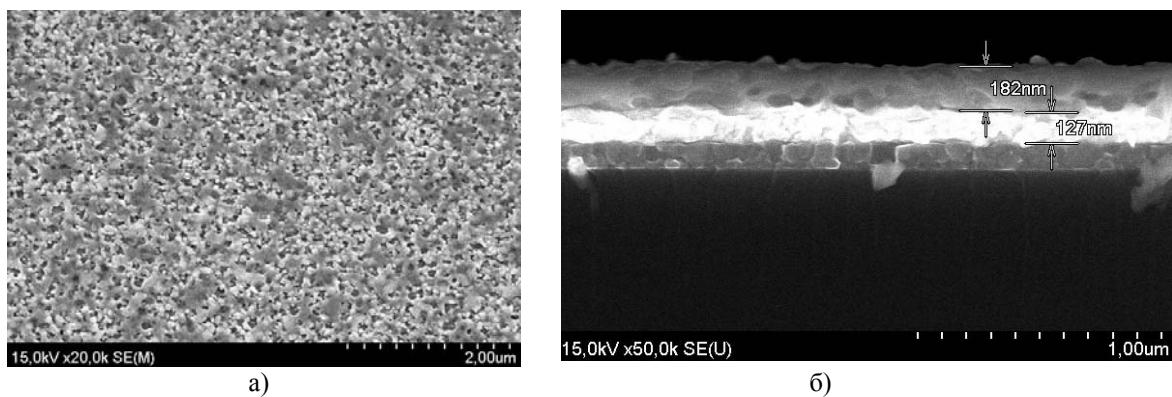


Рисунок 2.3 – РЭМ SBT – плёнки, полученной золь-гель методом:
 (а) РЭМ – изображение SBT – плёнки, (б) РЭМ – скол SBT-плёнки с подслоем платины на монокристаллическом кремнии

На рисунке 2.3 показано изображение поверхности и РЭМ-скан SBT-плёнки с мольным соотношением компонентов 1,4:2,2:2,0 на платиновом подслое с толщиной ~130 нм, отожженной при температуре 750 °С в течение 2 часов. Толщина SBT-плёнки составляет ~180 нм.

Диэлектрические и сегнетоэлектрические свойства SBT-структур, как известно, сильно зависят от стехиометрии. Снижение температуры Кюри T_c является показателем снижения стабильности сегнетоэлектрической фазы. Расширение пиков диэлектрической проницаемости в полученных SBT-плёнках с мольным соотношением Sr:Bi:Ta 0,8:2,2:2,0 (рисунок 2.3 д) может быть также связано с изменением стехиометрии состава. SBT-плёнка с таким мольным соотношением может иметь участки с нарушением фазового состава с различным содержанием компонентов. Эти данные согласуются с потерей сегнетоэлектрических свойств, выражающихся в уменьшении размера петли гистерезиса для SBT-плёнки с мольным соотношением компонентов 0,8:2,2:2,0.

Итак, для рассматриваемых пленок на основе неорганических соединений металлов остаточная поляризация P_r возрастает от 1,4 до 3,7 $\mu\text{C}/\text{cm}^2$, а коэрцитивная сила составляет 3,3–7,2 кВ/см. Исходя из полученных результатов, оптимальные характеристики имеет пленка на основе неорганических соединений металлов с мольным соотношением компонентов 1,4:2,2:2,0.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сегнетоэлектрики и антисегнетоэлектрики* / Смоленский Т.А. [и др.]. – М. : «Наука», 1979.
2. *Nanomaterials: From Research to Applications* / Н. Hosono [et al.]. – Elsevier, 2006. – 448 p.
3. *Yim, J.K. Preparation and Characterization of SrBi₂Ta₂O₉ Thin Films Prepared by Sol-Gel Method* / J.K. Yim, H.J. Chang // *Journal of the Korean Physical Society*. – 2001. – Vol. 39. – P. 232–236.
4. *Общая физика* : практическое пособие по электричеству и магнетизму для студентов физических специальностей университета / Г.А. Баявич, М.Т. Баранов, И.В. Семченко; М-во образования РБ, Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2010. – 148 с.
5. *Наноструктурированные материалы состава Sr(Bi_xTa_x)O₉, полученные золь-гель методом* / В.В. Сидский [и др.] // *Металлофизика и новейшие технологии*. – 2011. – Т. 33. – С. 21–30.
6. *Щербаченко, Л.А.* Исследование поляризации сегнетоэлектриков : методические рекомендации / Л.А. Щербаченко, В.А. Карнаков, С.Д. Марчук. – Иркутск : ИГУ, 2005. – 13 с.
7. *Измеритель иммитанса E7-20* / Руководство по эксплуатации // УШЯИ.411218.012 РЭ. – Минск : ОАО «МНИПИ», 2004.

Поступила в редакцию 30.04.12.

УДК 517.925

О ПОСТРОЕНИИ УРАВНЕНИЙ АБЕЛЯ, ЭКВИВАЛЕНТНЫХ УРАВНЕНИЮ ВИДА $\dot{x} = A(t)(\xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \xi_3 x^3)$

В.А. Бельский¹, В.И. Мироненко²

¹Гомельский инженерный институт МЧС РБ, Гомель

²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

CONSTRUCTING OF ABEL EQUATIONS EQUIVALENTED TO THE EQUATION OF THE FORM $\dot{x} = A(t)(\xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \xi_3 x^3)$

V.A. Belsky¹, V.I. Mironenko²

¹Gomel Engineering Institute of the Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus, Gomel

²F. Scorina Gomel State University, Gomel

Получены достаточные условия совпадения отражающих функций Мироненко у заданного уравнения Абеля $\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3$ и у уравнения $\dot{x} = A(t)(\xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \xi_3 x^3)$, где ξ_i – константы. Полученные результаты иллюстрируются примерами.

Ключевые слова: уравнение Абеля, отражающая функция, эквивалентные уравнения, полиномиальные возмущения.

The sufficient conditions for coinciding Mironenko reflecting functions of Abel equations $\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3$ and $\dot{x} = A(t)(\xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \xi_3 x^3)$ where ξ_i are constants are established. Obtained results are illustrated by examples.

Keywords: Abel equation, reflecting function, equivalence of differential equations, polynomial perturbations.

Введение

Данная работа продолжает исследования, проведенные в работах [1] и [2], в которых с помощью теории отражающей функции (ОФ) [3], [4, с. 62–69], [5, с. 11–16], [6] мы изучали уравнение Риккати. В частности, в [2] мы выполняли построения уравнений Риккати с такой же ОФ, как и у уравнения Риккати вида

$$\dot{x} = A(t)(\xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2),$$

где $A(t)$ – некоторая непрерывная функция, $\xi_i, i = \overline{0, 2}$, – постоянные числа. Однако метод исследования, применяемый в настоящей работе, существенно отличается от метода, используемого в работах [1], [2]. Это отличие объясняется главным образом тем, что, в отличие от уравнения Риккати, вид ОФ уравнения Абеля нам неизвестен.

В данной работе мы будем ссылаться на нашу последнюю статью [7], в которой также рассматривалось уравнение Абеля. Некоторые теоремы, доказанные в [7], будут применяться в нашем исследовании. В этой же работе содержатся также краткие сведения из теории ОФ. Чтобы не повторяться, мы приведем здесь только самые необходимые для понимания данной работы сведения.

Для дифференциальной системы

$$\dot{x} = X(t, x), \quad t \in R, \quad x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset R^n, \quad (0.1)$$

с общим решением в форме Коши $x = \varphi(t; t_0, x_0)$ ОФ определяется формулой $F(t, x) = \varphi(-t; t, x)$. Системы с одной и той же ОФ называются **эквивалентными**. Эквивалентные дифференциальные системы имеют одинаковые операторы сдвига [8, с.11] вдоль решений на симметричном промежутке времени $[-\omega; \omega]$, и, значит, начальные данные $x(-\omega)$ решений краевых задач вида $\Phi(x(\omega), x(-\omega)) = 0$, где Φ – любая функция, для этих систем совпадают. Дифференцируемая вектор-функция $F(t, x)$ будет ОФ дифференциальной системы (0.1) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет основному соотношению

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} X(t, x) + X(-t, F(t, x)) \equiv 0 \quad (0.2)$$

и начальному условию $F(0, x) \equiv x$.

Знание ОФ дифференциальной системы позволяет находить в явном виде отображение за период для этой системы.

Лемма А. [4, с. 65]. Пусть правая часть системы (0.1) 2ω -периодична по t , а ее решения однозначно определяются своими начальными данными. Пусть $F(t, x)$ – ОФ этой системы. Тогда отображение за период $[-\omega; \omega]$ для системы (0.1) можно найти по формуле

$$\varphi(\omega; -\omega, x) = F(-\omega, x),$$

и поэтому решение $\varphi(t; -\omega, x)$ рассматриваемой системы будет 2ω -периодическим тогда и только тогда, когда x есть решение нелинейной дифференциальной системы

$$F(-\omega, x) = x.$$

В основной части данной работы будем широко использовать также следующие утверждения.

Теорема А [9] (см. также [4, с. 171]). Пусть непрерывно дифференцируемые вектор-функции $\Delta_i(t, x) = [\Delta_{1i}(t, x), \Delta_{2i}(t, x), \dots, \Delta_{ni}(t, x)]^T, i = \overline{1, k}$, являются решениями дифференциальной системы

$$\frac{\partial \Delta(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \Delta(t, x)}{\partial x} X(t, x) - \frac{\partial X(t, x)}{\partial x} \Delta(t, x) = 0. \quad (0.3)$$

Тогда все возмущенные системы вида

$$\dot{x} = X(t, x) + \sum_{i=1}^k \alpha_i(t) \Delta_i(t, x),$$

где $\alpha_i(t), i = \overline{0, k}$, – произвольные непрерывные скалярные нечетные функции, эквивалентны системе (0.1) (k – любое число или ∞).

Теорема В [4, с. 79]. Пусть система (0.1) эквивалентна некоторой стационарной системе. Тогда она эквивалентна системе $\dot{x} = X(0, x)$. Эта система – единственная стационарная система в классе эквивалентности, содержащем систему (0.1).

1 Метод исследования и предварительные результаты

Итак, пусть нам задано уравнение Абеля

$$\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3 \quad (1.1)$$

с общим решением в форме Коши $x = \varphi(t; t_0, x_0)$. Целью нашего исследования будет получение условий, при которых для уравнения (1.1) существует уравнение Абеля вида

$$\dot{x} = A(t)(\xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \xi_3 x^3), \quad (1.2)$$

где $\xi_i, i = \overline{0, 3}$, являются константами, с такой же ОФ, как и у уравнения (1.1). Кроме того, в тех случаях, когда такое уравнение существует, мы хотим указать способ его построения.

Как известно, любая функция $\psi(t)$ может быть представлена в виде суммы четной и нечетной функций:

$$\psi_{\text{ч}}(t) := \frac{\psi(t) + \psi(-t)}{2} = \frac{\psi + \bar{\psi}}{2},$$

$$\psi_{\text{н}}(t) := \frac{\psi(t) - \psi(-t)}{2} = \frac{\psi - \bar{\psi}}{2}.$$

Лемма 1.1. ОФ уравнения (1.2) и уравнения $\dot{x} = A_{\text{ч}}(t)(\xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \xi_3 x^3)$ совпадают.

Аналогичное утверждение для уравнения Риккати $\dot{x} = A_{\text{ч}}(t)(\xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2)$ доказано в [2]. Для доказательства леммы 1.1 достаточно в

приводимых рассуждениях заменить многочлен $\xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2$ на $\xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \xi_3 x^3$.

Лемма 1.1 позволяет нам в дальнейшем $A(t)$ в уравнении (1.2) считать четной функцией.

Введем обозначения

$$a_{00} := a_0(0), a_{10} := a_1(0), a_{20} := a_2(0), a_{30} := a_3(0).$$

Лемма 1.2. Пусть уравнение (1.1) эквивалентно какому-либо уравнению вида (1.2). Тогда уравнение (1.2) можно записать в виде

$$\dot{x} = A(t)(a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{30}x^3). \quad (1.3)$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1 из [2], доказанной для уравнения $\dot{x} = A(t)(a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2)$.

Учитывая леммы 1.1, 1.2, переформулируем поставленную выше задачу следующим образом. Для уравнения (1.1), в котором хотя бы одно из чисел $a_{00}, a_{10}, a_{20}, a_{30}$ отлично от нуля, требуется отыскать такую четную функцию $A(t)$, чтобы уравнения (1.1) и (1.3) были эквивалентны, либо показать, что такой функции не существует. Тем самым будет построено уравнение (1.3), либо доказано, что такого уравнения не существует.

Теорема А дает возможность построить класс уравнений Абеля, эквивалентных уравнению (1.1),

$$\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3 + \sum_i \alpha_i(t) \Delta_i(t, x), \quad (1.4)$$

где $\alpha_i(t)$ пробегает класс непрерывных скалярных нечетных функций, а $\Delta_i(t, x)$ являются решениями дифференциального уравнения (0.3), т. е. уравнения

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} + \frac{\partial \Delta}{\partial x} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) - \frac{\partial (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)}{\partial x} \Delta = 0. \quad (1.5)$$

Решив уравнение (1.5) и построив множество уравнений (1.4), мы можем попытаться найти среди этого множества уравнение вида (1.3). Мы, однако, поступим по-другому. Вместо (1.4) мы будем строить множество возмущенных уравнений

$$\dot{x} = A(t)(a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{30}x^3) + \sum_i \alpha_i(t) \Delta_i(t, x), \quad (1.6)$$

где $\Delta_i(t, x)$ – решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} + \frac{\partial \Delta}{\partial x} A(a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{30}x^3) - \frac{\partial (A(a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{30}x^3))}{\partial x} \Delta = 0. \quad (1.7)$$

Этот выбор объясняется тем, что решать уравнение (1.7) нам предпочтительнее, чем уравнение (1.5). В уравнениях (1.6) и (1.7) функция $A(t)$ нам,

разумеется, пока неизвестна. Однако в силу леммы 1.1 мы будем считать ее четной.

Если исходное уравнение (1.1) может быть записано в виде (1.6), то задача решена и уравнение (1.3) – искомое уравнение. Если нет, то уравнения Абеля вида (1.3) для уравнения (1.1) не существует.

Как уже отмечалось, для построения возмущенных уравнений мы будем находить решения уравнения (1.7). Уравнение (1.7) имеет бесконечное множество решений. Как и в [2], будем искать $\Delta(t, x)$ в виде многочлена

$$\Delta(t, x) = r_0(t) + r_1(t)x + r_2(t)x^2 + r_3(t)x^3 \quad (1.8)$$

в котором коэффициенты $r_i(t), i = \overline{0, 3}$, мы считаем дифференцируемыми необходимое число раз.

Лемма 1.3. *Функция $\Delta(t, x)$ вида (1.8) является решением уравнения (1.7) тогда и только тогда, когда функции $r_0(t), r_1(t), r_2(t), r_3(t)$ являются решением системы*

$$\begin{aligned} A(t)[-a_{30}r_2(t) + a_{20}r_3(t)] &= 0, \\ \dot{r}_3(t) + A(t)[-2a_{30}r_1(t) + 2a_{10}r_3(t)] &= 0, \\ \dot{r}_2(t) + A(t)[-3a_{30}r_0(t) + 3a_{00}r_3(t) + \\ &+ a_{10}r_2(t) - a_{20}r_1(t)] = 0, \\ \dot{r}_1(t) + A(t)[2a_{00}r_2(t) - 2a_{20}r_0(t)] &= 0, \\ \dot{r}_0(t) + A(t)[a_{00}r_1(t) - a_{10}r_0(t)] &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Данная лемма является частным случаем леммы 2, доказанной в [7].

Таким образом, функции $r_i(t), i = \overline{0, 3}$, должны удовлетворять переопределенной линейной дифференциально-алгебраической системе, дифференциальная часть которой – линейная система четвертого порядка.

Остановимся немного на системе (1.9). Так как $A(t)$ мы предполагаем отличной от тождественного нуля, то $a_{30}r_2(t) - a_{20}r_3(t) = 0$. Пусть в этом соотношении $a_{30} = 0$. Тогда либо $a_{20} = 0$, либо $r_3(t) \equiv 0$. Если $a_{20} = 0$, то уравнение (1.3) – линейное, и этот наиболее простой случай мы обсудим в конце статьи. Если же $r_3(t) \equiv 0$, но $a_{20} \neq 0$, то уравнение (1.3) есть уравнение Риккати, а для уравнения Риккати не существует полиномиального $\Delta(t, x)$ третьей степени, а только $\Delta(t, x)$ второй степени. Действительно, заменим в уравнении (0.3) $X(t, x)$ правой частью уравнения Риккати $\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2$, а $\Delta(t, x)$ в соответствии с (1.8). Выполняя дифференцирование и приводя подобные слагаемые при различных степенях x , приходим к системе, состоящей из четырех дифференциальных уравнений и недифференциального соотношения $a_2(t)r_3(t) = 0$. Отсюда вытекает, что $r_3(t) \equiv 0$. Таким образом,

для уравнения Риккати не существует полиномиального $\Delta(t, x)$ третьей степени (и любой степени выше третьей, что можно показать аналогичными рассуждениями).

Поэтому, возмущая уравнение Риккати при помощи $\Delta(t, x)$ второй степени, мы не можем получить исходное уравнение Абеля, так как мы предполагаем изначально в уравнении (1.1) $a_3(t)$ отличным от тождественного нуля. Поэтому этот случай не может иметь места.

Итак, случай $a_{30} = 0$ может иметь место, только если уравнение (1.3) есть либо линейное, либо уравнение вида $\dot{x} = a_{00}A(t)$. Поэтому в дальнейшем мы будем полагать в уравнении (1.3) $a_{30} \neq 0$.

Введем обозначение

$$\varphi_0 := 27a_{00}a_{30}^2 + 2a_{20}^3 - 9a_{10}a_{20}a_{30}.$$

Лемма 1.4. *Пусть в уравнении (1.3) $a_{30} \neq 0$. В точках, где $A(t) \neq 0$, система (1.9) эквивалентна системе*

$$\begin{aligned} r_2 a_{30} &= a_{20} r_3, \\ r_1 &= \frac{2a_{10} A r_3 + \dot{r}_3}{2a_{30} A}, \\ r_0 &= \frac{6a_{00} a_{30} A r_3 + a_{20} \dot{r}_3}{6a_{30}^2 A}, \\ \ddot{r}_3 &= \frac{3a_{30} \dot{A} r_3 + 2(a_{20} - 3a_{10} a_{30}) A^2}{3a_{30} A}, \\ \varphi_0 \dot{r}_3 &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Данное утверждение непосредственно следует из леммы 3, доказанной в [7]. Для доказательства леммы 1.4 в приведенных рассуждениях достаточно заменить $a_i(t)$ на $a_{i0}A(t), i = \overline{0, 3}$.

Замечание 1.1. Лемма 1.4 будет справедлива и в том случае, когда $A(t)$ обращается в нуль лишь в изолированных точках. Доказательство этого достигается доопределением найденной функции $\Delta(t, x)$ по непрерывности.

Лемма 1.5. *Пусть коэффициенты уравнения (1.1) удовлетворяют условиям*

$$a_{30} \neq 0, \varphi_0 \neq 0.$$

Тогда если для уравнения (1.1) существует эквивалентное ему уравнение вида (1.3), то уравнение (1.1) с необходимостью является уравнением с разделяющимися переменными.

Доказательство. Воспользуемся результатами леммы 1.4. Из последнего соотношения системы (1.10) находим, что $r_3(t) \equiv const$. Если положить $r_3(t) \equiv a_{30}$, то из остальных соотношений системы (1.10) находим $r_2 \equiv a_{20}, r_1 \equiv a_{10}, r_0 \equiv a_{00}$. Таким образом, в рассматриваемом случае уравнение (1.7) имеет только одно

(с точностью до постоянного множителя) полиномиальное $\Delta(t, x)$, которое имеет вид

$$\Delta(t, x) = a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{30}x^3. \quad (1.11)$$

Если же уравнение (1.1) эквивалентно какому-либо уравнению (1.3), то оно может быть получено возмущением уравнения (1.3) при помощи указанного $\Delta(t, x)$, т. е.

$$\dot{x} = A(t)(a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{30}x^3) + \alpha(t)(a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{30}x^3),$$

где $\alpha(t)$ – некоторая нечетная функция. Мы получили уравнение с разделяющимися переменными. Лемма доказана.

Разумеется, мы предполагаем, что исходное уравнение Абеля (1.1) не является уравнением с разделяющимися переменными, т. е. этот случай не представляет для нас интереса. Из доказанной леммы следует, что содержательный результат мы можем получить только при $\varphi_0 = 0$. Таким образом, лемма 1.5 дает нам важный критерий, а именно: только при выполнении условия $\varphi_0 = 0$ мы будем продолжать исследование уравнения (1.1).

Введем обозначения

$$I(t) := \int A(t)dt, \quad m_0 := \frac{2(a_{20}^2 - 3a_{10}a_{30})}{3a_{30}}.$$

Лемма 1.6. Пусть коэффициенты уравнения (1.1) удовлетворяют условиям $a_{30} \neq 0, \varphi_0 = 0$. Тогда уравнение (1.7) имеет два линейно независимых решения $\Delta_1(t, x)$ и $\Delta_2(t, x)$, причем $\Delta_1(t, x)$ имеет вид (1.11), а $\Delta_2(t, x)$ может быть записано в виде

$$\Delta_2(t, x) = (a_{10}a_{20} - 3a_{00}a_{30} + 2a_{20}^2x + 6a_{20}a_{30}x^2 + 6a_{30}^2x^3)e^{m_0 t} \quad (1.12)$$

при $a_{20}^2 - 3a_{10}a_{30} \neq 0$,

$$\Delta_2(t, x) = 6a_{00}a_{30}I + a_{20} + 3(2a_{10}a_{30}I + a_{30})x + 6a_{20}a_{30}Ix^2 + 6a_{30}^2Ix^3 \quad (1.13)$$

при $a_{20}^2 - 3a_{10}a_{30} = 0$.

Доказательство. Так как выполнены условия леммы 1.4, то функции $r_i(t), i = \overline{0, 3}$, найдем из системы (1.10), в которой, в силу $\varphi_0 = 0$, последнее соотношение обращается в тождество. Предпоследнее соотношение представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка, которое имеет два линейно независимых решения $r_{31}(t), r_{32}(t)$. Из первых трех соотношений этой системы найдем, соответственно, $r_{21}(t), r_{22}(t), r_{11}(t), r_{12}(t)$ и $r_{01}(t), r_{02}(t)$. Тем самым найдены две линейно независимые функции

$$\Delta_1(t, x) = r_0 + r_1x + r_2x^2 + r_3x^3$$

и $\Delta_2(t, x) = r_0 + r_1x + r_2x^2 + r_3x^3$.

Чтобы убедиться в том, что $\Delta_1(t, x)$ и $\Delta_2(t, x)$ имеют именно такой вид, как сказано в условии теоремы, достаточно подставить соответствующие коэффициенты выражений (1.11)–(1.13) в систему (1.9) и установить непосредственными вычислениями, что каждое соотношение системы обращается в тождество. Лемма доказана.

Перейдем теперь к основной части настоящей работы, в которой мы дадим достаточные условия существования для заданного уравнения Абеля (1.1) эквивалентного ему уравнения вида (1.3). Когда такое уравнение существует, мы укажем способ его построения, т. е. построения функции $A(t)$.

2 Основные результаты

Теорема 2.1. Пусть коэффициенты уравнения (1.1) удовлетворяют условиям:

$$a_{30} \neq 0, \varphi_0 = 0, \quad m_0 \neq 0$$

и, кроме того,

$$a_{30}a_2 = a_{20}a_3, \quad (2.1)$$

$$2a_{30}(a_{20}^2 - 3a_{10}a_{30})a_0 = (a_{00}a_{20}^2 + 3a_{00}a_{10}a_{20} - a_{20}a_{10}^2)a_3 + a_{30}(a_{10}a_{20} - 9a_{00}a_{30})a_1, \quad (2.2)$$

$$a_{20}a_3 - 3a_{30}^2a_1 + a_{20}^2\bar{a}_3 - 3a_{30}^2\bar{a}_1 = \frac{3a_{30}^2}{2} \left(\frac{a_{10}\bar{a}_3 - a_{30}\bar{a}_1}{a_{30}a_1 - a_{10}a_3} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{a_{30}a_1 - a_{10}a_3}{a_{10}\bar{a}_3 - a_{30}\bar{a}_1} \right), \quad (2.3)$$

где $\bar{a}_i \equiv a_i(-t)$.

Тогда для уравнения (1.1) существует эквивалентное ему уравнение (1.3), которое может быть записано в виде

$$\dot{x} = \frac{a_{20}^2(a_3 + \bar{a}_3) - 3a_{30}^2(a_1 + \bar{a}_1)}{3a_{30}^2m_0} \times$$

$$\times (a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{30}x^3).$$

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что правая часть исходного уравнения (1.1) может быть представлена в виде (аргумент t для краткости опускаем)

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = A(a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{30}x^3) + \alpha_1\Delta_1(t, x) + \alpha_2\Delta_2(t, x),$$

где A, α_1, α_2 – некоторые непрерывные функции, причем A – четная, α_1, α_2 – нечетные, а $\Delta_1(t, x)$ и $\Delta_2(t, x)$, согласно лемме 1.6, определяются выражениями (1.11), (1.12). Последнее соотношение эквивалентно системе

$$\begin{aligned} a_0 &= a_{00}(A + \alpha_1) + (a_{10}a_{20} - 3a_{00}a_{30})\alpha_2e^{m_0 t}, \\ a_1 &= a_{10}(A + \alpha_1) + 2a_{20}^2\alpha_2e^{m_0 t}, \\ a_2 &= a_{20}(A + \alpha_1) + 6a_{20}a_{30}\alpha_2e^{m_0 t}, \\ a_3 &= a_{30}(A + \alpha_1) + 6a_{30}^2\alpha_2e^{m_0 t}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Положим

$$\alpha_1(t) = \frac{a_{20}^2(a_3 - \bar{a}_3) - 3a_{30}^2(a_1 - \bar{a}_1)}{3a_{30}^2 m_0},$$

$$\alpha_2(t) = \frac{a_{30}(a_1 - \bar{a}_1) - a_{10}(a_3 - \bar{a}_3)}{3a_{30}^2 m_0 (e^{m_0 t} + e^{-m_0 t})}, \quad (2.6)$$

$$A(t) = \frac{a_{20}^2(a_3 + \bar{a}_3) - 3a_{30}^2(a_1 + \bar{a}_1)}{3a_{30}^2 m_0}. \quad (2.7)$$

Отметим, что определенные таким образом функции $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ являются нечетными, а $A(t)$ – четной. Покажем, что при таком выборе функций A, α_1, α_2 все соотношения системы (2.5) обращаются в тождества.

Для начала получим выражение для $\alpha_2 e^{m_0 t}$, которое нам потребуется при доказательстве. Используя выражение для $A(t)$ (2.7) и соотношение (2.3), можем записать $A(t)$ в виде

$$A(t) = \frac{1}{2m_0} \left(\frac{a_{10}\bar{a}_3 - a_{30}\bar{a}_1}{a_{30}a_1 - a_{10}a_3} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{a_{30}a_1 - a_{10}a_3}{a_{10}\bar{a}_3 - a_{30}\bar{a}_1} \right).$$

Отсюда находим, что

$$I(t) = \int A(t) dt = \frac{1}{2m_0} \ln \left| \frac{a_{30}a_1 - a_{10}a_3}{a_{10}\bar{a}_3 - a_{30}\bar{a}_1} \right|.$$

Теперь, используя (2.6), получаем

$$\begin{aligned} \alpha_2 e^{m_0 t} &= \frac{a_{30}(a_1 - \bar{a}_1) - a_{10}(a_3 - \bar{a}_3)}{3a_{30}^2 m_0 (e^{m_0 t} + e^{-m_0 t})} e^{m_0 t} = \\ &= \frac{a_{30}(a_1 - \bar{a}_1) - a_{10}(a_3 - \bar{a}_3)}{3a_{30}^2 m_0 (1 + e^{2m_0 t})} e^{2m_0 t} = \\ &= \frac{a_{30}a_1 - a_{10}a_3}{3a_{30}^2 m_0}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Используя (2.8), нетрудно показать, что все соотношения системы (2.5) обращаются в тождество. Рассмотрим, например, последнее из соотношений (2.5). Заменяя в правой части этого соотношения α_1, α_2, A в соответствии с (2.6), (2.7) и $\alpha_2 e^{m_0 t}$ в соответствии с приведенным выше выражением, получаем

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{a_{30}(2a_{20}^2 + 3a_{10}a_{30})a_3 - 6a_{30}^2 a_1}{3a_{30}^2 m_0} + \\ &+ \frac{6a_{30}^2 (a_{30}a_1 - a_{10}a_3)}{3a_{30}^2 m_0} = \frac{3a_{30}^2 m_0 a_3}{3a_{30}^2 m_0} \equiv a_3. \end{aligned}$$

Аналогично доказываем, что и остальные соотношения (2.5) в силу условий (2.1) и (2.2) обращаются в тождества. Таким образом, мы показали, что уравнение (1.1) может быть записано как возмущение уравнения (2.4) при помощи $\Delta_1(t, x)$ и $\Delta_2(t, x)$, определяемых соотношениями (1.11), (1.12), в которых, в свою очередь, функции $A(t), \alpha_1(t), \alpha_2(t)$ определяются соотношениями (2.6), (2.7). Тогда использование теоремы А завершает доказательство.

Замечание 2.1. Покажем, что выражение

$a_{30}a_1 - a_{10}a_3$, а значит, и выражение $a_{30}\bar{a}_1 - a_{10}\bar{a}_3$, которые присутствуют в соотношениях (2.3) и (2.8), не могут тождественно равняться нулю. Действительно, этот случай, как следует из (2.6), может иметь место только когда $\alpha_2(t) \equiv 0$. А тогда, как нетрудно видеть из системы (2.5), соответствующее возмущенное уравнение, а значит, исходное уравнение Абеля (1.1), является уравнением с разделяющимися переменными. Но мы изначально отвергаем такую возможность. Тем не менее, не обращаясь тождественно в нуль, выражение $a_{30}a_1 - a_{10}a_3$ может обращаться в нуль в некоторых изолированных точках. В таких точках мы доопределим соответствующие выражения по непрерывности, так, чтобы все указанные действия имели смысл.

Пример 2.1. Рассмотрим уравнение Абеля

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 6 \sin 2t e^{2\sin t} + 2(\cos t + \sin t + 9 \sin 2t e^{2\sin t})x + \\ &+ 3(\cos t + \sin t + 6 \sin 2t e^{2\sin t})x^2 + \\ &+ (\cos t + \sin t + \sin 2t e^{2\sin t})x^3. \end{aligned}$$

Для этого уравнения имеем:

$$\begin{aligned} a_{00} &= 0, a_{10} = 2, a_{20} = 3, a_{30} = 1, a_0 = 6t e^{2\sin t}, \\ a_1 &= 2(\cos t + \sin t + 9 \sin 2t e^{2\sin t}), \\ a_2 &= 3(\cos t + \sin t + 6 \sin 2t e^{2\sin t}), \\ a_3 &= (\cos t + \sin t + 6 \sin 2t e^{2\sin t}). \end{aligned}$$

Непосредственными вычислениями убеждаемся, что все условия теоремы 2.1 выполняются. По формуле (2.7) находим

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{1}{6} [9(2 \cos t + 6 \sin 2t e^{2\sin t} - 6 \sin 2t e^{-2\sin t}) - \\ &- 3(4 \cos t + 18 \sin 2t e^{2\sin t} - 18 \sin 2t e^{-2\sin t})] = \cos t. \end{aligned}$$

Таким образом, по теореме 2.1, исходное дифференциальное уравнение эквивалентно дифференциальному уравнению $\dot{x} = (2x + 3x^2 + x^3) \cos t$. Согласно теории ОФ, все продолжимые на отрезок $[-\pi; \pi]$ решения исходного уравнения Абеля будут 2π -периодическими. По формулам (2.6) нетрудно вычислить, что для возмущения полученного дифференциального уравнения были использованы функции

$$\alpha_1(t) \equiv \sin t, \quad \alpha_2(t) \equiv \sin 2t.$$

Теорема 2.2. Пусть коэффициенты уравнения (1.1) удовлетворяют условиям:

$$a_{30} \neq 0, \varphi_0 = 0, m_0 = 0$$

и, кроме того,

$$a_{30}a_2 = a_{20}a_3, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} 3a_{30}^2(a_0 - \bar{a}_0) &= (3a_{00}a_{30} - a_{10}a_{20})(a_3 - \bar{a}_3) + \\ &+ a_{20}a_{30}(a_1 - \bar{a}_1), \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$a_{30}(a_1 + \bar{a}_1) = a_{10}(a_3 + \bar{a}_3), \quad (2.11)$$

$$a_{30}(a_0 + \bar{a}_0) = a_{00}(a_3 + \bar{a}_3). \quad (2.12)$$

Тогда для уравнения (1.1) существует эквивалентное ему уравнение (1.3), причем функция $A(t)$ определяется соотношением

$$2a_{30}A(t) = a_3 + \bar{a}_3 - 2\psi(t)I(t), \quad (2.13)$$

где

$$\psi(t) := a_{30}a_1 - a_{10}a_3 - (a_{30}\bar{a}_1 - a_{10}\bar{a}_3),$$

$$I(t) := \int A(t)dt.$$

Доказательство. Так как $m_0 = 0$, то, согласно лемме 1.6, функции $\Delta_1(t, x)$ и $\Delta_2(t, x)$ определяются соотношениями (1.11), (1.13). Тогда, проводя рассуждения аналогичные тем, которые были проведены в начале доказательства теоремы 2.1, приходим к системе

$$\begin{aligned} a_0 &= a_{00}(A + \alpha_1) + (6a_{00}a_{30}I + a_{20})\alpha_2, \\ a_1 &= a_{10}(A + \alpha_1) + (6a_{10}a_{30}I + 3a_{30})\alpha_2, \\ a_2 &= a_{20}(A + \alpha_1) + 6a_{20}a_{30}I\alpha_2, \\ a_3 &= a_{30}(A + \alpha_1) + 6a_{30}^2I. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Выберем функции $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ следующим образом:

$$\alpha_1(t) = \frac{a_3 - \bar{a}_3}{2a_{30}}, \quad \alpha_2(t) = \frac{\psi}{6a_{30}^2}. \quad (2.15)$$

(При таком выборе $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ являются нечетными). Покажем, что при таком выборе функций $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ и $A(t)$ все соотношения системы (2.14) обращаются в тождества. Рассмотрим, например, предпоследнее из соотношений (2.14). Заменяя в его правой части $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ в соответствии с (2.15), получим

$$a_2 = a_{20}A + a_{20} \frac{a_3 - \bar{a}_3}{2a_{30}} + 6a_{20}a_{30}I \frac{\psi}{6a_{30}^2}.$$

Умножая обе части последнего равенства на $2a_{30}$ и учитывая соотношение (2.13), приходим к равенству $a_{30}a_2 = a_{20}a_3$, которое является тождеством в силу условия (2.9). Рассуждая аналогичным образом, непосредственными вычислениями убеждаемся, что и остальные соотношения (2.14) в силу условий (2.9)–(2.12) обращаются в тождества. Теорема доказана.

Замечание 2.3. Для определения функции $A(t)$ проинтегрируем соотношение (2.13) и, используя само соотношение (2.13), получим линейное уравнение

$$\dot{A} = \left(\frac{\dot{\psi}}{\psi} - \frac{\dot{\psi}}{a_{30}} \right) A + \frac{\dot{a}_{30}\psi - a_{30}\dot{\psi}}{a_{30}\psi}, \quad (2.16)$$

из которого определим функцию $A(t)$ (здесь $a_{30} \equiv \frac{a_3 + \bar{a}_3}{2}$). При этом $\psi(t)$ не может обращаться тождественно в нуль, так как если $\psi(t) \equiv 0$, то $A(t) = a_{30}$, а из (2.15) находим, что $\alpha_2(t) \equiv 0$. Тогда уравнение (1.1) с необходимостью является уравнением с разделяющимися

переменными (см. замечание 2.2). Если же $\psi(t)$ обращается в нуль в счетном числе изолированных точек, то в этих точках мы доопределим правую часть уравнения (2.16) по непрерывности.

Пример 2.2. Для уравнения Абеля

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \text{ch } t + 6\text{sh}^2 t + 3\text{sh } t + \\ &+ 3(\text{ch } t + 6\text{sh}^2 t + \text{sh } t)x + \\ &+ 3(\text{ch } t + 6\text{sh}^2 t)x^2 + (\text{ch } t + 6\text{sh}^2 t)x^3 \end{aligned}$$

имеем $a_{00} = 1, a_{10} = 3, a_{20} = 3, a_{30} = 1$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что для этого уравнения выполняются все условия теоремы 2.2, а, значит, для него существует эквивалентное ему уравнение вида (1.3). Для определения $A(t)$ выпишем уравнение (2.16)

$$\dot{A} = \left(\frac{\text{ch } t}{\text{sh } t} - 6\text{sh } t \right) A + \frac{6\text{sh}^2 t \text{ch } t - 1}{\text{sh } t},$$

интегрируя которое находим $A = \text{ch } t$. Таким образом, уравнение

$$\dot{x} = (1 + 3x + 3x^2 + x^3)\text{ch } t$$

эквивалентно исходному уравнению Абеля.

Замечание 2.4. Условие $a_{30}a_2(t) = a_{20}a_3(t)$

входит в формулировку и теоремы 2.1 и теоремы 2.2 и, таким образом, является необходимым условием существования для исходного уравнения Абеля (1.1) эквивалентного ему уравнения вида (1.3). Другими словами, если такое уравнение существует, то оно с необходимостью имеет вид

$$\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + c_0a_3(t)x^2 + a_3(t)x^3,$$

где c_0 может быть и нулем (мы по-прежнему полагаем $a_{30} \neq 0$).

Нам осталось рассмотреть случай, когда $a_{30} = 0, a_{20} = 0$. (Ранее мы показали, что случай $a_{30} = 0, a_{20} \neq 0$ не может иметь места). Таким образом, уравнение (1.3) принимает вид

$$\dot{x} = A(t)(a_{00} + a_{10}x). \quad (2.17)$$

Для проверки эквивалентности уравнения (1.1) и уравнения (2.17) мы не будем применять описанную выше методику, так как для линейного уравнения мы можем определить ОФ $F(t, x)$. После этого мы составим основное соотношение для ОФ (0.2), а именно

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) + \\ + \bar{a}_0 + \bar{a}_1F + \bar{a}_2F^2 + \bar{a}_3F^3 \equiv 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

В этом соотношении $F(t, x)$ будет выражена через неизвестную функцию $A(t)$. После приведения в (2.18) подобных слагаемых при одинаковых степенях x мы придем к системе из четырех соотношений. Если из этой системы определится четная функция $A(t)$, то исходное уравнение Абеля (1.1) и линейное уравнение (2.17) эквивалентны. Если

же функции $A(t)$, обращающей все четыре упомянутых соотношения в тождества, не существует, то и уравнения (2.17), эквивалентного уравнению (1.1), не существует.

Мы не будем проделывать эти выкладки в общем виде, а выпишем только ОФ уравнения (2.17):

1) если $a_{10} \neq 0$, то

$$F(t, x) = e^{-2a_{10} \int_0^t A(\tau) d\tau} \left(\frac{a_{00}}{a_{10}} + x \right) - \frac{a_{00}}{a_{10}}, \quad (2.19)$$

2) если $a_{10} = 0$, то $F(t, x) = x - 2a_{00} \int_0^t A(\tau) d\tau$.

В справедливости этих выражений нетрудно убедиться проверкой основного соотношения для ОФ.

Пример 2.3. Для уравнения Абеля

$$\dot{x} = (2 \sin t \operatorname{ch} t - \cos 2t)x + x^3(1 + e^{2 \sin 2t}) \sin t$$

имеем $a_{00} = 0, a_{10} = -1, a_{20} = 0, a_{30} = 0$. Уравнение (2.17) имеет вид $\dot{x} = -A(t)x$. Находим ОФ этого уравнения по формуле (2.19)

$$F(t, x) = x e^{2 \int_0^t A(\tau) d\tau}.$$

Запишем основное соотношение для ОФ (2.18). После выполнения дифференцирования и приведения подобных слагаемых при x и x^3 приходим к системе

$$(A - \cos 2t) e^{2 \int_0^t A(\tau) d\tau} = 0,$$

$$(1 + e^{2 \sin 2t} - e^{4 \int_0^t A(\tau) d\tau} - e^{-2 \sin 2t} e^{4 \int_0^t A(\tau) d\tau}) e^{2 \int_0^t A(\tau) d\tau} \sin t = 0.$$

Из первого уравнения этой системы находим $A(t) = \cos 2t$. При этом второе уравнение системы обращается в тождество. Итак, мы нашли уравнение $\dot{x} = -x \cos 2t$, эквивалентное исходному уравнению.

Заключение

Мы получили достаточные условия существования для заданного уравнения Абеля $\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3$ другого уравнения Абеля вида $\dot{x} = A(t)(\xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \xi_3 x^3)$ с такой же ОФ, как и у исходного уравнения. Первым шагом установления такой эквивалентности служит проверка условия $\varphi_0 = 0$. Если это условие выполняется, то мы проверяем условия, содержащиеся в формулировках теорем 2.1 или 2.2. В этих теоремах содержатся также формулы для определения функции $A(t)$. Если же $\varphi_0 \neq 0$, то исследование заканчивается, так как уравнения

вида $\dot{x} = A(t)(\xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \xi_3 x^3)$, эквивалентного исходному уравнению Абеля, не существует.

Для случая $a_{30} = 0, a_{20} = 0$, который не рассматривается в теоремах 2.1 и 2.2, мы указали последовательность шагов, которые необходимо осуществить, чтобы решить поставленную задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бельский, В.А. Уравнения Риккати с одинаковыми отражающими функциями / В.А. Бельский // Известия Нац. Акад. Наук Беларуси, сер. физ.-мат. наук. – 2007. – № 4. – С. 22–27.
2. Бельский, В.А. О построении уравнений, эквивалентных уравнению Риккати в смысле совпадения отражающих функций / В.А. Бельский // Известия Нац. Акад. Наук Беларуси, сер. физ.-мат. наук. – 2008. – № 2. – С. 35–41.
3. Мироненко, В.И. О методе, позволяющем находить начальные данные периодических решений дифференциальных систем и сравнивать отображения за период / В.И. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 1980. – Т. 14. – № 11. – С. 1985–1994.
4. Мироненко, В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В.И. Мироненко. – Гомель : УО ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. – 196 с.
5. Мироненко, В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И. Мироненко. – Минск : Университетское, 1986. – 76 с.
6. V.I. Mironenko. Reflecting function [Electronic resource]. – 2010. – Mode of access : <http://www.reflecting-function.narod.ru>. – Date of access : 16.05.2011.

7. Бельский, В.А. О полиномиальных возмущениях уравнения Абеля, не изменяющих отражающей функции / В.А. Бельский, В.И. Мироненко // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 79–85.

8. Красносельский, М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. – М. : Наука, 1966. – 332 с.

9. Мироненко, В.В. Возмущения дифференциальных систем, не меняющие временных симметрий / В.В. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40. – № 10. – С. 1325–1332.

Поступила в редакцию 06.01.12.

УДК 512.542

ЗАМЕТКА О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП

А.Ф. Васильев¹, Т.И. Васильева², А.В. Сыроквашин³

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

²Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

³Брянский государственный университет им. И.Г. Петровского, Брянск

A NOTE ON INTERSECTIONS OF SOME MAXIMAL SUBGROUPS OF FINITE GROUPS

A.F. Vasilyev¹, T.I. Vasilyeva², A.V. Syrokvashin³

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel

²Belarusian State University of Transport, Gomel

³I.G. Petrovsky Bryansk State University, Bryansk, Russia

В работе результаты В.С. Монахова о том, что для любой разрешимой ненильпотентной конечной группы G ее подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ (подгруппа $\Delta(G)$) совпадает с пересечением всех максимальных (соответственно всех абнормальных максимальных) подгрупп M группы G таких, что $MF(G) = G$, распространены на произвольные конечные группы.

Ключевые слова: конечная группа, максимальная подгруппа, подгруппа Фраттини, θ -подгруппа Фраттини, подгрупповой m -функтор.

In the work V.S.Monahov's results that for any soluble non-nilpotent finite group G its Frattini subgroup $\Phi(G)$ (subgroup $\Delta(G)$) coincides with intersection of all maximal (respectively all abnormal maximal) subgroups M of group G such that $MF(G) = G$, are extended on arbitrary finite groups.

Keywords: finite group, maximal subgroup, Frattini subgroup, Frattini θ -subgroup, subgroup m -functor.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. В 1885 году Фраттини в [1] впервые исследовал подгруппу, равную пересечению всех максимальных подгрупп конечной группы, которая сейчас называется подгруппой Фраттини и обозначается $\Phi(G)$. В 1953 году Гашюц [2] изучил свойства подгруппы $\Delta(G)$, которая определяется как пересечение всех абнормальных максимальных подгрупп группы G , если группа нильпотентна, и как G , если она нильпотентна.

В работах [3], [4] В.С. Монахов показал, что для любой разрешимой ненильпотентной группы G подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ (подгруппа $\Delta(G)$) совпадает с пересечением всех максимальных (соответственно всех абнормальных максимальных) подгрупп M группы G таких, что $MF(G) = G$.

Возникает задача: распространить результаты В.С. Монахова на произвольные группы. Решению этой задачи с использованием функторного метода, разработанного в монографии [5], и посвящена настоящая работа.

1 Предварительные результаты

Используются обозначения и терминология из [6], [7]. Пусть G – группа. Подгруппа Фраттини $\Phi(G) = \bigcap \{M \mid M \text{ – максимальная подгруппа}$

группы $G\}$ и $\Phi(G) = 1$, если $G = 1$. Если G ненильпотентна, то подгруппа $\Delta(G) = \bigcap \{M \mid M \text{ – абнормальная максимальная подгруппа группы } G\}$, если G нильпотентна, то $\Delta(G) = G$.

Через $Z(G)$ обозначается центр G . Подгруппа Фиттинга $F(G)$ – наибольшая нормальная нильпотентная подгруппа группы G ; $F^*(G)$ – наибольшая нормальная квазинильпотентная подгруппа группы G . Напомним [6], что подгруппа $\tilde{F}(G)$ определяется следующими условиями:

- 1) $\tilde{F}(G) \supseteq \Phi(G)$;
- 2) $\tilde{F}(G)/\Phi(G)$ – цоколь группы $G/\Phi(G)$.

Согласно [5, с. 13] отображение θ , которое ставит в соответствие каждой группе G некоторую непустую систему $\theta(G)$ ее подгрупп, называется подгрупповым функтором, если $\theta(G)^\alpha = \theta(G^\alpha)$ для любого изоморфизма α группы G .

Подгрупповой функтор θ называется:

1) эпиморфным, если $(\theta(A))^\varphi \subseteq \theta(B)$ для любого эпиморфизма

$$\varphi: A \rightarrow B,$$

где A и B – группы;

2) m -функтором, если в каждой группе G множество $\theta(G)$ содержит G и некоторые ее максимальные подгруппы;

3) абнормально полным [8], если θ является m -функтором и $\theta(G)$ содержит все абнормальные максимальные подгруппы группы G .

Пусть θ – подгрупповой m -функтор. Для группы G через $\Phi_\theta(G)$ обозначается пересечение всех подгрупп из $\theta(G)$ и $\Phi_\theta(G)$ называется θ -подгруппой Фраттини [5, с. 198].

Если подгрупповой m -функтор θ является абнормально полным, то $\Phi(G) \subseteq \Phi_\theta(G) \subseteq \Delta(G)$. В случае, когда в группе G множество $\theta(G)$ состоит из G и всех ее максимальных подгрупп, $\Phi(G) = \Phi_\theta(G)$. Если в группе G множество $\theta(G)$ состоит из G и всех ее абнормальных максимальных подгрупп, то $\Phi_\theta(G) = \Delta(G)$.

Теорема 1.1 [6]. Для любой группы G подгруппа $\Delta(G)$ нильпотентна и $\Delta(G)/\Phi(G) = Z(G/\Phi(G))$.

Теорема 1.2 [6]. Для любой группы G выполняется $C_G(\tilde{F}(G)) \subseteq F(G)$.

Идея доказательства следующего результата предложена Л.А. Шеметковым.

Лемма 1.3. Для любой группы G выполняется $F^*(G) \subseteq \tilde{F}(G)$.

Доказательство. Пусть группа G – контр-пример минимального порядка к утверждению леммы.

Если $\Phi(G) \neq 1$, то для $G/\Phi(G)$ утверждение справедливо. Из $F^*(G)/\Phi(G) \subseteq F^*(G/\Phi(G))$ и $\tilde{F}(G/\Phi(G)) = \tilde{F}(G)/\Phi(G)$ заключаем, что $F^*(G) \subseteq \tilde{F}(G)$. Получили противоречие с выбором G .

Пусть $\Phi(G) = 1$. По определению $\tilde{F}(G) = \text{Soc}(G)$. По 13.14.X из [9] $F^*(G) = E(G)F(G)$. Заметим, что $\Phi(E(G)) = 1$. Так как по следствию 13.7.X из [9] $E(G)/Z(E(G))$ – прямое произведение простых неабелевых групп, $Z(E(G)) = F(E(G))$. Отсюда и из (с) теоремы 10.6.A из [7] заключаем, что $E(G) = HZ(E(G))$, где H – дополнение к $Z(E(G))$ в $E(G)$. Тогда H – прямое произведение простых неабелевых групп. Из того, что H – характеристическая подгруппа в $E(G) \trianglelefteq G$, заключаем, что $H \trianglelefteq G$. Из леммы 4.14.A из [7] получаем, что $H \subseteq \text{Soc}(G)$. Отсюда и из $Z(E(G)) \subseteq F(G) \subseteq \tilde{F}(G)$ следует, что $E(G) \subseteq \tilde{F}(G)$. Тогда $F^*(G) = E(G)F(G) \subseteq \tilde{F}(G)$. Получили противоречие с выбором G . Лемма доказана.

Лемма 1.4. Пусть G – нильпотентная группа. Тогда существует абнормальная максимальная подгруппа M группы G такая, что $M\tilde{F}(G) = G$.

Доказательство. Пусть группа G – контр-пример минимального порядка к утверждению леммы. Тогда любая максимальная подгруппа M группы G такая, что $M\tilde{F}(G) = G$, нормальна в G .

Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$. Так как $|G/\Phi(G)| < |G|$, в $G/\Phi(G)$ найдется абнормальная максимальная подгруппа $M/\Phi(G)$, для которой $M/\Phi(G) \tilde{F}(G/\Phi(G)) = G/\Phi(G)$. Заметим, что M – абнормальная максимальная подгруппа G и

$$\tilde{F}(G)/\Phi(G) = \tilde{F}(G/\Phi(G)).$$

Поэтому $M\tilde{F}(G) = G$. Получили противоречие с выбором G .

Будем считать, что $\Phi(G) = 1$. Тогда подгруппа $\tilde{F}(G) = \text{Soc}(G)$.

Пусть $\tilde{F}(G)$ – нильпотентная группа. В $\tilde{F}(G)$ найдется ненормальная силовская подгруппа S . Пусть P – силовская подгруппа группы G такая, что $P \cap \tilde{F}(G) = S$. Для любого $x \in N_G(P)$ выполняется

$$S^x = P^x \cap \tilde{F}(G)^x = P \cap \tilde{F}(G) = S.$$

Поэтому $N_G(P) \subseteq N_G(S) \subseteq M$, где M – некоторая максимальная подгруппа группы G . Отсюда и из леммы Фраттини заключаем, что $G = N_G(S)\tilde{F}(G) = M\tilde{F}(G)$. Ввиду леммы 17.2 из [6] M – абнормальная подгруппа в G . Получили противоречие с выбором G .

Пусть подгруппа $\tilde{F}(G)$ нильпотентна. Тогда $\tilde{F}(G) = F(G) = N_1 \times \dots \times N_t$, где N_i – минимальная нормальная подгруппа группы G , $i = 1, \dots, t$. Пусть $i \in \{1, \dots, t\}$. Так как $\Phi(G) = 1$, то для N_i найдется максимальная подгруппа M_i группы G такая, что $M_i N_i = G$. Заметим, что $M_i \tilde{F}(G) = G$. Согласно выбору группы G получаем, что $M_i \triangleleft G$. Так как N_i абелева, то $N_i \subseteq C_G(N_i)$. Из $M_i \cap N_i = 1$ и $M_i \triangleleft G$ следует, что $M_i \subseteq C_G(N_i)$. Но тогда $G = M_i N_i \subseteq C_G(N_i)$. Отсюда и из теоремы 1.2 заключаем, что $G \subseteq C_G(\tilde{F}(G)) \subseteq F(G)$. Следовательно, G нильпотентна. Получили противоречие с выбором G . Лемма доказана.

2 Основной результат

Теорема. Пусть θ – эпиморфный m -функтор, который является абнормально полным. Тогда θ -подгруппа Фраттини $\Phi_\theta(G)$ группы G совпадает с пересечением всех подгрупп M таких, что $M \in \theta(G)$ и $M\tilde{F}(G) = G$.

Доказательство. Если G нильпотентна, то утверждение теоремы выполняется.

Для нильпотентной группы G обозначим через Φ_1 пересечение всех подгрупп M группы G таких, что $M \in \theta(G)$ и $M\tilde{F}(G) = G$, через Φ_2 пересечение всех подгрупп из $\theta(G)$ группы G , которые содержат $\tilde{F}(G)$. Ясно, что θ -подгруппа Фраттини $\Phi_\theta(G) = \Phi_1 \cap \Phi_2$. Из леммы 1.4 следует, что $\Phi_1 \neq G$.

Предположим, что существуют группы G , для которых $\Phi_1 \neq \Phi_\theta(G)$. Выберем группу G наименьшего порядка с этим свойством.

Пусть $\Phi(G) \neq 1$. Заметим, что $G/\Phi(G)$ нильпотентна и $\tilde{F}(G/\Phi(G)) = \tilde{F}(G)/\Phi(G)$. Так как $|G/\Phi(G)| < |G|$, для $G/\Phi(G)$ утверждение теоремы выполняется. Поскольку θ – эпиморфный m -функтор, $\Phi_\theta(G)/\Phi(G) = \Phi_\theta(G/\Phi(G))$ и $\Phi_1/\Phi(G)$ есть пересечение всех подгрупп $M/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$ таких, что $M/\Phi(G) \in \theta(G/\Phi(G))$ и $M/\Phi(G) \tilde{F}(G/\Phi(G)) = G/\Phi(G)$. Отсюда следует, что $\Phi_1 = \Phi_\theta(G)$. Это противоречит выбору G .

Пусть $\Phi(G) = 1$. В этом случае

$$\tilde{F}(G) = \text{Soc}(G) = N_1 \times \dots \times N_t,$$

где N_i – минимальная нормальная подгруппа группы G для $i = 1, \dots, t$. Ввиду теоремы 1.1 подгруппа $\Delta(G) = Z(G)$.

Выберем в $\Phi_1/\Phi_\theta(G)$ минимальную нормальную подгруппу $R/\Phi_\theta(G)$ группы $G/\Phi_\theta(G)$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $R/\Phi_\theta(G)$ абелева. Так как m -функтор θ является абнормально полным, $\Phi_\theta(G) \subseteq \Delta(G) = Z(G)$. Тогда $\Phi_\theta(G) \subseteq Z(R)$ и R нильпотентна. Поэтому $R \subseteq F(G)$. Отсюда и из $F(G) \subseteq \tilde{F}(G)$ заключаем, что $R \subseteq \Phi_2$. Значит, $R \subseteq \Phi_1 \cap \Phi_2 = \Phi_\theta(G)$, что противоречит выбору подгруппы $R/\Phi_\theta(G)$.

2. Пусть $R/\Phi_\theta(G)$ – неабелева группа. Так как $R/\Phi_\theta(G)$ является минимальной нормальной подгруппой $G/\Phi_\theta(G)$, то

$$R/\Phi_\theta(G) = A_1/\Phi_\theta(G) \times \dots \times A_t/\Phi_\theta(G),$$

где $A_i/\Phi_\theta(G)$ – неабелева простая группа для $i = 1, \dots, t$ и $A_i/\Phi_\theta(G) \cong A_j/\Phi_\theta(G)$ для любых $i, j = 1, \dots, t$. Следовательно, $R/\Phi_\theta(G)$ – полупростая группа. Подгруппа $\Phi_\theta(G) \subseteq \Delta(G) = Z(G)$. Тогда по теореме 13.6.X из [9] $R \subseteq F^*(G)$. Ввиду леммы 1.3 $F^*(G) \subseteq \tilde{F}(G)$. Следовательно, $R \subseteq \Phi_2$. Поэтому $R \subseteq \Phi_1 \cap \Phi_2 = \Phi_\theta(G)$. Получили противоречие с выбором группы $R/\Phi_\theta(G)$. Теорема доказана.

Заключение

Если θ – такой регулярный m -функтор, что в каждой группе G множество $\theta(G)$ состоит из G и всех ее максимальных подгрупп, то из теоремы получается

Следствие 1. Подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ неединичной группы G совпадает с пересечением всех ее максимальных подгрупп M таких, что $M\tilde{F}(G) = G$.

В случае, когда θ – такой регулярный m -функтор, что в каждой группе G множество $\theta(G)$ состоит из G и всех ее абнормальных максимальных подгрупп, из теоремы вытекает

Следствие 2. Подгруппа $\Delta(G)$ нильпотентной группы G совпадает с пересечением всех ее абнормальных максимальных подгрупп M таких, что $M\tilde{F}(G) = G$.

Следующий пример показывает, что в теореме нельзя заменить $\tilde{F}(G)$ на квазинильпотентный радикал $F^*(G)$.

Пример. Пусть $G \cong A_5$ – знакопеременная группа степени 5, K – поле, состоящее из трех элементов. Обозначим через $A = A_K(G)$ фраттиниевский KG -модуль (см. [10]). Ввиду [10] A – неприводимый KG -модуль размерности 4. По известной теореме Гашюца существует фраттиниево расширение $A \rightarrow E \rightarrow G$ такое, что $A \cong \Phi(E)$ и $E/\Phi(E) \cong G$. Из свойств модуля A следует, что группа E не является квазинильпотентной. Заметим, что $F^*(E) = \Phi(E)$. Ясно, что в группе E не существует максимальных подгрупп M таких, что $MF^*(E) = E$. Заметим, что $\Delta(E) = \Phi(E)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Frattini, G. Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.
2. Gaschütz, W. Über die Φ -Untergruppen endlicher Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1953. – Bd. 58. – S. 160–170.
3. Монахов, В.С. Замечание о максимальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 31–33.
4. Монахов, В.С. Замечание о пересечении ненормальных максимальных подгрупп конечных групп / В.С. Монахов // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2004. – № 6 (27). – С. 81.
5. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Мн.: Бел. наука, 2003. – 254 с.
6. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
7. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
8. Селькин, М.В. О пересечении максимальных подгрупп конечных групп / М.В. Селькин, Р.В. Бородич // Вестник СамГУ. Естественнонаучная сер. – 2009. – № 8 (74). – С. 67–76.
9. Huppert, B. Finite group. III. / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1982. – 458 p.
10. Griss, R. The Frattini module / R. Griss, P. Schmid // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30, № 3. – P. 256–266.

Поступила в редакцию 06.02.12.

УДК 517.925

ОТРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

П.П. Вересович

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

THE REFLECTING FUNCTION OF ONE TWO DIMENSIONAL DIFFERENTIAL SYSTEM

P.P. Veresovich

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Установлено, что если первая компонента отражающей функции В.И. Мироненко двумерной дифференциальной системы $\dot{x} = a_0(t, x) + ya_1(t, x)$, $\dot{y} = b_0(t, x) + yb_1(t, x) + y^2b_2(t, x)$ линейна по x и не зависит от y , то вторая ее компонента линейна по y .

Ключевые слова: дифференциальная система, отражающая функция, периодические решения.

It was established, that if the first component of the Mironenko reflecting function of the system $\dot{x} = a_0(t, x) + ya_1(t, x)$, $\dot{y} = b_0(t, x) + yb_1(t, x) + y^2b_2(t, x)$ is linear with respect to x , and independent of y then the second component of the reflecting function is linear with respect to y .

Keywords: differential system, reflecting function, periodic solutions.

Введение

Многие процессы, происходящие в окружающей нас действительности, моделируются системами дифференциальных уравнений. При этом лишь малое количество этих систем интегрируется в квадратурах, а тем более в элементарных функциях. Это обстоятельство вынуждает изучать свойства решений дифференциальных уравнений по виду самих уравнений. Определяющими из этих свойств являются наличие, количество и устойчивость периодических решений дифференциальных систем вида

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x), \quad t \in R, \quad x \in D \subset R^n \quad (0.1)$$

с непрерывно дифференцируемой правой частью. Условия существования 2ω -периодических решений систем (0.1) с правой частью, непериодической по t , или системы, период которой несоизмерим с 2ω , известны [1, с. 487–489]. Методы исследования существования периодических решений систем вида (0.1) с 2ω -периодической правой частью в той или иной степени связаны с отображением за период или отображением Пуанкаре [2, с. 209], [4, с. 8]. Если функция $\varphi(t; t_0, x_0)$ есть общее решение системы (0.1), то под отображением Пуанкаре понимается отображение $P_{t_0}(x) = \varphi(t_0 + 2\omega; t_0, x)$. Но построение отображения Пуанкаре по определению требует знания общего решения системы в форме Коши. Если положить $t_0 = -\omega$, то функция

$P(x) = \varphi(\omega; -\omega, x)$ также будет отображением за период $[-\omega; \omega]$ системы (0.1), и знание этой функции позволит решить все вопросы, связанные с наличием и устойчивостью периодических решений.

1 Используемые определения и утверждения

В.И. Мироненко с помощью введенной им вспомогательной функции $F(t, x) = \varphi(-t; t, x)$, показал [3], что отображение за период можно определить, не зная общего решения дифференциальной системы. Функцию $F(t, x)$ автор назвал отражающей, и если она известна, то отображение за период $[-\omega; \omega]$ определяется формулой $P(x) = \varphi(\omega; -\omega, x) = F[-\omega, x]$. Возможность отыскания отражающей функции без знания общего решения системы (0.1) вытекает из следующего **утверждения** [3]–[5]: *дифференцируемая функция $F(t, x)$ является отражающей функцией системы (0.1) тогда и только тогда, когда она является решением задачи Коши*

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} X(t, x) + X(-t, F) = 0, \quad (1.1)$$

$$F(0, x) \equiv x.$$

Соотношение (1.1) названо В.И. Мироненко основным соотношением для отражающей функции. Известно [4]–[5], что если отражающая

функция для системы (0.1) известна, то начальные данные ее 2ω -периодических решений определяются уже из нелинейного уравнения

$$F[-\omega, x] = x. \quad (1.2)$$

Более полные ссылки на работы, выполненные с использованием понятия отражающей функции и возможностями ее применения, указаны на сайте <http://reflecting-function.narod.ru>.

2 Основные результаты

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_0(t, x) + a_1(t, x)y := P(t, x, y), \\ \dot{y} &= b_0(t, x) + b_1(t, x)y + b_2(t, x)y^2 := Q(t, x, y), \end{aligned} \quad (2.1)$$

правые части которой удовлетворяют условиям существования и единственности решения задачи Коши.

Построим класс таких систем, первая компонента отражающей функции которых линейна по x и не зависит от y .

Пусть $F(t, x, y) = (F_1(t, x), F_2(t, x, y))^T$ – отражающая функция системы (2.1). Для отражающей функции этой системы должно выполняться основное соотношение (1.2). В нашем случае имеем

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} F_{1t}(t, x) \\ F_{2t}(t, x, y) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} F_{1x}(t, x) & F_{1y}(t, x) \\ F_{2x}(t, x, y) & F_{2y}(t, x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(t, x, y) \\ Q(t, x, y) \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} P(-t, F_1(t, x), F_2(t, x, y)) \\ Q(-t, F_1(t, x), F_2(t, x, y)) \end{pmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

при этом $F_1(0, x) = x, F_2(0, x, y) = y$.

Лемма. Пусть первая компонента отражающей функции линейна по x и не зависит от y . Тогда вторая компонента этой отражающей функции имеет вид

$$F_2(t, x, y) = N(t, x) + M(t, x)y,$$

т. е. линейна по y .

Доказательство. Пусть

$$F_1(t, x) = n(t) + m(t)x.$$

Тогда первое тождество основного соотношения примет вид

$$\begin{aligned} \dot{m}(t)x + \dot{n}(t) + m(t)(a_0(t, x) + a_1(t, x)y) + \\ + a_0(-t, m(t)x + n(t)) + \\ + a_1(-t, m(t)x + n(t))F_2(t, x, y) \equiv 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} F_2(t, x, y) = \\ = - \frac{\dot{m}(t)x + \dot{n}(t) + m(t)a_0(t, x) + a_0(-t, m(t)x + n(t))}{a_1(-t, m(t)x + n(t))} - \\ - \frac{m(t)a_1(t, x)}{a_1(-t, m(t)x + n(t))} y. \end{aligned}$$

Обозначив

$$\begin{aligned} N(t, x) = \\ = - \frac{\dot{m}(t)x + \dot{n}(t) + m(t)a_0(t, x) + a_0(-t, m(t)x + n(t))}{a_1(-t, m(t)x + n(t))}, \\ M(t, x) = - \frac{m(t)a_1(t, x)}{a_1(-t, m(t)x + n(t))}, \end{aligned}$$

получаем требуемое утверждение.

Теорема. Пусть выполняются условия леммы. Тогда функции $M(t, x)$ и $N(t, x)$ удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{aligned} N_t(t, x) + a_0 N_x(t, x) + b_0 M(t, x) + \\ + \bar{b}_0 + \bar{b}_1 N(t, x) + \bar{b}_2 N^2(t, x) \equiv 0, \\ M_t(t, x) + a_0 M_x(t, x) + a_1 N_x(t, x) + \\ + (b_1 + \bar{b}_1)M(t, x) + 2\bar{b}_2 N(t, x)M(t, x) \equiv 0, \\ a_1 M_x(t, x) + b_2 M(t, x) + \bar{b}_2 M^2(t, x) \equiv 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} a_i &= a_i(t, x) (i = 0, 1), \\ b_j &= b_j(t, x) (j = 0, 1, 2), \\ \bar{b}_j &= b_j(-t, m(t)x + n(t)) (j = 0, 1, 2). \end{aligned}$$

Доказательство. Запишем основное соотношение для второй компоненты отражающей функции, учитывая $F_2(t, x, y) = N(t, x) + M(t, x)y$.

Имеем

$$\begin{aligned} M_t(t, x)y + N_t(t, x) + \\ + (a_0 + a_1y)(M_x(t, x)y + N_x(t, x)) + \\ + (b_0 + b_1y + b_2y^2)M(t, x) + \\ + \bar{b}_0 + (M(t, x)y + N(t, x))\bar{b}_1 + \\ + (M(t, x)y + N(t, x))^2\bar{b}_2 \equiv 0. \end{aligned}$$

Последнее тождество является квадратным трехчленом по переменной y . Равенство нулю коэффициентов этого трехчлена приводит к системе (2.3).

Из утверждения теоремы и свойств отражающей функции вытекает важное для приложений замечание.

Замечание. Если в качестве первой компоненты отражающей функции системы (2.1) взять конкретную функцию $F_1(t, x)$, в которой $m(0) = 1, n(0) = 0$, то вторая компонента $F_2(t, x)$ этой отражающей функции будет определена лишь при совместности переопределенной системы (2.3), что налагает определенные условия на правые части системы (2.1). В частности, в силу того, что $F_2(0, x, y) = y$ должно быть

$$M(0, x) = 1, N(0, x) = 0.$$

Первое из последних двух равенств дает

$$\begin{aligned} M(0, x) = 1 = - \frac{m(t)a_1(t, x)}{a_1(-t, m(t)x + n(t))} \Big|_{t=0} = \\ = - \frac{a_1(t, x)}{a_1(-t, x)} \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Положим

$$a_1(t, x) = \alpha(t)f(t, x),$$

где $\alpha(t)$ – нечетная функция, а $f(t, x)$ такова, что $f(0, x) = 1$. Требование $N(0, x) = 0$ следует понимать как

$$N(0, x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\dot{m}(t)x + \dot{n}(t) + m(t)a_0(t, x) + a_0(-t, m(t)x + n(t))}{a_1(-t, m(t)x + n(t))} = 0.$$

Пусть для 2ω -периодической системы (2.1) система (2.3) совместна и для ее решений $N(t, x)$, $M(t, x)$ выполняются условия

$$M(0, x) = 1,$$

$$N(0, x) = 0.$$

Тогда начальные данные 2ω -периодических решений системы (2.1) являются решениями алгебраической системы

$$\begin{cases} m(-\omega)x + n(-\omega) = x, \\ M(-\omega, x)y + N(-\omega, x) = y. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Еругин, Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н.П. Еругин. – Мн. : «Наука и техника», 1979. – 744 с.

2. Арнольд, В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд. – М. : Наука. – 272 с.

3. Мироненко, В.И. Отражающая функция и классификация периодических дифференциальных систем / В.И. Мироненко // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. XX, № 9. – С. 1635–1638.

4. Мироненко, В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И. Мироненко. – Минск : изд-во «Университетское», 1986. – 76с.

5. Мироненко, В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В.И. Мироненко. – Мин. образ. РБ, УО «ГГУ им. Ф. Скорины». – Гомель, 2004. – 196с.

Поступила в редакцию 01.02.12.

УДК 512.548

ПОЛИАДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МАТРИЦ

А.М. Гальмак

Могилёвский государственный университет продовольствия, Могилёв

POLYADIC GROUPS OF SPACEMATRIX

A.M. Gal'mak

Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev

В статье изучаются полиадические группы пространственных матриц.

Ключевые слова: матрица, вектор-матрица, пространственная матрица, группа, кольцо, l -арная группа.

The polyadic groups of spacematrix are studied in this paper.

Keywords: matrix, vector-matrix, spacematrix, group, ring, l -ary group.

Введение

Данное исследование базируется на результатах работы [1], в которой изучались свойства пространственных матриц с квадратными сечениями фиксированной ориентации (r) , где $r \in \{i, j, k\}$. В частности, для таких пространственных матриц над ассоциативным коммутативным кольцом с единицей было введено понятие определителя ориентации (r) , который, согласно определению 5.1 из [1], равен произведению определителей всех сечений ориентации (r) данной пространственной матрицы. Для кубической матрицы помимо определителей ориентаций (i) , (j) и (k) было введено также понятие полного определителя, который, согласно определению 5.1 из [1], равен произведению определителей ориентаций (i) , (j) и (k) этой кубической матрицы.

В настоящей работе используются те же обозначения, что и в [1]. В частности, $\mathbf{M}_{m \times n \times p}(P)$ – множество всех пространственных матриц размера $m \times n \times p$ над P . Доказано, что во множествах $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$, $\mathbf{M}_{n \times m \times n}(P)$ и $\mathbf{M}_{n \times n \times m}(P)$ имеются подмножества, являющиеся l -арными группами относительно l -арных операций, которые были определены в [2] и которые аналогичны l -арной операции на множестве вектор-матриц [3], а также полиадической операции Э. Поста на множестве полиадических матриц [4]. Для элементов указанных l -арных групп установлена связь между операциями транспонирования и взятия обратного элемента. Получены формулы для нахождения определителя косоугольной пространственной матрицы.

1 Используемые результаты

Во множестве $\mathbf{M}_n(k, P)$ всех k -компонентных квадратных вектор-матриц порядка n над P , где P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, выделим подмножество $\mathbf{GL}_n(k, P)$

всех вектор-матриц, у которых все компоненты обратимы в кольце $\mathbf{M}_n(P)$. Ясно, что обратимость компонент в $\mathbf{M}_n(P)$ можно заменить обратимостью определителей этих компонент в P .

Теорема 1.1 [5, теорема 4.2, замечание 4.1]. Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle \mathbf{GL}_n(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа, которая при $n > 1$ является неполуабелевой. Если σ – нетождественная подстановка, то в этой l -арной группе нет единицы.

Во множестве $\mathbf{GL}_n(k, P)$ выделим подмножество $\mathbf{SL}_n(k, P)$ всех k -компонентных вектор-матриц, у которых определитель каждой компоненты равен единице кольца P .

Предложение 1.1 [6, предложение 1.2]. Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то множество $\mathbf{SL}_n(k, P)$ замкнуто относительно l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$, а универсальная алгебра $\langle \mathbf{SL}_n(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ является l -арной группой.

Теорема 1.2 [7, теорема 4.1]. Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то отображение $\beta: \mathbf{A} \rightarrow \det \mathbf{A}$ является гомоморфизмом l -арной группы $\langle \mathbf{GL}_n(k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ на l -арную группу $\langle P^*, []_l \rangle$, производную от группы P^* .

Символом P^* , как обычно, обозначается группа всех обратимых элементов кольца P .

2 l -Арные группы пространственных матриц

Далее, P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей.

Выделим во множестве $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$ множество $\mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P)$ всех пространственных матриц, у которых все сечения ориентации (i) являются обратимыми матрицами в $\mathbf{M}_n(P)$. Ясно, что множество $\mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P)$ совпадает с множеством всех

пространственных матриц, у которых определители всех сечений ориентации (i) являются обратимыми в P . Так как в ассоциативном коммутативном кольце с единицей обратимость элементов a_1, a_2, \dots, a_s равносильна обратимости их произведения $a_1 a_2 \dots a_s$, то множество $\mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P)$ совпадает с множеством всех пространственных матриц A из $\mathbf{M}_{m \times n \times n}(P)$, у которых определитель $\det^{(i)} A$ обратим в P .

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P) &= \{(a_{ijk}) \in \mathbf{M}_{m \times n \times n}(P) \mid (a_{1jk}), \dots, \\ &\dots, (a_{mjk}) \in \mathbf{M}_n^*(P) = \mathbf{GL}_n(P)\}, \\ \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P) &= \{(a_{ijk}) \in \mathbf{M}_{m \times n \times n}(P) \mid \det(a_{1jk}), \dots, \\ &\dots, \det(a_{mjk}) \in P^*\}, \\ \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P) &= \{A \in \mathbf{M}_{m \times n \times n}(P) \mid \det^{(i)} A \in P^*\}. \end{aligned}$$

Если $(a_{ijk})_1, \dots, (a_{ijk})_l$ – произвольные пространственные матрицы из $\mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P)$,

$$[(a_{ijk})_1 \dots (a_{ijk})_l]_{l, \sigma, m}^{(i)} = (a_{ijk}),$$

то, согласно равенству (4.3) определения операции $[\]_{l, \sigma, m}^{(i)}$ из [1], все сечения ориентации (i) пространственной матрицы (a_{ijk}) , являясь произведением соответствующих сечений ориентации (i) пространственных матриц-сомножителей, имеют определители, обратимые в P . Следовательно, множество $\mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P)$ замкнуто относительно l -арной операции $[\]_{l, \sigma, m}^{(i)}$.

Если $\varphi_{(i)}$ – изоморфизм из леммы 4.1 [1], то его сужение на $\mathbf{GL}_n(m, P)$ является изоморфизмом универсальной алгебры $\langle \mathbf{GL}_n(m, P), [\]_{l, \sigma, m} \rangle$ на универсальную алгебру $\langle \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P), [\]_{l, \sigma, m}^{(i)} \rangle$.

А так как, согласно теореме 1.1, для подстановки $\sigma \in S_m$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, универсальная алгебра $\langle \mathbf{GL}_n(m, P), [\]_{l, \sigma, m} \rangle$ является l -арной группой, которая при $n > 1$ является ненулевой и в которой в случае нетождественности подстановки σ нет единиц, то имеет место

Предложение 2.1. *Если подстановка $\sigma \in S_m$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то универсальная алгебра $\langle \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P), [\]_{l, \sigma, m}^{(i)} \rangle$ является l -арной группой, изоморфной l -арной группе $\langle \mathbf{GL}_n(m, P), [\]_{l, \sigma, m} \rangle$. При $n > 1$ указанные l -арные группы являются ненулевыми. Если σ – нетождественная подстановка, то в этих l -арных группах нет единиц.*

Аналогично множеству $\mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P)$ определяются множества $\mathbf{GL}_{n \times m \times n}^{(j)}(P)$ и $\mathbf{GL}_{n \times n \times m}^{(k)}(P)$, для которых справедливы аналоги предложения 2.1. Все три утверждения можно объединить одной теоремой.

Теорема 2.1. *Если подстановка $\sigma \in S_m$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то универсальные алгебры $\langle \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P), [\]_{l, \sigma, m}^{(i)} \rangle$, $\langle \mathbf{GL}_{n \times m \times n}^{(j)}(P), [\]_{l, \sigma, m}^{(j)} \rangle$*

и $\langle \mathbf{GL}_{n \times n \times m}^{(k)}(P), [\]_{l, \sigma, m}^{(k)} \rangle$ являются изоморфными ненулевыми l -арными группами. Если σ – нетождественная подстановка, то в этих l -арных группах нет единиц.

Теорема 2.2. *Образования*

$$\begin{aligned} \beta_{(i)}: A &\rightarrow \det^{(i)} A, A \in \mathbf{M}_{m \times n \times n}(P), \\ \beta_{(j)}: A &\rightarrow \det^{(j)} A, A \in \mathbf{M}_{n \times m \times n}(P), \\ \beta_{(k)}: A &\rightarrow \det^{(k)} A, A \in \mathbf{M}_{n \times n \times m}(P) \end{aligned}$$

являются соответственно гомоморфизмами l -арных групп

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P), [\]_{l, \sigma, m}^{(i)} \rangle, \\ &\langle \mathbf{GL}_{n \times m \times n}^{(j)}(P), [\]_{l, \sigma, m}^{(j)} \rangle, \\ &\langle \mathbf{GL}_{n \times n \times m}^{(k)}(P), [\]_{l, \sigma, m}^{(k)} \rangle \end{aligned}$$

на l -арную группу $\langle P^, [\]_l \rangle$, производную от группы P^* .*

Доказательство. Определим отображение

$$\psi_{(i)}: \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P) \rightarrow \mathbf{GL}_n(m, P)$$

по правилу

$$\psi_{(i)}: (a_{ijk}) \rightarrow ((a_{1jk}), \dots, (a_{mjk})).$$

Так как $\psi_{(i)} = \varphi_{(i)}^{-1}$, то $\psi_{(i)}$ – изоморфизм l -арной группы $\langle \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P), [\]_{l, \sigma, m}^{(i)} \rangle$ на l -арную группу $\langle \mathbf{GL}_n(m, P), [\]_{l, \sigma, m} \rangle$. Этот изоморфизм можно установить и непосредственно, проведя соответствующие вычисления.

Ясно, что $\beta_{(i)}$ является композицией изоморфизма $\psi_{(i)}$ и гомоморфизма β из теоремы 1.2: $\beta_{(i)} = \psi_{(i)}\beta$. Поэтому $\beta_{(i)}$ – искомый гомоморфизм.

Для отображений $\beta_{(j)}$ и $\beta_{(k)}$ доказательство проводится аналогично. При этом аналогично отображению $\psi_{(i)}$ определяются отображения:

$$\begin{aligned} \psi_{(j)}: \mathbf{GL}_{n \times m \times n}^{(j)}(P) &\rightarrow \mathbf{GL}_n(m, P), \\ \psi_{(j)}: (a_{ijk}) &\rightarrow ((a_{i1k}), \dots, (a_{imk})), \\ \psi_{(k)}: \mathbf{GL}_{n \times n \times m}^{(k)}(P) &\rightarrow \mathbf{GL}_n(m, P), \\ \psi_{(k)}: (a_{ijk}) &\rightarrow ((a_{ij1}), \dots, (a_{ijm})). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

3 Случай кубической матрицы

Выделим во множестве $\mathbf{M}_{n \times n \times n}(P)$ множество $\mathbf{GL}_{n \times n \times n}(P)$ всех кубических матриц, у которых все сечения ориентаций (i) , (j) и (k) являются обратимыми матрицами в $\mathbf{M}_n(P)$, то есть являются элементами множества $\mathbf{GL}_n(P)$. Ясно, что множество $\mathbf{GL}_{n \times n \times n}(P)$ совпадает с множеством всех кубических матриц, у которых определители всех сечений ориентаций (i) , (j) и (k) обратимы в P , а также с множеством всех кубических матриц, у которых полный определитель обратим в P .

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{GL}_{n \times n \times n}(P) &= \{(a_{ijk}) \in \mathbf{M}_{n \times n \times n}(P) \mid (a_{rjk}), (a_{irk}), \\ &(a_{ijr}) \in \mathbf{GL}_n(P), r = 1, \dots, n\}, \\ \mathbf{GL}_{n \times n \times n}(P) &= \{(a_{ijk}) \in \mathbf{M}_{n \times n \times n}(P) \mid \det(a_{rjk}), \\ &\det(a_{irk}), \det(a_{ijr}) \in P^*, r = 1, \dots, n\}, \\ \mathbf{GL}_{n \times n \times n}(P) &= \{A \in \mathbf{M}_{n \times n \times n}(P) \mid \det A \in P^*\}. \end{aligned}$$

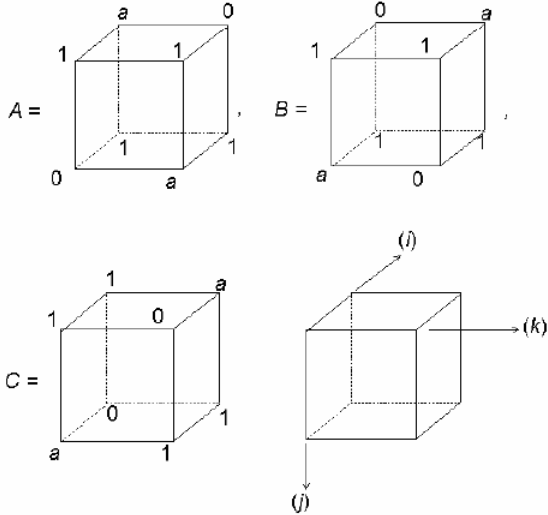
Ясно, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{GL}_{\text{пхлхл}}(P) = \\ & = \mathbf{GL}_{\text{пхлхл}}^{(i)}(P) \cap \mathbf{GL}_{\text{пхлхл}}^{(j)}(P) \cap \mathbf{GL}_{\text{пхлхл}}^{(k)}(P). \end{aligned}$$

Возникает вопрос: *будет ли множество $\mathbf{GL}_{\text{пхлхл}}(P)$ замкнутым относительно l -арных операций $[\]_{l,\sigma,m}^{(i)}$, $[\]_{l,\sigma,m}^{(j)}$ и $[\]_{l,\sigma,m}^{(k)}$?*

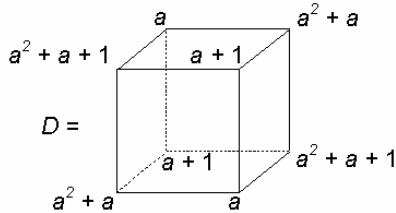
Покажем, что ответ на поставленный вопрос является отрицательным. Для этого нам понадобится следующая

Лемма 3.1. Пусть



кубические матрицы из $\mathbf{M}_{2 \times 2 \times 2}(P)$, где P – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей 1. Тогда

- 1) $A, B, C \in \mathbf{GL}_{2 \times 2 \times 2}(P) \Leftrightarrow a \in P^*$;
- 2) $[ABC]_{3,(12),2}^{(i)} = D = (d_{ijk})$, где



$$\begin{aligned} & 3) \det(d_{ijk}) = \det(d_{2jk}) = -a^2, \det^{(i)}D = a^4, \\ & \det(d_{i1k}) = \det(d_{i2k}) = a^2(a+1)^2, \det^{(j)}D = a^4(a+1)^4, \\ & \det(d_{ij1}) = \det(d_{ij2}) = (a+1)^2, \det^{(k)}D = (a+1)^4; \end{aligned}$$

$$4) D \in \mathbf{GL}_{2 \times 2 \times 2}^{(i)}(P) \Leftrightarrow a \in P^*,$$

$$D \in \mathbf{GL}_{2 \times 2 \times 2}^{(j)}(P) \Leftrightarrow a, a+1 \in P^*,$$

$$D \in \mathbf{GL}_{2 \times 2 \times 2}^{(k)}(P) \Leftrightarrow a+1 \in P^*;$$

$$5) \det D = a^8(a+1)^8,$$

$$D \in \mathbf{GL}_{2 \times 2 \times 2}(P) \Leftrightarrow a, a+1 \in P^*.$$

Доказательство. 1) Полагаем

$$A = (a_{ijk}), B = (b_{ijk}), C = (c_{ijk}).$$

Выпишем определители всех сечений ориентаций (i), (j) и (k) кубической матрицы A:

$$\begin{aligned} \det(a_{1jk}) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a, \\ \det(a_{2jk}) &= \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = a \end{aligned} \quad (3.1)$$

– определители сечений ориентации (i);

$$\begin{aligned} \det(a_{i1k}) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} = -a, \\ \det(a_{i2k}) &= \det \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -a \end{aligned} \quad (3.2)$$

– определители сечений ориентации (j);

$$\begin{aligned} \det(a_{ij1}) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = 1, \\ \det(a_{ij2}) &= \det \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

– определители сечений ориентации (k).

Если $A \in \mathbf{GL}_{2 \times 2 \times 2}(P)$, то из (3.1) вытекает обратимость элемента a в P . Если же a обратим в P , то элемент $-a$ также обратим в P . Тогда из (3.1)–(3.3) следует $A \in \mathbf{GL}_{2 \times 2 \times 2}(P)$.

Выпишем определители всех сечений ориентаций (i), (j) и (k) кубической матрицы B:

$$\begin{aligned} \det(b_{1jk}) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} = -a, \\ \det(b_{2jk}) &= \det \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -a, \\ \det(b_{i1k}) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a, \\ \det(b_{i2k}) &= \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = a, \\ \det(b_{ij1}) &= \det \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1, \\ \det(b_{ij2}) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $B \in \mathbf{GL}_{2 \times 2 \times 2}(P)$ тогда и только тогда, когда элемент a обратим в P .

Выпишем определители всех сечений ориентаций (i), (j) и (k) кубической матрицы C:

$$\begin{aligned} \det(c_{1jk}) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = 1, \\ \det(c_{2jk}) &= \det \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1, \\ \det(c_{i1k}) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} = a, \\ \det(c_{i2k}) &= \det \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a, \\ \det(c_{ij1}) &= \det \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -a, \\ \det(c_{ij2}) &= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix} = -a. \end{aligned}$$

Следовательно, $C \in \mathbf{GL}_{2 \times 2 \times 2}(P)$ тогда и только тогда, когда элемент a обратим в P .

2) Так как

$$\begin{aligned} (d_{1jk}) &= (a_{1jk})(b_{2jk})(c_{1jk}) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & a+1 \\ a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+a+1 & a+1 \\ a^2+a & a \end{pmatrix}, \\ (d_{2jk}) &= (a_{2jk})(b_{1jk})(c_{2jk}) = \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a & a \\ a+1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a^2+a \\ a+1 & a^2+a+1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

то верно равенство из 2).

3) Имеем

$$\begin{aligned} \det(d_{1jk}) &= \begin{vmatrix} a^2+a+1 & a+1 \\ a^2+a & a \end{vmatrix} = -a^2, \\ \det(d_{2jk}) &= \begin{vmatrix} a & a^2+a \\ a+1 & a^2+a+1 \end{vmatrix} = -a^2, \end{aligned}$$

откуда следует $\det^{(i)}D = a^4$.

Имеем

$$\begin{aligned} \det(d_{i1k}) &= \begin{vmatrix} a^2+a+1 & a+1 \\ a & a^2+a \end{vmatrix} = a^2(a+1)^2, \\ \det(d_{i2k}) &= \begin{vmatrix} a^2+a & a \\ a+1 & a^2+a+1 \end{vmatrix} = a^2(a+1)^2, \end{aligned}$$

откуда следует $\det^{(i)}D = a^4(a+1)^4$.

Имеем

$$\begin{aligned} \det(d_{ij1}) &= \begin{vmatrix} a^2+a+1 & a^2+a \\ a & a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^2, \\ \det(d_{ij2}) &= \begin{vmatrix} a+1 & a \\ a^2+a & a^2+a+1 \end{vmatrix} = (a+1)^2, \end{aligned}$$

откуда следует $\det^{(k)}D = (a+1)^4$.

4) Если $D \in \mathbf{GL}_{2 \times 2 \times 2}^{(i)}(P)$, то из первого равенства в 3) следует обратимость в P элемента a .

Если же элемент a обратим в P , то элемент a^2 также обратим в P . Следовательно, $D \in \mathbf{GL}_{2 \times 2 \times 2}^{(i)}(P)$. Оставшиеся два соотношения доказываются аналогично.

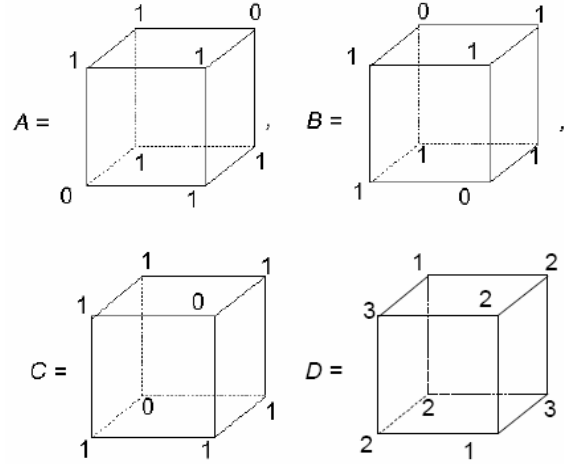
5) Следует из 3) и 4). Лемма доказана.

Пример 3.1. Положим в лемме 3.1 P – кольцо всех целых чисел. Тогда, согласно 1), $A, B, C \in \mathbf{GL}_{2 \times 2 \times 2}(\mathbb{Z})$ тогда и только тогда, когда $a = 1$ или $a = -1$.

Если $a = 1$, то элемент $a + 1 = 2$ необратим в \mathbb{Z} ; если же $a = -1$, то элемент $a + 1 = 0$ также необратим в \mathbb{Z} . Таким образом, при $a = 1$ или $a = -1$ пространственные матрицы A, B, C принадлежат множеству $\mathbf{GL}_{2 \times 2 \times 2}(\mathbb{Z})$, а пространственная матрица $[ABC]_{3, (12), 2}^{(i)} = D$, согласно 5), не принадлежит этому множеству. Следовательно, множество $\mathbf{GL}_{2 \times 2 \times 2}(\mathbb{Z})$ не является замкнутым относительно операции $[]_{3, (12), 2}^{(i)}$.

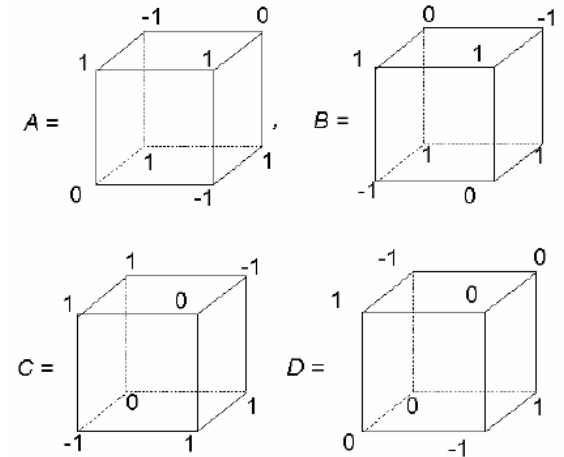
В этом можно убедиться непосредственно, если выписать явный вид пространственных матриц A, B, C и D .

Для $a = 1$ имеем



Так как $\det(d_{ij1}) = \det(d_{ij2}) = 4$, то $D \notin \mathbf{GL}_{2 \times 2 \times 2}(\mathbb{Z})$.

Для $a = -1$ имеем



Так как $\det(d_{ij1}) = \det(d_{ij2}) = 0$, то $D \notin \mathbf{GL}_{2 \times 2 \times 2}(\mathbb{Z})$.

Пример 3.2. Положим в лемме 3.1 P – кольцо всех действительных чисел. Тогда, согласно 1), $A, B, C \in \mathbf{GL}_{2 \times 2 \times 2}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $a \neq 0$, а согласно 5), $D \notin \mathbf{GL}_{2 \times 2 \times 2}(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $a = 0$ или $a = -1$. Поэтому, например, при $a = -1$ имеем $A, B, C \in \mathbf{GL}_{2 \times 2 \times 2}(\mathbb{R})$, но

$$[ABC]_{3, (12), 2}^{(i)} = D \notin \mathbf{GL}_{2 \times 2 \times 2}(\mathbb{R}).$$

Явный вид кубических матриц A, B, C и D тот же, что и в примере 3.1 при $a = -1$.

Примеры 3.1 и 3.2 показывают, что множество $\mathbf{GL}_{n \times n \times n}(P)$ может быть незамкнутым относительно операций $[]_{l, \sigma, m}^{(i)}$, $[]_{l, \sigma, m}^{(j)}$ и $[]_{l, \sigma, m}^{(k)}$. Таким образом, ответ на поставленный перед леммой 3.1 вопрос является отрицательным.

4 Транспонирование косых пространственных матриц

Для любого элемента a n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ решение уравнения $[\underbrace{xa \dots a}_{n-1}] = a$

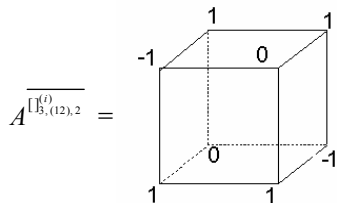
обозначают символом \bar{a} и называют косым элементом для a .

Таким образом, для каждой пространственной вектор-матрицы A l -арной группы $\langle \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P), [\]_{l, \sigma, m}^{(i)} \rangle$ существует косой элемент, который естественно называть косой пространственной матрицей для A . Для обозначения косой пространственной матрицы для A будем использовать символ A^- , так как символ \bar{A} уже используется для обозначения комплексно-сопряженной пространственной матрицы для A .

Подчеркнем, что косые пространственные матрицы определяются для пространственных матриц из $\langle \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P), [\]_{l, \sigma, m}^{(i)} \rangle$, у которых, согласно определению, все сечения ориентации (i) являются обратимыми квадратными матрицами одного и того же порядка n , а подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$.

Вообще говоря, в обозначении косого элемента должен присутствовать символ полиадической операции, который, как правило, не указывают, чтобы не загромождать записи. Однако, в некоторых случаях, присутствие символа полиадической операции в обозначении косого элемента желательно. В таких случаях для обозначения косого элемента a n -арной группы $\langle A, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ будем использовать символ A^- . В частности, $A_{l, \sigma, m}^{(i)-}$ – косая пространственная матрица для пространственной матрицы A из $\langle \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P), [\]_{l, \sigma, m}^{(i)} \rangle$. Отметим, что такое обозначение косой пространственной матрицы, на наш взгляд, является более удобным, чем обозначение косой вектор-матрицы, используемое в [5].

Пример 4.1. Проведя соответствующие вычисления, можно убедиться в том, что в тернарной группе $\langle \mathbf{GL}_{2 \times 2 \times 2}^{(i)}(P), [\]_{3, (12), 2}^{(i)} \rangle$ косой пространственной матрицей для матрицы A из примера 3.1 (случай $a = -1$) является пространственная матрица



Предложение 4.1. Если подстановка σ из S_m удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$,

$$A = (a_{ijk}) \in \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P),$$

то существует косая пространственная матрица $A_{l, \sigma, m}^{(i)-} = (b_{ijk})$, у которой все сечения ориентации (i) имеют следующий вид

$$(b_{rjk}) = (a_{\sigma^{l-2}(r)jk})^{-1} \dots (a_{\sigma(r)jk})^{-1}, \quad r = 1, \dots, m. \quad (4.1)$$

Доказательство. Так как пространственная матрица A является элементом l -арной группы $\langle \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P), [\]_{l, \sigma, m}^{(i)} \rangle$, то существует косая пространственная матрица $A_{l, \sigma, m}^{(i)-} = (b_{ijk})$, для которой

$$[A_{l, \sigma, m}^{(i)-} \underbrace{A \dots A}_{l-1}]_{l, \sigma, m}^{(i)} = A,$$

то есть

$$[(b_{ijk})(a_{ijk}) \dots (a_{ijk})]_{l, \sigma, m}^{(i)} = (a_{ijk}),$$

откуда, используя определение операции $[\]_{l, \sigma, m}^{(i)}$ и условие $\sigma^l = \sigma$, получаем

$$(b_{rjk})(a_{\sigma(r)jk}) \dots (a_{\sigma^{l-2}(r)jk})(a_{rjk}) = (a_{rjk}).$$

Из последнего равенства вытекает (4.1). Предложение доказано.

Аналогично доказываются следующие два предложения.

Предложение 4.2. Если подстановка σ из S_m удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$,

$$A = (a_{ijk}) \in \mathbf{GL}_{n \times m \times m}^{(j)}(P),$$

то существует косая пространственная матрица $A_{l, \sigma, m}^{(j)-} = (b_{ijk})$, у которой все сечения ориентации (j) имеют следующий вид:

$$(b_{irk}) = (a_{i\sigma^{l-2}(r)k})^{-1} \dots (a_{i\sigma(r)k})^{-1}, \quad r = 1, \dots, m.$$

Предложение 4.3. Если подстановка σ из S_m удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$,

$$A = (a_{ijk}) \in \mathbf{GL}_{n \times n \times m}^{(k)}(P),$$

то существует косая пространственная матрица $A_{l, \sigma, m}^{(k)-} = (b_{ijk})$, у которой все сечения ориентации (k) имеют следующий вид:

$$(b_{ijr}) = (a_{ij\sigma^{l-2}(r)})^{-1} \dots (a_{ij\sigma(r)})^{-1}, \quad r = 1, \dots, m.$$

Следующая теорема устанавливает связь между операциями транспонирования и взятия косого элемента для пространственных матриц.

Теорема 4.1. Если подстановка $\sigma \in S_m$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $A = (a_{ijk}) \in \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P)$, то

$$(A_{l, \sigma, m}^{(i)-})^{(c,i)} = (A^{(c,i)})_{l, \sigma^{-1}, m}^{(i)}. \quad (4.2)$$

Доказательство. Положим

$$(A_{l, \sigma, m}^{(i)-})^{(c,i)} = (d_{ijk}), \quad (A^{(c,i)})_{l, \sigma^{-1}, m}^{(i)} = (c_{ijk}).$$

Так как по предложению 4.1 $A_{l, \sigma, m}^{(i)-} = (b_{ijk})$, где

$$(b_{rjk}) = (a_{\sigma^{l-2}(r)jk})^{-1} \dots (a_{\sigma(r)jk})^{-1}$$

для любого $r = 1, \dots, m$, то, используя соответствующий бинарный результат (результат транспонирования произведения матриц равен произведению транспонированных матриц, взятых в обратном порядке), получим

$$\begin{aligned} (d_{rjk}) &= (b_{rjk})' = ((a_{\sigma^{l-2}(r)jk})^{-1} \dots (a_{\sigma(r)jk})^{-1})' = \\ &= ((a_{\sigma(r)jk})^{-1})' \dots ((a_{\sigma^{l-2}(r)jk})^{-1})', \end{aligned}$$

то есть

$$(d_{rjk}) = ((a_{\sigma(r)jk})^{-1})' \dots ((a_{\sigma^{l-2}(r)jk})^{-1})', \quad (4.3)$$

$$r = 1, \dots, m.$$

С другой стороны, так как r -ое сечение ориентации (i) пространственной матрицы A' совпадает с матрицей $(a_{rjk})'$, то, полагая $\tau = \sigma^{-1}$ и используя равенства

$$\tau = \sigma^{l-2}, \tau^2 = \sigma^{l-3}, \dots, \tau^{l-2} = \sigma,$$

предложение 4.1 и соответствующий бинарный результат (операции транспонирования и взятия обратного элемента перестановочны), получим

$$(c_{rjk}) = ((a_{\tau^{l-2}(r)jk})^{-1})' \dots ((a_{\tau(r)jk})^{-1})' =$$

$$= ((a_{\sigma(r)jk})^{-1})' \dots ((a_{\sigma^{l-2}(r)jk})^{-1})' =$$

$$= ((a_{\sigma(r)jk})^{-1})' \dots ((a_{\sigma^{l-2}(r)jk})^{-1})',$$

то есть

$$(c_{rjk}) = ((a_{\sigma(r)jk})^{-1})' \dots ((a_{\sigma^{l-2}(r)jk})^{-1})', \quad (4.4)$$

$$r = 1, \dots, m.$$

Из (4.3) и (4.4) вытекает (4.2). Теорема доказана.

Если σ – цикл длины t из S_m , $s \geq 1$, $l = st + 1$, то $\sigma^l = \sigma$. Поэтому имеет место

Следствие 4.1. Если σ – цикл длины t из S_m , $s \geq 1$, $A \in \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P)$, то

$$(A^{\overline{\Gamma_{st+1, \sigma, m}^{(i)}}})^{(i)} = (A^{(i)})^{\overline{\Gamma_{st+1, \sigma^{-1}, m}^{(i)}}}.$$

В частности, если $s = 1$, то

$$(A^{\overline{\Gamma_{t+1, \sigma, m}^{(i)}}})^{(i)} = (A^{(i)})^{\overline{\Gamma_{t+1, \sigma^{-1}, m}^{(i)}}}.$$

Полагая в следствии 4.1 $t = m$, получим

Следствие 4.2. Если σ – цикл длины m из S_m , $s \geq 1$, $A \in \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P)$, то

$$(A^{\overline{\Gamma_{sm+1, \sigma, m}^{(i)}}})^{(i)} = (A^{(i)})^{\overline{\Gamma_{sm+1, \sigma^{-1}, m}^{(i)}}}.$$

В частности, если $s = 1$, то

$$(A^{\overline{\Gamma_{m+1, \sigma, m}^{(i)}}})^{(i)} = (A^{(i)})^{\overline{\Gamma_{m+1, \sigma^{-1}, m}^{(i)}}}.$$

Полагая в следствии 4.2 $\sigma = (12 \dots m)$, получим

Следствие 4.3. Если $s \geq 1$, $A \in \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P)$, то $(A^{\overline{\Gamma_{sm+1, (12 \dots m), m}^{(i)}}})^{(i)} = (A^{(i)})^{\overline{\Gamma_{sm+1, (m \dots 21), m}^{(i)}}}.$

В частности, если $s = 1$, то

$$(A^{\overline{\Gamma_{m+1, (12 \dots m), m}^{(i)}}})^{(i)} = (A^{(i)})^{\overline{\Gamma_{m+1, (m \dots 21), m}^{(i)}}}.$$

Так как для любой транспозиции $\sigma \in S_m$ верно $\sigma = \sigma^{-1}$, $\sigma^{2m+1} = \sigma$, то, полагая в следствии 4.1 $t = 2$, получим

Следствие 4.4. Если σ – транспозиция из S_m , $s \geq 1$, $A \in \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P)$, то

$$(A^{\overline{\Gamma_{2s+1, \sigma, m}^{(i)}}})^{(i)} = (A^{(i)})^{\overline{\Gamma_{2s+1, \sigma, m}^{(i)}}}.$$

В частности, если $s = 1$, то

$$(A^{\overline{\Gamma_{3, \sigma, m}^{(i)}}})^{(i)} = (A^{(i)})^{\overline{\Gamma_{3, \sigma, m}^{(i)}}}.$$

Если в следствии 4.4 положить $m = 2$, то $\sigma = (12)$ и верно

Следствие 4.5. Если $A \in \mathbf{GL}_{2 \times n \times n}^{(i)}(P)$, то

$$(A^{\overline{\Gamma_{3, (12), 2}^{(i)}}})^{(i)} = (A^{(i)})^{\overline{\Gamma_{3, (12), 2}^{(i)}}}.$$

Замечание 4.1. В каждом из следствий 4.4 и 4.5 косые элементы в левой и правой частях равенств, в отличие от теоремы 4.1 и следствий 4.1–4.3, рассматриваются в одной и той же полиадической группе, поэтому равенства в этих следствиях могут быть записаны проще, без указания полиадической операции. Как, например, в обычных группах:

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'.$$

Замечание 4.2. Все равенства из теоремы 4.1 и её следствий 4.1–4.5 останутся верными, если в них заменить пространственные матрицы из $\mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P)$ пространственными матрицами из $\mathbf{GL}_{n \times m \times n}^{(j)}(P)$ (соответственно пространственными матрицами из $\mathbf{GL}_{n \times n \times m}^{(k)}$), а ориентацию (i) – на ориентацию (j) (соответственно на ориентацию (k)).

5 Определитель косой пространственной матрицы

Теорема 5.1. Если подстановка $\sigma \in S_m$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то

$$\det^{(i)} A^{\overline{\Gamma_{l, \sigma, m}^{(i)}}} = ((\det^{(i)} A)^{-1})^{l-2}, \quad (5.1)$$

где в левой части присутствует косой элемент для $A = (a_{ijk}) \in \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P)$, $[\]_{l, \sigma, m}^{(i)}$, а в правой части присутствует обратный элемент для элемента $\det^{(i)} A$ группы P^* .

Доказательство. Применяя предложение 4.1 и используя определение определителя пространственной матрицы, получим

$$\det^{(i)} A^{\overline{\Gamma_{l, \sigma, m}^{(i)}}} = \det((a_{\sigma^{l-2}(1)jk})^{-1}) \dots (a_{\sigma(1)jk})^{-1} \dots$$

$$\dots \det((a_{\sigma^{l-2}(m)jk})^{-1}) \dots (a_{\sigma(m)jk})^{-1},$$

откуда, используя соответствующие бинарные результаты, коммутативность кольца P и совпадение множеств

$$\{1, \dots, m\}, \{\sigma(1), \dots, \sigma(m)\}, \dots$$

$$\dots, \{\sigma^{l-2}(1), \dots, \sigma^{l-2}(m)\},$$

получим

$$\det^{(i)} A^{\overline{\Gamma_{l, \sigma, m}^{(i)}}} = \det(a_{\sigma^{l-2}(1)jk})^{-1} \dots \det(a_{\sigma(1)jk})^{-1} \dots$$

$$\dots \det(a_{\sigma^{l-2}(m)jk})^{-1} \dots \det(a_{\sigma(m)jk})^{-1} =$$

$$= (\det(a_{\sigma^{l-2}(1)jk}))^{-1} \dots (\det(a_{\sigma(1)jk}))^{-1} \dots$$

$$\dots (\det(a_{\sigma^{l-2}(m)jk}))^{-1} \dots (\det(a_{\sigma(m)jk}))^{-1} =$$

$$= (\det((a_{\sigma(m)jk}) \dots \det(a_{\sigma^{l-2}(m)jk}) \dots \det(a_{\sigma(1)jk}) \dots$$

$$\dots \det(a_{\sigma^{l-2}(1)jk}))^{-1} =$$

$$= (\det(a_{\sigma(1)jk}) \dots \det(a_{\sigma(m)jk}) \dots$$

$$\dots \det(a_{\sigma^{l-2}(1)jk}) \dots \det(a_{\sigma^{l-2}(m)jk}))^{-1} =$$

$$= (\det(a_{1jk}) \dots \det(a_{mjk}) \dots \det(a_{1jk}) \dots \det(a_{mjk}))^{-1} =$$

$$= ((\det^{(i)} A)^{l-2})^{-1} = ((\det^{(i)} A)^{-1})^{l-2}.$$

Следовательно, верно (5.1). Теорема доказана.

Следствие 5.1. Если σ – цикл длины t из S_m , $s \geq 1$, $A \in \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P)$, то

$$\det^{(i)} A^{\overline{\Gamma_{kt+1, \sigma, m}^{(i)}}} = ((\det^{(i)} A)^{-1})^{st-1}.$$

В частности, если $s = 1$, то

$$\det^{(i)} A^{\overline{\Gamma_{kt+1, \sigma, m}^{(i)}}} = ((\det^{(i)} A)^{-1})^{t-1}.$$

Следствие 5.2. Если σ – цикл длины t из S_m , $s \geq 1$, $A \in \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P)$, то

$$\det^{(i)} A^{\overline{\Gamma_{sm+1, \sigma, m}^{(i)}}} = ((\det^{(i)} A)^{-1})^{sm-1}.$$

В частности, если $s = 1$, то

$$\det^{(i)} A^{\overline{\Gamma_{m+1, \sigma, m}^{(i)}}} = ((\det^{(i)} A)^{-1})^{m-1}.$$

Следствие 5.3. Если $s \geq 1$, $A \in \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P)$, то

$$\det A^{\overline{\Gamma_{sm+1, (12 \dots m), m}^{(i)}}} = ((\det^{(i)} A)^{-1})^{sm-1}.$$

В частности, если $s = 1$, то

$$\det A^{\overline{\Gamma_{m+1, (12 \dots m), m}^{(i)}}} = ((\det^{(i)} A)^{-1})^{m-1}.$$

Следствие 5.4. Если σ – транспозиция из S_m , $s \geq 1$, $A \in \mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P)$, то

$$\det A^{\overline{\Gamma_{2s+1, \sigma, m}^{(i)}}} = ((\det^{(i)} A)^{-1})^{2s-1}.$$

В частности, если $s = 1$, то

$$\det A^{\overline{\Gamma_{3, \sigma, m}^{(i)}}} = (\det^{(i)} A)^{-1}.$$

Следствие 5.5. Если $A \in \mathbf{GL}_{2 \times n \times n}^{(i)}(P)$, то

$$\det A^{\overline{\Gamma_{3, (12), 2}^{(i)}}} = (\det^{(i)} A)^{-1}.$$

Замечание 5.1. Все равенства из теоремы 5.1 и её следствий 5.1–5.5 останутся верными, если в них заменить пространственные матрицы из $\mathbf{GL}_{m \times n \times n}^{(i)}(P)$ пространственными матрицами из $\mathbf{GL}_{n \times m \times n}^{(j)}(P)$ (соответственно пространственными матрицами из $\mathbf{GL}_{n \times n \times m}^{(k)}$), а ориентацию (i) – на ориентацию (j) (соответственно на ориентацию (k)).

6 Определитель полиадической степени пространственной матрицы

Для всякого элемента a l -арной полугруппы $\langle A, [] \rangle$ естественным образом определяются натуральные степени

$$a^{[0]} = a, a^{[1]} = [\underbrace{a \dots a}_1],$$

$$a^{[2]} = [\underbrace{a \dots a}_{2-1}], \dots, a^{[s]} = [\underbrace{a \dots a}_{s(l-1)+1}], \dots$$

В частности, для ориентации (i) , всякого натурального s и любой пространственной матрицы A l -арной полугруппы $\langle \mathbf{M}_{m \times n \times n}(P), []_{l, \sigma, m}^{(i)} \rangle$

определяется s -ая степень ориентации (i) :

$$A^{[0, (i)]} = A, A^{[s, (i)]} = [\underbrace{A \dots A}_{s(l-1)+1}]_{l, \sigma, m}^{(i)}.$$

Аналогично, для ориентации (j) , всякого натурального s и любой пространственной матрицы A l -арной полугруппы $\langle \mathbf{M}_{n \times m \times n}(P), []_{l, \sigma, m}^{(j)} \rangle$ определяется s -ая степень ориентации (j) :

$$A^{[0, (j)]} = A, A^{[s, (j)]} = [\underbrace{A \dots A}_{s(l-1)+1}]_{l, \sigma, m}^{(j)}.$$

Для ориентации (k) , всякого натурального s и любой пространственной матрицы A l -арной полугруппы $\langle \mathbf{M}_{n \times n \times m}(P), []_{l, \sigma, m}^{(k)} \rangle$ определяется s -ая степень ориентации (k) :

$$A^{[0, (k)]} = A, A^{[s, (k)]} = [\underbrace{A \dots A}_{s(l-1)+1}]_{l, \sigma, m}^{(k)}.$$

Теорема 6.1 [1] позволяет сформулировать

Предложение 6.1. Для любого целого $s \geq 0$, любой подстановки $\sigma \in S_m$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, и любой пространственной матрицы A l -арной полугруппы $\langle \mathbf{M}_{m \times n \times n}(P), []_{l, \sigma, m}^{(i)} \rangle$ верно равенство

$$\det^{(i)} A^{[s, (i)]} = (\det^{(i)} A)^{s(l-1)+1}. \quad (6.1)$$

Замечание 6.1. В правой части равенства (6.1) присутствует обычная степень элемента полугруппы P .

Для всякого элемента a l -арной группы $\langle A, [] \rangle$ помимо положительных степеней определяются [4], [8] и отрицательные степени: для любого целого $s < 0$ степень $a^{[s]}$ есть решение уравнения

$$[\underbrace{xa \dots a}_{-s(l-1)}] = a.$$

Отрицательную степень можно определить [9] с помощью косоуго элемента:

$$a^{[s]} = [\underbrace{\bar{a} \dots \bar{a}}_{-2s} \underbrace{a \dots a}_{-s(l-3)+1}], s < 0.$$

Так как при $s = -1$

$$a^{[-1]} = [\underbrace{\bar{a}\bar{a} \dots a}_{l-2}] = \bar{a},$$

то $\bar{a} = a^{[-1]}$.

Таким образом, $A^{[-1, (i)]} = \overline{A^{[1, (i)]}}$,

$$A^{[s, (i)]} = [\underbrace{A^{[-1, (i)]} \dots A^{[-1, (i)]}}_{-2s} \underbrace{A \dots A}_{-s(l-3)+1}] \quad (6.2)$$

для всякого целого $s < 0$ и любой пространственной матрицы A l -арной группы

$$\langle \mathbf{GL}_{m \times n \times n}(P), []_{l, \sigma, m}^{(i)} \rangle.$$

Теорема 6.1. Для любого целого s , любой подстановки $\sigma \in S_m$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, и любой пространственной матрицы A l -арной группы $\langle \mathbf{GL}_{m \times n \times n}(P), []_{l, \sigma, m}^{(i)} \rangle$ верно равенство (6.1).

Доказательство. Если $s \geq 0$, то применяется предложение 6.1.

Для $s < 0$, используя теоремы 6.1 [1] и 5.1, а также (6.2), получим

$$\begin{aligned} \det^{(i)} A^{[s, (i)]} &= \det^{(i)} \left[\underbrace{A^{[-1, (i)]} \dots A^{[-1, (i)]}}_{-2s} \underbrace{A \dots A}_{-s(l-3)+1} \right] = \\ &= \underbrace{\det^{(i)} A^{[-1, (i)]} \dots \det^{(i)} A^{[-1, (i)]}}_{-2s} \underbrace{\det^{(i)} A \dots \det^{(i)} A}_{-s(l-3)+1} = \\ &= (((\det^{(i)} A)^{-1})^{l-2})^{-2s} (\det^{(i)} A)^{-s(l-3)+1} = \\ &= (\det^{(i)} A)^{2s(l-2)} (\det^{(i)} A)^{-s(l-3)+1} = (\det^{(i)} A)^{s(l-1)+1}, \end{aligned}$$

то есть верно (6.1). Теорема доказана.

Замечание 6.2. Теорема 6.1 остается верной, если в ней заменить пространственные матрицы из $\mathbf{GL}_{m \times n \times l}^{(i)}(P)$ пространственными матрицами из $\mathbf{GL}_{n \times m \times l}^{(j)}(P)$ (соответственно пространственными матрицами из $\mathbf{GL}_{n \times l \times m}^{(k)}$), а ориентацию (i) – на ориентацию (j) (соответственно на ориентацию (k)).

Замечание 6.3. Теорема 5.1 получается из теоремы 6.1 при $s = -1$.

Замечание 6.4. Теорема 6.1 может быть получена из теоремы 6.1 [7] с использованием приведенной ниже леммы. С помощью этой же леммы можно перейти от теоремы 6.1 [7] к теореме 6.1.

Лемма 6.1. Для любой вектор-матрицы \mathbf{A} из $\mathbf{GL}_n(m, P)$ и любой пространственной матрицы A из $\mathbf{GL}_{m \times n \times l}^{(i)}(P)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \det^{(i)}(\varphi_{(i)}(\mathbf{A})), \\ \det^{(i)} A &= \det(\psi_{(i)}(A)). \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А.М. О вектор-матрицах и пространственных матрицах / А.М. Гальмак //

Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – №1 (10). – С. 75–86.

2. Гальмак, А.М. Полиадические операции на множестве пространственных матриц / А.М. Гальмак // Веснік ВДУ ім. П.М. Машэрава. – 2011. – №2(62). – С. 15–21.

3. Гальмак, А.М. Вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2011. – №1 (37), серия В. – С. 30 – 37.

4. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, №2. – P. 208–350.

5. Гальмак, А.М. Транспонированные вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – №1 (6). – С. 52–56.

6. Гальмак, А.М. О σ -согласованных вектор-матрицах / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – №4 (9). – С. 92–97.

7. Гальмак, А.М. Вектор-определители и определители вектор-матриц / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – №2 (7). – С. 1–5.

8. Русаков С.А. Алгебраические n-арные системы / С.А. Русаков. – Минск : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

9. Гальмак, А.М. n-Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф10РА – 002).

Поступила в редакцию 22.12.11.

УДК 519.21

ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОСТОЯНИЙ СЕТИ С МНОГОРЕЖИМНЫМИ СТРАТЕГИЯМИ В СЛУЧАЕ ЗАВИСИМОСТИ ПАРАМЕТРОВ ПРОЦЕССОВ ОБСЛУЖИВАНИЯ И ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ ОТ СОСТОЯНИЯ УЗЛА

А.Р. Ерёмина

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно

INSENSIBILITY OF STATIONARY DISTRIBUTION OF QUEUEING NETWORK WITH MULTIMODE STRATEGIES STATES WHEN PARAMETERS OF THE SERVICING AND SWITCHING PROCESSES ARE DEPENDENT ON UNIT STATE

A.R. Eryomina

Y. Kupala Grodno State University, Grodno

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания, в которой циркулируют заявки различных типов. Однолинейные узлы могут работать в нескольких режимах. Количество работы по обслуживанию поступающего требования и количество работы по переключению режима работы прибора являются случайными величинами с произвольными функциями распределения. Параметры процессов обслуживания и переключения функционально зависят от общего состояния узла. Устанавливается инвариантность стационарного распределения состояний сети по отношению к функциональным формам распределений величин работ по обслуживанию заявок и переключению режимов при фиксированных первых моментах.

Ключевые слова: сеть массового обслуживания, многорежимное обслуживание, инвариантность.

The open queueing network with polytypic demands is considered in the article. The single line units can work in some strategies. The quantity of the work which are necessary for servicing of demand and for switching from one strategy to another are random variables with arbitrary distribution function. The parameters of servicing and switching processes are dependent on the general unit state. It was proved that stationary distribution is invariant in relation to functional form of distribution of work's quantities which are necessary for servicing of demands and switching of strategies, on condition that first moments are fast.

Keywords: queueing network, stationary distribution, multimode service, insensibility.

Введение

Большую практическую значимость имеет изучение сетей массового обслуживания, в которых обслуживающие приборы в узлах могут работать с различной интенсивностью, так как любые технические средства в процессе их эксплуатации могут полностью или частично выходить из строя, требовать замены или ремонта. В работе [1] были введены в рассмотрение сети массового обслуживания с многорежимными стратегиями, в узлах которых приборы могут функционировать в различных режимах. Каждый режим обслуживания характеризуется своими показателями, при переходе прибора в более «худший» режим его производительность уменьшается. В [2] для открытой сети с многорежимными стратегиями, несколькими типами заявок и дисциплиной обслуживания LCFS PR было найдено стационарное распределение в мультипликативной форме. Однако при этом полагалось, что время обслуживания и время пребывания прибора в каждом режиме имеют экспоненциальное распределение. На практике указанное предположение чаще всего не выполняется. Поэтому в

[3] были рассмотрены аналогичные открытые сети при условии, что время пребывания в каждом режиме имеет показательное распределение, а количество работы по обслуживанию поступающих в узел заявок – произвольное. Было установлено, что стационарное распределение вероятностей состояний указанных сетей не зависит от вида законов распределения величин работ по обслуживанию заявок в узлах, если фиксированы первые моменты этих законов.

В настоящей статье исследуются сети массового обслуживания, для которых одновременно количество работы по обслуживанию поступающего требования и количество работы по переключению с одного режима функционирования прибора на другой являются случайными величинами с произвольными функциями распределения. Причем параметры процессов обслуживания заявок и переключения режимов работы прибора в узле функционально зависят от общего состояния данного узла. Устанавливается инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний указанных сетей по отношению к виду распределений количества

работы по обслуживанию заявок и переключению режимов при фиксированных математических ожиданиях.

1 Постановка задачи

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания, состоящая из N однолинейных узлов, в которой циркулируют заявки M типов. Поступающий в нее поток заявок – простейший с параметром λ . Каждая заявка входного потока независимо от других заявок с вероятностью $p_{0(l,u)}$ направляется в l -й узел и становится заяв-

$$\text{кой } u\text{-го типа } \left(\sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M p_{0(l,u)} = 1, l = \overline{1, N}, u = \overline{1, M} \right).$$

Заявка u -го типа, обслуженная в l -м узле, независимо от других заявок мгновенно с вероятностью $p_{(l,u)(k,v)}$ направляется в k -й узел и становится заявкой типа v , $u = \overline{1, M}$, а с вероятностью $p_{(l,u)0}$ покидает сеть

$$\left(\sum_{k=1}^N \sum_{v=1}^M p_{(l,u)(k,v)} + p_{(l,u)0} = 1, l, k = \overline{1, N}, u, v = \overline{1, M} \right).$$

Дисциплина обслуживания заявок прибором – LCFS PR (заявка, поступающая в l -й узел, вытесняет заявку с прибора и начинает обслуживаться, а вытесненная заявка становится первой в очереди на обслуживание). Таким образом, поступающие в узел заявки имеют абсолютный приоритет. Нумерация заявок в очереди на каждый узел осуществляется от конца очереди к прибору.

В l -м узле находится единственный прибор, который может работать в $r_l + 1$ режимах $0, 1, \dots, r_l$, $l = \overline{1, N}$. По истечении времени пребывания в режиме прибор переходит в другой режим мгновенно, при этом число заявок в узле не меняется.

Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$, где состояние l -го узла в момент времени t есть вектор

$$x_l(t) = (\bar{x}(t), j_l(t)) = (x_{l1}(t), x_{l2}(t), \dots, x_{l,n(l)}(t), j_l(t)),$$

$x_{l1}(t)$ – тип заявки, стоящей последней в очереди на обслуживание в l -м узле в момент времени t , $x_{l2}(t)$ – тип заявки, стоящей предпоследней в очереди на обслуживание в l -м узле в момент времени t и т. д., $x_{l,n(l)-1}(t)$ – тип заявки, стоящей первой в очереди на обслуживание в l -м узле в момент времени t , $x_{l,n(l)}(t)$ – тип заявки, находящейся на обслуживании в l -м узле в момент времени t , $j_l(t)$ – номер режима, в котором работает прибор в l -м узле в момент времени t . Процесс $x(t)$ обладает пространством состояний

$$X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N,$$

где

$$X_l = \left\{ (0, j_l), (x_{l1}, j_l), (x_{l1}, x_{l2}, j_l), \dots : x_{lk} = \overline{1, M}, k = 1, 2, \dots; j_l = \overline{0, r_l} \right\}.$$

Будем использовать следующие операторы:

$$T_u^+(\bar{x}_l) = T_u^+(x_{l1}, \dots, x_{l,n(l)}) = (x_{l1}, \dots, x_{l,n(l)}, u),$$

$$T_l^-(\bar{x}_l) = T_l^-(x_{l1}, \dots, x_{l,n(l)}) = (x_{l1}, \dots, x_{l,n(l)-1}),$$

$$T_{(l,u)}^+(x) = T_{(l,u)}^+(x_1, \dots, x_N) = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N),$$

$$\text{где } \tilde{x}_k = x_k \text{ при } k \neq l, \tilde{x}_l = (T_u^+(\bar{x}_l), j_l),$$

$$T_l^-(x) = T_l^-(x_1, \dots, x_N) = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N),$$

$$\text{где } \tilde{x}_k = x_k \text{ при } k \neq l, \tilde{x}_l = (T_l^-(\bar{x}_l), j_l),$$

$$R_l^{j_l+1}(x) = R_l^{j_l+1}(x_1, \dots, x_N) = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N),$$

$$\text{где } \tilde{x}_k = x_k \text{ при } k \neq l, \tilde{x}_l = (\bar{x}_l, j_l + 1),$$

$$R_l^{j_l-1}(x) = R_l^{j_l-1}(x_1, \dots, x_N) = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N),$$

$$\text{где } \tilde{x}_k = x_k \text{ при } k \neq l, \tilde{x}_l = (\bar{x}_l, j_l - 1),$$

$$l = \overline{1, N}, u = \overline{1, M}.$$

Параметры процессов обслуживания заявок и переключения режимов работы приборов в узлах функционально зависят от общего состояния данных узлов, а именно: количество работы, необходимое для перехода прибора l -го узла из основного (нулевого) режима в режим 1, является случайной величиной с произвольной функцией распределения $\Phi_l(0, \tilde{u})$ и математическим ожиданием $\eta_l(0)$. При этом, если в момент времени t состояние узла есть вектор $(\bar{x}_l, 0)$, то указанный переход выполняется со скоростью $v_l(\bar{x}_l, 0)$.

Для состояния (\bar{x}_l, j_l) , у которого $1 \leq j_l \leq r_l - 1$, количество работы, необходимое для изменения режима (на $j_l - 1$ или $j_l + 1$), также является случайной величиной с произвольной функцией распределения $\Phi_l(j_l, \tilde{u})$ и математическим ожиданием $\eta_l(j_l)$. Если в момент времени t состояние узла есть (\bar{x}_l, j_l) , то выполнение работы по изменению режима ведется со скоростью $v_l(\bar{x}_l, j_l) + \varphi_l(\bar{x}_l, j_l)$, при этом с вероятностью $\frac{v_l(\bar{x}_l, j_l)}{v_l(\bar{x}_l, j_l) + \varphi_l(\bar{x}_l, j_l)}$ прибор l -го узла переходит в режим $j_l + 1$, а с вероятностью

$\frac{\varphi_l(\bar{x}_l, j_l)}{v_l(\bar{x}_l, j_l) + \varphi_l(\bar{x}_l, j_l)}$ – в режим $j_l - 1$. Аналогично,

количество работы, необходимое для перехода прибора l -го узла из режима r_l в $r_l - 1$, имеет произвольную функцию распределения $\Phi_l(r_l, \tilde{u})$ и математическое ожидание $\eta_l(r_l)$. При этом, если в момент времени t состояние узла (\bar{x}_l, r_l) , то выполнение указанной работы происходит со скоростью $\varphi_l(\bar{x}_l, r_l)$.

Математические ожидания всех перечисленных выше случайных величин конечны, т. е.

$$\eta_l(j_l) < +\infty, \quad j_l = \overline{0, r_l}, \quad l = \overline{1, n}.$$

Количество работы по обслуживанию заявок в l -м узле имеет произвольную функцию распределения $B_l(\bar{x}_l, \tilde{u})$, зависящую от очереди заявок \bar{x}_l в этом узле, причём

$$\begin{aligned} \mu_l^{-1}(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{l, n(l)}) = \\ = \int_0^{\infty} (1 - B_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{l, n(l)}, \tilde{u})) d\tilde{u}. \end{aligned}$$

Если в момент времени t состояние l -го узла представляет собой вектор (\bar{x}_l, j_l) и сразу после указанного момента в этот узел поступает заявка u -го типа, которая начинает немедленно обслуживаться, то количество работы по её обслуживанию является случайной величиной $\eta_l(T_u^+(\bar{x}_l))$ с функцией распределения $B_l(T_u^+(\bar{x}_l), \tilde{u})$ и математическим ожиданием $\tau_l(T_u^+(\bar{x}_l)) < \infty$.

Если в момент времени t состояние l -го узла есть вектор (\bar{x}_l, j_l) , то выполнение работы по обслуживанию ведётся со скоростью $\alpha_l(\bar{x}_l, j_l)$, т. е. зависит от состояния узла.

Будем предполагать, что матрица $(p_{(l,u)(k,v)})$, $u, v = \overline{1, M}$, $l, k = \overline{0, N}$, $p_{(0,u)(0,v)} = 0$ неприводима.

Тогда уравнение трафика

$$\varepsilon_{lu} = p_{0(l,u)} + \sum_{k=1}^N \sum_{v=1}^M \varepsilon_{kv} p_{(k,v)(l,u)}, \quad l = \overline{1, N}, \quad u = \overline{1, M} \quad (1.1)$$

имеет единственное положительное решение $(\varepsilon_{lu}; l = \overline{1, N}, u = \overline{1, M})$.

Пусть $\psi_{lk}(t)$ – количество работы, которое осталось выполнить с момента t до момента завершения обслуживания заявки, стоящей в момент времени t на k -й позиции в l -м узле, $\psi_l(t) = (\psi_{l1}(t), \psi_{l2}(t), \dots, \psi_{l, n(l)}(t))$, $(l = \overline{1, N})$. Пусть $\xi_{j_l}(t)$ – количество работы, которое осталось выполнить с момента t для перехода прибора l -го узла из режима j_l в соседний режим, $\xi(t) = (\xi_{1, j_1}(t), \xi_{2, j_2}(t), \dots, \xi_{N, j_N}(t))$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{lk}(t)}{\partial t} &= -\alpha_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lk}, j_l), \\ \frac{\partial \xi_{j_l}(t)}{\partial t} &= -\left(v_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{l, n(l)}, j_l) I_{(j_l \neq \eta_l)} + \right. \\ &\quad \left. + \varphi_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{l, n(l)}, j_l) I_{(j_l = 0)} \right), \end{aligned}$$

когда состояние l -го узла есть $(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{l, n(l)}, j_l)$.

В общем случае процесс $x(t)$ не является марковским, поэтому рассмотрим кусочно-линейный марковский процесс

$$\zeta(t) = (x(t), \psi(t), \xi(t)),$$

полученный путем добавления к $x(t)$ непрерывных компонент $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t))$ и $\xi(t)$.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} P(x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{x(t) = x\}, \\ F(x, y, z) &= F(x, y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1, n(1)}; \dots; \\ &\quad y_{N1}, y_{N2}, \dots, y_{N, n(N)}; \dots; z_{1, j_1}, \dots, z_{N, j_N}) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{x(t) = x; \psi_{l1}(t) < y_{11}, \dots, \psi_{l, n(l)}(t) < y_{l, n(l)}, \\ &\quad l = \overline{1, N}; \xi_{1, j_1}(t) < z_{1, j_1}, \dots, \xi_{N, j_N}(t) < z_{N, j_N}\}, \\ \mathcal{G}_l(\bar{x}_l, j_l) &= v_l(\bar{x}_l, j_l) I_{(j_l \neq \eta_l)} + \varphi_l(\bar{x}_l, j_l) I_{(j_l = 0)}, \\ l &= \overline{1, N}, \quad j_l = \overline{0, r_l}. \end{aligned}$$

2 Основной результат

В [2] был рассмотрен случай, когда $B_l(x_l, \tilde{u}) = 1 - e^{-\mu_l(x_l)\tilde{u}}$ ($\tilde{u} > 0$), т. е. $B_l(x_l, \tilde{u})$ является функцией экспоненциально распределенного времени обслуживания. Тогда $x(t)$ – марковский процесс с непрерывным временем. Установлено, что при выполнении условий

$$\begin{aligned} v_l(\bar{x}_l, j_l - 1) \mu_l(\bar{x}_l, j_l) \varphi_l(T^-(\bar{x}_l), j_l) = \\ = v_l(T^-(\bar{x}_l), j_l - 1) \mu_l(\bar{x}_l, j_l - 1) \varphi_l(\bar{x}_l, j_l), \\ l = \overline{1, N}, \quad j_l = \overline{1, r_l}, \quad n(l) \geq 1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

и неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} q(x) \prod_{l=1}^N \left[\lambda^{n(l)} \prod_{w=1}^{n(l)} \frac{\varepsilon_{l, x_{lw}}}{\mu_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lw}, j_l)} \times \right. \\ \left. \times \prod_{k=1}^{j_l} \frac{v_l(0, k-1)}{\varphi_l(0, k)} \right] < \infty, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$q(x) = \lambda + \sum_{l=1}^N \left(\mu_l^{-1}(\bar{x}_l, j_l) + v_l(\bar{x}_l, j_l) + \varphi_l(\bar{x}_l, j_l) \right),$$

марковский процесс $x(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение имеет мультипликативную форму

$$P(x) = p_1(x_1) p_2(x_2) \times \dots \times p_N(x_N),$$

где

$$\begin{aligned} p_l(\bar{x}_l, j_l) &= \lambda^{n(l)} \prod_{w=1}^{n(l)} \frac{\varepsilon_{l, x_{lw}}}{\mu_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lw}, j_l)} \times \\ &\quad \times \prod_{k=1}^{j_l} \frac{v_l(0, k-1)}{\varphi_l(0, k)} p_l(0, 0), \end{aligned}$$

$\varepsilon_{l, x_{lw}}$ находятся из (1.1), а

$$\begin{aligned} p_l(0, 0) = \\ = \left(\sum_{x_l \in X_l} \lambda^{n(l)} \prod_{w=1}^{n(l)} \frac{\varepsilon_{l, x_{lw}}}{\mu_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lw}, j_l)} \prod_{k=1}^{j_l} \frac{v_l(0, k-1)}{\varphi_l(0, k)} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Для описанных выше сетей, в случае, когда количество работы по обслуживанию поступившей

в узел заявки имеет произвольную функцию распределения $B_l(\bar{x}_l, \tilde{u})$, а количество работы, необходимое для изменения режима (на $j_l - 1$ или $j_l + 1$) – произвольную функцию распределения $\Phi_l(j_l, \tilde{u})$, имеет место следующая теорема.

Теорема. Если выполнены условия

$$v_l(\bar{x}_l, j_l - 1)\alpha_l(\bar{x}_l, j_l)\varphi_l(T^-(\bar{x}_l), j_l) = v_l(T^-(\bar{x}_l), j_l - 1)\alpha_l(\bar{x}_l, j_l - 1)\varphi_l(\bar{x}_l, j_l), \quad (2.3)$$

$$l = \overline{1, N}, j_l = \overline{1, r_l}, n(l) \geq 1, \\ \sum_{x \in X} q(x) \prod_{l=1}^N \left[\lambda^{n(l)} \eta_l(j_l) \prod_{w=1}^{n(l)} \frac{\varepsilon_{l, x_{lw}} \tau_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lw})}{\alpha_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lw}, j_l)} \times \right. \\ \left. \times \prod_{k=1}^{j_l} \frac{v_l(0, k-1)}{\varphi_l(0, k)} \right] < \infty, \quad (2.4)$$

где

$$q(x) = \lambda + \sum_{l=1}^N (\tau_l^{-1}(\bar{x}_l) \alpha_l(\bar{x}_l, j_l) + \eta_l^{-1}(j_l) v_l(\bar{x}_l, j_l) + \eta_l^{-1}(j_l) \varphi_l(\bar{x}_l, j_l)),$$

то процесс $\zeta(t)$ эргодичен, при этом стационарные функции распределения вероятностей состояний $F(x, y, z)$ определяются по формулам

$$F(x, y, z) = p_1(x_1) \times \dots \times p_N(x_N) \times \\ \times \prod_{l=1}^N \prod_{w=1}^{n(l)} \tau_l^{-1}(x_{l1}, \dots, x_{lw}) \times \\ \times \int_0^{y_{lw}} (1 - B_l(x_{l1}, \dots, x_{lw}, \tilde{u})) d\tilde{u} \times \\ \times \prod_{l=1}^N \eta_l^{-1}(j_l) \int_0^{z_{l, j_l}} (1 - \Phi_l(j_l, \tilde{u})) d\tilde{u}, \quad (2.5)$$

где

$$p_l(\bar{x}_l, j_l) = \left(\lambda^{n(l)} \eta_l(j_l) \prod_{w=1}^{n(l)} \frac{\varepsilon_{l, x_{lw}} \tau_l(x_{l1}, \dots, x_{lw})}{\alpha_l(x_{l1}, \dots, x_{lw}, j_l)} \times \right. \\ \left. \times \prod_{k=1}^{j_l} \frac{v_l(0, k-1)}{\varphi_l(0, k)} \right) p_l(0, 0), \quad (2.6)$$

$\varepsilon_{l, x_{lw}}$ находятся из (1.1), а

$$p_l(0, 0) = \left(\sum_{x_l \in X_l} \lambda^{n(l)} \eta_l(j_l) \prod_{w=1}^{n(l)} \frac{\varepsilon_{l, x_{lw}} \tau_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lw})}{\alpha_l(x_{l1}, x_{l2}, \dots, x_{lw}, j_l)} \times \right. \\ \left. \times \prod_{k=1}^{j_l} \frac{v_l(0, k-1)}{\varphi_l(0, k)} \right)^{-1}, \\ x \in X, l = \overline{1, N}.$$

Здесь полагается, что произведение, в котором нижний индекс больше верхнего, равно единице.

Доказательство. Пусть выполнены условия (2.1), (2.2), т. е. в случае, когда $x(t)$ – марковский процесс, существует стационарное эргодическое распределение $x(t)$, тогда и в общем

случае при выполнении условий (2.3), (2.4) существует стационарное эргодическое распределение процесса $\zeta(t)$, так как $\zeta(t)$ получается из $x(t)$ добавлением непрерывных компонент, а $\mu_l^{-1}(\bar{x}_l, j_l) = \tau_l \alpha_l^{-1}(\bar{x}_l, j_l)$. Строгое доказательство этого факта может быть проведено, если учесть, что процесс $\zeta(t)$ является регенерирующим. Функционирование сети схематично можно представить как чередование периодов, когда сеть находится в состоянии «0» (в каждом узле сети нет заявок и прибор работает в нулевом режиме), и периодов занятости сети (в противном случае). Далее доказательство сводится к применению предельной теоремы Смита для регенерирующих процессов [4, с.41], при этом учитывается, что среднее время обслуживания заявки равно среднему времени обслуживания заявки в марковском случае.

Для $F(x, y, z)$ справедлива следующая система дифференциально-разностных уравнений:

$$\lambda F(x, y, z) = \\ = \sum_{l=1}^N \alpha_l(\bar{x}_l, j_l) \left(\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y_{l, n(l)}} - \left(\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y_{l, n(l)}} \right)_{y_{l, n(l)}=0} \right) + \\ + \sum_{l=1}^N \vartheta_l(\bar{x}_l, j_l) \left(\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z_{l, j_l}} - \left(\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z_{l, j_l}} \right)_{z_{l, j_l}=0} \right) + \\ + \lambda \sum_{l=1}^N p_{0(l, x_{l, n(l)})} B_l(\bar{x}_l, y_{l, n(l)}) F(T_l^-(x), y, z) + \\ + \sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M \alpha_l(T_u^+(\bar{x}_l), j_l) p_{(l, u)0} \left(\frac{\partial F(T_{(l, u)}^+(x), y, z)}{\partial y_{l, n(l)+1}} \right)_{y_{l, n(l)+1}=0} + \\ + \sum_{l=1}^N \sum_{s=1, s \neq l}^N \sum_{u=1}^M \alpha_s(T_u^+(\bar{x}_s), j_s) p_{(s, u)(l, x_{l, n(l)})} B_l(\bar{x}_l, y_{l, n(l)}) \times \\ \times \left(\frac{\partial F(T_{(s, u)}^+(T_l^-(x)), y, z)}{\partial y_{s, n(s)+1}} \right)_{y_{s, n(s)+1}=0} + \\ + \sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M \alpha_l(\bar{x}_l, j_l) p_{(l, u)(l, x_{l, n(l)})} B_l(\bar{x}_l, y_{l, n(l)}) \times \\ \times \left(\frac{\partial F(T_{(l, u)}^+(T_l^-(x)), y, z)}{\partial y_{l, n(l)}} \right)_{y_{l, n(l)}=0} + \\ + \sum_{l=1}^N v_l(\bar{x}_l, j_l - 1) \Phi_l(j_l, z_{l, j_l}) \left(\frac{\partial F(R_l^{j_l-1}(x), y, z)}{\partial z_{l, j_l-1}} \right)_{z_{l, j_l-1}=0} + \\ + \sum_{l=1}^N \varphi_l(\bar{x}_l, j_l + 1) \Phi_l(j_l, z_{l, j_l}) \left(\frac{\partial F(R_l^{j_l+1}(x), y, z)}{\partial z_{l, j_l+1}} \right)_{z_{l, j_l+1}=0}, \\ x \in X.$$

Разобьем эту систему уравнений на уравнение локального баланса

$$\lambda F(x, y, z) = \sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M \alpha_l(T_u^+(\bar{x}_l), j_l) p_{(l, u)0} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\frac{\partial F(T_{(l,u)}^+(x), y, z)}{\partial y_{l,n(l)+1}} \right)_{y_{l,n(l)+1}=0}, \quad (2.9) \\ \alpha_l(\bar{x}_l, j_l) & \left(\left(\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y_{l,n(l)}} \right)_{y_{l,n(l)}=0} - \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y_{l,n(l)}} \right) = \\ & = \lambda p_{0(l, x_{l,n(l)})} B_l(\bar{x}_l, y_{l,n(l)}) F(T_l^-(x), y, z) + \quad (2.10) \\ & + \sum_{s=1, s \neq l}^N \sum_{u=1}^M \alpha_s(T_u^+(\bar{x}_s), j_s) p_{(s,u)(l, x_{l,n(l)})} B_l(\bar{x}_l, y_{l,n(l)}) \times \\ & \times \left(\frac{\partial F(T_{(s,u)}^+(T_l^-(x)), y, z)}{\partial y_{s,n(s)+1}} \right)_{y_{s,n(s)+1}=0} + \\ & + \sum_{u=1}^M \alpha_l(\bar{x}_l, j_l) p_{(l,u)(l, x_{l,n(l)})} B_l(\bar{x}_l, y_{l,n(l)}) \times \\ & \times \left(\frac{\partial F(T_{(l,u)}^+(T_l^-(x)), y, z)}{\partial y_{l,n(l)}} \right)_{y_{l,n(l)}=0}, \\ \vartheta_l(\bar{x}_l, j_l) & \left(\left(\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z_{l,j_l}} \right)_{z_{l,j_l}=0} - \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z_{l,j_l}} \right) = \\ & = v_l(\bar{x}_l, j_l - 1) \Phi_l(j_l, z_{l,j_l}) \times \\ & \times \left(\frac{\partial F(R_l^{j_l-1}(x), y, z)}{\partial z_{l,j_l-1}} \right)_{z_{l,j_l-1}=0} + \quad (2.11) \\ & + \varphi_l(\bar{x}_l, j_l + 1) \Phi_l(j_l, z_{l,j_l}) \left(\frac{\partial F(R_l^{j_l+1}(x), y, z)}{\partial z_{l,j_l+1}} \right)_{z_{l,j_l+1}=0}. \end{aligned}$$

Покажем, что функции распределения вероятностей $F(x, y, z)$, определенные формулами (2.5)–(2.7), являются решением уравнений (2.9)–(2.11), а, следовательно, и уравнений (2.8).

Подставим (2.5) в (2.9) и разделим обе части полученного соотношения на $\lambda F(x, y, z)$. Получим следствие уравнения трафика $\sum_{l=1}^N \sum_{u=1}^M \varepsilon_{lu} p_{(l,u)0} = 1$ [3].

Подставим (2.5) в (2.10), приведём подобные слагаемые и разделим обе части полученного соотношения на $\lambda B_l(\bar{x}_l, y_{l,n(l)}) F(T_l^-(x), y, z)$. Получим уравнение трафика (1.1).

Наконец, подставим (2.5) в (2.11). Учитывая (2.3), получим тождество.

Теорема доказана.

Из теоремы с учетом равенства $P(x) = F(x, +\infty, +\infty)$ вытекает следующее утверждение

Следствие. Если выполняются соотношения (2.3)–(2.4), то процесс $x(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение $P = \{P(x), x \in X\}$ не зависит от функционального вида распределений $B_l(\bar{x}_l, \bar{y})$, $\Phi_l(k, \bar{y})$ и имеет вид

$$P(x) = p_1(x_1) p_2(x_2) \times \dots \times p_N(x_N),$$

где $p_l(x_l)$ определяются по формулам (2.6)–(2.7).

Заключение

В работе установлена инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний открытых сетей массового обслуживания с многорежимными стратегиями и разнотипными заявками относительно функций распределения величин работ, требующихся на обслуживание заявок, и величин работ, необходимых для переключения режимов функционирования приборов в узлах, когда фиксированы их математические ожидания, а параметры процессов обслуживания и переключения функционально зависят от общего состояния узла. При этом рассматривался случай, когда дисциплиной обслуживания является абсолютный приоритет поступающего требования с дообслуживанием вытесненной с прибора заявки, а обслуживание имеет не «временную», а так называемую «энергетическую» интерпретацию (каждая операция обслуживания характеризуется случайной величиной работы, которую необходимо выполнить).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малинковский, Ю.В.* Мультипликативность стационарного распределения в открытых сетях с многорежимными стратегиями обслуживания / Ю.В. Малинковский, А.Ю. Нуеман // Вестн. НАН Беларуси, 2001. – №3. – С. 129–134.
2. *Летунович, Ю.Е.* Стационарное распределение состояний открытой неоднородной сети с многорежимными стратегиями и немедленным обслуживанием / Ю.Е. Летунович // Современные информационные компьютерные технологии: сб. научн. ст. междунар. научно-практич. конф., Гродно, 21–24 апреля 2008 г.: в 2 ч. / ГрГУ им. Я. Купалы; редкол.: Е.А. Ровба, А.М. Кадан (отв. редактор) [и др.]. – Гродно: ГрГУ, 2008. – Ч. 2. – С. 97–99.
3. *Малинковский, Ю.В.* Инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний сетей с многорежимными стратегиями обслуживания, разнотипными заявками и дисциплиной обслуживания LCFS PR / Ю.В. Малинковский, А.Н. Старовойтов, А.Р. Ерёмина // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика, 2009. – №3(8). – С. 33–39.
4. *Ивницкий, В.А.* Теория сетей массового обслуживания / В.А. Ивницкий. – М.: Физматлит, 2004.

Поступила в редакцию 28.11.11.

УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫМ ПРОЦЕССОМ В СТЕРЖНЕ С ТЕПЛООБМЕНОМ НА ОБОИХ КОНЦАХ

Д.С. Кузьменков

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

OPTIMAL CONTROL PROBLEM OF A THERMAL PROCESS IN THE ROD WITH HEAT EXCHANGE ON BOTH ENDS

D.S. Kuzmenkov

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Рассматривается задача оптимального управления тепловым процессом в стержне с помощью изменения температуры внешней среды на обоих его концах. Предлагается метод ее приближенного решения путем сведения к задаче оптимального управления специальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности. Описывается алгоритм работы оптимального регулятора, формирующего в режиме реального времени текущие значения оптимальной обратной связи.

Ключевые слова: тепловой процесс, задача оптимального управления, оптимальная обратная связь, оптимальный регулятор.

An optimal control problem of a thermal process in the rod with heat exchange on both ends is considered. The method of its approximate solution by data to optimal control problem of large-scale differential equations system is offered. The algorithm of operation of the optimal regulator forming in real time current values of an optimal feedback is described.

Keywords: thermal process, optimal control problem, optimal feedback, optimal regulator.

Введение

Процессы и явления, поведение которых описывается уравнениями параболического типа, встречаются во многих приложениях [1]–[3], например, при изучении процессов диффузии и теплопроводности, они интенсивно исследуются и в настоящее время.

Основу современной теории оптимального управления составляют принцип максимума Понтрягина и динамическое программирование Беллмана. Эти фундаментальные результаты, первоначально разработанные для систем с сосредоточенными параметрами, позднее были обобщены на системы с распределенными параметрами [1], [2], [4], [5]. Исследовались, в основном, вопросы качественной теории оптимального управления. Намного меньше работ посвящено конструктивным методам решения задач оптимального управления системами с распределенными параметрами.

Задача синтеза оптимальных систем и в настоящее время является одной из сложнейших задач даже для обыкновенных систем, несмотря на применение принципа максимума и динамического программирования Беллмана. Исключением составляет только линейно-квадратичная задача Летова-Калмана, не содержащая геометрических ограничений на управляющие воздействия. В последнее время в различных научных работах развивается новый подход к проблеме синтеза оптимальных систем управления, ориентированный на принцип управления в реальном

времени. Согласно этому принципу оптимальная обратная связь не строится, а ее необходимые для управления текущие значения вычисляются в процессе управления в режиме реального времени. Современная вычислительная техника и новые методы оптимизации позволяют реализовать принцип оптимального управления в реальном времени на практике для объектов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями достаточно высокого порядка.

В статье исследуется задача оптимального управления тепловым процессом в стержне с теплообменом на обоих концах. Цель данной работы: обосновать метод оптимального управления в реальном времени тепловым процессом в стержне с теплообменом на обоих концах. Эффективность описанного метода подтверждается вычислительными экспериментами.

1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального управления тепловым процессом в стержне с теплообменом на двух концах:

$$\begin{aligned}
 J(u_1, u_2) &= \int_{t_*}^{t^*} c(t)(u_1(t) + u_2(t))dt \rightarrow \min, \\
 x_t &= a^2 x_{ss}, \quad (s, t) \in \Omega; \\
 x_s(0, t) &= \mu[u_1(t) - x(0, t)], \\
 x_s(l, t) &= \eta[u_2(t) - x(l, t)], \quad t \in T; \\
 x(s, t_*) &= x_0(s), \quad s \in S;
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$g_* \leq \int_0^l [x(s, t^*) - y(s)] \phi(s) ds \leq g^*;$$

$$u_1(t) \in U_1, \quad u_2(t) \in U_2, \quad t \in T;$$

где t_* , $t^* > t_*$, $l > 0$, a^2 , $\mu > 0$, $\eta > 0$, u_* , $u^* > 0$, – заданные константы; $\Omega = S \times T$, $S = [0, l]$, $T = [t_*, t^*]$; $c(t) > 0$, $c(t) \in R^2$, $t \in T$, $x_0(s) \in R$, $y(s) \in R$, $\phi(s) \in R^m$, $s \in S$, – непрерывные функции; g_* , $g^* \in R^m$ – заданные векторы; $x = x(s, t) \in R$ – температура в точке $s \in S$ в момент времени $t \in T$, $u_1 = u_1(t) \in R$, $u_2 = u_2(t) \in R$ – температура внешней среды в момент времени $t \in T$ на левом и правом концах стрержня соответственно;

$$U_1 = \{u_1 \in R : u_* \leq u_1 \leq u^*\},$$

$$U_2 = \{u_2 \in R : u_* \leq u_2 \leq u^*\}.$$

Определение 1.1. Функцию

$$u_1(\cdot) = (u_1(t), t \in T)$$

назовем *дискретной* (с периодом квантования h_i), если $u_1(t) \equiv u_1(\tau)$, $t \in [\tau, \tau + h_i[$, $\tau \in T_h = \{t_*, t_* + h_i, \dots, t^* - h_i\}$, $h_i = (t^* - t_*)/N$, N – натуральное число.

Задачу (1.1) будем рассматривать в классе дискретных управляющих воздействий $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$.

Определение 1.2. Дискретные управляющие воздействия $u_1(\cdot)$ называются *доступными*, если они удовлетворяют включению $u_1(t) \in U_1$, $t \in T$.

Аппроксимируя уравнение объекта управления методом прямых [6], заменим задачу (1.1) на следующую задачу оптимального управления:

$$J(u_1, u_2) = \int_{t_*}^{t^*} c(t)(u_1(t) + u_2(t)) dt \rightarrow \min, \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} x_i(s_1, t) = \bar{a}^2 [x(s_2, t) - (1 - h_s \mu)x(s_1, t)] - \\ \quad - h_s \bar{a}^2 \mu u_1(t), \\ x_i(s_i, t) = \bar{a}^2 [x(s_{i-1}, t) - 2x(s_i, t) + x(s_{i+1}, t)], \\ \quad \quad \quad i = \overline{2, n-1}; \\ x_i(s_n, t) = \bar{a}^2 [x(s_{n-1}, t) - (1 + h_s \eta)x(s_n, t)] + \\ \quad \quad \quad + h_s \bar{a}^2 \eta u_2(t), \\ x(s_i, t_*) = x_0(s_i), i = \overline{1, n}; \end{cases} \quad (1.3)$$

$$g_* \leq \sum_{i=1}^n [x(s_i, t^*) - y(s_i)] \phi(s_i) \leq g^*; \quad (1.4)$$

$$u_1(t) \in U_1, \quad u_2(t) \in U_2, \quad t \in T; \quad (1.5)$$

где $h_s = l/(n-1)$, n – натуральное число;

$$\bar{a}^2 = a^2/h_s^2; \quad s_i = ih_s, \quad \phi(s_i) \in R^m, \quad i = \overline{1, n};$$

$$\varphi(s_i) = h_s \phi(s_i), \quad i = \overline{2, n-1}, \quad \varphi(s_1) = h_s \phi(s_1)/2,$$

$$\varphi(s_n) = h_s \phi(s_n)/2.$$

Определение 1.3. Доступное управляющее воздействие $u(\cdot) = (u_1(\cdot), u_2(\cdot))$ назовем *программой*, если соответствующая ему траектория $x(t, \cdot) = (x(t, s_i), i = \overline{1, n})$, $t \in T$, в момент времени t^* удовлетворяет ограничениям (1.4). Траекторию $x(t, \cdot)$, $t \in T$, соответствующую программе, назовем *допустимой траекторией*.

Определение 1.4. Программа $u^0(t)$, $t \in T$, называется *оптимальной программой*, если $J(u^0) = J(u_1^0, u_2^0) = \min_{u_1, u_2} J(u_1, u_2)$. Соответствующую ей траекторию $x^0(t)$, $t \in T$, будем называть *оптимальной траекторией*.

2 Основные элементы двойственного метода

Запишем решение уравнения (1.3) по формуле Коши

$$\begin{aligned} x(s_i, t) = \sum_{j=1}^n f(s_i, t; s_j, t_*) x_0(s_j) + \\ + \int_{t_*}^t f(s_i, t; s_1, \tau) (-h_s \bar{a}^2 \mu) u_1(\tau) d\tau + \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$+ \int_{t_*}^t f(s_i, t; s_n, \tau) h_s \bar{a}^2 \eta u_2(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1, n}, \quad t, \tau \in T,$$

в которой $f(s_i, t; s_j, \tau) = f_{ij}(t, \tau)$, $t, \tau \in T$, $i, j = \overline{1, n}$, – элементы фундаментальной матрицы решений системы (1.3), которая удовлетворяет следующим соотношениям:

$$F(t, t_*) = F(t)F^{-1}(t_*), \quad F(t) \in R^{n \times n};$$

$$\dot{F} = AF, \quad F(t_*) = E,$$

где E – единичная матрица,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \bar{a}^2 \begin{pmatrix} h_s \mu - 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -(1 + h_s \eta) \end{pmatrix}.$$

В классе дискретных управляющих воздействий формула Коши (2.1) примет вид

$$x(s_i, t) = \sum_{j=1}^n f(s_i, t; s_j, t_*) x_0(s_j) + \quad (2.2)$$

$$+ \sum_{\tau=t_*}^{t-h_i} f_{u_1}(s_i, t; s_1, \tau) u_1(\tau) +$$

$$+ \sum_{\tau=t_*}^{t-h_i} f_{u_2}(s_i, t; s_n, \tau) u_2(\tau), \quad i = \overline{1, n}, \quad t, \tau \in T_h,$$

где $f_{u_1}(s_i, t; s_1, \tau) = -h_s \bar{a}^2 \mu \int_{\tau}^{\tau+h_i} f(s_i, t; s_1, \xi) d\xi$,
 $f_{u_2}(s_i, t; s_n, \tau) = h_s \bar{a}^2 \eta \int_{\tau}^{\tau+h_i} f(s_i, t; s_n, \xi) d\xi$.

Подставив (2.2) в (1.4), мы получим

$$g_{*k} \leq \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n f(s_i, t^*; s_j, t_*) x_0(s_j) + \sum_{\tau=t_*}^{t^*-h_i} f_{u_1}(s_i, t^*; s_1, \tau) u_1(\tau) + \sum_{\tau=t_*}^{t^*-h_i} f_{u_2}(s_i, t^*; s_n, \tau) u_2(\tau) - y(s_i) \right] \varphi_k(s_i) \leq g_k^*$$

или

$$g_{*k} \leq \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n f(s_i, t^*; s_j, t_*) x_0(s_j) - y(s_i) \right] \varphi_k(s_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{\tau=t_*}^{t^*-h_i} f_{u_1}(s_i, t^*; s_1, \tau) u_1(\tau) \varphi_k(s_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{\tau=t_*}^{t^*-h_i} f_{u_2}(s_i, t^*; s_n, \tau) u_2(\tau) \varphi_k(s_i) \leq g_k^*, \quad k = \overline{1, m}.$$

Изменив порядок суммирования в (2.3), придем к функциональной форме задачи (1.2)–(1.5)

$$J(u_1, u_2) = \int_{t_*}^{t^*} c(t)(u_1(t) + u_2(t)) dt \rightarrow \min;$$

$$g_{*k} \leq \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n f(s_i, t^*; s_j, t_*) x_0(s_j) - y(s_i) \right] \varphi_k(s_i) + \sum_{\tau=t_*}^{t^*-h_i} \sum_{i=1}^n f_{u_1}(s_i, t^*; s_1, \tau) u_1(\tau) \varphi_k(s_i) + \sum_{\tau=t_*}^{t^*-h_i} \sum_{i=1}^n f_{u_2}(s_i, t^*; s_n, \tau) u_2(\tau) \varphi_k(s_i) \leq g_k^*, \quad (2.4)$$

$$k = \overline{1, m}, \quad u_1(t) \in U_1, u_2(t) \in U_2, \quad t \in T_h.$$

Введем обозначения

$$\tilde{g}_{*k} = g_{*k} - \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n f(s_i, t^*; s_j, t_*) x_0(s_j) - y(s_i) \right] \varphi_k(s_i),$$

$$\tilde{g}_k^* = g_k^* - \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n f(s_i, t^*; s_j, t_*) x_0(s_j) - y(s_i) \right] \varphi_k(s_i),$$

$$c_h(t) = \int_t^{t+h_i} c(\tau) d\tau,$$

$$d_{h_1}(t) = \sum_{i=1}^n f_{u_1}(s_i, t^*; s_1, t) \varphi_k(s_i), \quad (2.5)$$

$$d_{h_2}(t) = \sum_{i=1}^n f_{u_2}(s_i, t^*; s_n, t) \varphi_k(s_i), \quad t \in T_h, \quad k = \overline{1, m}.$$

В новых обозначениях задача (2.4) будет иметь вид

$$J(u_1, u_2) = \sum_{t \in T_h} c_h(t)(u_1(t) + u_2(t)) \rightarrow \min;$$

$$\tilde{g}_{*k} \leq \sum_{t \in T_h} (d_{h_1}(t) u_1(t) + d_{h_2}(t) u_2(t)) \leq g_k^*; \quad (2.6)$$

$$u_1(t) \in U_1, u_2(t) \in U_2, \quad t \in T_h.$$

Обозначив $d_h(t) = (d_{h_1}(t), d_{h_2}(t))$,

$$u(t) \in R^2 = (u_1(t), u_2(t)), \quad U = \{u \in R^2 : u_* \leq u \leq u^*\},$$

задачу (2.6) можно записать в виде

$$J(u) = \sum_{t \in T_h} c_h(t) u(t) \rightarrow \min,$$

$$\tilde{g}_{*k} \leq \sum_{t \in T_h} d_h(t) u(t) \leq \tilde{g}_k^*, \quad u(t) \in U, \quad t \in T_h. \quad (2.7)$$

Приведем необходимые понятия адаптивно-го метода линейного программирования.

Пусть $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $J = \{1, 2\}$, $Q = T_h \times J$, $I_{on} \subset I$, $Q_{on} \subset Q$, $|Q_{on}| = |I_{on}|$. Составим матрицу

$$D_{on} = \left(\begin{array}{c} (d_{hj}(t)), \{t, j\} \in Q_{on} \\ i \in I_{on} \end{array} \right).$$

Определение 2.1. Пару $K_{on} = \{I_{on}, Q_{on}\}$ назовем опорой задачи (1.2)–(1.5), если $\det D_{on} \neq 0$. При $I_{on} = \emptyset$, $Q_{on} = \emptyset$, пара K_{on} – пустая опора, по определению. Совокупность $\{u(\cdot), K_{on}\}$ из программы $u(\cdot)$ и опоры K_{on} будем называть опорной программой.

Определение 2.2. Опорная программа $\{u(\cdot), K_{on}\}$ называется прямо невырожденной, если выполняются следующие соотношения

$$u_* < u_j(t) < u^*, \quad \{t, j\} \in Q_{on},$$

$$g_{*i} < z_i < g_i^*, \quad i \in I_n = I \setminus I_{on},$$

$$\text{где } z_i = \sum_{j=1}^n [x(s_j, t^*) - y(s_j)] \varphi_i(s_j), \quad i \in I.$$

Опорную программу $\{u(\cdot), K_{on}\}$ сопровождают следующие элементы:

1. Допустимая траектория $x(t)$, $t \in T$, системы (1.2)–(1.5).

2. Выходной сигнал $z = (z_i, i \in I)$.

3. Вектор потенциалов $v = v(I) = (v_{on}, v_n)$, который строится по следующим правилам: $v_n = (v_i, i \in I_n) = 0$, $v_{on} = (v_i, i \in I_{on})$ – решение векторного уравнения

$$v'_{on} D_{on} = c'_{on},$$

где $c_{on} = c(Q_{on}) = (c_{hj}(t), \{t, j\} \in Q_{on})$. В случае пустой опоры полагаем $v = 0$.

4. Копрограмма $\delta_{h_1}(t), \delta_{h_2}(t)$, $t \in T_h$,

$$\delta_{hj}(t) = 0, \quad \{t, j\} \in Q_{on};$$

$$\delta_{hj}(t) = c'_n - v'_{on} D_{on}^u, \quad \{t, j\} \in Q_n,$$

где $c_n = c(Q_n) = (c_{hj}(t), \{t, j\} \in Q_n)$,

$$D_{on}^u = D(I_{on}, Q_n) = \left(\begin{array}{c} d_{hj}(t), \quad \{t, j\} \in Q_n \\ i \in I_{on} \end{array} \right).$$

Пару $\{t, j\} \in Q_n$ будем называть *неопорным нулем* первой копрограммы, если $\delta_{hj}(t-h_i)\delta_{hj}(t) < 0$; обозначим через Q_{n0} множество неопорных нулей копрограммы.

Определение 2.3. Опору будем называть *регулярной*, если сопровождающие ее элементы удовлетворяют соотношениям: $v_i \neq 0, i \in I_{on}$; $\delta_{hj}(t) \neq 0, \{t, j\} \in Q_n$; $\delta_{hj}(t-h_i) \times \delta_{hj}(t+h_i) < 0, \{t, j\} \in Q_{on}$; $\delta_{hj}(t) \times \delta_{hj}(t+h_i) > 0, \{t, j\} \in Q_{n0}$; $\delta_{hj}(t^*) \neq 0, \delta_{hj}(t^*-h_i) \neq 0, j \in J_{on}, J_{on} \subset J$.

5. – 6. *Псевдопрограмма* $\omega_j(t), \{t, j\} \in Q$ и *выходной псевдосигнал* ζ .

Сначала зададим неопорные значения псевдопрограммы:

$$\omega_j(t) = u_*, \text{ если } \delta_{hj}(t) < 0;$$

$$\omega_j(t) = u^*, \text{ если } \delta_{hj}(t) > 0;$$

$$\omega_j(t) \in [u_*, u^*], \text{ если } \delta_{hj}(t) = 0; \{t, j\} \in Q_n.$$

Затем определим опорные значения выходного псевдосигнала $\zeta_{on} = \zeta(I_{on}) = (\zeta_i, i \in I_{on})$:

$$\zeta_i = g_{*i}, \text{ если } v_i < 0;$$

$$\zeta_i = g_i^*, \text{ если } v_i > 0;$$

$$\zeta_i \in [g_{*i}, g_i^*], \text{ если } v_i = 0; i \in I_{on}.$$

Опорные значения псевдопрограммы найдем из равенства:

$$\zeta_{on} = D_{on}\omega_{on} + p_{on},$$

где $\omega_{on} = \omega(Q_{on}) = (\omega_j(t), \{t, j\} \in Q_{on})$,

$$p = p(I) = (p_{on} = (p_i, i \in I_{on}), p_n = (p_i, i \in I_n)),$$

$$p = \sum_{\{t, j\} \in Q_n} d_{hj}(t)\omega_j(t).$$

Если опора K_{on} – пустая, то $\omega_{on} = 0$.

Неопорные значения $\zeta_n = \zeta(I_n) = (\zeta_i, i \in I_n)$ выходного псевдосигнала определим по формуле:

$$\zeta_n = D(I_n, Q_{on})\omega_{on} + p_n,$$

где $D(I_n, Q_{on}) = \begin{pmatrix} d_{hj}(t), & \{t, j\} \in Q_{on} \\ i \in I_n \end{pmatrix}$.

7. *Псевдотраектория* $\alpha(t), t \in T$, сопровождающая опору K_{on} – решение уравнения (1.2)–(1.5) с управляющим воздействием $u(t) = \omega(t), t \in T$.

Величину $\beta(u(\cdot), K_{on}) = c' \alpha(t^*) - c' x(t^*)$ будем называть *оценкой субоптимальности* опорной программы.

Двойственный метод [7] построения программного решения задачи (1.2)–(1.5) является итеративным. Он начинается с произвольной опоры K_{on}^1 и заканчивается построением оптимальной опоры K_{on}^0 . Итерация представляет

замену «старой» опоры K_{on} на «новую» \bar{K}_{on} , при которой выполняется соотношение $\beta(\bar{u}(\cdot), \bar{K}_{on}) \leq \beta(u(\cdot), K_{on})$.

К началу каждой итерации сохраняем в памяти ЭВМ следующую информацию: 1) $u(\cdot)$; 2) K_{on} ; 3) Q_{n0} ; 4) v_{on} ; 5) $D(I, Q_{on})$; 6) D_{on}^{-1} ; 7) $\tilde{F}(t), t \in T_{on} \cup T_{n0}$; 8) p ; 9) ζ ; 10) z , которая преобразовывается на итерациях метода.

Основные выкладки итераций двойственного метода, используемого для решения задач типа (2.7) в данной статье не приводятся, с ними можно ознакомиться в [7, 8]. Двойственный метод, на итерациях которого преобразуется информация 1)–10), конечен, если на его итерациях встречаются только регулярные опоры [7].

Для предлагаемого в статье метода оптимального управления в реальном времени для больших значений n решающую роль играет быстрое вычисление значений функций (2.5). Это позволяет сделать процедура квазидеккомпозиции фундаментальной матрицы решений системы (1.3). Квазидеккомпозиция осуществляется аналогично [8], [9]. Она позволяет интегрирование системы порядка n заменить на параллельное интегрирование r систем значительно меньшего порядка m .

3 Алгоритм работы оптимального регулятора

Для определения позиционного решения задачи (1.2)–(1.5) (оптимального управления типа обратной связи) погрузим ее в семейство задач

$$\begin{cases} J(u) = \int_{\tau}^{t^*} c(t)(u_1(t) + u_2(t))dt \rightarrow \min; \\ \begin{cases} x_i(s_1, t) = \bar{a}^2 [x(s_2, t) - (1 - h_s \mu)x(s_1, t)] - \\ \quad - h_s \bar{a}^2 \mu u_1(t), \\ x_i(s_i, t) = \bar{a}^2 [x(s_{i-1}, t) - 2x(s_i, t) + x(s_{i+1}, t)], \\ \quad \quad \quad i = \overline{2, n-1}; \\ x_i(s_n, t) = \bar{a}^2 [x(s_{n-1}, t) - (1 + h_s \eta)x(s_n, t)] + \\ \quad \quad \quad + h_s \bar{a}^2 \eta u_2(t), \\ x(s_i, \tau) = \chi(s_i), i = \overline{1, n}; \end{cases} \\ g_* \leq \sum_{i=1}^n [x(s_i, t^*) - y(s_i)]\varphi(s_i) \leq g^*; \end{cases} \quad (3.1)$$

$u_1(t) \in U_1, u_2(t) \in U_2, t \in T(\tau) = [\tau, t^*]$, зависящих от позиции $(\tau, \chi(\cdot))$, где $\tau \in T_n$,

$\chi(\cdot) = (\chi(s_i) \in R, i = \overline{1, n})$ – непрерывная функция.

Пусть

$$u^0(t | \tau, \chi(\cdot)) = (u_1^0(t | \tau, \chi(\cdot)), u_2^0(t | \tau, \chi(\cdot))),$$

$t \in T(\tau)$, – оптимальная программа задачи (3.1)

для позиции $(\tau, \chi(\cdot))$, X_τ – множество всех

состояний $\chi(\cdot)$, для которых существует оптимальная программа.

Определение 3.1. Функционал

$$u^0(\tau, \chi(\cdot)) = u^0(\tau | \tau, \chi(\cdot)), \quad \chi(\cdot) \in X_\tau, \quad \tau \in T_h, \quad (3.2)$$

называется *оптимальной (дискретной) обратной связью по состоянию системы (позиционным решением задачи (1.2)–(1.5))*.

Построение оптимальной обратной связи (3.2) в явной форме или синтез оптимальных систем в классической постановке представляет собой довольно сложную задачу, которая не решена до сих пор для систем (1.3). В статье используется другой подход к синтезу оптимальных систем – оптимальное управление в реальном времени [10]. Опишем метод оптимального управления нагревом стержня с теплообменом на двух концах в реальном времени.

Оптимальная обратная связь (3.2) определена по математической модели (1.3), но предназначена для управления реальной системой. Закнем ее оптимальной обратной связью и запишем поведение замкнутой системы в точках $s_i, i = \overline{1, n}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i(s_1, t) = \bar{a}^2 [x(s_2, t) - (1 - h_s \mu)x(s_1, t)] - \\ \quad - h_s \bar{a}^2 \mu u_1^0(t) + w, \\ x_i(s_i, t) = \bar{a}^2 [x(s_{i-1}, t) - 2x(s_i, t) + x(s_{i+1}, t)] + \\ \quad + w, i = \overline{2, n-1}, \\ x_i(s_n, t) = \bar{a}^2 [x(s_{n-1}, t) - (1 + h_s \eta)x(s_n, t)] + \\ \quad + h_s \bar{a}^2 \eta u_2^0(t, x(t)) + w, \\ x(s_i, t_*) = x_0(s_i), i = \overline{1, n}, \end{array} \right. \quad (3.3)$$

где $u_j^0(t, x(t)) = u_j^0(\tau, x(\tau)), j = 1, 2, t \in [\tau, \tau + h_i], \tau \in T_h$; w – совокупность членов, отражающих неточности математического моделирования, неточность реализации оптимальной обратной связи и возмущение, действующее на физический объект в процессе управления. В дальнейшем для краткости будем w называть возмущением.

Предположим, что в процессе управления возмущения реализуются в виде кусочно-непрерывной функции $w^*(t), t \in T$. Они порождают траекторию $x^*(s_i, t), i = \overline{1, n}, t \in T$, удовлетворяющую тождеству

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i^*(s_1, t) = \bar{a}^2 [x^*(s_2, t) - (1 - h_s \mu)x^*(s_1, t)] - \\ \quad - h_s \bar{a}^2 \mu u_1^0(t, x^*(t)) + w^*(t), \\ x_i^*(s_i, t) = \bar{a}^2 [x^*(s_{i-1}, t) - 2x^*(s_i, t) + x^*(s_{i+1}, t)] + \\ \quad + w^*(t), i = \overline{2, n-1}, \\ x_i^*(s_n, t) = \bar{a}^2 [x^*(s_{n-1}, t) - (1 + h_s \eta)x^*(s_n, t)] + \\ \quad + h_s \bar{a}^2 \eta u_2^0(t, x^*(t)) + w^*(t), \\ x^*(s_i, t_*) = x_0(s_i), i = \overline{1, n}. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Из (3.4) следует, что в конкретном процессе управления оптимальная обратная связь (3.2) не используется полностью, нужны только ее значения

$$u^*(t) \equiv u^0(t, x^*(t, \cdot)) = u^0(\tau, x^*(\tau, \cdot)), \quad t \in [\tau, \tau + h_i], \quad \tau \in T_h, \quad (3.5)$$

вдоль одной траектории $x^*(s_i, t), i = \overline{1, n}, t \in T$.

Определение 3.2. Функцию (3.5) назовем *реализацией оптимальной обратной связи (3.2) в конкретном процессе управления*.

Согласно принципу управления в реальном времени [10] оптимальная обратная связь (3.2) не строится, а текущие значения $u^*(\tau), \tau \in T_h$, ее реализации вычисляются в процессе управления за время, не превосходящее h_t , т. е. в режиме реального времени.

Определение 3.3. Устройство, способное вычислять значения $u^*(\tau), \tau \in T_h$, в режиме реального времени, назовем *оптимальным регулятором*.

Перед началом процесса управления оптимальный регулятор, используя двойственный метод [7], строит оптимальную опору $K_{on}^0(t_*) = \{I_{on}^0(t_*), Q_{on}^0(t_*)\}$ и оптимальную программу $u^0(t | t_*, x_0(\cdot)), t \in T_h$, задачи (1.2)–(1.5) для начальной позиции $(t_*, x_0(\cdot))$, сохраняет текущую информацию для момента времени t_* :

$$\begin{aligned} & K_{on}^0(t_*); Q_{on}^0(t_*); v_{on}(t_*); \\ & D(I, Q_{on}^0 | t_*); D_{on}^{-1}(t_*); \\ & \tilde{f}(t), t \in T_{on}^0(t_*) \cup T_{n0}^0(t_*); p(t_*); \\ & \omega_j(t | t_*), \{t, j\} \in Q_{on}^0; \zeta(t_*). \end{aligned}$$

С началом процесса управления оптимальный регулятор подает на вход объекта (3.3) управляющее воздействие

$$u^*(t) \equiv u^*(t_*) = u^0(t_* | t_*, x_0(\cdot)), \quad t \in [t_*, t_* + h_t + \mathcal{G}(t_* + h_t)].$$

Здесь $\mathcal{G}(\tau), \tau \in T_h$, – время, затрачиваемое на вычисление значения $u^*(\tau)$ реализации оптимальной обратной связи (3.5).

Пусть процесс управления уже проведен на промежутке $[t_*, \tau]$. Оптимальный регулятор уже выработал управляющие воздействия $u^*(t_*), u^*(t_* + h_t), \dots, u^*(\tau - h_t)$. Под действием этих управляющих воздействий и возмущения $w^*(t), t \in [t_*, \tau]$, физический объект оказался в состоянии $x^*(\tau, \cdot)$, которое становится известным оптимальному регулятору. В предыдущий момент $\tau - h_t$ оптимальный регулятор для отыскания значения $u^*(\tau - h_t)$ решил задачу (3.1) для позиции $(\tau - h_t, x^*(\tau - h_t))$ и запомнил ее

оптимальную опору $K_{on}^0(\tau - h_t)$. Функциональная форма этой задачи примет вид

$$J(u) = \sum_{t \in T_h(\tau - h_t)} c_h(t)u(t) \rightarrow \min,$$

$$g_*(\tau - h_t) \leq \sum_{t \in T_h(\tau - h_t)} d_h(t)u(t) \leq g^*(\tau - h_t), \quad (3.6)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T_h(\tau - h_t) = (\tau - h_t, \tau, \dots, t^* - h_t),$$

где

$$g_*(\tau - h_t) = g_* -$$

$$-\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n f(s_i, t^*; s_j, \tau - h_t) x^*(s_j, \tau - h_t) - y(s_i) \right) \varphi(s_i),$$

$$g^*(\tau - h_t) = g^* -$$

$$-\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n f(s_i, t^*; s_j, \tau - h_t) x^*(s_j, \tau - h_t) - y(s_i) \right) \varphi(s_i).$$

В результате решения задачи (3.6) к моменту τ была получена и сохранена следующая информация:

$$K_{on}^0(\tau - h_t); \quad Q_{n0}^0(\tau - h_t); \quad v_{on}(\tau - h_t);$$

$$D(I, Q_{on}^0 | \tau - h_t); \quad D_{on}^{-1}(\tau - h_t);$$

$$\tilde{f}(\tau - h_t), \quad t \in T_{on}^0(\tau - h_t) \cup T_{n0}^0(\tau - h_t);$$

$$p(\tau - h_t); \quad \omega_j(t | \tau - h_t), \quad \{t, j\} \in Q_{on}^0; \quad \zeta(\tau - h_t).$$

Для того, чтобы построить текущее значение $u^*(\tau)$ реализации оптимальной обратной связи для позиции $(\tau, x^*(\tau))$, оптимальный регулятор на промежутке $[\tau, \tau + h_t[$ должен решить задачу

$$J(u) = \sum_{t \in T_h(\tau)} c_h(t)u(t) \rightarrow \min,$$

$$g_*(\tau) \leq \sum_{t \in T_h(\tau)} d_h(t)u(t) \leq g^*(\tau), \quad (3.7)$$

$$u(t) \in U, \quad t \in T_h(\tau),$$

где

$$g_*(\tau) = g_* -$$

$$-\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n f(s_i, t^*; s_j, \tau) x^*(s_j, \tau) - y(s_i) \right) \varphi(s_i),$$

$$g^*(\tau) = g^* -$$

$$-\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n f(s_i, t^*; s_j, \tau) x^*(s_j, \tau) - y(s_i) \right) \varphi(s_i).$$

Для решения задачи (3.7) оптимальный регулятор находит значения псевдопрограммы в опорные моменты времени

$$\omega_{on}(\tau) = D_{on}^{-1}(\tau - h_t)(\zeta_{on}(\tau - h_t) - p_{on}(\tau))$$

и неопорные значения выходного псевдосигнала

$$\zeta_n(\tau) = D(I_n, Q_{on}^0 | \tau - h_t)\omega_{on}(\tau) + p_n(\tau).$$

При выполнении неравенств $|\omega_j(t | \tau)| \leq u^*$, $\{t, j\} \in Q_{on}^0(\tau)$; $g_{*i} \leq \zeta_i(\tau) \leq g_i^*$, $i \in I_n(\tau)$, согласно критерию оптимальности [7] оптимальная опора задачи (3.6) является оптимальной и в задаче

(3.7): $K_{on}^0(\tau) = K_{on}^0(\tau - h_t)$. Иначе осуществим итерации двойственного метода [7], выбрав в качестве начальной опоры $K_{on}^1(\tau)$ оптимальную опору $K_{on}^0(\tau - h_t)$. При этом будет преобразована текущая информация:

$$D(I, Q_{on}^0 | \tau) = D(I, Q_{on}^0 | \tau - h_t);$$

$$D_{on}^{-1}(\tau) = D_{on}^{-1}(\tau - h_t);$$

$$v_{on}(\tau) = v_{on}(\tau - h_t);$$

$$p(\tau) = p(\tau - h_t) - D(\tau - h_t)u^*(\tau - h_t);$$

$$\zeta_{on}(\tau) = \zeta_{on}(\tau - h_t).$$

Если $\{t, j\} \notin Q_{n0}^0(\tau - h_t)$, то $Q_{n0}^0(\tau) = Q_{n0}^0(\tau - h_t)$; если $\{t, j\} \in Q_{n0}^0(\tau - h_t)$, то

$$Q_{n0}^0(\tau) = Q_{n0}^0(\tau - h_t) \setminus \{t, j\}.$$

Построив оптимальную опору $K_{on}^0(\tau)$ задачи (3.7), оптимальный регулятор подает на вход системы (3.3) управляющие воздействие

$$u^*(t) = u^*(\tau) = u^0(\tau | \tau, \zeta^*(\tau)),$$

$$t \in [\tau + \mathcal{G}(\tau), \tau + h_t + \mathcal{G}(\tau + h_t)].$$

Для использования опоры $K_{on}^0(\tau)$ с $\tau \in T_{on}^0(\tau)$ в качестве начальной в момент времени $\tau + h_t$, необходимо провести одну дополнительную операцию двойственного метода с $t_0 = \tau$, $\alpha^1 = 0$. В случае регулярной опоры $K_{on}^0(\tau)$ для выхода момента τ из опоры будет достаточно одного короткого шага.

Заключение

В статье рассматривается задача оптимального управления тепловым процессом в стержне с теплообменом на обоих концах и предлагается современный метод ее решения. Метод основан на динамической реализации двойственного метода [7] и процедуре квазидекомпозиции [9], что позволяет быстро строить текущие значения оптимальной обратной связи. Полученные результаты могут быть обобщены на другие задачи оптимального управления системами с распределенными параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров, А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. – М.: Наука, 1978. – 468 с.
2. Лионс, Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
3. Kowalewski, A. Optimal control of distributed parabolic systems with multiple time delays given in the integral form / Adam Kowalewski // J. Math. Contr. and Inf. – 2005. – Vol. 22, № 2. – P. 149–170.

4. Бутковский, А.Г. Методы оптимального управления системами с распределенными параметрами / А.Г. Бутковский. – М. : Наука, 1975. – 568 с.
5. Васильев, Ф.П. Обобщенный метод моментов в задачах оптимального управления / Ф.П. Васильев, А.З. Ишмухаметов, М.М. Потапов. – М. : Изд-во МГУ, 1989. – 143 с.
6. Крылов, В.И. Начала теории вычислительных методов. Уравнения в частных производных / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный. – Мн. : Наука и техника, 1986. – 311 с.
7. Габасов, Р. Конструктивные методы оптимизации : в 5 ч. / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, А.И. Тятюшкин. – Минск : Университетское, 1984–1998. – Ч. 1 : Линейные задачи. – 1984. – 213 с.
8. Габасов, Р. Оптимальное управление тепловым процессом / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Д.С. Кузьменков // Докл. НАН Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 1. – С. 5–9.
9. Кузьменков, Д.С. Распараллеливание вычислений при оптимальном управлении нагревом стержня / Д.С. Кузьменков // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2008. – № 5 (50), ч. 1. – С. 61–64.
10. Габасов, Р. Принципы оптимального управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Докл. НАН Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 1. – С. 15–18.

Поступила в редакцию 06.02.12.

УДК 512.542

ПРИЗНАКИ РАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА КОФАКТОРЫ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

И.В. Лемешев, В.С. Монахов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

THE SOLVABILITY CRITERIA FOR FINITE GROUPS WITH RESTRICTIONS ON COFACTORS OF MAXIMAL SUBGROUPS

I.V. Lemeshev, V.S. Monakhov

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Устанавливается разрешимость конечной группы, у которой кофакторы всех максимальных подгрупп сверхразрешимы и удовлетворяют некоторым дополнительным ограничениям.

Ключевые слова: конечная группа, разрешимая группа, сверхразрешимая группа, максимальная подгруппа, кофактор.

The solvability of a finite group whose cofactors of maximal subgroups is supersolvable and satisfy some additional restrictions is established.

Keywords: finite group, solvable group, supersoluble group, maximal subgroup, cofactor.

Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Терминология и обозначения соответствуют [1], [2]. В частности, если H – подгруппа группы G , то $\text{Core}_G H = \bigcap_{x \in G} x^{-1} H x$ – ее ядро [1, глава 3.4], которое является наибольшей нормальной в G подгруппой, содержащейся в H , а $H / \text{Core}_G H = \text{Cof}_G H$ – кофактор подгруппы H в группе G . Группу, содержащую максимальную подгруппу с единичным ядром, называют примитивной. В примитивной группе максимальную подгруппу с единичным ядром Гашюц [3] предложил называть примитиватором. Общие свойства примитивных групп подробно описаны в [1, глава 4.6], [3].

Если A и B – подгруппы группы G , $G = AB$ и $A \cap B = 1$, то подгруппа B называется дополнением к подгруппе A в группе G . Группа, в которой все подгруппы дополняемы, называется вполне факторизуемой. Конечные вполне факторизуемые группы исследовал Ф. Холл [4], в частности, он установил, что группа вполне факторизуема тогда и только тогда, когда она сверхразрешима и все ее силовские подгруппы элементарные абелевы.

Группа, в которой каждая субнормальная подгруппа нормальна, называется t -группой. Структуру разрешимых t -групп описал Гашюц [5], в частности, он доказал, что разрешимая t -группа сверхразрешима и каждая ее подгруппа является t -группой.

Сринивасан [6] рассмотрел группы, в которых нормальны максимальные подгруппы из силовских подгрупп. Уолл [7] предложил

называть их MNP-группами. Ясно, что нильпотентные группы являются MNP-группами. Поэтому MNP-группы расположены между нильпотентными группами и сверхразрешимыми группами. Кроме того, MNP-группа сверхразрешима и каждая ее силовская подгруппа либо нормальна, либо циклическая.

В 1957 году Р. Бэр получил следующий результат.

Теорема А. [8]. Если группа G примитивна и все ее примитиваторы нильпотентны, то G разрешима.

В 2009 году М. Асаад развил этот результат Бэра.

Теорема В. Примитивная группа G разрешима в следующих случаях:

- 1) каждый примитиватор является MNP-группой [9, теорема 1.2];
- 2) каждый примитиватор является разрешимой t -группой [9, теорема 1.3(a)];
- 3) в каждом примитиваторе все силовские подгруппы циклические [9, теорема 1.3(c)].

Заметим, что в ситуациях 1)–3) теоремы В примитиваторы являются сверхразрешимыми подгруппами. Но заменить нильпотентность в теореме А на сверхразрешимость в общем случае нельзя. Примером служит неразрешимая примитивная группа $PGL(2, 7)$.

Пример. В системе компьютерной алгебры GAP [10] под номером 208 в библиотеке SmallGroups перечислены все свойства группы $PGL(2, 7)$. В частности, она содержит 58 максимальных подгрупп: одну подгруппу $PSL(2, 7)$; двадцать восемь подгрупп, изоморфных

диэдральной группе $[Z_3]E_4 = [Z_6]Z_2$ порядка 12; двадцать одну подгруппу, изоморфную диэдральной группе порядка 16; восемь подгрупп, изоморфных группе $[[Z_7]Z_3]Z_2$.

Все максимальные в $PGL(2,7)$ подгруппы, за исключением нормальной подгруппы $PSL(2,7)$, сверхразрешимы и имеют единичные ядра. Поэтому группа $PGL(2,7)$ примитивна и все ее примитиваторы сверхразрешимы. Силовские подгруппы из примитиваторов либо имеют нечетные простые порядки, либо изоморфны элементарной абелевой группе порядка 4 или группе диэдра порядка 16. Диэдральная группа порядка 12 является t -группой и вполне факторизуемой группой, но не будет MNP-группой. Диэдральная группа порядка 16 будет MNP-группой, но не будет t -группой и не будет вполне факторизуемой группой. Группа $[[Z_7]Z_3]Z_2$ является t -группой, вполне факторизуемой группой и MNP-группой.

Если M – максимальная подгруппа группы G , то фактор-группа $G/CoF_G M$ будет примитивной группой, а кофактор $M/CoF_G M$ будет примитиватором в группе $G/CoF_G M$. Кроме того, пересечение ядер максимальных подгрупп совпадает с подгруппой Фраттини группы. Поэтому из теоремы А вытекает разрешимость группы с нильпотентными кофакторами максимальных подгрупп. Из теоремы В получаем разрешимость группы при условии, что кофакторы максимальных подгрупп являются группами, перечисленными в пунктах 1–3 этой теоремы.

В настоящей работе развивается данное направление. Без использования классификации конечных простых групп устанавливается разрешимость группы, в которой кофакторы максимальных подгрупп: 1) либо имеют нечетные порядки, либо вполне факторизуемы, либо являются разрешимыми t -группами; 2) либо имеют нечетные порядки, либо являются MNP-группами, либо группами, у которых все силовские подгруппы циклические. Из этих результатов выводится ряд следствий, которые также являются новыми в теории групп. Кроме того, теоремы А и В являются частными случаями наших теорем.

1 Вспомогательные результаты

Для группы G множество всех простых делителей ее порядка обозначается через $\pi(G)$. Запись $H \leq G$ означает, что H – подгруппа группы G . Через G' , $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются коммутант, подгруппы Фиттинга и Фраттини группы G . Группа с нормальной силовской p -подгруппой называется p -замкнутой, а

группа с нормальной p' -холловой подгруппой называется p -нильпотентной. Группа, которая одновременно p -замкнута и p -нильпотентна, называется p -разложимой. Запись $[A]B$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой A . Наибольшая разрешимая нормальная подгруппа группы G обозначается через $S(G)$.

Лемма 1.1.

1. Если K и H – подгруппы группы G и $K \subseteq H$, то $CoF_G K \subseteq CoF_H K$.

2. Пусть N – нормальная подгруппа группы G , H – подгруппа из G и $N \subseteq H$. Тогда $N \subseteq CoF_G H$ и

$$CoF_{G/N}(H/N) = (CoF_G H)/N.$$

3. Если N – нормальная подгруппа группы G и H – подгруппа из G , то

$$(CoF_G H)N \subseteq CoF_G(HN).$$

4. Пусть H и N – подгруппы группы G , N нормальна в G и $N \subseteq H$. Тогда

$$CoF_{G/N} H/N \simeq CoF_G H.$$

Доказательство. 1. Так как $CoF_G K$ – наибольшая нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в K , то

$$CoF_G K \subseteq K \subseteq H$$

и, кроме того, $CoF_G K$ – нормальная в H подгруппа. Но $CoF_H K$ – наибольшая нормальная в H подгруппа, содержащаяся в K , поэтому

$$CoF_G K \subseteq CoF_H K.$$

2. Ясно, что $N \subseteq CoF_G H$ и $CoF_G H/N$ – нормальная в G/N подгруппа, содержащаяся в H/N , поэтому

$$CoF_G H/N \subseteq CoF_{G/N}(H/N).$$

С другой стороны, пусть

$$CoF_{G/N}(H/N) = K/N.$$

Так как подгруппа K/N нормальна в G/N , то K нормальна в G и $K \subseteq H$. Поскольку $CoF_G H$ – наибольшая нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в H , то $K \subseteq CoF_G H$. Следовательно,

$$K/N = CoF_{G/N}(H/N) \subseteq CoF_G H/N.$$

Из двух включений получаем равенство.

3. Так как $CoF_G H$ – наибольшая нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в H и N нормальна в G , то подгруппа $(CoF_G H)N$ нормальна в G и

$$(CoF_G H)N \subseteq HN.$$

Но $CoF_G(HN)$ – наибольшая нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в HN , поэтому

$$(CoF_G H)N \subseteq CoF_G(HN).$$

4. Ясно, что $N \subseteq \text{Core}_G H$. По определению

$$\text{Cof}_G H = H / (\text{Core}_G H),$$

$$\text{Cof}_{G/N} H / N = (H / N) / \text{Core}_{G/N} (H / N),$$

а по пункту 2 $\text{Core}_{G/N} (H / N) = (\text{Core}_G H) / N$. Поэтому

$$\begin{aligned} \text{Cof}_G H &= H / \text{Core}_G H = (H / N) / (\text{Core}_G H / N) = \\ &= (H / N) / (\text{Core}_{G/N} (H / N)) = \text{Cof}_{G/N} H / N. \end{aligned}$$

Лемма 1.2. *Зафиксируем простое число p .*

Группа G p -замкнута тогда и только тогда, когда кофактор каждой ее максимальной подгруппы является p' -группой.

Доказательство. Если группа G p -замкнута, то каждая ее максимальная подгруппа M будет p -замкнутой и, очевидно, силовская p -подгруппа из M будет нормальной в группе G . Поэтому кофактор подгруппы M будет p' -группой.

Обратно, пусть кофактор каждой максимальной подгруппы группы G является p' -группой. Предположим, что силовская p -подгруппа P группы G не является нормальной в G . Тогда подгруппа $N_G(P)\Phi(G)$ будет собственной в группе G . Пусть H – максимальная подгруппа группы G , содержащая подгруппу $N_G(P)\Phi(G)$. По условию фактор-группа $H / \text{Core}_G H$ является p' -группой, поэтому подгруппа P содержится в $\text{Core}_G H$. По лемме Фраттини

$$G = N_G(P)\text{Core}_G H \subseteq H,$$

противоречие. Поэтому допущение неверно и силовская p -подгруппа P группы G является нормальной в G .

Лемма 1.3. *Пусть G – группа, у которой все силовские подгруппы циклические. Тогда:*

1) *если H – подгруппа группы G , то в H все силовские подгруппы циклические;*

2) *если N – нормальная подгруппа группы G , то в G/N все силовские подгруппы циклические;*

3) *если H и K – подгруппы группы G , K нормальна в G и $|H|$ делит $|K|$, то $H \subseteq K$;*

4) *существует нормальная циклическая холлова подгруппа N такая, что фактор-группа G/N циклическая;*

5) *G сверхразрешима.*

Доказательство. Утверждения 1 и 2 вытекают из свойств [1, 1.65] силовских подгрупп.

3. По условию для каждого $p \in \pi(K)$ порядок силовской p -подгруппы из H делит порядок силовской p -подгруппы из K . Произведение HK является подгруппой группы G . Согласно [11, VI.4.7] существуют силовские

p -подгруппы $H_p, K_p, (HK)_p$ из H, K и HK соответственно такие, что $H_p K_p = (HK)_p$. Из [1, с. 63] следует, что $H_p \subseteq K_p$, поэтому $H \subseteq K$.

4–5. Это теорема IV.2.11 [11].

Говорят, что подгруппа H из группы G является пронормальной в G , если для каждого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены в $\langle H, H^x \rangle$.

Лемма 1.4.

1. *Если G – разрешимая t -группа, то G сверхразрешима и каждая ее подгруппа является разрешимой t -группой.*

2. *Группа G будет разрешимой t -группой тогда и только тогда, когда каждая примарная подгруппа из G пронормальна в G .*

3. *Если в группе G все силовские подгруппы циклические, то G является t -группой.*

Доказательство. 1–2. Утверждения доказаны в [5], [12].

3. Предположим, что утверждение неверно и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда в G существует субнормальная подгруппа H , которая не является нормальной подгруппой группы G . Согласно лемме 1.3 группа G сверхразрешима, поэтому минимальная нормальная подгруппа N группы G имеет простой порядок. Пусть $|N| = p$. Так как $|G/N| < |G|$ и HN/N субнормальна в G/N , то HN нормальна в G по индукции. Если $HN = H$, то H нормальна в G и утверждение справедливо. Если $HN \neq H$, то $H \cap N = 1$ и H нормальна в HN , поскольку она субнормальна в HN и максимальна. Теперь $HN = H \times N$. Из циклическости силовской p -подгруппы группы G следует, что H является p' -подгруппой. Теперь H характеристична в $H \times N$ и нормальна в G . Лемма доказана.

Существенно используются в доказательстве следующие три результата о дополнениях.

Лемма 1.5 [11, теорема IV.2.6]. *Пусть P – силовская p -подгруппа группы G . Если $N_G(P) = C_G(P)$, то группа G p -нильпотентна.*

Лемма 1.6 [11, теорема IV.5.8]. *Пусть G – группа и p – простое число. Если фактор-группа $N_G(X)/C_G(X)$ является p -группой для каждой p -подгруппы X из G , то G p -нильпотентна.*

Лемма 1.7 [13, теорема 9]. *Пусть P – силовская p -подгруппа группы G . При $p = 2$ дополнительно предполагаем, что G является S_4 -свободной группой. Если $C_G(Z(P))$ и $N_G(J(P))$ p -нильпотентны, то G p -нильпотентна.*

Нам понадобятся еще два известных результата.

Лемма 1.8 [11, IV.5.4]. *Если все собственные подгруппы группы G p -нильпотентны, то группа G либо p -нильпотентна, либо является бипримарной группой.*

Лемма 1.9 [14, теорема 2]. *Пусть G – не p -нильпотентная группа. Если группа G содержит p -разложимую максимальную подгруппу M , то в группе G нормальна либо силовская p -подгруппа из M , либо p' -холлова подгруппа из M .*

2 Кофакторы вполне факторизуемы или t -группы

Теорема 2.1. *Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G либо имеет нечетный порядок, либо является вполне факторизуемой группой, либо разрешимой t -группой, то группа G разрешима.*

Доказательство. Пусть кофактор каждой максимальной подгруппы группы G либо имеет нечетный порядок, либо является вполне факторизуемой группой, либо разрешимой t -группой. Предположим, что G – неразрешимая группа, и воспользуемся индукцией по порядку G . По лемме 1.2 в группе имеется максимальная подгруппа, кофактор которой имеет четный порядок. Вначале докажем, что

(1) группа G не является простой.

Предположим, что G – простая группа. Тогда ядра всех максимальных подгрупп единичны и каждая максимальная подгруппа либо имеет нечетный порядок, либо является вполне факторизуемой группой, либо разрешимой t -группой. Так как вполне факторизуемые группы и разрешимые t -группы сверхразрешимы, а сверхразрешимые группы 2-нильпотентны [1, 4.51], то каждая подгруппа в группе G будет 2-нильпотентной. По лемме 1.8 группа G либо 2-нильпотентна, либо является бипримарной группой. В частности, группа G не проста, противоречие. Утверждение (1) доказано.

(2) Группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу и $S(G) = 1$.

Пусть K – нетривиальная нормальная в G подгруппа и X/K – максимальная подгруппа фактор-группы G/K . Тогда X – максимальная подгруппа группы G и $K \subseteq M$. По лемме 1.1

$$\text{Cof}_{G/K} X/K = \text{Cof}_G X,$$

поэтому у фактор-группы G/K кофактор каждой максимальной подгруппы либо имеет нечетный порядок, либо является вполне факторизуемой группой, либо разрешимой t -группой. Значит, к фактор-группе G/K можно применить индукцию, по которой G/K разрешима. Если

подгруппа K разрешима, то и группа G разрешима. Поэтому можно считать, что $S(G) = 1$.

Предположим, что в группе G существуют две минимальные нормальные подгруппы, пусть K_i – минимальная нормальная подгруппа группы G , $i = 1, 2$, $K_1 \neq K_2$. Тогда фактор-группа G/K_i разрешима, поэтому группа

$$G/K_1 \times G/K_2$$

разрешима. По [1, 2.33] группа G изоморфна подгруппе из

$$G/K_1 \times G/K_2,$$

поэтому G разрешима, противоречие. Значит допущение неверно и группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу. Утверждение (2) доказано.

(3) Окончание доказательства.

Пусть P – силовская 2-подгруппа группы G и K – минимальная нормальная подгруппа группы G . Согласно (2) и теореме Томпсона – Фейта о разрешимости групп нечетного порядка силовская 2-подгруппа $P \cap K$ из K неединична и ненормальна в G . По лемме Фраттини

$$G = KN_G(P \cap K).$$

Пусть U – максимальная в G подгруппа, содержащая $N_G(P \cap K)$. Тогда

$$G = KU, \text{Core}_G U = 1 \text{ и подгруппа } U$$

либо является вполне факторизуемой группой, либо разрешимой t -группой.

Вначале пусть подгруппа U вполне факторизуема. По [4] подгруппа U сверхразрешима, в частности, 2-нильпотентна, и ее силовская 2-подгруппа элементарная абелева. Так как

$$N_K(P \cap K) = N_G(P \cap K) \cap K \subseteq U \cap K,$$

то подгруппа $N_K(P \cap K)$ является 2-разложимой и $P \cap K$ абелева. Поэтому

$$N_K(P \cap K) = C_K(P \cap K)$$

и подгруппа K будет 2-нильпотентной по лемме 1.5, а значит $K \subseteq S(G)$. Получили противоречие с (2).

Пусть теперь подгруппа U является разрешимой t -группой. По лемме 1.4 подгруппа U сверхразрешима, поэтому она опять 2-нильпотентна, и каждая подгруппа из U является t -группой. В частности, подгруппа $N_G(P \cap K)$ будет 2-нильпотентной. Пусть P_1 – произвольная неединичная подгруппа из $P \cap K$. Тогда P_1 субнормальна в $N_G(P \cap K)$, а поскольку подгруппа $N_G(P \cap K)$ является t -группой, то P_1 нормальна в $N_G(P \cap K)$ и существует максимальная в G подгруппа V такая, что

$$N_G(P \cap K) \subseteq N_G(P_1) \subseteq V,$$

$$G = KN_G(P \cap K) \subseteq KV, \text{Core}_G V = 1$$

и V является либо разрешимой t -группой, либо вполне факторизуемой. В любом случае подгруппа V будет 2-нильпотентной. Из леммы 1.6 вытекает, что подгруппа K будет 2-нильпотентной. Опять получили противоречие с (2). Теорема доказана.

Согласно лемме 1.4 группа с циклическими силовскими подгруппами является разрешимой t -группой. Поэтому из теоремы 2.1 получаем

Следствие 2.1. *Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G либо имеет нечетный порядок, либо является вполне факторизуемой группой, либо группой с циклическими силовскими подгруппами, то группа G разрешима.*

В формулировке теоремы 2.1 кофакторы максимальных подгрупп могут быть трех типов. Если убирать по одному из них, то получим три новых признака разрешимости группы. Например, справедливо

Следствие 2.2. *Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G является вполне факторизуемой группой или разрешимой t -группой, то группа G разрешима.*

Если в формулировке теоремы 2.1 убирать по два из возможных типов, то получим также новые признаки разрешимости группы.

Следствие 2.3. *Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G является вполне факторизуемой группой, то группа G разрешима.*

Следствие 2.4. *Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G является разрешимой t -группой, то G разрешима.*

Следствие 2.5. *Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G является группой с циклическими силовскими подгруппами, то группа G разрешима.*

Следствие 2.6. *Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G имеет нечетный порядок или является группой, у которой все примарные подгруппы пронормальны, то G разрешима.*

Доказательство. Согласно лемме 1.4 группа, у которой все примарные подгруппы пронормальны, является разрешимой t -группой. Остается применить теорему 2.1.

Следствие 2.7. *Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G является группой, у которой все примарные подгруппы пронормальны, то группа G разрешима.*

Отметим также, что утверждения 2 и 3 теоремы В являются частными случаями теоремы 2.1.

3 Кофакторы – MNP-группы или z -группы

Группу, у которой все силовские подгруппы циклические, называют z -группой.

Теорема 3.1. *Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G либо имеет нечетный порядок, либо является MNP-группой, либо z -группой, то группа G разрешима.*

Доказательство. Пусть кофактор каждой максимальной подгруппы группы G либо имеет нечетный порядок, либо является MNP-группой, либо z -группой. По лемме 1.2 в группе G существует максимальная подгруппа, кофактор которой имеет четный порядок. Предположим, что G – неразрешимая группа, и воспользуемся индукцией по порядку группы. Вначале докажем, что

(1) группа G не является простой.

Предположим, что G – простая группа. Тогда ядра всех максимальных подгрупп единичны и каждая максимальная подгруппа либо имеет нечетный порядок, либо является MNP-группой, либо z -группой. По лемме 1.3 и [6] группы с циклическими силовскими подгруппами и MNP-группы сверхразрешимы. Поскольку сверхразрешимые группы 2-нильпотентны, то каждая собственная подгруппа в группе G 2-нильпотентна. По лемме 1.8 группа G либо 2-нильпотентна, либо является бипримарной группой, в частности, группа G не проста, противоречие. Утверждение (1) доказано.

(2) Группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу и $S(G) = 1$.

Надо дословно повторить доказательство утверждения (2) теоремы 2.1 с очевидной заменой условий теоремы 2.1 на условия теоремы 3.1.

(3) Существует максимальная в G подгруппа M такая, что $\text{Core}_G M = 1$ и M является силовской 2-подгруппой группы G .

Пусть K – минимальная нормальная подгруппа группы G . Так как K неразрешима, то по теореме Томпсона – Фейта подгруппа K имеет четный порядок. Пусть P – силовская 2-подгруппа из G . Тогда $P \cap K$ будет неединичной силовской 2-подгруппой в K и $N_G(P \cap K)$ – собственная подгруппа в группе G . Пусть M – максимальная подгруппа группы G , содержащая $N_G(P \cap K)$. По лемме Фраттини

$$G = KN_G(P \cap K),$$

поэтому $G = KM$. Если $\text{Core}_G M \neq 1$, то из единственности минимальной нормальной подгруппы K следует, что

$$K \subseteq \text{Core}_G M \subseteq M,$$

$$G = KM \subseteq (\text{Core}_G M)M = M,$$

противоречие. Поэтому $\text{Core}_G M = 1$ и M либо является MNP-группой, либо z -группой. Поскольку $P \cap K$ нормальна в P , то

$$P \subseteq N_G(P \cap K) \subseteq M$$

и подгруппа P нециклическая по [11, IV.2.8]. Значит, подгруппа M является MNP-группой. Согласно [6] каждая силовская в M подгруппа либо циклическая, либо нормальна в K , поэтому P нормальна в M . Так как подгруппа M сверхразрешима, то M 2-нильпотентна, а значит M 2-разложима, $M = P \times T$, T – 2'-холлова подгруппа из M . По лемме 1.9 либо группа G является 2-нильпотентной, либо подгруппа P нормальна в G , либо подгруппа T нормальна в G . Согласно (2) $S(G) = 1$, поэтому группа G не 2-нильпотентна и подгруппа P не нормальна в G . Остается, что подгруппа T нормальна в G и $T = 1$. Утверждение (3) доказано.

(4) $3 \in \pi(K) = \pi(G)$.

Согласно (3) группа $G = KP$, где P – силовская 2-подгруппа группы G и P максимальна в G . Поэтому $\pi(K) = \pi(G)$ и

$$C_G(Z(P)) = N_G(J(P)) = P.$$

Если G – 3'-группа, то по лемме 1.7 группа G будет 2-нильпотентной, противоречие. Значит, $3 \in \pi(G) = \pi(K)$.

(5) Пусть Q – силовская 3-подгруппа из K . Если A – максимальная в G подгруппа, содержащая $N_G(Z(J(Q)))$, то A – сверхразрешимая подгруппа четного порядка и силовская 2-подгруппа в A циклическая.

Из (3) следует, что Q является силовской 3-подгруппой группы G . Так как $Z(J(Q))$ – характеристическая подгруппа группы Q , то $Z(J(Q))$ нормальна в $N_G(Q)$, поэтому

$$N_G(Q) \subseteq N_G(Z(J(Q)))$$

и по лемме Фраттини

$$G = KN_G(Q) \subseteq KN_G(Z(J(Q))).$$

Пусть A – максимальная подгруппа группы G , содержащая $N_G(Z(J(Q)))$. Тогда

$$G = KA, \text{ Core}_G A = 1,$$

$$G/K \cong P/P \cap K \cong A/A \cap K,$$

порядок A делится на 6 и A является MNP-группой, либо z -группой по условию, в частности, $A = A_2[A_2]$ сверхразрешима, где A_2 – силовская 2-подгруппа, а A_2 – нормальная 2'-холлова подгруппа из A . Согласно (3) фактор-группа G/K является 2-группой, поэтому A_2 содержится в K .

Если подгруппа A_2 не циклическая, то A будет MNP-группой и по [6] подгруппа A 2-разложима. Теперь A_2 будет силовской 2-подгруппой в G , а подгруппы P и A сопряжены между собой как нормализаторы силовских 2-подгрупп. Имеем противоречие с тем, что $|P| \neq |A|$. Значит, A_2 циклическая, а так как $G \neq K$, то $A_2 \neq 1$ и $G = KA_2$. Утверждение (5) доказано.

(6) Подгруппа Q не циклическая.

Предположим, то подгруппа Q циклическая. Тогда $Z(J(Q)) = Q$ и K – простая группа. Согласно (5) подгруппа A содержит $N_G(Q)$, A – сверхразрешимая подгруппа четного порядка и силовская 2-подгруппа в A циклическая. Но сверхразрешимая группа дисперсивна по Оре [1, 4.51], поэтому

$$N_G(Q) = P_1[Q \times N_{\{2,3\}'}], \quad P_1 = N_G(Q) \cap P$$

является циклической силовской 2-подгруппой из $N_G(Q)$, а подгруппа $N_{\{2,3\}'}$ является $\{2,3\}'$ -холловой подгруппой в $N_G(Q)$. Так как G/K – 2-группа, то

$$Q \times N_{\{2,3\}'} \subseteq K \text{ и } G = KP_1.$$

Поскольку $G \neq K$, то P_1 не содержится в K . По лемме Фраттини $G = KN_G(Q)$ и $N_G(Q)$ не содержится в K .

Теперь по тождеству Дедекинда

$$N_K(Q) = K \cap N_G(Q) = (K \cap P_1)[Q \times N_{\{2,3\}'},$$

$N_K(Q)$ – собственная подгруппа в $N_G(Q)$ и

$$|N_G(Q) : N_K(Q)| = |P_1 : (K \cap P_1)| = 2^n$$

для некоторого натурального n .

По [1, 2.8] фактор-группа $N_G(Q)/C_G(Q)$ изоморфна подгруппе из группы автоморфизмов подгруппы Q . Из [11, I.4.6] получаем, что

$$|N_G(Q)/C_G(Q)| = 2^\delta, \quad \delta \in \{0, 1\},$$

поэтому

$$C_G(Q) = Q \times (C_G(Q) \cap P_1)[N_{\{2,3\}'},$$

$$|P_1 : (C_G(Q) \cap P_1)| \leq 2.$$

Так как подгруппа P_1 циклическая, а $|K \cap P_1|$ делит $|C_G(Q) \cap P_1|$, то

$$K \cap P_1 \subseteq C_G(Q) \cap P_1, \quad N_K(Q) \subseteq C_G(Q),$$

$$N_K(Q) \subseteq C_G(Q) \cap K = C_K(Q), \quad N_K(Q) = C_K(Q).$$

По лемме 1.5 группа K будет 3-нильпотентной, получили противоречие с тем, что K – простая 3d-группа. Утверждение (6) доказано.

(7) Окончание доказательства.

Согласно (6) подгруппа Q не циклическая, а подгруппа A будет MNP-группой. Из [6] следует, что

$$A = N_G(Q) = N_G(Z(J(Q))),$$

а из (5) получаем, что A – сверхразрешимая подгруппа четного порядка и силовская 2-подгруппа $P \cap A$ в A циклическая. Но сверхразрешимая группа дисперсивна по Оре [1, 4.51], поэтому

$$A = N_G(Q) = (P \cap A)[Q \times A_{\{2,3\}'},$$

где $A_{\{2,3\}'}$ – $\{2,3\}'$ -холлова подгруппа из A . Так как G/K – 2-группа, то

$$Q \times A_{\{2,3\}'} \subseteq K \text{ и } G = K(P \cap A).$$

Поскольку $G \neq K$, то $P \cap A$ не содержится в K и

$$N_K(Z(J(Q))) = K \cap A$$

будет собственной подгруппой в A . Из определения MNP-группы следует, что максимальная подгруппа P_0 из $P \cap A$ нормальна в A , следовательно,

$$A_0 = P_0 \times Q \times A_{\{2,3\}}$$

будет 3-разложимой подгруппой индекса 2 в A . Теперь

$$N_K(Z(J(Q))) \subseteq A_0 \text{ и } N_K(Z(J(Q)))$$

будет 3-разложимой подгруппой. По лемме 1.5 группа K 3-нильпотентна, противоречие. Теорема доказана.

Следствие 3.1. Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G либо имеет нечетный порядок, либо является MNP-группой, то G разрешима.

Следствие 3.2. Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G либо имеет нечетный порядок, либо является z -группой, то G разрешима.

Следствие 3.3. Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G либо является MNP-группой, либо z -группой, то G разрешима.

Поскольку MNP-группы охватывают все nilпотентные группы, то теорема 3.1 остается справедливой, если в условии MNP-группы заменить nilпотентными группами.

Следствие 3.4. Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G либо имеет нечетный порядок, либо является nilпотентной группой, либо z -группой, то G разрешима.

Следствие 3.5. Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G либо имеет нечетный порядок, либо является nilпотентной группой, то G разрешима.

Следствие 3.6. Если кофактор каждой максимальной подгруппы группы G либо является nilпотентной группой, либо z -группой, то G разрешима.

Отметим, что теорема А является частным случаем следствий 3.4–3.6.

Приведенный пример группы $PGL(2,7)$ указывает на то, что к условиям теоремы 2.1 нельзя добавить еще nilпотентные группы, а тем более MNP-группы, а к условиям теоремы 3.1 – разрешимые t -группы или вполне факторизуемые группы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
3. Gaschutz, W. Lectures of subgroups of Sylow type in finite soluble groups / W. Gaschutz // Notes on pure mathematics; № 11. Canberra, Australian National University, 1979. – 100 p.
4. Hall, Ph. Complemented group / Ph. Hall // J. London Math. Soc. – 1937. – Vol 12. – P. 201–204.
5. Gaschutz, W. Gruppen in denen das normalteilersein transitiv ist / W. Gaschutz // J. Reine Angew. Math. – 1957. – V.198. – P. 87–92.
6. Srinivasan, S. Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups / S. Srinivasan // Isr. J. Math. – 1980. – Vol. 35. – P. 210–214.
7. Wall, G.L. Groups with maximal subgroups of Sylow subgroups normal / G.L. Wall // Isr. J. Math. – 1982. – Vol. 43. – P. 166–168.
8. Baer, R. Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.
9. Asaad, M. On the solvability of finite groups / M. Asaad // Commun. Algebra. – 2009. – Vol. 37. – P. 719–723.
10. The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.12 [Электронный ресурс]. – 2009. – Режим доступа: <http://www.gap-system.org>
11. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1967.
12. Peng, T.A. Finite groups with pro-normal subgroups / T.A. Peng // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 20. – P. 232–234.
13. Glauberman, G. Subgroups of finite groups / G. Glauberman // Bull. Am. Math. Soc. – 1967. – Vol. 73. – P. 1–12.
14. Романовский, А.В. Группы с холловыми нормальными делителями / А.В. Романовский // В кн. : Конечные группы. Минск : Наука и техника, 1966. – С. 98–115.

Работа выполнена при поддержке Белорусского фонда фундаментальных исследований (проект Ф10Р-231).

Поступила в редакцию 11.01.12.

УДК 512.542

ПРОСТЫЕ НЕАБЕЛЕВЫ ГРУППЫ С D_π -ПОДГРУППАМИ ШМИДТАВ.Н. Тютянов¹, П.В. Бычков²¹Международный институт трудовых и социальных отношений, Гомель²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, ГомельSIMPLE NON ABELIAN GROUP WITH D_π SCHMIDT SUBGROUPSN.V. Tyutyaynov¹, P.V. Bychkov²¹International Institute of Labor and Social Relations, Gomel²F. Scorina Gomel State University, Gomel

Пусть G – конечная простая группа, S – ее холлова π -подгруппа Шмидта. Если $2 \in \pi$, то группа G не является D_π -группой. Если $2 \notin \pi$ и $G \notin \{A_n(q), {}^2A_n(q)\}$, то G является D_π -группой.

Ключевые слова: группа, подгруппа, простая группа, холлова π -подгруппа Шмидта, D_π -группа.

Let G be a finite simple group, S be its Hall Schmidt π -subgroup. If $2 \in \pi$ then G is not a D_π -group. If $2 \notin \pi$ and $G \notin \{A_n(q), {}^2A_n(q)\}$ then G is a D_π -group.

Keywords: group, subgroup, simple group, Hall Schmidt π -subgroup, D_π -group.

Введение

В настоящей работе рассматриваются конечные простые неабелевы группы, содержащие холлову π -подгруппу Шмидта и обладающие свойством D_π .

Все рассматриваемые группы конечны. Основные обозначения и определения можно найти в [1], [2]. Приведем некоторые из них для удобства читателя. Будем говорить, что группа G обладает свойством E_π , если в G имеется холлова π -подгруппа. Если любые две холловы π -подгруппы сопряжены, то будем говорить, что группа G обладает свойством C_π . Если, кроме того, любая π -подгруппа группы G содержится в некоторой холловой π -подгруппе, то будем говорить, что группа G обладает свойством D_π или является D_π -группой. Если G – конечная группа, то $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G . Для натуральных чисел a и b (a, b) означает их наибольший общий делитель. $A : B$ – полупрямое произведение нормальной группы A на группу B .

Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Основные свойства групп Шмидта можно найти в работах [3], [4].

1 Основные определения и вспомогательные утверждения

Нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1.1. Пусть G – конечная простая неабелева группа с холловой π -подгруппой Шмидта $S = R : T$ и $2 \in \pi$. Тогда группа G не является D_π -группой.

Доказательство. Согласно [5],

$$G \in \{PSL_2(q), PSU_3(q)\},$$

где q – степень числа 2, S содержится в подгруппе Бореля группы G и R – унипотентная 2-подгруппа группы G . Если $G \cong PSL_2(q)$, то $\pi(T) \in \pi(q-1)$. Так как G содержит диэдральную подгруппу порядка $2(q-1)$, то G не обладает свойством D_π . Пусть $G \cong PSU_3(q)$, тогда S содержится в подгруппе Бореля группы G , где R является унипотентной 2-подгруппой и $\pi(T) \in \pi(q^2-1)$. Из работы [6] следует, что группа G содержит подгруппу, изоморфную $PSU_2(q) \times Z_{\frac{q+1}{d}}$, где $d = (q+1, 3)$. Поэтому $\pi(T) \in \pi(q+1)/d$. Группа G содержит подгруппу $(\frac{1}{(3, q+1)}(Z_{q+1} \times Z_{q+1}))$. Если $(3, q+1) = 1$, то группа G содержит подгруппу, изоморфную $Z_{q+1} \times Z_{q+1}$, что невозможно в силу цикличности T . Таким образом, $(3, q+1) = 3$ и T – 3-группа. Если 9 делит $q+1$, то группа G содержит подгруппу вида $Z_3 \times Z_3$, что невозможно. Поэтому $q+1 = 3f$, где $(3, f) = 1$ и силовская 3-подгруппа в G является циклической порядка 3. Однако

$q^2 - q + 1 = (q + 1)^2 - 3q$, и поэтому 3 делит $q^2 - q + 1$. Тогда

$$|G| = \frac{1}{d} q^3 (q^2 - 1)(q^3 + 1) = \frac{1}{d} (q + 1)^2 (q^2 - q + 1)(q - 1)$$

делится на 9, что невозможно.

Лемма 1.2. Пусть G – простая спорадическая группа с холловой π -подгруппой Шмидта S нечетного порядка, где $\pi = \pi(S)$. Тогда G является D_π -группой.

Доказательство. Из леммы 1.4.6 [7] следует, что $S \cong Z_p : Z_q$, где p и q – различные простые числа. Следовательно, если группа G не обладает свойством $D_{\{p,q\}}$, то она имеет холлову $\{p,q\}$ -подгруппу, изоморфную $Z_p \times Z_q$. Противоречие с результатом Х. Виландта [8].

Лемма 1.3. Пусть $G \cong A_n$ – знакопеременная группа, $n \geq 5$. Тогда группа G не имеет холловых подгрупп Шмидта нечетного порядка.

Доказательство. Пусть S – холлова подгруппа Шмидта нечетного порядка в группе G . Поскольку $|S|$ – нечетное число и $[S_n : A_n] = 2$, то S – холлова бипримарная подгруппа в S_n . Противоречие с результатом Ф. Холла [9, теорема A4].

Лемма 1.4. Пусть G – простая группа лева типа над полем характеристики p . Если G обладает холловой π -подгруппой Шмидта S нечетного порядка, где $\pi = \pi(S)$ и $p \in \pi$, то G – D_π -группа.

Доказательство. Пусть $S = R : T$, где $|R| = r^\alpha$, $|T| = t^\beta$, r и t – нечетные простые числа, $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$. Если $t = p$, то $R \subseteq O_p(T)$, где T – унитарная подгруппа в G . Последнее невозможно. Следовательно, $r = p$ и $S \subseteq U : H = B$ – подгруппа Бореля, где U – унитарная подгруппа, H – подгруппа Картана. Последовательно рассмотрим все возможные случаи.

(1) $G \cong A_l(q)$, где $l \geq 1$, $q = p^n$.

Пусть $l = 1$ и $G \cong PSL_2(q)$. Если группа G обладает холловой подгруппой Шмидта нечетного порядка $S = U : H_0$, где $H_0 \subseteq H$, то по теореме Диксона [10, теорема II.8.27] группа G является D_π -группой. Пусть $l = 2$ и $G \cong PSL_3(q)$. Тогда $|H| = \frac{1}{(3,q-1)}(q-1)^2$. Если $t \neq 3$, то силовская t -подгруппа в H не циклическая, что невозможно. Следовательно, $t = 3$ и $q - 1 = 3f$, где $(f, 3) = 1$. Поэтому силовская 3-подгруппа в G имеет порядок 3.

$$|G| = \frac{1}{(3,q-1)} q^3 (q^2 - 1)(q^3 - 1) = \frac{1}{(3,q-1)} q^3 (q - 1)^2 (q^2 + q + 1)(q + 1).$$

Тогда $q^2 + q + 1 = q^2 - 2q + 1 + 3q = (q - 1)^2 + 3q$.

Следовательно, $q^2 + q + 1$ делится на 3 и силовская 3-подгруппа группы G имеет порядок не меньше 9, что невозможно. Если $l \geq 3$, то $|H| = \frac{1}{(l+1,q-1)}(q-1)^l$ и в H нет циклических силовских подгрупп.

(2) $G \cong B_l(q)$, $l > 1$, $q = p^n$.

В этом случае $|H| = \frac{1}{(2,q-1)}(q-1)^l$. Поэтому в H нет циклических силовских подгрупп нечетного порядка, что невозможно.

(3) $G \cong C_l(q)$, $l > 2$, $q = p^n$.

Дословное повторение рассуждений п. (2).

(4) $G \cong D_l(q)$, $l > 3$, $q = p^n$.

В этом случае $|H| = \frac{1}{(4,q-1)}(q-1)^l$ и силовские подгруппы нечетного порядка в H не циклические, что невозможно.

(5) $G \cong G_2(q)$, $q = p^n$.

$|H| = (q - 1)^2$ и в H нет циклических силовских подгрупп, что невозможно.

(6) $G \cong F_4(q)$, $q = p^n$.

$|H| = (q - 1)^4$ и H не содержит циклических силовских подгрупп нечетного порядка, что невозможно.

(7) $G \cong E_i(q)$, где $i \in \{6, 7, 8\}$, $q = p^n$.

$|H| = \frac{1}{d}(q - 1)^i$, где $d \in \{(3, q - 1), (2, q - 1), 1\}$ соответственно. Очевидно, что во всех случаях H не содержит циклических силовских подгрупп нечетного порядка.

(8) $G \cong B_2(q)$, $q = 2^{2n+1}$.

Поскольку $p = 2$, то этот случай невозможен.

(9) $G \cong E_6(q)$, $q = p^n$.

В этом случае

$$|H| = \frac{1}{(3,q+1)}(q-1)(q^2-1)^2 = \frac{1}{(3,q+1)}(q-1)^3(q+1)^2.$$

Очевидно, что силовские t -подгруппы в H при $t \neq 3$ не являются циклическими. Поэтому $t = 3$, $q + 1 = 3f$, где $(f, 3) = 1$ и силовская 3-подгруппа группы G имеет порядок 3. Очевидно, что порядок силовской 3-подгруппы группы G больше 3. Получили противоречие.

(10) $G \cong F_4(q)$, $q = 2^{2n+1}$.

Дословное повторение рассуждений п. (8).

(11) ${}^2G_2(q)$, $q = 3^{2n+1}$, $n \geq 1$.

Из теоремы С [11] следует, что ${}^2G_2(3) < G$. Так как ${}^2G_2(3) \cong PSL_2(8) : Z_3$, то группа G

содержит элемент порядка 9. Противоречие с тем, что $\exp(R) = 3$.

$$(12) \quad G \cong^3 D_4(q), \quad q = p^n.$$

В этом случае

$$|G| = q^{12}(q^8 + q^4 + 1)(q^6 - 1)(q^2 - 1)$$

и $|H| = (q-1)(q^3-1) = (q-1)^2(q^2+q+1)$. Если $t|q-1$, то силовская t -подгруппа группы H не циклическая, что невозможно. Следовательно, $t|q^2+q+1$. С другой стороны,

$$q^8 + q^4 + 1 = (q^2 + q + 1)(q^6 - q^5 + q^3 - q + 1).$$

Это противоречит холловости подгруппы Шмидта.

$$(13) \quad G \cong^2 D_l(q), \quad l > 3, \quad q = p^n.$$

В этом случае

$$|G| = \frac{1}{(4, q^{l+1})} q^{l(l-1)} (q^l + 1)(q^2 - 1)(q^4 - 1) \cdots (q^{2l-2} - 1)$$

и $|H| = \frac{1}{(4, q^{l+1})} (q^2 - 1)(q - 1)^{l-2}$. Если $t|q-1$, то силовская t -подгруппа в H не циклическая. Поэтому $t|q+1$. Поскольку $l > 3$, то это противоречит холловости подгруппы Шмидта.

$$(14) \quad {}^2 A_l(q), \quad l > 1, \quad q = p^m.$$

Пусть сначала $l = 2$ и $G \cong PSU_3(q)$. Как в лемме 1.1, показывается, что холловой подгруппы Шмидта в группе G не существует.

Если $l = 3$, то

$$|{}^2 A_3(q)| = \frac{1}{(4, q+1)} q^6 (q^2 - 1)(q^3 + 1)(q^4 - 1)$$

$$\text{и } |H| = \frac{1}{(4, q+1)} (q-1)((q^2-1) = \frac{1}{(4, q+1)} (q-1)^2 (q+1).$$

Если t делит $q-1$, то силовская t -подгруппа в H не циклическая, что невозможно. Следовательно, t делит $q+1$. Это невозможно, поскольку подгруппа Z_{q+1} не содержит силовских подгрупп, являющихся силовскими в группе G . Если $l \geq 4$, то подгруппа Картана группы G не содержит циклических силовских подгрупп.

Лемма 1.5. Пусть $G \cong S_n$ – симметрическая группа и $r \in \pi(G) \setminus \{2\}$. Тогда для всякой $R \in \text{Syl}_r(G)$ либо $|R| = r$, либо R не является циклической группой.

Доказательство. Пусть $R \in \text{Syl}_r(G)$.

Если $n < r^2$, тогда $|R| = r$.

Если $n \geq r^2$, то

$$(1, 2, \dots, r)(r+1, r+2, \dots, 2r) \cong Z_r \times Z_r \leq R$$

и R не является циклической группой.

Лемма 1.6. Пусть G – простая неабелева группа лиевского типа над полем характеристики p , содержащая холлову подгруппу Шмидта нечетного порядка $S = R:T$, где $|R| = r^\alpha$, $|T| = t^\beta$, $\pi = \{r, t\}$ и $p \notin \pi$. Тогда всякая π -подгруппа

группы G содержит нормальную силовскую r -подгруппу.

Доказательство. Из леммы 2.7.1 [7] следует, что силовская r -подгруппа R группы G абелева и $r > t$. Пусть $L = QF - \pi$ -подгруппа группы G , где $1 \neq Q - r$ -подгруппа, $1 \neq F - t$ -подгруппа. Так как $t < r$ и F – циклическая группа, то $N_L(F) = C_L(F)$ и $F \subseteq Z(N_L(F))$. По теореме Бернсайда QL .

Лемма 1.7. Пусть G – простая неабелева группа лиевского типа над полем $GF(p^m)$ характеристики p и $G \notin \{A_n(p^m), {}^2 A_n(p^m)\}$. Если группа G обладает холловой π -подгруппой Шмидта S , где $\pi = \pi(S)$ и $2, p \notin \pi$, то $G - D_\pi$ -группа.

Доказательство. Так как группа G обладает свойством E_π , то выполняются либо условия (1)–(3) леммы 14 [12], либо условия (1)–(3) теоремы 4 [12]. Покажем, что в нашем случае не выполняется условие (3) теоремы 4 [12]. Пусть сначала группа G является исключительной группой лиевского типа, отличной от групп Судзуки или Ри. Если выполняется условие (1) теоремы 3 [12], то S – абелева, что невозможно. Следовательно, выполнено условие (2) теоремы 3 [12]. Это соответствует условию (2) теоремы 4 [12]. Таким образом, G – классическая группа лиевского типа. Если $G \cong GO_n^\epsilon(p^m)$, где $\epsilon = \pm$, то из теоремы 4 [12] следует, что либо выполняются условия (1) или (2) теоремы 4 [12], либо холлова π -подгруппа абелева. Так как последнее невозможно, то выполняется либо условие (1), либо условие (2) теоремы 4 [12]. Если $G \cong Sp_{2n}(p^m)$, то из теоремы 4 [12] следует, что выполняется либо условие (1), либо условие (2) теоремы 4 [12].

Таким образом, выполняется условие (*) см. стр. 22 [12]. Из леммы 1.6 следует, что выполняется условие (1) теоремы 5 [12]. Поэтому из теоремы 5 (4) [12] следует, что $G - D_\pi$ -группа.

Лемма 1.8. Пусть $G \in \{A_n(p^m), {}^2 A_n(p^m)\}$ – простая группа лиевского типа над полем характеристики p , содержащая холлову π -подгруппу Шмидта нечетного порядка $S = R:T$, где $|R| = r^\alpha$, $|T| = t^\beta$, $\pi = \{r, t\}$ и $p \notin \pi$. Если группа G удовлетворяет условию (3) теоремы 4 [12], то $\beta = 1$, $n = t$ и G не является D_π -группой.

Доказательство. Так как $|G|_l = |W|_l$, где W – подгруппа Вейля группы G и T – циклическая группа, то из леммы 1.5 и строения группы W в группах типа $A_n, {}^2 A_n$ следует, что $|T| = t$.

В теореме 4 [12] показано, что в этом случае $n = t$ и G не является D_π -группой.

Замечание. Отметим, что группа $PSL_3(11)$ имеет холлову $\{3,5\}$ -подгруппу Шмидта, но не обладает свойством $D_{\{3,5\}}$, группа $PSU_3(4)$ также имеет холлову $\{3,5\}$ -подгруппу Шмидта и не обладает свойством $D_{\{3,5\}}$. Эти примеры показывают, что класс групп из леммы 1.8 не пуст.

2 Доказательство основного результата

Теорема 2.1. Пусть G – конечная простая неабелева группа, содержащая холлову π -подгруппу Шмидта. Если $2 \in \pi$, то группа G не обладает свойством D_π , если $2 \notin \pi$, то G – D_π -группа, за исключением случаев, когда $G \in \{A_n(q), {}^2A_n(q)\}$ для некоторых значений параметров n и q .

Доказательство. Из леммы 1.1 следует первый пункт теоремы. Вторым пунктом следует из лемм 1.2–1.4 и лемм 1.7–1.8.

Заключение

В работе рассматриваются конечные простые неабелевы группы, холловы π -подгруппы Шмидта и группы, обладающие свойством D_π . Показано, что если $2 \in \pi$, то простых неабелевых групп с таким свойством не существует. Если $2 \notin \pi$, то за исключением линейных и унитарных групп все простые неабелевы группы с этим свойством являются D_π -группами. Приведены примеры линейных и унитарных групп, которые не обладают свойством D_π .

ЛИТЕРАТУРА

1. Gorenstein, D. Finite groups / D. Gorenstein // New-York. : Harper and Row, 1968.

2. Atlas of Finite Groups / J.H. Conway [et al.]. – Oxford, 1985.

3. Шмидт, О.Ю. Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Мат. сб. – 1924. – Т. 31. – С. 366–372.

4. Гольфанд, Ю.А. О группах, все подгруппы которых специальные / Ю.А. Гольфанд // ДАН СССР. – 1948. – Т. 60, № 8. – С. 1313–1315.

5. Мазуров, В.Д. О конечных группах со специальными силовскими 2-подгруппами / В.Д. Мазуров, С.А. Сыскин // Матем. зам. – 1973. – Т. 14, № 2. – С. 217–222.

6. Hartley, R. Determination of the ternary collineation groups whose coefficients lie in the $GF(2^n)$ / R. Hartley // Ann. of Math. – 1925. – Vol. 27. – P. 140–158.

7. Ревин, Д.О. Холловы подгруппы конечных групп : дис. д-ра физ.-матем. Наук : 01.01.06 / Д.О. Ревин. – Новосибирск, 2008. – 232 с.

8. Wielandt, H. Zum Satz von Sylow / H. Wielandt // Math. Z. – 1954. – В. 60. – S. 407–409.

9. Hall, P. Theorems like Sylow's / P. Hall // Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 3, № 6. – P. 286–304.

10. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag, 1967. – 793 s.

11. Kleidman, P. The maximal subgroups of Chevalley groups $G_2(q)$ with q odd, the Ree groups ${}^2G_2(q)$, and their automorphism groups / P. Kleidman // J. Algebra. – 1988. – Vol. 117. – P. 30–71.

12. Вдовин, Е.П. Холловы подгруппы нечетного порядка в конечных группах / Е.П. Вдовин, Д.О. Ревин // Алгебра и логика. – 2002. – Т. 41, № 1. – С. 15–56.

Поступила в редакцию 26.01.12.

УДК 531:004.925

КОМПЬЮТЕРНЫЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ПУСТОТ В ГРУНТОВОМ ОСНОВАНИИ НА ОСАДКУ ФУНДАМЕНТА

В.Е. Быховцев, С.В. Торгонская

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

COMPUTER ANALYSIS OF THE INFLUENCE OF EMPTINESS IN THE EARTH BASIS ON THE DEPOSIT OF THE BASE

V.E. Bykhautsau, S.V. Torgonskaya

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Исследуется влияние структурных особенностей грунтового основания на осадку фундамента.

Ключевые слова: *грунтовое основание, деформации, осадка фундаментов, компьютерное объектно-ориентированное моделирование.*

Influence of structural features of the soil basis on the base deposit is investigated.

Keywords: *soil bases, deformations, deposit of the bases, computer objective – focused modeling.*

Введение

Грунтовые основания фундаментов строительных объектов всегда характеризуются неоднородностью своей структуры. В составе структуры оснований могут содержаться слои, линзы, включения пониженной несущей способности и пустоты, расположенные на различной глубине от поверхности.

Фундаменты объединяют здание и грунтовое основание в единую физическую систему «Здание – фундаменты – грунтовое основание», в которой составляющие ее элементы следует рассматривать как физические подсистемы, состоящие из отдельных элементов твёрдых тел, обладающих определёнными геометрическими и физико-механическими характеристиками. Взаимодействие зданий, фундаментов любых типов и грунтовых оснований всегда сопровождается их деформацией, величина которой определяется их физико-механическими свойствами и установившимися связями, поэтому состояние всей системы «Здание – фундаменты – грунтовое основание» необходимо исследовать с позиций системного подхода и основных положений нелинейной механики деформируемого твёрдого тела.

Учет указанных особенностей позволит наиболее полно оценить несущую способность грунтового основания под действием нагрузки от сооружений, а также принять наиболее безопасные и экономичные решения при возведении зданий.

Физическая постановка задачи. В настоящей работе исследуется напряженно-деформированное состояние сложной нелинейной системы «Фундамент – грунтовое основание». Внешняя нагрузка приложена к верхней поверхности

фундамента. В качестве базовой задачи рассматривается плитный фундамент, заглубленный в однородное грунтовое основание и имеющий внешние геометрические и физико-механические характеристики, аналогичные исследуемому типу фундамента (рисунок 2.1). На ее основе исследуется влияние пустот в грунтовом основании на осадку фундамента и на несущую способность грунтового основания при условии его линейного и нелинейного деформирования.

Данная задача является краевой задачей нелинейной математической физики [1]. Решение было получено методом объектно-ориентированного компьютерного моделирования на основе системного подхода, метода конечных элементов, рассмотренного совместно с методом энергетической линеаризации [2], [3]. Исследование деформационного процесса указанной системы проводилось с помощью программного комплекса «Энергия – 2D» [2].

1 Методика и технология компьютерного объектно-ориентированного моделирования осадки фундамента на грунтовом основании

Математическая модель системы. При компьютерном объектно-ориентированном моделировании реальной физической системе ставится в соответствие её виртуальная физическая модель, которая строится на экране монитора и отображает структуру исходной системы [2]. Это сразу накладывает свои требования на структуру и содержание математической модели. Для рассматриваемого класса задач математическая модель будет иметь следующую структуру:

1. Геометрическая модель геологического разреза основания.

2. Механико-математическая модель элементов структуры грунтового основания принята в виде степенной функции

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^m, \quad A > 0, \quad 0 < m < 1. \quad (1.1)$$

3. Система граничных условий задаётся в соответствии с классификацией поставленной задачи как краевой задачи математической физики. На части границы области определения исследуемой системы задаётся система внешних сил, обусловленных нагрузкой от здания или сооружения.

4. Условия равновесия системы (ядро математической модели):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{U\}} = 0,$$

где $\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \{U\}^T \{P\}$ – полная энергия деформируемой системы, $\{P\}$ – вектор внешних сил, $\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$, $\{U\}$ – векторы напряжений, деформаций и перемещений, V – объём области существования исследуемой системы.

Вследствие применения процедур метода конечных элементов ядро математической модели преобразовывается к виду $[K]\{U\} = \{P\}$, где $[K]$ – матрица жесткости системы.

5. Математическая модель (форма) искомого решения $\varphi = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$.

Данная структурная схема является общим эффективным алгоритмом построения математических моделей систем или объектов.

Исследование математической модели проводилось методом вариантного проектирования. Для этого было построено несколько вариантов задачи, учитывающих структуру и свойства грунтового основания.

Технология компьютерного объектно-ориентированного моделирования системы деформируемых твёрдых тел. Технология визуального объектно-ориентированного моделирования сложной нелинейной системы «Фундамент – грунтовое основание» основывается на методологии процесса моделирования, содержания и назначении моделируемых задач и представлена следующим образом [2]–[5]:

- определение формы и начальных размеров расчётной области;

- построение геометрической модели грунтового основания строительной площадки, определение мощности и глубины залегания слоёв с указанием их физико-механических характеристик;

- определение типа и структуры фундамента. В качестве фундамента принят плитный фундамент;

- физико-механические характеристики элементов структуры основания и фундамента. Закон деформирования принят в виде степенной функции (1.1);

- определение величины и характера распределения внешней нагрузки;

- определение параметров дискретизации. Дискретизация расчетной области проводилась конечными элементами в виде прямоугольных треугольников. Всякий элемент дискретизации, т. е. всякий конечный элемент, по своей структуре и свойствам является строго однородным.

2 Компьютерное моделирование осадки фундамента на нелинейно – деформируемом грунтовом основании

Модельная задача № 1 (Фундамент плитный – однородное грунтовое основание)

Фундамент плитный, заглублен в грунтовое основание на 30 см. Модуль упругости для фундамента $E = 40000$ МПа (400000 кг/см²), для грунта $E = 36$ МПа (360 кг/см²); коэффициент Пуассона для фундамента $\mu = 0,01$, для грунта $\mu = 0,2$. Нагрузка $P = 24$ кН (2400 кгс) приложена к поверхности фундамента.

Дискретизация проводилась прямоугольными треугольниками. Схема дискретизации расчетной области представлена на рисунке 2.1. Темно-серым цветом обозначена плита, светло-серый фон соответствует грунту.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65
66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91
92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104
105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117

Рисунок 2.1 – Схема дискретизации расчётной области

На рисунке 2.2 представлено содержание и способы вводимых данных и дискретная модель исходной системы.

Модельная задача № 2 (Плитный фундамент – грунтовое основание с пустотным образованием)

Исходные физико-механические характеристики фундамента остаются прежними, в качестве грунтового основания рассматривается грунтовое основание, содержащее пустотную подобласть. Рассматриваемая физическая система определена в двусвязной области. Решение задачи было получено путем замены исходной двусвязной области неоднородной сплошной областью, эквивалентной по несущей способности исходной системе деформируемых твёрдых тел и геометрически ей равной.

На рисунке 2.3 представлено содержание и способы вводимых данных и дискретная модель исходной системы.

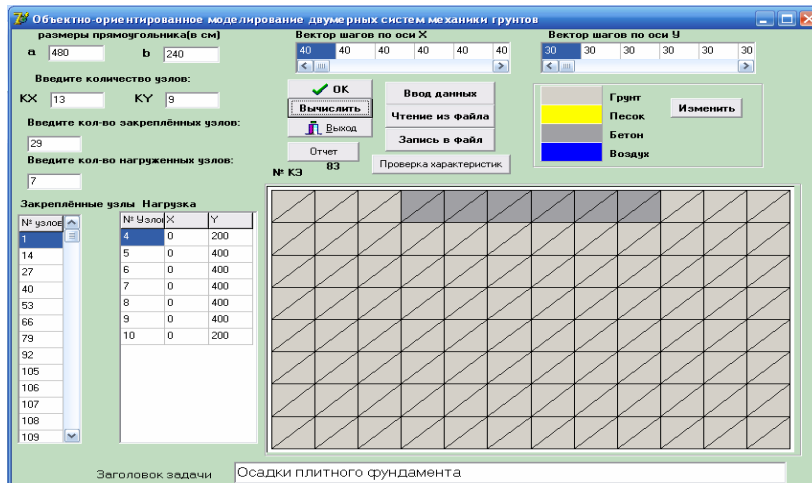


Рисунок 2.2 – Главное окно приложения дискретной физической системы и ввода исходных данных

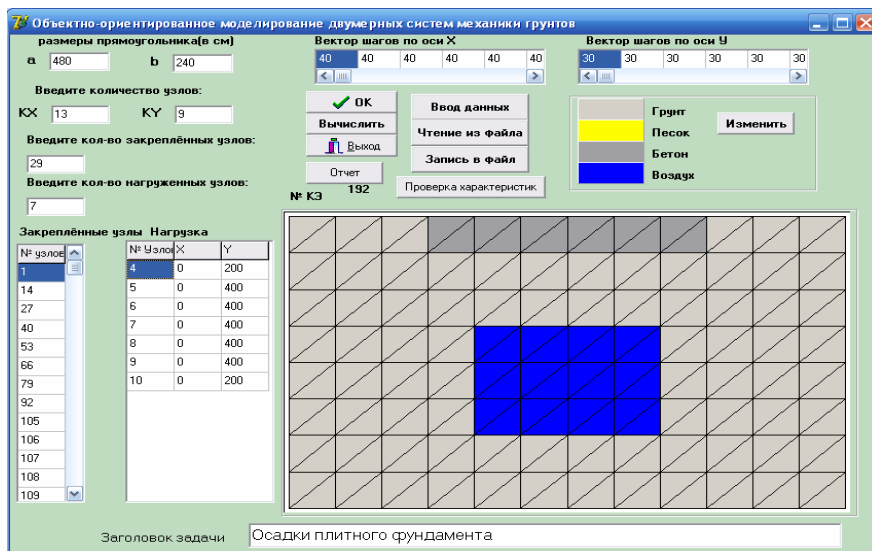


Рисунок 2.3 – Главное окно приложения дискретной физической системы

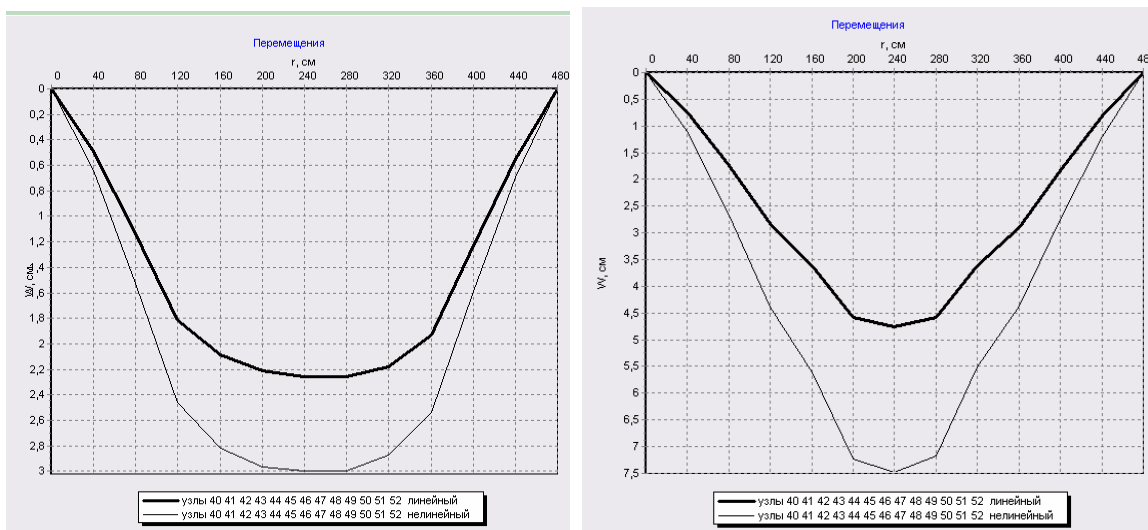


Рисунок 2.4 – Графики линейного и нелинейного перемещения плитного фундамента на однородном и неоднородном грунтовом основании

Таблица 2.1 – Значения горизонтальных и вертикальных составляющих перемещений в узлах деформируемой области плитного фундамента (см)

№№ узлов	Однородное основание				Неоднородное основание			
	Линейное решение		Нелинейное решение		Линейное решение		Нелинейное решение	
	u	v	u	v	u	v	u	v
3	-0,863	1,423	-1,115	1,962	-1,187	2,199	-1,780	3,438
4	-1,699	3,151	-2,308	4,471	-2,391	4,793	-3,748	7,689
5	-2,062	3,093	-2,816	4,351	-2,939	4,679	-4,616	7,449
6	-2,012	3,168	-2,736	4,422	-2,856	4,766	-4,469	7,534
7	-2,033	3,231	-2,756	4,480	-2,880	4,832	-4,493	7,597
8	-2,077	3,286	-2,810	4,529	-2,939	4,880	-4,574	7,643
9	-2,194	3,333	-2,963	4,572	-3,102	4,916	-4,822	7,678
10	-2,534	3,326	-3,423	4,543	-3,593	4,872	-5,584	7,595
11	-1,860	1,925	-2,521	2,562	-2,640	2,820	-4,125	4,308
16	-0,928	1,480	-1,245	2,029	-1,268	2,279	-1,975	3,548
17	-1,195	2,991	-1,573	4,247	-1,611	4,552	-2,465	7,306
18	-1,194	3,068	-1,571	4,318	-1,608	4,643	-2,463	7,392
19	-1,191	3,139	-1,569	4,382	-1,603	4,723	-2,458	7,467
20	-1,187	3,200	-1,565	4,437	-1,596	4,785	-2,451	7,524
21	-1,183	3,250	-1,561	4,480	-1,590	4,828	-2,444	7,562
22	-1,180	3,290	-1,558	4,514	-1,585	4,854	-2,440	7,582
23	-1,178	3,325	-1,557	4,542	-1,582	4,870	-2,437	7,593
24	-0,897	1,755	-1,158	2,319	-1,225	2,582	-1,838	3,917
43	-0,997	1,816	-1,306	2,457	-1,216	2,832	-1,859	4,383
44	-1,019	2,089	-1,337	2,818	-1,087	3,612	-1,680	5,601
45	-0,991	2,209	-1,283	2,968	-0,779	4,586	-1,163	7,230
46	-0,922	2,260	-1,202	3,000	-0,644	4,755	-0,943	7,482
47	-0,807	2,260	-1,045	2,993	-0,556	4,589	-0,807	7,167
48	-0,619	2,181	-0,791	2,872	-0,566	3,620	-0,832	5,519
49	-0,337	1,931	-0,420	2,534	-0,353	2,896	-0,501	4,369
56	-0,738	1,405	-0,941	1,851	-1,016	2,141	-1,501	3,258
57	-0,728	1,646	-0,934	2,168	-0,852	2,539	-1,261	3,892
58	-0,673	1,756	-0,852	2,295	-0,913	3,107	-0,800	3,588
59	-0,588	1,794	-0,749	2,324	-0,700	3,181	-0,591	3,535
60	-0,467	1,775	-0,595	2,303	-0,390	3,034	-0,264	3,844
61	-0,302	1,679	-0,381	2,164	-0,231	2,505	-0,328	3,751
62	-0,099	1,449	-0,115	1,868	-0,027	2,147	-0,016	3,187

Для сравнительного анализа в таблице 2.1 представлены значения горизонтальных и вертикальных составляющих перемещений в узлах деформируемой области плитного фундамента на однородном и с пустотной подобластью грунтового основании.

На рисунке 2.4 представлены графики линейного и нелинейного перемещения плитного фундамента на однородном и неоднородном грунтовом основании соответственно.

3 Анализ результатов и выводы

При заданных условиях осадка плиты на грунтовом основании, состоящем из минерального грунта, составила в среднем 3,2 см при линейном деформировании и 4,5 см при нелинейном деформировании. На грунтовом основании, содержащем пустотную подобласть, осадка плиты возросла до 4,8 см и 7,6 см при линейном и

нелинейном деформировании соответственно. Следовательно, для данной конкретной задачи наличие пустотной области в грунтовом основании увеличивает осадку фундамента на 50% при линейном деформировании и на 69% при нелинейном деформировании.

Как видно из таблицы 2.1, несущая способность грунтового основания с пустотной подобластью резко падает, максимальные перемещения грунта наблюдаются в контактной области грунтового основания и плитного фундамента и в срединной части расчетной области, а значит, возможен провал грунтового основания непосредственно в пустотную область.

Следует отметить, что нагрузка, приложенная к верхней части плитного фундамента, через пустотную область не передается, т. е. данная воздушная линза принимает ее на себя. Это подтверждается тем, что перемещения узлов № 96–

100 малы. Иными словами, пустотная область играет роль своеобразной воздушной пробки.

При исследовании деформаций грунтового основания с пустотной областью, расположенной под центром фундаментной плиты, в узлах № 3, 16, 11, 24, был выявлен телескопический сдвиг грунта. Это значит, что воздушная подобласть является воздушной линзой, которая препятствует передаче нагрузки на слои грунта, расположенных под этой линзой.

Поэтому в случае, когда воздушная полость в грунтовом основании обнаружена, необходимо либо ликвидировать эту полость, либо использовать иной тип фундамента.

Заключение

Количественная оценка и анализ напряженно-деформированного состояния сложной структуры грунтового основания с использованием программного комплекса «Энергия – 2D» позволяют оценить несущую способность грунтового основания и определить конструкцию фундамента, рациональную для реального грунтового основания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Партон, В.З.* Методы математической теории упругости / В.З. Партон, П.И. Перлин. – М. : Наука, 1981. – 688 с.
2. *Быховцев, В.Е.* Компьютерное объектно-ориентированное моделирование нелинейных систем деформируемых твёрдых тел / В.Е. Быховцев. – Гомель : УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2007. – 219 с.
3. *Зенкевич, О.* Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 540 с.
4. *Журавков, М.А.* Математическое моделирование деформационных процессов в твёрдых деформируемых средах / М.А. Журавков. – Мн. : БГУ, 2002. – 456 с.
5. *Цытович, Н.А.* Механика грунтов / Н.А. Цытович. – М. : Стройиздат, 1963. – 542 с.

Поступила в редакцию 25.10.11.

УДК 658.012.011.56

**ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ РЕЖИМОВ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА В МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ НА ВРЕМЯ СЧЕТА
РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ЗАДАЧИ**

С.Ф. Маслович

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

**ASSESSMENT OF THE INFLUENCE OF THE INFORMATION
PROCESSING MODES OF COMPUTATIONAL PROCESS
IN A MULTIPROCESSOR COMPUTER SYSTEMS ON THE COMPUTING
TIME OF DISTRIBUTED TASKS**

S.F. Maslovich

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В статье представлены результаты моделирования оценки влияния режимов обработки информации вычислительного процесса в многопроцессорной вычислительной системе на время счета распределенной задачи. Задача представлена в виде сетевого графика. Проведена оценка длин критических путей при различных вариантах организации нагрузок на узлы сети в динамике изменения приоритетов диалоговых и распределенных задач.

Ключевые слова: программно-технологический комплекс имитации, имитационное моделирование, вычислительная система, вычислительный процесс, рабочая нагрузка, распределенная обработка информации.

In the article the author presents the simulation results of assessment the impact of modes of information processing computational process in a multiprocessor computer system at the time of the sharing the task. The problem is presented in the form of a network schedule. The estimation of the lengths of critical paths for different versions of the organization stresses on nodes in the dynamics of changes in the priorities of interactive and distributed applications is carried out.

Keywords: program-technological complex of simulation, simulation modeling, computer system, computer process, the working load, the distributed processing of the information.

Введение

Оценка влияния режимов обработки информации вычислительного процесса в многопроцессорной вычислительной системе на время счета распределенной задачи предполагает решение следующих подзадач: оценка влияния диалоговых и счетных (пакетных) задач узлов сети многопроцессорной вычислительной системы (МВС) на время счета распределенных подзадач задачи распределенной обработки информации (РОИ); анализ критических путей при наличии/отсутствии диалоговых и счетных задач; оценка длин этих критических путей при различных вариантах организации нагрузок на узлы сети МВС в динамике изменения приоритетов диалоговых и распределенных задач. Для решения перечисленных задач используется имитационная модель (ИМ) «РОИ МВС». В качестве основных вариантов организации вычислительного процесса (ВП) в МВС рассматривались: организация ВП при большей приоритетности диалоговых задач над задачами РОИ при варьировании параметров ИМ; организация ВП при большей приоритетности задач РОИ над диалоговыми задачами.

При выборе параметров и откликов моделирования использовалась методика, описанная в [1], [2].

1 Этапы решения задачи

Решение поставленных подзадач осуществлялось в два этапа.

На *этапе 1* производился запуск ИМ «РОИ МВС» в «холостом» режиме при отсутствии нагрузки на узлах задач диалогового и счетного типов ($\lambda_{DIALj} = 0; \lambda_{OTLj} = 0$). Фиксировались значения счета каждой из j -ой подзадачи i -ой задачи РОИ (τ_{MXT0ij}). На основании полученных значений времен счета подзадач (τ_{MXT0ij}) определялись последовательность вершин критического пути, его длина $ВСРР_i$. Наличие «холостого» режима необходимо для дальнейшего сравнения значений счета подзадач РОИ в «нагруженном» режиме – наличие нагрузки на узлах задач диалогового и счетного типов, что реализуется на *этапе 2*.

Этап 2 по сравнению с предыдущим этапом характеризуется наличием следующих дополнительных условий:

1) наличие собственной нагрузки на узлах сети МВС ($\lambda_{\text{ДИАЛ}j} > 0; \lambda_{\text{СЧЕТ}j} > 0$);

2) применение процедуры Монте-Карло с многократными реализациями ИЭ ($N=30$). После каждой из реализаций при одних и тех же значениях входных параметров ИМ проводились операции по подсчету значений каждой из j -ой подзадачи i -ой задачи РОИ ($\tau_{\text{МХТО}ij}$), для которой вычислялись математическое ожидание ($\overline{\tau_{\text{МХТО}ij}}$) и дисперсия ($\sigma_{\tau_{\text{МХТО}ij}}$).

2 Оценка времени счета распределенных подзадач РОИ

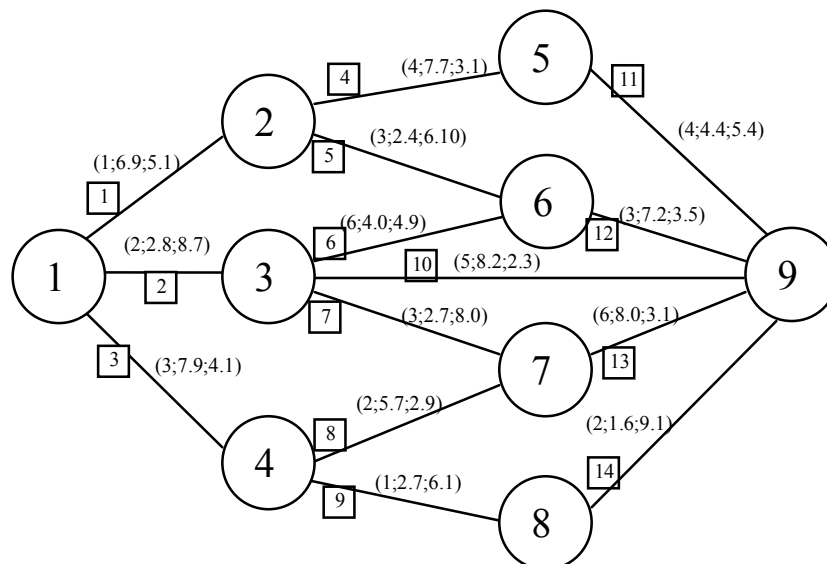
Решение данной задачи реализуется согласно ранее описанным этапам. Структура задачи РОИ определяется сетевым графиком, представленным на рисунке 2.1.

В результате реализации *этапа 1* были получены значения времен выполнения подзадач РОИ ($\tau_{\text{МХТО}ij}$) на узлах сети МВС, которые и будут выступать в качестве эталонных для дальнейшего сравнения. В данном случае времена решения 14 модулей РОИ составили {12; 11,5; 12; 10,8; 8,5; 8,9; 10,7; 8,6; 8,8; 10,5; 9,8; 10,7; 11,1; 10,7} условных единиц времени. В качестве критического пути выступает последовательность вершин L_i ($1 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 9$), а его длина ($T_{\text{крит}i}$) составляет 33,3 условных единиц времени. В «холостом» режиме существует только один критический путь. Данный результат

обуславливается тем, что в процессе обработки подзадач РОИ на узлах МВС конкуренцию им могут составлять только сами подзадачи РОИ. Однако последовательность их выполнения определяется сетевым графом (СГР), который реализуется на множестве узлов – одновременных исполнителей.

На *этапе 2* были получены значения времен выполнения подзадач РОИ ($\tau_{\text{МХТО}hij}$) для каждой h -ой реализации ИМ ($h=1, \dots, 30$). По этим данным были рассчитаны множества критических путей $T_{\text{крит}hi}$. Причем среди них существует множество совпадающих друг с другом. Таким образом, среди всевозможных путей (в рассматриваемом примере всего их было ровно 7) можно выделить $k=1, \dots, 6$, которые, по крайней мере, в единичном случае являлись критическими. Соответственно существовала возможность подсчета вероятностей возникновения того или иного критического пути. На рисунке 2.2 приведен сетевой граф критических путей задачи РОИ и соответствующие вероятности их появления. По каждому из типов k критических путей подсчитывались значения средних:

- 1) времен выполнения ($\overline{\tau_{\text{МХТО}kj}}$) подзадач РОИ;
- 2) длин критических путей ($\overline{T_{\text{крит}k}}$);
- 3) ранних ($\overline{t_{\text{psk}}}$) и поздних ($\overline{t_{\text{nsk}}}$) сроков свершения событий s ;
- 4) резервов времени их свершения ($\overline{R_{sk}}$).



[i] – номер подзадачи РОИ

(n; t_{CPU}; t_{HDD}) – значения (n – номер узла счета; t_{CPU} – заказ времени CPU; t_{HDD} – заказ времени HDD)

Рисунок 2.1 – Сетевой график задачи РОИ

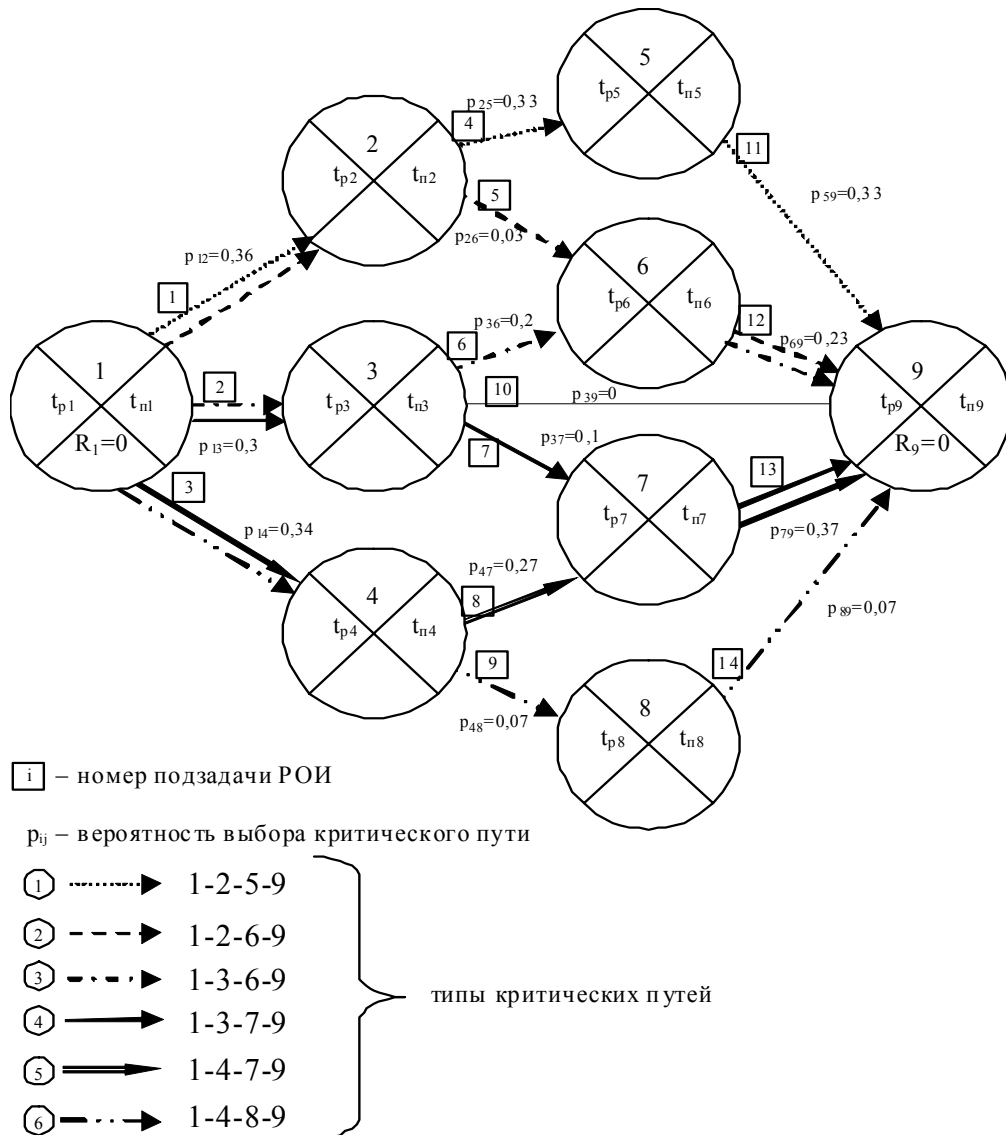


Рисунок 2.2 – Граф критических путей задачи РОИ

В таблице 2.1 приведены значения расчетов 1) и 2), а также вероятности (p_k) появления k -го типа критического пути.

Таблица 2.1 – Времена вероятности появления и значения длин различных типов критических путей

Тип критического пути	p_k	\bar{T}_k , часов
1	0,33	109,03
2	0,03	118,83
3	0,20	109,64
4	0,10	99,51
5	0,27	102,69
6	0,07	138,79
«холостой» режим	1	33,3

Как видно из таблицы 2.1, наиболее вероятным критическим путем среди остальных является критический путь первого типа ($k=1$) с вероятностью появления равной 0,33 и длиной ($T_{крит1}$) в 3,27 раз больше длины критического пути «холостого» режима работы ИМ ($T_{крит0}$).

Вторым, вероятным критическим путем является критический путь 5-го типа ($k=5$) с вероятностью появления 0,27 и длиной в 3 раза большей длины «холостого» пути ($T_{крит0}$).

С вероятностью 0,6 можно утверждать, что длина (время) критического пути «загруженного» режима ИМ в среднем составит в 3,18 раза больше длины (времени) «холостого» режима работы ИМ. Причем длины (времена) наиболее вероятностных критических путей достаточно близки к *общей* средней длине (времени) критического пути, которая составляет:

$\overline{T}_{\text{крит}} = 0,33 \cdot 109,33 + 0,03 \cdot 118,83 + 0,2 \cdot 109,64 +$
 $+ 0,1 \cdot 99,51 + 0,27 \cdot 102,69 + 0,07 \cdot 138,79 = 108,46,$
что в 3,26 раза больше эталонной (критической) длительности «холостого» режима).

Вероятности же появления критических путей наименьшей длины (в 2,9 раза больше) и наибольшей длины (в 4,17 раза больше) составляют 0,1 и 0,07 соответственно.

Заключение

При заданном наборе входных параметров ИМ (средней интенсивности поступления запросов диалогового типа) следует, что:

– наиболее вероятностными критически путями при выполнении задачи РОИ являются 1-ый или 5-ый ($k=1, 5$);

– с вероятностью 0,6 можно утверждать, что увеличение длины (времени) критического пути ($T_{\text{крит}}$) при наличии в узлах сети МВС других типов запросов ($\lambda_{\text{DIAL}}, \lambda_{\text{OTL}}$) составляет в 3,18 раза больше длины «холостого» критического пути ($T_{\text{крит}0}$);

– вероятности (p_k) появления критических путей наименьшей ($k=4$) и наибольшей длины ($k=6$) крайне малы ($p_4=0,1$ и $p_6=0,07$).

Таким образом, наличие на узлах МВС собственной рабочей нагрузки вносит неопределенность времени обработки подзадач РОИ ($\tau_{\text{МХТО}kj}$), а следовательно, возрастает и неопределенность формирования последовательности вершин (L_k) и длин ($T_{\text{крит}k}$) критических путей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маслович, С.Ф. Транзактно-процессный подход к формализации имитационного моделирования распределенной обработки информации в сети многопроцессорной вычислительной системы / С.Ф. Маслович // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 1 (2). – С. 49–55.

2. Маслович, С.Ф. Состав и структура подсистемы проведения имитационных экспериментов программно-технологического комплекса имитации для исследования ВП в МВС / С.Ф. Маслович, В.Д. Левчук, В.В. Старченко // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2010. – № 5 (62). – С. 37–41.

Поступила в редакцию 01.03.12.

УДК 681.3;007.003;007.008;65.0

СИНТЕЗ СТРУКТУРЫ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ЦИКЛА УПРАВЛЯЕМЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ

В.С. Смородин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

SYNTHESIS OF STRUCTURE OF THE TECHNOLOGICAL CYCLE OF MANAGED PRODUCTION SYSTEMS

V.S. Smorodin

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Предлагается способ синтеза структуры технологического цикла для управляемых производственных систем на основе конечного множества математических моделей. В качестве инструмента реализации предлагаемого подхода используются динамические имитационные модели. Приводится теоретическое обоснование и технология применения динамической имитации как способа системного анализа сложных систем для класса управляемых производственных систем с вероятностными характеристиками их функционирования.

Ключевые слова: *классы сложных систем, управляемые производственные системы, динамические имитационные модели, синтез структуры технологического цикла.*

The method of synthesis of structure of the technological cycle for managed production systems based on a finite set of mathematical models is proposed. Dynamic simulations are used as an instrument for the implementation of the proposed approach uses. Theoretical basis and application of dynamic simulation technology as a method of system analysis of complex systems for a class of managed production systems with the probabilistic characteristics of their functioning are provided in the paper.

Keywords: *classes of complex systems, managed production systems, dynamic simulations, synthesis of structure of the technological cycle.*

Введение

Многообразие сложных технологических систем, в ходе реализации которых могут изменяться параметры их функционирования и структура технологического цикла, сложность возникающих практических задач при оценке уровня надежности и безопасности потенциально опасных промышленных объектов в настоящее время требуют разработки новых подходов и технических решений при оптимизации структуры производственных систем на стадии их проектного моделирования.

Эффективным средством решения актуальных проблем в подобных случаях является системный анализ объектов исследования [1], в качестве которых в данной работе рассматриваются управляемые производственные системы (УПС) с вероятностными параметрами их функционирования. При этом под вероятностными параметрами функционирования могут пониматься характеристики надежности функционирования оборудования, задействованного в ходе реализации технологического цикла производства, характеристики выполнения технологических операций, качественные характеристики используемых в процессе производства материалов и комплектующих изделий.

В данной работе для управляемых производственных систем как класса сложных систем предлагается гибкий математический аппарат

реструктуризации имитационных моделей, позволяющий представить объект исследования в виде конечного множества математических моделей. Подобное представление обеспечивает получение результирующей структуры технологического цикла, которая содержит оптимизированные (в рамках заданного критерия качества функционирования объекта исследования) схемы резервирования технологических операций в процессе имитации.

В качестве инструмента реализации предлагаемого подхода используется динамическое имитационное моделирование, базирующееся на разработке динамических имитационных моделей управляемых производственных систем. Управление производственной системой в контексте данной статьи понимается в смысле упреждения конфликтных ситуаций в процессе функционирования технологического цикла производственной системы.

Новизна предложенного подхода состоит в обеспечении возможности построения интегральной графовой структуры технологического цикла, что позволяет получить результирующую структуру, содержащую конкретные схемы резервирования технологических операций в зависимости от вероятностных параметров функционирования управляемой производственной системы.

Построенные при этом динамические имитационные модели могут быть использованы в качестве составных компонентов в системах анализа функционирования при автоматизации технологических процессов и производств, а также при разработке и автоматизации систем проектирования новых технологических объектов.

1 Описание математического аппарата, используемого при реструктуризации имитационных моделей

Возможность отказов оборудования управляемой производственной системы при выполнении агрегатов-имитаторов технологических операций [2] $AMTXO_{ij}$ ставит эксперта-технолога перед необходимостью на стадии проектирования предусмотреть выход из состояний, возникших после аварии. На этот случай в имитационной модели (ИМ) предусматриваются «резервные» цепочки $AMTXO_{ij}$, которые активируются только при появлении аварий. Переключение на «резервную» ветвь $AMTXO_{ij}$ реализуется за счёт использования булевой матрицы коммутации $\|\gamma_{ns}\|$, формируемой экспертом-технологом до начала имитации. Строками этой матрицы (n) являются номера агрегатов $AMTXO_{ij}$ на входе агрегата-события $ASOB_i$, а столбцами (s) являются номера резервных $AMTXO_{ij}$ на выходе $ASOB_j$, которые необходимо инициировать в поставарийной ситуации. Подобное «технологическое резервирование» является динамическим регулятором поставарийной ситуации в УПС.

Другим способом недопущения аварий оборудования является автоматический переход на резервные устройства, когда хотя бы для одного из устройств оборудования фактическая «наработка» превышает пороговые значения из множества $\{ind_r\}$. Элементы этого множества $\{ind_r\}$ поступают в подсистему $PS.OPEREX$, которая проверяет близость к пороговому значению наработки всех устройств оборудования. При достижении близости к пороговым значениям у нескольких устройств формируются следующие воздействия на ИМ: групповой переход на резервирование тех устройств, у которых наработка близка к критической (α_1); переход на общую профилактику оборудования из-за неэффективности группового резервирования или нехватки резервных устройств (α_2); допускается возможность аварии в тех случаях, когда процесс производства останавливать нельзя, и состояния индикаторов игнорируются (α_3); если оборудование изношено и общая профилактика будет неэффективна, принимается решение о досрочном завершении имитации h -го варианта ИМ

УПС, поскольку появление аварии для данного технологического процесса недопустимо (α_4).

$PS.ANALEX$ использует статистику имитаций $\{ST_k\}$ и множество откликов модели $\{Y_{oj}\}$. Откликами Y_{oj} являются усреднённые по числу реализаций N их интегральные значения для h -го варианта УПС: критическое время выполнения (T_{KPh}) технологического цикла производства, стоимость его реализации (C_{oh}), интегральный расход материалов и комплектующих изделий (mt_{oh}), количество использованных ресурсов r -го номера ($v_{\Sigma rh}$), суммарная стоимость ликвидации аварий (C_{ABh}), общие потери времени на профилактику (T_{OPh}). Интегральные отклики модели составляют многомерный вектор откликов V_{Oh} варианта структуры УПС, у которого все компоненты требуют минимизации, но имеют различную размерность и диапазоны изменения. Поэтому необходима нормировка компонентов этого вектора максимальными их значениями из всех вариантов организации структуры технологического цикла. Для сравнения вариантов структуры осуществляется «свёртка» этого вектора к скалярному показателю W_h способом весовых коэффициентов важности ($\Sigma_j \delta_j = 1; 0 \leq \delta_j \leq 1$) откликов с номером j . Вариантам организации структуры УПС соответствуют значения вектора параметров $\{X_{ojh}\}$ и постоянных параметров имитации множества $\{G_h\}$. Каждая из составляющих векторов параметров может меняться на различных уровнях. Поэтому общее количество вариантов N_h ($h = \overline{1, K_0}$) определяется стратегией изменения каждого уровня параметров. Выбор оптимальной стратегии осуществляется на основе классических методов планирования экспериментов. Эксперт с помощью воздействия θ_3 инициирует подсистему $PS.ANALEX$ и последующий запуск h -го варианта ИМ УПС. Минимальное значение W_h по всему множеству вариантов с номером h будет решением задачи построения оптимального варианта организации структуры УПС.

Важной статикой реализации имитационной модели является граф критических путей ($GRKRP_h$), который получен после наложения всех реализовавшихся критических путей. С помощью сообщений θ_4 подсистема $PS.ANALEX$ выдаёт эксперту графики расхода (в модельном времени t_0) ресурсов r -го типа $Z_{1rh}(t_0)$, финансовых средств $Z_{2rh}(t_0)$, а также временные диаграммы использования оборудования и исполнителей ($DIAGR_{rh}$). Оперативная статистика

реализации ИМ в виде сообщения θ_4 предоставляется эксперту-технологу для принятия решений на основе классической теории принятия решений. В результате эксперт формирует набор управляющих воздействий ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$ и θ_5), которые затем через подсистему принятия решений *SPRESH* обеспечивают возможность досрочной остановки l -й реализации имитационной модели, перевод всех устройств оборудования на профилактику, оперативное изменение характеристик надёжности функционирования оборудования.

2 Оптимизация схем резервирования технологических операций

При оптимизации схем резервирования технологических операций на стадии проектного моделирования эксперт-технолог может использовать следующие стратегии: задание начальных значений множества констант-характеристик процесса $\{H\}$, определяющих состав ресурсов предприятия; выбор алгоритмов модификации структуры технологического цикла при возникновении аварий в ходе реализации технологических операций $AMTXO_{ij}$; выбор оборудования, обладающего необходимой надёжностью функционирования и удовлетворительными временами восстановления работоспособности; изменение ценовой политики, определяющей стоимостные показатели реализации всех технологических операций. При этом варианты организации УПС будут отличаться составом множества $\{X\}$ параметров $AMTXO_{ij}$. Общее число (m) вариантов организации УПС определяется количеством комбинаций уровней элементов множества $\{X\}$.

Откликами имитационной модели УПС являются:

$\{Y_1\}$ – вектор усредненных значений коэффициентов растяжения времени выполнения технологических операций $\{MTXO_{ij}\}$ из-за отказов и ликвидации аварий $\{\bar{\rho}_{ij}\}$, где $\bar{\rho}_{ij} = \frac{\tau_{Bij}}{\tau_{ij}}$;

$\{Y_2\}$ – вектор стоимостных показателей реализации УПС, состоящий из трех компонентов (реализации структуры при безотказной работе $\{Y_{21}\}$, стоимости восстановительных работ $\{Y_{22}\}$ и стоимости ликвидации аварий $\{Y_{23}\}$);

$\{Y_3\}$ – вектор суточного расхода материалов и комплектующих изделий;

$\{Y_4\}$ – вектор коэффициентов использования ресурсов технологического цикла;

$\{Y_5\}$ – вектор коэффициентов использования места на общих ресурсах;

$\{Y_6\}$ – вектор использования индивидуального оборудования с учетом наличия отказов и восстановлений его работоспособности;

$\{Y_7\}$ – вектор значений времени реализации технологического цикла при безотказной работе оборудования (Y_{71}) и при наличии отказов оборудования (Y_{72}).

Технология выбора управляющего воздействия на производственную систему при возникновении отказов и аварий оборудования предполагает предварительную их имитацию. Для принятия обоснованного решения необходимо выполнить следующую последовательность действий: ввод в базу данных модели исходной информации о структуре технологического процесса; задание начальных значений ресурсов согласно плану имитационных экспериментов; составление матрицы переключения резервных агрегатов $AMTXO_{ij}$ для каждого кустового выхода агрегата $ASOB_j$; выбор весовых коэффициентов δ_i откликов моделирования на основе априорной информации и стратегий управления; составление плана и проведение серий имитационных экспериментов, в ходе которых определяется статистика и вычисляются значения откликов моделирования $\{Y_i\}$; приведение откликов к одному масштабу и типу с последующим расчетом интегрального показателя L_{ks} и формирование матрицы решений; использование одного из классических критериев принятия решений для выбора рационального состава ресурсов технологического цикла.

3 Процедура реализации динамических имитационных моделей

Построение и использование динамических имитационных моделей управляемых производственных систем реализуется следующей последовательностью этапов.

На *этапе 1* задаётся начальная структура исходной имитационной модели вероятностного процесса с помощью операторов подсистемы формирования модели *PS.FORMMSG*.

На *этапе 2* реализуется натурный эксперимент с целью получения исходной информации для последующей проверки адекватности имитационной модели реальному объекту имитации. В случаях, когда не удаётся найти аналитический вид функций распределения, используется табличная форма их представления.

На *этапе 3* осуществляется верификация базового варианта имитационной модели. Задаётся начальный состав ресурсов, материалов, исполнителей и оборудования. Далее формируются управляющие таблицы-справочники и таблицы базы данных для хранения статистики имитации, используемые в дальнейшем при организации имитационного эксперимента.

На *этапе 4* реализуются функции испытания и анализа свойств имитационной модели,

которая представляет собой многошаговую процедуру использования стандартных методик испытания сложных систем, в процессе которой реализуются типовые этапы испытания имитационных моделей.

На *этапе 5* осуществляется контроль реализации имитационной модели в пошаговом режиме через случайные интервалы времени (до следующего события) с одновременной проверкой текущего состояния управляемой производственной системы на соответствие базовому варианту модели.

При наличии полного соответствия объекту имитации модельное время переводится на следующее событие, и функционирование имитационной модели продолжается. При изменении текущей структуры производственной системы производится запись реализовавшейся части технологического цикла в базу данных модели. Последнее свершившееся событие фиксируется в качестве начального для дальнейшего продолжения имитации, после чего выполняется возврат на *этап 1*.

По окончании имитации в базе данных модели завершается процесс формирования оптимизированной структуры технологического цикла, построенной в режиме модельного времени в соответствии с выбранным критерием качества функционирования объекта имитации.

Заключение

В работе предложен способ синтеза структуры технологического цикла управляемых производственных систем на основе конечного множества математических моделей на стадии их проектного моделирования. При реализации данного подхода предложено использовать динамические имитационные модели. Приведено теоретическое обоснование и технология применения динамической имитации как способа системного анализа сложных систем для класса управляемых производственных систем с вероятностными характеристиками их функционирования.

Дано описание математического аппарата, используемого при реструктуризации имитационных моделей. Показано, что новизна предложенного подхода состоит в предоставлении способа построения интегральной графовой структуры технологического цикла, который позволяет получить результирующую структуру, содержащую оптимизированные схемы резервирования технологических операций в рамках выбранного критерия функционирования объекта исследования.

Полученные результаты могут быть использованы в качестве составных компонентов в системах анализа функционирования при автоматизации технологических процессов и производств, а также при разработке и автоматизации систем проектирования новых технологических объектов.

Изложенный способ построения динамических имитационных моделей опирается на применение агрегатной системы автоматизации имитационного моделирования и ориентирован на случаи, когда динамику функционирования имитационных моделей управляемых производственных систем можно описать на уровне элементов управления со сложной логикой с использованием процедур метода Монте-Карло. В основу формализации управляемых производственных систем положены вероятностные графовые структуры [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кларк, Дж. Системология. Автоматизация решения системных задач; пер. с англ. / Дж. Кларк. – М.: Радио и связь, 1990. – 544 с.
2. Смородин, В.С. Агрегатная система автоматизации моделирования вероятностных технологических процессов производства / В.С. Смородин // Математичні машини і системи (Mathematical Machines and Systems). – 2007. – № 1. – С. 105–110.

Поступила в редакцию 29.03.12.

НАУЧНАЯ ШКОЛА ПРОФЕССОРА Л.А. ШЕМЕТКОВА



В истории Гомельщины есть три имени ученых-математиков, получивших широкую международную известность. Первый из них – это В.П. Ермаков, родившийся в 1845 году в деревне Терюха и ставший профессором Киевского университета и членом-корреспондентом Петербургской академии наук. Второй – Л.Г. Шнирельман, родившийся в 1905 году в Гомеле и ставший заведующим кафедрой теории чисел Московского университета и членом-корреспондентом АН СССР. Третий – Л.А. Шеметков, член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси, заведующий кафедрой алгебры и геометрии Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины. В отличие от предшественников вся его жизнь, учеба и 50-летняя деятельность (научная, преподавательская и общественная) неразрывно связаны с Гомелем.

Л.А. Шеметков родился 3 июля 1937 года в Гомеле. Член-корреспондент с 1980 г., доктор физико-математических наук (1970), профессор (1973), Заслуженный деятель науки Республики Беларусь (1995), Почетный гражданин города Гомеля (2002). Окончил с отличием Гомельский пединститут (1959). С 1962 года – научный сотрудник лаборатории теории конечных групп Института математики АН БССР (Гомель), параллельно читает лекции в университете. С 1977

года постоянно работает в Гомельском государственном университете имени Ф. Скорины (в 1977–1989 гг. проректор по учебной работе, в 1989–2000 гг. ректор, с 2000 г. профессор, заведующий кафедрой алгебры и геометрии). В 1980 году избран членом-корреспондентом АН БССР, в 1994 году – действительным членом Белорусской академии образования, в 1993 году – академиком Международной академии наук высшей школы (Россия). В течение многих лет был депутатом Гомельского городского Совета народных депутатов, членом областного Комитета народного контроля, председателем Гомельского областного совета ректоров и членом президиума республиканского совета ректоров.

Как руководитель Л.А. Шеметков много сделал для развития Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины. Отметим, в частности, уникальный для нашей республики «Франко-Белорусский институт управления», созданный в 1995 году совместно с университетом Клермон-Феррана (Франция). Суть этого института, в разработке и осуществлении проекта которого принимал личное участие Л.А. Шеметков, состоит в том, что лучшие студенты выполняют два учебных плана: учебный план ГГУ и учебный план университета Клермон-Феррана. Эти студенты ежегодно проходят стажировку во Франции, слушают лекции французских профессоров (на французском языке) как в Гомеле, так и в Клермон-Ферране и по окончании получают два диплома – белорусский и французский.

Л.А. Шеметков создал в Гомеле всемирно известную научную алгебраическую школу. Начиная с 1995 года в Гомеле регулярно проводятся международные алгебраические конференции с участием математиков из ближнего и дальнего зарубежья. Прославленный немецкий математик профессор Гашюц из г. Киля после выхода на пенсию подарил свою научную математическую библиотеку Гомельскому университету. Это было сделано в знак признания заслуг Гомельской алгебраической школы, руководимой Л.А. Шеметковым. В Гомельской научной школе, возглавляемой Л.А. Шеметковым, подготовлено свыше 70 кандидатов и докторов наук. Благодаря этому математические кафедры многих вузов Гомеля и других городов республики укомплектованы преподавателями-математиками высшей квалификации.

Воспитанники научной школы Л.А. Шеметкова работают во многих вузах республики, а также в Иордании, Турции, Китае и России. К примеру, в Брянском университете среди

питомцев Гомельской научной школы – проректор профессор В.В. Шлык, декан математического факультета профессор В.И. Горбачев, многие доценты. Вот почему заслуги Л.А. Шеметкова высоко оцениваются в России. В поступившей в университет правительственной телеграмме, подписанной заместителем Председателя правительства Российской Федерации, говорилось следующее: «Глубокоуважаемый Леонид Александрович! Вы, являясь крупным специалистом в области математики, внесли и вносите большой вклад в развитие образования и науки союзного государства, в укрепление и развитие дружбы и культурных связей белорусского и русского народов».

Л.А. Шеметков создал в математике новое научное направление – теорию формаций алгебраических систем. Им развиты функциональные и решеточные методы исследования формаций алгебраических систем. Он автор свыше 120 научных трудов, в том числе 3 монографий, принесших ему международную известность. Регулярно выступает с докладами в университетах и на международных конференциях в разных странах. Университетами Великобритании, Испании, Германии, Китая он не раз привлекался в качестве приглашенного профессора.

Л.А. Шеметков активно занимается подготовкой научных кадров. Среди его учеников 34 кандидата наук, 12 из них стали профессорами. С 1995 года и по настоящее время Л.А. Шеметков является председателем Совета по защите

докторских и кандидатских диссертаций при Гомельском университете им. Ф. Скорины. В этом совете за время его существования защищено 10 докторских и 68 кандидатских диссертаций. В 2002 году Го Вэньбинь, китайский ученик Л.А. Шеметкова, защитил в Гомеле докторскую диссертацию и сейчас возглавляет собственную научную школу в университете науки и технологии в городе Хэфэй (Китай).

Недавно Российская академия наук выпустила книгу «Отто Юльевич Шмидт в истории России XX века и развитие его научных идей». В этой книге на 18 страницах помещен рассказ о достижениях Гомельской научной школы. Это еще одно свидетельство широкого признания и авторитета школы Л.А. Шеметкова.

Достижения Л.А. Шеметкова отмечены наградами, среди которых Орден Трудового Красного Знамени, Орден Франциска Скорины, Орден Святого равноапостольного Великого князя Владимира (орден русской православной церкви), медаль М.В. Остроградского (присуждена Международным математическим конгрессом в Украине).

Сердечно поздравляем Леонида Александровича с юбилеем, желаем ему крепкого здоровья и дальнейших творческих успехов.

*М.В. Селькин, А.Н. Скиба,
В.С. Монахов, В.Н. Семенчук, А.Ф. Васильев*

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна соответствовать его профилю. Она представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на дискете 3,5" или CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (6.0/95/97/2000), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутонные фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются сведения об авторах и экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати.

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный и домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями. Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (банделеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах и экспертного заключения можно посмотреть на сайте журнала по адресу <http://pfmt.gsu.by>.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

The paper submitted to the Editorial Board of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics», should meet the following requirements. Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a floppy (CD) or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (6.0/95/97/2000), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper is signed by all authors. The information about the authors and the conclusion of the experts about the possibility of publication in press are enclosed.

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home and office phone numbers, fax number, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charters top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

In case of questions relating to paper submission visit website of the journal <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).