



ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№ 1 (6) 2011

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

Главный редактор:
А.В. Рогачев (Беларусь)

Заместители главного редактора:
О.М. Демиденко (Беларусь)
Л.А. Шеметков (Беларусь)

Редакционная коллегия:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
П.Д. Кухарчик (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

Ответственный секретарь:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

Адрес редакции:
Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

Editor-in-Chief:
A.V. Rogachev (Belarus)

Deputy Editor-in-Chief:
O.M. Demidenko (Belarus)
L.A. Shemetkov (Belarus)

Editorial board:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Webin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
P.D. Kuharchik (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

Executive Secretary:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

Edition address:
F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 1 (6) 2011

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

Андреев В.В., Крутов А.Ф. Электромагнитные формфакторы мезонов.....	7
Гиргель С.С. Свойства векторных параксиальных световых пучков. I. Однородная поляризация	20
Гуделев В.Г., Кулак Г.В., Матвеева А.Г. Лазерное возбуждение импульсов поверхностных акустических волн в твердых телах	25
Капшай В.Н., Корсун Л.Д. О стационарной теории возмущений в случае потенциала-ряда..	29
Никитюк Ю.В., Шолох В.Ф. Исследование процесса управляемого термораскалывания хрупких неметаллических материалов под действием потока горячего воздуха	36
Саркисов О.А., Рогачев А.А., Рогачев А.В., Егоров А.И. Молекулярная структура и морфология поверхностных слоев полиимидно-фторопластовой пленки, обработанной в плазме тлеющего разряда.....	40

МАТЕМАТИКА

Воробьев Н.Н., Мехович А.П. О прямых разложениях n -кратно ω -насыщенных формаций..	48
Гальмак А.М. Транспонированные вектор-матрицы	52
Ковалева В.А., Скиба А.Н. Критерии p -сверхразрешимости и сверхразрешимости конечных групп	57
Косенок Н.С. Об одном классе конечных сверхразрешимых групп	62
Кулаженко Ю.И. Векторы и критерии полуабелевости n -арных групп	65
Лабыч Ю.А., Старовойтов А.П. Приближение непрерывных функций рациональными дробями Паде–Чебышёва	69
Сидорик А.Г. Характеристика UMD пространств с помощью векторнозначного преобразования Гильберта на поле p -адических чисел	79
Шныпарков А.В. Сверхразрешимость конечной группы с μX -добавляемыми подгруппами	84

ИНФОРМАТИКА

Быховцев В.Е. Методология, методы и технология компьютерного объектно-ориентированного моделирования нелинейных систем деформируемых твёрдых тел	89
---	----

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки (научным направлениям):
– **технические (информатика, вычислительная техника и управление);**
– **физико-математические (математика).**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26).

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Д. Д. Павловец, Г. Н. Петухова*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 21.03.11. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 11,6. Уч.-изд. л. 10,1. Тираж 100 экз. Заказ № 143.

Издатель – УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»
246019, Гомель, ул. Советская, 104
Лицензия № 02330/0549481 от 14.05.09.

Отпечатано на полиграфической технике УО «ГТУ им. Ф. Скорины»
Лицензия № 02330/0150450 от 03.02.09.

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2011

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 1 (6) 2011

CONTENTS

PHYSICS

Andreev V.V., Krutov A.F. Electromagnetic form factors of mesons	7
Girgel S.S. Properties of vectorial paraxial light beams. I. Homogeneous polarization	20
Gudelev V.G., Kulak G.V., Matveeva A.G. Laser excitation of surface acoustic waves pulses in solid state bodies	25
Kapshai V.N., Korsun L.D. The stationary perturbation theory in case of a potential-series	29
Nikitjuk Yu.V., Sholoh V.F. Research of the process of operated thermosplitting of fragile non-metallic materials under the influence of the stream of hot air	36
Sarkisov O.A., Rogachev A.A., Rogachou A.V., Egorov A.I. Molecular structure and morphology of surface layers of polyimide-fluoropolymer film treated by glow discharge plasma	40

MATHEMATICS

Vorob'ev N.N., Mekhovich A.P. On direct decompositions of n -multiply ω -saturated formations..	48
Gal'mak A.M. Transposed vector-matrices	52
Kovalyova V.A., Skiba A.N. Criteria of p -supersolubility and supersolubility of finite groups	57
Kosenok N.S. On one class of finite supersoluble groups	62
Kulazhenko Yu.I. Vectors and semiabelian criteria of n -ary groups	65
Labych Yu.A., Starovoitov A.P. Approximation of continuous functions by rational Pade-Chebyshev fractions	69
Sidoryk H.G. Characteristic of UMD spaces with Hilbert transformation of vector-valued functions on the field of p -adic numbers	79
Shnyparkov A.V. Supersolvability of a finite group with μX -supplemented subgroups	84

INFORMATION SCIENCE

Bykhautsau V.E. Methodology, methods and technology of computer object-oriented modelling of nonlinear systems of deformable solid bodies	89
--	----

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science (scientific fields):

- Technics (Informatics, Computer Science and Control);***
- Physics and Mathematics (Mathematics).***

УДК 539.12

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ФОРМФАКТОРЫ МЕЗОНОВ

В.В. Андреев¹, А.Ф. Крутов²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

²Самарский государственный университет, Самара, Россия

ELECTROMAGNETIC FORM FACTORS OF MESONS

V.V. Andreev¹, A.F. Krutov²

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

²Samara State University, Samara, Russia

В рамках пуанкаре-ковариантной кварковой модели, основанной на точечной форме релятивистской гамильтоновой динамике, получены среднеквадратичные радиусы и электромагнитные формфакторы легких мезонов. Вычисления проведены исходя из требования согласованного описания электрослабых характеристик и масс псевдоскалярных и векторных мезонов.

Ключевые слова: мезон, кварковая модель, электромагнитный формфактор, лептонная константа распада.

Mean-square radii and electromagnetic form factors of light mesons are obtained in the framework of Poincaré covariant quark model based on the point form of relativistic Hamiltonian dynamics. Calculations are performed with the use of the requirement of self-consistent description of electroweak properties and masses of pseudoscalar and vector mesons.

Keywords: meson, quark model, electromagnetic form factor, leptonic decay constant.

Введение

Изучение электрослабых характеристик составных кварковых систем занимает существенную часть в как теоретических, так и в экспериментальных исследованиях. Среди составных систем особый интерес вызывает описание электрослабых свойств легких мезонов – пиона и каона. Так, например, ускоритель Джефферсоновской лаборатории (JLab) уже больше 10 лет осуществляет программы по прецизионному измерению пионного и каонного, также нуклонных форм-факторов [1], [2]. Наличие обширной экспериментальной информации об этих частицах и открывает возможности проверки предсказаний различных моделей. Относительно пиона этот интерес вызван еще и дуальностью пиона как составной системы и как возможного кандидата на роль голдстоуновского бозона спонтанно нарушенной киральной симметрии КХД.

Однако, для описания с легкими кварками необходимо развитие релятивистских методов. Следует, однако, подчеркнуть, что количественное описание релятивистских адронных систем представляет собой весьма сложную задачу, которая в полном объеме вряд ли может быть решена в ближайшие годы.

Применение методов теории поля для решения этого вопроса встречает ряд серьезных проблем. Так, например, известно, что пертурбативная КХД не может быть последовательно использована к описанию связанных состояний кварков [3]. Поэтому при исследованиях свойств связанных систем получили широкое

распространение так называемые релятивистские составные модели. Цель данной работы состоит в описании одной из возможных релятивистски-инвариантных моделей электрослабой структуры двухчастичной составной системы на основе точечной формы релятивистской гамильтоновой динамики (РГД) [4].

Для описания электромагнитной структуры мезонов, как двухкварковой системы, использовалось множество подходов. Только в рамках РГД этот вопрос рассматривался в целом ряде работ, начиная от динамики на световом фронте [5]–[10] и мгновенной формы динамики [11], [12] и заканчивая точечной формой динамики [13]–[15].

Наименее разработанной формой динамики для описания электромагнитных свойств мезонов оказалась точечная форма. Результаты работы [13], которые неплохо описывали экспериментальные данные были подвергнуты критике в работе [15] за необоснованные и бездоказательные предположения. В результате, для удовлетворительного описания экспериментальных данных, в работах [15]–[17] была предложена новая и достаточно сложная разновидность точечной формы РГД, в которой необходимо было отказаться от условия равенства 4-х скоростей систем с взаимодействием и без него. И хотя в результате выбора параметров удалось приблизиться к описанию поведения формфакторов пионов, тем менее существует разница между модельными вычислениями и экспериментом [18].

В данной работе в рамках пуанкаре–ковариантной кварковой модели (ПК–модель), основанной на точечной форме РГД, покажем, что можно добиться удовлетворительного описания электромагнитных характеристик псевдоскалярных мезонов, используя оригинальную методику (см. раздел 4). При этом самосогласованное описание характеристик будет распространяться как на электрослабые (лептонные и векторные константы распадов), так и на электромагнитные характеристики (формфакторы, среднеквадратичные радиусы), включая и массы псевдоскалярных и векторных мезонов.

1 Пуанкаре–ковариантная кварковая модель мезонов

В РГД, как и вообще в релятивистской составной модели, конститuentы, составляющие систему, рассматриваются как протяженные объекты, структура которых описывается введением ряда величин таких, как среднеквадратичный радиус, формфакторы. Конститuentы взаимодействуют между собой посредством потенциала, параметры которого определяются феноменологически. Основным требованием РГД является условие сохранения пуанкаре–инвариантности как для систем без взаимодействия, так и для взаимодействующих частиц. В случае системы двух не взаимодействующих частиц с массами m_q и m_Q и соответственно с 4–импульсами $p_1 = (\omega_{m_q}(p_1), \mathbf{p}_1)$ и $p_2 = (\omega_{m_Q}(p_2), \mathbf{p}_2)$ это требование в рамках мгновенной и точечной форм РГД приводит к радиальному уравнению для связанного состояния с импульсом \mathbf{Q} , волновой функцией (ВФ) $\Phi_{\ell,S}^{J\mu}(k)$ и массой M :

$$\int_{\ell,S}^{\infty} \int_0^{\infty} V_{\ell,S;\ell',S'}^J(k,k') \Phi_{\ell',S'}^{J\mu}(k') k'^2 dk' = (M - M_0) \Phi_{\ell,S}^{J\mu}(k), \quad (1.1)$$

где $M_0 = \omega_{m_Q}(k) + \omega_{m_q}(k)$ – эффективная масса системы не взаимодействующих частиц, имеющих импульс относительного движения \mathbf{k} ($k = |\mathbf{k}|$):

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) + \frac{\mathbf{P}}{M_0} \left(\frac{m_Q^2 - m_q^2 - M_0 [\omega_{m_Q}(p_2) - \omega_{m_q}(p_1)]}{\omega_{m_Q}(P) + M_0} \right). \quad (1.2)$$

Отметим, как и во многих моделях (см. [19]–[22]), 4–импульс $Q = \{\omega_M(Q), \mathbf{Q}\} \neq p_1 + p_2$. Точечная форма РГД характеризуется тем, что оператор 4–скорости системы свободных частиц

$$V_p = \frac{p_1 + p_2}{M_0} = \left\{ \frac{\omega_{M_0}(P)}{M_0}, \frac{\mathbf{P}}{M_0} \right\} \quad (1.3)$$

и оператор 4–скорости связанной системы

$$V_Q = \frac{Q}{M} = \left\{ \frac{\omega_M(Q)}{M}, \frac{\mathbf{Q}}{M} \right\} \quad (1.4)$$

совпадают [4], [23]–[26].

Для описания конкретных связанных систем необходимо определить потенциал взаимодействия между частицами. При этом для описания одной и той же по составу связанной системы могут использоваться различные потенциалы. Такой выбор потенциалов автоматически определяет различные пуанкаре–ковариантные модели. В нашем случае используем межкварковый потенциал работы [27], который в случае псевдоскалярных и векторных мезонов представляет сумму кулоновской, запирающей и спин–спиновой частей:

$$\hat{V}(r) = \hat{V}_{Coulomb}(r) + \hat{V}_{linear}(r) + \hat{V}_{ss}(r), \quad (1.5)$$

$$\hat{V}_{Coulomb}(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s(r)}{r} = -\frac{4}{3r} \sum_{k=1}^7 \alpha_k \operatorname{erf}(\tau_k r),$$

$$\hat{V}_{linear}(r) = \sigma r \left[\frac{\exp(-b^2 r^2)}{\sqrt{\pi b r}} + \left(1 + \frac{1}{2b^2 r^2} \right) \operatorname{erf}(br) \right] + w_0,$$

$$\hat{V}_{ss}(r) = -\frac{32(\mathbf{S}_q \mathbf{S}_Q)}{9\sqrt{\pi} m_q m_Q} \sum_{k=1}^7 \alpha_k \tau_k^3 \exp(-\tau_k^2 r^2),$$

где параметр τ_k определяется из соотношения

$$\frac{1}{\tau_k^2} = \frac{1}{\gamma_k^2} + \frac{1}{b^2}, \quad \operatorname{erf}(x) - \text{функция ошибок, а } \mathbf{S}_{q,Q} -$$

операторы спинов кварков.

Для получения потенциала (1.5) были применены процедура «размазки» по следующему правилу [27], [28]:

$$\tilde{f}(r) = \int d^3 r' \rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f(r'), \quad (1.6)$$

где функция «размазки» с параметром b выбрана в виде

$$\rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{b^3}{\pi^{3/2}} \exp[-b(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2], \quad (1.7)$$

а также феноменологическое описание поведения бегущей константы, удобное для аналитических расчетов:

$$\alpha_s(Q^2) = \sum_{k=1}^{n=7} \alpha_k \exp\left[-\frac{Q^2}{4\gamma_k^2}\right]. \quad (1.8)$$

Поскольку процедура ограничения параметров основана на использовании соответствия экспериментальных и модельных значений характеристик псевдоскалярных и векторных мезонов, в которых константа $\alpha_s(Q^2 = \mathbf{k}^2)$ интегрируется, то расчеты будут «чувствительны» к той площади, которая находится под кривой, задающей поведение $\alpha_s(\mathbf{k}^2)$.

По этой причине необязательно брать для параметра потенциала α_s бегущую константу КХД

$$\alpha_{\text{QCD}}(Q^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln z_Q} \left[1 - \frac{2\beta_1}{\beta_0^2} \frac{\ln[\ln z_Q]}{\ln z_Q} + \frac{4\beta_1^2}{\beta_0^4 \ln^2 z_Q} \left((\ln[\ln z_Q] - 1/2)^2 + \frac{\beta_2 \beta_0}{8\beta_1^2} - \frac{5}{4} \right) \right], \quad (1.9)$$

с β -функциями

$$z_Q = \frac{Q^2}{\Lambda^2}, \quad \beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f, \quad \beta_1 = 51 - \frac{19}{3}n_f, \\ \beta_2 = 2857 - \frac{5033}{9}n_f + \frac{325}{27}n_f^2,$$

а достаточно использовать ее аппроксимацию (1.8), которая должна воспроизводить хорошо изученную область $Q > 1.5$ ГэВ.

Для моделирования различного поведения константы в непертурбативной области с помощью процедуры фитирования константы (1.9) выражением (1.8) нами получены наборы параметров, отличающихся значением α_s, γ_k . Выбор режима поведения α_s диктуется требованием соответствия модельных и экспериментальных значений лептонных констант и масс легких и тяжелых мезонов.

2 Лептонные константы распадов мезонов в пуанкаре-ковариантной модели

Постоянная f_P лептонного распада $P(Q\bar{q}) \rightarrow \ell + \nu_\ell$ для псевдоскалярного мезона $P(Q\bar{q})$ после удаления элемента матрицы Кабиббо–Кобаяши–Маскавы V_{Qq} обычно определяется следующим соотношением:

$$j_P^\mu \equiv \left\langle 0 \left| \hat{J}_A^\mu(0) \right| \mathbf{P}, M_P \right\rangle_{in} = i(1/2\pi)^{3/2} \frac{P^\mu f_P}{\sqrt{2\omega_{M_P}(P)}}. \quad (2.1)$$

Электрослабый аксиальный ток $\hat{J}_A^\mu(0)$ и вектор состояния мезона с массой M_P берутся в представлении Гейзенберга [29].

Соответственно ширина распада $P(Q\bar{q}) \rightarrow \ell + \nu_\ell$ задается выражением

$$\Gamma_P = \frac{G_F^2 |V_{Qq}|^2}{8\pi} m_\ell^2 M_P f_P^2 \left(1 - \frac{m_\ell^2}{M_P^2} \right)^2, \quad (2.2)$$

где m_ℓ – масса лептона ℓ , а G_F – константа Ферми.

В случае лептонных распадов векторных мезонов $V(Q\bar{q}) \rightarrow \ell + \bar{\ell}$ соотношения аналогичные выражениям (2.1) и (2.2) примут вид:

$$j_V^\mu \equiv \left\langle 0 \left| \hat{J}_V^\mu(0) \right| \mathbf{P}, M_V, \lambda \right\rangle_{in} = i(1/2\pi)^{3/2} \frac{\varepsilon_\lambda^\mu M_V f_V}{\sqrt{2\omega_{M_V}(P)}}$$

с вектором поляризации ε_λ^μ векторного мезона массы M_V . Соответственно ширина распада $V(Q\bar{q}) \rightarrow \ell + \bar{\ell}$ задается выражением

$$\Gamma_V = \frac{4\pi\alpha^2}{3M_V} f_V^2 \left(1 + \frac{2m_\ell^2}{M_V^2} \right) \sqrt{1 - \frac{4m_\ell^2}{M_V^2}}, \quad (2.3)$$

где α – постоянная тонкой структуры.

В работах [11], [30]–[32] получены совпадающие интегральные представления для лептонных констант распадов псевдоскалярных и векторных мезонов f_P, f_V в рамках пуанкаре-ковариантных моделей, основанных на точечной и мгновенных формах РГД:

$$f_P(m_q, m_Q) = \frac{N_c}{\pi\sqrt{2}} \int_0^\infty dk k^2 \Phi(k) \cdot \sqrt{\frac{M_0^2 - (m_q - m_Q)^2}{\omega_{m_q}(k)\omega_{m_Q}(k)}} \frac{(m_q + m_Q)}{M_0^{3/2}}, \quad (2.4)$$

$$f_V(m_q, m_Q) = \frac{N_c}{\sqrt{2}\pi} \int_0^\infty dk k^2 \Phi(k) \cdot \frac{\sqrt{(\omega_{m_q}(k) + m_q)(\omega_{m_Q}(k) + m_Q)}}{\sqrt{\omega_{m_q}(k) + \omega_{m_Q}(k)} \omega_{m_q}(k) \omega_{m_Q}(k)} \cdot \left(1 + \frac{k^2}{3(\omega_{m_q}(k) + m_q)(\omega_{m_Q}(k) + m_Q)} \right), \quad (2.5)$$

где N_c – число цветов кварков. Аналогичное интегральное представление для f_P получено и в пуанкаре – ковариантной модели, основанной на динамике светового фронта [9].

3 Выбор параметров модели

Решение задачи на собственные значения (1.1) с потенциалом (1.5) произведем вариационным методом с использованием волновых функций осцилляторного и кулоновского (для B -мезонов) типов. При использовании вариационного метода требуется нахождение минимума функционала

$$M(m_q, m_Q, \beta, w_0, b, \sigma) = \langle \Phi(\beta) | \hat{M} | \Phi(\beta) \rangle = \langle \Phi | \hat{M}_0 | \Phi \rangle + \langle \Phi | \hat{V} | \Phi \rangle,$$

где $\Phi(\beta)$ – пробная волновая функция.

Потенциал модели (1.5) имеет следующие свободные параметры: параметр натяжения глюонной струны σ , параметр размазки b и параметр w_0 . Также параметрами являются массы кварков $m_{q,Q}$ и наборы констант α_k, γ_k , характеризующие поведение эффективной константы сильного взаимодействия. Отметим, что значения параметров β, w_0, σ зависят от ароматов кварков.

Рассмотрим процедуру фиксации численных значений параметров потенциала. Параметр линейной части потенциала в большом количестве моделей лежит в пределах

$\sigma = 0.18 \div 0.20 \text{ ГэВ}^2$ [27], [33]–[35], поэтому в наших расчетах будем полагать, что

$$\sigma = \bar{\sigma} \pm \Delta\sigma = (0.19 \pm 0.01) \text{ ГэВ}^2. \quad (3.1)$$

Определение параметра волновой функции β и остальных параметров потенциала произведем путем решения системы уравнений:

$$\frac{\partial M_{P,V}(\beta, \sigma)}{\partial \beta} \Big|_{\beta_{\min}, \bar{\sigma}} = 0, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} M_P(w_0, \beta_{\min}, \bar{\sigma}) &= M_P \pm \Delta M_P, \\ M_V^{S=1}(\beta, \sigma) - M_P^{S=0}(\beta, \sigma) \Big|_{\beta_{\min}, \bar{\sigma}} &= \\ &= M_V - M_P \pm \delta M_{VP}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$f_P(m_q, m_Q, \beta_{\min}) = f_{\text{exp}}^P \pm \Delta f_{\text{exp}}^P, \quad (3.4)$$

$$f_V(m_q, m_Q, \beta_{\min}) = f_{\text{exp}}^V \pm \Delta f_{\text{exp}}^V, \quad (3.5)$$

где уравнения (3.2), (3.3) являются условием минимума и требованием того, чтобы модельные значения масс мезонов соответствовали экспериментальным значениям. Величины $M_{P,V}$ – экспериментальные значения массы псевдоскалярного и векторного мезонов, а $\Delta M_{P,V}$ – экспериментальная ошибка измерения этих масс. Последние два уравнения (3.4), (3.5) означают, что значения лептонной константы связи для псевдоскалярных и векторных мезонов, полученные в рамках пуанкаре–ковариантной модели совпадали (см. (2.4), (2.5)) в пределах ошибки с экспериментальными значениями f_{exp} .

Для моделирования различного поведения константы в непертурбативной области с помощью процедуры фитирования константы (1.9) выражением (1.8) нами получены наборы параметров, отличающихся значениями α_k, γ_k .

Выбор режима поведения α_s и соответственно значений α_k, γ_k основан на комбинированном анализе лептонных констант легких и тяжелых мезонов и масс псевдоскалярных и векторных мезонов.

Итогом этой процедуры является эффективная константа $\alpha_s(Q^2)$ с $\alpha_{\text{crit.}} = \alpha_s(Q^2 = 0) = 0.667$, чье поведение отображено на рисунке 1. Отметим, что сходное поведение константы наблюдается в моделях [27], [36], [37].

Предполагая, что конституэнтные массы u, d – кварков приблизительно равны [27]:

$$m_d - m_u \equiv \Delta m_{ud} = (4 \pm 1) \text{ МэВ}, \quad (3.6)$$

получим из (3.2)–(3.5) систему уравнений на основе лептонных констант распадов:

$$\begin{cases} f_V(m_u, m_d, \beta) = f_{\text{exp}}^{\rho^0} \pm \Delta f_{\text{exp}}^{\rho^0}, \\ f_P(m_u, m_d, \beta) = f_{\text{exp}}^{\pi^\pm} \pm \Delta f_{\text{exp}}^{\pi^\pm}. \end{cases}$$

Используя экспериментальные данные для π^\pm и ρ^0 -мезонов [38]

$$f_{\pi^\pm}^P = (130.4 \pm 0.04 \pm 0.2) \text{ МэВ},$$

$$f_{\rho^0}^V = (156.2 \pm 1.2) \text{ МэВ},$$

где последнее соотношение получено из выражения (2.3) и экспериментального значения ширины $\Gamma_{\rho^0} = 7.02 \pm 0.11 \text{ КэВ}$ для распада $\rho^0 \rightarrow e^+ e^-$ [38], приходим к следующим значениям масс u, d – кварков:

$$\begin{aligned} m_u &= (239.8 \pm 2.3) \text{ МэВ}, \\ m_d &= (243.8 \pm 2.3) \text{ МэВ}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

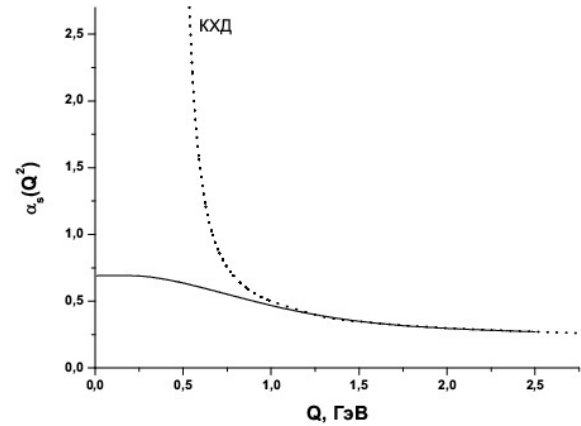


Рисунок 1 – Поведение $\alpha_s(Q^2)$ в исследуемой модели. Точками обозначено поведение константы пертурбативной КХД

При этом параметр β_π пробной осцилляционной ВФ

$$\Phi(k, \beta) = \frac{2}{\pi^{1/4} \beta^{3/2}} \exp\left(-\frac{k^2}{2\beta^2}\right) \quad (3.8)$$

лежит в интервале

$$\beta_\pi = (328.66 \pm 1.45) \text{ МэВ}. \quad (3.9)$$

Решение системы уравнений

$$\begin{cases} \partial M_V(\beta, \dots) / \partial \beta = 0, \\ M_{K^*}(\beta, \dots) = M_{K^\pm} \pm \Delta M_{K^\pm}, \\ M_V^{S=1}(\beta, \dots) - M_P^{S=0}(\beta, \dots) = M_{K^*} - M_{K^\pm} \pm \delta M_{K^*-K^\pm}, \\ f_P(m_u, m_s, \beta) = f_{\text{exp}}^{K^\pm} \pm \Delta f_{\text{exp}}^{K^\pm} \end{cases} \quad (3.10)$$

для бегущей константы $\alpha_s(Q^2)$, отображенной на рисунке 1, с учетом экспериментальных данных [38]

$$M_{K^*} = (493.677 \pm 0.016) \text{ МэВ},$$

$$f_{K^\pm}^P = (155.5 \pm 0.2 \pm 0.8 \pm 0.2) \text{ МэВ},$$

$$\Delta M_{\text{exp}} = M_{K^*} - M_{K^\pm} = (397.983 \pm 0.261) \text{ МэВ}$$

и значений массы u – кварка (3.7) дает, что

$$\begin{aligned} m_s &= (459.9 \pm 31.7) \text{ МэВ}, \\ \beta_K &= (352.48 \pm 1.03) \text{ МэВ}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Для вычисления лептонных констант тяжелых мезонов нам необходимы массы c -, b - кварков. Для расчета ограничений масс тяжелых c -, b - кварков, используем данные для $c\bar{c}$ (η_c и J/ψ – мезоны) и $b\bar{b}$ (η_b и $\gamma(1S)$ – мезоны) систем:

$$\begin{aligned} M_{\eta_c} &= (2980.3 \pm 1.2) \text{ МэВ}, \\ M_{J/\psi} &= (3096.916 \pm 0.011) \text{ МэВ}, \\ M_{\eta_b} &= (9390.9 \pm 2.8) \text{ МэВ}, \\ M_{\gamma(1S)} &= (9460.30 \pm 0.26) \text{ МэВ}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Поскольку эти системы состоят из частиц одинаковой массы, то для фиксации масс кварков достаточно использовать экспериментальные данные только для лептонных распадов векторных состояний:

$$\begin{aligned} f_{\gamma(1S)}^V &= (238.4 \pm 1.6) \text{ МэВ}, \\ f_{J/\psi}^V &= (277.6 \pm 4) \text{ МэВ}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Решение систем уравнений, аналогичных уравнениям (3.10) приводит к интервалам:

$$\begin{aligned} m_c &= (1.358 \pm 0.081) \text{ ГэВ}, \\ m_b &= (4.127 \pm 0.105) \text{ ГэВ}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

4 Методика вычисления характеристик мезонов в пуанкаре-ковариантной модели, основанной на точечной форме РГД

При изучении реакций с участием адронов h , таких как лептонные распады

$$h_i \rightarrow h_f + \ell^+ + \nu_\ell, \quad (4.1)$$

упругое рассеяние лептонов на адронах

$$\ell^+ + h_i \rightarrow \ell^+ + h_f \quad (4.2)$$

и др. в S -матричных элементах процессов имеется адронная часть S^h , которая, для вышеупомянутых процессов, может записана в виде

$$I^h(x) = {}_{out} \langle \mathbf{Q}', M', J' \mu' | S^h(x) | \mathbf{Q}, M, J \mu \rangle_{in}. \quad (4.3)$$

Здесь вектор $|\mathbf{Q}, M, J \mu\rangle$ определяет состояние адрона спина J , массы M и импульса \mathbf{Q} в представлении Гейзенберга. Матричный элемент (4.3) параметризуют посредством феноменологических формфакторов, которые определяют из экспериментов. Трансляционная инвариантность требует, чтобы

$$I^h(x) = \exp(i\hat{Q}x) I^h(0) \exp(-i\hat{Q}x). \quad (4.4)$$

Отметим, что в адронную часть входит как сильное взаимодействие (индекс *strong*), так и другие типы взаимодействий (индекс *EW*), определяющие процессы типа (4.1), (4.2) т. е. в представлении взаимодействия S -матрица имеет вид:

$$S^h(x) = T \left\{ \exp \left[i \int H_{tot}^h(x) dx \right] \right\} =$$

$$= T \left\{ \exp \left[i \int H_{tot}^{EW}(x') dx' \right] \exp \left[i \int H_{tot}^{strong}(x) dx \right] \right\} \quad (4.5)$$

с полным гамильтонианом взаимодействия $H_{tot}^h(x) = H_0^h(x) + H_{int}^h(x)$.

Вычисление матричных элементов (4.3) с учетом внутренней структуры адронов является нетривиальной задачей и в разных моделях решается отличающимися друг от друга способами. Поскольку параметризация матричного элемента (4.3) включает как формфакторы, так и 4-импульсы частиц, то возникает задача, какие компоненты необходимо использовать для вычисления формфакторов. Так в рамках моделей на основе динамики на световом фронте [7], [9], [10], [39]–[41] предлагается для расчета токов использовать только те компоненты 4-векторов, которые не содержат взаимодействия («+» – компоненты). Если в случае пространственно-подобного квадрата переданного импульса Q^2 обращение в ноль «–» – компонент тока (содержащих взаимодействие) можно достичь путем выбора специальной системы отсчета, то для времени-подобного Q^2 это сделать не удастся. И поэтому при вычислении формфакторов с $Q^2 > 0$ используют формфакторы, рассчитанные с $Q^2 < 0$ [41]. Важно отметить, что попытка решить задачу вычисления формфакторов в динамике на световом фронте в системах, отличных от специально выбранной, приводит к результатам, которые существенно отличаются от экспериментальных значений [42].

Оригинальная методика вычисления формфакторов в рамках мгновенной формы РГД, основанная на обобщении метода параметризации матричных элементов локальных операторов [43], предложена в работах [11], [12], [32], [44]. На первом этапе с использованием базиса приводимого представления группы Пуанкаре находятся формфакторы для системы без взаимодействия. На втором этапе эти формфакторы используют для расчетов наблюдаемых формфакторов с помощью интегральных представлений. При этом формфакторы, характеризующие матричный элемент (4.3), трактуются как обобщенные функции.

В рамках точечной формы РГД наивная схема вычислений, основанная только на использовании равенства 4-х скоростей для систем с взаимодействием и без него, приводит к результатам, значительно отличающихся от наблюдаемых на эксперименте [15]–[17]. Поэтому авторами работ [14], [18], [23], [45] предложена модификация точечной формы РГД, названная ими дираковской точечной формой динамики (DPF). В данной модификации РГД ими вводится дополнительный единичный вектор $\hat{\mathbf{u}}$, направление которого фиксируется путем требования

равенства 4-импульсов связанной и свободных систем в пределе слабой связи [14], [18]. Построение DPF аналогично методам расчета формфакторов в так называемых ковариантных динамиках [46]–[48], где предлагается ввести явную зависимость матричного элемента (4.3) от некоторого пространственноподобного 4-вектора λ_μ , определяющего поверхность, на которой задается состояние начального вектора состояния системы. Как следует из краткого описания методов, задача получения наблюдаемых даже в рамках РГД требует дальнейших исследований.

Ниже приведем оригинальную схему вычисления характеристик двухчастичных связанных систем в рамках точечной формы динамики РГД [30], [49]. Основной отличительной чертой является использование в матричном элементе (4.3) состояний в представлении Гейзенберга, где сильные взаимодействия учтены точно [29] и совпадение 4-х скоростей систем с взаимодействием и без него. Дополнительным условием данной методики является использование уравнения Липпмана–Швингера для векторов состояний. В предлагаемой схеме вычислений матричного элемента (4.3) можно выделить следующие этапы:

1. На первом этапе матричный элемент (4.3) параметризуют формфакторами с использованием 4-х скоростей.

2. Использование полного набора векторов двухчастичных состояний, образующих базис неприводимого представления группы П для свободных частиц $|v_p, \mathbf{k}, \lambda_1, \lambda_2\rangle$, и последующий переход от представления Гейзенберга к представлению взаимодействия (индекс V) позволяют привести матричный элемент (4.3) к виду:

$$I^h(0) = \text{out} \langle \mathbf{Q}', M', J' \mu' | S^h(0) | \mathbf{Q}, M, J \mu \rangle_{in} = \sum_{\ell', s'} \sum_{\ell, s} \int d v_p \cdot d v_p k^2 k^2 dk' dk \langle \mathbf{Q}', M', J' \mu' | v_p, k', \ell', s' \rangle \cdot \int_V \langle v_p, k', \ell', s' | S^h(0) | v_p, k, \ell, s \rangle \langle v_p, k, \ell, s | \mathbf{Q}, M, J \mu \rangle. \quad (4.6)$$

3. Посредством разложения Клебша–Гордана для группы П оператор (4.6) преобразуется к соотношению:

$$I^h(0) = \int d \mathbf{k}' d \mathbf{k} J^h(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \nu_1, \nu_2} \sum_{\lambda'_1, \lambda'_2, \nu'_1, \nu'_2} \sum_{\ell, s} \sum_{\ell', s'} \langle \frac{1}{2} \nu_1, \frac{1}{2} \nu_2 | s \lambda \rangle \langle \ell m, s \lambda | J \mu \rangle \cdot \langle s' \lambda' | \frac{1}{2} \nu'_1, \frac{1}{2} \nu'_2 \rangle \langle J' \mu' | \ell' m', s' \lambda' \rangle \cdot \int d \mathbf{k}' d \mathbf{k} \sqrt{\frac{\omega_{m_q}(p_1) \omega_{m_Q}(p_2) M}{\omega_{m_q}(k) \omega_{m_Q}(k) \omega_M(Q)}}} \cdot \sqrt{\frac{\omega_{m_q}(p'_1) \omega_{m_Q}(p'_2) M'}{\omega_{m_q}(k') \omega_{m_Q}(k') \omega_{M'}(Q')}}.$$

$$\cdot Y_{\ell m}^*(\theta'_k, \phi'_k) Y_{\ell m}(\theta_k, \phi_k) \Phi_{\mathbf{Q}; \ell', s'}^{* J' \mu'}(k') \Phi_{\mathbf{Q}; \ell, s}^{J \mu}(k) \cdot \int_V \langle \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}'_1, \lambda'_1, \lambda'_2 | S^h(0) | \mathbf{p}_1, \lambda_1, \mathbf{p}_2, \lambda_2 \rangle \cdot D_{\lambda'_1 \nu'_1}^{* 1/2}(\mathbf{n}'_{W_1}) D_{\lambda'_2 \nu'_2}^{* 1/2}(\mathbf{n}'_{W_2}) D_{\lambda_1 \nu_1}^{1/2}(\mathbf{n}_{W_1}) D_{\lambda_2 \nu_2}^{1/2}(\mathbf{n}_{W_2}). \quad (4.7)$$

Таким образом, вычисление адронной части сводится к вычислению матричного элемента с частицами, составляющие адрон (кварки).

4. Следующий этап состоит в вычислении матричного элемента

$$\langle \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2, \lambda'_1, \lambda'_2 | S^h(0) | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \lambda_1, \lambda_2 \rangle$$

в переменных $\mathbf{V}_p, \mathbf{V}_{p'}$ и \mathbf{k}, \mathbf{k}' с последующим интегрированием. При этом во всех моделях предполагается, что оператор $S^h(0)$ может быть выражен посредством операторов частиц, составляющих систему (в нашем случае кварков):

$$S^h(0) \approx S^{quark}(0). \quad (4.8)$$

Иными словами, в пуанкаре–ковариантных моделях реакции взаимодействия адронов обусловлены «внутренними» взаимодействиями кварков и глюонов, если для описания адронов привлекается составная кварковая модель. Важной особенностью пуанкаре–ковариантных моделей является то, что частицы, составляющие систему, находятся на массовой оболочке. Далее путем сравнения с феноменологической параметризацией $I^h(x)$ находят выражения для формфакторов. В процессе этих вычислений необходимо учитывать, уравнение Липпмана – Швингера

$$|p\rangle_{in} = \left(I + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon} \hat{V} \right) |p\rangle_V \quad (4.9)$$

и то, что вследствие этого, выполняется соотношение [50]:

$$\hat{M} |v_p, k\rangle_V = M_0 |v_p, k\rangle_V. \quad (4.10)$$

Выражение (4.7) имеет громоздкий вид, а задача вычисления адронной части является непростой. Дополнительную трудность создают D матрицы вигнеровского вращения, которые являются нетривиальной функцией переменных $\mathbf{V}_p, \mathbf{V}_{p'}$ и \mathbf{k}, \mathbf{k}' [51].

Продемонстрируем технику расчета на примере адронного матричного элемента перехода $\langle \mathbf{Q}' | J_\mu^h(0) | \mathbf{Q} \rangle$ между двумя псевдоскалярными мезонами с 4-импульсами $\mathbf{Q} (\mathbf{Q}^2 = M^2)$ и $\mathbf{Q}' (\mathbf{Q}'^2 = M'^2)$. Этот матричный элемент параметризуется двумя формфакторами:

$$\text{out} \langle \mathbf{Q}' | J_\mu^h(0) | \mathbf{Q} \rangle_{in} = \frac{f_+(q^2) (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}')_\mu + f_-(q^2) (\mathbf{Q}' - \mathbf{Q})_\mu}{(2\pi)^3 \sqrt{4\omega_M(Q) \omega_{M'}(Q)}}, \quad (4.11)$$

где $q^2 = (\mathbf{Q}' - \mathbf{Q})^2$.

Согласно схеме вычислений, представленной в данном разделе, параметризуем (4.11) в терминах 4-скоростей

$$V_Q = \frac{Q}{M}, V_{Q'} = \frac{Q'}{M'} \quad (4.12)$$

в следующем виде

$$j^\mu = {}_{out} \langle Q' | J_\mu^h(0) | Q \rangle_{in} = \frac{(V_{Q'} + V_Q)_\mu \xi_+(q^2) + (V_{Q'} - V_Q)_\mu \xi_-(q^2)}{(2\pi)^3 \sqrt{4V_0 V_0'}} \quad (4.13)$$

где

$$\xi_\pm(q^2) = \frac{1}{2\sqrt{MM'}} (f_+(q^2)(M \pm M') + f_-(q^2)(M' \mp M)), \quad (4.14)$$

$$V_0 = \frac{\omega_M(Q)}{M}, V_0' = \frac{\omega_{M'}(Q')}{M'}. \quad (4.15)$$

Формфактор $\xi_+(q^2)$ (4.14) в эффективной теории с тяжелыми кварками переходит в функцию Ицзура – Вайзе (см., например, [52]), а формфактор $\xi_-(q^2)$ в данной теории обращается в ноль.

В точечной форме РГД, используя (4.5) и (4.6), преобразуем ${}_{out} \langle Q' | J_\mu^h(0) | Q \rangle_{in}$ к виду

$$j^\mu \equiv \int dk' dk k^2 k'^2 \Phi_{Q'}(k') \Phi_Q(k)_V \left\langle \mathbf{V}_{12}, M' \left| T \left\{ \hat{J}^\mu(0) \exp \left[i \int H_{tot}^{strong}(x) dx \right] \right\} \right| \mathbf{V}_{12}, M \right\rangle_V. \quad (4.16)$$

Для получения формфакторов ξ_\pm необходимо вычислить свертки

$$\xi_\pm(q^2) = (2\pi)^3 \sqrt{4V_0 V_0'} \frac{[(V_{Q'} \pm V_Q)_\mu j^\mu]}{2(1 \pm \varpi)}, \quad (4.17)$$

где величина ϖ связана с инвариантами данного процесса выражением:

$$\varpi = \left[V_Q V_{Q'} \right] = \frac{M'^2 + M^2 - q^2}{2MM'}. \quad (4.18)$$

Использование точечной формы РГД, в которой $V_Q = V_{12}, V_{Q'} = V'_{12}$, и уравнения Липпмана – Швингера (4.9) приводит к тому, что (4.17) приобретает вид:

$$\xi_\pm(q^2) = (2\pi)^3 \int dk' dk k^2 k'^2 \frac{\sqrt{4V_0 V_0'}}{2(1 \pm \varpi_{12})} \cdot \Phi_{Q'}(k') \Phi_Q(k)_V \left\langle \mathbf{V}_{12}, M_0'(k') \left| T \left\{ \left[[V'_{12} \pm V_{12}]^\mu \hat{J}_\mu(0) \right] \cdot \exp \left[i \int H_{tot}^{strong}(x) dx \right] \right\} \right| \mathbf{V}_{12}, M_0(k) \right\rangle_V, \quad (4.19)$$

где

$$\varpi_{12} = \frac{M_0'^2(k') + M_0^2(k) - q^2}{2M_0(k)M_0'(k')}, \quad (4.20)$$

а $M_0(k)$ и $M_0'(k')$ инвариантные массы системы

без сильного взаимодействия в начальном и конечном состоянии.

5 Электромагнитные формфакторы псевдоскалярных мезонов в пуанкаре-ковариантной модели

Для вычисления электромагнитного формфактора псевдоскалярного мезона $P(q\bar{Q})$ используем импульсное приближение. В данном приближении вершина взаимодействия псевдоскалярного мезона с учетом кварковой структуры описывается двумя диаграммами, изображенными на рисунке 2, а вершина взаимодействия виртуального фотона с мезоном определяется посредством

$$J_\mu = {}_{out} \langle Q' | J_\mu^h(0) | Q \rangle_{in} = \frac{F_P(t)(Q+Q')_\mu}{(2\pi)^3 \sqrt{4\omega_M(Q)\omega_{M'}(Q')}} = \frac{F_P(t)(V_Q + V_{Q'})_\mu}{(2\pi)^3 \sqrt{4V_0 V_0'}}, t = -(Q' - Q)^2. \quad (5.1)$$

Поправки, связанные с сильными взаимодействиями (см. (4.5)) в диаграммах рисунка 2, учтем введением формфакторов кварков $f_{q,Q}(t)$. Отметим, что учет конечных размеров кварков в таких процессах возникает во многих моделях, включая модели, основанные на РГД [5], [9], [11], [12], [40], [48], [53].

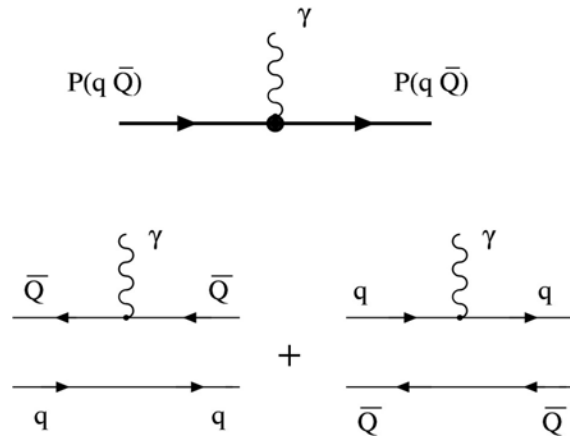


Рисунок 2 – Диаграмма взаимодействия мезона с фотоном. Ниже диаграммы, соответствующие импульсному приближению

Предсказания пертурбативной КХД поведения формфакторов мезонов при больших t диктует выбор формфакторов кварков в виде (см., например, [11], [12], [44])

$$f_q(t) = \frac{1}{1 + \ln(1 + \langle r_q^2 \rangle t) / 6}, \quad (5.2)$$

где $\langle r_q^2 \rangle$ – среднеквадратичный радиус кварка, который рассматривается как параметр модели.

Формфактор (5.2) при $t \rightarrow \infty$ дает логарифмическую поправку к степенной зависимости [11].

Среднеквадратичный радиус кварка выберем в виде [39], [54]

$$\langle r_q^2 \rangle = \frac{a}{m_q^2}, \quad (5.3)$$

где a – некоторый универсальный параметр, который имеет одно и тоже значение для всех кварков. При вычислениях, пренебрегаем в явном виде аномальными магнитными моментами кварков, которые по различным оценкам составляют $|\kappa_q| \sim 0.03 - 0.06$ (см. [55], [56]). Неопределенность, возникающую в этом случае, эффективно учтем ошибкой коэффициента a (см. (6.4)). Вычисления проведем в обобщенной системе Брейта, где

$$\mathbf{V}_Q + \mathbf{V}_Q' = 0. \quad (5.4)$$

Используя методику раздела 4 и требование сохранения тока, приходим к выражению для формфактора:

$$F_p(t) = \frac{1}{8\pi} \sum_{\nu_1, \nu_1'} \int d\mathbf{k} \Phi(k) \sqrt{\frac{1}{\omega_{m_q}(k) \omega_{m_Q}(k)}} \cdot \left[e_q f_q(t) \Phi^*(k_2) \sqrt{\frac{\omega_{m_Q}(k_2)}{\omega_{m_q}(k_2)}} D_{\nu_1 \nu_1'}^{1/2}(-\mathbf{n}_{W_2}(\mathbf{k}, \nu_Q)) \cdot \bar{u}_{\nu_1'}(\mathbf{k}_2, m_q) (V_{12}' + V_{12})^\mu \Gamma_\mu u_{\nu_1}(\mathbf{k}, m_q) + e_Q f_Q(t) \Phi^*(k_1) \sqrt{\frac{\omega_{m_Q}(k_1)}{\omega_{m_Q}(k_1)}} D_{\nu_1 \nu_1'}^{1/2}(-\mathbf{n}_{W_1}(\mathbf{k}, \nu_Q)) \cdot \bar{v}_{\nu_1}(-\mathbf{k}, m_Q) (V_{12}' + V_{12})^\mu \Gamma_\mu v_{\nu_1'}(-\mathbf{k}_1, m_Q) \right]. \quad (5.5)$$

В соотношении (5.5) вектор-параметры вignerовских вращений задаются в виде

$$\mathbf{n}_{W_1}(\mathbf{k}, \nu_Q) = \frac{[\mathbf{u}_{k_1} \nu_Q]}{1 + (\mathbf{u}_{k_1} \nu_Q)}, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{n}_{W_2}(\mathbf{k}, \nu_Q) = -\frac{[\mathbf{u}_{k_2} \nu_Q]}{1 - (\mathbf{u}_{k_2} \nu_Q)}$$

с
$$\mathbf{u}_{k_{1,2}} = \frac{\mathbf{k}}{\omega_{m_{1,2}}(k) + m_{1,2}}, \quad (5.7)$$

а 4-вектор Γ_μ соотношением

$$\Gamma_\mu = \left[\gamma_\mu - \frac{q_\mu \cdot q^\nu}{q^2} \gamma_\nu \right], \quad q = Q' - Q. \quad (5.8)$$

Импульсы $\mathbf{k}_{1,2}$ в системе Брейта имеют вид:

$$\mathbf{k}_{1,2} = \mathbf{k} \pm \nu_Q \left((\varpi_{12} + 1) \omega_{m_{1,2}}(k) \pm \sqrt{\varpi_{12}^2 - 1} k \cos \theta_k \right), \quad (5.9)$$

$$\omega_{m_{1,2}}(k_{1,2}) = \varpi_{12} \omega_{m_{1,2}}(k) \pm \sqrt{\varpi_{12}^2 - 1} k \cos \theta_k, \quad (5.10)$$

где

$$\varpi_{12} = \frac{M_0^2(k') + M_0^2(k) + t}{2 M_0(k) M_0(k')}. \quad (5.11)$$

Вследствие импульсного приближения соотношения (5.10) и (5.11) задают уравнения для ϖ_{12} как функции переменных $k, \cos \theta_k, t$ в формуле (5.5). Решение уравнений (5.10) и (5.11) относительно несложно, но конечный результат имеет громоздкий вид. Поэтому приведем только выражение для линейного приближения по t :

$$\varpi_{1,2} = \varpi_{12} \Big|_{k'=k_{1,2}} = 1 + t \frac{\omega_{m_{1,2}}^2(k)}{\left(k^2 \cos^2 \theta_k - \omega_{m_{1,2}}^2(k) \right) \left(\omega_{m_1}(k) + \omega_{m_2}(k) \right)}, \quad (5.12)$$

которое используется для расчета среднеквадратичных радиусов. При вычислениях формфакторов будут применяться точные выражения для $\varpi_{1,2}$.

После вычисления фермионных токов в (5.5), используя метод базисных спиноров (см. [57], [58]) и ряда преобразований, формфактор псевдоскалярного мезона $F_p(t)$ модели, основанной на точечной форме РГД, запишется в виде:

$$F_p(t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dk k^2 \int_0^\pi d(\cos \theta_k) \Phi(k) \sqrt{\frac{1}{\omega_{m_q}(k) \omega_{m_Q}(k)}} \cdot \left[e_q f_q(t) \Phi^*(k_2) \sqrt{\frac{\omega_{m_Q}(k_2)}{\omega_{m_q}(k_2)}} \cdot \sqrt{\frac{m_q^2 + \omega_{m_q}(k_2) \omega_{m_q}(k) + (\mathbf{k} \mathbf{k}_2)}{(\varpi_2 + 1)}} \cos(\alpha_{W_2} - \beta_{W_2}) + e_Q f_Q(t) \Phi^*(k_1) \sqrt{\frac{m_Q^2 + \omega_{m_Q}(k_1) \omega_{m_Q}(k) + (\mathbf{k} \mathbf{k}_1)}{(\varpi_1 + 1)}} \cdot \sqrt{\frac{\omega_{m_q}(k_1)}{\omega_{m_Q}(k_1)}} \cos(\alpha_{W_1} - \beta_{W_1}) \right]. \quad (5.13)$$

Углы вignerовских вращений имеют вид

$$\alpha_{W_{1,2}} = \arctan \left[\frac{\nu_{Q_{1,2}} k |\sin \theta_k|}{\omega_{m_{1,2}}(k) + m_{1,2} \pm \nu_{Q_{1,2}} k \cos \theta_k} \right], \quad (5.14)$$

$$\beta_{W_{1,2}} = 2 \arctan \left[\frac{\nu_{Q_{1,2}} k |\sin \theta_k|}{p \left(\omega_{m_{2,1}}(k) + m_{2,1} \right) \pm \nu_{Q_{1,2}} k \cos \theta_k} \right], \quad (5.15)$$

где

$$p = \frac{\omega_{m_{2,1}}(k) + \omega_{m_{2,1}}(k_{1,2})}{\omega_{m_{1,2}}(k) + \omega_{m_{1,2}}(k_{1,2})},$$

$$\nu_{Q_{1,2}} = \sqrt{\frac{\varpi_{1,2} - 1}{\varpi_{1,2} + 1}}.$$

Отметим, что при $m_Q = m_q$ углы вignerовских вращений α и β совпадают и выражение (5.13) существенно упрощается. При $t=0$ из (5.13) следует, что $F_p(0) = 1$.

6 Электромагнитные радиусы мезонов

Рассчитаем среднеквадратичные радиусы заряженных пионов и каонов, используя определение

$$F_P(t) \approx 1 - \langle r_P^2 \rangle \frac{t}{6} \quad (6.1)$$

и соотношение (5.13). При расчете формфакторов остался только один свободный параметр a , связанный со структурой кварков (см. (5.3)).

Численный расчет для пиона с параметрами (3.7) и (3.9) приводит к

$$\langle r_\pi^2 \rangle = \frac{2}{3} \langle r_u^2 \rangle + \frac{1}{3} \langle r_d^2 \rangle + 0.315 \text{ Фм}^2. \quad (6.2)$$

Используя представление радиуса кварка в виде $\langle r_q^2 \rangle = a/m_q^2$ и средневзвешенное значение, полученного в результате исследований реакции $e^- + \pi \rightarrow e^- + \pi$ [59], [60]–[62]

$$\langle r_{\pi^\pm}^2 \rangle_{exp} = (0.439 \pm 0.007) \text{ Фм}^2, \quad (6.3)$$

получим, что

$$a = 0.186 \pm 0.09. \quad (6.4)$$

Модельный (рассчитанный в рамках предлагаемой модели) среднеквадратичный радиус π -мезона

$$\langle r_{\pi^\pm}^2 \rangle = (0.439 \pm 0.013) \text{ Фм}^2 \quad (6.5)$$

находится в доверительном интервале из PDG [38]

$$\langle r_{\pi^\pm}^2 \rangle_{exp} = (0.452 \pm 0.011) \text{ Фм}^2. \quad (6.6)$$

Вычисление среднеквадратичного радиуса K^\pm -мезона с использованием соотношения (6.1) и параметров (3.11), (6.4) дает, что

$$\langle r_{K^\pm}^2 \rangle = (0.358_{-0.011}^{+0.013}) \text{ Фм}^2. \quad (6.7)$$

Модельный расчет полностью лежит в экспериментальном доверительном 1σ -интервале [63]:

$$\langle r_{K^\pm}^2 \rangle_{exp} = (0.34 \pm 0.05) \text{ Фм}^2, \quad (6.8)$$

но выше среднего значения из PDG [38] – $\langle r_{K^\pm}^2 \rangle_{exp} = (0.314 \pm 0.034) \text{ Фм}^2$.

Как следует из (6.2) и (6.4), вклад в среднеквадратичный радиус пиона аналогичных радиусов u и d -кварков составляет около 27–29%. Для сравнения отметим, что в динамике на световом фронте [5], [39] такой вклад составляет 53% ($\langle r_u^2 \rangle = \langle r_d^2 \rangle = 0.23 \text{ Фм}^2$). В мгновенной форме динамика с использованием инвариантной параметризации матричных элементов локальных операторов [12], [54], [64] этот вклад достигает 61%. Таким образом, в ПК-модели вклад структуры кварков в среднеквадратичный радиус π^\pm -мезонов значительно меньше.

В рамках данной схемы можно оценить среднеквадратичный радиус нейтрального K^0 -мезона. Изучение $\langle r_{K^0}^2 \rangle$ этого радиуса интересно, тем, что эта величина чувствительна к разнице между s - и d -кварками [65]. Экспериментальные данные масс псевдоскалярного и векторного состояния системы $d\bar{s}$ [66]

$$M_{K^0} = (497.648 \pm 0.022) \text{ МэВ}, \quad (6.9)$$

$$M_{K^{*0}} = (891.66 \pm 0.26) \text{ МэВ}$$

приводят к значению параметра пробной волновой функции $\beta_{K^0} = (352.60 \pm 12.17) \text{ МэВ}$ при решении системы уравнений (3.2), (3.3).

Вычисления, аналогичные расчетам радиусов заряженных пионов и каонов, приводят к

$$\langle r_{K^0}^2 \rangle = (-0.077 \pm 0.013) \text{ Фм}^2. \quad (6.10)$$

Величина (6.10) полностью согласуется со значением из PDG [38]

$$\langle r_{K^0}^2 \rangle_{exp} = (-0.077 \pm 0.010) \text{ Фм}^2. \quad (6.11)$$

Отметим, что при вычислениях среднеквадратичных радиусов каонов свободных параметров не имелось.

В таблице 1 представлены результаты вычислений среднеквадратичных радиусов в различных моделях и подходах.

Таблица 1 – Электромагнитные радиусы мезонов в различных моделях

Модели	$\langle r_{\pi^\pm}^2 \rangle, \text{ Фм}^2$	$\langle r_{K^\pm}^2 \rangle, \text{ Фм}^2$	$\langle r_{K^0}^2 \rangle, \text{ Фм}^2$
В этой работе	0.439 ± 0.013	$0.358_{-0.011}^{+0.013}$	-0.077 ± 0.013
Модели, основанные на КХД уравнении Дайсона–Швингера	0.45 [67,68]	0.38 [67,68]	-0.086 [67,68]
	0.314 [65]	0.24 [65]	-0.020 [65]
	0.354 [69]		
Квазипотенциальная модель	0.436 [22]	0.325 [22]	-0.072 [22]
Модель Солпитера	$\gg 0.439$ [70]	0.36 [70]	-0.077 [70]
Моск-модель	0.435 [27]	0.348 [27]	-0.090 [27]
Нелокальная киральная модель	0.387 [71]		
Модели, основанные на РГД («световой фронт»)	0.449 [10]	0.327 [10]	0.00 [10]
	0.4356 [39]	0.041 [39]	-0.036 [39]
	0.449 [9]	0.327 [9]	-0.045 [9]
Эксперимент	0.420 ± 0.014 [62]	0.314 ± 0.034 [38]	-0.076 ± 0.021 [72]
	0.439 ± 0.008 [59]	0.34 ± 0.05 [63]	-0.077 ± 0.010 [38]

Отметим, что согласованное описание экспериментальных данных, связанных с массами, лептонными константами и среднеквадратичными радиусами в рамках одной модели, проведено в квазипотенциальной модели [22], ковариантной модели на основе уравнения Солпитера [70] и релятивизированной кварковой модели (Моск-модель) [27]. Результаты ПК-модели коррелируют с результатами этих работ.

7 Электромагнитные формфакторы мезонов

Важно отметить, что процедура получения среднеквадратичных радиусов, используя экспериментальные данные, отличается от расчетов с помощью (6.1) (см., например, [59]). Поэтому основным фактом, позволяющим судить о степени близости к экспериментальным данным, является поведение формфактора от переданного импульса. Вычисление формфактора π^\pm -мезона посредством (5.13) с параметром (6.4) приводит к не только достаточно хорошему согласованию с экспериментальными значениями в области малых квадратов переданных импульсов (рисунок 3), но и во всей области экспериментальных значений t , изображенных на рисунках 4–5.

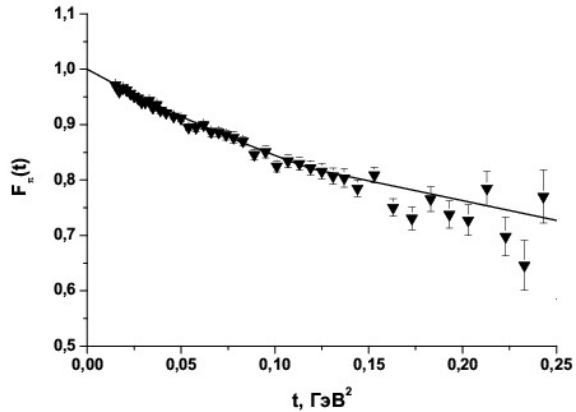


Рисунок 3 – Поведение формфактора (5.13) для пиона в области малых переданных импульсов (символ \blacktriangledown – экспериментальные значения, взятые из [59])

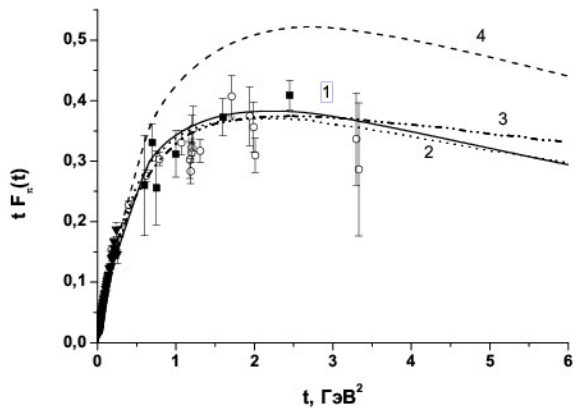


Рисунок 4 – Поведение функции $tF_\pi(t)$ для пиона

На рисунке 4 введены следующие обозначения: символ \blacktriangledown – экспериментальные значения, взятые из работы [59]; символ \blacksquare – данные JLab [73], [74]; символ \circ – данные из [75]; сплошная линия 1 – расчет в ПК-модели с учетом структуры кварков; линия 2 ($\cdots -$) – дисперсионная техника расчета форм-фактора [76]; линия 3 (\cdots) – вычисления в рамках мгновенной формы РГД [77]; линия 4 – расчет в точечной форме РГД без учета размеров кварков

Формфактор пиона в ПК-модели с ростом t убывает как $\alpha_s(t)/t$ (рисунок 4), что согласуется с расчетами формфакторов в рамках КХД.

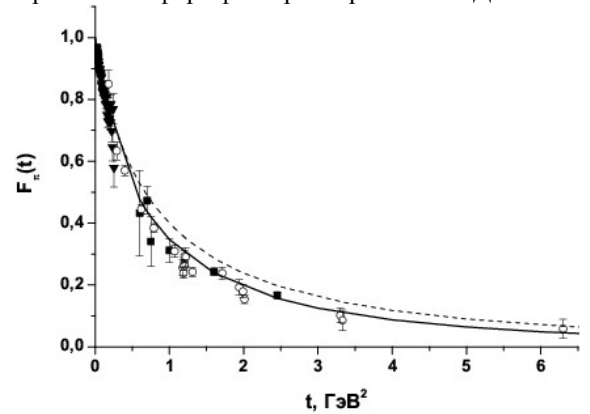


Рисунок 5 – Форм-фактор пиона в области всех известных экспериментальных данных. Обозначения те же, что и на рисунке 4.

На рисунках 4 и 5 для сравнения штриховой линией показано поведение формфактора пиона без учета структуры кварков.

Сравнительный анализ показывает хорошее согласие с дисперсионным подходом к вычислению формфакторов [76], а также с пуанкаре-инвариантной кварковой моделью, основанной на мгновенной форме РГД [12], [78], [77]. Небольшое отличие обусловлено разницей в массах кварков и учетом в [12], [78], [77] их аномальных магнитных моментов.

Поведение формфактора K^\pm -мезона в зависимости от квадрата переданного импульса t отобразено на рисунке 6.

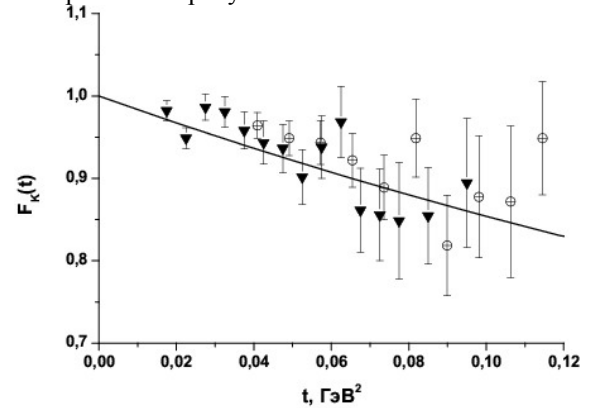


Рисунок 6 – Поведение формфактора каона при малых t

На рисунке 6 введены следующие обозначения: символ \blacktriangledown – экспериментальные значения, взятые из [63]; символ \oplus – данные из работы [61]. Из рисунка 6 видно, что имеется удовлетворительное согласование с экспериментальными значениями, взятыми из [63], и некоторое расхождение с экспериментальными значениями [61], имеющих, правда, значительные погрешности.

Заключение

С учетом всех результатов можно утверждать, что создана пуанкаре–ковариантная кварковая модель мезонов на основе точечной формы РГД. В рамках этой модели рассчитаны среднеквадратичные радиусы и электромагнитные формфакторы псевдоскалярных мезонов с учетом структуры кварков.

Получено хорошее согласование с экспериментальными данными как в области малых, так и больших Q^2 . Так, 3σ –интервалы среднеквадратичных радиусов, рассчитанных в ПК-модели, включают полностью интервалы экспериментальных значений.

В итоге получено согласованное описание масс, лептонных констант и электромагнитных формфакторов псевдоскалярных и векторных мезонов, численные оценки которых описывают современную экспериментальную информацию.

Авторы благодарят профессора Максименко Н.В. (ГГУ), профессора Троицкого В.Е. (НИ-ЯФ МГУ) за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *New results for the charged pion electromagnetic form-factor* / J. Volmer [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2001. – Vol. 86. – P. 1713–1716.
2. *Perdrisat, C.F.* Proton elastic form factor: The JLab data / C.F. Perdrisat // Eur. Phys. J. – 2003. – Vol. A17. – P. 317–321.
3. *Gross, F.* Relativistic quantum mechanics and field theory / F. Gross. – N.Y. : John Wiley & Sons Inc., 1993. – 629 P.
4. *Dirac, P.A.M.* Forms of relativistic dynamics / P.A.M. Dirac // Rev. of Modern Phys. – 1949. – Vol. 21. – P. 392–399.
5. *Charge form-factor of pi and K mesons* / F. Cardarelli [et al.] // Phys. Rev. – 1996. – Vol. D53. – P. 6682–6685.
6. *Electromagnetic form-factors of the rho meson in a light front constituent quark model* / F. Cardarelli [et al.] // Phys. Lett. – 1995. – Vol. B349. – P. 393–399.
7. *Coester, F.* Charge form factors of quark-model pions / F. Coester, W.N. Polyzou // Phys. Rev. – 2005. – Vol. C71. – P. 028202.
8. *Coester, F.* Charge form factors of quark-model pions. II. [Electronic resource] / F. Coester, W.N. Polyzou. – 2004. – Mode of access: <http://arxiv.org/pdf/nucl-th/0405082>. – Date of access: 14.01.2008.

9. *Jaus, W.* Relativistic constituent quark model of electroweak properties of light mesons / W. Jaus // Phys. Rev. – 1991. – Vol. D44. – P. 2851–2859.

10. *Schlumpf, F.* Charge form-factors of pseudoscalar mesons / F. Schlumpf // Phys. Rev. – 1994. – Vol. D50. – P. 6895–6898.

11. *Крутов, А.Ф.* Электрослабые свойства легких мезонов в релятивистской модели составных кварков / А.Ф. Крутов // Ядерная физика. – 1997. – Т. 60, № 8. – С. 1442–1450.

12. *Krutov, A.F.* Relativistic instant-form approach to the structure of two-body composite systems / A.F. Krutov, V.E. Troitsky // Phys. Rev. C. – 2002. – P. 045501.

13. *Allen, T.W.* Pion charge form factor in point form relativistic dynamics / T.W. Allen, W.H. Klink // Phys. Rev. – 1998. – Vol. C58. – P. 3670–3673.

14. *Desplanques, B.* Nucleon and pion form factors in different forms of relativistic quantum mechanics / B. Desplanques // Int. J. Mod. Phys. – 2005. – Vol. A20. – P. 1601–1606.

15. *Desplanques, B.* Form factors in the 'point form' of relativistic quantum mechanics: Single and two-particle currents / B. Desplanques, L. Theussl // Eur. Phys. J. – 2004. – Vol. A21. – P. 93.

16. *Desplanques, B.* Effective boost and 'point-form' approach / B. Desplanques, L. Theussl, S. Noguera // Phys. Rev. – 2002. – Vol. C65. – P. 038202.

17. *Comparison of different boost transformations for the calculation of form factors in relativistic quantum mechanics* / L. Theussl [et al.] // Few Body Syst. Suppl. – 2003. – Vol. 14. – P. 393.

18. *Desplanques, B.* Dirac's inspired point form and hadron form factors / B. Desplanques // Nucl. Phys. – 2005. – Vol. A755. – P. 303–306.

19. *Logunov, A.A.* Quasi-optical approach in quantum field theory / A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze // Nuovo Cimento. – 1963. – Vol. 29, № 2. – P. 380–399.

20. *Crater, H.W.* Two-body Dirac equations / H.W. Crater, P. Van Alstine // Annals Phys. – 1983. – Vol. 148. – P. 57–94.

21. *Savkli, C.* Quark-antiquark bound states in the relativistic spectator formalism / C. Savkli, F. Gross // Phys. Rev. – 2001. – Vol. C63. – P. 035208.

22. *Ebert, D.* Masses and electroweak properties of light mesons in the relativistic quark model / D. Ebert, R.N. Faustov, V.O. Galkin // Eur. Phys. J. – 2006. – Vol. C47. – P. 745–755.

23. *Desplanques, B.* Relativistic quantum mechanics: A Dirac's point-form inspired approach / B. Desplanques // Nucl. Phys. – 2005. – Vol. A748. – P. 139–167.

24. *Keister, B.D.* Heavy quark symmetry and Dirac's point form dynamics / B.D. Keister // Phys. Rev. – 1992. – Vol. D46. – P. 3188–3194.

25. *Keister, B.D.* Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics / B.D. Keister, W.N. Polyzou // *Adv. Nucl. Phys.* – 1991. – Vol. 20. – P. 225–479.
26. *Klink, W.H.* Constructing Point Form Mass Operators from Interaction Lagrangians / W.H. Klink // *Nucl. Phys.* – 2003. – Vol. A716. – P. 123–135.
27. *Godfrey, S.* Mesons in a relativized quark model with chromodynamics / S. Godfrey, N. Isgur // *Phys. Rev.* – 1985. – Vol. D32. – P. 189–231.
28. *Gromes, D.* Theoretical understanding of quark forces / D. Gromes. – Heidelberg, 1989. – 64 P. – Preprint Institute of Theoretical Physics HD-THEP-89-17.
29. *Биленький, С.М.* Введение в диаграммы Фейнмана и физику электрослабого взаимодействия / С.М. Биленький. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 327 с.
30. *Андреев, В.В.* Описание лептонных распадов в рамках пуанкаре-ковариантной кварковой модели / В.В. Андреев // *Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук.* – 2000. – 2. – С. 93–98.
31. *Андреев, В.В.* Комптоновская поляризуемость каонов в релятивистской гамильтоновой динамике / В.В. Андреев, А.Ф. Крутов // *Вестник Самарского гос. ун-та. Естественно-научная серия. Спец. выпуск.* – 2004. – С. 111–127.
32. *Крутов, А.Ф.* Построение формфакторов составных систем с помощью обобщенной теоремы Вигнера–Экарта для группы Пуанкаре / А.Ф. Крутов, В.Е. Троицкий // *Теоретическая и математическая физика.* – 2005. – Т. 143, № 2. – С. 258–277.
33. *Ebert, D.* Quark–antiquark potential with retardation and radiative contributions and the heavy quarkonium mass spectra / D. Ebert, R.N. Faustov, V.O. Galkin // *Phys. Rev.* – 2000. – Vol. D62. – P. 034014.
34. *Полулептонные распады псевдоскалярных мезонов в мгновенной форме релятивистской гамильтоновой динамики* / Е. В. Баландина [и др.] // *Ядерная физика.* – 2000. – Т. 63, № 2. – С. 301–311.
35. *Kalashnikova, Y.S.* QCD string in light-light and heavy-light mesons / Y.S. Kalashnikova, A.V. Nefediev, Y.A. Simonov // *Phys. Rev.* – 2001. – Vol. D64. – P. 014037.
36. *Badalian, A.M.* Freezing of QCD coupling alpha(s) affects the short distance static potential / A.M. Badalian, D.S. Kuzmenko // *Phys. Rev.* – 2002. – Vol. D65. – P. 016004.
37. *Ganbold, G.* QCD running coupling in low-energy region / G. Ganbold // *Phys. Rev. D.* – May 2010. – Vol. 81, № 9. – P. 094008.
38. *The Review of Particle Physics* / C. Amsler [et al.] // *Physics Letters.* – 2008. – Vol. B667. – P. 1. – 2009 partial update for the 2010 edition.
39. *Hard constituent quarks and electroweak properties of pseudoscalar mesons* / F. Cardarelli [et al.] // *Phys. Lett.* – 1994. – Vol. B332. – P. 1–7.
40. *Chung, P.L.* Charge form-factors of quark model pions / P.L. Chung, F. Coester, W.N. Polyzou // *Phys. Lett.* – 1988. – Vol. B205. – P. 545–548.
41. *Jaus, W.* Semileptonic decays of B and D mesons in the light front formalism / W. Jaus // *Phys. Rev.* – 1990. – Vol. D41. – P. 3394.
42. *Simula, S.* Comparison among Hamiltonian light-front formalisms at $q^+=0$ and $q^+ \neq 0$: Space-like elastic form factors of pseudoscalar and vector mesons / S. Simula // *Phys. Rev.* – 2002. – Vol. C66. – P. 035201.
43. *Чешков, А.А.* Инвариантная параметризация локальных операторов / А.А. Чешков, Ю.М. Широков // *ЖЭТФ.* – 1963. – Т. 44, № 6. – С. 1982–1992.
44. *Krutov, A.F.* Relativistic properties of spin and pion electromagnetic structure / A.F. Krutov, V.E. Troitsky // *J. High Energy Physics.* – 1999. – Vol. 10. – P. 028.
45. *Amghar, A.* The form factor of the pion in 'point-form' of relativistic dynamics revisited / A. Amghar, B. Desplanques, L. Theussl // *Phys. Lett.* – 2003. – Vol. B574. – P. 201–209.
46. *Кадышевский, В.Г.* Трехмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел / В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков // *ЭЧАЯ.* – 1972. – Т. 2, № 3. – С. 635–690.
47. *Карманов, А.А.* Релятивистские составные системы в динамике на световом фронте / А.А. Карманов // *ЭЧАЯ.* – 1988. – С. 526–578.
48. *Кондратюк, Л.А.* Формфакторы переходов и вероятности полелептонных распадов В и D-мезонов в ковариантной динамике на световом фронте / Л.А. Кондратюк, Д.В. Чекин // *Ядерная физика.* – 2001. – Т. 64, 4. – С. 786–812.
49. *Андреев, В.В.* Точечная форма релятивистской гамильтоновой динамики и электромагнитный радиус пиона / В.В. Андреев, А.В. Соновский // *Известия ГГУ им. Ф. Скорины.* – 2001. – 5 (8). – С. 8–12.
50. *Lucha, W.* Relativistic treatment of fermion anti-fermion bound states / W. Lucha, H. Rupperecht, F.F. Schoberl // *Phys. Rev.* – 1991. – Vol. D44. – P. 242–249.
51. *Андреев, В.В.* О вигнеровских вращениях спиновых базисов в векторной параметризации группы Лоренца / В.В. Андреев // *Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук.* – 1988. – № 3. – С. 73–78.
52. *Covariant quark model of form-factors in the heavy mass limit* / A. Le Yaouanc [et al.] // *Phys. Lett.* – 1996. – Vol. B365. – P. 319–326.
53. *Chung, P.L.* Relativistic constituent quark model of nucleon form-factors / P.L. Chung, F. Coester // *Phys. Rev.* – 1991. – Vol. D44. – P. 229–241.
54. *Krutov, A.F.* Relativistic instant-form approach to the structure of two-body composite systems. Nonzero spin. [Electronic resource] /

- A.F. Krutov, V.E. Troitsky. – 2003. – Mode of access: <http://arxiv.org/pdf/hep-ph/0307217>. – Date of access: 14.01.2008.
55. *Gerasimov, S.B.* Electromagnetic moments of hadrons and quarks in a hybrid model / S.B. Gerasimov. – Dubna, Russia: JINR, 1989. – 19 P. – (Preprint JINR E2-89-837).
56. *Gerasimov, S.B.* Magnetic moments of baryons and strange content of the nucleon / S.B. Gerasimov // Phys. Lett. – 1995. – Vol. B357. – P. 666–670.
57. *Андреев, В.В.* Аналитическое вычисление фейнмановских амплитуд / В.В. Андреев // Ядерная физика. – 2003. – Т. 66, 2. – С. 410–420.
58. *Андреев, В.В.* Методы вычисления амплитуд в квантовополевых теориях и моделях / В.В. Андреев. – Гомель: УО «Гомельский государственный университет им.Ф. Скорины», 2004. – 235 с.
59. *A measurement of the space-like pion electromagnetic form-factor* / S.R. Amendolia [et al.] // Nucl. Phys. – 1986. – Vol. B277. – P. 168–216.
60. *A measurement of the pion charge radius* / S.R. Amendolia [et al.] // Phys. Lett. – 1984. – Vol. B146. – P. 116–131.
61. *Direct measurement of the negative kaon form-factor* / E.B. Dally [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1980. – Vol. 45. – P. 232–235.
62. *Measurement of the Sigma – charge radius by Sigma–electron elastic scattering* / I. Eschrich [et al.] // Phys. Lett. – 2001. – Vol. B522. – P. 233–239.
63. *A Measurement of the kaon charge radius* / S.R. Amendolia [et al.] // Phys. Lett. – 1986. – Vol. B178. – P. 435–454.
64. *Krutov, A.F.* On a possible estimation of the constituent-quark parameters from Jefferson Lab experiments on pion form factor / A.F. Krutov, V.E. Troitsky // Eur. Phys. J. – 2001. – Vol. C20. – P. 71–76.
65. *Burden, C.J.* Electromagnetic Form Factors of Charged and Neutral Kaons / C.J. Burden, C.D. Roberts, M.J. Thomson // Phys. Lett. – 1996. – Vol. B371. – P. 163–168.
66. *Review of Particle Physics* / W.-M. Yao [et al.] // Journal of Physics G. – 2006. – Vol. 33. – P. 1.
67. *Maris, P.* The pi, K+, and K0 electromagnetic form factors / P. Maris, P.C. Tandy // Phys. Rev. – 2000. – Vol. C62. – P. 055204.
68. *Maris, P.* Electromagnetic transition form factors of light mesons / P. Maris, P.C. Tandy // Phys. Rev. – 2002. – Vol. C65. – P. 045211.
69. *Roberts, C.D.* Electromagnetic pion form-factor and neutral pion decay width / C.D. Roberts // Nucl. Phys. – 1996. – Vol. A605. – P. 475–495.
70. *Electromagnetic meson form-factors in the Salpeter model* / C.R. Munz [et al.] // Phys. Rev. – 1995. – Vol. C52. – P. 2110–2119.
71. *Dorokhov, A.E.* Pion radii in nonlocal chiral quark model / A.E. Dorokhov, A.E. Radzhabov, M.K. Volkov // Eur. Phys. J. – 2004. – Vol. A21. – P. 155–159.
72. *Investigation of K(L,S) → pi+ pi- e+ e- decays* / A. Lai [et al.] // Eur. Phys. J. – 2003. – Vol. C30. – P. 33–49.
73. *Determination of the Charged Pion Form Factor at Q² = 1.60 and 2.45 (GeV/c)²* / T. Horn [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2006. – Vol. 97. – P. 192001.
74. *Determination of the pion charge form factor for Q² = 0.60–1.60 GeV²* / V. Tadevosyan [et al.] // Phys. Rev. – 2007. – Vol. C75. – P. 055205.
75. *Electroproduction of single pions at low epsilon and a measurement of the pion form-factor up to q² = 10-GeV²* / C.J. Bebek [et al.] // Phys. Rev. – 1978. – Vol. D17. – P. 1693–1712.
76. *Donoghue, J.F.* Asymptotic limits and the structure of the pion form factor / J.F. Donoghue, E.S. Na // Phys. Rev. D. – 1997. – Vol. 56, № 11. – P. 7073–7076.
77. *Крутов, А.Ф.* Мгновенная форма пуанкаре-инвариантной квантовой механики и описание структуры составных систем / А.Ф. Крутов, В.Е. Троицкий // ЭЧАЯ. – 2009. – Т. 40, № 2. – С. 268–318.
78. *Krutov, A.F.* Nonperturbative relativistic approach to pion form factor versus JLab experiments / A.F. Krutov, V.E. Troitsky, N.A. Tsirova // Phys. Rev. – 2009. – Vol. C80. – P. 055210.

Поступила в редакцию 21.02.11.

УДК 535.42+537.86.22

СВОЙСТВА ВЕКТОРНЫХ ПАРАКСИАЛЬНЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ. I. ОДНОРОДНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

PROPERTIES OF VECTORIAL PARAXIAL LIGHT BEAMS. I. HOMOGENEOUS POLARIZATION

S.S. Girdel

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Предложен простой унифицированный формализм для описания векторных параксиальных световых пучков общего вида. Найдены простые выражения для плотности потока энергии электромагнитного поля \mathbf{S} векторных световых пучков с однородной поляризацией. Установлено, что параксиальные циркулярно поляризованные световые пучки распространяются независимо, их потоки энергии разделяются и также независимы.

Ключевые слова: параксиальные пучки, векторные пучки, световые пучки, поляризационные свойства, энергетические свойства, поляризация.

The simple formalism for the description of the vector paraxial light beams of general type is offered. Simple expressions for the energy flux density of the electromagnetic field \mathbf{S} of the vector light beams with the homogeneous polarization are discovered. It is discovered that paraxial circular polarized light beams are spread independently, and their streams of energy are parted and they are also independent.

Keywords: paraxial beams, vector beams, light beams, polarizable properties, energy properties, polarization.

Введение

Под световыми пучками понимают узконаправленное световое излучение, распространяющееся в малом телесном угле. Если угол расходимости пучка мал, $\theta \sim 10^{-3}$ – 10^{-2} , такой пучок называется параксиальным. В параксиальных пучках продольная компонента поля значительно меньше поперечных компонент. Поэтому параксиальные пучки описываются обычно одной поперечной компонентой поля. Такие пучки называются скалярными. Чаще всего параксиальные световые пучки описываются как скалярные, что в большинстве случаев вполне достаточно. Такой, заведомо упрощенный подход, часто используется при описании свойств световых пучков [1]–[7]. Однако для пучков, у которых угол расходимости велик, скалярного приближения недостаточно. Более того, даже для параксиальных световых пучков, у которых поляризация неоднородна по сечению, необходимо использовать более строгий векторный формализм. Наконец, скалярное приближение во всех случаях не позволяет естественно описывать векторные характеристики пучка (поляризацию, поток энергии, орбитальный и спиновый моменты и др.). Более общим является описание лазерных световых пучков, как трехмерных векторных полей. Однако векторные пучки изучены гораздо слабее, см., например, [8]–[13]. В настоящей работе предлагается унифицированный и упрощенный векторный формализм для

описания поляризационных и энергетических характеристик векторных параксиальных световых пучков.

1 Поляризационные свойства векторных параксиальных световых пучков

Известно, что любой световой пучок можно разложить в ряд или интеграл Фурье по плоским монохроматическим волнам, которые строго поперечны в изотропной однородной среде. Отсюда из геометрических соображений можно высказать следующие общие утверждения о поляризационных характеристиках произвольных световых полей.

Возможно существование линейно поляризованных мод в одной плоскости, например,

$$\mathbf{E} = (E_x, 0, E_z) \text{ или } \mathbf{H} = (0, H_y, H_z).$$

Возможны строго поперечные TE - и TM -моды (в любом приближении). Они являются азимутально поляризованными, без радиальной компоненты. Вектор $\mathbf{E} = (E_x=0, E_y, E_z)$ – для TE -мод и вектор $\mathbf{H} = (H_x=0, H_y, H_z)$ – для TM -мод.

Существуют радиально поляризованные моды без азимутальных компонент,

$$\mathbf{E} = (E_\rho, E_\phi=0, E_z).$$

Высказанные соображения относятся как к параксиальным электромагнитным пучкам (Гаусса, Эрмита-Гаусса, Лагерра-Гаусса, Бесселя-Гаусса Матье-Гаусса, Эйри-Гаусса и др.), так и к непараксиальным волновым полям типа Бесселя, Матье, Эйри и др.

Возвратимся теперь к векторным парааксиальным световым пучкам. Для описания их поляризационных и энергетических характеристик будем использовать упрощенный векторный формализм.

Будем исходить из уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} = ik_0 \mu \mathbf{H}; \\ \text{rot } \mathbf{H} = -ik_0 \varepsilon \mathbf{E}; \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} \text{div } \mu \mathbf{H} = 0; \\ \text{div } \varepsilon \mathbf{E} = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

для монохроматических световых пучков в прозрачных изотропных средах, характеризующихся материальными уравнениями связи

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (1.3)$$

Здесь и далее используются обозначения:

$$k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad n^2 = \varepsilon \mu, \quad k = k_0 n. \quad (1.4)$$

Полагаем также $\mu \neq 1$, чтобы результаты можно было применять не только в оптике, и в радиодиапазоне частот электромагнитного излучения. Кроме того, одновременное присутствие проницаемостей ε и μ позволяет использовать симметрию уравнений Максвелла относительно замен $\varepsilon \leftrightarrow -\mu, \mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}$.

Из (1.1), (1.3) следует векторное уравнение Гельмгольца

$$(\nabla^2 + k^2) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.5)$$

простейшим решением которого является плоская волна $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E} e^{ikz}$. У таких волн волновой фронт – плоский, а амплитуда \mathbf{E} – константа. Для парааксиальных световых пучков волновой фронт – квазиплоский. Поэтому общее электрическое поле парааксиальных векторных световых пучков можно описывать функцией вида

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} e^{i(kz - \omega t)}, \quad (1.6)$$

где, однако, векторная амплитуда \mathbf{E} не является постоянной, а зависит от координат x, y, z . Тогда векторное уравнение Гельмгольца (1.5) для парааксиальных пучков ($|\nabla^2 \mathbf{E}| \ll |2ik \partial_z \mathbf{E}|$) сводится к векторному параболическому уравнению

$$(\nabla_{\perp}^2 + 2ik \partial_z) \mathbf{E} = 0, \quad (1.7)$$

где ∇_{\perp} – векторный поперечный оператор

$$\nabla_{\perp} = \mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_y \partial_y. \quad (1.8)$$

В парааксиальных пучках продольная компонента поля $|E_z|$ значительно меньше поперечных компонент, т. е. $|E_z| \ll |E_{\perp}|$. Поэтому все векторные поперечные амплитуды поля парааксиального светового пучка можно выразить через его поперечные компоненты электрического поля \mathbf{E}_{\perp} , а продольные компоненты E_z и H_z можно найти из уравнений непрерывности (1.2). Получаем в этом приближении

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\perp} + \frac{i}{k} \nabla_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} \cdot \mathbf{e}_z, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\perp} + \frac{i}{k} \nabla_{\perp} \mathbf{H}_{\perp} \cdot \mathbf{e}_z, \quad \text{где } \mathbf{H}_{\perp} = \frac{\varepsilon}{n} [\mathbf{e}_z, \mathbf{E}_{\perp}]. \quad (1.10)$$

Здесь и далее \mathbf{e}_z – единичный вектор в направлении оси z пучка, n – показатель преломления среды.

Чтобы найти поперечные компоненты электрического поля \mathbf{E}_{\perp} светового пучка, рассмотрим скалярное параболическое уравнение

$$(\nabla_{\perp}^2 + 2ik \partial_z) F = 0. \quad (1.11)$$

Теперь в качестве поперечных компонент векторов \mathbf{E}_{\perp} можно взять любые комбинации решений уравнения (1.11).

Из (1.7)–(1.11) следует также, что можно выделить следующие четыре типа векторных парааксиальных световых пучков:

$$\mathbf{E}^{(1)} = \Lambda \mathbf{E}_{\perp}, \quad \mathbf{H}^{(1)} = \frac{\varepsilon}{n} \mathbf{E}^{(2)}, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{E}^{(2)} = \Lambda [\mathbf{e}_z, \mathbf{E}_{\perp}], \quad \mathbf{H}^{(2)} = \frac{\varepsilon}{n} \mathbf{E}^{(1)}; \quad (1.13)$$

$$\mathbf{E}^{(3)} = (\nabla_{\perp} + 2\partial_z \mathbf{e}_z) F, \quad \mathbf{H}^{(3)} = \frac{\varepsilon}{n} \mathbf{E}^{(4)}; \quad (1.14)$$

$$\mathbf{E}^{(4)} = [\mathbf{e}_z, \nabla_{\perp}] F, \quad \mathbf{H}^{(4)} = -\frac{\varepsilon}{n} \mathbf{E}^{(3)}. \quad (1.15)$$

Здесь введен оператор

$$\Lambda = 1 + \frac{i}{k} \mathbf{e}_z \cdot \nabla_{\perp} \quad (1.16)$$

восстановления полного поля по его поперечной части. Точка в (1.16) означает прямое произведение векторов $((\mathbf{e}_z \cdot \nabla_{\perp})_{ik} = (\mathbf{e}_z)_i (\nabla_{\perp})_k$.

Видна замечательная симметрия между векторами \mathbf{E} и \mathbf{H} . Векторы магнитного поля одних мод пропорциональны векторам электрического поля других мод и удовлетворяют соответствующим соотношениям ортогональности

$$\mathbf{E}^{(1)} \mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{H}^{(2)} = \mathbf{E}^{(1)} \mathbf{H}^{(1)} = \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{H}^{(2)} = 0;$$

$$\mathbf{E}^{(3)} \mathbf{E}^{(4)} = \mathbf{H}^{(3)} \mathbf{H}^{(4)} = \mathbf{E}^{(3)} \mathbf{H}^{(3)} = \mathbf{E}^{(4)} \mathbf{H}^{(4)} = 0$$

в принятом приближении (пренебрегая членами второго порядка малости). Например, соотношение ортогональности $\mathbf{E}^{(3)} \mathbf{E}^{(4)} = 0$ означает, что векторы $\mathbf{E}^{(3)}$ и $\mathbf{E}^{(4)}$ имеют одинаковую эллиптичность, главные оси эллипсов поляризации повернуты на 90° , а их направления вращения одинаковы.

Существуют также строго поперечные моды: мода с вектором $\mathbf{H}^{(3)}$ является *ТН*-модой, а мода с вектором $\mathbf{E}^{(4)}$ – *ТЕ*-модой. (Свойства *ТЕ*- и *ТМ*- мод обсуждались, например, в [9]–[11].)

Таким образом, поиск решений векторного уравнения (1.7) для электрического поля в виде парааксиальных векторных световых пучков мы свели к решению скалярного параболического уравнения (1.11). При этом не требуется интегрирование уравнений Максвелла. Разумеется,

для поиска решений уравнения (1.7) можно было также применить метод потенциалов Герца [12] или ввести магнитный и электрический векторные потенциалы [3]. Однако для параксиальных пучков это приводит к неоправданным усложнениям.

2 Энергетические свойства векторных параксиальных световых пучков

Усреднённые по времени плотность энергии w и плотность потока энергии электромагнитного поля (вектор Пойнтинга) \mathbf{S} световых пучков определяются как [14], [15]

$$w = \frac{\varepsilon |\mathbf{E}|^2 + \mu |\mathbf{H}|^2}{16\pi};$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}[\mathbf{E}^* \mathbf{H}].$$

Для параксиальных пучков, учитывая (1.1)–(1.7), находим, в первом приближении, что плотность энергии w светового пучка

$$w = \frac{\varepsilon |\mathbf{E}_\perp|^2}{8\pi} = \frac{\mu |\mathbf{H}_\perp|^2}{8\pi}, \quad (2.1)$$

т. е. $w_e = w_m$, как и для плоских монохроматических волн [15].

Продольный поток энергии

$$\mathbf{S}_z = \frac{c}{n} w, \quad (2.2)$$

снова как для плоских монохроматических волн. Однако существует также поперечный поток энергии

$$\mathbf{S}_\perp = \frac{c\varepsilon}{8\pi nk} \operatorname{Im}(\mathbf{E}_\perp^* \cdot \nabla_\perp \mathbf{E}_\perp + [\mathbf{e}_z, \mathbf{E}_\perp^*] \cdot [\nabla_\perp, \mathbf{e}_z] \mathbf{E}_\perp), \quad (2.3)$$

который не учитывается скалярной теорией. Можно, учитывая соотношения (1.7)–(1.11), выразить также вектор \mathbf{S}_\perp в другой форме:

$$\mathbf{S}_\perp = -\frac{c}{8\pi n} \operatorname{Re}(\varepsilon \mathbf{E}_\perp^* \cdot \mathbf{E}_z + \mu \mathbf{H}_\perp^* \cdot \mathbf{H}_z).$$

3 Свойства векторных мод с однородной поляризацией

Обсудим теперь свойства параксиальных векторных световых пучков первого типа ($\mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{H}^{(1)}$). Для анализа их поляризационных характеристик представим поперечную часть векторной амплитуды пучка в виде

$$\mathbf{E}_\perp = \mathbf{e}_\perp F,$$

где F является некоторым решением параксиального параболического уравнения (1.11), а комплексный постоянный вектор поляризации \mathbf{e}_\perp не зависит от координат (x, y) . Такие пучки обладают поляризацией, однородной по сечению пучка, и чаще всего используются.

Можно разложить нормированный вектор поляризации \mathbf{e}_\perp по декартовому базису $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$:

$$\mathbf{e}_\perp = \frac{\eta_x \mathbf{e}_x + \eta_y \mathbf{e}_y}{\sqrt{|\eta_x|^2 + |\eta_y|^2}}. \quad (3.1)$$

Здесь η_x и η_y – некоторые постоянные комплексные параметры, $|\mathbf{e}_\perp|^2 = 1$. Тогда векторы электрического и магнитного полей пучков типа 1 равны

$$\mathbf{E}^{(1)} = \Lambda \mathbf{e}_\perp F, \quad \mathbf{H}^{(1)} = \frac{\varepsilon}{n} \Lambda [\mathbf{e}_\perp, \mathbf{e}_z] F. \quad (3.2)$$

Азимут ψ и эллиптичность $\gamma = \operatorname{tg} \chi$ эллиптически поляризованных мод (3.2) в их поперечном сечении можно выразить через комплексный параметр $\eta = \eta_y / \eta_x$ по формулам [14]:

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2 \operatorname{Re} \eta}{1 - |\eta|^2};$$

$$\sin 2\chi = \frac{2 \operatorname{Im} \eta}{1 + |\eta|^2}. \quad (3.3)$$

Можно также, согласно Федорову [15], ввести комплексный угол $(\psi + i\xi)$ соотношением $\eta = \operatorname{tg}(\psi + i\xi)$, тогда азимут световой волны равен ψ , а ее эллиптичность γ выражается как $\gamma = \operatorname{th} \xi$.

Плотности энергии и потока энергии электромагнитного поля соответственно равны:

$$w = \frac{\varepsilon |F|^2}{8\pi}; \quad \mathbf{S}_z = \frac{c}{n} w;$$

$$\mathbf{S}_\perp^{(1)} = \frac{c\varepsilon}{8\pi nk} \cdot \operatorname{Im}[F^* (\nabla_\perp + i \sin 2\chi \cdot [\nabla_\perp, \mathbf{e}_z]) F]. \quad (3.4)$$

Важны предельные случаи, когда соотношения существенно упрощаются.

1. Пусть $\eta = 0$. Тогда $\chi = 0$ и имеем поляризацию в плоскости (x, z) , т.е. плоско поляризованный пучок, PPE_x (plane polarized) – по терминологии Шимоды [11].

2. Пусть $\eta = \pm i$. Тогда $\sin 2\chi = \pm 1$ и получаем циркулярно поляризованные CPE (circular polarized) E -моды. При этом

$$\mathbf{E}_\pm^{(1)} = \left(\mathbf{e}_\pm + \frac{i}{k} \mathbf{e}_z \partial_\pm \right) F;$$

$$\mathbf{H}_\pm^{(1)} = \mp i \frac{\varepsilon}{n} \mathbf{E}_\pm^{(1)};$$

$$\mathbf{S}_{\pm\pm}^{(1)} = \frac{c\varepsilon}{4\pi nk} \operatorname{Im}(F^* \mathbf{e}_\mp \partial_\pm F),$$

где векторы поляризации и операторы дифференцирования в циркулярном базисе соответственно равны:

$$\mathbf{e}_\pm = \frac{\mathbf{e}_x \pm i \mathbf{e}_y}{\sqrt{2}};$$

$$\partial_\pm = \mathbf{e}_\pm \cdot \nabla_\perp = \frac{\partial_x \pm i \partial_y}{\sqrt{2}}.$$

Векторы циркулярного базиса удовлетворяют соотношениям

$$[\mathbf{e}_\pm, \mathbf{e}_\mp] = \mp i \mathbf{e}_z, \quad [\mathbf{e}_\pm, \mathbf{e}_z] = \pm i \mathbf{e}_\pm,$$

$$\mathbf{e}_+ \mathbf{e}_- = |\mathbf{e}_\pm|^2 = 1, \quad \mathbf{e}_\pm^2 = 0.$$

Альтернативно (3.1) можно разлагать вектор поляризации \mathbf{e}_\perp не по декартовому, а по циркулярному базису ($\mathbf{e}_+, \mathbf{e}_-, \mathbf{e}_z$):

$$\mathbf{e}_\perp = \frac{\eta_+ \mathbf{e}_+ + \eta_- \mathbf{e}_-}{\sqrt{|\eta_+|^2 + |\eta_-|^2}},$$

где η_+ и η_- – некоторые постоянные комплексные параметры. Теперь поляризационные характеристики однородно поляризованных пучков типа I можно выразить через параметры полярного разложения комплексного параметра $\eta_c = \eta_- / \eta_+$. Эллиптичность пучка (отношение полуосей эллипса поляризации) и азимут большей оси эллипса поляризации относительно оси OX соответственно равны

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{1 - |\eta_c|}{1 + |\eta_c|},$$

$$\psi = \frac{1}{2} \arg \eta_c.$$

Поле более общего эллиптически поляризованного парааксиального пучка также целесообразно разложить в когерентную сумму двух циркулярно поляризованных пучков с противоположными направлениями вращения, т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\perp &= \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-, \\ (\mathbf{E}_+^2 &= \mathbf{E}_-^2 = 0). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Можно убедиться, что плотности энергии и потока энергии электромагнитного поля соответственно равны:

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi} (|\mathbf{E}_+|^2 + |\mathbf{E}_-|^2); \quad \mathbf{S}_z = \frac{c}{n} w; \quad (3.6)$$

$$\mathbf{S}_\perp^{(1)} = \frac{c\varepsilon}{4\pi nk} \cdot \operatorname{Im} [\mathbf{E}_+^* \cdot \nabla_\perp \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-^* \cdot \nabla_\perp \mathbf{E}_-]. \quad (3.7)$$

Таким образом, мы видим, что парааксиальные циркулярно поляризованные моды распространяются независимо, энергетические характеристики их разделяются и также независимы:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-; \\ w &= w_+ + w_-; \\ \mathbf{S} &= \mathbf{S}_+ + \mathbf{S}_-. \end{aligned} \quad (3.8)$$

В то же время, как мы выше показали, если эллиптически поляризованный пучок разложить в когерентную сумму двух линейно поляризованных пучков, то такие пучки не являются независимыми и интерферируют. Вклады в общий поток энергии \mathbf{S} обоих пучков в последнем случае не разделяются. Таким образом, циркулярно поляризованные моды являются, в некотором смысле, более фундаментальными, чем линейно поляризованные. Это обусловлено вращательной инвариантностью циркулярных мод относительно оси z пучка.

Свойства парааксиальных векторных световых пучков 3 и 4 типов с неоднородной поляризацией и их когерентных суперпозиций будут исследованы нами в дальнейшем.

Заключение

Для описания поляризационных и энергетических характеристик векторных парааксиальных световых пучков предложен упрощенный векторный формализм, не требующий решений уравнений Максвелла. Показано, что произвольный векторный парааксиальный пучок однозначно определяется линейной комбинацией решений скалярного параболического уравнения.

Для векторов электрического и магнитного полей пучков установлена симметрия и соотношения ортогональности между ними. Найдены простые выражения для плотности потока энергии электромагнитного поля \mathbf{S} векторных световых пучков с однородной поляризацией. Для дальнейшего изучения их свойств необходима специализация найденных общих выражений на конкретные типы пучков.

Установлено, что парааксиальные циркулярно поляризованные моды распространяются независимо друг от друга, их плотности энергии и плотности потока энергии разделяются и также являются независимыми. Последний парадоксальный, на первый взгляд, вывод обусловлен циркулярными поляризациями пучков и их парааксиальностью. Это свойство может найти применение в оптических системах передачи и обработки и информации, поскольку может увеличивать пропускную способность оптического канала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Boyd, G.D.* Confocal multimode resonator for millimeter through optical wavelength masers / G.D. Boyd, J. Gordon // *Bell Syst. Techn. Journ.* – 1961. – Vol. 40. – С. 489–508.
2. *Goubau, G.* On the guided propagation of electromagnetic wave beams / G. Goubau, F. Schwing // *IRE Trans. Antennas Propag.* AP-9. – 1961. – P. 1808–1813.
3. *Deshamps, G.A.* Gaussian beams as a bundle of complex rays / G.A. Deshamps // *Electron. Lett.* – 1971. – Vol. 7. – P. 684–685.
4. *Когельник, X.* Резонаторы и световые пучки лазеров / X. Когельник, Т. Ли // *ТИИЭР.* – 1966. – Т. 54., № 10. – С. 95–112.
5. *Бельский, А.М.* Пространственная структура лазерного излучения / А.М. Бельский, Т.М. Корнейчик, А.П. Хапалюк. – М.: Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1982. – 198 с.
6. *Ардашев, А.Ю.* Некоторые свойства узкого монохроматического светового пучка / А.Ю. Ардашев, В.А. Кашин, Г.В. Скродский // *Известия вузов. Радиофизика.* – 1968. – Т. 11, № 12. – С. 1848–1851.

-
7. Гончаренко, А.М. Гауссовы пучки света / А.М. Гончаренко. – Мн. : Наука и техника, 1977. – 144 с.
8. Davis, L.W. TM and TE electromagnetic beams in free space / L.W. Davis, G. Patsakos // Optics Letters. – 1981. – Vol. 8, № 1. – P. 22–23.
9. Хаус, Х. Волны и поля в оптоэлектронике / Х. Хаус. – М. : Мир, 1988. – 432 с.
10. Shimoda, Koichi. Vectorial analysis of the Gaussian beams of light / Koichi Shimoda // J. Phys. Soc. Japan. – 1991. – Vol. 60, № 1. – P. 141–144.
11. Вайнштейн, Л.А. Электромагнитные волны / Л.А. Вайнштейн. – М. : Радио и связь, 1988. – 440 с.
12. Seshadri, S.R. Electromagnetic Gaussian beam / S.R. Seshadri // J. Opt. Soc. Am. A. – 1987. – Vol. 15, № 22. – P. 2712–2719.
13. Борн, М. Основы оптики / М. Борн, Е. Вольф. – М. : Наука, 1970. – 587 с.
14. Федоров, Ф.И. Оптика анизотропных сред / Ф.И. Федоров. – Мн.: Изд-во АН БССР, 1976. – 380 с.

Поступила в редакцию 14.02.11.

УДК 534.142

ЛАЗЕРНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ИМПУЛЬСОВ ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

В.Г. Гуделев¹, Г.В. Кулак², А.Г. Матвеева²

¹Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск

²Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина, Мозырь

LASER EXCITATION OF SURFACE ACOUSTIC WAVES PULSES IN SOLID STATE BODIES

V.G. Gudelev¹, G.V. Kulak², A.G. Matveeva²

¹B.I. Stepanov Institute of Physics NASB, Minsk

²I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University, Mozyr

Исследованы особенности лазерного возбуждения импульсов поверхностных акустических волн Рэлея в твердых телах через призму источником излучения круглой формы. Показано, что при увеличении азимутального угла происходит увеличение амплитуды и уменьшение длительности импульса ультразвука; при увеличении угла наклона призмы амплитуда акустического импульса уменьшается, а длительность увеличивается. Установлено, что при увеличении радиуса отверстия круглой формы амплитуда импульса увеличивается, а длительность уменьшается; с увеличением коэффициента поглощения гиперзвука амплитуда импульса уменьшается, а длительность – увеличивается.

Ключевые слова: акустический импульс, поверхностная акустическая волна, твердое тело, поглощение гиперзвука.

Features of laser excitation of the pulses of surface acoustic Rayleigh waves in solid state bodies through a prism by a source of radiation of the round form are investigated. It is shown, that at increase in the azimuth angle there is increase in the amplitude and reduction of duration of the ultrasound pulse; at increase in the angle of the prism inclination the amplitude of the acoustic pulse decreases, and the duration increases. It is established, that at increase in the radius of an aperture of the round form the pulse amplitude increases and the duration decreases; with the increase in the factor of absorption of a hypersound the pulse amplitude decreases, and the duration increases.

Keywords: acoustic pulse, surface acoustic wave, solid state body, hypersound absorption.

Введение

Возбуждение поверхностных акустических волн (ПАВ) Рэлея при поглощении лазерных импульсов наносекундной длительности в стальной пластине исследовано в работе [1]. Предложено использовать последовательности лазерных импульсов, связанных с отражением акустического импульса от границ образца для точного определения толщины металлической пленки, скорости распространения и коэффициента затухания гиперзвука. Важнейшими механизмами генерации ультразвуковых волн являются термоупругий эффект, электрострикция, радиационное давление, диэлектрический пробой и лазерная абляция [2], [3]. Для металлов, например, наибольший интерес представляет режим лазерной абляции, при котором достигаются наиболее высокие уровни давления на поверхности материала [3]. Особенности распространения ПАВ по сложной структуре – плавленный кварц с напыленными на его поверхность полосками из золота – исследованы в работе [4]. При этом значительный интерес представляет диагностика металлических неоднородных тонких пленок. В таком случае применяются источники ультразвука в виде полоски прямоугольной или круглой формы, наклоненной к поверхности твердого

тела под углом β . Схема возбуждения и регистрации ПАВ гетеродинным методом представлена на рисунке 1.

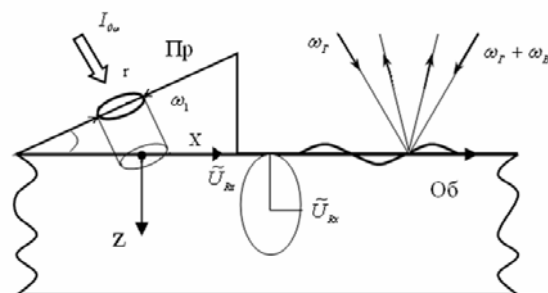


Рисунок 1 – Схема детектирования дефекта материала (Об – образец, Пр – призма, β – угол наклона призмы; ω_0 , $\omega_0 + \omega_B$ – частоты оптического излучения, используемого в гетеродинной схеме детектирования рассеянного акустического сигнала, r – радиус круга возбуждения на поверхности призмы)

Область возбуждения гиперзвука имеет вид круга радиусом r . При этом область воздействия

оптического излучения на поверхность материала имеет форму эллипса. Вычисление Фурье-компонент частотного спектра ПАВ производится интегрированием по площади отверстия [5], [6]. Существуют три основных типа волн, возбуждаемых лазерными импульсами и используемых для неразрушающего контроля [3], [6]: продольные (L), сдвиговые (S) и рэлеевские (R). В дальнейшем будем рассматривать особенности возбуждения ПАВ Рэлея.

1 Теоретические результаты

Лазерный импульс длительностью τ распространяется под углом β к оси Z и возбуждает высокочастотные ультразвуковые волны различной поляризации и пространственно-углового распределения. При этом форма акустического импульса существенно отличается от формы светового [2], [7], [8]. Предположим, что световой импульс имеет гауссово распределение во времени, то есть $f(t) = \exp(-t^2/\tau^2)$. Ультразвуковая волна затухает в пространстве при наличии поглощения высокочастотного ультразвука (гиперзвука) материалом с коэффициентом поглощения $\alpha_s = \Gamma \cdot \Omega^2$, где Γ – некоторый коэффициент, зависящий от рода материала и его физических свойств, $\Omega \sim 1/\tau$ – циклическая частота ультразвука. Такая зависимость коэффициента поглощения гиперзвука от частоты характерна для поликристаллов [9]. Фурье-спектр z и x – составляющих рэлеевской ПАВ ($\tilde{U}_{Rz,x}(\Omega)$) имеет вид [5], [6]:

$$\tilde{U}_{Rz}(\Omega) = \frac{P_f \pi r^2 \eta^2 e^{-\alpha_s \rho}}{2\mu \cos \beta} \cdot \sqrt{\frac{2k_R}{\pi \rho} \frac{\sqrt{1-\gamma^2 \eta^2}}{c_0} \frac{J_1(A_R)}{A_R}} e^{i(k_R \rho - \Omega t + \pi/4)}, \quad (1.1)$$

$$\tilde{U}_{Rx}(\Omega) = \tilde{U}_{Rz}(\Omega) \frac{1-\eta^2}{\sqrt{1-\gamma^2 \eta^2}},$$

где

$$A_R = r \sqrt{k_R^2 \sin^2 \alpha + \frac{(k_\beta \sin \beta - k_R \cos \alpha)^2}{\cos^2 \beta}},$$

α – азимутальный угол, отсчитываемый от оси X , β – угол наклона призмы; P_f – давление на поверхность твердого тела в области отверстия; ρ – расстояние до точки наблюдения УЗ волны;

$k_R = \frac{\Omega}{\eta v_s}$, v_s – фазовая скорость сдвиговой УЗ

волны, $\eta = \frac{0,87+1,12\nu}{1+\nu}$, причем ν – коэффициент Пуассона;

$\gamma = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}$, где λ, μ – постоянные

Ламе; $k_\beta = \frac{\Omega}{v_{lpr}}$, v_{lpr} – скорость продольной УЗ

волны в призме; r – радиус круга возбуждения на поверхности призмы;

$$c_0 = 2(2-\eta^2) - \frac{c_1}{c_2} - \frac{c_2}{c_1} - 2c_1 c_2,$$

где $c_1 = \sqrt{1-\eta^2}$, $c_2 = \sqrt{1-\eta^2 \gamma^2}$.

Временная форма акустического импульса дается соотношением [3]:

$$U_{Rz,x}(\tilde{t}_{l,s}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}_{Rz,x}(\Omega) F(\Omega) e^{-i\Omega \tilde{t}_R} d\Omega, \quad (1.2)$$

где

$$\tilde{t}_R = t - \frac{\rho}{v_R}, \quad F(\Omega) = \tau_a \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{\tau_a^2 \Omega^2}{4}\right)$$

– частотный спектр акустического импульса, распространяющегося вдоль оси X , v_R – фазовая скорость ПАВ Рэлея, τ_a – длительность акустического импульса. Известно, что форма импульса акустического сигнала определяется изменением теплофизических и оптических характеристик вещества на границе раздела фаз, а также интенсивностью излучения и поверхностного испарения [2], [7], [8].

Подставив выражения (1.1) в (1.2) и выполнив интегрирование численными методами (см. [10]), получим временную форму акустического импульса ПАВ Рэлея. При численных расчетах применяется алгоритм быстрого преобразования Фурье и метод сплайн-аппроксимации. Видно, что форма гауссового акустического импульса, распространяющегося вдоль поверхности твердого тела, трансформируется при увеличении азимутального угла и угла наклона призмы возбуждения. Рассчитать в замкнутом виде форму акустического импульса для отверстия круглой формы не представляется возможным [11].

2 Анализ численных расчетов

Численные расчеты проводились для рэлеевской УЗ волны и материала, выполненного из стали (Fe) с призмой возбуждения из стекла. При этом полагалось, что $P_f = 10$ МПа, $v_s = 3200$ м/с, $v_{lpr} = 2670$ м/с, $r = 3$ мм, $\lambda = 0,49 \cdot 10^{10}$ Па, $\mu = 7,84 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho = 10$ мм.

На рисунке 2, а представлена форма акустического импульса ПАВ в дальней зоне дифракции при различных азимутальных углах α . Из рисунка следует, что с увеличением угла α происходит уменьшение амплитуды импульса ПАВ и некоторое увеличение его длительности (по уровню 3 дБ). С увеличением угла наклона призмы β при азимутальном угле $\alpha = 0$, как показано на рисунке 2, б, происходит увеличение амплитуды и уменьшение длительности акустического импульса.

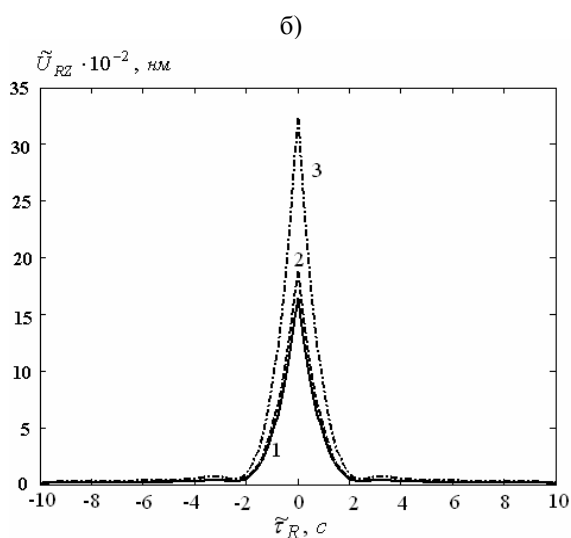
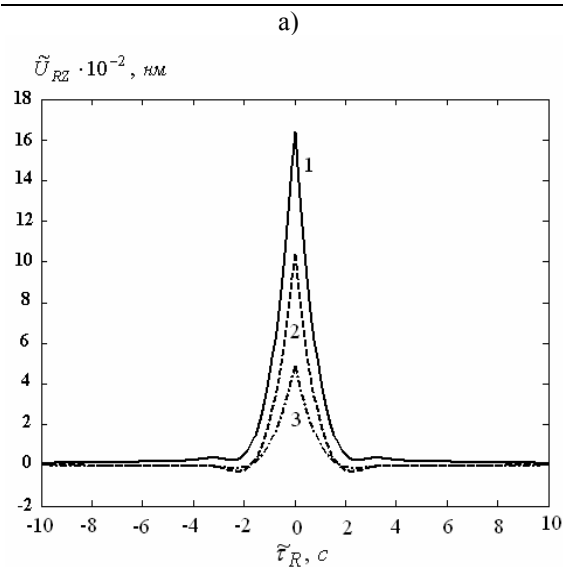


Рисунок 2 – Зависимость нормированной амплитуды смещения U_{Rz} от времени \tilde{t}_R

для различных (а) полярных углов α :
 1 – 0^0 , 2 – 20^0 , 3 – 30^0

и различных углов наклона призмы (б) β :
 1 – 0^0 , 2 – 30^0 , 3 – 60^0

($\rho=10$ мм, $r=3$ мм, $v_s=3200$ м/с,
 $v_{ipr}=2670$ м/с, $\Gamma=0$, $\tau_a=1$ мкс,
 $P_f=10$ МПа, $\beta=0$, (а); $\alpha=0$ (б))

Форма акустического импульса ПАВ при различных радиусах отверстия r представлена на рисунке 3, а. Из рисунка следует, что с увеличением радиуса отверстия амплитуда импульса увеличивается, а длительность уменьшается. Зависимость формы акустического импульса при различных коэффициентах поглощения гиперзвука представлена на рисунке 3, б. Видно, что с увеличением коэффициента поглощения α_s амплитуда акустического импульса уменьшается и его длительность увеличивается.

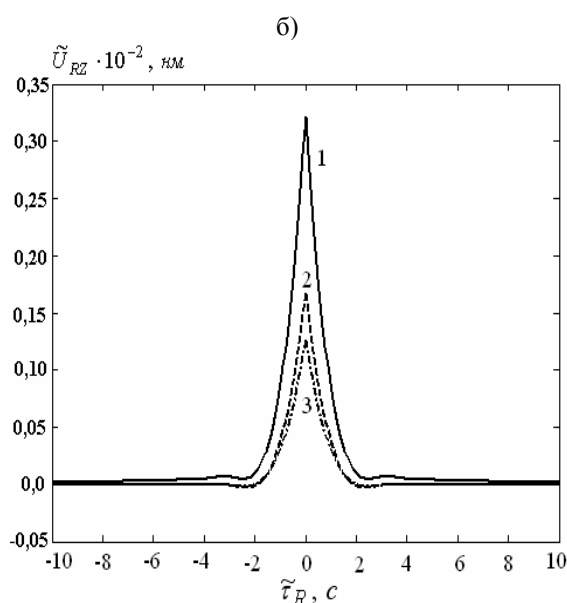
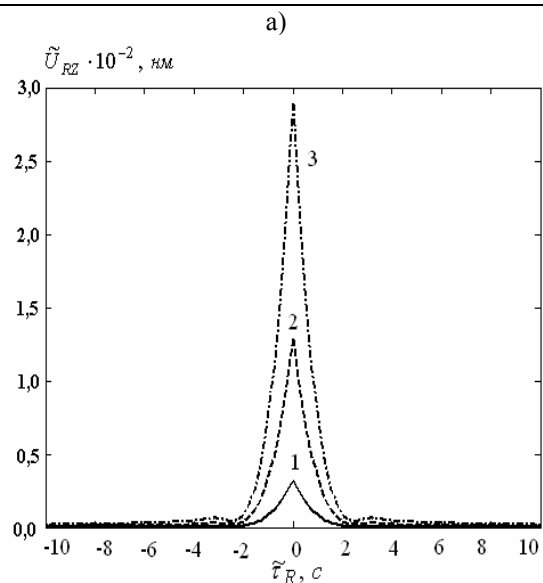


Рисунок 3 – Зависимость нормированной амплитуды смещения U_{Rz} от времени \tilde{t}_R

для различных (а) радиусах отверстия r :
 1 – 3, 2 – 6, 3 – 9 мм и различных параметрах
 поглощения гиперзвука (б) Γ :

1 – 0, 2 – $5 \cdot 10^{-10}$, 3 – $7 \cdot 10^{-10}$ м⁻¹с²
 ($\rho=10$ мм, $v_s=3200$ м/с, $v_{ipr}=2670$ м/с,
 $\tau_a=1$ мкс, $P_f=10$ МПа; $\alpha=0$, $\beta=60^0$,
 $\Gamma=0$ (а); $\alpha=0$, $\beta=60^0$, $r=3$ мм (б))

Заключение

Установлено, что форма гауссового акустического импульса, распространяющегося вдоль поверхности твердого тела, трансформируется при увеличении азимутального угла и угла наклона призмы возбуждения. При увеличении радиуса отверстия амплитуда импульса увеличивается и длительность уменьшается. Показано, что с увеличением коэффициента поглощения

гиперзвука амплитуда акустического импульса уменьшается, а длительность увеличивается. Рассмотренные особенности оптико-акустического возбуждения высокочастотных ПАВ Рэлея показывают, что диаграмма направленности такого источника может легко изменяться варьированием радиуса отверстия круглой формы и угла наклона призмы возбуждения, наложенной на поверхность твердого тела. Это позволяет диагностировать дефекты материалов, регистрируя временную форму оптико-акустического источника ПАВ. Изучение импульсных характеристик ультразвуковых сигналов позволяет исследовать частотные зависимости коэффициентов поглощения гиперзвука в твердых телах оптико-акустическим методом [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Tam, A.C. Pulsed – laser generation of ultrashort acoustic pulsed: Application for thin-film ultrasonic measurements / A.C. Tam // Appl. Phys. Lett. – 1984. – Vol. 45, № 5. – P. 510–512.
2. Лямшев, Л.М. Оптико-акустические источники звука / Л.М. Лямшев // Успехи физ. наук. – 1981. – Т.135, В.4. – С. 636–669.
3. *Experimental study of laser-generated shear waves using interferometry* / S.Y. Zang [et al.] // Res. Nondestr. Eval. – 1990. – Vol. 2. – P. 143–155.
4. Lin, H.N. Study of vibrational modes of gold nanostructures by picosecond ultrasonics / H.N. Lin, H.J. Maris, L.B. Freund // Appl. Phys. – 1993. – Vol. 73, № 2. – P. 37–45.
5. Буденков, Г.А. Наклонное излучение ультразвука электромагнитно-акустическим способом / Г.А. Буденков, В.Н. Квятковский, Ю.В. Петров // Дефектоскопия. – 1973. – № 1. – С. 57–66.
6. Гринченко, В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – Киев : Наукова думка, 1981. – 284 с.
7. Островская, Г.В. Эффективность преобразования световой энергии в акустическую при взаимодействии импульсного лазерного излучения с жидкой средой / Г.В. Островская // ЖТФ. – 2002. – Т. 72, В. 10. – С. 95–102.
8. Носов, В.В. Влияние процессов плавления и кристаллизации на форму оптоакустического сигнала при лазерном воздействии на сильно поглощающие конденсированные среды / В.В. Носов, В.И. Мажукин // Матем. моделирование. – 1994. – Т. 6, № 1. – С. 3–53.
9. Труэлл, Р.. Ультразвуковые методы в физике твердого тела / Р. Труэлл, Ч. Эльбаум, Б. Чик. – М. : Мир, 1972. – 307 с.
10. *Справочник по специальным функциям. С формулами, графиками и математическими таблицами*; под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. – М. : Наука, 1979. – 830 с.
11. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М. : Физматгиз, 1963. – 1100 с.

Поступила в редакцию 01.12.10.

УДК 530.145

О СТАЦИОНАРНОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В СЛУЧАЕ ПОТЕНЦИАЛА-РЯДА

В.Н. Капшай¹, Л.Д. Корсун²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

²Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, Гомель

THE STATIONARY PERTURBATION THEORY IN CASE OF A POTENTIAL-SERIES

V.N. Kapshai¹, L.D. Korsun²

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel

²P. Sukhoi State Technical University, Gomel

Процедура построения стационарной теории возмущений для уравнения Шредингера и вычисления поправок к спектру энергий и соответствующим волновым функциям реализована в случае потенциала, представленного в виде ряда по степеням малого параметра (потенциала-ряда). В качестве физического примера рассмотрено применение полученной схемы для ангармонического осциллятора.

Ключевые слова: стационарная теория возмущений, уравнение Шредингера, волновая функция, энергетический спектр, потенциал, поправка, ангармонический осциллятор.

The procedure for constructing of stationary perturbation theory for the Schrodinger equation and corrections to the energy spectrum and corresponding wave functions is implemented in case of the potential, represented in the form of a series in powers of a small parameter (potential-series). The application of the obtained scheme for the anharmonic oscillator is examined as a physical example.

Keywords: stationary perturbation theory, Schrödinger equation, wave function, energy spectrum, potential, correction, anharmonic oscillator.

Введение

Изучение большинства физических систем требует применения приближенных методов, как численных, так и аналитических. Одним из наиболее детально разработанных методов исследования не решаемых точно задач квантовой механики и теории поля является теория возмущений (ТВ) Рэлея – Шредингера [1], [2]. Стандартный случай теории возмущений соответствует слабому внешнему воздействию или слабому взаимодействию между частицами, когда для приближенного вычисления спектров и волновых функций полного гамильтониана используется малость возмущения «первого порядка» в гамильтониане. При этом поправки вычисляются последовательно: точно решается «невозмущенная» задача (нулевой порядок ТВ), затем для вычисления поправки порядка n необходимо предварительно найти все предыдущие порядки. При этом, если исследуемый эффект возникает именно в высших порядках, то рекуррентная схема становится неудобной, так как с ростом порядка объем вычислений возрастает. Следует ожидать, что особенно громоздкой рекуррентная схема окажется в случае, когда для «возмущения» порядок малости не фиксирован, например, когда потенциал имеет вид ряда по степеням малого параметра. Вместе с тем, именно такой случай

является исключительно важным в тех разделах квантовой теории, в которых сам оператор взаимодействия не является известным «а priori», а строится с помощью той или иной процедуры в виде степенного ряда. Еще одной проблемой стандартной теории возмущений является доказательство сходимости рядов ТВ и проблема сильной связи. Тем более сложной будет эта проблема в случае потенциала-ряда. Все эти соображения приводят к выводу о необходимости построения прозрачной схемы ТВ для возмущения, имеющего вид ряда по степеням малого параметра.

В настоящее время существует много попыток выйти за рамки стандартной ТВ, предложены различные модификации ТВ, как приспособленные для решения конкретных квантовомеханических и теоретико-полевых задач, так и носящие более общий характер. Например, в приложениях ТВ иногда используется вариант рекуррентной схемы, основанной на каноническом преобразовании волновой функции и гамильтониана: $\psi' = e^{iS}\psi$, $H' = e^{iS}He^{-iS}$, где оператор H' представляется в виде ряда [3], [4]. Такое преобразование широко применяется в релятивистской теории и носит название преобразования Фолди-Вутхойзена. В теории молекулярных спектров этот метод (метод контактных

преобразований) широко применяется для исследования колебательно-вращательной модели молекул [5].

Другим примером может служить ТВ, не использующая знание всего спектра невозмущенной задачи и объединяющая ТВ и различные вариационные методы [6], [7]. В литературе эти подходы известны как «логарифмическая теория возмущений» [8], [9], в которой осуществляется переход от одномерного уравнения Шредингера к нелинейному уравнению Риккати и вычисление коэффициентов ряда ТВ сводится к рекуррентным соотношениям, или как «метод нелинеаризации» [7], или как «метод Далгарно-Льюиса» [10]. Все эти методы находят широкое применение, например, в теории рассеяния частиц, и непрерывно развиваются [11].

Также в настоящее время существуют методы, позволяющие выйти за рамки обычной ТВ и исследовать предел сильной связи, например, вариационная теория возмущений (ВТВ) [12]–[14], в которой удается построить новое разложение, позволяющее существенно расширить возможности теории возмущений, например, анализировать предел сильной связи.

Данная работа посвящена построению явной, удобной для последующих применений процедуры вычисления поправок к спектру и волновым функциям, представляемым в виде рядов по малому параметру в случае, когда потенциал-ряд по этому параметру не зависит от полной энергии. Именно в виде степенных рядов получаются операторы взаимодействия в ковариантном одновременном подходе Логунова-Тавхелидзе в квантовой теории поля [15] и в подходе, основанном на шпурионной диаграммной технике Кадышевского [16]. Основной вопрос при этом – каким образом изменяются собственные значения и собственные векторы при изменении оператора, зависящего от некоторого параметра. С целью достижения полной прозрачности схемы построения регулярного метода вычисления поправок к основному вкладу, когда потенциал можно разложить в ряд по степеням малого параметра, в данной работе мы рассматриваем случай, когда основной гамильтониан H_0 имеет только дискретный спектр. Более общий случай гамильтониана H_0 , имеющего как дискретный, так и непрерывный спектр будет также рассмотрен отдельно.

1 Постановка задачи и первый порядок теории возмущений

Итак, рассмотрим стационарное уравнение Шредингера $H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$ с гамильтонианом, который можно представить в виде

$$H = H^{(0)} + \lambda V,$$

где λ – безразмерный малый параметр.

Предположим, что оператор $H^{(0)}$ (невозмущенный гамильтониан) имеет только дискретный спектр и его собственные значения $E_n^{(0)}$ и собственные функции $|\psi_n^{(0)}\rangle$ известны:

$$H^{(0)}|\psi_n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)}|\psi_n^{(0)}\rangle. \quad (1.1)$$

Оператор возмущения λV – небольшая поправка к $H^{(0)}$. Мы рассмотрим указанный во введении и представляющий особый интерес случай, когда оператор V является рядом по степеням малого вещественного параметра λ ($|\lambda| \ll 1$):

$$V = V^{(1)} + \lambda V^{(2)} + \lambda^2 V^{(3)} + \dots, \quad (1.2)$$

так, что оператор полной энергии будет иметь вид

$$H = H^{(0)} + \lambda V^{(1)} + \lambda^2 V^{(2)} + \lambda^3 V^{(3)} + \dots$$

Пусть состояние $|\psi_a^{(0)}\rangle = |a^{(0)}\rangle$ не вырождено, то есть уравнение

$$H^{(0)}|a^{(0)}\rangle = E_a^{(0)}|a^{(0)}\rangle \quad (1.3)$$

имеет только одно решение. Найдем поправки к волновой функции и энергии при отсутствии вырождения. Решения задачи

$$H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle \quad (1.4)$$

будем искать как «незначительно» модифицированные решения (1.1). Поскольку λ мало, можно считать, что E_a мало отличается от $E_a^{(0)}$, и возмущенные собственные значения можно искать в виде рядов по степеням малого параметра λ . То же можно сказать и о собственной функции $|a\rangle \equiv |\psi_a\rangle$. Тогда для решения задачи (1.4) или для краткости

$$H|a\rangle = E_a|a\rangle, \quad (1.5)$$

можно считать, что

$$E_a = E_a^{(0)} + \lambda \varepsilon_a^{(1)} + \lambda^2 \varepsilon_a^{(2)} + \lambda^3 \varepsilon_a^{(3)} + \dots, \quad (1.6)$$

а также, что

$$|a\rangle = |a^{(0)}\rangle + \lambda |a^{(1)}\rangle + \lambda^2 |a^{(2)}\rangle + \lambda^3 |a^{(3)}\rangle + \dots \quad (1.7)$$

Наша задача состоит в определении коэффициентов разложений (1.6) и (1.7) при условии, что оператор возмущения имеет вид (1.2).

Нормировка состояния $|a\rangle$ из уравнения (1.5) не определяется. Для дальнейших вычислений удобно зафиксировать нормировку вектора $|a\rangle$ с помощью условия

$$1 = \langle a^{(0)}|a\rangle = \langle a^{(0)}|a^{(0)}\rangle + \lambda \langle a^{(0)}|a^{(1)}\rangle + \lambda^2 \langle a^{(0)}|a^{(2)}\rangle + \dots$$

Это приводит к условиям ортогональности $\langle a^{(0)}|a^{(1)}\rangle = 0; \langle a^{(0)}|a^{(2)}\rangle = 0; \dots \langle a^{(0)}|a^{(n)}\rangle = 0; \dots$ (1.8)

Подставим представленные в виде рядов по степеням параметра λ потенциал, энергию и вектор состояния в уравнение Шредингера:

$$\left\{ (H^{(0)} - E_a^{(0)}) + \lambda(V^{(1)} - \varepsilon_a^{(1)}) + \lambda^2(V^{(2)} - \varepsilon_a^{(2)}) + \lambda^3(V^{(3)} - \varepsilon_a^{(3)}) + \dots \right\} \cdot \left[|a^{(0)}\rangle + \lambda|a^{(1)}\rangle + \lambda^2|a^{(2)}\rangle + \lambda^3|a^{(3)}\rangle + \dots \right] = 0. \quad (1.9)$$

Равенство (1.9) имеет место для любого значения λ , только если равны коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях λ . Из этого условия получается цепочка рекуррентных соотношений, позволяющая найти поправку заданного порядка:

$$\lambda^0: (H^{(0)} - E_a^{(0)})|a^{(0)}\rangle = 0; \quad (1.10)$$

$$\lambda^1: (H^{(0)} - E_a^{(0)})|a^{(1)}\rangle + (V^{(1)} - \varepsilon_a^{(1)})|a^{(0)}\rangle = 0; \quad (1.11)$$

$$\lambda^2: (H^{(0)} - E_a^{(0)})|a^{(2)}\rangle + (V^{(1)} - \varepsilon_a^{(1)})|a^{(1)}\rangle + (V^{(2)} - \varepsilon_a^{(2)})|a^{(0)}\rangle = 0; \quad (1.12)$$

$$\dots$$

$$\lambda^n: (H^{(0)} - E_a^{(0)})|a^{(n)}\rangle + (V^{(1)} - \varepsilon_a^{(1)})|a^{(n-1)}\rangle + \dots + (V^{(n)} - \varepsilon_a^{(n)})|a^{(0)}\rangle = 0. \quad (1.13)$$

При этом с самого начала фиксировано невозмущенное состояние, для которого вычисляются поправки, так как первое из этих уравнений совпадает с уравнением (1.3) невозмущенной задачи и его решение известно. Уравнение (1.11) вместе с условиями ортогональности (1.8) позволяет определить поправки первого порядка $\varepsilon_a^{(1)}$ и $|a^{(1)}\rangle$ к собственному значению (СЗ) и собственному вектору (СВ) соответственно.

Вначале умножим второе уравнение (1.11) слева на вектор $\langle a^{(0)}|$ и получим

$$\langle a^{(0)}|(H^{(0)} - E_a^{(0)})|a^{(1)}\rangle + \langle a^{(0)}|(V^{(1)} - \varepsilon_a^{(1)})|a^{(0)}\rangle = 0.$$

Первое слагаемое, очевидно, равно нулю, поскольку $\langle a^{(0)}|(H^{(0)} - E_a^{(0)}) = 0$. Учитывая также, что $\langle a^{(0)}|a^{(0)}\rangle = 1$, имеем следующее выражение для первой поправки к энергии:

$$\varepsilon_a^{(1)} = \langle a^{(0)}|V^{(1)}|a^{(0)}\rangle. \quad (1.14)$$

Замечательно, что для определения $\varepsilon_a^{(1)}$ необходимо знать только невозмущенный вектор $|a^{(0)}\rangle$ и первый порядок гамильтониана взаимодействия. Подчеркнем также, что определенная на самом первом шаге величина $\varepsilon_a^{(1)}$ будет входить во многие последующие формулы. Вернемся к уравнению (1.11), в котором величина $\varepsilon_a^{(1)}$ уже известна, и теперь надо определить вектор $|a^{(1)}\rangle$. Для этого домножим уравнение (1.11) слева на вектор $\langle m^{(0)}|$ ($m \neq a$):

$$\langle m^{(0)}|(H^{(0)} - E_a^{(0)})|a^{(1)}\rangle + \langle m^{(0)}|(V^{(1)} - \varepsilon_a^{(1)})|a^{(0)}\rangle = 0.$$

Учитывая, что

$$\langle m^{(0)}|(H^{(0)} - E_a^{(0)}) = \langle m^{(0)}|(E_m^{(0)} - E_a^{(0)}),$$

находим скалярные произведения

$$\langle m^{(0)}|a^{(1)}\rangle = (E_a^{(0)} - E_m^{(0)})^{-1} \langle m^{(0)}|(V^{(1)} - \varepsilon_a^{(1)})|a^{(0)}\rangle = 0; \quad (1.15)$$

$$m \neq a.$$

Все векторы $|m^{(0)}\rangle$, $m = 1, 2, 3, \dots, a, \dots$ образуют полный базисный набор, а значит

$$|a^{(1)}\rangle = \sum_m |m^{(0)}\rangle \langle m^{(0)}|a^{(1)}\rangle = \sum_{m \neq a} |m^{(0)}\rangle \langle m^{(0)}|a^{(1)}\rangle + |a^{(0)}\rangle \langle a^{(0)}|a^{(1)}\rangle. \quad (1.16)$$

Коэффициенты разложения в (1.16) определены в (1.15), за исключением коэффициента в последнем слагаемом. Вспомним, однако, что последний коэффициент уже был выбран ранее в (1.8) равным нулю. Итак,

$$|a^{(1)}\rangle = \sum_{m \neq a} |m^{(0)}\rangle (E_a^{(0)} - E_m^{(0)})^{-1} \cdot \langle m^{(0)}|(V^{(1)} - \varepsilon_a^{(1)})|a^{(0)}\rangle. \quad (1.17)$$

Этим нахождение величин первого порядка ТВ завершено. Подчеркнем, что для вычисления первой поправки к собственному вектору необходимо знать уже все СВ и СЗ невозмущенной задачи.

2 Поправки высших порядков

Для вычисления поправок первого порядка к СЗ и СВ приведенных формул (1.14) и (1.17) вполне достаточно. Однако для целей вычисления следующих порядков удобно представить эти формулы в несколько другом виде. Учтем, что

$$(E_a^{(0)} - E_m^{(0)})^{-1} |m^{(0)}\rangle = (E_a^{(0)} - H^{(0)})^{-1} |m^{(0)}\rangle,$$

$$\langle m^{(0)}|(E_a^{(0)} - E_m^{(0)})^{-1} = \langle m^{(0)}|(E_a^{(0)} - H^{(0)})^{-1},$$

поэтому можно записать

$$\begin{aligned} & \sum_{m \neq a} |m^{(0)}\rangle (E_a^{(0)} - E_m^{(0)})^{-1} \langle m^{(0)}| = \\ & = (E_a^{(0)} - H^{(0)})^{-1} \sum_{m \neq a} |m^{(0)}\rangle \langle m^{(0)}| = \\ & = \sum_{m \neq a} |m^{(0)}\rangle \langle m^{(0)}|(E_a^{(0)} - H^{(0)})^{-1}. \end{aligned}$$

Операторы

$$P_a^{(0)} = |a^{(0)}\rangle \langle a^{(0)}|; \quad Q_a^{(0)} = 1 - |a^{(0)}\rangle \langle a^{(0)}|,$$

являются, соответственно, операторами проектирования на вектор $|a^{(0)}\rangle$ и на подпространство, ортогональное к $|a^{(0)}\rangle$. Они удовлетворяют очевидным соотношениям

$$(P_a^{(0)})^2 = P_a^{(0)}; \quad (Q_a^{(0)})^2 = Q_a^{(0)}; \quad P_a^{(0)}Q_a^{(0)} = 0. \quad (2.1)$$

Кроме того, поскольку система собственных векторов свободного гамильтониана полна, то есть $\sum_m |m^{(0)}\rangle \langle m^{(0)}| = 1$, имеем

$$\sum_{m \neq a} |m^{(0)}\rangle \langle m^{(0)}| = Q_a^{(0)}.$$

Итак, фигурирующий в (1.17) оператор есть

$$\begin{aligned} \sum_{m \neq a} |m^{(0)}\rangle (E_a^{(0)} - E_m^{(0)})^{-1} \langle m^{(0)}| &= \\ = (E_a^{(0)} - H^{(0)})^{-1} Q_a^{(0)} &= Q_a^{(0)} (E_a^{(0)} - H^{(0)})^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, гриновский оператор

$$G^{(0)}(E_a^{(0)}) = (E_a^{(0)} - H^{(0)})^{-1}$$

коммутирует с оператором проектирования $Q_a^{(0)}$. Спроектированный на ортогональное к вектору $|a^{(0)}\rangle$ подпространство гриновский оператор удовлетворяет равенству:

$G^{(0)}(E_a^{(0)})Q_a^{(0)} = Q_a^{(0)}G^{(0)}(E_a^{(0)}) = Q_a^{(0)}G^{(0)}(E_a^{(0)})Q_a^{(0)}$, которое легко получить, используя (2.1). Таким образом, решение (1.17) уравнения (1.11) можно представить в виде

$$\begin{aligned} |a^{(1)}\rangle &= Q_a^{(0)} G^{(0)}(E_a^{(0)}) (V^{(1)} - \varepsilon_a^{(1)}) |a^{(0)}\rangle = \\ &= G^{(0)}(E_a^{(0)}) Q_a^{(0)} (V^{(1)} - \varepsilon_a^{(1)}) |a^{(0)}\rangle. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Получим этот результат другим способом, который будет пригоден и для отыскания следующих порядков. Уравнение (1.11) есть частный случай неоднородного уравнения

$$(E_a^{(0)} - H^{(0)}) |\psi\rangle = |f\rangle, \quad (2.3)$$

в котором вектор $|f\rangle$ известен, а искомым вектор $|\psi\rangle$ подчиняется дополнительному условию $\langle a^{(0)} | \psi \rangle = 0$. Решением уравнения (2.3) является

$$|\psi\rangle = (E_a^{(0)} - H^{(0)})^{-1} |f\rangle + C |a^{(0)}\rangle,$$

где второе слагаемое, содержащее произвольную константу C , есть решение однородного уравнения. Эту константу выберем так, чтобы выполнялось условие

$$0 = \langle a^{(0)} | \psi \rangle = \langle a^{(0)} | (E_a^{(0)} - H^{(0)})^{-1} |f\rangle + C,$$

значит

$$C = (-1) \langle a^{(0)} | (E_a^{(0)} - H^{(0)})^{-1} |f\rangle,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= (E_a^{(0)} - H^{(0)})^{-1} |f\rangle - |a^{(0)}\rangle \cdot \\ &\cdot \langle a^{(0)} | (E_a^{(0)} - H^{(0)})^{-1} |f\rangle. \end{aligned}$$

Другими словами,

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= Q_a^{(0)} (E_a^{(0)} - H^{(0)})^{-1} |f\rangle = \\ &= Q_a^{(0)} G^{(0)}(E_a^{(0)}) |f\rangle. \end{aligned} \quad (2.4)$$

При учете явного вида $|f\rangle$ в уравнении (1.11), получаем

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= Q_a^{(0)} (E_a^{(0)} - H^{(0)})^{-1} (V^{(1)} - \varepsilon_a^{(1)}) |a^{(0)}\rangle = \\ &= Q_a^{(0)} G^{(0)}(E_a^{(0)}) (V^{(1)} - \varepsilon_a^{(1)}) |a^{(0)}\rangle, \end{aligned}$$

что совпадает с (2.2).

Дальнейшее решение уравнений цепочки (1.10)–(1.13) осуществляется последовательно. Домножая уравнение (1.12) на вектор $\langle a^{(0)} |$ слева, получаем

$$\begin{aligned} \langle a^{(0)} | (V^{(1)} - \varepsilon_a^{(1)}) |a^{(1)}\rangle + \\ + \langle a^{(0)} | (V^{(2)} - \varepsilon_a^{(2)}) |a^{(0)}\rangle = 0, \end{aligned}$$

откуда, при учете (1.8), ясно, что вторая поправка к энергии есть

$$\varepsilon_a^{(2)} = \langle a^{(0)} | (V^{(1)}) |a^{(1)}\rangle + \langle a^{(0)} | (V^{(2)}) |a^{(0)}\rangle.$$

Теперь, уже определив $\varepsilon_a^{(2)}$, замечаем, что уравнение (1.12) имеет вид (2.3), где искомым вектор $|\psi\rangle = |a^{(2)}\rangle$ также подчиняется дополнительному условию $\langle a^{(0)} | \psi \rangle = \langle a^{(0)} | a^{(2)} \rangle = 0$, а правая часть равна

$$|f^{(2)}\rangle = (V^{(1)} - \varepsilon_a^{(1)}) |a^{(1)}\rangle + (V^{(2)} - \varepsilon_a^{(2)}) |a^{(0)}\rangle.$$

Значит, согласно (2.4), его решение есть

$$\begin{aligned} |a^{(2)}\rangle &= Q_a^{(0)} G^{(0)}(E_a^{(0)}) |f^{(2)}\rangle = \\ &= Q_a^{(0)} G^{(0)}(E_a^{(0)}) [(V^{(1)} - \varepsilon_a^{(1)}) |a^{(1)}\rangle + \\ &+ (V^{(2)} - \varepsilon_a^{(2)}) |a^{(0)}\rangle]. \end{aligned}$$

Учитывая (2.2), мы также можем записать

$$\begin{aligned} |a^{(2)}\rangle &= Q_a^{(0)} G^{(0)}(E_a^{(0)}) (V^{(2)} - \varepsilon_a^{(2)}) |a^{(0)}\rangle + \\ &+ Q_a^{(0)} G^{(0)}(E_a^{(0)}) (V^{(1)} - \varepsilon_a^{(1)}) \cdot \\ &\cdot Q_a^{(0)} G^{(0)}(E_a^{(0)}) (V^{(1)} - \varepsilon_a^{(1)}) |a^{(0)}\rangle. \end{aligned}$$

Продолжая рекуррентные выкладки, т.е. переходя к последующим уравнениям системы (1.10)–(1.13), можно вычислить поправки более высоких порядков. При условии, что уже найдены предыдущие $(n-1)$ поправок к энергии и волновой функции, для n -го порядка можем написать

$$\begin{aligned} \varepsilon_a^{(n)} &= \langle a^{(0)} | V^{(n)} |a^{(0)}\rangle + \\ &+ \langle a^{(0)} | V^{(n-1)} |a^{(1)}\rangle + \dots + \langle a^{(0)} | V^{(1)} |a^{(n-1)}\rangle \end{aligned} \quad (2.5)$$

для энергии и затем

$$\begin{aligned} |a^{(n)}\rangle &= Q_a^{(0)} G^{(0)}(E_a^{(0)}) [(V^{(n)} - \varepsilon_a^{(n)}) |a^{(0)}\rangle + \\ &+ (V^{(n-1)} - \varepsilon_a^{(n-1)}) |a^{(1)}\rangle + \dots + (V^{(1)} - \varepsilon_a^{(1)}) |a^{(n-1)}\rangle]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

для волновой функции.

Этими формулами нахождение всех порядков теории возмущений, фактически завершено. Посмотрим, однако, более внимательно на полученные поправки к энергии и волновой функции. Для этого выпишем полученные для них ряды, используя формулы (2.5) и (2.6), а также определения (1.6) и (1.7):

$$\begin{aligned} \Delta E_a = E_a - E_a^{(0)} &= \lambda \varepsilon_a^{(1)} + \lambda^2 \varepsilon_a^{(2)} + \lambda^3 \varepsilon_a^{(3)} + \dots = \\ &= \lambda \langle a^{(0)} | V^{(1)} | a^{(0)} \rangle + \\ &+ \lambda^2 \left(\langle a^{(0)} | V^{(2)} | a^{(0)} \rangle + \langle a^{(0)} | V^{(1)} | a^{(1)} \rangle \right) + \\ &+ \lambda^3 \left(\langle a^{(0)} | V^{(3)} | a^{(0)} \rangle + \langle a^{(0)} | V^{(2)} | a^{(1)} \rangle + \right. \quad (2.7) \\ &\quad \left. + \langle a^{(0)} | V^{(1)} | a^{(2)} \rangle \right) + \dots + \\ &+ \lambda^n \left(\langle a^{(0)} | V^{(n)} | a^{(0)} \rangle + \langle a^{(0)} | V^{(n-1)} | a^{(1)} \rangle + \dots \right. \\ &\quad \left. + \langle a^{(0)} | V^{(1)} | a^{(n-1)} \rangle \right) + \dots \end{aligned}$$

Аналогично, для поправки к волновой функции имеем

$$\begin{aligned} |\Delta \psi_a\rangle &= |\psi_a\rangle - |\psi_a^{(0)}\rangle = \\ &= \lambda |a^{(1)}\rangle + \lambda^2 |a^{(2)}\rangle + \lambda^3 |a^{(3)}\rangle + \dots = \\ &= \lambda Q_a^{(0)} G^{(0)}(E_a^{(0)}) \left[(V^{(1)} - \varepsilon_a^{(1)}) |a^{(0)}\rangle \right] + \quad (2.8) \\ &+ \lambda^2 Q_a^{(0)} G^{(0)}(E_a^{(0)}) \left[(V^{(1)} - \varepsilon_a^{(1)}) |a^{(1)}\rangle + \right. \\ &\quad \left. + (V^{(2)} - \varepsilon_a^{(2)}) |a^{(0)}\rangle \right] + \\ &+ \lambda^3 Q_a^{(0)} G^{(0)}(E_a^{(0)}) \left[(V^{(1)} - \varepsilon_a^{(1)}) |a^{(2)}\rangle + \right. \\ &\quad \left. + (V^{(2)} - \varepsilon_a^{(2)}) |a^{(1)}\rangle + (V^{(3)} - \varepsilon_a^{(3)}) |a^{(0)}\rangle \right] + \\ &+ \dots + \lambda^n Q_a^{(0)} G^{(0)}(E_a^{(0)}) \left[(V^{(1)} - \varepsilon_a^{(1)}) |a^{(n-1)}\rangle + \right. \\ &\quad \left. + (V^{(2)} - \varepsilon_a^{(2)}) |a^{(n-2)}\rangle + \dots + (V^{(n)} - \varepsilon_a^{(n)}) |a^{(0)}\rangle \right] + \dots \end{aligned}$$

Теперь заметим, что ряды для ΔE_a и $|\Delta \psi_a\rangle$ могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta E_a &= \langle a^{(0)} | (\lambda V^{(1)} + \lambda^2 V^{(2)} + \dots) | a^{(0)} \rangle + \quad (2.9) \\ &+ \langle a^{(0)} | \lambda (\lambda V^{(1)} + \lambda^2 V^{(2)} + \dots) | a^{(1)} \rangle + \\ &+ \langle a^{(0)} | \lambda^2 (\lambda V^{(1)} + \lambda^2 V^{(2)} + \dots) | a^{(2)} \rangle + \dots = \\ &= \langle a^{(0)} | \lambda V (|a^{(0)}\rangle + \lambda |a^{(1)}\rangle + \lambda^2 |a^{(2)}\rangle + \dots) = \\ &= \langle a^{(0)} | \lambda V (|\psi_a^{(0)}\rangle + |\Delta \psi_a\rangle). \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} |\Delta \psi_a\rangle &= \lambda Q_a^{(0)} G^{(0)}(E_a^{(0)}) (V^{(1)} - \varepsilon_a^{(1)}) \cdot \\ &\quad \cdot (|a^{(0)}\rangle + \lambda |a^{(1)}\rangle + \dots) + \\ &+ \lambda^2 Q_a^{(0)} G^{(0)}(E_a^{(0)}) (V^{(2)} - \varepsilon_a^{(2)}) \cdot \\ &\quad \cdot (|a^{(0)}\rangle + \lambda |a^{(1)}\rangle + \lambda^2 |a^{(2)}\rangle + \dots) + \quad (2.10) \\ &+ \lambda^3 Q_a^{(0)} G^{(0)}(E_a^{(0)}) (V^{(3)} - \varepsilon_a^{(3)}) \cdot \\ &\quad \cdot (|a^{(0)}\rangle + \lambda |a^{(1)}\rangle + \lambda^2 |a^{(2)}\rangle + \dots) + \dots \\ &= Q_a^{(0)} G^{(0)}(E_a^{(0)}) \{ (\lambda V - \Delta E_a) (|\psi_a^{(0)}\rangle + |\Delta \psi_a\rangle) \}. \end{aligned}$$

Таким образом, в данной работе представлена процедура вычисления поправок к спектру и волновым функциям в случае, когда потенциал задан в виде ряда по малому параметру и не зависит от полной энергии. Мы уже упоминали во

введении, что именно в виде рядов по степеням малого параметра строятся потенциалы в ковариантных трехмерных подходах в квантовой теории поля. Кроме того, когда даже в квантовой механике рассматривается случай потенциала $V = V(E; \vec{x}; \dots)$, зависящего от энергии, мы неизбежно приходим при его исследовании по ТВ к выражениям типа

$$\lambda V(E^{(0)} + \lambda E^{(1)} + \lambda^2 E^{(2)} + \dots; \vec{x}; \dots),$$

которые в духе ТВ следует понимать как разложения, содержащие все натуральные степени λ :

$$\lambda V = \lambda V(E^{(0)}; \vec{x}; \dots) + \lambda^2 E^{(1)} \frac{\partial}{\partial E^{(0)}} V(E^{(0)}; \vec{x}; \dots) + \dots$$

Именно поэтому мы выписали формулы (2.7)–(2.10), определяющие ΔE_a и $|\Delta \psi_a\rangle$ так подробно.

3 Примеры

1. Наиболее часто используется вариант ТВ, когда потенциал считается величиной фиксированного (первого) порядка малости [1]. Ответы для этого случая могут быть найдены из (2.7) и (2.8), если положить:

$$\lambda V = \lambda V^{(1)}, \quad V^{(2)} = V^{(3)} = \dots = 0. \quad (3.1)$$

Тогда поправка к энергии имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta E_a &= E_a - E_a^{(0)} = \\ &= \lambda E_a^{(1)} + \lambda^2 E_a^{(2)} + \dots + \lambda^n E_a^{(n)} + \dots, \quad (3.2) \end{aligned}$$

где, учитывая, что $|\varphi^{(0)}\rangle = |a^{(0)}\rangle = |\psi^{(0)}\rangle$, получим

$$\begin{aligned} E_a^{(1)} &= \langle \varphi^{(0)} | V | \varphi^{(0)} \rangle; \\ E_a^{(2)} &= \langle \varphi^{(0)} | V | \varphi^{(1)} \rangle; \\ &\dots \\ E_a^{(n)} &= \langle \varphi^{(0)} | V | \varphi^{(n-1)} \rangle. \end{aligned}$$

Поправка к волновой функции:

$$|\Delta \psi_a\rangle = \lambda |\varphi^{(1)}\rangle + \lambda^2 |\varphi^{(2)}\rangle + \dots + \lambda^n |\varphi^{(n)}\rangle + \dots, \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} |\varphi^{(1)}\rangle &= Q_a^{(0)} G^{(0)}(E_a^{(0)}) \left[(V - E_a^{(1)}) | \varphi^{(0)} \rangle \right]; \\ |\varphi^{(2)}\rangle &= Q_a^{(0)} G^{(0)}(E_a^{(0)}) \left[(V - E_a^{(1)}) | \varphi^{(1)} \rangle + \right. \\ &\quad \left. + (0 - E_a^{(2)}) | \varphi^{(0)} \rangle \right]; \\ &\dots \\ |\varphi^{(n)}\rangle &= Q_a^{(0)} G^{(0)}(E_a^{(0)}) \left[(V - E_a^{(1)}) | \varphi^{(n-1)} \rangle + \dots \right. \\ &\quad \left. + (0 - E_a^{(n)}) | \varphi^{(0)} \rangle \right]. \end{aligned}$$

При этом все $E_a^{(n)}$ и $|\varphi^{(n)}\rangle$ не зависят от λ .

2. Можно построить вариант ТВ, когда потенциал, например, имеет вид:

$$\lambda V = \xi^k W^{(k)}.$$

Тогда в соответствии с формулами (2.7) и (2.8), учитывая что

$$W^{(1)} = W^{(2)} = \dots = W^{(k-1)} = W^{(k+1)} = \dots = 0, \\ |v^{(0)}\rangle = |a^{(0)}\rangle = |\psi^{(0)}\rangle,$$

получим поправку к энергии

$$\Delta E_a = \xi^k \varepsilon_a^{(k)} + \xi^{2k} \varepsilon_a^{(2k)} + \\ + \xi^{3k} \varepsilon_a^{(3k)} + \dots + \xi^{nk} \varepsilon_a^{(nk)} + \dots = \\ = \xi^k \langle v^{(0)} | W^{(k)} | v^{(0)} \rangle + \xi^{2k} \langle v^{(0)} | W^{(k)} | v^{(k)} \rangle + \\ + \xi^{3k} \langle v^{(0)} | W^{(k)} | v^{(2k)} \rangle + \\ + \dots + \xi^{nk} \langle v^{(0)} | W^{(k)} | v^{(n-1)k} \rangle + \dots \quad (3.4)$$

Поправка к волновой функции будет иметь вид

$$|\Delta \psi_a\rangle = \xi^k |v^{(k)}\rangle + \xi^{2k} |v^{(2k)}\rangle + \\ + \xi^{3k} |v^{(3k)}\rangle + \dots + \xi^{nk} |v^{(nk)}\rangle + \dots, \quad (3.5)$$

где

$$|v^{(1)}\rangle = |v^{(2)}\rangle = \dots = |v^{(k-1)}\rangle = 0; \\ |v^{(k)}\rangle = Q_a^{(0)} G^{(0)}(E_a^{(0)}) [(W^{(k)} - \varepsilon_a^{(k)}) |v^{(0)}\rangle]; \\ |v^{(k+1)}\rangle = |v^{(k+2)}\rangle = \dots = |v^{(2k-1)}\rangle = 0; \\ |v^{(2k)}\rangle = Q_a^{(0)} G^{(0)}(E_a^{(0)}) [(0 - \varepsilon_a^{(2k)}) |v^{(0)}\rangle + \\ + (W^{(k)} - \varepsilon_a^{(k)}) |v^{(k)}\rangle]; \\ \dots \\ |v^{(3k)}\rangle = Q_a^{(0)} G^{(0)}(E_a^{(0)}) [(0 - \varepsilon_a^{(3k)}) |v^{(0)}\rangle + \\ + (0 - \varepsilon_a^{(2k)}) |v^{(k)}\rangle + (W^{(k)} - \varepsilon_a^{(k)}) |v^{(2k)}\rangle]; \\ \dots \\ |v^{(nk)}\rangle = Q_a^{(0)} G^{(0)}(E_a^{(0)}) [(0 - \varepsilon_a^{(nk)}) |v^{(0)}\rangle + \\ + (0 - \varepsilon_a^{(n-1)k}) |v^{(k)}\rangle + \dots + \\ + (W^{(k)} - \varepsilon_a^{(k)}) |v^{(n-1)k}\rangle]; \\ \dots$$

С другой стороны, результаты (3.4) и (3.5) можно также получить, если воспользоваться формулами (3.1)–(3.3) и положить в (3.1)

$$\lambda = \xi^k, \quad V^{(1)} = W^{(k)},$$

обозначив поправки к СЗ и СВ следующим образом

$$E_a^{(1)} = \varepsilon_a^k, E_a^{(2)} = \varepsilon_a^{2k}, \dots, E_a^{(n)} = \varepsilon_a^{nk}, \\ |\varphi^{(0)}\rangle = |v^{(0)}\rangle, |\varphi^{(1)}\rangle = |v^{(k)}\rangle, \dots, |\varphi^{(n)}\rangle = |v^{(nk)}\rangle.$$

3. Интересно с изложенных позиций рассмотреть случай применения ТВ в отсутствие вырождения к квантовому ангармоническому осциллятору, для которого уравнение Шредингера имеет вид

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m_0 \omega_0^2 x^2}{2} + W(\lambda, x) \right) |\psi_n\rangle = E |\psi_n\rangle. \quad (3.6)$$

Ограничимся рассмотрением потенциалов вида

$$W(\lambda, x) = x^2 \mathcal{G}(\lambda x), \quad (\mathcal{G}(0) = 0),$$

для которых

$$W(\lambda, x) = x^2 \mathcal{G}(0) + x^2 \left[\lambda x \mathcal{G}'(0) + \lambda^2 x^2 \frac{\mathcal{G}''(0)}{2!} + \dots \right].$$

Введем замену $\omega_0'^2 = \omega_0^2 + \frac{2}{m_0} \mathcal{G}(0)$. Тогда

уравнение (3.6) примет вид

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m_0 \omega_0'^2 x^2}{2} + V(\lambda, x) \right) |\psi_n\rangle = E |\psi_n\rangle.$$

Здесь в качестве оператора возмущения взята ангармоническая поправка к потенциальной энергии в виде

$$V(\lambda, x) = \lambda V = \lambda \mathcal{G}'(0) x^3 + \lambda^2 \frac{\mathcal{G}''(0)}{2!} x^4 + \dots,$$

при этом в соответствии с (1.2):

$$V^{(1)} = \mathcal{G}'(0) x^3, \quad V^{(2)} = \frac{\mathcal{G}''(0)}{2!} x^4, \dots$$

Прежде всего отметим, что точное решение уравнения (3.6), найденное методом теории возмущений, близко к состояниям $|\psi_n^{(0)}\rangle$ линейного квантового гармонического осциллятора. Найдем поправки к энергетическому спектру в соответствии с формулами (2.5):

$$\Delta E_n = E_n - E_n^{(0)} = \lambda \varepsilon_n^{(1)} + \lambda^2 \varepsilon_n^{(2)} + \dots$$

Для упрощения введем новую переменную

$$\zeta = \frac{x}{x_0}, \quad \text{где } x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m_0 \omega_0'}} - \text{ безразмерная величина.}$$

После подстановки решение соответствующего (3.6) «невозмущенного» уравнения примет вид

$$\psi_n^{(0)}(\zeta) = e^{-\frac{1}{2}\zeta^2} \frac{H_n(\zeta)}{\sqrt{2^n n! x_0 \sqrt{\pi}}}; \quad \langle \psi_n^{(0)} | \psi_m^{(0)} \rangle = \delta_{nm},$$

где $H_n(\zeta)$ – полиномы Чебышева-Эрмита.

В соответствии с (2.5) поправки для энергии имеют вид

$$\varepsilon_n^{(1)} = \langle \psi_n^{(0)} | V^{(1)} | \psi_n^{(0)} \rangle = 0, \\ \varepsilon_n^{(2)} = \langle \psi_n^{(0)} | V^{(1)} | \psi_n^{(1)} \rangle + \langle \psi_n^{(0)} | V^{(2)} | \psi_n^{(0)} \rangle,$$

где

$$\langle \psi_n^{(0)} | V^{(2)} | \psi_n^{(0)} \rangle = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{G}''(0)}{2!} \left(\frac{\hbar}{m_0 \omega_0'} \right)^2 \left(n^2 + n + \frac{1}{2} \right), \\ \langle \psi_n^{(0)} | V^{(1)} | \psi_n^{(1)} \rangle = -(\mathcal{G}'(0))^2 \left(\frac{\hbar}{m_0 \omega_0'} \right)^2 \cdot \\ \cdot \left(\frac{15}{4 m_0 \omega_0'^2} \left(n^2 + n + \frac{11}{30} \right) \right).$$

Приближенное выражение для уровней энергии ангармонического осциллятора будет

$$E_n = \hbar \omega_0' \left(n + \frac{1}{2} \right) - \\ - \lambda^2 \left(\frac{\hbar}{m_0 \omega_0'} \right)^2 \left(\frac{15 (\mathcal{G}'(0))^2}{4 m_0 \omega_0'^2} \left(n^2 + n + \frac{11}{30} \right) - \right.$$

$$-\frac{3}{2} \frac{g''(0)}{2!} \left(n^2 + n + \frac{1}{2} \right) + \dots$$

Определение энергетического спектра ангармонического осциллятора другими методами [17] требует проведения более громоздкой процедуры вычислений.

Заключение

В данной работе представлены результаты вычисления явного вида поправок к спектру энергий и соответствующим волновым функциям в стационарной теории возмущений для уравнения Шредингера в случае потенциала-ряда. Изложенная процедура вычисления поправок позволяет сократить и систематизировать объем вычислений, который обычно возрастает с ростом порядка стандартной теории возмущений. С целью максимального упрощения схемы мы рассмотрели случай только дискретного спектра гамильтониана H_0 , не зависящего от энергии. Более сложные случаи, а именно, когда гамильтониан H_0 имеет как дискретный, так и непрерывный спектр или когда присутствует вырождение, будут рассмотрены отдельно. Также дополнительной сложностью является возможная зависимость всех слагаемых ряда от энергии системы. Учет и этой зависимости мы предполагаем рассмотреть в последующем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мессиа, А. Квантовая механика, Т. 1. / А. Мессиа. – М. : Наука, 1978.
2. Като, Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. – М. : Наука, 1972.
3. Бьеркен, Дж.Д. Релятивистская квантовая теория. Ч. 1. / Дж.Д. Бьеркен, С.Д. Дрелл. – М. : Наука, 1978.
4. Ициксон, К. Квантовая теория поля. Т. 1, 2. / К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер. – М. : Мир, 1984.
5. Тютчев, Вл.Г. Эффективные гамильтонианы // Внутримолекулярные взаимодействия и инфракрасные спектры атмосферных газов. – Томск, 1975. – С. 3–46.

6. Поликанов, В.С. К нерелятивистской теории возмущений для дискретного спектра / В.С. Поликанов // ЖЭТФ. – 1967. – Т. 52. – Вып. 5. – С. 1326.

7. Турбинер, А.В. Задача о спектре в квантовой механике и процедура «нелинеаризации» / А.В. Турбинер // УФН. – 1984. – Т. 144. – Вып. 1. – С. 35.

8. Логарифмическая теория возмущений и ее применение к эффекту итарка в атоме водорода / С.П. Аллилуев [и др.] // ЖЭТФ. – 1982. – Т. 82. – Вып. 1. – С. 77.

9. Mei, W.N. Higher-order corrections to the excited states using the logarithmic perturbation method / W.N. Mei, D.S.Chuu // Phys.Rev. A, 1998. – Vol. 58. – № 1. – P. 713.

10. Aharonov, Y. A New Approach to Perturbation Theory / Y. Aharonov, C.K. Au // Phys. Rev. Lett. – 1979. – Vol. 42. – P. 1582.

11. Yahiaoui, S.-A. The effective potential and resummation procedure to multidimensional complex cubic potentials for weak and strong-coupling / S.-A. Yahiaoui, O. Cherroud, M.Bentaiba // J. Math. Phys. – 2007. – 48. – P. 113503.

12. Solovtsov, I.L. New expansion in QCD / I.L. Solovtsov // Phys. Lett., 1994. – B327. – P. 335.

13. Korsun, L.D. Variational perturbation theory: the φ^{2k} -oscillator / L.D. Korsun, A.N. Sissakian, I.L. Solovtsov // Teor. Mat. Fiz. – 1992. – Vol. 90. – P. 37–54.

14. Korsun, L.D. φ^{2k} -oscillator in the strong coupling limit / L.D. Korsun, A.N. Sissakian, I.L. Solovtsov // Int. J. Mod. Phys. A. – 1993. – Vol. 8. – P. 5129–5140.

15. Logunov, A.A. Quasi-optical approach in quantum field theory / A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze // Nuovo Cimento. – 1963. – Vol. 29. – P. 380–399.

16. Kadyshevsky, V.G. Quasipotential type equation for the relativistic scattering amplitude / V.G. Kadyshevsky // Nucl. Phys. – 1968. – Vol. B6, № 1. – P. 125–148.

17. Соколов, А.А. Квантовая механика / А.А. Соколов, И.М. Тернов, В.Ч. Жуковский. – М. : Наука, 1979.

Поступила в редакцию 14.02.11.

УДК 621.373.826

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА УПРАВЛЯЕМОГО ТЕРМОРАСКАЛЫВАНИЯ ХРУПКИХ НЕМЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТОКА ГОРЯЧЕГО ВОЗДУХА

Ю.В. Никитюк, В.Ф. Шолох

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

RESEARCH OF THE PROCESS OF OPERATED THERMOSPLITTING OF FRAGILE NONMETALLIC MATERIALS UNDER THE INFLUENCE OF THE STREAM OF HOT AIR

Yu.V. Nikitjuk, V.F. Sholoh

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Представлены результаты исследования процесса резки хрупких неметаллических материалов путем воздействия на материал направленного потока горячего воздуха и хладагента. Для решения задач термоупругости был использован метод конечных элементов. Определены особенности пространственной локализации термоупругих полей и выявлен механизм формирования разделяющей трещины.

Ключевые слова: *поток горячего воздуха, стекло, трещина.*

The paper presents the results of research of the process of cutting of fragile nonmetallic materials by the influence of the directed stream of hot air and coolant. The finite element method was used to decide the problems of thermo elasticity. The features of spatial localization of thermo elastic fields are defined and the mechanism of dividing crack formation is revealed.

Keywords: *hot air jet, glass, crack.*

Введение

Разделение хрупких неметаллических материалов является сложной и важной задачей. В настоящее время в промышленности используются методы разделения, которые можно поделить на две группы – механические и методы с использованием лазерного излучения.

К первой группе относятся резка алмазными пилами и скрайбирование твердосплавными резцами. Использование этих методов разделения хрупких неметаллических материалов сопряжено с необходимостью дополнительной обработки, которая обусловлена низким качеством поверхностей разделения.

Ко второй группе относятся лазерная резка испарением, лазерное скрайбирование и лазерное термораскалывание [1]. Лазерная резка испарением материала является энергоемким процессом и не отличается высокой точностью обработки. Лазерное скрайбирование характеризуется низким качеством кромок обрабатываемых изделий [2]. Указанные недостатки не свойственны методам лазерного термораскалывания, среди которых наиболее эффективным является управляемое лазерное термораскалывание [3]. Отличительная особенность этого метода заключается в том, что разделение материала происходит вследствие образования трещины, формируемой в результате локального лазерного нагрева материала в сочетании с последующим

охлаждением зоны нагрева. К основным преимуществам управляемого лазерного термораскалывания относятся высокая точность и безотходность разделения, а также высокая скорость обработки.

Существенным недостатком технологий лазерного термораскалывания является высокая стоимость используемого лазерного оборудования. Таким образом, является актуальной разработка новых экономичных вариантов технологии разделения материалов методами термораскалывания. При этом среди альтернативных источников нагрева, которые могут обеспечить необходимое для термораскалывания локальное повышение температуры обрабатываемой поверхности, вызывают интерес устройства для формирования направленных потоков горячего воздуха.

Так, авторами работ [4]–[5] были проведены исследования процесса термораскалывания силикатных стекол под действием потока горячего воздуха. Однако ими был исследован вариант технологии термораскалывания, использующий для формирования термоиндуцированной трещины только локальный нагрев материала.

В данной работе проведены исследования процесса термораскалывания хрупких неметаллических материалов под действием потока горячего воздуха в сочетании с последующим охлаждением зоны нагрева.

1 Моделирование процесса

Моделирование процесса нагрева силикатного стекла при последовательном воздействии на его поверхность направленного потока горячего воздуха и воздушно-водяной смеси выполнялось в соответствии со схемой, представленной на рисунке 1.

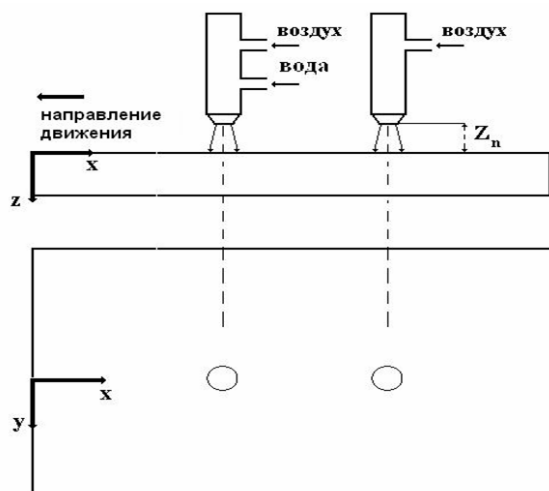


Рисунок 1 – Схема нагрева пластины потоком горячего воздуха с последующим охлаждением воздушно-водяной смесью

Для определения коэффициентов теплоотдачи h_0 в зоне воздействия на поверхность материала направленного потока горячего воздуха использовалась эмпирическая зависимость между числом Нуссельта $Nu = \frac{h_0 D}{\lambda_0}$ и числом Рей-

нольдса $Re = \frac{u_0 D}{\nu_0}$ [5]:

$$Nu = \frac{13D}{Z_n} \sqrt{Re}, \quad (1.1)$$

где D – диаметр сопла устройства подачи горячего воздуха;

Z_n – расстояние от сопла до обрабатываемой поверхности;

u_0 – скорость истечения горячего воздуха из сопла;

λ_0 – теплопроводность воздуха;

ν_0 – кинематическая вязкость воздуха.

Коэффициент теплоотдачи h_1 в зоне воздействия хладагента, представляющего собой воздушно-водяную смесь распыляемую форсункой, рассчитывался по формуле [6]:

$$h_1 = 1,14 \lambda_1 \sqrt{\frac{u_1}{\nu_1 D_1}} Pr^{0,371}. \quad (1.2)$$

Здесь $Pr = \frac{\nu_1}{a_1}$ – число Прандтля,

D_1 – диаметр сопла форсунки хладагента;

λ_1 – теплопроводность хладагента;

a_1 – коэффициент температуропроводности хладагента.

Оставшиеся величины u_1 , λ_1 и ν_1 , характеризующие хладагент, имеют вышеуказанный смысл.

При вычислении h_0 и h_1 по формулам (1.1) и (1.2) были использованы значения коэффициентов, усредненные по интервалу изменения температуры.

Для определения пространственного распределения термоупругих полей в силикатном стекле при последовательном воздействии на его поверхность направленного потока горячего воздуха и воздушно-водяной смеси было выполнено конечно-элементное решение соответствующей задачи [7].

Расчеты были выполнены для прямоугольного образца $25 \times 25 \times 3$ мм с использованием следующих значений технологических параметров обработки: диаметр сопла устройства подачи горячего воздуха $D=3$ мм, расстояние от сопла до обрабатываемой поверхности $Z_n=10$ мм, температура горячего воздуха в центре пятна нагрева 250°C , диаметр сопла форсунки хладагента $D_1=3$ мм, скорость перемещения обрабатываемого изделия относительно действующих на образец потоков 10 мм/с. Расстояние между центрами зоны нагрева и зоны охлаждения полагалось равным 9 мм.

Для проведения сравнительного анализа и выявления особенностей пространственного распределения термоупругих полей, при наличии хладагента были выполнены расчеты термоупругих полей формируемых в образце в результате воздействия только направленного потока горячего воздуха при тех же параметрах обработки.

При моделировании процесса трещинообразования в качестве основного критерия, определяющего направление развития трещины, в данной работе выбран критерий максимальных растягивающих напряжений [8]. В соответствии с этим критерием трещина распространяется в направлении, перпендикулярном действию максимальных растягивающих напряжений. При этом принято во внимание, что трещина, распространяющаяся в зоне растяжения, прекращает свой рост и даже может «отразиться» от зоны сжатия [9].

2 Анализ полученных результатов

На рисунках 2 – 5 представлены пространственные распределения температурных полей и полей термоупругих напряжений формируемых в обрабатываемом материале для случая отдельного воздействия потока горячего воздуха и для случая совместного воздействия направленного потока горячего воздуха и хладагента.

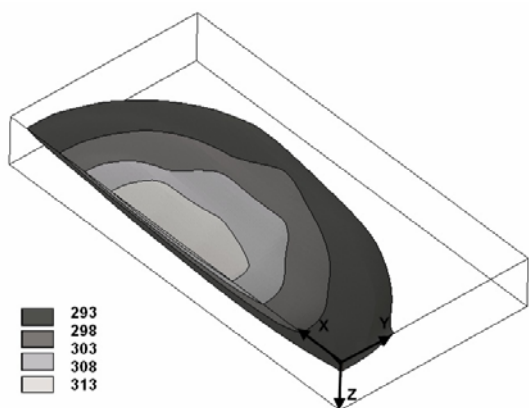


Рисунок 2 – Распределение температурных полей в стеклянной пластине при воздействии на ее поверхность направленного потока горячего воздуха, К

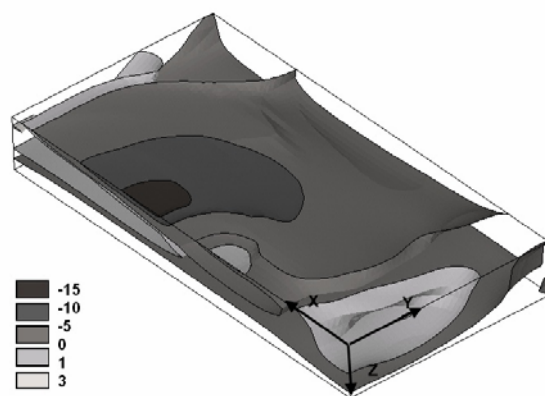


Рисунок 5 – Распределение термоупругих полей в стеклянной пластине при совместном воздействии на ее поверхность направленного потока горячего воздуха и воздушно-водяной смеси, МПа

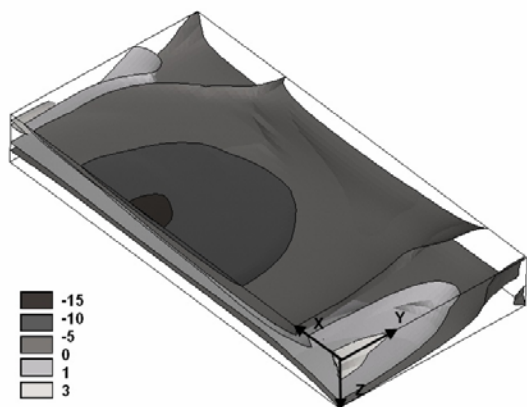


Рисунок 3 – Распределение термоупругих полей в стеклянной пластине при воздействии на ее поверхность направленного потока горячего воздуха, МПа

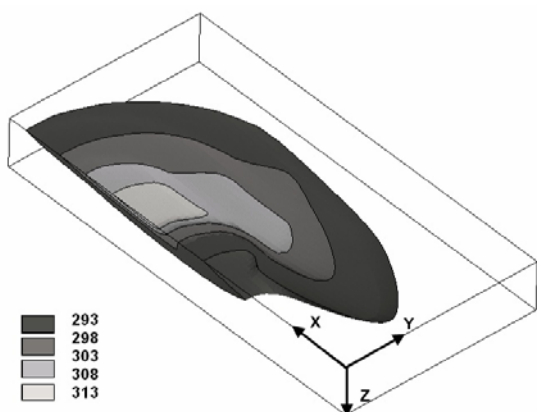


Рисунок 4 – Распределение температурных полей в стеклянной пластине при совместном воздействии на ее поверхность направленного потока горячего воздуха и воздушно-водяной смеси, К

Из рассмотрения рисунка 3 видно, что в стеклянной пластине в зоне воздействия направленного потока горячего воздуха формируются напряжения сжатия, которые при удалении от центра зоны нагрева в плоскости XY меняют знак. Аналогичная картина наблюдается и при рассмотрении поведения напряжений σ_y вдоль оси OZ . Такой характер пространственного распределения напряжений растяжения и сжатия обуславливает реализацию механизма сквозного термораскалывания, при котором трещина формируется на некотором удалении от центра поверхностного нагрева и распространяется на всю глубину.

При анализе рисунка 5, видно, что последовательное воздействие на поверхность образца направленного потока горячего воздуха и мелкодисперсной воздушно-водяной смеси обеспечивает формирование дополнительной зоны растягивающих напряжений в месте локализации хладагента. При этом дополнительная зона растягивающих напряжений оказывается окруженной областями материала, в которых сформированы сжимающие напряжения. Данное обстоятельство обеспечивает возможность формирования микротрещины определенной глубины, которая будет определяться пространственным расположением границы перехода с растягивающих напряжений на напряжения сжатия.

Таким образом, при использовании направленного потока горячего воздуха не возникает принципиальных отличий в пространственном распределении зон напряжений растяжения и сжатия по сравнению с тем, которое имеет место при соответствующих схемах лазерного термораскалывания [10]. Механизм формирования и развития разделяющей трещины при воздействии на обрабатываемую поверхность

направленного потока горячего воздуха и хладагент одинаков с механизмом формирования трещины при управляемом лазерном термораскалывании. Формирование трещины в результате нагрева направленным потоком горячего воздуха происходит так же, как при сквозном лазерном термораскалывании.

Экспериментальные исследования процесса термораскалывания силикатных стекол с использованием направленного потока горячего воздуха были проведены с использованием разработанного макета установки [11]. Технологические параметры процесса в проведенном эксперименте соответствовали значениям, использованным при численном моделировании. В ходе экспериментов была установлена принципиальная возможность реализации процесса термораскалывания стекла с использованием разработанной схемы (см. рисунок 1). Однако нужно отметить, что применение направленного потока горячего воздуха приводит к нагреванию больших участков обрабатываемой поверхности по сравнению со случаем использования лазерного нагрева. Данное обстоятельство обуславливает более низкую точность обработки по сравнению с методами лазерного термораскалывания хрупких неметаллических материалов.

Заключение

Экспериментально показана возможность реализации процесса термораскалывания силикатных стекол при помощи направленного потока горячего воздуха в сочетании с воздействием хладагента. Создана адекватная модель процесса воздействия на поверхность силикатного стекла потока горячего воздуха и хладагента. Определены особенности пространственной локализации термоупругих полей и выявлены механизмы формирования разделяющей трещины.

Отметим, что применение направленного потока горячего воздуха в качестве технологического инструмента позволяет практически при любых режимах обработки избежать перегрева стекла и тем самым гарантирует хрупкий механизм формирования термоиндуцированных трещин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малов, И.Е. Разработка технологии управляемого термораскалывания листового стекла излучением твердотельного лазера: дис. ...канд. техн. наук: 05.03.07 / И.Е. Малов; Моск. техн. ун-т им. Н.Э. Баумана. – М., 2000. – 185 с.
2. Кондратенко, В.С. Лазерное управляемое термораскалывание хрупких материалов: курс лекций / В.С. Кондратенко. – М. : МГАПИ, 2004. – 88 с.
3. Способ резки неметаллических материалов: пат. 2024441 РФ, МКИ 5 С03В33/02 / В.С. Кондратенко; заявитель В.С. Кондратенко; заявл. 04.02.92; опубл. 12.15.94
4. Muralidhar, S. A study of thermal cutting of glass / S. Muralidhar [et al.] // Journal of American Ceramic Society. – 1999. – Vol. 82. – P. 2166–2176.
5. Shahani, A.R. Simulation of glass cutting with an impinging hot air jet / A.R. Shahani, M. Seyyedian // International Journal of Solids and Structures. – 2004. – Vol. 41. – P. 1313–1329.
6. Богуславский И.А. Высокопрочные закаленные стекла / И.А. Богуславский. – М. : Издательство литературы по строительству, 1969. – 208 с.
7. Шабров, Н.Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей / Н.Н. Шабров. – Л. : Машиностроение, 1983. – 212 с.
8. Карзов, Г. П. Физико – механическое моделирование процессов разрушения / Г.П. Карзов, Б.З. Марголин, В.А. Шевцова. – СПб. : Политехника, 1993. – 391 с.
9. Левин, В. А. Избранные нелинейные задачи механики разрушения / В.А. Левин, Е.М. Морозов, Ю.Г. Матвиенко. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 408 с.
10. Прецизионная лазерная обработка хрупких неметаллических материалов / С.В. Шалупаев [и др.] // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2005. – № 3 (30). – С. 87–92
11. Установка для лазерной резки хрупких неметаллических материалов: пат. 2283 Респ. Беларусь, МПК С 03В 33/02 / Ю.В. Никитюк; заявитель Гом. гос. ун-т им. Ф. Скорины – № и 20090762; заявл. 19.15.09; опубл. 12.28.09

Поступила в редакцию 12.02.11.

УДК 678.743.41:620.197:621.793

МОЛЕКУЛЯРНАЯ СТРУКТУРА И МОРФОЛОГИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ ПОЛИИМИДНО-ФТОРОПЛАСТОВОЙ ПЛЕНКИ, ОБРАБОТАННОЙ В ПЛАЗМЕ ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА

О.А. Саркисов, А.А. Рогачев, А.В. Рогачев, А.И. Егоров

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

MOLECULAR STRUCTURE AND MORPHOLOGY OF SURFACE LAYERS OF POLYIMIDE-FLUOROPOLYMER FILM TREATED BY GLOW DISCHARGE PLASMA

O.A. Sarkisov, A.A. Rogachev, A.V. Rogachou, A.I. Egorov

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Методами ИК-спектроскопии и атомно-силовой микроскопии определены изменения морфологии и молекулярной структуры поверхностных слоев полиимидно-фторопластовой пленки после обработки в плазме низкочастотного тлеющего разряда. Установлено, что при обработке полиимидного слоя имеет место преимущественно послойное травление и образующиеся слои характеризуются периодическим изменением полярной и дисперсионной составляющих поверхностной энергии. При обработке фторполимерного слоя пленки выявлена деструкция молекул, ориентированных преимущественно параллельно поверхности пленки, и образование в результате травления столбчатых структур.

Ключевые слова: плазма низкочастотного тлеющего разряда, полиимидно-фторопластовая пленка, ИК-спектроскопия, молекулярная ориентация, Кельвин мода сканирующей микроскопии.

The change of morphology and molecular structure of surface layers of polyimide-fluoropolymer film after low-frequency glow discharge plasma treatment by the method of infrared spectroscopy and atomic force microscopy is determined. In case polyimide layer treatment occur mainly layer-by-layer etching and formed layers have cyclic variations of polar and disperse fraction of surface energy. The etching of molecules aligned primary parallel to the surface of a substrate in case fluoropolymer layer treatment is shown.

Keywords: low-frequency glow discharge plasma, polyimide-fluoropolymer film, infrared spectroscopy, molecular orientation, Kelvin mode of scanning probe microscopy.

Введение

Обработка полимерных материалов в плазме тлеющего разряда является эффективным технологическим приемом поверхностной активации и часто используется для повышения прочности адгезионного соединения при вакуумной металлизации [1], склеивании, формировании многослойных адгезионных систем [2], поверхностного модифицирования и травления [3]. В числе основных физико-химических процессов, оказывающих влияние на активационный эффект, адгезионную активность поверхности, отмечают зарядку поверхностных слоев [1], [2], [4], деструкцию макромолекул, вызванную воздействием ионов, электронов, электромагнитного излучения, внешних электрических полей на полимер [5], химические реакции с участием радикалов, ионов, протекающие в поверхностных слоях [5], [6], десорбцию низкомолекулярных соединений [5]. В работе [7] показано, что при обработке пленок полиуретана в плазме тлеющего разряда наблюдаются перераспределение водородных связей, в поверхностных слоях снижается концентрация углеводородных

фрагментов и повышается концентрация карбонильных групп, их активность во взаимодействии с NH-группами с образованием водородных связей, значительно возрастает (более чем в 5 раз) содержание сложноэфирных групп. При плазменном модифицировании полифторолефинов установлено снижение в поверхностном слое атомарного содержания фтора, появление кислородсодержащих групп, которые и определяют повышение адгезионной активности пленки [8]–[10].

Эффективность обработки, ее механизм и характер проявления в значительной степени зависят от природы полимера, параметров энергетического воздействия. Так, в работах [2], [5] утверждается, что доминирующее влияние на степень активации оказывает зарядовое состояние поверхности, формирование электретных структур. Вместе с тем, сохранение в течение длительного времени активности поверхности полимеров, заметное изменение ее морфологии [10] указывают на возможное влияние химических изменений состава, структуры слоев, обработанных в тлеющем разряде, на их свойства.

Цель настоящей работы – определение кинетических особенностей изменений молекулярной структуры, морфологии, адсорбционных свойств поверхностных слоев полиимидно-фторопластовой пленки, протекающих при их обработке в плазме низкочастотного тлеющего разряда.

1 Методика

Объектом исследования являлась полиимидно-фторопластовая пленка ПМФ-351 толщиной 50 ± 6 мкм, представляющая собой полиимидную (ПИ) основу (толщина 40 мкм) с покрытием сополимера тетрафторэтилена с гексафторпропиленом (толщина 10 мкм). Пленку протирали спиртом, высушивали и затем обрабатывали в плазме низкочастотного тлеющего разряда (НЧТР) при следующих параметрах: остаточное давление в камере $P = 10$ Па, ток разряда $I = 80$ мА, частота $\nu = 400$ Гц, расстояние между электродами 20 мм. Время обработки составляло 1...40 секунд и задавалось путем открытия заделки, расположенной на заземленном электроде, которая в закрытом состоянии экранировала поверхность образца от воздействия плазмы НЧТР. Расчетная доза обработки за одну секунду составила $1,3$ кДж/м².

Изучение структуры полимерной пленки осуществлялось методом ИК Фурье-спектроскопии на спектрометре Vertex 70 (Bruker Optik GmbH, Germany) с помощью приставки МНПВО фирмы «Carl Zeiss, Germany». В качестве отражающего кристалла использовалась пластина из KRS-5 в форме параллелограмма однократного прохождения с 14-ю отражениями. Данная схема позволяла определять структуру полимерной пленки с полиимидной и фторопластовой стороны в тонком слое с толщиной менее 3 мкм [11].

Спектры снимались в спектральном диапазоне $\tilde{\nu} = 400 \dots 4000$ см⁻¹ с разрешением не хуже 4 см⁻¹, накопление сигнала проводилось по 100 спектрам. Поляризацию света проводили при помощи поляроида F 350 MIR (Bruker Optik GmbH, Germany). Для визуализации и математической обработки ИК-спектров использовалось специализированное программное обеспечение OPUS-NT (Bruker Optik GmbH, Germany).

При анализе ориентационного состояния исходили из известных положений о том, что полосы поглощения в ИК-спектре молекулы политетрафторэтилена (ПТФЭ) фторполимерного слоя с колебаниями $\tilde{\nu} = 1140, 1246$ см⁻¹ имеют симметрию типа E_1 (дипольный момент колебаний перпендикулярен оси молекулы), а с $\tilde{\nu} = 1210$ см⁻¹ – типа A_2 (дипольный момент колебаний параллелен оси молекулы) [12], [13].

В принятой нами системе координат анализируемое покрытие и поверхность кристалла МНПВО находятся в плоскости (x, y) , а координата Z отсчитывается в направлении,

нормальном поверхности покрытия. Тогда при выбранной схеме измерений свет распространяется в направлении оси X . При этом параллельно поляризованный свет будет иметь колебания вектора \mathbf{E} параллельно плоскости падения (X, Z) , а перпендикулярно поляризованный – перпендикулярно плоскости падения.

Параметр ориентации молекул $f(\gamma)$ определяли с помощью соотношения [14]

$$f(\gamma) = 2 \frac{E_x^2 + E_z^2 - DR \cdot E_y^2}{DR \cdot E_y^2 + 2 \cdot E_z^2 - E_x^2},$$

где E_x, E_y, E_z – проекции амплитуды вектора напряженности электрического поля на соответствующие оси; DR – дихроичное отношение, равное отношению оптических плотностей полосы с $\tilde{\nu} = 1140$ см⁻¹ при прохождении света с параллельной и перпендикулярной поляризацией.

При рассмотрении связи между параметром ориентации $f(\gamma)$ и углом γ между осью Z и осью симметрии молекулы использовали соотношение, приведенное в [15]:

$$f(\gamma) = \frac{2 \cos^2(\gamma) - 1}{2}.$$

Методика определения ориентационного состояния покрытия ПТФЭ более подробно изложена в работе [16].

Исследования морфологии поверхности обработанных полимерных покрытий проводили методом атомно-силовой микроскопии (АСМ) с помощью сканирующего зондового микроскопа Solver P47 PRO в полуконтактном режиме. В качестве зонда использовали кремниевый кантилевер серии NSG 10 с силовой постоянной 11,5 Н/м и радиусом при вершине, меньшим 10 нм.

Определение распределения потенциала по поверхности пленки ПМФ 351 осуществляли методом зонда Кельвина с помощью сканирующего зондового микроскопа Solver P47 PRO. Данная методика предполагает двойной проход зонда по исследуемой поверхности. При первом проходе определяется рельеф поверхности образца в полуконтактном режиме. На втором проходе этот рельеф отслеживается при прохождении зонда над образцом на высоте h (в наших исследованиях 100–150 нм). В течение этого второго прохода на зонд подавалось напряжения смещения V_{tip} , содержащее статическую V_{dc} и динамическую компоненты V_{ac} . Динамическая компонента напряжения подавалась с частотой, равной резонансной частоте кантилевера. Величина постоянного напряжения с использованием цепи обратной связи подбиралась такой, чтобы амплитуда колебания кантилевера стала равной нулю. Полученная таким образом карта изменения напряжения интерпретировалась как распределение поверхностного потенциала [17].

Адсорбционную активность поверхности обработанных пленок определяли путем расчета

поверхностной энергии и ее составляющих на основании результатов измерений краевых углов смачивания поверхности образцов двумя различными жидкостями: глицерином и дистиллированной водой фиксированного объема (5 мкл). Захват и распознавание изображения лежащей капли жидкости проводился с помощью специально разработанной программно-аппаратной системы на базе микроскопа МБС-9 с частотой 1 Гц в течение 5 мин. При такой схеме ошибка измеренного краевого угла смачивания не превышала 0,5 град. Расчет поверхностной энергии, равной сумме ее дисперсионной и полярной составляющих, проводили по двухжидкостной методике Owen, Wendt, Rabel and Kaelble (OWRK) [18], [19].

2 Результаты и их обсуждение

Обработка полиимидно-фторопластовой пленки в плазме НЧТР изменяет поверхностную энергию слоев ПИ и ФП. Так, слой ПИ уже после 1 секунды обработки имеет в 1,7 раза более высокое значение поверхностной энергии. Отметим, что основной вклад в значение энергии вносит ее дисперсионная составляющая. При дальнейшей обработке суммарная поверхностная энергия снижается до относительно постоянного значения 56 мДж/м^2 (рисунок 1) и при этом наблюдается периодическое противофазное изменение составляющих поверхностной энергии. Такое изменение полярной и дисперсионной составляющих, по-видимому, свидетельствует о протекании двух основных взаимосвязанных конкурирующих процессов. Первый связан с физико-химическим модифицированием поверхности подложки ПИ, второй процесс – с травлением поверхности слоя в процессе воздействия на него ионов.

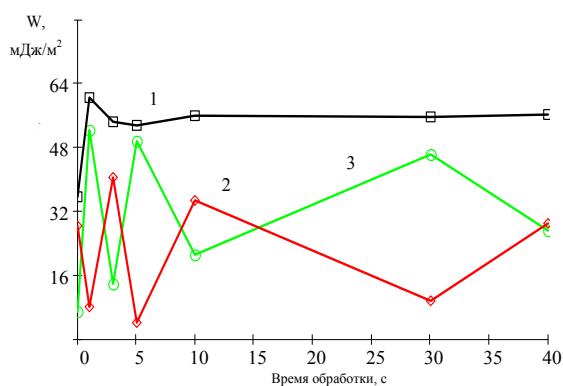


Рисунок 1 – Изменение суммарной (1), полярной (2) и дисперсионной (3) составляющих поверхностной энергии полиимидного слоя пленки ПМФ-351 в процессе обработки в плазме НЧТР

Химическое модифицирование поверхности подтверждается данными ИК-спектроскопии

МНПВО, согласно которым установлены изменения полуширины и относительной интенсивности полос поглощения в области $\tilde{\nu} = 1650...1750 \text{ см}^{-1}$, характерной для группы $C=O$. При этом можно отметить, что данные изменения в процессе обработки так же, как и изменения поверхностной энергии не являются монотонными: оптическая плотность полос поглощения имеет более высокое значение после 3 с обработки (рисунок 2).

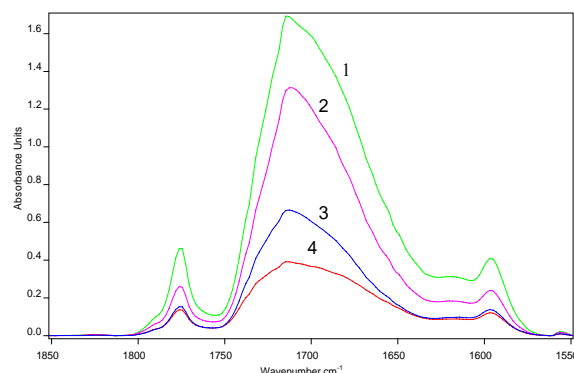


Рисунок 2 – ИК МНПВО спектр полиимидного слоя пленки ПМФ-351: исходной (график 1) и при обработке в плазме НЧТР в течение 1 (график 3), 3 (график 2), 40 секунд (график 4) соответственно

О кинетических особенностях травления полиимидного слоя свидетельствуют и данные АСМ (рисунок 3). Уже на начальных стадиях обработки наблюдаются заметные изменения морфологии поверхности ПИ. Исчезают поверхностные повреждения, по-видимому, технологического происхождения, образуются структурные неоднородности достаточно большого размера, относительно равномерно распределенные по поверхности. Распределение потенциала по поверхности становится более дискретным и неоднородным как по величине, так и по знаку (рисунок 3 б). При увеличении времени обработки наблюдается увеличение плотности и размера неоднородных поверхностных структур, возрастает также дискретность зон, на которых адсорбируется заряд, что с учетом наблюдаемого периодического изменения значений полярной и дисперсионной составляющих поверхностной энергии, характера изменения концентрации кислородсодержащих групп позволяет сделать вывод о преимущественно послойном механизме травления полиимидного слоя в плазме НЧТР.

При обработке фторполимерного слоя пленки характер наблюдаемых структурных изменений несколько отличается. На начальных этапах обработки поверхностная энергия увеличивается за счет роста дисперсионной составляющей (рисунок 4). После 3 секунд обработки установлено максимальное значение поверхностной энергии

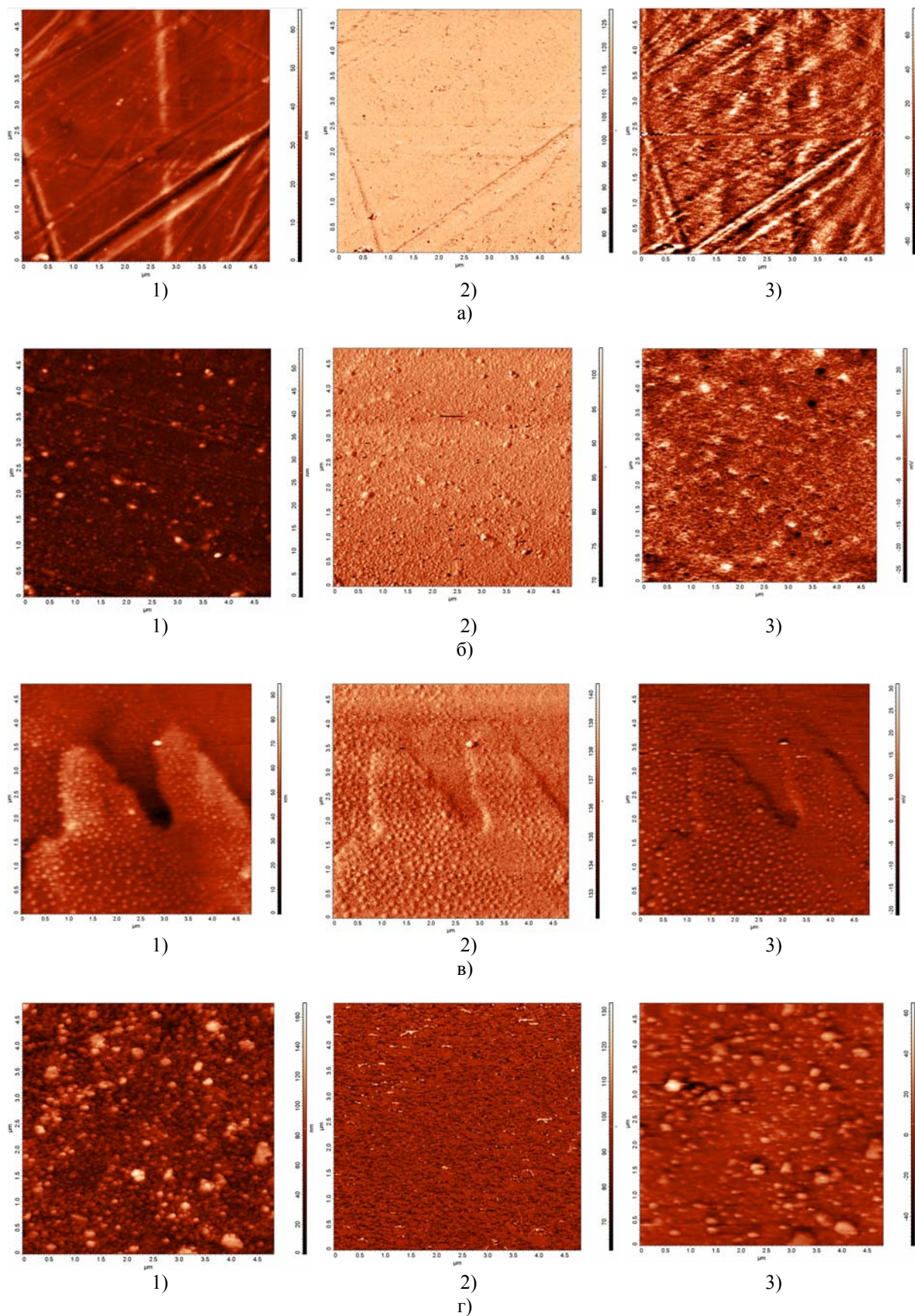


Рисунок 3 – АСМ-изображения топографии (1), фазового контраста (2) и распределения потенциала поверхности (3) ПИ слоя пленки ПМФ 35: исходной (а) и после обработки в плазме НЧТР в течение 1 (б) , 5 (в), 40 секунд (г)

(~ 36 мДж/м²). При этом периодичность изменений составляющих поверхностной энергии в процессе воздействия плазмы НЧТР не проявляется.

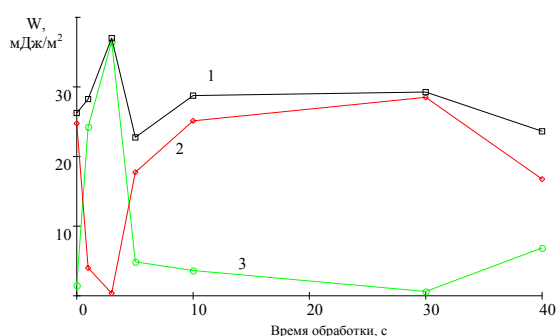


Рисунок 4 – Зависимости суммарной (1), полярной (2) и дисперсионной (3) составляющей поверхностной энергии фторполимерного слоя пленки ПМФ-351 от времени обработки в плазме НЧТР

Данные особенности связаны с избирательным травлением фторполимерного слоя. Так, на основании анализа значения дихроичного отношения ИК-спектроскопии и данных АСМ установлено, что у исходной пленки велика плотность столбчатых образований, макромолекулы которых ориентированы преимущественно перпендикулярно поверхности. Данный факт подтверждается и данными ИК-спектроскопии, полученными в естественном и поляризованном излучении. При исследовании в естественном свете в интервале наиболее интенсивного поглощения $\tilde{\nu} = 1400 \dots 1000$ см⁻¹ выявлено изменение соотношения оптической плотности полос, имеющих волновые числа $\tilde{\nu} = 1140$, $\tilde{\nu} = 1205$, $\tilde{\nu} = 1240$. Интенсивность максимумов этих полос определяли путем представления регистрируемого спектра как суперпозицию этих полос. При этом отметим, что колебания при $\tilde{\nu} = 1140$, $\tilde{\nu} = 1240$ см⁻¹ имеют симметрию типа E_1 (дипольный момент колебаний перпендикулярен оси молекулы), а $\tilde{\nu} = 1210$ см⁻¹ – типа A_2 (дипольный момент колебаний параллелен оси молекулы) [12], [13].

Анализ спектров показывает, что с увеличением времени обработки наблюдается немонотонное изменение относительной оптической плотности выбранных полос. Можно отметить, что такие изменения невозможно анализировать в естественном свете, так как метод МНПВО чувствителен к площади оптического контакта между образцом и кристаллом, который вследствие существенных морфологических трансформаций при травлении изменяется. Указанный недостаток отсутствует при анализе дихроичного отношения DR обработанных образцов и рассчитанных значений параметра ориентации $f(\gamma)$ и

угла γ между осью молекулы и осью Z для полосы $\tilde{\nu} = 1140$ см⁻¹. Установлено, что ориентация макромолекул ПТФЭ при обработке в плазме НЧТР изменяется. Необработанная пленка характеризуется высоким значением параметра ориентации $f = 0.861$ и углом $\gamma = 17.7^\circ$, что свидетельствует о преимущественной ориентации осей макромолекул ПТФЭ перпендикулярно поверхности подложки (рисунок 5) и, с учетом данных АСМ (рисунок 6), формировании столбчатых структур.

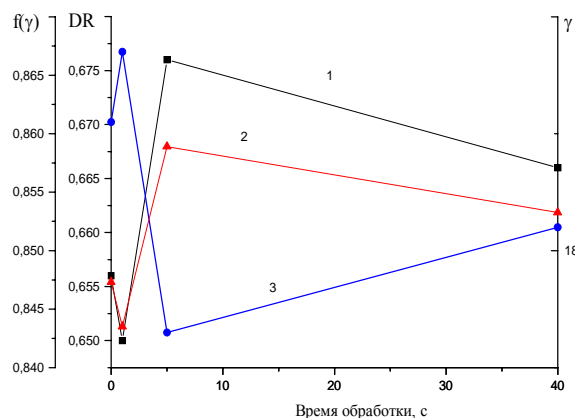


Рисунок 5 – Зависимость от времени обработки дихроичного отношения DR (1) полосы $\tilde{\nu} = 1159$ см⁻¹, параметра ориентации $f(\gamma)$ (3), угла γ между осью макромолекулы и нормалью к пленке (2)

Из рисунка 6 следует, что уже на начальных стадиях обработки происходит интенсивное травление участков макромолекул, расположенных параллельно поверхности подложки, а также химическое модифицирование (в том числе и прививка кислородсодержащих групп [9]) выступающих столбчатых образований. В результате морфология обработанной поверхности пленки ПТФЭ представляет собой большое количество нано- и микроразмерных столбчатых образований с более высокой ориентацией вдоль нормали к подложке и характеризующийся более высоким параметром ориентации $f = 0.867$ и более острым углом $\gamma = 17,3^\circ$. Такое избирательное модифицирование подтверждается и данными ИК-спектроскопии, согласно которым уже после 1 секунды обработки установлен рост оптической плотности полос кислородсодержащих групп в диапазоне $1800-1600$ см⁻¹ (рисунок 7), а проведенные измерения и расчеты не выявили рост полярной составляющей поверхностной энергии.

При дальнейшей обработке (5 секунд) данный ориентированный слой интенсивно химически модифицируется, о чем свидетельствует высокое значение поверхностной энергии и неоднородный по знаку и величине характер распределения поверхностного потенциала (рисунок 5 в).

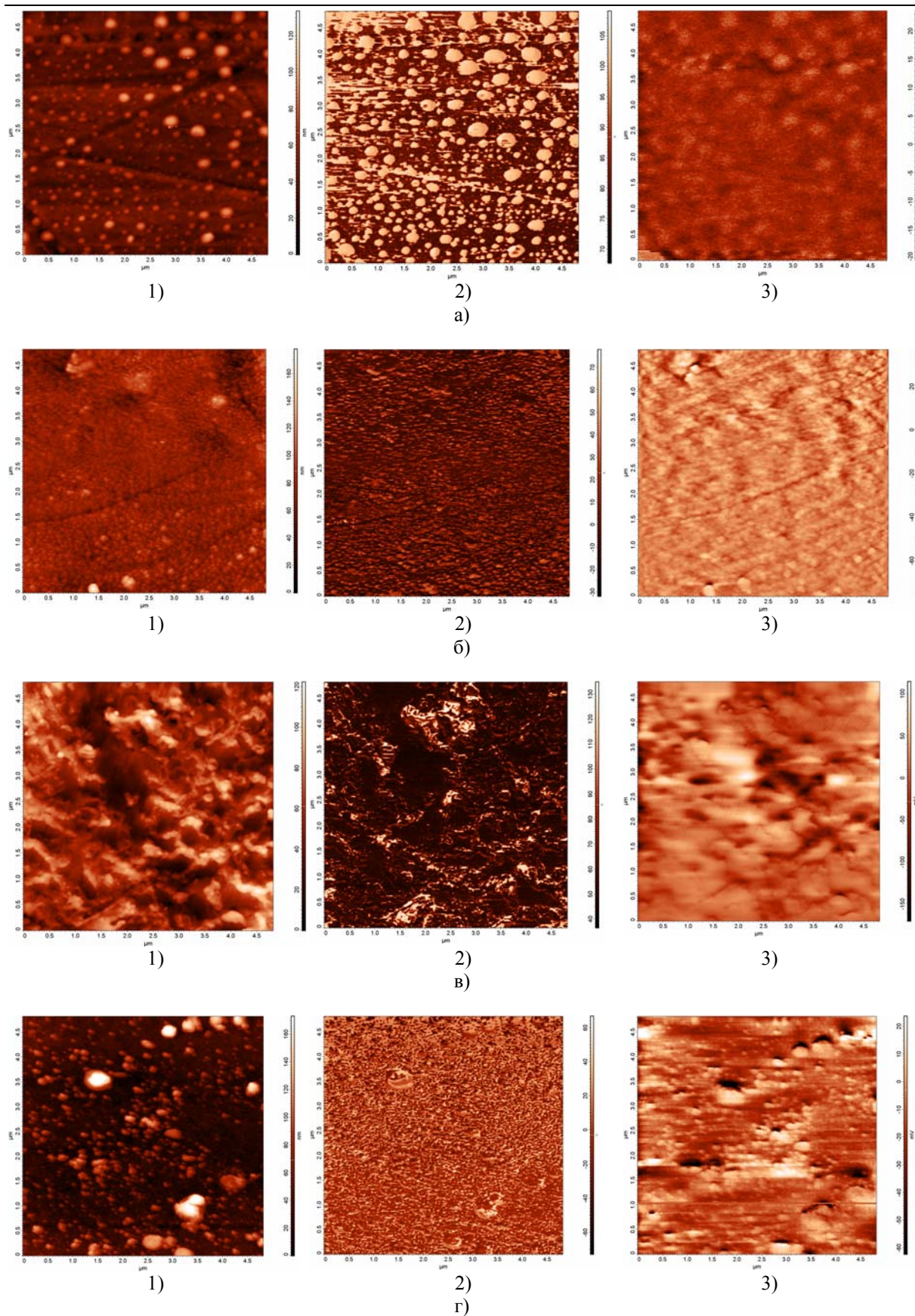


Рисунок 6 – АСМ-изображения топографии (столбец 1), фазового контраста (столбец 2) и распределения потенциала поверхности (столбец 3) исходного (а) фторполимерного слоя и после его обработки в плазме НЧТР в течение 1 (б), 3 (в), 5 секунд (г)

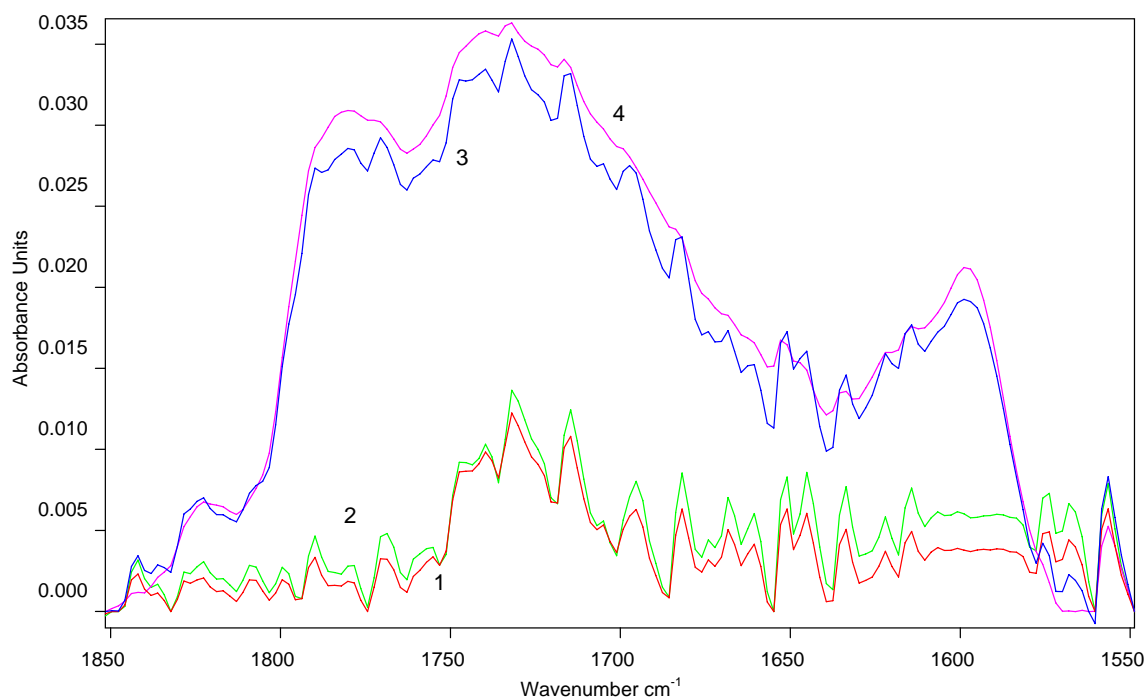


Рисунок 7 – ИК МНПВО спектры фторполимерного слоя пленки ПМФ-351: исходной (график 2) и при обработке в плазме НЧТР в течение 1 (график 3), 5 (график 4), 40 секунд (график 1) соответственно

Можно отметить, что данный слой в процессе дальнейшей обработки в плазме НЧТР интенсивно модифицируется и менее интенсивно травится, что приводит к росту поверхностной энергии, ее полярной составляющей.

При более длительной обработке возможно сравнение модифицированного слоя пленки, о чем свидетельствует падение полярной составляющей (рисунок 4), уменьшение плотности кислородсодержащих групп (рисунок 7).

Заключение

Определены кинетические особенности изменения морфологии и молекулярной структуры поверхностных слоев полиимидно-фторопластовой пленки, обработанной в плазме НЧТР. Установлено, что при обработке полиимидного слоя в поверхностных слоях образуются структурные и электрофизические неоднородности, равномерно распределенные по поверхности. Данные слои характеризуются периодическим изменением полярной и дисперсионной составляющих поверхностной энергии и немонотонной зависимостью концентрации кислородсодержащих групп от времени обработки, что свидетельствует о послойном характере разрушения поверхностных слоев в процессе обработки.

При обработке фторполимерного слоя полиимидно-фторопластовой пленки выявлено травление молекул, ориентированных преимущественно параллельно поверхности пленки, и образование столбчатых структур.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Технология вакуумной металлизации полимерных материалов* / Ю.В. Липин [и др.]. – Гомель, 1994. – 206 с.
2. *Сидорский, С.С.* Совершенствование технологии активационной обработки полимеров при их вакуумной металлизации / С.С. Сидорский, А.В. Рогачев // *Физика и технология тонкопленочных материалов*. – 1994. – Вып. 2. – С. 11–15.
3. *Данилин, В.С.* Применение низкотемпературной плазмы для травления и очистки материалов / В.С. Данилин, В.Ю. Киреев. – М. : Энергоатомиздат, 1987. – 240 с.
4. *Formation of charge states on the surface of a laminated polyimide-fluoropolymer film by glow-discharge treatment* / A.I. Drachev [et al.] // *High Energy Chemistry*. – 2000. – Vol. 34, № 3. – P. 172–176.
5. *Kuznetsov, A.A.* Modification of polyimide films by low-frequency glow discharge / A.A. Kuznetsov, A.B. Gilman, A.I. Drachev // *Vide: Science, Technique et Applications*. – 1997. – Vol. 53, № 84 SUPPL. 1. – С. 372–373.
6. *Корюкин, А.В.* Металлополимерные покрытия полимером / А.В. Корюкин. – М. : Химия, 1983. – 180 с.
7. *Морфология и молекулярная структура полиуретановых пленок, обработанных в плазме тлеющего разряда* / О.А. Саркисов [и др.] // *Журнал прикладной спектроскопии*. – 2007. – Т. 74, № 6. – С. 785–789.

8. *Воздействие разряда постоянного тока на пленки ПТФЭ* / М.С. Пискарев [и др.] // *Химия высоких энергий*. – 2008. – Т. 42, № 2. – С. 169–172.
9. *Модифицирование поверхности пленок полифторолефинов в тлеющем разряде постоянного тока* / М.С. Пискарев [и др.] // *Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения*. Ч. 2. ; под ред. чл.-корр. РАН А.С. Сигова. – М. : Энергоатомиздат, 2010. – С. 274–278.
10. *Морфология, структура и свойства граничных слоев, образующихся при вакуумной металлизации стеклопластиков* / В.П. Казаченко [и др.] // *Конструкции из композиционных материалов*. – 2001. – № 3. – С. 21–27.
11. *Harrick, N.J.* Internal Reflection Spectroscopy / N.J. Harrick – New York, Wiley, 1967 – 480 p.
12. *Conformational Order and Disorder in Poly (tetrafluoroethylene) from the Infrared Spectrum* / G. Masetti [et al.] // *Macromolecules*. – 1973. – Vol. 6, № 5. – P. 700–707.
13. *Zerbi, G.* Dynamics of Polymers as Structurally Disordered Systems. Vibrational Spectrum and Structure of Poly (tetrafluoroethylene) / Giuseppe Zerbi, Mario Sacchi // *Macromolecules*. – 1973. – Vol. 6, № 5. – P. 692–699.
14. *Tamm, Lukas K.* Infrared spectroscopy of proteins and peptides in lipid bilayers / Lukas K. Tamm, Suren F. Tatulian // *Quarterly Reviews of Biophysics*. Cambridge University Press. – 1997. – Vol. 30, № 4. – P. 365–429.
15. *Runge, A.F.* Combination of polarized TIRF and ATR spectroscopies for determination of the second and fourth order parameters of molecular orientation in thin films and construction of an orientation distribution based on the maximum entropy method / A.F. Runge, S.S. Saavedra, S.B. Mendes // *J. Phys. Chem. B*. – 2006. – Vol. 110, № 13. – P. 6721–6731.
16. *The structure and molecular orientation of polytetrafluoroethylene coatings deposited from active gas phase* / A.A. Rogachev [et al.] // *Applied Surface Science*. – 2009. – Vol. 255, № 15. – P. 6851–6856.
17. *Bhushan, B.* Applied Scanning Probe Methods VI Characterization / Editors: B. Bhushan, S. Kawata. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. – 325 p.
18. *Lieng-Huang, L.* Roles of molecular interactions in adhesion, adsorption, contact angle and wettability // Lee Lieng-Huang / *Journal of Adhesion Science and Technology*. – 1993. – Vol. 7, № 6. – P. 583–634.
19. *Vandencastele, N.* Surface characterization of plasma-treated PTFE surfaces: an OES, XPS and contact angle study / N. Vandencastele, F. Reniers // *Surf. Interface Anal.* – 2004. – Vol. 36, № 2. – P. 1027–1031.

Поступила в редакцию 21.02.11.

УДК 512.542

О ПРЯМЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ n -КРАТНО ω -НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ

Н.Н. Воробьев¹, А.П. Мехович²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

²Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск

ON DIRECT DECOMPOSITIONS OF n -MULTIPLY ω -SATURATED FORMATIONS

N.N. Vorob'ev¹, A.P. Mekhovich²

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel

²P.M. Masherov Vitebsk State University, Vitebsk

Все рассматриваемые группы конечны. Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — некоторая система непустых подклассов класса групп \mathfrak{F} . Будем писать $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, если для любых различных $i, j \in I$ имеет место $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ и, кроме того, каждая группа $G \in \mathfrak{F}$ имеет вид $G = A_1 \times \dots \times A_t$, где $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, \dots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$. Доказана следующая

Теорема. Пусть $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций \mathfrak{F}_i . Тогда формация \mathfrak{F} n -кратно ($n \geq 1$) ω -насыщена в том и только в том случае, когда n -кратно ω -насыщена каждая из формаций \mathfrak{F}_i .

Ключевые слова: формация конечных групп, дополняемая подформация, прямое разложение класса групп, ω -локальный спутник, n -кратно ω -насыщенная формация.

All groups considered are finite. Let $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ be a set of non-empty subclasses of a class of groups \mathfrak{F} such that $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ for all distinct $i, j \in I$. We write $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ to denote the collection of all groups of the form $A_1 \times \dots \times A_t$, where $A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, \dots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$ for some $i_1, \dots, i_t \in I$. We proved the following theorem.

Theorem. Let $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, where \mathfrak{F}_i is a formation. Then \mathfrak{F} is n -multiply ($n \geq 1$) ω -saturated formation if and only if \mathfrak{F}_i is n -multiply ω -saturated for all $i \in I$.

Keywords: formation of finite groups, complemented subformation, direct decomposition of a class of groups, ω -local satellite, n -multiply ω -saturated formation.

Введение

Напомним, что подформация \mathfrak{M} формации \mathfrak{F} называется дополняемой в \mathfrak{F} [1], если в \mathfrak{F} имеется такая подформация \mathfrak{H} (дополнение к \mathfrak{M} в \mathfrak{F}), что $\mathfrak{F} = \text{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$ и $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$. Изучение дополняемых подформаций было начато в [1]. В дальнейшем это понятие анализировалось и применялось в работах многих других авторов (см., в частности, [2]–[22]). В рамках теории дополняемых подформаций возникла следующая полезная конструкция. Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — некоторая система непустых подклассов класса конечных групп \mathfrak{F} . Будем писать

$$\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i,$$

если для любых различных $i, j \in I$ имеет место $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$ и, кроме того, каждая группа $G \in \mathfrak{F}$ имеет вид

$$G = A_1 \times \dots \times A_t, \text{ где } A_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, \dots, A_t \in \mathfrak{F}_{i_t}.$$

Всякое представление класса конечных групп \mathfrak{F} в виде $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ называется прямым разложением этого класса [3].

В монографии [3, теорема 4.3.8] доказано, что всякая формация, представляемая в виде прямого разложения некоторых формаций, n -кратно насыщена тогда и только тогда, когда n -кратно насыщена каждая из компонент этого разложения. Аналог этого результата для n -кратно локальных классов Фиттинга получен в работе [14]. Однако, как показывает пример работы [13], аналогичный результат для n -кратно композиционных формаций и n -кратно ω -композиционных формаций (см. [21]) неверен.

В данной работе мы показываем, что справедлива следующая

Теорема. Пусть $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций \mathfrak{F}_i . Тогда формация \mathfrak{F} n -кратно ($n \geq 1$) ω -насыщена в том и только в том случае, когда n -кратно ω -насыщена каждая из формаций \mathfrak{F}_i .

Все рассматриваемые группы конечны. Используется стандартная терминология [2], [3], [23], [24] и определения и обозначения, введенные в работе [25].

1 Предварительные сведения

Напомним, что формацией называется класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. В дальнейшем символ ω обозначает некоторое непустое множество простых чисел, $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. Через $\pi(G)$ обозначено множество всех различных простых делителей порядка группы G . Напомним, что для произвольного класса групп $\mathfrak{F} \supseteq (1)$ символ $G^{\mathfrak{F}}$ обозначает пересечение всех таких нормальных подгрупп N , что $G/N \in \mathfrak{F}$. Неединичная группа называется монолитической, если она имеет единственную минимальную нормальную подгруппу. Символы G_{od} , $F_p(G)$, $O_p(G)$, $O_\omega(G)$ обозначают соответственно наибольшую нормальную подгруппу N группы G со свойством $\omega \cap \pi(H/K) \neq \emptyset$ для каждого композиционного фактора H/K из N , наибольшую нормальную p -нильпотентную подгруппу группы G , наибольшую нормальную p -подгруппу группы G и наибольшую нормальную ω -подгруппу группы G . Пусть f – произвольная функция вида

$$f: \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}. \quad (1.1)$$

Следуя [25], сопоставим функции f класс групп $LF_\omega(f) = (G \mid G/G_{od} \in f(\omega'))$

и $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$.

Если формация \mathfrak{F} такова, что $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ для некоторой функции f вида (1.1), то \mathfrak{F} называется ω -насыщенной формацией с ω -локальным спутником f [25].

Если $\omega = \{p\}$, то ω -насыщенную формацию называют p -насыщенной. Если $\omega = \mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, то символ ω опускают.

Всякая формация считается 0-кратно ω -насыщенной, а при $n \geq 1$ формация \mathfrak{F} называется n -кратно ω -насыщенной [25], если $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где все непустые значения ω -локального спутника f являются $(n-1)$ -кратно ω -насыщенными формациями. Если формация \mathfrak{F} n -кратно ω -насыщена для всех натуральных n , то \mathfrak{F} называется totally ω -насыщенной.

Напомним несколько известных утверждений, которые потребуются для доказательства основного результата.

Лемма 1.1 [25, лемма 4]. *Если $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ и $G/O_p(G) \in f(p) \cap \mathfrak{F}$ для некоторого $p \in \omega$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Лемма 1.2 [25, лемма 9]. *Пусть формация $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где $f(\omega') = \mathfrak{F}$ и $G \notin \mathfrak{F}$. Тогда либо $G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq G_{od}$, либо найдется такое $p \in \omega \cap \pi(G^{\mathfrak{F}})$, что $G/F_p(G) \notin f(p)$.*

2 Основной результат

Доказательство теоремы. *Достаточность.* Пусть каждая из формаций \mathfrak{F}_i n -кратно ω -насыщена, и f_i – ее минимальный I_{n-1}^ω -значный ω -локальный спутник. Пусть $\pi_i = \omega \cap \pi(\mathfrak{F}_i)$. Тогда если $i \neq j$, то по условию $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (1)$. Значит, $\pi_i \cap \pi_j = \emptyset$. Построим ω -локальный спутник f таким образом, что

$$f(a) = \begin{cases} \mathfrak{F}, & \text{если } a = \omega', \\ f_i(a), & \text{если } a = p \in \pi_i \text{ для некоторого } i \in I, \\ \emptyset, & \text{если } a = p \in \omega \setminus \bigcup_{i \in I} \pi_i. \end{cases}$$

Покажем, что $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$.

Пусть $LF_\omega(f) \not\subseteq \mathfrak{F}$, и G – группа минимального порядка из $LF_\omega(f) \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G – монолитическая группа и ее монолит $R = G^{\mathfrak{F}}$. Поскольку $G \in LF_\omega(f)$, то $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$. Следовательно, если $p \in \omega \cap \pi(G)$, то $G/F_p(G) \in f(p) \neq \emptyset$. Значит, найдется такое $i \in I$, что $p \in \pi_i$. Отсюда $\omega \cap \pi(G) \subseteq \bigcup_{i \in I} \pi_i$. Если

R – ω' -группа, т. е. $\omega \cap \pi(R) = \emptyset$, то $G_{od} = 1$. Значит,

$$G = G/G_{od} \in f(\omega') = \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Значит, R – pd -группа, т. е. $\omega \cap \pi(R) \neq \emptyset$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(R)$. Тогда $p \in \pi_i$ для некоторого $i \in I$. Если R – неабелева группа, то $F_p(G) = 1$. Поэтому

$$G \simeq G/F_p(G) \in f(p) = f_i(p) \subseteq \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}.$$

Противоречие. Пусть R – p -группа. Значит, $R = C_G(R) = F_p(G) = O_p(G)$. Но тогда

$$G/F_p(G) = G/R = G/O_p(G) \in f(p) = f_i(p).$$

Значит, по лемме 1.1 $G \in \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$. Противоречие.

Таким образом, $LF_\omega(f) \subseteq \mathfrak{F}$.

Допустим, что обратное включение неверно, и G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus LF_\omega(f)$. Тогда G – монолитическая группа. Поэтому найдется такое $i \in I$, что

$$G \in \mathfrak{F}_i = LF_\omega(f_i).$$

Значит,

$$G/F_p(G) \in f_i(p) = f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G)$$

и из того, что $G \in \mathfrak{F}$, получаем

$$G/G_{od} \in \mathfrak{F} = f(\omega').$$

Следовательно,

$$G \in LF_\omega(f).$$

Противоречие. Значит, $\mathfrak{F} \subseteq LF_\omega(f)$. Таким образом, $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где f – I_{n-1}^ω -значный ω -локальный спутник. Поэтому \mathfrak{F} – n -кратно ω -насыщенная формация.

Необходимость. Пусть теперь формация \mathfrak{F} n -кратно ω -насыщена, и f – ее минимальный I_{n-1}^ω -значный ω -локальный спутник. Пусть $i \in I$ и f_i – такой ω -локальный спутник, что

$$f_i(a) = \begin{cases} \mathfrak{F}_i, & \text{если } a = \omega', \\ f(a), & \text{если } a = p \in \pi_i, \\ \emptyset, & \text{если } a = p \in \omega \setminus \pi_i. \end{cases}$$

Покажем, что $\mathfrak{F}_i = LF_\omega(f_i)$.

Предположим, что $\mathfrak{F}_i \not\subseteq LF_\omega(f_i)$, и G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_i \setminus LF_\omega(f_i)$. Тогда G – монолитическая группа с монолитом $R = G^{LF_\omega(f_i)}$. Поскольку $G \notin LF_\omega(f_i)$, то, согласно лемме 1.2, либо $G^{LF_\omega(f_i)} \not\subseteq G_{\text{од}}$, либо найдется такое $p \in \omega \cap \pi(G^{LF_\omega(f_i)})$, что $G/F_p(G) \notin f_i(p)$. С другой стороны, так как $G \in \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$, то $G/G_{\text{од}} \in \mathfrak{F}_i = f_i(\omega')$ и для всех $q \in \omega \cap \pi(G)$ имеет место

$$G/F_q(G) \in f(q) = f_i(q).$$

Противоречие. Итак, $\mathfrak{F}_i \subseteq LF_\omega(f_i)$.

Допустим, что обратное включение неверно, и G – группа минимального порядка из $LF_\omega(f_i) \setminus \mathfrak{F}_i$. Тогда G – монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{F}_i}$.

Пусть $p \in \omega \cap \pi(R) \subseteq \omega \cap \pi(G)$. Тогда из $G \in LF_\omega(f_i)$ следует, что $G/F_p(G) \in f_i(p)$. Значит, $f_i(p) \neq \emptyset$ и по построению ω -локального спутника f_i имеем $p \in \pi_i$. Итак, $\omega \cap \pi(R) \subseteq \pi_i$.

Кроме того, по построению ω -локального спутника f_i справедливо $f_i \leq f$. Значит, $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому, ввиду монолитичности группы G , найдется такое $j \in I$, что $G \in \mathfrak{F}_j$. Тогда $\omega \cap \pi(R) \subseteq \pi_j$. Поэтому

$$\omega \cap \pi(R) \subseteq \pi_i \cap \pi_j = \emptyset.$$

Значит, $i = j$, т.е. $G \in \mathfrak{F}_i$. Противоречие. Следовательно, $LF_\omega(f_i) \subseteq \mathfrak{F}_i$. Таким образом, $\mathfrak{F}_i = LF_\omega(f_i)$, где f_i – I_{n-1}^ω -значный ω -локальный спутник. Поэтому \mathfrak{F}_i – n -кратно ω -насыщенная формация.

Теорема доказана.

3 Некоторые приложения

Отметим некоторые следствия, получаемые из основного результата.

Следствие 3.1. Пусть $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций \mathfrak{F}_i . Тогда формация \mathfrak{F} тотально ω -насыщена в том и только в том случае, когда тотально ω -насыщена каждая из формаций \mathfrak{F}_i .

Если в следствии 3.1 положить $\omega = \mathbb{P}$, то получим

Следствие 3.2 [3]. Пусть $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций \mathfrak{F}_i . Тогда формация \mathfrak{F} тотально насыщена в том и только в том случае, когда тотально насыщена каждая из формаций \mathfrak{F}_i .

При $n = 1$ из теоремы вытекает

Следствие 3.3 [11, теорема 1].

Пусть $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций \mathfrak{F}_i . Тогда формация \mathfrak{F} ω -насыщена в том и только в том случае, когда ω -насыщена каждая из формаций \mathfrak{F}_i .

В случае $\omega = \mathbb{P}$ получим

Следствие 3.4 [3, теорема 4.3.8; 9, теорема].

Пусть $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций \mathfrak{F}_i . Тогда формация \mathfrak{F} n -кратно насыщена в том и только в том случае, когда n -кратно насыщена каждая из формаций \mathfrak{F}_i .

При $\omega = \{p\}$ справедливо

Следствие 3.5. Пусть $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций \mathfrak{F}_i . Тогда формация \mathfrak{F} n -кратно p -насыщена в том и только в том случае, когда n -кратно p -насыщена каждая из формаций \mathfrak{F}_i .

Если $n = 1$ и $\omega = \{p\}$, то справедливо

Следствие 3.6. Пусть $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ для некоторых формаций \mathfrak{F}_i . Тогда формация \mathfrak{F} p -насыщена в том и только в том случае, когда p -насыщена каждая из формаций \mathfrak{F}_i .

ЛИТЕРАТУРА

1. Скиба, А.Н. О формациях с заданными системами подформаций / А.Н. Скиба // Подгрупповое строение конечных групп : Труды Гомельского семинара / Ин-т математики АН БССР ; под ред. В.С. Монахова. – Минск, 1981. – С. 155–180.
2. Doerk, K. Finite soluble groups, de Gruyter Exp. Math., 4 / К. Doerk, Т. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter & Co., 1992. – 891 p.
3. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск : Беларуская навука, 1997. – 240 с.
4. Каморников, С.Ф. Подгрупповые факторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск : Беларуская навука, 2003. – 254 с.
5. Каморников, С.Ф. Пронормальные проекторы конечных ω -разрешимых групп / С.Ф. Каморников // Вопросы алгебры. – 1986. – Вып. 2. – С. 80–86.
6. Ведерников, В.А. Вполне факторизуемые формации конечных групп / В.А. Ведерников // Вопросы алгебры. – 1990. – Вып. 5. – С. 28–34.
7. Васильев, А.Ф. О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников,

- В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и другие примыкающие алгебраические структуры : сб. ст. / Ин-т математики АН Украины ; отв. ред. Н.С. Черников. – Киев, 1993. – С. 27–54.
8. Скиба, А.Н. О локальных формациях с дополняемыми локальными подформациями / А.Н. Скиба // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 10. – С. 75–80.
9. Скиба, А.Н. О дополняемых подформациях / А.Н. Скиба // Вопросы алгебры. – 1996. – Вып. 9. – С. 55–62.
10. Сафонов, В.Г. О кратных локальных формациях с ограниченным нильпотентным дефектом / В.Г. Сафонов // Вопросы алгебры. – 1996. – Вып. 9. – С. 112–127.
11. Воробьев, Н.Н. О прямых разложениях ω -локальных формаций и классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 1997. – № 3. – С. 55–58.
12. Жевнова, Н.Г. p -насыщенные формации с дополняемыми p -насыщенными подформациями / Н.Г. Жевнова, А.Н. Скиба // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 23–29.
13. Близнец, И.В. О прямых разложениях композиционных формаций / И.В. Близнец, Н.Н. Воробьев // Вопросы алгебры. – 1998. – Вып. 12. – С. 106–112.
14. Воробьев, Н.Н. О булевых решетках n -кратно локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев, А.Н. Скиба // Сибирский математический журнал. – 1999. – Т. 40, № 3. – С. 523–530.
15. Воробьев, Н.Н. О булевых решетках n -кратно ω -локальных классов Фиттинга / Н.Н. Воробьев // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры–18. – 2002. – № 5 (14). – С. 43–46.
16. Васильев, А.Ф. К проблеме Кегеля-Шеметкова о решетках обобщенно субнормальных подгрупп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников // Алгебра и логика. – 2002. – Т. 41, № 4. – С. 411–428.
17. Скачкова, Ю.А. Булевы решетки кратко Ω -расслоенных формаций / Ю.А. Скачкова // Дискретная математика. – 2002. – Т. 14, вып. 3. – С. 42–46.
18. Камозина, О.В. Булевы решетки n -кратно Ω -биканонических классов Фиттинга / О.В. Камозина // Дискретная математика. – 2002. – Т. 14, вып. 3. – С. 47–53.
19. Воробьев, Н.Н. О булевых решетках частично насыщенных формаций / Н.Н. Воробьев, В.О. Побойнев // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 4. – С. 37–42.
20. Aniskov, V.V. On local formations with complemented local subformations / V.V. Aniskov, A.N. Skiba. – Gomel, 1993. – 10 p. – (Preprint / Gomel State University ; № 5).
21. Близнец, И.В. Разложимые ω -композиционные формации / И.В. Близнец, А.Н. Скиба. – Гомель, 2002. – 15 с. – (Препринт / Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины ; № 33).
22. Эйдинов, М.И. О формациях с дополняемыми подформациями / М.И. Эйдинов // Тезисы докл. IX Всесоюзн. симпозиума по теории групп. – М., 1984. – С. 101.
23. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
24. Скиба, А.Н. Формации алгебраических систем / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1989. – 256 с.
25. Скиба, А.Н. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // Матем. труды. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.
- Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант БРФФИ–РФФИ Ф10Р-231).*

Поступила в редакцию 31.01.11.

УДК 512.548

ТРАНСПОНИРОВАННЫЕ ВЕКТОР-МАТРИЦЫ

А.М. Гальмак

Могилевский государственный университет продовольствия, Могилев

TRANSPONED VECTOR-MATRICES

A.M. Gal'mak

Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev

В статье определяются и изучаются транспонированные вектор-матрицы.

Ключевые слова: матрица, вектор-матрица, кольцо, поле, полугруппы, n -арная группа.

The transposed vector-matrices are defined and studied in this paper.

Keywords: matrix, vector-matrix, ring, field, semigroups, n -ary group.

Введение

В статье рассматриваются упорядоченные наборы, у которых все компоненты являются матрицами над некоторым кольцом, в частности над полем. Такие наборы называются вектор-матрицами. Для произвольных $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки σ из S_k на множестве всех k -компонентных вектор-матриц над ассоциативным кольцом P определяется частичная l -арная операция, являющаяся l -арным аналогом бинарной операции умножения матриц. Если $(l-1)$ -ая степень подстановки σ является тождественной подстановкой, то указанная частичная l -арная операция, как и её бинарный прототип, является ассоциативной. Для произвольной вектор-матрицы вводится понятие транспонированной вектор-матрицы и изучаются её свойства, некоторые из которых существенно отличаются от аналогичных свойств обычных транспонированных матриц.

Наборы $(A_1, A_2, \dots, A_{m-1})$, у которых все компоненты A_1, A_2, \dots, A_{m-1} являются квадратными матрицами одного и того же порядка над полем комплексных чисел, рассматривал Э. Пост [1]. Такие наборы он называл m -адическими (m -арными) матрицами. Это название объясняется тем, что на множестве всех m -арных матриц Э. Пост определил m -арную операцию, являющуюся m -арным аналогом операции умножения обычных матриц. Относительно этой m -арной операции множество всех m -арных матриц, у которых определители всех компонент отличны от нуля, является m -арной группой. Представляет интерес изучение упорядоченных наборов матриц, которые в отличие от наборов, изучавшихся Э. Постом, рассматриваются над произвольным кольцом, не обязаны быть квадратными, и различные компоненты одного и того же набора могут иметь несовпадающие размеры.

1 Определения

Следующее определение обобщает понятие m -арной матрицы из работы Э. Поста [1].

Определение 1.1. Пусть P – кольцо, k – целое, $k \geq 1$. Упорядоченный набор

$$\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k) \quad (1.1)$$

k матриц A_1, \dots, A_k размеров $m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k$ с элементами из P называется *векторной матрицей* или *вектор-матрицей* размера $(m_1 \times n_1, \dots, m_k \times n_k)$ над P .

Вектор-матрицы вида (1.1) будем называть также *k -компонентными* вектор-матрицами.

Понятно, что 1-компонентные вектор-матрицы – это обычные матрицы.

Вектор-матрица (1.1), у которой все компоненты A_1, \dots, A_k – матрицы одного и того же размера $m \times n$, называется *вектор-матрицей* размера $m \times n$.

Вектор-матрица (1.1), у которой все компоненты A_1, \dots, A_k – квадратные матрицы порядков n_1, \dots, n_k соответственно, называется *квадратной вектор-матрицей* порядка (n_1, \dots, n_k) .

Вектор-матрица (1.1), у которой все компоненты A_1, \dots, A_k – квадратные матрицы одного и того же порядка n , называется *квадратной вектор-матрицей* порядка n .

Если в определении 1.1 положить $P = \mathbb{C}$ – поле комплексных чисел, $k = m - 1$, A_1, \dots, A_{m-1} – квадратные матрицы одного и того же порядка, то получим определение m -арной матрицы из работы Э. Поста [1].

Для обозначения множества всех постановок множества $\{1, 2, \dots, k\}$ используем стандартное обозначение S_k .

Определение 1.2. Если $k \geq 2$, $l \geq 2$, σ – подстановка из S_k ,

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \dots, A_{ik}), i = 1, \dots, l$$

– k -компонентные вектор-матрицы над

ассоциативным кольцом P такие, что для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ определено произведение

$$Y_j = A_{1j}A_{2\sigma(j)} \dots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}A_{l\sigma^{l-1}(j)}, \quad (1.2)$$

то положим

$$[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k} = \{Y_1, \dots, Y_k\}. \quad (1.3)$$

Замечание 1.1. Если в определении 1.2 все компоненты матриц $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_l$ являются матрицами 1-го порядка, то операция $[\]_{l, \sigma, k}$ определена на декартовой степени P^k . Таким образом, операцию $[\]_{l, \sigma, k}$ из определения 1.2 можно считать обобщением операции $[\]_{l, \sigma, k}$ из [2, 3].

Аналогично бинарному случаю, l -арное произведение (1.3) определено не всегда, а только в тех случаях, когда для любых соседних сомножителей в правой части (1.2) число столбцов предшествующего сомножителя совпадает с числом строк последующего сомножителя.

Имеет место

Теорема 1.1. Пусть $\mathbf{A}_m = (A_{m1}, \dots, A_{mk})$, $m = 1, \dots, 2l - 1 - k$ -компонентные вектор-матрицы над ассоциативным кольцом, σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда, если для некоторого $i = 0, 1, \dots, l - 1$ определена k -компонентная вектор-матрица

$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_i[\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_{i+l}]_{l, \sigma, k} \mathbf{A}_{i+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l, \sigma, k}$
то для любого $j = 0, 1, \dots, l - 1$ определена k -компонентная вектор-матрица

$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_j[\mathbf{A}_{j+1} \dots \mathbf{A}_{j+l}]_{l, \sigma, k} \mathbf{A}_{j+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l, \sigma, k}$
и верно равенство

$$[\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_i[\mathbf{A}_{i+1} \dots \mathbf{A}_{i+l}]_{l, \sigma, k} \mathbf{A}_{i+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l, \sigma, k} =$$

$$= [\mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_j[\mathbf{A}_{j+1} \dots \mathbf{A}_{j+l}]_{l, \sigma, k} \mathbf{A}_{j+l+1} \dots \mathbf{A}_{2l-1}]_{l, \sigma, k}.$$

Определение 1.3. Для всякой вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ над ассоциативным кольцом с единицей транспонированной называется вектор-матрица $\mathbf{A}' = (A'_1, \dots, A'_k)$, у которой каждая компонента A'_j является транспонированной матрицей для компоненты A_j вектор-матрицы \mathbf{A} .

Подчеркнем, что компоненты A_1, \dots, A_k могут быть матрицами различных размеров.

2 Основной результат

Нам понадобится следующий бинарный результат.

Лемма 2.1. Если для матриц B_1, \dots, B_l над ассоциативным кольцом с единицей определено произведение $B_1B_2 \dots B_l$, то определено произведение $B'_1 \dots B'_lB'_1$ и верно равенство

$$(B_1B_2 \dots B_l)' = B'_1 \dots B'_lB'_1.$$

Теорема 2.2. Пусть σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$,

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \dots, A_{ik}), i = 1, \dots, l \quad (2.1)$$

такие вектор-матрицы над ассоциативным кольцом с единицей, что определена вектор-матрица

$$[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{l-1}\mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k}. \quad (2.2)$$

Тогда определена вектор-матрица

$$[\mathbf{A}'_l\mathbf{A}'_{l-1} \dots \mathbf{A}'_2\mathbf{A}'_1]_{l, \sigma^{-1}, k} \quad (2.3)$$

и верно равенство

$$[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{l-1}\mathbf{A}_l]_{l, \sigma, k}' = [\mathbf{A}'_l\mathbf{A}'_{l-1} \dots \mathbf{A}'_2\mathbf{A}'_1]_{l, \sigma^{-1}, k}. \quad (2.4)$$

Доказательство. Выпишем j -ую компоненту вектор-матрицы (2.2):

$$Y_j = A_{1j}A_{2\sigma(j)} \dots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}A_{l\sigma^{l-1}(j)} =$$

$$= A_{1j}A_{2\sigma(j)} \dots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}A_{lj}, j = 1, \dots, k.$$

Если положить $\tau = \sigma^{-1}$, то из условия $\sigma^l = \sigma$ получаем

$$\tau = \sigma^{l-2}, \tau^2 = \sigma^{l-3}, \dots, \tau^{l-2} = \sigma, \tau^{l-1} = \varepsilon, \tau^l = \tau. \quad (2.5)$$

Обозначив j -ую компоненту вектор-матрицы в левой части (2.4) через U_j , и, используя лемму 2.1 и (2.5), получим

$$U_j = Y'_j = (A_{1j}A_{2\sigma(j)} \dots A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}A_{lj})' =$$

$$= A'_{lj}A'_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} \dots A'_{2\sigma(j)}A'_{1j} = A'_{lj}A'_{(l-1)\tau(j)} \dots A'_{2\tau^{l-2}(j)}A'_{1j},$$

то есть

$$U_j = A'_{lj}A'_{(l-1)\tau(j)} \dots A'_{2\tau^{l-2}(j)}A'_{1j}. \quad (2.6)$$

Так как

$$\mathbf{A}'_i = (A'_i, \dots, A'_k), i = 1, \dots, l,$$

то из (2.6) вытекает, что определена вектор-матрица (2.3), j -ая компонента которой совпадает с правой частью (2.6). Так как для любого $j = 1, \dots, k$ j -ые компоненты в левой и правой частях равенства (2.4) совпадают, то указанное равенство верно. Теорема доказана.

Пример. Пусть $k=2, l=3, \sigma = \sigma^{-1} = (12) \in S_2, P = \mathbb{Z}$,

$$\mathbf{A}_1 = ((1 \ 2), \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}),$$

$$\mathbf{A}_2 = \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathbf{A}_3 = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, (6 \ 4) \right).$$

Тогда

$$[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3]_{3, \sigma, 2} =$$

$$= ((1 \ 2) \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}) (6 \ 4) =$$

$$= (29, \begin{pmatrix} -84 & -56 \\ 78 & 52 \end{pmatrix}).$$

Следовательно,

$$[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3]_{3, \sigma, 2}' = (29, \begin{pmatrix} -84 & 78 \\ -56 & 52 \end{pmatrix}). \quad (2.7)$$

Так как

$$\mathbf{A}'_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \right),$$

$$\mathbf{A}'_2 = ((-4 \ 5 \ 1), \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}), \quad \mathbf{A}'_3 = ((3 \ -2), \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}),$$

то

$$\begin{aligned}
 & [\mathbf{A}'_3 \mathbf{A}'_2 \mathbf{A}'_1]_{3, \sigma^{-1}, 2} = \\
 & = ((3 \quad -2) \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} (-4 \quad 5 \quad 1) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}) = \\
 & = (29, \begin{pmatrix} -84 & 78 \\ -56 & 52 \end{pmatrix}),
 \end{aligned}$$

то есть

$$[\mathbf{A}'_3 \mathbf{A}'_2 \mathbf{A}'_1]_{3, \sigma^{-1}, 2} = (29, \begin{pmatrix} -84 & 78 \\ -56 & 52 \end{pmatrix}). \quad (2.8)$$

Сравнивая (2.7) и (2.8), видим, что

$$[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3]_{3, \sigma, 2} = [\mathbf{A}'_3 \mathbf{A}'_2 \mathbf{A}'_1]_{3, \sigma^{-1}, 2}.$$

Произведением элемента $\lambda \in P$ на вектор-матрицу (1.1) называется вектор-матрица

$$\lambda \mathbf{A} = (\lambda A_1, \dots, \lambda A_k).$$

Суммой вектор-матриц $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k)$ и $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_k)$ одинаковых размеров называется вектор-матрица

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_1 + B_1, \dots, A_k + B_k)$$

того же размера.

Замечание 2.1. Используя верные для обычных матриц равенства

$$(A + B)' = A' + B', \quad (\lambda A)' = \lambda A', \quad \lambda \in P,$$

можно убедиться в справедливости аналогичных равенств

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{A}' + \mathbf{B}', \quad (\lambda \mathbf{A})' = \lambda \mathbf{A}', \quad \lambda \in P$$

для вектор-матриц. В первом равенстве вектор-матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} имеют одинаковые размеры.

3 Следствия

Далее во всех следствиях этого раздела вектор-матрицы, как и в теореме 2.2, рассматриваются над ассоциативным кольцом с единицей.

Если k -компонентные квадратные вектор-матрицы

$$\mathbf{A}_1 = (A_{11}, \dots, A_{1k}), \dots, \mathbf{A}_l = (A_{l1}, \dots, A_{lk})$$

таковы, что для любого $j = 1, \dots, k$ матрицы

$$A_{1j}, A_{2\sigma(j)}, \dots, A_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}, A_{l\sigma^{l-1}(j)} \quad (3.1)$$

имеют одинаковый порядок, то определена вектор-матрица (2.2). Поэтому из теоремы 2.2 вытекает

Следствие 3.1. Пусть σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$, вектор-матрицы (2.1) являются квадратными, и для любого $j = 1, \dots, k$ матрицы (3.1) имеют одинаковый порядок. Тогда верно (2.4).

Следствие 3.2. Пусть σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_l$ – k -компонентные квадратные вектор-матрицы одного и того же порядка n . Тогда верно (2.4).

Если σ – цикл длины t из S_k , $m \geq 1$, $l = mt + 1$, то $\sigma^l = \sigma$.

Поэтому имеют место следующие три следствия.

Следствие 3.3. Пусть σ – цикл длины t из S_k , $m \geq 1$,

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \dots, A_{ik}), \quad i = 1, \dots, mt + 1 \quad (3.2)$$

такие вектор-матрицы, что определена вектор-матрица $[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{mt} \mathbf{A}_{mt+1}]_{mt+1, \sigma, k}$. Тогда определена вектор-матрица $[\mathbf{A}'_{mt+1} \mathbf{A}'_{mt} \dots \mathbf{A}'_2 \mathbf{A}'_1]_{mt+1, \sigma^{-1}, k}$ и верно равенство

$$\begin{aligned}
 & [\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{mt} \mathbf{A}_{mt+1}]'_{mt+1, \sigma, k} = \\
 & = [\mathbf{A}'_{mt+1} \mathbf{A}'_{mt} \dots \mathbf{A}'_2 \mathbf{A}'_1]_{mt+1, \sigma^{-1}, k}. \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

В частности, если $m = 1$, то

$$\begin{aligned}
 & [\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{t+1}]'_{t+1, \sigma, k} = \\
 & = [\mathbf{A}'_{t+1} \mathbf{A}'_t \dots \mathbf{A}'_2 \mathbf{A}'_1]_{t+1, \sigma^{-1}, k}. \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

Следствие 3.4. Пусть σ – цикл длины t из S_k , $m \geq 1$, вектор-матрицы (3.2) квадратные, и для любого $j = 1, \dots, k$ матрицы

$$A_{1j}, A_{2\sigma(j)}, \dots, A_{(mt)\sigma^{m-1}(j)}, A_{(mt+1)\sigma^m(j)} = A_{(mt+1)j}$$

имеют один и тот же порядок. Тогда верно (3.3). В частности, если $m = 1$, то верно (3.4).

Следствие 3.5. Пусть σ – цикл длины t из S_k , $m \geq 1$, $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{mt+1}$ – k -компонентные квадратные вектор-матрицы одного и того же порядка n . Тогда верно (3.3). В частности, если $m = 1$, то верно (3.4).

Полагая в следствиях 3.3–3.5 $t = k$, получим еще три следствия.

Следствие 3.6. Пусть σ – цикл длины k из S_k , $m \geq 1$,

$$\mathbf{A}_i = (A_{i1}, \dots, A_{ik}), \quad i = 1, \dots, mk + 1 \quad (3.5)$$

такие вектор-матрицы, что определена вектор-матрица $[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{mk} \mathbf{A}_{mk+1}]_{mk+1, \sigma, k}$. Тогда определена вектор-матрица $[\mathbf{A}'_{mk+1} \mathbf{A}'_{mk} \dots \mathbf{A}'_2 \mathbf{A}'_1]_{mk+1, \sigma^{-1}, k}$ и верно равенство

$$\begin{aligned}
 & [\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_{mk} \mathbf{A}_{mk+1}]'_{mk+1, \sigma, k} = \\
 & = [\mathbf{A}'_{mk+1} \mathbf{A}'_{mk} \dots \mathbf{A}'_2 \mathbf{A}'_1]_{mk+1, \sigma^{-1}, k}. \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

В частности, если $m = 1$, то

$$\begin{aligned}
 & [\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_k \mathbf{A}_{k+1}]'_{k+1, \sigma, k} = \\
 & = [\mathbf{A}'_{k+1} \mathbf{A}'_k \dots \mathbf{A}'_2 \mathbf{A}'_1]_{k+1, \sigma^{-1}, k}. \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

Следствие 3.7. Пусть σ – цикл длины k из S_k , $m \geq 1$, вектор-матрицы (3.5) являются квадратными, и для любого $j = 1, \dots, k$ матрицы

$$A_{1j}, A_{2\sigma(j)}, \dots, A_{(mk)\sigma^{m-1}(j)}, A_{(mk+1)\sigma^m(j)} = A_{(mk+1)j}$$

имеют одинаковый порядок. Тогда верно (3.6). В частности, если $m = 1$, то верно (3.7).

Следствие 3.8. Пусть σ – цикл длины k из S_k , $m \geq 1$, $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{mk+1}$ – k -компонентные квадратные вектор-матрицы одного и того же порядка n . Тогда верно (3.6). В частности, если $m = 1$, то верно (3.7).

Так как для любой транспозиции $\sigma \in S_k$ верно $\sigma = \sigma^{-1}$, $\sigma^{2m+1} = \sigma$, то, полагая в следствиях 3.3–3.5 $t = 2$, получим еще три следствия.

Следствие 3.9. Пусть σ – транспозиция из S_k , $m \geq 1$,

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{A}_1 = (A_{11}, \dots, A_{1k}), \dots, \\
 & \mathbf{A}_{2m+1} = (A_{(2m+1)1}, \dots, A_{(2m+1)k}) \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

такие вектор-матрицы, что определена вектор-матрица $[A_1 A_2 \dots A_{2m} A_{2m+1}]_{2m+1, \sigma, k}$. Тогда определена вектор-матрица $[A'_{2m+1} A'_{2m} \dots A'_2 A'_1]_{2m+1, \sigma, k}$ и верно равенство

$$\begin{aligned} & [A_1 A_2 \dots A_{2m} A_{2m+1}]'_{2m+1, \sigma, k} = \\ & = [A'_{2m+1} A'_{2m} \dots A'_2 A'_1]_{2m+1, \sigma, k}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

В частности, если $m = 1$, то

$$[A_1 A_2 A_3]'_{3, \sigma, k} = [A'_3 A'_2 A'_1]_{3, \sigma, k}. \quad (3.10)$$

Следствие 3.10. Пусть σ – транспозиция из S_k , $m \geq 1$, вектор-матрицы (3.8) являются квадратными, и для любого $j = 1, \dots, k$ матрицы

$$A_{1j}, A_{2\sigma(j)}, \dots, A_{2m\sigma^{m-1}(j)}, A_{(2m+1)\sigma^m(j)} = A_{(2m+1)j}$$

имеют один и тот же порядок. Тогда верно (3.9). В частности, если $m = 1$, то верно (3.10).

Следствие 3.11. Пусть σ – транспозиция из S_k , $m \geq 1$, A_1, \dots, A_{2m+1} – k -компонентные квадратные вектор-матрицы одного и того же порядка n . Тогда верно (3.9). В частности, если $m = 1$, то верно (3.10).

Полагая в следствиях 3.9–3.11 $k = 2$, получим еще три следствия.

Следствие 3.12. Пусть $\sigma = (12) \in S_2$, $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} A_1 &= (A_{11}, A_{12}), \dots, \\ A_{2m+1} &= (A_{(2m+1)1}, A_{(2m+1)2}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

такие вектор-матрицы, что определена вектор-матрица $[A_1 A_2 \dots A_{2m} A_{2m+1}]_{2m+1, (12), 2}$. Тогда определена вектор-матрица

$$[A'_{2m+1} A'_{2m} \dots A'_2 A'_1]_{2m+1, (12), 2}$$

и верно равенство

$$\begin{aligned} & [A_1 A_2 \dots A_{2m} A_{2m+1}]'_{2m+1, (12), k} = \\ & = [A'_{2m+1} A'_{2m} \dots A'_2 A'_1]_{2m+1, (12), 2}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

В частности, если $m = 1$, то

$$[A_1 A_2 A_3]'_{3, (12), 2} = [A'_3 A'_2 A'_1]_{3, (12), 2}. \quad (3.13)$$

Следствие 3.13. Пусть $\sigma = (12) \in S_2$, $m \geq 1$, 2-компонентные вектор-матрицы (3.11) являются квадратными, компоненты $A_{11}, A_{22}, A_{31}, \dots, A_{(2m)2}, A_{(2m+1)1}$ имеют один и тот же порядок, один и тот же порядок имеют также компоненты $A_{12}, A_{21}, A_{32}, \dots, A_{(2m)1}, A_{(2m+1)2}$. Тогда верно (3.12). В частности, если $m = 1$, то верно (3.13).

Следствие 3.14. Пусть $\sigma = (12) \in S_2$, $m \geq 1$, A_1, \dots, A_{2m+1} – 2-компонентные квадратные вектор-матрицы одного и того же порядка n . Тогда верно (3.12). В частности, если $m = 1$, то верно (3.13).

4 Связь между транспонированными и косыми вектор-матрицами

Обозначим через $\mathbf{M}(n, k, P)$ множество всех k -компонентных квадратных вектор-матриц n -го порядка над кольцом P . Ясно, что $\mathbf{M}(n, k, P)$ совпадает с декартовой степенью $\underbrace{\mathbf{M}(n, P) \times \dots \times \mathbf{M}(n, P)}_k$ множества $\mathbf{M}(n, P)$ всех квадратных матриц порядка n над P .

Если P – ассоциативное кольцо, то $\mathbf{M}(n, P)$ – ассоциативное кольцо. Поэтому, ввиду теорем 3.2.2 и 3.4.1 из [3], верна

Теорема 4.1. Если $\langle P, +, \times \rangle$ – ассоциативное кольцо, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle \mathbf{M}(n, k, P), +, []_{l, \sigma, k} \rangle$ – ассоциативное $(2, l)$ -кольцо.

Обозначим через $\mathbf{GL}(n, k, P)$ множество всех k -компонентных квадратных вектор-матриц n -го порядка над ассоциативным, коммутативным кольцом P с единицей, у которых все компоненты обратимы в кольце $\mathbf{M}(n, P)$. Понятно, что множество $\mathbf{GL}(n, k, P)$ можно определить, как множество всех k -компонентных квадратных вектор-матриц n -го порядка над ассоциативным, коммутативным кольцом P с единицей, у которых определитель каждой компоненты обратим в кольце P .

Ясно, что $\mathbf{GL}(n, k, P)$ совпадает с декартовой степенью $\underbrace{\mathbf{GL}(n, P) \times \dots \times \mathbf{GL}(n, P)}_k$ полной

линейной группы $\mathbf{GL}(n, P)$. Так как $\mathbf{GL}(n, P)$ – группа с операцией умножения матриц, то, ввиду теоремы 3.6.2 из [3], верна

Теорема 4.2. Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle \mathbf{GL}(n, k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа. В частности, $\langle \mathbf{GL}(n, k, P), []_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$ – $(k+1)$ -арная группа.

Замечание 4.1. Из соответствующих результатов книги [3] следует, что l -арная группа $\langle \mathbf{GL}(n, k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ не имеет единиц, а при $n \geq 2$ является неполуабелевой, в частности неабелевой.

Замечание 4.2. l -арную группу $\langle \mathbf{GL}(n, k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ по аналогии с бинарным случаем естественно называть полной линейной l -арной группой, соответствующей данным k и σ .

Замечание 4.3. Пост рассматривал [1] частный случай $\langle \mathbf{GL}(n, k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ при $l = k + 1$, $\sigma = (12 \dots k)$, $P = \mathbb{C}$ – поле комплексных чисел. $(k+1)$ -арную группу $\langle \mathbf{GL}(n, k, \mathbb{C}), []_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$ он называл полной линейной $(k+1)$ -арной группой.

Для любого элемента a n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ решение уравнения $[x \underbrace{a \dots a}_{n-1}] = a$ обозначают символом \bar{a} и называют косым элементом для a .

Таким образом, для каждой вектор-матрицы A l -арной группы $\langle \mathbf{GL}(n, k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$ существует косой элемент, который естественно называть косой вектор-матрицей для A . Для обозначения косой вектор-матрицы A будем использовать символ \tilde{A} , так как символ \bar{A} уже используется для обозначения комплексно-сопряженной вектор-матрицы для A .

Подчеркнем, что косые вектор-матрицы определяются для вектор-матриц из $\langle \mathbf{GL}(n, k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$, у которых все компоненты

являются обратимыми квадратными матрицами одного и того же порядка n , а подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$.

Вообще говоря, в обозначении косога элемента должен присутствовать символ n -арной групповой операции, который, как правило, не указывают, чтобы не загромождать записи. Однако, в некоторых случаях, присутствие символа n -арной групповой операции в обозначении косога элемента желательнее. В таких случаях для обозначения косога элемента a n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ используют символ \tilde{a} . В частности,

$\overset{\sim}{\mathbf{A}}_{l, \sigma, k}$ – косога вектор-матрица для вектор-матрицы \mathbf{A} из $\langle \mathbf{GL}(n, k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$.

Лемма 4.1. Пусть подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Если u квадратной вектор-матрицы $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k) \in \mathbf{GL}(n, k, P)$ порядка n над P все компоненты A_j являются обратимыми, то существует косога вектор-матрица $\overset{\sim}{\mathbf{A}} = (B_1, \dots, B_k)$, все компоненты которой являются квадратными матрицами порядка n над P и имеют следующий вид

$$B_j = A_{\sigma^{l-2}(j)}^{-1} \dots A_{\sigma(j)}^{-1}, j = 1, \dots, k. \quad (4.1)$$

Доказательство. Так как вектор-матрица \mathbf{A} является элементом l -арной группы $\langle \mathbf{GL}(n, k, P), []_{l, \sigma, k} \rangle$, то в ней существует косога элемент $\overset{\sim}{\mathbf{A}} = (B_1, \dots, B_k)$, для которого

$$[\overset{\sim}{\mathbf{A}} \underbrace{\mathbf{A} \dots \mathbf{A}}_{l-1}]_{l, \sigma, k} = \mathbf{A},$$

то есть

$$[(B_1 \dots B_k) \underbrace{(A_1, \dots, A_k) \dots (A_1, \dots, A_k)}_{l-1}]_{l, \sigma, k} = (A_1, \dots, A_k),$$

откуда, используя определение операции $[]_{l, \sigma, k}$ и условие $\sigma^l = \sigma$, получаем

$$B_j A_{\sigma(j)} \dots A_{\sigma^{l-2}(j)} A_j = A_j.$$

Из последнего равенства вытекает (4.1). Лемма доказана.

Доказанная лемма может быть получена из предложения 3.6.3 [3], если в ней считать группу A полной линейной группой $\mathbf{GL}(n, P)$.

Теорема 4.3. Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{A} \in \mathbf{GL}(n, k, P)$, то

$$(\overset{\sim}{\mathbf{A}})' = (\mathbf{A}'). \quad (4.2)$$

Доказательство. Положим

$$\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_k), \quad (\overset{\sim}{\mathbf{A}})' = (D_1, \dots, D_k), \\ (\mathbf{A}') = (C_1, \dots, C_k).$$

Так как по лемме 4.1 $\overset{\sim}{\mathbf{A}} = (B_1, \dots, B_k)$, где $B_j = A_{\sigma^{l-2}(j)}^{-1} \dots A_{\sigma(j)}^{-1}$, для любого $j = 1, \dots, k$, то, используя лемму 2.1, получим

$$D_j = B_j' = (A_{\sigma^{l-2}(j)}^{-1} \dots A_{\sigma(j)}^{-1})' = (A_{\sigma(j)}^{-1})' \dots (A_{\sigma^{l-2}(j)}^{-1})',$$

то есть

$$D_j = (A_{\sigma(j)}^{-1})' \dots (A_{\sigma^{l-2}(j)}^{-1})', j = 1, \dots, k. \quad (4.3)$$

С другой стороны, так как $\mathbf{A}' = (A_1', \dots, A_k')$, то, полагая $\tau = \sigma^{-1}$, и, используя (2.5), лемму 4.1 и соответствующий бинарный результат (операции транспонирования и взятия обратного элемента перестановочны), получим

$$C_j = (A_{\tau^{l-2}(j)}')^{-1} \dots (A_{\tau(j)}')^{-1} = (A_{\sigma(j)}^{-1})' \dots (A_{\sigma^{l-2}(j)}^{-1})',$$

то есть

$$C_j = (A_{\sigma(j)}^{-1})' \dots (A_{\sigma^{l-2}(j)}^{-1})'. \quad (4.4)$$

Из (4.3) и (4.4) вытекает (4.2). Теорема доказана.

Следствие 4.1. Если σ – цикл длины t из S_k ,

$\mathbf{A} \in \mathbf{GL}(n, k, P)$, то $(\overset{\sim}{\mathbf{A}})' = (\mathbf{A}')$. В частности, $(\overset{\sim}{\mathbf{A}})' = (\mathbf{A}')$.

Следствие 4.2. Если σ – цикл длины k из S_k ,

$\mathbf{A} \in \mathbf{GL}(n, k, P)$, то $(\overset{\sim}{\mathbf{A}})' = (\mathbf{A}')$. В частности, $(\overset{\sim}{\mathbf{A}})' = (\mathbf{A}')$.

Следствие 4.3. Если σ – транспозиция из S_k ,

$\mathbf{A} \in \mathbf{GL}(n, k, P)$, то $(\overset{\sim}{\mathbf{A}})' = (\mathbf{A}')$. В частности, $(\overset{\sim}{\mathbf{A}})' = (\mathbf{A}')$.

Следствие 4.4. Если $\mathbf{A} \in \mathbf{GL}(n, 2, P)$, то

$$(\overset{\sim}{\mathbf{A}})' = (\mathbf{A}').$$

Замечание 4.4. В каждом из следствий 4.3 и 4.4 косые элементы в левой и правой частях равенств, в отличие от теоремы 4.3 и следствий 4.1 и 4.2, рассматриваются в одной и той же полиадической группе, поэтому равенства в этих следствиях могут быть записаны проще, без указания полиадической операции. Как, например, в обычных группах: $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
2. Гальмак, А.М. Многочестные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
3. Гальмак, А.М. Многочестные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

Поступила в редакцию 23.12.10.

УДК 512.542

КРИТЕРИИ P -СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ И СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В.А. Ковалева, А.Н. Скиба

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

CRITERIA OF P -SUPERSOLUBILITY AND SUPERSOLUBILITY OF FINITE GROUPS

V.A. Kovalyova, A.N. Skiba

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Пусть G – конечная группа, A – подгруппа группы G . Тогда мы говорим, что A является обобщенно квазинормальной в G , если A либо покрывает, либо изолирует каждую максимальную пару (K, H) из G . Мы говорим, что подгруппа A является m -добавляемой в G , если в группе G существует такая подгруппа T и такая обобщенно квазинормальная подгруппа C , что $G = AT$ и $T \cap A \leq C \leq A$. Основываясь на этих понятиях, получены новые характеристики конечных p -сверхразрешимых и сверхразрешимых групп.

Ключевые слова: максимальная пара, обобщенно квазинормальная подгруппа, m -добавляемая подгруппа, p -сверхразрешимая группа, сверхразрешимая группа.

Let G be a finite group, A a subgroup of G . Then we say that A is generalized quasinormal in G if A either covers or avoids every maximal pair (K, H) of G . We say that A is m -supplemented in G if G has a subgroup T and a generalized quasinormal subgroup C such that $G = AT$ and $T \cap A \leq C \leq A$. Based on these concepts new characterizations of finite p -supersoluble and supersoluble groups are obtained.

Keywords: maximal pair, generalized quasinormal subgroup, m -supplemented subgroup, p -supersoluble group, supersoluble group.

Введение

Все рассматриваемые в работе группы являются конечными.

Пусть A – подгруппа группы G , $K \leq H \leq G$. Тогда мы говорим, что A покрывает пару (K, H) , если $AH = AK$; A изолирует пару (K, H) , если $A \cap H = A \cap K$ [1], [2]. Подгруппа H из G называется квазинормальной [3] или перестановочной [4] в G , если $HE = EH$ для всякой подгруппы E группы G . Квазинормальные подгруппы имеют много интересных свойств. В частности, если A – квазинормальная подгруппа группы G , то для всякой максимальной пары (K, H) из G , т.е. пары (K, H) , где K – максимальная подгруппа в H , A либо покрывает, либо изолирует (K, H) . Это наблюдение приводит нас к следующим обобщениям условия квазинормальности.

Определение 0.1. Пусть A – подгруппа группы G . Тогда мы говорим, что A является обобщенно квазинормальной в G , если A либо покрывает, либо изолирует каждую максимальную пару (K, H) группы G .

Определение 0.2. Пусть A – подгруппа группы G . Мы говорим, что A является

m -добавляемой в G , если в группе G существует такая подгруппа T и такая обобщенно квазинормальная подгруппа C , что $G = AT$ и $T \cap A \leq C \leq A$.

Следующий пример показывает, что в общем случае обобщенно квазинормальная подгруппа группы G может не быть квазинормальной.

Пример 0.1. Пусть p и q – простые числа, где q делит $p-1$. Пусть $A = \langle a \rangle$ – циклическая группа порядка p^2 и B – группа порядка q . Пусть $G = A \wr B = K \rtimes B$, где $K = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_q$ – база подгруппы регулярного сплетения группы G и $L = \langle a^p \rangle$ (здесь мы используем терминологию из [5]). Тогда $G/L = \langle a^p \rangle \rtimes B$ и $L \leq \Phi(G)$. Следовательно, группа G сверхразрешима. Пусть R – подгруппа порядка p группы A_1 . Предположим, что R квазинормальна в G . Тогда R субнормальна в G . Так как R является силовской p -подгруппой в RB , то $B \leq N_G(R)$, и поэтому R нормальна в G , что невозможно. Следовательно, R не является квазинормальной в G . С другой стороны, так как группа G

сверхразрешима, то R является обобщенно квазинормальной в G (см. ниже, теорема 2.1).

Пример 0.2. Подгруппа A группы G называется c -добавляемой в G [6], если в G существует такая подгруппа T , что $TA = G$ и $T \cap A \leq A_G$. Легко заметить, что каждая c -добавляемая подгруппа является t -добавляемой. При этом в примере 0.1 подгруппа R является обобщенно квазинормальной, так как группа G сверхразрешима, R не является нормальной в G и $R \leq \Phi(G)$. Следовательно, R является t -добавляемой в G , но не является c -добавляемой.

В данной работе, основываясь на понятиях обобщенно квазинормальной и t -добавляемой подгруппы, мы даем новые характеристики p -сверхразрешимых и сверхразрешимых групп.

1 Предварительные результаты

Заметим, что для любых подгрупп M, K и H из G , где $K \leq H$, $M \cap H = M \cap K$ эквивалентно $M \cap H \leq K$ и $MH = MK$ эквивалентно $H = K(M \cap H)$.

Лемма 1.1. Пусть $M \leq G$, N – нормальная подгруппа из G и (K, H) – максимальная пара из G . Тогда справедливы следующие утверждения.

(1) Если N изолирует (K, H) , то (KN, HN) – максимальная пара в G и $|HN : KN| = |H : K|$.

(2) Если M покрывает (изолирует) (KN, HN) , то MN покрывает (изолирует, соответственно) (K, H) .

Доказательство.

(1) Предположим, что $H \cap N \leq K$. Пусть T – такая подгруппа из G , что $KN \leq T \leq HN$. Тогда $T = N(T \cap H)$ и $K \leq T \cap H \leq H$. Следовательно, либо $T \cap H = K$, либо $T \cap H = H$. В первом случае мы имеем: $T = (T \cap H)N = KN$. Если $T \cap H = H$, то $T = HN$. Следовательно, (KN, HN) – максимальная пара в G . Окончательно, так как $H \cap N = K \cap N$, то $|HN : KN| = |H : K|$.

(2) Если N покрывает (K, H) , то, очевидно, NM покрывает пару (K, H) . Предположим, что N изолирует (K, H) . Тогда, согласно (1), (KN, HN) – максимальная пара в G . Если M покрывает (KN, HN) , то $H \leq HN \leq NK(M \cap NH)$. Следовательно,

$$H = H \cap NK(M \cap NH) = K(H \cap N(M \cap NH)) \leq K(H \cap NM) \leq H,$$

откуда получаем, что NM покрывает (K, H) . Предположим, что M изолирует (KN, HN) .

Тогда $KN \cap M = HN \cap M$. Следовательно, $HN \cap MN = (HN \cap M)N = (KN \cap M)N \leq KN$ и $MN \cap H \leq KN \cap H = K(N \cap H) = K(N \cap K) = K$. Поэтому MN изолирует (K, H) .

Лемма 1.2. Пусть $M \leq G$ и N – нормальная подгруппа группы G . Тогда если M является обобщенно квазинормальной в G , то NM является обобщенно квазинормальной в G и NM/N является обобщенно квазинормальной в G/N .

Доказательство. Пусть (K, H) – максимальная пара группы G . Если $NH = NK$, то $NMH = NMK$, т. е. NM покрывает (K, H) . Если $N \cap H \leq K$, то по лемме 1.1 (1) получаем, что (NK, NH) – максимальная пара. Следовательно, M либо покрывает, либо изолирует (NK, NH) . По лемме 1.2 (2) получаем, что NM либо покрывает, либо изолирует (K, H) . Следовательно, NM является обобщенно квазинормальной в G .

Пусть теперь $(K/N, H/N)$ – максимальная пара в G/N . Тогда (K, H) – максимальная пара в G . По доказанному выше получаем, что NM покрывает или изолирует (K, H) .

$$\begin{aligned} \text{Если } NMK = NMH, \text{ то} \\ (NM/N)(H/N) &= (NMH)/N = \\ &= (NMK)/N = (NM/N)(K/N). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Если } NM \cap K = NM \cap H, \text{ то} \\ (NM/N) \cap (H/N) &= (NM \cap H)/N = \\ &= (NM \cap K)/N = (NM/N) \cap (K/N). \end{aligned}$$

Следовательно, NM/N является обобщенно квазинормальной в G/N .

Следующая лемма хорошо известна.

Лемма 1.3. Пусть A и B – такие собственные подгруппы из G , что $G = AB$. Тогда $G = AB^x$ и $G \neq AA^x$ для всех $x \in G$.

Лемма 1.4. Если подгруппа E группы G является обобщенно квазинормальной в G , то E субнормальна в G .

Доказательство. Пусть E – произвольная собственная обобщенно квазинормальная подгруппа группы G . Покажем, что E субнормальна в G . Предположим, что это не так, и пусть G – контрпример минимального порядка.

Пусть M – максимальная подгруппа из G такая, что $E \leq M$. Если $M = 1$, то $E = 1$ и, следовательно, E субнормальна в G , что противоречит выбору G . Предположим, что $M \neq 1$. Так как M^x максимальна в G для всякого $x \in G$, то E либо покрывает, либо изолирует пару (M^x, G) . Если E покрывает (M^x, G) для некоторого x , то $EM^x = G$, поэтому $MM^x = G$, что противоречит лемме 1.3. Следовательно, E изолирует

(M^x, G) для всякого $x \in G$. Следовательно, $E \leq M_G$. Поэтому E является также обобщенно квазинормальной в M_G . Тогда, согласно выбору группы G , получаем, что E субнормальна в M_G . Следовательно, E субнормальна в G . Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 1.5. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы и G – группа с разрешимым \mathfrak{F} -корадикалом $P = G^{\mathfrak{F}}$. Предположим, что каждая максимальная подгруппа из G , не содержащая P , принадлежит \mathfrak{F} . Тогда P – p -подгруппа для некоторого простого числа p . Кроме того, если каждая циклическая подгруппа простого порядка и порядка 4 из P (если $p = 2$ и P неабелева) является t -добавляемой в G , то $|P| = p$ не является наименьшим простым делителем $|G|$.

Доказательство. По [7, VI, теорема 24.2] $P = G^{\mathfrak{F}}$ – p -группа для некоторого простого числа p , и справедливы следующие утверждения:

- (1) $P/\Phi(P)$ – \mathfrak{F} -эксцентральный главный фактор из G (т. е. $(P/\Phi(P)) \times (G/C_G(P/\Phi(P)))$ не принадлежит \mathfrak{F});
- (2) P – группа с экспонентой p или экспонентой 4 (если $p = 2$ и P не является абелевой);
- (3) если P является абелевой, то $\Phi(P) = 1$.

Пусть $X/\Phi(P)$ – минимальная подгруппа из $P/\Phi(P)$, $x \in X \setminus \Phi(G)$ и $L = \langle x \rangle$. Тогда $|L| = p$ или $|L| = 4$, и поэтому по условию леммы L является t -добавляемой в G . Пусть T и C – такие подгруппы группы G , что $LT = G$, C является обобщенно квазинормальной в G и $L \cap T \leq C \leq L$. Мы можем предполагать, что L не является обобщенно квазинормальной в G . Тогда $|G : \Phi(P)T| = p$ и $P\Phi(P)T = PT = G$. Следовательно, $|G : \Phi(P)T| = |P| = p$, откуда $G \in \mathfrak{F}$, противоречие.

Нам понадобятся следующие свойства субнормальных подгрупп.

Лемма 1.6. Пусть A и B – подгруппы группы G .

- (1) Если A субнормальна в G , то $A \cap B$ субнормальна в B [5].
- (2) Если A субнормальна в G и A – p -подгруппа, то $A \leq O_x(G)$ [8].

2 Критерии p -сверхразрешимости и сверхразрешимости групп

Теорема 2.1. Разрешимая группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая

ее субнормальная подгруппа обобщенно квазинормальна в G .

Доказательство. Прежде предположим, что группа G сверхразрешима. Пусть A – некоторая субнормальная подгруппа группы G и (K, H) – максимальная пара из G . По лемме 1.6 (1) $A \cap H$ субнормальна в H . Поэтому, не нарушая общности доказательства, мы можем предполагать, что $H = G$ и K – максимальная подгруппа в G . Если $A \subseteq K$, то $A \cap K = A \cap H$, т. е. A изолирует (K, H) . Предположим, что $A \not\subseteq K$.

Если $K_G \neq 1$, то по индукции получаем, что AK_G/K_G покрывает или изолирует $(K/K_G, G/K_G)$. Так как $A \not\subseteq K$, то получаем, что $(AK_G/K_G)(K/K_G) = G/K_G$. Следовательно, $AK_GK = AK = G$, т. е. A покрывает (K, H) . Следовательно, мы можем предполагать, что $K_G = 1$. В этом случае группа G примитивна, и если A_0 – минимальная субнормальная подгруппа группы G , содержащаяся в A , то $A_0 \not\subseteq K$. Поэтому мы можем предполагать, что $A = A_0$ – простая группа. Рассматривая подстановочные представления группы G на множестве правых смежных классов по подгруппе K , нетрудно заметить, что группа G изоморфна некоторой подгруппе симметрической группы S_p степени p . Следовательно, K является p' -холловой подгруппой группы G . Пусть $E = A^G$. Тогда $EK = G$, и поэтому p делит $|A|$. Тогда

$$|AK| = |A| |K| / |A \cap K| \geq |K| p = |G|.$$

Значит, $AK = G$, т. е. A покрывает (K, G) .

Предположим теперь, что группа G разрешима и каждая ее субнормальная подгруппа является обобщенно квазинормальной. Покажем, что в этом случае группа G сверхразрешима. Предположим, что это не так, и пусть G – контрпример минимального порядка. По лемме 1.2 условие теоремы справедливо для каждого фактора группы G . Поэтому в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N такая, что $N \not\subseteq \Phi(G)$ и N – нециклическая p -группа. Следовательно, $G = N \rtimes M$ для некоторой максимальной подгруппы M из G и $N = C_G(N) = O_p(G)$. Пусть L – минимальная нормальная подгруппа из N . Тогда $L \neq N$ и по условию теоремы L покрывает или изолирует (M, G) . Так как $N \cap M = 1$, то L не изолирует (M, G) . Поэтому L покрывает (M, G) . Следовательно, $ML = G$, и поэтому $|N| = |G : M| \leq |L| < |N|$, противоречие. Следовательно, G сверхразрешима.

Напомним, что подгруппа H называется дополняемой в G , если существует такая подгруппа K , что $G = HK$ и $H \cap K = 1$.

Теорема 2.2. Пусть G – группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) Если каждая минимальная подгруппа нечетного порядка группы G t -добавляема в G , то G является $2'$ -сверхразрешимой.

(2) Если группа G разрешима и каждая подгруппа порядка 2 группы G дополняема в G , то G 2 -нильпотентна.

Доказательство.

(1) Пусть каждая минимальная подгруппа нечетного порядка группы G t -добавляема в G . Покажем, что группа G $2'$ -сверхразрешима. Предположим, что это не так, и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть $\mathcal{U}(2')$ – класс всех $2'$ -сверхразрешимых групп. Покажем, что условие теоремы справедливо для подгрупп группы G . Пусть E – произвольная подгруппа группы G и K – минимальная подгруппа нечетного порядка из E . Тогда по условию теоремы K является t -добавляемой в G . Пусть T и C – такие подгруппы группы G , что $KT = G$, C обобщенно квазинормальна в G и $T \cap K \leq C \leq K$. Тогда, очевидно, $E = E \cap KT = K(E \cap T)$ и C является обобщенно квазинормальной в E . Кроме того, $(E \cap T) \cap K = T \cap K \leq C \leq K$. Следовательно, K t -добавляема в E . Таким образом, условие теоремы справедливо для подгрупп группы G . Следовательно, согласно выбору группы G , всякая подгруппа из G принадлежит $\mathcal{U}(2')$. Кроме того, по теореме Томпсона-Фейта о разрешимости групп нечетного порядка каждая группа из $\mathcal{U}(2')$ разрешима.

Прежде покажем, что G разрешима. Предположим противное. Тогда $G = G'$, и если $F = F(G)$, то $F = \Phi(G)$. Действительно. Предположим, что $F \not\subseteq \Phi(G)$. Тогда найдется такая максимальная подгруппа группы G , что $G = MF$. Но тогда $G/F = MF/F \cong M/M \cap F \cong M$ разрешима, а следовательно, и $G/\Phi(G) = (G/F)/(F/\Phi(G))$ разрешима, откуда получаем, что группа G разрешима. Это противоречие показывает, что $F = \Phi(G)$. Поэтому G/F – простая неабелева группа и каждая собственная нормальная подгруппа из G содержится в $F(G)$. Пусть p – наибольший простой делитель $|G/F|$, $\pi = \pi(G/F)$ и q – нечетное простое число из π , отличное от p . Пусть G_q – силовская q -подгруппа из G и $Q = G_q \cap F$ – силовская q -подгруппа из $F(G)$. Предположим, что $Q = 1$, и пусть L –

минимальная подгруппа из G_q . Тогда по лемме 1.6 (2) L не является субнормальной в G . Следовательно, по лемме 1.4 L не является обобщенно квазинормальной в G . По условию теоремы L – t -добавляема в G . Следовательно, для некоторой максимальной подгруппы M из G мы имеем, что $G = LM$. Рассматривая подстановочные представления G/M_G на множестве правых смежных классов M/M_G , нетрудно заметить, что G/M_G изоморфна некоторой подгруппе симметрической группы S_q степени q . Следовательно, q – наибольший простой делитель $|G/M_G|$ и силовская q -подгруппа из G/M_G имеет простой порядок. Но так как $M_G \leq F$, то p делит $|G/M_G/F/M_G|$, а следовательно, p делит $|G/M_G|$. Следовательно, $p < q$, противоречие. Поэтому $Q \neq 1$. Пусть $C = C_G(Q)$ и G_p – силовская подгруппа из G . Предположим, что $E = QG_p$ не является nilпотентной и пусть $H = H_q \rtimes H_p$ – подгруппа Шмидта группы E . Так как условие теоремы справедливо для H , то по лемме 1.5 $q > p$. Это противоречие показывает, что E nilпотентна, поэтому $G_p \leq C$. Пусть Q_i/Q_{i-1} – произвольный G -главный фактор из Q . Тогда $G_p \subseteq C \subseteq C_G(Q_i/Q_{i-1})$ и $F \subseteq C_G(Q_i/Q_{i-1})$. Так как p делит $|G/F|$, то $F < C_G(Q_i/Q_{i-1})$. А так как G/F – простая группа, то $G = C_G(Q_i/Q_{i-1})$. Действительно. Так как $U = C_G(Q_i/Q_{i-1})$ нормальна в G и $G/U \leq G/F$, то либо $U = G$, либо $U = F$. Если $U = F$, то получаем $G_p \leq U$, и так как $|G/F| = |G/U|$ делится на p , то и $|G/G_p|$ делится на p , противоречие. Следовательно, $G = C_G(Q_i/Q_{i-1})$. Поэтому $Q \leq Z_\infty(G)$.

Так как G/F не q -нильпотентна, то G/F содержит q -замкнутую подгруппу Шмидта H/F , где q делит $|H/F|$ (см. [9, IV, 5.4]). Пусть E – минимальное добавление подгруппы F в H . Тогда $E \cap F \leq \Phi(E)$. Следовательно, E является q -замкнутой, и если $V = V_q \rtimes V_r$ – подгруппа Шмидта из E , то $|V_q| = q$ по лемме 1.5. Поэтому по условию теоремы V_q является t -добавляемой в G . Предположим, что $V_q \not\subseteq F$. Тогда V_q не является обобщенно квазинормальной в G по лемме 1.4. Следовательно, для некоторой максимальной подгруппы M из G мы имеем, что $V_q M = G$, что, как и выше, приводит к противоречию. Следовательно, $V_q \leq F$, откуда $V_q \leq Z_\infty(V)$. Следовательно, V nilпотентна.

Это противоречие показывает, что G разрешима. Поэтому G – разрешимая минимальная не $\mathcal{U}(2')$ -группа. Следовательно, по [7, VI, теорема 24.2] получаем, что $G^{u(2)}$ – r -группа для некоторого простого числа r . Тогда по лемме 1.5 получаем $G^{u(2)} = r$. Пусть M – такая максимальная подгруппа из G , что $G = G^{u(2)} \rtimes M$, и пусть $C = C_G(G^{u(2)})$. Тогда $M_G = C \cap M$, и поэтому

$$\begin{aligned} G/M_G &= (G^{u(2)} \rtimes M)/M_G = \\ &= (G^{u(2)} \rtimes M_G M)/M_G = \\ &= (G^{u(2)} M_G/M_G) \rtimes (M/M_G) \end{aligned}$$

$2'$ -сверхразрешима, так как $M/M_G \cong G/C$ – абелева группа. Таким образом, так как G/M_G и $G/G^{u(2)}$ $2'$ -сверхразрешимы, то $G \cong G/(G^{u(2)} \cap M_G)$ $2'$ -сверхразрешима. Полученное противоречие показывает, что группа G $2'$ -сверхразрешима.

(2) Предположим, что группа G разрешима и каждая подгруппа порядка 2 группы G дополняема в G . Покажем, что группа G 2-нильпотентна. Предположим, что это не так, и пусть G – контрпример минимального порядка. Так как условие теоремы справедливо для подгрупп группы G , то $G = P \rtimes Q$ является 2-замкнутой группой Шмидта [9, IV, теорема 5.4]. Более того, $P = G^N$ – минимальная нормальная подгруппа в G . Действительно. Предположим, что H – минимальная нормальная подгруппа из P . Так как по условию теоремы H дополняема в G , то в G найдется такая подгруппа T , что $G = HT$. Тогда $P = H(P \cap T)$ и подгруппа $P \cap T$ нормальна в G . Но так как подгруппа P разрешима, то $P \cap T \leq \Phi(P) = 1$, противоречие. Следовательно, P – минимальная нормальная подгруппа группы G . Но так как каждая минимальная подгруппа из G дополняема в G , то $|P| = 2$, и поэтому $P \leq Z(G)$. Полученное противоречие показывает, что группа G 2-нильпотентна.

Следующий результат, полученный Гашюцом, хорошо известен.

Следствие 2.1 (Гашюц, [9, IV, теорема 5.7]). *Если каждая минимальная подгруппа группы G нормальна в G , то коммутант G' группы G является 2-замкнутой подгруппой.*

Доказательство. По теореме 2.2 группа G p -сверхразрешима для всякого нечетного числа p . Следовательно, $G/O_{p',p}(G)$ сверхразрешима.

А так как $O_2(G)$ есть пересечение всех подгрупп $O_{p',p}(G)$, то G' является 2-замкнутой подгруппой в G .

Следствие 2.2 (Бакли, [10]). *Пусть G – группа нечетного порядка. Если каждая минимальная подгруппа группы G нормальна в G , то G сверхразрешима.*

Следствие 2.3 (Баллистер-Болише, Го, [11]). *Если каждая минимальная подгруппа группы G дополняема в G , то группа G сверхразрешима.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалева, В.А. Конечные группы с обобщенным условием покрытия и изолирования для подгрупп / В.А. Ковалева, А.Н. Скиба // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2009. – № 2 (53). – С. 145–149.
2. Ковалева, В.А. Характеризации конечных разрешимых групп по свойствам обобщенного покрытия и изолирования для подгрупп / В.А. Ковалева, А.Н. Скиба // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2009. – № 3 (54). – С. 200–206.
3. Ore, O. Contributions in the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. J. – 1939. – № 5. – P. 431–460.
4. Stonehewer, S.E. Permutable subgroups in Infinite Groups / S.E. Stonehewer // Math. Z. – 1972. – № 125. – P. 1–16.
5. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992.
6. Wang, Y. Finite Groups with Some Subgroups of Sylow Subgroups c -Supplemented / Y. Wang // J. Algebra. – 2000. – № 224. – P. 464–78.
7. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978.
8. Wielandt, H. Subnormal subgroups and permutation groups / H. Wielandt. Lectures given at the Ohio State University, Columbus, Ohio, 1971.
9. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1967.
10. Buckley, J. Finite groups whose minimal subgroups are normal / J. Buckley // Math. Z. – 1970. – № 15. – P. 15–17.
11. Ballester-Bolinches, A. On complemented subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, X.Y. Guo // Arch. Math. – 1999. – № 72. – P. 161–166.

Поступила в редакцию 27.01.11.

УДК 512.542

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНЕЧНЫХ СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Н.С. Косенок

Гомельский филиал Международного института трудовых и социальных отношений, Гомель

ON ONE CLASS OF FINITE SUPERSOLUBLE GROUPS

N.S. Kosenok

Gomel Branch of International Institute of Labor and Social Relations, Gomel

Доказана следующая теорема.

Теорема. Если в неединичной группе G индексы примитивных подгрупп примарны, то $G=[D]H$ – сверхразрешимая группа, где D и H – холловы нильпотентные в G подгруппы, причем D совпадает с нильпотентным корадикалом $G^{\mathfrak{N}}$ группы G .

Ключевые слова: примитивные подгруппы, конечная группа, разрешимая группа, сверхразрешимая группа, нильпотентная группа.

The following theorem is proved.

Theorem. If in a non-identity finite group G every primitive subgroup has a prime power index, then $G=[D]H$, where D and H are Hall nilpotent subgroups of G and D coincides with the \mathfrak{N} -residual $G^{\mathfrak{N}}$ of G .

Keywords: primitive subgroups, finite group, soluble group, supersoluble group, nilpotent group.

Введение

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны.

Как известно, максимальные подгруппы оказывают существенное влияние на строение группы. Так, например, согласно знаменитой теореме Хупперта [1] группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы имеют простые индексы. Этот результат получил развитие во многих направлениях (см. Л.А.Шеметков и С.А.Чунихин [2]). Заметим, что если мы попытаемся заменить условие простоты индексов на более слабое: индекс каждой максимальной подгруппы есть степень простого числа, то, как показывает пример группы $PSL(2,7)$, группа при таких ограничениях, в общем случае, не является даже разрешимой. Однако, как показано в работе [3], если мы накладываем такое ограничение на более широкий класс примитивных подгрупп [3], то группа G снова будет сверхразрешимой. Напомним, что собственная подгруппа H группы G называется примитивной подгруппой в G , если пересечение всех тех подгрупп из G , которые содержат H собственным образом, снова отлично от H .

В данной работе, развивая идеи работы [3], мы уточняем строение групп, все примитивные подгруппы которых имеют примарные индексы.

1 Некоторые предварительные сведения

Напомним, что подгруппа H группы G называется s -нормальной в G [4], если в G имеется такая нормальная подгруппа T , что $HT = G$ и $T \cap H \subseteq H_G$.

В работе [4] было доказано, что группа G разрешима тогда и только тогда, когда каждая ее максимальная подгруппа s -нормальна. Следующая теорема показывает, что если в группе s -нормальными являются все ее примитивные подгруппы, то эта группа сверхразрешима.

Теорема 1.1 [5]. Если в неединичной группе G каждая ее примитивная подгруппа либо s -нормальна, либо имеет примарный индекс в G , то G сверхразрешима.

Следствие 1.1 [3]. Если в неединичной группе G каждая ее примитивная подгруппа имеет примарный индекс в G , то G сверхразрешима.

Лемма 1.1 [1]. Пусть G – сверхразрешимая группа. Тогда

$$G' \subseteq F(G).$$

Лемма 1.2 [3]. Пусть $H \leq T \leq G$, где G – конечная неединичная группа, причем H является примитивной в T . Тогда найдется такая примитивная в G подгруппа X , что

$$H = T \cap X.$$

2 Основной результат

Усиливая основной результат (Джонсон [3]) докажем следующую теорему.

Теорема 2.1. Если в неединичной группе G индексы примитивных подгрупп примарны, то $G=[D]H$ – сверхразрешимая группа, где D и H – холловы нильпотентные в G подгруппы, причем D совпадает с нильпотентным корадикалом $G^{\mathfrak{N}}$ группы G .

Доказательство. Пусть $D=G^{\mathfrak{N}}$ – \mathfrak{N} -корадикал группы G , т. е. D – наименьшая нормальная в G подгруппа с нильпотентной факторгруппой.

Так как (следствие 1.1) G – сверхразрешимая группа, то, используя лемму 1.1, мы имеем

$$G' \subseteq F(G).$$

Ясно, что $D \subseteq G'$. Поэтому D – нильпотентная группа. Докажем, что D – холлова подгруппа в группе G . Предположим, что это не верно и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда $D \neq 1$.

Сначала предположим, что G имеет две минимальные нормальные подгруппы H и R такие, что H – p -группа и R – q -группа с $p \neq q$. Без потери общности, мы можем предположить, что $H \subseteq D$. Так как [6, с.10]

$$(G/R)^{\text{от}} = G^{\text{от}}R/R = DR/R,$$

то по выбору группы G мы видим, что DR/R – холлова подгруппа в G/R . Пусть D_p – силовская p -подгруппа в D . Тогда по индукции RD_p/R – силовская p -подгруппа в DR/R , а, значит, она также является силовской p -подгруппой в G/R . Поэтому D_p – силовская p -подгруппа в G . Пусть $D_p \neq D$ и пусть D_r – силовская r -подгруппа в D , где $r \neq p$. Теперь, рассматривая факторгруппу G/H , мы видим, как и выше, что D_r – силовская r -подгруппа в G . Тогда D – холлова подгруппа в G . Теперь рассмотрим случай, когда все минимальные нормальные подгруппы в G – p -группы. В этом случае мы видим, что $F(G) = O_p(G)$ – силовская p -подгруппа в G , и $D \subseteq O_p(G)$. Если $H \neq D$, тогда, используя аргументы, приведенные выше, мы видим, что D – силовская p -подгруппа в G . Таким образом мы можем положить, что $H = D$. Теперь мы можем утверждать, что

$$\Phi = \Phi(O_p(G)) = 1.$$

Действительно, если $\Phi \neq 1$, тогда по индукции

$$\Phi D / \Phi = \Phi G^{\text{от}} / \Phi = (G / \Phi)^{\text{от}}$$

– холлова подгруппа в G / Φ . Если $H \subseteq \Phi$, тогда G / Φ – нильпотентная группа. Но $O_p(G) \trianglelefteq G$, и таким образом

$$\Phi \subseteq \Phi(G).$$

Следовательно, G – нильпотентная группа и

$$H = G^{\text{от}} = 1,$$

что противоречит нашему выбору группы G . Поэтому $H \not\subseteq \Phi$ и, таким образом, $H\Phi / \Phi$ – единичная p -группа. Так как

$$(G / \Phi)^{\text{от}} = G^{\text{от}}\Phi / \Phi = H\Phi / \Phi$$

– холлова подгруппа в G / Φ , мы имеем

$$H\Phi = O_p(G),$$

и, вследствие этого, $D = H = O_p(G)$ – холлова подгруппа в G . Это противоречие показывает, что $\Phi(O_p(G)) = 1$.

Теперь мы покажем, что каждая собственная подгруппа T из $O_p(G)$ – нормальна в G . Предположим, что T – максимальная подгруппа в

$O_p(G)$. Тогда T – примитивная в $O_p(G)$ и, таким образом используя лемму 1.2,

$$T = O_p(G) \cap X,$$

для некоторой примитивной подгруппы из G подгруппы X . По предположению, G имеет нильпотентную холлову подгруппу X_0 такую, что $G = XX_0$. Пусть q простой делитель $|G : X|$. Тогда $q \mid |X_0|$. Пусть X_q – силовская q -подгруппа в X_0 .

Предположим, что $q \neq p$. Так как

$$O_p(G) \cap X = T \neq O_p(G),$$

$p \mid |G : X|$, то $p \mid |X_0|$. Поэтому $O_p(G) \subseteq X_0$. Следовательно, поскольку X_0 – нильпотентная группа, то

$$X_q \subseteq C_G(O_p(G)),$$

вопреки [7, с. 36]. Это противоречие показывает, что $|G : X| = p$. Но

$$X \cap O_p(G) \trianglelefteq X$$

и, следовательно, $T \trianglelefteq G$. Таким образом, каждая максимальная подгруппа из $O_p(G)$ нормальна в G .

Пусть T – минимальная подгруппа в $O_p(G)$. Чтобы доказать, что T нормальна в G , нам достаточно доказать, что T есть пересечение всех максимальных в $O_p(G)$ подгрупп T_i , содержащих T . Так как

$$\Phi(O_p(G)) = 1,$$

$O_p(G)$ – элементарная абелева p -группа. Следовательно, $O_p(G) / T$ – также элементарная абелева группа и, таким образом,

$$\Phi(O_p(G) / T) = 1.$$

Следовательно, T есть пересечение всех таких максимальных в $O_p(G)$ подгрупп, содержащих T .

Понятно, что

$$O_p(G) = \langle a \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \dots \times \langle a_i \rangle,$$

где $\langle a_i \rangle$ – минимальная нормальная подгруппа в G , и пусть $\langle a \rangle = H$. Пусть $a_1 = aa_2 \dots a_i$. Так как

$$\langle a_1 \rangle \cap \langle a_2 \rangle \dots \langle a_i \rangle = 1,$$

мы имеем

$$O_p(G) = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \dots \times \langle a_i \rangle.$$

Так как G – нильпотентная группа, $O_p(G) \not\subseteq Z(G)$. Следовательно, существует индекс i такой, что $a_i \notin Z(G)$. Мы уже знаем, что

$$\langle a_i \rangle \trianglelefteq G.$$

Ясно, что G имеет элемент g такой, что $(|g|, p) = 1$ и $g \notin C_G(a_i)$. Пусть

$$y = [[a_i, y_1], \dots, y_n],$$

где $y_1 = \dots = y_n = g$ и $n = |G|$. Тогда, конечно, $y \in H = D$. Но, с другой стороны, $y \in \langle a_i \rangle$ и $y \neq 1$, так как $G \notin C_G(a_i)$. Поэтому $\langle a_i \rangle = H$, противоречие. Это противоречие завершает доказательство теоремы.

Заключение

Доказанная в работе теорема показывает, что всякая конечная группа, в которой индексы примитивных подгрупп примарны, является сверхразрешимой группой, которая факторизуется двумя своими холловскими нильпотентными подгруппами, одна из которых нормальна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Huppert, B. Endliche Gruppen I / В. Huppert. – Berlin–Heidelberg–New York : Springer, 1967. – 793 p.
2. Чунихин С.А., Шеметков Л.А. Конечные группы // Алгебра. Топология. Геометрия. 1969

(Итоги науки ВИНТИ АН СССР). – М. – 1971. – С. 64–65.

3. Johnson, D.L. A note on supersoluble groups / D.L. Johnson – Canad. J. Math. – 1971. – Vol. 23, № 3. – 562–564 p.

4. Wang, Y. c-normality of groups and its properties / Y. Wang // J. Algebra. – 1996. – № 180. – P. 954–965.

5. Косенок Н.С., Рыжик В.Н. Некоторые критерии сверхразрешимости конечных групп // Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. Вопросы алгебры–18. – 2002. – 5 (14). – С. 68–73.

6. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

7. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992. – 889 p.

Поступила в редакцию 19.02.11.

УДК 512.567.5

ВЕКТОРЫ И КРИТЕРИИ ПОЛУАБЕЛЕВОСТИ n -АРНЫХ ГРУПП

Ю.И. Кулаженко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

VECTORS AND SEMIABELIAN CRITERIA OF n -ARY GROUPS

Yu.I. Kulazhenko

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Устанавливаются новые критерии полуабелевости n -арных групп, выраженные через свойства векторов G .

Ключевые слова: симметричные точки, параллелограмм G , полуабелева n -арная группа, вектор G .

New criteria of semiabelian of n -ary groups expressed in terms of the properties of vectors G are determined.

Keywords: symmetrical points, parallelogram G , semiabelian n -ary group, vector G .

Введение

Актуальной задачей теории n -арных групп была и остается задача установления новых критериев полуабелевости. Свидетельством тому могут служить работы [1]–[5] математиков, чьи труды принято относить к разряду классических в области n -арных групп.

Представленная работа, по своей сути, является алгебраической, хотя все приведенные результаты имеют геометрическую интерпретацию и поэтому, на наш взгляд, представляют интерес не только в теории n -арных групп, но и в аффинной геометрии.

Все полученные результаты – критерии полуабелевости n -арной группы $G = \langle X, ()^{[-2]} \rangle$.

Отметим, что из теорем 2.1 и 2.2 следуют, при $n = 3$ соответственно, известные результаты 9.3 и 8.10 Д. Вакарелова из [6]. Причем, теорема 2.1 усиливает результат 9.3 Д. Вакарелова, поскольку является критерием полуабелевости.

1 Определения и понятия, используемые в работе

В дальнейшем элементы n -арной группы G будем называть точками.

Определение 1.1. Точку

$$S_a(b) = (ab^{[-2]} b a)^{2n-4}$$

называют точкой, симметричной точке b относительно точки a .

Определение 1.2. Последовательность k элементов из X называют k -угольником G .

Определение 1.3. Четырехугольник

$$\langle a, b, c, d \rangle$$

называют параллелограммом G , если

$$(ab^{[-2]} b c)^{2n-4} = d.$$

Определение 1.4. n -арную группу G называют полуабелевой, если для любой последовательности $x_i^n \in X^n$ справедливо равенство

$$(x_1 x_2^{n-1} x_n) = (x_n x_2^{n-1} x_1).$$

Определение 1.5. Упорядоченную пару $\langle a, b \rangle$ точек $a, b \in X$ называют направленным отрезком n -арной группы G и обозначают \overline{ab} .

Определение 1.6. Говорят, что направленные отрезки \overline{ab} и \overline{cd} равны и пишут $\overline{ab} = \overline{cd}$, если четырехугольник $\langle a, c, d, b \rangle$ – параллелограмм G .

Пусть \overline{V} – множество всех направленных отрезков n -арной группы G . Согласно предложению 1 из [5] бинарное отношение $=$ на множестве \overline{V} является отношением эквивалентности и разбивает множество \overline{V} на непересекающиеся классы. Класс, порожденный направленным отрезком \overline{ab} , имеет вид

$$K(\overline{ab}) = \{\overline{uv} \mid uv \in \overline{V}, uv = \overline{ab}\}.$$

Под вектором \overline{ab} n -арной группы G понимают класс $K(\overline{ab})$, т. е. $\overline{ab} = K(\overline{ab})$.

2 Основные результаты

Предложение 2.1. n -арная группа G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда для произвольных точек a, c, x, y из X справедливо равенство

$$y = (xa^{[-2]} a cx^{[-2]} x ax^{[-2]} x yc^{[-2]} c x). \quad (2.1)$$

Доказательство.

1. Пусть G – полуабелева n -арная группа. Установим справедливость равенства (2.1).

Рассмотрим правую часть равенства (2.1).

С учетом нейтральности последовательностей

$zz^{[-2]} z$ и $z^{[-2]} z z$ для любого $z \in X$ имеем

$$\begin{aligned} & (xa^{[-2]} a cx^{[-2]} x ax^{[-2]} x yc^{[-2]} c x) = \\ & = ((xa^{[-2]} a cx^{[-2]} x a)x^{[-2]} x (yc^{[-2]} c x)) = \\ & = ((aa^{[-2]} a cx^{[-2]} x x)x^{[-2]} x (xc^{[-2]} c y)) = \\ & = ((cx^{[-2]} x x)c^{[-2]} c y) = (cc^{[-2]} c y) = y. \end{aligned}$$

Справедливость равенства (2.1) установлена.

2. Пусть равенство (2.1) выполняется. Докажем, что G – полуабелева n -арная группа.

Пусть x_1^n – произвольная последовательность из X^n и пусть $y = (x_1^n)$, а $c = x_n$, $x = x_1$, $a = x_1$.

С учетом равенства (2.1) и нейтральности последовательностей $zz^{[-2]} z$, $z^{[-2]} z z$ для любого $z \in X$ имеем

$$\begin{aligned} (x_1^n) & = ((x_1^n)x_1^{[-2]} x_1 x_1 x_1^{[-2]} x_1 x_1 x_1^{[-2]} x_n x_n x_1^{[-2]} x_1 x_1) = \\ & = (x_1 x_1^{[-2]} x_1 x_n x_1^{[-2]} x_1 x_1 x_1^{[-2]} x_1 (x_1^n)x_n^{[-2]} x_n x_1) = \\ & = (x_n x_1^{[-2]} x_1 (x_1 x_1^{[-2]} x_1 x_1)x_2^{n-1} (x_n x_n^{[-2]} x_n x_1)) = \\ & = (x_n x_1^{[-2]} x_1 x_1 x_2^{n-1} x_1) = (x_n x_2^{n-1} x_1). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из равенства (2.2), на основании определения полуабелевой группы, заключаем, что G – полуабелева.

Предложение доказано.

Теорема 2.1. Пусть a, b, c, d – произвольные точки из X . n -арная группа G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда для точек x, y из X таких, что $S_x(a) = b$ и $S_y(c) = d$, выполняется равенство

$$\overline{xy} = \frac{1}{2} \overline{ac} + \frac{1}{2} \overline{bd}. \quad (2.3)$$

Доказательство.

1. Пусть G – полуабелева n -арная группа. Установим справедливость равенства (2.3). Умножим обе части равенства (2.3) на число 2.

Имеем

$$2\overline{xy} = \overline{ac} + \overline{bd}. \quad (2.4)$$

Установим справедливость этого равенства.

Преобразуем левую часть равенства (2.4) с учетом определения 8 из [5] и теоремы 8 из [7]

$$2\overline{xy} = \overline{xy} + \overline{xy} = \overline{x(yx^{[-2]} x y)}. \quad (2.5)$$

Аналогично

$$\overline{ac} + \overline{bd} = \overline{a(cb^{[-2]} b d)}. \quad (2.6)$$

С учетом равенств $S_x(a) = b$, $S_y(c) = d$, определения 4 из [5], предложения 1 из [7], имеем

$$\overline{a(cb^{[-2]} b d)} = \overline{a(c(S_x(a))^{[-2]} S_x(a) \dots S_y(c))} =$$

$$\begin{aligned} & = \overline{a(c(xa^{[-2]} a x)^{[-2]} (xa^{[-2]} a x) \dots (yc^{[-2]} c y))} = \\ & = \overline{a(cx^{[-2]} x ax^{[-2]} x yc^{[-2]} c y)}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Тогда равенство (2.6) принимает вид

$$\overline{ac} + \overline{bd} = \overline{a(cx^{[-2]} x ax^{[-2]} x yc^{[-2]} c y)}. \quad (2.8)$$

Докажем, что правые части равенств (2.5) и (2.8) равны. Для этого рассмотрим четырехугольник

$$\langle x, a, (cx^{[-2]} x ax^{[-2]} x yc^{[-2]} c y), (yx^{[-2]} x y) \rangle. \quad (2.9)$$

Если мы докажем, что четырехугольник (2.9) – параллелограмм G , то тем самым, согласно определению 2 из [5], будет установлена справедливость равенства

$$\begin{aligned} & \overline{x(yx^{[-2]} x y)} = \\ & = \overline{a(cx^{[-2]} x ax^{[-2]} x yc^{[-2]} c y)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

С учетом свойства полуабелевости G и нейтральности последовательностей $z^{[-2]} z z$,

$$\begin{aligned} & \overline{zz^{[-2]} z} \text{ для любого } z \in X \text{ имеем} \\ & (xa^{[-2]} a (cx^{[-2]} x ax^{[-2]} x yc^{[-2]} c y)) = \\ & = ((xa^{[-2]} a cx^{[-2]} x a)x^{[-2]} x (yc^{[-2]} c y)) = \\ & = ((aa^{[-2]} a cx^{[-2]} x x)x^{[-2]} x (yc^{[-2]} c y)) = \\ & = (cx^{[-2]} x yc^{[-2]} c y) = \\ & = ((cx^{[-2]} x y)c^{[-2]} c y) = \\ & = (yx^{[-2]} x cc^{[-2]} c y) = (yx^{[-2]} x y), \end{aligned} \quad (2.11)$$

т. е.

$$\begin{aligned} & (xa^{[-2]} a (cx^{[-2]} x ax^{[-2]} x yc^{[-2]} c y)) = \\ & = (yx^{[-2]} x y). \end{aligned} \quad (2.12)$$

На основании определения 1.3 и равенства (2.12) заключаем, что четырехугольник (2.9) является параллелограммом G , а значит, на основании определения 2 из [5], делаем вывод о справедливости равенства (2.10), а значит, и равенств (2.4) и (2.3).

2. Пусть равенство (2.3) выполняется. Докажем, что G – полуабелева n -арная группа.

Поскольку в первой части доказательства свойство полуабелевости n -арной группы G нами было использовано только в равенстве (2.11), то без повторения рассуждений считаем, что справедливы равенства (2.5) и (2.8), а значит и равенство (2.10).

Из равенства (2.10), с учетом определения 2 из [5], следует, что четырехугольник

$$\langle x, a, (cx^{[-2]} x ax^{[-2]} x yc^{[-2]} c y), (yx^{[-2]} x y) \rangle$$

– параллелограмм G , а значит на основании

определения 2 из [5] справедливо равенство

$$(xa^{[-2]} a (cx^{[-2]} x ax^{[-2]} x yc^{[-2]} c y)) = (yx^{[-2]} x y). \quad (2.13)$$

Умножим обе части равенства (2.13) справа на выражение $y^{[-2]} y x$. Получим

$$(xa^{[-2]} a cx^{[-2]} x ax^{[-2]} x yc^{[-2]} c yy^{[-2]} y x) = (yx^{[-2]} x yy^{[-2]} y x). \quad (2.14)$$

Откуда, с учетом нейтральности последовательностей $zz^{[-2]} z$ и $z^{[-2]} z z$ для любого $z \in X$,

$$(xa^{[-2]} a cx^{[-2]} x ax^{[-2]} x yc^{[-2]} c x) = y. \quad (2.15)$$

Из равенства (2.15) и на основании предложения 2.1 заключаем, что G – полуабелева.

Теорема доказана.

Предложение 2.2. n -арная группа G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда для любых $a, b, c, d \in X$ справедливо равенство

$$(ca^{[-2]} a bc^{[-2]} c db^{[-2]} b a) = d. \quad (2.16)$$

Доказательство.

1. Пусть равенство (2.16) выполняется. Докажем, что G – полуабелева n -арная группа.

Рассмотрим произвольную последовательность $x_1^n \in X^n$. С учетом нейтральности последовательностей $x^{[-2]} x x$ и $xx^{[-2]} x$ для любого $x \in X$ имеем

$$(x_1^n) = ((x_1^n)x_1^{[-2]} x_1 x_1x_1^{[-2]} x_1 x_1x_1^{[-2]} x_1 x_1x_1^{[-2]} x_n x_n). \quad (2.17)$$

В (2.17) положим, что $x_1 = a$, $x_n = c$, $x_n = b$ и $(x_1^n) = d$.

Тогда, с учетом равенств (2.17), (2.16) и нейтральности последовательностей $x^{[-2]} x x$, $xx^{[-2]} x$ для любого $x \in X$ имеем

$$(x_1^n) = ((x_1^n)x_1^{[-2]} x_1 x_1x_1^{[-2]} x_1 x_1x_1^{[-2]} x_n x_n) = ((x_n x_1^{[-2]} x_1 x_1)x_2^{n-1} (x_n x_n^{[-2]} x_n x_1)) = (x_n x_2^{n-1} x_1).$$

Т. е. мы получили, что

$$(x_1^n) = (x_n x_2^{n-1} x_1). \quad (2.18)$$

На основании (2.18) заключаем, что G – полуабелева n -арная группа.

2. Пусть G – полуабелева n -арная группа. Установим справедливость равенства (2.16).

Рассмотрим левую часть равенства (2.16) с учетом свойства полуабелевости G и нейтральности последовательностей $xx^{[-2]} x$, $x^{[-2]} x x$ для любого $x \in X$

$$(ca^{[-2]} a bc^{[-2]} c db^{[-2]} b a) =$$

$$= ((ca^{[-2]} a bc^{[-2]} c d)b^{[-2]} b a) = ((da^{[-2]} a bc^{[-2]} c c)b^{[-2]} b a) = (da^{[-2]} a bb^{[-2]} b a) = (da^{[-2]} a a) = d.$$

Справедливость равенства (2.16) установлена.

Предложение доказано.

Теорема 2.2. n -арная группа G будет полуабелевой тогда и только тогда, когда для любых векторов \bar{p}, \bar{q} из $V(G)$ справедливо равенство

$$2(\bar{p} + \bar{q}) = 2\bar{p} + 2\bar{q}. \quad (2.19)$$

Доказательство.

1. Пусть равенство (2.19) выполняется. Докажем, что G – полуабелева.

Пусть точки $a, b, c, d \in X$ такие, что

$$\bar{p} = \overline{ab} \text{ и } \bar{q} = \overline{cd}.$$

Рассмотрим левую часть равенства (2.19) с учетом теоремы 8 из [7] и определения 8 из [5]. Имеем

$$2(\bar{p} + \bar{q}) = 2(\overline{ab} + \overline{cd}) = \overline{2a(bc^{[-2]} c d)} = \overline{a(bc^{[-2]} c d) + a(bc^{[-2]} c d)} = \overline{a((bc^{[-2]} c d)a^{[-2]} a (bc^{[-2]} c d))}. \quad (2.20)$$

Аналогично

$$2\bar{p} = 2\overline{ab} = \overline{ab} + \overline{ab} = \overline{a(ba^{[-2]} a b)} \quad (2.21)$$

и

$$2\bar{q} = 2\overline{cd} = \overline{cd} + \overline{cd} = \overline{c(dc^{[-2]} c d)}. \quad (2.22)$$

С учетом равенств (2.21), (2.22) и теоремы 8 из [7] правую часть равенства (2.19) перепишем в виде

$$2\bar{p} + 2\bar{q} = \overline{a(ba^{[-2]} a b) + c(dc^{[-2]} c d)} = \overline{a((ba^{[-2]} a b)c^{[-2]} x (dc^{[-2]} c d))}. \quad (2.23)$$

С учетом равенств (2.19), (2.20), (2.23) имеем

$$\overline{a((bc^{[-2]} c d)a^{[-2]} a (bc^{[-2]} c d))} = \overline{a((ba^{[-2]} a b)c^{[-2]} c (dc^{[-2]} c d))}.$$

Откуда

$$((bc^{[-2]} x d)a^{[-2]} a (bc^{[-2]} c d)) = ((ba^{[-2]} a b)c^{[-2]} x (dc^{[-2]} c d)). \quad (2.24)$$

Умножим справа обе части равенства (2.24) на выражение $d^{[-2]} d c$

$$(bc^{[-2]} c da^{[-2]} a bc^{[-2]} c dd^{[-2]} d c) = (ba^{[-2]} a bc^{[-2]} c dc^{[-2]} c dd^{[-2]} d c). \quad (2.25)$$

Поскольку $xx^{[-2]^{2n-4}}$ и $x^{[-2]^{2n-4}}x$ – нейтральные $2(n-1)$ -последовательности для любого $x \in X$, то (2.25) перепишем в виде

$$\begin{aligned} & (bc^{[-2]^{2n-4}}c da^{[-2]^{2n-4}}a b) = \\ & = (ba^{[-2]^{2n-4}}a bc^{[-2]^{2n-4}}c d). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Аналогично обе части равенства (2.26) умножим слева на $cb^{[-2]^{2n-4}}b$, а справа – на $b^{[-2]^{2n-4}}b a$. Имеем

$$\begin{aligned} & (cb^{[-2]^{2n-4}}b bc^{[-2]^{2n-4}}c da^{[-2]^{2n-4}}a bb^{[-2]^{2n-4}}b a) = \\ & = (cb^{[-2]^{2n-4}}b ba^{[-2]^{2n-4}}a bc^{[-2]^{2n-4}}c db^{[-2]^{2n-4}}b a). \end{aligned}$$

Откуда

$$d = (ca^{[-2]^{2n-4}}a bc^{[-2]^{2n-4}}c db^{[-2]^{2n-4}}b a). \quad (2.27)$$

На основании равенства (2.27) и предложения 2.2 заключаем, что G – полуабелева n -арная группа.

2. Пусть G – полуабелева n -арная группа. Установим справедливость равенства (2.19).

Пусть точки a, b, c, d из X такие, что

$$\vec{p} = \vec{ab} \text{ и } \vec{q} = \vec{cd}.$$

Не повторяя рассуждений из первой части доказательства, будем считать, что справедливы равенства (2.20) и (2.23), т. е.

$$\begin{aligned} & 2(\vec{p} + \vec{q}) = \\ & = a((bc^{[-2]^{2n-4}}c d)a^{[-2]^{2n-4}}a (bc^{[-2]^{2n-4}}c d)) \end{aligned} \quad (2.28)$$

и

$$\begin{aligned} & 2\vec{p} + 2\vec{q} = \\ & = a((ba^{[-2]^{2n-4}}a b)c^{[-2]^{2n-4}}c (dc^{[-2]^{2n-4}}c d)). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Установим равенство правых частей (2.28) и (2.29).

Поскольку начало каждого из векторов, стоящих в правых частях равенств (2.28) и (2.29), совпадают, то докажем, что выражения, соответствующие концам этих векторов, также равны.

С учетом свойства полуабелевости n -арной группы G имеем

$$\begin{aligned} & ((bc^{[-2]^{2n-4}}c d)a^{[-2]^{2n-4}}a (bc^{[-2]^{2n-4}}c d)) = \\ & = (((bc^{[-2]^{2n-4}}c d)a^{[-2]^{2n-4}}a b)c^{[-2]^{2n-4}}c d) = \\ & = ((ba^{[-2]^{2n-4}}a (bc^{[-2]^{2n-4}}c d))c^{[-2]^{2n-4}}c d) = \\ & = ((ba^{[-2]^{2n-4}}a b)c^{[-2]^{2n-4}}c (dc^{[-2]^{2n-4}}c d)). \end{aligned}$$

Тем самым мы установили справедливость равенства

$$\begin{aligned} & a((bc^{[-2]^{2n-4}}c d)a^{[-2]^{2n-4}}a (bc^{[-2]^{2n-4}}c d)) = \\ & = a((ba^{[-2]^{2n-4}}a b)c^{[-2]^{2n-4}}c (dc^{[-2]^{2n-4}}c d)). \end{aligned}$$

Из равенства правых частей (2.28) и (2.29) следует справедливость равенства левых частей этих равенств, а, значит,

$$2(\vec{p} + \vec{q}) = 2\vec{p} + 2\vec{q}.$$

Что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dornte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dornte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
2. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
3. Prüfer, H. Theorie der Abelschen Gruppen I. Grundeigenschaften / H. Prüfer // Math. Z. – 1924. – Bd. 20. – S. 165–187.
4. Русаков, С.А. Алгебраические n -арные системы: Силовская теория n -арных групп / С.А. Русаков. – Минск : Беларуская навука, 1992. – 264 с.
5. Русаков, С.А. Некоторые приложения теории n -арных групп / С.А. Русаков. – Минск : Беларуская навука, 1998. – 182 с.
6. Вакарелов, Д. Тернарни групи / Д. Вакарелов // Годишник Софийск. ун-та. Мат. фак. – 1966–1967. 1968. – Т. 61. – С. 71–105.
7. Кулаженко, Ю.И. Геометрия параллелограммов / Ю.И. Кулаженко // Вопросы алгебры и прикладной математики : сб. научн. тр.; под ред. С.А. Русакова. – Гомель, 1995. – С. 47–64.

Поступила в редакцию 16.02.11.

УДК 517.538.52+517.538.53

**ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ
РАЦИОНАЛЬНЫМИ ДРОБЯМИ ПАДЕ–ЧЕБЫШЁВА**

Ю.А. Лобыч, А.П. Старовойтов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

**APPROXIMATION OF CONTINUOUS FUNCTIONS
BY RATIONAL PADE–CHEBYSHEV FRACTIONS**

Yu.A. Labych, A.P. Starovoitov

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Для некоторого класса непрерывных функций, представимых в виде ряда по многочленам Чебышёва, найдена асимптотика поведения параболических последовательностей элементов таблицы Паде–Чебышёва. Установлена асимптотика наилучших рациональных приближений данного класса функций.

Ключевые слова: наилучшие равномерные приближения, аппроксимации Паде–Чебышёва, тригонометрические аппроксимации Паде, рациональная аппроксимация, точные константы рациональной аппроксимации.

The paper is concerned with the description of the asymptotic behaviour of parabolic sequences of the elements of Pade–Chebyshev table for some continuous functions represented by Chebyshev series. The asymptotic form of the best rational approximations for such functions is determined.

Keywords: best approximations in the uniform norm, Pade–Chebyshev approximant, trigonometric Pade approximant, rational approximation, the accurate constants of rational approximation.

Введение

Будем рассматривать вещественные непрерывные на отрезке $[-1, 1]$ функции, представимые рядом Фурье

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (0.1)$$

где $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ – многочлен Чебышева. Последовательность коэффициентов $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ обладает всей информацией о f , поэтому принципиально возможным является описание различных свойств этой функции непосредственно в терминах, определяемых через коэффициенты ряда Фурье–Чебышева (0.1).

Обозначим через $\mathcal{R}_{n,m}$ множество всех алгебраических рациональных дробей $r(x) = p_n(x)/q_m(x)$, где p_n и q_m – вещественные алгебраические многочлены и $\deg p_n \leq n$, $\deg q_m \leq m$. Для функции f , непрерывной на отрезке $[-1, 1]$, определим наилучшие равномерные алгебраические рациональные приближения порядка (n, m) следующим образом:

$$R_{n,m}(f) = R_{n,m}(f; [-1, 1]) := \inf \{ \|f - r\| : r \in \mathcal{R}_{n,m} \},$$

$$a \|g\| = \max \{ |g(x)| : x \in [-1, 1] \}.$$

Бесконечно малые $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ будем называть эквивалентными $(\alpha_n \sim \beta_n)$, если

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} \rightarrow 1 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Если f является сужением на $[-1, 1]$ целой функции и представима рядом (0.1), то, согласно теореме С.Н. Бернштейна [1, глава 2], существует бесконечное множество значений n , для которых

$$R_{n,0}(f) \sim |A_{n+1}|, \quad n \rightarrow \infty. \quad (0.2)$$

Доказательство этого утверждения в [1] опирается лишь на равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{R_{n,0}(f)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|A_n|} = 0$$

и, в силу этого, не является конструктивным: для произвольной целой функции f ничего определенного нельзя сказать о последовательности $n = n_k$, удовлетворяющей (0.2). Однако Бернштейном было замечено, что «для наиболее обычных функций убывание коэффициентов настолько регулярно, что формула (0.2) пригодна для всех n или, по крайней мере, для значений n одинаковой четности» [1, глава 2, §2]. Условия регулярности сформулированы им в следующем виде [2, глава 5, §54]:

Теорема 0.1. Если f представима рядом

$$(0.1) \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_{n+1}| + |A_{n+2}| + \dots}{|A_n|} = 0, \text{ то при } n \rightarrow \infty$$

$$R_{n,0}(f) \sim \|f - S_n(\cdot; f)\| \sim |A_{n+1}|, \quad (0.3)$$

где

$$S_n(x; f) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n A_k T_k(x)$$

– частная сумма ряда (0.1).

Теорема 0.1 позволяет установить [2] асимптотику убывания $R_{n,0}(f)$ для многих элементарных функций $f: \exp x, \cos x, \sin x, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x$ и др. В случае, когда $m \geq 1$, описание асимптотического поведения величин $R_{n,m}(f)$ является значительно более трудной задачей. Примеры ее решения хорошо известны:

$$R_{n,m}(e^x; [-1,1]) \sim \frac{n!m!}{2^{n+m}(n+m)!(n+m+1)!}, n+m \rightarrow \infty,$$

(Браесс [3]);

$$R_{n,n}(|x|; [-1,1]) \sim 8e^{-\pi\sqrt{n}}, n \rightarrow \infty, \text{ (Шталь [4]);}$$

$$R_{n,n}(x^\alpha; [0,1]) \sim 4^{1+\alpha} |\sin \pi\alpha| e^{-2\pi\sqrt{\alpha n}}, n \rightarrow \infty,$$

(Шталь [5]);

$$R_{n,n}(e^{-x}; [0,+\infty]) \sim 2\nu^{n+\frac{1}{2}}, n \rightarrow \infty, \text{ (Аптекарев [6]),}$$

где $\nu = 1/9, 289\dots$ – постоянная Альфена. Определение постоянной Альфена см. в [6], [7]. Отметим также, что в [6] аналогичные асимптотические равенства получены и для некоторых других аналитических функций.

Не останавливаясь подробно на анализе методов работ [3]–[6], отметим лишь, что они являются результатом продолжительного коллективного поиска. Например, Г. Шталь в [4], [5] существенно опирается на глубокие исследования Д. Ньюмена [8], А.А. Гончара [9], [10], А.П. Буланова [11], Н.С. Вячеславова [12], [13] рациональной аппроксимации функций $|x|, x^\alpha$, а основные принципы комплексного метода работы [6] заложены еще в 80-е годы А.А. Гончаром и его учениками (см., например, [7], [14], [15]).

Аппроксимацией Паде-Чебышева порядка (n, m) функции f , представимой рядом (0.1), назовем (см., например, [16]) рациональную дробь

$$\pi_{n,m}^{ch}(x; f) = \frac{p_n^{ch}(x)}{q_m^{ch}(x)}$$

из класса $\mathcal{R}_{n,m}$, у которой многочлены p_n^{ch} и q_m^{ch} удовлетворяют условию

$$q_m^{ch}(x)f(x) - p_n^{ch}(x) = \sum_{k=n+m+1}^{\infty} c_k T_k(x),$$

где c_k – вещественные числа.

Ясно, что $\pi_{n,0}^{ch}(x; f) = S_n(x; f)$. При $m \geq 1$ дроби $\pi_{n,m}^{ch}(x; f)$ являются рациональными аналогами частных сумм ряда Фурье по многочленам Чебышева (0.1). В этой связи представляет интерес задача нахождения таких функций f , для которых теорему Бернштейна можно обобщить с целью нахождения асимптотики убывания $R_{n,m}(f; [-1,1])$ посредством аппроксимации Паде-Чебышева $\pi_{n,m}^{ch}(\cdot; f)$. Исследования в этом

направлении были инициированы В.Н. Русаком [17], [18].

Рассмотрим класс

$$\mathcal{F} = \{f_\gamma\}, \quad \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\},$$

состоящий из непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций, представимых в виде

$$f_\gamma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_k(x)}{(\gamma)_k}, \quad (0.4)$$

где $(\gamma)_0 = 1, (\gamma)_k = \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+k-1)$, если $k \geq 1$. Одним из основных результатов данной статьи является следующая

Теорема 0.2. Пусть $f_\gamma \in \mathcal{F}$. Тогда, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(m(n))^{3/2}}{n} = 0,$$

то равномерно по всем $m, 0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$R_{n,m}(f_\gamma; [-1,1]) \sim \|f_\gamma - \pi_{n,m}^{ch}(\cdot; f_\gamma)\| \sim \frac{m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}}. \quad (0.5)$$

В частности, для функции [19]

$$f_1(x) = e^x \cos(\sqrt{1-x^2}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_k(x)}{k!}, \quad x \in [-1, 1],$$

из (0.5) получаем, что

$$R_{n,m}(f_1; [-1,1]) \sim \|f_1 - \pi_{n,m}^{ch}(\cdot; f_1)\| \sim \frac{m!n!}{(n+m)!(n+m+1)!}.$$

Если $m = 0$ и $f = f_\gamma$, то асимптотические равенства (0.3) и (0.5) совпадают. Для фиксированного $m = 0, 1, 2, \dots$ соотношения (0.5) ранее установлены в [17]. В случае, когда $\gamma \in \mathbb{N}$, при более ограничительном условии на $m(n)$: $m(n) = o(n^{1/4})$, равенства (0.5) имеются в [18]. В этой работе при указанных ограничениях на γ и $m(n)$ подробного доказательства соотношения (0.5) не приведено. Подробное доказательство имеется в [20]. Весьма вероятно [21], что утверждение теоремы 0.2 остается в силе, когда $m(n) = o(n)$, причем это последнее условие на $m(n)$ не улучшаемо.

Метод доказательства теоремы 0.2 отличен от метода Бернштейна. Он основан на связи между аппроксимациями Паде-Чебышева функции f и классическими тригонометрическими аппроксимациями Паде индуцированной функции $f(\cos x)$. Изучению свойств классических тригонометрических аппроксимаций Паде функций $f_\gamma(\cos x)$ посвящен п. 1. Результаты этого пункта имеют самостоятельный интерес. В п. 2 приводится доказательство теоремы 0.2.

1 Тригонометрические аппроксимации Паде

Пусть $f \in C_{2\pi}$, т. е. является вещественной непрерывной 2π -периодической функцией, и, кроме этого, представима рядом Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (1.1)$$

где коэффициенты Фурье a_k и b_k – действительные числа. Для удобства ряд Фурье (1.1) запишем в комплексной форме

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \quad (1.2)$$

полагая

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2},$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2},$$

$$c_{-k} = \bar{c}_k.$$

Обозначим через $\mathcal{R}_{n,m}^t$ класс всех рациональных тригонометрических функций

$$r^t(x) = \frac{p_n^t(x)}{q_m^t(x)},$$

у которых числитель $p_n^t(x)$ и знаменатель $q_m^t(x)$ являются тригонометрическими многочленами с действительными коэффициентами и $\deg p_n^t \leq n$, $\deg q_m^t \leq m$. Определим наилучшие равномерные рациональные тригонометрические приближения f в классе $\mathcal{R}_{n,m}^t$ (или порядка (n, m)), полагая

$$R_{n,m}^t(f) := \inf \{ \|f - r^t\| : r^t \in \mathcal{R}_{n,m}^t \},$$

а $\|g\| = \max_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$.

Тригонометрической аппроксимацией Паде функции (1.1) назовем такую рациональную функцию

$$\pi_{n,m}^t(x) = \pi_{n,m}^t(x; f) = \frac{p_n^t(x)}{q_m^t(x)}$$

из класса $\mathcal{R}_{n,m}^t$, числитель и знаменатель которой удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} q_m^t(x)f(x) - p_n^t(x) &= \\ &= \sum_{k=n+m+1}^{\infty} (\tilde{a}_k \cos kx + \tilde{b}_k \sin kx), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где \tilde{a}_k и \tilde{b}_k – действительные числа.

Введем в рассмотрение некоторые матрицы и определители, элементами которых служат коэффициенты Фурье функции f . Для этого каждому $k \in \mathbb{Z}$ и действительному x поставим в соответствие матрицы-строки

$$\begin{aligned} C_k &= \|c_{k-j}\|, \quad E(x) = \|e^{ijx}\|, \\ j &= \overline{-m, m}, \quad i = \overline{-1, 1}. \end{aligned}$$

Далее, полагаем

$$d_{n,m}(x) = \det \begin{bmatrix} C_{n+m} \\ \dots \\ C_{n+2} \\ C_{n+1} \\ E(x) \\ C_{-n-1} \\ C_{-n-2} \\ \dots \\ C_{-n-m} \end{bmatrix}.$$

Обозначим через $d_{n,m,k}$ – определитель, полученный из $d_{n,m}(x)$ заменой строки $E(x)$ на C_k , а через $\Delta_{n,m}$ – определитель $2m$ -го порядка, полученный из $d_{n,m}(x)$ после вычеркивания $(m+1)$ -ой строки и $(m+1)$ -го столбца. Справедлива следующая теорема [22], [23], [20].

Теорема 1.1. Пусть функция f задана рядом (1.2). Тогда для любых целых неотрицательных n и m существует тригонометрическая аппроксимация Паде $\pi_{n,m}^t(\cdot; f)$. Если $\Delta_{n,m} \neq 0$, то

$\pi_{n,m}^t(x; f) = \frac{p_n^t(x; f)}{q_m^t(x; f)}$ единственна, а ее числитель и знаменатель определяются равенствами

$$\begin{aligned} p_n^t(x) &= \sum_{k=-n}^n d_{n,m,k} e^{ikx}, \\ q_m^t(x) &= d_{n,m}(x). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Тригонометрические полиномы $p_n^t(x)$ и $q_m^t(x)$ равенством (1.3) определяются неоднозначно, вместе с тем, дробь $\pi_{n,m}^t(\cdot; f)$, являющаяся их отношением, задается единственным образом. В дальнейшем будем считать, что p_n^t и q_m^t определяются равенствами (1.4). В этом случае (см. [17], [20])

$$\begin{aligned} L_{n,m}^t(x; f) &:= q_m^t(x)f(x) - p_n^t(x) = \\ &= \sum_{k=n+m+1}^{\infty} (\tilde{c}_k e^{ikx} + \tilde{c}_{-k} e^{-ikx}), \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\tilde{c}_k = d_{n,m,k}$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Поскольку f – вещественная функция, то $\tilde{c}_{-k} = \bar{c}_k$. Поэтому $\overline{d_{n,m}(x)} = d_{n,m}(x)$ и $\overline{d_{n,m,k}} = d_{n,m,-k}$. Это означает, что тригонометрические полиномы p_n^t и q_m^t также вещественны.

При прежних значениях параметра γ рассмотрим однопараметрическое семейство функций $\mathcal{F}^t = \{F_\gamma\}$, представимых в виде

$$F_\gamma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{(\gamma)_k}. \quad (1.6)$$

Нашей ближайшей целью является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1.2. Пусть $F_\gamma \in \mathcal{F}^t$. Тогда при условии, что $m(n) = o(n^{2/3})$, для любого $x \in \mathbb{R}$ равномерно по всем m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$F_\gamma(x) - \pi'_{n,m}(x; F_\gamma) = \frac{(-1)^m m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}} \operatorname{Re} \left\{ e^{i(n+m+1)x} (1 + o(1)) \right\}.$$

Введем в рассмотрение две квадратные матрицы $(m+1)$ -го порядка:

$$\tilde{A}(k) = \begin{bmatrix} 2c_{n+m+k} & c_{n+m+k-1} + c_{n+m+k+1} & \dots & c_{n+k} + c_{n+2m+k} \\ 2c_{n+1} & c_n + c_{n+2} & \dots & c_{n-m+1} + c_{n+m+1} \\ 2c_{n+2} & c_{n+1} + c_{n+3} & \dots & c_{n-m+2} + c_{n+m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2c_{n+m} & c_{n+m-1} + c_{n+m+1} & \dots & c_n + c_{n+2m} \end{bmatrix},$$

$$A(y) = \begin{bmatrix} 2 & y^{-1} + y & \dots & y^{-m} + y^m \\ 2c_{n+1} & c_n + c_{n+2} & \dots & c_{n-m+1} + c_{n+m+1} \\ 2c_{n+2} & c_{n+1} + c_{n+3} & \dots & c_{n-m+2} + c_{n+m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2c_{n+m} & c_{n+m-1} + c_{n+m+1} & \dots & c_n + c_{n+2m} \end{bmatrix},$$

и две квадратные матрицы m -го порядка:

$$A_0 = \begin{bmatrix} c_{n+2} + c_n & c_{n+3} + c_{n-1} & \dots & c_{n+m+1} + c_{n-m+1} \\ c_{n+3} + c_{n+1} & c_{n+4} + c_n & \dots & c_{n+m+2} + c_{n-m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m+1} + c_{n+m-1} & c_{n+m+2} + c_{n+m-2} & \dots & c_{n+2m} + c_n \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} c_{n+2} - c_n & c_{n+3} - c_{n-1} & \dots & c_{n+m+1} - c_{n-m+1} \\ c_{n+3} - c_{n+1} & c_{n+4} - c_n & \dots & c_{n+m+2} - c_{n-m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m+1} - c_{n+m-1} & c_{n+m+2} - c_{n+m-2} & \dots & c_{n+2m} - c_n \end{bmatrix},$$

где c_k – коэффициенты ряда Фурье (1.2).

Лемма 1.1. Пусть функция f представима рядом (1.6). Тогда

$$\Delta_{n,m} = \det A_0 \cdot \det B, \quad (1.7)$$

$$\tilde{c}_{n+m+k} = \frac{1}{2} \det \tilde{A}(k) \cdot \det B, \quad (1.8)$$

$$q'_m(x) = \frac{1}{2} \det A(y) \cdot \det B, \quad y = e^{ix}. \quad (1.9)$$

Доказательство. Так как $c_j = c_{-j} = \frac{1}{2(\gamma)_j}$,

заменяем c_{-j} на c_j в строках определителя $\Delta_{n,m}$, начиная с $(m+1)$ -ой. Тогда

$$\Delta_{n,m} = \begin{vmatrix} P & P_1 \\ P_2 & P_3 \end{vmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} c_{n+2m} & c_{n+2m-1} & \dots & c_{n+m+1} \\ c_{n+2m-1} & c_{n+2m-2} & \dots & c_{n+m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m+1} & c_{n+m} & \dots & c_{n+2} \end{bmatrix},$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} c_{n+m-1} & \dots & c_{n+1} & c_n \\ c_{n+m-2} & \dots & c_n & c_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & \dots & c_{n-m+2} & c_{n-m+1} \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \dots & c_n \\ c_{n-m+2} & c_{n-m+3} & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{n+m-1} \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} c_{n+2} & \dots & c_{n+m} & c_{n+m+1} \\ c_{n+3} & \dots & c_{n+m+1} & c_{n+m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m+1} & \dots & c_{n+2m-1} & c_{n+2m} \end{bmatrix},$$

Поменяем в определителе $\Delta_{n,m}$ $(m+1)$ -ую строку с последней, $(m+2)$ -ую – с предпоследней и так далее, а затем в полученном определителе поменяем местами $(m+1)$ -ый столбец с последним, $(m+2)$ -ой – с предпоследним и так далее. После таких преобразований получим

$$\Delta_{n,m} = \begin{vmatrix} P & Q \\ Q & P \end{vmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} c_n & c_{n+1} & \dots & c_{n+m-1} \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{n+m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \dots & c_n \end{bmatrix},$$

где P и Q – матрицы m -го порядка, расположенные соответственно в первых m столбцах и строках и последних m столбцах и первых m строках. Преобразуем последний определитель, прибавив к первому столбцу $(m+1)$ -ый, ко второму – $(m+2)$ -ой и так далее, наконец, к m -му – $2m$ -ый. После этого в полученном определителе вычтем из $(m+1)$ -ой строки первую, из $(m+2)$ -ой – вторую и так далее, наконец, из последней вычтем m -ую. Тогда из свойств определителей следует, что

$$\Delta_{n,m} = \begin{vmatrix} P+Q & Q \\ 0 & P-Q \end{vmatrix} = \det(P+Q) \cdot \det(P-Q),$$

где $\det(P+Q) = \det A_0$, $\det(P-Q) = \det B$.

Равенство (1.7) установлено. Аналогично [20] доказываются равенства (1.8) и (1.9).

Лемма 1.2. Если $F_\gamma \in \mathcal{F}^t$, то $(c_k - \text{коэффициенты Фурье комплексной формы ряда (1.6)})$

$$A^0 := \begin{bmatrix} c_{n+1} & c_n & \dots & c_{n-m+1} \\ c_{n+2} & c_{n+1} & \dots & c_{n-m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m+1} & c_{n+m} & \dots & c_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2^{m+1}} \prod_{j=1}^m j! \prod_{j=1}^{m+1} \frac{1}{(\gamma)_{n+j}}. \quad (1.10)$$

Доказательство. Учитывая, что $c_k = \frac{1}{2(\gamma)_k}$,

и применяя элементарные преобразования определителя, получим, что

$$A^0 = \frac{1}{2^{m+1}} \begin{vmatrix} \frac{1}{(\gamma)_{n+1}} & \frac{1}{(\gamma)_n} & \dots & \frac{1}{(\gamma)_{n-m+1}} \\ \frac{1}{(\gamma)_{n+2}} & \frac{1}{(\gamma)_{n+1}} & \dots & \frac{1}{(\gamma)_{n-m+2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(\gamma)_{n+m+1}} & \frac{1}{(\gamma)_{n+m}} & \dots & \frac{1}{(\gamma)_{n+1}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}} \prod_{j=1}^{m+1} \frac{1}{(\gamma)_{n+j}} \begin{vmatrix} 1 & (\gamma+n)_1 & \dots & (\gamma+n-m+1)_m \\ 1 & (\gamma+n+1)_1 & \dots & (\gamma+n-m+2)_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (\gamma+n+m)_1 & \dots & (\gamma+n+1)_m \end{vmatrix}.$$

Обозначим через $K(n, m)$ определитель в правой части последнего равенства. Вычтем из $(m+1)$ -ой строки m -ю и так далее, из третьей – вторую, наконец, из второй – первую строку. Тогда, учитывая равенства $(\gamma+j+1)_i - (\gamma+j)_i = i(\gamma+j+1)_{i-1}$, будем иметь:

$$K(n, m) = \begin{vmatrix} 1 & (\gamma+n)_1 & \dots & (\gamma+n-m+1)_m \\ 0 & (\gamma+n+1)_0 & \dots & m(\gamma+n-m+2)_{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & (\gamma+n+m)_0 & \dots & m(\gamma+n+1)_{m-1} \end{vmatrix} =$$

$$= m! \begin{vmatrix} 1 & (\gamma+n)_1 & \dots & (\gamma+n-m+2)_{m-1} \\ 1 & (\gamma+n+1)_1 & \dots & (\gamma+n-m+3)_{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (\gamma+n+m-1)_1 & \dots & (\gamma+n+1)_{m-1} \end{vmatrix} =$$

$$= m! K(n, m-1).$$

Поскольку $K(n, 1) = \begin{vmatrix} 1 & (\gamma+n)_1 \\ 1 & (\gamma+n+1)_1 \end{vmatrix} = 1$,

то из предыдущих рекуррентных соотношений

$$K(n, m) = \prod_{j=1}^m j!. \quad (1.11)$$

Лемма 1.2 доказана.

Лемма 1.3. *Справедливо равенство*

$$B(v_j; 1) := \begin{vmatrix} \frac{1}{(\gamma+n+1)_{2v_j}} & (\gamma+n)_1 & \dots & (\gamma+n-m+1+v_j)_{m-v_j} \\ \frac{1}{(\gamma+n+2)_{2v_j}} & (\gamma+n+1)_1 & \dots & (\gamma+n-m+2+v_j)_{m-v_j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(\gamma+n+m+1-v_j)_{2v_j}} & (\gamma+n+m-v_j)_1 & \dots & (\gamma+n+1)_{m-v_j} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(m+v_j)! \prod_{k=1}^{m-v_j-1} k!}{(2v_j)! (\gamma+n+m+1-v_j)_{2v_j}}, \quad (1.12)$$

где $1 \leq v_j \leq m$, $j = \overline{1, m}$, и при $m-1 \leq v_j$ считаем,

что $\prod_{k=1}^{m-v_j-1} k! = 1$.

Доказательство. Вынесем за знак определителя $B(v_j; 1)$ элементы первого столбца:

$$B(v_j; 1) = \prod_{k=1}^{m-v_j+1} \frac{1}{(\gamma+n+k)_{2v_j}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & (\gamma+n)_{2v_j+1} & \dots & (\gamma+n-m+1+v_j)_{m+v_j} \\ 1 & (\gamma+n+1)_{2v_j+1} & \dots & (\gamma+n-m+2+v_j)_{m+v_j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (\gamma+n+m-v_j)_{2v_j+1} & \dots & (\gamma+n+1)_{m+v_j} \end{vmatrix}.$$

Вычтем из последней строки определителя в правой части равенства предпоследнюю строку и так далее, из третьей – вторую, из второй – первую и, раскладывая полученный определитель по элементам первого столбца, будем иметь

$$B(v_j; 1) = \prod_{k=1}^{m-v_j+1} \frac{1}{(\gamma+n+k)_{2v_j}} \cdot \frac{(m+v_j)!}{(2v_j)!} \cdot \begin{vmatrix} (\gamma+n+1)_{2v_j} & \dots & (\gamma+n-m+2+v_j)_{m+v_j-1} \\ (\gamma+n+2)_{2v_j} & \dots & (\gamma+n-m+3+v_j)_{m+v_j-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ (\gamma+n+m-v_j)_{2v_j} & \dots & (\gamma+n+1)_{m+v_j-1} \end{vmatrix}.$$

Вынесем за знак определителя элементы его первого столбца. В итоге получим

$$B(v_j; 1) = \prod_{k=1}^{m-v_j+1} \frac{1}{(\gamma+n+k)_{2v_j}} \cdot \prod_{k=1}^{m-v_j} (\gamma+n+k)_{2v_j} \cdot \frac{(m+v_j)!}{(2v_j)!} \cdot K(n, m-v_j-1) =$$

$$= \frac{1}{(\gamma+n+m+1-v_j)_{2v_j}} \cdot \frac{(m+v_j)!}{(2v_j)!} \cdot K(n, m-v_j-1).$$

Учитывая явное выражение для определителя $K(n, m-v_j-1)$ (см. равенство (1.11)), получим равенство (1.12). Лемма 1.3 доказана.

Лемма 1.4. *Если $F_\gamma \in \mathcal{F}^t$, c_k – коэффициенты Фурье F_γ , а $A_{v_1, v_2, \dots, v_j}^j$ – определитель вида*

$$\begin{vmatrix} c_{n+1} & c_{n_1} & \dots & c_{n_m} \\ c_{n+2} & c_{n_1+1} & \dots & c_{n_m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m+1} & c_{n_1+m} & \dots & c_{n_m+m} \end{vmatrix},$$

у которого $n_{v_1} = n+1+v_1, n_{v_2} = n+1+v_2, \dots, n_{v_j} = n+1+v_j$, а остальные $n_i = n+1-i, i = \overline{1, m}, i \neq v_1, v_2, \dots, v_j, 1 \leq v_1 < v_2 < \dots < v_j \leq m, j = \overline{1, m}$, то

$$A_{v_1, v_2, \dots, v_j}^j = \frac{(-1)^q m!}{2^{m+1} \prod_{i=1}^j (\gamma + n + m + 1 - v_i)_{2v_i}} \cdot \prod_{k=1}^{m+1} \frac{1}{(\gamma)_{n+k}} \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq v_1, v_2, \dots, v_j}}^{m-1} (m-k)! \cdot \prod_{i=1}^j \frac{(m+v_i)!(v_i+1)_{v_i-1}}{(2v_i)!(v_i-1)!} \cdot \prod_{i=1}^{j-1} \prod_{k=i+1}^j \frac{(v_k - v_i)^2 (v_k + v_i + 1)_{v_{i+1} - v_i - 1}}{(v_k + v_i)}, \quad (1.13)$$

где $q = jv_1 + \sum_{i=1}^{j-1} (v_{i+1} - v_i)(j-i)$.

Доказательство. Согласно условию леммы, $A_{v_1, v_2, \dots, v_j}^j = 2^{-m-1} \cdot A$, где определитель A имеет следующий вид (далее полагаем $\lambda_i^+ := \frac{1}{(\gamma)_{n+1+i}}$,

$$\lambda_i^- := \frac{1}{(\gamma)_{n+1-i}}):$$

$$A = \begin{vmatrix} \lambda_0^+ & \lambda_1^- & \dots & \lambda_{v_j-1}^- & \lambda_{v_j}^+ & \lambda_{v_j+1}^- & \dots & \lambda_m^- \\ \lambda_1^+ & \lambda_0^- & \dots & \lambda_{v_j-2}^- & \lambda_{v_j+1}^+ & \lambda_{v_j}^- & \dots & \lambda_{m-1}^- \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_m^+ & \lambda_{-(m-1)}^- & \dots & \lambda_{v_j-(m+1)}^- & \lambda_{v_j+m}^+ & \lambda_{v_j-(m-1)}^- & \dots & \lambda_0^- \end{vmatrix}.$$

Для явного выражения A вынесем за знак определителя элементы первого столбца. В результате получим

$$A = \prod_{k=1}^{m+1} \frac{1}{(\gamma)_{n+k}} A', \quad (1.14)$$

где A' – определитель следующего вида (полагаем $b_i^+(l) := \frac{1}{(\gamma+n+l)_i}, b_i^-(l) := (\gamma+n+l-i)_i$):

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & \dots & b_{v_j-1}^-(1) & b_{v_j}^+(1) & b_{v_j+1}^-(1) & \dots & b_m^-(1) \\ 1 & \dots & b_{v_j-1}^-(2) & b_{v_j}^+(2) & b_{v_j+1}^-(2) & \dots & b_m^-(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & b_{v_j-1}^-(m+1) & b_{v_j}^+(m+1) & b_{v_j+1}^-(m+1) & \dots & b_m^-(m+1) \end{vmatrix}.$$

Вычтем из $(m+1)$ -ой строки последнего определителя m -ую строку и так далее, из третьей – вторую, из второй – первую, учитывая при этом равенства

$$(\gamma+j+1)_i - (\gamma+j)_i = i(\gamma+j+1)_{i-1}, \quad \frac{1}{(\gamma+j+1)_i} - \frac{1}{(\gamma+j)_i} = -\frac{i}{(\gamma+j)_{i+1}},$$

затем разложим полученный определитель по элементам первого столбца. Тогда будем иметь:

$$A' = (-1)^j m!.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1^-(1) & \dots & b_{v_j-2}^-(1) & b_{v_j+1}^+(1) & b_{v_j}^-(1) & \dots & b_{m-1}^-(1) \\ 1 & b_1^-(2) & \dots & b_{v_j-2}^-(2) & b_{v_j+1}^+(2) & b_{v_j}^-(2) & \dots & b_{m-1}^-(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & b_1^-(m) & \dots & b_{v_j-2}^-(m) & b_{v_j+1}^+(m) & b_{v_j}^-(m) & \dots & b_{m-1}^-(m) \end{vmatrix}.$$

Повторяя эту редукцию еще $v_1 - 1$ раз, придем к следующему равенству (в последней строке определителя $m_{v_1}^- := m + 1 - v_1$)

$$A' = (-1)^{jv_1} m!(m-1)! \dots (m-v_1+1)! \prod_{k=1}^j \prod_{l=1}^{v_1-1} \frac{v_k+l}{v_k-l} \cdot \begin{vmatrix} b_{2v_1}^+(1) & b_1^-(1) & \dots & b_{v_j+v_1}^+(1) & \dots & b_{m-v_1}^-(1) \\ b_{2v_1}^+(2) & b_1^-(2) & \dots & b_{v_j+v_1}^+(2) & \dots & b_{m-v_1}^-(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{2v_1}^+(m_{v_1}^-) & b_1^-(m_{v_1}^-) & \dots & b_{v_j+v_1}^+(m_{v_1}^-) & \dots & b_{m-v_1}^-(m_{v_1}^-) \end{vmatrix}.$$

Обозначим через $B(v_1, p), p = j$ определитель в правой части последнего равенства. Вынесем за знак определителя $B(v_1, p)$ элементы первого столбца. Тогда (в последней строке определителя $m_{v_1}^+ := m + v_1 + 1$)

$$B(v_1, p) = \prod_{k=1}^{m-v_1+1} \frac{1}{(\gamma+n+k)_{2v_1}}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & b_{2v_1+1}^-(2v_1+1) & \dots & b_{v_j-v_1}^+(2v_1+1) & \dots & b_{m+v_1}^-(2v_1+1) \\ 1 & b_{2v_1+1}^-(2v_1+2) & \dots & b_{v_j-v_1}^+(2v_1+2) & \dots & b_{m+v_1}^-(2v_1+2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & b_{2v_1+1}^-(m_{v_1}^+) & \dots & b_{v_j-v_1}^+(m_{v_1}^+) & \dots & b_{m+v_1}^-(m_{v_1}^+) \end{vmatrix}.$$

Применим к последнему определителю стандартную процедуру: вычтем из $(m-v_1+1)$ -ой строки $(m-v_1)$ -ую и так далее, из третьей – вторую, из второй – первую, разложим полученный определитель по элементам первого столбца. За знак определителя, полученного таким образом, вынесем элементы первого столбца. Тогда

$$B(v_1, p) = (-1)^{p-1} \frac{(m+v_1)!}{(2v_1)!} \cdot \prod_{k=2}^j \frac{v_k - v_1}{v_k + v_1} \cdot \prod_{k=1}^{m-v_1+1} \frac{1}{(\gamma+n+k)_{2v_1}} \cdot \prod_{k=1}^{m-v_1} (\gamma+n+k)_{2v_1}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1^-(1) & \dots & b_{v_j+v_1+1}^+(1) & \dots & b_{m-v_1-1}^-(1) \\ 1 & b_1^-(2) & \dots & b_{v_j+v_1+1}^+(2) & \dots & b_{m-v_1-1}^-(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & b_1^-(m-v_1) & \dots & b_{v_j+v_1+1}^+(m-v_1) & \dots & b_{m-v_1-1}^-(m-v_1) \end{vmatrix}.$$

Применим к определителю в правой части последнего равенства стандартную процедуру $v_2 - v_1 - 1$ раз. В результате получим

$$B(v_1, p) = \frac{(-1)^{(v_2-v_1)(p-1)}}{(\gamma+n+m-v_1+1)_{2v_1}} \cdot \frac{(m+v_1)!}{(2v_1)!} \cdot \prod_{k=1}^{v_2-v_1-1} (m-v_1-k)! \cdot \prod_{k=2}^j \frac{v_k-v_1}{v_k+v_1} \cdot \prod_{l=1}^{v_2-v_1-1} \prod_{k=2}^j \frac{v_k+v_1+l}{v_k-v_1-l} \cdot B(v_2, p-1),$$

где

$$B(v_2, p-1) = \begin{vmatrix} b_{2v_2}^+(1) & b_1^-(1) & \dots & b_{v_j+v_2}^+(1) & \dots & b_{m-v_2}^-(1) \\ b_{2v_2}^+(2) & b_1^-(2) & \dots & b_{v_j+v_2}^+(2) & \dots & b_{m-v_2}^-(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{2v_2}^+(m_{v_2}^-) & b_1^-(m_{v_2}^-) & \dots & b_{v_j+v_2}^+(m_{v_2}^-) & \dots & b_{m-v_2}^-(m_{v_2}^-) \end{vmatrix}.$$

Теперь, учитывая лемму 1.3, (1.14) и предыдущие рекуррентные соотношения, окончательно получим, что

$$A_{v_1, v_2, \dots, v_j}^j = \frac{(-1)^q m!}{2^{m+1} \prod_{i=1}^j (\gamma+n+m+1-v_j)_{2v_i}} \cdot \prod_{k=1}^{m+1} \frac{1}{(\gamma)_{n+k}} \cdot \prod_{k=1}^{v_1-1} (m-k)! \cdot \prod_{l=1}^{v_1-1} \prod_{k=1}^j \frac{v_k+l}{v_k-l} \cdot \prod_{i=1}^{j-1} \prod_{k=i+1}^j \frac{v_k-v_i}{v_k+v_i} \cdot \prod_{i=1}^{j-1} \prod_{k=1}^{v_{i+1}-v_i-1} (m-v_i-k)! \cdot \prod_{i=1}^{j-1} \prod_{k=i+1}^j \prod_{l=1}^{v_{i+1}-v_i-1} \frac{v_k+v_i+l}{v_k-v_i-l} \cdot \prod_{i=1}^j \frac{(m+v_i)!}{(2v_i)!} \cdot \prod_{k=1}^{m-v_j-1} k!.$$

Произведя элементарные преобразования в правой части последнего равенства, получим (1.13). Лемма 1.4 доказана.

Пусть

$$A_1 = 2(-1)^m \tilde{A}(1) = \begin{vmatrix} c_{n+1} & c_n+c_{n+2} & \dots & c_{n-m+1}+c_{n+m+1} \\ c_{n+2} & c_{n+1}+c_{n+3} & \dots & c_{n-m+2}+c_{n+m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m} & c_{n+m-1}+c_{n+m+1} & \dots & c_n+c_{n+2m} \\ c_{n+m+1} & c_{n+m}+c_{n+m+2} & \dots & c_{n+1}+c_{n+2m+1} \end{vmatrix}.$$

Лемма 1.5. Если $F_\gamma \in \mathcal{F}^t$ и $m(n) = o(n^{2/3})$, то равномерно по всем m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$A_1 \sim A^0.$$

Доказательство. Представим A_1 в виде суммы 2^m определителей, полученных в результате разбиения его столбцов

$$A_1 = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_m} \begin{vmatrix} c_{n+1} & c_{n_1} & \dots & c_{n_m} \\ c_{n+2} & c_{n_1+1} & \dots & c_{n_m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m+1} & c_{n_1+m} & \dots & c_{n_m+m} \end{vmatrix}, \quad (1.15)$$

где n_i принимает либо значение $n+1-i$, либо значение $n+1+i$, $i=1, m$. Учитывая определение $A_{v_1, v_2, \dots, v_j}^j$, (1.15) можно записать в виде

$$A_1 = A^0 + \sum_{v_1} A_{v_1}^1 + \sum_{v_1 < v_2} A_{v_1, v_2}^2 + \dots + \sum_{v_1 < v_2 < \dots < v_j} A_{v_1, v_2, \dots, v_j}^j + A_{v_1, v_2, \dots, v_m}^m = A^0 + S^1 + S^2 + \dots + S^j + \dots + S^m = A^0 \left(1 + \sum_{j=1}^m \frac{S^j}{A^0} \right),$$

где S^j состоит ровно из $C_m^j = \frac{m!}{j!(m-j)!}$ слагаемых. Учитывая явное выражение (1.10) и (1.13) для определителей A^0 , $A_{v_1, v_2, \dots, v_j}^j$ и легко проверяемые неравенства

$$\prod_{i=1}^j \frac{(v_i+1)_{v_i-1}}{(2v_i)!} \cdot \prod_{i=1}^{j-1} \prod_{k=i+1}^j (v_k+v_i+1)_{v_{i+1}-v_i-1} \leq 1, \quad \prod_{i=1}^{j-1} \prod_{k=i+1}^j \frac{v_k-v_i}{v_k+v_i} \leq 1, \quad \frac{\prod_{i=1}^{j-1} \prod_{k=i+1}^j (v_k-v_i)}{\prod_{i=1}^j (v_i-1)!} \leq 1,$$

получаем, что при $n \geq n_0$

$$\left| \frac{A_{v_1, v_2, \dots, v_j}^j}{A^0} \right| \leq \frac{\prod_{k=1}^{m-v_j-1} k! \prod_{k=1}^{v_j} (m-k)! \prod_{k=1}^j (m+v_k)!}{\prod_{k=1}^{m-1} j! \prod_{k=1}^j (m-v_k)! (\gamma+n+m+1-v_k)_{2v_k}} = \prod_{k=1}^j \frac{(m+v_k)!}{(m-v_k)! (\gamma+n+m+1-v_k)_{2v_k}} = \prod_{k=1}^j \frac{(m+1-v_k)_{2v_k}}{(\gamma+n+m+1-v_k)_{2v_k}} \leq \prod_{k=1}^j \frac{(2m)^{2v_k}}{n^{2v_k}} = \left(\frac{2m}{n} \right)^{2(v_1+v_2+\dots+v_j)} \leq \left(\frac{2m}{n} \right)^{2j}.$$

Так как число слагаемых в сумме S^j равно $C_m^j \leq m^j$, то

$$\sum_{j=1}^m \frac{S^j}{A^0} \leq \sum_{j=1}^m m^j \left(\frac{2m}{n} \right)^{2j} = \sum_{j=1}^m \left(\frac{2m^{3/2}}{n} \right)^{2j}.$$

Поэтому окончательно будем иметь, что

$$A_1 = A^0 \left(1 + \sum_{j=1}^m \frac{S^j}{A^0} \right) = A^0 \left(1 + O\left(\frac{m^3}{n^2} \right) \right).$$

Лемма 1.5 доказана.

Следствие 1.1. Если $F_\gamma \in \mathcal{F}^t$, $m(n) = o(n^{2/3})$, то при $0 \leq m \leq m(n)$ и $n \geq n_0$

$$\det A_0 \neq 0, \det B \neq 0, \Delta_{n,m} \neq 0.$$

Лемма 1.6. Пусть $F_\gamma \in \mathcal{F}^t$. Тогда если $m(n) = o(n^{2/3})$, то для каждого $k=1, 2, \dots$ равномерно по всем m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$\det \tilde{A}(1) \sim \frac{(-1)^m}{2^m} \prod_{j=1}^m j! \prod_{j=0}^m \frac{1}{(\gamma)_{n+1+j}}, \quad (1.16)$$

$$\det \tilde{A}(k) \sim \frac{(-1)^m}{2^m} \prod_{j=1}^{m-1} j! \cdot \prod_{j=1}^m (j+k-1)(\gamma+n+j)_{k-1} \prod_{j=0}^m \frac{1}{(\gamma)_{n+k+j}}, \quad (1.17)$$

$$A(y) \sim \frac{1}{2^{m-1}} \prod_{j=1}^{m-1} j! \prod_{j=0}^{m-1} \frac{1}{(\gamma)_{n+j}}, \quad y = e^{ix}. \quad (1.18)$$

Доказательство. Аналогично, как и при доказательстве леммы 1.5, устанавливается, что при $n \rightarrow \infty$

$$\det \tilde{A}(k) \sim 2(-1)^m \begin{vmatrix} c_{n+1} & c_n & \dots & c_{n-m+1} \\ c_{n+2} & c_{n+1} & \dots & c_{n-m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m} & c_{n+m-1} & \dots & c_n \\ c_{n+m+k} & c_{n+m+k-1} & \dots & c_{n+k} \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{m(m+3)/2}}{2^m} \begin{vmatrix} \frac{1}{(\gamma)_{n-m+1}} & \frac{1}{(\gamma)_{n-m+2}} & \dots & \frac{1}{(\gamma)_{n+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(\gamma)_n} & \frac{1}{(\gamma)_{n+1}} & \dots & \frac{1}{(\gamma)_{n+m}} \\ \frac{1}{(\gamma)_{n+k}} & \frac{1}{(\gamma)_{n+k+1}} & \dots & \frac{1}{(\gamma)_{n+m+k}} \end{vmatrix}.$$

Здесь мы учли, что $c_k = \frac{1}{2(\gamma)_k}$. Последний определитель совпадает с определителем $D_{n,m,k}$ из работы [21]. Учитывая его явное выражение (см. равенство (17) из [21]), окончательно получим (1.17).

Перейдем к доказательству эквивалентности (1.18). Раскладывая $\det A(y)$ по элементам первой строки, аналогично, как и при доказательстве леммы 1.5, устанавливаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\det A(y) \sim 2 \begin{vmatrix} c_n & c_{n-1} & \dots & c_{n-m+1} \\ c_{n+1} & c_n & \dots & c_{n-m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n+m-1} & c_{n+m-2} & \dots & c_n \end{vmatrix}.$$

Отсюда и из леммы 1.2 окончательно получим (1.18). Лемма 1.6 доказана.

Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы 1.2. Из (1.5) следует, что при любом $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F_\gamma(x) - \pi'_{n,m}(x; F_\gamma) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{c}_{n+m+k}}{q'_m(x)} \left(e^{i(n+m+k)x} + e^{-i(n+m+k)x} \right) = \\ &= 2Re \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{c}_{n+m+k}}{q'_m(x)} e^{i(n+m+k)x} = \end{aligned}$$

$$= 2Re \left\{ \frac{\tilde{c}_{n+m+1}}{q'_m(x)} e^{i(n+m+1)x} \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\tilde{c}_{n+m+k}}{\tilde{c}_{n+m+1}} e^{i(k-1)x} \right) \right\}.$$

Из равенств (1.8), (1.9) следует, что

$$\frac{\tilde{c}_{n+m+1}}{q'_m(x)} = \frac{\det \tilde{A}(1)}{\det A(y)}, \quad \frac{\tilde{c}_{n+m+k}}{\tilde{c}_{n+m+1}} = \frac{\det \tilde{A}(k)}{\det \tilde{A}(1)}.$$

Учитывая асимптотические равенства (1.16)–(1.18), получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\tilde{c}_{n+m+1}}{q'_m(x)} \sim \frac{(-1)^m m!(\gamma)_n}{2(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}},$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{c}_{n+m+k}}{\tilde{c}_{n+m+1}} &\sim \frac{\prod_{j=1}^m (j+k-1)(\gamma+n+j)_{k-1} \prod_{j=0}^m \frac{1}{(\gamma)_{n+1+j}}}{m! \prod_{j=0}^m \frac{1}{(\gamma)_{n+k+j}}} = \\ &= \frac{(k)_m}{m!(\gamma+n+m+1)_{k-1}} = \frac{C_{m+k-1}^{k-1}}{(\gamma+n+m+1)_{k-1}}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\tilde{c}_{n+m+k}}{\tilde{c}_{n+m+1}} &\leq 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_{m+k-1}^{k-1}}{(\gamma+n+m+1)_{k-1}} \leq \\ &\leq 2 \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{m+1}{\gamma+n+m+1} \right)^{k-1} = O\left(\frac{m}{n}\right). \end{aligned}$$

Учитывая последние неравенства, окончательно получим, что

$$\begin{aligned} F_\gamma(x) - \pi'_{n,m}(x; F_\gamma) &= \\ &= \frac{(-1)^m m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}} Re \left\{ e^{i(n+m+1)x} (1 + o(1)) \right\}. \quad (1.19) \end{aligned}$$

Покажем, что тригонометрические аппроксимации Паде $\pi'_{n,m}(\cdot; F_\gamma)$ приближают функцию F_γ относительно равномерной нормы со скоростью, асимптотически равной наилучшей.

Теорема 1.3. Пусть $F_\gamma \in \mathcal{F}^t$. Тогда, если $m(n) = o(n^{2/3})$, то равномерно по всем m , $0 \leq m \leq m(n)$, при $n \rightarrow \infty$

$$R'_{n,m}(F_\gamma) \sim \left\| F_\gamma - \pi'_{n,m}(\cdot; F_\gamma) \right\| \sim \frac{m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}}.$$

Доказательство. Пусть

$$\varphi(x) = \frac{(-1)^m m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}} e^{i(n+m+1)x}.$$

Из равенства (1.19) следует, что при достаточно больших n знак разности $F_\gamma(x) - \pi_{n,m}(x; F_\gamma)$ совпадает со знаком $Re \varphi(x)$. Когда x пробегает весь промежуток $[0, 2\pi)$, точка $(n+m+1)x$ пробегает весь интервал $[0, 2\pi(n+m+1))$. Поэтому существуют $2(n+m+1)$ таких действительных чисел x_j , $j = 1, 2, \dots, 2(n+m+1)$, что

$$0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{2(n+m+1)} < 2\pi;$$

$$\varphi(x_j) = \frac{(-1)^{m+j-1} m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}}.$$

Следовательно, в точках x_j разность $F_\gamma(x) - \pi_{n,m}(x; F_\gamma)$ принимает значения с чередующимися знаками. В таком случае, согласно рациональному аналогу теоремы Валле Пуссена (см., например, [24], [25]),

$$R_{n,m}^t(F_\gamma) \geq \min_{1 \leq j \leq 2(n+m+1)} |F_\gamma(x_j) - \pi_{n,m}^t(x_j; F_\gamma)| \geq \frac{m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}} (1 - |o(1)|).$$

С другой стороны,

$$R_{n,m}^t(F_\gamma) \leq \max_{x \in \mathbb{R}} |F_\gamma(x) - \pi_{n,m}^t(x; F_\gamma)| \leq \frac{m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}} (1 + |o(1)|).$$

Теорема 1.3 доказана.

2 Доказательство теоремы 0.2

Каждой функции $f \in C[-1,1]$ поставим в соответствие ее индуцированную функцию $\psi(x) = f(\cos x)$. Точно так же, как и в полиномиальном случае (см. [24], [25]), доказывается, что для целых неотрицательных n и m

$$R_{n,m}(f; [-1,1]) = R_{n,m}^t(\psi). \quad (2.1)$$

Так как

$$F_\gamma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{(\gamma)_k},$$

то
$$F_\gamma(\arccos x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_k(x)}{(\gamma)_k}.$$

Поскольку $f_\gamma(x)$ и $F_\gamma(\arccos x)$ непрерывны и представляются одним и тем же рядом Фурье-Чебышева, то $f_\gamma(x) = F_\gamma(\arccos x)$, $x \in [-1,1]$, т. е. F_γ является индуцированной функцией для f_γ .

Поэтому из (2.1) следует, что

$$R_{n,m}(f_\gamma; [-1,1]) = R_{n,m}^t(F_\gamma).$$

Ряд Фурье F_γ содержит только косинусы кратных дуг. Исходя из (1.4), можно сделать вывод о том, что числитель и знаменатель дроби Паде $\pi_{n,m}^t(\cdot; F_\gamma)$ также содержит только косинусы кратных дуг. Поэтому справедливо тождество

$$\pi_{n,m}^t(\arccos x; F_\gamma) = \pi_{n,m}^{ch}(x; f_\gamma), \quad x \in [-1,1],$$

из которого следует, что индуцированной функцией для $\pi_{n,m}^{ch}(\cdot; f_\gamma)$ является $\pi_{n,m}^t(\cdot; F_\gamma)$. Таким образом, теорема 0.2 является следствием теоремы 1.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бернштейн, С.Н. Экстремальные свойства полиномов / С.Н. Бернштейн. – М.–Л. : ОНТИ, 1937.
2. Бернштейн, С.Н. Собрание сочинений: В 4-х томах. Т. 1 / С.Н. Бернштейн. – М. : Изд-во АН СССР, 1952.

3. Braess, D. On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^z / D. Braess // J. Approx. Theory. – 1984. – Vol. 40, №4. – P. 375–379.

4. Шмаль, Г. Наилучшие равномерные рациональные аппроксимации $|x|$ на $[-1,1]$ / Г. Шмаль // Матем. сборник. – 1992. – Т. 183, № 8. – С. 85–118.

5. Stahl, H. Best uniform rational approximation of x^α on $[0,1]$ / H. Stahl // Acta Math. – 2003. – Vol. 190, №2. – P. 241–306.

6. Аптекарев, А.И. Точные константы рациональных аппроксимаций аналитических функций / А.И. Аптекарев // Матем. сборник. – 2002. – Т. 193, №1. – С. 3–72.

7. Гончар, А.А. Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций / А.А. Гончар, Е.А. Рахманов // Матем. сборник. – 1987. – Т. 134 (176), №3. – С. 306–352.

8. Newman, D.J. Rational approximation to $|x|$ / D.J. Newmam // Mich. Math. – 1964. – Vol. 11, №1. – P. 11–14.

9. Гончар, А.А. О задачах Е.И. Золотарева, связанных с рациональными функциями / А.А. Гончар // Матем. сборник. – 1968. – Т. 78, № 3. – С. 640–653.

10. Гончар, А.А. О скорости рациональной аппроксимации непрерывных функций с характерными особенностями / А.А. Гончар // Матем. сборник. – 1967. – Т. 78, №4. – С. 630–638.

11. Буланов, А.П. Асимптотика для наилучших уклонений $|x|$ от рациональных функций / А.П. Буланов // Матем. сборник. – 1968. – Т. 76, № 2. – С. 288–303.

12. Вячеславов, Н.С. Аппроксимация $|x|$ рациональными функциями / Н.С. Вячеславов // Мат. заметки. – 1971. – Т. 16, №2. – С. 163–171.

13. Вячеславов, Н.С. Об аппроксимации x^α рациональными функциями / Н.С. Вячеславов // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1980. – Т. 44, № 1. – С. 92–110.

14. Гончар, А.А. Рациональные аппроксимации аналитических функций / А.А. Гончар // Труды международного конгресса математиков. Беркли. – 1986. – С. 739–748.

15. Суетин, С.П. О равномерной сходимости диагональной аппроксимации Паде для гиперэллиптических функций / С.П. Суетин // Матем. сборник. – 2000. – Т. 191, № 9. – С. 81–114.

16. Суетин, С.П. Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда / С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2002. – Т. 57, № 1. – С. 45–142.

17. Березкина, Л.Л. Тригонометрические аппроксимации Паде и наилучшие рациональные приближения : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.01 / Л.Л. Березкина. – Минск, 1988.

18. Та Хонг Куанг. Аппроксимации Паде и асимптотики наилучших рациональных приближений : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.01 / Та Хонг Куанг. – Минск, 1991.
19. Люк, Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации / Ю. Люк. – М. : Мир, 1980.
20. Лабыч, Ю.А. Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье / Ю.А. Лабыч, А.П. Старовойтов // Матем. сборник. – 2009. – Т. 200, № 7. – С. 107–130.
21. Старовойтов, А.П. Аппроксимации Паде функций Миттаг-Леффлера / А.П. Старовойтов, Н.А. Старовойтова // Матем. сборник. – 2007. – Т. 198, №7. – С. 109 – 122.
22. Семерджиев, Хр. Аппроксимации Паде для функций, заданных тригонометрическими рядами / Хр. Семерджиев // Научные труды на Пловд. университет. – 1975. – Т. 13, №1. – С. 409–419.
23. Березкина, Л.Л. О рациональной аппроксимации целых 2π -периодических функций / Л.Л. Березкина ; БГУ. – Минск, 1986. – Деп. в ВИНТИ 15.10.86., № 7263-В86 // Журн. Изв. АН БССР. Серия физ.-мат. наук. – Минск. – 1986. – С. 21.
24. Lorentz, G.G. Constructive Approximation / G.G. Lorentz, M.V. Golitschek, Y. Makavoz // Advanced problems. – Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1996.
25. Натансон, И.П. Конструктивная теория функций / И.П. Натансон. – М. – Л. : ГИТТЛ, 1949.

Поступила в редакцию 17.02.11.

УДК 517.9

ХАРАКТЕРИСТИКА UMD ПРОСТРАНСТВ С ПОМОЩЬЮ ВЕКТОРНОЗНАЧНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГИЛЬБЕРТА НА ПОЛЕ p -АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

А.Г. Сидорик

Белорусский государственный университет, Минск

CHARACTERISTIC OF UMD SPACES WITH HILBERT TRANSFORMATION OF VECTOR-VALUED FUNCTIONS ON THE FIELD OF p -ADIC NUMBERS

H.G. Sidoryk

Belarusian State University, Minsk

Мы рассматриваем преобразование Гильберта векторнозначных функций на группе целых p -адических чисел Z_p , принимающих значения в банаховом пространстве X , квадратично интегрируемых по Бохнеру. Доказано, что если при $p \neq 2$ преобразование Гильберта $H : L_2(Z_p, X) \rightarrow L_2(Z_p, X)$ является ограниченным оператором, то банахово пространство X является UMD пространством.

Ключевые слова: преобразование Гильберта, UMD пространство, p -адические числа, преобразование Фурье.

We consider Hilbert transformation of vector-valued functions on the group of p -adic integers Z_p taking values in Banach space X , and square-integrable in Bochner sense. If Hilbert transformation $H : L_2(Z_p, X) \rightarrow L_2(Z_p, X)$ with $p \neq 2$ is a bounded operator, then Banach space X is an UMD space.

Keywords: Hilbert transformation, UMD space, p -adic numbers, Fourier transformation.

Введение

Цель статьи – показать связь между ограниченностью преобразования Гильберта функций со значениями в банаховом пространстве и свойством безусловности мартингалных разностей (UMD) этого пространства.

Введем ряд необходимых понятий и сведений. Пусть (T, μ) – пространство с мерой, X – банахово пространство. Через $L_2(T, X)$ обозначим пространство функций, квадратично интегрируемых в смысле Бохнера [1], т.е. слабо измеримые с конечной нормой

$$\|x\|_{L_2(X)} = \left(\int_T \|x(t)\|_X^2 d\mu(t) \right)^{1/2}.$$

Пусть (Ω, \mathcal{A}, P) – вероятностное пространство и A_1, A_2, \dots неубывающая последовательность σ -алгебр из \mathcal{A} . И пусть $f = (f_1, f_2, \dots)$ – X -значный мартингал с последовательностью мартингалных разностей $d = (d_1, d_2, \dots)$: $d_n = f_n - f_{n-1}$ ($f_0 = 0$ по определению), где $d_n : \Omega \rightarrow X$ сильно измерима относительно A_n с конечным математическим ожиданием $E|d_n|$ и условным математическим ожиданием $E(d_{n+1}|A_n) = 0$, $n \geq 1$.

В [2] Б. Море дал следующее определение: банахово пространство X является UMD пространством ($X \in (UMD)$), если для всех X -значных последовательностей мартингалных разностей $d = (d_1, d_2, \dots)$, всех чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$, равных ± 1 , и всех $n \geq 1$ выполнено неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k d_k \right\|_{L_2(X)} \leq C_X \left\| \sum_{k=1}^n d_k \right\|_{L_2(X)}, \quad (0.1)$$

где константа C_X зависит только от X .

Рассмотрим преобразование Гильберта на вещественной оси $H : L_2(R, X) \rightarrow L_2(R, X)$, действующее следующим образом:

$$Hf(t) = v.p. \int_R \frac{f(s-t)}{s} ds.$$

Связь между UMD пространствами и ограниченностью преобразования Гильберта на поле вещественных чисел устанавливает следующая теорема.

Теорема 0.1 ([3], [4]). *Преобразование Гильберта $H : L_2(R, X) \rightarrow L_2(R, X)$ ограничено тогда и только тогда, когда X является UMD пространством.*

Трудности изучения ограниченности преобразования Гильберта и связанных проблем гармонического анализа в $L_2(R, X)$ обусловлены

тем, что преобразование Фурье ограничено в $L_2(R, X)$ только в том случае, когда X изоморфно гильбертовому пространству [5].

1 Предварительные сведения

Рассмотрим вещественнозначное преобразование Гильберта на поле p -адических чисел Q_p [6]

$$H : L_2(Q_p, R) \rightarrow L_2(Q_p, R),$$

$$Hf(y) = \lim_{k \rightarrow 0} \int_{\{|x|_p \leq p^{-k}\}} \frac{\omega(x)}{|x|_p} f(y-x) d\mu(x),$$

где $|\cdot|_p$ – p -адический модуль, μ – мера Хаара группы Q_p , $\omega(x)$ – ограниченная μ -измеримая функция на сфере $S(0,1) = \{x : |x|_p = 1\}$ такая, что

$\int_{S(0,1)} \omega(x) d\mu(x) = 0$. Функция $\omega(x)$ разлагается в

ряд Фурье $\omega(x) = \sum_{\theta \in Z_p^*, \theta \neq 1} \omega_\theta \theta(x)$, где θ – мульти-

пликативный характер на мультипликативной группе Z_p^* . Таким образом, изучение общего сингулярного преобразования сводится к изучению более специального преобразования, соответствующего $\omega(x) = \theta(x)$, которое представляется в виде

$$H = F^{-1} M_{\bar{\theta}} F, \tag{1.1}$$

где $F : L_2(Q_p, R) \rightarrow L_2(Q_p, R)$ преобразование Фурье, являющееся изометрическим изоморфизмом, $M_{\bar{\theta}}$ – оператор умножения на мультипликативный комплексно-сопряженный характер $\bar{\theta}$ ($\theta \neq 1$). Из (1.1) несложно видеть, что преобразование Гильберта $H : L_2(Q_p, R) \rightarrow L_2(Q_p, R)$ ограничено.

Возникает ряд естественных вопросов:

1. Что происходит в случае, когда функции принимают значение в некотором банаховом пространстве?

2. Справедлива ли в случае ограниченности оператора H формула (0.1)?

3. Ограничено ли преобразование Гильберта для любого банахова пространства, если нет, то какими свойствами обладает пространство в случае ограниченности преобразования?

В работе [7] авторами доказана теорема:

Теорема 1.1 ([7]). *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Банахово пространство X изоморфно гильбертову.*

2. *Существует $C > 0$ такое, что для любого натурального N и $x_0, x_1, \dots, x_{p^{2N}-1} \in X$*

$$\int_{Z_p} \left\| \sum_{k=0}^{p^{2N}-1} \chi_p \left(\frac{kt}{p^{2N}} \right) \cdot x_k \right\|^2 d\mu(t) \leq C \sum_{k=0}^{p^{2N}-1} \|x_k\|^2.$$

3. *Существует $C > 0$ такое, что для любого натурального N и $\varepsilon > 0$*

$$C^{-1} \sum_{k=0}^{p^{2N}-1} \|x_k\|^2 \leq \int_{Z_p} \left\| \sum_{k=0}^{p^{2N}-1} \chi_p \left(\frac{kt}{p^{2N}} \right) \cdot x_k \right\|^2 d\mu(t).$$

4. Преобразование Фурье

$$F : L_2(Q_p, X) \rightarrow L_2(Q_p, X)$$

является ограниченным оператором.

Из теоремы 1.1. следует, что для банахово-значного случая преобразование Гильберта, вообще говоря, не ограничено. Если банахово пространство изоморфно гильбертову, то преобразование Гильберта ограничено. Гильбертовы пространства входят в класс UMD пространств. Далее будет показано, что ограниченность преобразования Гильберта влечет свойство безусловности мартингалных разностей.

2 Вспомогательные результаты

Докажем ряд необходимых лемм.

Рассмотрим вопрос о мультипликативных характерах θ из $\widehat{Z_p^*}$ ($p \neq 2$) таких, что $\theta^2 = 1$. Такие характеры задаются через символ Лежандра [8]. Действительно, любой элемент $x \in Z_p^*$ можно однозначно представить в виде $x = a_0(1 + py)$, где $a_0 \in F_p^* = \{1, 2, \dots, p-1\}$, $y \in Z_p$. Получаем разложение группы Z_p^* в произведение $F_p^* \times (1 + pZ_p)$. Таким образом, группу характеров $\widehat{Z_p^*}$ можно определить следующим образом

$$\widehat{Z_p^*} \cong F_p^* \times \widehat{(1 + pZ_p)} \cong F_p^* \times (Q_p / Z_p).$$

Лемма 2.1 *Мультипликативный характер θ на мультипликативной группе $G = G_1 \times G_2$ $\theta(x) = \theta(x_1, x_2) = \theta_1(x_1) \times \theta_2(x_2)$ принимает значения из множества $\{-1, 1\}$ тогда и только тогда, когда $\theta_1(x_1)$ принимает значения из множества $\{-1, 1\}$ и $\theta_2(x_2)$ принимает значения из множества $\{-1, 1\}$.*

Доказательство. Пусть e_1, e_2 единичные элементы групп G_1 и G_2 соответственно, т.е. $\theta_1(e_1) = \theta_2(e_2) = 1$. Получаем,

$$\theta(e_1, x_2) = \theta_1(e_1) \times \theta_2(x_2) = \theta_2(x_2).$$

Значит, $\theta_2(x_2)$ принимает значения из множества $\{-1, 1\}$. И $\theta(x_1, e_2) = \theta_1(x_1) \times \theta_2(e_2) = \theta_1(x_1)$, откуда следует, что $\theta_1(x_1)$ принимает значения из множества $\{-1, 1\}$. В обратную сторону утверждение очевидно.

Так как мультипликативные характеры на F_p^* , принимающие значения ± 1 , могут быть только $\theta \equiv 1$ или θ , определяемый через символ

Лежандра, а на $(1 + pZ_p)$ – только $\theta \equiv 1$, то согласно лемме 1 мультипликативные характеры θ из \widehat{Z}_p^\times ($p \neq 2$) такие, что $\theta^2 = 1$, могут быть или тривиальны, или заданы с помощью символа Лежандра. Поскольку тривиальные характеры не определяют преобразование Гильберта, то в дальнейшем будем работать только с символом Лежандра.

Лемма 2.2. Преобразование Фурье

$$F : L_2(Q_p, X) \rightarrow L_2(Q_p, X)$$

сохраняет свойство четности (нечетности).

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$ четная функция. Тогда

$$\begin{aligned} (F\varphi)(-\xi) &= \int_{Q_p} \varphi(t) \chi_p(-\xi t) d\mu(t) = \\ &= \int_{Q_p} \varphi(t) \chi_p(\xi(-t)) d\mu(t) = \\ &= \int_{Q_p} \varphi(-t) \chi_p(\xi(t)) d\mu(-t) = \\ &= \int_{Q_p} \varphi(t) \chi_p(\xi t) d\mu(t) = (F\varphi)(\xi). \end{aligned}$$

Если же $\varphi(t)$ нечетная функция, то

$$\begin{aligned} (F\varphi)(-\xi) &= \int_{Q_p} \varphi(t) \chi_p(-\xi t) d\mu(t) = \\ &= \int_{Q_p} \varphi(t) \chi_p(\xi(-t)) d\mu(t) = \\ &= \int_{Q_p} \varphi(-t) \chi_p(\xi(t)) d\mu(-t) = \\ &= - \int_{Q_p} \varphi(t) \chi_p(\xi t) d\mu(t) = -(F\varphi)(\xi). \end{aligned}$$

Это же свойство будет верно и для обратного преобразования Фурье. Лемма доказана.

Рассмотрим функции на Z_p , аналогичные функциям Радемахера:

$$r(x) = \begin{cases} 1, & a(x) \leq \frac{p-1}{2}, \\ -1, & a(x) > \frac{p-1}{2}, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $a(x)$ – первая ненулевая цифра в каноническом разложении числа x ;

$$r(x) = \begin{cases} \left(\frac{a_2(x)}{p}\right), & a_1(x) \leq \frac{p-1}{2}, \\ \left(\frac{a_2(-x)}{p}\right), & a_1(x) > \frac{p-1}{2}, \end{cases} \quad (2.2)$$

где $a_1(x)$ – первая ненулевая цифра, $a_2(x)$ – вторая ненулевая цифра в каноническом разложении числа x , $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ – символ Лежандра.

Не сложно проверить, что функция (2.1) – нечетная, функция (2.2) – четная.

Лемма 2.3. Пусть $H : L_2(Z_p, R) \rightarrow L_2(Z_p, R)$

– преобразование Гильберта $p \neq 2$, $r(t)$ – функция Радемахера, число $\varepsilon = \pm 1$, тогда $\varepsilon Hr(t) = Hr(\varepsilon t)$.

Доказательство. Если $\varepsilon = 1$, то утверждение очевидно.

Пусть $\varepsilon = -1$, тогда необходимо проверить, что $Hr(-t) = -Hr(t)$, т.е. преобразование Гильберта функции r нечетно. Для этого воспользуемся формулой (1.1), записанной в виде

$$\widehat{Hr}(\xi) = \theta(\xi) \widehat{r}(\xi), \quad \text{где } \theta(\xi) = \left(\frac{a_0}{p}\right) \text{ – характер,}$$

заданный через символ Лежандра, a_0 – первая ненулевая цифра в каноническом разложении числа ξ .

Если $p \equiv 1 \pmod{4}$, т.е. θ – четная функция, то взяв нечетный аналог функции Радемахера (2.1), в силу леммы 2.2 получаем, что $\theta(\xi) \widehat{r}(\xi)$ будет нечетной функцией и преобразование Гильберта Hr нечетно.

Если $p \equiv 3 \pmod{4}$, т.е. θ – нечетная функция, то взяв четный аналог функции Радемахера (2.2), в силу леммы 2.2 получаем, что $\theta(\xi) \widehat{r}(\xi)$ будет нечетной функцией и преобразование Гильберта Hr нечетно.

Перейдем к рассмотрению векторнозначного случая. Пусть X – банахово пространство, преобразование Гильберта

$$H : L_2(Z_p, X) \rightarrow L_2(Z_p, X).$$

В качестве всюду плотной области определения оператора H рассмотрим

$$L_2(Z_p, R) \otimes X = \left\{ \sum_{(i)} \varphi_i b_i, \varphi_i \in L_2(Z_p, R), b_i \in X \right\}.$$

Лемма 2.4. Для любого X -значного тригонометрического полинома

$$g(t) = \sum_{k \in Q_p / Z_p, |k|_p \leq p^{-N}} b_k \chi_p(kt), \quad b_k \in X$$

и любой функции $\phi \in L_2(Z_p, R)$ имеем

$$H(\phi(p^{-N}t)g(t)) = (H\phi)(p^{-N}t)g(t). \quad (2.3)$$

Доказательство. Функцию $\phi \in L_2(Z_p, R)$ можем рассматривать как функцию из $L_2(Q_p, R)$ следующим образом

$$\phi \in L_2(Z_p, R) \subset L_2(Q_p, R),$$

$$\phi(t) = \begin{cases} \phi(t), & |t|_p \leq 1, \\ 0, & |t|_p > 1. \end{cases}$$

Вычислим преобразование Фурье

$$\begin{aligned} F(\phi(p^{-N}t))(\xi) &= \\ &= \int_{Q_p} \phi(p^{-N}t) \chi(\xi t) d\mu(t) = \left[t' = p^{-N}t \right. \\ &\quad \left. d\mu(t) = p^{-N} d\mu(t') \right] = \end{aligned}$$

$$= p^{-N} \int_{Q_p} \phi(t') \chi(p^N \xi t') d\mu(t') = p^{-N} (F\phi)(p^N \xi).$$

Рассмотрим число $\gamma \geq 1$ такое, что мультипликативный характер $\theta(t)|_{S(0,1)}$ постоянен на шарах радиуса $p^{-\gamma}$.

Пусть N – достаточно большое целое (точная оценка в конце). К равенству (2.3) применим преобразование Фурье и получим

$$\begin{aligned} \theta(\xi) \cdot (p^{-N} \hat{\phi}(p^N \xi) * \hat{g}(\xi)) &= \\ &= (\theta(\xi) \cdot p^{-N} \hat{\phi}(p^N \xi)) * \hat{g}(\xi). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Обозначим через $r[f]$ – радиус постоянства, $R[f]$ – радиус носителя функции f . Тогда $r[\hat{\phi}(p^N \xi)] = p^N$ (т. е. $\hat{\phi}(p^N \xi) \equiv 0$ на шаре $B[0, p^N]$), $r[\hat{g}(\xi)] = 1$. Причем, $R[\hat{g}] \geq r[\hat{g}]$, т. е. $R[\hat{g}] \geq 1$.

На дополнении к $B[0, p^N]$ функция $\theta(\xi)$ имеет радиус постоянства $p^{N+1-\gamma}$, за счет свойства $\theta(p^N \xi) = \theta(\xi)$. Равенство (2.4) верно при условии $\min\{r[\hat{\phi}(p^N \xi)], r[\theta(\xi)]\} \geq R[\hat{g}]$. За счет произвольности выбора N , возьмем $N \geq \gamma - 1$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \min\{r[\hat{\phi}(p^N \xi)], r[\theta(\xi)]\} &= \\ &= \min\{p^N, p^{N+1-\gamma}\} = p^{N+1-\gamma} \geq 1 = R[\hat{g}]. \end{aligned}$$

Значит, выполняется равенство (2.4), а, следовательно, и равенство (2.3). Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Предположим, что преобразование Гильберта $H : L_2(Z_p, X) \rightarrow L_2(Z_p, X)$ ограничено с константой ограниченности C_X . Для любых функций $\phi_k \in L_2(Z_p, R)$ и $g_k(t_1, t_2, \dots, t_k) \in L_2(Z_p^k, X)$, и любого натурального $n \in \mathbb{N}$ имеем*

$$\begin{aligned} \int_{Z_p^{n+1}} \left\| \sum_{k=1}^n g_k(t_1, t_2, \dots, t_k) H\phi_k(t_{k+1}) \right\|_X^2 d\mu(t) &\leq \\ &\leq C_X \int_{Z_p^{n+1}} \left\| \sum_{k=1}^n g_k(t_1, t_2, \dots, t_k) \phi_k(t_{k+1}) \right\|_X^2 d\mu(t). \end{aligned}$$

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $g_k(t_1, t_2, \dots, t_k)$ тригонометрические полиномы. Так как H ограничено, то по лемме 2.4 получим

$$\begin{aligned} \int_{Z_p} \left\| \sum_{k=1}^n g_k(t_1 + \alpha, \dots, t_k + \alpha) H\phi_k(t_{k+1} + \alpha) \right\|_X^2 d\mu(\alpha) &= \\ = \int_{Z_p} \left\| H \left(\sum_{k=1}^n g_k(t_1 + \alpha, \dots, t_k + \alpha) \phi_k(t_{k+1} + \alpha) \right) \right\|_X^2 d\mu(\alpha) &\leq \\ \leq C_X \int_{Z_p} \left\| \sum_{k=1}^n g_k(t_1 + \alpha, \dots, t_k + \alpha) \phi_k(t_{k+1} + \alpha) \right\|_X^2 d\mu(\alpha) \end{aligned}$$

для любого $t = (t_1, t_2, \dots, t_k, t_{k+1}) \in Z_p^{k+1}$. Теперь проинтегрируем по t на Z_p^{k+1} и применим теорему Фубини. Так как $\int_{Z_p} d\mu(\alpha) = 1$, то переменная α исчезает. Таким образом, лемма доказана.

В силу того, что мультипликативный характер определен через символ Лежандра, то преобразование Гильберта $H^2 = I$, т. е. тождественно. Следовательно, можно получить неравенство в обратную сторону.

$$\begin{aligned} \int_{Z_p^{n+1}} \left\| \sum_{k=1}^n g_k(t_1, t_2, \dots, t_k) \phi_k(t_{k+1}) \right\|_X^2 d\mu(t) &\leq \\ &\leq C_X \int_{Z_p^{n+1}} \left\| \sum_{k=1}^n g_k(t_1, t_2, \dots, t_k) H\phi_k(t_{k+1}) \right\|_X^2 d\mu(t). \end{aligned} \quad (2.5)$$

3 Основной результат

Докажем основную теорему данной статьи.

Чтобы проверять, что X является UMD пространством, достаточно проверять условие (0.1) для мартингалов (X -значных) Уолша–Пэли (Walsh–Paley) f , чья последовательность мартингаловых разностей имеет вид $d_k = D_k(r_1, r_2, \dots, r_k)r_{k+1}$, где (r_k) – последовательность функций Радемахера, D_k – X -значная функция [9].

В нашем случае условие (0.1) имеет вид для любого $n \in \mathbb{N}$ и всех чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ равных ± 1

$$\begin{aligned} \int_{Z_p} \left\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k d_k(t) \right\|_X^2 d\mu(t) &\leq \\ &\leq C_X \int_{Z_p} \left\| \sum_{k=1}^n d_k(t) \right\|_X^2 d\mu(t). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Теорема 3.1. *Пусть преобразование Гильберта $H : L_2(Z_p, X) \rightarrow L_2(Z_p, X)$ ($p \neq 2$) ограничено, тогда X является UMD пространством.*

Доказательство. Если $p \equiv 1 \pmod{4}$, то в качестве функции Радемахера берем ее нечетный аналог (2.1). Получаем

$$\begin{aligned} I &= \int_{Z_p^{n+1}} \left\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k D_k(r(t_1), \dots, r(t_k)) r(t_{k+1}) \right\|_X^2 d\mu(t) \leq \\ &\quad [\text{согласно неравенству (2.5)}] \\ &\leq C_X^2 \int_{Z_p^{n+1}} \left\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k D_k(r(t_1), \dots, r(t_k)) H r(t_{k+1}) \right\|_X^2 d\mu(t) = \\ &= C_X^2 \int_{Z_p^{n+1}} \left\| \sum_{k=1}^n D_k(r(t_1), \dots, r(t_k)) \varepsilon_k H r(t_{k+1}) \right\|_X^2 d\mu(t) = \\ &\quad [\text{по лемме 2.3}] \\ &= C_X^2 \int_{Z_p^{n+1}} \left\| \sum_{k=1}^n D_k(r(t_1), \dots, r(t_k)) H r(\varepsilon_k t_{k+1}) \right\|_X^2 d\mu(t) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{[по лемме 2.5]} \\ & \leq C_X^4 \int_{Z_p^{n+1}} \left\| \sum_{k=1}^n D_k(r(t_1), \dots, r(t_k)) r(\varepsilon_k t_{k+1}) \right\|_X^2 d\mu(t) = \\ & \quad \text{[замена переменных]} \\ & = C_X^4 \int_{Z_p^{n+1}} \left\| \sum_{k=1}^n D_k(r(t_1), \dots, r(t_k)) r(t_{k+1}) \right\|_X^2 d\mu(t) = I'. \end{aligned}$$

Левая и правая части в неравенстве (3.1) соответственно равны I и I' . Значит, неравенство (3.1) доказано.

Если $p \equiv 3 \pmod{4}$, то в качестве функции Радемахера берем ее четный аналог (2.2) и повторяем все предыдущие рассуждения. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность научному руководителю Радыно Якову Валентиновичу за постановку задачи и ценные замечания при ее решении, а также Радыно Евгению Мефодьевичу за полезное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mikusinski, J. The Bochner integral / J. Mikusinski. – Acad. Press, 1978.
2. Maurey, B. Systeme de Haar / B. Maurey // Seminaire Maurey – Schwartz. Ecole Polytechnique. Paris. – 1974–1975. – P. I.1 – I.11, II.1 – II.13.

3. Bourgain, J. Some remarks on Banach spaces in which martingale differences are unconditional. / J. Bourgain // Arc. Mat. – 1983. – Vol. 21. – № 2 – P. 163–168.

4. Burkholder, D.L. A geometrical condition that implies the existence of certain singular integrals of Banach-space-valued functions / D.L. Burkholder // Proc. Conf. Harmonic Analysis in Honor of A. Zygmund. – 1981. – P. 270–286.

5. Kwapien, S. Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector-valued coefficients / S Kwapien // Studia mathematica. – 1972. – Vol. XLIV. – P. 583–595.

6. Philips, K. Hilbert transform for the p -adic and p -series fields / K. Philips // Pacific journal of mathematics. – 1967. – Vol. 23, № 2. – P. 329–347.

7. Радыно, Е.М. Характеристика гильбертовых пространств с использованием преобразования Фурье на поле p -адических чисел / Е.М. Радыно, Я.В. Радыно, А.Г. Сидорик // Докл. НАН Беларуси. – 2007. – Т. 48, № 5. – С. 17–22.

8. Виноградов, И.М. Основы теории чисел / И.М. Виноградов. – М. : Наука, 1965.

9. Pisier, G. Martingales with values in uniformly convex spaces / G. Pisier // Israel J. Math. – 1975. – Vol. 20. – P. 326–350.

Поступила в редакцию 12.01.11.

УДК 512.542

СВЕРХРАЗРЕШИМОСТЬ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ С μX -ДОБАВЛЯЕМЫМИ ПОДГРУППАМИ

А.В. Шныпарков

Гомельский инженерный институт МЧС Республики Беларусь, Гомель

SUPERSOLVABILITY OF A FINITE GROUP WITH μX -SUPPLEMENTED SUBGROUPS

A.V. Shnyparkov

Gomel Engineering Institute of the Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus, Gomel

Пусть G – конечная группа, X – некоторое непустое подмножество группы G . Подгруппа H группы G называется μX -добавляемой подгруппой в G , если существует такая подгруппа B , что $G = HB$ и для любой максимальной подгруппы H_1 из H существует $x \in X$, что $H_1 B \neq G$ и $H_1 B^x = B^x H_1$. Для начальных значений p устанавливается p -сверхразрешимость конечной группы с μX -добавляемой силовой p -подгруппой. Получены новые условия сверхразрешимости конечной группы.

Ключевые слова: конечная группа, силовая подгруппа, μX -добавляемая подгруппа, сверхразрешимая группа, p -сверхразрешимая группа.

Let G be a finite group, X – some non-empty subset of the group G . The subgroup H of group G is identified μX -supplemented in G if there exists a subgroup B such that $G = HB$ and for any maximal subgroup H_1 of H there is $x \in X$ such that $H_1 B \neq G$ and $H_1 B^x = B^x H_1$. The p -supersolvability of a finite group with μX -supplemented Sylow p -subgroup for initial importance of the number p are obtained. New conditions of the supersolvability finite groups is received.

Keywords: finite group, Sylow subgroup, μX -supplemented subgroup, supersolvable group, p -supersolvable group.

Введение

Будем рассматривать только конечные группы. Все используемые обозначения стандартны и соответствуют [1] и [2]. Напомним, что подгруппа H группы G называется добавлением к подгруппе K в группе G , если $G = HK$.

Ясно, что в каждой группе любая подгруппа обладает добавлением. Однако, при дополнительных ограничениях на добавления или на добавляемые подгруппы можно выделять разнообразные классы групп. Так, например, Кегель показал [3], что группа G разрешима, если каждая максимальная подгруппа группы G имеет циклическое добавление. В работах Кегеля и Виландта (см. [4]) установлена разрешимость группы с нильпотентным добавлением к некоторой нильпотентной подгруппе. В работе [5] В.С. Монахов перечислил неразрешимые группы с нильпотентными добавлениями к несверхразрешимым подгруппам. В 2008 году Л. Мяс и В. Лемпкен [6] предложили следующее понятие: подгруппа H группы G называется μ -добавляемой в G , если существует подгруппа K такая, что $G = HK$ и $H_1 K$ – собственная подгруппа группы G , для каждой максимальной подгруппы H_1 из H . Они получили следующий результат [6]:

p -разрешимая группа G тогда и только тогда p -сверхразрешима, когда её силовая p -подгруппа μ -добавляема в G .

Чуть позже В.С. Монахов и А.В. Шныпарков установили, что для получения p -сверхразрешимости группы G условие p -разрешимости можно не требовать для двух начальных значений простого делителя p ее порядка. Это вытекает из следующего результата:

пусть G – группа и $\pi(G) = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$, $p_1 < p_2 < \dots < p_k$; если силовая p_1 - или силовая p_2 -подгруппа μ -добавляема в G , то группа G соответственно p_1 - или p_2 -сверхразрешима.

В настоящей статье получены более общие утверждения, из которых в частном случае вытекают указанные выше результаты работ [6] и [7].

1 Определение и вспомогательные результаты

Определение. Пусть G – группа, X – некоторое непустое подмножество группы G . Неединичная подгруппа H группы G называется μX -добавляемой подгруппой в G , если существует такая подгруппа B , что $G = HB$ и для любой

максимальной подгруппы H_1 из H выполняются два свойства:

- 1) $H_1 B \neq G$;
- 2) существует $x \in X$ такой, что $H_1 B^x = B^x H_1$.

В этой ситуации подгруппу B назовем μX -добавлением к H .

Единичную подгруппу считаем μX -добавляемой, а всю группу G – μX -добавлением к ней.

Нетрудно видеть, что в частном случае $X = \{1\}$ μX -добавляемая подгруппа это в точности μ -добавляемая подгруппа.

Лемма 1.1. Пусть G – группа, H – ее подгруппа, $\emptyset \neq X \subseteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если подгруппа H μX -добавляема в G и $X \subseteq Y \subseteq G$, то H μY -добавляема в G .
2. Если подгруппа H μX -добавляема в G , $\emptyset \neq Y \subseteq G$, $Z = XY$, то H^y μZ -добавляема в G для любого $y \in Y$.
3. Пусть $H \triangleleft G$ и $N \subseteq H$. Если подгруппа H μX -добавляема в G , то фактор-группа H/N $\mu XN/N$ -добавляема в G/N .

Доказательство.

1. Очевидно.
2. Пусть H μX -добавляемая подгруппа в G . Тогда существует такая подгруппа B , что $G = HB$, и для любой максимальной подгруппы H_1 из H выполняются два свойства: $H_1 B \neq G$; существует $x \in X$ такой, что $H_1 B^x = B^x H_1$. Пусть $\emptyset \neq Y \subseteq G$, $y \in Y$. Тогда $H^y B = G$ и $H_1^y B \neq G$. Кроме того,

$$\begin{aligned} H_1^y B^{y^y} &= y^{-1} H_1 y y^{-1} x^{-1} B x y = \\ &= y^{-1} H_1 x^{-1} B x y = y^{-1} H_1 B^x y = \\ &= y^{-1} B^x H_1 y = y^{-1} B^x y y^{-1} H_1 y = B^{y^y} H_1^y. \end{aligned}$$

3. Пусть H – μX -добавляемая подгруппа группы G , $N \triangleleft G$ и $N \subseteq H$. Тогда существует μX -добавление B к H в G . Очевидно, что $(H/N)(BN/N) = G/N$. Пусть H_1/N – максимальная подгруппа фактор-группы H/N . Тогда подгруппа H_1 максимальна в H . По определению μX -добавляемой подгруппы $H_1 B \neq G$ и $H_1 B^x = B^x H_1$ для некоторого $x \in X$. Понятно, что

$$\begin{aligned} (H_1/N)(BN/N) &= H_1 B/N \neq G/N, \\ (H_1/N)(BN/N)^{x^N} &= (H_1/N)(B^x N/N) = \\ &= H_1 B^x/N = B^x H_1/N = (BN/N)^{x^N} (H_1/N). \end{aligned}$$

Таким образом, подгруппа BN/N будет $\mu XN/N$ -добавлением к подгруппе H/N в фактор-группе G/N .

Лемма 1.2. Пусть π – некоторое множество простых чисел, H – π -подгруппа группы G , N – нормальная π' -подгруппа группы G и $\emptyset \neq X \subseteq G$. Если подгруппа H μX -добавляема в G , то HN/N $\mu XN/N$ -добавляема в G/N .

Доказательство. Пусть H – μX -добавляемая π -подгруппа группы G , N – нормальная подгруппа группы G и N – π' -подгруппа. Тогда существует подгруппа B в группе G такая, что $G = HB$ и для каждой максимальной подгруппы H_1 из H существует $x \in X$ такой, что $H_1 B \neq G$ и $H_1 B^x = B^x H_1$. Понятно, что

$$(HN/N)(BN/N) = G/N.$$

Пусть K/N – максимальная подгруппа фактор-группы HN/N . По тождеству Дедекинда $K = N(K \cap H)$. Покажем, что $K \cap H$ – максимальная в H подгруппа. Заметим, что $K \cap H \neq H$. Действительно, если $K \cap H = H$, то $H \subseteq K$, а значит,

$$HN/N \subseteq K/N,$$

что противоречит выбору подгруппы K/N . Допустим, что в группе G имеется такая подгруппа T , что $K \cap H \subset T \subset H$. Тогда

$$K = N(K \cap H) \subseteq TN \subseteq HN.$$

Но K – максимальная в HN подгруппа, и поэтому либо $K = TN$, либо $TN = NH$. Если $K = TN$, то $T \subseteq K \cap H \subset T$, что невозможно. Итак, $TN = NH$ и поэтому

$$H = H \cap TN = T(H \cap N) = T.$$

Полученное противоречие показывает, что $H_1 = K \cap H$ – максимальная в H подгруппа и

$$K = (K \cap H)N = H_1 N.$$

Это означает, что $H_1 B^x = B^x H_1$ для некоторого $x \in X$. Предположим, что

$$(H_1 N/N)(BN/N) = G/N.$$

Тогда $G = H_1 B N$ и

$$|G : H_1 B| = |H_1 B N : H_1 B| = |N : N \cap H_1 B|$$

является π' -числом. С другой стороны,

$$\begin{aligned} |G : H_1 B| &= |HB : H_1 B| = \\ &= \frac{|H||B||H_1 \cap B|}{|H_1||B||H \cap B|} = \frac{|H| : |H \cap B|}{|H_1| : |H_1 \cap B|} \end{aligned}$$

является π -числом, противоречие. Поэтому предположение неверно и

$$\begin{aligned} (H_1 N/N)(BN/N) &= (K/N)(BN/N) \neq G/N, \\ (H_1 N/N)(BN/N)^{x^N} &= (H_1 N/N)(B^x N/N) = \\ &= H_1 B^x N/N = B^x H_1 N/N = \\ &= (B^x N/N)(H_1 N/N) = (BN/N)^{x^N} (H_1 N/N). \end{aligned}$$

Это означает, что подгруппа HN/N $\mu XN/N$ -добавляема в G/N .

Лемма 1.3. Пусть $\emptyset \neq X \subseteq G$, $H - \mu X$ -добавляемая подгруппа группы G , $B - \mu X$ -добавление к H . Если $H_1 -$ максимальная подгруппа в H , то $|G : H_1 B^x| = |H : H_1|$, где $x \in X$, $H_1 B^x = B^x H_1$.

Доказательство. Пусть $B - \mu X$ -добавление к H . Тогда $H_1 B^x = B^x H_1 < G$ для максимальной подгруппы H_1 из H и некоторого $x \in X$. Понятно, что $H_1 \leq H \cap H_1 B^x \leq H$. Так как $H_1 -$ максимальная в H подгруппа, то либо $H \cap H_1 B^x = H_1$, либо $H \cap H_1 B^x = H$. Если $H \cap H_1 B^x = H$, то $H \leq H_1 B^x$ и

$$G = HB = HB^x \leq H_1 B^x < G,$$

противоречие. Значит

$$H_1 = H \cap H_1 B^x = H_1 (H \cap B^x).$$

Поэтому

$$H \cap B^x \leq H_1, \quad H \cap B^x = H_1 \cap H \cap B^x = H_1 \cap B^x.$$

Теперь $G = HB = HB^x$ и

$$\begin{aligned} |G : H_1 B^x| &= |HB^x : H_1 B^x| = \\ &= \frac{|H| |B^x| |H_1 \cap B^x|}{|H \cap B^x| |H_1| |B^x|} = |H : H_1|. \end{aligned}$$

Лемма 1.4. Для подгруппы H индекса $p \in \pi(G)$ группы G справедливы следующие утверждения:

- 1) фактор-группа G/H_G изоморфна подгруппе симметрической группы S_p степени p ;
- 2) $G_q \subseteq H_G$ для каждого $q \in \pi(G)$, $q > p$, и любой силовской q -подгруппы G_q из G ;
- 3) $H_p \subseteq H_G$ для любой силовской подгруппы H_p из H .

Доказательство. Пусть $\Omega = \{x_i H \mid x_i \in G, i = 1, 2, \dots, p\}$ – множество левых смежных классов группы G по подгруппе H и $f : G \rightarrow \Omega$ – отображение, определяемое равенством $f(g) = gx_i H$ для каждого $g \in G$. Тогда f является гомоморфизмом группы G в симметрическую группу S_p степени p , ядро которого совпадает с ядром $H_G = \bigcap_{y \in G} H^y$ подгруппы H в группе G . Так как $|S_p| = p!$ не делится на q для каждого $q > p$, $q \in \pi(G)$, то $G_q \subseteq H_G$ для любой силовской q -подгруппы G_q из G . Поскольку

$$|G : H_G| = |G : H| |H : H_G|,$$

p^2 не делит $|G : H_G|$ и $p = |G : H|$, то p не делит $|H : H_G|$. Следовательно, $H_p \subseteq H_G$ для любой силовской подгруппы H_p из H .

Лемма 1.5 [8, теорема VI.4.7]. Если A и $B -$ подгруппы группы G и $G = AB$, то для любого простого делителя p порядка группы G существуют силовские p -подгруппы A_p, B_p, G_p из A, B и G соответственно, такие, что $G_p = A_p B_p$.

Лемма 1.6 [8, теорема IV.4.7]. Пусть $P -$ силовская p -подгруппа группы G и $N -$ нормальная подгруппа в G . Если $N \cap P \subseteq \Phi(P)$, то $N - p$ -нильпотентна.

Лемма 1.7. Если $G - p$ -разрешимая группа с циклической силовской p -подгруппой, то $G - p$ -сверхразрешима.

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы G . Пусть $N -$ минимальная нормальная подгруппа группы G . По индукции фактор-группа $G/N - p$ -сверхразрешима. Если $N - p'$ -подгруппа, то группа G будет p -сверхразрешимой. Если $N - p$ -подгруппа, то $N \leq P$, где $P -$ силовская подгруппа группы G . Поэтому $N -$ циклическая подгруппа. Пусть $K -$ подгруппа группы N порядка p . Тогда $K \text{ char } N \triangleleft G$. Поэтому $K \triangleleft G$, а так как $N -$ минимальная нормальная подгруппа группы G , то $N = K$ и $|N| = p$. Теперь группа $G - p$ -сверхразрешима.

Лемма 1.8 [8, теорема IV.2.8]. Пусть $p -$ наименьший простой делитель порядка группы G . Если в группе G силовская p -подгруппа циклическая, то $G - p$ -нильпотентна.

2 Основные результаты

Теорема 2.1. Если в p -разрешимой группе G силовская p -подгруппа μG -добавляема в G , то $G - p$ -сверхразрешима.

Доказательство. Пусть теорема неверна и $G -$ контрпример минимального порядка. Пусть $P -$ силовская p -подгруппа группы G . Предположим, что $K = O_{p'}(G) \neq 1$. Тогда $PK/K -$ силовская p -подгруппа фактор-группы G/K . По лемме 1.2 подгруппа $PK/K - \mu G/K$ -добавляема в G/K . Минимальный выбор группы G означает, что фактор-группа $G/K - p$ -сверхразрешима. Теперь $G - p$ -сверхразрешима, противоречие. Значит $O_{p'}(G) = 1$.

Пусть $N -$ минимальная нормальная подгруппа группы G . Так как $G - p$ -разрешима, то $N -$ элементарная абелева p -подгруппа. Понятно, что $P/N -$ силовская p -подгруппа фактор-группы G/N . По лемме 1.1 $P/N - \mu G/N$ -добавляема в G/N . Минимальный выбор группы G

означает, что фактор-группа G/N p -сверхразрешима. Так как класс всех p -сверхразрешимых групп – насыщенная формация, то N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $\Phi(G)=1$. Поэтому существует максимальная подгруппа M группы G такая, что $G=NM$ и $N \cap M=1$. По лемме 1.5 $P=NM_p$, где M_p – силовская p -подгруппа в M . По условию, существует подгруппа B , такая, что $G=PB$ и $P_1B^x < G$ для любой максимальной подгруппы P_1 из P и некоторого $x \in G$.

Выберем P_1 так, чтобы $M_p \leq P_1$. Ясно, что N не содержится в P_1 . По лемме 1.3 $|G:P_1B^x|=|P:P_1|=p$. Так как $N \cap P_1B^x < G$, то либо $N \leq P_1B^x$, либо $N \cap P_1B^x=1$. Если $N \cap P_1B^x=1$, то $|N|=p$ и группа G p -сверхразрешима, противоречие. Предположим, что $N \leq P_1B^x$. Тогда $P_1B^x = NP_1B^x \geq NM_pB^x = PB^x = G$.

Данное противоречие завершает доказательство теоремы.

Следствие 2.1.1 [6]. *Если в p -разрешимой группе G силовская p -подгруппа μ -добавляема в G , то G p -сверхразрешима.*

Доказательство. Пусть P – силовская p -подгруппа группы G . Если P μ -добавляема в G , то, очевидно, что P μE -добавляема в G , где E – единичная подгруппа в G . По лемме 1.1 подгруппа P μG -добавляема в G . По теореме 2.1 группа G p -сверхразрешима.

Следствие 2.1.2. *Если в p -разрешимой группе G силовская p -подгруппа либо циклическая, либо μG -добавляема в G , то G p -сверхразрешима.*

Доказательство. Пусть P – силовская p -подгруппа группы G . Если P μG -добавляема в G , то по теореме 2.1 G p -сверхразрешима. Если P – циклическая подгруппа, то по лемме 1.7 группа G p -сверхразрешима. Следствие доказано.

Пусть

$$\pi(G) = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}, \quad p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n.$$

Тогда будем говорить, что p_2 – предминимальный простой делитель порядка группы G .

Теорема 2.2. *Пусть P – μG -добавляемая силовская p -подгруппа группы G . Если p – наименьший, либо предминимальный простой делитель порядка группы G , то G – p -сверхразрешимая группа.*

Доказательство. Предположим прежде, что p – наименьший простой делитель порядка

группы G , P – силовская p -подгруппа в G и P_i , $i=1, \dots, n$ – все максимальные подгруппы в группе P . Пусть B – μG -добавление к подгруппе P в группе G . Тогда для каждой максимальной подгруппы P_i , $i=1, \dots, n$ группы P , найдется такой элемент $x_i \in G$, что $P_iB^{x_i} = B^{x_i}P_i \neq G$. По лемме 1.3 $|G:P_iB^{x_i}|=|P:P_i|=p$ и подгруппа $P_iB^{x_i}$ нормальна в группе G . Подгруппа

$$K = \bigcap_{i=1}^n (P_iB^{x_i}) \quad (2.1)$$

нормальна в группе G и

$$K = \bigcap_{i=1}^n (P_iB^{x_i}) \supseteq \bigcap_{i=1}^n P_i = \Phi(P).$$

Поэтому $\Phi(P) \leq K \cap P$. Покажем, что верно и обратное включение. Действительно, предположим, что $K \cap P$ не содержится в $\Phi(P)$. Тогда существует максимальная подгруппа P_s в P , такая, что $K \cap P$ не содержится в P_s . Так как $K \cap P < P$, то $(K \cap P)P_s = P$. Для подгруппы P_s существует элемент $x_s \in G$, такой что $P_sB^{x_s} < G$. Мы выберем из всех таких возможных x_s тот, который используется в равенстве (2.1). Тогда $G = PB = PB^{x_s} = (K \cap P)P_sB^{x_s} \leq P_sB^{x_s} < G$, противоречие. Следовательно, предположение неверно и $K \cap P \leq \Phi(P)$. По лемме 1.6 подгруппа K p -нильпотентна. Это означает, что $K = NK_{p'}$, где N – p -подгруппа, K – нормальная p' -холлова подгруппа в K . Так как $K < G$, а $K_{p'}$ – характеристическая подгруппа в K , то $K_{p'} < G$. Кроме того, так как G/K – p -группа, то фактор-группа $G/K_{p'} \cong G/K/K_{p'}$ также p -группа. Поэтому группа G p -нильпотентна, а, значит, G p -сверхразрешима.

Пусть теперь p – предминимальный простой делитель порядка группы G . Согласно теореме 2.1, достаточно доказать p -разрешимость группы G . Воспользуемся индукцией по порядку группы G . Поскольку множество всех p -разрешимых групп образует насыщенную формацию, то на основе леммы 1.1 и леммы 1.2 можно утверждать, что

$$O_{p'}(G) = O_p(G) = R_p(G) = \Phi(G) = 1$$

и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N . Здесь $R_p(G)$ – p -разрешимый радикал группы G , т. е. наибольшая нормальная p -разрешимая подгруппа группы G .

Пусть P – силовская p -подгруппа группы G и P_i , $i=1, \dots, n$ – все максимальные подгруппы в группе P . Пусть B – μG -добавление к

подгруппе P в группе G . Тогда для каждой максимальной подгруппы P_i , $i=1, \dots, n$ группы P , найдется такой элемент $x_i \in G$, что $P_i B^{x_i} = B^{x_i} P_i \neq G$.

По лемме 1.3 $|G : P_i B^{x_i}| = |P : P_i| = p$. Теперь фактор-группа $G/(P_i B^{x_i})_G$ является подгруппой симметрической группы S_p степени p и $|G/(P_i B^{x_i})_G| = p^{a_i} p$. Поэтому фактор-группа $G/(P_i B^{x_i})_G$ p -сверхразрешима по лемме 1.7 и теореме Бернсайда о разрешимости бипримарных групп. Подгруппа

$$K = \bigcap_{i=1}^n (P_i B^{x_i})_G \quad (2.2)$$

нормальна в группе G и фактор-группа G/K изоморфна подгруппе прямого произведения

$$G/(P_1 B^{x_1})_G \times G/(P_2 B^{x_2})_G \times \dots \times G/(P_n B^{x_n})_G,$$

поэтому G/K p -сверхразрешима.

Покажем, что $K \cap P \subseteq \Phi(P)$.

Действительно, предположим, что $K \cap P$ не содержится в $\Phi(P)$. Тогда существует максимальная подгруппа P_s в P , такая, что $K \cap P$ не содержится в P_s . Так как $K \cap P \triangleleft P$, то $(K \cap P)P_s = P$. Для подгруппы P_s существует элемент $x_s \in G$, что $P_s B^{x_s} < G$. Мы выберем из всех таких возможных x_s тот, который используется в равенстве (2.2). Тогда $G = PB = PB^{x_s} = (K \cap P)P_s B^{x_s} \leq P_s B^{x_s} < G$, противоречие. Следовательно предположение неверно и $K \cap P \leq \Phi(P)$. По лемме 1.6 подгруппа K p -нильпотентна и $K \subseteq R_p(G) = 1$. Следовательно, группа G p -сверхразрешима. Теорема доказана.

Следствие 2.2.1. Если в группе G для любого $p \in \pi(G)$ силовская p -подгруппа либо циклическая, либо μG -добавляема в G , то G сверхразрешима.

Доказательство. Если $2 \in \pi(G)$, то группа G 2-сверхразрешима по теореме 2.2, либо по лемме 1.8 в зависимости от того μG -добавляема силовская 2-подгруппа или циклическая. В частности, группа G разрешима. Если же 2 не содержится в $\pi(G)$, то группа G разрешима по теореме Томпсона-Фейта.

Пусть $p \in \pi(G) \setminus \{2\}$. Так как группа G разрешима, то по теореме 2.1, либо по лемме 1.7 группа G p -сверхразрешима. Итак, группа G

p -сверхразрешима для всех $p \in \pi(G)$, поэтому группа G сверхразрешима.

Следствие 2.2.2. Если в группе G для любого $p \in \pi(G)$ каждая максимальная подгруппа нециклической силовской p -подгруппы G -перестановочна с минимальным добавлением к силовской p -подгруппе, то G сверхразрешима.

Следствие 2.2.3 [6]. Если в группе G для любого $p \in \pi(G)$ силовская p -подгруппа μ -добавляема в G , то G сверхразрешима.

Следствие 2.2.4 [7]. Пусть G – группа, $\pi(G) = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$, $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n$. Зафиксируем простое число $p \in \{p_1, p_2\}$. Если силовская p -подгруппа μ -добавляема в G , то группа G p -сверхразрешима.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов // Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков // М. : Наука, 1978. – 272 с.
3. Kegel, O.H. On Hupperts characterization of finite supersoluble groups / O.H. Kegel // Proc. Internat. Conf. Theory Groups, Canberra, 1965. – P. 209–215.
4. Kegel, O.H. Producte nilpotenter gruppen / O.H. Kegel // Arch. Math., 1961. – Vol. 12. – P. 90–93.
5. Монахов, В.С. Неразрешимые конечные группы с нильпотентными добавлениями к не-сверхразрешимым подгруппам / В.С. Монахов // Известия академии наук Беларуси, 1993. – № 3. – С. 27–29.
6. Miao L. On μ -supplemented subgroups of finite groups / Long Miao, Wolfgang Lempken // The International Conference «Group Theory and Related Topics». – April, 19-25, 2008. – Xuzhou, China. Collection of abstracts. – P. 24.
7. Монахов, В.С. О конечных группах с μ -добавляемыми подгруппами / В.С. Монахов, А.В. Шныпарков // Тез. докл. X Междунар. науч. конф. Минск, 3–7 ноября 2008 г. – Часть 1. – Мн. : Институт математики НАН Беларуси, 2008. – С. 42.
8. Huppert, B. Endliche Gruppen, I / В. Huppert // Berlin–Heidelberg–New York : Springer, 1967. – 793 p.

Поступила в редакцию 23.12.10.

УДК 681.3.06 : 624.131

**МЕТОДОЛОГИЯ, МЕТОДЫ И ТЕХНОЛОГИЯ КОМПЬЮТЕРНОГО
ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТВЁРДЫХ ТЕЛ**

В.Е. Быховцев

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

**METHODOLOGY, METHODS AND TECHNOLOGY OF COMPUTER
OBJECT-ORIENTED MODELLING OF NONLINEAR SYSTEMS
OF DEFORMABLE SOLID BODIES**

V.E. Bykhautsau

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В плане решения проблемы совершенствования ресурсосберегающих технологий в промышленном и гражданском строительстве приводятся материалы оригинальных исследований на основе концепций системного подхода, современных компьютерных технологий и разработанных методов решения граничных задач нелинейной теории упругости.

Ключевые слова: нелинейные системы, деформируемые твёрдые тела, строительство, методы, средства и технология оптимизации.

The paper presents one of the ways of decision of the problem of perfection of the resource-saving technology in industrial and civil construction. Materials of the original researches are considered on the basis of concepts of the system approach, modern computer technologies and the developed methods of decision of boundary problems of the nonlinear theory of elasticity.

Keywords: nonlinear systems, deformable solid bodies, construction, methods, means and technology of optimization.

Введение

Эксплуатационная надёжность и стоимость строительного объекта в значительной степени зависят от полноты учёта его структуры и свойств и применяемых методов и средств расчёта напряжённо-деформированного состояния здания, фундамента и грунтового основания как единой нелинейной системы.

Все современные расчёты при проектировании зданий и сооружений проводятся исходя из принципа линейной деформируемости грунтового основания для отдельных характерных сечений строительной площадки [1], [2], [9]. При этом взаимное влияние фундаментов в плане всего здания, как правило, не учитывается, что приводит к значительным погрешностям при определении его типоразмеров. Основные недостатки применяемых методик и программного обеспечения можно определить следующим образом.

1. Грунтовое основание, здание и фундамент не рассматриваются как целостная нелинейная система [7].

2. Применяются упрощённые математические модели грунтового основания и конструкций [7].

3. Для решения краевых задач нелинейной теории упругости применяются итерационные методы, сходимость которых очень слабая [2], [4], [5], [7].

Эти факторы в целом приводят к значительной погрешности вычислений, что сопряжено с перерасходом строительных материалов. Следовательно, существует проблема совершенствования ресурсосберегающих технологий в промышленном и гражданском строительстве. Значительным вкладом в решение этой проблемы будет разработка методологии и эффективных математических методов и средств исследования напряжённо-деформированного состояния строительных объектов как пространственных многосвязных нелинейных и неоднородных систем деформируемых твёрдых тел. В настоящей работе в плане решения указанной проблемы приводятся материалы оригинальных исследований на основе концепций системного подхода, современных компьютерных технологий и разработанных методов решения граничных задач нелинейной теории упругости [2], [3], [5], [6].

1 Компьютерное объектно-ориентированное моделирование физических систем

Основные определения и понятия.

В общем случае под системой понимают конечное множество элементов и связей между ними и между их свойствами, действующими как целостное образование для достижения единой цели. Элементом называется некоторый объект (материальный, информационный и др.), обладающий рядом определённых свойств, но

внутреннее строение (содержание) которого безотносительно к цели рассмотрения [2], [6], [9].

Компьютерное объектно-ориентированное моделирование физических систем в своей основе содержит понятие объекта системы, его свойств и связей; выполняется в соответствии с принципами системного подхода, используя методы математического и геометрического моделирования, методы визуального объектно-ориентированного программирования и методы вычислительного эксперимента. При компьютерном объектно-ориентированном моделировании реальной физической системе ставится в соответствие её виртуальная физическая модель, которая строится на экране монитора и отображает структуру и свойства исходной системы, при этом происходит решение ряда позиционных и метрических задач. Так как для рассматриваемого класса задач реальные компоненты исследуемой системы состоят из конструктивных элементов, то логично будет и в качестве элементарных составляющих виртуальной физической модели принять некоторые виртуальные конструктивные элементы. Физическое содержание этих элементов определяется физическим содержанием реальной исследуемой физической системы. В целом вся проектируемая система: здание, фундамент и грунтовое основание, может быть представлена из ограниченного числа конструктивных типовых элементов однородных по своей структуре и свойствам, которые в компьютерном представлении будем называть конструктивными виртуальными элементами [2], [3].

Построение виртуальной физической модели системы.

Виртуальный конструктивный элемент в памяти компьютера представляет собой объект, обладающий рядом свойств и методов, которые можно разделить на следующие группы:

- определение геометрических свойств реального конструктивного элемента: размеры, внутренние и внешние границы;
- определение физических свойств реального конструктивного элемента: закон деформирования, модуль упругости, коэффициент Пуассона и т. п.;
- осуществление визуализации конструктивного виртуального элемента;
- формирование математической модели;
- методы исследования математической модели и формирования виртуальной модели состояния системы.

На этапе формирования виртуальной физической модели системы рационально параллельно провести её дискретизацию на конечные элементы. Шаг разбиения может быть неравномерным, однако узлы на границах между конструктивными элементами должны быть строго общими. После построения виртуальной модели конструкции и грунтового основания

необходимо задать граничные условия. На этом формирование виртуальной физической модели завершается.

Таким образом, виртуальная физическая модель состоит из виртуальных объектов, наследующих выделенные свойства, связи, назначение и привязку соответствующих объектов реальной системы. Поэтому исследование реальной системы является начальным этапом разработки проекта работ по созданию системы компьютерного визуального объектно-ориентированного моделирования систем и объектов.

Построение математической модели системы.

Из приведенного общего определения системы следует, что природа элементов системы может быть различна. Это качество системы и принципы системного подхода в целом позволяют подойти к исследованию систем на довольно высоком содержательном уровне [2], [3], [5], [6]. Наполнение системы определяет её предметную направленность, и этим предопределяют методологию и технологию её исследования. Задачи исследования могут быть разными. В настоящей работе ставится задача исследования напряжённо-деформированного состояния системы деформируемых твёрдых тел в целом и на уровне её отдельных элементов. Для этого в каждом конкретном случае необходимо определить содержание системы, т.е. её границы и наполнение. Всё это обусловит облик исследуемой системы. Математическая модель сложной системы получается как синтез математических моделей её элементов.

Всякая реальная система или объект всегда имеют определенные связи с внешней средой, которая налагает свои условия на их существование и функционирование. Все эти и другие качества в математической модели должны иметь своё отображение, а это значит, что математическая модель может иметь свою структурную схему [2]. Учитывая произвольность постановки задачи решать ее лучше методом математического моделирования на основе метода конечных элементов или метода суперэлементов и методов численного решения нелинейных краевых задач [2], [3], [5], [6]. Это сразу накладывает свои требования на структуру ядра математической модели. Будем строить его на основе одного из энергетических принципов, например, на основе принципа минимума полной энергии системы [7], [8]. В этом случае для краевых задач механики грунтов приведенная структурная схема будет иметь вид [2]:

1. Геометрическая модель геологического разреза основания.

2. Механико-математические модели элементов структуры основания $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$, где σ_i , ε_i – интенсивности напряжений и деформаций.

3. Система краевых условий, задаётся в соответствии с классификацией поставленной задачи как краевой задачи математической физики.

4. Условия равновесия системы (ядро математической модели):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{U\}} = 0,$$

где $\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \{U\}^T \{P\}$ – полная энергия деформируемой системы,

$\{P\}$ – вектор внешних сил,

$\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$, $\{U\}$ – векторы напряжений, деформаций и перемещений,

V – объём области существования исследуемой системы.

5. Математическая модель (форма) искомого решения

$$\varphi = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z.$$

Применение нелинейных форм искомого решения привело к значительному усложнению вычислительных алгоритмов, но значимого повышения точности решений при этом получено не было. Предлагаемая структурная схема является общим эффективным алгоритмом построения математических моделей систем или объектов. Возникающие при этом проблемы, как правило, сводятся к построению математических моделей систем и разработке методов их исследования.

2 Механико-математические модели деформирования твёрдых тел

Моделирование свойств деформируемого твёрдого тела.

Физико-механические свойства любого деформируемого твёрдого тела определяют его состояние под нагрузкой. Характер и особенности деформационного процесса описываются аналитически или дискретно. Для любого деформируемого твёрдого тела, и в том числе элементов структуры грунтового основания, при упругой стадии работы имеет место соотношение (закон Гука)

$$\sigma_i = E \varepsilon_i, \quad (2.1)$$

В этом случае достаточно двух физико-механических характеристик: линейного модуля деформации E и коэффициента Пуассона μ . Существует несколько хорошо отработанных методов их определения [9]. *Значительно сложнее обстоит дело при рассмотрении твёрдого тела и особенно грунта в стадиях за пределом линейного деформирования.* Для различных грунтов и многих других твёрдых тел при нагрузках, не превосходящих предельную, зависимость $\sigma_i \leftrightarrow \varepsilon_i$ представляется неубывающей кривой параболического типа. В этом случае возникают затруднения при определении коэффициентов аппроксимирующих уравнений. Ниже рассмотрены два вида уравнений указанного типа и

предложены разработанные автором способы определения их коэффициентов через основные физико-механические характеристики деформируемого тела [2].

Модель нелинейно-упругого деформирования. Для сложного напряженного состояния механико-математическая модель в общем виде может быть представлена так:

$$\sigma_i = E(\varepsilon_i) \varepsilon_i. \quad (2.2)$$

Как следует из многочисленных экспериментов процесс деформирования грунтов графически можно представить в виде кривой параболического типа [1], [5], [7], [9]:

$$\sigma_i^n = f(\varepsilon_i^n),$$

верхний индекс « n » есть признак нелинейного деформирования. Эта кривая всегда положительно определенная неубывающая функция, проходящая через точку $O(0,0)$ и имеющая в ней касательную. Экстремум соответствует переходу в пластическое состояние деформируемого тела. Нагрузка, соответствующая этому экстремуму, называется предельной нагрузкой, до которой реальное нагружение не должно доходить. Реальные нагрузки на грунт задаются в интервале $[0, P_{пред.}]$, поэтому в теоретических исследованиях возможна аппроксимация участка кривой соответствующего интервала. Касательная к кривой деформирования в точке $O(0,0)$ будет выражать закон линейного деформирования грунта (2.1). Теоретически для всех твердых тел

$$\varepsilon_i \Big|_{\sigma_i=0} = 0. \quad (2.3)$$

Моделью закона деформирования примем степенную функцию, тогда

$$\sigma_i = A \varepsilon_i^m, \quad A > 0, \quad 0 < m < 1, \quad (2.4)$$

A , m – экспериментальные параметры, процесс их определения длительный и дорогостоящий. Рассматривая в качестве деформируемых твёрдых тел грунты, следует отметить, что строительные нормы и правила содержат все основные физико-механические характеристики грунта, методика которых хорошо отработана. Поэтому *актуальной является задача определения параметров принимаемой формы закона деформирования на основании нормативных характеристик грунтов, содержащихся в строительных нормах и правилах.* Основываясь на физических постулатах деформирования грунтов, автор исследовал и предложил некоторые подходы математического определения приближённого значения параметров аппроксимаций процесса деформирования грунта в форме (2.4). Из выше изложенного следует, что до нагрузки $P_{кр}$ реальный деформационный процесс будет квазилинейным. Это значит, что он может быть описан уравнением закона Гука (2.1). При использовании параболической аппроксимации в указанном диапазоне нагрузок будем иметь нелинейную зависимость напряжений и деформаций (2.4). Но при

критической нагрузке напряжения и деформации в обоих случаях будут совпадать, т.е. будем иметь

$$\sigma_{i,кр}^e = \sigma_{i,кр}^n = \sigma_{i,кр}, \quad \varepsilon_{i,кр}^e = \varepsilon_{i,кр}^n = \varepsilon_{i,кр}. \quad (2.5)$$

Следует, однако, отметить, что совпадения графиков деформационных процессов на этом интервале нагрузок не будет, но они должны быть достаточно близки. В качестве меры их близости выберем энергии деформирования при критической нагрузке [7], [8], [9]:

$$P^e = \int_0^t \sigma_i^e d\varepsilon_i^e, \quad P^n = \int_0^t \sigma_i^n d\varepsilon_i^n, \quad (t = \varepsilon_{i,кр}). \quad (2.6)$$

Подставим в (2.6) значения интенсивностей напряжений согласно (2.1) и (2.4) и, выполнив интегрирование, рассмотрим отношение этих энергий. Учитывая (2.5), после несложных преобразований будем иметь:

$$\alpha = \frac{P^e}{P^n} = \frac{\frac{1}{2} \sigma_{i,кр} \varepsilon_{i,кр}}{\frac{1}{1+m} \sigma_{i,кр} \varepsilon_{i,кр}} = \frac{1+m}{2}. \quad (2.7)$$

Согласно (2.4) $0 \leq m \leq 1$, тогда из (2.7) получим: $0,5 \leq \alpha \leq 1$. Отсюда следуют характеристические описания двух вариантов состояния твёрдого тела:

– линейное деформирование – $\{\alpha=1, m=1\}$, при этом $0,5 > \mu \geq 0$;

– пластическое состояние – $\{\alpha=0,5; m=0\}$, в этом случае $\mu = 0,5$. (2.8)

Характеристические соотношения (2.8) дают некоторые предпосылки для установления зависимости $m = f(\mu)$. Методом компьютерного моделирования было проанализировано несколько возможных форм для установления этой зависимости. Наилучшие результаты получены для соотношения

$$m = \frac{1-2\mu}{1-\mu}.$$

В этом случае, в соответствии с (2.7),

$$\alpha = \frac{2-3\mu}{2(1-\mu)}. \quad (2.9)$$

Значения величин α и m для всего диапазона значений коэффициента Пуассона μ представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Зависимость параметров нелинейности от коэффициента Пуассона

μ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
m	1	0,89	0,75	0,57	0,33	0
α	1	0,94	0,875	0,786	0,665	0,5

Приведенные количественные соотношения величин μ , α и m полностью соответствуют физическим постулатам деформирования твёрдых тел: чем твёрже тело, тем меньше коэффициент Пуассона μ и больше параметр m модели

состояния нелинейно-деформируемого твёрдого тела (2.4), и больше параметр α , выражающий степень близости энергий деформирования при критической нагрузке для линейной и нелинейной моделей состояния твёрдого тела.

Для напряжения, соответствующего критической нагрузке, интенсивности деформаций согласно (2.1), (2.4) будут равны, поэтому будет иметь место соотношение

$$E \varepsilon_{i,кр} = A \varepsilon_{i,кр}^m, \quad (2.10)$$

откуда следует

$$A = E \varepsilon_{i,кр}^{1-m}. \quad (2.11)$$

Подставив в (2.11) значение ε_i из (2.1), при критической нагрузке после несложных преобразований получим

$$A = E^m \sigma_{i,кр}^{1-m} = \left(\frac{E}{\sigma_{i,кр}} \right)^m \sigma_{i,кр}. \quad (2.12)$$

На основании проведенного анализа результатов экспериментальных исследований ряда реальных задач механики грунтов автором была разработана следующая эмпирическая формула для определения $\sigma_{i,кр}$:

$$\sigma_{i,кр} = c + 0,03 \operatorname{tg} \varphi (0,5 - \mu) E. \quad (2.13)$$

Эта формула соответствует физической сущности условий (2.8).

Таким образом, алгоритм, представленный формулами (2.7)–(2.13), позволяет определить параметры модели состояния нелинейно-деформируемого твёрдого тела в форме (2.4), что даёт возможность решать задачи по расчёту нелинейных деформаций грунта на основании его нормативных характеристик, содержащихся в строительных нормах и правилах.

3 Численно-аналитические методы исследования математических моделей нелинейных систем деформируемых твёрдых тел

В настоящей работе предлагаются оригинальные двухэтапные методы решения краевых задач нелинейной теории упругости. В этих методах рассматривается краевая задача для однородного нелинейно-деформируемого твёрдого тела объёма V с границей Γ .

Метод энергетической линеаризации.

В методе энергетической линеаризации краевой задаче нелинейной теории упругости телу объёма V с границей Γ и законом деформирования ставится в соответствие геометрически тождественное гипотетическое линейно-упругое тело с законом деформирования $\sigma_i^r = E^r \varepsilon_i$.

Модуль деформации E^r подлежит определению и должен быть таким, чтобы при тождественных граничных условиях для обоих тел их смещения совпадали. В соответствии с принципом возможных перемещений [7], [10], [12], [13] для всякой сплошной среды

$$\delta \left(\int_V P dV - W \right) = 0,$$

P – потенциал деформации, W – работа внешних сил.

Для единичного элемента

$$P = \frac{\varepsilon^2}{6k} + \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i d\varepsilon_i, \quad k = \frac{1-2\mu}{E},$$

где ε – средняя деформация, k – коэффициент объемного сжатия.

В силу поставленного условия для модуля деформации E^r и тождественности граничных условий для рассматриваемых твёрдых тел можно утверждать, что работы внешних сил на смещениях для исследуемого нелинейно – деформируемого и гипотетического линейно-упругого тел будут равны, т.е. будем иметь $W^n = W^r$, тогда

$$\delta \int_V (P^n - P^r) dV = \delta \int_V \left(\int \sigma_i^n d\varepsilon_i - \int \sigma_i^r d\varepsilon_i \right) dV = \\ = \delta \int_V \left(\int f(**) \varepsilon_i d\varepsilon_i - E^r \int \varepsilon_i d\varepsilon_i \right) dV = 0,$$

P^n – энергия деформации нелинейно-упругого тела, P^r – энергия деформации гипотетического линейно-упругого тела, индексы « n » и « r » – признаки нелинейно-упругого и гипотетического линейно-упругого тел.

Полученное выражение представим в следующей форме

$$\delta \int_V \varepsilon_i (F(\varepsilon_i) - \sigma_i^r / 2) dV = \\ \int_V \delta \varepsilon_i (F(\varepsilon_i) - \sigma_i^r / 2) dV = 0, \quad (3.1)$$

где $F(\varepsilon_i) = \varepsilon_i^{-1} \int f(**) \varepsilon_i d\varepsilon_i$.

В соответствии с основной леммой вариационного исчисления из (3.1) следует:

$$F(\varepsilon_i) - \sigma_i^r / 2 = 0. \quad (3.2)$$

При законе деформирования в виде (2.4) из (3.2) получим:

$$\sigma_i^n = 0,5(1+m)\sigma_i^e. \quad (3.3)$$

Подставим (3.3) в уравнение состояния (2.4) и, учитывая закон Гука $\sigma_i^e = E\varepsilon_i^e$, решим его относительно ε_i , получим:

$$\varepsilon_i = \left(\frac{1+m}{2A} E_0 \varepsilon_i^e \right)^{\frac{1}{m}},$$

$$E^r = \frac{\sigma_i^e}{\varepsilon_i} = E_0 \left[\frac{2A}{(1+m)E_0 \varepsilon_i^{1-m}} \right]^{\frac{1}{m}}.$$

Если закон деформирования имеет вид

$$\sigma_i^n = E_0 \varepsilon_i - B \varepsilon_i^m, \quad B > E, \quad m > 1,$$

то ε_i определяется из уравнения:

$$E_0 \varepsilon_i - \frac{2B}{1+m} \varepsilon_i^m = \sigma_i^e,$$

в этом случае

$$E^r = \frac{\sigma_i^e}{\varepsilon_i} = E_0 - \frac{2B}{1+m} \varepsilon_i^{m-1}.$$

Для полученных значений E^r решается линейная задача. Полученное решение будет являться и решением исходной нелинейной задачи.

Сравнительный анализ эффективности методов.

Исследование эффективности методов проводилось на решении краевой задачи нелинейной механики грунтов, для которой известны результаты натурального эксперимента [1].

Модельная задача. Железобетонная одиночная свая сечением 0,25·0,25 м, погружена на 5 м в грунтовое основание, на сваю действует вертикальная статическая нагрузка q . Приведённые начальные характеристики грунтового основания $E = 6.875$ МПа, $\mu = 0.41$. Необходимо определить осадку сваи.

Уравнение состояния было принято в виде (2.4). Значения параметров A и m были определены на основании экспериментальных данных, получено: $A = 4,55$ МПа, $m = 0.29$. Задача рассматривалась как пространственная.

Размеры расчётной области определены на основании экспериментальных исследований [2]: 3·3·12 м. Точность решения была выбрана 0.001. Задача решалась в линейной и в нелинейной постановках методом конечных элементов в сочетании с методом энергетической линеаризации и с методом начальных напряжений [2]. Результаты вычислений приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Осадки одиночной сваи, $q=200$ кН

Метод решения СЛАУ	Линейное решение		Метод энергетической линеаризации		Метод начальных напряжений		
	Время, с	Осадка, см	Время, с	Осадка, см	Время, с	Кол-во итераций	Осадка, см
Гаусса	57	0.47	112	2.21	497	9	2.26
Квадратного корня	54	0.48	110	2.20	486	9	2.27
Сопряжённых градиентов	28	0.48	57	2.22	252	9	2.28
Сопряжённых градиентов с предобуславливанием Холецкого	28	0.48	49	2.21	151	9	2,29
Эксперимент		2.24		2.24			2.24

Полученные результаты решений задачи в нелинейной постановке практически одинаково близки экспериментальным данным, но время решения рассматриваемой задачи методом энергетической линеаризации в 3-5 раз меньше времени решения этой задачи методом начальных напряжений. Наиболее эффективным методом решения основного уравнения метода конечных элементов оказался метод сопряжённых градиентов с преобусловливанием Холецкого.

Основное содержание методики и технологии компьютерного объектно-ориентированного моделирования этого класса задач покажем на примере конкретной задачи.

4 Компьютерное моделирование смещения винтовой сваи в грунтовом основании при сжимающей нагрузке

4.1 Физическая постановка задачи

Конструктивно винтовая свая представляет собой металлическую трубу диаметром d_c с винтовой лопастью на конце. Диаметр лопасти $D_l > d_c$, что показано на рисунке 1. При анализе деформационного процесса грунтового основания винтовой сваи можно выделить два этапа: завинчивание сваи и взаимодействие сваи с грунтовым основанием при действии сжимающей нагрузки. При завинчивании сваи происходит смятие грунта в цилиндрической области диаметра D_l и его уплотнение вследствие внедрения тела сваи. Наибольшее уплотнение грунта будет в цилиндрической подобласти с толщиной стенки $D_l - d_c$. Уплотнение грунта будет происходить и за пределами указанной подобласти с постепенным убыванием до его начального естественного состояния.

В целом винтовая свая с уплотнённой областью грунтового основания образуют сложную по структуре и свойствам неоднородную и нелинейную физическую систему. При действии на винтовую сваю сжимающей нагрузки образуется деформируемая область, которая будет включать и всю уплотнённую зону грунтового основания. При расчёте осадки винтовой сваи эти особенности в определённой мере должны быть учтены.

4.2 Экспериментальные исследования осадки сваи объекта №1

Данные для проведения испытания сваи статической вдавливающей нагрузкой.

Объект №1: «Башни связи СООО «МТС» по трассе М-10 «Гомель-Брест».

Пункт: д. Сосновец Петриковского р-на Гомельской обл.

Базовая станция № 434 «Сосновец».

Свая № 1 в осях В.

Вид сваи: винтовая.

Материал сваи: сталь С345Д.

Сечение сваи на верхнем и нижнем концах: $d = 219 \times 12$ мм.

Длина сваи: 8,50 м (проект).

Диаметр лопасти: $D = 500$ мм.

Глубина погружения или заложения сваи: 4,1 м.

Краткая характеристика грунта по лобовой и боковой поверхности сваи: песок мелкий прочный $E=32$ МПа, $\varphi = 35^\circ$, $c = 3$ кПа, $\gamma = 10,5$ кН/м³.

Отметим, что эти характеристики грунта были определены до завинчивания сваи. Вследствие возникающего уплотнения грунта при завинчивания сваи, значения характеристик грунта изменятся.

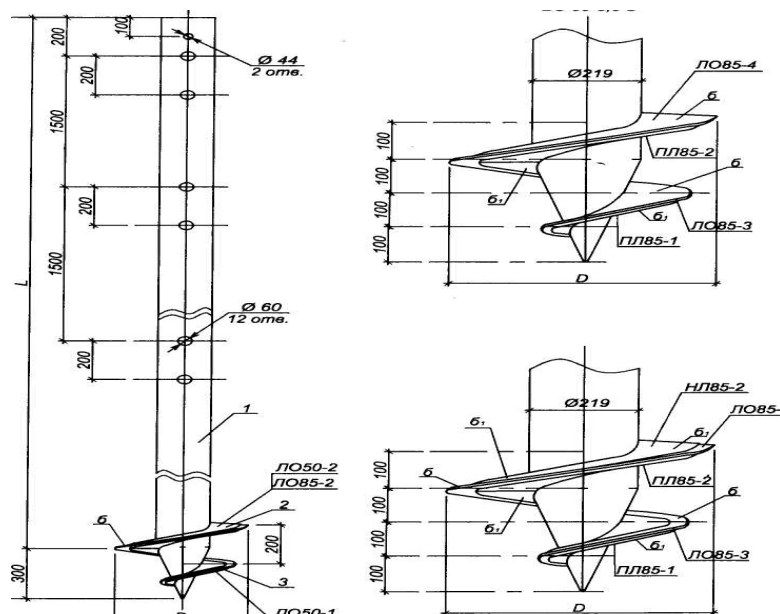


Рисунок 1 – Конструкция винтовой металлической сваи

Можно, конечно, этим пренебречь, но допускаемые при этом погрешности расчётов могут оказаться недопустимыми. В приведенных исследованиях эта задача решается. Результаты натурного эксперимента для сваи №1 объекта № 1 представлены графически на рисунке 2.

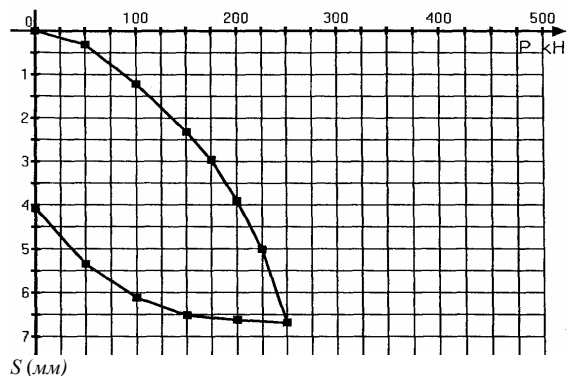


Рисунок 2 – График зависимости осадки винтовой сваи от нагрузки (заглубление сваи – 410 см)

Следует также отметить, что результаты, приведенные на графике рисунка 2, относятся к грунтовому основанию с изменёнными свойствами: грунт уплотнён. И это необходимо учитывать при определении смещения винтовой сваи при вдавливании и выдёргивании

4.3 Компьютерное моделирование деформации грунтового основания винтовой сваи

При устройстве фундаментов на основе свай всегда происходит изменение физико-механических характеристик грунтового основания в определённой окрестности конструкции фундамента. Неучёт этой особенности приводит к недоиспользованию несущей способности грунтового основания и, как следствие, к повышению стоимости возводимого здания. В настоящей работе на примере винтовой сваи показаны основы разработанного подхода к исследованию деформаций грунтового основания фундамента.

Характер взаимодействия винтовой сваи с грунтовым основанием в силу имеющихся конструктивных особенностей и способа её устройства существенно влияет на величину осадки отдельной сваи и свайного фундамента в целом. При анализе деформационного процесса грунтового основания винтовой сваи можно выделить два этапа: завинчивание сваи и взаимодействие сваи с грунтовым основанием при действии сжимающей или выдёргивающей нагрузки. При завинчивании сваи происходит смятие грунта в цилиндрической области диаметра D_n и его уплотнение вследствие внедрения тела сваи. При действии на винтовую сваю сжимающей нагрузки образуется деформируемая область, которая

будет включать и всю уплотнённую зону грунтового основания. Геометрия уплотнения может быть определена только экспериментально, что очень трудоёмко и дорого.

Учёт уплотнения математическими методами или методом компьютерного моделирования приводит к необходимости принятия некоторой модели структуры и свойств рассматриваемой физической системы. Наиболее эффективными могут быть два подхода: рассмотреть некоторое однородное грунтовое основание эквивалентное по несущей способности исходному уплотнённому грунтовому основанию, другим вариантом может быть учёт уплотнения грунта, примыкающего к свае в подобласти с толщиной стенки $D_n - d_c$. В обоих случаях необходимо определять физико-механические характеристики грунта в пределах расчётной области. В настоящей работе рассмотрены оба подхода. Как уже указывалось, деформации грунтового основания винтовой сваи будут нелинейными, поэтому возникает необходимость определения уравнения закона его деформирования и параметров этого закона. Решение этой задачи возможно только посредством лабораторного или натурного эксперимента.

В настоящей работе для анализа методом компьютерного моделирования смещения винтовой сваи при вдавливании рассматриваются три подхода к построению виртуальной физической и математической моделей исследуемой системы, что показано на рисунке 3.

1. Грунтовое однородное или неоднородное нелинейно-деформируемое основание с заданными значениями физико-механических характеристик.

2. Однородное грунтовое основание, эквивалентное по несущей способности реальному неоднородному уплотнённому грунтовому основанию.

3. Грунтовое основание с заданными значениями физико-механических характеристик и с уплотнённым грунтом в цилиндрической подобласти с толщиной стенки $D_n - d_c$, несущая способность такой физической системы должна соответствовать несущей способности реального неоднородного уплотнённого грунтового основания.

При компьютерном моделировании все виртуальные физические модели определяются в одной и той же дискретизованной области. В общем случае грунтовое основание рассматривается как неоднородная нелинейно-деформируемая среда. Физико-механические характеристики для виртуальных физических и математических моделей определяются на основании экспериментальных данных зависимости смещения винтовой сваи от вдавливающей нагрузки. Все указанные факторы должны быть учтены при построении метода определения смещения винтовой сваи в грунтовом основании [2], [3], [4].

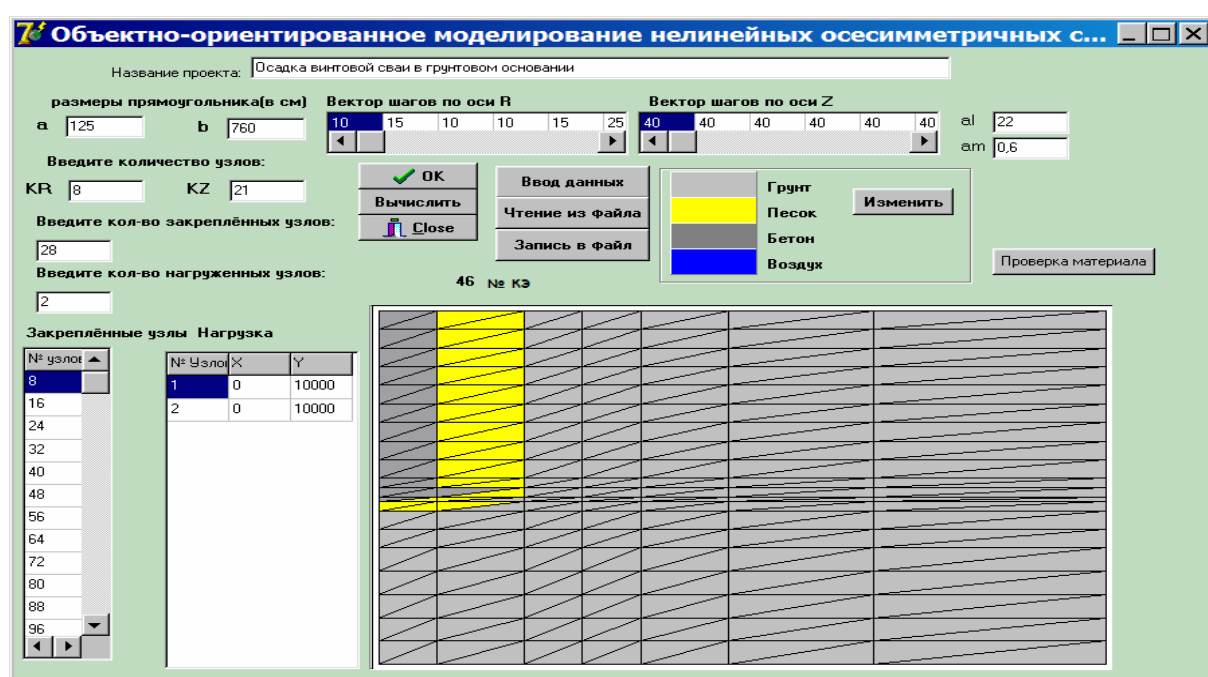


Рисунок 3 – Технология построения виртуальной физической модели системы «Винтовая свая – грунтовое основание с локальным уплотнением»

Для определения всех необходимых исходных данных для компьютерного моделирования поставленных задач в настоящей работе рассмотрены и использованы экспериментальные данные для конкретных объектов в различных районах Беларуси, полученные в отделе оснований и фундаментов БелНИИСа.

4.4 Прикладные вопросы методики и технологии компьютерного объектно-ориентированного моделирования смещения винтовой сваи

Рассматривая грунтовое основание, структуру винтовой сваи и внешние нагрузки как единую нелинейную систему, методом визуального объектно-ориентированного моделирования исследуем деформации грунтового основания и осадки винтовой сваи при различных входных данных системы с целью установления некоторых общих закономерностей функционирования системы в целом. Методика визуального объектно-ориентированного моделирования разработана на основе метода конечных элементов и метода энергетической линеаризации. Для исследования приняты результаты натурных экспериментов, где рассматриваются одиночные винтовые сваи при условии полного сцепления поверхности сваи с грунтом. Схема дискретизации расчётной области общая для всех задач.

При постановке модельных задач учтено, что после завинчивания сваи грунт в некоторой подобласти, примыкающей к поверхности сваи, будет находиться в изменённом состоянии вследствие его уплотнения. Исследование

деформационного процесса системы «Винтовая свая – грунтовое основание» проводилось методом компьютерного объектно-ориентированного моделирования с помощью разработанного программного комплекса «Энергия – ОС».

Для математического и компьютерного моделирования линейных и нелинейных систем механики грунтов необходимо иметь закон деформирования любого элемента физической системы. Тип графика деформационного процесса осадки винтовой сваи в грунтовом основании можно определить несколькими типами уравнений, но наиболее подходящей моделью указанного деформационного процесса будет степенная функция $y = ax^m$, $a > 0$, $0 < m < 1$.

На этом основании в настоящем исследовании уравнение закона деформирования грунтового основания винтовой сваи принято в виде

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^m, \quad A > 0, \quad 0 < m < 1,$$

где σ_i , ε_i – интенсивности напряжений и интенсивности деформаций.

Для рассматриваемой задачи на основании данных эксперимента получено $\sigma_i = 20\varepsilon_i^{0,54}$. Учитывалось уплотнение грунтового основания вследствие завинчивания сваи. Технология построения виртуальной физической модели системы представлена на рисунке 3.

4.5 Численный анализ деформирования грунтового основания и осадки винтовой сваи объекта № 1

В настоящих исследованиях рассматривается винтовая свая из стали, см. п. 4.1.

Следовательно, по отношению к любому грунтовому основанию сваю можно считать абсолютно твёрдым телом. При исследованиях принято, что проскальзывание грунта по поверхности сваи отсутствует. В силу симметричности конструкции винтовой сваи и нелинейности деформирования грунтового основания поставленная задача классифицируется как осесимметричная краевая задача нелинейной математической физики (механики грунтов). Структура и размеры дискретизованной расчётной области представлены на схеме рисунка 3. В таблице 3 представлены значения перемещений в узлах дискретизованной области, узлы расположены на вертикалях, отстоящих от поверхности сваи на расстояниях 10 см, 25 см, 35 см, 45 см. Решения получены при условии линейно-упругого и нелинейно-упругого деформирования уплотнённого грунтового основания.

В данной таблице в первом столбце приведены значения расстояний от выбранных горизонтальных линий дискретизованной расчётной области виртуальной физической модели исследуемой системы. Во втором столбце показаны вертикальные перемещения узловых точек поверхности сваи. В трёх последующих столбцах приведены значения вертикальных перемещений в узлах вертикалей, отстоящих от поверхности сваи на расстояниях 25 см, 35 см, 45 см. Из таблицы видно, что вертикальные перемещения на каждой вертикали равны до уровня лопасти сваи. Такой эффект называется телескопическим сдвигом. В области лопасти сваи, уровень 380 см, наблюдается уплотнение грунта выше и ниже лопасти и правее её до расстояния 45 см. Отметим, что все эти величины зависят от входных данных конкретной задачи. Перемещения, полученные при условии нелинейно-упругого деформирования, значительно отличаются от соответствующих величин, полученных при условии линейно-упругого деформирования грунтового основания. Из таблицы также видно, что нелинейные деформации затухают быстрее деформаций, полученных при условии линейно-упругого деформирования. Это известный факт, этим решением мы его только подтвердили.

Таблица 3 – Деформации грунтового основания винтовой сваи ($P=225$ кН)

H (см)	r (см)	Линейное деформирование				Нелинейное деформирование			
		10	25	35	45	10	25	35	45
0		0,38	0,25	0,17	0,12	0,48	0,25	0,13	0,06
40		0,38	0,25	0,17	0,12	0,48	0,25	0,13	0,06
160		0,38	0,25	0,17	0,12	0,48	0,25	0,13	0,05
320		0,38	0,25	0,17	0,12	0,485	0,268	0,13	0,05
360		0,38	0,29	0,19	0,12	0,49	0,35	0,15	0,05
380		0,38	0,38	0,21	0,12	0,49	0,49	0,15	0,046
400		0,38	0,26	0,16	0,1	0,49	0,24	0,1	0,035
410		0,29	0,21	0,14	0,09	0,29	0,17	0,08	0,03
430		0,18	0,14	0,1	0,07	0,11	0,08	0,04	0,02

Модельная задача № 1. Поставленную в п. 4.1 задачу можно решить, используя метод построения однородного грунтового основания, эквивалентного по несущей способности реальному неоднородному уплотнённому грунтовому основанию, рисунок 3.

На основании экспериментальных исследований, п. 4.2, уравнения линейно-упругого и нелинейно-упругого деформирования эквивалентного по несущей способности грунтового основания получены в виде: $\sigma_i = 450\varepsilon_i$ и $\sigma_i = 20\varepsilon_i^{0,54}$. Винтовая свая рассматривалась с учётом и без учёта несущей способности лопасти. Нагрузка на сваю создавалась в диапазоне от 50 до 250 кН. Полученные значения осадки в миллиметрах представлены в таблице 4 и на графиках рисунка 4. Воспринимаемая лопастью нагрузка в % показана в таблице 4.

Таблица 4 – Осадка винтовой сваи в эквивалентном грунтовом основании при вдавливании

P (кН)	50	100	150	200	250
S_{on}	0,4	1,1	2,2	4	6,5
$S_{ел}$	0,85	1,7	2,5	3,4	4,28
$S_{нл}$	0,36	1,1	2,3	3,9	5,9
S_e	0,9	1,8	2,7	3,6	4,5
S_H	0,4	1,23	2,6	4,4	6,67
P^u (%)	11	11	13	13	13

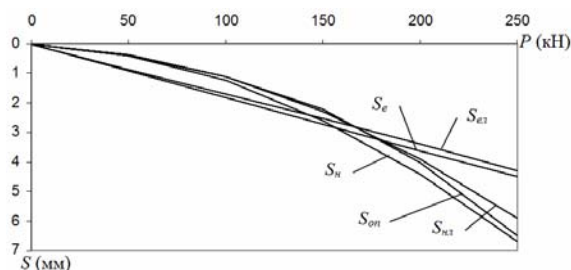


Рисунок 4 – Осадка винтовой сваи при условии линейно-упругого и нелинейно-упругого деформирования эквивалентного основания с учётом и без учёта несущей способности лопасти

Принятые обозначения: $S_{оп}$ – опытные значения осадки винтовой сваи с лопастью, $S_{ел}$, $S_{нл}$, S_e , S_n – осадки винтовой сваи с учётом и без учёта лопасти при условии упругого и неупругого деформирования эквивалентного основания, P^u (%) – воспринимаемая лопастью нагрузка в %.

Из полученных результатов следует:

1. Расчёт осадки винтовой сваи при условии линейного деформирования грунтового основания значительно отличается от экспериментальных данных.

2. Расчёт осадки винтовой сваи при условии нелинейного деформирования грунтового основания отличается от экспериментальных данных на величину < 5%.

3. При заданных размерах винтовой сваи нагрузка на лопасть составила $\approx 13\%$.

Модельная задача № 2. Определить осадку винтовой сваи при вдавливании для грунтового основания с начальными характеристиками п. 4.1. Уравнения линейно-упругого и нелинейно-упругого деформирования грунтового основания получены в виде: $\sigma_i = 320\varepsilon_i$ и $\sigma_i = 20\varepsilon_i^{0,57}$.

Таблица 5 – Осадка винтовой сваи при вдавливании в грунтовом основании с начальными характеристиками

P (кН)	50	100	150	200	250
$S_{оп}$	0,4	1,1	2,2	4	6,5
$S_{ел}$	1,1	2,35	3,5	4,7	5,9
$S_{нл}$	0,5	1,6	3,25	5,3	7,9
S_e	1,3	2,5	3,8	5	6,3
S_n	0,57	1,82	3,65	6	9
P^u (%)	14	14	12	13	14

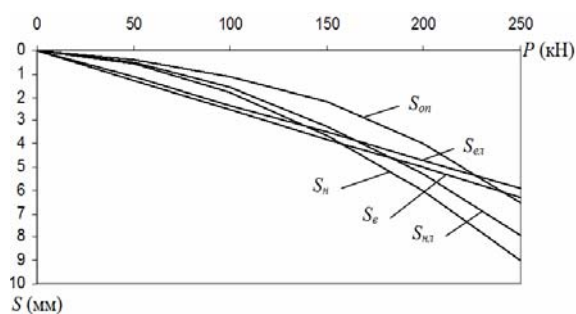


Рисунок 5 – Осадка винтовой сваи при условии линейно-упругого и нелинейно-упругого деформирования исходного основания с учётом и без учёта несущей способности лопасти

Из полученных результатов следует:

1. Расчёт осадки винтовой сваи при условии нелинейного деформирования грунтового основания с начальными характеристиками при вдавливании значительно отличается от экспериментальных данных.

2. По другим критериям выводы аналогичны предыдущим.

Модельная задача № 3. Определить осадку винтовой сваи при вдавливании для грунтового основания с начальными характеристиками п. 4.1 и уплотнённой оболочки вокруг сваи. Уравнения линейно-упругого и нелинейно-упругого деформирования грунтового основания получены в виде: $\sigma_i = 320\varepsilon_i$ и $\sigma_i = 20\varepsilon_i^{0,57}$, $\sigma_i = 900\varepsilon_{i,уп}$.

Таблица 6 – Осадка винтовой сваи при вдавливании в грунтовом основании с начальными характеристиками и уплотнённой оболочкой вокруг сваи

P (кН)	50	100	150	200	250
$S_{оп}$	0,4	1,1	2,2	4	6,5
$S_{ел}$	0,95	1,9	2,8	3,8	4,7
$S_{нл}$	0,4	1,3	2,55	4,2	6,2
S_e	1	1,94	2,9	3,9	4,85
S_n	0,4	1,33	2,7	4,4	6,5

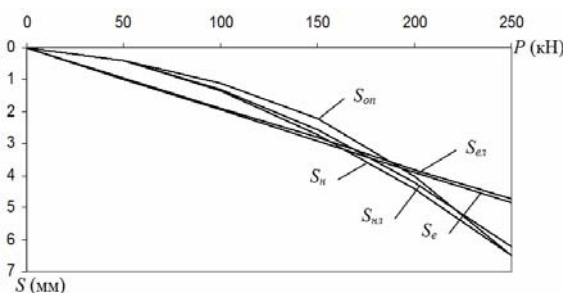


Рисунок 6 – Осадка винтовой сваи при вдавливании в грунтовом основании с начальными характеристиками и уплотнённой оболочкой вокруг сваи

Диаметр уплотнённой оболочки равен диаметру лопасти сваи, поэтому осадки сваи с явным учётом лопасти и при замене лопасти уплотненным материалом должны быть практически сопоставимы по величине, что и наблюдается в таблице 6. Оба решения хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Линейные и нелинейные решения отличаются значительно.

4.6 Сравнительный анализ способов моделирования смещений винтовой сваи в грунтовом основании при вдавливании

Выше были рассмотрены три подхода к построению математической модели системы «Винтовая свая – грунтовое основание», см. п. 4.1. Соответственно этому были построены механико-математические модели грунтового основания и методом компьютерного объектно-ориентированного моделирования была исследована эффективность всех трёх подходов определения осадки винтовой сваи. Результаты численного моделирования представлены в таблице 7 и на рисунке 7.

Таблица 7 – Осадки винтовой сваи при вдавлении в грунтовое основание, определённое различными механико-математическими моделями

P (кН)	50	100	150	200	250
$S_{оп}$	0,4	1,1	2,2	4	6,5
$S_{экв}$	0,36	1,1	2,3	3,9	5,9
$S_{упл}$	0,4	1,3	2,55	4,2	6,2
$S_{нач}$	0,5	1,6	3,26	5,4	7,9

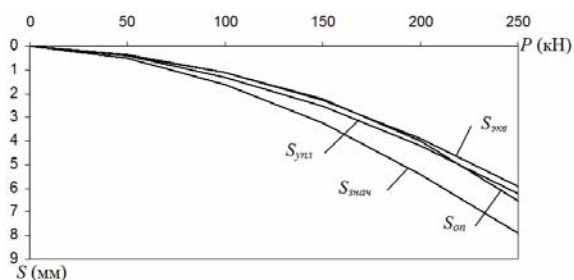


Рисунок 7 – Осадки винтовой сваи при вдавлении в грунтовое основание, определённое различными механико-математическими моделями

Принятые обозначения: $S_{оп}$ – осадка сваи определена посредством натурального эксперимента, $S_{экв}$ – осадка сваи вычислена для условий эквивалентного основания, $S_{упл}$ – осадка сваи вычислена для условий уплотнения грунта вокруг сваи, $S_{нач}$ – осадка сваи вычислена для условий начальных характеристик грунта.

Из общего анализа результатов следует, что алгоритмически, технологически и по точности решения для исследуемой системы лучшим оказывается метод решения на основе построения эквивалентного грунтового основания. При этом вследствие проведенных виртуальных экспериментов было установлено:

- при завинчивании сваи происходит уплотнение грунтового основания и вследствие этого несущая способность винтовой сваи значительно повышается,
- лопасть винтовой сваи длиной 3,5–4 м. передаёт на грунт до 20% нагрузки,
- уплотнённое грунтовое основание является нелинейно-деформируемым,
- решение поставленной задачи при условии линейного деформирования грунта можно рассматривать только в качестве первого грубого приближения,
- при действии на винтовую сваю сжимающей или выдёргивающей нагрузки вокруг сваи выше плоскости лопасти происходит телескопический сдвиг грунта.

Заключение

Разработанная методология, методы, технология и программное обеспечение по компьютерному визуальному объектно-ориентированному моделированию нелинейных и неоднородных физических систем является эффективным инструментом исследования деформационных свойств элементов системы по их основным физико-механическим характеристикам. При этом предусмотрена возможность работы с отдельными слоями и элементами, которым можно присваивать заданные свойства, определён способ задания граничных условий, исходные данные и результаты компьютерного моделирования представлены в дискретной и графической формах. В целом значительно повышена полнота учёта структуры и свойств проектируемой физической системы, что даёт определённый экономический эффект.

ЛИТЕРАТУРА

1. Безухов, Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н.И. Безухов. – М. : Высш. шк., 1968. – 512 с.
2. Быховцев, В.Е. Компьютерное объектно-ориентированное моделирование нелинейных систем деформируемых твёрдых тел / В.Е. Быховцев. – Гомель: УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2007. – 219 с.
3. Быховцев, В.Е. Визуальное объектно-ориентированное моделирование зданий с фундаментами на грунтовых основаниях / В.Е. Быховцев, А.В. Быховцев, К.С. Курочка // Пространственные конструктивные системы зданий и сооружений, методы расчёта, конструирования и технология возведения, науч.-техн. конф. Т. 2. – Мн. : Стринко. – 2002. – С. 5–16.
4. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 540 с.
5. Журавков, М.А. Математическое моделирование деформационных процессов в твёрдых деформируемых средах / М.А. Журавков. – Мн. : БГУ, 2002. – 456 с.
6. Максимей, И.В. Математическое моделирование больших систем / И.В. Максимей. – Мн. : Высш. шк., 1985. – 119 с.
7. Партон, В.З. Методы математической теории упругости / В.З. Партон, П.И. Перлин. – М. : Наука, 1981. – 688 с.
8. Старовойтов, Э.И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости / Э.И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2001. – 344 с.
9. Цытович, Н.А. Механика грунтов / Н.А. Цытович. – М. : Стройиздат, 1963. – 542 с.

Поступила в редакцию 27.01.11.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна соответствовать его профилю. Она представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на дискете 3,5" или CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (6.0/95/97/2000), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Допускается сквозная нумерация рисунков и таблиц. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутонные фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются сведения об авторах и экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати.

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный и домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями. Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (банделеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах и экспертного заключения можно посмотреть на сайте журнала по адресу <http://pfmt.gsu.by>.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

The paper submitted to the Editorial Board of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics», should meet the following requirements. Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a floppy (CD) or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (6.0/95/97/2000), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. Through numbering of figures and tables is possible. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper is signed by all authors. The information about the authors and the conclusion of the experts about the possibility of publication in press are enclosed.

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home and office phone numbers, fax number, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charters top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

In case of questions relating to paper submission visit website of the journal <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).