



ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№ 2 (7) 2011

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

Главный редактор:
А.В. Рогачев (Беларусь)

Заместители главного редактора:
О.М. Демиденко (Беларусь)
Л.А. Шеметков (Беларусь)

Редакционная коллегия:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
П.Д. Кухарчик (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

Ответственный секретарь:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

Адрес редакции:
Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

Editor-in-Chief:
A.V. Rogachev (Belarus)

Deputy Editor-in-Chief:
O.M. Demidenko (Belarus)
L.A. Shemetkov (Belarus)

Editorial board:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Webin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
P.D. Kuharchik (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

Executive Secretary:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

Edition address:
F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 2 (7) 2011

СОДЕРЖАНИЕ

К 100-ЛЕТИЮ Ф.И. ФЁДОРОВА

Классик физической науки 7

ФИЗИКА

- Андрусевич П.П., Плетюхов В.А., Стражев В.И.** О внутренних симметриях уравнения Дирака в графене 11
- Белый В.Н., Казак Н.С., Хило Н.А., Ропот П. И., Васильев Р.Ю.** Локальные спектры пространственных частот бesselевых пучков 15
- Бураков В.С., Тарасенко Н.В., Буцень А.В., Неделько М.И., Невар Е.А.** Лазерно-плазменные методы получения и магнитные свойства нанопорошков силицидов гадолиния 22
- Воропай Е.С., Ермалицкая К.Ф., Зажогин А.П.** Лазерный послойный количественный анализ с субмикронным разрешением функциональных покрытий промышленных изделий 26
- Достанко А.П., Гринчик Н.Н., Спресов И.Н.** Моделирование физико-технологических процессов в приповерхностном слое, при формировании микро и наноструктур электродинамическими воздействиями 31
- Лашкевич В.И., Соловцова О.П.** Новый подход к учету поправок на массу мишени в структурных функциях нуклона 38
- Спресов И.Н.** Моделирование процессов формирования твердотельных структур при воздействии ионных потоков 43
- Третьяков С.А.** Бианизотропные материалы с сильным электромагнитным взаимодействием 49

МАТЕМАТИКА

- Бузланов А.В.** Конечные разрешимые группы с несопряженными метанильпотентными максимальными подгруппами 52
- Гальмак А.М.** Вектор-определители и определители вектор-матриц 58
- Миротин А.Р., Романова М.А.** Об одной характеристике обобщенных аналитических функций Аренса-Зингера 65
- Семенчук В.Н., Велесницкий В.Ф.** О конечных группах, факторизуемых формационными подгруппами 69

ОБЗОРЫ

- Константинова А.Ф.** Развитие исследований оптической активности кристаллов в Институте кристаллографии РАН 75
- Шепелевич В.В.** Ф.И. Фёдоров и развитие оптики фоторефрактивных кристаллов 90

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**
– **физико-математические (математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26).

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Д. Д. Павловец, Г. Н. Петухова*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 20.06.11. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 11,6. Уч.-изд. л. 10,1. Тираж 100 экз. Заказ № 365.

Издатель – УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»
246019, Гомель, ул. Советская, 104
Лицензия № 02330/0549481 от 14.05.09.

Отпечатано на полиграфической технике УО «ГТУ им. Ф. Скорины»
Лицензия № 02330/0150450 от 03.02.09.

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2011

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 2 (7) 2011

CONTENTS

ON THE OCCASION OF THE CENTENARY OF F.I. FEDOROV

Classical Scholar of Physics 7

PHYSICS

- Andrusevich P.P., Pletyukhov V.A., Strazhev V.I.** On internal symmetries of the Dirac equation in graphene 11
- Belyi V.N., Kazak N.S., Khilo N.A., Ropot P.I., Vasilyev R.Yu.** Local spectra of spatial frequencies of Bessel beams 15
- Burakov V.S., Tarasenko N.V., Butsen A.V., Nedelko M.I., Nevar A.A.** Laser and plasma methods for fabrication and magnetic properties of gadolinium silicide nanopowders 22
- Voropay E.S., Ermalitskaia K.F., Zajogin A.P.** Laser layer wise quantitative analysis with submicron resolution of functional coatings of industrial products 26
- Dostanko A.P., Grinchik N.N., Spresov I.N.** Simulation of physical processes in the surface layer, the formation of micro and nanostructures by electrodynamic influences 31
- Lashkevich V.I., Solovtsova O.P.** New approach to target mass corrections in the nucleon structure functions 38
- Spresov I.N.** Simulation solid-state structures formation under the actions of ion fluxes 43
- Tretyakov S.A.** Bianisotropic materials optimized for strong interactions with electromagnetic fields 49

MATHEMATICS

- Buzlanov A.V.** Finite soluble groups with inconjugate metanilpotent maximal subgroups 52
- Gal'mak A.M.** Vector-determinants and determinants of vector-matrices 58
- Mirotin A.R., Romanova M.A.** On some characterization of Arens-Singer generalized analytic functions 65
- Semenchuk V.N., Veliasnitski V.F.** On the finite groups factorizable by formation subgroups 69

REVIEWS

- Konstantinova A.F.** Development of researches of optical activity of crystals in Institute of Crystallography of the Russian Academy of Sciences 75
- Shepelevich V.V.** F.I. Fedorov and development of the optics of photorefractive crystals 90

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

- Technics (Informatics, Computer Science and Control);***
- Physics and Mathematics (Mathematics).***

КЛАССИК ФИЗИЧЕСКОЙ НАУКИ



19 июня 2011 года исполняется 100 лет со дня рождения выдающегося физика-теоретика, первого академика-секретаря (1963 – 1987) Отделения физики, математики и информатики Национальной академии наук Республики Беларусь – Героя Социалистического Труда академика Ф.И. Фёдорова.

Фёдор Иванович – ученый мирового уровня, основатель широко известной и общепризнанной в мире белорусской научной школы. За длительное время своей научной, педагогической и организационной деятельности, превышающее шесть десятилетий, Ф. И. Фёдоров внёс уникальный вклад в развитие физики и математики в Беларуси, в воспитание, подготовку и расстановку научных кадров.

Родился Фёдор Иванович в д. Турец Новогрудского уезда Минской губернии в семье сельского учителя Ивана Михайловича Фёдорова, позже ставшего известным детским писателем, издававшим свои произведения под псевдонимом Янка Мавр. В 17 лет Федор Иванович окончил среднюю школу в г. Минске, в 20 лет – физико-математическое отделение педагогического факультета Белорусского государственного университета. В 1936 г. Ф.И. Фёдоров защитил кандидатскую диссертацию по квантовой электродинамике, выполненную в Ленинградском университете. Его научным руководителем был знаменитый советский физик-теоретик академик Владимир Александрович Фок, впоследствии удостоенный звания Героя Социалистического Труда.

Докторскую диссертацию, выполненную в области теоретической кристаллооптики, Фёдор Иванович защитил в 1954 г. в ведущем центре физической оптики – Государственном оптическом институте в Ленинграде. Защитил блестяще и стал первым доктором физико-математических наук в Беларуси, чья работа полностью была выполнена в научных учреждениях республики.

В 1956 г. Ф. И. Фёдоров был избран членом-корреспондентом, а в 1966 г. – действительным членом Академии наук БССР.

Трудовую деятельность Фёдор Иванович начал в 1931 г. преподавателем физики и математики педагогического техникума и школы в г. Кричеве Могилёвской области. Начиная с 1936 г. он отдаёт все свои силы, свой талант учёного и незаурядный педагогический дар организации учебного процесса и развертыванию научно-исследовательской работы на физико-математическом факультете Белорусского государственного университета. Доцент, заведующий (1938 – 1962 гг.) и профессор кафедры теоретической физики, декан факультета (1943 – 1960 гг.) – таковы основные этапы его деятельности в БГУ.

Творческие возможности Фёдора Ивановича, его уникальный талант учёного и организатора науки необычайно ярко раскрылись во время его работы в Академии наук БССР.

Он был одним из основателей и организаторов Института физики и математики Академии наук. Из этого института, в конечном итоге, выделились почти все существующие сегодня институты отделения физики, математики и информатики НАН Республики Беларусь. Занимая на протяжении 25 лет высокий пост академика-секретаря данного отделения, Ф.И. Фёдоров играл ключевую роль в формировании тематики и координации научных исследований по физике и математике в Беларуси.

В Институте физики Ф.И. Фёдоров создал и возглавил лабораторию теоретической физики, знаменитую ЛТФ, которой руководил в течение 32 лет. О широте тематики и размахе научных исследований и темпах подготовки научных кадров высшей квалификации, которые осуществлялись под руководством Фёдора Ивановича в этот период, красноречиво свидетельствует такой факт. В коллективе ЛТФ одна за другой возникли несколько мощных групп, которые работали в самостоятельных областях как теоретической, так и экспериментальной физики, быстро переросли рамки обычной научной группы и, по инициативе Федора Ивановича выделились в самостоятельные лаборатории. Так возникли

лаборатории оптической электроники, кристаллооптики, физики высоких энергий.

Вместе с тем Ф.И. Фёдоров всегда оставался активно работающим учёным-исследователем. Совершенно особое место в его научной биографии, безусловно, занимает его докторская диссертация «Инвариантные методы в оптике анизотропных сред». Этот поистине фундаментальный труд совершенно преобразовал область физики, создателями которой были выдающиеся ученые предыдущих столетий: И. Ньютон, О. Френель, Дж.К. Максвелл, У.Р. Гамильтон, В. Фойгт, П. Друде, Г. Фёрстерлинг, Дж.У. Гиббс и многие другие. Здесь следует напомнить, что к началу двадцатого столетия теоретическая кристаллооптика вступила в «период стагнации» и её развитие совершенно приостановилось в силу ограниченных возможностей координатного метода, который использовался в ней. Применивший принципиально новый подход, получивший в дальнейшем известность как «ковариантный подход Фёдорова», Фёдор Иванович стал первым, кто за пятьдесят лет отмеченного застоя в кристаллооптике сказал новое слово, вдохнул в неё новую жизнь, осуществил фундаментальный вклад в развитие одного из важнейших разделов оптической науки. Явные свидетельства мирового признания заслуг Ф.И. Фёдорова в развитие современной кристаллооптики многочисленны, но наиболее точное определение их значения дал известный американский физик Дж.К. О'Лоун. В своем обстоятельном обзоре по теории оптической активности кристаллов (1980) он выделил три периода в развитии этого раздела науки: дофедоровский, федоровский и постфедоровский.

30 лет назад учениками Ф.И. Фёдорова А.Н. Сердюковым, Н.В. Максименко, работающими в ГГУ, и Л.Г. Морозом, сотрудником Института физики НАН, была предсказана

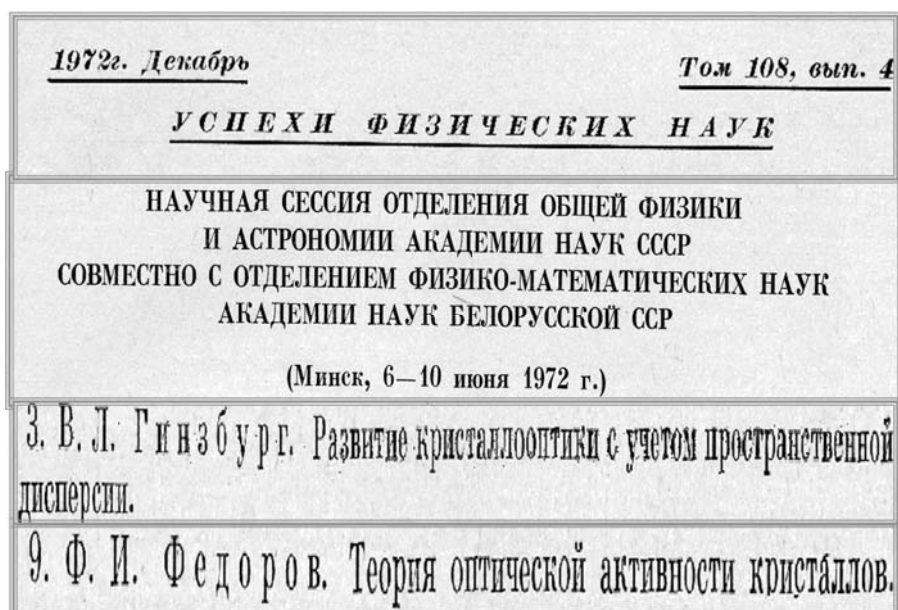
магнитоэлектрическая поляризуемость элементарных частиц – адекватный аналог явления естественной оптической активности в физике высоких энергий. Через 20 лет после этого явление было открыто экспериментально французскими учеными. С тех пор интерес к его всестороннему изучению непрерывно растёт, так как данное явление стало новым ключом к тайнам структуры элементарных частиц.

Предсказанное лично Фёдором Ивановичем явление бокового смещения светового луча при полном отражении было официально зарегистрировано в СССР как научное открытие, а обнаружившие его экспериментально французские физики назвали этот эффект «сдвигом Фёдорова».

В июне 1972 года состоялась выездная сессия Отделения общей физики и астрономии Академии наук СССР, отчёт о которой опубликован в журнале «Успехи физических наук». Центральный вопрос повестки дня сессии – научная дискуссия по проблеме сохранения энергии в оптике гиротропных кристаллов, в которой Фёдор Иванович со своими учениками одержали блистательную победу.

Большое практическое значение имеют предложенные Ф.И. Фёдоровым эффективные методы определения оптических параметров кристаллов.

Оригинальные результаты в области оптики суммированы в трёх монографиях: «Оптика анизотропных сред» (1958, 2003), «Теория гиротропии» (1976) и «Отражение и преломление света прозрачными кристаллами» (1976); последняя из них в соавторстве с учеником – В.В. Филипповым. Титанический труд учёного по созданию этих монографий высоко оценён – Ф.И. Фёдоров удостоен Государственной премии СССР за 1976 г.





Академики в перерыве между заседаниями сессии: Нобелевский лауреат Н.Г. Басов, Ф.И. Фёдоров, Б.И. Степанов, Н.А. Борисевич (слева направо)

Успешно продемонстрировавший эффективность своего подхода применительно к задачам кристаллооптики, Ф.И. Фёдоров распространил его и на акустику кристаллов и тем самым создал общую теорию распространения упругих волн в произвольных анизотропных средах. Эти результаты обобщены в фундаментальной монографии «Теория упругих волн в кристаллах» (М., 1965; Нью-Йорк, 1968), отмеченной Государственной премией БССР в 1972 г.

Эти книги Ф.И. Фёдорова давно стали настольными пособиями у широкого круга специалистов во многих странах мира.



Знания, добытые Федором Ивановичем и сохраненные в написанных им трудах, остались потомкам

Фёдор Иванович активно реагировал практически на всё, что происходило в той области теоретической физики, пожалуй, самой любимой им области, в которой выполнена его кандидатская диссертация. Это – квантовая теория и

физика элементарных частиц. С применением ковариантного подхода Ф.И. Фёдоров решил ряд ключевых проблем в теории элементарных частиц и фундаментальных взаимодействий. Полученные им в этой области новые результаты обобщены в оригинальной монографии «Группа Лоренца» (М., 1979, 2003).

Таким образом, в научном творчестве Фёдора Ивановича Фёдорова чётко выделяются три основных направления: кристаллооптика, акустика кристаллов и теория фундаментальных взаимодействий. В поле научных интересов этого выдающегося физика-теоретика входили также история и методология физики. Значительный вклад Ф.И. Фёдорова в решение проблем математики оценило Американское математическое общество – избранием его своим иностранным членом.

Ф.И. Фёдоровым опубликовано более 400 научных работ, в том числе 6 крупных монографий. Он подготовил свыше 40 кандидатов наук, более 10 его учеников стали докторами наук. Среди них известные учёные, академики и члены-корреспонденты академии наук, организаторы науки и образования в Беларуси.

Ф.И. Фёдоров всегда сочетал творческую работу учёного с постоянной пропагандой научных знаний, активной борьбой против лженауки, с большой общественной и редакционно-издательской деятельностью. Он был членом Правления Советского фонда мира, членом Советской гравитационной комиссии, главным редактором журнала «Известия АН БССР. Серия физико-математических наук», членом редколлегии других научных журналов, первым президентом Белорусского физического общества.

За выдающиеся научные достижения, плодотворную педагогическую, научно-организационную и активную общественную деятельность Фёдор Иванович был удостоен звания Героя Социалистического Труда, награждён двумя орденами Ленина, орденами Трудового Красного знамени и «Знак почёта», медалями СССР и грамотами Верховного совета БССР. Ему было присвоено почётное звание Заслуженного деятеля науки БССР.

Отметим, что в истории белорусской науки только пять учёных было удостоено звания Героя Социалистического Труда. Наряду с Фёдором Ивановичем этого звания были удостоены академики НАН Беларуси Н.А. Борисевич, Б.И. Степанов, А.Ф. Севченко, Н.П. Еругин.



У памятника П. Ламарку. Париж, Франция, 1994 г. Слева направо: Г.Н. Борздов, Г.С. Митюрин, Ф.И. Фёдоров, А.Н. Сердюков, С.А. Хахомов

После кончины Фёдора Ивановича Национальная академия наук учредила научную премию его имени, присуждаемую раз в три года за лучшие научные достижения в области физико-математических наук. Первыми лауреатами премии имени Ф.И. Фёдорова стали А.Н. Сердюков, Л.М. Барковский, В.И. Кувшинов, Ю.А. Курочкин, Е.А. Толкачёв, В.В. Филиппов.

Фёдор Иванович Фёдоров оставил нам богатейшее, непреходящее по своей значимости и общекультурное по своей сути наследие. Главное детище Ф.И. Фёдорова – созданная им научная школа – живёт и успешно развивается, продолжая заложенные Фёдором Ивановичем традиции и претворяя в жизнь его идеи.



Медаль, вручаемая лауреату премии имени Ф.И. Фёдорова Национальной академией наук Беларуси

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Библиография научных трудов академика АН БССР Ф. И. Фёдорова.* – Минск : ИФАН БССР, 1971. – 24 с.
2. *Фёдоров, Ф.И.* Оптика анизотропных сред / Ф.И. Фёдоров. – Минск : Изд-во АН БССР, 1958. – 380 с.; 2-е изд. – М. : УРСС, 2004. – 384 с.
3. *Фёдоров, Ф.И.* Теория упругих волн в кристаллах / Ф.И. Фёдоров. – М. : Наука, 1965. – 386 с.
4. *Fedorov, F.I.* Theory of Elastic Waves in Crystals / F.I. Fedorov. – New York : Plenum Press, 1968. – 375 p.
5. *Фёдоров, Ф.И.* Теория гиротропии / Ф.И. Фёдоров. – Минск : Наука и техника, 1976. – 456 с.
6. *Фёдоров, Ф.И.* Отражение и преломление света прозрачными кристаллами / Ф.И. Фёдоров, В.В. Филиппов. – Минск : Наука и техника, 1976. – 222 с.
7. *Фёдоров, Ф.И.* Группа Лоренца / Ф.И. Фёдоров. – М. : Наука, 1979. – 384 с.
8. *Памяти Фёдора Ивановича Фёдорова* – 2-е изд. – М. : УРСС, 2003. – 384 с.
11. *Памяти Фёдора Ивановича Фёдорова* / П.А. Апанасевич [и др.]. – УФН. – 1994. – Т. 165, № 2. – С. 239–240.
12. *Богуш, А.А.* Фёдор Иванович Фёдоров (К 90-летию со дня рождения) / А.А. Богуш, А.М. Гончаренко. – Изв. НАН Республики Беларусь. Сер. физ.-мат. наук. – 2001. – № 3. – С. 110 – 112.
13. *Память и слава: Фёдор Иванович Фёдоров.* К 95-летию со дня рождения / Отв. ред. А.М. Гончаренко, В.И. Стражев. – Минск: БГУ, 2005. (Memoria et Gloria) – 199 с.

А.Н. Сердюков
Гомельский государственный университет
им. Ф. Скорины, Гомель

УДК 539.12:530.145

О ВНУТРЕННИХ СИММЕТРИЯХ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА В ГРАФЕНЕ

П.П. Андрусевич¹, В.А. Плетюхов², В.И. Стражев¹¹Белорусский государственный университет, Минск²Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина, Брест

ON INTERNAL SYMMETRIES OF THE DIRAC EQUATION IN GRAPHENE

P.P. Andrusевич¹, V.A. Pletyukhov², V.I. Strazhev¹¹Belarusian State University, Minsk²Brest State University, Brest

Исследованы свойства внутренней симметрии уравнений Дирака для безмассового и массивного микрообъекта в пространстве размерности 2+1. При этом используется метод, основанный на приведении рассматриваемых уравнений к вещественной форме. Показано, что безмассовой частице соответствует 12-параметрическая симметрия; при этом в число параметров симметрии включаются параметры симметрии, соответствующие 10-параметрической группе Ли, изоморфной группе SO(3,2). Рассмотрены также симметрии уравнения Дирака при условии $m \neq 0$ и разных способах учёта массового слагаемого.

Ключевые слова: внутренняя симметрия, дираковское поле, генераторы, группа, инвариантность.

The internal symmetries of massless and massive Dirac equations in space-time 2+1 are investigated. It is shown that the massless Dirac equation has 12-parameter symmetry group which as a subgroup contains 10-parameter group Lee SO(3,2). The massive equation ($m \neq 0$) has the symmetry group SO(2,2).

Keywords: internal symmetry, Dirac field, generators, group, invariance.

Введение

По понятным причинам в начале XXI века появилось большое количество публикаций, в которых проводится теоретическое описание свойств графена и в частности показано, что состояния квазичастиц в решеточной структуре графена в низкоэнергетическом пределе могут быть определены на основе безмассового уравнения Дирака в пространстве размерности 2+1 (см., напр., [1], [2]). В этих публикациях существенное внимание уделяется изучению внутренних симметрий как безмассового, так и массивного уравнений Дирака в указанном пространстве, однако полученные результаты не коррелируют с хорошо известными результатами оценки параметров симметрии для уравнения Дирака в пространстве размерности 3+1. В настоящей работе описан метод исследования внутренней симметрии, разработанный в [3], [4], который основывается на использовании вещественной формы подобных уравнению Дирака релятивистских волновых уравнений. На основе его применения можно установить наличие групп внутренней симметрии лагранжианов безмассового и массивного уравнений Дирака в пространстве размерности 2+1, более широких по числу элементов симметрии чем те, которые обсуждаются в вышеуказанных и других публикациях по данному вопросу и полностью согласующихся с выводами о числе параметров симметрии дираковского поля в пространстве размерности 3+1.

1 Основная часть

Рассмотрим безмассовое уравнение Дирака

$$\gamma_\mu \partial_\mu \psi = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2) \quad (1.1)$$

в пространстве 2+1 с метрикой

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1). \quad (1.2)$$

Матрицы γ_μ в (1.1) выберем в виде

$$\gamma_0 = \sigma_3 \otimes I_2, \gamma_1 = \sigma_2 \otimes \sigma_1, \gamma_2 = \sigma_2 \otimes \sigma_2, \quad (1.3)$$

где σ_i – матрицы Паули.

Записывая выражение, комплексно сопряженное (1.1), получим уравнение для функции ψ^* :

$$(-\gamma_0 \partial_0 - \gamma_1 \partial_1 + \gamma_2 \partial_2) \psi^* = 0. \quad (1.4)$$

Рассматривая уравнения (1.1) и (1.4) совместно, приходим к 8-компонентной системе, которую можно представить в аналогичной (1.1) форме:

$$\Gamma_\mu \partial_\mu \Psi = 0. \quad (1.5)$$

При выборе волновой функции Ψ в (1.5) в виде матрицы-столбца

$$\Psi = (\psi, \psi^*) \quad (1.6)$$

для матриц Γ_μ будем иметь выражения:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \sigma_3 \otimes \gamma_0, \\ \Gamma_1 &= \sigma_3 \otimes \gamma_1, \\ \Gamma_2 &= I_2 \otimes \gamma_2. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Для дальнейшего рассмотрения удобно перейти к представлению, в котором вещественные и мнимые компоненты волновой функции разделены:

$$\Psi = \Psi = (\psi^r, \psi^i) - \text{столбец,}$$

$$\psi^r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi + \psi^*), \quad \psi^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi - \psi^*). \quad (1.8)$$

Указанный переход от представления (1.6) осуществляется посредством унитарного преобразования базиса:

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{pmatrix},$$

$$u^{-1} = u^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Матрицы Γ_μ при этом принимают вид:

$$\Gamma_0 = \sigma_1 \otimes \gamma_0, \quad \Gamma_1 = \sigma_1 \otimes \gamma_1, \quad \Gamma_2 = I_2 \otimes \gamma_2. \quad (1.10)$$

Лагранжиан уравнения (1.5)

$$L = -\bar{\Psi} \Gamma_\mu \partial_\mu \Psi = -\Psi^+ \eta \Gamma_\mu \partial_\mu \Psi \quad (1.11)$$

эквивалентен лагранжиану

$$L = -\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi = -\psi^+ \gamma_0 \gamma_\mu \partial_\mu \psi \quad (1.12)$$

исходного уравнения (1.1) при выборе в базисе (1.8) матрицы билинейной формы η в виде:

$$\eta = I_2 \otimes \gamma_0. \quad (1.13)$$

Уравнение (1.5) с волновой функцией (1.8), матрицами Γ_μ (1.10) и лагранжианом (1.11), (1.13), следуя [3], [4], будем называть вещественной формой безмассового уравнения Дирака в пространстве размерности 2+1, так как соответствующая система спинорных уравнений, записанная в явном виде, является вещественной. Данную форму мы и будем использовать при установлении группы внутренней симметрии безмассового уравнения Дирака в пространстве размерности 2+1.

Для решения поставленной задачи на начальном этапе будем использовать фермионный базис, в котором матрицы Γ_μ , по определению, имеют структуру:

$$\Gamma_\mu = I_2 \otimes \gamma_\mu. \quad (1.14)$$

Переход от представления (1.10) к представлению (1.14) матриц Γ_μ осуществляется посредством унитарного преобразования в пространстве волновой функции Ψ :

$$A = \frac{1}{2} [I_2 \otimes (I_4 + i\gamma_2) + \sigma_1 \otimes (I_4 - i\gamma_2)],$$

$$A^{-1} = A^+ = \frac{1}{2} [I_2 \otimes (I_4 - i\gamma_2) + \sigma_1 \otimes (I_4 + i\gamma_2)]. \quad (1.15)$$

Матрица билинейной формы η в фермионном базисе принимает вид:

$$\eta = \sigma_1 \otimes \gamma_0. \quad (1.16)$$

Инвариантность уравнения (1.5) с матрицами Γ_μ (1.14) относительно преобразований внутренней симметрии $\Psi'(x_\mu) = Q\Psi(x_\mu)$ обеспечивается операторами четырех типов:

$$Q_1 = q^{(1)} \otimes I_4, \quad Q_2 = q^{(2)} \otimes i\gamma_3\gamma_5, \quad (1.17)$$

$$Q_3 = q^{(3)} \otimes \gamma_3, \quad Q_4 = q^{(4)} \otimes \gamma_5, \quad (1.18)$$

где $q^{(\alpha)} = q_{mn}^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1 \div 4$; $m, n = 1, 2$) – произвольные комплексные матрицы 2×2 ; γ_3, γ_5 – матрицы Дирака

$$\gamma_3 = \sigma_2 \otimes \sigma_3, \quad \gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3. \quad (1.19)$$

При этом операторы (1.17) удовлетворяют условиям коммутации

$$[Q_1, \Gamma_\mu]_- = [Q_2, \Gamma_\mu]_- = 0, \quad (1.20)$$

а операторы (1.18) – условиям антикоммутации с матрицами Γ_μ :

$$[Q_3, \Gamma_\mu]_+ = [Q_4, \Gamma_\mu]_+ = 0. \quad (1.21)$$

Параметризуя матрицы $q^{(\alpha)}$ посредством матриц I_2, σ_i , получим следующие 16 базисных операторов преобразований внутренней симметрии уравнения (1.5), (1.14):

$$J^0 = I_8, \quad J^1 = \sigma_1 \otimes I_4,$$

$$J^2 = \sigma_2 \otimes I_4, \quad J^3 = \sigma_3 \otimes I_4,$$

$$J^4 = iI_2 \otimes \gamma_3\gamma_5, \quad J^5 = i\sigma_1 \otimes \gamma_3\gamma_5,$$

$$J^6 = i\sigma_2 \otimes \gamma_3\gamma_5, \quad J^7 = i\sigma_3 \otimes \gamma_3\gamma_5, \quad (1.22)$$

$$J^8 = I_2 \otimes \gamma_3, \quad J^9 = \sigma_1 \otimes \gamma_3,$$

$$J^{10} = \sigma_2 \otimes \gamma_3, \quad J^{11} = \sigma_3 \otimes \gamma_3,$$

$$J^{12} = I_2 \otimes \gamma_5, \quad J^{13} = \sigma_1 \otimes \gamma_5,$$

$$J^{14} = \sigma_2 \otimes \gamma_5, \quad J^{15} = \sigma_3 \otimes \gamma_5.$$

(Множитель i здесь введён для обеспечения эрмитовости матриц (1.22)).

Возвращаясь теперь снова в базис (1.8), получим для операторов (1.22) выражения:

$$J^0 = I_8, \quad J^1 = \sigma_1 \otimes I_4,$$

$$J^2 = -\sigma_3 \otimes \gamma_2, \quad J^3 = \sigma_2 \otimes \gamma_2,$$

$$J^4 = iI_2 \otimes \gamma_3\gamma_5, \quad J^5 = i\sigma_1 \otimes \gamma_3\gamma_5,$$

$$J^6 = -i\sigma_3 \otimes \gamma_0\gamma_1, \quad J^7 = i\sigma_2 \otimes \gamma_0\gamma_1, \quad (1.23)$$

$$J^8 = \sigma_1 \otimes \gamma_3, \quad J^9 = I_2 \otimes \gamma_3,$$

$$J^{10} = -i\sigma_2 \otimes \gamma_2\gamma_3, \quad J^{11} = -i\sigma_3 \otimes \gamma_2\gamma_3,$$

$$J^{12} = \sigma_1 \otimes \gamma_5, \quad J^{13} = I_2 \otimes \gamma_5,$$

$$J^{14} = -i\sigma_2 \otimes \gamma_2\gamma_5, \quad J^{15} = -i\sigma_3 \otimes \gamma_2\gamma_5.$$

Условие сохранения структуры (1.8) волновой функции (условие вещественности) относительно преобразований, задаваемых базисными операторами (1.23), накладывает ограничения на соответствующие параметры ω_N ($N = 0 \div 15$):

$$\omega_0, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6,$$

$$\omega_7, \omega_8, \omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{13} - \text{вещественные,} \quad (1.24)$$

$$\omega_1, \omega_5, \omega_9, \omega_{12}, \omega_{14}, \omega_{15} - \text{мнимые.}$$

Требование инвариантности лагранжиана (1.11) относительно матричных преобразований (1.17), (1.18)

$$Q^+ \eta \Gamma_\mu Q = \eta \Gamma_\mu \quad (1.25)$$

накладывает на эти преобразования, помимо (20), (21), дополнительные ограничения

$$Q_1^+ \eta Q_1 = \eta, \quad Q_2^+ \eta Q_2 = \eta, \quad (1.26)$$

$$Q_3^+ \eta Q_3 = -\eta, \quad Q_4^+ \eta Q_4 = -\eta, \quad (1.27)$$

после учёта в которых ограничений (1.24) получим следующие четыре условия, связывающие параметры ω_N :

$$\omega_0^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2 = 1, \quad (1.28)$$

$$\omega_4^2 - \omega_5^2 - \omega_6^2 - \omega_7^2 = 1, \quad (1.29)$$

$$\omega_8^2 - \omega_9^2 - \omega_{10}^2 - \omega_{11}^2 = 1, \quad (1.30)$$

$$-\omega_{12}^2 + \omega_{13}^2 + \omega_{14}^2 + \omega_{15}^2 = 1. \quad (1.31)$$

Таким образом, внутренняя симметрия лагранжиана безмассового уравнения Дирака в пространстве размерности 2+1 описывается 12-параметрической группой матричных преобразований, которая получается в результате требования выполнения условий (1.24), (1.27) для параметров, соответствующих базисным операторам (1.23) этой группы.

Отметим, что шестипараметрическая группа симметрии Паули–Гюрши [5]–[7], характерная для безмассового дираковского поля в пространстве размерности 3+1, содержится здесь в качестве подгруппы и может быть задана, например, базисными операторами $J^1, J^2, J^3, J^{13}, J^{14}, J^{15}$.

Чтобы выделить из полученных преобразований те, которые представимы в форме Ли $Q = e^{\omega J}$, где в качестве генераторов J выступают матрицы (1.23), условия (1.26), (1.27) надо записать для бесконечно малых преобразований $Q = 1 + \omega J$. В результате получим условия

$$(\omega J)^+ \eta = \mp \omega \eta J, \quad (1.32)$$

где знак « \leftarrow » соответствует генераторам J^0, \dots, J^7 , коммутирующим с матрицами Γ_μ , а знак « \rightarrow » – генераторам J^8, \dots, J^{15} , антикоммутирующим с Γ_μ . Условия (1.32) с учётом (1.24) выполняются для десяти однопараметрических преобразований, определяемых (эрмитовскими) генераторами $J^1, J^2, J^3, J^5, J^6, J^7, J^9, J^{10}, J^{11}, J^{12}$, которые удовлетворяют правилам алгебры генераторов группы SO(5). Учитывая же, что из десяти параметров данных преобразований шесть ($\omega_2, \omega_3, \omega_6, \omega_7, \omega_{10}, \omega_{11}$) являются вещественными и четыре ($\omega_1, \omega_5, \omega_9, \omega_{12}$) – мнимыми, приходим к выводу: группа Ли преобразований внутренней симметрии лагранжиана безмассового уравнения Дирака в пространстве размерности 2+1 изоморфна группе SO(3,2).

Вводя в уравнение (1.1) стандартный массовый член $m\psi$ и переходя к вещественной форме записи, получим 8-компонентное уравнение

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi = 0 \quad (1.33)$$

с теми же матрицами Γ_μ , что и в безмассовом варианте. Очевидно, что группу внутренней симметрии соответствующего уравнению (1.33) лагранжиана

$$L = -\bar{\Psi}(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi = -\Psi^+ \eta (\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi \quad (1.34)$$

можно определить, если исключить преобразования Q_3, Q_4 , антикоммутирующие с матрицами Γ_μ , из группы симметрии безмассового лагранжиана (1.11). В результате остаются преобразования, задаваемые генераторами $J^1, J^2, J^3, J^5, J^6, J^7$. Используя для удобства обозначения, $J^5 = I^1, J^6 = I^2, J^7 = I^3$, $\omega_5 = \theta_1, \omega_6 = \theta_2, \omega_7 = \theta_3$, нетрудно убедиться, что эрмитовские генераторы J^i, I^i удовлетворяют соотношениям коммутации:

$$\begin{aligned} [J^i, J^j] &= 2i\varepsilon_{ijk} J^k, \\ [I^i, I^j] &= 2i\varepsilon_{ijk} J^k, \\ [J^i, I^j] &= 2i\varepsilon_{ijk} I^k. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Учитывая, что этим генераторам соответствуют четыре вещественных ($\omega_2, \omega_3, \theta_2, \theta_3$) и два мнимых (ω_1, θ_1) параметра, получаем группу Ли, изоморфную группе SO(2,2). Генераторы J^i образуют в ней подгруппу SO(2,1) зарядовой симметрии, свойственную массивному полю Дирака в пространстве размерности 3+1 [7], [8].

В пространстве размерности 2+1 существуют другие способы введения массового члена в уравнение Дирака, например, такой:

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m\gamma_3)\psi = 0. \quad (1.36)$$

Переходя к вещественной форме уравнения (1.36) и учитывая, что матрица γ_3 мнимая, получим в представлении (1.8) уравнение

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + m\Gamma_3)\Psi = 0, \quad (1.37)$$

где

$$\Gamma_3 = \sigma_1 \otimes \gamma_3. \quad (1.38)$$

Группа внутренней симметрии лагранжиана, соответствующая уравнению (1.37)

$$L = -\bar{\Psi}(\Gamma_\mu \partial_\mu + m\Gamma_3)\Psi, \quad (1.39)$$

формируется из преобразований типа Q_1 и Q_4 , соответственно коммутирующих и антикоммутирующих со всеми матрицами Γ в уравнении (1.37), в том числе и с матрицей Γ_3 . Другими словами, речь идёт о базисных операторах $J^0, J^1, J^2, J^3, J^{12}, J^{13}, J^{14}, J^{15}$, на параметры которых накладываются два условия: (1.28), (1.31). В результате получается шестипараметрическая группа, которая совпадает с упоминаемой выше группой Паули – Гюрши. Преобразования в форме Ли определяются в данном случае

генераторами J^1, J^2, J^3, J^{12} и образуют группу $SO(2,1) \otimes U(1)$.

Рассмотрим также уравнение

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m\gamma_5)\psi = 0, \quad (1.40)$$

вещественная форма которого имеет вид:

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + m\Gamma_5)\Psi = 0, \quad \Gamma_5 = I_2 \otimes \gamma_5. \quad (1.41)$$

Инвариантность лагранжиана

$$L = -\bar{\Psi}(\Gamma_\mu \partial_\mu + m\Gamma_5)\Psi \quad (1.42)$$

обеспечивается преобразованиями, соответствующими базисным операторам $J^0, J^1, J^6, J^7, J^8, J^9, J^{14}, J^{15}$ при двух ограничениях на соответствующие им параметры. Следовательно, опять получаем шестипараметрическую группу. Преобразования, представимые в форме Ли, определяются здесь генераторами J^1, J^6, J^7, J^9 и образуют, как и в предыдущем случае, группу $SO(2,1) \otimes U(1)$.

Наконец, лагранжиан

$$L = -\bar{\Psi}(\Gamma_\mu \partial_\mu + im\Gamma_3\Gamma_5)\Psi$$

уравнения

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + im\gamma_3\gamma_5)\psi = 0,$$

записанного в вещественной форме, инвариантен, как нетрудно убедиться, относительно всех преобразований, соответствующих базисным операторам (1.23), с учётом ограничений (1.28)–(1.31). Следовательно, группа внутренней симметрии лагранжиана (1.42) для массивного поля в пространстве размерности 2+1 совпадает с группой симметрии лагранжиана (1.11) безмассового поля.

Заключение

Итак, наиболее полная группа матричных преобразований внутренней симметрии безмассового уравнения Дирака в пространстве размерности 2+1 содержит 12 независимых параметров и содержит известную 6-параметрическую группу Паули – Гюрши в качестве подгруппы. При этом преобразования, представимые в форме Ли, описываются 10-параметрической группой, изоморфной группе $SO(3,2)$. Установленная

симметрия значительно шире $U(2)$ -симметрии, которая обычно сопоставляется безмассовому уравнению Дирака в работах других авторов на данную тему (см., напр., [1], [2] и цитированную там литературу). Группа симметрии массивного уравнения Дирака зависит от способа введения массового члена.

Полученные результаты являются новыми и могут оказаться полезными при описании решётчатой структуры графена методами релятивистской квантовой механики в континууме.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Magnetic field driven metal-insulator phase transition in planar systems* / E.V. Gorbar [et al.] // arXiv: cond-mat/0202422v3 26 Aug 2002.
2. *Gusynin, V.P.* AC Conductivity of graphene: from tight-binding model to 2+1-dimensional quantum electrodynamics / V.P. Gusynin, S.G. Sharapov, J.P. Carbotte // arXiv: 0706. 3016v2 [cond-mat. mess-hall] 27 Nov 2007.
3. *Плетюхов, В.А.* Вещественное поле Дирака-Кэлера и дираковские частицы / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев // Вестник БГУ. Серия 1. – 2009. – № 2. – С. 3–7.
4. *Плетюхов, В. А.* Внутренняя симметрия восьмикомпонентного дираковского поля / В.А. Плетюхов, В.И. Стражев, П.П. Андрусевич // Вестн НАНБ, сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 4. – С. 89–94.
5. *Pauli, W.* On the conservation of the lepton charge / W. Pauli // Nuovo Cim. – 1957. – Vol. 6, № 1. – P. 204–215.
6. *Gürsey, F.* Connection of charge independence and baryon number conservation with the Pauli transformation / F. Gürsey // Nuovo Cim. – 1958. – Vol. 8. – P. 411–415.
7. *Нишиджима, К.* Фундаментальные частицы / К. Нишиджима // М. : Мир, 1965. – 462 с.
8. *Стражев, В. И.* О группе зарядовой симметрии релятивистских волновых уравнений / В.И. Стражев, П. Л. Школьников // Известия вузов. Физика. – 1981. – № 11. – С. 115–117.

Поступила в редакцию 01.06.11.

УДК 535.41

ЛОКАЛЬНЫЕ СПЕКТРЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЧАСТОТ БЕССЕЛЕВЫХ ПУЧКОВ

В.Н. Белый, Н.С. Казак, Н.А. Хило, П. И. Ропот, Р.Ю. Васильев

Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск

LOCAL SPECTRA OF SPATIAL FREQUENCIES OF BESSEL BEAMS

V.N. Belyi, N.S. Kazak, N.A. Khilo, P.I. Ropot, R.Yu. Vasilyev

B.I. Stepanov Institute of Physics of NAS Belarus, Minsk

Исследованы локальные пространственные спектры фрагментов бесселевых пучков, выделенных радиально-смещенными круговыми диафрагмами. Теоретически и экспериментально показано, что в случае, когда круговая диафрагма расположена на оси бесселева пучка нулевого порядка или включает его центральный максимум, то спектр такого фрагмента бесселева пучка является кольцевым. При смещении диафрагмы за пределы осевого максимума спектр становится дуговым. Установлено, что обнаруженные свойства пространственных спектров имеют место независимо от метода и оптической схемы формирования бесселевых пучков.

Ключевые слова: *бесселев световой пучок, локальный пространственный спектр, кольцевые и дуговые спектры.*

Local spatial spectra of Bessel beams fragments limited by the radial-shifted circular diaphragms have been investigated. It has been shown theoretically and experimentally that in case when circular diaphragm is placed on the axis of zero-order Bessel beam or includes its central maximum, the spectrum of such Bessel beam fragment is annular. When shifting the diaphragm behind the limits of the axial maximum, the spectrum takes the form of an arc. It has been established that the detected properties of spatial spectra occur independently of the technique and optical scheme of Bessel beams formation.

Keywords: *Bessel light beam, local spatial spectrum, annular and arc spectra.*

Введение

Важной характеристикой световых пучков является структура их спектра пространственных частот (ПЧ). Вид спектра ПЧ дает представление о пространственно-угловом строении световых пучков, а также позволяет наглядно интерпретировать различные линейные и НЛ процессы с их участием. Известная кольцевая структура пространственного спектра БСП имеет наглядное объяснение, если исходить из модели БСП как набора плоских волн, волновые векторы которых покрывают поверхность кругового конуса. Данная модель была предложена в работе [1], в которой для получения БСП использовалась узкая кольцевая диафрагма размещенная в передней фокальной плоскости линзы и освещаемая плоской волной. Предполагается, что суперпозиция плоских волн в такой схеме генерируется точечными источниками, расположенными в пределах кольцевой диафрагмы. В случае расположения диафрагмы вне фокуса линзы [2] бесселев пучок может быть описан как изображение в линзе суперпозиции сферических волн, формируемых некоторым эффективным круговым источником в плоскости объекта. В схеме получения БСП на основе аксиконов, возникновение суперпозиции плоских волн можно проследить при анализе дифракционного интеграла методом стационарной фазы. Наконец, в базисе строгих решений уравнения Гельмгольца бесселев пучок может

быть представлен в виде суперпозиции конических пучков, описываемых функцией Ханкеля нулевого и первого порядка, соответствующих сходящейся и расходящейся цилиндрическим волнам [3].

Отметим, что круговая структура спектра ПЧ бесселевых пучков естественно следует из перечисленных моделей, описывающих их внутреннюю структуру. Сказанное, однако, относится к интегральному спектру ПЧ, т. е. спектру, полученному для всего пучка. Именно такой спектр формируется стандартной экспериментальной схемой, использующей Фурье-преобразующую линзу (рисунок 1). В фокальной плоскости σ линзы L , формируется кольцевое поле радиусом $R = F\gamma$, где F – фокальная длина, γ – угол конуса бесселева пучка. Из рисунка 1 видно, что данная схема формирует интегральный пространственный спектр, который является характеристикой пучка в целом. Интегральный спектр проявляется экспериментально в пространственно нелокализованных физических процессах, таких как векторные взаимодействия при ГВГ или параметрической генерации света [4], [5]. Однако, по-видимому, большинство линейных и НЛ процессов с участием БСП являются в той или иной мере пространственно локализованными. Соответственно, их протекание будет зависеть в большей степени от структуры локального спектра ПЧ.

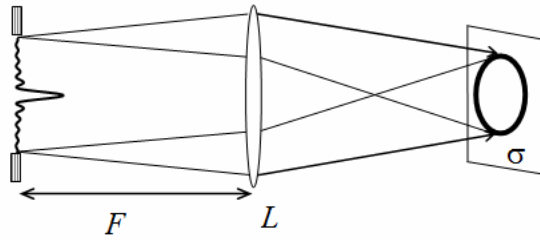


Рисунок 1 – Оптическое Фурье-преобразование бesselевых пучков

Поэтому задачей настоящей работы является исследование локальных спектров ПЧ бesselевых пучков, формируемых схемой оптического преобразования Фурье с дополнительной произвольно локализованной ограничивающей апертурой.

1 Схема с Фурье-преобразованием кольцевого поля

Рассмотрен случай, когда ограничивающая апертура имеет круговую форму, а ее центр расположен на произвольном расстоянии от оптической оси пучка. Оптическая схема эксперимента, которая использовалась для изучения локальных спектров БП, показана на рисунке 2.

Проведем расчет данной схемы. Поле в выходной плоскости имеет вид Фурье – преобразования

$$a(\vec{r}) = -\frac{i}{\lambda F_2} \int a_1(\vec{r}_1) \sigma(\vec{r}_1) \exp\left(-\frac{ik_0 \vec{r}_1 \vec{r}}{F_2}\right) d^2 r_1, \quad (1.1)$$

где $a_1(\vec{r}_1)$ – поле, создаваемое диафрагмой в фокальной плоскости линзы 1, $\sigma(\vec{r}_1)$ – функция пропускания смещенной диафрагмы. Поле $a_1(\vec{r}_1)$ является, в свою очередь, преобразованием Фурье поля во входной плоскости, т.е.

$$a_1(\vec{r}_1) = -\frac{i}{\lambda F_2} \int \tau(\vec{r}_2) \exp\left(-\frac{ik_0 \vec{r}_1 \vec{r}_2}{F_2}\right) d^2 r_2, \quad (1.2)$$

где $\tau(\vec{r}_2)$ – функция пропускания кольцевой диафрагмы.

Из (1.1) и (1.2) следует

$$a(\vec{r}) = -\frac{i}{\lambda F_1} \int \tau(\vec{r}_1) \tilde{\sigma}\left(\vec{r} + \frac{F_2 \vec{r}_1}{F_1}\right) d^2 r_1, \quad (1.3)$$

где $\tilde{\sigma}(\vec{r})$ – Фурье преобразование функции пропускания смещенного круга.

Функция $\tilde{\sigma}(\vec{r})$ имеет известный вид

$$\tilde{\sigma}(\vec{r}) = -\frac{ir_0}{r} J_1\left(\frac{k_0 r_0 r}{F_2}\right) \exp\left(-\frac{ik_0 \vec{\rho}_0 \vec{r}}{F_2}\right) \quad (1.4)$$

где $\vec{\rho}_0 = (\rho_0, \varphi_0)$ – вектор смещения диафрагмы (см. рисунок 1). Подставляя (1.4) в (1.3), получим

$$a(\rho, \varphi) = \frac{-r_0}{\lambda F_1 F_2} \int_0^{2\pi} \int \tau(\rho_1) \frac{J_1(k_0 r_0 S(\rho, \rho_1, \varphi, \varphi_1))}{S(\rho, \rho_1, \varphi, \varphi_1)} \cdot \exp\left[\frac{ik_0 \rho_0 [\rho_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_0) + \rho \cos(\varphi - \varphi_0)]}{-F_1}\right] \rho_1 d\rho_1 d\varphi_1, \quad (1.5)$$

$$\text{где } S(\rho, \rho_1, \varphi, \varphi_1) = \sqrt{\frac{\rho^2}{F_2^2} + \frac{\rho_1^2}{F_1^2} + \frac{2\rho\rho_1}{F_1 F_2} \cos(\varphi - \varphi_1)},$$

$J_1(x)$ – функция Бесселя первого порядка, R_{in} – радиус кольцевой диафрагмы.

Пренебрегая в (1.6) влиянием конечной ширины кольцевой диафрагмы, положим $\tau_0(\rho) = R_{in} \delta(\rho - R_{in})$. Тогда

$$a(\rho, \varphi) = -\frac{r_0 R_{in}^2}{\lambda F_1 F_2} \int_0^{2\pi} \frac{J_1(k_0 r_0 S(\rho, R_{in}, \varphi, \varphi_1))}{S(\rho, R_{in}, \varphi, \varphi_1)} \cdot \exp\left[\frac{ik_0 \rho_0 [R_{in} \cos(\varphi_1 - \varphi_0) + \rho \cos(\varphi - \varphi_0)]}{-F_1}\right] d\varphi_1. \quad (1.6)$$

Кольцевая диафрагма D диаметром 12 мм и шириной кольца 80 мкм размещалась в передней фокальной плоскости ($F_1 = 50$ см) линзы L_1 . В окрестности задней фокальной плоскости линзы формируется, как известно [1], бesselев пучок (рисунок 3). Диафрагма S с круговым отверстием радиусом r_0 равным 185 мкм, центр которой расположен в точке с цилиндрическими координатами (ρ_0, φ_0) ориентировалась перпендикулярно оптической оси схемы в зоне существования бesselева пучка. Линза L_2 ($F_2 = 20$ см) формировала локальный Фурье-спектр бesselева пучка, двумерное распределение интенсивности которого измерялось CCD – матрицей.

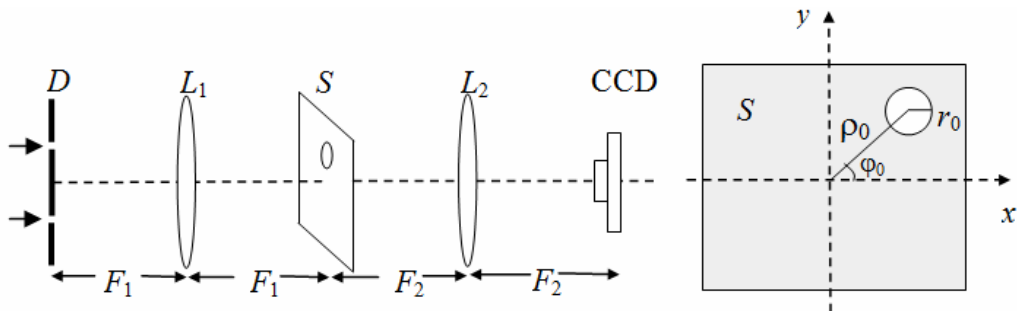


Рисунок 2 – Оптическая схема для измерения локального пространственного спектра бesselева пучка, формируемого кольцевой диафрагмой, D – кольцевая диафрагма, $L_{1,2}$ – Фурье – преобразующие линзы, S – экран с круговым отверстием

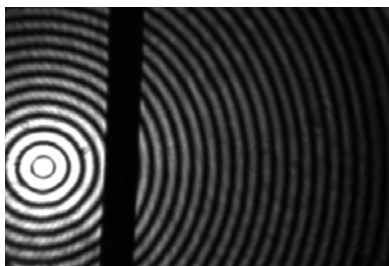


Рисунок 3 – Фрагмент бesselева пучка, формируемого в фокальной плоскости линзы L_1 . Для оценки характерных пространственных размеров показана темная полоса, шириной 80 мкм

На рисунке 3 показаны результаты измерений спектра ПЧ, полученные при различных положениях круговой диафрагмы относительно оптической оси.

Из рисунка видно, что локальный спектр ПЧ бesselева пучка радикально изменяется при смещении зоны локализации вне оптической оси. Полное кольцо трансформируется в пару дуг, угловой размер которых постепенно уменьшается. Ориентация оси максимальной интенсивности спектра при этом совпадает с направлением смещения круговой диафрагмы. В эксперименте, соответствующем рисунку 4, азимутальный угол φ_0 равен нулю.

Проводилось численное моделирование экспериментальной схемы на рисунке 2, используя формулу (1.7). Результаты расчета интенсивности в спектре приведены на рисунке 5. Как видно, имеется хорошее соответствие с экспериментальными измерениями.

Из рисунков видно, что локальный спектр БСП не является, как правило, кольцевым. Исключение составляют случаи, когда центр

ограничивающей диафрагмы расположен на оси пучка или когда смещение невелико, так что центральный максимум не выходит за пределы диафрагмы. Следовательно, кольцевой спектр реализуется только в относительно узкой приосевой зоне пучка. Вдали от центра спектр дуговой, причем азимутальная ориентация дуг поворачивается при повороте диафрагмы относительно оси пучка. Суммирование таких относительно повернутых локальных спектров дает известный интегральный кольцевой спектр.

Приведенные результаты позволяют корректировать известную плосковолновую интерпретацию бesselевых пучков. Речь идет о представлении бesselевых пучков, как состоящих из совокупности плоских волн, волновые векторы которых лежат на поверхности кругового конуса. Ясно, что такая интерпретация не является корректной применительно к произвольной области пучка, за исключением его центральной области. Во внеосевой области пучка волновые векторы плоских волн заполняют лишь часть кругового конуса, ограниченную по азимутальной координате. При достаточном удалении от оси пучка форма спектра ПЧ приближается к двухточечной (рисунки 4, 5), что соответствует приближенно двум плоским волнам.

Более детальное описание указанного изменения спектра можно осуществить, используя графические зависимости максимальной интенсивности от азимутального угла (рисунок 6). Равномерное распределение интенсивности A_0 соответствует несмещенной диафрагме. При наличии смещения возникает модуляция с двумя максимумами, ширина которых уменьшается с увеличением смещения. Отметим также наличие на графиках относительно мелкомасштабной модуляции, происхождение которой пока неясно.

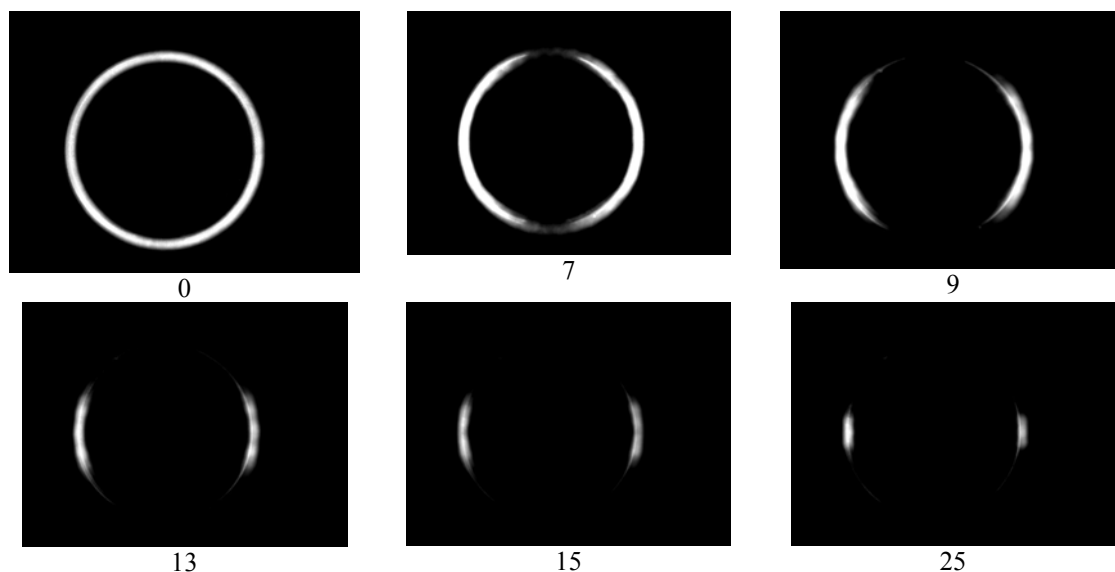


Рисунок 4 – Динамика изменения локального спектра ПЧ бesselева пучка при удалении от его центра. Величина смещения $\rho_0 = (30 \cdot m)$ мкм, где m – номер рисунка

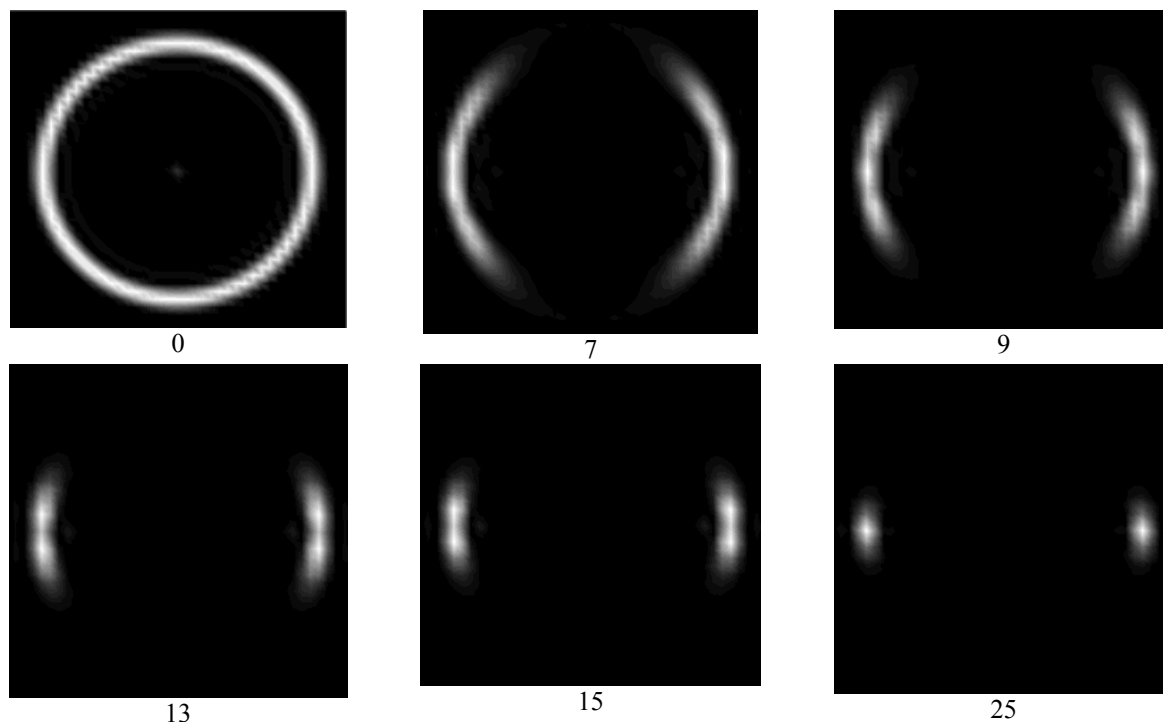


Рисунок 5 – Расчет распределения интенсивности локального спектра ПЧ бesselева пучка. Величина смещения, как на рисунке 4

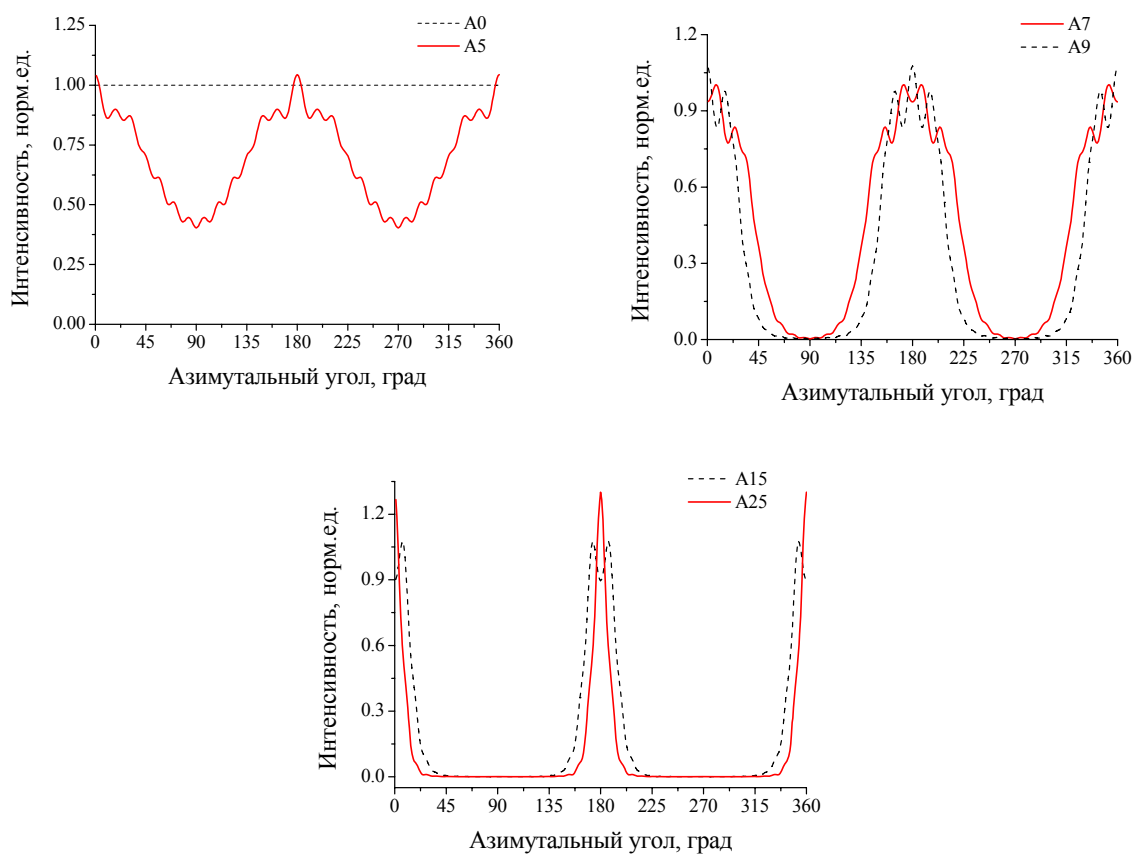


Рисунок 6 – Зависимость максимального значения интенсивности локального пространственного спектра от азимутального угла. Обозначения A0, A5 и т. д. соответствуют изображениям 0, 5, и т.д. на рисунках 4 и 5

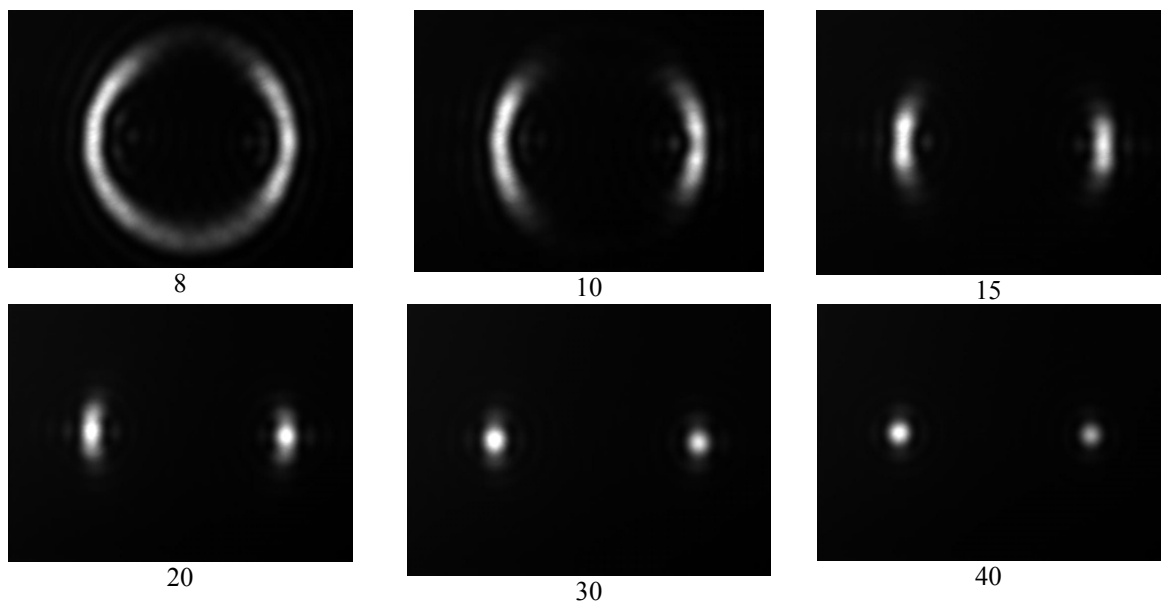


Рисунок 7 – Экспериментальное распределение интенсивности локального спектра ПЧ бesselева пучка, полученного аксиконом. Величина смещения равна номеру под рисунком, умноженному на 30 мкм

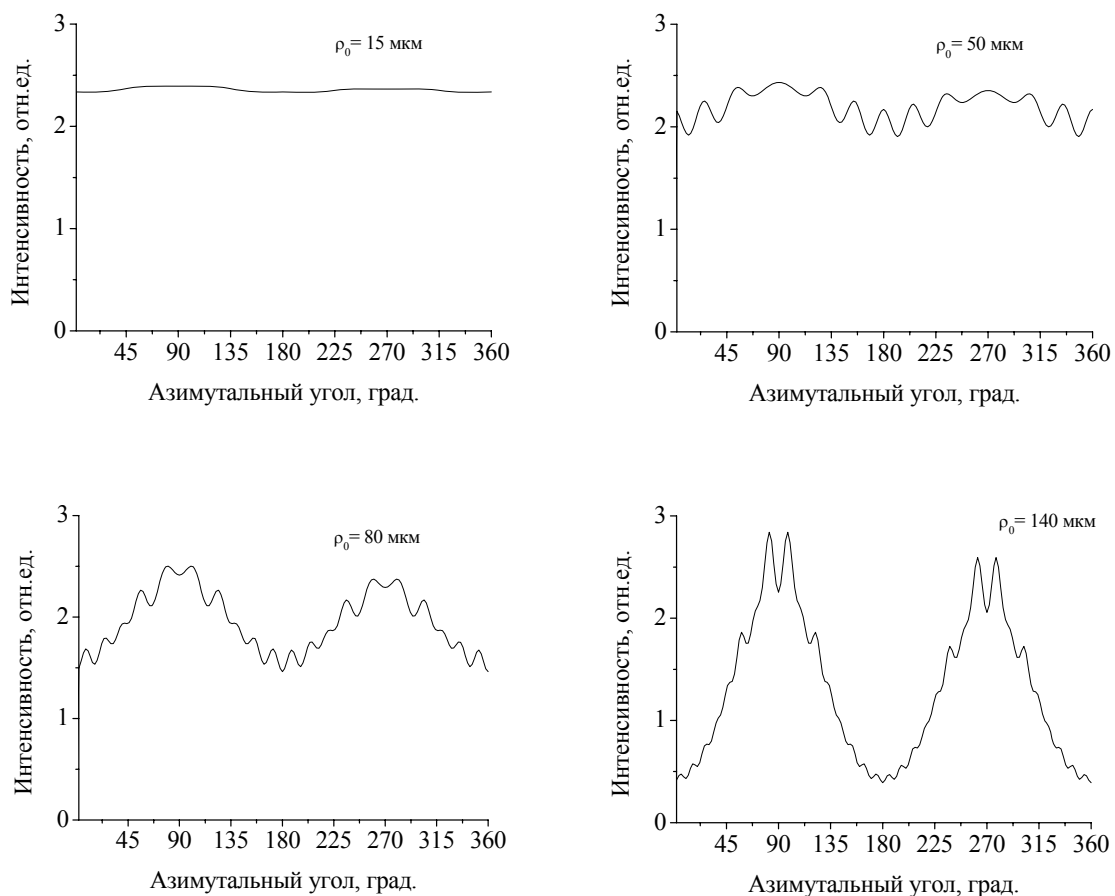


Рисунок 8 – Рассчитанные азимутальные зависимости интенсивности локального спектра БСП, формируемого аксиконом. Случай, когда ось пучка находится в пределах круговой апертуры.

Параметры задачи: угол конусности $\gamma = 0.9$ град, фокальное расстояние линзы $f = 0.3$ м, радиус апертуры $r_0 = 185$ мкм, полуширина $w = 6$ мм

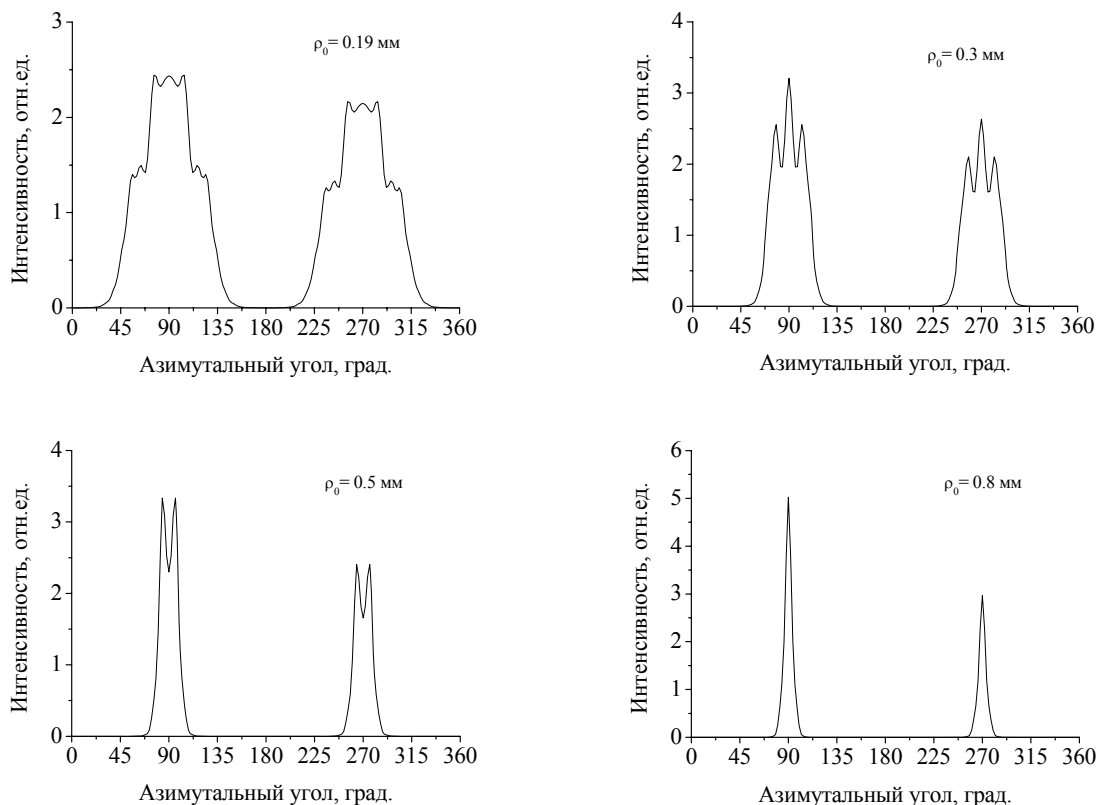


Рисунок 9 – Рассчитанные азимутальные зависимости интенсивности локального спектра БСП, формируемого аксиконом. Случай расположения круговой апертуры вне оси пучка. Параметры задачи: угол конусности $\gamma = 0.9$ град, фокальное расстояние линзы $f = 0.3$ м, радиус апертуры $r_0 = 185$ мкм, полуширина $w = 6$ мм

2 Схема на основе аксикона

Аналогичные исследования были проведены для бесселевых пучков, формируемых аксиконом. Диафрагма S размещалась в области максимального диаметра формируемого БСП. Здесь также наблюдалась трансформация кольцевого спектра в дуговой по мере смещения круговой апертуры (рисунок 9). Отличие здесь состоит в появлении асимметрии дугового спектра, которая увеличивается при увеличении смещения. Объяснение асимметрии состоит в том, что формируемый аксиконом пучок несколько отличается от строго бесселева. Формально это связано с неодинаковым вкладом в дифракционный интеграл двух стационарных точек, что приводит к некоторому отличию сходящейся и расходящейся конических волн, формирующих бесселев пучок. Расчет дифракционного интеграла методом стационарной фазы приводит к следующему выражению для поля, формируемого аксиконом

$$a(\rho, z) = [f_+(\rho, z)J_0(k_0\gamma\rho) - if_-(\rho, z)J_1(k_0\gamma\rho)], \quad (2.1)$$

где
$$f_{\pm}(\rho, z) = \frac{f_1(\rho, z) \pm f_2(\rho, z)}{2},$$

$$f_{1,2}(\rho, z) = \sqrt{1 \pm \frac{\rho}{\gamma z}} \exp\left(-\frac{(\gamma z \pm \rho)^2}{w^2}\right).$$

Расчет спектра проводился в предположении, что поле за аксиконом описывается формулой

$$a(\rho, \varphi) = 2\pi \int_0^{\rho_0 - \rho_0} a(\rho_1, z) J_0\left(\frac{k_0 \rho \rho_1}{F}\right) \rho_1 d\rho_1 + \int_{\rho_0 - \rho_0}^{\rho_0 + \rho_0} a(\rho_1, z) D(\rho, \rho_1, \varphi) \rho_1 d\rho_1, \quad (2.2)$$

где

$$D(\rho, \rho_1, \varphi) = \int_{\varphi_0 - \Delta\varphi(\rho_1)}^{\varphi_0 + \Delta\varphi(\rho_1)} \exp\left(-\frac{ik_0 \rho \rho_1}{F} \cos(\varphi - \varphi_1)\right) d\varphi_1,$$

$$\Delta\varphi(\rho) = \arccos\left[\frac{\rho^2 + \rho_0^2 - r_0^2}{2\rho_0\rho}\right].$$

Формула (2.2) применима, когда $\rho_0 < r_0$. При $\rho_0 > r_0$ использовалась формула

$$a(\rho, \varphi) = \int_{\rho_0 - r_0}^{\rho_0 + r_0} a(\rho_1, z) D(\rho, \rho_1, \varphi) \rho_1 d\rho_1. \quad (2.3)$$

Результаты расчета двумерного распределения интенсивности показаны на рисунке 7. На рисунках 8 и 9 приведены одномерные графики, соответствующие максимальному значению интенсивности. Направление смещения круговой апертуры $\varphi_0 = 90$ град. Как видно, для приосевого расположения апертуры (рисунки 7, 8) с

увеличением ρ_0 имеет место, как и ранее, постепенная трансформация однородного кольцевого поля в две дуги. При внеосевом расположении апертуры (рисунки 7, 9) азимутальная неоднородность спектра ярко выражена. При этом действительно наблюдается асимметрия интенсивности двух дуг. Данная асимметрия, как видно, более существенна на периферии БСП (рисунок 9), чем в его центральной области (рисунок 8). Это в точности согласуется с изученной ранее структурой поля за аксиконом. А именно, вклад компоненты, содержащей БСП первого порядка возрастает при удалении от оси пучка.

Заключение

Таким образом, локальные пространственные спектры фрагментов бesselевых пучков, выделяемых радиально смещенными круговыми диафрагмами существенно отличаются от кольцевых. Данный вывод справедлив для случаев, когда исходный БСП формировался в схеме с круговой диафрагмой или аксиконом. Данное свойство локальных спектров необходимо принимать во внимание при интерпретации экспериментальных результатов, полученных с применением бesselевых пучков. Простейшим примером является задача профилометрии цилиндрических поверхностей коническими пучками [6], [7]. В случае, когда цилиндр смещен относительно оси пучка, то изменение локального углового спектра приведет к азимутальной модуляции интенсивности поля на его поверхности. При достаточно больших смещениях часть цилиндрической поверхности будет полностью неосвещенной. Второй пример связан с использованием БСП для локализации и манипуляции набором микрочастиц. Эффективность манипулирования набором частиц при этом может существенно зависеть от восстановления поля, экранированного частицами [8]. Из рассмотрения локальных спектров БСП следует, что условия восстановления поля за данной частицей в присутствии других частиц будут изменяться при изменении места расположения частицы относительно оси пучка.

Отметим также, что представляет интерес исследование локальных спектров не только единичных бesselевых пучков, но и их суперпозиций, включая БСП высших порядков [9], а также пучков бesselева типа, у которых угол конуса зависит от расстояния [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Durnin, J.* Exact solution for nondiffracting beams. I. The scalar theory / J. Durnin // *J. Opt. Soc. Am.* – 1987. – В 4. – P. 651.
2. *Bouchal, Z.* Bessel beams in the focal region / Z. Bouchal, J. Wagner, M. Olivík // *Opt. Eng.* – 1995. – Vol. 34. – P. 1680–1688.
3. *Chavez-Cerda, S.* Nondiffracting beams: travelling, standing, rotating and spiral waves / S. Chavez-Cerda, G.S. McDonald, G.H.C. New // *Opt. Commun.* – 1996. – № 123. – P. 225–233.
4. *Belyi, V.N.* Frequency conversion of Bessel light beams in nonlinear crystals / V.N. Belyi, N.S. Kazak, N.A. Khilo // *Quantum Electron.* – 2000. – № 30. – P. 753–766.
5. *Angular distribution of second harmonic radiation generated by Bessel beam* / R. Gadonas [et al.] // *Opt. Commun.* – 1999. – № 167. – P. 299–309.
6. *Grazing-incidence interferometry applied to the measurement of cylindrical surfaces* / T. Dresel [et al.] // *Opt. Eng.* – 1995. – № 34. – P. 3531–3535.
7. *Conical beam-based laser profilometer for testing roller bearings* / N. Khilo [et al.] // *Proc. SPIE.* – 2007. – № 6616. – P. 66162L–01 – 66162L–08.
8. *McGloin, D.* Bessel beams: diffraction in a new light / D. McGloin, K. Dholakia // *Contemp. Phys.* – 2005. – № 46. – P. 15–28.
9. *Generating superpositions of higher-order Bessel beams* / R. Vasilyeu [et al.] // *Opt. Express.* – 2009. – № 17. – P. 23389–23395.
10. *Bessel-like beams with z-dependent cone angles* / V. Belyi [et al.] // *Opt. Express.* – 2010. – № 18. – P. 1966–1973.

Поступила в редакцию 18.04.11.

УДК 535:621.373.826:539;537.528

ЛАЗЕРНО-ПЛАЗМЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ И МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА НАНОПОРОШКОВ СИЛИЦИДОВ ГАДОЛИНИЯ

В.С. Бураков, Н.В. Тарасенко, А.В. Буцень, М.И. Неделько, Е.А. Невар

Институт физики им. Б.И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск

LASER AND PLASMA METHODS FOR FABRICATION AND MAGNETIC PROPERTIES OF GADOLINIUM SILICIDE NANOPOWDERS

V.S. Burakov, N.V. Tarasenko, A.V. Butsen, M.I. Nedelko, A.A. Nevar

B.I. Stepanov Institute of Physics of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk

В статье исследуются возможности двух плазменных методов (лазерная абляция и электрический разряд в жидкости) для синтеза наночастиц силицида гадолиния. Анализируются состав, морфология и магнитные свойства частиц, полученных при различных экспериментальных условиях. Синтезированные частицы Gd – Si проявляют суперпарамагнитные свойства и могут быть использованы для разработки метода саморегулируемой магнитной гипертермии.

Ключевые слова: наночастицы, лазерная абляция в жидкости, электрический разряд в жидкости, лазерно-индуцированная модификация.

In this paper the capabilities of two plasma-assisted techniques (laser ablation and electrical discharges in liquids) for fabrication of gadolinium silicide nanoparticles have been investigated. The composition, morphology and magnetic properties of the particles formed under various experimental conditions have been analyzed. The synthesized Gd-Si particles exhibit the superparamagnetic behavior promising for application in the method of magnetic hyperthermia treatment.

Keywords: nanoparticles, laser ablation in liquid, electrical discharge in liquid, laser-induced modification.

Введение

В связи с перспективами практических применений всё большее внимание уделяется разработке методов синтеза наноразмерных структур и исследованию их физико-химических свойств. Среди новых технологий получения наночастиц большой интерес вызывают лазерно-плазменные методы, основанные на процессах лазерной абляции [1] и электрическом разряде в жидкостях [2], [3].

Лазерная абляция твёрдых тел является одним из наиболее интенсивно развивающихся методов получения наноразмерных частиц в связи с простотой реализации и отсутствием сопутствующих примесей, что отличает его, например, от химических методов. Метод может быть применен для синтеза самых различных материалов – как проводящих, так и непроводящих, полупроводников, а также тугоплавких материалов.

Второй способ, базирующийся на использовании дуговых и искровых разрядов в жидкостях, перспективен для получения наноразмерных частиц сложного состава [4]. Достоинствами электроразрядного метода синтеза наночастиц являются возможность регулирования параметров конечных продуктов посредством вариации режимов разряда, достаточно высокая производительность и несложный процесс подготовки исходных материалов. Дополнительные преимущества можно получить при использовании оптимальных режимов совместного воздействия

высокоэнергетических потоков лазерного излучения и импульсных электрических разрядов на распыляемый материал, чем обеспечивается как эффективное инициирование разряда, так и модификация формируемых частиц, в частности, сокращение их размеров.

Соединения на основе гадолиния находят применение как контрастные вещества в магниторезонансной томографии, терапевтические средства в гипертермии новообразований и для доставки к ним лекарственных средств. В гадолинии и его соединениях существенно проявляется магнитокалорический эффект, причем температура магнитного фазового перехода по величине близка к температуре человеческого тела [5]. Задача создания магнитных наночастиц с температурой Кюри близкой к температуре человеческого тела, способных нагреваться до (+43 ÷ +45) °С, чрезвычайно актуальна для разработки метода контролируемой локальной гипертермии. Препаратам на основе таких материалов характерна возможность «саморегулирования» температуры, так как при температуре выше температуры Кюри магнитная наночастица становится парамагнитной и теряет способность разогреваться внешним переменным электромагнитным полем.

Таким образом, представляет интерес исследование возможностей использования методов лазерной абляции и электрического разряда в жидкостях для синтеза гадолинийсодержащих

наночастиц, определение состава и размеров образуемых частиц в зависимости от условий синтеза.

1 Методика эксперимента

В наших экспериментах двухкомпонентные наноразмерные частицы силицида гадолиния Gd – Si синтезированы методом лазерной абляции комбинированной мишени (рисунок 1), составленной из двух пластинок соответствующих материалов, а также в электрическом разряде между электродами из гадолиния и кремния.

Для абляции использовалось излучение лазера на алюмоиттриевом гранате (длина волны 1064 нм), генерирующего в двухимпульсном режиме. Лазерный пучок фокусировался на границу раздела пластинок кремния и гадолиния в пятно диаметром около 0,5 мм. Плотность энергии лазерного излучения на поверхности мишени составляла 15 Дж/см².

Для реализации синтеза в электрическом разряде использовалась установка, состоящая из стеклянного сосуда цилиндрической формы объёмом 200 мл, закрытого тефлоновой пробкой с двумя отверстиями для ввода электродов, которые погружались в этанол (рисунок 1). Для создания разряда использовался генератор, работающий в искровом режиме (ток разряда 60 А, длительность импульса 30 мкс, частота 100 Гц).

Так как свойства наночастиц зависят от их размера и формы, то для достижения монодисперсности продуктов синтеза актуален поиск способов модификации морфологии частиц, которая возможна, в частности, в результате дополнительного воздействия на частицы лазерного излучения. В настоящей работе с этой целью использовали излучение второй гармоники лазера на алюмоиттриевом гранате со следующими параметрами: длина волны 532 нм, плотность мощности 350 Дж/см², время воздействия 5 мин. Лазерно-индуцированная модификация проводилась непосредственно после окончания процесса синтеза.

Синтезированные образцы получали в виде коллоидных растворов. Форма и размеры наночастиц оценивались по результатам просвечивающей электронной микроскопии. Микрофотографии наночастиц получены на микроскопе LEO 906E (LEO, Англия, Германия) при подаче ускоряющего электроны напряжения 120 кВ.

Изучение кристаллической структуры порошков выполнено с использованием K_{α} – излучения меди на модифицированном рентгеновском дифрактометре ДРОН-2 – в режиме съёмки рентгенограмм по точкам при $T \approx 300$ К. При получении обзорных рентгенограмм образцов использован следующий режим съёмки: время набора информации в точке $\Delta t = 3$ с, шаг сканирования по углу $\Delta 2\theta = 0,03^{\circ}$. Для получения более четких профилей рефлексов в целях увеличения точности определения их угловых положений при определении параметров элементарной ячейки применялся иной режим съёмки: $\Delta t = 5$ с, $\Delta 2\theta = 0,01^{\circ}$. Обработка результатов рентгеновских исследований проведена на основе полнопрофильного анализа всех рефлексов, проявившихся на рентгенограмме (PhullProf анализ). Этот вид анализа был создан для расшифровки сложных нейтронограмм, регистрируемых при дифракции тепловых нейтронов на многокомпонентных соединениях [6].

Измерения удельной намагничённости и магнитной восприимчивости проведены в магнитном поле напряжённостью $H = 8,6$ кЭ (магнитная индукция $B = 0,86$ Тл). Для магнитных измерений исследуемые порошки массой $m = 0,0079$ г помещались в кварцевую ампулу, откаченную до $p \approx (10^{-2} \div 10^{-3})$ Па. Температурные зависимости удельной намагничённости $\sigma = f(T)$ (единицы измерения $A \cdot m^2 \cdot kg^{-1} = G \cdot cm^3 \cdot g^{-1}$) и обратной величины удельной магнитной восприимчивости $10^2/\chi$ (kg/m^3) изучены пондеромоторным методом [7], [8].



Рисунок 1 – Схема экспериментов для синтеза наночастиц методом лазерной абляции и в электрическом разряде в жидкостях

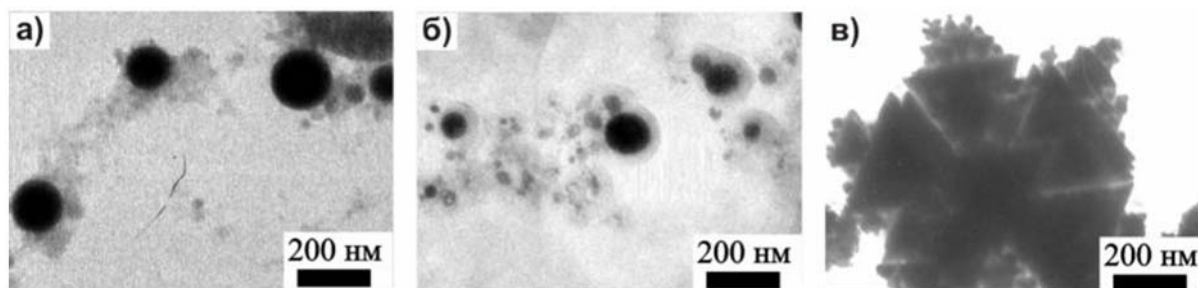


Рисунок 2 – ПЭМ-изображения гадолинийсодержащих наночастиц, полученных методом лазерной абляции в этаноле до (а) и после (б, в) дополнительного облучения

Чувствительность установки при измерении величины магнитной восприимчивости $\chi = I/H$ составляла $10^{-8} \div 10^{-11}$, при измерении удельной намагниченности – $0,005 \text{ Гс} \cdot \text{см}^3/\text{г}$. Термостат установки обеспечивал изучение зависимости $\chi = f(T)$ и $\sigma = f(T)$ в диапазоне температур (77–1400) К в условиях непрерывного режима без переустановки образца [8]. Полевые зависимости удельной намагниченности изучены в магнитных полях индукции $\pm 10 \text{ Тл}$ вибрационным методом на установке *Cryogenic* (Англия) при температурах $\sim 5 \text{ К}$ и 300 К .

2 Результаты и их обсуждение

Типичные изображения гадолинийсодержащих частиц, полученные с помощью просвечивающего электронного микроскопа (ПЭМ-изображения), представлены на рисунке 2. Наряду с мелкими (10–50 нм) частицами наблюдаются довольно крупные сферические частицы с размером 100–150 нм. Дополнительное воздействие на коллоидный раствор излучения второй гармоники неодимового лазера сопровождалось уменьшением размера частиц. Наблюдалось также образование оболочечных частиц (рисунок 2 б) и формирование агрегатов (рисунок 2 в).

При расшифровке рентгенограмм порошков, полученных в результате лазерной абляции комбинированной Gd-Si мишени в этаноле, оказалось возможным идентифицировать рефлексы (011), (111), (210) и (020), соответствующие соединению GdSi стехиометрического состава, которое относится к пространственной группе S.G.: *Pnma* (62) орторомбической сингонии. Так как в диапазоне углов $15^\circ \leq 2\theta < 40^\circ$ на рентгенограмме наблюдается «гало», можно предположить, что в исследуемом нанопорошке присутствуют в небольшом количестве соединения Gd-Si иного состава. На рентгенограмме порошка, полученного при лазерной абляции комбинированной Gd-Si мишени и дополнительно подвергнутого импульсному лазерному облучению в течение 10 мин. (длина волны 532 нм, энергия и длительность импульса 100 мДж и 15 нс соответственно), кроме линий (011), (111), (210), (020), (401), (410) и (221) фазы GdSi, присутствует

рефлекс (211) соединения Gd_5Si_4 . Гораздо более четко рефлексы силицида гадолиния Gd_5Si_4 проявлялись после отжига исследуемого порошка при температуре $\sim 1450 \text{ К}$. Для отжига использовалась электрическая печь с вертикальным расположением кварцевой ампулы с исследуемым порошком в ней. После отжига кварцевая ампула с содержимым подвергалась закалке в холодной воде.

Близкий по составу порошок образовывался и в искровом разряде между гадолиниевым и кремниевым электродами в этаноле. Дифрактограмма полученного таким способом порошка приведена на рисунке 3. Большинство рефлексов, локализованных на рентгенограмме в диапазоне углов $15^\circ \leq 2\theta < 90^\circ$, относится к GdSi орторомбической структуры (пространственная группа *Pnma*). На рисунке 3 они отмечены стрелками и подписаны. В диапазоне относительно малых углов $12^\circ \leq 2\theta < 40^\circ$ наблюдается серия рефлексов небольшой интенсивности, которые с высокой вероятностью ($\sim 90\%$) идентифицированы как соответствующие отражению от кристаллографических плоскостей (011), (101), (111), (121), (002), (131), (022), (142) фазы Gd_5Si_4 .

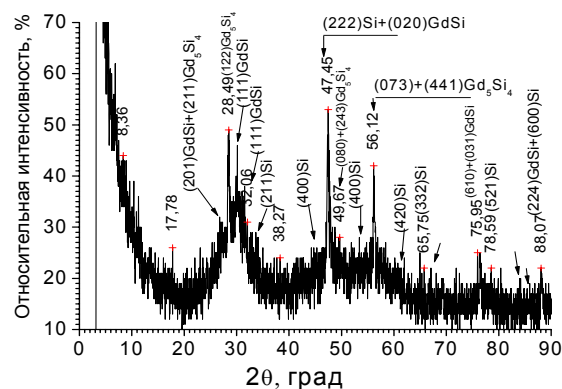


Рисунок 3 – Дифрактограмма порошка, полученного при искровом разряде между гадолиниевым и кремниевым электродами в этаноле

На рисунке 4 приведена типичная кривая намагничивания для образца, полученного в условиях электрического разряда между гадолиниевым и кремниевым электродами в этаноле.

Как видно на рисунке, синтезированные частицы проявляют суперпарамагнитные свойства. В зависимости удельной намагниченности от индукции магнитного поля, зарегистрированной при $T = 6$ К, есть тенденция к насыщению, петли гистерезиса нет. Причиной этого может быть то, что ферромагнитный материал состоит из частиц малых по размеру, сравнимому или меньшему, чем размеры доменов. При $T = 300$ К полевая зависимость типична для парамагнетика – это линейная зависимость удельной намагниченности от индукции магнитного поля без проявления гистерезиса.

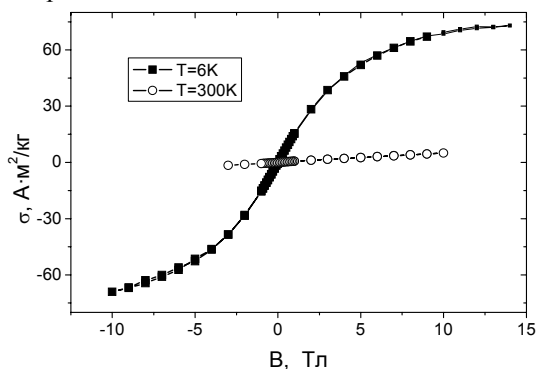


Рисунок 4 – Кривая намагничивания для образца, полученного в условиях электрического разряда между гадолиниевым и кремниевым электродами в этаноле

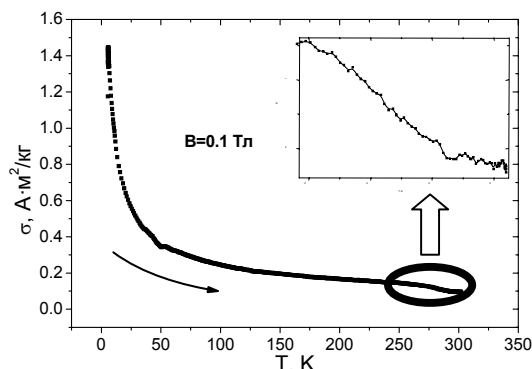


Рисунок 5 – Температурная зависимость удельной намагниченности для синтезированного в разряде порошка

На рисунке 5 построена температурная зависимость удельной намагниченности для указанного образца при вариации его температуры в пределах от 6 до 300 К. Температурная зависимость исследовалась в режиме отогрева образца. Ход кривой характерен суперпарамагнетикам – нет выраженного перехода в магнитоупорядоченное состояние. Температура Кюри была оценена в результате линейной экстраполяции спадающего участка температурной зависимости $\sigma=f(T)$ до её пересечения с осью температур. Температура Кюри для синтезированного в электрическом разряде порошка оказалась равной 297 К.

Заключение

На основе результатов выполненных исследований разработаны методы синтеза наночастиц силицидов гадолиния, перспективных для медицинских применений. Методы основаны на использовании лазерной абляции комбинированной Gd – Si мишени и на воздействии на мишень электрического разряда в этаноле с последующей лазерно-индуцированной модификацией продуктов. Изучены морфология, компонентный и фазовый состав синтезированных наночастиц.

В результате исследования магнитных свойств частиц выявлено, что их магнитный момент достаточно высок и что зависимость их удельной намагниченности от индукции внешнего магнитного поля и температуры соответствует суперпарамагнитным веществам.

Авторы выражают благодарность сотрудникам НПЦ НАН Беларуси по материаловедению К.И. Янушкевичу и Л.С. Лабановскому за помощь в проведении и интерпретации магнитных измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарасенко, Н.В. Лазерный синтез и модификация композитных наночастиц в жидкостях / Н.В. Тарасенко, А.В. Буцень // Квантовая электроника. – 2010. – Т. 40, № 11. – С. 986–1003.
2. Graham, W.G. Plasmas in liquids and some of their applications in nanoscience / W.G. Graham, K.R. Stalder // Phys. D: Appl. Phys. – 2011. – Vol. 44. – P. 174037–17445.
3. Синтез наночастиц методом импульсного электрического разряда в жидкости / В.С. Бураков [и др.] // Журн. прикл. спектроскопии. – 2008. – Т. 75, № 1. – С. 111–120.
4. Synthesis of tungsten carbide nanopowders via submerged discharge method / V.S. Burakov [et al.] // J. Nanopart. Res. – 2008. – Vol. 10, № 5. – P. 881–886.
5. Direct Measurement of the «Giant» Adiabatic Temperature Change in $Gd_5Si_2Ge_2$ / A. Giguère [et al.]. – Phys. Rev. Lett. – 1999. – Vol. 83. – P. 2262–2265.
6. Rodriguez-Carvajal, J. Fullprof: A Program for Rietveld Refinement and Pattern Matching Analysis / J. Rodriguez-Carvajal // Abstracts of the satellite Meeting on Powder Diffraction of the XV Congress of the IUCr, France, Toulouse. – 1990. – P.127.
7. Чечерников, В.И. Магнитные измерения / В.И. Чечерников. – М. : Изд-во МГУ, 1969. – 387с.
8. Янушкевич, К.И. Методика выполнения измерений намагниченности и магнитной восприимчивости. Система обеспечения единства измерений Республики Беларусь МВИ: МН 3128-2009 / К.И. Янушкевич. – Минск : БелГИМ, 2009. – 19с.

Поступила в редакцию 09.06.11.

УДК 533.9.082, 533.922, 533.924, 621.373.8

ЛАЗЕРНЫЙ ПОСЛОЙНЫЙ КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ С СУБМИКРОНЫМ РАЗРЕШЕНИЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОКРЫТИЙ ПРОМЫШЛЕННЫХ ИЗДЕЛИЙ

Е.С. Воропай, К.Ф. Ермалицкая, А.П. Зажогин

Белорусский государственный университет, Минск

LASER LAYER WISE QUANTITATIVE ANALYSIS WITH SUBMICRON RESOLUTION OF FUNCTIONAL COATINGS OF INDUSTRIAL PRODUCTS

E.S. Voropay, K.F. Ermalitskaia, A.P. Zajogin

Belarusian State University, Minsk

Исследованы возможности двухимпульсной лазерной атомно-эмиссионной спектроскопии для количественного анализа с субмикронным разрешением латунного, бронзового и Ti-Zr-покрытий промышленных изделий. Предложен метод управления плотностью потока лазерного излучения на поверхности, позволяющий изменять толщину испаряемого слоя вещества в диапазоне от 0,1 до 5 мкм. Выявлено, что нагрев образца в процессе нанесения покрытия обуславливает неравномерное распределение компонентов покрытия вследствие явления термодиффузии.

Ключевые слова: лазерная абляция, двоянные лазерные импульсы, лазерная плазма, лазерная атомно-эмиссионная спектроскопия, послойный количественный анализ, функциональные покрытия.

The possibilities of the use of double-pulse laser atomic-emission spectroscopy for quantitative analysis with submicron resolution of brass, bronze and Ti-Zr-coatings have been examined. A new method to control the radiation flux density on the sample surface has been proposed. This method allows to change the thickness of evaporated substance layer from 0,1 up to 5 micrometer. It has been found that the heating of the sample during deposition of the coating leads to a heterogeneous distribution of elements due to the thermo diffusion.

Keywords: laser ablation, double laser pulses, laser plasma, laser atomic emission spectroscopy, layer wise quantitative analysis, functional coating.

Введение

Нанесение многокомпонентных функциональных покрытий является одним из наиболее распространенных способов улучшения поверхностных характеристик металлических изделий таких, как твердость, износостойкость, адгезия к резине и полимерным материалам и т. п. Для исследования состава и структуры тонких слоев обычно используются следующие методы: рентгеноструктурный анализ, Оже-электронная микроскопия, резерфордское обратное рассеяние. Их реализации сопутствуют трудоёмкие операции по предварительной химической и механической подготовке поверхности, что приводит к значительному увеличению времени определения концентрации элементов. В силу особенностей взаимодействия мощного лазерного излучения с металлами [1]–[3], при анализе методом лазерной атомно-эмиссионной спектроскопии, удаётся существенно сократить его длительность. Однако в работах данного направления преимущественно исследуются однокомпонентные покрытия – объектами изучения служат, например, оцинкованное железо [4]; медь, осаждённая на стальные трубы бойлера [5]. При количественном анализе многокомпонентных

покрытий необходимо принимать во внимание матричные эффекты, селективность испарения, влияние примесей и легирующих элементов на аналитический сигнал основных компонентов образца [6].

Целью данной работы было исследование возможностей двухимпульсной лазерной атомно-эмиссионной спектроскопии для послойного количественного анализа многокомпонентных функциональных покрытий, полученных различными способами. Важной задачей, которая подлежала решению, была разработка метода изменения толщины испаряемого слоя, пригодного для исследования тонких слоёв металла с субмикронным разрешением.

1 Эксперимент

Исследования проводились на лазерном спектрометре LSS-1 производства совместного белорусско-японского предприятия «LOTIS-П» (г. Минск). В качестве источника испарения вещества образца и возбуждения спектров атомов использовалось излучение двухимпульсного Nd:YAG-лазера с активной модуляцией добротности. Основные параметры лазерного излучения: длина волны – 1064 нм, частота следования

импульсов – 10 Гц, длительность на уровне $\frac{1}{2}$ от максимальной интенсивности – 15 нс, энергия $E_{имп} = 10 \div 60$ мДж, временной интервал между двоекными лазерными импульсами – $\Delta t = (0 \div 100)$ мкс (шаг – 1 мкс). При фиксированных значениях энергии накачки и Δt энергия обоих импульсов одинакова [11]. Отсутствие межимпульсного интервала ($\Delta t = 0$) соответствует одновременному воздействию на поверхность двух лазерных импульсов; при этом их можно рассматривать как одиночный импульс, мощность которого равна сумме мощностей двоекных импульсов.

В результате проведённых исследований показано, что переход от одноимпульсного к двухимпульсному возбуждению атомных спектров при неизменной суммарной энергии и мощности излучения обуславливает многократное увеличение интенсивности аналитического сигнала для всех элементов – как металлов и неметаллов [1], [6]. Интенсивность спектральных линий элементов возрастает при этом в $(2 \div 10)$ раз, в зависимости от межимпульсного интервала, энергии импульсов и рассматриваемого элемента. Это приводит к существенному увеличению чувствительности анализа и снижению погрешности определения концентрации элементов.

Можно выделить три основные причины увеличения аналитического сигнала при переходе от одиночных к двоекным импульсам [1]–[3]:

- дополнительное возбуждение вторым импульсом плазмы, образованной первым импульсом;
- испарение вторым импульсом вещества с предварительно прогретой поверхности;
- передний фронт плазмы, образованной в результате действия первого импульса, распространяется с высокой скоростью, выталкивая из приповерхностной области окружающую атмосферу; в результате чего испарение вторым импульсом происходит в зону пониженного давления и повышенной температуры.

Передний фронт плазмы, образованной первым импульсом, как и любое нагретое вещество, испускает сплошной спектр; для того чтобы избежать его влияния на интенсивность линий исследуемого вещества, регистрация аналитического сигнала осуществляется синхронно с приходом второго импульса. Свечение плазмы, образованной вторым импульсом, гораздо менее интенсивное из-за сниженной концентрации частиц окружающей атмосферы в приповерхностной области. Все эксперименты проводились в воздухе при нормальном атмосферном давлении; в процессе лазерного воздействия образец оставался неподвижен.

Объектами исследования являлись функциональные покрытия трёх различных видов:

- покрытие из титана и циркония, которое было сформировано на шлифованной

низкоуглеродистой стали Ст3 методом конденсации с последующей ионной бомбардировкой [7]. Исходная стальная поверхность подвергалась воздействию совмещённых плазменных потоков атомов титана и циркония, формируемых в вакуумно-дуговых разрядах; при этом сила тока дуги составляла 100 А, а отрицательное опорное напряжение – 120 В. Полученное покрытие толщиной несколько микрометров обрабатывалось потоками азотной плазмы в магнитно-плазменном компрессоре. Обработка проводилась с использованием различного числа плазменных импульсов $(1 \div 5)$ длительностью ~ 100 мкс. Данные процедуры выполнялись в режиме «остаточной атмосферы», при котором в предварительно откаченную камеру вводилось плазмообразующее вещество – азот до давления 400 Па. Плотность мощности потока изменялась в диапазоне $(1,5 \div 3,5) \cdot 10^5$ Вт/см², в результате чего формировалась многослойная структура толщиной $(10 \div 15)$ мкм;

– получаемое гальвано-термическим способом латунное (медно-цинковое) покрытие стальной проволоки производства РУП «Белорусский металлургический завод» (БМЗ, г. Жлобин), применяемой при изготовлении металлокорда для автомобильных шин. Первоначально на поверхность стальной заготовки электрохимическим способом осаждается медь, имеющая сравнительно низкий коэффициент взаимной диффузии с железом, а затем цинк. Образец с нанесённым покрытием подвергается электроконтактному нагреву для образования латуни вследствие взаимной диффузии Cu и Zn;

– бронзовое покрытие стальной бортовой проволоки производства РУП БМЗ (г. Жлобин) также применяемой при изготовлении автомобильных шин. Данное покрытие наносится химическим способом (без пропускания электрического тока): посредством одновременного осаждения меди и олова из одной ванны. Для придания проволоке оптимальных свойств перед осаждением Cu и Sn осуществляется нагрев заготовки в расплаве свинца.

При проведении исследований использовались образцы с различными значениями толщины функционального покрытия h : Ti – Zr – 1,0; 1,25; 2,0; 12,0 и 16,0 мкм, латунь – 1,33; 1,45; 1,55, 1,78 и 2,37 мкм, бронза – 1,66 и 1,77 мкм.

Источник испарения вещества и возбуждения спектров при прямом послойном анализе микронных слоёв многокомпонентных сплавов должен удовлетворять ряду требований: минимальная постоянная толщина испаряемого слоя; равномерное испарение со всей площади эрозионного пятна; интенсивность аналитических спектральных линий всех элементов должна в несколько раз превышать интенсивность фона. Для контроля деструкции поверхности образцов под влиянием излучения двоекных лазерных

импульсов использовался микроинтерферометр Линника МИИ-4.

2 Результаты и их обсуждение

При оценке степени деструкции поверхности показано, что толщина слоя h , испаряемого двоянными лазерными импульсами, в зависимости от энергии импульсов составляет порядка (3–5) мкм. Это означает, что двоянные лазерные импульсы напрямую не могут быть использованы для анализа функциональных покрытий с субмикронным разрешением. Для управления толщиной слоя h посредством изменения плотности потока излучения на поверхности были разработаны два способа [6], [7]:

- основанный на использовании оптических светофильтров с различными коэффициентами поглощения лазерного излучения;

- метод расфокусировки лазерного луча – фокусировки на некотором расстоянии Δf над поверхностью.

При использовании первого способа по достижении субмикронного разрешения интенсивность аналитических линий всех компонентов покрытий была на уровне фона. При реализации второго способа одновременно с уменьшением плотности потока излучения происходит увеличение эффективной площади эрозионного пятна, с которого происходит испарение; при этом возрастает и количество вещества, поступающего в плазму. В результате анализа спектральных данных, а также измерения степени деструкции поверхности образцов на микроинтерферометре МИИ-4 показано, что расфокусированное излучение двоянных лазерных импульсов удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к источнику возбуждения спектров при прямом послойном анализе тонких слоёв металлов. Увеличенные в 150 раз фотографии поверхности после воздействия на неё серии из 10 двоянных лазерных импульсов с плотностью потока излучения 10^{10} Вт/см² ($h = 5$ мкм) и $3 \cdot 10^7$ Вт/см² ($h = 0,1$ мкм) приведены на рисунке 1.

Значения плотности потока излучения q и толщины слоя h , испаряемого двоянными лазерными импульсами при энергии импульсов 100 мДж и различных расстояниях Δf , приведены в таблице 1.

Значительное уменьшение интенсивности спектра при снижении плотности мощности обуславливает необходимость использования в качестве аналитических самых сильных линий всех

рассматриваемых элементов (медь – $\lambda_{Cu} = 324,754$ нм, цинк – $\lambda_{Zn} = 334,502$ нм, олово – $\lambda_{Sn} = 380,100$ нм) [6].

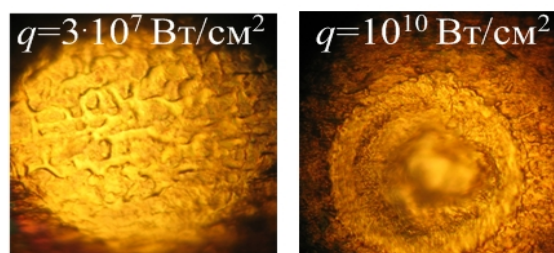


Рисунок 1 – Общий вид кратеров на поверхности образца после воздействия

10 двоянных лазерных импульсов с плотностями потока $3 \cdot 10^7$ и 10^{10} Вт/см²

При создании методики количественного анализа функциональных Ti-Zr-покрытий сталей использовались наиболее интенсивные линии в диапазоне 200 ÷ 600 нм: линии титана $\lambda_{Ti} = 390,479$ нм; циркония $\lambda_{Zr} = 360,119$ нм и нерезонансная линия железа $\lambda_{Fe} = 384,105$ нм [7]. Зависимость интенсивности данных спектральных линий от глубины слоя h функционального Ti-Zr-покрытия до и после обработки поверхности потоками азотной плазмы представлена на рисунке 2.

При проведении послойного качественного анализа защитного Ti-Zr-покрытия методом двухимпульсной лазерной атомно-эмиссионной спектроскопии было обнаружено, что при конденсации с ионной бомбардировкой удаётся нанести на шлифованную стальную подложку практически однородный по глубине слой из титана и циркония [7]. Наличие резкого уменьшения интенсивности спектральных линий титана и циркония при одновременном росте интенсивности линии железа – подтверждение того, что расфокусированным излучением двоянных лазерных импульсов вещество с поверхности образца испаряется равномерно. При этом образуется кратер практически цилиндрической формы, и вкладом в аналитический сигнал свечения атомов, поступающих в плазму при абляции со стенок кратера, можно пренебречь. Термодиффузия элементов при обработке поверхности потоками азотной плазмы обуславливает формирование трехкомпонентного покрытия, содержание элементов в котором изменяется с глубиной.

Таблица 1 – Плотность потока излучения q и толщина испаряемого двоянными лазерными импульсами слоя h при энергии импульсов 100 мДж и различных расстояниях Δf

Δf , мм	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$q \cdot 10^7$, Вт/см ²	1720	480	220	120	76	52	39	30	23	19	1720
h , мкм	5,0	3	1,5	1	0,5	0,35	0,2	0,15	0,12	0,105	0,10

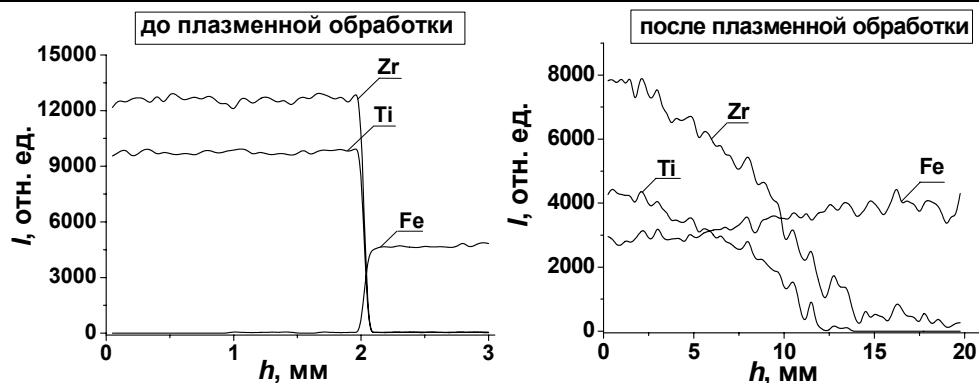


Рисунок 2 – Зависимость интенсивности спектральных линий $\lambda_{Ti}=390,479$ нм; $\lambda_{Zr}=360,119$ нм и $\lambda_{Fe}=384,105$ нм от глубины покрытия до и после обработки потоками азотной плазмы

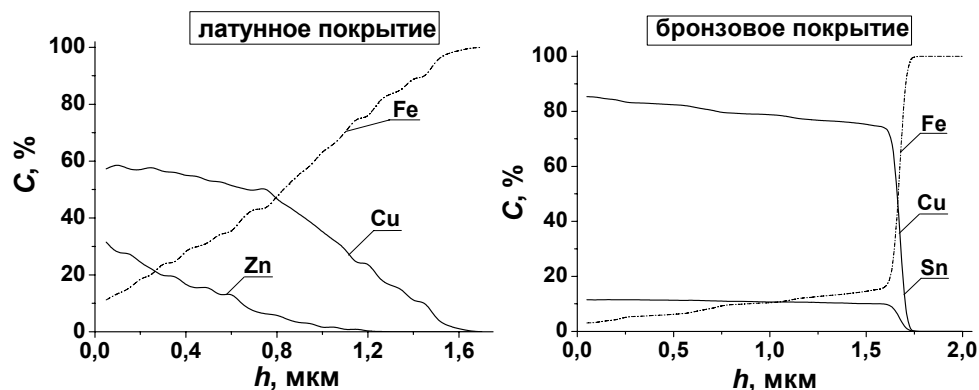


Рисунок 3 – Распределение концентрации Cu, Zn и Sn по глубине в латунном ($h = 1,55$ мкм) и бронзовом ($h = 1,66$ мкм) покрытии стальной проволоки

В результате проведенного послойного количественного анализа показано, что железо присутствует в латунном и бронзовом покрытии стальной проволоки; при этом концентрация железа увеличивается с глубиной (рисунок 3) [6].

В обоих покрытиях концентрация железа растет с увеличением h , что связано с наличием неровностей («шипов») на поверхности исходной стальной проволоки, размер которых при производстве металлокорда уменьшается в процессе волочения. Различно и распределение элементов по глубине в латунном и бронзовом покрытиях, нанесенных разными способами на стальную подложку [6]. Действительно, при нагреве проволоки с латунным покрытием происходит взаимная диффузия элементов, как и при обработке вышерассмотренного Ti-Zr-покрытия потоками азотной плазмы. Наблюдаемое распределение концентрации элементов в этих условиях объясняется эффектами Киркендалла и Френкеля. При изотермической диффузии в отсутствие внешних сил нарушается механическое равновесие и появляется конвективный поток, одинаковый для всех компонентов. Так как коэффициенты диффузии D частиц цинка и меди сильно различаются между собой ($D_{Zn} \gg D_{Cu}$), то фронт гальвано-электрической реакции движется в сторону Cu (эффект Киркендалла), и в покрытии образуются поры вследствие слияния вакансий

(эффект Френкеля). Атомы железа занимают образовавшиеся в латуни поры, в результате чего в покрытии резко возрастает содержание Fe.

Заключение

На основании представленных результатов можно сделать вывод, что разработанные методики послойного качественного и количественного анализа многокомпонентных покрытий металлов пригодны для определения распределения элементов в тонких слоях металлических сплавов, толщиной от 1 до 100 мкм, нанесенных на подложки различными способами. Снижение плотности потока при расфокусировке излучения сдвоенных лазерных импульсов на поверхности, с одной стороны, является причиной уменьшения интенсивности вследствие самопоглощения в абляционной плазме, а с другой стороны, приводит к селективности испарения, вследствие которой в эрозионный факел в первую очередь поступают легкоплавкие элементы. В результате изменяется состав и теплофизические свойства поверхностного слоя покрытия в зоне лазерного пятна. Таким образом, селективность испарения проявляется во влиянии более легкоплавкого элемента на поступление в абляционную плазму остальных компонентов, при этом для определения их концентрации градуировочные графики нужно строить в относительных координатах.

В результате послойного анализа состава Ti-Zr, латунных и бронзовых покрытий показано, что атомы подложки проникают в самые верхние слои покрытия и четкая граница между покрытием и основой исчезает, если в процессе нанесения покрытия имела место термодиффузия – при нагревании или обработке потоками азотной плазмы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воропай, Е.С. Атомно-эмиссионный многоканальный спектральный анализ: научное и практическое применение / Е.С. Воропай, К.Ф. Ермалицкая, А.П. Зажогин // Вестн. Бел. гос. ун-та. Серия. 1. – 2009. – № 1. – С. 14–20.
2. Cremers, D.A. Handbook of Laser-Induced Breakdown Spectroscopy / D.A. Cremers, L.J. Radziemski. – New York : John Wiley and Sons, 2006. – 264 p.
3. Double pulse laser ablation and plasma: Laser induced breakdown spectroscopy signal

enhancement / V.I. Babushok [et al.] // Spectrochim. Acta B. – 2006. – Vol. 61, № 9. – P. 999–1014.

4. Laser-induced breakdown spectroscopy as a diagnostic tool for thin films elemental composition / L. Caneve [et al.] // Spectrochim. Acta B. – 2005. – Vol. 60, № 7–8. – P. 1098–1102.

5. Laser-induced plasma spectrometry: truly a surface analytical tool / J.M. Vadillo [et al.] // Spectrochim. Acta B. – 2004. – Vol. 59, № 2. – P. 147–161.

6. Ермалицкая, К.Ф. Двухимпульсная лазерная атомно-эмиссионная спектрометрия бронзовых сплавов и покрытий / К.Ф. Ермалицкая, Е.С. Воропай, А.П. Зажогин // ЖПС. – 2010. – Т. 77, № 2. – С. 165–172.

7. Двухимпульсная лазерная атомно-эмиссионная спектроскопия стали, легированной титаном и цирконием / К.Ф. Ермалицкая [и др.] // Вестн. Бел. гос. ун-та. Серия 1. – 2010. – № 3. – С. 3–7.

Поступила в редакцию 30.05.11.

УДК 621.21.55

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПРИПОВЕРХНОСТНОМ СЛОЕ, ПРИ ФОРМИРОВАНИИ МИКРО И НАНОСТРУКТУР ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

А.П. Достанко, Н.Н. Гринчик, И.Н. Спресов

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

SIMULATION OF PHYSICAL PROCESSES IN THE SURFACE LAYER, THE FORMATION OF MICRO AND NANOSTRUCTURES BY ELECTRODYNAMIC INFLUENCES

A.P. Dostanko, N.N. Grinchik, I.N. Spresov

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

Предложена модель процесса формирования микро- и наноструктур. Описаны и обоснованы физико-технологические процессы при воздействии электромагнитных сил и их применение в различных областях современной науки и техники. На основании математической модели исследованы различные формы и параметры материалов в процессе воздействия.

Ключевые слова: формирование тонкопленочных структур, электромагнитное воздействие плазмы.

Structures formation's process model is proposed. Physicotechnological processes at influence of electromagnetic forces and their applications in various areas of modern science and technics are described and proved. Various materials forms and parameters are investigated on the basis of mathematical model.

Keywords: formation of thin-film structures, electromagnetic effects of the plasma formation of thin-film structures, electromagnetic effects of plasma.

Введение

Одной из важнейших задач при производстве различных изделий микроэлектроники, оптики и др. является проблема создания равномерных по толщине покрытий. Для плоских поверхностей эта задача успешно решается путем оптимизации позиционирования плоскости нанесения относительно источника наносимого материала, применением внутрикамерных систем перемещения, сложногогеометрических масок, созданием специальных диаграмм направленности молекулярного потока [1]. В данной работе мы будем рассматривать подход распределения потока частиц в виде ионной плазмы и физико-технологических процессов, проходящих внутри ее.

Процессы распространения ионных потоков внутри плазмы подчиняются обобщенному закону Ома, заключающемуся в том, что линейная зависимость для плазмы между плотностью тока j и напряженностью эффективного электрического поля $E_{эфф}$, включающего объёмные силы неэлектрического происхождения (т. н. сторонние силы), вызывающие ток. Происхождение и влияние этих сил описывается эффектом Холла, заключающемся в возникновении в плазме с током плотностью j , помещенного в магнитное поле H , электромагнитного поля, перпендикулярного j и H . Напряженность электромагнитного поля:

$$E_n = RHj \sin \alpha, \quad (0.1)$$

где α – угол между векторами H и j ($\alpha < 180^\circ$). Если H перпендикулярно j , то напряженность поля Холла максимальна: $E = RHj$. Коэффициент R называют постоянной Холла (коэффициент Холла). Он является основной количественной характеристикой эффекта Холла. Благодаря наличию этого эффекта в процессе распределения потока частиц в виде ионной плазмы существует воздействие поперечного электромагнитного поля, влияние которого мы не можем игнорировать, ввиду того, что, например, в термоядерных системах $T_e \approx 10 \text{ кэВ}$, термическая разность потенциалов может достигать десятков кВ, в то же время омический член может быть очень малым.

Плазма характеризуется многообразием электромагнитных явлений. Это особенно характерно для плазмы, помещенной во внешнее магнитное поле. Циклотронное движение заряженных частиц вокруг силовых линий магнитного поля приводит к анизотропии среды.

Еще одной характерной особенностью плазмы является ее макроскопическая нейтральность, поддерживаемая вследствие взаимной компенсации пространственного заряда положительных ионов и электронов. Однако такая компенсация имеет место лишь в среднем – в достаточно больших объемах и за достаточно большие

интервалы времени. Поэтому говорят, что плазма – квазинейтральная среда. Размеры областей и промежутки времени, в пределах которых может нарушаться компенсация объемного заряда, называют пространственным и временным масштабами разделения зарядов.

Двойной электрический слой [2] – тонкий слой, сформированный двумя пространственно разделёнными слоями электрических зарядов разного знака. Двойной электрический слой может образовываться на границе двух фаз, например, твёрдого электрода и газа в газовом разряде, твёрдого электрода и жидкости в электролите, в плазме твёрдых тел, а также внутри одной фазы, например, в газообразной плазме. Пространственное разделение зарядов в двойном электрическом слое сопровождается появлением электрической разности потенциалов $\Delta\varphi$, которая оказывает существенное влияние на электрокинетические явления, на скорость приэлектродных и электродных процессов, адсорбцию и т. п.

При исследовании электромагнитных волн в плазме, природа которых объясняется эффектом Холла, при $|\omega| < \omega_p$, волны с такими низкими частотами не распространяются в плазме. Вместо этого наблюдается отражение с глубиной проникновения:

$$d \approx \left| \frac{1}{k} \right| = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}} \approx \frac{c}{\omega_p}. \quad (0.2)$$

Электромагнитное поле в плазме оказывается не малым лишь в пределах весьма тонкого слоя, толщина которого определяется формулой (0.2).

Однако такое описание не является достаточно полным. В самом деле, тот факт, что область существования электромагнитного поля в плазме оказывается ограниченной тонким поверхностным слоем, означает, что характерный пространственный масштаб изменения поля в плазме по порядку величины не превышает размеров слоя. Тогда в поверхностном слое могут реализоваться такие условия, что

$$\left| \frac{\omega}{k} \right| \leq \sqrt{\frac{T}{m}}.$$

В этом случае поперечная проводимость плазмы играет более существенную роль, чем действительная часть диэлектрической проницаемости, и глубина проникновения определяется в соответствии с теорией обычного скин-эффекта, проводимостью среды. Но в отличие от обычного скин-эффекта эффективная проводимость в рассматриваемом случае испытывает сильное влияние пространственной дисперсии и, в частности, критически зависит от самой глубины проникновения. Таким образом, рассматриваемый эффект – поперечный аналог затухания Ландау. По этой причине он и получил название *аномального скин-эффекта*.

Мерой аномального скин-эффекта является поверхностный импеданс:

$$Z \equiv \left(\frac{E_y}{B_z} \right)_{x=+0} = -i \left(\frac{\omega}{\pi c} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \frac{1}{k_x^2 - i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_T(|k_x|, \omega)}. \quad (0.3)$$

Ввиду того, что мы имеем дело с процессами, проходящими в плазме инертных газов [1], испытывающих воздействия больших напряженностей магнитного и электрического полей, а также зонами разделения зарядов, плазма – твердое тело (подложка), т. е. двойного электрического слоя. То, основываясь на том, что двойной электрический слой в плазме является областью с сильно нарушенной квазинейтральностью плазмы, ввиду наличия воздействия внешнего магнитного поля мы имеем распространения электромагнитных волн в плазме, описанных эффектом Холла, а также на эффекте аномального скин-эффекта, можем предположить, что в зоне двойного электрического слоя, т. е. на границе плазма – материал, мы имеем воздействие электромагнитных волн на структуру. Оценку этих воздействий дает физико-математическая модель.

1 Физико-математическая модель

Рассмотрим прохождение постоянного тока через плоский конденсатор, заполненный двумя диэлектрическими материалами с относительными диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 и проводимостями λ_1 и λ_2 . К обкладкам конденсатора приложено постоянное напряжение U , общее сопротивление конденсатора R (рисунок 1). Требуется вычислить наведенный электрический поверхностный заряд, обусловленный прохождением тока.

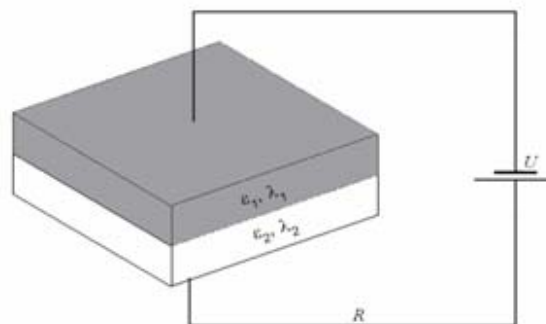


Рисунок 1 – Диэлектрические среды внутри плоского конденсатора

Из закона сохранения электрических зарядов следует постоянство потока в контуре, поэтому выполняется уравнение

$$\lambda_1 E_{n_1} = \lambda_2 E_{n_2} = \frac{U}{RS}, \quad (1.1)$$

где E_{n_1} и E_{n_2} – нормальные составляющие вектора напряженности электрического поля.

В электрическом поле на границе раздела диэлектриков нормальные составляющие вектора электрической индукции испытывают скачок, равный величине наведенного поверхностного заряда σ .

$$\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{n_1} - \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{n_2} = \sigma. \quad (1.2)$$

Из решения системы уравнений (1.1), (1.2) получим выражение для σ

$$\sigma = \frac{U}{RS} \varepsilon_0 \left[\frac{\varepsilon_1}{\lambda_1} - \frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} \right]. \quad (1.3)$$

Как следует из (1.3), заряд σ определяется величиной тока, а также множителем, учитывающим свойства среды. Если

$$\frac{\varepsilon_1}{\lambda_1} - \frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} = 0, \quad (1.4)$$

то заряд σ не возникает.

При исследовании электрического поля, взаимодействующего с материальной средой, используются уравнения Максвелла (1857 г.)

$$j_{\text{полн}} = \nabla \times H, \quad \nabla D = \rho, \quad (1.5)$$

$$\frac{-\partial B}{\partial t} = \nabla \times E, \quad \nabla B = 0, \quad (1.6)$$

где $j_{\text{полн}} = \lambda E + \frac{\partial D}{\partial t}$; $B = \mu \mu_0 H$; $D = \varepsilon \varepsilon_0 E$.

При этом на поверхности раздела S система уравнений дополняется граничными условиями

$$D_{n_1} - D_{n_2} = \sigma, \quad (1.7)$$

$$E_{\tau_1} - E_{\tau_2} = 0, \quad (1.8)$$

$$B_{n_1} - B_{n_2} = 0, \quad (1.9)$$

$$H_{\tau_1} - H_{\tau_2} = (i_{\tau} n). \quad (1.10)$$

Индексы n и τ обозначают нормальные и касательные составляющие векторов к поверхности S , а индексы 1 и 2 – смежные среды с различными электрофизическими свойствами. Под τ понимаем любое направление, касательное к поверхности разрыва.

Покажем, что σ можно вычислять из феноменологических макроскопических уравнений электромагнитного поля Максвелла и закона сохранения электрического заряда, учитывающего специфику границы раздела смежных сред.

Сформулируем физико-математическую модель распространения электромагнитного поля в слоистой среде. Умножим левую и правую части уравнения для полного тока (1.5) на μ и продифференцируем его по времени; действуем оператором rot на левую и правую части первого уравнения (1.6) и, полагая $\mu = \text{const}$, получаем

$$\frac{\partial j_{\text{полн}}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \nabla^2 E - \frac{1}{\mu} \text{grad}(\text{div} E). \quad (1.11)$$

В декартовых координатах (1.11) будет иметь вид

$$\frac{\partial j_{\text{полн},x}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right), \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial j_{\text{полн},y}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right), \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial j_{\text{полн},z}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right). \quad (1.14)$$

На поверхности раздела справедливо также соотношение

$$\text{div} i + I_{qx_1} - I_{qx_2} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}. \quad (1.15)$$

Условия (1.7)–(1.10) запишем в декартовой системе координат

$$D_{x_1} - D_{x_2} = \sigma, \quad (1.16)$$

$$E_{y_1} - E_{y_2} = 0, \quad (1.17)$$

$$E_{z_1} - E_{z_2} = 0, \quad (1.18)$$

$$H_{y_1} - H_{y_2} = i_z, \quad (1.19)$$

$$H_{z_1} - H_{z_2} = i_y, \quad (1.20)$$

$i_{\tau} = j + k$ – плотность поверхностного тока, при этом координата x направлена по нормали к границе раздела. Под плотностью i_y , i_z поверхностных токов понимаем количество электричества, протекающего в единицу времени через единицу длины отрезка, расположенного на поверхности, по которой течет ток, и перпендикулярно направлению тока.

Порядок системы дифференциальных уравнений (1.12)–(1.14) равен 18. Поэтому на границе раздела S необходимо задать 9 граничных условий. Кроме того, на этой границе должны выполняться еще три условия (1.16), (1.19), (1.20), содержащие неизвестные (до решения) величины. Следовательно, общее число условий сопряжения на границе S должно равняться 12 для корректного решения задачи.

Дифференцируя выражение (1.16) по времени и учитывая соотношение (1.15), на границе раздела сред получаем условие для нормальных составляющих полного тока

$$\text{div} i_{\tau} + j_{\text{полн},x_1} = j_{\text{полн},x_2}, \quad (1.21)$$

которое позволяет исключить из рассмотрения поверхностную плотность заряда σ . Для произвольной функции f введем обозначение

$$[f] \Big|_{x=\xi} = f_1 \Big|_{x=\xi+0} - f_2 \Big|_{x=\xi-0}.$$

Тогда выражение (1.21) примет вид

$$\operatorname{div} i_{\tau} + [j_{\text{полн.}x}]|_{x=\xi} = 0. \quad (1.22)$$

Полагаем, что на границе раздела сред E_x является непрерывной функцией y и z . Тогда после дифференцирования (1.21) по y и z имеем

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} j_{\text{полн.}x} \right] |_{x=\xi} = - \frac{\partial (\operatorname{div} i_{\tau})}{\partial y}, \quad (1.23)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} j_{\text{полн.}x} \right] |_{x=\xi} = - \frac{\partial (\operatorname{div} i_{\tau})}{\partial z}. \quad (1.24)$$

Продифференцируем условия (1.19)–(1.20) для магнитной индукции и напряженности магнитного поля по времени. Принимая $B = \mu\mu_0 H$, получаем

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial B_x}{\partial t} \right] |_{x=\xi} &= 0, \\ \left[\frac{1}{\mu\mu_0} \frac{\partial B_y}{\partial t} \right] |_{x=\xi} &= \frac{\partial i_z}{\partial t}, \\ \left[\frac{1}{\mu\mu_0} \frac{\partial B_z}{\partial t} \right] |_{x=\xi} &= \frac{\partial i_y}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

С учетом уравнения (1.6) выразим (1.25) через проекции вихря электрического поля

$$\begin{aligned} [\operatorname{rot}_x E] |_{x=\xi} &= 0, \\ \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right] |_{x=\xi} &= 0, \\ \left[\frac{1}{\mu\mu_0} \operatorname{rot}_y E \right] |_{x=\xi} &= \frac{\partial i_z}{\partial t}, \\ \left[\frac{1}{\mu\mu_0} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \right] |_{x=\xi} &= \frac{\partial i_y}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\mu\mu_0} \operatorname{rot}_z E \right] |_{x=\xi} &= \frac{\partial i_x}{\partial t}, \\ \left[\frac{1}{\mu\mu_0} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \right] |_{x=\xi} &= \frac{\partial i_z}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Здесь (1.26) – нормальная проекция вихря, (1.27) – тангенциальная проекция вихря электрического поля по y и (1.28) – проекция вихря по z .

В предположении, что E_y и E_z – непрерывные дифференцируемые функции координат y и z , из условий (1.17), (1.18) найдем

$$\left[\frac{\partial E_y}{\partial y} \right] |_{x=\xi} = 0, \quad \left[\frac{\partial E_y}{\partial z} \right] |_{x=\xi} = 0, \quad (1.29)$$

$$\left[\frac{\partial E_z}{\partial y} \right] |_{x=\xi} = 0, \quad \left[\frac{\partial E_z}{\partial z} \right] |_{x=\xi} = 0. \quad (1.30)$$

Вследствие равенства тангенциальных проекций электрического поля по z и y , согласно условиям (1.17), (1.18), выражения для плотностей поверхностного тока i_z и i_y имеют вид

$$\begin{aligned} i_z &= \bar{\lambda} E_z |_{x=\xi}, \\ i_y &= \bar{\lambda} E_y |_{x=\xi}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

где

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2) |_{x=\xi} \quad (1.32)$$

– среднее значение электропроводности на границах раздела смежных сред в соответствии с теоремой Дирихле для кусочно-гладкой кусочно-дифференцируемой функции.

С учетом изложенного выше имеем двенадцать условий на границе раздела смежных сред, необходимых для решения полной системы уравнений (1.12) – (1.14):

а) функции E_y , E_z определяются уравнениями (1.17), (1.18);

б) E_x определяется из условия (1.22);

в) величины $\frac{\partial E_x}{\partial y}$, $\frac{\partial E_x}{\partial z}$ и $\frac{\partial E_x}{\partial x}$ рассчитываются из соотношений (1.23), (1.24), а также непрерывности на границе раздела нормальной составляющей полного тока (1.22) и непрерывности производной полного тока по координате x ;

г) значения $\frac{\partial E_y}{\partial y}$, $\frac{\partial E_y}{\partial z}$, $\frac{\partial E_z}{\partial y}$, $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ определяются условиями (1.29), (1.31) как следствие непрерывности тангенциальных компонент электрического поля по y и z ;

д) производные $\frac{\partial E_y}{\partial x}$, $\frac{\partial E_z}{\partial x}$ находятся из условий (1.27), (1.28) как следствие равенства тангенциальных компонент вихря электрического поля по y и z .

Отметим, что условие (1.21) использовалось нами при численном моделировании импульсных электрохимических процессов для одномерного случая. Условие (1.26) для нормальной составляющей вихря электрического поля есть линейная комбинация условий (1.29), (1.30), поэтому $\operatorname{rot}_x E = 0$ и в его дальнейшем использовании нет необходимости. Специфика выражения общего закона сохранения электрического заряда на границе раздела заключается в том, что компоненты $\frac{\partial E_y}{\partial y}$, $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ находятся из условий (1.29), (1.30), которые выводятся из равенства и непрерывности тангенциальных компонент E_y и E_z на границе S .

2 Результаты численного моделирования

Разработанную физико-математическую модель можно применять и при моделировании процессов формирования нано- и микроструктур. Были проведены ряд экспериментов при измененных параметрах диэлектрической проницаемости и временного интервала воздействия.

Размеры исследуемых структур составляли $15 \times 20 \cdot 10^{-6}$ м, размеры ступенек 6 мкм. Частота воздействия электромагнитного поля

$$\omega = 2\pi \times 10^9,$$

напряженность поля

$$H_x = \sin(2\pi \times 10^9 t) \text{ А/м.} \quad (2.1)$$

Электрофизические свойства структур: $\mu = 1$, $\varepsilon =$ от 1 до 12, $\sigma =$ от 10^{-9} до 10^{-5} Ом·м.

Полагали, что в слое толщиной 15–20 мкм распространение электромагнитной волны происходит без затухания, поэтому на всех гранях структур полагали справедливым выполнение условия (2.1). На гранях структуры, параллельной оси

OX , условие (2.1) соответствовало «поперечной» тангенсальной составляющей волны, на гранях параллельных OY условие соответствовало нормальной составляющей поля.

Расчеты проводились с шагом по времени 10^{-15} до момента времени 10^{-12} с.

На рисунках 2, 3 приведены амплитудные значения напряженностей магнитного поля H_x и H_y , а также картина воздействия электромагнитного поля на структуру.

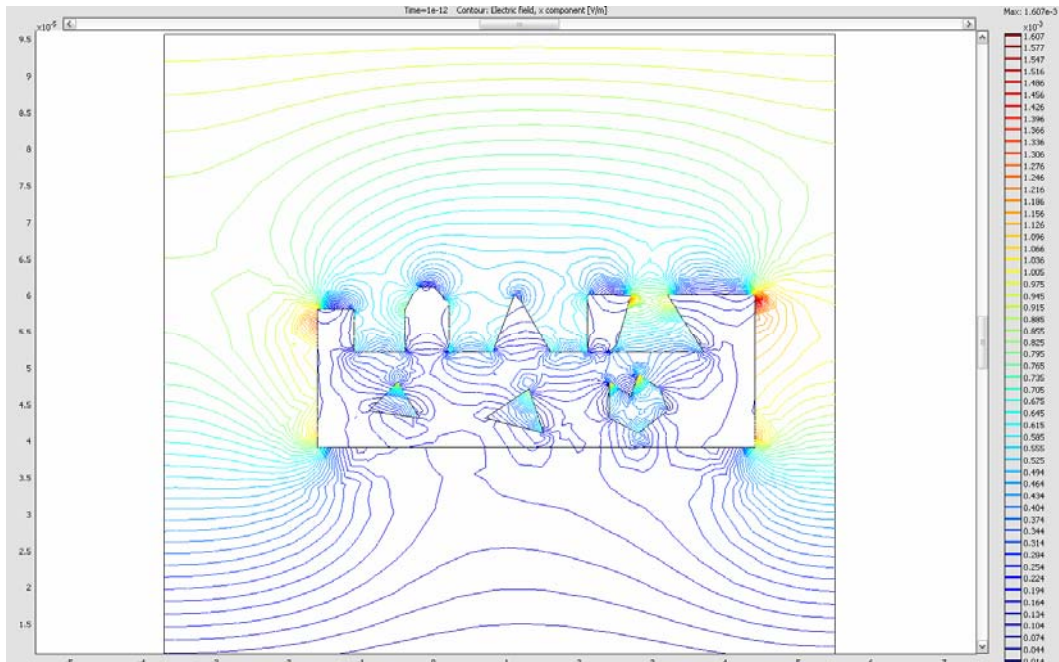


Рисунок 2 – Структура распределения полей для микроповерхности типа «ступенька»

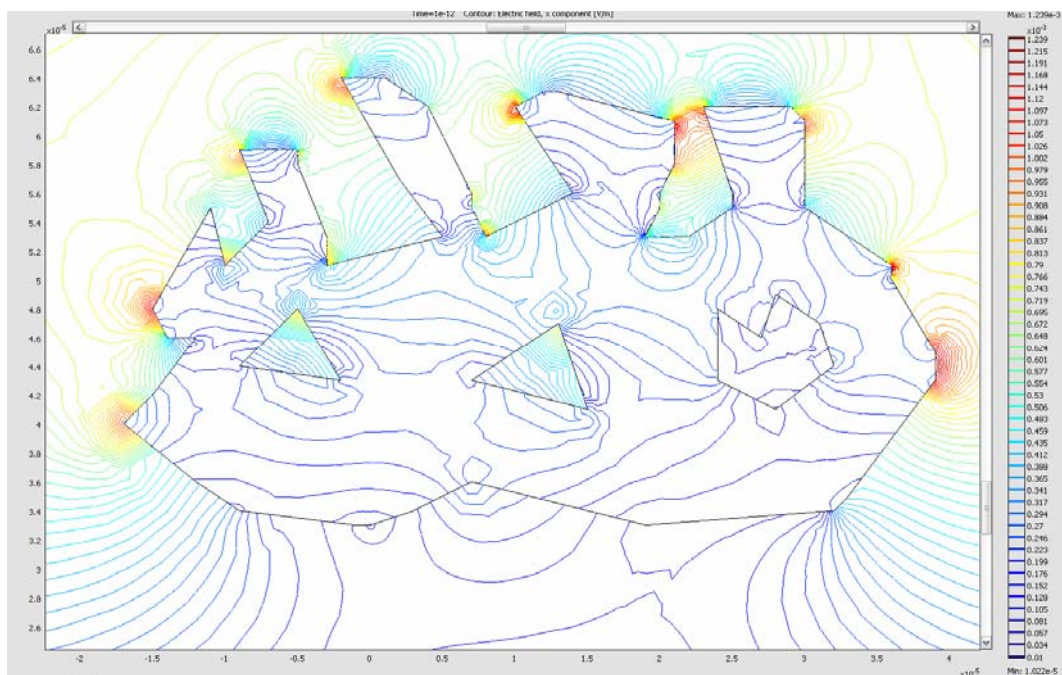


Рисунок 3 – Структура распределения полей для микроповерхности сложной геометрической формы с полостями внутри

Как известно [1], в термодинамически равновесных системах температура T , электрический φ и химический μ_c потенциалы постоянны вдоль всей системы

$$\text{grad } T = 0, \text{ grad } \varphi = 0, \text{ grad } \mu_c = 0.$$

Если эти условия не выполняются, то в системе возникают необратимые процессы переноса массы, энергии, электрического заряда и т. д.

Химический потенциал j -го компонента определяют, например, как изменение свободной энергии при изменении числа молей.

$$\mu_{cj} = \left(\frac{\partial F}{\partial n_j} \right)_{T,V}, \quad (2.2)$$

$$dF = -SdT - PdV + HdB. \quad (2.3)$$

Последний член в (2.3) учитывает изменение свободной энергии за счет изменения магнитной индукции. Свободная энергия единицы объема, находящегося в магнитном поле, в этом случае имеет вид:

$$F(T, D) = F_0 + \mu\mu_0 \frac{H^2}{2}. \quad (2.4)$$

Полагаем, что изменения температуры, объема малы. Тогда поток массы определяется величиной, пропорциональной градиенту химического потенциала, или, согласно (2.3), получим

$$q_i = -D_{\mu_c} \text{grad}(HdB) = -D_{\mu_c} \text{grad}W,$$

где $W = \mu\mu_0 \frac{H^2}{2}$ – плотность магнитного поля в единице объема.

Периодическое изменение магнитного поля в одном направлении вызывает пондеромоторную силу и может оказывать влияние на движение различных дефектов и дислокаций в направлении создания устойчивой и равновесной структуры атомов и молекул при воздействии на структуру с микро- и нано- рельефом и в конечном итоге получение поверхности с улучшенными характеристиками вследствие «микромагнитопластического» эффекта, а также благодаря концентрации напряженности электромагнитного поля происходит более быстрое нанесение или травление материала.

Заключение

В данной работе дана попытка обосновать воздействие электромагнитных сил на формирование нано- и микроструктур. Проведены численные расчеты полной электромагнитной энергии на остриях структур. Показано, что плотность энергии в области остриев структур максимальна и может оказывать влияние на движение, стоки и исток дислокаций и вакансий и в конечном итоге влиять на процессы формирования нано- и микроструктур за счет «микромагнитнопластического» эффекта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Волин, Э.М.* Ионно-плазменные методы получения износостойких покрытий / Э.М. Волин // *Технология легких сплавов.* – 1984. – № 10. – С. 132–134.
2. *Структура и механические свойства вакуумно-плазменных покрытий TiCN* / В.М. Мацевитый [и др.] // *Известия высших учебных заведений. Черная металлургия.* – 1984. – № 4. – С. 85–88.
3. *Майссела, Л.* Технология тонких пленок / Л. Майссела, Р. Гленга. – М.: Советское радио, 1977.
4. *Кундас, С.П.* Компьютерное моделирование технологических систем / С.П. Кундас, Т.А. Кашко. – Минск: БГУИР, 2002. – 168 с.
5. *Анищенко, Л.М.* Автоматизированное проектирование и моделирование технологических процессов / Л.М. Анищенко, С.Ю. Лавренко, В.В. Петрухин. – Минск: Радио и связь, 1995. – 176 с.
6. *Шульман, З.П.* Магнитно-реологический эффект / З.П. Шульман, В.И. Кордонский. – Минск: Наука и техника, 1982.
7. *Ракомсин, А.П.* Упрочнение и восстановление изделий в электромагнитном поле / А.П. Ракомсин. – Минск: Парадокс, 2000.
8. *Савенко, В.С.* Механическое двойникование в металлах в условиях внешних энергетических воздействий / В.С. Савенко. – Минск: Тех-Принт, 2000.
9. *Акулов, Н.С.* Дислокации и пластичность / Н.С. Акулов. – Изд-во АН БССР, 1961.
10. *Активация поверхности полупроводников воздействием импульсного магнитного поля* / М.Н. Левин [и др.] // *УЖТФ.* – 2003. – Т. 73. – С. 85–87.
11. *Орлов, А.М.* Магнитно-стимулированное изменение подвижности дислокаций в пластически деформированном кремнии n -типа / А.М. Орлов, А.А. Скворцов, Л.И. Гончар // *ФТТ.* – 2001. – Т. 43. – С. 1207–1210.
12. *О влиянии постоянного магнитного поля на электропластический эффект в кристаллах кремния* / В.А. Макара [и др.] // *ФТТ.* – 2001. – Т. 43. – С. 462–465.
13. *Влияние слабых магнитных полей динамику изменений микротвердости кремния, индуцируемых малоинтенсивным β -облучением* / Ю.И. Головин // *ФТТ.* – 2007. – Т. 49. – С. 822–823.
14. *Головин, Ю.И.* Магниторезонансное разупрочнение кристаллов / Ю.И. Головин, Р.Б. Моргунов // *Природа.* – 2002. – № 8. – С. 49–57.
15. *Худяков, М.А.* Влияние постоянного магнитного поля на циклическую трещиностойкость и коррозионную стойкость стали 17Г1С / М.А. Худяков, Р.Р. Алтынова // *Нефтегазовое дело.* – 2006. – № 1. – С. 23–32.

16. Влияние магнитного поля на астичность, фото- и электролюминесценцию монокристаллов ZnS / Ю.И. Головин [и др.] // Письма в ЖЭТФ. – 1999. – Т. 69. – С. 114–118.
17. Образованные действием магнитного поля изменения примесного состава и микротвердости приповерхностных слоев кристаллов кремния / В.А. Макара [и др.] // Физика и техника полупроводников. – 2008. – Т. 42. – С. 1061–1064.
18. Магниторезонансное упрочнение монокристаллов кремния / Ю.А. Осипьян [и др.] // Письма в ЖЭТФ. – 2004. – Т. 79. – С. 158–162.
19. Орлов, А.М. Динамика поверхностных дислокационных ансамблей в кремнии при наличии механических и магнитных возмущений / А.М. Орлов, А. А. Скворцов, А.А. Соловьев. – ФТТ. – 2003. – Т. 45. – С. 613–617.
20. Китель, Ч. Введение в физику твердого тела / Ч. Китель. – М. : Наука, 1978.
21. Семёнов, А.П. Схватывание металлов / А.П. Семёнов. – М. : Машгиз, 1958.
22. Милошевский, П.П. Основы разрядно-импульсной технологии / П.П. Милошевский. – Киев : Наукова думка, 1983.
23. Гринчик, Н.Н. Влияние тепловых и диффузионных процессов на распространение электромагнитных волн в слоистых материалах / Н.Н. Гринчик, А.П. Достанко. – Минск : Академия наук, 2005.

Поступила в редакцию 19.04.11.

УДК 539.12

НОВЫЙ ПОДХОД К УЧЕТУ ПОПРАВОК НА МАССУ МИШЕНИ В СТРУКТУРНЫХ ФУНКЦИЯХ НУКЛОНА

В.И. Лашкевич, О.П. Соловцова

*Международный центр перспективных исследований,
Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель*

NEW APPROACH TO TARGET MASS CORRECTIONS IN THE NUCLEON STRUCTURE FUNCTIONS

V.I. Lashkevich, O.P. Solovtsova

*International Center for Advanced Studies,
P. Sukhoi Gomel State Technical University, Gomel*

Получены новые выражения для физических структурных функций неупругого лептон-адронного рассеяния, в которых учтена их зависимость от массы мишени и которые согласуются со спектральным свойством. Показано, что массовые поправки к структурным функциям, рассчитанные новым методом, заметно отличаются от результатов, полученных стандартным методом Джорджи-Политцера и в рамках подхода Стеффенса-Мельничука.

Ключевые слова: неупругое лептон-адронное рассеяние, структурные функции, поправки на массу мишени.

New expressions for physical structured functions of the inelastic lepton-hadron scattering which contain a dependence on a target mass and are in agreement with the spectral property, are obtained. We demonstrate that target mass corrections to structure functions calculated by using the new method noticeably differ from the standard Georgi-Politzer method, as well as from the Steffens-Melnitchouk approach.

Keywords: inelastic lepton-hadron scattering, structure function, target mass corrections.

Введение

При анализе процесса неупругого лептон-адронного рассеяния широко используется метод операторного разложения. В работе [1] этот метод был применен в целях учета поправок на массу мишени в структурных функциях нуклона. Такой метод включения в рассмотрение массовых поправок называют методом Джорджи-Политцера (или ξ -скейлинга). Было установлено, что при Q^2 порядка нескольких ГэВ² и менее эффектами, обусловленными наличием массы у мишени, пренебречь нельзя, особенно при больших значениях бьёркеновской переменной x . Однако структурные функции, получаемые методом Джорджи-Политцера, имеют существенный недостаток: при стремлении бьёркеновской переменной x к единице они не стремятся к нулю. Это обстоятельство было отмечено вскоре после опубликования работы [1] и получило название «пороговой проблемы». Эта проблема с момента возникновения и до сих пор широко обсуждается в научной литературе; в одних работах, эта проблема просто констатируется, как известный факт, а в других – ищется способ ее решения.

В работе Соловцова [2] было показано, что пороговая проблема обусловлена тем, что моменты структурных функций, вычисленные в приближении лидирующего твиста, в результате

суммирования рядов не обладают необходимыми аналитическими свойствами по переменной Нахтмана ξ . Ситуация аналогична той, которая возникает в КХД при суммировании рядов в теории возмущений – появляются призрачные полюса в выражении для инвариантного заряда КХД α_s . В работе Д.В. Ширкова и И.Л. Соловцова [3] был предложен метод устранения таких особенностей нефизического происхождения, который заключался в наложении вытекающего из представления Челлена-Лемана требования Q^2 -аналитичности. В работе же [2], по сути, такой подход распространен на структурные функции нуклона, которые зависят от двух аргументов, и соответствующие представления, аккумулирующие фундаментальные свойства теории такие, как релятивистская инвариантность, спектральность и причинность, имеют, по сравнению с представлением для одноаргументных функций, более сложный вид. В этой статье рассмотрение основывалось на 4-х мерном интегральном представлении Йоста-Лемана-Дайсона (ЙЛД), которое было предложено в работе [4] для так называемого симметричного случая, а в работе [5] – в более общем случае. Как показано в [2], при использовании представления ЙЛД возникает новая скейлинговая переменная ξ_S , моменты структурных функций по которой являются аналитическими функциями. При этом условие

спектральности для структурных функций выполняется автоматически и отмеченной выше проблемы при стремлении бёркеновской переменной x к единице не возникает. Основываясь на идеях и результатах работы [2], авторы настоящей статьи в работе [6] получили новые выражения для структурных функций – с учётом эффектов, обусловленных наличием массы у мишени, но без учета КХД-поправок. В настоящей работе продолжены исследования в этом направлении. Здесь выполнен расчет структурных функций нуклона в приближении лидирующего твиста с учётом наличия массы у нуклона и с учётом КХД-поправок в двухпетлевом приближении.

1 Метод Джорджи-Политцера

В приближении лидирующего твиста при учете массы мишени структурные функции нуклона имеют вид (см., например, [7], [8])

$$F_2(x, Q^2) = \frac{x^2}{\xi^2 \cdot r^3} F_2^0(\xi, Q^2) + \frac{6\varepsilon x^3}{r^4} \int_{\xi}^1 \frac{F_2^0(y, Q^2)}{y^2} dy + \frac{12\varepsilon^2 x^4}{r^5} \int_{\xi}^1 dy \int_y^1 \frac{F_2^0(z, Q^2)}{z^2} dz, \quad (1.1)$$

$$F_1(x, Q^2) = \frac{x}{\xi \cdot r} F_1^0(\xi, Q^2) + \frac{\varepsilon x^2}{r^2} \int_{\xi}^1 \frac{F_2^0(y, Q^2)}{y^2} dy + \frac{2\varepsilon^2 x^3}{r^3} \int_{\xi}^1 dy \int_y^1 \frac{F_2^0(z, Q^2)}{z^2} dz, \quad (1.2)$$

$$F_L(x, Q^2) = \frac{x^2}{\xi^2 \cdot r} [F_2^0(\xi, Q^2) - 2\xi F_1^0(\xi, Q^2)] + \frac{4\varepsilon x^3}{r^2} \int_{\xi}^1 \frac{F_2^0(y, Q^2)}{y^2} dy + \frac{8\varepsilon^2 x^4}{r^3} \int_{\xi}^1 dy \int_y^1 \frac{F_2^0(z, Q^2)}{z^2} dz. \quad (1.3)$$

Здесь $x = \frac{Q^2}{2\nu} = \frac{Q^2}{2q \cdot P}$ – переменная Бьеркена,

$r = \sqrt{1 + 4\varepsilon x^2}$, $\varepsilon = \frac{M^2}{Q^2}$, M – масса нуклона, ξ –

переменная Нахтмана

$$\xi = \frac{2x}{1 + \sqrt{1 + 4x^2\varepsilon}},$$

$$F_1^0(\xi, Q^2) = \lim_{M \rightarrow 0} F_1(x, Q^2)_{x=\xi},$$

$$F_2^0(\xi, Q^2) = \lim_{M \rightarrow 0} F_2(x, Q^2)_{x=\xi},$$

$$F_L^0(\xi, Q^2) = \lim_{M \rightarrow 0} F_L(x, Q^2)_{x=\xi}.$$

Выражение для функции $F_2^0(x, Q^2)$ в следующем за лидирующим порядке приближении записывается в виде (см., например, [9]):

$$\frac{1}{x} F_2^0(x, Q^2) = \sum_q e_q^2 \left\{ q(x, Q^2) + \bar{q}(x, Q^2) + \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[C_{2,q}^1\left(\frac{x}{y}\right) [q(y, Q^2) + \bar{q}(y, Q^2)] + C_{2,g}^1\left(\frac{x}{y}\right) \cdot G(y, Q^2) \right] \right\}, \quad (1.4)$$

где

$$C_{2,q}^1(z) = \frac{4}{3} \left[\frac{1+z^2}{1-z} \left(\ln(1-z) - \frac{3}{4} \right) + \frac{1}{4} (9+5z) \right],$$

$$C_{2,g}^1(z) = [z^2 + (1-z)^2] \cdot \ln \frac{1-z}{z} - 1 + 8z(1-z),$$

$$\int_x^1 f\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{dy}{y} q(y) = \int_x^1 \frac{dy}{y} \cdot f\left(\frac{x}{y}\right) \left[q(y) - \frac{x}{y} q(x) \right] - q(x) \int_0^x f(y) dy,$$

а функции $q(x, Q^2), \bar{q}(x, Q^2)$ – это функции распределения кварков и антикварков в нуклоне, $G(x, Q^2)$ – функция распределения глюонов, e_q – заряды кварков. Соответствующее выражение для продольной структурной функции $F_L^0(x, Q^2)$ имеет вид

$$\frac{1}{x} F_L^0(x, Q^2) = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \cdot \sum_q e_q^2 \left\{ \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[C_{L,q}^1\left(\frac{x}{y}\right) (q(y, Q^2) + \bar{q}(y, Q^2)) + 2 C_{L,g}^1\left(\frac{x}{y}\right) \cdot G(y, Q^2) \right] \right\}, \quad (1.5)$$

где $C_{L,q}^1(z) = \frac{8}{3}z$, $C_{L,g}^1(z) = 2z(1-z)$.

2 Новый метод учета массовых поправок

Метод, предложенный в работе Соловцова [2], базируется на интегральном представлении ЙЛД, из которого следует, что естественной скейлинговой переменной является новая переменная

$$\xi_S = x \sqrt{\frac{1 + 4\varepsilon x^2}{1 + 4\varepsilon}},$$

моменты по которым становятся аналитическими функциями в комплексной плоскости Q^2 с разрезом вдоль отрицательной оси. В соответствии с этим методом вместо функции партонного распределения $F(\xi)$ вводится новая функция

$$F(x, Q^2) = \begin{cases} F(\beta_-) - F(1), & 0 \leq x < \bar{x}, \\ F(\beta_-) - F(\beta_+), & \bar{x} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (2.1)$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\varepsilon^2}},$$

$$\beta_{\pm} = \frac{x\sqrt{1+4\epsilon x^2}}{1+4\epsilon x^2+4\epsilon^2 x^2} \left(1+2\epsilon \pm 2\epsilon \sqrt{\frac{1-x^2}{1+4\epsilon x^2}} \right).$$

Функция (2.1) удовлетворяет условию спектральности $F(x, Q^2) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 1$. Отметим, что выражение (2.1) было получено без учета КХД поправок.

На рисунке 1 представлена зависимость структурных функций $2xF_1(x, Q^2)$ и $F_2(x, Q^2)$ от переменной x . В расчетах использовалось партонное распределение модельного вида

$$F(x) = \sqrt{x}(1-x)^3,$$

применяемое при обработке экспериментальных данных. Из рисунка 1 видно, что даже при значениях Q больших, чем масса нуклона, имеется заметное отличие в результатах, полученных различными методами. Отметим, что детальное сравнение можно найти в работе [6].

Модифицируя выражения для структурных функций (1.1)–(1.3) с учетом (2.1), получаем:

$$\begin{aligned} F_2(x, Q^2) &= \frac{x^2}{\beta_-^2 \cdot r^3} F_2^0(\beta_-, Q^2) + \\ &+ \frac{6\epsilon x^3}{r^4} \int_{\beta_-}^1 \frac{F_2^0(y, Q^2)}{y^2} dy + \\ &+ \frac{12\epsilon^2 x^4}{r^5} \cdot \int_{\beta_-}^1 dy \int_y^1 \frac{F_2^0(z, Q^2)}{z^2} dz, \\ F_1(x, Q^2) &= \frac{x}{\beta_-^r} F_1^0(\beta_-, Q^2) + \\ &+ \frac{\epsilon x^2}{r^2} \int_{\beta_-}^1 \frac{F_2^0(y, Q^2)}{y^2} dy + \\ &+ \frac{2\epsilon^2 x^3}{r^3} \cdot \int_{\beta_-}^1 dy \int_y^1 \frac{F_2^0(z, Q^2)}{z^2} dz, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} F_L(x, Q^2) &= \frac{x^2}{\beta_-^2 r} F_L^0(\beta_-, Q^2) + \\ &+ \frac{4\epsilon x^3}{r^2} \int_{\beta_-}^1 \frac{F_2^0(y, Q^2)}{y^2} dy + \\ &+ \frac{8\epsilon^2 x^4}{r^3} \cdot \int_{\beta_-}^1 dy \int_y^1 \frac{F_2^0(z, Q^2)}{z^2} dz \end{aligned}$$

при $0 \leq x \leq \bar{x}$ и

$$\begin{aligned} F_2(x, Q^2) &= \frac{x^2}{r^3} \left[\frac{F_2^0(\beta_-, Q^2)}{\beta_-^2} - \frac{F_2^0(\beta_+, Q^2)}{\beta_+^2} \right] + \\ &+ \frac{6\epsilon x^3}{r^4} \int_{\beta_-}^{\beta_+} \frac{F_2^0(y, Q^2)}{y^2} dy + \\ &+ \frac{12\epsilon^2 x^4}{r^5} \cdot \int_{\beta_-}^{\beta_+} dy \int_y^1 \frac{F_2^0(z, Q^2)}{z^2} dz, \\ F_1(x, Q^2) &= \frac{x}{r} \left[\frac{F_1^0(\beta_-, Q^2)}{\beta_-} - \frac{F_1^0(\beta_+, Q^2)}{\beta_+} \right] + \\ &+ \frac{\epsilon x^2}{r^2} \int_{\beta_-}^{\beta_+} \frac{F_2^0(y, Q^2)}{y^2} dy + \\ &+ \frac{2\epsilon^2 x^3}{r^3} \cdot \int_{\beta_-}^{\beta_+} dy \int_y^1 \frac{F_2^0(z, Q^2)}{z^2} dz, \\ F_L(x, Q^2) &= \frac{x^2}{r} \left[\frac{F_L^0(\beta_-, Q^2)}{\beta_-^2} - \frac{F_L^0(\beta_+, Q^2)}{\beta_+^2} \right] + \\ &+ \frac{4\epsilon x^3}{r^2} \int_{\beta_-}^{\beta_+} \frac{F_2^0(y, Q^2)}{y^2} dy + \\ &+ \frac{8\epsilon^2 x^4}{r^3} \cdot \int_{\beta_-}^{\beta_+} dy \int_y^1 \frac{F_2^0(z, Q^2)}{z^2} dz. \end{aligned} \quad (2.3)$$

при $\bar{x} \leq x \leq 1$.

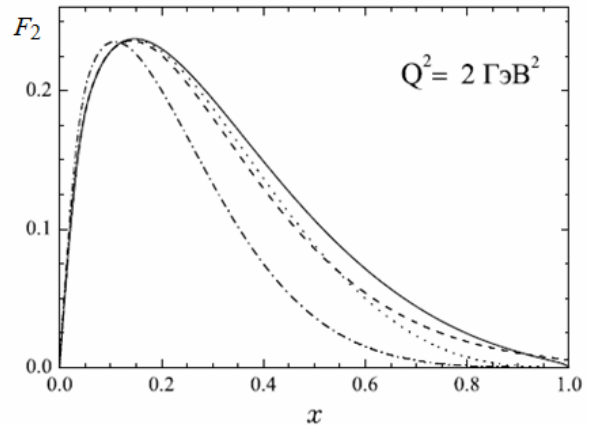
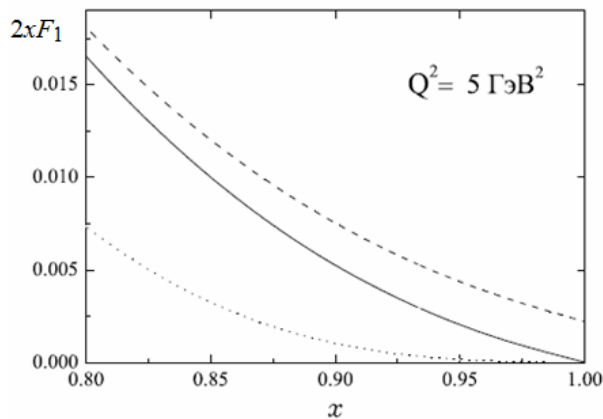


Рисунок 1 – Поведение структурных функций $2xF_1(x, Q^2)$ (слева) и $F_2(x, Q^2)$ (справа) от переменной x .

Сплошная линия соответствует результатам наших расчетов по методу Соловцова;

пунктирная – стандартному методу Джорджи-Политцера [1];

штрих-пунктирная – работе Стеффенса – Мельничука [11].

Партонному распределению соответствуют точки

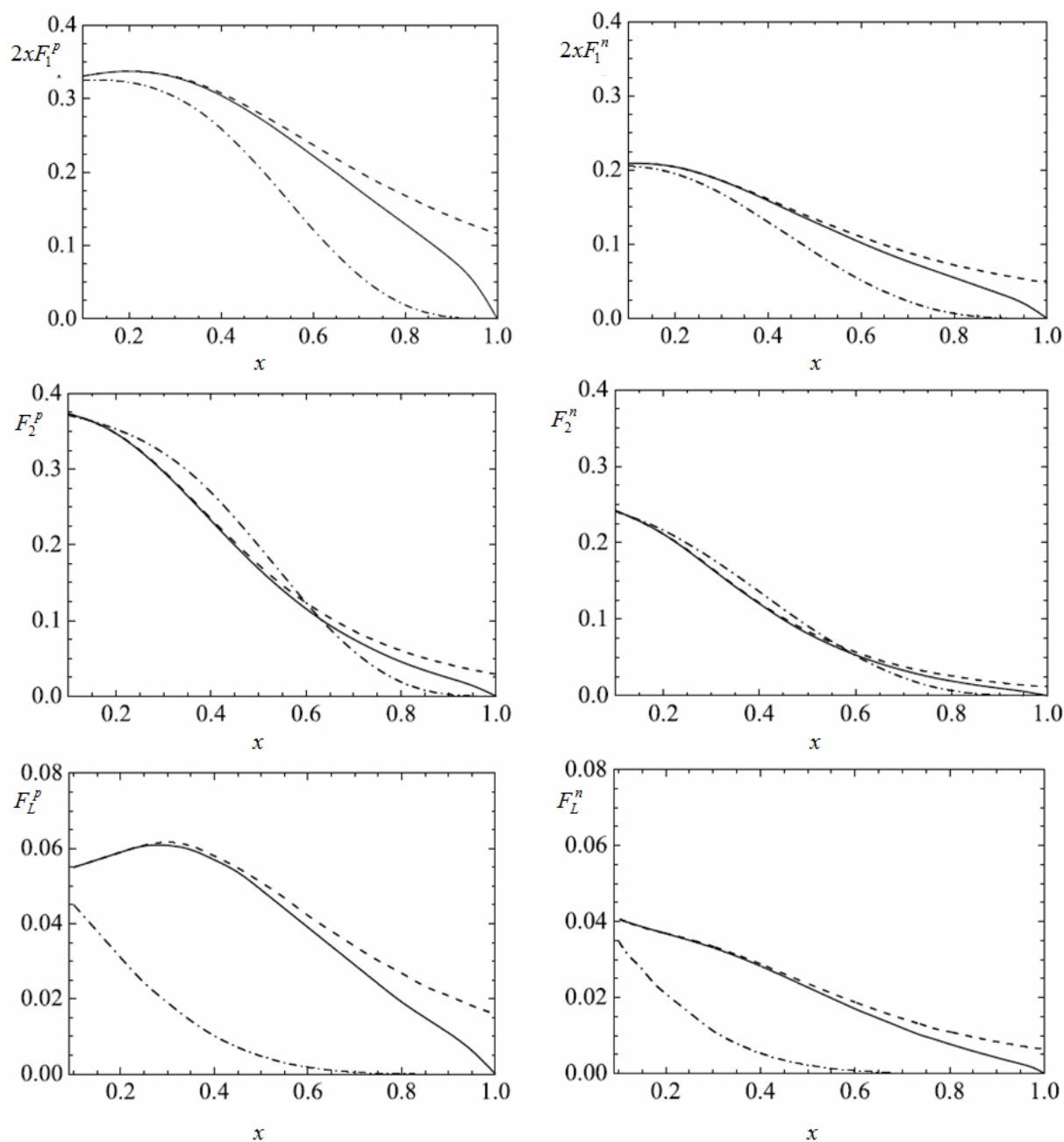


Рисунок 2 – Зависимость структурных функций протона (слева) и нейтрона (справа) при $Q^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$ от переменной x . Сплошные линии соответствуют результатам расчета по методу Соловцова, пунктирные – стандартному методу Джорджи-Политцера, штрих-пунктирные – результатам расчётов без учёта поправок на массу мишени.

Так как поправки на массу мишени наиболее существенны на энергетическом масштабе порядка массы нуклона, то в нашем анализе мы ограничились вкладами в структурные функции от легких кварков. Функции распределения легких u , d и s кварков и антикварков в нуклоне, а также распределения глюонов нами были взяты из работы [9], где также фиксировалось значение масштабного параметра КХД: $\Lambda = 0,248 \text{ ГэВ}$. Отметим, что распределения, приведенные в

других работах, в области $x > 0,2$, в которой становятся существенными поправки на массу мишени, близки к распределениям Глюка и др. [9], отличия же возникают при малых значениях x . Инвариантный заряд в двухпетлевом приближении с учётом трех активных кварков имеет вид:

$$\frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} = \frac{2}{9\ln(L)} - \frac{128}{9^3} \cdot \frac{\ln(L)}{L^2}, \quad L = \ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right).$$

Результаты расчетов при $Q^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$ с учетом КХД вклада приведены на рисунке 2, на котором изображены структурные функции протона и нейтрона, вычисленные с использованием выражений (1.1)–(1.5), (2.2) и (2.3).

Заключение

В условиях, когда точность экспериментальных данных постоянно повышается и актуальными становятся задачи об изучении таких тонких КХД эффектов, как вклады высших твистов, целесообразно в теоретических подходах опираться на методы, согласованные с общими принципами квантовой теории поля.

В настоящей работе были получены выражения для структурных функций F_1 , F_2 и F_L массивного нуклона, которые удовлетворяют условию спектральности и включают в себя КХД-поправки в следующем за лидирующим порядке. Показано, что при $Q^2 \sim 1 \text{ ГэВ}^2$ и меньше, получаемые с использованием новых выражений результаты заметно отличаются от результатов применения стандартного метода Джорджи-Политцера и подхода Стеффенса-Мельничука. Наиболее существенное отличие сравнимых подходов проявляется в области больших значений бёркеновской переменной x . Известно, что поправки на массу мишени (относящиеся к кинематическим) влияют на извлекаемую из экспериментальных данных о глубокоупругом лептон-адронном рассеянии x -зависимость вклада высших твистов (определяемых динамикой процесса). Как следует из результатов обработки экспериментальных данных, в области больших значений бёркеновской переменной x вклад высших твистов возрастает. Поэтому можно ожидать, что применение новых выражений позволит точнее получить информацию о величине вклада высших твистов и уточнить характер x -зависимости этого вклада. В дальнейшем мы планируем провести такие исследования.

Авторы выражают благодарность академику РАН Д.В. Ширкову за постоянную поддержку исследований и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Georgi, H.* Freedom at Moderate Energies: Masses in Color Dynamics / H. Georgi, H.D. Politzer // *Phys. Rev. D.* – 1976. – Vol. 14. – P. 1829–1891.
2. *Solovtsov, I.L.* Integral representation for structure functions and target mass effects / I.L. Solovtsov // *Part. Nucl. Lett.* – 2000. – Vol. 101. – P. 10–18.
3. *Shirkov, D.V.* Analytic model for the QCD running coupling with universal $\alpha_s(0)$ value / D.V. Shirkov, I.L. Solovtsov // *Phys. Rev. Lett.* – 1997. – Vol. 79. – P. 1209–1212.
4. *Jost, R.* Integral-Darstellung kausaler Kommutatoren / R. Jost, H. Lehmann // *Nuov. Cim.* – 1957. – Vol. 5. – P. 1598–1610.
5. *Dyson, F.J.* Integral representations of causal commutators / F.J. Dyson // *Phys. Rev.* – 1958. – Vol. 110. – P. 1460–1464.
6. *Соловцова, О.П.* Представление Йоста-Лемана-Дайсона и эффекты, связанные с массой мишени / О.П. Соловцова, В.И. Лашкевич // *ТМФ.* – 2009. – Т. 160, № 3. – С. 471–486.
7. *De Rújula, A.* Demythification of Electroweak production, Local Duality and Precocious Scaling / A. De Rújula, H. Georgi, H.D. Politzer // *Annals of Phys.* – 1977. – Vol. 103. – P. 315–405.
8. *Kretzer, S.* Target mass corrections to electroweak structure functions and perturbative neutrino cross-sections / S. Kretzer, M.H. Reno // *Phys. Rev. D.* – 2004. – Vol. 69. – P. 034002.
9. *Gluck, M.* Dynamical parton distributions of the proton and small x physics / M. Gluck, E. Reya, A. Vong // *Z. Phys. C.* – 1995. – Vol. 67. – P. 433–448.
10. *Steffens, F.M.* Target mass corrections revisited / F.M. Steffens, W. Melnitchouk // *Phys. Rev. C.* – 2006. – Vol. 73. – P. 055202.
11. *Kataev, A.L.* Improved fits to the $x F_3$ CCFR data at the next-to-next-to-leading order and beyond / A.L. Kataev, G. Parente, A.V. Sidorov // *ЭЧАЯ.* – 2003. – Т. 34, № 1. – С. 43–873.

Работа выполнена при финансовой поддержке БелРФФИ (грант № Ф10Д-001) и РФФИ (грант № 11-01-00182).

Поступила в редакцию 01.06.11.

УДК 622.25.34

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФОРМИРОВАНИЯ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ СТРУКТУР ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ИОННЫХ ПОТОКОВ

И.Н. Спресов

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

SIMULATION SOLID-STATE STRUCTURES FORMATION UNDER THE ACTIONS OF ION FLUXES

I.N. Spresov

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

Предложены две модели процесса формирования микро- и наноструктур. Показаны различия между двумя моделями. На основании математических моделей исследованы различные формы и параметры материалов в процессе воздействия.

Ключевые слова: формирование тонкопленочных структур, электромагнитное воздействие плазмы.

Two models for the process of formation of micro- and nanostructures are proposed. The differences between the two models are shown. Various forms and material parameters in the course of action are studied on the basis of mathematical models.

Keywords: formation of thin-film structures, electromagnetic effects of the plasma formation of thin-film structures, electromagnetic effects of plasma.

Введение

Проблема создания равномерных по толщине покрытий является одной из важнейших задач при производстве различных изделий микроэлектроники и оптики. Для плоских поверхностей эта задача успешно решается путем оптимизации позиционирования подложки относительно источника наносимого материала, применением внутрикамерных систем перемещения, сложного геометрических масок, созданием специальных диаграмм направленности молекулярного потока [1]. Что касается сложно-рельефных поверхностей, то улучшить равномерность покрытия рельефа возможно либо при условии обеспечения постоянно изменяющегося угла падения молекулярного потока к поверхности, либо используя принцип планаризации. Для первого случая требуется разработка сложных механических систем перемещения, которые, однако, не всегда гарантируют успех, во втором случае усложняется технологический процесс, видоизменяется поверхность, что не всегда допустимо.

Более удобным было бы использовать «немеханические» способы повышения равномерности покрытий, в частности процессы ионного напыления, которые позволили бы получать плёнки на рельефных поверхностях без указанных или сведённых к минимуму недостатков.

Одной из наиболее сложных для нанесения плёнок поверхностью, являются углубления типа «ступенька».

В данной работе описываются две разные модели процесса формирования тонкопленочных

структур. Исследуются различные подходы к решению данной задачи.

Целью данной работы является построение наиболее реалистичной модели.

1 Ионно-плазменное распыление

Схема установки для нанесения покрытий катодным распылением представлена на рисунке 1.

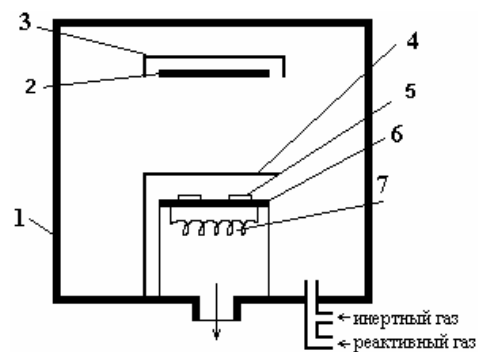


Рисунок 1 – Схема установки для нанесения покрытий катодным распылением:

1 – камера; 2 – катод; 3 – заземленный экран; 4 – заслонка; 5 – подложка; 6 – заземленный анод; 7 – резистивный нагреватель подложки

Метод осуществляется следующим образом (рисунок 1). Вакуумный объем, содержащий анод и катод, откачивают до давления 10...4 Па, после чего производят напуск инертного газа (обычно это аргон при давлении 1...10 Па). Для зажигания тлеющего разряда между катодом и анодом подается высокое напряжение 1...10 кВ.

Положительные ионы инертного газа, источником которого является плазма тлеющего разряда, ускоряются в электрическом поле и бомбардируют катод, вызывая его распыление. Распыленные атомы попадают на подложку и оседают в виде тонкой пленки.

2 Описание модели, основанной на скорости осаждения ионов

Скорость осаждения тонкопленочной структуры на подложке в общем виде будет равна

$$R' = M \frac{\cos \varphi \cos \gamma}{r^2}, \quad (2.1)$$

где M – постоянный параметр, пропорциональный скорости распыления,

φ – угол распыления,

γ – угол конденсации,

r – расстояние до подложки.

Угол конденсации – это угол между нормалью к поверхности и вектором конденсации.

В отсутствие наклона подложки влияние основного осаждаемого потока на толщину пленки на боковой поверхности ничтожно мало, рассмотрим влияние «местного» переосаждаемого потока. С учетом того, что переосаждаемый поток подчиняется косинусоидальному закону распределения, аналогично (2.1), можно записать:

$$R_g = M' \frac{\cos \varphi' \cos \gamma'}{r'^2}, \quad (2.2)$$

где M' – постоянный параметр, пропорциональный скорости распыления, φ' – угол распыления, γ' – угол конденсации, r' – расстояние до вертикальной стенки.

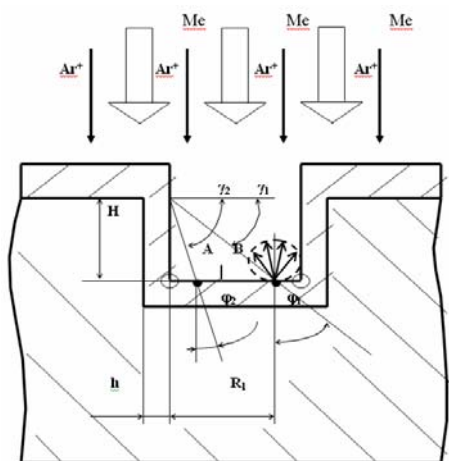


Рисунок 2 – Схема формирования пленки на ступенчатом рельефе в присутствии ионного пучка

Однако учитывая, что в данном случае из-за соизмеримости размеров «микроисточника» (поверхность АВ) и вертикальной стенки, на которую производится нанесение, источник нельзя

считать точечным и в (2.2) необходимо внести соответствующие поправки, учитывающие геометрию рельефа подложки, получаем:

$$R_g = M' \int_0^R \int_0^H \frac{\cos \varphi(R, H) \cos \gamma(R, H) \Pi(R)}{r'^2(R, H)} dR dH, \quad (2.3)$$

где M' – постоянный параметр, пропорциональный скорости распыления, $\varphi(R, H)$ – угол распыления, $\gamma(R, H)$ – угол конденсации, $r(R, H)$ – расстояние до вертикальной стенки, R – координата точки источника, H – координата точки вертикальной стенки, $\Pi(R)$ – полином, учитывающий неоднородность в распылении поверхности АВ. Так как выражение, стоящее под интегралом в (2.3), зависит только от геометрических размеров данного рельефа и практически не изменяется в процессе напыления, то, изменяя M' , можно управлять толщиной пленки на боковых поверхностях подложки.

Скорость травления описывается выражением [2]:

$$S = S_0 \frac{j}{\rho} (A \cos \Theta + B \cos^2 \Theta + C \cos^4 \Theta), \quad (2.4)$$

где S_0 – эффективность травления пленки в исходных условиях, j – плотность тока в ионном пучке, ρ – плотность атомных слоев, Θ – угол травления, A, B, C – коэффициенты, характеризующие эффективность травления пленки.

Учитывая вклад каждой из стадий (нанесение, распыление, перенесение), можно записать:

$$R = R' - S + M' \int_0^R \int_0^H \frac{\cos \varphi(R, H) \cos \gamma(R, H) \Pi(R)}{r'^2(R, H)} dR dH, \quad (2.5)$$

$$V = M \frac{\cos \varphi}{r^2},$$

$$h = M \frac{\cos \varphi}{r^2} t,$$

где M – постоянный параметр, пропорциональный скорости распыления, φ – угол конденсации, r – расстояние до вертикальной стенки, t – время напыления.

Если учесть, что M' и S определяются в основном интенсивностью дополнительного ионного пучка то, изменяя последнюю можно легко регулировать скорость осаждения (2.5), а соответственно и толщину покрытия на вертикальных и горизонтальных стенках. При этом становится возможным улучшение профиля заполнения рельефа, даже при отсутствии наклона подложки.

3 Описание модели, основанной на воздействии электромагнитных полей

Для формирования плазмы используется энергия постоянного поля и энергия электромагнитных волн низкочастотного, высокочастотного и сверхвысокочастотного диапазонов и частотой

до 46.68 МГц за счёт использования для распыления мишенной (катода) скрещённых ЕХН полей в магнетронных распылительных системах.

Основным видом направленного движения электронов в плоскости, перпендикулярной силовым линиям магнитного поля, является циклотронное излучение, характеризуемое радиусом, поэтому ионно-плазменные потоки в магнетронах являются источниками мощных СВЧ полей.

Физико-химические процессы формирования и распыления потоков внутри плазмы соответствуют линейной зависимости для плазмы между плотностью тока j и напряжённостью эффективного электрического поля $E_{эфф}$, содержащую воздействия неэлектрического происхождения (т. н. сторонние силы), вызывающие ток. Характер воздействия этих сил описывается эффектом Холла, заключающемся в возникновении в плазме электромагнитного поля, перпендикулярное j и H . Постоянная Холла является основной количественной характеристикой эффекта Холла. Ввиду того, что существует наличие эффекта Холла в процессе распределения потока частиц плазмы, то имеется воздействие поперечного электромагнитного поля, влияние которого нужно учитывать, ввиду того, что например, в термоядерных системах, термическая разность потенциалов может достигать десятков кВ, а омическая составляющаяся может быть очень малым.

Плазма обладает огромным количеством электромагнитных свойств, и в ней возможно наблюдать различные явления электромагнитной природы. Такое поведение хорошо видно для плазмы, которая испытывает воздействие внешнего магнитного поля. Циклотронное движение заряженных частиц вокруг силовых линий магнитного поля приводит к анизотропии среды.

Одной из важнейших свойств плазмы является нейтральность ее макроскопических электромагнитных параметров, поддерживаемая вследствие взаимной компенсации пространственного заряда положительных ионов и электронов. Однако нейтральность существует лишь в среднем – в достаточно больших объемах и за достаточно большие интервалы времени. Поэтому плазма – квазинейтральная среда. Области плазмы и временные промежутки, на протяжении которых может нарушаться компенсация объемного заряда, называют пространственным и временным масштабами разделения зарядов.

Тонкий слой, образовавшийся двумя пространственно разделенными слоями электрических зарядов разного знака, называется двойным электрическим слоем (ДЭС) [2]. Данное электрофизическое явление может происходить на границе двух фаз, например на границе газ – твердое вещество (подложка), а также внутри одной фазы, например в ионизированных газах (аргон и т. д.). Пространственное разделение

зарядов в ДЭС обычно обладает электрической разностью потенциалов $\Delta\phi$. Разность потенциалов может оказывать существенное влияние на электрофизические процессы, на скорость осаждения и адсорбцию пленок и т. д.

В плазме возможны явления распространения волн только в весьма тонком слое, ввиду того что наблюдается отражение с глубиной проникновения:

$$d \approx \left| \frac{1}{k} \right| = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}} \approx \frac{c}{\omega_p}. \quad (3.1)$$

Электромагнитное поле в плазме оказывается не малым лишь в пределах весьма тонкого слоя, толщина которого определяется формулой (3.1). Данное описание не является достаточно полным. Область существования электромагнитного поля в плазме ограничена тонким поверхностным слоем и означает, что характерный пространственный масштаб изменения поля в плазме по порядку величины не превышает размеров слоя. Тогда в поверхностном слое могут реализоваться такие условия, что

$$\left| \frac{\omega}{k} \right| \leq \sqrt{\frac{T}{m}}.$$

Тогда поперечная проводимость плазмы на порядки выше, чем действительная часть диэлектрической проницаемости, и глубина проникновения рассчитывается учитывая явление обычного скин-эффекта, проводимостью среды. Но в отличие от обычного скин-эффекта эффективная проводимость находится под большим воздействием пространственной дисперсии и сильно зависит от глубины проникновения. Рассматриваемый эффект – поперечный аналог затухания Ландау. По этой причине он и получил название *аномального скин-эффекта*.

Мерой аномального скин-эффекта является поверхностный импеданс:

$$Z \equiv \left(\frac{E_y}{B_z} \right)_{x=+0} = -i \left(\frac{\omega}{\pi c} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \frac{1}{k_x^2 - i \frac{4\pi\omega}{c^2} \sigma_T(|k_x|, \omega)}.$$

Так как плазма инертных газов [1] испытывает воздействия напряженностей магнитного и электрического полей, и в ней существует область пространственного разделения зарядов (плазма – подложка), и существует воздействие внешних электрических и магнитных полей, вызванных источником ионных пучков, то для данной плазмы справедливы как эффект Холла, так и аномального скин-эффекта. На основании этого можно предположить, что существует воздействие электромагнитных волн на границу раздела смежных сред: подложка – инертный ионизированный газ с пониженным давлением 0.1 Па

[1]. Фактически мы имеем поверхность раздела слоистых сред с различными электрофизическими свойствами.

4 Метод математического моделирования поверхностно-активных процессов напыления

Моделирование является одним из наиболее распространенных способов изучения различных процессов и явлений. Исходя из самых общих представлений, *моделирование* представляет собой процесс замещения объекта исследования некоторой его моделью и проведение исследований на модели с целью получения необходимой информации об объекте. В свою очередь, *модель* можно определить как физический или абстрактный образ моделируемого объекта, удобный для проведения исследований и позволяющий адекватно отображать интересующие исследователя физические свойства и характеристики объекта.

В настоящее время известны и широко используются в научных исследованиях и инженерной практике многочисленные методы и приемы моделирования. В общем случае можно выделить *физическое* и *математическое* моделирование [4].

При *физическом (натурном) моделировании* модель воспроизводит изучаемый процесс или объект с сохранением его физической природы. Физическое моделирование широко применялось до недавнего времени при проектировании сложных технических объектов. Физическое моделирование связано со значительными материальными и временными затратами. Поэтому физическое моделирование имеет ограничения в применении.

В этом отношении более широкие возможности у *математического* и *компьютерного* моделирования. Под математическим моделированием понимают процесс создания математической модели и оперирование ею с целью получения необходимых сведений о реальном или проектируемом технологическом объекте. Математическое моделирование позволяет посредством математических символов и зависимостей составить описание функционирования технологической системы в условиях окружающей среды, определить выходные параметры и характеристики, получить оценку показателей эффективности и качества, осуществить поиск оптимальной структуры и параметров объекта [4].

5 Выбор методов математического моделирования

Для модели, основанной на скорости осаждения ионов, была выбран метод моделирования «струна». В модели струны (рисунок 3) граница между обработанной и необработанной областями (например, между протравленной и непротравленной областями в ходе травления) аппроксимируется

набором точек, соединенных между собой прямыми отрезками.

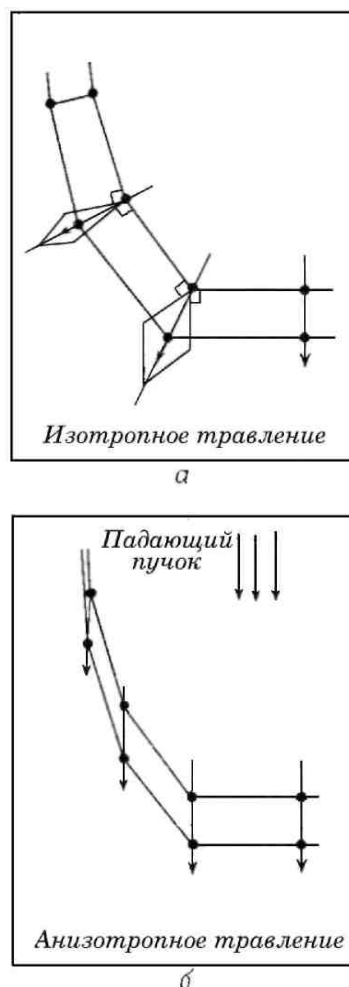


Рисунок 3 – Использование модели струны для представления процессов травления: а – изотропное и б – анизотропное поступательное движение точек, принадлежащих профилю края обрабатываемой поверхности

Результирующий профиль обработанной поверхности определяется положением первоначального профиля [3], который движется через среду с учетом того, что скорость распространения в каждой точке является функцией локальных переменных. Рассмотрим пример, приведенный на рисунке 3, а и б, который иллюстрирует приложение модели струны к процессам изотропного и анизотропного травления. Моделирование изотропного травления заключается в придании всем точкам струны постоянной скорости перемещения в направлении биссектрисы угла, образуемого между двумя перпендикулярами к соседним прямолинейным отрезкам. Скорость анизотропного травления пропорциональна косинусу угла между направлением потока травящих частиц и нормалью к поверхности (рисунок 3, б).

Граница обрабатываемого материала представляется в виде ломаной линии, координаты узлов которой хранятся в памяти.

В каждый момент времени вычисляются скорости движения границы, и происходит сдвиг либо узлов в направлении биссектрис углов между сегментами, либо сегментов в перпендикулярном им направлении. В рамках модели струны рост пленок в ходе осаждения моделируется как травление с отрицательной скоростью. Продвижение каждой точки кусочно-линейного профиля определяется условиями осаждения. В процессе такого продвижения происходит добавление или отбрасывание точек на отрезках струны, когда они становятся длинными или очень короткими.

Для построения модели воздействия электромагнитных полей был выбран метод конечных элементов. С точки зрения вычислительной математики, идея метода конечных элементов заключается в том, что минимизация функционала вариационной задачи осуществляется на совокупности функций, каждая из которых определена на своей подобласти, для численного анализа системы позволяет рассматривать его как одну из конкретных ветвей диакоптики – общего метода исследования систем путём их расчленения.

Для построения этой модели применяются следующие математические зависимости:

$$\frac{\partial j_{полн}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \nabla^2 E - \frac{1}{\mu} \text{grad}(\text{div} E). \quad (5.1)$$

В декартовых координатах (5.1) будет иметь вид

$$\frac{\partial j_{полн.x}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right),$$

$$\frac{\partial j_{полн.y}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right),$$

$$\frac{\partial j_{полн.z}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right).$$

На поверхности раздела также справедливо соотношение

$$\text{div} i + I_{qx_1} - I_{qx_2} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}.$$

6 Результаты численного моделирования

При моделировании, с учетом модели, основанной на скорости осаждения ионов полученные результаты показаны на рисунке 4. При применении модели, учитывающей электромагнитные воздействия полученные результаты представлены на рисунке 5.

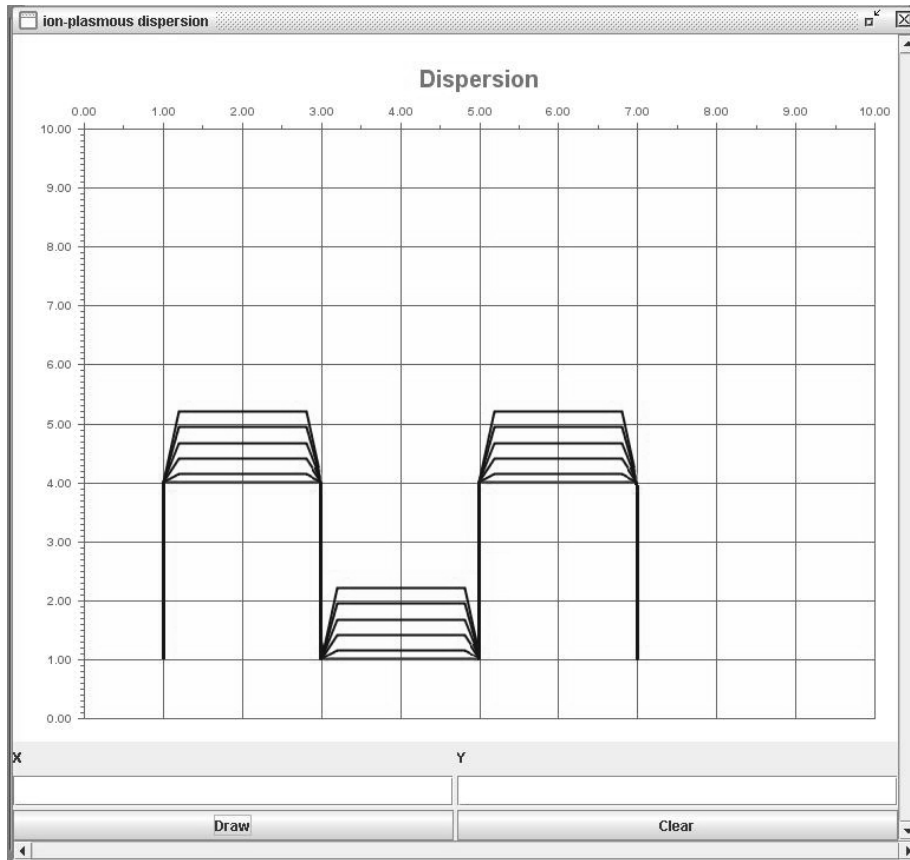


Рисунок 4 – Результаты моделирования, основанного на скорости осаждения ионов

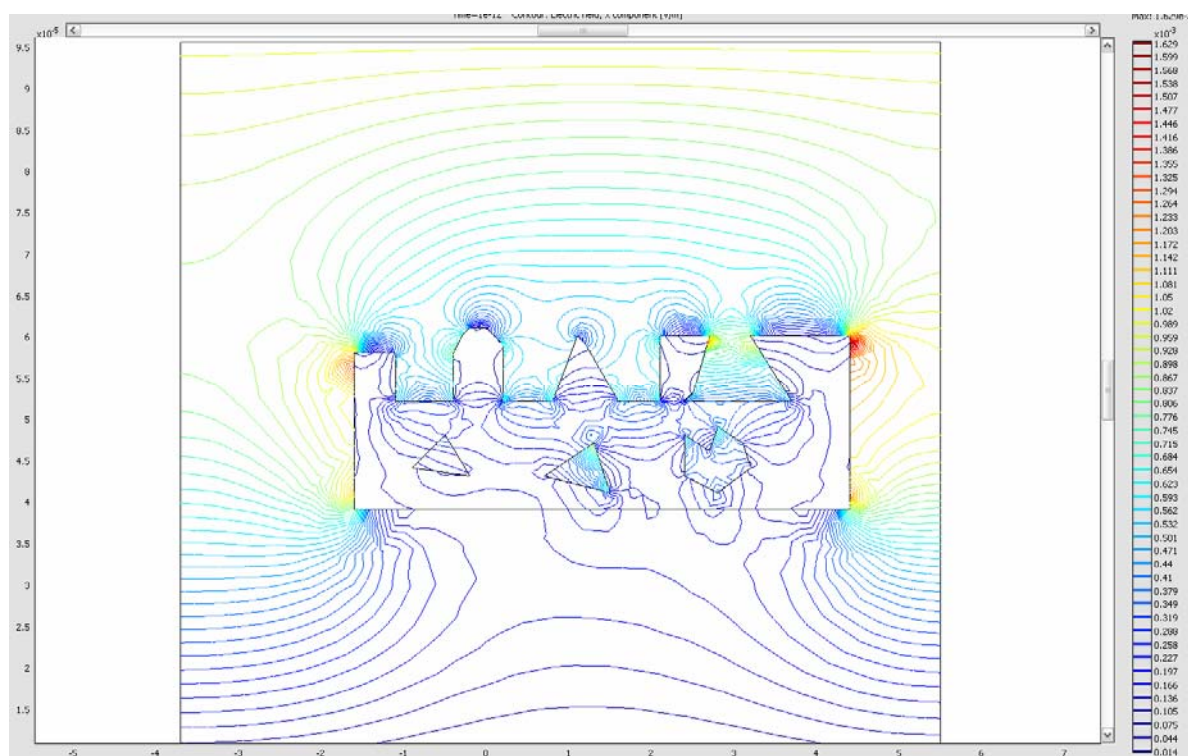


Рисунок 5 – Результаты моделирования, учитывающего воздействие электромагнитных полей

Заключение

В данной работе были исследованы две различные модели, описывающие процессы формирования тонкопленочных структур под воздействием ионных потоков. На основании исследования, можно сделать вывод, что модель, основанная на геометрическом и количественном описании процесса не учитывает природу сил, воздействующих на подложку при формировании тонкопленочной структуры и может применяться только для весьма упрощенного описания процесса. А вот модель, которая учитывает воздействие электромагнитных полей более полно и реалистично описывает процессы, происходящие при формировании тонкопленочных структур ионными потоками инертных газов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волин, Э.М. Ионно-плазменные методы получения износостойких покрытий / Э.М. Волин // Технология легких сплавов. – 1984. – № 10. – С. 132–134.
2. Структура и механические свойства вакуумно-плазменных покрытий TiCN / В.М. Мацевитый [и др.] // Известия высших учебных

заведений. Черная металлургия. – 1984. – № 4. – С. 85–88.

3. Майссела, Л. Технология тонких пленок / Л. Майссела, Р. Гленга. – М. : Советское радио, 1977.

4. Кундас, С.П. Компьютерное моделирование технологических систем / С.П. Кундас, Т.А. Кашко. – Минск : БГУИР, 2002. – 168 с.

5. Анищенко, Л.М. Автоматизированное проектирование и моделирование технологических процессов / Л.М. Анищенко, С.Ю. Лавренко, В.В. Петрухин. – Минск : Радио и связь, 1995. – 176 с.

6. Шульман, З.П. Магнитно-реологический эффект / З.П. Шульман, В.И. Кордонский. – Минск : Наука и техника, 1982.

7. Гринчик, Н.Н. Влияние тепловых и диффузионных процессов на распространение электромагнитных волн в слоистых материалах / Н.Н. Гринчик, А.П. Достанко. – Минск : Академия наук, 2005.

Поступила в редакцию 19.04.11.

УДК 621.396.67

БИАНИЗОТРОПНЫЕ МАТЕРИАЛЫ С СИЛЬНЫМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

С.А. Третьяков

Университет Аалто, электротехнический факультет, Финляндия

BIANISOTROPIC MATERIALS OPTIMIZED FOR STRONG INTERACTIONS WITH ELECTROMAGNETIC FIELDS

S.A. Tretyakov

Aalto University School of Electrical Engineering, Finland

В статье обсуждается новая концепция метаматериалов для оптимального взаимодействия с электромагнитными волнами. В этих материалах форма элементов специально выбрана таким образом, чтобы у частиц была максимально возможная энергия в поле заданной плоской электромагнитной волны в композитной среде, составленной из данных частиц. Оказывается, что оптимальные частицы – бианизотропны и метаматериал для взаимодействия с плоскими линейно поляризованными затухающими волнами – это материал на основе Ω -элементов, в то время как для распространяющихся волн это определенный невзаимный материал.

Ключевые слова: метаматериалы, электромагнитные волны, композитные среды, взаимодействие, Ω -элементы.

In this report we discuss the new concept of “optimal metamaterials” for interactions with electromagnetic waves. In these materials the inclusion shape is chosen so that the particles have the maximum possible energy in the field of a given plane electromagnetic wave propagating or decaying inside the composite medium composed of these particles. It appears that the optimal particles are bianisotropic, and the “optimal material” for interactions with plane linearly polarized evanescent waves is the omega material, while for propagating waves it is a certain nonreciprocal material.

Keywords: metamaterial, electromagnetic waves, composite medium, interactions, omega material.

Introduction

Recently, it was noticed that the shape of chiral particles (for example, helices) can be optimized in such a way that these optimal helices radiate waves of only one circular polarization, whatever is the exciting field [1]. Later, it was shown that the optimal spiral shape corresponds to the maximum (or minimum) energy of the particle in a given plane-wave field [2] interacting with the wave in the most effective way. Furthermore, mixtures of optimal spirals realize effective media with the index of refraction $n = -1$ for one of the circular polarizations, while the same medium is transparent for the orthogonal circular polarization [3]. It has been therefore established that there exist metamaterials whose properties are optimal for interactions with circularly polarized waves.

The goal of the present work is to find the optimal inclusions for metamaterials which would interact most effectively with linearly polarized plane waves. The inclusion properties should be optimized so that the optimal material would store as much energy density as possible in the field of a given plane wave (for a given concentration of inclusions). This study is restricted to composites formed by electrically small inclusions, modeled as electric and magnetic dipoles, so that the effective medium description remains possible.

Omega particle as the “best particle” for interaction with linearly polarized evanescent waves

It is obvious that in order to enhance the field-material interaction we need to design a medium which would be polarizable by both electric and magnetic fields, and the particles should be bianisotropic, but not just a set of individual electrically and magnetically polarizable inclusions. Indeed, in the optimal spiral the electromotive forces induced by electric and magnetic fields sum up in phase enhancing the overall current induced in the spiral. With this in view, we assume that the optimal particle is a bianisotropic particle whose electric and magnetic moments are induced by both fields. Considering for simplicity of writing a linearly polarized plane wave whose electric field is directed along and magnetic field along, we write the generic polarizability relation as

$$\begin{aligned} p_z &= \alpha_{ee} E_z + \alpha_{em} H_y, \\ m_y &= \alpha_{mm} H_y + \alpha_{me} E_z. \end{aligned}$$

Here \mathbf{p} and \mathbf{m} are the induced electric and magnetic dipole moments, respectively, and alphas are the polarizability coefficients. We define the optimal interaction with the fields as the extremum value of the electromagnetic energy of the particle in the given field, which is equal to

$$W = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}^* + \mathbf{m} \cdot \mathbf{H}^*) =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \alpha_{ee} |E|^2 + \alpha_{em} HE^* + \alpha_{me} EH^* + \alpha_{mm} |H|^2 \right\}.$$

Here and in the following we drop the indices y, z for shortness.

Considering reciprocal particles, we use the relation following from the reciprocity theorem (e.g., [4]): $\alpha_{em} = -\alpha_{me}$. Denoting the wave impedance of the exciting plane wave by Z , we can rewrite the particle energy as

$$W = -\frac{1}{2} |E|^2 \operatorname{Re} \left\{ \alpha_{ee} + \alpha_{em} \left(\frac{1}{Z} - \frac{1}{Z^*} \right) + \alpha_{mm} \frac{1}{|Z|^2} \right\}.$$

At this point we can observe that reciprocal particles in the field of linearly polarized plane waves can “benefit” from magnetoelectric coupling in the particles only if the exciting wave is evanescent.

Indeed, for travelling waves the wave impedance Z is real, and the term proportional to α_{me} cancels out. However, for evanescent waves, for which the wave impedance is purely imaginary, the situation is dramatically different. Considering waves propagating or decaying in the direction shown on figure 1, the wave impedance for evanescent waves reads

$$Z = \frac{j}{\beta} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}},$$

where $\beta = \sqrt{\frac{k_t^2}{k_0^2} - 1}$ for TE polarization (with respect

to the decay direction) and $\beta = \frac{1}{\sqrt{\frac{k_t^2}{k_0^2} - 1}}$ for TM

polarization. Now we can optimize the coupling coefficient to maximize the particle energy.

To do that, we note that there exists so called “hierarchy of polarizabilities” of small bianisotropic particles, where the electric polarizability is the strongest, then comes the cross-coupling coefficient (first-order spatial dispersion), and the weakest effect is the artificial magnetism (second-order effect). As a specific example, we consider an omega particle (figure 1) and make use of approximate

expressions for its polarizabilities (neglecting the electric polarization of the loop) [4]

$$\alpha_{ee} = -j \frac{l^2}{\omega Z_{tot}},$$

$$\alpha_{me} = \pm j \alpha_{ee} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{k_0 S}{l},$$

$$\alpha_{mm} = \alpha_{ee} \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{k_0 S}{l} \right)^2.$$

Here Z_{tot} is the total impedance of the particle (the sum of the input impedances of the loop and the pair of strips). At the resonance of the particle $Z_{tot} = R_{tot}$ is a real number. One can note that the “scaling factor” $\frac{k_0 S}{l}$ is small for electrically very small particles, but can be of the order of unity for inclusions used in the design of metamaterials.

Finally, we are ready to express the particle energy in the form suitable for optimization of its shape:

$$W = -\frac{1}{2} |E|^2 \frac{l^2}{\omega X_{tot}} \{1 \pm 2x + x^2\},$$

where $x = \frac{\beta k_0 S}{l}$ (we consider the resonant frequency case). Obviously, the energy takes the extremal values at $x = \pm 1$. One of these solutions corresponds to zero value of W (the particle is “invisible”), and for the other solution W is two times larger than the sum of energies of the two dipoles in the absence of bianisotropic coupling.

The physical nature of this optimal behaviour is similar to the case of chiral particles in the field of circularly polarized waves: In one extreme case the electromotive forces induced by electric and magnetic fields cancel out, and the total induced current is zero, while in the other extreme case the two forces sum up in phase and interaction is optimally enhanced. Note that the extremum condition ($x = \pm 1$) depends not only on the particle shape and the frequency but also on the transverse wave number (decay factor) of the exciting evanescent wave.

The physical nature of this optimal behaviour is similar to the case of chiral particles in the field of circularly polarized waves: In one extreme case the electromotive forces induced by electric and magnetic fields cancel out, and the total induced current is zero, while in the other extreme case the two forces sum up in phase and interaction is optimally enhanced. Note that the extremum condition ($x = \pm 1$) depends not only on the particle shape and the frequency but also on the transverse wave number (decay factor) of the exciting evanescent wave.

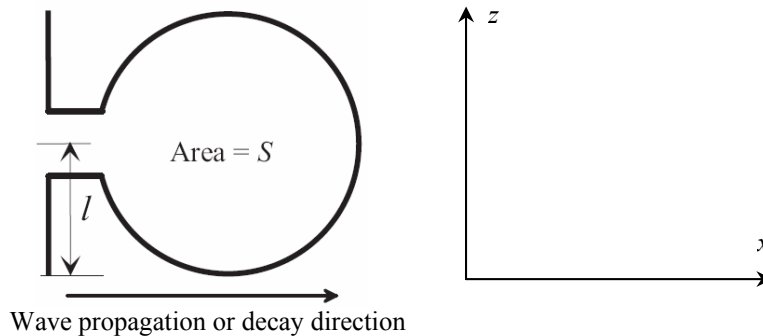


Figure 1 – An omega inclusion and the associated co-ordinate system

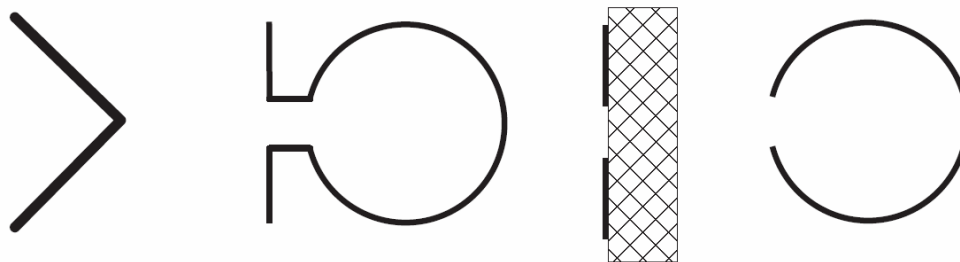


Figure 2 – Various geometries which exhibit omega coupling

The next step is to study eigenwaves in an effective medium formed by many optimal omega particles and check if the evanescent wave for which the particles have been tuned is actually an eigenwave in the medium. The answer to this question is positive. Furthermore, it is interesting to consider what inclusions are optimal for interactions with propagating linearly polarized waves. It can be shown that such optimal particles exist, but they are nonreciprocal inclusions, and the corresponding composite material belongs to the class of artificial moving media.

Conclusion

In summary, we have discussed the concept of optimal particles and composite materials for interactions with linearly polarized waves. The optimal particles extract maximum power from electromagnetic waves (for a given concentration and resonant frequency of inclusions). Apparently, these particles are also the optimal radiators of power. Many structures, widely used in various applications, have the symmetry which allows omega coupling (see some examples in figure 2).

The use of the optimal material is expected to allow optimization of electromagnetic performance of various devices, where the material interacts with linearly polarized plane waves (antennas, absorbers, sensors, lenses, and so on). This concept of optimal materials was first introduced in the conference presentation [5].

REFERENCES

1. *Semchenko, I.V.* Radiation of circularly polarized electromagnetic waves by the artificial flat lattice with two-turn helical elements / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, A.L. Samofalov // *Bianisotropics 2004*. – 10th International Conference on Complex Media and Metamaterials, Ghent, Belgium. – 22–24 September 2004. – 525 p.
2. *Semchenko, I.V.* Optimal shape of spiral: Equality of dielectric, magnetic and chiral properties / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, A.L. Samofalov // *NATO ARW & META'08*, Marrakesh, Morocco. – 7–10 May, 2008. – P. 71–80.
3. *Chiral metamaterial with unit negative refraction index* / I.V. Semchenko [et al.] // *The European Physical Journal – Applied Physics*. – 2009. – Vol. 46. – № 3. – P. 326–330.
4. *Electromagnetics of bianisotropic materials: Theory and applications* / A.N. Serdyukov [et al.] // Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers. – 2001.
5. *Tretyakov, S.A.* The optimal material for interactions with linearly-polarized electromagnetic waves / S.A. Tretyakov // *Proc. of the Fourth International Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics (Metamaterials' 2010)*. – Karlsruhe, Germany, September 13–18, 2010. – P. 65–67.

Поступила в редакцию 31.05.11.

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ С НЕСОПРЯЖЕННЫМИ МЕТАНИЛЬПОТЕНТНЫМИ МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

А.В. Бузланов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

FINITE SOLUBLE GROUPS WITH INCONJUGATE METANILPOTENT MAXIMAL SUBGROUPS

A.V. Buzlanov

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Изучается строение конечной разрешимой группы с двумя несопряженными самонормализуемыми максимальными подгруппами, принадлежащими локальной подформации формации всех метанильпотентных групп.

Ключевые слова: конечная группа, разрешимая группа, максимальная подгруппа, несопряженные подгруппы, локальная формация, формация всех метанильпотентных групп.

The structure of a finite soluble group with two inconjugate selfnormalizable maximal subgroups belonging to the local subformation of the formation of all metanilpotent groups is studied.

Keywords: finite group, soluble group, maximal subgroup, inconjugate subgroups, local formation, formation of all metanilpotent groups.

Введение

В работе [1] изучались конечные разрешимые группы с двумя несопряженными самонормализуемыми сверхразрешимыми максимальными подгруппами. В [2] результат работы [1] был обобщен для случая, когда несопряженные самонормализуемые максимальные подгруппы принадлежат локальной подформации формации \mathfrak{M} всех групп с нильпотентным коммутантом. В настоящей работе изучается строение конечной разрешимой группы с двумя несопряженными самонормализуемыми максимальными подгруппами, принадлежащими локальной подформации формации \mathfrak{M}^2 всех метанильпотентных групп. Результаты, полученные в работе, имеют следствиями соответствующие результаты работ [1] и [2].

Рассматриваются только конечные и разрешимые группы. Обозначения и определения, используемые в работе, можно найти в [3] и [4].

1 Используемые определения и леммы

Лемма 1.1. Пусть \mathfrak{F} – локальная формация, не \mathfrak{F} -группа G имеет две несопряженные самонормализуемые максимальные подгруппы, принадлежащие \mathfrak{F} . Тогда хотя бы одна из этих подгрупп содержит подгруппу $F(G)$.

Доказательство. Пусть M_1 и M_2 – несопряженные самонормализуемые максимальные подгруппы группы G , принадлежащие \mathfrak{F} . Не ограничивая общности, будем считать, что $\Phi(G)=1$.

Предположим, что $F(G) \not\subseteq M_1$ и $F(G) \not\subseteq M_2$. Так как $\Phi(G)=1$, то по лемме 7.9 из [3] подгруппа $F(G)=N_1 \times N_2 \times \dots \times N_k$, где N_1, \dots, N_k – минимальные нормальные подгруппы группы G . Ввиду максимальности M_1 и M_2 группа $G = M_1 F(G) = M_2 F(G)$. Тогда $G = N_i \lambda M_1 = N_j \lambda M_2$ для некоторых i, j . Если $N_i \neq N_j$, то из $G/N_i \cong M_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_j \cong M_2 \in \mathfrak{F}$ следует $G \cong G/(N_i \cap N_j) \in \mathfrak{F}$, что невозможно по условию. Следовательно, $N_i = N_j = G^{\mathfrak{F}}$. Тогда M_1 и M_2 – \mathfrak{F} -абнормальные \mathfrak{F} -подгруппы группы G . По теореме 15.1 из [3] подгруппы M_1 и M_2 являются \mathfrak{F} -проекторами разрешимой группы G . По теореме 15.3 из [3] они сопряжены, что противоречит условию.

Лемма 1.2. Пусть \mathfrak{F} – локальная формация, не \mathfrak{F} -группа G с $\Phi(G)=1$ имеет самонормализуемую максимальную подгруппу M , принадлежащую \mathfrak{F} и содержащую $F(G)$. Тогда для любой минимальной нормальной подгруппы P группы G , содержащейся в $G^{\mathfrak{F}}$, $C_G(P) \subseteq M$.

Доказательство. Так как $P \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, то P является G -главным фактором группы $G^{\mathfrak{F}}$. Поскольку $\Phi(G)=1$, то $P \not\subseteq \Phi(G)$ и по следствию 8.1.2 из [3] P является \mathfrak{F} -эксцентальной минимальной нормальной подгруппой группы G . Ввиду разрешимости группы G подгруппа P

является p -группой для некоторого простого числа p . Тогда $G/C_G(P) \notin f(p)$ для некоторого внутреннего локального экрана f формации \mathfrak{F} .

Предположим, что $C_G(P) \not\subseteq M$. Тогда $C_G(P)M = G$ ввиду максимальной M . Так как $P \subseteq F(G) \subset M$, то P – минимальная нормальная подгруппа группы M . Поскольку $M \in \mathfrak{F}$, то P – \mathfrak{F} -центральный главный фактор группы M , т. е. $M/C_M(P) \in f(p)$. Но тогда

$$\begin{aligned} G/C_G(P) &= MC_G(P)/C_G(P) = \\ &= M/(M \cap C_G(P)) = M/C_M(P) \in f(p). \end{aligned}$$

Полученное противоречие показывает, что $C_G(P) \subset M$.

Лемма 1.3. Пусть \mathfrak{H} – непустая формация. Локальная формация \mathfrak{F} является подформацией формации $\mathfrak{N}\mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда \mathfrak{F} имеет локальный \mathfrak{H} -экран.

Доказательство. Если \mathfrak{F} – локальная подформация формации $\mathfrak{N}\mathfrak{H}$, то \mathfrak{F} имеет локальный \mathfrak{H} -экран согласно п. 10 §4 из [3].

Пусть f – локальный \mathfrak{H} -экран формации \mathfrak{F} , группа $G \in \mathfrak{F}$. Для любого главного фактора H/K группы G фактор-группа

$$G/C_G(H/K) \in f(H/K) \subseteq \mathfrak{H}.$$

Тогда $G/(\cap C_G(H/K)) \in \mathfrak{H}$, если H/K пробегает все главные факторы группы G . Ввиду следствия 4.1.1 из [3] $\cap C_G(H/K) = F(G)$. Следовательно, $G/F(G) \in \mathfrak{H}$, откуда $G^{\mathfrak{H}} \subseteq F(G) \in \mathfrak{N}$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{H}$.

Заметим, что при $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$ из леммы 1.3 следует, что локальная формация \mathfrak{F} является подформацией формации \mathfrak{N}^2 тогда и только тогда, когда \mathfrak{F} имеет локальный \mathfrak{N} -экран.

Лемма 1.4. Пусть f – локальный \mathfrak{N} -экран, группа G действует точно и неприводимо на некоторой p -группе P и имеет самономализуемую максимальную подгруппу M , принадлежащую формации $\langle f \rangle$ и действующую f -стабильно на P . Тогда $M = M_p \rtimes M_{p'}$, $M_{p'} \in f(p)$, и либо M – картеровская p' -группа, принадлежащая $f(p)$, либо $1 \neq M_p = G_p$ и $G = F(G)M$.

Доказательство. Пусть

$$P = P_0 \supset P_1 \supset \dots \supset P_t = 1 \quad (1.1)$$

есть M -композиционный ряд группы P , все факторы которого f -центральны относительно M , т. е. $M/C_M(P_{i-1}/P_i) \in f(p)$ для $i = 1, 2, \dots, t$.

Тогда $M/(\bigcap_{i=1}^t C_M(P_{i-1}/P_i)) \in f(p)$. Группа

$C = \bigcap_{i=1}^t C_M(P_{i-1}/P_i)$ действует тождественно на каждом факторе ряда (1.1) и по лемме 3.10 из [3] является p -группой. Следовательно, $C \subseteq M_p$ для некоторой силовской p -подгруппы M_p группы M . Так как f является \mathfrak{N} -экраном, то $M/C_M(P_{i-1}/P_i) \in \mathfrak{N}$ для $i = 1, 2, \dots, t$. По лемме 3.9 из [3] $M/C_M(P_{i-1}/P_i)$ не имеет неединичных нормальных p -подгрупп. Следовательно, $M_p \subseteq C_M(P_{i-1}/P_i)$ для всех $i = 1, 2, \dots, t$. Тогда

$$M_p \subseteq \bigcap_{i=1}^t C_M(P_{i-1}/P_i) = C.$$

Таким образом, $M_p = C \triangleleft M$, поэтому $M = M_p \rtimes M_{p'}$. Кроме того,

$$M_{p'} \cong M/M_p = M/C \in f(p).$$

Возможны два случая. Если $M_p = 1$, то $M = M_{p'} \in f(p) \subseteq \mathfrak{N}$ и поэтому M является картеровской p' -группой.

Пусть $M_p \neq 1$. Предположим, что $M_p \subset G_p$ для некоторой силовской p -подгруппы G_p группы G . По теореме 3.8 из [4] $M_p \subset N_{G_p}(M_p) \subseteq G_p$. Поэтому $G = \langle N_{G_p}(M_p), M \rangle$. Так как $M_p \triangleleft M$, то $M_p \triangleleft \langle N_{G_p}(M_p), M \rangle = G$. Но по лемме 3.9 из [3] группа G не имеет неединичных нормальных p -подгрупп. Следовательно, предположение неверно и $M_p = G_p$.

Предположим, что $F(G) \subset M$. Пусть H – силовская p -подгруппа группы $F(G)$. Тогда $H \text{char} F(G) \triangleleft G$ и по лемме 2.11 из [4] подгруппа $H \triangleleft G$. Так как G не имеет неединичных нормальных p -подгрупп, то $H = 1$ и $F(G)$ – p' -группа. Следовательно, $F(G) \cap M_p = 1$. Поскольку $F(G) \triangleleft M$ и $M_p \triangleleft M$, то $F(G)$ и M_p поэлементно перестановочны. Поэтому $M_p \subseteq C_G(F(G))$. Так как группа G разрешима, то ввиду следствия 4.1.3 из [3] $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$. Значит, $M_p \subseteq F(G)$, что невозможно. Предположение неверно и $F(G) \not\subseteq M$. Ввиду максимальной подгруппы M имеем $F(G)M = G$.

Определение 1.1. Неединичную нормальную p -подгруппу T группы G назовем подгруппой имидтовского типа в G , если выполняются следующие утверждения:

- 1) если T неабелева, то $\Phi(T) = T' = Z(T)$ – подгруппа экспоненты p ;
- 2) если T абелева, то она элементарная;
- 3) если $p > 2$, то $\exp(T) = p$, если $p = 2$, то $\exp(T) \leq 4$;

4) $T/\Phi(T)$ – G -главный фактор и

$$\Phi(T) = T \cap \Phi(G) \subseteq Z(T).$$

Лемма 1.5. Пусть f – локальный \mathfrak{N} -экран, группа G действует точно и неприводимо на некоторой p -группе P , имеет самономализуемую максимальную pd -подгруппу M , принадлежащую формации $\langle f \rangle$ и действующую f -стабильно на P . Тогда $G = F(G)M = QM$, где Q – q -подгруппа шмидтовского типа в G , $q \neq p$, $M_p = G_p$ и либо $Q = G^f$, $M = \langle f \rangle$ -проектор G , если $G \notin \langle f \rangle$, либо $Q = G^{\mathfrak{N}}$, $M \in \mathfrak{N}$, если $G \in \langle f \rangle$.

Доказательство. По лемме 1.4 группа $M = M_p \rtimes M_{p'}$, где $M_{p'} \in f(p)$, $1 \neq M_p = G_p$ и $G = F(G)M$. Тогда

$$G/\Phi(G) = F(G)M/\Phi(G) = (F(G)/\Phi(G))(M/\Phi(G)).$$

По теореме 4.24 из [4] фактор-группа $F(G)/\Phi(G)$ есть прямое произведение абелевых минимальных нормальных подгрупп группы $G/\Phi(G)$. Тогда ввиду максимальной подгруппы M имеем $G/\Phi(G) = (N/\Phi(G)) \rtimes (M/\Phi(G))$ для некоторой минимальной нормальной подгруппы $N/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$. Поскольку $N \subseteq F(G)$, то $N \in \mathfrak{N}$. Так как $G/\Phi(G)$ – разрешимая группа, то $|N/\Phi(G)| = q^a$ для некоторого простого числа q . Пусть Q – силовская q -подгруппа группы N . Поскольку $N \in \mathfrak{N}$, то $Q \text{ char } N \triangleleft G$. По лемме 2.11 из [4] $Q \triangleleft G$. Тогда $G = QM$, $Q \cap M \subseteq \Phi(G)$. Поскольку в G нет неединичных нормальных p -подгрупп, то $q \neq p$.

Пусть $G \notin \langle f \rangle$. Так как

$$G/Q = QM/Q \cong M/(M \cap Q) \in \langle f \rangle,$$

то $G^f \subseteq Q$. Если предположить, что $G^f \subset M$, то $G^f \subseteq Q \cap M \subseteq \Phi(G)$ и из условия $G/G^f \in \langle f \rangle$ ввиду насыщенности локальной формации $\langle f \rangle$ следует $G \in \langle f \rangle$, что невозможно. Поэтому $G^f \not\subseteq M$ и $G = G^f M$. Так как подгруппа M является $\langle f \rangle$ -абнормальной и $M \in \langle f \rangle$, то по теореме 15.1 из [3] M является $\langle f \rangle$ -проектором группы G . По лемме 1 из [2] G^f – подгруппа шмидтовского типа в G .

Пусть $G \in \langle f \rangle$. Так как подгруппа M самономализуема в G , то M является \mathfrak{N} -абнормальной, т. е. $G = G^{\mathfrak{N}} M$. По лемме 1.2 из [3] из условия $G = MQ$, $Q \triangleleft G$ следует, что $M^{\mathfrak{N}} Q = G^{\mathfrak{N}} Q$. Поскольку $M = M_p \rtimes M_{p'}$, где

$M_{p'} \in f(p) \subseteq \mathfrak{N}$, то $M^{\mathfrak{N}} \subseteq M_p$. Так как $p \neq q$, то $G^{\mathfrak{N}} Q = Q \rtimes M^{\mathfrak{N}}$. Тогда $G^{\mathfrak{N}} Q/Q \cong G^{\mathfrak{N}}/(G^{\mathfrak{N}} \cap Q)$ и $G^{\mathfrak{N}} Q/Q = M^{\mathfrak{N}} Q/Q \cong M^{\mathfrak{N}}/(M^{\mathfrak{N}} \cap Q) \cong M^{\mathfrak{N}}$, откуда $G^{\mathfrak{N}}/(G^{\mathfrak{N}} \cap Q) \cong M^{\mathfrak{N}}$. Поскольку $G^{\mathfrak{N}} \cap Q$ есть q -группа, а $M^{\mathfrak{N}}$ – p -группа и $q \neq p$, то $G^{\mathfrak{N}} = (G^{\mathfrak{N}} \cap Q) \rtimes (G^{\mathfrak{N}})_p$ для некоторой силовской p -подгруппы $(G^{\mathfrak{N}})_p$ группы $G^{\mathfrak{N}}$. Так как $G \in \langle f \rangle \subseteq \mathfrak{N}^2$, то $G^{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{N}$ и $(G^{\mathfrak{N}})_p \triangleleft G^{\mathfrak{N}}$. Тогда $(G^{\mathfrak{N}})_p \text{ char } G^{\mathfrak{N}} \triangleleft G$ и по лемме 2.11 из [4] $(G^{\mathfrak{N}})_p \triangleleft G$. Поскольку G не имеет неединичных нормальных p -подгрупп, то $(G^{\mathfrak{N}})_p = 1$, т. е. $G^{\mathfrak{N}}$ – q -группа. Следовательно, $M^{\mathfrak{N}} = 1$ и $M \in \mathfrak{N}$. По лемме 1 из [2] $G^{\mathfrak{N}}$ – подгруппа шмидтовского типа в G .

Лемма 1.6. Пусть \mathfrak{H} – непустая подформация формации \mathfrak{N} , f – локальный \mathfrak{H} -экран, группа $G \in \langle f \rangle$ и действует точно и неприводимо на некоторой p -группе P . Если M – самономализуемая максимальная pd -подгруппа группы G , принадлежащая формации $\langle f \rangle$ и действующая f -стабильно на P , то $G = G^{\mathfrak{H}} M$ и $M \in \mathfrak{H}$.

Доказательство. Так как $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$, то f является локальным \mathfrak{N} -экраном. По лемме 1.5 $G = G^{\mathfrak{N}} M$, где $G^{\mathfrak{N}}$ – q -подгруппа и $q \neq p$. По лемме 1.4 подгруппа $M = M_p \rtimes M_{p'}$, где $M_{p'} \in f(p)$. По лемме 1.2 из [3], учитывая $G^{\mathfrak{N}} \subseteq G^{\mathfrak{H}}$, получим $M^{\mathfrak{H}} G^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{H}}$. Так как $M = M_p \rtimes M_{p'}$, где $M_{p'} \in f(p) \subseteq \mathfrak{H}$, то $M^{\mathfrak{H}} \subseteq M_p$. Поскольку $G^{\mathfrak{N}}$ – q -группа и $q \neq p$, то $M^{\mathfrak{H}} G^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{N}} \rtimes M^{\mathfrak{H}}$. Тогда $G^{\mathfrak{H}} = G^{\mathfrak{N}} \rtimes M^{\mathfrak{H}}$ и $M^{\mathfrak{H}}$ – силовская p -подгруппа $G^{\mathfrak{H}}$. Так как $G \in \mathfrak{N} \mathfrak{H}$, то $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{N}$ и тогда $M^{\mathfrak{H}} \text{ char } G^{\mathfrak{H}} \triangleleft G$. По лемме 2.11 из [4] $M^{\mathfrak{H}} \triangleleft G$. Поскольку G не имеет неединичных нормальных p -подгрупп, то $M^{\mathfrak{H}} = 1$ и $M \in \mathfrak{H}$.

2 Основные результаты

Теорема 2.1. Пусть \mathfrak{F} – локальная подформация формации \mathfrak{N}^2 , не \mathfrak{F} -группа G с $\Phi(G) = 1$ имеет две несопряженные самономализуемые максимальные подгруппы M_1 и M_2 , принадлежащие \mathfrak{F} . Если $M_1 \supset F(G)$ и $M_2 \supset F(G)$, то для любой минимальной нормальной p -подгруппы P группы G , содержащейся в $G^{\mathfrak{F}}$, справедливы следующие утверждения:

1) $G/C_G(P) = F(G/C_G(P))(M_1/C_G(P))$ – pd -группа, не принадлежащая \mathfrak{F} ;

2) $G/C_G(P) = (G/C_G(P))^{\mathfrak{S}}(M_1/C_G(P))$, где $(G/C_G(P))^{\mathfrak{S}}$ – q -подгруппа шмидтовского типа в $G/C_G(P)$, $q \neq p$;

3) $M_1/C_G(P) = (M_1/C_G(P))_p \rtimes (M_1/C_G(P))_{p'}$, где $(M_1/C_G(P))_p = (G/C_G(P))_p$, $(M_1/C_G(P))_{p'} \in f(p) \subseteq \mathfrak{N}$ для некоторого локального экрана f формации \mathfrak{F} ;

4) $M_2/C_G(P)$ – неабелева картеровская p' -подгруппа группы $G/C_G(P)$, $M_2/C_G(P) \in f(p)$.

Доказательство. По лемме 1.2 $C_G(P) \subset M_1$ и $C_G(P) \subset M_2$. Поэтому группа $G/C_G(P)$ действует точно и неприводимо на p -группе P и имеет две несопряженные самонормализуемые максимальные подгруппы $M_1/C_G(P)$, $M_2/C_G(P)$, принадлежащие \mathfrak{F} . По лемме 1.3 \mathfrak{F} имеет локальный \mathfrak{N} -экрэн f .

Предположим, что $M_1/C_G(P)$ и $M_2/C_G(P)$ – p' -группы. По лемме 1.4 подгруппы $M_1/C_G(P)$ и $M_2/C_G(P)$ являются картеровскими подгруппами и по теореме 15.4 из [3] они сопряжены, что невозможно. Следовательно, хотя бы одна из подгрупп $M_1/C_G(P)$, $M_2/C_G(P)$ является pd -группой. Поэтому $G/C_G(P)$ – pd -группа.

Предположим, что обе максимальные подгруппы $M_1/C_G(P)$ и $M_2/C_G(P)$ являются pd -группами. Если $G/C_G(P) \in \mathfrak{F}$, то по лемме 1.5 $M_1/C_G(P) \in \mathfrak{N}$ и $M_2/C_G(P) \in \mathfrak{N}$. Тогда эти подгруппы картеровские и по теореме 15.4 из [3] они сопряжены, что невозможно. Следовательно, $G/C_G(P) \notin \mathfrak{F}$. Тогда по лемме 1.5 подгруппы $M_1/C_G(P)$ и $M_2/C_G(P)$ являются \mathfrak{F} -проекторами и по теореме 15.3 из [3] они сопряжены. Противоречие. Таким образом, только одна из максимальных подгрупп $M_1/C_G(P)$, $M_2/C_G(P)$ является p -группой.

Пусть $M_1/C_G(P)$ – pd -группа, $M_2/C_G(P)$ – p' -группа. По лемме 1.4 группа

$$M_1/C_G(P) = (M_1/C_G(P))_p \rtimes (M_1/C_G(P))_{p'},$$

$$(M_1/C_G(P))_p = (G/C_G(P))_p \text{ и } (M_1/C_G(P))_{p'} \in f(p).$$

Так как f является \mathfrak{N} -экраном, то $f(p) \subseteq \mathfrak{N}$. Утверждение 3) доказано.

Так как $M_2/C_G(P)$ – p' -группа, то по лемме 1.4 $M_2/C_G(P)$ – картеровская подгруппа и $M_2/C_G(P) \in f(p)$. Предположим, что группа $G/C_G(P) \in \mathfrak{F}$. По лемме 1.5 $M_1/C_G(P) \in \mathfrak{N}$ и поэтому является картеровской. По теореме 15.4 из [3] подгруппы $M_1/C_G(P)$ и $M_2/C_G(P)$ сопряжены, что невозможно. Следовательно, $G/C_G(P) \notin \mathfrak{F}$. По лемме 1.5

$$G/C_G(P) = F(G/C_G(P))(M_1/C_G(P))$$

и утверждение 1) доказано.

По лемме 1.5

$$G/C_G(P) = (G/C_G(P))^{\mathfrak{S}}(M_1/C_G(P)),$$

где $(G/C_G(P))^{\mathfrak{S}}$ – q -подгруппа шмидтовского типа в $G/C_G(P)$, $q \neq p$ и утверждение 2) доказано.

Предположим, что p' -группа $M_2/C_G(P)$ абелева. Так как $F(G/C_G(P)) \not\subseteq M_1/C_G(P)$, то по лемме 1.1 $F(G/C_G(P)) \subset M_2/C_G(P)$. Поскольку $M_2/C_G(P)$ абелева, то

$$M_2/C_G(P) \subseteq C_{G/C_G(P)}(F(G/C_G(P))).$$

Тогда по следствию 4.1.3 из [3]

$$F(G/C_G(P)) \supseteq C_{G/C_G(P)}(F(G/C_G(P))) \supseteq M_2/C_G(P).$$

Поэтому $M_2/C_G(P) \triangleleft G/C_G(P)$, что невозможно. Следовательно, $M_2/C_G(P)$ неабелева и утверждение 4) доказано.

Следствие 2.1.1. Пусть \mathfrak{F} – локальная подформация формации \mathfrak{NA} всех групп с нильпотентным коммутантом. Не \mathfrak{F} -группа G не может иметь две несопряженные самонормализуемые максимальные подгруппы, принадлежащие \mathfrak{F} и содержащие $F(G)$.

Доказательство. По лемме 1.3 формация \mathfrak{F} имеет локальный \mathfrak{A} -экрэн f . По утверждению 4) теоремы 2.1 неабелева подгруппа $M_2/C_G(P) \in f(p) \subseteq \mathfrak{A}$, что невозможно.

Определение 1.2. Если p – простое число, то p -группу T будем называть экстраспециальной, если $T' = Z(T) = \Phi(T)$ – группа порядка p .

Теорема 2.2. Пусть \mathfrak{F} – локальная подформация формации \mathfrak{NH} , \mathfrak{H} – непустая подформация формации \mathfrak{N} , f – локальный \mathfrak{H} -экрэн формации \mathfrak{F} , не \mathfrak{F} -группа G с $\Phi(G) = 1$ имеет две несопряженные самонормализуемые максимальные подгруппы M_1 и M_2 , принадлежащие \mathfrak{F} . Если $M_1 \supset F(G)$, $M_2 \not\supseteq F(G)$, то $G = G^{\mathfrak{S}} \rtimes M_2$, где $G^{\mathfrak{S}}$ – минимальная нормальная подгруппа группы G , $|G^{\mathfrak{S}}| = p^m$, $m > 1$, $C = C_G(G^{\mathfrak{S}}) \subset M_1$, группа $G/C = (G/C)^{\mathfrak{N}}(M_1/C) \in \mathfrak{F}$, $(G/C)^{\mathfrak{N}}$ – q -подгруппа шмидтовского типа в G/C , $q \neq p$ и $M_1/C \in \mathfrak{H}$, причем, если $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{A}$, то выполняются следующие утверждения:

$$1) C_{M_1/C}((G/C)^{\mathfrak{N}}/\Phi((G/C)^{\mathfrak{N}})) \supseteq C_{M_1/C}((G/C)^{\mathfrak{N}}) = Z(G/C) \text{ – циклическая группа};$$

$$2) (M_1/C)/C_{M_1/C}((G/C)^{\mathfrak{N}}/\Phi((G/C)^{\mathfrak{N}})) \text{ – циклическая группа порядка } d, \text{ делящего } (|G : M_1| - 1);$$

$$3) \text{ если } (G/C)^{\mathfrak{N}} \text{ неабелева, то она экстраспециальная};$$

4) если $(G/C)^{\mathfrak{N}}$ абелева, P – неединичная минимальная $(G/C)^{\mathfrak{N}}$ -допустимая подгруппа группы G^{δ} порядка p^r , то $|(G/C)^{\mathfrak{N}}/C_{(G/C)^{\mathfrak{N}}}(P)| = q$;

5) если $|(G/C)^{\mathfrak{N}}| = q$, то $P \times (G/C)^{\mathfrak{N}}$ – группа Шмидта и либо $m = r = dk$, либо $m = rdk$, причем $k = 1$, если G^{δ} имеет неединичную циклическую $Z(G/C)$ -допустимую подгруппу.

Доказательство. Так как $\Phi(G) = 1$, то по лемме 7.9 из [3] подгруппа

$$F(G) = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_t,$$

где N_1, N_2, \dots, N_t – минимальные нормальные подгруппы группы G . Поскольку $M_2 \not\subseteq F(G)$, то ввиду максимальности M_2 имеем $G = N_i \rtimes M_2$ для некоторого $i \in \{1, \dots, t\}$. Так как $M_2 \in \mathfrak{F}$, то $G/N_i \cong M_2 \in \mathfrak{F}$ и $N_i = G^{\delta}$ – минимальная нормальная подгруппа группы G . Поскольку группа G разрешима, то $|G^{\delta}| = p^m$ для некоторого простого числа p .

Так как $F(G) \subset M_1$, то по лемме 1.2 $C = C_G(G^{\delta}) \subset M_1$. Поскольку G^{δ} абелева, то $G^{\delta} \subseteq C$ и $G/C \in \mathfrak{F}$. Если $m = 1$, то $|G^{\delta}| = p$ и по теореме 2.16 из [4] группа G/C абелева. Тогда $M_1 \triangleleft G$, что невозможно. Следовательно, $m > 1$.

Так как $G^{\delta} \subseteq F(G) \subset M_1 \in \mathfrak{F}$, то группа M_1/C действует на p -группе G^{δ} f -стабильно. По лемме 1.4 группа $M_1/C = (M_1/C)_p \rtimes (M_1/C)_{p'}$, где $(M_1/C)_p \in f(p)$, и либо M_1/C – картеровская p' -группа, либо $(M_1/C)_p = (G/C)_p \neq 1$ и $G/C = F(G/C)(M_1/C)$.

Пусть M_1/C – pd -группа. Так как $G/C \in \mathfrak{F}$, то по лемме 1.5 $G/C = (G/C)^{\mathfrak{N}}(M_1/C)$, где $(G/C)^{\mathfrak{N}}$ – q -подгруппа шмидтовского типа в G/C , $q \neq p$. По лемме 1.6 подгруппа $M_1/C \in \mathfrak{H}$.

Если M_1/C – p' -группа, то

$$M_1/C \in f(p) \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}.$$

Поскольку M_1 самонормализуема в G , то $G/C = (G/C)^{\mathfrak{N}}(M_1/C)$. Так как $G/C \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^2$, то $(G/C)^{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{N}$ и поэтому $(G/C)^{\mathfrak{N}} \subseteq F(G/C)$. Тогда $G/C = F(G/C)(M_1/C)$ и по лемме 1 из [2] $(G/C)^{\mathfrak{N}}$ – q -подгруппа шмидтовского типа в G/C . По лемме 3.9 из [3] группа G/C не имеет неединичных нормальных p -подгрупп, поэтому $q \neq p$.

Пусть $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{A}$. Тогда $M_1/C \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{A}$. По лемме 4 из [2] $C_{(M_1/C)}((G/C)^{\mathfrak{N}}/\Phi((G/C)^{\mathfrak{N}})) \supseteq C_{M_1/C}((G/C)^{\mathfrak{N}}) = Z(G/C)$.

По теореме 3.2.2 из [6] $Z(G/C)$ – циклическая группа. Получили утверждение 1). Утверждение 2) также является следствием леммы 4 из [2].

Пусть нильпотентный корадикал $(G/C)^{\mathfrak{N}}$ неабелев. По лемме 2 из [2] $(G/C)^{\mathfrak{N}}$ – экстраспециальная группа. Если $(G/C)^{\mathfrak{N}}$ абелев, то по определению 1.1 $(G/C)^{\mathfrak{N}}$ – элементарная q -подгруппа. Тогда $\Phi((G/C)^{\mathfrak{N}}) = 1$ и $(G/C)^{\mathfrak{N}}$ – главный фактор группы G/C . Следовательно, $G/C = (G/C)^{\mathfrak{N}} \rtimes (M_1/C)$. По лемме 8 из [2] выполняются утверждения 4) и 5).

Следствие 2.2.1 [2]. Пусть \mathfrak{F} – локальная подформация формации $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ и конечная разрешимая не \mathfrak{F} -группа G с единичной подгруппой Фраттини имеет две несопряженные ненормальные максимальные подгруппы, принадлежащие \mathfrak{F} . Тогда одна из этих подгрупп M содержит $F(G)$, G^{δ} – G -главный фактор порядка p^m , $m > 1$, $C = C_G(G^{\delta}) \subset M$ и выполняются утверждения:

1) $G/C = (G/C)^{\mathfrak{N}}(M/C) \in \mathfrak{F}$, где $(G/C)^{\mathfrak{N}}$ – q -подгруппа шмидтовского типа в G/C , $q \neq p$ и M/C абелева;

2) $C_{M/C}((G/C)^{\mathfrak{N}}/\Phi((G/C)^{\mathfrak{N}})) \supseteq C_{M/C}((G/C)^{\mathfrak{N}}) = Z(G/C)$ – циклическая группа;

3) $(M/C)/C_{M/C}((G/C)^{\mathfrak{N}}/\Phi((G/C)^{\mathfrak{N}}))$ – циклическая группа порядка d , делящего $(|G : M| - 1)$;

4) если $(G/C)^{\mathfrak{N}}$ неабелева, то она экстраспециальная;

5) если $(G/C)^{\mathfrak{N}}$ абелева, P – неединичная минимальная $(G/C)^{\mathfrak{N}}$ -допустимая подгруппа группы G^{δ} порядка p^r , то

$$|(G/C)^{\mathfrak{N}}/C_{(G/C)^{\mathfrak{N}}}(P)| = q;$$

6) если $|(G/C)^{\mathfrak{N}}| = q$, то $P \times (G/C)^{\mathfrak{N}}$ – группа Шмидта и либо $m = r = dk$, либо $m = rdk$, причем $k = 1$, если G^{δ} имеет неединичную циклическую $Z(G/C)$ -допустимую подгруппу.

Доказательство. Пусть M_1 и M_2 – несопряженные самонормализуемые максимальные подгруппы группы G , принадлежащие \mathfrak{F} . По лемме 1.1 хотя бы одна из этих подгрупп содержит $F(G)$. По следствию 2.1.1 только одна из подгрупп содержит $F(G)$. В теореме 2.2 положим $\mathfrak{H} = \mathfrak{A}$. Тогда f – локальный \mathfrak{A} -экран формации \mathfrak{F} и по лемме 1.3 \mathfrak{F} – локальная подформация формации $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Из теоремы 2.2 следуют все остальные утверждения.

Следствие 2.2.2 (Казарин Л.С., Корзюков Ю.А., [1]). Пусть конечная разрешимая, но несверхразрешимая группа G имеет две несопряженные ненормальные сверхразрешимые максимальные подгруппы и $\Phi(G) = 1$. Тогда одна из этих максимальных подгрупп M содержит $F(G)$, сверхразрешимый корадикал P группы G является G -главным фактором порядка p^m , $m > 1$, $C = C_G(P) \subset M$ и выполняются утверждения:

1) $G/C = \langle yC \rangle \rtimes (M/C)$, где $|yC| = q$ – простое число, отличное от p ;

2) $M/C = \langle tC \rangle \rtimes \langle zC \rangle$, где $\langle zC \rangle = Z(G/C)$;

3) если $|(M/C)/Z(G/C)| = d$, то либо $m = d$ – минимальное решение сравнения $p^x \equiv 1 \pmod{q}$, либо $m = rd$, где r – минимальное решение сравнения $p^x \equiv 1 \pmod{q}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Казарин, Л.С. Конечные разрешимые группы со сверхразрешимыми максимальными подгруппами / Л.С. Казарин, Ю.А. Корзюков // Известия вузов. Математика. – 1980. – № 5. – С. 22–27.

2. Бузланов, А.В. Конечные разрешимые группы с заданными максимальными подгруппами / А.В. Бузланов // Вопросы алгебры : межведомств. сб. / Мин-во обр. Республики Беларусь, Гомельский гос.ун-т им. Ф. Скорины; редкол.: Л.А. Шеметков [и др.] – Мн. : Университетское. – 1993. – Вып. 6. – С. 35–45.

3. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука. – 1978. – 272 с.

4. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов : учебное пособие / В.С. Монахов. – Мн. : Высшая школа. – 2006. – 207 с.

5. Бузланов, А.В. Конечные разрешимые группы с нормальной максимальной метанильпотентной подгруппой / А.В. Бузланов // Вопросы алгебры : межведомств. сб. / Мин-во обр. и науки Республики Беларусь, Гомельский гос.ун-т им. Ф. Скорины; редкол.: Л.А. Шеметков [и др.] – Гомель. – 1995. – Вып. 8. – С. 22–30.

6. Gorenstein, D. Finite Groups / D. Gorenstein. – New York-Evanston-London : Harper & Row Publishers, 1968. – 463 p.

Поступила в редакцию 26.04.11.

УДК 512.548

ВЕКТОР-ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВЕКТОР-МАТРИЦ

А.М. Гальмак

Могилёвский государственный университет продовольствия, Могилёв

VECTOR-DETERMINANTS AND DETERMINANTS OF VECTOR-MATRICES

A.M. Gal'mak

Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev

В статье определяются и изучаются вектор-определители и определители вектор-матриц.

Ключевые слова: вектор-матрица, определитель, вектор-определитель, n -арная группа.

The vector-determinants and determinants of vector-matrices are defined and studied in this paper.

Keywords: vector-matrice, determinant, vector-determinant, n -ary group.

Введение

Понятие вектор-матрицы над произвольным кольцом введено в [1], [2] как обобщение понятия m -арной матрицы Э. Поста [3]. В [1], [2] для произвольных целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки σ из S_k на множестве всех k -компонентных вектор-матриц над ассоциативным кольцом была определена частичная l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$, которая является l -арным аналогом бинарной операции умножения обычных матриц. Первоначально l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ определялась [4], [5] на декартовой степени полугруппы, то есть для вектор-матриц первого порядка. Множество всех k -компонентных вектор-матриц над ассоциативным кольцом P , у которых каждая компонента является квадратной матрицей порядка n , обозначается [1], [2] символом $\mathbf{M}(n, k, P)$. Для ассоциативного, коммутативного кольца P с единицей во множестве $\mathbf{M}(n, k, P)$ выделяется [1] подмножество $\mathbf{GL}(n, k, P)$ всех k -компонентных вектор-матриц, у которых все компоненты обратимы в кольце $\mathbf{M}(n, P)$ всех матриц порядка n над P .

Имеет место

Теорема [1], [2]. Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle \mathbf{M}(n, k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ – l -арная полугруппа, а $\langle \mathbf{GL}(n, k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа. В частности, если $\sigma = (12\dots k)$, то $\langle \mathbf{M}(n, k, P), []_{k+1, (12\dots k), k} \rangle$ – $(k+1)$ -арная полугруппа, а $\langle \mathbf{GL}(n, k, P), []_{k+1, (12\dots k), k} \rangle$ – $(k+1)$ -арная группа.

В теории обычных матриц каждой квадратной матрице над ассоциативным, коммутативным кольцом с единицей ставится в соответствие ее определитель, являющийся элементом этого кольца. Возникает естественный вопрос: что считать аналогом обычного определителя для вектор-матрицы?

В данной работе для каждой вектор-матрицы \mathbf{A} над ассоциативным, коммутативным кольцом с единицей определяются вектор-определитель \mathbf{detA} и определитель $\det\mathbf{A}$, которые для обычной матрицы совпадают с ее определителем. Изучаются свойства \mathbf{detA} и $\det\mathbf{A}$. Рассматривается более общая ситуация, когда для всякой функции u из $\mathbf{M}(n, P)$ в P определяются функции \mathbf{u} и u из $\underbrace{\mathbf{M}(n, P) \times \dots \times \mathbf{M}(n, P)}_k$ в P^k и P

соответственно. В частности, для всякой вектор-матрицы \mathbf{A} над ассоциативным, коммутативным кольцом с единицей определяются вектор-перманент \mathbf{perA} и перманент $\text{per}\mathbf{A}$, которые для обычной матрицы совпадают с ее перманентом.

Сведения об n -арных группах, используемые в данной работе, можно найти у С.А. Русакова [6], а также в книгах [7], [8].

1 Определения

Определение 1.1. Пусть P – ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей. Векторным определителем или вектор-определителем вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$, у которой все компоненты A_1, \dots, A_k являются квадратными матрицами над P , называется упорядоченный набор

$$\mathbf{detA} = (\det A_1, \dots, \det A_k) \in P^k$$

определителей $\det A_1, \dots, \det A_k$ матриц-компонент. Определителем той же вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ называется произведение

$$\det\mathbf{A} = \det A_1 \det A_2 \dots \det A_k \in P.$$

Ясно, что при $k = 1$ понятия вектор-определителя и определителя совпадают:

$$\mathbf{detA} = \det\mathbf{A}.$$

Пример 1.1. Если $k = 3$, $P = \mathbb{Z}$,

$$\mathbf{A} = \left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, 5, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

то

$$\det \mathbf{A} = (16, 5, -3), \det \mathbf{A} = -240.$$

Далее все вектор-матрицы рассматриваются над ассоциативным, коммутативным кольцом с единицей.

2 Общие свойства вектор-определителей и определителей

Сформулированные ниже свойства вектор-определителей получаются с помощью соответствующих свойств обычных определителей.

Напомним [1], что вектор-матрица \mathbf{A}' называется *транспонированной* для квадратной вектор-матрицы \mathbf{A} , если все её компоненты являются транспонированными для соответствующих компонент вектор-матрицы \mathbf{A} .

Предложение 2.1. Если \mathbf{A}' – транспонированная вектор-матрица для квадратной вектор-матрицы \mathbf{A} , то

$$\det \mathbf{A}' = \det \mathbf{A}, \det \mathbf{A}' = \det \mathbf{A}.$$

Предложение 2.2. Если в каждой компоненте квадратной вектор-матрицы \mathbf{A} над P имеется строка или столбец, состоящий целиком из нулей кольца P , то

$$\det \mathbf{A} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_k = \mathbf{0} \in P^k, \det \mathbf{A} = \mathbf{0} \in P,$$

где 0 – нуль кольца P .

Напомним [1], [2], что произведением $\lambda \in P$ на вектор-матрицу $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ называется вектор-матрица

$$\lambda \mathbf{A} = (\lambda A_1, \dots, \lambda A_k).$$

Предложение 2.3. Для любого $\lambda \in P$ и любой квадратной вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ над P верны равенства

$$\det(\lambda \mathbf{A}) = (\lambda^{n_1} \det A_1, \dots, \lambda^{n_k} \det A_k),$$

$$\det(\lambda \mathbf{A}) = \lambda^{n_1 + \dots + n_k} \det \mathbf{A}.$$

где n_1, \dots, n_k – порядки матриц-компонент A_1, \dots, A_k соответственно.

Доказательство. Действительно,

$$\det(\lambda \mathbf{A}) = \det(\lambda(A_1, \dots, A_k)) =$$

$$= \det(\lambda A_1, \dots, \lambda A_k) =$$

$$= (\det(\lambda A_1), \dots, \det(\lambda A_k)) =$$

$$= (\lambda^{n_1} \det A_1, \dots, \lambda^{n_k} \det A_k),$$

$$\det(\lambda \mathbf{A}) = \det(\lambda(A_1, \dots, A_k)) =$$

$$= \det(\lambda A_1, \dots, \lambda A_k) =$$

$$= \det(\lambda A_1) \dots \det(\lambda A_k) =$$

$$= \lambda^{n_1} \det A_1 \dots \lambda^{n_k} \det A_k =$$

$$= \lambda^{n_1 + \dots + n_k} \det A_1 \dots \det A_k = \lambda^{n_1 + \dots + n_k} \det \mathbf{A}.$$

Предложение доказано.

Считая в предложении 2.3 \mathbf{A} квадратной вектор-матрицей порядка n , то есть вектор-матрицей, у которой все компоненты – квадратные матрицы порядка n , получим

Следствие 2.1. Для любого $\lambda \in P$ и любой квадратной вектор-матрицы \mathbf{A} порядка n над P верно

$$\det(\lambda \mathbf{A}) = \lambda^n \det \mathbf{A}, \det(\lambda \mathbf{A}) = \lambda^{kn} \det \mathbf{A}.$$

Предложение 2.4. Если в каждой компоненте квадратной вектор-матрицы \mathbf{A} переставить любые две строки или два столбца, то:

1) вектор-определитель полученной вектор-матрицы \mathbf{B} равен вектор-определителю вектор-матрицы \mathbf{A} , взятому со знаком минус:

$$\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A};$$

2) определитель полученной вектор-матрицы \mathbf{B} равен определителю вектор-матрицы \mathbf{A} , если число компонент четное, и равен определителю вектор-матрицы \mathbf{A} , взятому со знаком минус, если число компонент нечетное:

$$\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}, k - \text{четное},$$

$$\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}, k - \text{нечетное}.$$

Доказательство. Если

$$\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k), \mathbf{B} = (B_1, \dots, B_k),$$

то

$$\det \mathbf{B} = (\det B_1, \dots, \det B_k) =$$

$$= (-\det A_1, \dots, -\det A_k) =$$

$$= -(\det A_1, \dots, \det A_k) = -\det \mathbf{A},$$

то есть верно равенство из 1);

$$\det \mathbf{B} = \det B_1 \dots \det B_k = -\det A_1 \dots (-\det A_k) =$$

$$= (-1)^k \det A_1 \dots \det A_k = (-1)^k \det \mathbf{A},$$

то есть верны равенства из 2). Предложение доказано.

Пример 2.1. Если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix},$$

то есть вектор-матрица \mathbf{B} получена из вектор-матрицы \mathbf{A} перестановкой столбцов в первой компоненте и перестановкой первой и третьей строк во второй компоненте, то

$$\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}, \det \mathbf{A} = \det \mathbf{B}.$$

Если же

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y & x \\ t & z \end{pmatrix},$$

то есть вектор-матрица \mathbf{D} получена из вектор-матрицы \mathbf{C} перестановкой строк в первой компоненте, перестановкой первого и второго столбцов во второй компоненте и перестановкой столбцов в третьей компоненте, то

$$\det \mathbf{C} = -\det \mathbf{D}.$$

Предложение 2.5. Справедливы следующие утверждения:

1) если в каждой компоненте квадратной вектор-матрицы \mathbf{A} имеются две одинаковые строки или два одинаковых столбца, то

$$\det \mathbf{A} = (\underbrace{0, \dots, 0}_k) = \mathbf{0} \in P^k;$$

2) если в некоторой компоненте квадратной вектор-матрицы \mathbf{A} имеются две одинаковые строки или два одинаковых столбца, то

$$\det \mathbf{A} = 0 \in P.$$

Предложение 2.6. Пусть $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ – квадратная k -компонентная вектор-матрица,

$$0 \leq r \leq k, 0 \leq s \leq k, 0 \leq t \leq k, r + s + t = k.$$

Если у вектор-матрицы \mathbf{A} r компонент A_i, \dots, A_r оставить неизменными, в s компонентах A_{j_1}, \dots, A_{j_s} к некоторой строке прибавить соответственные элементы любой другой строки, умноженные на произвольный элемент из P , в оставшихся t компонентах A_{m_1}, \dots, A_{m_t} к некоторому столбцу прибавить соответственные элементы любого другого столбца, умноженные на произвольный элемент из P , то:

1) вектор-определитель полученной вектор-матрицы \mathbf{B} будет равен вектор-определителю вектор-матрицы \mathbf{A} :

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B};$$

2) определитель полученной вектор-матрицы \mathbf{B} будет равен определителю вектор-матрицы \mathbf{A} :

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B}.$$

Заметим, что в предыдущем предложении в каждой из компонент A_{j_1}, \dots, A_{j_s} суммируемые строки должны быть разными. Кроме того, номера суммируемых строк в различных компонентах не обязаны совпадать. Сказанное относится и к столбцам в компонентах A_{m_1}, \dots, A_{m_t} .

3 Аналог теоремы о произведении определителей

Следующая теорема обобщает бинарный результат о равенстве определителя произведения матриц произведению определителей этих матриц.

Теорема 3.1. Пусть $\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \dots, A_{ik}), i = 1, \dots, l$ – k -компонентные вектор-матрицы, у которых для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ компоненты

$$A_{1j}, A_{2\sigma(j)}, \dots, A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}, A_{l\sigma^{l-1}(j)}$$

– квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда

$$\det[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = [\det \mathbf{A}_1 \dots \det \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k}, \quad (3.1)$$

$$\det[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = \det \mathbf{A}_1 \dots \det \mathbf{A}_l. \quad (3.2)$$

Доказательство. Докажем (3.1). Из условия теоремы вытекает, что вектор-матрица $[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k}$ существует. Отметим также, что в правой и левой частях равенства (3.1) одним и тем же символом обозначены различные l -арные операции: в левой части l -арная операция определена на вектор-матрицах, а в правой части на элементах из P^k , где P – кольцо, над которым рассматриваются вектор-матрицы.

Положим

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = (Y_1, \dots, Y_k),$$

$$\det[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = (y_1, \dots, y_k),$$

$$[\det \mathbf{A}_1 \dots \det \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = (z_1, \dots, z_k).$$

Используя определение l -арной операции $[\]_{l, \sigma, k}$ (определение 1.2 из [1]) и бинарный результат о равенстве определителя произведения матриц произведению их определителей, получим

$$y_j = \det Y_j = \det (A_{1j} A_{2\sigma(j)} \dots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} A_{l\sigma^{l-1}(j)}) = \\ = \det A_{1j} \det A_{2\sigma(j)} \dots \det A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} \det A_{l\sigma^{l-1}(j)},$$

то есть

$$y_j = \det A_{1j} \det A_{2\sigma(j)} \dots \det A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} \det A_{l\sigma^{l-1}(j)}. \quad (3.3)$$

Так как

$$[\det \mathbf{A}_1 \dots \det \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} =$$

$$= [(\det A_{11}, \dots, \det A_{1k}) \dots (\det A_{l1}, \dots, \det A_{lk})]_{l, \sigma, k},$$

то, согласно определению операции $[\]_{l, \sigma, k}$ на множестве P^k [4], [5],

$$z_j = \det A_{1j} \det A_{2\sigma(j)} \dots \det A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} \det A_{l\sigma^{l-1}(j)}. \quad (3.4)$$

Из (3.3) и (3.4) вытекает $y_j = z_j$ для любого $j \in \{1, \dots, k\}$. Следовательно, верно (3.1).

Докажем теперь (3.2). Так как, согласно определению 1.1,

$$\det \mathbf{A}_1 = \det A_{11} \dots \det A_{1k}, \dots,$$

$$\det \mathbf{A}_l = \det A_{l1} \dots \det A_{lk},$$

то

$$\det \mathbf{A}_1 \dots \det \mathbf{A}_l =$$

$$= \det A_{11} \dots \det A_{1k} \dots \det A_{l1} \dots \det A_{lk}. \quad (3.5)$$

Согласно тому же определению 1.1

$$\det[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = y_1 \dots y_k,$$

где y_1, \dots, y_k определяются с помощью (3.3), то есть

$$\det[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = \det A_{11} \det A_{2\sigma(1)} \dots$$

$$\dots \det A_{(l-1)\sigma^{l-2}(1)} \det A_{l\sigma^{l-1}(1)} \dots$$

$$\dots \det A_{1k} \det A_{2\sigma(k)} \dots \det A_{(l-1)\sigma^{l-2}(k)} \det A_{l\sigma^{l-1}(k)}. \quad (3.6)$$

Правые части в (3.5) и (3.6) состоят из kl сомножителей. Так как $\sigma \in S_k$, то для любого $i = 1, \dots, l-1$ множество $\{\sigma^i(1), \dots, \sigma^i(k)\}$ совпадает с множеством $\{1, \dots, k\}$. Поэтому в правой части (3.6) для любого $i = 1, \dots, l$ присутствуют в качестве сомножителей компоненты A_{i1}, \dots, A_{ik} . Это означает, что правые части в (3.5) и (3.6) состоят из одних и тех же сомножителей. А так как P – коммутативное кольцо, то правые части в (3.5) и (3.6) совпадают. Следовательно, равны и левые части в (3.5) и (3.6), то есть верно (3.2). Теорема доказана.

Следствие 3.1. Пусть σ – цикл длины k из S_k ,

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \dots, A_{ik}), i = 1, \dots, k+1$$

– k -компонентные вектор-матрицы, у которых для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ компоненты

$$A_{1j}, A_{2\sigma(j)}, \dots, A_{k\sigma^{k-1}(j)}, A_{(k+1)j}$$

– квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда

$$\det[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{k+1}]_{k+1, \sigma, k} = [\det \mathbf{A}_1 \dots \det \mathbf{A}_{k+1}]_{k+1, \sigma, k},$$

$$\det[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{k+1}]_{k+1, \sigma, k} = \det \mathbf{A}_1 \dots \det \mathbf{A}_{k+1}.$$

Полагая в следствии 3.1 $\sigma = (12 \dots k)$, получим

Следствие 3.2. Пусть

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \dots, A_{ik}), i = 1, \dots, k + 1$$

– k -компонентные вектор-матрицы, у которых для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ компоненты

$$A_{1j}, A_{2(j+1)}, \dots, A_{(k+1-j)k}, A_{(k+2-j)1}, \dots, A_{k(j-1)}, A_{(k+1)j}$$

– квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда

$$\begin{aligned} \det[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{k+1}]_{k+1, (12 \dots k), k} &= \\ &= [\det \mathbf{A}_1 \dots \det \mathbf{A}_{k+1}]_{k+1, (12 \dots k), k} \\ \det[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_{k+1}]_{k+1, (12 \dots k), k} &= \det \mathbf{A}_1 \dots \det \mathbf{A}_{k+1}. \end{aligned}$$

4 Гомоморфизмы из $\langle \mathbf{GL}(n, k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$

Лемма 4.1. Пусть A – абелева группа, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда отображение

$$\delta: (a_1, \dots, a_k) \rightarrow a_1 \dots a_k$$

является гомоморфизмом l -арной группы $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ на l -арную группу $\langle A, []_l \rangle$, производную от группы A .

Доказательство. Согласно теореме 3.6.2 [5], универсальная алгебра $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ действительно является l -арной группой.

Так как для любого $a \in A$

$$\delta: (a, \underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}) \rightarrow a \underbrace{1 \dots 1}_{k-1} = a,$$

где 1 – единица группы A , то δ отображает A^k на A . Для произвольных

$a_i = (a_{i1}, \dots, a_{ik}), \dots, a_l = (a_{l1}, \dots, a_{lk}) \in A^k$, используя абелевость группы A и совпадение множеств $\{1, \dots, k\}, \{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\}, \dots, \{\sigma^{l-1}(1), \dots, \sigma^{l-1}(k)\}$, будем иметь

$$\begin{aligned} \delta([a_1 \dots a_l]_{l, \sigma, k}) &= \\ &= \delta([(a_{11}, \dots, a_{1k}) \dots (a_{l1}, \dots, a_{lk})]_{l, \sigma, k}) = \\ &= \delta((a_{11}a_{2\sigma(1)} \dots a_{l\sigma^{l-1}(1)}, \dots, a_{1k}a_{2\sigma(k)} \dots a_{l\sigma^{l-1}(k)})) = \\ &= (a_{11}a_{2\sigma(1)} \dots a_{l\sigma^{l-1}(1)}) \dots (a_{1k}a_{2\sigma(k)} \dots a_{l\sigma^{l-1}(k)}) = \\ &= a_{11} \dots a_{1k}a_{2\sigma(1)} \dots a_{2\sigma(k)} \dots a_{l\sigma^{l-1}(1)} \dots a_{l\sigma^{l-1}(k)} = \\ &= (a_{11} \dots a_{1k})(a_{21} \dots a_{2k}) \dots (a_{l1} \dots a_{lk}) = \\ &= \delta(a_1)\delta(a_2) \dots \delta(a_l) = [\delta(a_1)\delta(a_2) \dots \delta(a_l)]_l, \end{aligned}$$

то есть

$$\delta([a_1 \dots a_l]_{l, \sigma, k}) = [\delta(a_1)\delta(a_2) \dots \delta(a_l)]_l.$$

Лемма доказана.

В следующей теореме символом P^* обозначается группа всех обратимых элементов кольца P .

Теорема 4.1. Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то:

1) отображение $\gamma: \mathbf{A} \rightarrow \det \mathbf{A}$ является гомоморфизмом l -арной группы $\langle \mathbf{GL}(n, k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ на l -арную группу $\langle P^{*k}, []_{l, \sigma, k} \rangle$;

2) отображение $\beta: \mathbf{A} \rightarrow \det \mathbf{A}$ является гомоморфизмом l -арной группы $\langle \mathbf{GL}(n, k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ на l -арную группу $\langle P^*, []_l \rangle$, производную от группы P^* .

Доказательство. 1) Ясно, что γ отображает

$$\mathbf{GL}(n, k, P) = \underbrace{\mathbf{GL}(n, P) \times \dots \times \mathbf{GL}(n, P)}_k$$

на всё P^{*k} . Пусть

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \dots, A_{ik}) \in \mathbf{GL}(n, k, P), i = 1, \dots, l, \\ [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = (Y_1, \dots, Y_k).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \gamma([\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k}) &= \\ &= \gamma([(A_{11}, \dots, A_{1k}) \dots (A_{l1}, \dots, A_{lk})]_{l, \sigma, k}) = \\ &= \gamma(Y_1, \dots, Y_j = A_{1j}A_{2\sigma(j)} \dots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} A_{l\sigma^{l-1}(j)}, \dots, Y_k) = \\ &= (\det Y_1, \dots, \det Y_j = \det A_{1j} \det A_{2\sigma(j)} \dots \\ &\quad \dots \det A_{l\sigma^{l-1}(j)}, \dots, \det Y_k) = \\ &= [(\det A_{11}, \dots, \det A_{1k}) \dots (\det A_{l1}, \dots, \det A_{lk})]_{l, \sigma, k} = \\ &= [\det \mathbf{A}_1 \dots \det \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = [\gamma(\mathbf{A}_1) \dots \gamma(\mathbf{A}_l)]_{l, \sigma, k}, \end{aligned}$$

то есть

$$\gamma([\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k}) = [\gamma(\mathbf{A}_1) \dots \gamma(\mathbf{A}_l)]_{l, \sigma, k}.$$

Следовательно, γ – искомый гомоморфизм.

2) Достаточно заметить, что β может быть представлено композицией гомоморфизмов $\gamma: \mathbf{GL}(n, k, P) \rightarrow P^{*k}$ из 1) и $\delta: P^{*k} \rightarrow P$ из леммы 4.1. Теорема доказана.

Следствие 4.1. Если σ – цикл длины k из S_k , то отображения γ и β из теоремы 4.1 являются гомоморфизмами $(k+1)$ -арной группы $\langle \mathbf{GL}(n, k, P), []_{k+1, \sigma, k} \rangle$ соответственно на $(k+1)$ -арные группы $\langle P^{*k}, []_{k+1, \sigma, k} \rangle$ и $\langle P^*, []_{k+1} \rangle$.

Следствие 4.2. Отображения γ и β из теоремы 4.1 являются гомоморфизмами $(k+1)$ -арной группы $\langle \mathbf{GL}(n, k, P), []_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$ соответственно на $(k+1)$ -арные группы $\langle P^{*k}, []_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$ и $\langle P^*, []_{k+1} \rangle$.

5 Вектор-определитель и определитель косои вектор-матрицы

В теории n -арных групп для обозначения косои элемента для элемента a n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ традиционно используют символ \bar{a} . В [1] для обозначения косои вектор-матрицы для вектор-матрицы \mathbf{A} использовался символ $\bar{\mathbf{A}}$, так как символом $\bar{\mathbf{A}}$ обозначается комплексно-сопряженная вектор-матрица. Косою вектор-матрицу можно обозначать и символом $\mathbf{A}^{[-1]}$, чем мы и будем пользоваться в данной работе. Объяснение будет дано ниже.

Теорема 5.1. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ – произвольный элемент l -арной группы

$$\langle \mathbf{GL}(n, k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle. \text{ Тогда} \\ \det \mathbf{A}^{[-1]} = (\det \mathbf{A})^{[-1]}, \quad (5.1)$$

где в левой части присутствует косои элемент для \mathbf{A} в $\langle \mathbf{GL}(n, k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$, а правая часть является косоим элементом для элемента $\det \mathbf{A}$ l -арной группы $\langle P^{*k}, []_{l, \sigma, k} \rangle$;

$$\det \mathbf{A}^{[-1]} = ((\det \mathbf{A})^{-1})^{l-2}, \quad (5.2)$$

где снова в левой части присутствует косои элемент для \mathbf{A} в $\langle \mathbf{GL}(n, k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$, а в

правой части присутствует обратный элемент для элемента группы P^* .

Доказательство. По лемме 4.1 [1]

$$\mathbf{A}^{[-1]} = (A_{\sigma^{j-2}(1)}^{-1} \dots A_{\sigma(1)}^{-1}, \dots, A_{\sigma^{j-2}(k)}^{-1} \dots A_{\sigma(k)}^{-1}).$$

Тогда

$$\det \mathbf{A}^{[-1]} = (\det(A_{\sigma^{j-2}(1)}^{-1} \dots A_{\sigma(1)}^{-1}), \dots, \det(A_{\sigma^{j-2}(k)}^{-1} \dots A_{\sigma(k)}^{-1})),$$

откуда

$$\det \mathbf{A}^{[-1]} = (\det A_{\sigma^{j-2}(1)}^{-1} \dots \det A_{\sigma(1)}^{-1}, \dots, \det A_{\sigma^{j-2}(k)}^{-1} \dots \det A_{\sigma(k)}^{-1}). \quad (5.3)$$

Снова применяя лемму 4.1 [1] и соответствующий бинарный результат, получим

$$\begin{aligned} (\det \mathbf{A})^{[-1]} &= (\det A_1, \dots, \det A_k)^{[-1]} = \\ &= ((\det A_{\sigma^{j-2}(1)})^{-1} \dots (\det A_{\sigma(1)})^{-1}, \dots, \\ &\dots, (\det A_{\sigma^{j-2}(k)})^{-1} \dots (\det A_{\sigma(k)})^{-1}) = \\ &= (\det A_{\sigma^{j-2}(1)}^{-1} \dots \det A_{\sigma(1)}^{-1}, \dots, \det A_{\sigma^{j-2}(k)}^{-1} \dots \det A_{\sigma(k)}^{-1}), \end{aligned}$$

то есть

$$(\det \mathbf{A})^{[-1]} = (\det A_{\sigma^{j-2}(1)}^{-1} \dots \det A_{\sigma(1)}^{-1}, \dots, \det A_{\sigma^{j-2}(k)}^{-1} \dots \det A_{\sigma(k)}^{-1}). \quad (5.4)$$

Сравнивая (5.3) и (5.4), видим, что верно (5.1).

Докажем теперь равенство (5.2). Применяя лемму 4.1 [1], и, используя определение 1.1, получим

$$\det \mathbf{A}^{[-1]} = \det(A_{\sigma^{j-2}(1)}^{-1} \dots A_{\sigma(1)}^{-1}) \dots \det(A_{\sigma^{j-2}(k)}^{-1} \dots A_{\sigma(k)}^{-1}),$$

откуда, используя соответствующие бинарные результаты, коммутативность кольца P и уже упоминавшееся совпадение множеств $\{1, \dots, k\}, \{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\}, \dots, \{\sigma^{l-1}(1), \dots, \sigma^{l-1}(k)\}$,

Получим

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A}^{[-1]} &= \det A_{\sigma^{j-2}(1)}^{-1} \dots \det A_{\sigma(1)}^{-1} \dots \det A_{\sigma^{j-2}(k)}^{-1} \dots \det A_{\sigma(k)}^{-1} = \\ &= (\det A_{\sigma^{j-2}(1)})^{-1} \dots (\det A_{\sigma(1)})^{-1} \dots \\ &\dots (\det A_{\sigma^{j-2}(k)})^{-1} \dots (\det A_{\sigma(k)})^{-1} = \\ &= (\det A_{\sigma(k)} \dots \det A_{\sigma^{j-2}(k)} \dots \det A_{\sigma(1)} \dots \det A_{\sigma^{j-2}(1)})^{-1} = \\ &= (\det A_{\sigma(1)} \dots \det A_{\sigma(k)} \dots \det A_{\sigma^{j-2}(1)} \dots \det A_{\sigma^{j-2}(k)})^{-1} = \\ &= (\underbrace{\det A_1 \dots \det A_k \dots \det A_1 \dots \det A_k}_{l-2})^{-1} = \\ &= ((\det \mathbf{A})^{l-2})^{-1} = ((\det \mathbf{A})^{-1})^{l-2}. \end{aligned}$$

Следовательно, верно (5.2). Теорема доказана.

Следствие 5.1. Если σ – цикл длины k из S_k , \mathbf{A} – произвольный элемент $(k+1)$ -арной группы $\langle \mathbf{GL}(n, k, P), []_{k+1, \sigma, k} \rangle$, то верны формулы (5.1) и (5.2).

Следствие 5.2. Если \mathbf{A} – произвольный элемент $(k+1)$ -арной группы $\langle \mathbf{GL}(n, k, P), []_{k+1, (12\dots k), k} \rangle$, то верны формулы (5.1) и (5.2).

6 Вектор-определитель и определитель степени вектор-матрицы

Для всякого элемента a l -арной полугруппы $\langle A, [] \rangle$ естественным образом определяются натуральные степени

$$a^{[0]} = a, \quad a^{[1]} = [\underbrace{a \dots a}_l],$$

$$a^{[2]} = [\underbrace{a \dots a}_{2l-1}], \dots, \quad a^{[s]} = [\underbrace{a \dots a}_{s(l-1)+1}], \dots$$

$$\text{В частности, } \mathbf{A}^{[0]} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^{[s]} = [\underbrace{\mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_{s(l-1)+1}]_{l, \sigma, k}$$

для всякого натурального s и любой вектор-матрицы \mathbf{A} l -арной полугруппы $\langle \mathbf{M}(n, k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$.

Теорема 3.1 позволяет сформулировать

Предложение 6.1. Пусть подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ – произвольный элемент l -арной полугруппы $\langle \mathbf{M}(n, k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$. Тогда:

$$\det \mathbf{A}^{[s]} = (\det \mathbf{A})^{[s]}, \quad (6.1)$$

$$\det \mathbf{A}^{[s]} = (\det \mathbf{A})^{s(l-1)+1}. \quad (6.2)$$

Замечание 6.1. В правой части равенства (6.1) присутствует степень элемента l -арной полугруппы $\langle P^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, а в правой части равенства (6.2) – обычная степень элемента полугруппы P .

Для всякого элемента a l -арной группы $\langle A, [] \rangle$ помимо положительных степеней, определяются [3], [6] и отрицательные степени: для любого целого $s < 0$ степень $a^{[s]}$ есть решение уравнения

$$[\underbrace{xa \dots a}_{-s(l-1)}] = a.$$

Отрицательную степень можно определить [7] с помощью косога элемента:

$$a^{[s]} = [\underbrace{\bar{a} \dots \bar{a}}_{-2s} \underbrace{a \dots a}_{-s(l-3)+1}], \quad s < 0.$$

Так как при $s = -1$

$$a^{[-1]} = [\underbrace{\bar{a}\bar{a} \dots a}_{l-2}] = \bar{a},$$

то $\bar{a} = a^{[-1]}$, что отмечалось выше.

Таким образом, $\mathbf{A}^{[-1]} = \bar{\mathbf{A}}$,

$$\mathbf{A}^{[s]} = [\underbrace{\mathbf{A}^{[-1]} \dots \mathbf{A}^{[-1]}}_{-2s} \underbrace{\mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_{-s(l-3)+1}]_{l, \sigma, k}, \quad s < 0 \quad (6.3)$$

для всякого натурального s и любой вектор-матрицы \mathbf{A} l -арной группы $\langle \mathbf{GL}(n, k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$.

Теорема 6.1. Для любого целого s , любой подстановки $\sigma \in S_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, и любой вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ l -арной группы $\langle \mathbf{GL}(n, k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ верны равенства (6.1) и (6.2).

Доказательство. Если $s \geq 0$, то применяется предложение 6.1. Для $s < 0$, используя теоремы 3.1 и 5.1, а также (6.3), получим

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A}^{[s]} &= \det [\underbrace{\mathbf{A}^{[-1]} \dots \mathbf{A}^{[-1]}}_{-2s} \underbrace{\mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_{-s(l-3)+1}]_{l, \sigma, k} = \\ &= [\underbrace{\det \mathbf{A}^{[-1]} \dots \det \mathbf{A}^{[-1]}}_{-2s} \underbrace{\det \mathbf{A} \dots \det \mathbf{A}}_{-s(l-3)+1}]_{l, \sigma, k} = \\ &= [(\det \mathbf{A})^{[-1]} \dots (\det \mathbf{A})^{[-1]} \det \mathbf{A} \dots \det \mathbf{A}]_{l, \sigma, k} = \\ &= (\det \mathbf{A})^{[s]}, \end{aligned}$$

то есть верно (6.1).

Аналогично,

$$\det \mathbf{A}^{[s]} = \det \left[\underbrace{\mathbf{A}^{[-1]} \dots \mathbf{A}^{[-1]}}_{-2s} \underbrace{\mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_{-s(l-3)+1} \right]_{l, \sigma, k} =$$

$$= \underbrace{\det \mathbf{A}^{[-1]} \dots \det \mathbf{A}^{[-1]}}_{-2s} \underbrace{\det \mathbf{A} \dots \det \mathbf{A}}_{-s(l-3)+1} =$$

$$= (((\det \mathbf{A})^{-1})^{l-2})^{-2s} (\det \mathbf{A})^{-s(l-3)+1} =$$

$$= (\det \mathbf{A})^{2s(l-2)} (\det \mathbf{A})^{-s(l-3)+1} = (\det \mathbf{A})^{s(l-1)+1},$$
 то есть верно (6.2). Теорема доказана.

7 Аналогии и обобщения

Определитель $\det A$ матрицы $A \in \mathbf{M}(n, P)$ можно рассматривать как значение функции \det , определенной на $\mathbf{M}(n, P)$, со значениями в P . Точно также вектор-определитель \mathbf{detA} вектор-матрицы $\mathbf{A} \in \mathbf{M}(n, k, P)$ можно считать значением функции \mathbf{det} , определенной на декартовой степени $\underbrace{\mathbf{M}(n, P) \times \dots \times \mathbf{M}(n, P)}_k$, со значениями в P^k , а определитель $\det \mathbf{A}$ той же вектор-матрицы – значением функции \det , определенной на той же декартовой степени со значениями в P .

Беря за основу какую-либо функцию $u: \mathbf{M}(n, P) \rightarrow P$, отличную от функции \det , можно определить функции

$$u: \underbrace{\mathbf{M}(n, P) \times \dots \times \mathbf{M}(n, P)}_k \rightarrow P^k,$$

$$u: \underbrace{\mathbf{M}(n, P) \times \dots \times \mathbf{M}(n, P)}_k \rightarrow P$$

аналогично тому, как это было сделано для функции $\det: \mathbf{M}(n, P) \rightarrow P$.

В качестве примера рассмотрим функцию $\text{per}: \mathbf{M}(n, P) \rightarrow P$, где

$$\text{per} A = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

для матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}(n, P)$. Значение $\text{per} A$ называют перманентом матрицы A . Перманентам посвящена книга Х. Минка [9].

Определение 7.1. Пусть P – ассоциативное, коммутативное кольцо с единицей. Векторным перманентом или вектор-перманентом вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$, у которой все компоненты A_1, \dots, A_k являются квадратными матрицами над P , называется упорядоченный набор

$$\text{per} \mathbf{A} = (\text{per} A_1, \dots, \text{per} A_k) \in P^k$$

перманентов $\text{per} A_1, \dots, \text{per} A_k$ матриц-компонент. Перманентом той же вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ называется произведение

$$\text{per} \mathbf{A} = \text{per} A_1 \text{per} A_2 \dots \text{per} A_k \in P.$$

Ясно, что при $k = 1$ понятия вектор-перманента и перманента совпадают:

$$\text{per} \mathbf{A} = \text{per} A.$$

Используя свойства перманентов обычных матриц, можно получить их аналоги для вектор-перманентов и перманентов вектор-матриц. В частности, предложения 2.1 – 2.3 и следствие 2.1 останутся верными, если в них вектор-определители и определители вектор-матриц

заменить соответственно вектор-перманентами и перманентами. Гораздо больше свойств вектор-перманентов и перманентов вектор-матриц не имеют аналогов для вектор-определителей и определителей.

Так как перманент определяется [9] не только для квадратных матриц, но и для матриц размера $m \times n$, где $m < n$, то можно определить и изучать вектор-перманент и перманент k -компонентной вектор-матрицы размера $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$, где $m_1 < n_1, \dots, m_k < n_k$.

Множество $\mathbf{GL}(m, n | N)$ всех квадратных матриц $K = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, где блоки A и D – обратимые матрицы порядков m и n соответственно, состоящие из четных элементов грасмановой алгебры \mathfrak{G}_N с N образующими, а блоки B и C – прямоугольные матрицы, состоящие из нечетных элементов \mathfrak{G}_N , является группой [10]. Супердетерминантом называется [10] функция sdet из $\mathbf{GL}(m, n | N)$ со значениями в \mathfrak{G}_N , определяемая равенством

$$\text{sdet} K = \det(A - BD^{-1}C) \det D^{-1}.$$

Положим

$$\mathbf{GL}(m, n | N, k) = \underbrace{\mathbf{GL}(m, n | N) \times \dots \times \mathbf{GL}(m, n | N)}_k.$$

Так как $\mathbf{GL}(m, n | N)$ – группа, то, ввиду теоремы 3.6.2 из [5], верна

Теорема 7.1. Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle \mathbf{GL}(m, n | N, k), []_{l, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа. В частности, $\langle \mathbf{GL}(m, n | N, k), []_{k+1, (12\dots k), k} \rangle$ – $(k+1)$ -арная группа.

Замечание 7.1. Из соответствующих результатов книги [5] следует, что l -арная группа $\langle \mathbf{GL}(m, n | N, k), []_{l, \sigma, k} \rangle$ не имеет единиц, а при $n \geq 2$ является ненулевой, в частности неабелевой.

Определение 7.2. Вектор-супердетерминантом элемента

$$\mathbf{K} = (K_1, \dots, K_k) \in \mathbf{GL}(m, n | N, k)$$

называется упорядоченный набор

$$\text{sdet} \mathbf{K} = (\text{sdet} K_1, \dots, \text{sdet} K_k) \in \mathfrak{G}_N^k$$

супердетерминантов $\text{sdet} K_1, \dots, \text{sdet} K_k$ компонент элемента \mathbf{K} . Супердетерминантом этого же элемента \mathbf{K} называется произведение

$$\text{sdet} \mathbf{K} = \text{sdet} K_1 \text{sdet} K_2 \dots \text{sdet} K_k \in \mathfrak{G}_N.$$

Для супердетерминантов имеет место полный аналог теоремы 3.1.

Теорема 7.2. Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то для любых $\mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_l \in \mathbf{GL}(m, n | N, k)$ верны равенства

$$\text{sdet}[\mathbf{K}_1 \dots \mathbf{K}_l]_{l, \sigma, k} = [\text{sdet} \mathbf{K}_1 \dots \text{sdet} \mathbf{K}_l]_{l, \sigma, k} \quad (7.1)$$

$$\text{sdet}[\mathbf{K}_1 \dots \mathbf{K}_l]_{l, \sigma, k} = \text{sdet} \mathbf{K}_1 \dots \text{sdet} \mathbf{K}_l \quad (7.2)$$

Доказательство теоремы 7.2 почти дословно повторяет доказательство теоремы 3.1. Отличие состоит только в том, что при доказательстве

равенства (7.1) вместо мультипликативности функции \det используется мультипликативность функции sdet [10]:

$$\text{sdet}(K_1 K_2) = \text{sdet} K_1 \cdot \text{sdet} K_2.$$

Кроме того, при доказательстве равенства (7.2) коммутативность кольца заменяется коммутированием четных элементов грассмановой алгебры. При этом используется также тот факт, что все значения функции sdet являются в этой алгебре четными элементами.

Можно ввести и понятие квантового вектор-детерминанта, являющегося обобщением понятия квантового детерминанта, который определяется [11] для квантовой матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n над полем P и элемента $q \in P$, удовлетворяющего некоторым дополнительным условиям, следующим образом:

$$\det_q A = \sum_{\sigma \in S_n} (-q)^{\text{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)},$$

где $\text{inv}(\sigma)$ – число инверсий подстановки σ .

Если для каждой компоненты A_r вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ определен квантовый детерминант $\det_{q_r} A_r$, то *квантовым вектор-детерминантом* вектор-матрицы \mathbf{A} называется упорядоченный набор

$$\mathbf{det}_{q_1, \dots, q_k} \mathbf{A} = (\det_{q_1} A_1, \dots, \det_{q_k} A_k),$$

а *квантовым детерминантом* той же вектор-матрицы \mathbf{A} называется произведение

$$\det_{q_1, \dots, q_k} \mathbf{A} = \det_{q_1} A_1 \dots \det_{q_k} A_k.$$

Если $q_1 = \dots = q_k = q$, то рассматривают квантовый вектор-детерминант вида

$$\mathbf{det}_q \mathbf{A} = (\det_q A_1, \dots, \det_q A_k)$$

и квантовый детерминант вида

$$\det_q \mathbf{A} = \det_q A_1 \dots \det_q A_k.$$

В связи с существованием различных обобщений понятия определителя на случай некоммутативных колец возникает задача определения и изучения их векторных аналогов. Подобные векторные аналоги могут быть определены для квазидетерминантов [12], [13], которые находят широкое применение в физике, для детерминанта Дьёдонне [14], [15], детерминанта Мура [16], строчных и столбцовых определителей [17], а также и для других обобщений классического детерминанта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А.М. Транспонированные вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 52–56.
2. Гальмак, А.М. Вектор-матрицы / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2011. – № 1 (37), серия В. – С. 30–37.

3. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

4. Гальмак, А.М. Многочестные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весні НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.

5. Гальмак, А.М. Многочестные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

6. Русаков С.А. Алгебраические n -арные системы / С.А. Русаков. – Минск.: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

7. Гальмак, А.М. n -Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.

8. Гальмак, А.М. n -Арные группы. Часть 2 / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2007. – 324 с.

9. Минк, Х. Перманенты / Х. Минк. – М.: Мир., 1982. – 213 с.

10. Березин, Ф.А. Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными / Ф.А. Березин. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – 208 с.

11. Manin, Y. Multiparametric quantum deformation of the general linear supergroup / Y. Manin // Math. Phys. – 1989. – V. 123. – P. 163–175.

12. Гельфанд, И.М. Детерминанты матриц над некоммутативными кольцами / И.М. Гельфанд, В.С. Ретах // Функциональный анализ и его приложения. – 1991. – Т. 25, № 2. – С. 13–35.

13. Гельфанд, И.М. Теория некоммутативных детерминантов и характеристических функций графов / И.М. Гельфанд, В.С. Ретах // Функциональный анализ и его приложения. – 1993. – Т. 26, № 4. – С. 33–45.

14. Dieudonne, J. Les determinants sur un corps non commutatif / J. Dieudonne // Bull. Math. Soc. France. – 1943. – V. 71. – P. 27–45.

15. Дьёдонне, Ж. Геометрия классических групп / Ж. Дьёдонне. – М.: Мир., 1974. – 204 с.

16. Moore, E.H. On the determinant of an Hermitian matrix of quaternionic elements / E.H. Moore // Bull. Amer. Math. Soc. – 1922. – V. 28. – P. 161–162.

17. Кирчей, И.И. Правило Крамера для кватернионных систем линейных уравнений / И.И. Кирчей // Фундаментальная и прикладная математика. – 2007. – Т. 13, № 4. – С. 67–94.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

Поступила в редакцию 03.03.11.

УДК 517.986

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ АРЕНСА-ЗИНГЕРА

А.Р. Миротин¹, М.А. Романова²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

²Полесский государственный университет, Пинск

ON SOME CHARACTERIZATION OF ARENS-SINGER GENERALIZED ANALYTIC FUNCTIONS

A.R. Mirotin¹, M.A. Romanova²

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel

²Poleskiy State University, Pinsk

Для случая максимальных полугрупп дана новая характеристика обобщенных аналитических функций в смысле Аренса и Зингера. Показано, что установленный результат может применяться в задачах аппроксимации.

Ключевые слова: алгебра обобщенных аналитических функций, полугруппа полухарактеров, граница Шилова, аппроксимация.

A new characterization of generalized analytic functions in sense of Arens-Singer is given in the case of maximal semigroups. It is shown that this result can be applied to approximation problems.

Keywords: algebra of generalized analytic functions, semigroup of semicharacters, Shilov boundary, approximation.

Введение

Теория обобщенных аналитических функций на пространствах полухарактеров полугрупп берет свое начало с работы Р. Аренса и И.М. Зингера [1]. В настоящее время она превратилась в довольно развитый раздел функционального анализа, расположенный на стыке теории равномерных алгебр, абстрактного гармонического анализа и теории аналитических функций (см., например, монографии [2], [3], а также обзоры [4], [5] и [6]). Более общее, чем в [1], определение обобщенной аналитической функции было позднее дано в [7]. В заметке даны условия, при которых алгебра обобщенных аналитических функций в смысле Аренса и Зингера совпадает с алгеброй обобщенных аналитических функций в смысле [7], [8]. Тем самым, при этих условиях получена другая, более простая характеристика аналитичности по Аренсу-Зингеру. Показано, что установленный результат может применяться также в задачах аппроксимации.

1 Используемые определения и примеры

Всюду ниже S – записываемая мультипликативно дискретная абелева полугруппа с сокращениями и единицей e , не являющаяся группой, $G = S^{-1}S$ – (дискретная) группа частных для S (см., например, [9]).

Определение 1.1. Подполугруппа S группы G называется *максимальной*, если не существует подполугруппы S_1 группы G , отличной от S и G , для которой $S \subset S_1 \subset G$.

Пример 1.1. Рассмотрим аддитивную группу $G = \mathbf{Z}$ целых чисел. Её максимальной подполугруппой является полугруппа $S = \mathbf{Z}_+$ неотрицательных целых чисел.

Пример 1.2. Для аддитивной группы \mathbf{Z}^{l+1} максимальной подполугруппой будут, например, полугруппа $S = \mathbf{Z}^l \times \mathbf{Z}_+$ ($l \in \mathbf{N}$).

Пример 1.3. Пусть $G = \mathbf{Z}^2$,

$$S_\alpha = \{(m, n) \in \mathbf{Z}^2 \mid n \geq \alpha m\},$$

где α – отрицательное иррациональное число. Максимальность этой подполугруппы следует, например, из того, что отображение $G \rightarrow \mathbf{R}: (m, n) \mapsto n - \alpha m$ является порядковым изоморфизмом групп, отображающим полугруппу S_α на подполугруппу $\{n - \alpha m \mid m, n \in \mathbf{Z}\} \cap \mathbf{R}_+$ группы \mathbf{R} , задающую на \mathbf{R} архимедов порядок, а такая подполугруппа всегда максимальна (см., например, [3, теорема 8.1.3]).

Для формулировки основного результата нам потребуется определенная подготовка.

Полухарактером полугруппы S называется гомоморфизм ψ полугруппы S в мультипликативную полугруппу $\bar{\mathbf{D}} = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1\}$, не являющийся тождественным нулем. Характерами называются полухарактеры, равные по модулю единице.

Множество всех полухарактеров далее обозначается \hat{S} , а его подмножество, состоящее из

неотрицательных полухарактеров, $-\hat{S}_+$. Наделенные топологией поточечной сходимости это компактные топологические полугруппы по умножению с единицей 1 (\hat{S} компактно как замкнутое подмножество в \bar{D}^S). (Компактную) группу характеров полугруппы S будем обозначать X .

Отметим, что степень ρ^0 по определению есть индикатор носителя полухарактера $\rho \in \hat{S}_+$, и что $\rho^z \in \hat{S} \setminus X$ при $\rho \in \hat{S}_+$, $\rho \neq 1$, $z \in \Pi$, где $\Pi := \{\text{Re } z > 0\}$ (см. [1, § 7]).

Далее через ∂_A обозначается граница Шилова равномерной алгебры A (см., например, [2]), сужение функции f на подмножество M ее области определения обозначается $f|_M$. Пространство $\ell_1(S)$ определяется как множество всех таких комплекснозначных функций f на S с не более чем счетным носителем, для которых

$$\|f\| = \sum_{s \in S} |f(s)| < \infty.$$

Определение 1.2 [1]. Комплекснозначная функция F на $\hat{S} \setminus X$ называется обобщенной аналитической в смысле Аренса-Зингера, если F может быть равномерно приближена на компактных подмножествах $\hat{S} \setminus X$ функциями вида

$$\hat{f}(\psi) = \sum_{s \in S} f(s)\psi(s),$$

где $f \in \ell_1(S)$, $\psi \in \hat{S}$.

Другими словами, F может быть равномерно приближена на компактных подмножествах $\hat{S} \setminus X$ аналитическими полиномами, т. е. полиномами вида

$$p = \sum_{k=1}^n c_k \hat{s}_k,$$

где $c_k \in \mathbb{C}$, $s_k \in S$, а функция \hat{s} на \hat{S} определяется для $s \in S$ равенством $\hat{s}(\psi) = \psi(s)$.

Равномерную алгебру всех функций, непрерывных на \hat{S} и обобщенных аналитических в смысле Аренса-Зингера, обозначим $A_0(\hat{S})$ (фактически она зависит от S , а не только от \hat{S}).

Определение 1.3 [7]. Комплекснозначную функцию F на $\hat{S} \setminus X$ будем называть обобщенной аналитической, если для любых полухарактеров ρ , ψ из $\hat{S} \setminus X$, $\rho \geq 0$ отображение $z \mapsto F(\rho^z \psi)$ аналитично в открытой правой полуплоскости Π и непрерывно в $+0$.

Равномерную алгебру всех функций, непрерывных на \hat{S} и обобщенных аналитических в смысле определения 1.3, обозначим $A(\hat{S})$.

Известно [8], что $A_0(\hat{S}) \subset A(\hat{S})$, причём строгое включение возможно. Основной целью данной заметки является доказательство следующей теоремы.

2 Характеризация обобщенных аналитических функций в смысле Аренса и Зингера для случая максимальных полугрупп

Теорема 2.1. Пусть полугруппа S максимальна в группе G . Тогда алгебра $A(\hat{S})$ совпадает с $A_0(\hat{S})$, если и только если $\partial_{A(\hat{S})} = X$.

Доказательство. Необходимость следует из того, что $\partial_{A_0(\hat{S})} = X$ [1, теорема 4.6].

Достаточность. Пусть $\partial_{A(\hat{S})} = X$. Тогда отображение сужения $F \mapsto F|_X$ есть изометрический изоморфизм алгебры $A(\hat{S})$ и некоторой равномерной алгебры $A(X)$ на группе X . Так как $A(\hat{S})$ инвариантна относительно действия группы X (т. е. вместе с функцией F содержит и все функции $F_\chi : \psi \mapsto F(\chi\psi)$, $\chi \in X$), то этим же свойством обладает и $A(X)$. Обозначим через S_1 подполугруппу группы G , порожденную носителями преобразований Фурье функций из $A(X)$. В силу [10, предложение 4.1.8] алгебра $A(X)$ равна алгебре A_{S_1} , состоящей из всех непрерывных на X функций, преобразование Фурье которых сосредоточено на полугруппе S_1 .

Пусть $a \in S$. Свойство ортогональности характеров компактной группы влечет, что носителем преобразования Фурье сужения $\hat{a}|_X$ служит множество $\{a\}$. Поэтому $S \subseteq S_1$.

Предположим, что $S_1 = G$. Тогда алгебра $A_{S_1} = A(X)$ совпадает с алгеброй $C(X)$ всех непрерывных функций на X (т. е. множество X является интерполяционным для алгебры $A(\hat{S})$ в смысле [8]). Покажем, что это невозможно. Для этого установим сначала, что существует строго положительный полухарактер $\rho_0 \in \hat{S}_+$, отличный от 1. Пусть $G(S) = S^{-1} \cap S$ – максимальная подгруппа полугруппы S , $H = G/G(S)$ – факторгруппа, и $\pi: G \rightarrow H$ – канонический гомоморфизм. Тогда множество $T := \pi(S)$, как легко проверить, есть максимальная подполугруппа группы H , порождающая H и такая, что группа $G(T)$ тривиальна. При этих условиях полугруппа T задает на группе H архимедов порядок по следующему правилу: $x \leq y$, если и только если $x^{-1}y \in T$ (см. [3, теорема 8.1.3] или [11]). В соответствии с известной теоремой Гёльдера полугруппа T порядково изоморфна подполугруппе аддитивной полугруппы \mathbf{R}_+ (см., например, [11,

глава XI, теорема 2]). Значит, на ней существует строго положительный полухарактер $r \neq 1$ (например, $r(s) = e^{-s}$, если считать, что $T \subset \mathbf{R}_+$), и осталось положить $\rho_0 = r \circ \pi$.

Воспользуемся гармонической мерой μ_{ρ_0} на X , построенной в [1]. Интеграл по мере μ_{ρ_0} определяется для любой ограниченной борелевской функции g на X формулой

$$\int_X g d\mu_{\rho_0} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} g(\rho_0^{iv}) \frac{dv}{1+v^2}.$$

Известно [1, теорема 5.7], что некоторая замкнутая подгруппа $X^{\rho_0} \subset X$ является носителем гармонической меры μ_{ρ_0} . Выберем компакт $K \subset X^{\rho_0}$, $K \neq X^{\rho_0}$ с непустой внутренностью (относительно X^{ρ_0}). Тогда $\mu_{\rho_0}(K) > 0$. Пусть ненулевая функция $g \in C(X)$ обращается в нуль на K (лемма Урысона), и пусть функция F из $A(\hat{S})$ такова, что ее сужение $F|_X$ есть g . В частности, $F|_K = 0$. Для комплексного $z = iy$, $y \in \mathbf{R}$ положим $f(z) := g(\rho_0^z)$. По условию теоремы $f(iy) = 0$, если $y \in B := \{y \in \mathbf{R} \mid \rho_0^{iy} \in K\}$. Но равенство

$$\begin{aligned} \mu_{\rho_0}(K) &= \int_X 1_K d\mu_{\rho_0} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} 1_K(\rho_0^{iv}) \frac{dv}{1+v^2} = \frac{1}{\pi} \int_B \frac{dv}{1+v^2} \end{aligned}$$

показывает, что множество B имеет положительную меру Лебега, а потому $f = 0$ по граничной теореме единственности Лузина-Привалова. Таким образом, $g(\rho_0^z) = 0$ при всех $z = iy$, $y \in \mathbf{R}$. Поскольку множество $\{\rho_0^{iy} \mid y \in \mathbf{R}\}$ плотно в X^{ρ_0} [1, теорема 7.2], получаем по непрерывности, что $g|_{X^{\rho_0}} = 0$. Таким образом, $F|_{X^{\rho_0}} = g|_{X^{\rho_0}} = 0$, – противоречие.

Теперь из максимальности полугруппы S следует, что $S_1 = S$. А так как в силу [1, теоремы 2.6 и 4.6] алгебра A_S изометрически изоморфна $A_0(\hat{S})$, то теорема доказана.

Следствие 2.1. Пусть полугруппа S задает на группе G архимедов порядок. Тогда алгебра $A(\hat{S})$ совпадает с $A_0(\hat{S})$.

Доказательство. Как уже отмечалось выше, если полугруппа S задает на группе G архимедов порядок, то она максимальна. Кроме того, такая полугруппа порядково изоморфна подполугруппе группы \mathbf{R} вида $H \cap \mathbf{R}_+$ для некоторой подгруппы H группы \mathbf{R} [11]. Поэтому она совпадает со своей слабой оболочкой, является конусом и не содержит нетривиальных простых идеалов (определения этих понятий см. в [12]).

Теперь из основной теоремы в [12] следует, что в случае архимедова порядка $\partial_{A(\hat{S})} = X$, и осталось воспользоваться предыдущей теоремой.

Покажем, как основной результат данной работы может применяться в задачах аппроксимации (ниже T – одномерный тор, т. е. группа вращений окружности).

Следствие 2.2. Обозначим через $A(T^l \times \bar{D})$ алгебру функций, непрерывных на $T^l \times \bar{D}$ и аналитических в D по второму аргументу (l – натуральное число). Пусть $F \in A(T^l \times \bar{D})$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любого компакта $K \subset T^l \times D$ найдётся такой полином p от переменных t_1, \dots, t_l и z , что

$$|F(t, z) - p(t, z)| < \varepsilon$$

для всех $(t, z) \in K$.

Доказательство. Пусть $G = \mathbf{Z}^{l+1}$, $S = \mathbf{Z}^l \times \mathbf{Z}_+$ ($l \in \mathbf{N}$) как в примере 1.2. Так как любую точку полугруппы S можно представить в виде

$$(m, n) = (m_1, \dots, m_l, n) = \sum_{j=1}^l m_j e_j + n e_{l+1},$$

где $(e_j)_{j=1}^{l+1}$ – стандартный базис в \mathbf{R}^{l+1} , то полухарактеры этой полугруппы имеют вид

$$\psi(m, n) = t^m z^n \quad (m \in \mathbf{Z}^l, n \in \mathbf{Z}_+),$$

где $t_j = \psi(e_j) \in T$, $t = (t_j)_{j=1}^l \in T^l$, $z = \psi(e_{l+1}) \in \bar{D}$.

Следовательно, полугруппу \hat{S} в этом примере можно отождествить с $T^l \times \bar{D}$, а группу X – с T^{l+1} . При этом алгебра $A(\hat{S})$ отождествляется с алгеброй $A(T^l \times \bar{D})$. Поскольку полугруппа S удовлетворяет условиям основной теоремы из [12], то $\partial_{A(\hat{S})} = X$. Таким образом, имеем

$A(\hat{S}) = A_0(\hat{S})$ в силу теоремы, доказанной выше. Пусть $F \in A(T^l \times \bar{D})$. Так как аналитические полиномы в нашем случае имеют вид

$$p(t, z) = \sum_{m, n} c_{mn} t^m z^n,$$

то из определения аналитичности по Аренсу-Зингеру вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого компакта $K \subset (T^l \times \bar{D}) \setminus T^{l+1}$ найдётся такой аналитический полином $p(t, z)$, что $|F(t, z) - p(t, z)| < \varepsilon$ для всех $(t, z) \in K$, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Arens, R. Generalized analytic functions / R. Arens, I.M. Singer // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – Vol. 81, № 2. – P. 379–393.
2. Гамелин, Т. Равномерные алгебры / Т. Гамелин. – М.: Мир, 1973. – 336 с.

3. *Rudin, W.* Fourier analysis on groups / W. Rudin. – N.Y. : Interscience Publishers, 1962. – 285 p.
4. *Helson, H.* Analyticity on compact abelian groups / H. Helson // Algebras in analysis: proceedings of instructional conference and NATO Advanced Study Institute, Birmingham, 1973 / Kluwer; H. Helson, ed. – London, 1975. – P. 1–62.
5. *Tonev, T.* Analytic functions on compact groups and their applications to almost periodic functions / T. Tonev, S.A. Grigoryan // Contemporary Math. – 2003. – Vol. 328, № 2. – P. 299–322.
6. *Grigoryan, S.A.* Shift-invariant algebras on groups / S.A. Grigoryan, T. Tonev // Contemporary Math. – 2004. – Vol. 363, № 1. – P. 111–127.
7. *Миротин, А.Р.* Теорема Пэли-Винера для конусов в локально компактных абелевых группах / А.Р. Миротин // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1995. – № 3. – С. 35–44.
8. *Миротин, А.Р.* Интерполяционные множества алгебры обобщенных аналитических функций / А.Р. Миротин, М.А. Романова // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2007. – № 3. – С. 51–59.
9. *Клиффорд, А.* Алгебраическая теория полугрупп: в 2 т. / А. Клиффорд, Г. Престон. – М. : Наука, 1972. – Т. 1. – 285 с.
10. *Grigoryan, S.A.* Shift-invariant uniform algebras on groups / S.A. Grigoryan, T.V. Tonev. – N. Y. – Basel : Birkhauser, 2006. – 292 p.
11. *Фукс, Л.* Частично упорядоченные алгебраические системы / Л. Фукс. – М. : Мир, 1965. – 342 с.
12. *Романова, М.А.* Вычисление пространства максимальных идеалов и границы Шилова некоторых алгебр обобщенных аналитических функций / М.А. Романова // Веснік Мазырсака дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта. – 2006. – № 2 (15). – С. 16–22.

Поступила в редакцию 14.02.11.

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ, ФАКТОРИЗУЕМЫХ ФОРМАЦИОННЫМИ ПОДГРУППАМИ

В.Н. Семенчук, В.Ф. Велесницкий

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ON THE FINITE GROUPS FACTORIZABLE BY FORMATION SUBGROUPS

V.N. Semenchuk, V.F. Veliasnitski

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Работа посвящена изучению конечных групп, факторизуемых формационными подгруппами.

Ключевые слова: группа, формация, корадикал, обобщенно субнормальная подгруппа, индекс, подгруппа Фраттини.

This work is devoted to the study of finite groups factorizable by formation subgroups.

Keywords: group, formation, coradical, generalized subnormal subgroup, index, subgroup Frattini.

Введение

Вопросы, посвященные факторизации групп, в теории конечных групп занимают важное место. Под факторизацией конечной группы понимается представление её в виде произведения некоторых её подгрупп, взятых в определенном порядке или попарно перестановочных.

Начало исследований по факторизации конечных групп восходит к классическим работам Ф. Холла [1], [2], посвященных изучению строения разрешимых групп.

Следующий важный шаг в данном направлении был сделан С.А. Чунихиным, которым был исследован ряд важных арифметических свойств конечных групп [3].

Кегель и Виланд [4], [5] установили, что конечная группа, факторизуемая двумя нильпотентными подгруппами, разрешима.

В 1996 году В.Н. Тютянов в работе [6] доказал, что любая конечная группа вида $G = AB$, где A и B – π -замкнутые подгруппы и индексы $|G:A|$, $|G:B|$ не делятся ни на одно простое число p из некоторого множества простых чисел π , является π -замкнутой группой.

Естественно возникает задача об нахождении новых классов конечных групп \mathfrak{F} , замкнутых относительно произведения \mathfrak{F} -подгрупп, индексы которых не делятся ни на одно простое число из некоторого множества простых чисел π . Именно развитию данного направления и посвящена данная работа.

1 Предварительные сведения

Все рассматриваемые в работе группы конечны. На протяжении всей работы будем пользоваться стандартными обозначениями, взятыми

из [7], [8]. Напомним наиболее часто встречающиеся известные результаты и обозначения.

Обозначим через π – некоторое множество простых чисел, т. е. $\pi \subseteq \mathbb{P}$, $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$ – дополнение к π во множестве всех простых чисел; в частности, $p' = \mathbb{P} \setminus \{p\}$, где P – множество всех простых чисел.

\mathfrak{G}_π – класс всех π -групп.

Напомним, что произведением классов групп \mathfrak{F} и \mathfrak{X} называется класс \mathfrak{FX} , который состоит из всех групп G таких, что в G найдется нормальная \mathfrak{F} -подгруппа N с условием $G/N \in \mathfrak{X}$.

Если \mathfrak{F} – класс групп и G – группа, то корадикал G^δ – пересечение всех нормальных подгрупп N из G таких, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Формация – класс групп, замкнутый относительно фактор-групп и подпрямых произведений. Формация называется насыщенной, если $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$.

В теории конечных групп одно из центральных понятий является понятие субнормальной подгруппы.

В теории классов конечных групп естественным обобщением понятия субнормальности является понятие \mathfrak{F} -субнормальности, которое для произвольных конечных групп впервые введено Л.А. Шеметковым.

Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Подгруппу H группы G называют \mathfrak{F} -субнормальной, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_n = H$$

такая, что $(H_{i-1})^\delta \subseteq H_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Несколько другое понятие \mathfrak{F} -субнормальности введено Кегелем. Фактически оно объединяет понятие субнормальности и \mathfrak{F} -субнормальности в смысле Шеметкова.

Подгруппу H называют \mathfrak{F} -субнормальной в смысле Кегеля или \mathfrak{F} -достижимой, если существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \dots \supseteq H_m = H$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \dots, m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1} , либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

В следующей лемме приводятся известные свойства обобщенных субнормальных подгрупп.

Лемма 1.1. Пусть \mathfrak{F} – непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если H – подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H – \mathfrak{F} -субнормальная (\mathfrak{F} -достижимая) подгруппа группы G ;

2) если H – \mathfrak{F} -субнормальная (\mathfrak{F} -достижимая) подгруппа группы G , то $H \cap K$ – \mathfrak{F} -субнормальная (\mathfrak{F} -достижимая) подгруппа K для любой подгруппы K группы G ;

3) если H – \mathfrak{F} -субнормальная (\mathfrak{F} -достижимая) подгруппа K и K – \mathfrak{F} -субнормальная (\mathfrak{F} -достижимая) подгруппа группы G , то H – \mathfrak{F} -субнормальная (\mathfrak{F} -достижимая) подгруппа группы G ;

4) если H_1 и H_2 – \mathfrak{F} -субнормальные (\mathfrak{F} -достижимые) подгруппы группы G , то $H_1 \cap H_2$ – \mathfrak{F} -субнормальная (\mathfrak{F} -достижимая) подгруппа группы G ;

5) если все композиционные факторы группы G принадлежат формации \mathfrak{F} , то каждая субнормальная подгруппа группы G \mathfrak{F} -субнормальна в G ;

6) если H – \mathfrak{F} -субнормальная (\mathfrak{F} -достижимая) подгруппа группы G , то H^x \mathfrak{F} -субнормальна (\mathfrak{F} -достижима) в G для любых $x \in G$.

Напомним, что группа G называется π -замкнутой, если она содержит нормальную π -холлову подгруппу. Класс всех таких групп имеет вид $\mathfrak{G}_{\pi} \mathfrak{G}_{\pi'}$.

2 Основные результаты

Теорема 2.1. Пусть π_1 и π_2 – некоторые множества простых чисел и $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2}$. Тогда любая π_2 -разрешимая группа $G = AB$, где A и B \mathfrak{F} -подгруппы, индексы которых $|G:A|$, $|G:B|$ не делятся ни на одно простое число из π_2 , принадлежит \mathfrak{F} .

Доказательство. Доказательство теоремы проведем индукцией по порядку группы G . Так как по условию теоремы G – π_2 -разрешимая группа, то любая её минимальная нормальная подгруппа N – либо π_2' -группа, либо абелева p -группа, где $p \in \pi_2$. Рассмотрим следующие два случая.

1. Пусть N – π_2' -группа. Покажем, что для фактор-группы G/N условие теоремы выполняется. Действительно,

$$G/N = AN/N \cdot BN/N.$$

По теореме об изоморфизмах

$$AN/N = A/A \cap N \text{ и } BN/N = B/B \cap N.$$

Так как A и B – \mathfrak{F} -подгруппы и \mathfrak{F} -формация, то $A/A \cap N \in \mathfrak{F}$, $B/B \cap N \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $AN/N \in \mathfrak{F}$ и $BN/N \in \mathfrak{F}$. Известно, что

$$|G:AN| = |G/N:AN/N| \text{ и } |G:BN| = |G/N:BN/N|.$$

Это значит, что индексы $|G/N:AN/N|$ и $|G/N:BN/N|$ не делятся ни на одно простое число из π_2 . Итак, условия теоремы справедливы для фактор-группы G/N . По индукции, $G/N \in \mathfrak{F}$. Покажем, что $N \in \mathfrak{G}_{\pi_1}$. Действительно, так как A и B принадлежат \mathfrak{F} и $G = AB$, то $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Отсюда следует, что $N \in \mathfrak{G}_{\pi_1}$. Так как $G/N \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2}$, то $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2}$.

2. Пусть N – абелева p -группа. Покажем, что N – единственная нормальная подгруппа группы G . Действительно, предположим противное. Пусть N_1 и N – две различные минимальные подгруппы группы G . Рассмотрим фактор-группы G/N_1 и G/N . Как и выше нетрудно показать, что условие теоремы для фактор-групп G/N_1 , G/N выполняется. По индукции, $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} – формация, то $G = G/N_1 \cap N \in \mathfrak{F}$. Итак, N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G .

Покажем, что $\Phi(G) = 1$. Предположим противное. Тогда рассмотрим фактор-группу $G/\Phi(G)$. Как и выше, нетрудно показать, что условия теоремы выполняются для $G/\Phi(G)$. Следовательно, по индукции, $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} – насыщенная формация, то $G \in \mathfrak{F}$. Итак, $\Phi(G) = 1$. Тогда нетрудно показать, что $C_G(N) = N$.

Так как $p \in \pi_2$ и индексы $|G:A|$ и $|G:B|$ не делятся ни на одно простое число из π_2 , то $N \subseteq A \cap B$. Если $p \in \pi_1$, то из того факта, что $G/N \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2}$ следует, что $G \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2}$. Итак,

$p \in \pi_2 \setminus \pi_1$. Покажем, что $O_{\pi_1}(A) = 1$. Предположим противное, тогда

$$O_{\pi_1}(A) \subseteq C_A(N) = N.$$

Получили противоречие. Итак, $O_{\pi_1}(A) = 1$. Теперь из того факта, что $A \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2}$, следует, что $A \in \mathfrak{G}_{\pi_2}$. Аналогично можно доказать, что $B \in \mathfrak{G}_{\pi_2}$. Так как $G = AB$, то $G \in \mathfrak{G}_{\pi_2}$. А это значит, что $G \in \mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Теорема 2.2. Пусть π_1 и π_2 – некоторые множества простых чисел и $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2}$, тогда любая группа $G = AB$, где A и B \mathfrak{F} -подгруппы и индексы $|G:A|$, $|G:B|$ не делятся ни на одно простое число из π_2 и A или B – \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа G , принадлежит \mathfrak{F} .

Доказательство. Доказательство теоремы проведем индукцией по порядку группы G . Пусть K – произвольная нормальная подгруппа группы G . Покажем, что условия теоремы для фактор-группы G/K выполняются. Действительно,

$$G/K = AK/K \cdot BK/K.$$

По теореме об изоморфизмах

$$AK/K \cong A/A \cap K \text{ и } BK/K \cong B/B \cap K.$$

Так как A и B – \mathfrak{F} -подгруппы и \mathfrak{F} -формация, то $A/A \cap K \in \mathfrak{F}$, $B/B \cap K \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $AK/K \in \mathfrak{F}$ и $BK/K \in \mathfrak{F}$. Известно, что

$$|G:AK| = |G/K:AK/K| \text{ и } |G:BK| = |G/K:BK/K|.$$

Это значит, что индексы $|G/K:AK/K|$ и $|G/K:BK/K|$ не делятся ни на одно простое число из π_2 . Итак, условия теоремы справедливы для фактор-группы G/K . По индукции, $G/K \in \mathfrak{F}$.

Покажем, что группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N . Предположим противное, пусть N_1 и N – две различные минимальные нормальные подгруппы группы G . Очевидно, что $N_1 \cap N = E$. Как показано выше, по индукции, $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} – формация, то $G/N_1 \cap N = G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Покажем, что $\Phi(G) = 1$. Предположим противное, $\Phi(G) \neq 1$. Рассмотрим фактор-группу $G/\Phi(G)$. Как и выше, можно показать, что условия теоремы для фактор-группы $G/\Phi(G)$ выполняются. Следовательно, по индукции, $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} – насыщенная формация, то $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, $\Phi(G) = 1$.

Рассмотрим следующие два случая.

1. Пусть N – абелева группа, тогда N – p -группа. Если $p \in \pi_1$, то из этого факта, что $G/N \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2}$ следует, что $G \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2}$ и теорема доказана.

Пусть $p \in \pi_2 \setminus \pi_1$. Так как индексы $|G:A|$ и $|G:B|$ не делятся ни на одно простое число p , то, очевидно, что $N \subseteq A \cap B$.

Так как N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $\Phi(G) = 1$, то известно, что $C_G(N) = N$.

Согласно условию $A \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2}$. Покажем, что $O_{\pi_1}(A) = 1$. Предположим противное, тогда $O_{\pi_1}(A)$ и N поэлементно перестановочны, т. е. $O_{\pi_1}(A) \subseteq C_G(N) = N$, что невозможно. Итак, $O_{\pi_1}(A) = 1$. Теперь из того факта, что $A \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2}$ следует, что $A \in \mathfrak{G}_{\pi_2}$. Аналогичным образом получаем, что $B \in \mathfrak{G}_{\pi_2}$. Так как $G = AB$, то $G \in \mathfrak{G}_{\pi_2}$. А это значит, что $G \in \mathfrak{F}$ и теорема доказана.

2. Пусть N неабелева группа. В этом случае $N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_t$ есть прямое произведение неабелевых простых групп и $C_G(N) = 1$.

Рассмотрим подгруппу $H = AN$.

Как и выше, нетрудно показать, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $G^{\mathfrak{F}} \subseteq N$. Так как $G \notin \mathfrak{F}$ и N – минимальная нормальная подгруппа группы G , то $N = G^{\mathfrak{F}}$.

Покажем, что $H = AN \neq G$. Допустим противное, т. е. $G = AN$. Так как A – собственная подгруппа группы G и A – \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа группы G , то она содержится в некоторой максимальной \mathfrak{F} -нормальной подгруппе M группы G . Поскольку $N = G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$, то $AN \subseteq M = G$, что невозможно. Итак, $AN \neq G$.

Рассмотрим подгруппу $A^H \subseteq AN \neq G$. По тождеству Дедекинда

$$A^H = A^H \cap G = A^H \cap AB = A(A^H \cap B).$$

Покажем, что для подгруппы A^H условие теоремы выполнено. Действительно, так как \mathfrak{F} – наследственная формация, то из того, что $B \in \mathfrak{F}$ следует, что $A^H \cap B \in \mathfrak{F}$. Согласно лемме 1.1 A – \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа из A^H . Очевидно, что индексы $|A^H:A|$ и $|A^H:A^H \cap B|$ не делятся ни на одно простое число из π_2 . Так как A^H – собственные подгруппы группы G , то, по индукции, $A^H \in \mathfrak{F}$. Если $A^H \cap N = 1$, то отсюда

следует, что $A^H \subseteq C_G(N) = 1$. Получили противоречие, а тогда $A^H \cap N \neq 1$. Так как A^H – нормальная подгруппа из AN , то $A^H \cap N$ – нормальная подгруппа из N , но тогда

$$A^H \cap N = N_{i_1} \times N_{i_2} \times \dots \times N_{i_k},$$

где N_{i_j} – изоморфные неабелевы простые группы, $j = 1, 2, \dots, k$. По доказанному выше $A^H \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} – наследственная формация, то $A^H \cap N \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $N_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2, \dots, t$. Так как

$$N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_t,$$

то из того факта, что \mathfrak{F} – формация, следует, что $N \in \mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2}$. Если N – π_1 -группа, то из $G/N \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2}$ следует, что $G \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2}$ и теорема доказана.

Итак, порядок $|N|$ делится по крайней мере на одно простое число $p \in \pi_2 \setminus \pi_1$.

Рассмотрим подгруппу $O_{\pi_1}(N)$. Очевидно, что $O_{\pi_1}(N)$ – собственная подгруппа из N . Если $O_{\pi_1}(N) \neq 1$, то, ввиду того, что $O_{\pi_1}(N)$ – нормальная подгруппа группы G , получаем противоречие с тем фактом, что N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Итак, $O_{\pi_1}(N) = 1$. Теперь из того, что $N \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2}$, следует, что $N \in \mathfrak{G}_{\pi_2}$.

Так как индексы $|G:A|$ и $|G:B|$ не делятся ни на одно простое число из π_2 , то $N \subseteq A \cap B$.

Рассмотрим подгруппу $O_{\pi_1}(A)$. Если $O_{\pi_1}(A) \cap N = 1$, то отсюда следует, что

$$O_{\pi_1}(A) \subseteq C_A(N) \subseteq C_G(N) = 1.$$

Поскольку $A \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2}$, то $A \in \mathfrak{G}_{\pi_2}$. Тогда из того, что $G = AB$ и индексы $|G:A|$, $|G:B|$ не делятся ни на одно простое число из π_2 следует, что $G = B$. Это значит, что $G \in \mathfrak{F}$ и теорема доказана.

Пусть теперь $O_{\pi_1}(A) \cap N \neq 1$. Так как $O_{\pi_1}(A) \cap N$ – нормальная подгруппа из N , то

$$O_{\pi_1}(A) \cap N = N_{j_1} \times N_{j_2} \times \dots \times N_{j_t},$$

где N_{j_i} – изоморфные неабелевы простые группы, $i = 1, 2, \dots, t$. Отсюда следует, что $N_i \in \mathfrak{G}_{\pi_1}$, $i = 1, 2, \dots, t$.

Так как $N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_t$, то $N \in \mathfrak{G}_{\pi_1}$. Поскольку $G/N \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2}$, то $G \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2}$ и теорема доказана.

Теорема 2.3. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2} \mathfrak{G}_{\pi_1}$, где π_1 и π_2 – некоторые множества простых чисел таких, что $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$. Если $G = AB$ – π_2 -разрешимая группа, где A и B – \mathfrak{F} -подгруппы, индексы которых $|G:A|$, $|G:B|$ есть π_1 -числа, $G \in \mathfrak{F}$.

Доказательство. Доказательство теоремы проведем индукцией по порядку группы G . Покажем, что условия теоремы для фактор-группы G/N выполняются. Действительно,

$$G/N = AN/N \cdot BN/N.$$

По теореме об изоморфизмах

$$AN/N \cong A/A \cap N \text{ и } BN/N \cong B/B \cap N.$$

Так как A и B – \mathfrak{F} -подгруппы и \mathfrak{F} -формация, то $A/A \cap N \in \mathfrak{F}$, $B/B \cap N \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $AN/N \in \mathfrak{F}$ и $BN/N \in \mathfrak{F}$. Известно, что

$$|G:AN| = |G/N:AN/N| \text{ и } |G:BN| = |G/N:BN/N|.$$

Это значит, что индексы $|G/N:AN/N|$ и $|G/N:BN/N|$ не делятся ни на одно простое число из π_2 . Итак, условия теоремы справедливы для фактор-группы G/N . По индукции, $G/N \in \mathfrak{F}$.

Так как по условию теоремы G – π_2 -разрешимая группа, то её любая минимальная нормальная подгруппа N – либо π_2' -группа, либо абелева p -группа, где $p \in \pi_2$.

Пусть N – π_2' -группа. Рассмотрим

$$G/N = AN/N \cdot BN/N.$$

Очевидно, что AN/N и BN/N \mathfrak{F} -подгруппы и $|G/N:AN/N|$, $|G/N:BN/N|$ – π_1 -числа. По индукции, $G/N \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2} \mathfrak{G}_{\pi_1}$.

Так как $G = AB$, где A и B – \mathfrak{F} -подгруппы, то $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Это значит, что N – π_1 -группа. Теперь, из того факта, что $G/N \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2} \mathfrak{G}_{\pi_1}$ следует, что $G \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2} \mathfrak{G}_{\pi_1}$.

Пусть N – абелева p -группа, где $p \in \pi_2$.

Покажем, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G . Действительно, предположим противное, пусть N и N_1 – две различные минимальные подгруппы группы G . Ясно, что $N \cap N_1 = 1$. Как и выше, не трудно показать, что условия теоремы переносятся на фактор-группы G/N и G/N_1 . Следовательно, по индукции, $G/N \in \mathfrak{F}$ и $G/N_1 \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} – формация, то $G = G/N \cap N_1 \in \mathfrak{F}$. Покажем, что $\Phi(G) = 1$. Действительно, в противном случае, как и выше, можно доказать, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} – насыщенная формация, то $G \in \mathfrak{F}$. Поскольку N – единственная минимальная

нормальная подгруппа группы G и $\Phi(G)=1$, то отсюда следует, что $C_G(N) = N$.

Так как $N - p$ -группа ($p \in \pi_2$) и индексы $|G:A|$ и $|G:B| - \pi_1$ -числа, то $N \subseteq A \cap B$. Рассмотрим подгруппу $A \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2} \mathfrak{G}_{\pi_1}$. Если $O_{\pi_1}(A) \neq 1$, то $O_{\pi_1}(A) \subseteq C_A(N) = N$, что невозможно. Итак, $O_{\pi_1}(A) = 1$. Отсюда следует, что $A \in \mathfrak{G}_{\pi_2} \mathfrak{G}_{\pi_1}$. Аналогичным образом можно доказать, что $B \in \mathfrak{G}_{\pi_2} \mathfrak{G}_{\pi_1}$. Так как $\pi_2 \cap \pi_1 = \emptyset$, то A и $B - \pi_2$ -замкнутые группы. Теперь из того факта, что $G = AB$ и индексы $|G:A|$, $|G:B| - \pi_1$ -числа нетрудно показать, что $G - \pi_2$ -замкнутая группа. А это значит, что $G \in \mathfrak{G}_{\pi_2} \mathfrak{G}_{\pi_1}$. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2} \mathfrak{G}_{\pi_1}$. Теорема доказана.

Следствие 2.3.1. Пусть $G - p$ -разрешимая группа, $G = AB$, где $l_p(A) \leq 1$, $l_p(B) \leq 1$, индексы $|G:A|$, $|G:B|$ не делятся на p , тогда $l_p(G) \leq 1$.

Доказательство. Известно, что класс всех p -разрешимых групп с p -длинной ≤ 1 можно записать в следующем виде $\mathfrak{G}_p \mathfrak{G}_p \mathfrak{G}_p$. Теперь требуемый результат следует из теоремы 2.3.

Теорема 2.4. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2} \mathfrak{G}_{\pi_1}$, где π_1 и $\pi_2 -$ некоторые множества простых чисел таких, что $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$. Тогда любая группа $G = AB$, где A и $B - \mathfrak{F}$ -подгруппы, индексы которых $|G:A|$, $|G:B|$ есть π_1 -числа и A или $B - \mathfrak{F}$ -субнормальна в G , принадлежит \mathfrak{F} .

Доказательство. Доказательство теоремы проведем индукцией по порядку группы G . Пусть $K -$ произвольная нормальная подгруппа группы G . Покажем, что условия теоремы для фактор-группы G/K выполняются. Действительно,

$$G/K = AK/K \cdot BK/K.$$

По теореме об изоморфизмах

$$AK/K \cong A/A \cap K \text{ и } BK/K \cong B/B \cap K.$$

Так как A и $B - \mathfrak{F}$ -подгруппы и \mathfrak{F} -формация, то $A/A \cap K \in \mathfrak{F}$, $B/B \cap K \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $AK/K \in \mathfrak{F}$ и $BK/K \in \mathfrak{F}$. Известно, что

$$|G:AK| = |G/K:AK/K|$$

$$\text{и } |G:BK| = |G/K:BK/K|.$$

Это значит, что индексы $|G/K:AK/K|$ и $|G/K:BK/K|$ есть π_1 -числа. Итак, условия теоремы справедливы для фактор-группы G/K . По индукции, $G/K \in \mathfrak{F}$.

Покажем, что группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N . Предположим противное, пусть N_1 и $N -$ две различные минимальные нормальные подгруппы группы G . Очевидно, что $N_1 \cap N = 1$. Как показано выше, по индукции, $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F} -$ формация, то $G/N_1 \cap N = G \in \mathfrak{F}$ и теорема доказана.

Покажем, что $\Phi(G) = 1$. Предположим противное, $\Phi(G) \neq 1$. Рассмотрим фактор-группу $G/\Phi(G)$. Как и выше, можно показать, что условия теоремы для фактор-группы $G/\Phi(G)$ выполняются. Следовательно, по индукции, $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F} -$ насыщенная формация, то $G \in \mathfrak{F}$ и теорема доказана. Итак, $\Phi(G) = 1$.

Рассмотрим следующие два случая.

1. Пусть $N -$ абелева p -группа, тогда $N - p$ -группа. Если $p \in \pi_1$, то из этого факта, что $G/N \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2} \mathfrak{G}_{\pi_1}$ следует, что $G \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2} \mathfrak{G}_{\pi_1}$, а тогда $G \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2} \mathfrak{G}_{\pi_1}$ и теорема доказана.

Пусть $p \in \pi_2 \setminus \pi_1$. Так как индексы $|G:A|$ и $|G:B|$ не делятся ни на одно простое число p , то, очевидно, что $N \subseteq A \cap B$.

Так как $N -$ единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $\Phi(G) = 1$, то известно, что $C_G(N) = N$.

Согласно условию $A \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2} \mathfrak{G}_{\pi_1}$. Покажем, что $O_{\pi_1}(A) = 1$. Предположим противное, тогда $O_{\pi_1}(A)$ и N поэлементно перестановочны, т. е. $O_{\pi_1}(A) \subseteq C_G(N) = N$, что невозможно. Итак, $O_{\pi_1}(A) = 1$. Теперь из того факта, что $A \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2} \mathfrak{G}_{\pi_1}$ следует, что $A \in \mathfrak{G}_{\pi_2} \mathfrak{G}_{\pi_1}$. Аналогичным образом получаем, что $B \in \mathfrak{G}_{\pi_2} \mathfrak{G}_{\pi_1}$. Так как $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$, то A и $B - \pi_2$ -замкнутые подгруппы группы G . Поскольку индексы $|G:A|$ и $|G:B| - \pi_1$ -числа, то $G - \pi_2$ -замкнутая группа, а значит $G \in \mathfrak{F}$.

2. Пусть N неабелева группа. В этом случае

$$N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_t$$

есть прямое произведение неабелевых простых групп и $C_G(N) = 1$.

Рассмотрим подгруппу $H = AN$.

Как и выше, нетрудно показать, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $G^\delta \subseteq N$. Так как $G \notin \mathfrak{F}$ и $N -$ минимальная нормальная подгруппа группы G , то $N = G^\delta$.

Покажем, что $H = AN \neq G$. Допустим противное, т. е. $G = AN$. Так как A – собственная подгруппа группы G и A – \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа группы G , то она содержится в некоторой максимальной \mathfrak{F} -нормальной подгруппе M группы G . Поскольку $N = G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$, то $AN \subseteq M = G$, что невозможно. Итак, $AN \neq G$.

Рассмотрим подгруппу $A^H \subseteq AN \neq G$. По тождеству Дедекинда

$$A^H = A^H \cap G = A^H \cap AB = A(A^H \cap B).$$

Покажем, что для подгруппы A^H условие теоремы выполнено. Действительно, так как \mathfrak{F} – наследственная формация, то из того, что $B \in \mathfrak{F}$ следует, что $A^H \cap B \in \mathfrak{F}$. Согласно лемме 1.1 A – \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа из A^H . Очевидно, что индексы $|A^H : A|$ и $|A^H : A^H \cap B|$ не делятся ни на одно простое число из π_2 . Так как A^H – собственные подгруппы группы G , то, по индукции, $A^H \in \mathfrak{F}$. Если $A^H \cap N = 1$, то отсюда следует, что $A^H \subseteq C_G(N) = 1$, тогда $A \subseteq A^H = 1$.

Получили противоречие, а тогда $A^H \cap N \neq 1$. Так как A^H – нормальная подгруппа из AN , то $A^H \cap N$ – нормальная подгруппа из N , но тогда

$$A^H \cap N = N_{i_1} \times N_{i_2} \times \dots \times N_{i_k},$$

где N_{i_j} – изоморфные неабелевы простые группы, $j = 1, 2, \dots, k$. По доказанному выше $A^H \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} – наследственная формация, то $A^H \cap N \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $N_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2, \dots, t$.

$$N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_t,$$

то из того факта, что \mathfrak{F} – формация следует, что $N \in \mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2} \mathfrak{G}_{\pi_1}$. Если N – π_1 -группа, то из $G/N \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2} \mathfrak{G}_{\pi_1}$ следует, что $G \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2} \mathfrak{G}_{\pi_1}$ и теорема доказана.

Итак, порядок $|N|$ делится по крайней мере на одно простое число $p \in \pi_2 \setminus \pi_1$.

Рассмотрим подгруппу $O_{\pi_1}(N)$. Очевидно, что $O_{\pi_1}(N)$ – собственная подгруппа из N . Если $O_{\pi_1}(N) \neq 1$, то, ввиду того, что $O_{\pi_1}(N)$ – нормальная подгруппа группы G , получаем противоречие с тем фактом, что N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Итак, $O_{\pi_1}(N) = 1$.

Теперь из того, что $N \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2} \mathfrak{G}_{\pi_1}$, следует, что $N \in \mathfrak{G}_{\pi_2} \mathfrak{G}_{\pi_1}$. Если порядок $|N|$ делится на некоторое простое число из π_1 , то N_{π_2} – собственная подгруппа из N . Так как N – π_2 -замкнутая

подгруппа, то N_{π_2} неединичная нормальная подгруппа группы G , что невозможно. Итак, N – π_2 -группа.

Так как индексы $|G : A|$ и $|G : B|$ не делятся ни на одно простое число из π_2 , то $N \subseteq A \cap B$.

Рассмотрим подгруппу $O_{\pi_1}(A)$. Допустим, что $O_{\pi_1}(A) \cap N \neq 1$. Поскольку $O_{\pi_1}(A) \cap N$ – нормальная подгруппа из N , то

$$O_{\pi_1}(A) \cap N = N_{j_1} \times N_{j_2} \times \dots \times N_{j_t},$$

где N_{j_i} – изоморфные неабелевы простые группы, $i = 1, 2, \dots, t$. Отсюда следует, что $N_{j_i} \in \mathfrak{G}_{\pi_1}$, $i = 1, 2, \dots, t$. Так как $N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_t$, то $N \in \mathfrak{G}_{\pi_1}$. Поскольку $G/N \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2} \mathfrak{G}_{\pi_1}$, то $G \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2} \mathfrak{G}_{\pi_1}$ и теорема доказана.

Пусть теперь $O_{\pi_1}(A) \cap N = 1$, то отсюда следует, что $O_{\pi_1}(A) \subseteq C_A(N) \subseteq C_G(N) = 1$.

Поскольку $A \in \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2} \mathfrak{G}_{\pi_1}$, то $A \in \mathfrak{G}_{\pi_2} \mathfrak{G}_{\pi_1}$.

Так как $\pi_2 \cap \pi_1 = \emptyset$, то A – π_2 -замкнутая группа. Аналогичным образом можно доказать, что B – π_2 -замкнутая группа. Поскольку индексы $|G : A|$ и $|G : B|$ есть π_1 -числа и $G = AB$, то G – π_2 -замкнутая группа. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{G}_{\pi_2} \mathfrak{G}_{\pi_1} \subset \mathfrak{G}_{\pi_1} \mathfrak{G}_{\pi_2} \mathfrak{G}_{\pi_1} = \mathfrak{F}$ и теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hall, P. A note on soluble groups / P. Hall // Proc. London Math. Soc. – 1928. – Vol. 3. – P. 98–105.
2. Hall, P. On the Sylow systems of a soluble group / P. Hall // Proc. London Math. Soc. – 1937. – Vol. 43. – P. 316–323.
3. Чунихин, С.А. Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Минск : Наука и техника, 1964. – 158 с.
4. Kegel, O.H. Produkte nilpotenter Gruppen // Arch. Math. – 1961. – Vol. 12, № 2. – P. 90–93.
5. Wielandt, H. Uber das Produkt von nilpotenten Gruppen / H. Wielandt // Illinois Journ. – 1958. – Vol. 2, № 4B. – P. 611–618.
6. Тютянов, В.Н. Факторизации π -нильпотентными сомножителями / В.Н. Тютянов // Математический сборник. – 1996. – Т. 187, № 9. – С. 97–102.
7. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков // М. : Наука. – 1978. – 272 с.
8. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов // Мн. : Выш. шк., 2006. – 207 с.

Поступила в редакцию 17.02.11.

УДК 548.55

РАЗВИТИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ ОПТИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ КРИСТАЛЛОВ В ИНСТИТУТЕ КРИСТАЛЛОГРАФИИ РАН

А.Ф. Константинова

Институт кристаллографии им. А.В. Шубникова РАН, Москва, Россия

DEVELOPMENT OF RESEARCHES OF OPTICAL ACTIVITY OF CRYSTALS IN INSTITUTE OF CRYSTALLOGRAPHY OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

A.F. Konstantinova

A.V. Shubnikov Institute of Crystallography, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

В статье содержится краткое описание исследований, основанных на научных идеях академика Ф.И. Фёдорова и выполненных в области исследования оптической активности прозрачных и поглощающих кристаллов в Институте кристаллографии РАН. Представлены результаты изучения поляризационных характеристик собственных волн одно- и двуосных кристаллов в зависимости от толщины кристаллического слоя, температуры и других параметров. В статье содержится информация о приборах и методах исследования, разработанных и используемых в ИК РАН для получения информации об оптических свойствах (о компонентах тензора гирации, показателях преломления, величине циркулярной анизотропии, циркулярного дихроизма и др.) кристаллов – как оптически активных, так и не проявляющих гиротропии – в их различных фазовых состояниях. В отдельном разделе статьи представлены поляризационные характеристики излучения, прошедшего через кристаллический слой или отражённого им, рассчитанные с применением методов компьютерного моделирования на основе теоретических соотношений, соответствующих различным по точности приближениям. Статья дополнена обширным списком научных работ, использованных при подготовке рукописи.

Ключевые слова: научные идеи Ф.И. Фёдорова, ковариантные методы, прозрачные и поглощающие кристаллы, одноосные и двуосные кристаллы, рефракция, абсорбция, оптическая активность, удельное вращение, циркулярное двуупреломление, циркулярный дихроизм, тензор гирации, дисперсия, собственные волны, азимут поляризации, эллиптичность, коэффициент отражения, спектрополяриметр, дихрограф, спектрофотометрическая установка, теоретические расчёты, экспериментальное исследование, компьютерное моделирование.

In the article a brief description of the researches based on scientific ideas of academician F.I. Fedorov and executed in the field of research of optical activity of transparent and absorbing crystals in the Institute of Crystallography of the Russian Academy of Sciences is given. Results of study of polarizing characteristics of eigen waves uniaxial and biaxial crystals depending on the thickness of a crystal layer, temperature and other parameters are presented. In the article the information about devices and the methods of research developed and used in the Institute of Crystallography of the Russian Academy of Sciences for obtaining the information about optical properties of crystals (about components of gyration tensor, parameters of refraction, value of circular anisotropy, circular dichroism, etc., as optical active crystals, and not showing gyrotropy, in various phase conditions) is presented. The polarizing characteristics of the radiation passed through a crystal layer or reflected by it and calculated with the application of methods of computer modelling on the basis of the theoretical relations corresponding to variations of accuracy approximation are described. The article is added to the extensive list of the scientific works used for preparation of the manuscript.

Keywords: F.I. Fedorov's scientific ideas, covariant methods, transparent and absorbing crystals, uniaxial and biaxial crystals, refraction, absorption, optical activity, specific rotation, circular birefringence, circular dichroism, gyration tensor, dispersion, eigen waves, azimuth of polarization, ellipticity, reflection coefficient, spectropolarimeter, dichrograph, spectrophotometric setup, theoretical calculations, an experimental research, computer modelling.

Введение

Фёдор Иванович Фёдоров открыл путь в науку многим молодым людям, в числе которых были студенты физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, на кафедре «Кристаллография и кристаллофизика». Начиная с 1958 г. преподаватель из Беларуси Ф.И. Фёдоров читал курс лекций по кристаллооптике и акустике и все студенты получили прекрасное образование по этим предметам [1]. Среди них и автор настоящей обзорной статьи, освоившая ковариантные методы описания световых пучков и их практическое применение в ходе выполнения дипломной работы под руководством первооткрывателя метода – Ф.И. Фёдорова.

К 1958 году с явлением оптической активности в кристаллах было связано много исследований и некоторые вопросы уже были решены [2], [3], но измерение углов поворота плоскости поляризации проводилось, как правило, только для света, распространяющегося в направлении оптической оси кристалла [4]. Точного решения задачи о распространении света в оптически активных кристаллах произвольного среза тогда не было. Поэтому первой научной задачей, решённой автором настоящей статьи под руководством Ф.И. Фёдорова, стала задача о распространении света в прозрачном оптически активном кристалле с учётом многократных отражений [5]. Работа автора в лаборатории кристаллооптики

Института кристаллографии (ИК РАН), возглавляемой С.В. Грум-Гржимайло, началась с изучения проявлений оптической активности в кристаллах в направлении оптической оси и перпендикулярно ей по просьбе А.В. Шубникова [6]. В результате совместного с Ф.И. Фёдоровым теоретического расчёта было показано, что при прохождении света через установленные в скрещённом положении две пластинки кварца, вырезанные параллельно оптической оси, линейное двупреломление компенсируется, но эллиптическое двупреломление, обусловленное оптической активностью имеет место [7]. Позже, после опубликования работ [8], [9], в которых предлагались новые уравнения связи, вышла статья [10], в которой задача о прохождении света решалась с использованием уравнений связи, записанных в новой форме. Было показано, что в ситуациях, когда величина двупреломления мала, результаты применения старых и новых уравнений связи приблизительно одинаковы. Для кристаллов с большой анизотропией ($0,5 \div 1$) учёт дополнительных членов в материальных уравнениях при определении поляризации прошедшего света необходим.

Долгое время считалось, что оптической активностью могут обладать кристаллы 15 классов симметрии, хотя в [11] предполагалось, что таких классов 18. Тем не менее, по-прежнему считали, что кристаллы планальных классов средних сингоний $3m$, $4mm$, $6mm$ оптически неактивны, несмотря на то, что в [12] Ф.И. Фёдоровым было обосновано, что эти кристаллы также могут обладать оптической активностью и что она проявляется только при наклонном падении света на кристалл. Аналогичная задача с учётом многократных отражений была решена в [13], и выяснилось, что в оптически активном кристалле отражённая волна будет эллиптически поляризована при определённой ориентации оптической оси относительно плоскости падения. При этом эллиптичность как отражённой, так и прошедшей волны пропорциональна антисимметричной компоненте псевдотензора гирации. Было показано, что подбирая среду, окружающую пластинку, с показателями преломления близкими показателям преломления кристалла, можно добиться увеличения эллиптичности отражённого света. Позже такая же задача была решена с новыми уравнениями связи [14]. В кристаллах планальных классов оптическая активность проявляется только при наклонном падении. Экспериментальное исследование оптической активности кристаллов CdS (класс симметрии $3m$) было проведено в [15]. В настоящее время многие исследователи считают, что эти кристаллы «слабо» активные [16], но некоторые по-прежнему считают эти кристаллы неактивными [17].

Многочисленные результаты, полученные при изучении оптических свойств кристаллов,

можно систематизировать по разным признакам, и полностью описать их в одной статье невозможно. Поэтому рассмотрим те из выполненных в ИК РАН исследований, в которых изучаются оптические свойства одноосных и двуосных, прозрачных и поглощающих, оптически активных и не проявляющих этого свойства кристаллов методами теоретической и экспериментальной оптики и компьютерного моделирования.

1 Исследование одноосных прозрачных кристаллов

Начиная с работ Ф.И. Федорова, в ИК РАН стало развиваться исследование оптической активности кристаллов, и было проведено множество работ, по этой тематике. На основе полученных в этом направлении научных результатов были разработаны и созданы новые приборы, а также для исследования оптически активных поглощающих кристаллов предложены различные варианты методов, отличных от методов исследования изотропных веществ.

В ИК РАН совместно со специальным конструкторским бюро (СКБ) был разработан и изготовлен спектрополяриметр, специально предназначенный для исследования оптической активности кристаллов в спектральном диапазоне ($0,23 \div 0,6$) мкм с чувствительностью от $(0,0025 \pm 0,0001)^\circ$ до $(0,005 \pm 0,0005)^\circ$ в диапазоне измеряемых углов от 0 до 360° [18]. Аналогичный прибор был создан для электрооптических измерений [19]. На этих приборах проводились измерения углов поворота плоскости поляризации изотропных и одноосных кристаллов в направлении оптической оси [20], [21] (рисунок 1).

Результаты совместных с Федоровым работ [5], [7] стали основой для использования этих приборов в целях исследования поглощающих одноосных и двуосных кристаллов не только вдоль оптической оси, но и в других направлениях. Позже многие методы исследования различных кристаллов были описаны в [22].

Приведем примеры теоретических и экспериментальных исследований, проведённых благодаря идеям Ф.И. Федорова. Первым был исследован кристалл кварца, пластинка из которого была вырезана параллельно оптической оси [23]. Показано, что компоненты псевдотензора гирации (далее для краткости приставку «псевдо» будем опускать) имеют противоположный знак по сравнению с компонентами тензора гирации в направлении оптической оси. Поэтому при некоторой ориентации оптической оси в пластинке кристалл становится неактивным. Также были проведены измерения с использованием двух скрещённых пластинок и подтверждено, что в этой ситуации действительно эллиптичность прошедшего света в два раза больше чем при использовании одной пластинки величина азимута прошедшего света равна $\sim 15'$ (рисунок 2).

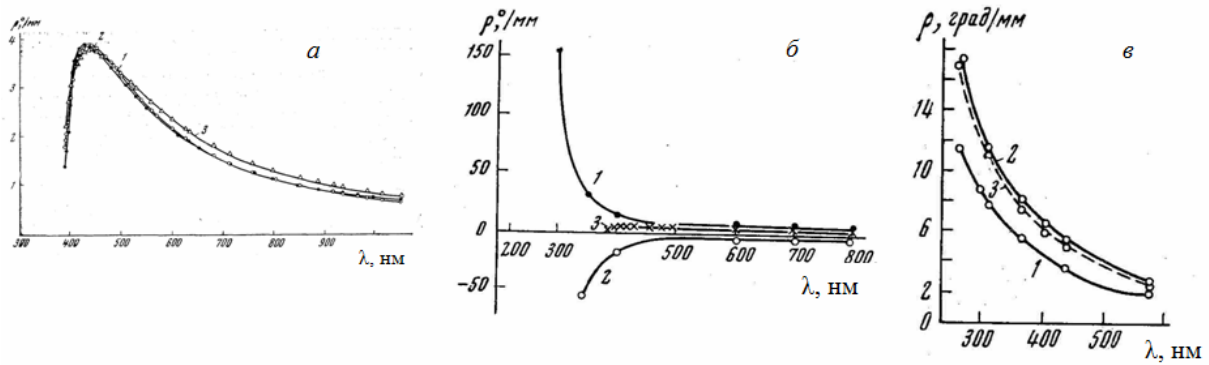


Рисунок 1 – Дисперсия вращения плоскости поляризации света в разных кристаллах
 а) кристалл $\text{Na}_3\text{SbS}_4 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$: 1 – экспериментальная кривая, 2 – кривая, рассчитанная по формуле Друде, 3 – кривая, рассчитанная по формуле Чандрасекара; б) схематическое пояснение происхождения дисперсии вращательной способности кристалла $\text{NaSbS}_4 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$; в) дисперсия вращательной способности в кристаллах $\text{CaS}_2\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ (1), $\text{SrS}_2\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ (2), $\text{SrCaS}_2\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ (3)

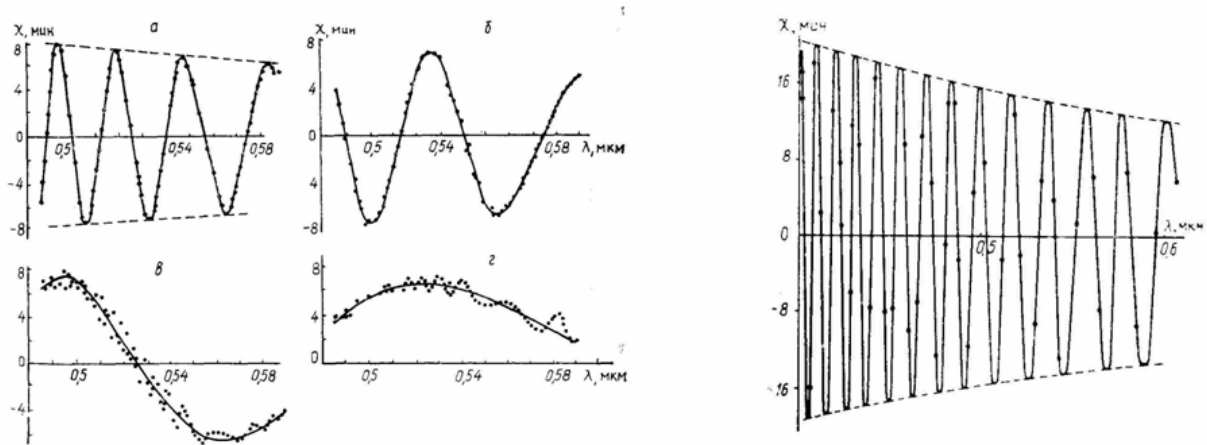


Рисунок 2 – Зависимость азимута поляризации прошедшего света χ от длины волны для пластинок из правого кварца различной толщины:
 слева – для одной пластинки: а – $d=1$ мм, б – $d=0,5$ мм, в – $d=0,2$ мм, з – $d=0,1$ мм;
 справа – для двух скрещённых пластинок; $d=1,5$ мм

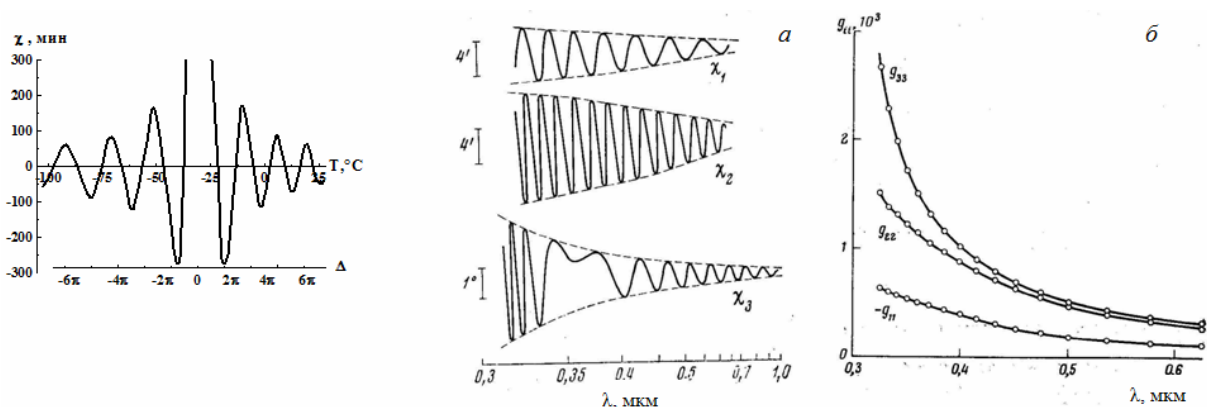


Рисунок 3 – Проявление оптической активности в кристалле $\text{NH}_4\text{H}_3(\text{SeO}_3)_2$ при изменении температуры T :
 $d=2.57$ мм, $\lambda=0.633$ мкм

Рисунок 4 – Зависимость азимута поляризации света, прошедшего через кристалл а – HfO_3 , от длины волны для пластинок трёх различных срезов: χ_1, χ_2, χ_3 – для x, y, z – срезов соответственно (а). Дисперсия трёх компонентов тензора гирации кристалла а – HfO_3 при комнатной температуре (б)

Затем были исследованы кристаллы тригидроселенита аммония $\text{NH}_4\text{H}_3(\text{SeO}_3)_2$ (класс симметрии 222), которые при определенной длине волны и температуре становятся одноосными (рисунок 3). При распространении света вдоль оси в этих кристаллах наблюдается вращение плоскости поляризации, а в других направлениях при увеличении угла между направлением распространения света и оптической осью кристалла имеют место осцилляции азимута поляризации прошедшего света, обусловленные одновременно проявлением оптической активности и двупреломления [24].

Аналогичные измерения были выполнены с использованием пластинок из кристалла α – HfO_3 (симметрия 222) [25], [26]. Этот кристалл является важным нелинейно-оптическим материалом, и результаты исследования его свойств могут представлять практический интерес (рисунок 4). Измерения проводились на трех срезах (x , y , z), чтобы определить азимут и эллиптичность света, прошедшего через пластинку. В результате были получены значения всех компонентов тензора гирации. Оказалось, что в этом кристалле, как и

в кварце, компоненты тензора гирации имеют разные знаки и, следовательно, существуют направления, в которых кристалл становится неактивным.

Некоторые измерения были проведены с применением пластинок, вырезанных из других кристаллов. На рисунке 5, например, приведены результаты исследования кубического кристалла $\text{K}_2\text{CO}_2(\text{SO}_4)_3$, который при понижении температуры по сравнению с T_c ($T_c = 125$ К) в области фазового перехода переходит в несобственную сегнетоэлектрическую фазу, и из изотропного кристалла становится двупреломляющим. Это хорошо видно, так как при $T = 127$ К график зависимости разности угла α (поворот пластинки вокруг нормали к ней) и азимута поляризации прошедшего света χ – практически прямая, как для изотропного кристалла. По мере удаления от этой точки осцилляции величины $(\alpha - \chi)$ увеличиваются. На рисунке 5 б видно, что при фазовом переходе величина линейного двупреломления изменяется скачком, в то время как величина циркулярного двупреломления изменяется плавно [27].

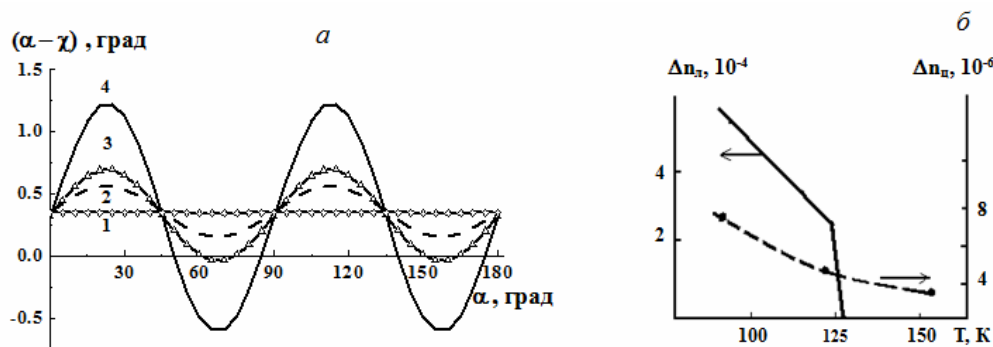


Рисунок 5 – Зависимости $(\alpha - \chi)$ от α для пластинки толщиной $d = 0,075$ мм, вырезанной из кристалла $\text{K}_2\text{CO}_2(\text{SO}_4)_3$, при $\lambda = 0,64$ мкм при разных температурах: 1 – 127 К; 2 – 125 К, 3 – 120 К, 4 – 99 К (а).

Зависимость величины линейного (Δn_n) и циркулярного (Δn_c) двупреломлений от температуры в области фазового перехода кристалла $\text{K}_2\text{CO}_2(\text{SO}_4)_3$ при $\lambda = 0,43$ мкм (б)

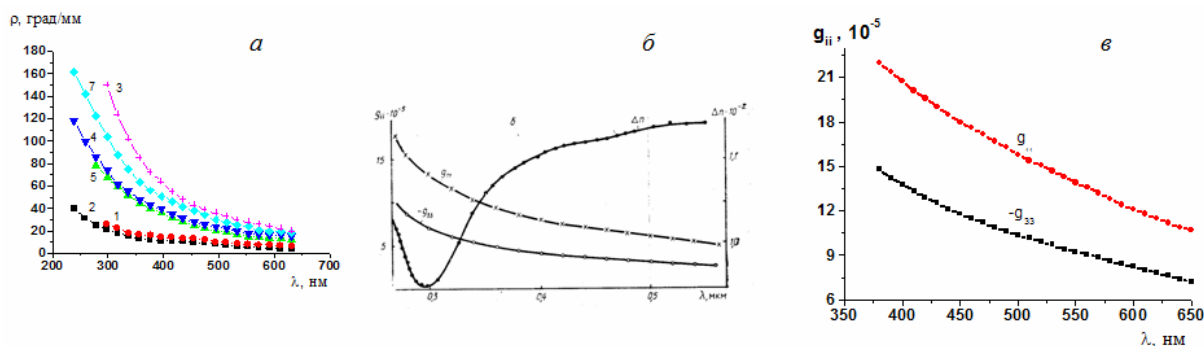


Рисунок 6 – Удельное вращение кристаллов: 1 – $\text{La}_3\text{Ga}_5\text{SiO}_{14}$, 2 – $\text{La}_3\text{Ga}_5\text{GeO}_{14}$, 3 – $\text{La}_3\text{Ga}_{5,5}\text{Nb}_{0,5}\text{O}_{14}$, 4 – $\text{Ca}_3\text{Ga}_2\text{Ge}_4\text{O}_{14}$, 5 – $\text{Sr}_3\text{Ga}_2\text{Ge}_4\text{O}_{14}$, 7 – SiO_2 (а). Дисперсия компонентов тензора гирации и величина двупреломления кристалла $\text{La}_3\text{Ga}_5\text{SiO}_{14}$: 1 – g_{11} , 2 – g_{33} , 3 – Δn (б).

Дисперсия компонентов тензора гирации g_{11} и g_{33} кристалла $\text{Sr}_3\text{Ga}_2\text{Ge}_4\text{O}_{14}:\text{Cr}^{3+}$ (в)

Особенно интересны были измерения, выполненные с кристаллами семейства лангаситов, которые по типу симметрии (32) и по некоторым свойствам близки к кварцу. Для некоторых кристаллов этого семейства были впервые измерены показатели преломления и поглощения, а также удельное вращение плоскости поляризации $\rho(\lambda)$ в направлении оптической оси [28]. Значения $\rho(\lambda)$ для этих кристаллов приведены на рисунке 6а. Результаты измерений компонентов тензора гирации и величины двупреломления кристаллов $\text{La}_3\text{Ga}_3\text{SiO}_{14}$ приведены на рисунке 6б. На рисунке 6в представлены результаты измерений компонент тензора гирации для кристалла $\text{Sr}_3\text{Ga}_2\text{Ge}_4\text{O}_{14}:\text{Cr}^{3+}$. Видно, что, также, как и у кварца, компоненты тензора гирации, соответствующие направлению вдоль оси, и параллельно оси имеют разные знаки [29].

Позже многие измерения были проведены при изучении некоторых других кристаллов, описанных в [30].

2 Исследование поглощающих кристаллов

После того, как были получены точные выражения для азимута и эллиптичности света, прошедшего через пластинку из оптически активного поглощающего кристалла, появилась возможность проводить количественное изучение свойств таких кристаллов [31]. В ИК РАН был создан дихрограф для измерения параметров и характеристик поглощающих кристаллов [32]. Этот прибор отличается от всех серийных дихрографов наличием специального приспособления, обеспечивающего возможность проведения измерений не только для изотропных сред, но и для кристаллов в направлениях, отличных от оптической оси. Для этого был сделан специальный держатель, вместе с которым можно было вращать образец и тем самым обеспечивать условия, в которых можно не учитывать линейное двупреломление.

Первым кристаллом, исследованным на этом дихрографе, был кристалл бензила, который при длине волны $\lambda = 0,4205$ мкм становится изотропным в отношении двупреломления. Измерения проводились на очень тонких пластинках, и на спектрополяриметре было определено удельное вращение плоскости поляризации при распространении света вдоль оси, когда кристалл становится изотропным. На основе этих данных и результатов измерения циркулярного дихроизма на дихрографе удалось получить значения всех компонентов тензора гирации [33], [34] (рисунок 7).

На спектрополяриметре и дихрографе была исследована целая серия кристаллов и для некоторых кристаллов были определены значения циркулярного двупреломления и дихроизма [30]. Например, были определены значения компонентов тензора гирации (для действительной и мнимой части) поглощающего одноосного кристалла сульфата никеля $\alpha - \text{NiSO}_4 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ [35] (рисунок 8).

С помощью дихрографа удалось также найти разность эллиптичностей собственных волн, распространяющихся в кристаллах кварца [36], а также провести измерения при исследовании некоторых двуосных кристаллов [37].

В это же время для оптически активных кристаллов были получены матрицы Джонса с учетом многократных отражений и матрицы Мюллера [38]. Матрица Мюллера была представлена в виде произведения трех матриц, одна из которых зависит от параметров поляризации собственных волн, а вторая – от показателей преломления, показателей поглощения и толщины пластинки. Матрица Мюллера удобна для расчёта интенсивности, азимута, эллиптичности и степени поляризации света, прошедшего через систему, состоящую из пластинки с любым набором оптических свойств, и различных устройств, необходимых для измерений.

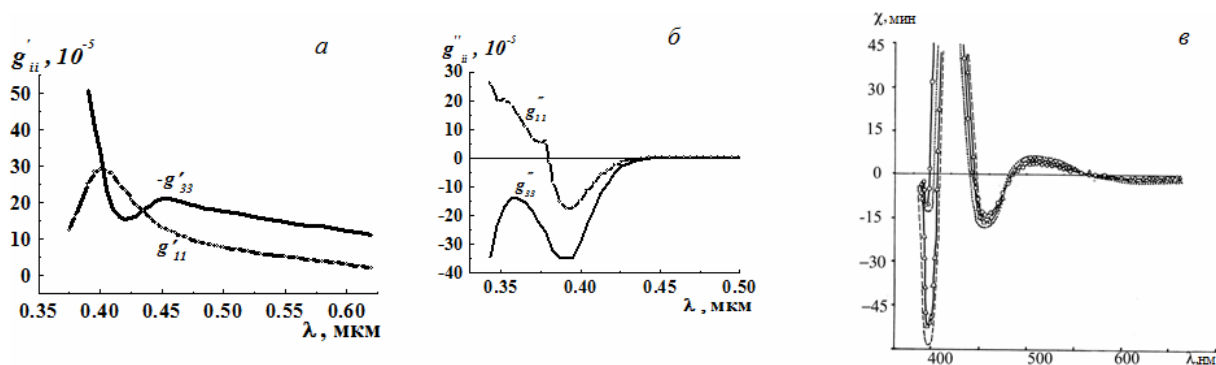


Рисунок 7 – Дисперсия действительной части g'_{ii} компонентов тензора гирации для кристалла бензила (а). Дисперсия мнимой части g''_{ii} компонентов тензора гирации для кристалла бензила (б). Зависимость азимута χ поляризации прошедшего света от длины волны для образца толщиной $d = 40$ мкм (в)

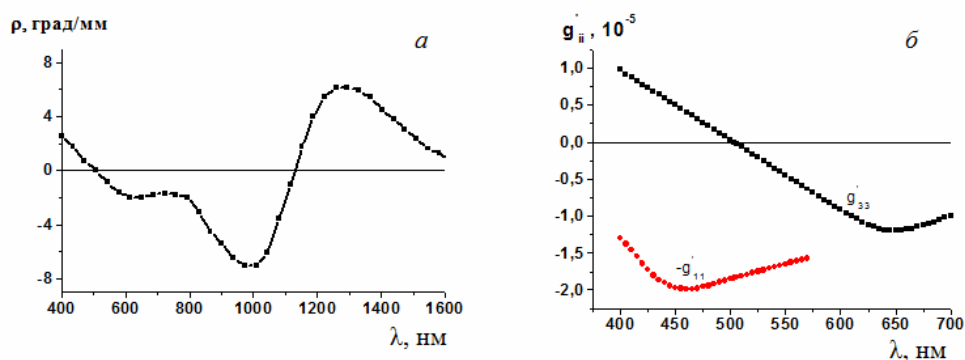


Рисунок 8 – Дисперсия вращения плоскости поляризации света, распространяющегося вдоль оптической оси в кристалле сульфата никеля (а).
Дисперсия компонентов тензора гирации g_{11} и g_{33} кристалла сульфата никеля (б)

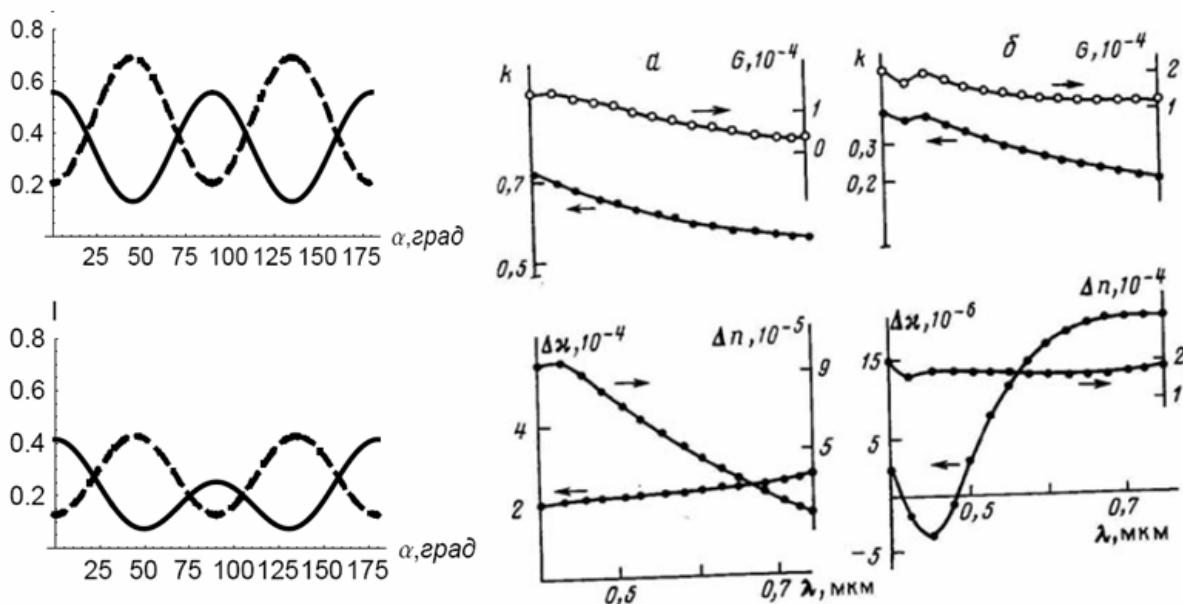


Рисунок 9 – Зависимость интенсивности света, прошедшего через пластинку, вырезанную из кристалла коричневого кварца ($d = 2,48$ мм), расположенную между поляризатором и анализатором, от угла поворота пластинки вокруг нормали к ней (левый фрагмент): вверху – для прозрачного кристалла, внизу – для поглощающего; сплошная линия – поляризатор и анализатор параллельны, пунктирная – скрещены. Зависимость оптических параметров кристаллов: а) зеленый кварц, $d = 1,425$ мм; б) коричневый кварц, $d = 2,48$ мм (правый фрагмент)

Было показано, что при распространении света в направлениях, удаленных от оптической оси, можно пользоваться приближенными соотношениями. С применением матриц Мюллера были получены соотношения для интенсивности света, прошедшего через систему поляризатор – исследуемая пластинка – анализатор [39]. На основе этих соотношений определены аналитические выражения для вычисления эллиптичности собственных волн; угла между большими полуосями эллипсов поляризации, характеризующего степень неортогональности этих волн; а также параметров, связанных с двупреломлением и дихроизмом [40], [41].

Для измерения оптических параметров различных кристаллов на базе спектрофотометра был создан новый прибор. В нём поляризатор, анализатор и исследуемую пластинку, укрепленные в специальных держателях, можно было поворачивать с определенным шагом в синхронном и асинхронном режиме [40], [42]. На этом приборе было проведено много измерений – не только оптически активных (таких, как кварц, легированный железом; лангаситы, фтористый литий), но и различных других кристаллов [43]. Методика измерений описана в [40], [42]. На рисунке 9 представлены результаты исследований кристаллов кварца, окрашенных примесью

железа в зеленый или коричневый цвета, в интервале от 0,4 до 0,75 мкм, вырезанных с небольшим отклонением от оптической оси.

В [44] описано, каким образом проводились измерения для каждого образца при определенном значении длины волны падающего света. С использованием этих данных для кристалла кварца, легированного железом, при $\lambda = 0,55$ мкм и $d = 2,48$ мм были вычислены следующие значения величин: $k = 0,296$, $\Delta = -98,68^\circ + 360^\circ$, $\delta = 0,256$, $\varphi = 7,172^\circ$ [44]. Если кристалл прозрачный, то при параллельных поляризаторах максимальные значения величин совпадают, если кристалл поглощающий, они различны.

После исследования изотропных и одноосных кристаллов были проведены исследования некоторых двуосных поглощающих кристаллов. Эти кристаллы отличаются тем, что при изменении длины волны падающего света имеет место дисперсия оптической оси. Поэтому, используя необходимые соотношения, даже вдоль оси невозможно определить величину удельного вращения плоскости поляризации. Для этого вначале надо было разобраться, как ведут себя собственные волны в поглощающих оптически активных кристаллах; предварительно было ясно только, что волны вблизи оптических осей неортогональны [9]. Такой расчет был проведен с применением ковариантных методов Ф.И. Федорова, и было определено, какова величина неортогональности, и как её наличие нужно учитывать при исследовании таких кристаллов [45]. Более подробно на этом вопросе остановимся позже.

Соответствующие измерения были проведены при изучении поглощающих кристаллов-дигидратов, относящихся к классу симметрии 222, у которых в видимой области спектра имеются различные полосы поглощения: форматов иттрия (ДФИ), эрбия (ДФЭ) и гольмия (ДФГ).

Показано, что в этих кристаллах неортогональность собственных волн является малой величиной, достигающей значения $(2 \div 3)^\circ$ в самых сильных полосах поглощения [46]. На рисунке 10а показано, как изменяется величина $(\alpha - \chi)$ для образца из ДФЭ. На рисунке 10б приведены дисперсионные зависимости эллиптичностей для кристаллов ДФИ, ДФЭ и ДФГ вблизи одной из оптических осей [47]. На рисунке 10 в представлены зависимости $\rho(\lambda)$ для всех этих кристаллов. Видно, как изменяется эллиптичность собственных волн в этих кристаллах при приближении к оптической оси: чем больше величина двупреломления, тем более резко изменяется эллиптичность вблизи оси.

3 Исследования некоторых неактивных кристаллов

Одновременно с работами, связанными с изучением оптической активности, проводились измерения оптических свойств неактивных кристаллов. Не останавливаясь подробно на этих работах, приведём примеры нескольких из них, в которых также использовались ковариантные методы Ф.И. Фёдорова.

Например, на основе идей Ф.И. Фёдорова о низкосимметричных поглощающих кристаллах [1], были проведены исследования на некоторых кристаллах [48]. При этом рассматривались два рода поверхностей – рефракции и абсорбции. Было показано, что в сильно поглощающих кристаллах поверхности абсорбции и рефракции – сложные двухполостные поверхности, описываемые уравнениями высоких порядков. В слабо поглощающем кристалле голубого топаза угол между круговыми осями $26''$, а в сильно поглощающем кристалле сурьмяного блеска он равен 7° .

На основе идей Ф.И. Федорова проводились различные теоретические исследования.

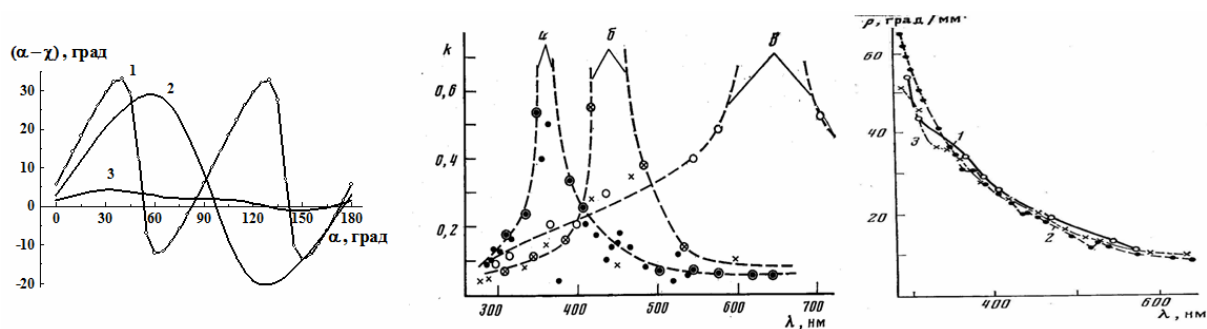


Рисунок 10 – Зависимости $(\alpha - \chi)$ от α для пластинки, вырезанной из кристалла ДФЭ ($d = 0,135$ мм) для различных длин волн: 1 – $\lambda = 0,293$, 2 – $\lambda = 0,378$, 3 – $\lambda = 0,501$ мкм (слева). Значения эллиптичности $k(\lambda)$ для кристаллов ДФЭ (а), ДФГ (б) и ДФИ (в). Кружками обведены значения эллиптичностей, измеренные вне полос поглощения. Штриховыми линиями изображены зависимости $k(\lambda)$, рассчитанные без учёта влияния поглощения (в центре). Дисперсия удельного вращения $\rho(\lambda)$ для кристаллов ДФИ (1), ДФЭ (2) и ДФГ (3) (справа)

В работах В.Н. Любимова [49], [50] рассматривался магнитоэлектрический эффект (МЭ). Были исследованы нормальные и лучевые показатели преломления, поляризация волн и явления необратимости распространения света, обусловленные МЭ; получено уравнение лучей, пригодное для описания произвольного магнитного кристалла, обладающего МЭ.

Чтобы правильно устанавливать $\lambda/4$ -пластинку в качестве компенсатора при эллипсометрических измерениях, исследовано влияние многократных отражений на состояние поляризации света, прошедшего через неё. В [51] такое исследование проведено для слюдяной четвертьволновой пластинки, в [52] – для пластинки из кварца. Для определения параметров отраженного света проводились различные эллипсометрические измерения, например, в работах [53], [54] определялась анизотропия некоторых кристаллов.

На спектрофотометрической установке измерения проводились для таких материалов как алмазы, в которых поглощение обусловлено пластической деформацией [55], фианиты с различным содержанием вольфрама [56], фториды с различными редкоземельными элементами [57], пористый кремний [58] и многие другие материалы.

Проводились измерения при изучении кристалла $\text{KGd}(\text{WO}_4)_2:\text{Nd}^{3+}$, для которого с помощью соотношения Крамерса-Кронига нужно было определить оптические свойства и изменение показателей преломления в полосах поглощения [59]. Кроме упомянутых, проводились другие многочисленные экспериментальные исследования, которые здесь рассматривать не будем.

Следует обратить внимание, что почти во всех экспериментальных работах проводились измерения показателей преломления, показателей поглощения, эллиптичности собственных волн [60]. В конце концов, в результате сравнения результатов расчета и последующих измерений определяли, как правильно определять эти параметры и параметры оптической активности и каким образом необходимо проводить измерения для таких кристаллов. Не лишнее ещё раз подчеркнуть, что большинство работ, о которых в этом разделе прямо или косвенно шла речь, было выполнено благодаря фундаментальным работам Ф.И. Федорова. Если бы не они, возможно, многих результатов, полученных в Институте кристаллографии, другими методами не удалось бы достичь.

4 Моделирование

До сих пор речь шла о расчетах, при выполнении которых с использованием ковариантных методов требовалось делать довольно сложные аналитические выкладки. Такие расчеты проводились на ЭВМ, которые существовали в то время.

Сравнительно недавно появилось новое поколение компьютеров, обеспечивающих совсем другие возможности по сравнению с тем, как было раньше. Чтобы получить численные результаты на основе предложенных Ф.И. Федоровым теоретических расчетов, в начале исследования оптической активности (1960) приходилось считать на арифмометре. Позже, когда появились такие компьютеры, как М-220, Nord, Mera (70–80 гг. XX века), наконец-то появилась возможность решать многие экспериментальные и теоретические задачи [43]–[46], [51], но для выполнения численных расчётов тоже требовалось много времени.

С началом производства современных компьютеров (1990–2000 гг.) появилась возможность проводить исследования сложных многослойных структур, используя матричный метод Д. Берремана [61], [62]. С применением методики, описанной в этих работах, можно решать задачи о распространении света в пластинке и слоистой системе, состоящей из ряда пластинок с различными свойствами, более коротким путем, отказываясь от громоздкого аналитического решения и используя численные расчёты.

Мы попытались, используя ковариантный метод Ф.И. Федорова, метод матриц Д. Берремана и пакет компьютерных программ «Mathematica», найти связь между разными описаниями оптической активности кристаллов различных классов симметрии. Кроме того, стало возможным определить, какие приближения допустимо использовать при исследовании в каждой конкретной ситуации [63], [64]. Успешность применения метода Берремана в большой степени зависит от вида уравнений связи.

В результате сравнения показателей преломления и уравнений, определяющих поляризацию падающего и прошедшего света, полученных на основе точных и приближенных соотношений, было показано, что при малых углах отклонения оптической оси от направления нормали к поверхности пластинки приближённые формулы действительно неприменимы. Поэтому в этих условиях при расчётах надо пользоваться точными соотношениями, несмотря на их громоздкость.

Для примера приведём рассчитанные при разных условиях значения эллиптичностей собственных волн в кристаллах кварца (рисунок 11).

Было проведено довольно много вычислений, по итогам которых сравнивались точные и приближённые значения параметров прошедшего и отраженного света. Результаты такого сравнения можно найти в [65].

Остановимся на нескольких примерах, которые иллюстрируют в основном результаты расчёта характеристик отражённого света.

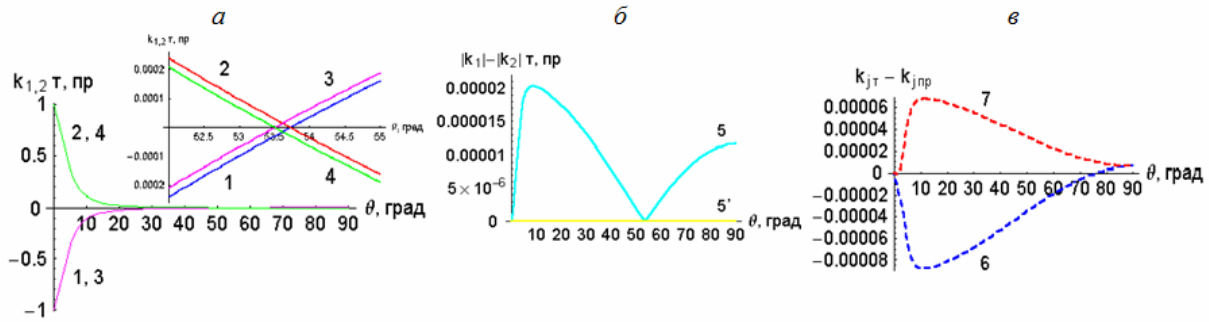


Рисунок 11 – а) Зависимости эллиптичностей собственных волн k_1 и k_2 , рассчитанные по точным (кривые 1 и 2) и приближенным (кривые 3 и 4) формулам; б) зависимости разности эллиптичностей k_1 и k_2 , рассчитанные по точным (кривая 5) и приближенным (кривая 5') формулам; в) зависимости абсолютной разности между соответствующими эллиптичностью k_j , рассчитанными по точным и приближенным формулам ($j = 1$ – кривая 6, $j = 2$ – кривая 7) от угла θ между оптической осью и направлением нормали к поверхности пластинки из праворащивающего кварца при нормальном падении света ($n_o = 1,54$, $n_e = 1,55$, $\alpha_{11} = -3,3 \cdot 10^{-5}$, $\alpha_{33} = 6,9 \cdot 10^{-5}$)

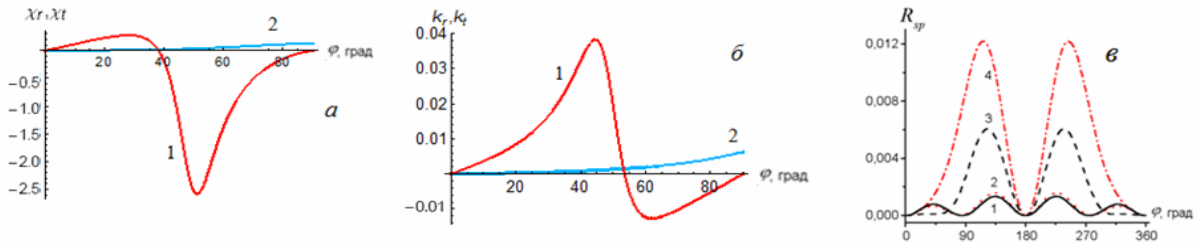


Рисунок 12 – Зависимости азимутов поляризации (а) и эллиптичностей (б) отраженного (1) и прошедшего (2) света от угла падения при s -поляризации падающего света:

$$n_i = 1,0, n_t = 3,9, n_o = 1,5; n_e = 1,7; \theta = 90^\circ; d = 100 \text{ нм}; \alpha_{12} = -0,01; \alpha_{11} = 0;$$

зависимости недиагонального коэффициента отражения R_{sp} от угла поворота φ одноосной пластинки вокруг нормали к её поверхности при p -поляризации падающего света:

$n_i = 3,0, n_o = 1,5, n_e = 1,55, d = 2000 \text{ \AA}, \phi = 70^\circ$. Показатель преломления внешней среды $n_i = 1,0$ (кривые 1, 2), $n_i = 1,495$ (кривые 3, 4). Кривые 1 и 3 соответствуют негиротропной пластинке, кривые 2 и 4 – оптически активной пластинке ($\alpha_{12} = 0,03$) и рассчитаны при $\theta = 75^\circ$ (в); n_i – показатель преломления верхней среды, n_t – показатель преломления подложки

Для кристаллов планальных классов симметрии с антисимметричным тензором гирации ($\alpha_{12} \neq 0$), о которых было сказано выше [13], [14], влияние величины показателя преломления внешней среды продемонстрировано на рисунке 12. Анализируя графики, представленные на рисунке 12, видим, что изменения азимута и эллиптичности отраженного и прошедшего света обусловлены только оптической активностью. Отметим также, что на рисунке 12 в при сближении значений показателя преломления внешней среды и меньшего значения показателя преломления пластинки все кривые сохраняют симметричный вид независимо от наличия оптической активности.

В целях демонстрации возможностей расчёта и построения трехмерных иллюстраций на рисунках 13 и 14 представлены зависимости энергетического коэффициента отражения R и коэффициентов матрицы отражения R_{ij} одновременно от двух независимых параметров,

рассчитанные для пластинки из одноосного оптически активного кристалла в предположении о p -поляризации падающего света. Зависимость $R(\phi, d)$ от угла падения имеет характерный вид: минимум локализован в области угла Брюстера, число осцилляций кривых R закономерно увеличивается при возрастании толщины пластинки.

Следует подчеркнуть, что оптической активностью обусловлено увеличение значений недиагональных коэффициентов матрицы отражения даже при симметричной ориентации оптической оси, когда соответствующие элементы в отсутствие оптической активности равны нулю. Степень влияния оптической активности непосредственно зависит от показателей преломления внешних сред, угла падения и от угла ориентации оптической оси. Это обстоятельство может быть использовано для определения оптических параметров кристаллов различными методами.

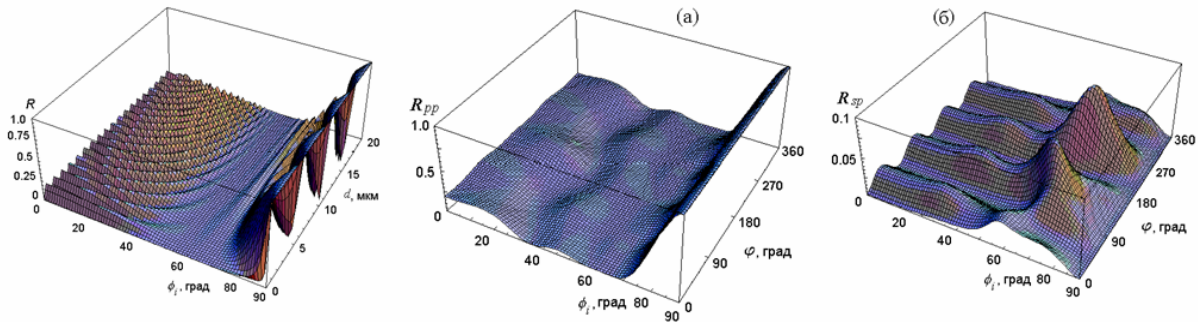


Рисунок 13 – Зависимость отражательной способности по интенсивности R от угла падения света ϕ и толщины d пластинки из одноосного оптически активного кристалла $n_i = 1, n_t = 1, n_l = 1,55, n_2 = 1,56, \alpha_{11} = \alpha_{22} = -10 \cdot 10^{-5}, \alpha_{33} = 3 \cdot 10^{-5}$

Рисунок 14 – Зависимости диагонального R_{pp} и недиагонального R_{sp} элементов матрицы отражения по интенсивности от угла падения света ϕ и угла ϕ_1 поворота кристаллической пластинки вокруг нормали к её поверхности для одноосного оптически активного кристалла $n_i = 1, n_t = 1, n_l = 1,65, n_2 = 1,7; \alpha_{11} = \alpha_{22} = -0,02, \alpha_{33} = 0,005, \theta = 60^\circ, \psi = 0, d = 2$ мкм

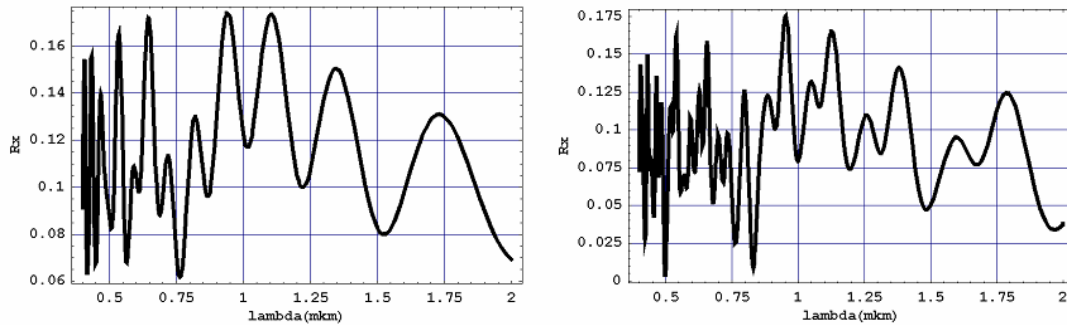


Рисунок 15 – Дисперсионные зависимости R_x при угле падения $\phi = 65^\circ$. Для многослойной системы показатель преломления подложки $n_t = 3,8, n_i = 1$. Слева – одиночный слой с $d_1 = 1,85$ мкм; справа – 11 слоёв, первый из них с $d_1 = 1,85$ мкм, остальные 10 слоёв с $d = 0,185$ мкм и чередующимися значениями показателя преломления: $n_{\text{четн}} = 3,4$ и $n_{\text{нечетн}} = 3,6$. В обеих ситуациях для первого слоя характерна дисперсия показателя преломления и удельного вращения плоскости поляризации: соответственно $n^2(\lambda) = 1 + 0,25 \lambda^2 / (\lambda^2 - 0,128^2)$ и $\rho(\lambda) = (0,0703 + 0,0468 \lambda^2) / (\lambda^2 - 0,128^2)$

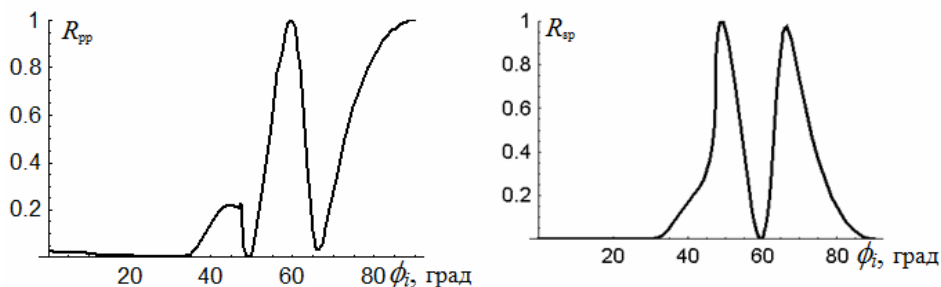


Рисунок 16 – Зависимость коэффициентов отражения R_{pp}, R_{sp} от угла падения ϕ для изотропной оптически активной пленки толщиной $d = 400$ нм на подложке с показателем преломления $n_t = 1,4; n_i = 1,9, n_0 = 1,5, \alpha_0 = 0,3$

Особенно удобно использовать одновременно идеи Ф.И. Фёдорова и пакет компьютерных программ «Mathematica» для расчёта характеристик довольно сложных систем, в которых любой слой является оптически активным. В качестве примеров на рисунке 15 приведены

результаты расчёта, выполненного для двух таких систем.

В [66] рассмотрено полное внутреннее отражение (ПВО) от изотропных, анизотропных и оптически активных плёнок и подробно описано ПВО от полубесконечной изотропной оптически активной среды. Обнаружено, что наиболее ярко

ПВО проявляется при исследовании азимута поляризации отражённого света. Указано на возможность использования явления ПВО для анизотропных тонких пленок как способа неразрушающей оптической проверки качества. Установлено, что даже небольшие изменения оптических свойств пленок могут существенно влиять на характеристики отражённого света. Явление ПВО можно использовать для определения оптических свойств и для контроля качества и однородности тонкопленочных кристаллических структур. Зависимости коэффициентов матрицы отражения в условиях ПВО на границе изотропной оптически активной пленки представлены на рисунке 16.

В [45], [67] подробно для низкосимметричных оптически активных поглощающих кристаллов описаны закономерности изменения эллиптичности собственных волн и интенсивности прошедшего света. Показано, что вблизи оптических осей различие в абсолютных значениях эллиптичности волн и степень их отклонения от ортогональности могут быть весьма

существенны и оказывать значительное влияние на точность расчета параметров прошедшего света. Нам показалось интересным рассмотреть некоторые особенности распространения света в двуосных поглощающих оптически активных кристаллах класса симметрии 222 при распространении света в направлении их оптических осей [68].

В [68] показано, в каких условиях можно пользоваться приближенными соотношениями, полученными без учета многократных отражений. На рисунках 17 и 18 хорошо видно, как изменяется эллиптичность собственных волн, а также как изменяется интенсивность прошедшего света при изменении поляризации падающего света. Видно, что при распространении света вдоль оси, выполняя расчёты по приближенным формулам, можно получить совсем неправильные результаты. Кроме того, выполнен анализ коноскопических картин, смоделированных для двуосных поглощающих оптически активных кристаллов в целях выявления отличий (рисунок 19).

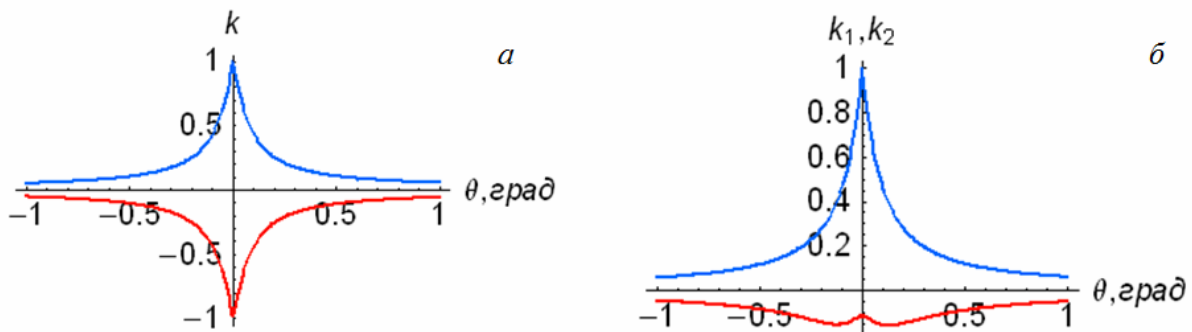


Рисунок 17 – Зависимость эллиптичности собственных волн в кристалле класса 222 от угла θ между нормалью и одной из оптических осей: а – оптически активный; б – оптически активный поглощающий; $N_1 = 1,645 + i \cdot 1 \cdot 10^{-4}$, $N_2 = 1,65 + i \cdot 1,5 \cdot 10^{-4}$, $N_3 = 1,68 + i \cdot 2 \cdot 10^{-4}$, $\alpha_{11} = -2,5 \cdot 10^{-5} - i \cdot 1,5 \cdot 10^{-7}$, $\alpha_{22} = -3 \cdot 10^{-5} - i \cdot 2 \cdot 10^{-7}$, $\alpha_{33} = 4 \cdot 10^{-5} + i \cdot 3 \cdot 10^{-7}$.

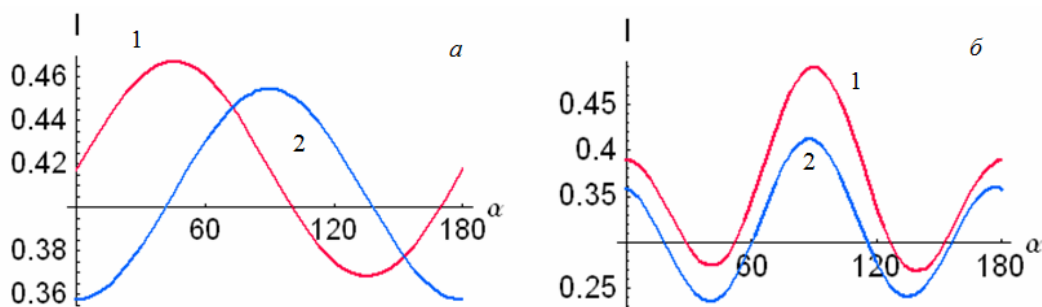


Рисунок 18 – Зависимость интенсивности I прошедшего света от азимута α поляризации падающего света при параллельных поляризаторах
 $a - \theta = 0^\circ$, $\Delta = -8,24^\circ$, $\delta = -0,0009$; $b - \theta = -1^\circ$, $\Delta = -75,4^\circ$; $\delta = -0,12$;
 I – приближённое решение, 2 – точное решение;
 $N_1 = 1,645 + i \cdot 1 \cdot 10^{-4}$, $N_2 = 1,65 + i \cdot 1,5 \cdot 10^{-4}$, $N_3 = 1,68 + i \cdot 2 \cdot 10^{-4}$,
 $\alpha_{11} = -2,5 \cdot 10^{-5} - i \cdot 1,5 \cdot 10^{-7}$, $\alpha_{22} = -3 \cdot 10^{-5} - i \cdot 2 \cdot 10^{-7}$, $\alpha_{33} = 4 \cdot 10^{-5} + i \cdot 3 \cdot 10^{-7}$, $d = 0,3$ мм

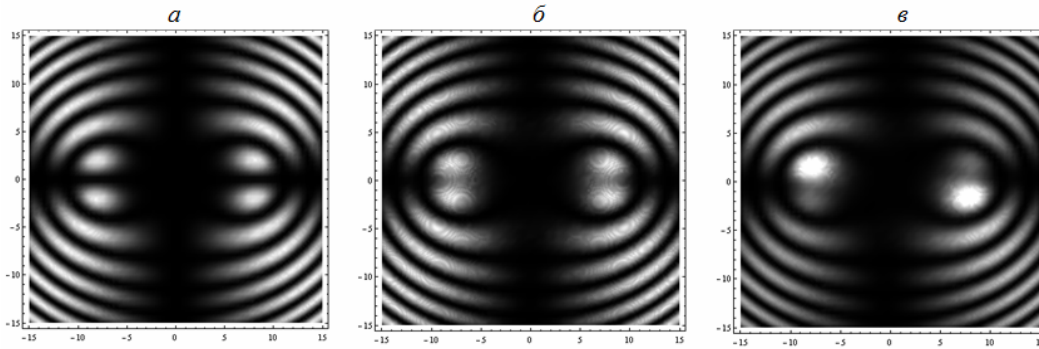


Рисунок 19 – Коноскопические картины пластинки из двуосного кристалла (пластинка вырезана перпендикулярно биссектрисе острого угла между оптическими осями)
a – кристалл оптически неактивный поглощающий, *b* – активный непоглощающий, *v* – активный поглощающий; $N_1 = 1,6498 + i \cdot 1 \cdot 10^{-5}$, $N_2 = 1,65 + i \cdot 1,5 \cdot 10^{-5}$, $N_3 = 1,68 + i \cdot 2 \cdot 10^{-5}$, $\alpha_{11} = -2,5 \cdot 10^{-5} - i \cdot 1,5 \cdot 10^{-5}$, $\alpha_{22} = -3 \cdot 10^{-5} - i \cdot 2 \cdot 10^{-5}$, $\alpha_{33} = 4 \cdot 10^{-5} + i \cdot 3 \cdot 10^{-5}$, $\lambda = 632,8$ нм, $d = 3$ мм

Коноскопические картины прозрачных двуосных кристаллов были впервые смоделированы в [69]. Коноскопические картины двуосных поглощающих, но неактивных кристаллов изучены в [59]. Сравним «наблюдаемые» в скрещённых поляризаторах коноскопические картины, рассчитанные для прозрачных и поглощающих кристаллов ромбической сингонии 222 в условиях, когда пластинки вырезаны из них перпендикулярно острой биссектрисе угла между оптическими осями. Основное различие состоит в том, что в области углов близких к направлениям выхода оптических осей при наличии поглощения нарушается симметрия расположения пятен и, как хорошо видно на рисунке 19, интенсивности сопряженных пятен в каждой их паре существенно отличаются, что можно объяснить влиянием циркулярного дихроизма на распределение интенсивности света.

К сожалению, в 1983 году появилась книга Х.К. Чена [70] «Теория электромагнитных волн. Бескоординатный подход», которая является примером совершенно невероятного плагиата. Чен фактически перевёл на английский язык большую часть книги Ф.И. Фёдорова «Оптика анизотропных сред» и четвертую главу из «Теории гиротропии», в основном сохраняя последовательность изложения и часто не изменяя даже обозначений вводимых величин. Открытое письмо о книге Чена было опубликовано в журнале «Кристаллография» [71].

Заключение

Таким образом, в Институте кристаллографии РАН под влиянием работ Ф.И. Фёдорова и благодаря его идеям осуществлялась деятельность учёных в области как теоретической, так и экспериментальной кристаллооптики. В ИК РАН были созданы специальные приборы, такие как спектрополяриметр, дихрограф, спектрофотометрическая установка, на которых возможно проведение различных измерений не только для

изотропных веществ, но и для анизотропных кристаллов. На основе полученных научных результатов были предложены различные методы определения параметров света, включая эллиптичность собственных волн, азимут, степень поляризации и интенсивность прошедшего и отраженного света в оптически активных поглощающих кристаллах.

В большей части работ по кристаллооптике, конечно, принимали участие научные сотрудники и аспиранты ИК РАН, соприкасаясь тем самым с наследием Ф.И. Фёдорова и до сих пор активно применяя его методы в своей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фёдоров, Ф.И. Оптика анизотропных сред / Ф.И.Фёдоров. – Минск : Изд-во АН БССР, 1958. – 380 с.
2. Szivessy, G. Lattice optics of active crystals / G. Szivessy, C. Munster // Ann. Phys. – 1934. – В. 20, № 7. – S. 703–736.
3. Bruhat, M.M.G. Le pouvoir rotatoire de quartz pour des rayons perpendiculaires a l'axe optique et sa dispersion dans l'ultraviolet / M.M.G. Bruhat, P. Grivet // Le journal de Physique et le Radium – 1935. – S. 7 – Т. 6. – S. 12–26.
4. Техническая энциклопедия: справочник физических, химических и технических величин: в 12 т. – М. : Советская энциклопедия, 1932. – Т. 3.
5. Фёдоров, Ф.И. Прохождение света через пластинку из одноосных оптически активных кристаллов аксиальных классов / Ф.И. Фёдоров, А.Ф. Константинова // Оптика и спектроскопия. – 1962. – Т. 12. – С. 407–411.
6. Шубников, А.В. Основы оптической кристаллографии / А.В. Шубников. – Москва : Изд-во АН СССР, 1958. – 207 с.
7. Фёдоров, Ф.И. Прохождение света через пластинку из одноосных оптически активных кристаллов. II. Пластинки параллельные оптической оси / Ф.И. Фёдоров, А.Ф.Константинова //

Оптика и спектроскопия. – 1962. – Т. 12, № 4. – С. 505–509.

8. Бокуть, Б.В. К феноменологической теории оптически активных кристаллов. / Б.В. Бокуть, А.Н. Сердюков, Ф.И. Фёдоров // Кристаллография. – 1970. – Т. 15, № 5. – С. 1002–1006.

9. Фёдоров, Ф.И. Теория гиротропии / Ф.И. Фёдоров // Минск : Наука и техника, 1976. – 456 с.

10. Бокуть, Б.В. Распространение света в оптически активных одноосных кристаллах / Б.В. Бокуть, А.Ф. Константинова, А.Н. Сердюков // Кристаллография. – 1972. – Т. 17, № 4. – С. 812–815.

11. Voigt, W. Zur Theorie des Lichtes für aktive Kristalle. Über specifische optische Eigenschaften hemimorpher Kristalle. / W. Voigt // Göttinger Nachrichten. – 1903. – S. 155–202.

12. Фёдоров, Ф.И. К теории оптической активности кристаллов. II. Кристаллы кубической сингонии и планальных классов средних сингоний. / Ф.И. Фёдоров // Оптика и спектроскопия. – 1959. – Т. 6, № 3. – С. 377–383.

13. Фёдоров, Ф.И. К вопросу об оптической активности кристаллов планальных классов средних сингоний / Ф.И. Фёдоров, Б.В. Бокуть, А.Ф. Константинова // Кристаллография. – 1962. – Т. 7, № 6. – С. 910–915.

14. Константинова, А.Ф. Проявление оптической активности в одноосных кристаллах планальных классов / А.Ф. Константинова, Б.В. Набагов // Кристаллография. – 1995. – Т. 40, № 2. – С. 219–222.

15. Ивченко, Е.Л. Естественная оптическая активность кристаллов CdS в экситонной области спектра / Е.Л. Ивченко, С.А. Пермогоров, А.В. Селькин // Письма в ЖЭТФ. – 1978. – Т. 27. – С. 27–29.

16. Агранович, В.М. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов / В.М. Агранович, В.Л. Гинзбург. – М. : Наука, 1979. – 432 с.

17. Ньюнхем, Р.Э. Свойства материалов. Анизотропия, симметрия, структура / Р.Э. Ньюнхем. – М. : – 2007. – 652 с.

18. Фотозлектрический спектрополяриметр для измерения вращения плоскости поляризации света в кристаллах / З.Б. Перекалина [и др.] // Кристаллография. – 1965. – Т. 10, № 2. – С. 270–272.

19. Прецизионная поляриметрическая установка и её применение для исследования изменения вращения плоскости поляризации света и поворотного электрооптического эффекта в сегнетоэлектриках / Н.Р. Иванов [и др.] // Кристаллография. – 1967. – Т. 12, № 2. – С. 307–313.

20. Беляев, Л.М. Дисперсия вращения плоскости поляризации света в кристаллах сульфонов

тимоната натрия / Л.М. Беляев, З.Б. Перекалина, А.Ю. Климова // Кристаллография. – 1970. – Т. 15, № 3. – С. 584–586.

21. Климова, А.Ю. Исследование дисперсии вращательной способности в смешанных кристаллах (SrCa)S₂O₆·4H₂O / А.Ю. Климова, З.Б. Перекалина, Л.М. Беляев // Кристаллография. – 1973. – Т. 18, № 2. – С. 319–321.

22. Оптические свойства кристаллов / А.Ф. Константинова [и др.] // Минск : Наука и техника. – 1995. – 304 с.

23. Константинова, А.Ф. Оптическая активность кристаллов в направлениях, отличных от направления оптической оси. I. Одноосные кристаллы / А.Ф. Константинова, Н.Р. Иванов, Б.Н. Гречушников // Кристаллография. – 1969. – Т. 14, № 2. – С. 283–292.

24. Иванов, Н.Р. Оптическая активность кристаллов в направлениях, отличных от направления оптической оси. II. Двuosные кристаллы / Н.Р. Иванов, А.Ф. Константинова // Кристаллография. – 1970. – Т. 15, № 4. – С. 490–499.

25. Иванов, Н.Р. Дисперсия оптической активности двупреломляющих кристаллов / Модуляционная спектроскопия полупроводников. Материалы I Респ. colloквиума / Н.Р. Иванов, А.Ф. Константинова, О.А. Чихладзе. – Тбилиси : Изд. ин-та кибернетики АН ГрузССР, 1973. – С. 128.

26. Иванов, Н.Р. Экспериментальное определение тензора гирации в ромбическом кристалле α – NiO₃ / Н.Р. Иванов, О.А. Чихладзе // Кристаллография. – 1976. – Т. 21, № 1. – С. 125–132.

27. Оптическая активность кристаллов лангбейнитов / О.А. Батурина [и др.] // Кристаллография. – 1983. – Т. 28, № 4. – С. 731–735.

28. Батурина, О.А. Оптические свойства пьезоэлектрических кристаллов со структурой тригонального Са – галлогерманата / О.А. Батурина [и др.] // Кристаллография. – 1987. – Т. 32, № 2. – С. 406–412.

29. Investigation of Trigonal (La_{1-x}Ndx) 3Ga₅Si₁₄ Crystals. I. Growth and Optical Properties / А.А. Kaminskii [et al.] // Phys. stat. sol. – 1983. – Vol. 80 (a). – P. 387–398.

30. Калдыбаев, К.А. Гиротропия одноосных поглощающих кристаллов / К.А. Калдыбаев, А.Ф. Константинова, З.Б. Перекалина. – М. : Изд-во ин-та социально-эконом. и произв.-экологич. проблем инвестирования, 2000. – 294 с.

31. Особенности проявления оптической активности в поглощающих кристаллах / А.Ф. Константинова [и др.] // Кристаллография. – 1976. – Т. 21, № 6. – С. 1108–1112.

32. Дихрограф для измерения циркулярного дихроизма / З.Б. Перекалина [и др.] // Журн. прикладной спектроскопии. – 1985. – Т. XLIII. – С. 328–333.

33. Определение линейного двупреломления кристалла бензила в полосе поглощения /

- Б.Н. Гречушников [и др.] // Кристаллография. – 1978. – Т. 23, № 4. – С. 854–855.
34. *Оптическая активность и циркулярный дихроизм бензила* / К.А. Калдыбаев [и др.] // Кристаллография. – 1978. – Т. 23, № 4. – С. 779–787.
35. *Перекалина, З.Б.* Циркулярный дихроизм и оптическая активность в некоторых одноосных кристаллах / З.Б. Перекалина, К.А. Калдыбаев, А.Ф. Константинова // Кристаллография. – 1979. – Т. 24, № 4. – С. 847–850.
36. *Батурич, Н.А.* Влияние различия в эллиптичностях собственных волн и многократных отражений на сигнал, регистрируемый дихрографом / Н.А. Батурич, А.Ф. Константинова // Кристаллография. – 1987. – Т. 32, № 5. – С. 1184–1188.
37. *Особенности измерения дихроизма собственных волн низкосимметричных поглощающих гиротропных кристаллов с помощью дихрографа* / Н.А. Батурич [и др.] // Кристаллография. – 1985. – Т. 30, № 4. – С. 709–714.
38. *Шамбуров, В.А.* Обобщенные матрицы Джонса и Мюллера для недеполяризующих кристаллических пластинок / В.А. Шамбуров, Е.А. Евдищенко, А.И. Вислобоков // Кристаллография. – 1988. – Т. 33, № 3. – С. 554–560.
39. *Константинова, А.Ф.* Интерференция света в двупреломляющих пластинках, обладающих оптической активностью и поглощением / А.Ф. Константинова, А.И. Окорочков, Е.М. Уюкин // Кристаллография. – 1982. – Т. 27, № 5. – С. 1002–1004.
40. *Исследование ориентационной зависимости пропускания системы поляризатор – кристалл – анализатор* / А.Ф. Константинова [и др.] // Кристаллография. – 1990. – Т. 35, № 2. – С. 429–432.
41. *Константинова, А.Ф.* Определение элементов матрицы Мюллера и оптических параметров низкосимметричных поглощающих гиротропных кристаллов. / А.Ф. Константинова, Е.А. Евдищенко, И.Т. Улуханов // Кристаллография. – 1994. – Т. 39, № 5. – С. 790–797.
42. *Спектрополяриметрический комплекс для определения оптических анизотропных характеристик кристаллов* / А.Ф. Константинова [и др.] // Тезисы докладов Второй Национальной конференции по применению рентгеновского, синхротронного излучений, нейтронов и электронов для исследования материалов (РСНЭ-99). – М. : ИК РАН, 1999. – С. 410.
43. *Метод определения дихроизма и двупреломления кристалла с помощью спектрофотометра* / А.Ф. Константинова [и др.] // В сб. Оптика анизотропных сред. – М. : МФТИ, 1987. – С. 44–46.
44. *Константинова, А.Ф.* Спектрофотометрический метод определения оптических параметров гиротропных кристаллов / А.Ф. Константинова, И.Т. Улуханов, Б.Н. Гречушников. // Кристаллография. – 1991. – Т. 36, № 3. – С. 686–692.
45. *Окорочков, А.И.* Собственные волны в гиротропных поглощающих кристаллах ромбической сингонии / А.И. Окорочков, А.Ф. Константинова // Кристаллография. – 1984. – Т. 29, № 5. – С. 841–848.
46. *Оптическая активность кристаллов дигидратов формиатов гольмия, эрбия и иттрия* / А.И. Окорочков [и др.] // Кристаллография. – 1985. – Т. 30, № 3. – С. 596–598.
47. *Измерение циркулярного дихроизма двуосных кристаллов* / Н.А. Батурич [и др.] // Кристаллография. – 1986. – Т. 31, № 2. – С. 405–407.
48. *Поверхности светоположения голубого топаза* / А.М. Гончаренко [и др.] // Кристаллография. – 1961. – Т. 6, № 1. – С. 67–71.
49. *Любимов, В.Н.* Оптика кубических кристаллов с учетом магнитоэлектрического эффекта / В.Н. Любимов // Кристаллография. – 1968. – Т. 13, № 6. – С. 1008–1013.
50. *Любимов, В.Н.* Магнитоэлектрический эффект и необратимость распространения света в кристаллах / В.Н. Любимов. // Кристаллография. – 1969. – Т. 14, № 2. – С. 213–217.
51. *Расчет фазовых пластин – функциональных преобразователей спектрополяризационных анализаторов состава вещества* / Ю.П. Куренев [и др.] // Труды ВНИИАП. – Киев: ВНИИАП, 1978. – С. 67–76.
52. *Пахомов, А.Г.* Метод юстировки эллипсометра, устраняющий влияние оптической активности компенсатора / А.Г. Пахомов, В.А. Яковлев, А.Ф. Константинова // Журнал технической физики. – 1981. – Т. 51. – С. 442–444.
53. *Определение оптических постоянных одноосных поглощающих кристаллов методом эллипсометрии* / А.Г. Пахомов [и др.] / Ковариантные методы в теоретической физике. Оптика и акустика. – Минск, 1981. – С. 147–155.
54. *Филиппов, В.В.* Эллипсометрия анизотропных сред / В.В. Филиппов, А.Ю. Тронин, А.Ф. Константинова // Кристаллография. – 1994. – Т. 39, № 2. – С. 360–382.
55. *Зайцева, Т.М.* Анизотропия оптических свойств природных алмазов / Т.М. Зайцева, А.Ф. Константинова // Минералогический журнал. – 1989. – Т. 11, № 5. – С. 68–73.
56. *Влияние активаторов на оптические и механические свойства кристаллов ZrO₂ – Y₂O₃* / Г.Г. Кнаб [и др.] // Кристаллография. – 1990. – Т. 35, № 4. – С. 923–929.
57. *Sobolev, V.P.* The rare earth trifluorides / V.P. Sobolev. – Barcelona, 2000. – 528 с.
58. *Дисперсия оптической анизотропии в пленках наноструктурированного кремния* / Л.А. Головань [и др.] // Кристаллография. – 2004. – Т. 49, № 1. – С. 151–156.
59. *Исследование оптических свойств кристаллов KGd(WO₄)₂:Nd³⁺ с учетом поглощения*

/ А.Ф. Константинова [и др.] // Кристаллография. – 2007. – Т. 52, № 6. – С. 1114–1123.

60. Гречушников, Б.Н. Современная кристаллография / Б.Н. Гречушников. – Т.4. // Физические свойства кристаллов. – М. Наука. – 1981. Оптические свойства кристаллов. – С. 338–424.

61. Berreman, D.W. Optics in stratified and anisotropic media: 4x4-matrix formulation / D.W. Berreman // J. Opt. Soc. Am. – 1972. – Vol. 62, № 4. – P. 502–510.

62. Аззам, Р. Эллипсометрия и поляризованный свет / Р. Аззам, Н. Башара. – М. : Мир, 1981. – 583 с.

63. Использование современных математических пакетов для точного решения задач о распространении света в анизотропных слоистых средах. I. Общее решение граничных задач кристаллооптики / А.Ф. Константинова [и др.] // Кристаллография. – 2002. – Т. 47, № 4. – С. 702–710.

64. Использование современных математических пакетов для точного решения задач о распространении света в анизотропных слоистых средах. II. Оптически активные кристаллы / А.Ф. Константинова [и др.] // Кристаллография. – 2002. – Т. 47, № 5. – С. 879–887.

65. Набатов, Б.В. Решение принципиальных задач в теории оптической активности кристаллов: автореф. дис. канд. физ.-мат наук: 01.04.18 / Б.В. Набатов; Ин-т кристаллографии им. А.В. Шубникова РАН. – М. : 2003. – 152 с.

66. Полное внутреннее отражение в анизотропных кристаллах / А.Ф. Константинова [и др.] // Кристаллография. – 2008. – Т. 53, № 5. – С. 886–891.

67. Окорочков, А.И. Влияние неортогональности собственных волн в кристалле на поляризацию прошедшего света / А.И. Окорочков, А.Ф. Константинова // Кристаллография. – 1985. – Т. 30, № 1. – С. 105–113.

68. Особенности распространения света в оптически активных поглощающих кристаллах ромбической сингонии / А.Ф. Константинова [и др.] // Кристаллография. – 2011. – Т. 56, № 3. – С. 412–417.

69. Влияние оптической активности на интенсивность и параметры поляризации прошедшего света в кристаллах / А.Ф. Константинова [и др.] // Кристаллография. – 2003. – Т. 48, № 5. – С. 884–892.

70. Chen, H.C. Theory of electromagnetic waves. A coordinate-free approach / H.C. Chen. – New York: McGraw-Hill Book Company, 1983.

71. Гречушников, Б.Н. О ковариантных методах Ф.И. Фёдорова и их применении в кристаллофизике (по поводу плагиата Х.К. Чена) / Б.Н. Гречушников // Кристаллография. – 1987. – Т. 32, № 4. – С. 1070–1071.

Поступила в редакцию 08.06.11.

УДК 535.4

Ф.И. ФЁДОРОВ И РАЗВИТИЕ ОПТИКИ ФОТОРЕФРАКТИВНЫХ КРИСТАЛЛОВ

В.В. Шепелевич

Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина, Мозырь

F.I. FEDOROV AND DEVELOPMENT OF THE OPTICS OF PHOTOREFRACTIVE CRYSTALS

V.V. Shepelevich

I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University, Mozyr

Рассмотрено влияние трудов Ф.И. Фёдорова и его научной школы на прогресс в оптике фоторефрактивных кристаллов. Показано, что созданные Ф.И. Фёдоровым ковариантные методы способствовали разработке строгой теории фоторефрактивного эффекта в кристаллах. Особое внимание уделено развитию в Беларуси голографии на базе фоторефрактивных кристаллов.

Ключевые слова: пьезоэлектрический эффект, фотоупругость, пьезокристалл, гиротропия, дифракционная эффективность.

The influence of works of F.I. Fedorov and his scientific school on the progress in the optics of photorefractive crystals is considered. It is shown that the covariant methods created by F.I. Fedorov promoted the elaboration of the strict theory of the photorefractive effect in crystals. Special attention is given to the development of holography on the base of photorefractive crystals in Belarus.

Keywords: piezoelectric effect, photoelasticity, piezocrystal, gyrotropy, diffraction efficiency.

Академика Ф.И. Фёдорова можно без сомнений назвать отцом теоретической физики в Беларуси. Созданная Ф.И. Фёдоровым научная школа и сегодня оказывает заметное влияние на развитие науки в нашей стране, а разработанные им ковариантные методы расчетов позволяют изящно решать сложные проблемы в различных областях физики. Написанные Ф.И. Фёдоровым монографии [1]–[4] являются настольными книгами каждого физика-теоретика в Беларуси, весьма популярны они и у зарубежных учёных.

В настоящем обзоре раскрывается влияние Ф.И. Фёдорова и его школы на одну из ветвей современной физики – оптику фоторефрактивных кристаллов.

Фоторефрактивный эффект, состоящий в изменении тензора диэлектрической проницаемости кристалла под действием света, был открыт в 1966 году [5]. Наиболее чувствительными к свету оказались кристаллы типа силленита, в частности кристалл кубической сингонии $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ (BSO), проявляющий значительную оптическую активность (естественную гиротропию [3]). На первой стадии изучения фоторефрактивного эффекта в таких кристаллах предполагалось, что только электрооптический эффект определяет механизм изменения тензора диэлектрической проницаемости под действием переменного в пространстве электрического поля заряда, создаваемого светом. Под влиянием электрического поля пространственного заряда,

как известно [6], кубический кристалл в общем случае становится двусосным. В связи со сложностью расчетов при вычислении энергетических и поляризационных характеристик света, дифрагированного на голограммах, записанных в фоторефрактивных кристаллах, гиротропией этих кристаллов пренебрегали или учитывали её только в некоторых частных случаях.

Приблизительно в это же время, благодаря применению ковариантных методов Ф.И. Фёдорова, был достигнут значительный прогресс в развитии оптики анизотропных сред и теории гиротропии. Ф.И. Фёдоровым и его учениками Б.В. Бокутем и А.Н. Сердюковым были развиты основы электродинамики гиротропных сред [3], [7]. Ковариантные методы Ф.И. Фёдорова были плодотворно использованы для описания оптических свойств кристаллов в монографии [8], значительная часть которой посвящена теоретическим и экспериментальным исследованиям гиротропных кристаллов и параметрической кристаллооптике.

Автор настоящего сообщения имел возможность изучить ковариантные методы, их применение в оптике и теорию гиротропии: под руководством Б.В. Бокутя и А.Н. Сердюкова он выполнил диссертационное исследование и защитил кандидатскую диссертацию. Поэтому было естественным применить знания по теории гиротропии и ковариантным методам в области голографии, и в [9] было изучено влияние

гиротропии регистрирующей среды на дифракционную эффективность голограмм. В 1986 г. опубликована работа [10], в которой в рамках электрооптического механизма фоторефракции с использованием ковариантных методов, описанных в частности в статье Л.М. Барковского и Ф.И. Фёдорова [6], были рассчитаны выходные характеристики голографической решетки, записанной в оптически активном кубическом кристалле $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ (BSO) среза (110). В [10] принято, что вектор голографической решетки ориентирован вдоль направления [001]. В таких условиях пьезоэлектрический эффект в кубических кристаллах не проявляется, поэтому результаты теоретических расчётов практически совпадали с экспериментальными данными, приведенными в [11].

Однако постепенно стало понятным, что учёта только электрооптического механизма фоторефрактивного эффекта недостаточно для описания всего комплекса экспериментов, проводимых с фоторефрактивными кристаллами.

В 1982 году в работе томских физиков [12] высказана идея о дополнительном механизме фоторефракции – предполагалось, что электрическое поле пространственного заряда \mathbf{E} опосредованно, через обратный пьезоэлектрический эффект, индуцирует в кристалле деформации, и вследствие фотоупругого эффекта имеет место дополнительное изменение ΔB обратного тензора диэлектрической проницаемости кристалла. Влияние электрического поля пространственного заряда на тензор обратной диэлектрической проницаемости можно учесть, представляя ΔB в следующей ковариантной форме [12]:

$$\Delta B = r^S \cdot \mathbf{E} + p^E : \mathbf{n} \gamma \cdot (\mathbf{E} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{n}) = r^{\text{эфф}} \cdot \mathbf{E}, \quad (1)$$

где r^S – тензор электрооптических постоянных механически зажатого кристалла; p^E – тензор фотоупругих постоянных, определённый при условии постоянного электрического поля; \mathbf{e} – тензор пьезоэлектрических постоянных; γ – тензор, обратный тензору $\Gamma^E = \mathbf{n} \cdot \mathbf{c}^E \cdot \mathbf{n}$; \mathbf{c}^E – тензор коэффициентов упругости кристалла [13], единичный вектор \mathbf{n} определяется в соответствии с равенством $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{E}}{|\mathbf{E}|}$, $r^{\text{эфф}}$ – эффективный тензор, в

котором учтены как электрооптический, так и пьезоэлектрический механизмы фоторефракции; точка означает свёртку по двум соседним индексам [2], двоеточие – свёртку по двум парам соседних индексов [13]. Первое слагаемое в (1) – это изменение обратного тензора диэлектрической проницаемости ΔB , обусловленное электрооптическим эффектом. Второе слагаемое является следствием учёта дополнительного изменения тензора ΔB , индуцированного обратным пьезоэлектрическим эффектом и фотоупругостью.

Применение матричного метода [9], [10] решения уравнений связанных волн для гиротропных сред с использованием выражения (1) позволило впервые непротиворечиво описать свойства голографических решеток, записанных в кубических фоторефрактивных пьезокристаллах силленитов. Результаты теоретических и экспериментальных исследований свойств голограмм, зарегистрированных в кристалле BSO, полученные совместно с томской научной группой, были опубликованы в работах [14, 15].

После Международной конференции по фоторефракции в Асуа (Франция, 1990), на которой были представлены полученные результаты, новое направление в теории фоторефракции, заложенное в работе [12] и примененное к гиротропным средам в [14], [15], было признано всеми научными школами, исследующими фоторефрактивные материалы

Таким образом, в результате развития ковариантных методов Ф.И. Фёдорова применительно к голографии и использования непротиворечивой теории гиротропии [3], [7] для изучения оптически активных фоторефрактивных кристаллов, было основано новое научное направление в голографии фоторефрактивных кристаллов. В рамках этого направления пьезоэлектрический механизм фоторефракции в гиротропных кристаллах исследуется в целях адекватного описания экспериментальных данных и улучшения выходных энергетических характеристик голограмм.

Среди более поздних публикаций по рассматриваемой проблеме следует отметить работы [16] и [17]. В [16] на основе развитого в [14], [15] подхода объяснены результаты экспериментов по двухволновому смешению световых импульсов в фоторефрактивных кристаллах. В [17] получены явные выражения изменения компонент обратного тензора диэлектрической проницаемости ΔB_{ij} для кубических кристаллов произвольного среза. Отметим, что такие же выражения приведены под номером (6.78) и использованы для вычислений в известной монографии [18].

Насколько нам известно, впервые зависимость энергетических характеристик голограмм, записанных в кубических оптически активных пьезокристаллах, от толщины слоя была исследована в 1993 году в [19]. В этой статье проведен анализ зависимости максимальной относительной интенсивности предметной волны на выходе из кристалла BSO от ориентационного угла и толщины кристалла при двухволновом взаимодействии. Аналогичное исследование для кристалла $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ выполнено в [20] в 1997 году.

В работе [21] углублено теоретическое исследование зависимости максимальной дифракционной эффективности и ориентационного угла

в кристалле BSO среза $(\bar{1}\bar{1}0)$ от толщины кристалла; выявлено, при каких условиях посредством специального выбора азимута поляризации считывающей волны достижима максимальная дифракционная эффективность.

Возможность оптимизации эффективности двухволнового взаимодействия в кубических фоторефрактивных оптически активных кубических пьезокристаллах среза (110) оценивалась в статье [22].

Впервые влияние пьезоэлектрического эффекта и фотоупругости на свойства пропускающих голограмм, записанных в кубических фоторефрактивных кристаллах среза (111), было изучено теоретически и экспериментально в [23], [24].

Дальнейшие исследования мозырской научной группы по оптике фоторефрактивных сред были связаны с изучением свойств отражательных голограмм (см., напр. [25]–[29]), записанных в таких средах, а также с распространением и взаимодействием световых пучков в фоторефрактивных кристаллах (напр. [30]–[34]). В настоящее время исследование процессов записи и считывания информации в фоторефрактивных средах и разработка чувствительных оптических устройств на основе выявленных эффектов и закономерностей продолжают.

Данная работа посвящается светлой памяти академика Ф.И. Фёдорова (19.06.1911 – 13.10.1994), столетие со дня рождения которого отмечается в нашей стране и за рубежом.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования Республики Беларусь (Государственная комплексная программа научных исследований «Фотоника 1.07»), а также Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф10-202).

Автор благодарен А.Н. Годлевской за полезное обсуждение работы и конструктивные замечания, учёт которых позволил улучшить научный стиль этой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фёдоров, Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах / Ф.И. Фёдоров. – М. : Наука, 1965. – 386 с.
2. Фёдоров, Ф.И. Оптика анизотропных сред / Ф.И. Фёдоров. – Минск : Изд. АН БССР, 1958. – 380 с.
3. Фёдоров, Ф.И. Теория гиротропии / Ф.И. Фёдоров. – Минск : Наука и техника, 1976. – 456 с.
4. Фёдоров, Ф.И. Группа Лоренца / Ф.И. Фёдоров. – М. : Наука, 1979. – 384 с.
5. *Optically-induced refractive index inhomogeneities in LiNbO₃ and LiTaO₃* / A. Ashkin [et al.] // Appl. Phys Lett. – 1966. – Vol. 9, № 1. – P. 72–74.

6. Барковский, Л.М. Ковариантная форма электрооптического тензора в кристаллах высшей и средних сингоний при векторном взаимодействии / Л.М. Барковский, Ф.И. Фёдоров // Кристаллография. – 1965. – Т. 10, № 2. – С. 174–180.

7. Бокуть, Б.В. Основы теоретической кристаллооптики. Ч. 2. / Б.В. Бокуть, А.Н. Сердюков. – Гомель: ГГУ, 1977. – 70 с.

8. *Оптические свойства кристаллов* / А.Ф. Константинова [и др.]. – Минск : Навука і тэхніка, 1995. – 302 с.

9. Шепелевич, В.В. Дифракция света на объемных голографических решётках, считываемых при включённой гиротропии / В.В. Шепелевич // ЖТФ. – 1985. – Т. 55, № 6. – С. 1201–1203.

10. Шепелевич, В.В. Влияние оптической активности на дифракционную эффективность голограмм и поляризацию дифрагированного света в фоторефрактивных кубических кристаллах / В.В. Шепелевич // ЖТФ. – 1986. – Т. 56, № 3. – С. 618–619.

11. Petrov, M.P. Light diffraction from volume phase holograms in electrooptic photorefractive crystals / M. P. Petrov, T. G. Pencheva, S. I. Stepanov // J. Optics. – 1981. – Vol. 12, № 15 – P. 287–292.

12. Влияние пьезоэффекта на процессы записи и восстановления голограмм в фоторефрактивных кристаллах / А.А. Изванов [и др.] // Автометрия. – 1982. – № 2. – С. 79–84.

13. Сиротин, Ю.И. Основы кристаллофизики / Ю.И. Сиротин, М.П. Шаскольская. – М. : Наука, 1975. – 680 с.

14. Мандель, А.Е. Влияние пьезоэлектрического эффекта и гиротропии на дифракцию света в кубических фоторефрактивных кристаллах / А.Е. Мандель, С.М. Шандаров, В.В. Шепелевич // Опт. и спектр. – 1989. – Т. 67, № 4. – С. 819–822.

15. Shepelevich, V.V. Light diffraction by holographic gratings in optically active photorefractive piezocrystals / V.V. Shepelevich, S.M. Shandarov, A.E. Mandel // Ferroelectrics. – 1990. – V. 110. – P. 235–249.

16. Влияние фотоупругости на самодифракцию света в электрооптических кристаллах / В.И. Волков [и др.] // Квантовая электроника. – 1991. – Т. 18, № 10. – С. 1237–1240.

17. Шандаров, С.М. Изменение тензора диэлектрической проницаемости в кубических фоторефрактивных кристаллах под действием электрического поля голографической решетки / С.М. Шандаров, В.В. Шепелевич, Н.Д. Хатьков // Опт. и спектр. – 1991. – Т. 70, № 5. – С. 1068–1073.

18. Solyman, L. The physics and applications of photorefractive materials / L. Solyman, D.J. Webb, A. Grunnet-Jepsen, Oxford: Clarendon Press, 1996. – P. 226–230.

19. *Shepelevich, V.V.* Optimization of the energy transfer in cubic photorefractive piezocrystals / V.V. Shepelevich // Topical meeting on photorefractive materials, effects, and devices PRM' 93/. Technical digest. – Kiev (Ukraine), Inst. Phys., 1993. – P. 128–131.
20. *Optimization of energy exchange of light waves in crystal BTO by selection of grating vector orientation and thickness of crystal* / V.V. Shepelevich [et al.] // Proceedings of Topical Meeting on Photorefractive Materials, Effects and Devices (PR'97), June 11 – 13, 1997, Chiba, Japan. – P. 594–596.
21. *Шепелевич, В.В.* Оптимизация выходных характеристик голограмм в кристалле $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ выбором ориентации кристалла и поляризации считывающего света / В.В. Шепелевич, П.П. Хомутовский // Письма в ЖТФ. – 1997. – Т. 24, № 24. – С. 55–60.
22. *Optimization of two-wave interaction efficiency in cubic photorefractive sillenite-type crystals with optical rotary power and piezoeffect in diffusion regime* / V.V. Shepelevich [et al.] // Ferroelectrics. – 1999. – Vol. 75. – P. 289–309.
23. *Optimization at two-wave mixing in cubic photorefractive piezocrystals of (111)-cut* / V.V. Shepelevich [et al.] // OSA Trends in Optics and Photonics. – 1999. – Vol. 27. – P. 353 – 358.
24. *Optimization of diffraction efficiency and gain for two-wave mixing in cubic (111)-cut photorefractive piezocrystals* / V.V. Shepelevich [et al.] // Ferroelectrics. – 2002. – Vol. 266. – P. 305–333.
25. *Дифракция световых волн на отражательных голограммах в кубических пьезокристаллах* / В.В. Шепелевич [и др.] // Письма в ЖТФ. – 2003. – Т. 29, № 18. – С. 22 – 28.
26. *Навныко, В.Н.* Дифракционная эффективность отражательных голограмм в кристалле $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ произвольного среза / В.Н. Навныко, В.В. Шепелевич // Веснік Мазырсака дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта. – 2006. – № 1. – С. 21–25.
27. *Навныко, В.Н.* Процессы энергетического переноса при двухволновом взаимодействии на отражательных решетках в кристалле $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ произвольного среза / В.Н. Навныко, В.В. Шепелевич // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2006. – Т. 6. – Ч. 2. – С. 143–146.
28. *Навныко, В.Н.* Встречное двухволновое взаимодействие на отражательных голограммах в кубических фоторефрактивных пьезокристаллах произвольного среза / В.Н. Навныко, В.В. Шепелевич // Письма в ЖТФ. – 2007. – Т. 33, вып. 17. – С. 16–23.
29. *Shepelevich, V.V.* Effect of optical activity and crystal symmetry on maximal diffraction efficiency of reflection holograms in cubic photorefractive piezocrystals / V.V. Shepelevich, V.N. Navnyka // Appl. Phys. – 2009. – В95. – P. 459–466.
30. Взаимодействие экранирующих солитонов в кубических оптически активных фоторефрактивных кристаллах / В.В. Шепелевич [и др.] // Квантовая электроника. – 2005. – Т. 35, № 4. – С. 351–355.
31. *Влияние оптической активности на распространение двумерных пространственных солитонов в кубических фоторефрактивных кристаллах* / В.В. Шепелевич [и др.] // Квантовая электроника. – 2007. – Т. 37, № 4. – С. 353–357.
32. *Incoherent interaction of Gaussian beams in photorefractive optically active crystals* / V.V. Shepelevich [et al.] // Appl. Phys. B. – 2008. – Vol. 90. – P. 149–153.
33. *D. Interaction of two-dimensional rectangular light beams in a photorefractive SBN crystal* / D. Khmelnsky [et al.] // Ferroelectrics. – 2009. – Vol. 390. – P. 116–127.
34. *Взаимодействие двумерных ортогонально поляризованных супергауссовых световых пучков в фоторефрактивном кристалле* / В.В. Давыдовская [и др.] // Квантовая электроника. – 2010. – Т. 40, № 10. – С. 899–906.

Поступила в редакцию 08.06.11.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна соответствовать его профилю. Она представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на дискете 3,5" или CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (6.0/95/97/2000), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Допускается сквозная нумерация рисунков и таблиц. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутонные фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются сведения об авторах и экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати.

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный и домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями. Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (банделеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах и экспертного заключения можно посмотреть на сайте журнала по адресу <http://pfmt.gsu.by>.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

The paper submitted to the Editorial Board of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics», should meet the following requirements. Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a floppy (CD) or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (6.0/95/97/2000), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. Through numbering of figures and tables is possible. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper is signed by all authors. The information about the authors and the conclusion of the experts about the possibility of publication in press are enclosed.

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home and office phone numbers, fax number, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charters top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

In case of questions relating to paper submission visit website of the journal <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).