

ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№ 4 (5) 2010

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

Главный редактор:
А.В. Рогачев (Беларусь)

Заместители главного редактора:
О.М. Демиденко (Беларусь)
Л.А. Шеметков (Беларусь)

Редакционная коллегия:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
П.Д. Кухарчик (Беларусь)
В.Д. Мазуров (Россия)
И.В. Максимей (Беларусь)
Н.В. Максименко (Беларусь)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
М.В. Селькин (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)

Ответственный секретарь:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

Адрес редакции:
Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины
ул. Советская, 104,
246019, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

Editor-in-Chief:
A.V. Rogachev (Belarus)

Deputy Editor-in-Chief:
O.M. Demidenko (Belarus)
L.A. Shemetkov (Belarus)

Editorial board:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Webin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
P.D. Kuharchik (Belarus)
V.D. Mazurov (Russia)
I.V. Maksimei (Belarus)
N.V. Maksimenko (Belarus)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
M.V. Selkin (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)

Executive Secretary:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

Edition address:
F. Scorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)60-30-02
+375(232)60-74-82
e-mail: pfmt@gsu.by
website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 4 (5) 2010

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

- Гуделев В.Г., Кулак Г.В., Матвеева А.Г.** Лазерное возбуждение импульсов продольных и сдвиговых ультразвуковых волн в твердых телах 7
- Капшай В.Н., Шиляева К.П.** Определение влияния резонансов на сечение рассеяния на основе интегрального уравнения Фредгольма 10
- Шматов С.В., Шульга С.Г.** Теоретические неопределенности в сечениях инклюзивного рождения струи в экспериментах LHC при энергии 14 ТэВ 18

МАТЕМАТИКА

- Гаврилюк А.В., Гаврилюк А.А.** Проблема определения производной без использования понятия предела 24
- Миротин А.Р.** Несколько утверждений, равносильных гипотезе Римана 29
- Ружицкая Е.А.** Стабилизация оптимальных по быстродействию систем 35
- Скиба А.Н.** О SE -ядре подгрупп конечной группы 39
- Старовойтов А.П., Рябченко Н.В.** Детерминантные представление совместных аппроксимаций Паде 46
- Ходалевиц А.Д.** Теорема Жордана-Гельдера в теории универсальных алгебр мальцевских многообразий 50
- Шевчук С.Н., Семенчук В.Н.** Конечные группы с обобщенно субнормальными подгруппами 57
- Шеметков Л.А.** Замечание о \mathfrak{X} -локальных формациях 61
- Якубович О.В., Евдокимович В.Е.** Сеть массового обслуживания со случайным временем пребывания различных типов положительных, отрицательных заявок и сигналов 63

ИНФОРМАТИКА

- Демиденко О.М., Елисеева Е.В., Маслов В.П., Левчук В.Д., Буяльский В.М.** Апробация модели взаимодействия научных коллективов на примере межрегионального портала «Проблемы преодоления последствий Чернобыльской катастрофы» 68

ТЕХНИКА

- Богданович П.Н., Близнец Д.А., Ткачук Д.В.** Изнашивание силикатного стекла при высоких скоростях 73
- Гаврильчик В.Т.** Плазмохимическое модифицирование бумаги: влияние на механические и адсорбционные свойства 79

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Технический редактор *Е. А. Ружицкая*
Корректоры *Д. Д. Павловец, Г. Н. Петухова*
Дизайн обложки *А. В. Ермаков*

Подписано в печать 13.12.10. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 9,76. Уч.-изд. л. 8,50. Тираж 100 экз. Заказ № 626.

Издатель – УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»
246019, Гомель, ул. Советская, 104
Лицензия № 02330/0549481 от 14.05.09.

Отпечатано на полиграфической технике УО «ГГУ им. Ф. Скорины»
Лицензия № 02330/0150450 от 03.02.09.

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2010

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December, 2009

There are 4 times a year

№ 4 (5) 2010

CONTENTS

PHYSICS

- Gudelev V.G., Kulak G.V., Matveeva A.G.** Laser excitation of shear and longitudinal ultrasound waves in solid state bodies..... 7
- Kapshai V.N., Shilyaeva K.P.** Identification of the influence of resonances on the cross section using Fredholm integral equation..... 10
- Shmatov S.V., Shulga S.G.** Theoretical uncertainties of the inclusive jet cross sections at the LHC experiments at 14 TEV..... 18

MATHEMATICS

- Gavriliouk A.V., Gavruluk A.A.** The problem of definition of derivative without invoking the concept of limit..... 24
- Mirotin A.R.** Some assertions equivalent to Riemann hypothesis..... 29
- Ruzhitskaya E.A.** Stabilization of optimal on speed systems 35
- Skiba A.N.** On the SE -core of subgroups of a finite group 39
- Starovoitov A.P., Rjabchenko N.V.** Determinant representation of Pade joint approximations 46
- Hodalevich A.D.** Jordan-Holder theorem in the theory of universal algebras of Mal'cev varieties .. 50
- Shevchuk S.N., Semenchuk V.N.** Finite groups with generalized subnormal subgroups 57
- Shemetkov L.A.** A note on \mathfrak{X} -local formations 61
- Yakubovich O.V., Evdokimovich V.E.** Queueing network with random staying time of different types of positive, negative customers and signals 63

INFORMATION SCIENCE

- Demidenko O.M., Eliseeva E.V., Maslov V.P., Liauchuk V.D., Bujalskyy V.M.** Approbation of the model of research teams' interaction on the example of interregional portal «Problems of overcoming of Chernobyl catastrophe consequences» 68

TECHNICS

- Bogdanovich P.N., Bliznets D.A., Tkachuk D.V.** Wear of silica glass at high velocities..... 73
- Gavrilchik V.T.** Plasmachemical modification of paper: influence on mechanical and adsorption properties 79

Founder – Francisk Scorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

УДК 534.142

ЛАЗЕРНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ИМПУЛЬСОВ ПРОДОЛЬНЫХ И СДВИГОВЫХ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

В.Г. Гуделев¹, Г.В. Кулак², А.Г. Матвеева²

¹Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск

²Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина, Мозырь

LASER EXCITATION OF SHEAR AND LONGITUDINAL ULTRASOUND WAVES IN SOLID STATE BODIES

V.G. Gudelev¹, G.V. Kulak², A.G. Matveeva²

¹B.I. Stepanov Institute of Physics NASB, Minsk

²I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University, Mozyr

Исследовано изменение формы акустических импульсов продольных и сдвиговых ультразвуковых волн, возбуждаемых оптико-акустическим источником круглой формы от полярного угла дифракции. Установлено, что форма гауссового импульса сдвиговых ультразвуковых волн существенно трансформируется при увеличении полярного угла; изменения формы импульса продольных ультразвуковых волн менее значительны. Показано, что амплитуда акустического импульса определяется функцией дифракции продольных и сдвиговых ультразвуковых волн на круглом отверстии.

Ключевые слова: лазерное возбуждение, ультразвуковая волна, импульс, диаграмма направленности, твердое тело.

Changes of the acoustical pulse form of longitudinal and shear ultrasonic waves, excited by the optical-acoustical sources of circular form from polar angle are investigated. It has been stated that the form of gaussian pulse of shear ultrasonic waves is sufficiently transformed under the increase of the polar angle; the change of the form of longitudinal ultrasonic waves pulse is more significant. It has been shown that acoustical pulse amplitude is determined by the diffraction function of the longitudinal and shear ultrasonic waves on the circular form opening.

Keywords: laser excitation, ultrasonic waves, pulse, directional diagram, solid state body.

Введение

Оптико-акустические источники ультразвука имеют ряд преимуществ для неразрушающего контроля перед традиционными: отсутствие контакта со средой, возможность легкого изменения геометрических параметров оптико-акустической антенны [1]–[3]. Наибольший интерес для возбуждения гиперзвука представляет нелинейный режим лазерной абляции, при котором достигаются наиболее высокие уровни давления на поверхность твердого тела [1], [2].

Область возбуждения гиперзвука имеет вид круга радиусом R . При этом возбуждаются три основных типа волн, используемых для неразрушающего контроля [4]: продольные (L), сдвиговые (S) и рэлеевские (R). Значительный интерес представляет исследование особенностей возбуждения объемных – продольных и сдвиговых ультразвуковых (УЗ) волн. Вычисление Фурье-компонент частотного спектра ультразвука производится интегрированием по площади отверстия круглой формы [4].

1 Теоретические результаты и обсуждение

Лазерный импульс длительностью τ распространяется вдоль оси OZ и возбуждает высокочастотные ультразвуковые волны различной

поляризации и пространственно-углового распределения. При этом акустический импульс имеет длительность, существенно отличающуюся от длительности светового импульса [1], [5]. Предположим, что световой импульс имеет гауссово распределение во времени, то есть $f(t) = \exp(-t^2/\tau^2)$. Ультразвуковая волна является затухающей с коэффициентом затухания $\alpha_s = \Gamma \cdot \Omega^2$, где Γ – некоторая постоянная, зависящая от рода материала, $\Omega \sim 1/\tau$ – циклическая частота ультразвука. Частотные спектры продольной ($\tilde{U}_l(\Omega)$) и сдвиговой ($\tilde{U}_s(\Omega)$) ультразвуковой волны имеют вид [4]:

$$\tilde{U}_l(\Omega) = \frac{P_f S \gamma^2 e^{-\alpha_s r}}{2\pi \mu r} D_l(\theta) \frac{J_1(A_l)}{A_l} e^{i(k_l r - \Omega t)}, \quad (1.1)$$

$$\tilde{U}_s(\Omega) = \frac{P_f S e^{-\alpha_s r}}{2\pi \mu r} D_s(\theta) \frac{J_1(A_s)}{A_s} e^{i(k_s r - \Omega t)}, \quad (1.2)$$

где $A_{l,s} = k_{l,s} R \sin \theta$, θ – полярный угол, $S = \pi R^2$, P_f – давление на поверхность твердого тела в области отверстия; r – расстояние до точки наблюдения УЗ волны; $k_{l,s} = \Omega / v_{l,s}$, $v_{l,s}$ – фазовые скорости продольной и сдвиговой УЗ волны; угловые распределения продольных D_l и сдвиговых D_s УЗ волн даются соотношениями [6], [7]:

$$D_l(\theta) = \frac{\cos\theta(1-2\gamma^2\sin^2\theta)}{(2\gamma^2\sin^2\theta-1)+4\gamma^3\sin^2\theta\cos\theta\sqrt{1-\gamma^2\sin^2\theta}}, \quad (1.3)$$

$$D_s(\theta) = \frac{\sin\theta\cos\theta\sqrt{\gamma^2-\sin^2\theta}}{(2\sin^2\theta-1)^2+4\sin^2\theta\cos\theta\sqrt{\gamma^2-\sin^2\theta}}, \quad (1.4)$$

где $\gamma^2 = \mu/(\lambda + 2\mu)$, причем λ, μ – постоянные Ламе. Как следует из выражений (1.1)–(1.4), угловое распределение продольных (L) и сдвиговых (S) УЗ волн определяется соответствующей функцией дифракции $D_{l,s}(\theta)J_1(A_{l,s})/A_{l,s}$.

Временная форма акустического импульса определяется интегралом [1], [2]:

$$U_{l,s}(\tilde{t}_{l,s}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}_{l,s}(\Omega)F(\Omega)e^{-i\Omega\tilde{t}_{l,s}}d\Omega, \quad (1.5)$$

где $\tilde{t}_{l,s} = t - r/v_{l,s}$, $F(\Omega) = \tau_a \sqrt{\pi} \exp(-\tau_a^2 \Omega^2 / 4)$ – частотный спектр акустического импульса при угле $\theta = 0$. Длительность акустического импульса τ_a определяется особенностями поглощения энергии светового импульса поверхностью материала [1], [5].

Подставив выражения (1.1)–(1.4) в (1.5) и выполнив интегрирование численными методами, получим временную форму акустического импульса продольной $U_l(t)$ и сдвиговой $U_s(t)$ ультразвуковой волны. При численных расчетах применялся алгоритм быстрого преобразования Фурье и метод сплайн-интерполяции. Вычисления по формуле (1.5) не удается провести аналитически [8].

2 Результаты численных расчетов

Численные расчеты проводились для продольной и сдвиговой УЗ волны и материала, выполненного из стали (Fe). При этом полагалось,

что $P_f = 10$ МПа, $\rho = 7800$ кг/м³, $v_f = 5100$ м/с, $v_s = 3200$ м/с, $R = 3$ мм, $\lambda = 0,49 \cdot 10^{10}$ Па, $r = 10$ мм, $\mu = 7,84 \cdot 10^{10}$ Па, $\Gamma = 10^{-10}$ Гц⁻².

На рисунке 1 представлена форма акустического импульса U_l продольных УЗ волн для падающего гауссового светового импульса длительностью $\tau = 10^{-9}$ с. Световой импульс преобразуется в акустический импульс, распространяющийся в том же направлении и имеющий длительность, $\tau_a = 10^{-6}$ с [1]–[3], [5]. Полагалось, что область лазерного возбуждения имеет форму круга площадью $S = \pi R^2$. При этом угловое распределение возбуждаемого гиперзвука определяется полярным углом θ . При малых углах отклонения от нормали (рисунок 1, а) форма акустического импульса близка к гауссовому распределению в дальней зоне дифракции и с увеличением угла θ амплитуда акустического импульса увеличивается. При больших полярных углах с увеличением угла θ амплитуда импульса уменьшается. Длительности импульсов продольных ультразвуковых волн (по уровню 3 дБ) при малых углах несколько уменьшаются, а при больших углах – увеличиваются.

Зависимость формы акустического импульса U_s сдвиговых УЗ волн для падающего гауссового светового импульса длительностью $\tau = 10^{-9}$ с представлена на рисунке 2. Полагается, что световой импульс преобразуется в акустический импульс той же длительности, что и для продольных УЗ волн. При малых полярных углах (рисунок 2, а) наблюдается значительная трансформация формы акустического импульса; при увеличении полярного угла от 15° до 20° ультразвуковой импульс, имеющий гауссову форму при углах $\theta \ll 1$, приобретает S – образную форму.

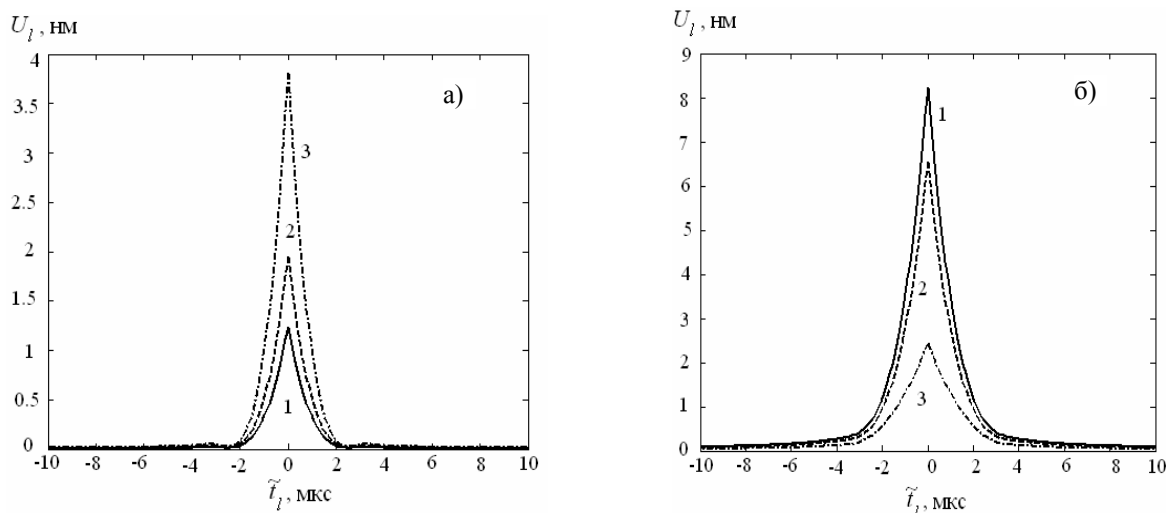


Рисунок 1 – Зависимость нормированной амплитуды смещения продольных ультразвуковых волн U_l от времени \tilde{t}_l для малых (а) полярных углов θ : 1 – 10° , 2 – 15° , 3 – 20° и больших (б) углов θ : 1 – 65° , 2 – 75° , 3 – 85° ($R = 3$ мм, $r = 10$ мм, $v_f = 5100$ м/с, $\tau_a = 1$ мкс, $P_f = 10$ МПа).

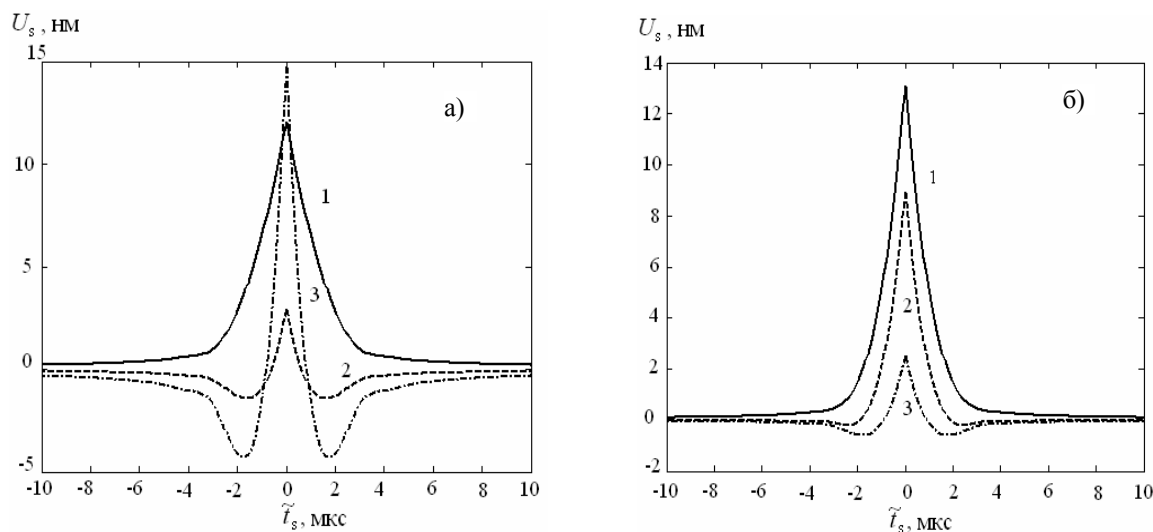


Рисунок 2 – Зависимость нормированной амплитуды смещения сдвиговых ультразвуковых волн U_s от времени \tilde{t}_s для малых (а) полярных углов θ : 1 – 10° , 2 – 15° , 3 – 20° и больших (б) углов θ : 1 – 65° , 2 – 75° , 3 – 85° ($R=3$ мм, $r=10$ мм, $\nu_s=3200$ м/с, $\tau_a=1$ мкс, $P_f=10$ МПа).

При больших полярных углах (рисунок 2, б) изменения формы падающего гауссового УЗ импульса менее значительны; амплитуда импульса уменьшается при увеличении полярного угла. Аналогичные особенности для сдвиговых УЗ волн экспериментально наблюдались в работе [2].

Диаграмма направленности акустического импульса продольных и сдвиговых УЗ волн определяется параметрами $D_{l,s}$ и радиусом круга возбуждения R . Продольные УЗ волны возбуждаются практически при любых углах (кроме $\theta = \pm 90^\circ$). Сдвиговые УЗ волны не возбуждаются при углах $\theta = 0, \pm \arcsin \gamma$.

Заключение

Рассмотренные особенности лазерного возбуждения высокочастотного ультразвука показывают, что диаграмма направленности такого источника может легко изменяться варьированием радиуса пятна круглой формы. Установлено, что форма гауссового акустического импульса сдвиговой УЗ волны, распространяющегося вдоль нормали к поверхности твердого тела, существенно трансформируется при увеличении полярного угла; изменения формы акустического импульсы продольных УЗ волн менее значительны. Обнаруженные закономерности позволяют диагностировать дефекты материалов, регистрируя временную форму оптико-акустического источника продольных и сдвиговых УЗ волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лямшев, Л.М. Оптико-акустические источники звука / Л.М. Лямшев // Успехи физ. наук. – 1981. – Т. 135, В. 4. – С. 636–669.
2. *Experimental study of laser-generated shear waves using interferometry* / S.Y. Zhang [et al.] // Res. Nondestr. Eval. – 1990. Vol. 2. – P. 143–155.
3. Островская, Г.В. Эффективность преобразования световой энергии в акустическую при взаимодействии импульсного лазерного излучения с жидкой средой / Г.В. Островская // ЖТФ. – 2002. – Т. 72, В. 10. – С. 95–102.
4. Гринченко, В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – Киев : Наукова думка, 1981. – 284 с.
5. Lin, Gu. Theory of the photoacoustical effect in condensed medium / Gu Lin // Appl. Opt. – 1982. – Vol. 21, № 5. – P. 955–960.
6. Kharusi, M.S. Plane ultrasonic transducer diffraction fields in highly anisotropic crystals / M.S. Kharusi, G.W. Farnell // J. Acoust. Soc. Amer. – 1970. – Vol. 48, № 2. – P. 665–670.
7. Буденков, Г.А. Возбуждение упругих волн в твердых телах лучом лазера вследствие термоупругого эффекта / Г.А. Буденков // Дефектоскопия. – 1979. – № 2. – С. 75–81.
8. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов сумм рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М. : Физматгиз, 1963. – 1100 с.

Поступила в редакцию 14.10.10.

УДК 539.12.01

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЛИЯНИЯ РЕЗОНАНСОВ НА СЕЧЕНИЕ РАССЕЙЯНИЯ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА

В.Н. Капшай, К.П. Шиляева

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

IDENTIFICATION OF THE INFLUENCE OF RESONANCES ON THE CROSS SECTION USING FREDHOLM INTEGRAL EQUATION

V.N. Kapshai, K.P. Shilyaeva

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В работе описан основанный на решении интегрального уравнения Фредгольма метод определения положения резонансов и выполнен анализ их влияния на сечение рассеяния. Данный метод применен для нескольких модельных потенциалов. Приведены примеры различного вида резонансных поведений сечений рассеяния. Проведено сравнение значений вычисленных величин с результатами, полученными другими методами.

Ключевые слова: уравнение Фредгольма, резонансная энергия, резонансная волновая функция, комплексный поворот, *S*-матрица, сечение рассеяния.

Method for resonance finding, based on the Fredholm integral equation, and analysis of their influence on cross section are presented. This method is applied for several model potentials. Examples of the resonance behaviour of the cross sections of various types are presented. The results of the calculations are compared with the results obtained using other methods.

Keywords: Fredholm equation, resonance energy, resonance wave function, complex scaling, *S*-matrix, cross section.

Введение

Резонансные состояния систем квантовых частиц, которые привлекают в последнее время все больше внимания, определяются как решения уравнения Шредингера, удовлетворяющие граничным условиям «регулярная волновая функция» в начале координат и «расходящаяся волна» на бесконечности [1]–[5]. Эти условия выполняются только при определенных образующих дискретный спектр комплексных значениях энергий, для нахождения которых используются различные методы [5], [6]. Чаще всего эти методы основаны на решении дифференциального уравнения Шредингера [7]–[9]. В работах [10]–[12] была предложена методика определения влияния резонансов на сечение рассеяния в таком подходе, использованная для анализа сечений рассеяния различных нерелятивистских модельных систем. Для нахождения резонансного спектра также можно использовать методы, основанные на решении интегральных уравнений Вольтерра [13], [14].

Известно, что трехмерные двухчастичные уравнения квантовой теории поля [15], [16] в импульсном представлении являются интегральными уравнениями (ИУ), подобными нерелятивистским уравнениям Липпмана-Швингера. Тем не менее, сформулировать релятивистские уравнения в виде дифференциальных уравнений (ДУ) в координатном или в импульсном представлении невозможно. Так как ДУ в данном случае

не существуют, то интегральные уравнения Вольтерра получить нельзя, и все ИУ являются уравнениями Фредгольма. Поэтому представляет интерес изучение ИУ Фредгольма и их решений и в нерелятивистском приближении.

В работе [17] было показано, что для нерелятивистских систем возможно нахождение резонансов с использованием этого уравнения. В настоящей работе мы находим соответствующие резонансным состояниям значения комплексной импульсной переменной, а также проводим анализ влияния резонансов на сечение рассеяния, используя только интегральные уравнения.

1 Интегральные уравнения

Основным уравнением квантовой механической теории рассеяния в нерелятивистском приближении является уравнение Шредингера. В случае сферически симметричных потенциалов в этом уравнении можно провести парциальный анализ, при этом парциальное уравнение для волновой функции, которой соответствует орбитальное квантовое число ℓ , можно записать в следующем виде [1], [2]:

$$\left\{ -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + U(r) \right\} \Psi_\ell(k, r) = k^2 \Psi_\ell(k, r). \quad (1.1)$$

Данному уравнению, в зависимости от граничных условий, налагаемых на волновую функцию $\Psi_\ell(k, r)$ в начале координат и/или на бесконечности, соответствуют решения нескольких типов.

Регулярным решением называют решение, удовлетворяющее в начале координат следующему граничному условию:

$$\phi_i(k, r)|_{r \rightarrow 0} \cong \hat{j}_i(kr) = \frac{1}{(2l+1)!!} (kr)^{l+1}.$$

Решениями другого типа являются решения Йоста, определяемые граничными условиями на бесконечности:

$$\chi_i^\pm(k, r)|_{r \rightarrow \infty} \cong \hat{h}_i^\pm(kr) = \exp[\pm i(kr - l\pi/2)].$$

Состояния рассеяния описываются физическими волновыми функциями, которые определяются как решения уравнения (1.1), удовлетворяющие граничным условиям

$$\psi_i(k, r)|_{r=0} = 0; \quad \psi_i(k, r)|_{r \rightarrow \infty} \cong \hat{j}_i(kr) + kf_i(k)\hat{h}_i^+(kr),$$

где $f_i(k)$ – парциальная амплитуда.

Для каждой из представленных выше волновых функций с учетом соответствующего ей граничного условия можно получить интегральное уравнение. Так, для регулярного решения и решения Йоста ИУ представляют собой уравнения Вольтерра и, соответственно, имеют вид [1], [2]:

$$\phi_i(k, r) = \hat{j}_i(kr) + \int_0^r g_i(k; r, r')U(r')\phi_i(k, r')dr', \quad (1.2)$$

$$\chi_i^+(k, r) = \hat{h}_i^+(kr) - \int_r^\infty g_i(k; r, r')U(r')\chi_i^+(k, r')dr'. \quad (1.3)$$

Функция $g_i(k; r, r')$ называется функцией Грина и определяется как

$$g_i(k; r, r') = \frac{1}{k} \left[\hat{j}_i(kr)\hat{n}_i(kr') - \hat{n}_i(kr)\hat{j}_i(kr') \right] \equiv \frac{i}{2k} \left[\hat{h}_i^-(kr)\hat{h}_i^+(kr') - \hat{h}_i^+(kr)\hat{h}_i^-(kr') \right].$$

Для состояний рассеяния интегральное уравнение представляет собой уравнение Фредгольма и записывается следующим образом [1], [2]:

$$\psi_i(k, r) = \hat{j}_i(kr) + \int_0^\infty G_i^0(k; r, r')U(r')\psi_i(k, r')dr'. \quad (1.4)$$

Для этого уравнения функция Грина определяется выражениями

$$G_i^0(k; r, r') = \begin{cases} -\frac{1}{k} \hat{j}_i(kr')\hat{h}_i^+(kr); & r' \leq r, \\ -\frac{1}{k} \hat{j}_i(kr)\hat{h}_i^+(kr'); & r' > r, \end{cases}$$

Кроме дискретного и непрерывного спектра для некоторых потенциалов существуют состояния с комплексной энергией – резонансные состояния, волновые функции которых удовлетворяют граничным условиям

$$F_i^R(k, r)|_{r=0} = 0, \quad F_i^R(k, r)|_{r \rightarrow \infty} \cong \hat{h}_i^+(kr).$$

Комплексная энергия системы частиц в таких состояниях представима в виде:

$$E_R = \frac{k_R^2}{2m} = \frac{1}{2m} (k'_R + ik''_R)^2 = E_0 - \frac{i}{2}\Gamma,$$

где E_0 – положение резонанса на шкале энергий, а Γ – его ширина.

Импульсы k_R (энергии E_R), соответствующие резонансным состояниям, можно определить, используя интегральные уравнения (1.2) – (1.4). В работах [13], [14], [17] показано, что регулярное решение и решения Йоста будут резонансными волновыми функциями при выполнении следующих условий:

$$1 + \frac{1}{k} \int_0^\infty \hat{h}_i^\pm(kr')U(r')\phi_i(k, r')dr' = 0, \quad (1.5)$$

$$1 + \frac{1}{k} \int_0^\infty \hat{j}_i(kr')U(r')\chi_i^+(k, r')dr' = 0. \quad (1.6)$$

Резонансные импульсы можно найти также и в результате решения однородного уравнения Фредгольма [17]

$$\psi_i(k, r) = \int_0^\infty G_i^0(k; r, r')U(r')\psi_i(k, r')dr'. \quad (1.7)$$

Как отмечалось в [17], определение резонансных энергий на основе уравнения (1.7) является самым сложным и затратным по времени способом. Именно поэтому уравнение (1.7) фактически не использовалось ранее для нахождения резонансов. Однако, так как для двухчастичных релятивистских систем нельзя сформулировать дифференциальные уравнения, а значит и уравнения Вольтерра, то изучение таких систем базируется именно на решении уравнения Фредгольма. Поэтому этот более трудоемкий способ представляет интерес и в нерелятивистской теории – как исследовательский полигон для последующего развития и апробации методов решения аналогичных релятивистских уравнений.

2 Амплитуда и сечение рассеяния

Парциальную амплитуду рассеяния можно записать в виде интеграла [1]

$$f_i(k) = -\frac{1}{k^2} \int_0^\infty dr \hat{j}_i(kr)U(r)\psi_i(k, r). \quad (2.1)$$

Парциальная амплитуда связана с парциальной S -матрицей следующим образом:

$$f_i(k) = \frac{S_i(k) - 1}{2ik}.$$

Полное сечение рассеяния σ тоже можно представить в виде суммы парциальных сечений σ_i : $\sigma(k) = \sum_i \sigma_i(k)$.

Сечение рассеяния можно выразить также через S -матрицу. При этом одноканальное парциальное сечение рассеяния определяется по формуле

$$\sigma_i(k) = 4\pi(2l+1)|f_i(k)|^2 = 4\pi(2l+1) \left| \frac{S_i(k) - 1}{2ik} \right|^2. \quad (2.2)$$

Вклад i -го резонанса с импульсом k_R^i в S -матрицу определим, следуя [10], как

$$\frac{\text{Res}[S_i(k_R^i)]}{k - k_R^i}.$$

Исключая вклад i -го резонанса из парциальной S -матрицы S_i , получим редуцированную S -матрицу \tilde{S}_i

$$\tilde{S}_i(k, k_R^i) = S_i(k) - \frac{\text{Res}[S_i(k_R^i)]}{k - k_R^i} \quad (2.3)$$

и редуцированное сечение рассеяния $\tilde{\sigma}_i$

$$\tilde{\sigma}_i(k) = 4\pi(2l+1) \left| \frac{\tilde{S}_i(k, k_R^i) - 1}{2ik} \right|^2. \quad (2.4)$$

Сравнивая сечения рассеяния σ_i и $\tilde{\sigma}_i$ можно определить влияние i -го резонанса на величину σ_i .

3 Комплексный поворот

Интегралы в уравнении (1.7), так же как и в уравнениях (1.5), (1.6), расходятся в нижней полуплоскости комплексной плоскости импульсов k . Тем не менее, функции $f_i(k)$ и $S_i(k)$ могут быть аналитически продолжены в нижнюю полуплоскость, где локализованы резонансы. Для аналитического продолжения указанных функций в нижнюю полуплоскость воспользуемся процедурой, известной как комплексный поворот («complex scaling») [18], [19]. Выполняя замену $r \rightarrow r \exp(i\theta)$ (и $r' \rightarrow r' \exp(i\theta)$), представим уравнение (1.7) в форме

$$\begin{aligned} \psi_i^{(0)}(k, r) = & -\frac{1}{k} \int_0^r \hat{j}_i(\tilde{k}r') \hat{h}_i^+(\tilde{k}r') U^{(0)}(r') \psi_i^{(0)}(k, r') e^{i\theta} dr' - \\ & -\frac{1}{k} \int_r^\infty \hat{j}_i(\tilde{k}r) \hat{h}_i^+(\tilde{k}r) U^{(0)}(r') \psi_i^{(0)}(k, r') e^{i\theta} dr', \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\psi_i^{(0)}(k, r) = \psi_i(k, r e^{i\theta})$, $\tilde{k} = k e^{i\theta}$, $U^{(0)}(r) = U(r e^{i\theta}) e^{i\theta}$. Теперь интегралы сходятся, если k находится в некоторой части (определяемой углом поворота θ) нижней полуплоскости комплексных импульсов, и уравнение (3.1) можно использовать для нахождения резонансных состояний.

Вычет S -матрицы при резонансном значении импульса [10]:

$$\begin{aligned} \text{Res}[S_i(k_R^i)] = & \\ = & -i \left(\frac{1}{k_R^i} \int_0^\infty \hat{j}_i(kr e^{i\theta}) U(re^{i\theta}) F_i^R(re^{i\theta}) e^{i\theta} dr \right)^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

также можно получить, используя метод комплексного поворота.

4 Численные методы

Для решения уравнения (3.1) заменим интегрирование суммированием, используя аппроксимацию

$$\int_a^b f(r) dr \cong \sum_{k=1}^N f(r_k) w_k.$$

В результате получим систему однородных уравнений

$$\mathbf{M}\Psi = 0, \quad (4.1)$$

где Ψ – вектор-столбец значений функции $\psi_i^{(0)}(k, r)$ в точках r_k , \mathbf{M} – матрица коэффициентов

$$M_{nm} = \begin{cases} \frac{1}{k} \hat{j}_i(\tilde{k}r_n) \hat{h}_i^+(\tilde{k}r_m) U^{(0)}(r_m) w_m, & m > n; \\ \frac{1}{k} \hat{j}_i(\tilde{k}r_m) \hat{h}_i^+(\tilde{k}r_n) U^{(0)}(r_m) w_m + \delta_{nm}, & m \leq n. \end{cases}$$

Координаты узлов r_k и веса w_k зависят от выбранного способа приближения, использованного при сведении интегралов к суммам. В настоящей работе использована аппроксимация прямоугольниками и аппроксимация Гаусса-Лежандра [20].

Система (4.1) имеет нетривиальное решение только при выполнении условия

$$d(k) = \text{Det}[\mathbf{M}(k)] = 0. \quad (4.2)$$

Вычисляя $d(k)$ при различных значениях импульса, можно приблизительно определить, где локализованы резонансы, и использовать эту информацию для дальнейших вычислений.

Так как функция $d(k)$ комплексна, то, выделяя ее действительную и мнимую часть, уравнение (4.2) можно свести к системе нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \text{Re}[d(k)] = 0, \\ \text{Im}[d(k)] = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Данную систему можно решить, используя программу, основанную на непрерывном аналоге метода Ньютона [21].

Для определения вычета S -матрицы необходимо, кроме значения резонансного импульса, знать и резонансную волновую функцию $F_i^R(k, r)$, являющуюся решением однородного интегрального уравнения Фредгольма (3.1). Решение данного уравнения можно свести к стандартной задаче на нахождение собственных значений и собственных функций [20], методы решения которой хорошо известны. В этих целях сформулируем новую систему уравнений

$$[\mathbf{M} - \lambda \mathbf{1}]\Psi = \lambda \Psi. \quad (4.4)$$

Содержащийся в (4.4) параметр λ трактуется как собственное значение. При $\lambda = 1$ системы уравнений (4.1) и (4.4) совпадают. Чтобы вычислить резонансную функцию нужно подставить резонансное значение импульса в систему (4.4), решить ее и отобрать собственную функцию, соответствующую $\lambda = 1$. Для решения системы уравнений (4.4) нами использована программа `zggev` из библиотеки LAPACK [22].

Таким образом, для исследования влияния резонансов на сечение рассеяния воспользуемся следующим алгоритмом:

- 1) находим приближительные значения комплексного импульса, вычисляя значения $d(k)$;
- 2) определяем точное значение резонансного импульса, решая систему уравнений (4.4);
- 3) вычисляем волновую функцию, соответствующую найденному импульсу;
- 4) определяем вычет S -матрицы по формуле (3.2);
- 5) находим редуцированное сечение по формулам (2.3), (2.4) и сравниваем его с полным сечением рассеяния.

5 Результаты

На рисунках 1 и 2 представлены результаты вычисления нулей комплексной функции $d(k)$, полученной при использовании потенциала

$$U(r) = U_0 r^n e^{-r}, \quad (5.1)$$

при различных значениях параметров U_0 и n . Сплошная линия соответствует нулям действительной части $d(k)$, штриховая – нулям мнимой части. Координатами точки пересечения этих двух линий определяется положение резонанса.

Видно, что при нулевом угле поворота (рисунок 1а), благодаря свойствам потенциала, открыта только узкая полоса в нижней полуплоскости, где расположен только один первый резонанс. После поворота, например на угол $\theta = 40^\circ$, становятся доступными и другие резонансы (рисунок 1б). Полученные значения аргументов функции $d(k)$, соответствующие ее нулям, далее использовались как стартовые значения для вычисления резонансных импульсов.

В таблицах 1 – 5 приведены результаты вычислений резонансных импульсов, энергий и вычетов S -матрицы. Значения резонансных энергий, полученные посредством решения интегральных уравнений, находятся в хорошем соответствии с результатами работы [10], полученными при решении ДУ. Энергии совпадают до третьего – четвертого знака после запятой. Для вычетов соответствие не такое хорошее (значения совпадают до второго – третьего знака), но достаточное для изучения влияния резонансов на сечение рассеяния.

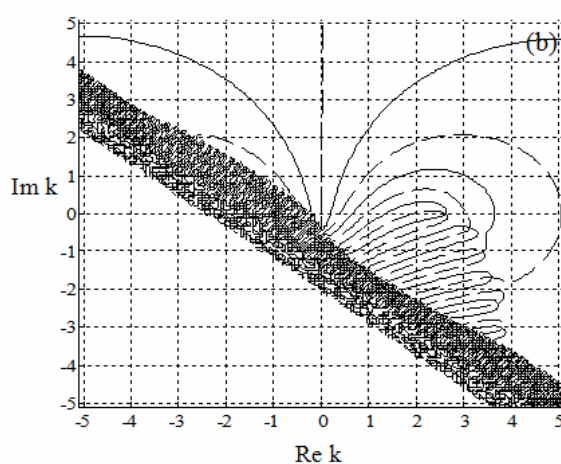
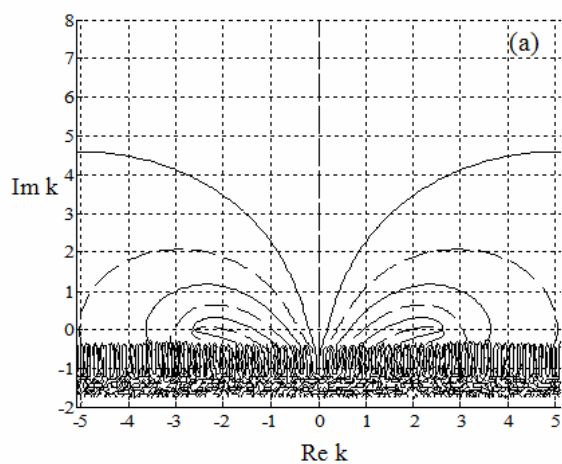


Рисунок 1 – Нули комплексной функции $d(k)$ для потенциала (5.1) с $n = 2$, $U_0 = 15$, при угле поворота $\theta = 0$ (а) и $\theta = 40^\circ$ (б)

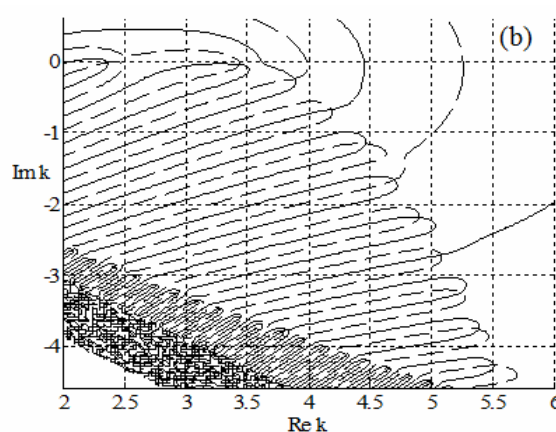
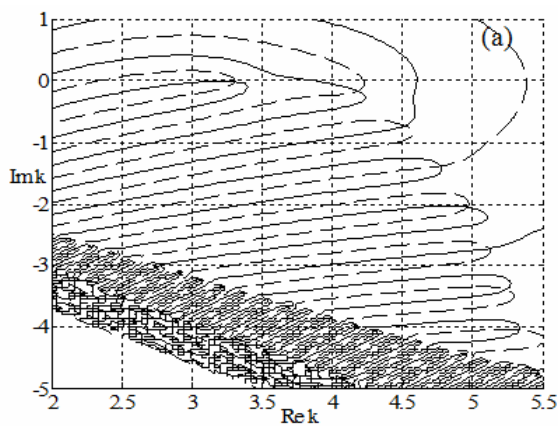


Рисунок 2 – Нули комплексной функции $d(k)$ для потенциала (5.1) с $n = 2$, $U_0 = 30$ (а) и для потенциала (5.1) с $n = 3$, $U_0 = 10$ (б) при угле поворота $\theta = 40^\circ$

Таблица 1 – Резонансные значения импульсов для потенциалов (5.1) с $n = 2$

$U_0 = 15$			$U_0 = 30$	
i	$\text{Re } k_R^i$	$\text{Im } k_R^i$	$\text{Re } k_R^i$	$\text{Im } k_R^i$
1	2.6178	-0.0049	–	–
2	3.1300	-0.3572	4.1794	-0.1282
3	3.3984	-0.9973	4.5138	-0.6780
4	3.5914	-1.6640	4.7759	-1.3200
5	3.7382	-2.3319	4.9831	-1.9843

Таблица 2 – Резонансные энергии для потенциала (5.1) с $n = 2$ при $U_0 = 15$

Значения, полученные решением ИУ			Значения, полученные решением ДУ [10]	
i	$\text{Re } E_R^i$	$\text{Im } E_R^i$	$\text{Re } E_R^i$	$\text{Im } E_R^i$
1	3.426331	-0.012799	3.426390	-0.012774
2	4.834802	-1.118042	4.834807	-1.117877
3	5.277188	-3.389266	5.277279	-3.389053
4	5.064705	-5.976247	5.064929	-5.976035
5	4.268483	-8.717054	4.268860	-8.716908

Таблица 3 – Резонансные энергии для потенциала (5.1) с $n = 2$ при $U_0 = 30$

Значения, полученные решением ИУ			Значения, полученные решением ДУ [10]	
i	$\text{Re } E_R^i$	$\text{Im } E_R^i$	$\text{Re } E_R^i$	$\text{Im } E_R^i$
2	8.725518	-0.535906	8.725515	-0.535391
3	9.957419	-3.060526	9.957493	-3.059822
4	10.53352	-6.304011	10.53385	-6.303170
5	10.44686	-9.887968	10.44754	-9.887087

Таблица 4 – Вычеты S -матрицы для потенциала (5.1) с $n = 2$ при $U_0 = 15$

Вычеты, полученные решением ИУ			Вычеты, полученные решением ДУ [10]	
i	$\text{Re}(\text{Res}[S_0(k_R^i)])$	$\text{Im}(\text{Res}[S_0(k_R^i)])$	$\text{Re}(\text{Res}[S_0(k_R^i)])$	$\text{Im}(\text{Res}[S_0(k_R^i)])$
1	-9.5672×10^{-3}	-2.0785×10^{-3}	-9.5607×10^{-3}	-2.0766×10^{-3}
2	-0.1942	0.9604	-0.1955	0.9599
3	-1.7274	-3.0526	-1.7214	-3.0546
4	5.2916	-2.2308	5.2939	-2.2223
5	4.3640	4.8709	4.3609	4.8914

Таблица 5 – Вычеты S -матрицы для потенциала (5.1) с $n = 2$ при $U_0 = 30$

Вычеты, полученные решением ИУ			Вычеты, полученные решением ДУ [10]	
i	$\text{Re}(\text{Res}[S_0(k_R^i)])$	$\text{Im}(\text{Res}[S_0(k_R^i)])$	$\text{Re}(\text{Res}[S_0(k_R^i)])$	$\text{Im}(\text{Res}[S_0(k_R^i)])$
2	0.2816	0.2061	0.2802	0.2069
3	-1.9056	-3.3315	-1.8856	-3.3304
4	12.2846	3.9852	12.2275	4.0287
5	-13.4382	20.1015	-13.4979	19.9692

На рисунках 3 – 6 приводятся сечения рассеяния σ_0 , редуцированные сечения $\tilde{\sigma}_0$, парциальные S -матрицы S_0 и вклады резонансов в S -матрицу для потенциала (5.1) с различными параметрами U_0 и n . Известно четыре основных типа поведения сечения рассеяния вблизи резонанса [1]. На представленных рисунках мы наблюдаем поведение сечений близкое к каждому из этих типов.

Для потенциала с параметрами $n = 2$ и $U_0 = 15$ вблизи первого резонанса в зависимости

$\sigma_0(E)$ имеем двойную структуру вида «яма-пик» (рисунок 3а), второму резонансу для потенциала с $n = 2$ и $U_0 = 30$ соответствует «яма» (рисунок 4а). При $n = 3$ и $U_0 = 5$ сечение рассеяния вблизи резонанса с импульсом $k_R = 2.6773 - 0.0699i$ имеет «пик» (рисунок 5а). Для потенциала с параметрами $n = 3$ и $U_0 = 10$ поведение сечения вблизи резонанса с импульсом $k_R = 3.4389 - 0.00175i$ соответствует двойной структуре «пик-яма» (рисунок 6а).

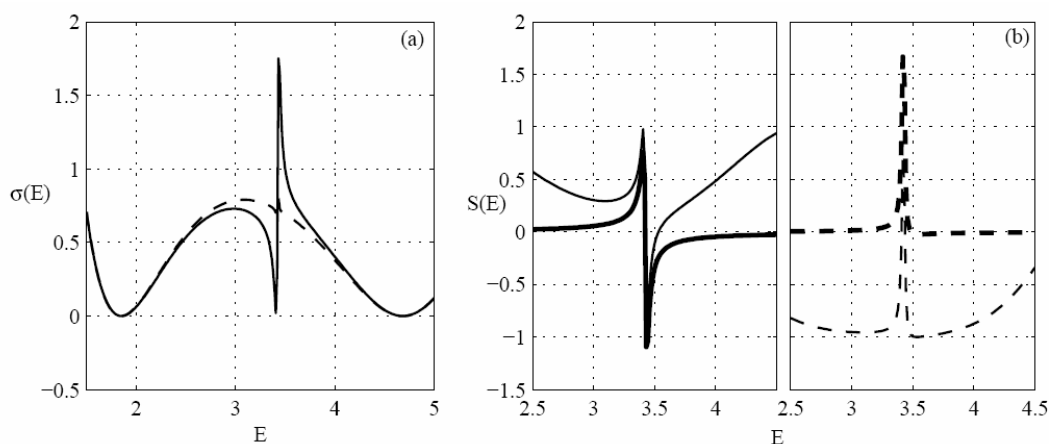


Рисунок 3 – (а) Парциальное сечение рассеяния – сплошная линия, редуцированное сечение рассеяния – штриховая линия, (б) действительная часть S -матрицы – сплошная линия, мнимая часть S -матрицы – штриховая линия, жирные сплошная и штриховая линии – действительная и мнимая часть вклада резонанса в S -матрицу, для потенциала (5.1) с $n = 2$ при $U_0 = 15$

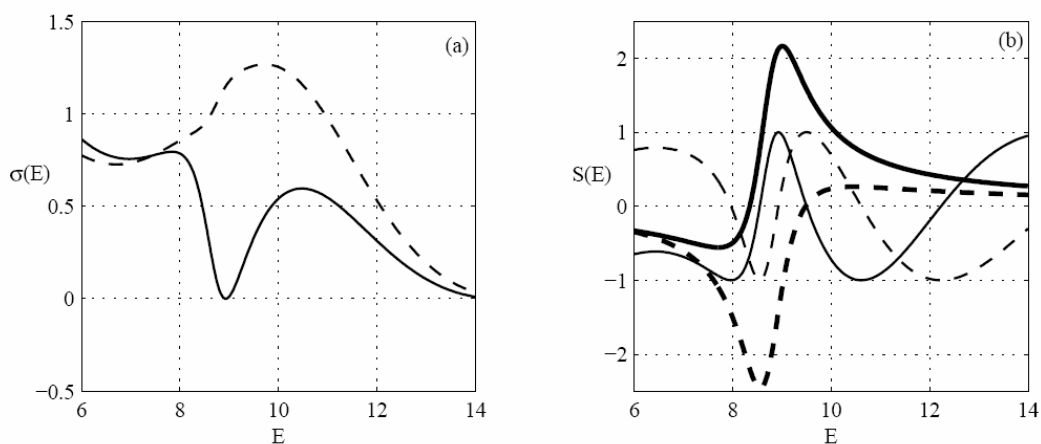


Рисунок 4 – (а) Парциальное сечение рассеяния – сплошная линия, редуцированное сечение рассеяния – штриховая линия, (б) действительная часть S -матрицы – сплошная линия, мнимая часть S -матрицы – штриховая линия, жирные сплошная и штриховая линии – действительная и мнимая часть вклада резонанса в S -матрицу, для потенциала (5.1) с $n = 2$ при $U_0 = 30$

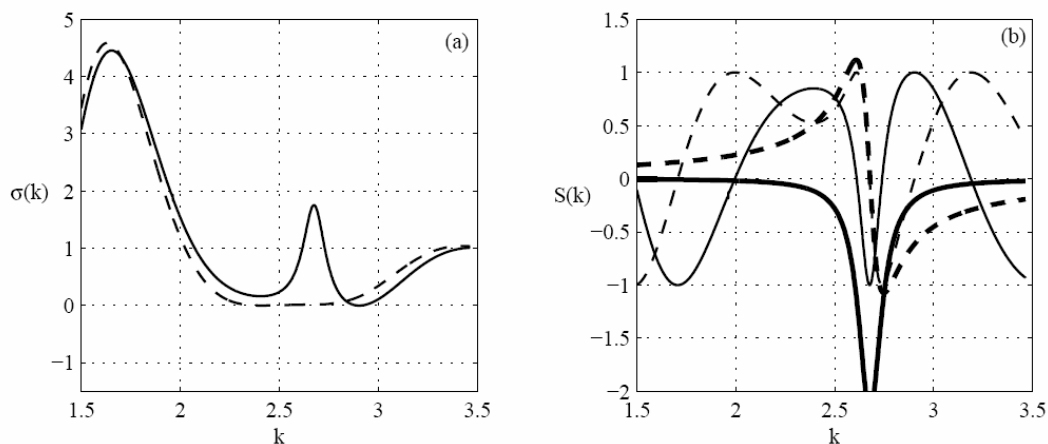


Рисунок 5 – (а) Парциальное сечение рассеяния – сплошная линия, редуцированное сечение рассеяния – штриховая линия, (б) действительная часть S -матрицы – сплошная линия, мнимая часть S -матрицы – штриховая линия, жирные сплошная и штриховая линии – действительная и мнимая часть вклада резонанса в S -матрицу для потенциала (5.1) с $n = 3$ при $U_0 = 5$

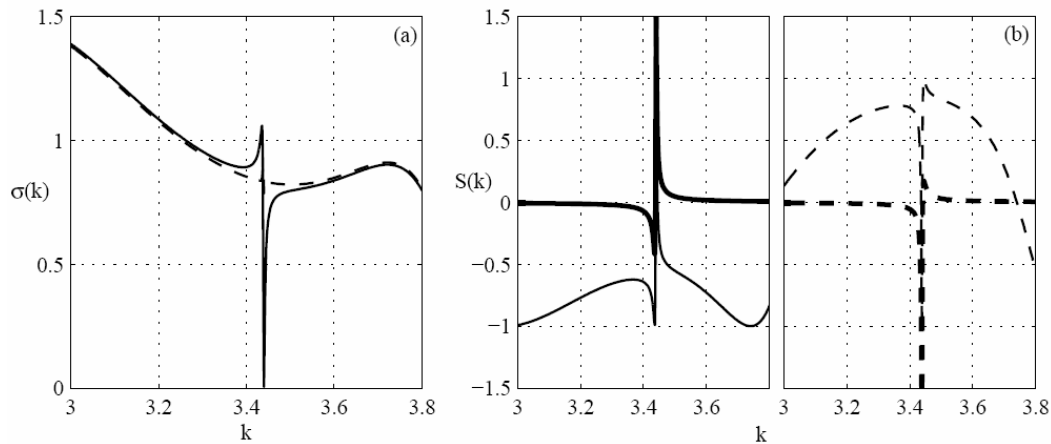


Рисунок 6 – (а) Парциальное сечение рассеяния – сплошная линия, редуцированное сечение рассеяния – штриховая линия, (б) действительная часть S -матрицы – сплошная линия, мнимая часть S -матрицы – штриховая линия, жирные сплошная и штриховая линии – действительная и мнимая часть вклада резонанса в S -матрицу для потенциала (5.1) с $n = 3$ при $U_0 = 10$

Рассмотрим теперь поведение S -матриц. Отметим, что резонансное поведение парциальной S -матрицы как функции вещественного импульса (энергии), обусловлено наличием комплексного резонансного значения k_R . Так же, как и в работе [10], для редуцированных сечений рассеяния во всех рассмотренных случаях наблюдаем исчезновение структур, соответствующих резонансам. Отметим также, что область влияния резонанса на S -матрицу, а следовательно и на сечение рассеяния, зависит от ширины резонанса Γ . Чем ближе к действительной оси расположен резонанс (т.е. чем меньше Γ), тем в меньшем диапазоне энергий (импульсов) сосредоточен его вклад в S -матрицу и сечение рассеяния (рисунки 3, 6). Влияние более удаленных от вещественной оси резонансов проявляется в большей области вблизи резонансного значения энергии (импульса) (рисунки 4, 5). Эти выводы соответствуют выводам, сделанным в работах [10]–[12].

Заключение

В работе представлен метод определения резонансов, основанный на решении интегрального уравнения Фредгольма, и проанализировано их влияние на сечение рассеяния. С применением этого метода вычислены значения резонансных импульсов и вычеты S -матрицы для некоторых потенциалов. Кроме того, определены вклады первых резонансов в сечение рассеяния. Положительные результаты, полученные для нерелятивистских систем, являются основанием для релятивистского обобщения метода, которое будет рассмотрено отдельно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor, R.J. Scattering theory / R.J. Taylor. – John Wiley & Sons : New York, London, Sydney, Toronto, 1972. – 570 p.

2. Ньютон, П. Теория рассеяния волн и частиц / П. Ньютон. – М. : Мир, 1969. – 607 с.

3. Gamow, G. Zur Quantentheorie des Atomkernes / G. Gamow // Z. Phys. – 1928. – Vol. 51. – S. 201–212.

4. Siegert, A.J.F. On the derivation of the dispersion formula for nuclear reactions / A.J.F. Siegert // Phys. Rev. – 1939. – Vol. 56. – P. 750–752.

5. Kukulín, V.I. Theory of resonances: principles and applications // V.I. Kukulín, V.N. Krasnopolsky, J. Horacek. – Prague: Academia, 1989. – 360 p.

6. Resonances. The Unifying Route Towards the Formulation of Dynamical Processes. Foundations and Applications in Nuclear, Atomic and Molecular Physics; Lecture Notes in Physics / Eds. E. Brandas, N. Elander. – Springer Verlag : New York, 1989. – Vol. 325. – 564 p.

7. Sofianos, S.A. Exact method for locating potential resonances and Regge trajectories / S.A. Sofianos, S.A. Rakityansky // Journal of Physics A. – 1997. – Vol. 30. – P. 3725–3737.

8. Rakityansky, S.A. Jost function for coupled partial waves / S.A. Rakityansky, S.A. Sofianos // Journal of Physics A. – 1998. – Vol. 31. – P. 5149–5175.

9. Tolstikhin, O.I. Siegert pseudostate formulation of scattering theory: One-channel case / O.I. Tolstikhin, V.N. Ostrovsky, H. Nakamura // Phys. Rev. A. – 1998. – Vol. 58. – P. 2077–2096.

10. Shilyaeva, K. Role of Resonances in Building Cross Sections: Comparison Between the Mittag-Leffler and the T-matrix Green Function Expansion Approaches / K. Shilyaeva, N. Elander, E. Yarevsky // Int J Quantum Chem. – 2007. – Vol. 107. – P. 1301 – 1305.

11. Shilyaeva, K. The role of resonances in building cross sections: The Mittag-Leffler expansion in a two-channel scattering / K. Shilyaeva,

N. Elander, E. Yarevsky // *Int J Quantum Chem.* – 2009. – Vol. 109. – P. 414–424.

12. *Shilyaeva, K.* Identifying resonance structures in a scattering cross section using the $N^{3+} + H \rightarrow NH^{3+} \rightarrow N^{2+} + H^+$ reaction as an example / K. Shilyaeva, E. Yarevsky, N. Elander // *Journal of Physics B.* – 2009 – Vol. 42 – P. 044011.

13. *Kapshai, V.* Integral equations and complex resonance energies for analytical potentials / V. Kapshai, T. Alferova, N. Elander // *Int J Quantum Chem.* – 2007. – Vol. 107. – P. 1029–1039.

14. *Kapshai, V.* Integral equations for the Jost solutions and decaying resonance states / V. Kapshai, K. Shilyaeva, N. Elander // *Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины* – 2006. – № 6 (39). – С. 3–8.

15. *Logunov, A.A.* Quasi-optical approach in quantum field theory / A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze // *Nuovo Cimento.* – 1963. – Vol. 29. – P. 380–399.

16. *Кадышевский, В.Г.* Трёхмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел / В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков // *ЭЧАЯ.* – 1972. – Т. 2. – С. 635–690.

17. *Kapshai, V.* Integral equations for different wave functions and their use for resonance finding / V. Kapshai, K. Shilyaeva, N. Elander // *Journal of Physics B.* – 2009. – Vol. 42 – P. 044001.

18. *Nuttal, J.* Method of Complex Coordinates for Three-Body Calculations above the Breakup Threshold / J. Nuttal, H.L. Cohen // *Phys Rev.* – 1969. – Vol. 188. – P. 1542–1544.

19. *Balslev, E.* Spectral properties of many body Schrödinger operators with dilation-analytic interactions / E. Balslev, J.M. Combes // *Commun. Math. Phys.* – 1971. – Vol. 22. – P. 280–294.

20. *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing* / W.H. Press [et al.] – 2nd ed. – Cambridge University Press, 2001. – 920 p.

21. *Abrashkevich, A.* CANM, a program for numerical solution of a system of nonlinear equations using the continuous analog of Newton's method / A. Abrashkevich, I.V. Puzynin // *Comput. Phys. Commun.* – 2004. – Vol. 156. – P. 154–170.

22. *LAPACK Users Guide* / E. Anderson [et al.] – 3d ed. – SIAM: Philadelphia, PA, 1999. – 407 p.

Поступила в редакцию 22.11.10.

УДК 539.12

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В СЕЧЕНИЯХ ИНКЛЮЗИВНОГО РОЖДЕНИЯ СТРУИ В ЭКСПЕРИМЕНТАХ ЛНС ПРИ ЭНЕРГИИ 14 ТЭВ

С.В. Шматов¹, С.Г. Шульга²¹Лаборатория физики высоких энергий им. В.И. Векслера и А.М. Балдина ОИЯИ, Дубна, Россия²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

THEORETICAL UNCERTAINTIES OF THE INCLUSIVE JET CROSS SECTIONS AT THE LHC EXPERIMENTS AT 14 TEV

S.V. Shmatov¹, S.G. Shulga²¹Veksler and Balzin Laboratory of High Energy Physics, JINR, Dubna, Russia²F. Scorina Gomel State University, Gomel

В работе исследованы теоретические ошибки расчета сечения инклюзивного рождения струи для экспериментов ЛНС с применением NLO-генератора партон-партонных взаимодействий JETRAD (2002) и наборов партонных структурных функций CTEQ65 и CTEQ6A из библиотеки LHApdf-5.3.1. Для энергии пучков $\sqrt{s} = 1.96$ ТэВ результаты совпадают с оригинальным анализом, выполненным в коллаборации CDF. Для энергии пучков ЛНС $\sqrt{s} = 14$ ТэВ основные теоретические ошибки связаны с зависимостью от шкалы факторизации и ренормировки КХД (15%), с неточным знанием PDF (10%) и с неопределенностью в кластеризации партонной струи (3%).

Ключевые слова: инклюзивное рождение струи, квантовая хромодинамика, партонные функции распределения, большой адронный коллайдер.

We have studied the theoretical uncertainties in the calculation of the inclusive jet cross section for the LHC experiments using the parton-parton NLO-generator JETRAD (2002) and the library of parton distribution functions LHApdf-5.3.1 for CTEQ65 and CTEQ6A. For beam energy $\sqrt{s} = 1.96$ TeV the results are consistent with the original analysis, performed in CDF collaboration. For LHC beam energy $\sqrt{s} = 14$ TeV the main theoretical uncertainties are associated with the dependence of the QCD factorization and renormalization scales (15%), with uncertainty of PDF (10%) and parton jet clustering uncertainty (3%).

Keywords: inclusive jet cross section, quantum chromo-dynamics, parton distribution functions, large hadron collider.

Введение

Измерение сечения инклюзивного рождения струи (ИРС) на адронных коллайдерах представляет собой важнейший тест для пертурбативной квантовой хромодинамики (КХД). Сравнение экспериментальных данных с предсказаниями теории позволяет получить информацию о партонных структурных функциях (PDF) и о поведении бегущей константы сильного взаимодействия в широкой области поперечных импульсов, от нескольких ГэВ до почти половины суммарной энергии пучков. Более точное знание константы связи КХД необходимо для проведения поисков «новой» физики за пределами стандартной модели, что возможно при условии надежного определения экспериментальных и теоретических ошибок. Измерения сечения ИРС в эксперименте CDF в Фермилабе при энергии $\sqrt{s} = 1.96$ ТэВ выполнены в диапазоне переданных 4-импульсов струи $Q \approx 40 \div 600$ ГэВ [1]. Большой адронный коллайдер (ЛНС) увеличивает этот интервал до 3 и более ТэВ.

Определение экспериментальных ошибок опирается на феноменологические модели, реализованные в генераторах событий. Параметры

этих моделей настраиваются на основе многих экспериментов, что позволяет говорить о свойстве универсальности моделей.

Основной источник экспериментальных ошибок связан с неопределенностью абсолютной шкалы энергии струи в калориметре. Шкала энергии струи определялась в CDF с точностью не более 3% на всем интервале энергий. А соответствующая неопределенность сечения ИРС варьируется от 10% при малых поперечных импульсах струи p_T до +58% –39% при больших p_T [2]. Моделирование на уровне генератора событий для ЛНС показывает, что при определении абсолютной шкалы энергии струи с точностью 1% (10%) сечение ИРС имеет ошибку в интервале 4–7% (40–120%) для импульсов струи 200–1500 ГэВ [3].

В работе [4] приведены данные полного моделирования (с учетом отклика детектора), из которых следует, что при энергии струи 1 ТэВ систематическая ошибка сечения ИРС составит 20% при ошибке определения шкалы энергии струи 3%. Следует отметить, что даже ошибка 5% для шкалы энергии струи в начале работы ЛНС не будет достигнута.

Настоящая работа посвящена исследованию теоретических ошибок в расчете сечения ИРС для LHC. В настоящее время вычисления по теории возмущений КХД для сечения ИРС выполнены только в следующем за главным порядке теории возмущений («Next to Leading Order» – NLO). Для нахождения теоретических ошибок используется программа JETRAD версии 2002 года [7], в комплексе с набором структурных функций STEQ65 и STEQ6A из библиотеки PDF LHApdf-v5.3.1 [8], [9]. Расчеты сделаны как при энергии LHC, так и при энергии Тэватрона для функционирующего эксперимента CDF. Сравнение с результатами CDF позволяет сделать привязку параметров JETRAD, чтобы затем получить теоретические ошибки для LHC. В работе [1] расчет теоретических неопределенностей выполнен с применением программы FastNLO [5], основанной на NLOJET++ [6], и в качестве PDF использовался набор STEQ65M.

1 Теоретические неопределенности сечения инклюзивного рождения струи

Прямой расчет в КХД выполняется для амплитуды жестких короткодействующих партон-партонных взаимодействий. Этому процессу предшествует процесс вырывания двух активных кварков из протонов, происходящий на больших по сравнению с жестким процессом расстояниях. Последний процесс – универсальный, характеризуемый структурными функциями распределения партонов в протонах. Сечение ИРС представляется сверткой PDF и вычисляемого в КХД сечения жесткого процесса:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\eta dp_T}(pp \rightarrow jet + X) = \sum_{ij} \int dx_1 dx_2 f_i(x_1, \mu_F) f_j(x_2, \mu_F) \hat{\sigma}_{ij}[x_1 P, x_2 P, \alpha_S(\mu_R)], \quad (1.1)$$

где $f_i(x_k, \mu_F)$ – функции PDF,
 x_k – доля импульса k -го партона,
 P – импульс протона в системе центра масс,
 μ_F – параметр шкалы факторизации КХД,
 $\hat{\sigma}_{ij}$ – сечение рассеяния партонов с номерами i и j , которое вычисляется в КХД в виде ряда по степеням бегущей константы связи $\alpha_S(\mu_R)$,
 μ_R – параметр шкалы ренормировки.

PDF $f_i(x_k, \mu_F)$ зависят от параметра шкалы факторизации μ_F , который выбирается фиксированным. Этот параметр задает шкалу энергии, которая отделяет (факторизует) физику на больших расстояниях (коллинеарные или мягкие партоны) и которая не может быть количественно представлена в КХД, но является универсальной («защита» в PDF). Подлежащие измерению вычисляемые величины КХД зависят от конкретного процесса, но по определению имеют важное

свойство «инфракрасной безопасности», то есть не зависят от физики на больших расстояниях.

Обычно набор функций PDF представляет собой программный пакет, в котором значения PDF представлены в сетке переменных (x, Q) с соответствующим кодом интерполяции заданных численных значений PDF в любую точку пространства переменных (x, Q) . В старой стандартной FORTRAN-библиотеке PDFLIB сетка значений (x, Q) и алгоритм интерполяции жестко связаны в коде, что не позволяет включить новые наборы PDF, которые содержат часто множество вариантов фитов (иногда 20–40), соответствующих различным вариациям параметров. Это явилось исходной точкой и причиной для создания в 2001 году общего стандарта (Les Houches Accord PDF, или кратко LHA PDF) [8], который унифицировал новые разработки в этом направлении. В результате была создана новая стандартная библиотека PDF – LHApdf [9].

Если учитывать все порядки теории возмущений КХД, то сечение (1.1) не зависит от μ_R и μ_F . Однако практически в настоящее время учитываются только лидирующий и, при необходимости, один (NLO) или два (NNLO – «Next to Next to Leading Order») следующих порядка разложения. Поэтому результат зависит от μ_R и μ_F . По зависимости результата вычисления от этих параметров можно судить о теоретической неопределенности, связанной с вкладами высших порядков КХД. При $\mu_F \approx m_q$ и $m_q \approx p_T$ сечение жесткого процесса зависит от больших логарифмов $\log(Q/\mu_F)$, которые разрушают условие применимости теории возмущений КХД. Поэтому обычно для расчета выбирают $\mu_F \approx c_F Q, \mu_R \approx c_R Q$, где $c_R = c_F \equiv c \approx 1$ или $c \approx 0.5$. Поскольку $\frac{\mu d\sigma}{d\mu} = \frac{\Delta\sigma}{\Delta c} \approx O(\alpha_S^{N+1})$, где N –

порядок разложения, то величину $\Delta\sigma$ часто берут как меру, характеризующую вклады от высших порядков КХД, полагая, например, $0.5 \leq c \leq 2$. Такой интервал будет использован и в настоящей работе.

Чтобы найти неопределенность наблюдаемой X , связанную с шкалой КХД, используем следующее правило. Пусть $X^{(i,j)}$ – значение наблюдаемой X , найденное для $c_R^{(i)}, c_F^{(j)}$. Полагаем $c_R^{(i)}, c_F^{(j)} = 0.5, 1, 2$ для значений индексов $i, j = 0, 1, 2$ соответственно. Тогда ошибку определяем по формуле:

$$\Delta X_{\{\pm\}} = \left\{ \frac{\max}{\min} \right\} (X^{(i,j)} - X^{(1,1)}). \quad (1.2)$$

В наших расчетах используется центральное значение $c_R^{(1)} = c_F^{(1)} = 1$ (рисунки 1 и 3) и

значение $c_R^{(0)} = c_F^{(0)} = 0.5$ (рисунки 2 и 4). Последнее использовалось в [1].

Вторая важная теоретическая неопределенность связана с неточным знанием PDF и $\alpha_s(\mu_R)$. В настоящей работе анализ ошибки, связанной с неопределенностью PDF, проводится для набора функций распределения STEQ65 из LHApdf-5.3.1. Данная библиотека PDF содержит как функции, соответствующие параметрам $a_k, k = \overline{1, d}, d = 20$, обеспечивающим оптимальную «подгонку» к данным (центральное значение фита STEQ65), так и $2d$ наборов PDF, соответствующих двум смещениям каждого из STEQ-параметра (с разными знаками $+\delta_k$ и $-\delta_k$) относительно центрального значения. Обозначим измеряемую величину X . Определение X с применением PDF, соответствующих лучшему фиту, обозначим как функцию от PDF-параметров $X_0(a_1, a_2, \dots, a_d)$. Для PDF-функций со смещенными параметрами используем обозначение $X_k(a_1, a_2, \dots, a_k \pm \delta_k, \dots, a_d)$, где δ_k – некоторое определенное в процессе подгонки PDF значение, характеризующее среднее отклонение PDF-параметра относительно оптимального значения a_k . Тогда ошибку, связанную с неопределенностью PDF, можно найти, например, так [4]:

$$\Delta X_+^{PDF} = \sqrt{\sum_{k=1}^d \max^2[(X_k^+ - X_0), (X_k^- - X_0), 0]},$$

$$\Delta X_-^{PDF} = \sqrt{\sum_{k=1}^d \max^2[(X_0 - X_k^+), (X_0 - X_k^-), 0]}. \quad (1.3)$$

Функции STEQ6AB содержат 10 PDF-наборов с различными бегущими константами сильного взаимодействия, определенными на шкале массы Z-бозона,

$$\alpha_s^{(PDF, k)}(M_Z) = 0.110, 0.112, \dots, 0.128, k = \overline{1, 10}.$$

Используя эти наборы, можно оценить неопределенность наблюдаемой X , связанную с неточным знанием величины $\alpha_s^{(PDF)}(M_Z)$, которая используется в PDF:

$$\Delta X_{\pm}^{\alpha_s^{PDF}} = \left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\} (X^{\alpha_s^{PDF}} - X^{0.118}). \quad (1.4)$$

Полная ошибка, связанная с неопределенностью PDF, для наблюдаемой X будет иметь вид:

$$\Delta X_{\{\pm\}} = \sqrt{\Delta X_{\{\pm\}}^{PDF2} + \Delta X_{\{\pm\}}^{\alpha_s^{PDF2}}}.$$

Очевидно, что число партонов, порождающих адроны, включаемые в процессе реконструкции в состав струи, отличается от прямых вычислений числа партонов в NLO-генераторе. Более того, при расчете в КХД в первом за главным порядком имеем только два партона в струе, а в следующем порядке – три. Поэтому результаты работы алгоритмов нахождения струй на уровне партонов и на уровне частиц будут отличаться,

внося неопределенности в экспериментальное определение сечений ИРС.

В настоящей работе мы применяем конус для сбора партонов струи с параметром $R = \sqrt{\eta^2 + \varphi^2} < 0.7$ в (η, φ) – пространстве, где $\eta = -\ln tg(\theta/2)$, θ – полярный угол струи, φ – азимутальный угол между партонами струи. Алгоритм нахождения струй, встроенный в генератор партонного взаимодействия JETRAD, имеет параметр R_{sep} , смысл которого состоит в том, что в одну струю собираются партоны в конусе $R \times R_{sep}$. Лучшее согласие сечения и данных о форме струи адронов достигается при $R_{sep} = 1.3$ [1]. Это значение используется здесь по умолчанию и изучается отклонение до $R_{sep}^{max} = 2$. Чтобы определить ошибку, связанную с кластеризацией струи, используем правило:

$$\Delta X = \max |X^{(R_{sep})} - X^{(R_{sep}=1.3)}|. \quad (1.5)$$

Таким образом, далее исследуются отдельно и в комбинации теоретические ошибки определения сечения ИРС $X \equiv d\sigma^{NLO} / dp_T d\eta$, связанные с

- зависимостью сечения от шкалы ренормировки и факторизации КХД (1.2),
- неопределенностью PDF (1.3),
- неопределенностью константы сильного взаимодействия (1.4),
- кластеризацией партонов в струе (1.5).

2 Расчет теоретических ошибок в сечении инклюзивного рождения струи с помощью программ JETRAD-2002 и LHApdf-5.3.1

На всех рисунках далее по оси ординат отложена величина « $[NLO - \overline{Data}] / \overline{Data}$ » для CDF (левый рисунок) или « $[NLO - \overline{NLO}] / \overline{NLO}$ » для LHC (правый рисунок), где

$$NLO \equiv d\sigma^{NLO} / dp_T d\eta \text{ обозначает расчет с}$$

отклоненными параметрами,

$$\overline{NLO} \equiv d\sigma^{NLO} / dp_T d\eta \text{ – расчет с параметрами}$$

по умолчанию,

$$\overline{Data} \equiv d\sigma^{CDF} / dp_T d\eta \text{ – данные коллаборации CDF [1].}$$

Ошибки найдены по формулам (1.2) – (1.5).

Подавляющий вклад в теоретическую ошибку вычисления сечения ИРС вносит зависимость сечения от шкалы ренормировки и факторизации КХД (1.2) (рисунок 1). Эта ошибка не зависит от поперечного импульса p_T струи и от энергии пучков.

Для PDF-неопределенности в сечении ИРС (1.3) (рисунок 2) среднее значение относительной ошибки для энергии LHC примерно такое же, как для энергии CDF – 11–15%.

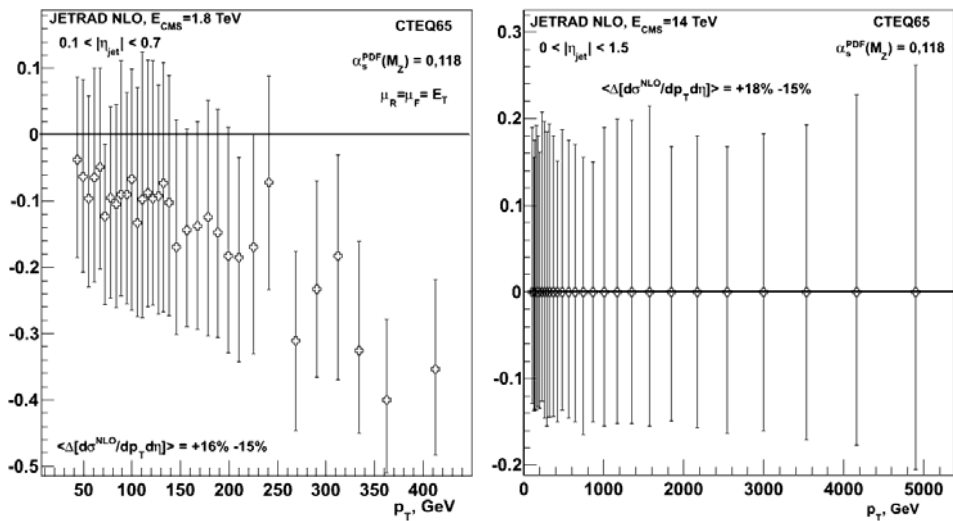


Рисунок 1 – Ошибка в измерении сечения ИРС (1.2), связанная с зависимостью сечения от шкалы ренормировки и факторизации КХД для Тэватрона (слева) и LHC (справа)

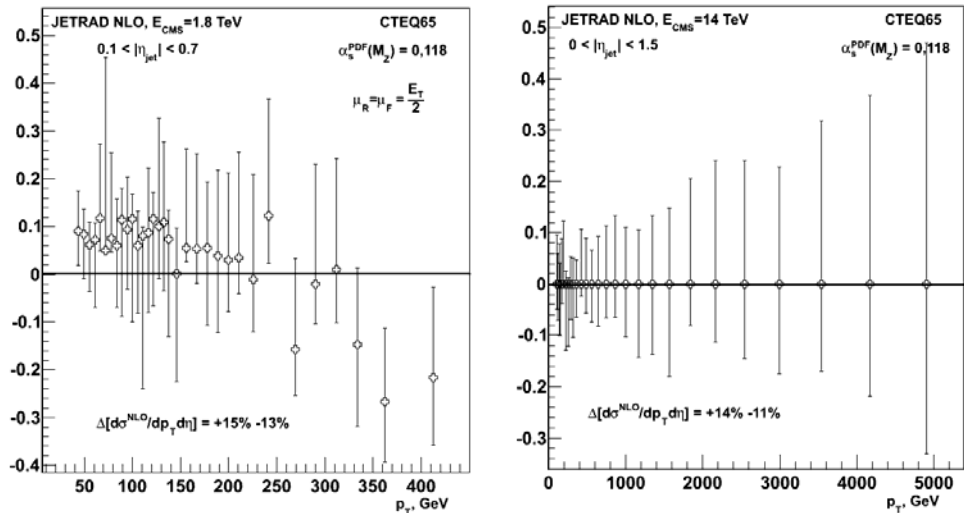


Рисунок 2 – Ошибка в измерении сечения ИРС (1.3), связанная с неопределенностью PDF для Тэватрона (слева) и LHC (справа)

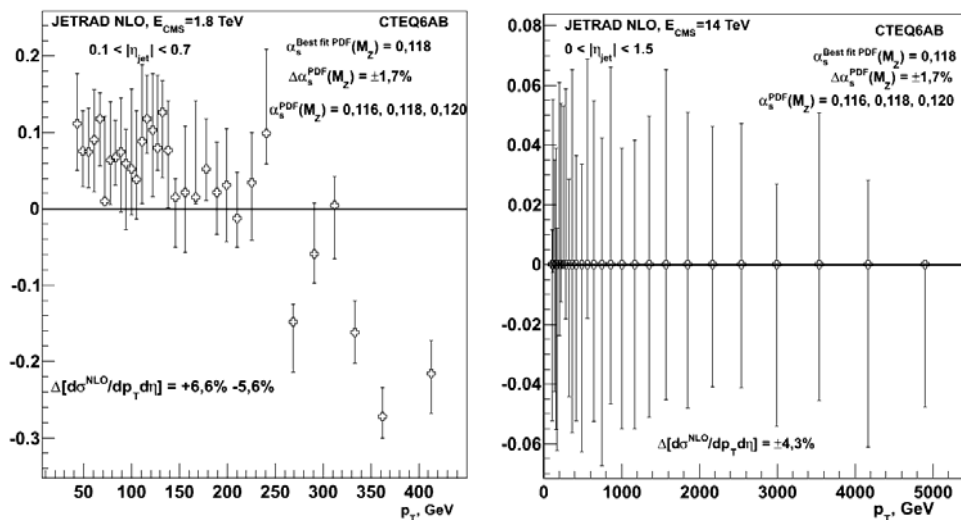


Рисунок 3 – Ошибка в измерении сечения ИРС (1.4), связанная с неопределенностью константы сильного взаимодействия для Тэватрона (слева) и LHC (справа)

В обоих случаях наблюдается одинаковый рост ошибки с ростом p_T и подобие картин при столь разных энергиях показывает, что ошибка растет с ростом p_T/E_{CMS} (E_{CMS} – энергия в системе центра масс пучков).

При интервале вариации α_S^{PDF} в пределах $\pm 1.7\%$ α_S^{PDF} - неопределенность сечения ИРС (1.4) на LHC составляет в среднем $\pm 4.3\%$ (рисунок 3), что в 1.5 раза меньше, чем в эксперименте

CDF. Отметим также падение α_S^{PDF} -неопределенности с ростом p_T . В таблице 1 представлена α_S^{PDF} -неопределенность сечения ИРС для различных интервалов α_S^{PDF} .

На рисунке 4 показана неопределенность сечения ИРС (1.5), связанная с кластеризацией партонов. Ошибка не зависит от p_T и для LHC она в 1.5 раза меньше, чем для энергии CDF.

Таблица 1 – Ошибка в измерении сечения ИРС (1.4), связанная с неопределенностью константы сильного взаимодействия

$\Delta X_{\pm}^{\alpha_S^{PDF}}$	$p_T = 50\text{--}400$ ГэВ (CDF)	$p_T = 100\text{--}5000$ ГэВ (LHC)	Набор PDF; набор α_S^{PDF}
+8.5 – 6.8%	+33 – 22%	+20 – 16%	CTEQ6A(0.9); 0.110, 0.112, ..., 0.128
$\pm 5.1\%$	+19 – 18%	$\pm 12\%$	CTEQ6A(0.9); 0.112, ..., 0.124
$\pm 3.4\%$	+13 – 12%	+8.6 – 8.4%	CTEQ6A(0.9); 0.114, ..., 0.122
$\pm 1.7\%$	+6.6 – 5.6%	$\pm 4.3\%$	CTEQ6A(0.9); 0.116, 0.118, 0.120

Таблица 2 – Теоретические ошибки в измерении сечения ИРС для струи с поперечным импульсом $p_T = 150$ ГэВ

Источник ошибки	CDF ([1]), %	LHC, %
Зависимость от шкалы КХД: $\mu_{F,R} = c \cdot E_T^{jet}, c = 0.5 \div 2$	$\pm 15(\pm 20)$	+13 – 19
Набор PDF CTEQ65: CTEQ65M	± 15	+9.6 – 4.9
Набор PDF CTEQ6A: $\alpha_S^{PDF}(M_Z) = 0.116 \div 0.120$	+8.5 – 7.7	+1.1 – 5.2
Кластеризация партонов в струе: $R_{sep} = 1.3 \div 2$	$\pm 4.5(\pm 4.8)$	± 1.9

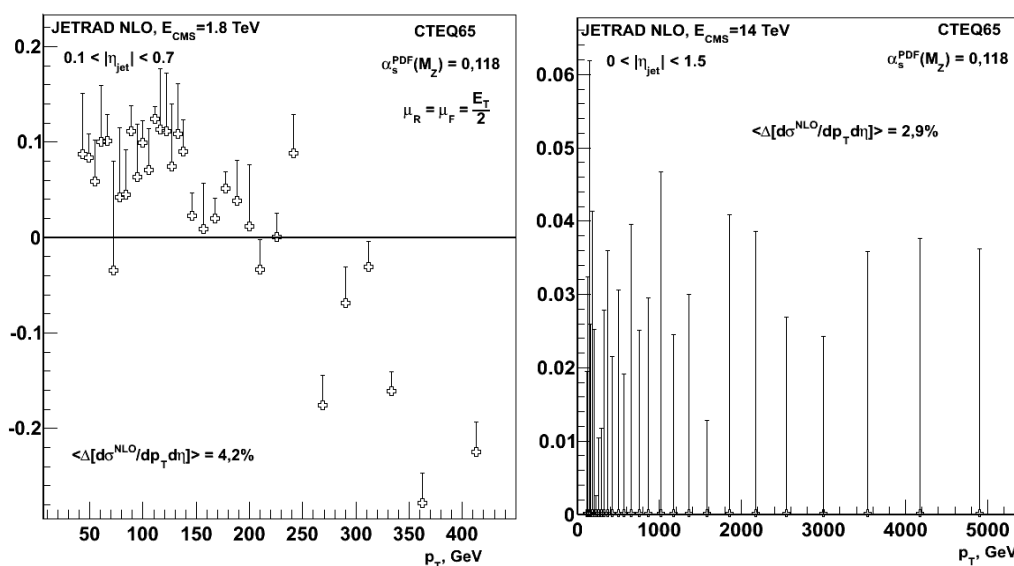


Рисунок 4 – Ошибка в измерении сечения ИРС (1.5), связанная с кластеризацией партонов в струе для Тэватрона (слева) и LHC (справа)

Заключение

В таблице 2 систематизированы теоретические ошибки вычисления сечения ИРС для $p_T = 150$ ГэВ. Во втором столбце в круглых скобках приведены также результаты, полученные в [1] для зависимости от шкалы КХД и неопределенности кластеризации струи. Результаты CDF и наш расчет примерно совпадают. Основная теоретическая ошибка определяется зависимостью от шкалы факторизации и ренормировки КХД. Напомним, что основная экспериментальная ошибка измерения сечения ИРС связана с определением абсолютной шкалы энергии струи, которая составит 20% при достаточно оптимистичном предположении об ошибке определения шкалы энергии 3%. Таким образом, для экспериментов LHC применение NLO-генератора для расчета жесткого взаимодействия партонов для ИРС допустимо только в начале работы установки. В дальнейшем потребуются выполнять расчет с помощью NNLO-генераторов.

Авторы выражают благодарность М.В. Савиной за внимательное изучение работы, ценные замечания и советы по ее содержанию.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Measurement of the Inclusive Jet Cross Section in $p\bar{p}$ -Collider Using a Cone-Based Jet Algorithm* / CDF Collaboration : T. Aaltonen [et al.] // Phys. Rev. D, 2008. – Vol. 78. – P. 052006-1 – 05006-23.
2. *Measurement of the Inclusive Jet Cross Section in $p\bar{p}$ -Collider Using a Cone-Based Jet Algorithm* / CDF Collaboration : T. Affolder [et al.] // Phys. Rev. D, 2006. – Vol. 64. – P. 032001-1 – 032001-38.
3. *Clements, D.* Prospects for Inclusive Jet Cross-Section Measurement with Early Data at ATLAS / D. Clements // Proceedings of the 15th International Workshop on Deep-Inelastic Scattering and Related Subjects (DIS 2007), April 16-20, 2007 Munich, Germany. – Progress in High Energy Physics, 2007. – Vol. 1. – P. 232–237.
4. *CMS technical design report, v. II: Physics performance* / CMS Collaboration : G.L. Bayatian [et al.] // CERN-LHCC-2006-021, CMS-TDR-008-2, 2007. 585 pp. – J. Phys. G, 2007. – Vol. 34. – P. 995–1579.
5. *Kluge, T.* FastNLO: Fast pQCD calculations for PDF fits / T. Kluge, K. Rabbertz, M. Wobisch // DESY-06-186, FERMLAB-CONF-06-352-E, Sep. 2006. 8 pp. Proceedings of the 14th International Workshop on Deep Inelastic Scattering (DIS 2006), Tsukuba, Japan, 20–24 Apr 2006: «Tsukuba-2006, Deep inelastic scattering», 2006. – P. 483–486.
6. *Nagy, Z.* Next-to-leading order calculation of three jet observables in hadron collision / Z. Nagy // Phys. Rev. D, 2003. – Vol. 68. – P. 094002-1 – 094002-15.
7. *Giele, W.T.* Higher order corrections to jet cross-sections in hadron colliders / W.T. Giele, E.W.N. Glover, D.A. Kosower // Nucl. Phys. B, 1993. – № 403. – P. 633–670.
8. *Giele, W.T.* The QCD/SM working group: Summary report / W.T. Giele // Presented at the Workshop «Physics at TeV Colliders», Les Houches, France, 21 May – 1 June 2001. e-Print: hep-ph/0204316v1, 29 Apr 2002. – P. 1–152.
9. *The Les Houches Accord PDFs (LHAPDF)* / RC Group : M.R. Whalley [et al.] // e-Print: hep-ph / 0508110v1, 9 Aug 2005. – P. 1–7.

Поступила в редакцию 25.10.10.

УДК 517.22

ПРОБЛЕМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПОНЯТИЯ ПРЕДЕЛА

А.В. Гаврилюк¹, А.А. Гаврилюк²

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

²Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

THE PROBLEM OF DEFINITION OF DERIVATIVE WITHOUT INVOKING THE CONCEPT OF LIMIT

A.V. Gavriliouk¹, A.A. Gavriliuk²

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel

²Belarusian State University of Transport, Gomel

Доказываются основные теоремы о дифференцируемых функциях с помощью определения производной, в котором не используется понятие предела.

Ключевые слова: производная, предел, определение, математический анализ, алгебра и начала анализа.

Main theorems about differential functions are proven with the use of the definition of the derivative which does not invoke the concept of limit.

Keywords: derivative, limit, definition, calculus, algebra and introduction to calculus.

Введение

Производная по Коши – Фреше определяется через понятие предела. В работах [1], [2], [3] исследуется возможность использования производной по Каратеодори для построения теории дифференциального исчисления. Производная по Каратеодори определяется через понятие непрерывности. В работе авторов [4] предлагается определение производной, в котором не используется ни понятие предела, ни понятие непрерывности. Целью настоящей статьи является построение соответствующей теории на основе предложенного определения. Для достижения указанной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Доказать равносильность предлагаемого определения и определения Коши – Фреше.
2. Привести примеры и контрпримеры, то есть доказать непосредственно по определению, что данная функция имеет (не имеет) производную в данной точке.
3. Доказать основные теоремы о дифференцируемых функциях с помощью нового определения.
4. Ввести физическую интерпретацию производной.
5. Доказать некоторые теоремы о применении производной для исследования функций.

1 Основные определения. Равносильность классическому определению

Определение производной как углового коэффициента касательной представляется очень

естественным. Конечно, при условии, что касательная будет определена достаточно строго (и независимо от производной). Здесь и далее прямой мы будем называть только такую прямую, которая не параллельна оси Oy .

Определение 1.1. Пусть A – некоторая точка прямой K . Рассмотрим две различные прямые, проходящие через эту точку и отличающиеся от K . Они образуют две пары вертикальных углов. Угловой окрестностью прямой K с вершиной A будем называть ту пару вертикальных углов, которая содержит K .

Определение 1.2. Пусть функция f определена на интервале $(\alpha; \beta)$. Дугой графика функции f , соответствующей интервалу $(\alpha; \beta)$, будем называть множество всех тех точек графика, у которых абсциссы принадлежат $(\alpha; \beta)$.

Определение 1.3. Прямая K , проходящая через точку A графика функции f , называется касательной к графику в этой точке, если в любой угловой окрестности прямой K с вершиной A содержится некоторая дуга графика f , проходящая через A .

В этом определении используются обычные представления о касательной как о прямой, которая «почти не отличается» от графика функции, если рассматривать маленький кусок (дугу) этого графика (под большим увеличением).

Близость прямых, проходящих через одну точку, определяется величиной угла,

образованного этими прямыми. Понятно, что близость прямой к графику функции (к кривой) определяется именно угловой окрестностью.

Определение 1.4. Функция f называется дифференцируемой в точке x_0 , если график этой функции имеет касательную в точке с абсциссой x_0 . Угловой коэффициент касательной называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Очевидно, что в определении 1.3 вместо произвольной угловой окрестности с вершиной A можно рассматривать только угловые окрестности, порождённые прямыми с угловыми коэффициентами $k-\varepsilon$ и $k+\varepsilon$, проходящие через A , где k – угловой коэффициент прямой K и ε – произвольное положительное число.

Предлагаемое определение, конечно, равносильно классическому. Действительно, пусть точка A имеет координаты $(x_0; f(x_0))$. Точка X графика функции f с координатами $(x; f(x))$ попадёт в угловую ε -окрестность с вершиной A прямой K , заданной уравнением $y = k(x - x_0) + f(x_0)$, тогда и только тогда, когда секущая AX попадёт в эту окрестность, то есть, когда угловой коэффициент прямой AX отличается от k меньше, чем на ε :

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - k \right| < \varepsilon.$$

Выполнение этого условия для всех точек X , принадлежащих $(\alpha; \beta)$ -дуге, проходящей через $A(x_0; f(x_0))$, равносильно его выполнению для всех x из окрестности $(\alpha; \beta)$ точки x_0 .

Понятно, что предельный переход никуда не исчез. Изменяется лишь форма, в которой часть трудностей прячется в достаточно простой объект – дугу графика. Вместо того, чтобы представлять себе все x из окрестности $(\alpha; \beta)$ точки x_0 и проверку для каждого из них известных неравенств, предлагается представлять два «крупных» объекта – угловую окрестность и дугу графика.

2 Примеры и контрпримеры

Подчёркнём, что первостепенное значение имеет геометрическая наглядность, возможность изобразить, построить графики функций, угловые окрестности, дуги графиков, касательные. Однако, эти изображения столь же просты, как и необходимы, и мы их не приводим ради экономии места.

Пример 2.1. Пусть $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$. Докажем, что $f'(x_0) = 2x_0$, иначе говоря, докажем, что прямая K , имеющая угловой коэффициент 2 и проходящая через точку $(1; f(1)) = (1; 1)$, является касательной к графику функции f в точке $(1; 1)$.

Построим график функции $f(x) = x^2$. Рассмотрим произвольное положительное ε . Построим прямые, проходящие через точку $(1; 1)$ и имеющие угловые коэффициенты $2-\varepsilon$ и $2+\varepsilon$. Легко найти точки пересечения сторон полученной угловой окрестности с параболой – точки с абсциссами $1-\varepsilon$ и $1+\varepsilon$. Мы видим дугу графика функции f , соответствующую интервалу $(1-\varepsilon; 1+\varepsilon)$ и содержащуюся в построенной угловой окрестности.

Доказательства соответствующих неравенств не представляют никаких затруднений. Пусть, например, $1 < x < 1+\varepsilon$. Тогда $x+1 < 2+\varepsilon$ и $x^2 - 1 < (2+\varepsilon)(x-1)$. Следовательно, $x^2 < (2+\varepsilon)(x-1) + 1$ то есть на этом интервале график функции лежит ниже прямой с угловым коэффициентом $2+\varepsilon$.

Доказательство формулы $f'(x_0) = 2x_0$ для произвольного x_0 проводится совершенно аналогично.

Пример 2.2. Пусть $f(x) = (x - x_0)^2$. Докажем, что $f'(x_0) = 0$.

Так как график функции f получается из параболы $y = x^2$ сдвигом вдоль оси Ox , то график функции f имеет в $(x_0; 0)$ ту же касательную, что и парабола $y = x^2$ в $(0; 0)$, то есть $f'(x_0) = 0$.

Контрпример 2.3. Докажем, что функция $f(x) = |x|$ не имеет производной в нуле (иначе говоря, график функции не имеет касательной в $(0; 0)$).

Предположим противное. Пусть прямая K , заданная формулой $y = kx$, является касательной к графику функции f в точке $(0; 0)$. Предположим сначала, что $-1 < k < 1$. Выберем k_1 и k_2 так, чтобы $-1 < k_1 < k < k_2 < 1$. Тогда угловая окрестность прямой K , образованная прямыми $y = k_1x$ и $y = k_2x$, вообще не содержит точек графика f .

Предположим теперь, что $k = 1$. Рассмотрим угловую окрестность прямой $y = x$, образованную прямыми $y = 0$ и $y = 2x$. Эта угловая окрестность не содержит никакой дуги графика f , проходящей через $(0; 0)$ (подчёркнём, что дуга графика, проходящая через $(0; 0)$, должна соответствовать интервалу $(\alpha; \beta)$, содержащему точку 0). Случаи $k < -1$, $k = -1$ и $k > 1$ рассматриваются аналогично.

3 Основные теоремы. Правила вычисления производной

Здесь наше изложение напоминает традиционную схему: леммы о бесконечно малых –

теоремы о пределах функций – правила вычисления производных, но присутствуют только первый и третий этапы. Некоторые записи несколько длиннее, чем при традиционном подходе (из-за необходимости записывать уравнения касательных), однако, почти всегда есть возможность всё «увидеть» с помощью простого чертежа.

Определение 3.1. Функция $h(x)$ называется пренебрежимо малой вблизи точки x_0 , если и функция, и её производная равны нулю в точке x_0 , иначе говоря, если график этой функции проходит через точку $A(x_0; 0)$ и в любой угловой окрестности прямой $y=0$ с вершиной A содержится некоторая дуга графика h .

Отметим, что использование термина «бесконечно малая более высокого порядка, чем ...» нам кажется нецелесообразным, ввиду отсутствия понятия «бесконечно малая».

Лемма 3.1 о пренебрежимо малых. Сумма пренебрежимо малых пренебрежимо мала.

Доказательство. Пусть $h_1(x)$ и $h_2(x)$ пренебрежимо малы вблизи точки x_0 . Рассмотрим произвольную угловую ε -окрестность прямой $y=0$ в точке $(x_0; 0)$. Так как $h_1(x)$ и $h_2(x)$ пренебрежимо малы вблизи точки x_0 , то в угловой $\frac{\varepsilon}{2}$ -окрестности прямой $y=0$ в точке $(x_0; 0)$ найдётся и дуга графика h_1 и дуга графика h_2 . Тогда на общей части интервалов, соответствующих этим дугам,

$$-\frac{\varepsilon}{2}(x-x_0) < h_1(x) < \frac{\varepsilon}{2}(x-x_0)$$

и
$$-\frac{\varepsilon}{2}(x-x_0) < h_2(x) < \frac{\varepsilon}{2}(x-x_0).$$

Из этого следует, что

$$-\varepsilon(x-x_0) < h_1(x) + h_2(x) < \varepsilon(x-x_0).$$

Лемма 3.2 о пренебрежимо малых. Произведение пренебрежимо малой на ограниченную пренебрежимо мало.

Доказательство. Пусть $|g(x)| \leq M$ на интервале $(\alpha_1; \beta_1)$, содержащем x_0 , а функция $h(x)$ пренебрежимо мала вблизи точки x_0 . Рассмотрим произвольное положительное число ε и угловую $\frac{\varepsilon}{M}$ -окрестность прямой $y=0$ в точке $(x_0; 0)$. В этой угловой окрестности найдётся дуга графика h , соответствующая некоторому интервалу $(\alpha_2; \beta_2)$. Тогда на пересечении интервалов $(\alpha_1; \beta_1)$ и $(\alpha_2; \beta_2)$ имеем:

$$|h(x)g(x)| \leq M |h(x)| \leq \varepsilon |x-x_0|.$$

Мы нашли дугу графика hg , содержащуюся в угловой ε -окрестности прямой $y=0$ с вершиной $(x_0; 0)$.

Лемма 3.3 о пренебрежимо малых. Прямая K , проходящая через точку $A(x_0; f(x_0))$ графика функции f , является касательной к графику f в этой точке тогда и только тогда, когда разность $f(x)-K(x)$ соответствующих функций является пренебрежимо малой вблизи x_0 .

Доказательство. Заметим, что для любого положительного ε утверждение «дуга $(\alpha; \beta)$ графика функции $f(x)-K(x)$ содержится в угловой ε -окрестности с вершиной $(x_0; 0)$ прямой $y=0$ » равносильно утверждению «дуга $(\alpha; \beta)$ графика функции $f(x)$ содержится в угловой ε -окрестности с вершиной $A(x_0; f(x_0))$ прямой K ». Действительно, первое из этих утверждений означает выполнение неравенства $-\varepsilon(x-x_0) < f(x)-K(x) < \varepsilon(x-x_0)$ на некотором интервале $(\alpha; \beta)$, содержащем точку x_0 , а второе – выполнение на этом же интервале неравенства

$$(k-\varepsilon)(x-x_0) + f(x_0) < f(x) < (k+\varepsilon)(x-x_0) + f(x_0).$$

Осталось учесть, что прямая K с угловым коэффициентом k , проходящая через точку $A(x_0; f(x_0))$, имеет уравнение $K(x) = k(x-x_0) + f(x_0)$ и подставить $K(x)$ в первое неравенство.

Следствие 3.1. Если две функции отличаются пренебрежимо мало вблизи x_0 и одна из них имеет производную в точке x_0 , то вторая также имеет производную и причём такую же.

Действительно, по леммам 3.1 и 3.3 касательная к графику одной из этих функций в точке x_0 является касательной и к графику другой.

Теорема 3.1. Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 , то она ограничена на некотором интервале, содержащем эту точку.

Доказательство. Рассмотрим какую-нибудь угловую окрестность касательной к графику функции f в точке $A(x_0; f(x_0))$. Пусть дуга $(\alpha; \beta)$ графика f содержится в этой окрестности. Так как линейные функции, графики которых образуют стороны угловой окрестности, ограничены на $(\alpha; \beta)$, то и f (график которой лежит между этими сторонами) ограничена на $(\alpha; \beta)$.

Замечание. Линейной мы называем функцию вида $y = kx + b$.

Следствие 3.2. Произведение пренебрежимо малой вблизи x_0 на дифференцируемую в x_0 является пренебрежимо малой вблизи x_0 .

Из этого следствия следует, что произведение пренебрежимо малой на линейную и произведение двух пренебрежимо малых является пренебрежимо малой.

Лемма 3.4. Из дифференцируемости функции v в точке x_0 и $v(x_0) \neq 0$ следует, что $\frac{1}{v}$ ограничена на некотором интервале, содержащем x_0 .

Доказательство. Обозначим $y_0 = v(x_0)$. Пусть, например, $y_0 > 0$. Прежде всего, отметим очевидный (надо сделать чертёж) факт, что если прямая проходит через точку $A(x_0; y_0)$ и $y_0 > 0$, то на некотором интервале, содержащем точку x_0 , ординаты точек этой прямой будут больше, чем $\frac{y_0}{2}$. Дифференцируемость функции v в точке x_0 означает, что у неё есть касательная в соответствующей точке A графика. Рассмотрим какую-нибудь угловую окрестность касательной в точке A . Тогда на некотором интервале $(\alpha; \beta)$, содержащем x_0 , график функции v содержится в этой угловой окрестности и, следовательно, лежит между прямыми – сторонами этой угловой окрестности, а стороны (прямые!) лежат выше прямой $y = \frac{y_0}{2}$. Из этого получаем, что в интервале $(\alpha; \beta)$ выполняется неравенство $v(x) > \frac{y_0}{2} > 0$ и, следовательно, неравенство $0 < \frac{1}{v(x)} < \frac{2}{y_0}$.

Далее мы допускаем вольность речи, называя словом «касательная» и прямую – касательную и функцию, графиком которой является эта прямая. Кроме того, для краткости записей мы будем иногда опускать обозначение аргумента функции.

Теорема 3.2. Если функции u и v дифференцируемы в точке x_0 , то их сумма, разность, произведение и частное вблизи точки x_0 отличаются пренебрежимо мало от, соответственно, суммы, разности, произведения и частного их касательных. (В случае частного $\frac{u}{v}$ надо дополнительно предполагать, что $v(x_0) \neq 0$).

Доказательство. Обозначим через K_u и K_v касательные к графикам функций $u(x)$ и $v(x)$ в точках с абсциссой x_0 . Обозначим через $h_u(x)$ и $h_v(x)$ разности функций и их касательных. Тогда $u(x) = K_u(x) + h_u(x)$ и $v(x) = K_v(x) + h_v(x)$. Имеем:

$$(u+v) - (K_u + K_v) = h_u + h_v$$

(является пренебрежимо малой по лемме 3.1),

$$(uv) - (K_u K_v) = (K_u + h_u)(K_v + h_v) - (K_u K_v) = h_u K_v + h_v K_u + h_u h_v$$

(является пренебрежимо малой по следствию 3.2 и лемме 3.1),

$$\frac{u}{v} - \frac{K_u}{K_v} = \frac{K_u + h_u}{K_v + h_v} - \frac{K_u}{K_v} = \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{K_v} \cdot (h_u K_v - h_v K_u).$$

Осталось применить доказанную выше ограниченность функций $\frac{1}{v}$ и $\frac{1}{K_v}$ на некотором интервале, содержащем x_0 , и леммы о пренебрежимо малых.

Теорема 3.3. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0 , то их сумма, разность, произведение и частное дифференцируемо в x_0 . При этом:

$$(u+v)'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0),$$

$$(u-v)'(x_0) = u'(x_0) - v'(x_0),$$

$$(uv)'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + v'(x_0)u(x_0),$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - v'(x_0)u(x_0)}{(v(x_0))^2}$$

(в случае частного $\frac{u}{v}$ надо дополнительно предполагать, что $v(x_0) \neq 0$).

Доказательство. Найдём производные суммы, разности, произведения и частного касательных к графикам функций u и v в точках с абсциссой x_0 , то есть функций

$$K_u(x) = u'(x_0)(x - x_0) + u(x_0)$$

и

$$K_v(x) = v'(x_0)(x - x_0) + v(x_0).$$

Согласно предыдущей теореме, полученные формулы будут верны и для самих функций u и v .

Для суммы $K_u(x) + K_v(x)$ и разности $K_u(x) - K_v(x)$ доказательства очевидны.

Для произведения:

$$\begin{aligned} P(x) &= K_u(x) \cdot K_v(x) = \\ &= (u'(x_0)(x - x_0) + u(x_0)) \cdot (v'(x_0)(x - x_0) + v(x_0)) = \\ &= \underbrace{(u'(x_0)v(x_0) + v'(x_0)u(x_0))(x - x_0) + u(x_0)v(x_0)}_{+ u'(x_0)v'(x_0)(x - x_0)^2}. \end{aligned}$$

В правой части мы видим уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0; P(x_0))$ (подчёркнуто) и функцию, являющуюся пренебрежимо малой вблизи x_0 (см. пример 2.2). Эта прямая является касательной к графику функции $P(x)$, а её угловой коэффициент – производной в точке x_0 .

Доказательство для частного проведём в два этапа. Сначала для случая $K_u(x) = 1$, $K_v(x) = k(x - x_0) + b$ (мы обозначили $v'(x_0)$ через k , а $v(x_0)$ – через b):

$$\frac{1}{k(x - x_0) + b} - \left(-\frac{k}{b^2}(x - x_0) + \frac{1}{b}\right) =$$

$$= \frac{1}{k(x-x_0)+b} + \frac{k(x-x_0)-b}{b^2} =$$

$$= \left[k^2(x-x_0)^2 \right] \cdot \left[\frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{k(x-x_0)+b} \right].$$

Так как функция, стоящая в правой части, пренебрежимо мала вблизи x_0 (см. пример 2.2 и лемму 3.4), то прямая $y = -\frac{k}{b^2}(x-x_0) + \frac{1}{b}$ является касательной к $\frac{1}{k(x-x_0)+b}$ и, следовательно,

$$\left(\frac{1}{K_v} \right)' = \left(\frac{1}{k(x-x_0)+b} \right)' = -\frac{k}{b^2} = \frac{v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

Для завершения доказательства осталось записать $\frac{u}{v}$ в виде $u \cdot \frac{1}{v}$ и применить формулу производной произведения.

4 Физическая интерпретация производной

Пусть тело S движется по закону $S = S(t)$. Мгновенной скоростью $v(t_0)$ в момент t_0 будем называть скорость такого равномерного движения, закон движения которого $s = s(t)$ пренебрежимо мало отличается от $S = S(t)$ вблизи момента t_0 . Тогда $S'(t_0) = s'(t_0)$ и

$$s(t) = v(t_0)(t-t_0) + S(t_0).$$

Из этого следует, что $v(t_0) = S'(t_0)$.

Заметим, что при классическом введении производной мгновенная скорость также определяется (а не вычисляется) как предел средней скорости. Представления о произвольном движении как о «почти равномерном» вблизи момента t_0 кажется более продуктивным (и более соответствующим духу математического анализа).

5 Исследование функций

Используя определение производной как углового коэффициента касательной, легко доказать необходимое условие экстремума

Теорема 5.1. Пусть x_0 – точка экстремума функции f . Если f имеет производную в точке x_0 , то эта производная равна нулю.

Пусть, например, в x_0 минимум. Предположим противное, то есть предположим, что угловой коэффициент k касательной K к графику f в точке $(x_0; f(x_0))$ не равен 0. Пусть, например, $k > 0$. Рассмотрим такую угловую окрестность прямой K , что угловые коэффициенты сторон K_1 и K_2 этой окрестности тоже положительны. Найдём дугу графика f , содержащуюся в этой окрестности. Пусть она соответствует

интервалу $(\alpha; \beta)$, где $\alpha < x_0 < \beta$. Тогда для всех x из $(\alpha; x_0)$ точки $(x; f(x))$ графика f лежат ниже прямой $y = f(x_0)$, то есть $f(x) < f(x_0)$. Получено противоречие с предположением, что в x_0 минимум.

Подчеркнём, что это доказательство, как и многие предыдущие становится «прозрачным» только в случае использования аккуратного чертежа.

Замечание. При определении производной как углового коэффициента касательной достаточное условие строгого возрастания функции (производная строго больше нуля) совершенно «очевидно» из геометрических соображений. (В каждой точке касательная «идёт вверх», поэтому и график функции всё время «идёт вверх», иначе говоря, функция строго возрастает), однако, строгое доказательство этого факта обычно использует теорему Лагранжа, которую, по видимому, придётся принять без доказательства.

Заключение

Предлагаемые доказательства являются «геометрически конструктивными», благодаря использованию укрупнённого объекта – дуги графика. Эти доказательства не более громоздки, чем классические и не требуют предварительного доказательства свойств пределов функций. Понятие касательной (точнее, функции, графиком которой является касательная) может во многом заменить понятие дифференциала, не требуя перехода к системе координат, связанной с точкой графика.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kuhn, Stephen. The Derivative a la Caratheodory / Stephen Kuhn // The American Mathematical Monthly. – 1991. – Vol. 98, № 1. – P. 40–44.
2. Acosta, Ernesto G. Frechet vs. Caratheodory / Ernesto Acosta G., Cesar Delgado G. // The American Mathematical Monthly. – 1994. – Vol. 101, № 4. – P. 332–338.
3. Калинин, С.И. Об изложении основ дифференциального исчисления вещественнозначных функций одного и нескольких переменных в терминах понятия дифференцируемости функций по Каратеодори / С.И. Калинин // Математическое образование. – 2006. – № 2 (37). – С. 18–31.
4. Гаврилюк, А.В. Наглядные определения непрерывности и дифференцируемости / А.В. Гаврилюк, А.А. Гаврилюк // X Белорусская математическая конференция : тез. докл. междунар. науч. конф., Минск, 3–7 ноября 2008 г. / Ин-т математики НАН Беларуси. – Минск, 2008. – Ч. 1. – С. 124–125.

Поступила в редакцию 25.11.10.

УДК 517.9

НЕСКОЛЬКО УТВЕРЖДЕНИЙ, РАВНОСИЛЬНЫХ ГИПОТЕЗЕ РИМАНА

А.Р. Миротин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

SOME ASSERTIONS EQUIVALENT TO RIEMANN HYPOTHESIS

A.R. Mirotin

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Сформулировано несколько утверждений, относящихся к гармоническому анализу на бесконечномерном торе, и доказана их равносильность гипотезе Римана.

Ключевые слова: гипотеза Римана, бесконечномерный тор, функция Мебиуса, функция Эйлера, формула обращения.

Some assertions in harmonic analysis on the infinite dimensional torus are stated and their equivalence to Riemann hypothesis is proved.

Keywords: Riemann hypothesis, infinite dimensional torus, Möbius function, Euler function, inverse formula.

Введение

Дзета-функция Римана определяется для комплексных $s = \sigma + it$ при $\sigma > 1$ следующим образом:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Для вещественных $s > 1$ она рассматривалась еще Эйлером. В своей эпохальной работе [1], опубликованной в 1859 г., Б. Риман аналитически продолжил ее в область $s \neq 1$ и показал, что все так называемые нетривиальные нули дзета-функции (т. е. нули, отличные от $-2, -4, -6, \dots$) лежат в «критической полосе» $0 \leq \sigma \leq 1$. Знаменитая гипотеза Римана (далее RH) утверждает, что все нетривиальные нули лежат на «критической прямой» $\sigma = 1/2$. Эти исследования были предприняты Б. Риманом в связи с гипотезой Лежандра-Гаусса, согласно которой количество $\pi(x)$ простых чисел, не превосходящих x , удовлетворяет соотношению $\pi(x) : \text{Li}(x) \rightarrow 1 (x \rightarrow \infty)$, где

$$\text{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

– интегральный логарифм. Б. Риман связал это утверждение с распределением комплексных нулей дзета-функции и более того, дал точную формулу для $\pi(x)$, содержащую нетривиальные нули дзета-функции. В упрощенном виде его формула может быть записана следующим образом (если число x не есть степень простого):

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x - \sum_p \frac{x^p}{p} - \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(1 - x^{-2}),$$

где $\Lambda(n) = \log p$, если n есть степень простого, и $\Lambda(n) = 0$ в противном случае (функция

Мангольда), а сумма $\sum_p \frac{x^p}{p}$ распространяется на все нетривиальные нули ρ дзета-функции и понимается как $\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{|\rho| < T}$. При этом гипотеза Лежандра-Гаусса равносильна утверждению $\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \sim x (x \rightarrow \infty)$, и из приведенной выше формулы Римана легко вытекает, что эта гипотеза верна, если все нетривиальные нули лежат слева от прямой $\sigma = 1$.

Следует отметить, что исследованиям Римана предшествовали замечательные работы П. Л. Чебышева по распределению простых чисел, в которых фигурировала дзета-функция вещественного переменного. Вкладом Б. Римана, который трудно переоценить, был именно выход в комплексную область, позволивший в конечном счете установить закон распределения простых в натуральном ряде. А именно, в 1898 году Ж. Адамар и Ш. де ля Валле-Пуссен доказали гипотезу Лежандра-Гаусса, установив отсутствие нулей дзета-функции на прямой $\sigma = 1$. Эту теорему теперь называют теоремой о простых числах (асимптотическим законом распределения простых чисел в натуральном ряде).

Важность гипотезы Римана для теории чисел объясняется прежде всего тем, что ее справедливость равносильна справедливости теоремы о простых числах с наилучшим возможным остатком. Дело в том, что, как указал сам Б. Риман, RH равносильна следующему утверждению: $\forall \varepsilon > 0$

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + O(x^{1/2+\varepsilon}).$$

Удивительным образом эта гипотеза связана также с рядом утверждений из таких разных

разделов науки, как теория конечных групп преобразований, теория вероятностей, функциональный анализ и даже квантовая механика. Например, доказано, что RH равносильна каждому из следующих утверждений:

$$1) \sigma(n) < H_n + e^{H_n} \log H_n,$$

где $\sigma(n)$ — число делителей числа n , $H_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$ (Лагариас, 2002);

2) наибольший порядок $g(n)$ элементов симметрической группы S_n при достаточно больших n удовлетворяет неравенству

$$\log g(n) < \frac{1}{\sqrt{\text{Li}(n)}}$$

(Массиас, Николас, Робин, 1989);

3) для любой ненулевой комплексной функции $g \in C_0^\infty(0, \infty)$ справедливо неравенство

$$\sum_p g^*(\rho) \overline{g^*(1-\rho)} > 0,$$

где $g^*(s) = \int_0^\infty g(x)x^{s-1}dx$ — преобразование Меллина функции g (А. Вейль, Э. Бомбьери);

4) для всех натуральных n

$$\sum_p (1 - (1/\rho)^n) \geq 0$$

(Х.-Дж. Ли, 1998);

5) при $\text{Res} > 1/2$

$$\text{Re} \left(\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} \right) > 0,$$

где $\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$ (Хинкканен, 1998);

$$6) \int_0^\infty \int_{1/2}^\infty \frac{1-12y^2}{(1+4y^2)^3} \log |\zeta(x+iy)| dx dy = \pi \frac{3-\gamma}{32},$$

где γ — постоянная Эйлера (Волчаков, 1998);

7) линейная оболочка семейства функций

$f_a(t) = \left\{ \frac{a}{t} \right\} - a \left\{ \frac{1}{t} \right\}$, $a \in (0;1)$ (фигурные скобки обозначают дробную часть числа) плотна в $L^2[0;1]$ (Бёрлинг, Ниман).

Еще Б. Риман установил функциональное уравнение для дзета-функции, которое можно записать в виде $\xi(s) = \xi(1-s)$. Но доказано, что дзета-функция не удовлетворяет никакому дифференциальному уравнению, что считается причиной столь сложного распределения ее нулей.

По-видимому, сейчас RH — самая знаменитая нерешенная математическая проблема. Следует отметить, что в настоящий момент мало кто сомневается в справедливости этой гипотезы, поскольку многочисленные факты свидетельствуют в ее пользу. Например, доказано, что первые 1,5 миллиарда комплексных нулей дзета-функции (расположенных в порядке возрастания мнимых частей) лежат на критической прямой

(ван де Люн, Риэль, Винтнер, 1986). Там же лежат и 3×10^8 ее нулей с мнимыми частями из промежутка $[0; 2 \times 10^{20}]$, а также все нули с мнимыми частями из промежутка $[10^{22}; 2 \times 10^{22} + 10^{10}]$ (А. Олдьжко). Известно также, что на критической прямой расположено более 40 процентов комплексных нулей дзета-функции (Левинсон, Сельберг, Конри). Доказано, что, гипотетические исключения из RH могут быть расположены на комплексной плоскости крайне редко (Бор, Ландау, Карлсон, Ингам). Доказаны аналоги RH, относящиеся к дзета-функциям алгебраических многообразий над конечными полями (А. Вейль, П. Делинь), некоторые следствия RH получили независимые доказательства и т. д. Кроме того, опровержение RH внесло бы хаос в распределение простых чисел, и считается маловероятным, что природа может быть столь извращенной.

Далее нам понадобятся равносильные RH утверждения, относящиеся к функциям Мебиуса μ и Эйлера φ . Напомним, что по определению $\mu(N_k) = (-1)^k$ где $N_k = p_1 \dots p_k$ — произведение первых k простых чисел, и $\mu(n) = 0$ для остальных натуральных n ; $\varphi(n)$ — число натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n .

Теорема 0.1 (Дж. Литтлвуд). RH равносильна каждому из следующих утверждений:

$$(i) \forall \varepsilon > 0 \sum_{n \leq x} \mu(n) = O(x^{1/2+\varepsilon});$$

$$(ii) \exists A > 0 \sum_{n \leq x} \mu(n) = O(x^{1/2} \exp(A \log x / \log \log x)).$$

Теорема 0.2 (Николас, 1985). RH равносильна каждому из следующих утверждений: $\forall k/\forall k$, кроме конечного числа,

$$\varphi(N_k) < \frac{e^{-\gamma} N_k}{\log \log N_k},$$

где $N_k = p_1 \dots p_k$ — произведение первых k простых чисел.

Ниже с помощью гармонического анализа на полугруппах мы выведем из этих результатов несколько новых утверждений, равносильных RH. Всюду далее систематически будут использоваться следующие обозначения: если $n = p_1^{\alpha_1(n)} p_2^{\alpha_2(n)} \dots$ — каноническое разложение натурального числа n на простые множители, то $\alpha(n) := (\alpha_1(n), \alpha_2(n), \dots)$ — финитная последовательность, и для $t \in \mathbb{T}^\omega$ мы полагаем $t^{\alpha(n)} := t_1^{\alpha_1(n)} t_2^{\alpha_2(n)} \dots$ (\mathbb{T}^ω обозначает бесконечномерный тор, т. е. счетное произведение единичных окружностей). Тогда, например, из нижеследующего предложения 2.2 вытекает, что RH равносильна такому утверждению:

$\forall k/\forall k$, кроме конечного числа, справедливо неравенство:

$$\int_{\mathbb{T}^\omega} \frac{g(t)}{t_1 \dots t_k} dt < \frac{1}{e^\gamma N_k^2 \log \log N_k}, \quad (0.1)$$

где $g(t) = \frac{\sum_{n \geq 1} \frac{t^{\alpha(n)}}{n^2}}{\sum_{n \geq 1} \frac{t^{\alpha(n)}}{n^3}}$, а dt – нормированная мера Хаара группы \mathbb{T}^ω .

Более подробную информацию, касающуюся гипотезы Римана, можно найти в [2]–[6].

1 Вспомогательные сведения

В этом разделе будут изложены сведения по гармоническому анализу на полугруппах, необходимые для дальнейшего. Систематическое изложение этих (и других) вопросов гармонического анализа содержится в [7]–[9].

Пусть S – абелева полугруппа с сокращениями и нейтральным элементом, записываемая мультипликативно, $G = S^{-1}S$ – группа ее частных. Через \hat{S} обозначим мультипликативную полугруппу всех ограниченных полухарактеров полугруппы S (т. е. ненулевых гомоморфизмов из S в замкнутый единичный диск \mathbb{D} комплексной плоскости с операцией умножения), наделенную топологией поточечной сходимости (превращающей ее в компактную топологическую полугруппу), а через \hat{S}_+ – ее компактную подполугруппу, состоящую из неотрицательных полухарактеров. Для $\rho \in \hat{S}_+$ положим также

$$\hat{S}_\rho := \{\psi \in \hat{S} : |\psi| \leq \rho\}.$$

Характером полугруппы S будем называть полухарактер, равный по модулю единице; (компактная топологическая) группа характеров полугруппы S будет обозначаться X .

Необходимые нам сведения из [7] мы изложим в виде нескольких лемм.

Лемма 1.1 (полярное разложение полухарактера). *Любой полухарактер $\psi \in \hat{S}$ можно представить в виде*

$$\psi = \rho\chi,$$

где $\rho \in \hat{S}_+$, а $\chi \in X$.

Для полухарактера $\rho \in \hat{S}_+$ через $l_1(\rho)$ мы обозначим нормированное пространство тех комплекснозначных функций f на группе G с не более чем счетным носителем, которые сосредоточены на S , и для которых

$$\|f\| := \sum_{s \in S} |f(s)| \rho(s) < \infty.$$

Лемма 1.2. *Пространство $l_1(\rho)$ есть унитарная полупростая коммутативная банахова алгебра со сверткой*

$$f * g(s) := \sum_{xy=s} f(x)g(y)$$

в качестве умножения.

Пусть $f \in l_1(\rho)$. Функцию \tilde{f} на \hat{S}_ρ , определенную равенством

$$\tilde{f}(\psi) = \sum_{s \in S} f(s) \overline{\psi(s)},$$

будем называть преобразованием Лапласа функции f .

Лемма 1.3. *Комплексные гомоморфизмы алгебры $l_1(\rho)$ имеют в точности вид $f \mapsto \tilde{f}(\psi)(\psi \in \hat{S}_\rho)$. В частности, $\widetilde{f * g} = \tilde{f} \tilde{g}$ при $f, g \in l_1(\rho)$.*

Пусть $\psi = \rho\chi$ – полярное разложение полухарактера ψ . Тогда ясно, что $\tilde{f}(\psi) = (\widehat{f\rho})(\chi)$, где «крышка» обозначает преобразование Фурье на группе G . Формула обращения для преобразования Фурье влечет теперь следующее утверждение.

Лемма 1.4 (формула обращения для преобразования Лапласа). *Пусть $f \in l_1(\rho)$. Если функция $\chi \mapsto (\widehat{f\rho})(\chi)$ принадлежит $L^1(X)$, то при всех s , для которых $\rho(s) \neq 0$, справедливо равенство*

$$f(s) = \frac{1}{\rho(s)} \int_X \tilde{f}(\rho\chi) \chi(s) d\chi,$$

где $d\chi$ – нормированная мера Хаара группы X .

2 Формулировка и доказательство основных результатов

Теперь мы в состоянии установить наши основные результаты.

Предложение 2.1. *RH равносильна каждому из следующих утверждений:*

(i) для любого $\varepsilon > 0$ и любого/некоторого $\beta > 1$ справедлива оценка

$$\int_{\mathbb{T}^\omega} \sum_{a \leq x} \frac{1}{\sum_{n \geq 1} (an)^{-\beta} t^{\alpha(an)}} dt = O(x^{1/2+\varepsilon});$$

(ii) существует такое $A > 0$, что для любого/некоторого $\beta > 1$ справедлива оценка

$$\int_{\mathbb{T}^\omega} \sum_{a \leq x} \frac{1}{\sum_{n \geq 1} (an)^{-\beta} t^{\alpha(an)}} dt = O(x^{1/2} \exp(A \log x / \log \log x)).$$

Доказательство. Пусть S есть мультипликативная полугруппа \mathbb{N}^* натуральных чисел. Поскольку это свободная абелева полугруппа, системой образующих которой служит множество простых чисел $\{p_1, p_2, \dots\}$, каждый ограниченный полухарактер полугруппы S имеет вид

$$\psi(a) = \bar{z}^{\alpha(a)},$$

где $z = (z_1, z_2, \dots) \in \mathbb{D}^\omega$, $z^{\alpha(a)} = z_1^{\alpha_1(a)} z_2^{\alpha_2(a)} \dots$, $z_j = \psi(p_j)$, $a = p_1^{\alpha_1(a)} p_2^{\alpha_2(a)} \dots$ – каноническое разложение числа a на простые множители. Таким образом, мы можем считать, что $\widehat{\mathbb{N}}_+^* = [0, 1]^\omega$, $\widehat{\mathbb{N}}^* = \mathbb{D}^\omega$, а группа характеров полугруппы \mathbb{N}^* есть \mathbb{T}^ω (через K^ω мы обозначаем тихоновское произведение счетного числа экземпляров компакта K).

Для этого случая, отождествляя полухарактер $\psi(a) = \bar{z}^{\alpha(a)}$ с соответствующей точкой $z \in \mathbb{D}^\omega$, получаем, что преобразование Лапласа имеет вид

$$\tilde{f}(z) = \sum_{a=1}^{\infty} f(a) z^{\alpha(a)}.$$

Если полухарактеру $\rho \in \widehat{\mathbb{N}}_+^*$ соответствует точка r из $[0, 1]^\omega$, то алгебра $l_1(\rho)$ состоит из всех арифметических функций f , для которых абсолютно сходится ряд $\sum_{a=1}^{\infty} f(a) r^{\alpha(a)}$. Свертка в $l_1(\rho)$ задается формулой

$$(f * g)(a) = \sum_{d|a} f(d) g\left(\frac{a}{d}\right),$$

где суммирование распространяется на все положительные делители числа a («свертка Дирихле»); функция $1_{\{1\}}$ (индикатор одноточечного множества $\{1\}$) будет единицей этой алгебры.

В этом случае, при условии, что функция $t \mapsto \tilde{f}(r.t)$ принадлежит $L^1(\mathbb{T}^\omega, dt)$, формула обращения для функций $f \in l_1(\rho)$ ($\rho(a) = r^{\alpha(a)}$, $r \in [0; 1]^\omega$) принимает вид

$$f(a) = \frac{1}{r^{\alpha(a)}} \int_{\mathbb{T}^\omega} \tilde{f}(r.t) t^{-\alpha(a)} dt, \quad (2.1)$$

где dt – нормированная мера Хаара группы \mathbb{T}^ω , а $r.t$ обозначает последовательность $(r_1 t_1, r_2 t_2, \dots)$.

Выберем теперь $\rho(a) = a^{-\beta}$ ($\beta > 1$ фиксировано), т. е. положим $r = (p_1^{-\beta}, p_2^{-\beta}, \dots)$. Очевидно, что тогда $\mu \in l_1(\rho)$. Применяя к известному тождеству $\mu * 1 = 1_{\{1\}}$ преобразование Лапласа, получаем при $|z_j| < p_j^{-\beta}, j \in \mathbb{N}$

$$\tilde{\mu}(z) = \frac{1}{\sum_{a=1}^{\infty} z^{\alpha(a)}}.$$

Покажем, что условия, достаточные для справедливости формулы обращения, здесь выполнены при $\beta > 1$, т. е. что функция $t \mapsto \tilde{\mu}(r.t)$ принадлежит $L^1(\mathbb{T}^\omega, dt)$. В самом деле, эта функция есть преобразование Фурье функции,

определенной на мультипликативной группе \mathbb{Q}_+ положительных рациональных чисел (являющейся группой частных полугруппы \mathbb{N}^*), но сосредоточенной на полугруппе \mathbb{N}^* и равной на ней $(\mu\rho)(n) = \mu(n)n^{-\beta}$. Поскольку эта функция, очевидно, принадлежит $L^2(\mathbb{Q}_+)$, то функция $t \mapsto \tilde{\mu}(r.t)$ принадлежит $L^2(\mathbb{T}^\omega) \subset L^1(\mathbb{T}^\omega)$ по теореме Планшереля.

Значит, для функции Мебиуса имеем при любом $\beta > 1$ в силу формулы обращения следующее интегральное представление (у нас $r^{\alpha(n)} = n^{-\beta}$):

$$\mu(a) = a^\beta \int_{\mathbb{T}^\omega} \frac{1}{\sum_{n \geq 1} n^{-\beta} t^{\alpha(n)}} t^{-\alpha(a)} dt. \quad (2.2)$$

Следовательно,

$$\sum_{a \leq x} \mu(a) = \int_{\mathbb{T}^\omega} \sum_{a \leq x} \frac{1}{\sum_{n \geq 1} (an)^{-\beta} t^{\alpha(an)}} dt$$

и для завершения доказательства осталось воспользоваться теоремой 0.1.

Более простой вид имеет следующий критерий справедливости RH.

Предложение 2.2. RH равносильна каждому из следующих утверждений: $\forall k / \forall k$, кроме конечного числа, справедливо неравенство

$$\int_{\mathbb{T}^\omega} \frac{g(t)}{t_1 \dots t_k} dt < \frac{1}{e^\gamma N_k^{\beta-1} \log \log N_k},$$

$$\text{где } g(t) = \frac{\sum_{m \geq 1} \frac{t^{\alpha(m)}}{m^{\beta-1}}}{\sum_{m \geq 1} \frac{t^{\alpha(m)}}{m^\beta}}, \quad \beta > 2.$$

Доказательство. Будем рассуждать как в доказательстве предложения 2.1 (как и там, мы берем $\rho(a) = a^{-\beta}$, но считаем, что $\beta > 2$). Поскольку, очевидно, $\varphi(n) < n$, то $\varphi \in l_1(\rho)$. Применяя теперь преобразование Лапласа к известному тождеству

$$\varphi * 1 = \text{id}$$

(здесь $\text{id}(n) = n$), получаем $\tilde{\varphi}(z) \cdot \tilde{1}(z) = \tilde{\text{id}}(z)$ при $|z_j| < p_j^{-\beta}, j \in \mathbb{N}$, откуда

$$\tilde{\varphi}(z) = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} m z^{\alpha(m)}}{\sum_{m=1}^{\infty} z^{\alpha(m)}}.$$

Покажем, что условия, достаточные для справедливости формулы обращения, здесь выполнены при $\beta > 2$. Действительно, функция $t \mapsto \tilde{\varphi}(r.t)$ принадлежит $L^1(\mathbb{T}^\omega, dt)$, поскольку

$$|\tilde{\varphi}(r.t)| = \frac{|\tilde{\text{id}}(r.t)|}{|\tilde{1}(r.t)|} = |\tilde{\text{id}}(r.t)| \cdot |\tilde{\mu}(r.t)|,$$

причем первый сомножитель ограничен,

$$|\widehat{id}(r.t)| \leq \sum_{m \geq 1} m^{-\beta} < \infty,$$

а второй принадлежит $L^1(\mathbb{T}^\omega, dt)$ (см. доказательство предложения 2.1).

Следовательно, по формуле обращения (2.1) имеем при любом $\beta > 2$ следующее интегральное представление функции Эйлера ($r^{\alpha(n)} = n^{-\beta}$):

$$\varphi(n) = n^\beta \int_{\mathbb{T}^\omega} \frac{\sum_{m=1}^{\infty} m^{-\beta} t^{\alpha(m)}}{\sum_{m=1}^{\infty} m^{-\beta} t^{\alpha(m)}} t^{-\alpha(n)} dt, \quad (2.3)$$

и для завершения доказательства осталось воспользоваться теоремой 0.2, так как $t^{\alpha(N_k)} = t_1 \dots t_k$.

Полагая $\beta = 3$ в предложении 2.2, получаем утверждение (0.1), сформулированное во введении.

Замечание 2.1. Теперь, когда формулы (2.2) и (2.3) получены с помощью гармонического анализа на полугруппах, можно дать их доказательство, являющееся концептуально более простым. Докажем формулу (2.2). Прежде всего заметим, что при $\beta > 1$ справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{\alpha(n)}}{n^\beta} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_1^{\alpha_1(n)} t_2^{\alpha_2(n)} \dots}{(p_1^\beta)^{\alpha_1(n)} (p_2^\beta)^{\alpha_2(n)} \dots} = \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{t_j}{p_j^\beta} \right)^m = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{t_j}{p_j^\beta}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Поэтому для натурального a

$$\begin{aligned} I(a) &:= \int_{\mathbb{T}^\omega} \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} t^{\alpha(n)}} t^{-\alpha(a)} dt = \int_{\mathbb{T}^\omega} \frac{t^{-\alpha(a)}}{\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t_j}{p_j^\beta}\right)^{-1}} dt = \\ &= \int_{\mathbb{T}^\omega} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{t_j}{p_j^\beta}\right)^{-1} t_j^{\alpha_j(a)}} dt = \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - \frac{t_j}{p_j^\beta}}{t_j^{\alpha_j(a)}} dt_j, \end{aligned}$$

где все меры dt_j совпадают с нормированной мерой Хаара группы \mathbb{T} (последнее означает, что $\int_{\mathbb{T}} f(t_j) dt_j = \int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) \frac{d\varphi}{2\pi}$ для любой непрерывной функции f на \mathbb{T}).

Возможны два случая.

1) Число a делится на квадрат простого, т. е. $\alpha_j(a) \geq 2$ при некотором j . В этом случае, используя свойство ортогональности характеров компактной группы (или прямым счетом), получаем, что

$$I_j(a) := \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - \frac{t_j}{p_j^\beta}}{t_j^{\alpha_j(a)}} dt_j = 0,$$

а потому $I(a) = 0$, что доказывает (2.2) для выбранных a .

2) Число a свободно от квадратов, т. е. $\alpha_j(a) \in \{0; 1\}$ при всех j . Как и в предыдущем случае, здесь легко подсчитать, что

$$I_j(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_j(a) = 0 \\ -1/p_j^\beta, & \text{если } \alpha_j(a) = 1. \end{cases}$$

Таким образом, если $a = p_1 \dots p_k$, то $I(a) = \prod_j I_j(a) = (-1)^k / a^\beta$, что равносильно формуле (2.2) в этом случае.

Докажем формулу (2.3). Из формулы (2.4) следует, что для натурального a

$$J(a) := \int_{\mathbb{T}^\omega} \frac{\sum_{n \geq 1} n^{-\beta} t^{\alpha(n)}}{\sum_{n \geq 1} n^{-\beta} t^{\alpha(n)}} t^{-\alpha(a)} dt = \prod_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - \frac{t_j}{p_j^\beta}}{\left(1 - \frac{t_j}{p_j^{\beta-1}}\right) t_j^{\alpha_j(a)}} dt_j.$$

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} J_j(a) &:= \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - \frac{t_j}{p_j^\beta}}{\left(1 - \frac{t_j}{p_j^{\beta-1}}\right) t_j^{\alpha_j(a)}} dt_j = \\ &= \frac{1}{p_j} \int_{\mathbb{T}} \frac{p_j^\beta - t_j}{(p_j^{\beta-1} - t_j) t_j^{\alpha_j(a)}} dt_j. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\frac{p_j^\beta - t_j}{p_j^{\beta-1} - t_j} = 1 + (p_j - 1) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{t_j}{p_j^{\beta-1}} \right)^m,$$

то, пользуясь ортонормированностью характеров группы \mathbb{T} , получим

$$J_j(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_j(a) = 0 \\ \frac{p_j - 1}{p_j^{(\beta-1)\alpha_j(a)+1}}, & \text{если } \alpha_j(a) \geq 1. \end{cases}$$

Поэтому, если $a = p_1^{\alpha_1(a)} \dots p_k^{\alpha_k(a)}$, то

$$J(a) = \prod_j J_j(a) = \prod_{j=1}^k \frac{p_j - 1}{p_j^{(\beta-1)\alpha_j(a)+1}} = \frac{\varphi(a)}{a^\beta}$$

(мы воспользовались тем, что $\varphi(a) = a \prod_{j=1}^k (1 - 1/p_j)$). Последнее равенство равносильно формуле (2.3).

Замечание 2.2. Подобно формулам (2.2) и (2.3) могут быть получены интегральные представления и других арифметических функций. Так, например, исходя из тождества

$$\Lambda * 1 = \log$$

([10, с. 145]), для функции Мангольда Λ имеем при $\beta > 1$

$$\Lambda(n) = n^\beta \int_{\mathbb{T}^\omega} \frac{\sum_{m=1}^{\infty} m^{-\beta} \log mt^{\alpha(m)}}{\sum_{m=1}^{\infty} m^{-\beta} t^{\alpha(m)}} t^{-\alpha(n)} dt.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Riemann, B. Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse / B. Riemann – in: Monat. der Königl. – Berlin : Preuss. Akad. der Wissen., 1859 (1860). – P. 671–680.*

2. *Corney, J.B.* The Riemann Hypothesis / J.B. Corney // Notices of the AMS. – 2004. – Vol. 50, № 3. – P. 341–353.
3. *Bombieri, E.* The Riemann Hypothesis / E. Bombieri – in.: The Millennium Prize Problems. – Providence, RI : AMS, 2006. – P. 107–129.
4. *The Riemann Hypothesis* [Electronic resource]. – Mode of access : <http://www.aimath.org/WWN/rh/>. – Data of access : 15.09.10.
5. *Titchmarsh, E.S.* The Theory of the Riemann Zeta Function / E.S. Titchmarsh – 2nd ed. revised by R. D. Heath-Brown. – Oxford : Oxford University Press, 1986.
6. *Ivič, A.* The Riemann Zeta-Function – The Theory of the Riemann Zeta-Function with Applications / A. Ivič – New York : John Wiley, 1985.
7. *Миротин, А.Р.* Гармонический анализ на абелевых полугруппах / А.Р. Миротин. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2008. – 207 с.
8. *Rudin, W.* Fourier Analysis on Groups / W. Rudin – New York : Interscience Publishers, 1962. – 285 p.
9. *Люмис, Л.* Введение в абстрактный гармонический анализ / Л. Люмис. – М. : ИЛ, 1956. – 251 с.
10. *Постников, А.Г.* Введение в аналитическую теорию чисел / А.Г. Постников. – М. : Наука, 1971. – 416 с.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь, договор 20061473.

Поступила в редакцию 25.10.10.

УДК 535.42+537.86.22

СТАБИЛИЗАЦИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ СИСТЕМ

Е.А. Ружицкая

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

STABILIZATION OF OPTIMAL ON SPEED SYSTEMS

E.A. Ruzhitskaya

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Описывается метод стабилизации оптимальных по быстродействию систем в классе ограниченных управлений, основанный на использовании вспомогательной задачи оптимального управления – задачи минимизации интенсивности управляющего воздействия. Результаты иллюстрируются на примере динамической системы четвертого порядка.

Ключевые слова: стабилизация, обратная связь, динамическая система, задача быстродействия, задача оптимального управления.

The method of stabilization of optimal on speed systems in the class of the bounded control based on the use of an auxiliary problem of optimal control – problem of control intensity minimization – is described. Results are illustrated by the example of dynamic system of the fourth order.

Keywords: stabilization, feedback, dynamic system, speed problem, optimal control problem.

Введение

Задача стабилизации является одной из основных задач теории управления, поскольку устойчивое поведение системы – одно из ее важнейших свойств [1]. Однако, с точки зрения приложений важно, чтобы переходные процессы обладали дополнительными свойствами. Одним из таких свойств является требование наиболее быстрого устойчивого поведения системы.

В данной работе описывается метод построения оптимальных стабилизирующих обратных связей в задаче быстродействия с использованием теории оптимального управления. При этом структура обратной связи не задается в явном, формульном виде. Ее значения вычисляются с помощью решения специальной вспомогательной задачи оптимального управления – задачи минимизации интенсивности управляющего воздействия. Работа примыкает к исследованию [2]–[5], в которых описаны методы реализации оптимального управления типа обратной связи и их применения к проблеме стабилизации.

1 Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему, поведение которой при $t \geq 0$ описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (1.1)$$

$$(x \in R^n, A \in R^{n \times n}, u \in R, \text{rank}(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) = n),$$

где $x = x(t)$ – n -вектор состояния системы в момент времени t , $u = u(t)$ – значение скалярного управления.

Пусть G – ограниченная окрестность состояния равновесия $x = 0$ системы (1.1), $u = 0$.

При фиксированных числах $h > 0$, $L > 0$ функцию

$$u(t, x), t \in [0, h], t \geq 0, x \in G, \quad (1.2)$$

назовем дискретной (с периодом квантования $h > 0$) ограниченной стабилизирующей обратной связью системы (1.1) в области G , если:

$$1) u(t, 0) = 0, t \in [0, h];$$

$$2) |u(t, x)| \leq L, x \in G, t \in [0, h];$$

3) траектория замкнутой системы

$$\dot{x} = Ax + bu(t, x), x(0) = x_0, x_0 \in G, \quad (1.3)$$

является непрерывным решением уравнения

$$\dot{x} = Ax + bu(t), x(0) = x_0,$$

при $u(t) = u(t - kh, x(kh)), t \in [kh, (k+1)h], k = 0, 1, \dots;$

4) система (1.3) асимптотически устойчива в G .

Введем класс доступных управляющих воздействий, с помощью которых будем оптимизировать систему управления. Выберем натуральное число N ($N > n$), вещественные числа $h > 0$, $L > 0$. Положим $t^* = Nh$.

Кусочно-постоянную функцию $u(t), t \geq 0$, $u(t) = u_j, t \in [(j-1)h, jh], j = 1, 2, \dots$, удовлетворяющую ограничению $|u(t)| \leq L, t \geq 0$ будем называть доступным управлением.

На введенном множестве доступных управлений рассмотрим следующую задачу оптимального быстродействия:

$$t^* \rightarrow \min, \quad (1.4)$$

$$\dot{x} = Ax + bu, x(0) = x_0, \quad (1.5)$$

$$x(t^*) = 0, \quad (1.6)$$

$$|u(t)| \leq L, t \geq 0. \quad (1.7)$$

Доступное управление $u(t), t \geq 0$ назовем *допустимым*, если оно удовлетворяет ограничению (1.7), порождает такую траекторию $x(t), t \geq 0$, системы (1.5), которая за конечное время $t^* = t^*(u)$ достигает состояния равновесия (1.6).

Допустимое управление $u^0(t|x_0), t \in [0, t^*(u^0)]$, будем называть *оптимальным по быстрдействию программным управлением* со временем быстрдействия $t^{*0} = t^*(u^0)$ для состояния x_0 , если:

- 1) t^{*0} – наименьшее время из возможных $t^* = t^*(u)$ для допустимых управлений;
- 2) $\max_{t \in [0, t^{*0}]} |u^0(t)| = \min_{u^*} \max_{t \in [0, t^{*0}]} |u^*(t)|$,

где минимум берется по всем допустимым управлениям $u^*(t), t \in [0, t^*(u^*)]$, для которых время $t^*(u^*)$ совпадает со временем оптимального быстрдействия t^{*0} .

Для определения оптимального по быстрдействию управления типа обратной связи погрузим задачу (1.4)–(1.7) в семейство аналогичных задач оптимального управления

$$\begin{aligned} t^{*0}(z) &= \min t^*, \\ \dot{x} &= Ax + bu, x(0) = z, \\ x(t^*) &= 0, \\ |u(t)| &\leq L, t \geq 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Обозначим $u^0(t|z), t \in [0, t^{*0}(z)]$ – оптимальное программное управление для состояния z, \bar{X} – множество всех z , для которых существует оптимальное программное управление.

Функция

$$u^0(z) = u^0(0|z), z \in \bar{X} \quad (1.9)$$

называется *оптимальным (стартовым) по быстрдействию управлением типа обратной связи* в задаче оптимального управления (1.4)–(1.7).

Можно показать, что функция (1.9) является дискретной ограниченной стабилизирующей обратной связью для состояния z .

Под траекторией $x^0(t), t \geq 0$ системы задачи (1.8), замкнутой оптимальной обратной связью (1.9), будем понимать непрерывное решение уравнений

$$\dot{x} = Ax + bu^0(t), x(0) = x_0,$$

где $u^0(t) = u^0(x^0(\tau)), t \in [\tau, \tau + h], \tau = kh, k = 0, 1, \dots$

В терминах исходной системы оптимальное управление по принципу обратной связи осуществляется следующим образом.

В начальный момент $t=0$ для состояния x_0 вычисляется $u^0(x_0)$ и полагается $u^0(t) = u^0(x_0), 0 \leq t \leq h$. В результате, в момент $t = h$ система

(1.5) оказывается в состоянии $x^0(h)$. Пусть процесс управления осуществлен на промежутке $[0, \tau - h]$ и в момент $\tau = kh$ система оказалась в состоянии $x^0(\tau)$. Управление $u^0(t)$ на следующем промежутке времени $[\tau, \tau + h]$ вычислим по формуле

$$u^0(t) = u^0(x^0(\tau)), t \in [\tau, \tau + h].$$

Отсюда следует, что в каждом конкретном процессе управления динамической системой нужны значения обратной связи вдоль реализовавшейся траектории $x^*(t), t \geq 0$. При этом нужны значения $u^*(t), t \geq 0$ лишь по ходу конкретного процесса управления.

Устройство, способное вычислять эти значения, будем называть *оптимальным по быстрдействию стабилизатором* (или просто стабилизатором).

Таким образом, проблемы построения оптимальной по быстрдействию обратной связи $u^0(x), x \in \bar{X}$ свелась к описанию алгоритма работы оптимального стабилизатора.

2 Алгоритм построения оптимальной по быстрдействию стабилизирующей обратной связи

Согласно определению, для начала работы оптимального стабилизатора необходимо знать значение $u^0(0)$ оптимального программного управления $u^0(t|x_0), t \in [0, t^{*0}]$, задачи (1.8). Поскольку вся информация о задаче (1.8) известна заранее, то ее программное решение также можно построить до начала процесса управления. В данной работе оптимальное программное управление $u^0(t|x_0), t \in [0, t^{*0}]$, строилось следующим образом.

Используя формулу Коши, запишем задачу (1.8) в эквивалентной функциональной форме:

$$t^* \rightarrow \min,$$

$$\int_0^{t^*} F(t^* - t)bu(t)dt = F(t^*)x_0, \quad (2.1)$$

$$|u(t)| \leq L, t \geq 0,$$

где $F(t), t \geq 0, F(t) \in R^{n \times n}$ – фундаментальная матрица решений системы $\dot{x} = Ax$.

В принятом классе доступных управлений задача (2.1) эквивалентна задаче:

$$N \rightarrow \min,$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} u_j \int_{jh}^{(j+1)h} F(Nh - t)bdt = -F(Nh)x_0, \quad (2.2)$$

$$|u_j| \leq L, j = 0, N - 1,$$

$$N = t^*/h, N > 0,$$

где $u_j \in R, u_j$ – значение управления $u(t)$ на промежутке $[jh, (j+1)h]$.

Для построения допустимого управления задачи (2.2) выберем произвольное число $N > 0$ и рассмотрим задачу:

$$\max_{0 \leq j \leq N-1} |u_j| \rightarrow \min,$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} u_j \int_{jh}^{(j+1)h} F(Nh-t) b dt = -F(Nh)x_0, \quad (2.3)$$

$$|u_j| \leq L, \quad j = \overline{0, N-1}.$$

Заменим задачу (2.3) на следующую задачу минимизации интенсивности управления:

$$\rho \rightarrow \min,$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} u_j \int_{jh}^{(j+1)h} F(Nh-t) b dt = -F(Nh)x_0, \quad (2.4)$$

$$|u_j| \leq \rho, \quad j = \overline{0, N-1}.$$

Введем новые переменные $\xi_j = u_j/\rho$, $j = \overline{0, N-1}$, $\xi^1 = 1/\rho$. В новых переменных задача (2.4) эквивалентна задаче линейного программирования:

$$\xi^1 \rightarrow \max,$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} \xi_j \int_{jh}^{(j+1)h} F(Nh-t) b dt + \xi^1 F(Nh)x_0 = 0, \quad (2.5)$$

$$-1 \leq \xi_j \leq 1, \quad j = \overline{0, N-1}, \quad \xi^1 \geq 0.$$

Пусть $\xi^{10}, \xi_j^0, j = \overline{0, N-1}$ – оптимальный план задачи (2.5). Рассмотрим 2 случая:

- 1) $\rho^0 = 1/\xi^{10} > L$;
- 2) $\rho^0 = 1/\xi^{10} \leq L$.

В первом случае полагаем $N=N-1$ и вновь решаем задачу (2.5). Число N уменьшаем до тех пор, пока $\rho^0 = 1/\xi^{10} \leq L$. Фиксируем значение $N^0 = N$, при котором $\rho^0 \leq L$.

Во втором случае полагаем $N=N+1$ и вновь решаем задачу (2.5). Увеличиваем число N пока не выполнится условие $\rho > L$. При этом фиксируем последнее значение $N^0 = N$, для которого $\rho^0 \leq L$.

В обоих случаях N^0 – оптимальное значение N для задачи (2.2); $t^* = N^0 h$ – время оптимального быстрдействия,

$$u^0(t) = u^0(t | x_0), \quad t \in [jh, (j+1)h], \quad j = \overline{0, N-1},$$

$$u^0(t) = u_j^0 = \xi_j^0 \rho^0, \quad \rho^0 = 1/\xi^{10}$$

– оптимальное программное управление задачи (1.8).

Наиболее эффективным методом решения задачи (2.5) является двойственный метод [6]. Итерации двойственного метода на современных вычислительных машинах осуществляются за небольшое время. Если время, затраченное конкретным вычислительным устройством на построение оптимального управления задачи (2.5), меньше, чем h , то можно говорить, что для дан-

ной задачи с помощью данного вычислительного устройства можно реализовать оптимальное управление типа обратной связи в режиме реального времени [2]–[5].

3 Пример

В качестве примера рассмотрим реализацию оптимальной по быстрдействию обратной связи для задачи стабилизации ограниченными управлениями двух материальных точек, соединенных упругой связью (рисунок 1).

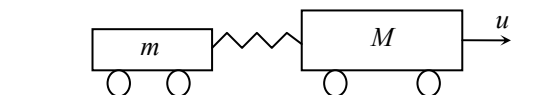


Рисунок 1

Пусть поведение такой системы описывается уравнениями:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -9x_1 + 9x_3, \quad (3.1)$$

$$\dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = 3x_1 - 3x_3 + u$$

($x_1, x_2, x_3, x_4, u \in R$), где x_1, x_3 – отклонение первой и второй точек системы от состояний равновесия $x_1 = x_3 = 0$; x_2, x_4 – скорости этих точек; u – управляющее воздействие.

Пусть в начальный момент $t=0$ рассматриваемая система находилась в состоянии $x_1(0) = 0.5, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0.5, x_4(0) = 0$.

Требуется перевести ее в состояние

$$x_1(t^*) = 0, \quad x_2(t^*) = 0, \quad x_3(t^*) = 0, \quad x_4(t^*) = 0 \quad (3.2)$$

за минимально возможное время. При этом будем считать, что доступные управления представляют кусочно-постоянные функции $u(t), t \geq 0$, удовлетворяющие ограничению

$$|u(t)| \leq L, \quad t \geq 0. \quad (3.3)$$

Качество допустимых управлений будем оценивать по значению функционала

$$t^* \rightarrow \min. \quad (3.4)$$

При решении задачи (3.1)–(3.4) были заданы следующие значения параметров: 1) $L = 0.8, h = 0.1$; 2) $L = 1.0, h = 0.1$.

На рисунках 2, 3 представлены реализовавшиеся траектории системы $x_1^*(t)$ и $x_3^*(t)$, а на рисунке 4 – значения стабилизирующей обратной связи. Кривые 1 (сплошные) соответствуют ограничению $L = 0.8$, кривые 2 (штриховые) – ограничению $L = 1.0$. При этом время стабилизации системы составило: при $L = 0.8$ – 5.4, при $L = 1.0$ – 5.3.

Для сравнения результатов оптимизации рассматриваемой системы, наряду с задачей (3.1)–(3.4) была решена следующая задача минимизации интенсивности управляющего воздействия вида (2.4) без дополнительного требования быстрдействия:

$$\rho \rightarrow \min,$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -9x_1 + 9x_3, \dot{x}_3 = x_4, \dot{x}_4 = 3x_1 - 3x_3 + u,$$

$$x_1(0) = 0.5, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0.5, x_4(0) = 0, \quad (3.5)$$

$$x_1(t^*) = 0, x_2(t^*) = 0, x_3(t^*) = 0, x_4(t^*) = 0,$$

$$|u(t)| \leq L, t \geq 0.$$

На рисунках 2, 3 представлены реализовавшиеся траектории системы $x_1^*(t)$ и $x_3^*(t)$, а на рисунке 4 – значения стабилизирующей обратной связи. Кривые 3 (сплошные) соответствуют ограничению $L=0.8$, кривые 4 (штриховые) – ограничению $L=1.0$. Время стабилизации системы: при $L=0.8$ – 22.1, при $L=1.0$ – 21.5.

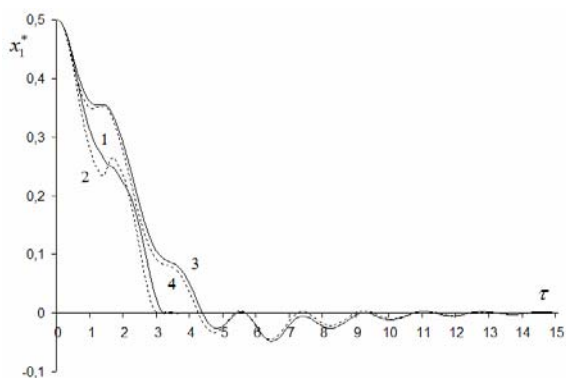


Рисунок 2 – Траектория замкнутой системы $x_1^*(\tau)$

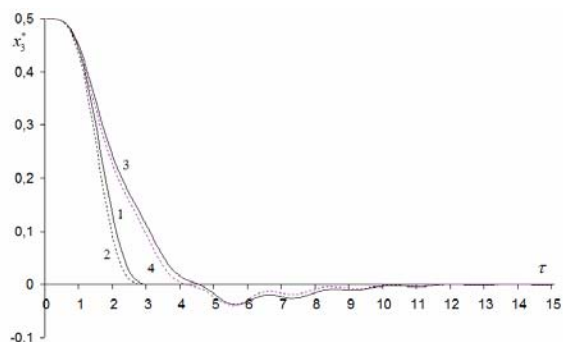


Рисунок 3 – Траектория замкнутой системы $x_3^*(\tau)$

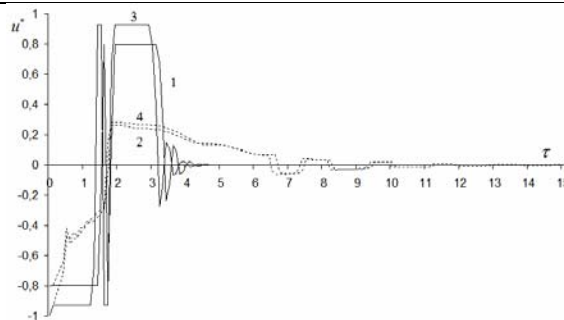


Рисунок 4 – Реализовавшиеся значения оптимальной обратной связи

ЛИТЕРАТУРА

1. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем / А.А. Фельдбаум. – М. : Физматгиз, 1963. – 435 с.
2. Габасов, Р. Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, О.И. Костюкова // Изв. РАН. Техн. кибернетика. – 1992. – № 4 – С. 3–19.
3. Gabasov, R. Real-time construction of optimal closable feedbacks / R. Gabasov, F.M. Kirillova. – 13th World Congress of IFAC International Federation of Automatic Control. – San Francisco, CA, USA, June 30 – July 5. – San Francisco, CA, USA – 1996. – Vol. D. – P. 231–236.
4. Габасов, Р. Оптимальное управление в режиме реального времени / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Вторая международная конференция по проблемам управления (17–19 июня 2003 года): Пленарные доклады. – М.: Институт проблем управления, 2003. – С.20–47.
5. Габасов, Р. Оптимальное управление и наблюдение в реальном времени / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2006. – № 3. – С. 90–111.
6. Габасов, Р. Конструктивные методы оптимизации. Часть 1. Линейные системы / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, А.И. Тятюшкин. – Минск : Университетское, 1984. – 213 с.

Поступила в редакцию 14.10.10.

УДК 512.542

О SE-ЯДРЕ ПОДГРУПП КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

А.Н. Скиба

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

ON THE SE-CORE OF SUBGROUPS OF A FINITE GROUP

A.N. Skiba

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Даются условия, при которых конечная группа принадлежит композиционной формации, содержащей все конечные сверхразрешимые группы, а также обобщаются основные результаты работ [20]–[32], [34]–[37].

Ключевые слова: конечная группа, насыщенная формация, композиционная формация, локальная формация Бэра, p -нильпотентная группа, циклический главный фактор, сверхразрешимая группа, квазисверхразрешимая группа, S -квазинормальная подгруппа, S -добавляемая подгруппа, S -квазинормально вложенная подгруппа, SE-ядро подгруппы, силовская подгруппа, обобщенная подгруппа Фиттинга, максимальная подгруппа.

We give some conditions under which a finite group belongs to a composition formation containing all finite supersoluble groups. The main results of the papers [20]–[32], [34]–[37] are generalized.

Keywords: finite group, saturated formation, composition formation, Baer-local formation, p -nilpotent group, cyclic chief factor, supersoluble subgroup, quasisupersoluble group, S -quasinormal subgroup, S -supplemented subgroup, S -quasinormally embedded subgroup, the SE-core of subgroup, Sylow subgroup, the generalized Fitting subgroup, maximal subgroup.

AMS 2000 Mathematics Subject Classification: 20D10, 20D15, 20D20.

Introduction

Throughout this paper, all groups are finite.

Let \mathfrak{F} be any non-empty class of groups. Then we use $G^{\mathfrak{F}}$ to denote the intersection of all normal subgroups N of the group G with $G/N \in \mathfrak{F}$. A class \mathfrak{F} of groups is said to be a formation if for every group G , every homomorphic image of $G/G^{\mathfrak{F}}$ belongs to \mathfrak{F} . All applications of the formations theory are related to the so-called saturated and solubly saturated formations (see, for example, [1]–[6]).

Recall that a formation \mathfrak{F} is said to be *saturated* if \mathfrak{F} contains each group G with $G^{\mathfrak{F}} \leq \Phi(G)$; \mathfrak{F} is said to be *solubly saturated* or *Baer-local* (see [5, Chapter IV]) or *composition* [2] if \mathfrak{F} contains each group G with $G^{\mathfrak{F}} \leq \Phi(N)$ for some soluble normal subgroup N of G .

Many results of the theory of formations are related to the study of conditions under which a group belongs to a saturated formation. In this way a large number of criteria of solubility, supersolubility, p -nilpotency, nilpotency, and so on, as well as general criteria for membership of a group in a saturated formation have been found. Nevertheless, in this direction there are almost no results related to composition formations.

In this paper, we give conditions under which a group belongs to a composition formation containing all supersoluble groups.

1 Main definitions and results

Recall that a subgroup A of a group G is said to be *S -quasinormal*, *S -permutable*, or *$\pi(G)$ -permutable* in G (Kegel [7]) if $AP = PA$ for all Sylow subgroups P of G . The S -quasinormal subgroups possess many interesting properties [7]–[9] and such subgroups are used for analysis of many questions of the group theory (see Section 5 in [10]). This circumstance was the main motivation for the introduction and study of various generalizations of the S -quasinormality. One of the most interesting generalizations of this concept was found by Ballester-Bolinches and Pedraza-Aguilera: A subgroup A of a group G is said to be *S -quasinormally embedded* or *S -permutably embedded* in G [11] if each Sylow subgroup of H is also a Sylow subgroup of some S -quasinormal subgroup of G . Based on the last concept, we introduce the following.

Let H be a subgroup of a group G , H_{seG} the subgroup generated by all subgroups of H which are S -quasinormally embedded in G . Then we say that H_{seG} is the *SE-core* of H in G .

Definition 1.1. Let H be a subgroup of a group G . Then we say that:

(1) H is *SE-quasinormal* in G if for some subnormal subgroup T of G we have $HT = G$ and $H \cap T \leq H_{seG}$.

(2) H is *SE-supplemented* in G if for some subgroup T of G we have $HT = G$ and $H \cap T \leq H_{seG}$.

We have proved the following

Theorem 1.2. Let \mathfrak{F} be a composition formation containing all supersoluble groups and E a normal subgroup of G such that $G/E \in \mathfrak{F}$. Suppose that for every non-cyclic Sylow p -subgroup P of E with $|P|=p^n$, there is an integer k such that $k < n$ and the subgroups of P or order p^k and order 4 are SE -quasinormal in G . Then $G \in \mathfrak{F}$.

The proof of Theorem 1.2 relies on the following non-trivial observations.

Theorem 1.3. Let E be a normal subgroup of a group G , p a prime divisor of $|E|$. Let P be a Sylow p -subgroup of E and $|P|=p^n$. Suppose that either $n=1$ or $n>1$ and there is an integer k such that $k < n$ and the subgroups of P or order p^k and order 4 (if $p^k=2$ and P is non-abelian) are SE -quasinormal in G .

(I) If $(p-1, |E|)=1$, then each chief factor of G between E and $O_p(E)$ is cyclic.

(II) If $(p-1, |G|)=1$, then each chief factor H/K of G between E and $O_p(E)$ is central, that is, $C_G(H/K)=G$.

Theorem 1.4. Let E be a normal subgroup of a group G . Suppose that for every non-cyclic Sylow p -subgroup P of E with $|P|=p^n$, there is an integer k such that $k < n$ and the subgroups of P or order p^k and order 4 (if $p^k=2$ and P is non-abelian) are SE -quasinormal in G . Then each chief factor of G below E is cyclic.

A chief factor H/K of a group G is called \mathfrak{F} -central provided $(H/K) \times (G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{F}$ (see [3, p.127–128]).

Theorem 1.5 [13]. Let \mathfrak{F} be any formation and G a group. If E is a normal subgroup of G and each chief factor of G below $F^*(E)$ is \mathfrak{F} -central in G , then each chief factor of G below E is \mathfrak{F} -central in G as well.

In this theorem $F^*(E)$ denotes the generalized Fitting subgroup of E , that is, the product of all normal quasinilpotent subgroups of E [12, Chapter X].

Lemma 1.6. Let \mathfrak{F} be a composition formation containing all supersoluble groups and G a group with a normal subgroup E such that $G/E \in \mathfrak{F}$. If E is cyclic, then $G \in \mathfrak{F}$.

From Theorems 1.2 and 1.5 we get

Theorem 1.7. Let \mathfrak{F} be a composition formation containing all supersoluble groups and E a normal subgroup of G such that $G/E \in \mathfrak{F}$. Suppose that for every non-cyclic Sylow p -subgroup P of $F^*(E)$ with $|P|=p^n$, there is an integer k such

that $k < n$ and the subgroups of P or order p^k and order 4 (if $p^k=2$ and P is non-abelian) are SE -quasinormal in G . Then $G \in \mathfrak{F}$.

There are examples showing that we can not replace the condition «to be SE -quasinormal» in Theorems 1.2 and 1.7 by the weaker condition «to be SE -supplemented in G ». Nevertheless, the following results are correct.

Theorem 1.8. Let \mathfrak{F} be a composition formation containing all supersoluble groups and E a normal subgroup of G such that $G/E \in \mathfrak{F}$. Suppose that for every Sylow subgroup P of E , either the maximal subgroups of P or the cyclic subgroups of P of prime order and order 4 (if P is a non-abelian 2-group) are SE -supplemented in G . Then $G \in \mathfrak{F}$.

Theorem 1.9. Let \mathfrak{F} be a composition formation containing all supersoluble groups and E a normal subgroup of G such that $G/E \in \mathfrak{F}$. Suppose that for every Sylow subgroup P of $F^*(E)$, either the maximal subgroups of P or the cyclic subgroups of P of prime order and order 4 (if P is a non-abelian 2-group) are SE -supplemented in G . Then $G \in \mathfrak{F}$.

The proofs of Theorems 1.8 and 1.9 are based on the following our results.

Theorem 1.10. Let E be a normal subgroup of a group G , $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ the set of all prime divisors of $|E|$ and $\pi_i = \{p_1, p_2, \dots, p_i\}$. Suppose that for each $p \in \pi_i$ and for any Sylow p -subgroup P of E , the cyclic subgroups of P of prime order or order 4 are SE -supplemented in G . Then E has a normal Hall π_i -subgroup E_{π_i} and each chief factor of G between E and E_{π_i} is cyclic.

Theorem 1.11. Let E be a normal subgroup of a group G , $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ the set of all prime divisors of $|E|$ and $\pi_i = \{p_1, p_2, \dots, p_i\}$. Suppose that for each $p \in \pi_i$, the maximal subgroups of any Sylow p -subgroup of E are SE -supplemented in G . Then E has a normal Hall π_i -subgroup E_{π_i} and each chief factor of G between E and E_{π_i} is cyclic.

Note that Theorems 1.2–1.5 and 1.7–1.11 cover main results of many papers. As an illustration of this, we discuss a small portion of them in Section 3. All unexplained notations and terminology are standard. The reader is referred to [5], [4] and [6] if necessary.

2 Some basic lemmas

Proofs of Theorems 1.2–1.5 and 1.7–1.11 consist of many stages and the following lemmas are some steps of them.

Lemma 2.1 [7]. Let G be a group and $H \leq K \leq G$.

(1) If H is S -quasinormal in G , then H is S -quasinormal in K .

(2) Suppose that H is normal in G . Then K/H is S -quasinormal in G if and only if K is S -quasinormal in G .

(3) If H is S -quasinormal in G , then H is subnormal in G .

(4) If A and B are S -quasinormal in G , then $A \cap B$ and $\langle A, B \rangle$ are S -quasinormal in G .

From Lemma 2.1 (3) we get

Lemma 2.2. If H is an S -quasinormal subgroup of a group G and H is a p -group for some prime p , then $O^p(G) \leq N_G(H)$.

Lemma 2.3 [8]. Let G be a group and $A, B \leq G$.

(1) If A is S -quasinormal in G , then $A \cap B$ is S -quasinormal in B .

(2) If A is S -quasinormal in G , then A/A_G is nilpotent.

Lemma 2.4 [11]. Let G be a group and $H \leq K \leq G$.

(1) If H is S -quasinormally embedded in G , then H is S -quasinormally embedded in K .

(2) If H is normal in G and E is an S -quasinormally embedded subgroup of G , then EH is S -quasinormally embedded in G and EH/H is S -quasinormally embedded in G/H .

From Lemma 2.1 (4) we also get

Lemma 2.5. Let H be an S -quasinormally embedded subgroup of a group G . If $H \leq O_p(G)$ for some prime p , then H is S -quasinormal in G .

Lemma 2.6. Let G be a group, $H \leq K \leq G$ and N a normal subgroup of G .

(1) $H_{seG} \trianglelefteq H$.

(2) $H_{seG} \leq H_{seK}$.

(3) $H_{seG}N/N \leq (HN/N)_{se(G/N)}$.

(4) Suppose that $(|N|, |H|) = 1$. Then $H_{seG}N/N = (HN/N)_{se(G/N)}$.

(5) $(H_{seG})^x = (H^x)_{seG}$ for any $x \in G$.

Proof. Let L be an S -quasinormally embedded subgroup of G contained in H , q a prime dividing $|L|$, Q a Sylow q -subgroup of L and E an S -quasinormal subgroup of G such that $Q \in \text{Syl}_q(E)$.

(1) Let $x \in H$. Then $L^x \leq H$ and if R is a Sylow q -subgroup of L^x , then $R = Q_1^x$ for some Sylow q -subgroup Q_1 of L . Without loss we may assume that $Q_1 = Q$. Note that $Q^x \in \text{Syl}_q(E^x)$ and E^x clearly is an S -quasinormal subgroup of G .

Hence L^x is an S -quasinormally embedded subgroup of G , so we have (1).

(2) $E \cap K$ is an S -quasinormal subgroup of K by Lemma 2.3 (1). Moreover, $Q \leq E \cap K$ and hence Q is a Sylow q -subgroup of $E \cap K$. Therefore $L \leq H_{seK}$, so $H_{seG} \leq H_{seK}$.

(3) Clearly $LN/N \leq HN/N$ and LN/N is an S -quasinormally embedded subgroup of G/N by Lemma 2.4 (2). Hence $H_{seG}N/N \leq (HN/N)_{se(G/N)}$.

(4) In view of (3) we have only to prove that $(HN/N)_{se(G/N)} \leq H_{seG}N/N$. Let V/N be an S -quasinormally embedded subgroup of G/N such that $V/N \leq HN/N$. Then $V = V \cap HN = N(V \cap H)$. We shall show that $U = V \cap H$ is S -quasinormally embedded in G . Let p be any prime dividing $|U|$ and $P \in \text{Syl}_p(U)$. Then $P \in \text{Syl}_p(V)$ since $(|N|, |H|) = 1$. Hence $PN/N \in \text{Syl}_p(V/N)$. Let W/N be an S -quasinormal subgroup of G/N such that $PN/N \in \text{Syl}_p(W/N)$. Then $PN/N = W_pN/N$ for some Sylow p -subgroup W_p of E . Hence $PN = W_pN$. It is clear that $P, W_p \in \text{Syl}_p(PN)$, so $P = (W_p)^n$ for some $n \in N$. The subgroup W is S -quasinormal in G by Lemma 2.1 (2), so W^n is S -quasinormal in G . Moreover, $P = (W_p)^n \in \text{Syl}_p(W^n)$ and hence U is S -quasinormally embedded in G . Therefore $U \leq H_{seG}$. Hence $V/N = UN/N \leq H_{seG}N/N$ and so $(HN/N)_{se(G/N)} \leq H_{seG}N/N$.

(5) This is evident.

Lemma 2.7. Let G be a group, H an SE-quasinormal subgroup of G and N a normal subgroup of G .

(1) If $H \leq K \leq G$, then H is SE-quasinormal in K .

(2) If $N \leq H$, then H/N is SE-quasinormal in G/N .

(3) If $(|N|, |H|) = 1$, then HN/N is SE-quasinormal in G/N .

(4) The subgroup H^x is SE-quasinormal in G for all $x \in G$.

(5) Suppose that H is a p -subgroup for some prime p and $H \neq H_{seG}$. Then G has a normal subgroup M such that $|G:M| = p$ and $G = HM$.

Proof. Let T be a subgroup of G such that $HT = G$ and $H \cap T \leq H_{seG}$. Then $K = H(T \cap K)$ and $(T \cap K) \cap H = T \cap H \leq H_{seG} \leq H_{seK}$ by Lemma 2.6 (2). Hence we have (1).

(2) Since $(H/N)(NT/N) = G/H$ and

$$(H/N) \cap (NT/N) =$$

$$= N(H \cap T)/N \leq H_{seG}N/N \leq (H/N)_{se(G/N)}$$

by Lemma 2.6 (3), H/N is SE -supplemented in G/N .

(3) Since $(|N|, |H|) = 1$, $N \leq T$. Now we have

$$(T/N) \cap (HN/N) =$$

$$= N(T \cap H)/N \leq NH_{seG}/N \leq (NH/N)_{se(G/N)}.$$

Hence HN/N is SE -supplemented in G/N .

(4) From $HT = G$ we have $H^x T^x = G$. On the other hand, from $H \cap T \leq H_{seG}$ we get $H^x \cap T^x = (H \cap T)^x \leq (H_{seG})^x = (H^x)_{seG}$ by Lemma 2.6 (5). Hence H^x is SE -supplemented in G .

(5) By hypothesis G has a subnormal subgroup T such that $HT = G$ and $T \cap H \leq H_{seG} \neq H$. Since $H \neq H_{seG}$, $T \neq G$, so G has a proper normal subgroup K such that $T \leq K$. Since G/K is a p -group, G has a normal maximal subgroup M such that $HM = G$ and $|G : M| = p$.

We use $\mathcal{A}(p-1)$ to denote the formation of all abelian groups of exponent dividing $p-1$. The symbol $Z_{\mathcal{U}}(G)$ denotes the largest normal subgroup of a group G such that every chief factor of G below $Z_{\mathcal{U}}(G)$ is cyclic.

Lemma 2.8. *Let G be a group, H an SE -subgroup of G and N a normal subgroup of G .*

(1) *If $H \leq K \leq G$, then H is SE -supplemented in K .*

(2) *If $N \leq H$, then H/N is SE -supplemented in G/N .*

(3) *If $(|N|, |H|) = 1$, then HN/N is SE -supplemented in G/N .*

(4) *The subgroup H^x is SE -supplemented in G for all $x \in G$.*

Proof. See the proof of Lemma 2.7.

Lemma 2.9 [13, Lemma 2.2]. *Let E be a normal p -subgroup of a group G . If $E \leq Z_{\mathcal{U}}(G)$, then*

$$(G/C_G(E))^{A(p-1)} \leq O_p(G/C_G(E)).$$

The following lemma may be proved based on some results in [14] on f -hypercentral action (see [2, Chapter II] or [5, Chapter IV, Section 6]). For reader's convenience, we give a direct proof.

Lemma 2.10. *Let P be a normal p -subgroup of a group G . Let D be a characteristic subgroup of a p -subgroup P such that every non-trivial p' -automorphism of P induces a non-trivial automorphism of D . Suppose that $D \leq Z_{\mathcal{U}}(G)$. Then $P \leq Z_{\mathcal{U}}(G)$.*

Proof. Let $C = C_G(P)$, H/K any chief factor of G below P . Then $O_p(G/C_G(H/K)) = 1$ by [15, Appendix C, Corollary 6.4]. Since $D \leq Z_{\mathcal{U}}(G)$, then $(G/C_G(D))^{A(p-1)}$ is a p -group by Lemma 2.9. Hence $(G/C)^{A(p-1)}$ is a p -group. Thus

$G/C_G(H/K) \in \mathcal{A}(p-1)$ and so $|H/K| = p$ by [15, Chapter 1, theorem 1.4]. Therefore $P \leq Z_{\mathcal{U}}(G)$.

Let P be a p -group. If P is not a non-abelian 2-group we use $\Omega(P)$ to denote the subgroup $\Omega_1(P)$. Otherwise, $\Omega(P) = \Omega_2(P)$.

Lemma 2.11 [16]. *Let P be a p -group of class at most 2. Suppose that $\exp(P/Z(P))$ divides p .*

(1) *If $p > 2$, then $\exp(\Omega(P)) = p$.*

(2) *If P is a non-abelian 2-group, then $\exp(\Omega(P)) = 4$.*

Proof. See page 3 in [16].

Lemma 2.12 [17]. *Let G be a group and $A \leq G$.*

(1) *If A is subnormal in G and A is a π -subgroup of G , then $A \leq O_{\pi}(G)$.*

(2) *If A is subnormal in G and A is nilpotent, then $A \leq F(G)$.*

Following Doerk and Hawkes [5], we use $C^p(G)$ to denote the intersection of the centralizers of all abelian p -chief factors of the group G ($C^p(G) = G$ if G has no such chief factors).

For every function f of the form

$$f : \mathbb{P} \cup \{0\} \rightarrow \{\text{group formations}\}, \quad (*)$$

we put, following [18],

$$CLF(f) = \{G \text{ is a group} \mid G/G_{\mathcal{S}} \in f(0) \text{ and}$$

$$G/C^p(G) \in f(p) \text{ for any prime } p \in \pi(\text{Com}(G))\}.$$

Here $G_{\mathcal{S}}$ denotes the \mathcal{S} -radical of G (i.e., the largest normal soluble subgroup of G); $\text{Com}(G)$ denotes the class of all abelian groups A such that $A \cong H/K$ for some composition factor H/K of G .

Proof of Lemma 1.6. Without loss we may assume that E is a minimal normal subgroup of G , so $|E| = p$ for some prime p . By [18, Theorem 1], $F = CLF(f)$ for some function of the form (*). It is clear that the group $H = E \rtimes (G/C_G(E))$ is supersoluble, so $H \in \mathfrak{F}$. Hence $G/C_G(E) \in f(p)$. Let $C^p/E = C^p(G/E)$. Then $C^p(G) = C^p \cap C_G(E)$ by [5, Chapter A, Theorem 3.2]. But since $G/E \in \mathfrak{F}$, $G/C^p = (G/E)/C^p(G/E) \in f(p)$ and so $G \in \mathfrak{F}$.

Lemma 2.13 [2, Chapter I, Lemma 4.1]. *Let Q be a cyclic automorphism group of an elementary abelian p -group P of order p^n . If n is the smallest positive integer such that $|Q|$ divides $p^n - 1$, then Q is irreducible.*

Proof of Theorem 1.7. Suppose that this assertion is false and consider a counterexample (G, E) for which $|G||E|$ is minimal. Let p be the smallest prime dividing $|E|$. Then E is p -nilpotent by Theorem 1.3. Let V be a Hall p' -subgroup of E .

Then V is characteristic in E , so V is normal in G . Moreover, the hypothesis holds for (G, V) and for $(G/V, E/V)$ by Lemma 2.7 (1) (3). Hence in the case where $V \neq 1$ we have $V \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$ and $E/V \leq Z_{\mathfrak{U}}(G/V)$ by the choice of (G, E) , so $E \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$, a contradiction. Therefore $E = P$, so $E \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$ by Theorem 1.3.

3 Applications, examples, final remarks

I. In the literature one can find a large number of special cases of Theorems 1.2–1.5 and 1.7–1.11. In this section we discuss some of them.

A subgroup H of a group G is said to be c -normal in G [20] if G has a normal subgroup T such that $HT = G$ and $H \cap T \leq H_G$; H is said to be c^* -normal in G [21] if G has a normal subgroup T such that $HT = G$ and $H \cap T$ is S -quasinormally embedded in G .

Two open questions. Researches of many authors are connected with analysis of the following general question: *Let \mathfrak{F} be a saturated formation containing all supersoluble groups and G a group with a normal subgroup E such that $G/E \in \mathfrak{F}$. Under what conditions on E then, does G belong to \mathfrak{F} ?*

We recall a few typical results in this direction. If \mathfrak{F} is a saturated formation containing all supersoluble groups and G is a group with a normal subgroup E such that $G/E \in \mathfrak{F}$, then the following results are true.

(1) If the cyclic subgroups of E of prime order and order 4 are either S -quasinormal (Ballester-Bolinches and Pedraza-Aguilera [22], Asaad and Csörgő [23]) or c -normal (Ballester-Bolinches and Wang [24]) in G , then $G \in \mathfrak{F}$.

(2) If the cyclic subgroups of every Sylow subgroup of $F^*(E)$ of prime order and order 4 are either S -quasinormal (Li and Wang [25]) or c -normal (Wei, Wang and Li [26]) or S -quasinormally embedded (Li and Wang [27]) in G , then $G \in \mathfrak{F}$.

(3) If the maximal subgroups of every Sylow subgroup of E are either S -quasinormal (Asaad [28]) or c -normal (Wei [29]) in G , then $G/E \in \mathfrak{F}$.

(4) If the maximal subgroups of every Sylow subgroup of $F^*(E)$ are either S -quasinormal (Li and Wang [30]) or c -normal (Wei, Wang and Li [31]) or c^* -normal (Wei and Wang, [21]) or S -quasinormally embedded (Li and Wang [27]) in G , then $G \in \mathfrak{F}$.

(5) If E is soluble and the maximal subgroups of every Sylow subgroup of $F(E)$ are S -quasinormally embedded in G , then $G \in \mathfrak{F}$ (Asaad and Heliel [31]).

Bearing in mind the above-mentioned results it is natural to ask:

(I) *Is it true that all the above-mentioned results can be strengthened by proving them for the case where \mathfrak{F} is a composition formation?*

(II) *Is it true that all the above-mentioned results can be improved by of clarifying the character embedding of the subgroup E into the group G ?*

Theorems 1.2, 1.4 and 1.7 show that the answers to both these questions are positive. Note that the methods of the above mentioned works [22]–[31] do not allow to answer to at least one of these questions. Note also that Theorems 1.2 and 1.7 not only strengthened all the results in [22]–[31] mentioned above but also give shorter proofs of many of them.

II. Further applications of the results. A subgroup H of a group G is said to be weakly S -permutable in G [10] if there are a subnormal subgroup T of G and an S -permutable subgroup H_s of G contained in H such that $HT = G$ and $H \cap T \leq H_s$. In the paper [32] the following concept which covers properly both S -permutable embedding property and weakly S -permutability was introduced.

Definition 3.1. *Let H be a subgroup of a group G . Then H is said to be weakly S -permutably embedded in G [32] if there are a subnormal subgroup T of G and an S -permutably embedded subgroup H_{se} of G contained in H such that $HT = G$ and $H \cap T \leq H_{se}$.*

It is clear that every weakly S -permutably embedded subgroup is a SE -quasinormal subgroup. Hence main results in [32] are corollaries of Theorems 1.2–1.4 and Corollary 1.7.

The following example shows that in general the set of SE -quasinormal subgroups of a group is wider than the set of all its weakly S -permutably embedded subgroups.

Example. Let Ly be the Lyons simple group. Then in view of [33] there is a group D with minimal normal subgroup N such that $C_D(N) = N \leq O_{67}(D)$, $D/N \cong Ly$ and $N \leq \Phi(D)$. Let Q be a group of order 17. Let $G = D \wr Q = K \rtimes Q$, where K is the base group of the regular wreath product G . Then $P = \Phi(K) = N^t$. Since P is an elementary abelian 67-group, $P = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_t$, where P_i is a minimal normal subgroup of PQ for all $i = 1, 2, \dots, t$, and for some i we have $C_Q(P_i) = 1$. Hence $S = P_i \rtimes Q = Q^S$. It is not difficult to show that S is SE -quasinormal in G and it is not weakly S -permutably embedded in G .

Criteria of p -nilpotency. From Theorem 1.3 we get

Corollary 3.2. *Let E be a normal subgroup of a group G with p -nilpotent quotient G/E , p a prime dividing $|E|$ with $(p-1, |G|)=1$. Let P be a Sylow p -subgroup of E . Suppose that either the maximal subgroups of P or the cyclic subgroups of P of order p and order 4 (if P is non-abelian 2-group) are SE -quasinormal in G . Then G is p -nilpotent.*

Corollary 3.2 is independently interesting since this one generalizes many known results. Here we mention some recent theorems in this direction.

Corollary 3.4 (Assad and Heliel, [31, Theorem 3.1]). *Let P be a Sylow p -subgroup of a group G , where p is the smallest prime divisor of $|G|$. If all maximal subgroups of P are S -quasinormally embedded in G , then G is p -nilpotent.*

Corollary 3.5 (Li at all, [35, Theorem 3.1]). *Let P be a Sylow p -subgroup of a group G , where p is a prime divisor $|G|$ with $(p-1, |G|)=1$. If all maximal subgroups of P are S -quasinormally embedded in G , then G is p -nilpotent.*

Corollary 3.6 (Radaman, Azzat Mohamed and Heliel [36]). *Let G be a group, p the smallest prime dividing $|G|$ and P a Sylow subgroup of G . If the cyclic subgroups of P of prime order or order 4 are c -normal in G , then G is p -nilpotent.*

Corollary 3.7 (Wei and Wang, [21]). *Let E be a normal subgroup of a group G with p -nilpotent quotient G/E , p a prime dividing $|E|$ with $(p-1, |G|)=1$. Let P be a Sylow p -subgroup of E . If every maximal subgroup of P is c -normal in G , then G is p -nilpotent.*

Corollary 3.8 (Li at all [37]). *Let P be a Sylow p -subgroup of a group G , where p is the smallest prime dividing $|G|$. If all maximal subgroups of P are weakly S -permutable in G , then G is p -nilpotent.*

Criteria of quasisupersolubility. A group G is said to be quasisupersoluble [38] if for every its non-cyclic chief factor H/K and every $x \in G$, x induces an inner automorphism on H/K . It is clear that every supersoluble group is quasisupersoluble. Moreover, in [38] it is proved that the class of all quasisupersoluble groups is a Baer-local formation. Hence from Theorems 1.2 and 1.7 we get

Theorem 3.9. *Let G a group with a normal subgroup E such that G/E is quasisupersoluble. If the cyclic subgroups of $F^*(E)$ of prime order or order 4 are SE -supplemented in G , then G is quasisupersoluble.*

Theorem 3.10. *Let G be a group with normal subgroups $X \leq E$ such that G/E is quasisupersoluble. Suppose that the maximal subgroups of every Sylow subgroup of X are SE -supplemented in G . If either $X = E$ or $X = F^*(E)$, then G is quasisupersoluble.*

A large number of other known results (see Section 5 in [10]) are special cases of these two theorems as well.

REFERENCES

1. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – New York: Springer, 1967. – 793 p.
2. Shemetkov, L.A. Formations of finite groups / L.A. Shemetkov. – Moscow : Nauka, Main Editorial Board for Physical and Mathematical Literature, 1978. – 272 p.
3. Shemetkov, L.A. Formations of Algebraic Systems / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba. – Moscow : Nauka, 1989. – 256 p.
4. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht : Springer, 2006. – 367 p.
5. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York : Walter de Gruyter, 1992. – 889 p.
6. Wenbin, Guo. The Theory of Classes of Groups / Wenbin Guo. – Beijing-New York-Dordrecht-Boston-London : Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000. – 325 p.
7. Kegel, O. Sylow-Gruppen and Subnormalteiler endlicher Gruppen / O. Kegel // Math. Z. – 1962. – Vol. 78. – P. 205–221.
8. Deskins, W.E. On quasinormal subgroups of finite groups / W.E. Deskins // Math. Z. – 1963. – Vol. 82. – P. 125–132.
9. Schmid, P. Subgroups Permutable with All Sylow Subgroups / P. Schmid // J. Algebra. – 1998. – Vol. 82. – P. 285–293.
10. Skiba, A.N. On weakly s -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 192–209.
11. Ballester-Bolinches, A. Sufficient conditions for supersolvability of finite groups / A. Ballester-Bolinches, M.C. Pedraza-Aguilera // J. Pure Appl. Algebra. – 1998. – Vol. 127. – P. 113–118.
12. Huppert, B. Finite Groups III / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin-New-York : Springer-Verlag, 1982. – 745 p.
13. Skiba, A.N. A characterization of the hypercyclically embedded subgroups of finite groups / A.N. Skiba // Journal of Pure and Applied Algebra []. – 2010. – doi:10.1016/j.jpaa. – 17.04.2010.
14. Laue, R. Dualization for saturation for locally defined formations / R. Laue // J. Algebra. – 1978. – Vol. 52. – P. 347–353.
15. Weinstein, M. Between Nilpotent and Solvable / M. Weinstein, N.J. Passaic. – Polygonal Publishing House, 1982. – 367 p.

16. *Bercovich, Ya.* Indices of elements and normal structure of finite groups / Ya. Bercovich, L. Kazarin // *J. Algebra.* – 2005. – Vol. 283, №1. – P. 564–583.
17. *Wielandt, H.* Subnormal subgroups and permutation groups / H. Wielandt. – Columbus, Ohio : Lectures given at the Ohio State University, Columbus, 1971. – 275 p.
18. *Skiba, A.N.* Multiply \mathcal{L} -Composition Formations of Finite Groups / A.N. Skiba, L.A. Shemetkov // *Ukrainsk. Math. Zh.* – 2000. Vol. 52, №6. – P. 783–797.
19. *Gorenstein, D.* Finite Groups / D. Gorenstein. – New York-Evanston-London : Harper & Row Publishers, 1968. – 463 p.
20. Wang, Y. c -normality of groups and its properties / Y. Wang // *J. Algebra.* – 1996. – Vol. 180. – P. 954–965.
21. *Wei, H.* On c^* -normality and its properties / H. Wei, Y. Wang // *J. Group Theory.* – 2007. – Vol. 10. – P. 211–223.
22. *Ballester-Bolinches, A.* On minimal subgroups of finite groups / A. Ballester-Bolinches, M.C. Pedraza-Aguilera // *Acta Math. Hungar.* – 1996. – Vol. 7. – P. 335–342.
23. *Asaad, M.* Influence of minimal subgroups on the structure of finite group / M. Asaad, P. Csörgő // *Arch. Math. (Basel).* – 1999. – Vol. 72. – P. 401–404.
24. *Ballester-Bolinches, A.* Finite groups with some C -normal minimal subgroups / A. Ballester-Bolinches, Y. Wang // *J. Pure Appl. Algebra.* – 2000. – Vol. 153. – P. 121–127.
25. *Li, Y.* The influence of minimal subgroups on the structure of a finite group / Y. Li, Y. Wang // *Proc. Amer. Math. Soc.* – 2002. – Vol. 131. – P. 337–341.
26. *Wei, H.* On c -normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups, II / H. Wei, Y. Wang, Y. Li // *Comm. Algebra.* – 2003. – Vol. 31. – P. 4807–4816.
27. *Li, Y.* On π -quasinormally embedded subgroups of finite groups / Y. Li, Y. Wang // *J. Algebra.* – 2004. – Vol. 281, №8. – P. 109–123.
28. *Asaad, M.* On maximal subgroups of finite group / M. Asaad // *Comm. Algebra.* – 1998. – Vol. 26. – P. 3647–3652.
29. *Wei, H.* On c -normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups / H. Wei // *Comm. Algebra.* – 2001. – Vol. 29. – P. 2193–2200.
30. *Li, Y.* The influence of π -quasinormality of some subgroups of a finite group / Y. Li, Y. Wang // *Arch. Math. (Basel).* – 2003. – Vol. 81. – P. 245–252.
31. *Asaad, M.* On S -quasinormally embedded subgroups of finite groups / M. Asaad, A.A. Heliel // *J. Pure and Applied Algebra.* – 2001. – Vol. 165. – P. 129–135.
32. *Li, Y.* On Weakly s -permutably Embedded Subgroups of Finite Groups / Y. Li, Sh. Qiao, Y. Wang // *Comm. Algebra.* – 2009. – Vol. 37. – P. 1086–1097.
33. *Griess, R.* The Frattini module / R. Griess, P. Schmid // *Arch. Math.* – 1978. – Vol. 30. – P. 256–266.
34. *Li, S.* On S -quasinormal and c -normal subgroup of a finite group / S. Li, Y. Li // *Czech. Math. J.* – 2008. – Vol. 58, №4. – P. 1083–1095.
35. *Li, Y.* On p -nilpotency of finite groups with some subgroups S -quasinormally embedded / Y. Li, Y. Wang, H. Wei // *Acta Math. Hungar.* – 2005. – Vol. 108, № 4. – P. 283–298.
36. *Radaman, M.* On c -normality of certain subgroups of prime power order of finite groups / M. Radaman, M.A. Mohamed, A.A. Heliel // *Arch. Math.* – 2005. – Vol. 85. – P. 203–210.
37. *Li, Y.* A note on a result of Skiba / Y. Li, S. Qiao, Y. Wang // *Siberian Math. Journal.* – 2009. – Vol. 50, № 3. – P. 467–473.
38. *Guo, W.* On some classes of finite quasi- \mathfrak{F} -groups / W. Guo, A.N. Skiba // *J. Group Theory.* – 2009. – Vol. 12. – P. 407–417.

Поступила в редакцию 01.11.10.

УДК 517.538.52+517.538.53

ДЕТЕРМИНАНТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СОВМЕСТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ

А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

DETERMINANT REPRESENTATION OF PADE JOINT APPROXIMATIONS

A.P. Starovoitov, N.V. Rjabchenko

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Установлены детерминантные формулы для числителей и знаменателей совместных аппроксимаций Паде $\pi_j(z), j=1,2,\dots,r$ совершенной системы функций $\{f_j(z)\}_{j=1}^r$. Доказан аналог теоремы Паде и найден явный вид остатков при приближении $f_j(z)$ рациональной функцией $\pi_j(z)$. Полученные теоремы дополняют и обобщают известные результаты Эрмита, Паде, К. Малера, Е.М. Никишина, А.И. Аптекарева и других авторов.

Ключевые слова: степенной ряд, аппроксимации Паде, совместные аппроксимации Паде, совершенная система функций, детерминантные представления.

Determinant formulas for numerators and denominators of joint approximations of Pade $\pi_j(z), j=1,2,\dots,r$ of perfect system of functions $\{f_j(z)\}_{j=1}^r$ are established. The analogue of the Pade theorem is proved and the obvious kind of the remainders is found at the approach $f_j(z)$ by the rational function $\pi_j(z)$. The received theorems supplement and generalise the known results of Ermite, Pade, K. Mahler, E.M. Nikishin, A.I. Aptekarev and other authors.

Keywords: sedate a number, approximations of Pade, joint approximations of Pade, perfect system of functions, determinant representation.

Введение

В данной работе получены детерминальные представления числителей и знаменателей совместных аппроксимаций Паде для совершенной системы функций.

1 Основные определения

Пусть r – натуральное число, $f = (f_1, f_2, \dots, f_r)$ – набор формальных степенных рядов

$$f_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^j z^k, \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad (1.1)$$

с комплексными коэффициентами. Зафиксируем произвольные целочисленные неотрицательные числа n, m_1, m_2, \dots, m_r и обозначим $m = \sum_{i=1}^r m_i$, $n_i = m + n - m_i$. Будем считать, что система функций $\{f_j(z)\}_{j=1}^r$ является совершенной (определение в [1, с. 150]). Тогда существуют такие многочлены $Q_m, P_{n_i}^i$, что $\deg Q_m \leq m$, $\deg P_{n_i}^i \leq n_i$ и для $i = 1, 2, \dots, r$

$$R_{m,n}^i(z) = Q_m(z)f_i(z) - P_{n_i}^i(z) = c_i z^{n+m+1} + \dots \quad (1.2)$$

При этом однозначно определяются дроби

$$\pi_i(z) = \frac{P_{n_i}^i(z)}{Q_m(z)}, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

которые называют совместными аппроксимациями Паде к набору степенных рядов (1.1).

Для одной функции ($r = 1$) аппроксимации $\pi_1(z)$ были введены Паде [2], который получил также и явные выражения числителя и знаменателя $\pi_1(z)$ в детерминантной форме. Случай $r > 1$ для произвольных наборов (1.1) впервые рассмотрен К. Малером [3]. В работах [3]–[5] приведен ряд примеров совершенных систем и изучены их основные свойства. Однако, явный вид числителя и знаменателя Паде функции e^z и, более того, явный вид совместных аппроксимаций Паде $\pi_j(z)$ к набору экспонент $\{e^{jz}\}_{j=1}^r$ фактически был известен еще Ш. Эрмиту (без формального определения Ш. Эрмит доказал и совершенность системы экспонент $\{e^{jz}\}_{j=1}^r$), который виртуозно использовал свойства $\pi_i(z)$ для доказательства трансцендентности числа e [6]. Представление Ш. Эрмита имеют интегральную форму:

$$Q_m(z) = \frac{z^{n+m+1}}{(n+m)!} \int_0^{\infty} [x^n \prod_{k=1}^r (x-k)^{m_k}] e^{-zx} dx,$$

$$P_{n_i}^i(z) = \frac{e^{iz} z^{n+m+1}}{(n+m)!} \int_i^{\infty} [x^n \prod_{k=1}^r (x-k)^{m_k}] e^{-zx} dx,$$

$$R_{m,n}^i(z) = \frac{e^{iz} z^{n+m+1}}{(n+m)!} \int_0^i [x^n \prod_{k=1}^r (x-k)^{m_k}] e^{-zx} dx.$$

Они послужили отправной точкой для многих исследований [3]–[11], в том числе для решения Линдеменом в 1882 году задачи о «квадратуре круга» [6].

Полученные в работе результаты в случае $r=1$ совпадают с известными утверждениями Паде [12, с. 16–17].

2 Основные результаты

Введем в рассмотрение некоторые матрицы и определители, элементами которых служат коэффициенты степенных рядов (1.1). Для этого рассмотрим матрицы-строки

$$\mathbf{F}_{m_k}^r = (\mathbf{f}_{n-m_k+1}^r \ \mathbf{f}_{n-m_k+2}^r \ \dots \ \mathbf{f}_{n+m-m_k+1}^r), \quad r=1, 2, \dots, m_r,$$

$$\mathbf{E}(z) = (\mathbf{z}^m \ \mathbf{z}^{m-1} \ \dots \ \mathbf{z} \ \mathbf{1}),$$

$$\mathbf{E}^{m_k}(z) = \left(\sum_{i=0}^{n-m_k} \mathbf{f}_i^k \mathbf{z}^{m+i} \quad \sum_{i=0}^{n-m_k+1} \mathbf{f}_i^k \mathbf{z}^{m+i-1} \quad \dots \quad \sum_{i=0}^{n+m-m_k} \mathbf{f}_i^k \mathbf{z}^i \right),$$

и матрицы порядка $m \times m_k$

$$\mathbf{F}^k = \left[\mathbf{F}_{m_k}^k \ \mathbf{F}_{m_k+1}^k \ \dots \ \mathbf{F}_{m_k+m_k}^k \right]^T, \quad k=1, 2, \dots, r,$$

где через C^T обозначается транспонированная к C матрица.

Теорема 2.1. Пусть система функций $\{f_j(z)\}_{j=1}^r$ (1.1) является совершенной. Тогда для любого набора неотрицательных целых чисел n, m_1, m_2, \dots, m_r и $n_i = m + n - m_i$, $m = \sum_{i=1}^r m_i$ существуют совместные аппроксимации Паде

$$\pi_i(z) = P_{n_i}^i(z) / Q_m(z), \quad i=1, 2, \dots, r,$$

а их числители и знаменатель определяются равенствами

$$P_{n_i}^i(z) = \det \left[\mathbf{F}^1 \ \mathbf{F}^2 \ \dots \ \mathbf{F}^r \ \mathbf{E}^{m_k}(z) \right]^T, \quad (2.1)$$

$$Q_m(z) = \det \left[\mathbf{F}^1 \ \mathbf{F}^2 \ \dots \ \mathbf{F}^r \ \mathbf{E}(z) \right]^T.$$

Введем в рассмотрение определители порядка $m+1$

$$d_{n,m,i} = \det \left[\mathbf{F}^1 \ \mathbf{F}^2 \ \dots \ \mathbf{F}^r \ \mathbf{F}_{m_k+m_k+i}^k \right]^T,$$

$$k=1, 2, \dots, r,$$

где матрица-строка

$$\mathbf{F}_{m_k+m_k+i}^k = (\mathbf{f}_{n+i}^k \ \mathbf{f}_{n+i+1}^k \ \dots \ \mathbf{f}_{n+m+i}^k)$$

и определители $d_{n,m}$ m -го порядка, полученные из определителя $d_{n,m,i}$ вычеркиванием $(m+1)$ -го столбца и $(m+1)$ -ой строки.

Теорема 2.2. Для многочленов, определенных равенствами (2.1), справедливы равенства

$$R_{m,n}^k(z) = Q_m(z) \cdot f_k(z) - P_{n_k}^k(z) = \sum_{i=1}^{\infty} d_{n,m,i} \cdot z^{n+m+i}. \quad (2.2)$$

Замечание 2.1. Из определения совместных аппроксимаций Паде и того, что $Q_m(z)$ и $P_{n_k}^k(z)$, определенные равенствами (2.1), являются, соответственно, многочленами степени не выше m и n_k , вытекает, что теорема 2.1 является следствием теоремы 2.2.

Замечание 2.2. При $r=1$ теорема 2.2 доказана Паде [12, теорема 1.1.1]).

Замечание 2.3. В определении совместных аппроксимаций Паде $\pi_i(z)$, $i=1, 2, \dots, r$ многочлены, стоящие в числителе и знаменателе можно брать с точностью до числового множителя, но их отношение задает единственный набор $\{\pi_i(z)\}_{i=1}^r$ совместных аппроксимаций Паде. В дальнейшем полагаем, что числители и знаменатель дробей $\pi_i(z)$, $i=1, 2, \dots, r$ задаются равенствами (2.1).

Следуя Паде, будем искать многочлены $Q_m(z)$ и $P_{n_k}^k(z)$ исходя из равенств (1.2). Пусть

$$P_{n_k}^k(z) = a_0^k + a_1^k z + a_2^k z^2 + \dots + a_{n_k}^k z^{n_k},$$

$$k=1, 2, \dots, r;$$

$$Q_m(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_m z^m.$$

Домножая числитель и знаменатель дроби $\pi_k(z)$ на числовой множитель, можно добиться, чтобы, например, $b_0=1$. Пусть $(q)_k$ – коэффициенты при z^k ряда q . Для нахождения Q_m рассмотрим систему m линейных однородных уравнений относительно $m+1$ неизвестных коэффициентов b_k , $k=0, 1, \dots, m$:

$$(Q_m f_k)_j = 0, \quad (2.3)$$

$$j = n_k + 1, n_k + 2, \dots, m_k + n_k, \quad k=1, 2, \dots, r.$$

Многочлены $P_{n_k}^k(z)$ определим равенствами

$$P_{n_k}^k(z) = \sum_{j=0}^{n_k} (Q_m f_k)_j z^j,$$

$$k=1, 2, \dots, r.$$

Перепишем равенства (2.3) в развернутом виде, принимая во внимание, что $b_0=1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{m+n-m_1+1}^1 + b_1 f_{m+n-m_1}^1 + \dots + b_m f_{n-m_1+1}^1 = 0, \\ f_{m+n-m_1+2}^1 + b_1 f_{m+n-m_1+1}^1 + \dots + b_m f_{n-m_1+2}^1 = 0, \\ \dots \\ f_{m+n}^1 + b_1 f_{m+n-1}^1 + \dots + b_m f_n^1 = 0, \\ \dots \\ f_{m+n-m_r+1}^r + b_r f_{m+n-m_r}^r + \dots + b_m f_{n-m_r+1}^r = 0, \\ f_{m+n-m_r+2}^r + b_1 f_{m+n-m_r+1}^r + \dots + b_m f_{n-m_r+2}^r = 0, \\ \dots \\ f_{m+n}^r + b_1 f_{m+n-1}^r + \dots + b_m f_n^r = 0. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Перепишем систему (2.4) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} f_{n-m_1+1}^1 & f_{n-m_1+2}^1 & \dots & f_{n+m-m_1}^1 \\ f_{n-m_1+2}^1 & f_{n-m_1+3}^1 & \dots & f_{n+m-m_1+1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n^1 & f_{n+1}^1 & \dots & f_{n+m}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-m_r+1}^r & f_{n-m_r+2}^r & \dots & f_{n+m-m_r}^r \\ f_{n-m_r+2}^r & f_{n-m_r+3}^r & \dots & f_{n+m-m_r+1}^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n^r & f_{n+1}^r & \dots & f_{n+m}^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_m \\ b_{m-1} \\ \dots \\ b_{m-m_1+1} \\ \dots \\ b_{m_r} \\ b_{m_r-1} \\ \dots \\ b_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_{n+m-m_1+1}^1 \\ f_{n+m-m_1+2}^1 \\ \dots \\ f_{n+m}^1 \\ \dots \\ f_{n+m-m_r+1}^r \\ f_{n+m-m_r+2}^r \\ \dots \\ f_{n+m}^r \end{pmatrix}.$$

Главный определитель этой системы совпадает с определителем $d_{n,m}$. Предполагаем, что $d_{n,m} \neq 0$. Тогда, решая систему по правилу Крамера, получим явный вид коэффициентов b_1, b_2, \dots, b_m и, следовательно, знаменателя $Q_m(z)$. Пренебрегая числовым множителем, результат можно записать в виде (2.1). Заметим, что если знаменатель определяется равенством (2.1), т. е.

$$Q_m(z) = \det[\mathbf{F}^1 \mathbf{F}^2 \dots \mathbf{F}^r \mathbf{E}(z)]^T,$$

то $b_0 = d_{n,m}$. Следовательно, из предположения, что $d_{n,m} \neq 0$ следует, что $b_0 \neq 0$. Отсюда, с учетом теоремы 2.1, вытекает следующее утверждение.

Утверждение 2.1. Если для всех наборов m_1, m_2, \dots, m_r определитель $d_{n,m} \neq 0$, то система функций (1.1) является совершенной и совместные аппроксимации Паде $\pi_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, r$ определяется единственным образом равенствами (2.1).

Для отыскания явного вида многочлена $P_{n_k}^k(z)$ поступим следующим образом. Рассмотрим выражение:

$$Q_m(z) \sum_{i=0}^{\infty} f_i^k z^i = \begin{pmatrix} f_{n-m_1+1}^1 & f_{n-m_1+2}^1 & \dots & f_{n+m-m_1+1}^1 \\ f_{n-m_1+2}^1 & f_{n-m_1+3}^1 & \dots & f_{n+m-m_1+2}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n^1 & f_{n+1}^1 & \dots & f_{n+m}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-m_r+1}^r & f_{n-m_r+2}^r & \dots & f_{n+m-m_r+1}^r \\ f_{n-m_r+2}^r & f_{n-m_r+3}^r & \dots & f_{n+m-m_r+2}^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n^r & f_{n+1}^r & \dots & f_{n+m}^r \end{pmatrix} \cdot (2.5)$$

Обозначим через A_{m_k} блок в определителе (2.5) вида:

$$\begin{vmatrix} f_{n-m_k+1}^k & f_{n-m_r+2}^k & \dots & f_{n+m-m_k}^k & f_{n+m-m_k+1}^k \\ f_{n-m_k+2}^k & f_{n-m_k+3}^k & \dots & f_{n+m-m_k+1}^k & f_{n+m-m_k+2}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-1}^k & f_n^k & \dots & f_{n+m-2}^k & f_{n+m-1}^k \\ f_n^k & f_{n+1}^k & \dots & f_{n+m-1}^k & f_{n+m}^k \end{vmatrix},$$

где $k = 1, 2, \dots, r$. Вычитая из последней строки определителя (2.5) первую строку блока A_{m_k} , умноженную на z^{m+n-m_k+1} , вторую строку блока A_{m_k} , умноженную на z^{m+n-m_k+2} , и так далее вплоть до последней строки блока A_{m_k} , умноженной на z^{m+n} , получим определитель, у которого ряды в последней строке имеют лакуны длины m_k . Сохраняя начальные отрезки этих рядов, приходим к определителю:

$$P_{n_k}^k(z) =$$

$$\begin{vmatrix} f_{n-m_1+1}^1 & f_{n-m_1+2}^1 & \dots & f_{n+m-m_1}^1 & f_{n+m-m_1+1}^1 \\ f_{n-m_1+2}^1 & f_{n-m_1+3}^1 & \dots & f_{n+m-m_1+1}^1 & f_{n+m-m_1+2}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n^1 & f_{n+1}^1 & \dots & f_{n+m-1}^1 & f_{n+m}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-m_r+1}^r & f_{n-m_r+2}^r & \dots & f_{n+m-m_r}^r & f_{n+m-m_r+1}^r \\ f_{n-m_r+2}^r & f_{n-m_r+3}^r & \dots & f_{n+m-m_r+1}^r & f_{n+m-m_r+2}^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n^r & f_{n+1}^r & \dots & f_{n+m-1}^r & f_{n+m}^r \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^{n_k-m} f_i^k z^{i+m} \sum_{i=0}^{n_k-m+1} f_i^k z^{m+i-1} \dots \sum_{i=0}^{n_k-1} f_i^k z^{i+1} \sum_{i=0}^{n_k} f_i^k z^i$$

Данный определитель представляет многочлен степени не выше n_k , и в компактном виде представлен первым равенством в (2.1).

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2.2. С учетом последнего равенства и равенства (2.5), преобразовав левую часть (2.2), получим

$$R_{n,m}^k(z) =$$

$$\begin{vmatrix} f_{n-m_1+1}^1 & f_{n-m_1+2}^1 & \dots & f_{n+m-m_1}^1 & f_{n+m-m_1+1}^1 \\ f_{n-m_1+2}^1 & f_{n-m_1+3}^1 & \dots & f_{n+m-m_1+1}^1 & f_{n+m-m_1+2}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n^1 & f_{n+1}^1 & \dots & f_{n+m-1}^1 & f_{n+m}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-m_r+1}^r & f_{n-m_r+2}^r & \dots & f_{n+m-m_r}^r & f_{n+m-m_r+1}^r \\ f_{n-m_r+2}^r & f_{n-m_r+3}^r & \dots & f_{n+m-m_r+1}^r & f_{n+m-m_r+2}^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n^r & f_{n+1}^r & \dots & f_{n+m-1}^r & f_{n+m}^r \end{vmatrix} = \sum_{i=n+1}^{\infty} f_i^k z^{i+m} \sum_{i=n+2}^{\infty} f_i^k z^{m+i-1} \dots \sum_{i=n+m}^{\infty} f_i^k z^{i+1} \sum_{i=n+m+1}^{\infty} f_i^k z^i$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^{\infty} z^{n+m+i} \begin{vmatrix} f_{n-m_1+1}^1 & f_{n-m_1+2}^1 & \cdots & f_{n+m-m_1}^1 & f_{n+m-m_1+1}^1 \\ f_{n-m_1+2}^1 & f_{n-m_1+3}^1 & \cdots & f_{n+m-m_1+1}^1 & f_{n+m-m_1+2}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n^1 & f_{n+1}^1 & \cdots & f_{n+m-1}^1 & f_{n+m}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n-m_r+1}^r & f_{n-m_r+2}^r & \cdots & f_{n+m-m_r}^r & f_{n+m-m_r+1}^r \\ f_{n-m_r+2}^r & f_{n-m_r+3}^r & \cdots & f_{n+m-m_r+1}^r & f_{n+m-m_r+2}^r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n^r & f_{n+1}^r & \cdots & f_{n+m-1}^r & f_{n+m}^r \\ f_{n+i}^k & f_{n+i+1}^k & \cdots & f_{n+m}^k & f_{n+m+1}^k \end{vmatrix} = \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} d_{n,m,i} \cdot z^{n+m+i}.
 \end{aligned}$$

При предыдущих преобразованиях воспользовались определением суммы степенного ряда и правилом сложения определителей. Теорема 2.2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никишин, Е.М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М. : Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.
2. Pade, H. Sur La representation approchee d'une fonction par des fractions rationnelles / H. Pade. – Ann. Scient. Ecole norm. super. (3), 1892. – 9. – P. 1–93.
3. Mahler, K. Perfect systems / K. Mahler // Compositio math. – 1968. – 19. – f. 2. – P. 95–166.

4. Jager, H.A. Multidimensional Generalization of the Pade Table / H.A. Jager // K. Nederl. Ak. Wetenschappen, ser. A. – 1964. – № 67. – P. 192–249.
5. Coates, J. On the algebraic approximation of functions / J. Coates // K. Nederl. Ak. Wetenschappen, ser. A. – 1966. – № 69. – P. 421–461.
6. Клейн, Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей / Ф. Клейн. – М.–Л., 1933.
7. de Bruijn, M.G. Three new examples of generalized Pade tables, which are partly normal / M.G. de Bruijn // Depar. of Mathem. Univers. Amsterdam, Report 76–11. – P. 1–13.
8. Сорокин, В.Н. Сходимость совместных аппроксимаций Паде одного класса функций / В.Н. Сорокин // Матем. Сборник. – 1987. – Т. 132(174), №3. – С. 391–400.
9. Никишин, Е.М. Совместные аппроксимации Паде / Е.М. Никишин // Матем. Сборник, 1980. – Т. 113 (155), № 4 (18). – С. 499–519.
10. Аптекарев, А.И. О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент / А.И. Аптекарев // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. – 1981. – № 1. – С. 68–74.
11. Аптекарев, А.И. Об аппроксимациях Паде к набору $\{ {}_1F_1(1, c; \lambda_i z)_{i=1}^k \}$ / А.И. Аптекарев // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. – 1981. – № 2. – С. 58–62.
12. Бейкер, Дж. Аппроксимации Паде / Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис. – М. : Мир, 1986.

Поступила в редакцию 02.11.10.

УДК 512.542

ТЕОРЕМА ЖОРДАНА-ГЕЛЬДЕРА В ТЕОРИИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР МАЛЬЦЕВСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

А.Д. Ходалевич

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

JORDAN-HOLDER THEOREM IN THE THEORY OF UNIVERSAL ALGEBRAS OF MAL'CEV VARIETIES

A.D. Hodalevich

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Изучаются некоторые свойства главных рядов конгруэнций мальцевских алгебр.

Ключевые слова: универсальная алгебра, ряды конгруэнций, мальцевская алгебра.

Some properties of the chief series of congruences of universal Mal'cev algebras are studied.

Keywords: universal algebra, series of congruences, Mal'cev algebra.

Введение

Начиная с известной работы Картера, Фишера, Хоукса [1], вначале в теории конечных групп, затем в других алгебраических системах сложилось направление исследований, связанное с получением новых свойств, дополняющих теорему Жордана-Гельдера. Отметим, что основные этапы этого направления и достаточно полная библиография отражены в работе Лафуенте [2]. Уточняя структурную теорему Жордана-Гельдера для рядов конгруэнций, в настоящей статье доказывается следующий результат: между факторами двух произвольных главных рядов ϕ -разрешимой универсальной алгебры A , принадлежащей мальцевскому многообразию, можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие факторы проективны и оба одновременно либо фраттиниевы, либо нефраттиниевы. Как следствие, отсюда получаем аналогичные результаты работы [1] для конечных групп и результаты работы [3] для мультиколец.

Под термином «алгебра» в дальнейшем будем понимать универсальную алгебру. Все рассматриваемые алгебры предполагаются входящими в фиксированное мальцевское многообразие. Основные определения и обозначения взяты из работы [3].

Дополнительно отметим, что конгруэнции произвольной алгебры обозначаются греческими буквами. Если α – конгруэнция на алгебре A , то $\alpha x = \{y \mid (x, y) \in \alpha\}$ – класс эквивалентности алгебры A по конгруэнции α , $A/\alpha = \{\alpha x \mid x \in A\}$ – факторалгебра алгебры A по конгруэнции α . Если B – подалгебра алгебры A , то αB – совокупность всех классов эквивалентности αx , таких,

что $x \in B$. Если α и β – конгруэнции на алгебре A , и $\alpha \subseteq \beta$, то конгруэнцию β/α на алгебре A/α назовем фактором на A . Очевидно, что $(\alpha x, \alpha y) \in \beta/\alpha$ тогда и только тогда, когда $(x, y) \in \beta$. Через 0_A (или 0) и 1_A (или A^2) будем обозначать соответственно наименьший и наибольший элементы решетки конгруэнций алгебры A .

Будем пользоваться следующим определением централизованности конгруэнций, эквивалентность которого определению Смита [4] доказана в работе [5].

1 Основные определения и леммы

Определение 1.1. Пусть α и β – конгруэнции на алгебре A . Тогда β централизует α (записывается: $\beta \subseteq C_A(\alpha)$), если на α существует такая конгруэнция $C(\alpha, \beta)$, что:

- 1) из $(x, y) \in C(\alpha, \beta)$ (x', y') всегда следует $(x, x') \in \beta$;
- 2) для любого элемента $(x, y) \in \beta$ всегда выполняется $(x, x)C(\alpha, \beta)(y, y)$;
- 3) если $(x, x) \in C(\alpha, \beta)$ (x, y), то $x = y$.

Следующие свойства централизованности, полученные Смитом [4], сформулируем в виде леммы.

Лемма 1.1. Пусть $\beta \subseteq C_A(\alpha)$. Тогда:

- 1) существует единственная конгруэнция $C(\alpha, \beta)$, удовлетворяющая определению 1.1;
- 2) $\alpha \subseteq C_A(\beta)$;
- 3) если $\beta \subseteq C_A(\gamma)$, то $\beta \subseteq C_A(\alpha\gamma)$.

Из леммы 1.1 и леммы Цорна следует, что для произвольной конгруэнции α на алгебре A существует такая единственная наибольшая конгруэнция β , что $\beta \subseteq C_A(\alpha)$. Эту конгруэнцию β будем называть централизатором конгруэнции α в A и обозначать $C_A(\alpha)$.

Лемма 1.2. Пусть α_1, α_2 – конгруэнции на алгебре A , $\alpha_2 \subseteq \alpha_1$, $\beta_i \subseteq C_A(\alpha_i)$, $i=1,2$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $\beta_1 \subseteq C_A(\alpha_2)$;
- 2) $C(\alpha_2, \beta) = \alpha_2^2 \cap C(\alpha_1, \beta)$, где $\beta \subseteq \beta_1 \cap \beta_2$;
- 3) если $(x, y) \in C(\alpha_1, \beta_1)$ (x, z) , либо $(x, x) \in C(\alpha_1, \beta_1)$ (y, z) , либо $(y, x) \in C(\alpha_1, \beta_1)$ (z, x) то всегда $y = z$.
- 4) из $(x, y) \in C(\alpha_1, \beta_1)$ (x', y') всегда следует $(y, y') \in \beta_1$.

Доказательство.

1) Очевидно, что $\alpha_2^2 \cap C(\alpha_1, \beta_1)$ – конгруэнция на α_2 , удовлетворяющая определению 1.1. Значит, в силу п. 1) леммы 1.1, $\beta_1 \subseteq C_A(\alpha_2)$.

2) Так как $\beta \subseteq C_A(\alpha_1)$, то

$$\alpha_2^2 \cap C(\alpha_1, \beta) = C(\alpha_2, \beta).$$

3) Пусть $(x, y) \in C(\alpha_1, \beta_1)$ (x, z) . Тогда $(x, x) \in C(\alpha_1, \beta_1)$ (x, x) , $(y, x) \in C(\alpha_1, \beta_1)$ (y, x) .

Применим мальцевский оператор P , $(P(x, x, y) = P(y, x, x) = y)$, для любых элементов x, y из A к последним трем соотношениям. Получаем,

$$(y, y) \in C(\alpha_1, \beta_1)(y, z).$$

Итак, $y = z$. Аналогичным образом доказываются остальные случаи.

4) Пусть $(x, y) \in C(\alpha_1, \beta_1)$ (x', y') . Тогда справедливы следующие соотношения:

$$(x, y) \in C(\alpha_1, \beta_1)(x, y),$$

$$(x, x) \in C(\alpha_1, \beta_1)(x, x),$$

$$(x', x') \in C(\alpha_1, \beta_1)(x, x).$$

Следовательно,

$$(x', P(y, x, x')) \in C(\alpha_1, \beta_1)(x, y),$$

где P – мальцевский оператор. Тогда,

$$(x', P(y, x, x')) \in C(\alpha_1, \beta_1)(x', y')$$

и, в силу п. 3) доказываемой леммы, $P(y, x, x') = y'$. Так как $(y, y) \in \beta$, $(x, x') \in \beta$ и $(x', x') \in \beta$, то $(P(y, x, x'), y) \in \beta$. Таким образом $(y, y') \in \beta$. Лемма доказана.

Если α/β и γ/β – факторы алгебры A такие, что $C_{A/\beta}(\alpha/\beta) = \gamma/\beta$, то конгруэнцию γ обозначим как $C_A(\alpha/\beta)$ и назовем централизатором фактора α/β в A .

Сформулируем следующие свойства централизаторов конгруэнций, которые доказываются непосредственной проверкой. Предварительно напомним, что факторы α/β и γ/τ на алгебре A называются перспективными, если либо $\alpha = \beta\gamma$ и $\tau = \beta \cap \gamma$, либо $\gamma = \tau\alpha$ и $\beta = \tau \cap \alpha$.

Лемма 1.3. Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \tau$ – конгруэнции на алгебре A . Тогда:

1) если $\beta \subseteq \alpha$, то $\beta \subseteq C_A(\alpha/\beta)$;

2) если $\beta \subseteq \alpha \subseteq \gamma$, то

$$C_A(\gamma/\beta) \subseteq C_A(\alpha/\beta) \cap C_A(\gamma/\alpha);$$

3) если $\beta \subseteq \alpha$, $\tau \subseteq \gamma$ и факторы α/β , γ/τ перспективны, то $C_A(\alpha/\beta) = C_A(\gamma/\tau)$;

4) если $\alpha_i \subseteq \alpha_1$ – конгруэнции на A и $B \subseteq A$, то $C_A(\alpha_1/\alpha_2) \cap B^2 \subseteq C_B(\beta_1/\beta_2)$, где $\beta_i = B^2 \cap \alpha_i$, $i=1,2$.

В дальнейшем мы будем часто ссылаться на следующий хорошо известный факт (доказательство см., например, [5]).

Лемма 1.4. Всякая подалгебра алгебры A^2 , содержащая конгруэнцию O_A , является конгруэнцией на A .

Пусть α – конгруэнция на алгебре A , B – подалгебра алгебры A , $\gamma \subseteq C_A(\alpha)$ и $\gamma B = A$. Обозначим

$$C(\alpha, \gamma, A, B) =$$

$$= \{(x, y) \in \alpha \mid (x, y) \in C(\alpha, \gamma)(b, b'), (b, b') \in B^2\}.$$

Лемма 1.5. Пусть определено множество $C(\alpha, \gamma, A, B) = \beta$. Тогда β – конгруэнция на A и $\beta \cap B^2 = \alpha \cap B^2$. Если к тому же $\alpha \subseteq \gamma$, либо $\gamma \cap B^2 = O_B$, то $\beta B = B$.

Доказательство. Так как $\gamma B = A$, то для любого элемента $x \in A$ всегда найдется такой элемент $b \in B$, что $(x, b) \in \gamma$. Следовательно,

$$(x, x)\tau(b, b),$$

где $\tau = C(\alpha, \gamma)$. Итак, $O_A \subseteq \beta$. Пусть теперь $(x_i, x_i) \in \beta$, $i=1, \dots, n$. Тогда

$$(x_i, x_i)\tau(b_i, b_i),$$

где $(b_i, b_i) \in B^2$. Следовательно, для любой n -арной операции ω получаем

$$(x_1 \dots x_n \omega, x_1 \dots x_n \omega)\tau(b_1 \dots b_n \omega, b_1 \dots b_n \omega).$$

Таким образом, в силу леммы 1.4, β – конгруэнция на A .

Пусть $(x, y) \in B^2 \cap \alpha$. Тогда, очевидно, $(x, y)\tau(x, y)$, т.е. $(x, y) \in B^2 \cap \beta$. Так как $B^2 \cap \beta \subseteq B^2 \cap \alpha$, то $\beta \cap B^2 = \alpha \cap B^2$.

Пусть теперь $\alpha \subseteq \gamma$, либо $\gamma \cap B^2 = O_B$. Покажем, что $\beta B = B$. Допустим противное. Тогда найдется такая пара $(x, b) \in \beta$, что $x \notin B$ и $b \in B$.

Из определения β следует, что существует такая пара $(b', b'') \in B^2$, что $(x, b)\tau(b', b'')$ и, очевидно, $(b', b'')\tau(b', b'')$. Если $\alpha \subseteq \gamma$, то $(b', b'') \in \alpha \subseteq \gamma$, и, значит, $(b', b'')\tau(b', b'')$. Теперь для мальцевского оператора P , применяемого для последних трех соотношений относительно τ , получаем

$$(x, P(b, b'', b'))\tau(b'', b'').$$

Значит, $x = P(b, b'', b') \in V$. Тем самым показано, что $\beta V = V$.

Если же $\gamma \cap B^2 = O_B$, то по лемме 1.2 $(b', b'') \in \gamma \cap B^2 = O_B$. Следовательно, $b = b''$, т.е. $(x, b)\tau(b', b)$. Но в этом случае из п. 3) леммы 1.2 следует, что $x = b' \in V$. Противоречие. Итак, $\beta V = V$. Лемма доказана.

Лемма 1.6. Пусть α_1, α_2 – конгруэнции на алгебре A , $\alpha_2 \subseteq \alpha_1$ и V – подалгебра алгебры A . Тогда для любой конгруэнции $\gamma_1 \subseteq C_A(\alpha_1)$ такой, что $\gamma_1 V = A$ имеет место включение

$$C(\alpha_2, \gamma_1, A, B) \subseteq C(\alpha_1, \gamma_1, A, B).$$

В частности, если $\alpha_2 = \gamma_1$, то

$$\alpha_2 = C(\alpha_1, \alpha_2, A, B) \cap C(\alpha_2, \alpha_2, A, B).$$

Доказательство. По лемме 1.2 $\gamma_1 \subseteq C_A(\alpha_2)$. Обозначим $\beta_1 = C(\alpha_1, \gamma_1, A, B)$, $\beta_2 = C(\alpha_2, \gamma_1, A, B)$. Пусть $(x, y) \in \beta_2$. Тогда $(x, y)\tau_2(b, b')$, где $\tau_2 = C(\alpha_2, \gamma_1)$, $(b, b') \in B^2$. Из леммы 1.2 следует, что $\tau_2 \subseteq \tau_1$, где $\tau_1 = C(\alpha_1, \gamma_1)$. Следовательно, $(x, y) \in \beta_1$. Итак $\beta_2 \subseteq \beta_1$.

Пусть $\alpha_2 = \gamma_1$. Так как $\beta_2 \subseteq \alpha_2$, то $\beta_2 \subseteq \alpha_2 \cap \beta_1$. Докажем обратное включение. Пусть $(x, y) \in \alpha_2 \cap \beta_1$. Тогда $(x, y)C(\alpha_1, \alpha_2)(b, b')$ и $(b, b') \in B^2$. Так как $(x, y) \in \alpha_2$, $(x, b) \in \alpha_2$ и $(y, b') \in \alpha_2$, то $(b, b') \in \alpha_2$. Теперь из равенства $\alpha_2^2 \cap C(\alpha_1, \alpha_2) = C(\alpha_2, \alpha_2)$ следует, что $(x, y)C(\alpha_2, \alpha_2)(b, b')$, т.е. $(x, y) \in \beta_2$. Тем самым показано, что $\beta_2 \supseteq \alpha_2 \cap \beta_1$. Значит $\beta_2 = \alpha_2 \cap \beta_1$. Лемма доказана.

Напомним, что конгруэнция $\alpha \neq O_A$ на алгебре A называется минимальной, если из включения $\beta \subset \alpha$ всегда следует $\beta = O_A$. Фактор α/β на алгебре A называется главным, если α/β – минимальная конгруэнция на факторалгебре A/β .

Фактор α/β алгебры A назовем дополняемым в A , если на факторалгебре A/β существует хотя бы одна такая подалгебра V/β , что $\alpha V/\beta = A/\beta$ и $\alpha/\beta \cap V^2/\beta = 0$. Подалгебру V будем называть дополнением к α/β в A .

Конгруэнция α дополняема в A , если дополняем в A фактор $\alpha/0$.

Лемма 1.7. Пусть α_1, α_2 – конгруэнции на алгебре A такие, что $\alpha_2 \subset \alpha_1$, $\alpha_2 \subseteq C_A(\alpha_1)$ и V – дополнение к α_2 в A . Тогда, если $\beta_1 = C(\alpha_1, \alpha_2, A, B)$, $\beta_2 = C(\alpha_2, \alpha_2, A, B)$, то справедливы следующие утверждения:

$$1) \beta_1 \cap \alpha_2 = \beta_2 = O_A;$$

$$2) \alpha_1 \cap B^2 \neq O_B. \beta_1 \subset \alpha_1 \text{ и } \beta_1 \neq O_A;$$

3) если α_1/α_2 – главный фактор на A , то β_1 – минимальная конгруэнция на A и

$$\alpha_1/\alpha_2 = \beta_1\alpha_1/\alpha_2.$$

Доказательство. Пусть $(x, y) \in \beta_2$. Тогда $(x, y)C(\alpha_2, \alpha_2)(b, b')$, где $(b, b') \in B^2 \cap \alpha_2 = O_B$. Следовательно, $b = b'$ и по лемме 1.3 $x = y$. Итак, $\beta_2 = O_A$. Из леммы 1.6 теперь следует, что $\beta_1 \cap \alpha_2 = \beta_2 = O_A$. Пусть $\alpha_1 \cap B^2 = O_B$. Тогда

$$A/\alpha_1 = \alpha_1 V/\alpha_1 = V = \alpha_2 V/\alpha_2 = A/\alpha_2.$$

Противоречие, которое показывает, что $\alpha_1 \cap B^2 \neq O_B$. Из леммы 1.5 следует, что $\beta_1 \cap B^2 = \alpha_1 \cap B^2$, т.е. $\beta_1 \neq O_A$. А так как $\beta_1 \subseteq \alpha_1$, $\alpha_1 V = A$ и $\beta_1 V = V$, то $\beta_1 \subset \alpha_1$.

Пусть теперь α_1/α_2 – главный фактор на A . Если $\beta_1\alpha_2 = \alpha_2$, то $\beta_1 \subseteq \alpha_2$. Тогда из равенства $\beta_1 \cap \alpha_2 = \beta_2$ следует, что $\beta_1 = \beta_2 = O_A$. Противоречие. Следовательно, $\beta_1\alpha_2 \supset \alpha_2$. Так как $\beta_1 \subset \alpha_1$, $\alpha_2 \subset \alpha_1$ и α_1/α_2 – главный фактор на A , то $\beta_1\alpha_2 = \alpha_1$. Но фактор $\beta_1\alpha_2/\alpha_2$ перспективен β_1 , значит, β_1 – минимальная конгруэнция на A . Лемма доказана.

Фактор α/β алгебры A назовем абелевым в A , если $C_A(\alpha/\beta) \supseteq \alpha$. Конгруэнцию α на алгебре A назовем абелевой, если фактор α/O_A абелев. В частности, если $\alpha = A^2$, то говорят, что A – абелева алгебра.

Конгруэнцию α на алгебре A назовем разрешимой в A , если существует такая цепь конгруэнций алгебры A

$$O_A = \alpha_0 \subseteq \alpha_1 \subseteq \dots \alpha_t = \alpha,$$

что фактор α_i/α_{i-1} абелев в A для любого $i = 1, \dots, t$.

В частности, если $\alpha = A^2$, то получаем определение разрешимой алгебры.

Лемма 1.8. Пусть α, β – конгруэнции на алгебре A , $\beta \subseteq \alpha$ и α разрешима в A . Тогда β также разрешима в A .

Доказательство. Пусть $O_A = \alpha_0 \subseteq \alpha_1 \subseteq \dots \alpha_t = \alpha$ – такая цепь конгруэнций на A , что

$C_A(\alpha_i/\alpha_{i-1}) \supseteq \alpha_i$ для любого $i=1, \dots, t$. Рассмотрим следующую цепь конгруэнций:

$$O_A = \beta_0 \subseteq \beta_1 \subseteq \dots \subseteq \beta_t = \beta,$$

где $\beta_i = \alpha_i \cap \beta$ для любого $i=1, \dots, t$. Так как фактор $\beta_i/\beta_{i-1} = \alpha_i \cap \beta/\alpha_{i-1} \cap \beta$ перспективен фактору $(\alpha_i \cap \beta)\alpha_{i-1}/\alpha_{i-1} = \beta_i\alpha_{i-1}/\alpha_{i-1}$ и по лемме 1.3 $C_A(\beta_i\alpha_{i-1}/\alpha_{i-1}) \supseteq \beta_i\alpha_{i-1} \supseteq \beta_i$, то и $C_A(\beta_i/\beta_{i-1}) \supseteq \beta_i$ для любого $i=1, \dots, t$. Следовательно, β разрешима в A . Лемма доказана.

Лемма 1.9. Пусть α – конгруэнция на алгебре A , B и C – подалгебры алгебры A , причем $\alpha B = B$. Тогда $\alpha(B \cap C) = \alpha B \cap \alpha C$.

Доказательство. Очевидно, что $\alpha(B \cap C) \subseteq \alpha B \cap \alpha C$. Покажем обратное включение. Пусть $x \in \alpha B \cap \alpha C$. Так как $x \in \alpha C$, то найдется такой элемент $c \in C$, что $(x, c) \in \alpha$. Из того, что $x \in B$ и $(x, c) \in \alpha$ следует, что $c \in \alpha B = B$. Таким образом $c \in B \cap C$ и, значит, $x \in \alpha(B \cap C)$. Итак, $\alpha B \cap \alpha C \subseteq \alpha(B \cap C)$. Лемма доказана.

Лемма 1.10. Пусть α, β – конгруэнции на алгебре A , B и C – дополнения к α и β в A соответственно. Тогда

$$\alpha\beta \cap (B \cap C)^2 = O_A.$$

Доказательство. Пусть $(x, y) \in \alpha\beta \cap (B \cap C)^2$. Тогда $(x, y) \in \alpha$, $(z, y) \in \beta$. Так как $x \in B$ и $\alpha B = B$, то $z \in B$. А так как $y \in C$ и $\beta C = C$, то $z \in C$. Таким образом $z \in B \cap C$ и, следовательно, $(x, z) \in (B \cap C)^2$, $(z, y) \in (B \cap C)^2$. Очевидно, что $\alpha \cap (B \cap C)^2 \subseteq \alpha \cap B^2 = O_B$. Значит, $x = z$. Аналогичным образом, из $\beta \cap (B \cap C)^2 \subseteq \beta \cap C^2 = O_C$ следует, что $y = z$. Таким образом $x = y$. Лемма доказана.

Лемма 1.11. Пусть α, β – конгруэнции на алгебре A и B – подалгебра алгебры A . Тогда $(\alpha\beta)B = \alpha(\beta B)$.

Доказательство этой леммы очевидно.

Лемма 1.12. Пусть α, β – конгруэнции на алгебре A такие, что $\alpha \cap \beta = O_A$. Тогда $\beta \subseteq C_A(\alpha)$. Если к тому же α и β абелевы в A , то $\alpha\beta$ абелева в A .

Доказательство. Определим на α бинарное соотношение τ следующим образом: $(x, y)\tau(x', y')$ тогда и только тогда, когда $(x, x') \in \beta$, $(y, y') \in \beta$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что $\tau = C(\alpha, \beta)$.

Пусть α, β – абелевы конгруэнции. Так как $\beta \subseteq C_A(\beta)$, то по лемме 1.1 $\beta \subseteq C_A(\alpha\beta)$ и, значит, $\alpha\beta \subseteq C_A(\beta)$. Аналогичным образом

получаем, что $\alpha\beta \subseteq C_A(\alpha)$. Следовательно, $\alpha\beta \subseteq C_A(\alpha\beta)$. Лемма доказана.

Если алгебра A обладает минимальными конгруэнциями, то конгруэнция, порожденная всеми ее минимальными конгруэнциями, называется цоколем и обозначается через $Soc(A)$.

Напомним, что согласно [3], конгруэнция π на алгебре A называется фраттиниевой, если $\pi H \neq A$ для любой собственной подалгебры H алгебры A . Тогда фактор α/β алгебры A назовем фраттиниевым, если α/β – фраттиниева конгруэнция на A/β .

Лемма 1.13. Пусть α – абелева конгруэнция на алгебре A . Тогда если α удовлетворяет условиям максимальности и минимальности для подалгебр, являющихся конгруэнциями в A , и всякая минимальная конгруэнция алгебры A , входящая в α , нефраттиниева, то α дополняема в A и $\alpha \subseteq Soc(A)$. Если, кроме того, α – наибольшая абелева конгруэнция алгебры A и конгруэнция $\gamma = C_A(\alpha)$ разрешима в A , то $\gamma = \alpha$.

Доказательство. Пусть цепь

$$O_A = \alpha_0 \subseteq \alpha_1 \subseteq \dots \subseteq \alpha_t = \alpha$$

конгруэнций алгебры A такова, что α_i/α_{i-1} – главный фактор A для любого $i=1, \dots, t$. Докажем первые два утверждения леммы индукцией по t . Пусть $t=1$. Тогда по условию конгруэнция α_1 нефраттиниева, следовательно, в A найдется такая собственная подалгебра M , что $\alpha_1 M = A$. Обозначим $\gamma_1 = C_A(\alpha_1)$. Тогда, в силу абелевости α_1 , $\gamma_1 M = A$ и по лемме 1.5 $\beta_1 = C(\alpha_1, \gamma_1, A, M)$ – конгруэнция на A такая, что $\beta_1 \cap M^2 = \alpha_1 \cap M^2$ и $\beta_1 M = M$. Поэтому, если $\alpha_1 \cap M^2 \neq O_M$, то $\beta_1 \subset \alpha_1$ и $\beta_1 \neq O_A$. Противоречие с минимальностью α_1 . Итак $\alpha_1 \cap M^2 = O_M$, т.е. M – дополнение к α_1 в A .

Пусть теперь $t > 1$ и конгруэнция α_{t-1} дополняется подалгеброй H алгебры A . По лемме 1.7 $\beta = C(\alpha, \alpha_{t-1}, A, H)$ – минимальная конгруэнция на A . Следовательно, β обладает дополнением V в A . Обозначим $T = H \cap V$. Покажем, что T – дополнение к α в A .

Так как $\alpha_{t-1}\beta = \alpha$, $\beta H = H$, то с учетом лемм 1.9 и 1.11 получаем, что

$$\begin{aligned} \alpha T &= \alpha_{t-1}\beta(H \cap V) = \alpha_{t-1}(\beta H \cap \beta V) = \\ &= \alpha_{t-1}(H \cap A) = \alpha_{t-1}H = A. \end{aligned}$$

А по лемме 1.10

$$\alpha \cap T^2 = \alpha_{t-1}\beta \cap (H \cap V)^2 = O_T.$$

Следовательно, T – дополнение к α в A .

Если $t=1$, то $\alpha_1 \subseteq Soc(A)$. Пусть по индукции $\alpha_{i-1} \subseteq Soc(A)$. Так как $\alpha = \alpha_{i-1}\beta$ и β – минимальная конгруэнция на A , то $\alpha \subseteq Soc(A)$.

Докажем теперь третье утверждение леммы. Пусть B – дополнение к α в A и $\gamma = C_A(\alpha) \supseteq \alpha$. Так как $\alpha \subseteq C_A(\gamma)$, то по лемме 1.7 на A существует такая конгруэнция $\beta \neq O_A$, что $\beta \subset \gamma$ и $\beta \cap \alpha = O_A$. Ввиду леммы 1.8, конгруэнция β разрешима в A . Значит, на A существует такая абелева конгруэнция $\tau \neq O_A$, что $\tau \subseteq \beta$ и $\tau \cap \alpha = O_A$. Но тогда по лемме 1.12 $\tau\alpha$ – абелева конгруэнция на A и $\tau\alpha \supseteq \alpha$. Полученное противоречие показывает, что $C_A(\alpha) = \alpha$. Лемма доказана.

Пусть α_i – конгруэнция на алгебре A_i , $i=1, \dots, n$. Тогда бинарное отношение α на алгебре $A = A_1 \times \dots \times A_n$ такое, что $(a_1, \dots, a_n)\alpha(a'_1, \dots, a'_n)$ тогда и только тогда, когда $(a_i, a'_i) \in \alpha_i$ для любого $i=1, \dots, n$ является конгруэнцией на A . В этом случае будем говорить, что α является прямым произведением конгруэнций α_i и обозначать $\alpha = \alpha_1 \times \dots \times \alpha_n$.

Назовем конгруэнцию $\beta \subseteq \alpha$ подпрямым произведением конгруэнций α_i , если $\beta^{\pi_i} = \alpha_i$, где π_i – проектирование β на α_i .

Лемма 1.14. Пусть α_i – конгруэнции на алгебре A , β – конгруэнция на A такая, что $\beta \supseteq \alpha_i$ для любого $i=1, \dots, n$ и $\gamma = \prod_{i=1}^n \alpha_i$. Тогда фактор β/γ изоморфен подпрямому произведению конгруэнций β/α_i .

Доказательство. Можно считать, что $\gamma = O_A$. Обозначим $\tau = \beta/\alpha_1 \times \beta/\alpha_2 \times \dots \times \beta/\alpha_n$.

Тогда $(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n)\tau(\alpha_1 y_1, \dots, \alpha_n y_n)$ в том и только в том случае, когда $(x_i, y_i) \in \beta$, $i=1, 2, \dots, n$. Легко проверить, что отображение

$$\omega: \beta \rightarrow \beta/\alpha_1 \times \beta/\alpha_2 \times \dots \times \beta/\alpha_n$$

такое, что для любой пары $(x, y) \in \beta$,

$$(x, y)^\omega = (\alpha_1 x, \dots, \alpha_n x)\tau(\alpha_1 y, \dots, \alpha_n y)$$

является изоморфизмом конгруэнции β на подпрямое произведение конгруэнций β/α_i . Лемма доказана.

Лемма 1.15. Подпрямое произведение абелевых конгруэнций является абелевой конгруэнцией.

Доказательство. Пусть α_i – абелева конгруэнция на алгебре A_i , $i=1, \dots, n$. Покажем, что $\alpha = \alpha_1 \times \dots \times \alpha_n$ – абелева конгруэнция на алгебре A . Можно считать, что $i=1, 2$. Обозначим

$\beta_i = C_A(\alpha_i)$ и определим на α бинарное отношение τ следующим образом:

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2))\tau((x'_1, x'_2), (y'_1, y'_2))$$

тогда и только тогда, когда

$$(x_1, y_1)C(\alpha_1, \beta_1)(x'_1, y'_1) \text{ и } (x_2, y_2)C(\alpha_2, \beta_2)(x'_2, y'_2).$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что τ – конгруэнция, удовлетворяющая определению 1.1. Так как $(x_1, x'_1) \in \beta_1$ и $(x_2, x'_2) \in \beta_2$, то $(x_1, x_2)\beta(x'_1, x'_2)$, где $\beta = \beta_1 \times \beta_2 \supseteq \alpha$. Это и означает, что $\beta \subseteq C_A(\alpha)$, т.е. α – абелева конгруэнция на A . Если теперь γ – конгруэнция на A такая, что $\gamma \subseteq \alpha$, то по лемме 1.2 $\beta \subseteq C_A(\gamma)$. Следовательно, γ абелева. Лемма доказана.

Заметим, что из леммы 1.15 и леммы 1.3 следует, что класс всех абелевых алгебр является наследственной формацией.

Согласно [3], для любой подалгебры H алгебры A обозначим через H_A конгруэнцию на A , порожденную всеми такими конгруэнциями π на A , что $\pi H = H$.

Лемма 1.16. Пусть α/β – главный фактор на алгебре A , M – подалгебра алгебры A такая, что $\beta M = M$ и $\alpha M = A$. Тогда фактор $\alpha M_A/M_A$ перспективен α/β . Если к тому же α/β – абелев фактор в A дополняемый M в A и $\gamma = C_A(\alpha/\beta)$, то M дополняет фактор $\gamma/M_A = \alpha M_A/M_A$.

Доказательство. Очевидно, что $\alpha \cap M_A \supseteq \beta$. Если $\alpha \cap M_A \supset \beta$, то из того, что $\alpha \supseteq \alpha \cap M_A$ и α/β – главный фактор следует, что $\alpha \cap M_A = \alpha$. Но это противоречит тому, что $\alpha M = A$. Значит, $\alpha \cap M_A = \beta$ и фактор $\alpha M_A/M_A$ перспективен фактору α/β . Пусть α/β – абелев фактор. Тогда $\gamma = C_A(\alpha M_A/M_A) \supseteq \alpha M_A$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $M_A = O_A$. Тогда α – минимальная конгруэнция на A и $M^2 \cap \alpha = O_M$. Так как $\alpha \subseteq C_A(\gamma)$, то по лемме 1.5 на γ существует такая конгруэнция $\tau \subseteq \gamma$, что $\tau M = M$ и $\tau \cap M^2 = \gamma \cap M^2$. Поэтому, если $\gamma \cap M^2 \neq O_M$, то $\tau \neq O_A$. Противоречие с тем, что $M_A = O_A$. Следовательно, $\gamma \cap M^2 = O_M$. Теперь очевидно, что

$$A/\alpha = \alpha M/\alpha \cong M \cong \gamma M/\gamma = A/\gamma.$$

Отсюда следует, что $\alpha = \gamma$. Лемма доказана.

Лемма 1.17. Пусть α/β – главный фактор алгебры A и пусть γ – конгруэнция на A . Тогда либо фактор α/γ , либо фактор $\alpha \cap \gamma/\beta \cap \gamma$ перспективен α/β .

Доказательство. Пусть $\alpha\gamma \neq \beta\gamma$. Тогда фактор $\alpha\gamma/\beta\gamma$ перспективен фактору $\alpha/\alpha \cap \beta\gamma$ и $\alpha \cap \beta\gamma \subset \alpha$. Так как $\alpha \cap \beta\gamma = \beta(\alpha \cap \gamma) \supseteq \beta$, то $\alpha \cap \beta\gamma = \beta$.

Пусть $\alpha\gamma = \beta\gamma$. Тогда $\alpha = \beta(\alpha \cap \gamma)$. Следовательно, $\alpha/\beta = \beta(\alpha \cap \gamma)/\beta$ и последний фактор перспективен фактору $\alpha \cap \gamma/\beta \cap \gamma$. Лемма доказана.

Факторы α/β и γ/τ алгебры A назовем проективными, если в A существуют такие факторы α_i/β_i , $\alpha_i/\beta_i = \pi_i/\phi_i, \dots, \pi_n/\phi_n = \gamma/\tau$, что для любого $i=1, \dots, n-1$ факторы π_i/ϕ_i и π_{i+1}/ϕ_{i+1} перспективны.

Определение 1.3. Пусть α/β – нефраттиниев абелев главный фактор алгебры A , $\gamma = C_A(\alpha/\beta)$ и пусть Δ – пересечение всех тех конгруэнций τ из A , для которых $\tau \subseteq \gamma$, фактор γ/τ нефраттиниев и проективен фактору α/β . Тогда фактор γ/Δ назовем короной, соответствующей фактору α/β (или, иначе, α/β - короной алгебры A).

Заметим, что если α/β – нефраттиниев абелев главный фактор алгебры A , то по лемме 1.5 всегда существует дополнение к α/β . Следовательно, в силу леммы 1.16, α/β – корона алгебры A всегда существует.

Лемма 1.18. Пусть A – алгебра, обладающая главными рядами конгруэнций, α/β – абелев нефраттиниев главный фактор и γ/Δ – α/β - корона алгебры A . Тогда имеют место следующие утверждения:

- 1) $\gamma/\Delta \subseteq Soc(A/\Delta)$;
- 2) фактор γ/Δ дополняем в A/Δ ;
- 3) если α_1/β_1 – главный фактор алгебры A , то включения $\Delta\beta_1 \subset \Delta\alpha_1 \subseteq \gamma$ имеют место в точности тогда, когда фактор α_1/β_1 нефраттиниев и проективен фактору α/β .

Доказательство. Пусть τ – пересечение некоторых конгруэнций π_1, \dots, π_t алгебры A , что $\pi_i \subseteq \gamma$, причем фактор γ/π_i нефраттиниев и проективен фактору α/β . Индукцией по t покажем, что $\gamma/\tau \subseteq Soc(A/\tau)$, фактор γ/τ дополняем в A , и если главный фактор α_1/β_1 алгебры A таков, что $\tau \subseteq \beta_1$ и $\alpha_1 \subseteq \gamma$, то фактор α_1/β_1 нефраттиниев и проективен фактору α/β . Можно считать, что $t > 1$ и

$$\tau_i = \pi_1 \cap \dots \cap \pi_{i-1} \cap \pi_{i+1} \cap \dots \cap \pi_t \neq \tau$$

для всех $i=1, \dots, t$. Кроме того, не теряя общности, можно положить $\tau = O_A$. Так как γ/π_1 –

главный фактор алгебры A и $\pi_1\tau_1 \supset \pi_1$, то факторы γ/π_1 и τ_1/O_A перспективны. Следовательно, τ_1 – минимальная конгруэнция на A . По индукции $\gamma/\tau_1 \subseteq Soc(A/\tau_1)$. Так как факторы γ/τ_1 и π_1/O_A перспективны, то решетки конгруэнций алгебры A , заключенных соответственно между τ_1 и γ и между O_A и π_1 изоморфны. Значит, $\pi_1 \subseteq Soc(A)$. Поэтому $\gamma = \pi_1\tau_1 \subseteq Soc(A)$.

Покажем, что конгруэнция γ дополняема в A . Пусть π – минимальная конгруэнция алгебры A и $\pi \subseteq \gamma$. Так как $\pi_1 \cap \dots \cap \pi_t = O_A$, то найдется $r \in \{1, \dots, t\}$ такое, что $\pi\pi_r$. Если π – фраттиниева конгруэнция, то фраттиниевым оказывается и фактор $\gamma/\pi_r = \pi\pi_r/\pi_r$, что невозможно. Следовательно, любая минимальная конгруэнция алгебры A , входящая в γ , является нефраттиниевой. По лемме 1.14 конгруэнция γ изоморфна подпрямому произведению абелевых конгруэнций $\gamma/\pi_1, \dots, \gamma/\pi_t$. Следовательно, по лемме 1.15 γ абелева. Теперь из леммы 1.13 следует, что конгруэнция γ дополняема в A .

Пусть M – дополнение к γ в A . По лемме 3.14 [3] в A найдется такая конгруэнция γ_1 , что $\gamma_1\alpha_1 = \gamma$ и $\gamma_1 \cap \alpha_1 = O_A$. Если $(\gamma_1\beta_1)M = A$, то $A/\gamma_1\beta_1 = A/\gamma$, противоречие. Следовательно, $(\gamma_1\beta_1)M \neq A$, и по лемме 1.11 $(\alpha_1\gamma_1\beta_1)M = A$. Это означает, что фактор α_1/β_1 нефраттиниев. Покажем, что факторы α_1/β_1 и α/β проективны. Пусть $\pi_1\alpha_1 \neq \pi_1\beta_1$. Тогда по лемме 1.17 фактор α_1/β_1 перспективен фактору $\pi_1\alpha_1/\pi_1\beta_1$. Если $\pi_1\alpha_1 \neq \gamma$, то $\pi_1\alpha_1 = \pi_1\beta_1$, противоречие. Значит, $\pi_1\alpha_1/\pi_1\beta_1 = \gamma/\beta_1$. Последний фактор проективен фактору α/β , следовательно, факторы α_1/β_1 и α/β проективны. Пусть $\pi_1\alpha_1 = \pi_1\beta_1$. Тогда по лемме 1.17 факторы α_1/β_1 и $\alpha_1 \cap \pi_1/\beta_1 \cap \pi_1$ перспективны. Если $\tau_1(\alpha_1 \cap \pi_1) = \tau_1(\beta_1 \cap \pi_1)$, то последний фактор по лемме 1.17 перспективен фактору $(\tau_1 \cap \alpha_1 \cap \pi_1)/(\tau_1 \cap \beta_1 \cap \pi_1) = O_A/O_A$. Противоречие. Следовательно, в силу леммы 1.17, фактор $(\alpha_1 \cap \pi_1)/(\beta_1 \cap \pi_1)$ перспективен фактору $\tau_1(\alpha_1 \cap \pi_1)/\tau_1(\beta_1 \cap \pi_1)$. Но по индукции последний фактор проективен фактору α/β . Значит, факторы α_1/β_1 и α/β проективны.

Покажем теперь, что корона γ/Δ удовлетворяет условию 3). Пусть α_1/β_1 – такой главный фактор алгебры A , что $\Delta\beta_1 \subset \Delta\alpha_1 \subseteq \gamma$. Тогда факторы α_1/β_1 и $\Delta\alpha_1/\Delta\beta_1$, в силу леммы 1.17, перспективны. Так как $\Delta\alpha_1/\Delta\beta_1$ – главный

фактор в A , то, как показано выше, этот фактор нефраттиниев и перспективен фактору α/β . Но это означает, что и фактор α_1/β_1 нефраттиниев и проективен фактору α/β .

Обратно, пусть α_1/β_1 – нефраттиниев главный фактор алгебры A , проективный фактору α/β . В силу леммы 1.3, $\alpha_1 \subseteq \gamma$. Предположим, что $\Delta\beta_1 = \Delta\alpha_1$. Тогда $\alpha_1 = \beta_1(\alpha_1 \cap \Delta)$. Пусть M – подалгебра алгебры A такая, что $\alpha_1 M = A$ и $\beta_1 M = M$. По лемме 1.16 фактор γM_A нефраттиниев и перспективен фактору α_1/β_1 . Значит, $\Delta \subseteq M_A$. Но тогда $\alpha_1 = \beta_1(\alpha_1 \cap \Delta) \subseteq M_A$. Противоречие. Таким образом, $\Delta\beta_1 \subset \Delta\alpha_1$. Лемма доказана.

2 Основной результат

Алгебру A назовем ϕ -разрешимой, если она обладает главным рядом все фраттиниевые главные факторы которого абелевы.

Теорема 2.1. Пусть A – ϕ -разрешимая алгебра. Тогда между факторами двух произвольных главных рядов A можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие факторы проективны и оба одновременно либо фраттиниевы, либо нефраттиниевы.

Доказательство. Пусть α/β – главный фактор алгебры A . По теореме Жордана-Гельдера для рядов конгруэнций (см., например, теорему 8.4.2 [7]) любой главный ряд конгруэнций алгебры A содержит одно и то же число факторов, проективных фактору α/β . Поэтому достаточно установить, что в любых двух главных рядах A содержится по одинаковому числу нефраттиниевых факторов, проективных фактору α/β .

Пусть α/β неабелев фактор. Тогда, в силу леммы 1.3, каждый главный ряд A содержит лишь один фактор, проективный фактору α/β , и по условию все такие факторы нефраттиниевы.

Пусть α/β абелев фактор. Предположим, что A имеет нефраттиниев главный фактор π/τ , проективный фактору α/β . Обозначим через γ/Δ π/τ -корону. Тогда ввиду утверждения 3) леммы 1.18 каждый главный ряд конгруэнций алгебры A содержит точно t нефраттиниевых факторов, проективных фактору α/β , где t – длина участка главного ряда A , заключенного между Δ и γ . Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carter, R. Extreme classes of finite soluble groups / R. Carter, B. Fischer, T. Hawkes. – J. Algebra, 1968. – Vol. 9, № 3. – P. 285–313.
2. Lafuente, J. Maximal subgroups and the Jordan-Holder theorem / J. Lafuente. – J. Austral. Math. Soc. 1989. – Vol. 46, № 3. – P. 356–364.
3. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба // М. : Наука, 1989. – 256 с.
4. Smith, J.D.H. Mal'cev Varieties / J.D.H. Smith // Lest. Notes. Math. 1976. – Vol. 554. – 158 p.
5. Ходалевиц, А.Д. Формационные свойства нильпотентных алгебр / А.Д. Ходалевиц // Вопросы алгебры. – Гомель : Изд-во Гомельского ун-та, 1992. – Вып. 7. – С. 76–85.
6. Gaschutz, W. Praefrattinigruppen / W. Gaschutz // Arch. Math. 1962. – Bd.13, № 3. – S. 418–426.
7. Холл, М. Теория групп / М. Холл // М. : ИЛ, 1962. – 468 с.

Поступила в редакцию 25.10.10.

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ОБОБЩЕННО СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

С.Н. Шевчук, В.Н. Семенчук

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

FINITE GROUPS WITH GENERALIZED SUBNORMAL SUBGROUPS

S.N. Schevchuk, V.N. Semenchuk

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Изучено строение конечных разрешимых групп, у которых силовские подгруппы обобщенно субнормальны.

Ключевые слова: насыщенная формация, наследственная формация, разрешимая группа, субнормальная подгруппа, обобщенно субнормальная подгруппа.

The paper describes the structure of soluble finite groups in which Silov subgroups are generalized subnormal subgroups.

Keywords: saturated formation, hereditary formation, soluble group, subnormal subgroup, generalized subnormal subgroup.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Важную роль при изучении строения конечных групп играют силовские подгруппы. Например, группа, у которой все силовские подгруппы субнормальны, нильпотентна.

В теории классов конечных групп обобщением понятия субнормальности является понятие \mathfrak{F} -достижимости, введенное Кегелем в работе [1].

Определение. Назовем подгруппу H \mathfrak{F} -достижимой в группе G , если существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \dots \supseteq H_m = H$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \dots, m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1} , либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

В настоящей работе рассматривается задача изучения строения конечных групп, у которых силовские подгруппы и бипримарные подгруппы \mathfrak{F} -достижимы.

Начало такого исследования строения конечных групп восходит к работам [2], [3].

1 Используемые обозначения и леммы

Необходимые обозначения и определения можно найти в монографии [4]. Напомним некоторые из них. Формация – класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается \mathfrak{F} -корадикал группы, то есть пересечение всех тех нормальных подгрупп N группы G , для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Минимальная не \mathfrak{F} -группа – группа, не принадлежащая \mathfrak{F} , все собственные подгруппы

которой принадлежат \mathfrak{F} . Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G , через $|\pi(G)|$ – число простых делителей порядка группы G , через $\pi(\mathfrak{F})$ – множество всех простых делителей порядков групп, принадлежащих \mathfrak{F} . Через \mathfrak{N} , \mathfrak{N}^2 , \mathfrak{N}_π обозначаются класс всех нильпотентных групп, класс всех метанильпотентных групп, класс всех нильпотентных π -групп соответственно.

В дальнейшем нам понадобятся следующие известные свойства \mathfrak{F} -достижимых подгрупп.

Лемма 1.1. Пусть \mathfrak{F} – непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если H – подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G ;
- 2) если H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G , то $H \cap K$ – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа K для любой подгруппы K группы G ;
- 3) если H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа K и K – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G , то H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G ;
- 4) если H_1 и H_2 – \mathfrak{F} -достижимые подгруппы группы G , то $H_1 \cap H_2$ – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G ;
- 5) если H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G , то H^x \mathfrak{F} -достижима в G для любых $x \in G$.

Доказательство. 1) Пусть H – подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$. Так как $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и \mathfrak{F} – наследственная формация, то подгруппа $H/G^{\mathfrak{F}}$

является \mathfrak{F} -субнормальной подгруппой группы G/G^δ . Отсюда, согласно определению \mathfrak{F} -субнормальной подгруппы, существует максимальная цепь

$$G/G^\delta = H_0/G^\delta \supset H_1/G^\delta \supset \dots \supset H_n/G^\delta = H/G^\delta$$

такая, что $(H_{i-1}/G^\delta)^\delta \subseteq H_i/G^\delta$ для всех $i=1,2,\dots,n$. Отсюда получаем, что в группе G существует максимальная цепь

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_n = H$$

такая, что $(H_{i-1})^\delta \subseteq H_i$ для всех $i=1,2,\dots,n$.

А это значит, что H – \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа группы G . Поскольку любая \mathfrak{F} -субнормальная подгруппа группы G является \mathfrak{F} -достижимой в G , то H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G .

2) Пусть H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G . Тогда, по определению, существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \dots \supseteq H_m = H$$

такая, что для любого $i=1,2,\dots,m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1} , либо $(H_{i-1})^\delta \subseteq H_i$.

Пусть K – некоторая подгруппа из G . Рассмотрим цепь подгрупп:

$$K = H_0 \cap K \supseteq H_1 \cap K \supseteq \dots \supseteq H_m \cap K = H \cap K.$$

Если подгруппа H_i нормальна в H_{i-1} , то подгруппа $H_i \cap K$ нормальна в $H_{i-1} \cap K$. Пусть

$(H_{i-1})^\delta \subseteq H_i$. Так как формация \mathfrak{F} наследственна, то из $H_{i-1}/(H_{i-1})^\delta \in \mathfrak{F}$ следует, что

$$(H_{i-1} \cap K)(H_{i-1})^\delta / (H_{i-1})^\delta \in \mathfrak{F}.$$

Теперь ввиду изоморфизма

$$(H_{i-1} \cap K)(H_{i-1})^\delta / (H_{i-1})^\delta \cong H_{i-1} \cap K / H_{i-1} \cap K \cap (H_{i-1})^\delta$$

имеем

$$H_{i-1} \cap K / (H_{i-1})^\delta \cap K \in \mathfrak{F}.$$

Значит,

$$(H_{i-1} \cap K)^\delta \subseteq (H_{i-1})^\delta \cap K.$$

Так как $(H_{i-1})^\delta \subseteq H_i$, то

$$(H_{i-1} \cap K)^\delta \subseteq H_i \cap K.$$

Итак, для каждого $i=1,2,\dots,m$ либо подгруппа $H_i \cap K$ нормальна в $H_{i-1} \cap K$, либо $(H_{i-1} \cap K)^\delta \subseteq H_i \cap K$. Отсюда, по определению, $H \cap K$ – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы K .

Утверждение 3) следует непосредственно из определения \mathfrak{F} -достижимой подгруппы.

Утверждение 4) следует теперь из утверждений 2) и 3).

Утверждение 5) следует непосредственно из определения \mathfrak{F} -достижимой подгруппы. Лемма доказана.

Лемма 1.2. Пусть \mathfrak{F} – непустая формация.

Если G – разрешимая минимальная не \mathfrak{F} -группа, то G^δ – примарная подгруппа.

Доказательство. Пусть G – разрешимая минимальная не \mathfrak{F} -группа. Тогда $\Phi(G) \subset F(G)$. Отсюда следует, что в группе G найдется нормальная примарная подгруппа K , не содержащаяся в $\Phi(G)$. Но тогда в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = KM$. Так как $M \in \mathfrak{F}$, то $G/K = MK/K \cong M/M \cap K \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $G^\delta \subseteq K$. Лемма доказана.

Лемма 1.3. Пусть \mathfrak{N}^2 – формация всех метанильпотентных групп. Если G – разрешимая минимальная не \mathfrak{N}^2 -группа, то она одного из следующих типов:

1) $|\pi(G)|=3$, $G = G_p \rtimes H$, где $G_p = G^\delta$;

2) $|\pi(G)|=2$, G^δ – примарная p -подгруппа, причем $G^\delta \subset G_p$.

Доказательство. Пусть G – разрешимая минимальная не \mathfrak{N}^2 -группа. Согласно теореме 1.5 из [5] $G/\Phi(G) = G^\delta \Phi(G)/\Phi(G) \rtimes M/\Phi(G)$, где $G^\delta \Phi(G)/\Phi(G) = F(G)/\Phi(G)$ – примарная p -группа. По теореме 1 из [6] $G/F(G)$ – группа Шмидта. Следовательно, $|\pi(G/F(G))|=2$. Так как $|\pi(G)|=|\pi(G/\Phi(G))|$, то $|\pi(G)| \leq 3$.

Если $|\pi(G)|=3$, то, как показано выше, G^δ – силовская p -подгруппа группы G . Следовательно, G – группа из пункта 1).

Пусть $|\pi(G)|=2$. Если $G^\delta = G_p$, то $G \in \mathfrak{N}^2$, что невозможно. Итак, G^δ – собственная подгруппа из G_p и G – группа из пункта 2). Лемма доказана.

Лемма 1.4. Пусть \mathfrak{F} – формация всех разрешимых групп с p -длиной ≤ 1 . Если G – разрешимая минимальная не \mathfrak{F} -группа, то $|\pi(G)|=2$ и G^δ – собственная подгруппа G_p , где $p \in \pi(G)$.

Доказательство. Предположим, что $|\pi(G)| > 2$, где G – минимальная не \mathfrak{F} -группа. Отсюда следует, что любая бипримарная подгруппа группы G имеет p -длину ≤ 1 . Но тогда хорошо известно, что p -длина группы G не превосходит 1, что невозможно. Итак, $|\pi(G)| \leq 2$. Согласно лемме 1.2 G^δ – примарная p -подгруппа. Если $G^\delta = G_p$, то G – p -замкнутая группа. А это значит, что p -длина группы G не превосходит 1, что невозможно. Итак, G^δ – собственная подгруппа G_p . Лемма доказана.

2 Основные результаты

Теорема 2.1. Пусть \mathfrak{F} – непустая наследственная формация и $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) \mathfrak{F} содержит любую разрешимую группу G , у которой $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и любая силовская подгруппа из G \mathfrak{F} -достижима в G ;

2) любая разрешимая минимальная не \mathfrak{F} -группа G либо $G = G_p \rtimes G_q$, где $G_p = G^{\mathfrak{F}}$, либо $|G| = p$, где $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Покажем, что из 1) следует 2). Пусть G – произвольная разрешимая минимальная не \mathfrak{F} -группа. Пусть $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Согласно лемме 1.2 $G^{\mathfrak{F}}$ – примарная p -группа, где $p \in \pi(G)$.

Пусть $|\pi(G)| > 2$. Покажем, что любая силовская подгруппа из G \mathfrak{F} -достижима в G . Действительно, пусть G_q – произвольная силовская подгруппа группы G . Рассмотрим подгруппу $G^{\mathfrak{F}}G_p$. Очевидно, что $G^{\mathfrak{F}}G_p$ – собственная подгруппа группы G . Тогда $G^{\mathfrak{F}}G_p \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} – наследственная формация, то G_p – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}G_p$. Согласно лемме 1.1 $G^{\mathfrak{F}}G_p$ – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G . По лемме 1.1 G_p – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G . Но тогда согласно условию $G \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Итак, $|\pi(G)| \leq 2$. Рассмотрим следующие два случая.

Пусть $|\pi(G)| = 1$. Так как $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$, что невозможно.

Пусть $|\pi(G)| = 2$. Покажем, что $G = G_p \rtimes G_q$, где $G_p = G^{\mathfrak{F}}$. Предположим противное, то есть $G^{\mathfrak{F}}$ – собственная подгруппа G_p . Согласно лемме 1.1 G_p – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G . Рассмотрим подгруппу $G^{\mathfrak{F}}G_q$. Так как $G^{\mathfrak{F}}G_q$ – собственная подгруппа группы G , то $G^{\mathfrak{F}}G_q \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} – наследственная формация, то G_q \mathfrak{F} -достижима в $G^{\mathfrak{F}}G_q$. По лемме 1.1 $G^{\mathfrak{F}}G_q$ \mathfrak{F} -достижима в G . Следовательно, все силовские подгруппы группы G \mathfrak{F} -достижимы в G . Согласно условию $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, $G^{\mathfrak{F}} = G_p$.

Пусть теперь $\pi(G) \not\subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Отсюда нетрудно показать, что G – группа простого порядка p , причем $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.

Покажем, что из 2) следует 1). Доказательство проведем от противного. Пусть в G все силовские подгруппы \mathfrak{F} -достижимы, но $G \notin \mathfrak{F}$. Пусть H – произвольная собственная подгруппа группы G . Покажем, что все силовские подгруппы из H \mathfrak{F} -достижимы в H . Действительно, пусть H_p – произвольная силовская подгруппа из H . По теореме Силова $H_p \subseteq G_p$. Так как $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$, то $G_p \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} – наследственная формация, то H_p – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа G_p . Так как G_p \mathfrak{F} -достижима в G , то по лемме 1.1 H_p – \mathfrak{F} -достижима в G . Но тогда по лемме 1.1 H_p \mathfrak{F} -достижима в G . По индукции $H \in \mathfrak{F}$.

Итак, G – минимальная не \mathfrak{F} -группа. Так как $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, то $G = G_p \rtimes G_q$, где $G_p = G^{\mathfrak{F}}$. По условию G_q – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G . Тогда G_q содержится в максимальной подгруппе M группы G , причем M либо \mathfrak{F} -нормальна в G , либо нормальна в G . Если M \mathfrak{F} -нормальна в G , то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$. Отсюда следует, что $G \subseteq M$, что невозможно. Пусть M – нормальная подгруппа G . Тогда $G = G^{\mathfrak{F}}M$. Очевидно, что $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и $G/M \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} – формация, то $G/G^{\mathfrak{F}} \cap M \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}} \cap M$. А это значит, что $G \subseteq M$, что невозможно. Получили противоречие. Итак, $G \in \mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Теорема 2.2. Пусть \mathfrak{F} – непустая наследственная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) \mathfrak{F} содержит любую разрешимую группу G , у которой $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и любая бипримарная подгруппа из G \mathfrak{F} -достижима в G ;

2) любая разрешимая минимальная не \mathfrak{F} -группа G – группа одного из следующих типов:

а) $G = G_p \rtimes H$, $|\pi(G)| = 3$ и $G_p = G^{\mathfrak{F}}$;

б) $|\pi(G)| = 2$ и $G^{\mathfrak{F}}$ – примарная p -подгруппа, причем $G^{\mathfrak{F}} \subset G_p$;

в) G – группа простого порядка p , где $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Покажем, что из 1) следует 2). Пусть G – произвольная разрешимая минимальная не \mathfrak{F} -группа.

Пусть $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Отсюда нетрудно показать, что G – группа простого порядка p , где $p \notin \pi(\mathfrak{F})$. Итак, G – группа из пункта в).

Пусть $\pi(G) \not\subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Согласно лемме 1.2 $G^{\mathfrak{F}}$ – примарная p -группа, где $p \in \pi(G)$.

Покажем, что $|\pi(G)| \leq 3$. Пусть $|\pi(G)| > 3$ и H – произвольная бипримарная подгруппа. Покажем, что H \mathfrak{F} -достижима в G . Рассмотрим подгруппу $G^\delta H$. Очевидно, что $G^\delta H$ – собственная подгруппа группы G . Отсюда следует, что $G^\delta H \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} – наследственная формация, то H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа в $G^\delta H$ – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G . По лемме 1.1 H \mathfrak{F} -достижима в G . Согласно условию теоремы $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, $|\pi(G)| \leq 3$.

Пусть $|\pi(G)| = 3$. Покажем, что $G^\delta = G_p$. Предположим противное, то есть $G^\delta \subsetneq G_p$. Пусть H – произвольная бипримарная подгруппа группы G . Рассмотрим подгруппу HG^δ . Очевидно, что HG^δ – собственная подгруппа группы G . Отсюда следует, что $HG^\delta \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} – наследственная формация, то H – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа из HG^δ . Согласно лемме 1.1 HG^δ \mathfrak{F} -достижима в G . Теперь по лемме 1.1 H \mathfrak{F} -достижима в G . Согласно условию теоремы $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, $G_p = G^\delta$ и G – группа из пункта 2).

Пусть $|\pi(G)| = 2$. Покажем, что G^δ – собственная подгруппа из G_p . Предположим противное. Тогда $G = G_p \rtimes G_q$, где $G_p = G^\delta$. Рассмотрим факторгруппу $G/\Phi(G)$. Так как \mathfrak{F} – насыщенная формация, то $G/\Phi(G)$ – минимальная не \mathfrak{F} -группа. Так как $G^\delta \Phi(G)/\Phi(G)$ – минимальная нормальная подгруппа, то в $G/\Phi(G)$ нет собственных бипримарных подгрупп, не содержащих $G^\delta \Phi(G)/\Phi(G)$. Согласно лемме 1.1 любая бипримарная подгруппа $G/\Phi(G)$, содержащая $G^\delta \Phi(G)/\Phi(G)$, \mathfrak{F} -достижима в $G/\Phi(G)$. Итак, в $G/\Phi(G)$ любая бипримарная подгруппа \mathfrak{F} -достижима в $G/\Phi(G)$. Согласно условию теоремы $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Так как \mathfrak{F} – насыщенная формация, то $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Покажем, что из 2) следует 1).

Пусть $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и в G любая бипримарная подгруппа \mathfrak{F} -достижима в G , но $G \notin \mathfrak{F}$. Пусть H – собственная подгруппа группы G . Очевидно, что любая бипримарная подгруппа из H \mathfrak{F} -достижима в G . Согласно лемме 1.1 каждая такая подгруппа \mathfrak{F} -достижима в H . По индукции $H \in \mathfrak{F}$. Итак, G – минимальная не \mathfrak{F} -группа. Пусть G – группа из пункта а), тогда $G = G_p \rtimes H$, где $G_p = G^\delta$ и $|\pi(G)| = 3$. Согласно условию теоремы бипримарная подгруппа H

\mathfrak{F} -достижима в G . Следовательно, H содержится в максимальной подгруппе M группы G , причем M либо \mathfrak{F} -нормальна, либо M нормальна в G . Если M \mathfrak{F} -нормальна, то $G^\delta \subseteq M$. Отсюда $G \subseteq M$, что невозможно. Если M нормальна в G , то $G/G^\delta \in \mathfrak{F}$ и $G/M \in \mathfrak{F}$ и, значит, $G/G^\delta \cap M \in \mathfrak{F}$. Отсюда $G^\delta \subseteq M$, что невозможно.

Пусть G – группа из пункта 2). Тогда $G = G^\delta K$, где K – бипримарная подгруппа группы G . Согласно условию K – \mathfrak{F} -достижимая подгруппа группы G . Как и выше, нетрудно показать, что такое невозможно. Теорема доказана.

Следствие 2.2.1. Пусть \mathfrak{N}^2 – формация всех метанильпотентных групп. Разрешимая группа G метанильпотентна тогда и только тогда, когда любая ее бипримарная подгруппа \mathfrak{N}^2 -достижима в G .

Доказательство следует из леммы 1.3 и теоремы 2.2.

Следствие 2.2.2. Пусть \mathfrak{F} – формация всех разрешимых групп с p -длиной ≤ 1 . Разрешимая группа $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда любая ее бипримарная подгруппа \mathfrak{F} -достижима в G .

Доказательство следует из теоремы 2.2 и леммы 1.4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kegel, O.H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die Subnormalteilerverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – V. 30. – P. 225–228.
2. Васильев, А.Ф. О влиянии примарных X -субнормальных подгрупп на строение группы / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры: межведомств. сб. / Мин-во обр. и науки Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины; редкол. : Л.А. Шеметков [и др.]. – Гомель, 1995. – Вып. 8. – С. 31–39.
3. Васильева, Т.И. О конечных группах с \mathfrak{F} -достижимыми силовскими подгруппами / Т.И. Васильева, А.И. Прокопенко – Гомель, 2006. – 18 с. – (Препринт / Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины ; № 4).
4. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука.– 1978. – 267 с.
5. Семенчук, В.Н. Минимальные не \mathfrak{F} -группы / В.Н. Семенчук // Алгебра и логика. – 1979. – Т. 18, № 3. – С. 348–382.
6. Семенчук, В.Н. Описание разрешимых минимальных не \mathfrak{F} -групп для произвольной totally локальной формации / В.Н. Семенчук // Математические заметки. – 1988. – Т. 43, № 4. – С. 251–260.

Поступила в редакцию 27.10.10.

УДК 512.542.6

ЗАМЕЧАНИЕ О \mathfrak{X} -ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЯХ

Л.А. Шеметков

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

A NOTE ON \mathfrak{X} -LOCAL FORMATIONS

L.A. Shemetkov

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Установлено, что всякая \mathfrak{X} -локальная (в смысле Фёрстера) формация конечных групп является ω -композиционной формацией, где $\omega = \pi(\mathfrak{X})$.

Ключевые слова: конечная группа, формация.

It is proved that every \mathfrak{X} -local (by Förster) formation of finite groups is an ω -composition formation, where $\omega = \pi(\mathfrak{X})$.

Keywords: finite group, formation.

AMS 2000 Mathematics Subject Classification: 20D10.

All groups considered are finite. We use standard notations (see [1]). The characteristic $\text{char}(\mathfrak{X})$ of a group class \mathfrak{X} is the set of primes p such that \mathfrak{X} contains a group of order p ; $\pi(\mathfrak{H})$ is the set of all prime divisors of groups in \mathfrak{H} . A chief factor H/K is called a chief \mathfrak{H} -factor if $H/K \in \mathfrak{H}$. We denote by $E\mathfrak{H}$ the class of groups all composition factors of which belong to \mathfrak{H} . We denote by \mathfrak{J} the class of all simple (abelian and non-abelian) groups. If $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{J}$, then $\mathfrak{X}' = \mathfrak{J} \setminus \mathfrak{X}$, and \mathfrak{X}^+ is the class of abelian groups in \mathfrak{X} . We denote by $\mathcal{K}(G)$ the class of simple groups isomorphic to composition factors of a group G . By $C^A(G)$ we denote the intersection of all centralizers of all chief factors H/K of the group G such that $A \in \mathcal{K}(H/K)$ ($C^A(G) = G$ if G does not contain chief factors of this type).

The concept of \mathfrak{X} -local formation was introduced by P. Förster (see [2], [1, p. 374], [3, Definition 3.1.1], [4, Definition 1.3]).

Definition 1. Let \mathfrak{x} be a class of simple groups such that $\text{char}(\mathfrak{x}) = \pi(\mathfrak{X})$. Consider a function

$$f: \pi(\mathfrak{X}) \cup \mathfrak{x}' \rightarrow \{\text{formations}\},$$

which we call an \mathfrak{X} -formation function; we assume that f takes equal values at isomorphic groups. Let $LF_{\mathfrak{x}}(f)$ be the class of groups G satisfying the following conditions:

- 1) if H/K is a chief $E\mathfrak{X}$ -factor of G , then $G/C_G(H/K) \in f(p)$ for each $p \in \pi(H/K)$;
- 2) if G/L is monolithic and $\text{Soc}(G/L) \in E\mathfrak{x}'$, then $G/L \in f(E)$, where $E \in \mathcal{K}(\text{Soc}(G/L))$. The class $LF_{\mathfrak{x}}(f)$ is a formation; it is called an \mathfrak{X} -local formation.

Lemma 1 (see [4, Lemma 2.1, Lemma 4.4]). Let \mathfrak{X} be a class of simple groups such that $\text{char}(\mathfrak{X}) = \pi(\mathfrak{X})$. Set $\mathfrak{L} = \mathfrak{X}^+$. Let f be an \mathfrak{X} -formation function and $\mathfrak{F} = LF_{\mathfrak{x}}(f)$. Then $\mathfrak{F} = LF_{\mathfrak{L}}(h)$, where h is an \mathfrak{L} -formation function such that $h(p) = f(p) \cap \mathfrak{F}$ for every p in $\pi(\mathfrak{X})$, and $h(E) = \mathfrak{F}$ for every E in \mathfrak{L}' .

Lemma 2 (see [4, Lemma 3.1]). Let \mathfrak{X} be a class of simple groups such that $\text{char}(\mathfrak{X}) = \pi(\mathfrak{X})$. Let f be an \mathfrak{X} -formation function and $\mathfrak{F} = LF_{\mathfrak{x}}(f)$. Let M be a minimal normal subgroup of a group G such that $G/M \in \mathfrak{F}$, $M \in E\mathfrak{X}$ and M is f -central in G , i.e., $G/C_G(M) \in f(p)$ for each p in $\pi(M)$. Then $G \in \mathfrak{F}$.

The concept of \mathfrak{L} -composition formation was proposed in [5].

Definition 2. Let \mathfrak{L} be an arbitrary non-empty class of simple groups. Then any function f of the form $f: \mathfrak{L} \cup \{\mathfrak{L}'\} \rightarrow \{\text{formations}\}$ taking equal values on the isomorphic groups is called an \mathfrak{L} -composition satellite. If A is an \mathfrak{L} -group of prime order p , we write $f(p)$ instead of $f(A)$. For any \mathfrak{L} -composition satellite f , we denote by $CF_{\mathfrak{L}}(f)$ the class of groups G satisfying the following conditions:

- 1) $G/G_{E\mathfrak{L}} \in f(\mathfrak{L}')$, where $G_{E\mathfrak{L}}$ is the $E\mathfrak{L}$ -radical of G ;
- 2) $G/C^A(G) \in f(A)$ for every $A \in \mathcal{K}(G) \cap \mathfrak{L}$.

The class $CF_{\mathfrak{L}}(f)$ is a formation; it is called an \mathfrak{L} -composition formation. If $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^+$ and $\omega = \pi(\mathfrak{L})$, the class $CF_{\mathfrak{L}}(f)$ is called an ω -composition formation.

Theorem. Let \mathfrak{X} be a non-empty class of simple groups such that $\omega = \text{char}(\mathfrak{X}) = \pi(\mathfrak{X})$. Then every \mathfrak{X} -local formation is an ω -composition formation.

Proof. Let $\mathfrak{F} = LF_{\mathfrak{X}}(f)$. Set $\mathfrak{L} = \mathfrak{X}^+$. By Lemma 1, $\mathfrak{F} = LF_{\mathfrak{L}}(h)$, where h is an \mathfrak{L} -formation function such that $h(p) = f(p) \cap \mathfrak{F}$ for every p in $\pi(\mathfrak{L}) = \omega$, and $h(E) = \mathfrak{F}$ for every E in \mathfrak{L}' . Now we consider an \mathfrak{L} -composition formation $\mathfrak{D} = CF_{\mathfrak{L}}(d)$, where d is an \mathfrak{L} -composition satellite such that $d(p) = h(p)$ for every p in ω , and $d(\mathfrak{L}') = \mathfrak{F}$. We prove that $\mathfrak{F} = \mathfrak{D}$.

If $G \in \mathfrak{F}$, then $G / G_{E\mathfrak{L}} \in \mathfrak{F} = d(\mathfrak{L}')$ and for every chief $(\mathcal{K}(G) \cap \mathfrak{L})$ -factor H / K of G we have that $G/C_G(H/K)$ belongs to $d(p) = h(p)$ where p in $\pi(H/K)$. Thus, G belongs to \mathfrak{D} . So, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{D}$.

Let G be the group of the least order in $\mathfrak{D} \setminus \mathfrak{F}$. Then $L = G^{\mathfrak{L}}$ is the socle of G . If $G_{E\mathfrak{L}} \neq 1$, then L belongs to $E\mathfrak{L}$, and by Lemma 2 we have $G \in \mathfrak{F}$. Assume that $G_{E\mathfrak{L}} = 1$. Then, according to Definition 2, G belongs to $f(\mathfrak{L}') = \mathfrak{F}$.

The theorem is proved.

Remark. In [5] it was proved that every \mathfrak{L} -composition formation \mathfrak{F} is a p -composition formation for any p in $\pi(\mathfrak{L}^+)$, so \mathfrak{F} is \mathfrak{L}^+ -local (see also [3, p. 152]).

REFERENCES

1. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin–New York : Walter de Gruyter, 1992.
2. Förster, P. Projektive Klassen endlicher Gruppen. IIa. Gesättigte Formationen: Ein allgemeiner Satz von Gaschütz-Lubeseder-Baer-Typ / P. Förster // Publ. Sec. Mat. Univ. Autònoma Barcelona. – 1985. – Vol. 29 (2–3). – P. 39–76.
3. Ballester-Bolinches, A. Classes of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht : Springer, 2006.
4. Ballester-Bolinches, A. On partially saturated formations of finite groups / A. Ballester-Bolinches, C. Calvo, L.A. Shemetkov // Sbornik: Mathematics. – 2007. – Vol. 198:6. – P.757–775. Translated from Matem. Sbornik. 2007. – Vol. 198:6. – P. 3–24 (in Russian).
5. Shemetkov, L.A. Multiply \mathfrak{L} -composition formations of finite groups / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba // Ukrainian Math. J. – 2000. – Vol. 52, №. 6. – P. 898–912. Translated from Ukr. Matem. Zhurnal. – 2000. – Vol. 52, № 6. – P. 783–797 (in Russian).

Поступила в редакцию 21.11.10.

УДК 517.2

СЕТЬ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМ ВРЕМЕНЕМ ПРЕБЫВАНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ, ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЗАЯВОК И СИГНАЛОВ

О.В. Якубович¹, В.Е. Евдокимович²

¹Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины, Гомель

²Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

QUEUEING NETWORK WITH RANDOM STAYING TIME OF DIFFERENT TYPES OF POSITIVE, NEGATIVE CUSTOMERS AND SIGNALS

O.V. Yakubovich¹, V.E. Evdokimovich²

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel

²Belarusian State University of Transport, Gomel

В работе исследуется модель открытой сети с различными типами положительных, отрицательных заявок и сигналов. Время пребывания в каждом узле поступающих требований ограничено случайной величиной, имеющей показательное распределение. Стационарное распределение вероятностей состояний сети найдено в форме произведения множителей, представляющих собой стационарные распределения изолированных узлов.

Ключевые слова: сеть массового обслуживания, различные типы положительных, отрицательных заявок и сигналов, стационарное распределение.

This paper considers an open queueing network with different types of positive, negative customers and signals. Staying time of arriving demands in each node is the random value having exponential distribution. Stationary distribution of the network states is found in product form and each multiplier represents stationary distribution of the isolated nodes.

Keywords: queueing network, different types of positive, negative customers and signals, stationary distribution.

Введение

Сети массового обслуживания являются адекватными математическими моделями разнообразных случайных процессов в информационно-вычислительных сетях, сетях передачи данных, связи и многих других объектах, имеющих сетевую структуру. В аналитических исследованиях стационарного функционирования сетей массового обслуживания центральным всегда является вопрос нахождения стационарного распределения, которое является отправной точкой большинства исследований в теории массового обслуживания. В последнее время появляется все больше новых интересных моделей, позволяющих учитывать требования современности и возможность применения к сложным реальным объектам, имеющим сетевую структуру. Большой интерес исследователей вызывают модели с отрицательными заявками и сигналами, отличающихся от обычных положительных заявок тем, что они не нуждаются в реальном обслуживании, а оказывают некоторое воздействие на состояние системы, например, отрицательные заявки уменьшают очередь обычных заявок непустой системы на единицу. Отрицательные заявки были введены в рассмотрение Геленбе [1], [2].

В настоящей работе рассматривается модель открытой сети, в которую поступают

пуассоновские потоки различных типов положительных, отрицательных заявок и сигналов. Очереди в узлах сети формируются из положительных заявок, отрицательных заявок и сигналов. Обслуживания требуют только положительные заявки. Время пребывания в очереди узла для положительных, отрицательных заявок и сигналов ограничено случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение с параметром, различным для каждого типа и обратно пропорциональным количеству требований данного типа в очереди узла. Отрицательная заявка, время пребывания в узле которой закончилось, уменьшает количество положительных заявок соответствующего типа в узле на единицу, если такие есть в узле. Сигнал после окончания времени пребывания оказывает одно из следующих воздействий на очередь положительных заявок соответствующего типа, находящихся в узле: уменьшает длину очереди на единицу, если очередь положительных заявок непуста, увеличивает длину очереди на единицу или не производит никакого изменения. Данное предположение может найти применение в моделировании реальных сетей связи, поскольку при передаче запроса (положительной заявки) часто устанавливается так называемый тайм-аут, истечение которого означает, что передача запроса не укладывается в планируемый интервал времени,

после чего запрос удаляется из очереди. Отрицательные заявки и сигналы в рассматриваемой модели, например, могут описывать вирусы в системе, которые начинают действовать через случайное время, при этом сигнал либо «исправляется» – становится положительной заявкой, либо «несет разрушение», уничтожает положительную заявку в системе – становится отрицательной заявкой, либо «отражается», «уничтожается» – не оказывает воздействия на узел.

1 Изолированный узел

Рассмотрим систему массового обслуживания, в которую поступает $3M$ независимых пуассоновских потоков требований с параметрами $\lambda_1^+, \lambda_2^+, \dots, \lambda_M^+, \lambda_1^-, \lambda_2^-, \dots, \lambda_M^-, \lambda_1^s, \lambda_2^s, \dots, \lambda_M^s$, при этом λ_k^+ есть интенсивность поступления положительных заявок k -го типа, λ_k^- есть интенсивность поступления отрицательных заявок k -го типа, λ_k^s есть интенсивность поступления сигналов k -го типа в данную систему. Положительная заявка, поступившая в систему, увеличивает длину очереди положительных заявок соответствующего типа в системе на единицу и требует обслуживания. В системе находится M экспоненциальных приборов, k -ый прибор обслуживает положительные заявки k -го типа. Заявки обслуживаются в порядке поступления. Времена обслуживания заявок в системе независимы, не зависят от процессов поступления и для положительных заявок k -го типа имеют показательное распределение с параметром μ_k ($k = \overline{1, M}$). Каждая положительная заявка k -го типа, находящаяся в системе, имеет время пребывания, ограниченное экспоненциально распределенной случайной величиной с параметром $\nu_k(n_k) = \frac{\nu_k}{n_k}$ для $n_k \geq 1$, где n_k – число положительных заявок k -го типа в системе, ν_k – некоторая положительная постоянная, $\nu_k(0) = 0$. Отрицательная заявка типа k , поступившая в систему, увеличивает длину очереди отрицательных заявок соответствующего типа в системе на единицу. Каждая отрицательная заявка типа k , находящаяся в системе, остается в очереди случайное время, имеющее показательное распределение с параметром $\tau_k(m_k) = \frac{\tau_k}{m_k}$ для $m_k \geq 1$, где m_k – число отрицательных заявок k -го типа в системе, τ_k – некоторая положительная постоянная, $\tau_k(0) = 0$. После окончания времени пребывания в системе отрицательная заявка уменьшает длину соответствующей очереди на одну положительную заявку типа k , если в системе есть

положительные заявки соответствующего типа, не производит никаких воздействий на систему, если в системе нет положительных заявок соответствующего типа. Сигнал типа k , поступивший в систему, увеличивает длину очереди сигналов соответствующего типа в системе на единицу. Каждый сигнал типа k , находящийся в системе, остается в очереди случайное время, имеющее показательное распределение с параметром $\omega_k(l_k) = \frac{\omega_k}{l_k}$ для $l_k \geq 1$, где l_k – число

сигналов k -го типа в системе, ω_k – некоторая положительная постоянная, $\omega_k(0) = 0$. После окончания времени пребывания в системе сигнал уменьшает длину соответствующей очереди на одну положительную заявку типа k с вероятностью $p(k, -)$, если в системе есть положительные заявки соответствующего типа, не производит никаких воздействий на систему, если в системе нет положительных заявок соответствующего типа, увеличивает длину очереди на одну положительную заявку типа k с вероятностью $p(k, +)$, не производит никаких изменений с вероятностью $p(k, 0)$. Очевидно, что

$$p(k, -) + p(k, +) + p(k, 0) = 1$$

для всех $k = \overline{1, M}$. Процессы поступления, обслуживания и пребывания в системе независимы.

Состояние рассматриваемой системы массового обслуживания в момент времени t будем характеризовать случайным вектором

$$x(t) = (n(t), m(t), l(t)) =$$

$$= (n_1(t), \dots, n_M(t), m_1(t), \dots, m_M(t), l_1(t), \dots, l_M(t)),$$

где $n_k(t)$ – количество положительных заявок k -го типа в системе в момент t , $m_k(t)$ – количество отрицательных заявок k -го типа в системе в момент t , $l_k(t)$ – количество сигналов k -го типа в системе в момент t . Тогда $x(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и фазовым пространством состояний

$$X = \{x = (n, m, l) =$$

$$= (n_1, \dots, n_M, m_1, \dots, m_M, l_1, \dots, l_M),$$

$$n_i, m_i, l_i = 0, 1, \dots; i = \overline{1, M}\}.$$

Предположим, что $\{p(x), x \in X\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $x(t)$.

Уравнения равновесия для стационарных вероятностей имеют вид:

$$p(x) \sum_{k=1}^M \left[\lambda_k^+ + \lambda_k^- + \lambda_k^s + (\mu_k + \nu_k) I_{\{n_k \neq 0\}} + \right. \\ \left. + \tau_k I_{\{m_k \neq 0\}} + \omega_k I_{\{l_k \neq 0\}} \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^M \left(\lambda_k^+ p(n - e_k, m, l) I_{\{n_k \neq 0\}} + \right. \\
 &\quad + \lambda_k^- p(n, m - e_k, l) I_{\{m_k \neq 0\}} + \\
 &\quad + \lambda_k^s p(n, m, l - e_k) I_{\{l_k \neq 0\}} + \\
 &\quad + (\mu_k + \nu_k) p(n + e_k, m, l) + \tau_k p(n + e_k, m + e_k, l) + \\
 &\quad + \omega_k p(k, +) p(n - e_k, m, l + e_k) I_{\{n_k \neq 0\}} + \\
 &\quad + \omega_k p(k, -) p(n + e_k, m, l + e_k) + \omega_k (p(k, -) I_{\{n_k = 0\}} + \\
 &\quad + p(k, 0)) p(n, m, l + e_k) + \\
 &\quad \left. + \tau_k p(n, m + e_k, l) I_{\{n_k = 0\}} \right), \quad x = (n, m, l) \in X.
 \end{aligned}$$

Здесь e_k – единичный вектор размерности M с единицей в k -ой позиции, $I_{\{x\}}$ – характеристическая функция, принимающая значение 1, если x истинно, 0 – в противном случае.

Теорема 1.1. Пусть для любого $k = \overline{1, M}$ выполнено условие

$$\frac{\lambda_k^+ + \lambda_k^s p(k, +)}{\lambda_k^- + \lambda_k^s p(k, -) + \mu_k + \nu_k} < 1, \quad \frac{\lambda_k^-}{\tau_k} < 1, \quad \frac{\lambda_k^s}{\omega_k} < 1$$

тогда марковский процесс $x(t)$ эргодичен, а финальное стационарное распределение вероятностей состояний системы имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 &p(n_1, \dots, n_M, m_1, \dots, m_M, l_1, \dots, l_M) = \\
 &= \prod_{k=1}^M \rho_1^{n_k} \rho_2^{m_k} \rho_3^{l_k} p_k(0),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= \frac{\lambda_k^+ + \lambda_k^s p(k, +)}{\lambda_k^- + \lambda_k^s p(k, -) + \mu_k + \nu_k}, \quad \rho_2 = \frac{\lambda_k^-}{\tau_k}, \quad \rho_3 = \frac{\lambda_k^s}{\omega_k}, \\
 p_k(0) &= (1 - \rho_1)(1 - \rho_2)(1 - \rho_3).
 \end{aligned}$$

Доказательство проводится стандартным образом: подстановкой стационарных вероятностей в уравнения равновесия. Условие эргодичности находится из теоремы Фостера.

2 Открытая сеть

Рассмотрим открытую сеть, состоящую из N узлов со структурой, описанной выше. В сеть поступает простейший поток положительных, отрицательных заявок и сигналов интенсивности λ^+ , λ^- и λ^s соответственно. Каждая положительная заявка входного потока независимо от других заявок направляется в i -ый узел и становится положительной заявкой k -го типа с вероятностью $p_{0(i,k)}^+$ ($i = \overline{1, N}, k = \overline{1, M}$). Очевидно, что $\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M p_{0(i,k)}^+ = 1$. Положительная заявка, поступившая в узел, увеличивает длину очереди положительных заявок соответствующего типа в узле на единицу и требует обслуживания. Каждая отрицательная заявка входного потока

независимо от других направляется в i -ый узел, становится отрицательной заявкой k -го типа с вероятностью $p_{0(i,k)}^-$ ($i = \overline{1, N}, k = \overline{1, M}$) и увеличивает длину очереди отрицательных заявок соответствующего типа в узле на единицу. Очевидно, что $\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M p_{0(i,k)}^- = 1$. Каждая отрицательная заявка типа k , находящаяся в i -ом узле, остается в очереди случайное время, имеющее показательное распределение с параметром $\tau_{(i,k)}(m_{(i,k)}) = \frac{\tau_{(i,k)}}{m_{(i,k)}}$ для $m_{(i,k)} \geq 1$, где $m_{(i,k)}$ – количество отрицательных заявок k -го типа в i -ом узле, $\tau_{(i,k)}$ – некоторая положительная постоянная, $\tau_{(i,k)}(0) = 0$ ($i = \overline{1, N}, k = \overline{1, M}$). После окончания времени пребывания в узле отрицательная заявка уменьшает длину соответствующей очереди положительных заявок типа k в i -ом узле на единицу, если в узле есть положительные заявки соответствующего типа, не производит никаких воздействий на узел, если в узле нет положительных заявок соответствующего типа. Каждый сигнал входного потока независимо от других направляется в i -ый узел, становится сигналом k -го типа с вероятностью $p_{0(i,k)}^s$ ($i = \overline{1, N}, k = \overline{1, M}$) и увеличивает длину очереди сигналов соответствующего типа в узле на единицу. Очевидно, что $\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M p_{0(i,k)}^s = 1$. Каждый сигнал типа k , находящийся в i -ом узле, остается в очереди случайное время, имеющее показательное распределение с параметром $\omega_k(l_{(i,k)}) = \frac{\omega_k}{l_{(i,k)}}$ для $l_{(i,k)} \geq 1$, где $l_{(i,k)}$ – число сигналов k -го типа в системе, ω_k – некоторая положительная постоянная, $\omega_k(0) = 0$. После окончания времени пребывания в узле сигнал уменьшает длину соответствующей очереди положительных заявок типа k в i -ом узле на единицу с вероятностью $p_i(k, -)$, если в узле есть положительные заявки соответствующего типа, не производит никаких воздействий на состояние узла, если в узле нет положительных заявок соответствующего типа, увеличивает длину соответствующей очереди положительных заявок типа k в i -ом узле на единицу с вероятностью $p_i(k, +)$, не производит никаких изменений с вероятностью $p_i(k, 0)$. Очевидно, что $p_i(k, -) + p_i(k, +) + p_i(k, 0) = 1$ для всех $k = \overline{1, M}, i = \overline{1, N}$. В каждом узле находится M экспоненциальных приборов, k -ый прибор обслуживает

положительные заявки k -го типа. Заявки обслуживаются в порядке поступления. Времена обслуживания различных заявок независимы, не зависят от процесса поступления и для положительных заявок k -го типа в i -ом узле имеют показательное распределение с параметром $\mu_{(i,k)}$ ($i = \overline{1, N}, k = \overline{1, M}$). Каждая положительная заявка k -го типа, пребывающая в i -ом узле, имеет время пребывания, ограниченное экспоненциально распределенной случайной величиной с параметром $v_{(i,k)}(n_{(i,k)}) = \frac{v_{(i,k)}}{n_{(i,k)}}$ для $n_{(i,k)} \geq 1$, где $n_{(i,k)}$ – количество заявок типа k в i -ом узле, $v_{(i,k)}$ – некоторая положительная постоянная, $v_{(i,k)}(0) = 0$ ($i = \overline{1, N}, k = \overline{1, M}$). Каждая положительная заявка k -го типа, время пребывания которой в i -ом узле закончилось, продолжает движение по сети и ведет себя так же, как положительные заявки k -го типа, получившие обслуживание в i -ом узле ($i = \overline{1, N}, k = \overline{1, M}$). Каждая положительная заявка k -го типа после завершения обслуживания или окончания времени пребывания в i -ом узле независимо от других заявок мгновенно направляется в j -ый узел и становится положительной заявкой r -го типа с вероятностью $p_{(i,k)(j,r)}^+$ или отрицательной заявкой r -го типа с вероятностью $p_{(i,k)(j,r)}^-$, а с вероятностью $p_{(i,k)0}$ покидает сеть.

$$\sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^M (p_{(i,k)(j,r)}^+ + p_{(i,k)(j,r)}^-) + p_{(i,k)0} = 1$$

$$(i = \overline{1, N}, k = \overline{1, M}).$$

Будем предполагать, что матрица маршрутизации P неприводима. Процессы поступления, обслуживания и пребывания в сети независимы.

Нелинейные уравнения трафика для $i = \overline{1, N}, k = \overline{1, M}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(i,k)}^+ &= \lambda^+ p_{0(i,k)}^+ + \varepsilon_{(i,k)}^s p_i(k, +) + \\ &+ \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^M \frac{\varepsilon_{(j,r)}^+ (\mu_{(j,r)} + v_{(j,r)})}{\mu_{(j,r)} + v_{(j,r)} + \varepsilon_{(j,r)}^- + \varepsilon_{(j,r)}^s p_j(r, -)} p_{(j,r)(i,k)}^+, \\ \varepsilon_{(i,k)}^- &= \lambda^- p_{0(i,k)}^- + \\ &+ \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^M \frac{\varepsilon_{(j,r)}^+ (\mu_{(j,r)} + v_{(j,r)})}{\mu_{(j,r)} + v_{(j,r)} + \varepsilon_{(j,r)}^- + \varepsilon_{(j,r)}^s p_j(r, -)} p_{(j,r)(i,k)}^-, \\ \varepsilon_{(i,k)}^s &= \lambda^s p_{0(i,k)}^s + \\ &+ \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^M \frac{\varepsilon_{(j,r)}^+ (\mu_{(j,r)} + v_{(j,r)})}{\mu_{(j,r)} + v_{(j,r)} + \varepsilon_{(j,r)}^- + \varepsilon_{(j,r)}^s p_j(r, -)} p_{(j,r)(i,k)}^s. \end{aligned}$$

Доказательство существования решения нелинейных уравнений трафика проводится с помощью теоремы Брауэра о неподвижной точке [3].

Состояние сети массового обслуживания в момент времени t будем характеризовать случайным вектором $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$, где $x_i(t) = (n_{(i,1)}(t), \dots, n_{(i,M)}(t), m_{(i,1)}(t), \dots, m_{(i,M)}(t), l_{(i,1)}(t), \dots, l_{(i,M)}(t))$, описывает состояние i -го узла, то есть $n_{(i,k)}(t)$ – число заявок k -го типа, $m_{(i,k)}(t)$ – число отрицательных заявок k -го типа, $l_{(i,k)}(t)$ – число сигналов k -го типа в i -ом узле в момент времени t ($i = \overline{1, N}, k = \overline{1, M}$), $x(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и пространством состояний

$$X = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_N), x_i = (n_{(i,1)}, \dots, n_{(i,M)}, m_{(i,1)}, \dots, m_{(i,M)}, l_{(i,1)}, \dots, l_{(i,M)})\},$$

$$n_{(i,k)}, m_{(i,k)}, l_{(i,k)} = 0, 1, 2, \dots; i = \overline{1, N}, k = \overline{1, M}.$$

Пусть $\{p(x), x \in X\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $x(t)$.

Уравнения равновесия для стационарных вероятностей имеют вид:

$$\begin{aligned} p(x) \left[\lambda^+ + \lambda^- + \lambda^s + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M (\mu_{(i,k)} + v_{(i,k)}) I_{\{n_{(i,k)} \neq 0\}} + \right. \\ \left. + \tau_{(i,k)} I_{\{m_{(i,k)} \neq 0\}} + \omega_{(i,k)} I_{\{l_{(i,k)} \neq 0\}} \right] = \\ = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M \left[p(x - e_{(i,k)}) \lambda^+ p_{0(i,k)}^+ I_{\{n_{(i,k)} \neq 0\}} + \right. \\ \left. + p(x - e_{(i,M+k)}) \lambda^- p_{0(i,k)}^- I_{\{m_{(i,k)} \neq 0\}} + \right. \\ \left. + p(x - e_{(i,2M+k)}) \lambda^s p_{0(i,k)}^s I_{\{l_{(i,k)} \neq 0\}} + \right. \\ \left. + p(x + e_{(i,k)}) (\mu_{(i,k)} + v_{(i,k)}) p_{(i,k)0} + \right. \\ \left. + p(x + e_{(i,k)} + e_{(i,M+k)}) \tau_{(i,k)} + \right. \\ \left. + p(x + e_{(i,k)} + e_{(i,2M+k)}) \omega_{(i,k)} p_i(k, -) + \right. \\ \left. + p(x + e_{(i,2M+k)}) \omega_{(i,k)} (p_i(k, 0) + p_i(k, -) I_{\{n_{(i,k)} = 0\}}) + \right. \\ \left. + p(n + e_{(i,M+k)}) \tau_{(i,k)} I_{\{n_{(i,k)} = 0\}} + \right. \\ \left. + p(n - e_{(i,k)} + e_{(i,2M+k)}) \omega_{(i,k)} p_i(k, +) I_{\{n_{(i,k)} \neq 0\}} + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^M \left[p(x + e_{(i,k)} - e_{(j,r)}) (\mu_{(i,k)} + v_{(i,k)}) p_{(i,k)(j,r)}^+ I_{\{n_{(j,r)} \neq 0\}} + \right. \right. \\ \left. \left. + p(x + e_{(i,k)} - e_{(j,M+r)}) (\mu_{(i,k)} + v_{(i,k)}) p_{(i,k)(j,r)}^- I_{\{m_{(j,r)} \neq 0\}} + \right. \right. \\ \left. \left. + p(x + e_{(i,k)} - e_{(j,2M+r)}) (\mu_{(i,k)} + v_{(i,k)}) p_{(i,k)(j,r)}^s I_{\{l_{(j,r)} \neq 0\}} \right] \right], \\ x \in X. \end{aligned}$$

Здесь $e_{(i,k)}$ – единичный вектор размерности $(3M \cdot N)$ с единицей в $(3M(i-1) + k)$ -ой позиции.

Теорема 2.1. Пусть для любых $i = \overline{1, N}, k = \overline{1, M}$ выполнено условие

$$\frac{\varepsilon_{(i,k)}^+}{\mu_{(i,k)} + v_{(i,k)} + \varepsilon_{(i,k)}^- + \varepsilon_{(i,k)}^s p_i(k, -)} < 1,$$

$$\frac{\varepsilon_{(i,k)}^-}{\tau_{(i,k)}} < 1, \quad \frac{\varepsilon_{(i,k)}^s}{\omega_{(i,k)}} < 1,$$

тогда марковский процесс $x(t)$ эргодичен, а финальное стационарное распределение вероятностей состояний сети имеет следующий вид:

$$p(x) = p_1(x_1) p_2(x_2) \dots p_N(x_N), \quad x \in X,$$

где

$$p(x_i) = \prod_{k=1}^M [\rho_{1(i,k)}]^{n_{(i,k)}} \cdot [\rho_{2(i,k)}]^{m_{(i,k)}} \cdot [\rho_{3(i,k)}]^{l_{(i,k)}} p_{(i,k)}(0),$$

$$\rho_{1(i,k)} = \frac{\varepsilon_{(i,k)}^+}{\mu_{(i,k)} + \nu_{(i,k)} + \varepsilon_{(i,k)}^- + \varepsilon_{(i,k)}^s p_i(k, -)},$$

$$\rho_{2(i,k)} = \frac{\varepsilon_{(i,k)}^-}{\tau_{(i,k)}}, \quad \rho_{3(i,k)} = \frac{\varepsilon_{(i,k)}^s}{\omega_{(i,k)}},$$

$$p_{(i,k)}(0) = (1 - \rho_{1(i,k)})(1 - \rho_{2(i,k)})(1 - \rho_{3(i,k)}),$$

а $(\varepsilon_{(i,k)}^+, \varepsilon_{(i,k)}^-, \varepsilon_{(i,k)}^s, i = \overline{1, N}, k = \overline{1, M})$ находятся как решение нелинейных уравнений трафика.

Доказательство теоремы проводится стандартным образом, подстановкой стационарного распределения в уравнения равновесия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gelenbe, E. Stability of product-form G-networks / E. Gelenbe, R. Schassberger // Probab. Eng. and Inf. Sci. – 1992. – Vol. 6. – P. 271–276.

2. Gelenbe, E. Product-form networks with negative and positive customers / E. Gelenbe // J. Appl. Prob. – 1991. – Vol. 28. – P. 656–663.

3. Данфорд, Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. – М. : ИЛ, 1962. – 522 с.

Поступила в редакцию 15.11.10.

УДК 002.6

**АПРОБАЦИЯ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НАУЧНЫХ КОЛЛЕКТИВОВ
НА ПРИМЕРЕ МЕЖРЕГИОНАЛЬНОГО ПОРТАЛА «ПРОБЛЕМЫ
ПРЕОДОЛЕНИЯ ПОСЛЕДСТВИЙ ЧЕРНОБЫЛЬСКОЙ КАТАСТРОФЫ»**

О.М. Демиденко¹, Е.В. Елисеева², В.П. Маслов³, В.Д. Левчук¹, В.М. Буяльский³

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

²Брянский государственный университет им. И.Г. Петровского, Брянск, Россия

³Черниговский государственный институт экономики и управления, Чернигов, Украина

**APPROBATION OF THE MODEL OF RESEARCH TEAMS' INTERACTION
ON THE EXAMPLE OF INTERREGIONAL PORTAL «PROBLEMS
OF OVERCOMING OF CHERNOBYL CATASTROPHE CONSEQUENCES»**

O.M. Demidenko¹, E.V. Eliseeva², V.P. Maslov³, V.D. Liauchuk¹, V.M. Bujalsky³

¹F. Scorina Gomel State University, Gomel

²I.G. Petrovsky Briansk State University, Briansk, Russia

³Chernihiv State Institute of Economics and Management, Chernihiv, Ukraine

Данная статья посвящена возможностям, которые предоставляет конкретная реализация модели взаимодействия научных коллективов. В качестве объекта реализации рассмотрен совместный проект – межрегиональный научный портал, аккумулирующий идеи, направленные на преодоление последствий Чернобыльской катастрофы. В статье описывается научная актуальность и практическая значимость создания научного портала, дается краткая характеристика основных направлений проекта, описываются особенности его создания и реализации, перспективы развития в теоретическом и прикладном планах.

Ключевые слова: модель взаимодействия научных коллективов, авария на Чернобыльской АЭС, информационно-телекоммуникационные технологии, Интернет-портал, сетевые научные сообщества.

This paper is devoted to the description of the possibilities of specific realization of the model of research teams' interaction. A joint project – an interregional research portal of ideas aimed at overcoming the Chernobyl disaster – is considered as the realization of the model. The paper describes the scientific relevance and practical significance of a scientific portal and provides a brief characteristic of the main directions of the project. We describe the features of its creating and implementing and the prospects of development in theoretical and practical plans.

Keywords: model of interaction research teams, the Chernobyl accident, information and telecommunication technologies, the Internet portal, online scientific communities.

Предпосылки создания проекта

Авария на Чернобыльской АЭС оказалась глобальной по масштабам радиоактивного загрязнения территорий в Беларуси, России, Украине и его последствиям. Например, в Брянской области вследствие аварии на ЧАЭС возникла особая экологическая ситуация, характеризующаяся повышенной радиоактивной загрязненностью среды юго-западных территорий области, появлением территорий новейших, неизвестных ранее (до аварии) комбинированных радиационно-токсических и радиационно-изолированных (экологически благополучных по токсическим компонентам) экосистемных воздействий (при равных дозах радиационных нагрузок на население) [1], [2].

Постчернобыльские эффекты тщательно изучаются как учеными пострадавших регионов, территории которых стали невиданным по масштабам научным полигоном, так и рядом заинтересованных зарубежных исследователей.

Однако, практика показывает, что для них существуют определенные проблемы, связанные с полноценным доступом к имеющимся информационным ресурсам по проблеме, а также с принятием полноценного участия в преодолении последствий Чернобыльской катастрофы.

Анализ on-line баз данных таких крупнейших межбиблиотечных компьютерных систем США как Mid-Atlantic Libraries System, North-Atlantic Libraries System, ILLINet Libraries System, а также Library of Congress показал, что Чернобыльская ниша во всем массиве данных оказалась достаточно скромной – 485 наименований, а среди 12 миллионов записей в библиотеке Конгресса США 570 относятся к проблемам Чернобыля [3].

Из 485 изданий межбиблиотечных систем Mid-, North и ILLINet Libraries System 72,4% информации представлены специалистами США, Австрии, Канады, Франции и Англии. Информация, поступившая из России, Беларуси и

Украины, составляет всего 27,6%, а на научные публикации приходится всего 12,3%, и все они на русском языке [3].

Публикации о различных проявлениях постчернобыльских эффектов рассеяны в огромном количестве специализированных и ведомственных изданий, о которых знают только специалисты соответствующих областей. Англоязычные пользователи получают информацию о Чернобыле в основном из изданий, опубликованных в США, авторами которых являются американские специалисты (41,84%).

Число иностранных изданий по Чернобыльской проблематике расположились в следующем порядке: Финляндия – 10,46%, Германия – 8,79%, Великобритания – 7,53%, Россия – 5,44%, Австрия – 4,62%, Япония – 3,76%, Швейцария – 3,35%, Франция – 3,76%, Дания – 2,09%, Украина, Канада – 1,67%, Нидерланды – 1,26%, Австралия, Ирландия – 0,84%, Беларусь, Бельгия, Венгрия, Норвегия, Польша – 0,42%. Среди них 55,23% составляют научные издания, 28,87% – публицистические, 11,72% – официальные материалы и 4,18% – фото-видео издания [4].

Обобщенный анализ информации о Чернобыльской катастрофе, относящейся к разряду глобальных катастроф, в одной из крупнейших библиотек мира – библиотеке Конгресса США показал, что научные издания составляют 54,03% всех публикаций, 34,2% – публицистические издания, 9,3% – издания официальных органов (доклады комиссий Конгресса США, напр.), 2,45% – видео- и фотоматериалы. Из всего этого количества информационных источников англоязычным пользователям доступны только 50%, которые изданы на английском языке. Вторая их половина представлена на разных языках, а титулы даны в виде транслитерации с использованием латинского алфавита [4].

Необходимость широкого взаимодействия представителей разных стран по Чернобыльской проблеме, открытия возможностей участия ведущих специалистов всего мира вне языка и территории в решении проблем преодоления последствий аварии на Чернобыльской АЭС нацеливает на создание условий для активного их включения в международное информационное научное пространство, на формирование целевого сетевого научного сообщества, ориентированного на научную поддержку исследований данного плана.

1 Инструменты реализации проекта

Серьезным шагом на пути преодоления информационной закрытости и отсутствия научной полноты исследований Чернобыльской проблематики, важнейшим фактором формирования единого межрегионального информационного пространства как необходимого условия реализации современных научных взглядов и идей в

ликвидации последствий масштабного радиоактивного загрязнения трех стран стала организация в 2009 году Российским, Белорусским и Украинскими фондами фундаментальных исследований (РФФИ, БРФФИ, ГФФИ) первого трехстороннего межрегионального конкурса проектов фундаментальных научных исследований по проблемам преодоления последствий Чернобыльской катастрофы, выполняемых совместными коллективами ученых из Брянской (Российская Федерация), Гомельской (Республика Беларусь) и Черниговской (Украина) областей, одним из победителей которого стал проект «Информационная система для поддержки работы международного сетевого сообщества исследователей: Межрегиональный научный портал "Преодоление последствий Чернобыльской катастрофы: фундаментальные исследования и практическая реализация"». Основным исполнителем поддержанного проекта от российской стороны является научный коллектив сотрудников Брянского государственного университета им. акад. И.Г. Петровского (руководитель и координатор международного проекта – профессор кафедры автоматизированных информационных систем и технологий Елисеєва Е.В.). От белорусской стороны приняли участие сотрудники кафедры автоматизированных систем обработки информации Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины. Украинская сторона представлена лабораторией компьютерных технологий Черниговского государственного института экономики и управления.

Фундаментальная научная проблема, на решение которой направлен проект, заключается в реализации современных научных взглядов и идей по преодолению последствий Чернобыльской катастрофы с использованием достижений в области информационных и коммуникационных технологий.

Основная задача проекта – создание условий для системного внедрения и активного использования современных информационных и коммуникационных технологий в совместной работе международных распределенных коллективов ученых – представителей Брянской, Гомельской, Черниговской областей России, Украины и Беларуси, и гражданского сектора, информационное обеспечение научных исследований, направленных на ликвидацию последствий Чернобыльской катастрофы.

Основным инструментом, используемым для решения поставленной задачи проекта, является Межрегиональный научный портал AllChernobyl.net. Он представляет собой набор персонально ориентированных online-инструментов в помощь исследователям, занимающимся научной деятельностью и принимающих участие в решении проблемы преодоления последствий катастрофы на Чернобыльской АЭС.

В качестве главных методов и подходов реализации проекта выступают:

1. Создание единого межрегионального информационного пространства как необходимого условия для реализации современных научных взглядов и идей по преодолению последствий Чернобыльской катастрофы.

2. Разработка модели координации усилий распределенных международных научных коллективов и их взаимодействия с гражданским сектором, бизнесом и государственными органами управления для мониторинга и формирования общественного мнения, выявления источников потенциальных социально-экономических проблем на постчернобыльском пространстве.

3. Формирование, научно-методическое и техническое сопровождение проблемно-ориентированной информационной системы: Межрегиональный научный портал «Проблемы преодоления последствий Чернобыльской катастрофы: фундаментальные исследования и практическая реализация».

4. Организация на базе Интернет-портала тематического сообщества по проблемам ликвидации последствий Чернобыльской катастрофы.

Портал выполнен с учетом требований:

– соответствия международным стандартам открытых систем,

– способности интеграции с прикладными системами и базами данных участников проекта,

– адаптации и простоты внесения возможных изменений средствами отладки портала с учетом функциональных требований групп пользователей,

– распределенности, т.е. возможности размещения ресурсов портала на нескольких, территориально удаленных серверах;

– масштабируемости по количеству пользователей, по объему данных, по интенсивности обмена данными, скорости обработки запросов и данных, по наборам предоставляемых услуг, по способам обеспечения доступа и т.п.,

– рационального применения типовых унифицированных компонентов и проектных процедур, а также средств контроля на основе использования бесплатного, легального, лицензионного программного обеспечения,

– совместимости с локальными порталами участников проекта,

– поддержки фирмы-хостера и сообщества производителей инструментального программного обеспечения, используемого для разработки региональных вариантов портала.

Общесистемные принципы, положенные в основу создания портала, соответствуют свойствам полезности и целевой ориентации:

– *разветвленности и системного единства* создания портала на нескольких территориально выделенных серверах Российской Федерации, Украины и Республики Беларусь;

– *открытости* – возможности подключения к межрегиональному portalу других профессиональных сайтов или расширение его за счет новых функций;

– *адаптации и развития* для настройки портала под функциональные требования групп пользователей;

– *совместимости* (концептуальной, функциональной, программной, информационной, технической и др.) региональных ресурсов межрегионального портала;

– *модульности* построения портала из типовых функциональных модулей участников межрегионального проекта;

– *стандартизации и унификации* проектных решений региональных ресурсов и *автоматизации* основных процессов создания и поддержки на основе использования интегрированных CMS-средств;

– *эффективности* портала с оценкой оптимального соотношения затрат на создание портала и эффекта от его внедрения.

Функционирование разработанного портала в среде Интернет соответствует следующим организационным принципам:

– свободного доступа к информационным ресурсам,

– научного подхода к отбору информации,

– соблюдения легитимности предоставляемых документов,

– интерактивного взаимодействия с пользователями и авторами,

– сотрудничества с лицами и организациями, осуществляющими фундаментальные и прикладные исследования по направлениям проекта.

Особое внимание при этом обращается на систему управления функционированием портала за счет целостного видения всего процесса исследования, работы по научному планированию, получении информации об эффективности прошлых и настоящих исследований. Результатом такого планирования является генерация совместных планов научной работы и договоренностей об организации научно-практической деятельности региональных групп-исследователей Украины, Беларуси, России. В рамках данного проекта предусматривается расширение возможностей мониторинга состояния решений поставленных научных проблем.

2 Функциональные возможности портала

Созданный портал позволяет получить целевым пользователям доступ к актуальной информации по Чернобыльской проблеме, осуществлять поиск партнеров для организации научной деятельности, формировать научные коллективы, состоящие из множества распределенных групп, экспортировать технологии и результаты других научных групп для получения научно-практического сотрудничества.

Основное информационное наполнение представляемого портала составляют научные публикации: заимствованные из различных печатных и электронных источников, а также оригинальные (авторские), специально подготовленные материалы, библиографическая и справочная информация, адресные ссылки на внешние Интернет-ресурсы, подборки аудиовизуальных, мультимедийных материалов, компьютерные модели и пр. При этом ссылка на используемый источник является обязательной, как и соблюдение законов об авторском праве. Для структуризации научных источников принята следующая их классификация: научные отчеты, монографии, статьи, авторефераты диссертаций, компьютерные модели, аудиовизуальные документы. Основной формой организации информации являются базы данных портала. Разработчиками портала организован поиск информации (по ключевым словам, дате и пр.).

Пользователи портала могут при помощи простого интерфейса загружать собственные научные материалы (рукописи статей, книг и т.п.). Поддерживается загрузка файлов различных форматов: PDF, DOC, DOCX, TXT. Разработан интерактивный сервис размещения пользователями материалов на страницах портала. К дополнительным коммуникационным возможностям, предоставляемым на портале участникам сетевого сообщества исследователей, можно отнести:

- поиск по страницам пользователей, материалам, спискам публикаций и страницам семинаров;
- комментирование публикаций, материалов, новостей, страниц семинаров и докладов;
- возможность общения между пользователями через систему личных сообщений.

3 Достигнутые результаты

На первом этапе выполнения проекта в 2009 году получены следующие результаты:

1. Создан и функционирует Межрегиональный научный портал «Проблемы преодоления последствий Чернобыльской катастрофы: фундаментальные исследования и практическая реализация».

2. Активно формируются международные сетевые научные сообщества исследователей проблемы преодоления последствий Чернобыльской катастрофы по следующим направлениям фундаментальных научных исследований: «Химия и науки о материалах», «Биология и медицинская наука», «Науки о Земле», «Науки об обществе». На 1 декабря 2010 года можно выделить следующие научные сообщества исследователей, использующие разрабатываемую информационную систему проекта для своего функционирования: «Биология растений», «Биология животных», «Экология человека», «Экология

городской среды», «Биотехнология и бионанотехнология», «Визуальная экология», «Экологическая безопасность», «Экологический мониторинг», «Заболеваемость населения на загрязнённой территории», «Заболеваемость детей на загрязнённой территории», «Патологии щитовидной железы», «Синергетическое воздействие факторов на здоровье», «Гематологические эффекты облучения», «Развитие законодательства о преодолении последствий катастрофы на ЧАЭС», «Статус лиц, подвергшихся воздействию радиации», «Режим загрязнённых территорий». Они объединяют 146 исследователей (зарегистрированных пользователей портала) из России, Украины и Беларуси. Наиболее многочисленны и активно работают сообщества «Экологическая безопасность», «Заболеваемость детей и подростков на загрязнённой территории», «Экология городской среды», «Биотехнология и бионанотехнология».

3. Внедрены новые формы работы международных сетевых научных сообществ исследователей за счет широкого использования возможностей Интернета. Организована и поддерживается работа четырех научных Интернет-конференций, материалы которых доступны на страницах портала. Работает виртуальный мастер-класс для ведущих-администраторов разделов портала, членов организующегося сетевого сообщества исследователей.

4. Увеличено количество ученых, и, прежде всего молодых, получающих Интернет-поддержку своего профессионального развития и научных инициатив. Результаты анализа статистики портала показали, что более половины зарегистрированных пользователей представлены молодыми исследователями (молодыми учеными, аспирантами, студентами выпускных курсов вузов). Они активно участвуют в формировании и работе специализированных научных сетевых сообществ. Об этом говорят размещаемые ими материалы, комментарии. Важно отметить, что проведенные нами опросы показали, что научная молодежь, участвующая в работе портала, быстрее и эффективнее осваивает возможности веб-технологий, нежели зрелые ученые.

5. Осуществлена поддержка формирования и работы научного сообщества для региональных исследователей. Для этого предлагается набор интегрированных и персонально ориентированных сервисов, которые предоставляют следующие возможности: поиск научных контактов, архив материалов (статей, публикаций, презентаций и т.п.), персональная страница ученого или преподавателя, получение независимой оценки и обсуждение научной работы среди пользователей ресурса, система информационной поддержки проведения и публикаций материалов научных Интернет-конференций и Интернет-семинаров, персональная страница.

6. Информационное наполнение портала (основной контент) осуществляется на трех языках: английском, немецком и русском. В настоящее время совместно с зарубежными партнерами проводятся работы по введению в действие украиноязычного раздела портала, разработанного Черниговскими коллегами, для поддержки работы сетевых сообществ исследователей, общение которых в Сети проходит в основном на украинском языке.

7. Поскольку последствия Чернобыльской катастрофы коснулись всего мирового сообщества, научный и практический интерес представляют данные исследований, полученные в различных регионах. Научные материалы, представленные на портале проекта, дополняют и расширяют знания об острых и отдаленных последствиях Чернобыльского радиационного инцидента, дают возможность ученым и практикам разрабатывать общие и частные рекомендации по смягчению последствий хронического облучения малыми дозами.

Таким образом, можно констатировать, что на сегодняшний день на постчернобыльском пространстве не существует проблемно-ориентированных информационных систем на базе Интернет-технологий, предназначенных для поддержки работы международных распределенных научных сообществ исследователей, работающих над решением проблемы преодоления последствий Чернобыльской катастрофы. Поэтому создание представленной нами информационной системы является необходимым условием для широкого обсуждения научной общественностью и гражданским сектором указанных регионов имеющихся социально-экономических проблем на постчернобыльском пространстве и поиска их решения.

Уникальность проекта заключается в том, что набор сервисов для ведения научно-исследовательской деятельности по проблемам ликвидации последствий Чернобыльской катастрофы впервые собран воедино и персонифицирован для конкретного целевого пользователя. Все результаты исследований, представленные на научном портале проекта, получены авторами исследований впервые и составляют достаточно большую, постоянно пополняемую информационную базу, имеющую научное и практическое значение для реабилитации населения и территорий, загрязненных радионуклидами.

4 Развитие проекта

Участие в данном проекте позволило сформулировать идею о создании модели взаимодействия научных коллективов, основанной на активной эксплуатации информационных технологий. Объект реализации модели представляет собой распределенную программную систему

информационного обеспечения публичного мероприятия (от учебных курсов и научных семинаров до международных конференций и проектов) с использованием сети Интернет.

Модель основана на следующих сущностях: мероприятие и его шаблон, оргкомитет, член оргкомитета, посетитель, публичная часть приложения, участник проекта, роль участника, заявка, ее шаблон и статус, процедура оформления заявки, уведомление, рассылка и т.п. Перечисленные сущности являются объектами в разработанных сценариях взаимодействия международных научных коллективов, гражданского сектора, бизнеса и государственных органов управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Влияние фоновой техногенно-токсической и радиоактивной загрязненности окружающей среды на здоровье населения Брянской области* / А.В. Корсаков [и др.] // Вестник Брянского государственного технического университета. – 2010. – № 1. – С. 135–144.

2. *Кочегарова, Н.Л.* Связь между выбросами вредных веществ в атмосферу и эпидемиологическими показателями по туберкулезу в Брянской области / Н.Л. Кочегарова // Актуальные проблемы науки и образования : Труды и материалы XII Международной научно-практической конференции. Новозыбков, Брянская область, 23–24 апреля 2009 года. – Брянск : РИО БГУ, 2009. – С. 39–43.

3. *Макеева, Е.Н.* Чернобыльская информация в библиотеках США: обзор / Е.Н. Макеева // Тез. докл. Международного женского экологического форума «Чистый и безопасный мир», 5–7 сентября 2000 г, Минск, Республика Беларусь. – Минск, 2000. – С. 7–9.

4. *Дромашко, С.Е.* Чернобыльская информация за рубежом и опыт ее распространения через Internet / С.Е. Дромашко, Е.Н. Макеева [Электронный ресурс]. – 2001. – Режим доступа : <http://www.library.biophys.msu.ru/mce/20012808.htm>. – Дата доступа : 01.10.2010.

Работа выполнена при содействии Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (БРФФИ), Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) и Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (ГФФИУ) по проекту Ф09БРУ-013 «Информационная система для поддержки работы сетевого научного сообщества исследователей: Межрегиональный научный портал «Проблемы преодоления последствий Чернобыльской катастрофы: фундаментальные исследования и практическая реализация»».

Поступила в редакцию 18.10.10.

УДК 536.5:621.891:621.9

ИЗНАШИВАНИЕ СИЛИКАТНОГО СТЕКЛА ПРИ ВЫСОКИХ СКОРОСТЯХ

П.Н. Богданович¹, Д.А. Близнец¹, Д.В. Ткачук²

¹Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

²Институт механики металлополимерных систем им. В.А. Белого НАН Беларуси, Гомель

WEAR OF SILICA GLASS AT HIGH VELOCITIES

P.N. Bogdanovich¹, D.A. Bliznets¹, D.V. Tkachuk²

¹Belarusian State University of Transport, Gomel

²V.A. Belyi Metal-Polymer Research Institute National Academy of Sciences of Belarus, Gomel

Анализируются закономерности изнашивания силикатного стекла при трении по гладкому стальному контртелу и закреплённому абразиву. Приводятся данные о кинетике и механизмах разрушения поверхностного слоя, характере распространения микротрещин за пределами контактной площадки при обоих видах нагружения. Обсуждаются закономерности влияния нормальной нагрузки и скорости скольжения на глубину распространения микротрещин усталости и интенсивность изнашивания силикатного стекла, и их связь с особенностями фрикционного нагрева поверхностного слоя изнашиваемого тела. Рассмотрены причины появления подповерхностных микротрещин, приводящих к отслаиванию поверхностного слоя стекла.

Ключевые слова: изнашивание, силикатное стекло, микротрещины усталости, интенсивность изнашивания, нагрузка, скорость скольжения.

Regularities of the wear of silica glass at friction against a smooth steel counterbody and fastened abrasive are analyzed. Data on the kinetics and mechanisms of the fracture of the surface layer as well as on the pattern of the propagation of microcracks beyond the contact area are reported for both modes of loading. Regularities of the effect of the normal load and the sliding velocity on the propagation depth of fatigue microcracks and the wear rate of silica glass as well as their relation to peculiarities of the frictional heating of the surface layer of the worn body are discussed. Causes of the appearance of subsurface microcracks that result in the delamination of the glass surface layer are considered.

Keywords: wear, silica glass, fatigue microcracks, wear rate, load, sliding velocity.

Введение

Согласно существующим представлениям, абразивное изнашивание металлов и неметаллических материалов является в основном результатом усталостных процессов, протекающих в тонком поверхностном слое. Стружкообразование и разрушение непрерывно возобновляемых оксидных пленок при фрикционном нагружении металлов вносит значительно менее ощутимый вклад – менее 20% [1]. При трении хрупких материалов этот показатель выше. Для выявления вклада усталостного разрушения в абразивное изнашивание представляет интерес выполнить сравнительный анализ закономерностей изнашивания неметаллических материалов закреплёнными абразивными частицами и при фрикционном нагружении в отсутствие абразива. В этом случае важным обстоятельством является то, что на поверхности трения неметаллического материала отсутствуют оксидные пленки, которые вносят существенный вклад в процессы трения и изнашивания. Поскольку на механизм и интенсивность изнашивания таких материалов существенное влияние оказывают зависящие от режимов нагружения тепловые явления, импульсно протекающие на пятнах фактического контакта сопрягаемых тел, важно изучить влияние нагрузки и скорости скольжения на эти процессы [1]–[3].

1 Методика исследования

Испытания проводились на машине трения, оборудованной системой регистрации температурного поля. Устройство и принцип действия экспериментальной установки подробно описаны в работе [4]. В данной серии экспериментов была реализована схема контакта цилиндрическая поверхность вращающегося диска диаметром 179 мм и шириной 5 мм – пластинка прямоугольного сечения (70x20x2 мм). В качестве исследуемого материала было выбрано силикатное стекло. Для испытаний материалов при трении без абразивных частиц контртело (диск) было изготовлено из стали 45 (твёрдость 170 НВ), а для абразивного изнашивания – из алюминиевого сплава Д16, на поверхность которого шаржированием наносился слой частиц карбида кремния дисперсностью 100 мкм (твёрдость соответствует девятому классу по шкале Мооса). Шаржирование с применением касторового масла осуществлялось после каждого эксперимента. Выбор сплава Д16 обусловлен тем, что оксиды на его поверхности обладают высокой твёрдостью и также выполняют функцию абразива. Кроме того, коэффициент теплопроводности λ сплава Д16 равен 210 Вт/(м·К), что значительно выше, чем стали 45 ($\lambda=46$ Вт/(м·К)). Поэтому при нанесении на поверхность диска из Д16 частиц из карбида

кремния, λ которого значительно ниже, чем металла достигались близкие по теплоотводу условия испытаний обеих пар трения: «стекло – алюминий + карбид кремния» и «стекло – сталь».

Линейная скорость изменялась в интервале 6–60 м/с, а номинальная нагрузка на участок контакта выбиралась из ряда 0,43; 0,87; 1,3; 1,73 Н. Продолжительность изнашивания составляла в среднем 180 с. Интенсивность изнашивания оценивалась по потере массы образца. Исследование характера разрушения поверхностей трения проводилось с помощью конфокального лазерного сканирующего микроскопа LEXT OLS3000 (408 нм), позволяющего получать двумерные изображения поверхности и трехмерные модели.

2 Результаты исследований

Сравнительный анализ результатов исследований показал, что закономерности изнашивания стекла при трении по стали (без абразива) и по закрепленному на алюминиевом диске абразиву принципиально отличаются. Так, массовая интенсивность изнашивания I_m стекла при трении по абразиву снижается почти на порядок с увеличением скорости скольжения v в интервале от 5 до 35 м/с (рисунок 1).

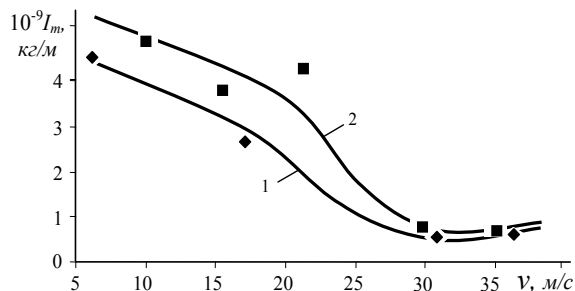


Рисунок 1 – Влияние скорости скольжения на интенсивность абразивного изнашивания стекла при: 1 – $N=0,87$ Н, 2 – $N=1,3$ Н

Это связано с конкурирующим влиянием следующих основных факторов. С одной стороны, увеличение скорости сопровождается уменьшением времени жизни фрикционных связей и глубины внедрения абразивных частиц в изнашиваемый материал. При этом должна уменьшаться глубина бороздок, образующихся за абразивной частицей, и объем деформируемого материала. Кроме того, возрастает объем межконтактного пространства и объем воздуха, участвующего в отводе теплоты из зоны трения, т. к. повышается скорость воздушного потока и растет подъемная сила, разделяющая трущиеся тела. По мере увеличения скорости скольжения усиливается роль воздуха как смазочного материала. Причина в том, что при повышении v и температуры вязкость воздуха заметно возрастает и обеспечивается существование более сплошной

смазочной пленки. В итоге, совокупность описанных явлений приводит к снижению интенсивности абразивного изнашивания.

С другой стороны, повышение v сопровождается ростом интенсивности тепловыделения на пятнах фактического контакта. Это снижает твердость стекла в областях, прилегающих к этим пятнам, и способствует росту глубины внедрения абразивных частиц и контактных деформаций, что уменьшает сопротивление материала изнашиванию. По мере увеличения скорости скольжения роль этого фактора в изнашивании усиливается. При трении без абразива наблюдается обратная зависимость: увеличение скорости скольжения до $v=40-45$ м/с не вызывает существенного изменения I_m , а для более высоких значений v характерен резкий рост интенсивности изнашивания (рисунок 2).

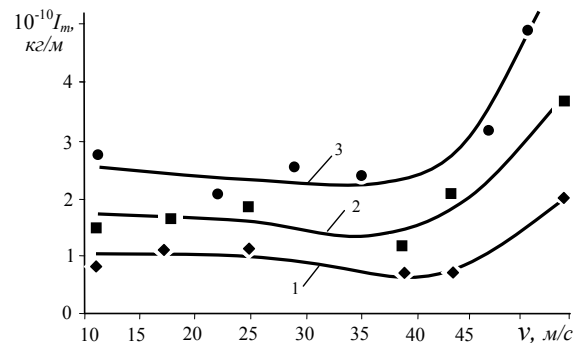


Рисунок 2 – Влияние скорости скольжения на интенсивность изнашивания стекла при трении по стали без абразива при: 1 – $N=0,87$ Н; 2 – $N=1,3$ Н; 3 – $N=1,7$ Н

Причина в том, что в отличие от шероховатого абразивного слоя стальное контртело увлекает в зону трения значительно менее толстый слой воздуха. Это снижает его охлаждающую способность, и температура на фрикционном контакте становится доминирующим фактором, определяющим интенсивность изнашивания стекла. Несмотря на такое различие в интенсивности отвода теплоты из зоны трения, при абразивном изнашивании I_m в 5–40 раз (в зависимости от скорости скольжения) выше, чем при трении без абразива. По-видимому, основным фактором, определяющим такое различие, является различие глубины относительного внедрения частиц абразива и выступов поверхности стального контртела. Абразивные частицы внедряются на большую глубину в изнашиваемый материал, чем выступы стального контртела. В итоге интенсивному деформированию и малоциклового усталости подвергается более толстый слой стекла. Кроме того, наличие острых граней у абразивных частиц и малый радиус закругления вершин является причиной высоких контактных напряжений, которые повышают вероятность стружкообразования. Существенное различие

средних значений I_m при обоих видах изнашивания указывает на то, что вклад стружкообразования превышает 20% – значение, которое считается предельно возможным.

Зависимости I_m от нормальной нагрузки для обоих видов испытания подобны: увеличение N сопровождается ростом интенсивности изнашивания стекла. По мере увеличения нагрузки зависимость $I_m(N)$ становится более существенной за счет роста вклада стружкообразования и увеличения глубины внедрения абразивных частиц в изнашиваемый материал.

Поскольку интенсивность изнашивания материалов в значительной мере определяется толщиной подлежащего усталостному разрушению слоя, было изучено влияние параметров нагружения на глубину h распространения микротрещин усталости (рисунок 3). Оценка этого параметра проводилась с помощью лазерного микроскопа LEXT3000 путем сканирования световым пучком дна микротрещины и прилегающей к ней поверхности изнашиваемого тела.

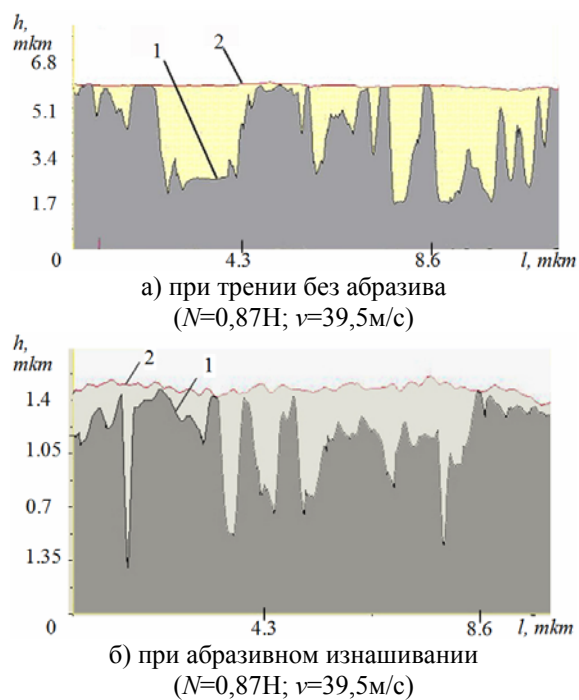


Рисунок 3 – Профиль дна усталостной микротрещины (1) и поверхности трения (2) стекла

Видно, что в обоих случаях глубина распространения микротрещин изменяется крайне неравномерно по их длине: даже на соседних участках значение h может различаться почти на порядок: на полосе скольжения (продольной бороздке) микротрещина может распространяться на глубину 1 мкм и более, а на отдельных участках она выходит на поверхность трения ($h \rightarrow 0$). Таким образом, изменение h по длине трещины носит скачкообразный характер.

При выбранных режимах нагружения маловероятно пластическое оттеснение стекла на дно

микротрещины и обеспечение, вследствие этого, выхода кривой 1 (профиля дна) на поверхность трения. Прорастание микротрещин на большую глубину на отдельных участках, по-видимому, вызвано двумя основными причинами: неравномерностью распределения механических свойств изнашиваемого материала по поверхности трения и локализацией тепловой энергии в отдельных, прилегающих к пятнам контакта, микрообъемах. Этому способствует неравномерный характер распределения давления по ширине контактной площадки.

Глубина и характер распространения усталостной трещины при трении по стальному диску и по абразиву существенно различаются. При абразивном изнашивании трещина распространяется на глубину до 1 мкм, что в 3 – 5 раз меньше, чем при трении по стали. Малая глубина микротрещин, по-видимому, связана с быстрым удалением верхнего слоя стекла вследствие стружкообразования. Кривая, описывающая профиль дна микротрещины, содержит значительно более острые и чаще расположенные пики при абразивном изнашивании.

Поскольку увеличение скорости скольжения вызывает уменьшение интенсивности абразивного изнашивания стекла, можно полагать, что при этом должна снижаться и глубина микротрещин усталости, образующихся на поверхностях трения. Однако исследования абразивного изнашивания стекла показали, что в экспериментах наблюдается обратная картина: при повышении v глубина h микротрещин возрастает (рисунок 4).

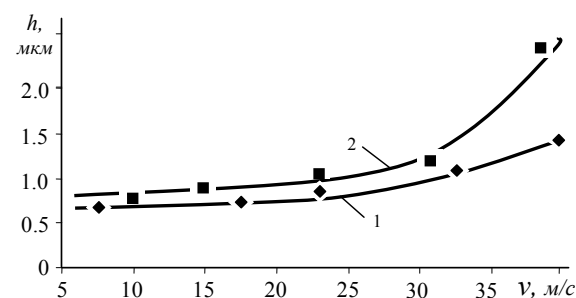


Рисунок 4 – Влияние скорости на глубину распространения микротрещин усталости при абразивном изнашивании: 1 – $N=0,87H$; 2 – $N=1,3H$

Следует отметить, что в данном случае h представляет собой среднюю статистическую глубину проникновения трещины в объем изнашиваемого материала. Приведенная зависимость $h(v)$ обусловлена, по-видимому, импульсным фрикционным нагревом локальных участков контакта [5], [6]. Увеличение скорости скольжения сопровождается ростом температурных всплесков на пятнах фактического контакта и, как следствие, повышением температурных напряжений, которые, суммируясь с контактными

напряжениями, обеспечивают распространение микротрещин на большую глубину.

Приведенные данные позволяют полагать, что процесс абразивного изнашивания силикатного стекла определяется стружкообразованием, частотой и скоростью роста микротрещин, а также усталостными явлениями, протекающими в объемах, значительно меньшего масштаба. Наиболее вероятными областями усталостного разрушения являются полосы контакта изнашиваемого материала с вершинами абразивных частиц.

При трении по стальному контртелу (без абразива) зависимости $I_m(v)$ и $h(v)$ подчиняются одному закону (рисунки 2 и 5). Это свидетельствует о доминирующей роли усталостного разрушения стекла в процессе изнашивания.

Запись кинетики усталостного разрушения поверхностного слоя стекла свидетельствует о том, что значения скорости роста микротрещин в различные периоды их развития сильно различаются. Так, достигнув определенной длины, микротрещина длительное время сохраняет свои размеры. По-видимому, в течение этого инкубационного периода в прилегающей к ее вершине области происходит аккумуляция дефектов структуры, а при достижении их критической плотности наблюдается импульсное увеличение

длины. Таким образом, процесс развития микротрещин состоит из циклически повторяющихся периодов роста и аккумуляции дефектов, первый из которых несоизмеримо мал по сравнению со вторым.

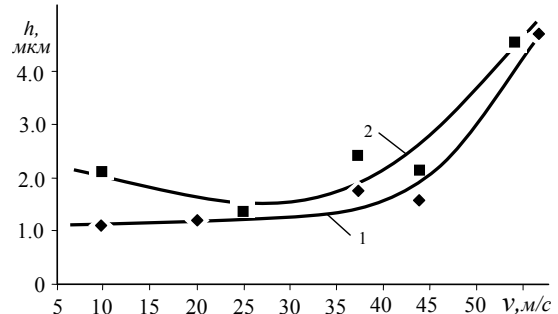


Рисунок 5 – Влияние скорости скольжения на глубину распространения микротрещин усталости при трении без абразива:
1 – $N=0,87Н$; 2 – $N=1,3Н$

При малых (до 12 м/с) скоростях скольжения трение по абразиву сопровождается хрупким разрушением стекла на локальных участках поверхности трения, которые расширяются в результате скола материала по краям и образуют полосы разрушения, вытянутые вдоль направления вектора скорости (рисунок 6, а).

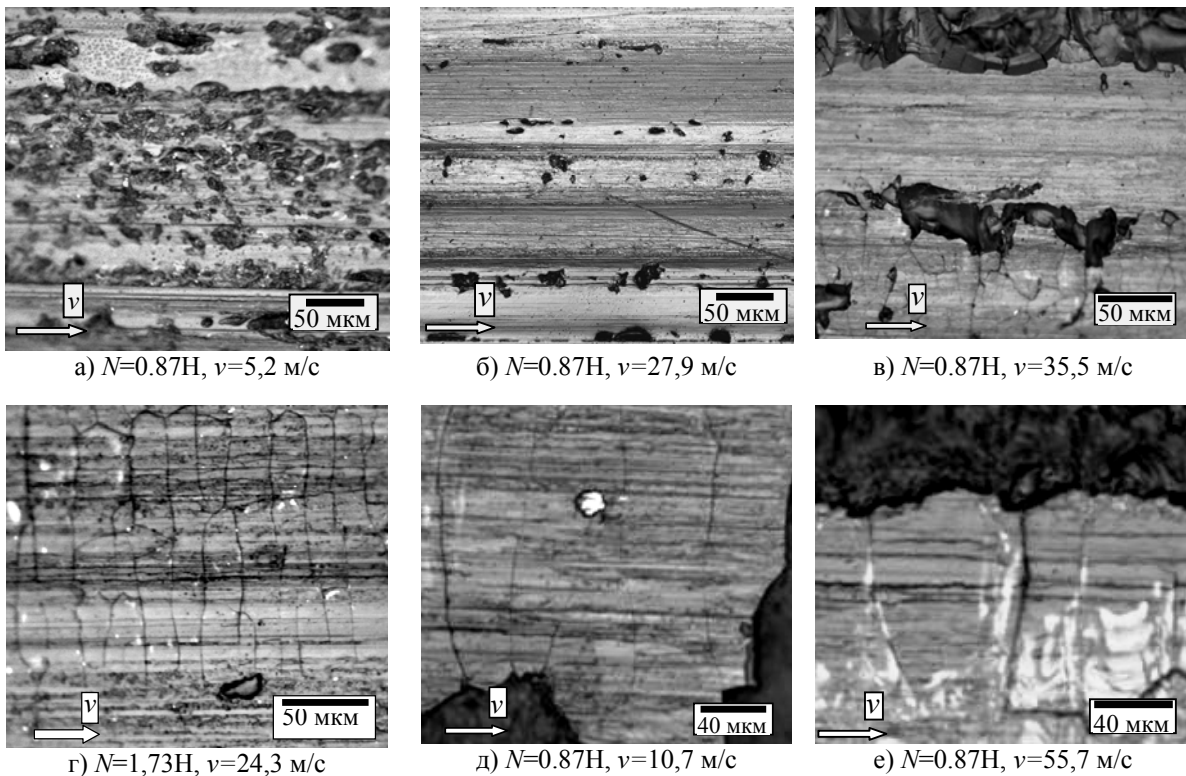


Рисунок 6 – Поверхность силикатного стекла после абразивного изнашивания (а – г) и трения без абразива (д, е)

С повышением скорости до ~ 30 м/с (интервал v зависит от нагрузки) абразивные частицы внедряются на меньшую глубину, вследствие повышения температуры на пятнах контакта уменьшается твердость и склонность изнашиваемого материала к хрупкому разрушению. По этой причине создаются условия для выглаживания поверхности трения, полосы хрупкого разрушения встречаются значительно реже и большая часть поверхности трения остается гладкой (рисунок 6, б).

Более существенный вклад в изнашивание вносит малоцикловая усталость, вызванная упругопластическими деформациями – на поверхности трения появляются микротрещины длиной несколько микрометров. При $v > 30$ м/с или меньших скоростях, но более высоких нагрузках наблюдается переход к усталостному изнашиванию, на поверхности трения появляются ориентированные перпендикулярно вектору скорости микротрещины, длина которых составляет десятые доли миллиметра (рисунки 6, в и г). Появление микротрещин связано с высокими температурными напряжениями и увеличением вероятности термоусталостного трескания стекла [5], [6].

При высоких значениях v (~ 40 м/с) длина поверхностных трещин может превышать 1 мм. При трении без абразива изнашиваемый материал подвергается более высокому тепловому воздействию. Поэтому микротрещины усталости образуются и достигают такой же длины при низких скоростях скольжения и нагрузках (рисунок 6, д).

Практически во всем интервале нагрузок и скоростей при трении по стальному контртелу, а также при высоких значениях N и v при трении по абразиву возникают подповерхностные микротрещины. Об их наличии свидетельствуют чередующиеся цветные полосы вблизи границ разрушенных участков (рисунок 7, а, см. в направлении стрелки). Возникновение этих полос обусловлено разложением света на переменной толщины поверхностном слое стекла, отделяемого подповерхностной трещиной. На рисунок 7, б представлено трехмерное изображение этого участка, на котором видна расположенная параллельно поверхности трения на расстоянии около 1 мкм от нее подповерхностная микротрещина (показана стрелкой). При возникновении такой микротрещины происходит ее рост и слияние с поверхностными трещинами, отслаивание поверхностного слоя от основного материала, изгиб этого слоя под действием внутренних напряжений и хрупкое диспергирование с образованием частиц износа.

Появление подповерхностных микротрещин связано с расположением максимально напряженной точки и максимума температуры не на поверхности трения, а в объеме изнашиваемого материала под контактной площадкой [7].

Подтверждением этого положения являются результаты исследования температурных полей при резании сапфира, в которых показано, что максимум температуры и термических растягивающих напряжений достигается за пределами контактной площадки [8], [9]. Так, на рисунке 8 видно, что область наибольшей температуры (свыше 60 °C) находится на расстоянии в несколько десятых долей миллиметра от поверхности контакта абразивного диска с сапфиром.

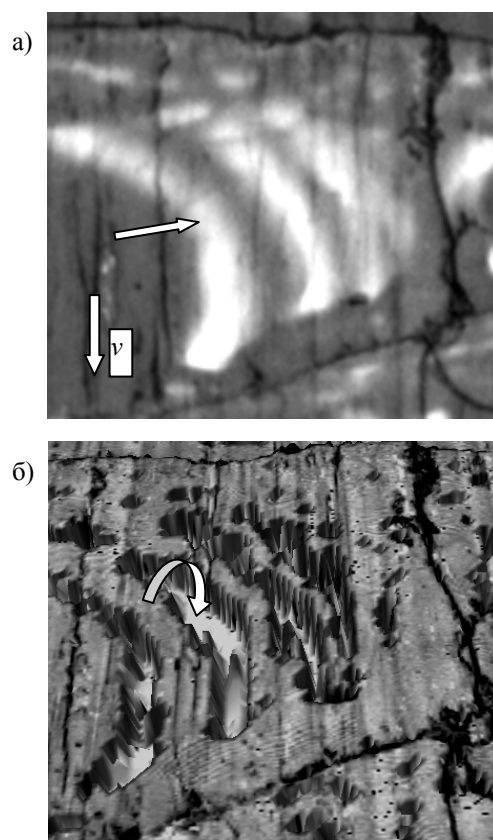


Рисунок 7 – Подповерхностные трещины при трении при $N=0,87$ Н и $v=39,5$ м/с

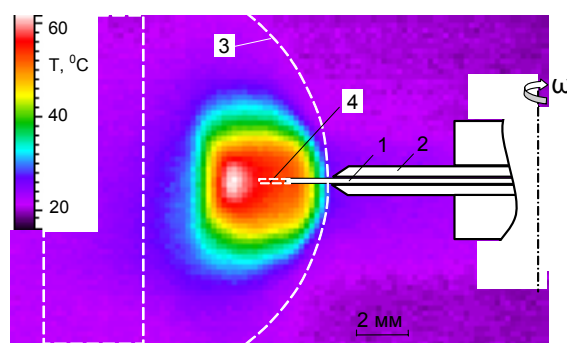


Рисунок 8 – Температурное поле (ИК изображение) в зоне контакта сапфир–абразив и прилегающих областях при $v = 23,6$ м/с и $N = 0,65$ Н: 1 – диск с абразивным слоем; 2 – прижимные фланцы; 3 – контур пластинки из сапфира; 4 – контур диска

Исследования показали, что кинетика разрушения поверхностного слоя силикатного стекла при трении по абразиву и трении по гладкому стальному контртелу существенно не различаются. При трении по абразиву вначале на поверхности трения образуются вызванные стружкообразованием слабо заметные бороздки, на дне которых появляются микротрещины. Впоследствии скалывание материала по краям микротрещин и выкрашивание материала между ними приводит к образованию пятен усталостного разрушения, которые в дальнейшем сливаются в полосы, вытянутые в направлении скольжения. С течением времени чаще всего разрушается одна из боковых границ полосы, и эта граница смещается перпендикулярно вектору скорости. После достижения определенной ширины эта полоса поверхности трения не разрушается, а усталостному разрушению подвергается близко расположенный участок (полоса) поверхности трения. При этом ранее разрушенная полоса выглаживается, а затем на ее поверхности вновь появляются микротрещины. В дальнейшем описанный цикл повторяется.

Таким образом, процесс абразивного изнашивания представляет собой последовательное перемещение чередующихся разрушенных и гладких полос в направлении, перпендикулярном вектору скорости скольжения. При трении по гладкому стальному контртелу процесс изнашивания заметно не отличается от описанного. Отличительная особенность лишь в том, что при трении по стали стружкообразование вносит несоизмеримо меньший вклад на начальном этапе изнашивания, а при высоких значениях N и v интенсивность изнашивания стекла в значительной мере определяется адгезионным разрушением поверхностного слоя. При трении по абразиву в исследуемом диапазоне N и v адгезионное изнашивание не наблюдалось.

Заключение

Приведенные результаты свидетельствуют о том, что процессы изнашивания при трении по гладкому контртелу и закрепленным абразивным частицам сопровождаются как подобными, так и существенно различающимися явлениями и закономерностями. Так, для обоих видов нагружения характерны рост интенсивности изнашивания с повышением нормальной нагрузки, доминирующая роль усталостного разрушения в изнашивании материала, крайне неравномерная глубина распространения микротрещины на различных участках ее длины, периодический характер разрушения поверхностного слоя,

появление микротрещин усталости под поверхностью трения. В отличие от трения по гладкому контртелу, при трении по абразиву интенсивность изнашивания на порядок ниже, вклад стружкообразования в изнашивание соизмерим с усталостным разрушением, отсутствует адгезионное изнашивание, значительно меньше глубина распространения микротрещин, повышение скорости скольжения приводит к снижению интенсивности изнашивания, появление микротрещин под поверхностью трения наблюдается при многократно более высоких нагрузках.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Богданович, П.Н.* Трение и износ в машинах / П.Н. Богданович, В.Я. Прушак. – Минск : Вышэйшая школа, 1999. – 376 с.
2. *Температура на зерне алмазного круга в процессе шлифования* / В.В. Рогов [и др.] // Синтетические алмазы. – 1978. – № 3. – С. 49–53.
3. *Chandrasekar, S.* Flash temperature measurements in high-speed friction contact / S. Chandrasekar, T.N. Farris, B. Bhushan // Trans. ASME. J. of Tribology. – 1990. – Vol. 112, № 3. – P. 535–540.
4. *Богданович, П.Н.,* Экспериментальная установка для изучения тепловых процессов в контакте твердых тел / П.Н. Богданович, В.М. Белов, Д.В. Ткачук // *Материалы, технологии, инструменты.* – 2006. – Т. 11, № 4. – С. 89–97.
5. *Bogdanovich, P.N.* Analysis of temperature fields at high-speed friction of inorganic materials to control their friction-induced thermal fatigue / P.N. Bogdanovich, D.A. Tkachuk // *Materials Science.* – 2002. – Vol. 8, № 2. – P. 46–49.
6. *Богданович, П.Н.* Тепловые и термомеханические явления в контакте скольжения / П.Н. Богданович, Д.В. Ткачук // *Трение и износ.* – 2009. – Т. 30, №3. – С. 214–229.
7. *Саверин, М.М.* Контактная прочность материалов в условиях одновременного действия нормальной и касательной нагрузок / М.М. Саверин. – М. : Машгиз, 1946. – 148 с.
8. *Богданович, П.Н.* Температурные поля, развивающиеся при резании сапфира и алмаза / П.Н. Богданович, Д.А. Близнец, Д.В. Ткачук // *Инженерно-физический журнал.* – 2009. – Т. 82, №3. – С. 569–575.
9. *Bogdanovich, P.N.* Temperature distribution over contact area and «hot spots» in rubbing solid contact / P.N. Bogdanovich, D.A. Tkachuk // *Tribologie International.* – 2006. – Vol. 39, № 11. – P. 1355–1360.

Поступила в редакцию 21.09.10.

УДК 677.027

ПЛАЗМОХИМИЧЕСКОЕ МОДИФИЦИРОВАНИЕ БУМАГИ: ВЛИЯНИЕ НА МЕХАНИЧЕСКИЕ И АДсорбЦИОННЫЕ СВОЙСТВА

В.Т. Гаврильчик

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

PLASMACHEMICAL MODIFICATION OF PAPER: INFLUENCE ON MECHANICAL AND ADSORPTION PROPERTIES

V.T. Gavrilchik

Belarusian State University of Transport, Gomel

Определены основные закономерности процессов, протекающих при осуществлении последовательно проводимой обработки в барьерном электрическом разряде целлюлозосодержащих материалов и нанесения на их поверхность полимерных покрытий из активной газовой фазы. Показано, что такая обработка позволяет значительно повысить гидрофобность бумаги, стойкость к истиранию текста, нанесенного на ее поверхность.

Ключевые слова: целлюлозосодержащие материалы, тлеющий разряд, полимерное покрытие, истирание.

In the paper the basic laws of the processes taking place during the realisation of consistently spent processing in the barrier electric category of cellulosecontain materials and drawing polymeric coverings from an active gas phase on their surface are defined. It is shown that such a technique allows raising water repellency of paper and firmness to abrasion of the text applied on its surface.

Keywords: cellulosecontain materials, glow discharge, polymer coating, abrasion.

Введение

Известно, что плазмохимическая обработка приводит к изменению структуры, протеканию специфических химических реакций в поверхностном слое материалов, конечным результатом которых являются структурные изменения, формирование поверхностных слоев с определенным химическим составом, что в итоге, эффективно влияет на физико-химические свойства обработанных материалов. При этом активно развиваются как методы, использующие электрические газовые разряды при атмосферном и пониженном давлении, так и методы, основанные на создании активной газовой фазы путем диспергирования в вакууме исходного, как правило, органического материала при воздействии на него концентрированного потока энергии [1], [2].

При обработке в активной газовой фазе создаются специфические условия, существенно изменяющие протекание физико-химических, в том числе и адсорбционных процессов [3]. Так, например, при реализации методов обработки в вакууме осуществляется непосредственное взаимодействие молекул аппретирующего вещества с поверхностью обрабатываемого материала, свободной от адсорбированных веществ жидких технологических сред. При этом молекулы аппрета находятся, как правило, в возбужденном состоянии, что определяет их высокую химическую активность и сказывается на природе, структуре формирующихся поверхностных слоев и свойствах обработанных материалов. Особенно

актуальной является разработка новых эффективных методов поверхностной и объемной обработки целлюлозосодержащих материалов, имеющих, как правило, капиллярно-пористую структуру, что в значительной степени ограничивает функциональные возможности применения растворных методов нанесения аппретирующих слоев, например, на поверхность бумаги с нанесенным текстом с целью ее защиты, придания документам повышенной стойкости к истиранию, повышения гидрофобных и других свойств при сохранении внешнего вида, фактуры, цвета изображения. Отметим также, что методами плазмохимии удастся совместить в едином технологическом цикле процессы аппретирования и физического модифицирования, нанесения функциональных слоев, например, электропроводных, теплоотражающих, барьерных и с другими специфическими свойствами. Данные процессы характеризуются высокой экономией материальных ресурсов и энергии, являются экологически чистыми по сравнению с традиционными растворными методами [4].

Основной целью настоящей работы является установление особенностей процессов, протекающих при реализации комбинированного метода модифицирования целлюлозосодержащих материалов, включающего обработку в электрических разрядах и последующее осаждение тонкого слоя полимера из активной газовой фазы, изучение влияния такой обработки на свойства материала.

1 Методика исследования

Процесс модифицирования пленочных целлюлозосодержащих материалов в плазме импульсного барьерного разряда осуществлялся с помощью установки, схема которой представлена в [5]. Конструкция установки позволяла в процессе обработки автоматически поддерживать постоянные параметры разряда. Путем изменения амплитуды высоковольтных импульсов мощность разряда плавно изменялась в пределах от 10 до 150 Вт. Частота следования импульсов в проведенных экспериментах оставалась неизменной и составляла 20 кГц, длительность импульса – 20 мкс. Обрабатываемый листовой материал протягивался через зону обработки с постоянной скоростью вращающимися валами-электродами.

Активную газовую фазу создавали электронно-лучевым диспергированием в вакууме исходного полимера по технологии, описанной в [6]. В качестве источника электронов использовалась электронно-лучевая пушка с катодом прямого накала, позволяющая формировать пучки с плотностью тока $5 \dots 500 \text{ А/м}^2$, энергией частиц $0,1 \dots 2,5 \text{ кэВ}$, площадью сечения пучка электронов $(5 \dots 10) \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$. Поток электронов направлялся на тигель с диспергируемым полимерным материалом. В результате воздействия потока электронов происходило образование летучих продуктов, которые затем осаждались на поверхности обрабатываемых изделий с образованием на них покрытия.

Химические изменения в поверхностных слоях материалов при модифицировании, состав покрытий определялся методами ИК-спектроскопии НПВО. Морфологические особенности покрытий изучались методами атомно-силовой (АСМ) с помощью НАНОТОП–203 и растровой электронной микроскопии (РЭМ) с помощью микроскопа S-806.

В качестве основных параметров, характеризующих модифицированные поверхности и покрытия, использовали:

- гидрофобные свойства, оцениваемые по углу смачивания поверхности водой;
- стойкость к истиранию, определяемую с помощью специально разработанной методики [7];
- механические свойства (прочность бумаги на растяжение, прочность на излом при многократных перегибах).

2 Результаты и их обсуждение

Установлено, что при модифицировании только в барьерном разряде масса обрабатываемой бумаги заметно уменьшается при превышении мощности некоторого порогового значения, лежащего в интервале 30...35 Вт. Анализ полученных данных показывает, что скорость перемещения листа в зоне обработки не влияет

заметно на параметры травления, при обработке температура вала-электрода и бумаги не превышает 50°C . Основным параметром, определяющим характер воздействия разряда на состояние бумаги, является его мощность. Это дает основание сделать вывод о незначительном влиянии термоокислительной деструкции бумаги на изменение ее массы. ИК-спектроскопические исследования модифицированной бумаги подтвердили отсутствие значительной окислительной деструкции целлюлозы при используемых режимах обработки бумаги в барьерном разряде. Анализ проводился по полосам 1740 см^{-1} и 1660 см^{-1} , ответственным за поглощения C=O и C=C – групп соответственно. По отношению оптических плотностей полос поглощения D_{1430}/D_{900} обнаружено лишь уменьшение степени кристалличности волокон после обработки. Обработка в барьерном разряде уменьшает число ошибок в несколько раз. Наиболее устойчивым к истиранию оказывается текст, нанесенный на обработанную при более мягком режиме бумагу, когда интенсивное травление отсутствует.

Особенности плазмохимического аппретирования целлюлозосодержащих материалов путем нанесения полимерных покрытий из активной газовой фазы, влиянию его параметров на физико-механические свойства рассмотрены в [5]–[8].

На основании результатов моделирования физико-химических процессов, протекающих при осаждении тонких полимерных покрытий из летучих продуктов электроннолучевого диспергирования, можно показать, что скорость роста полимерной фазы определяется выражением

$$U_n = j_n + \frac{a^0}{l_3 \tau_a} - S_p \beta_u j_n \Theta_n + a^0 \left(1 - \frac{1}{l_3 \tau_a} \right) \exp(-l_3 t),$$

где $l_3 = KA_2^0 C + \frac{1}{\tau_a}$, K – константа скорости полимеризации под действием активных летучих фрагментов макромолекул; τ_a – среднее время жизни фрагментов в адсорбированном состоянии; t – время осаждения; a^0 , C , A_2^0 – постоянные для данного полимера величины; S_p – эффективный коэффициент ионного распыления; Θ_n – степень заполнения поверхности низкомолекулярными продуктами распыления; β_u – степень ионизации поступающего на поверхность потока j_n .

Анализ полученного выражения показывает, что скорость роста тонких полимерных слоев в значительной степени зависит от таких параметров, как τ_a , K , значения которых определяются адсорбционными свойствами материала подложки и существенно возрастают при ее активационной обработке. В связи с этим одним из направлений повышения эффективности модифицирования бумаги является сочетание обработки в электрических разрядах и последующее

осаждение активных частиц диспергирования полимеров.

Установлено, что эффект повышения износостойкости текста, нанесенного на поверхность бумаги, при такой обработке зависит от режима обработки в тлеющем разряде, природы полимера и режима испытания. Наиболее высокая износостойкости при истирании сухим индентором достигается при оптимальных режимах обработки (мощность разряда $P=60$ Вт) и нанесении покрытия ПТФЭ (рисунок 1).

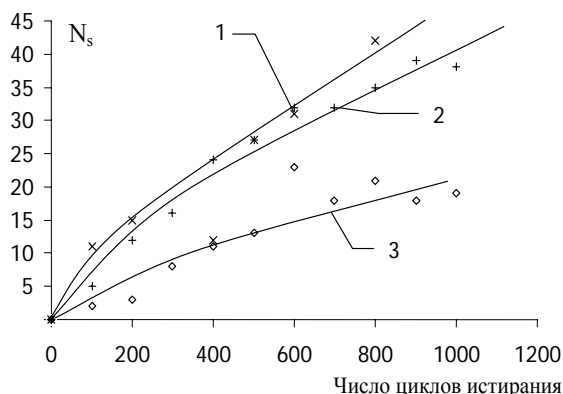


Рисунок 1 – Изменение числа ошибок распознавания N_s в процессе истирания сухим индентором бумаги, обработанной в барьерном разряде (1), предварительно обработанной в разряде и с последующим нанесением покрытия ПИ (2), ПТФЭ (3)

При нанесении покрытия ПИ параметр предварительная обработка бумаги в тлеющем разряде практически не оказывает значительного влияния на износостойкость.

При истирании модифицированной бумаги влажным индентором кинетика износа значительно изменяется. Установлено, что уже при 50 циклах истирания начинается катастрофический износ исходной бумаги. При этом основным механизмом износа является скатывание, что сказывается на форме полученных кинетических кривых. Нанесение полимерных покрытий независимо от их природы заметно и примерно в одинаковой степени повышает устойчивость бумаги к истиранию при данных условиях испытания. Дальнейшее повышение устойчивости к истиранию влажным индентором можно добиться путем нанесения покрытия ПИ на бумагу, предварительно обработанную в барьерном разряде при мощности разряда 60 Вт (рисунок 2).

При этом показано, что данный эффект сохраняется при нанесении покрытия ПИ через 14 и более суток после обработки бумаги в разряде.

Повышение устойчивости текста, нанесенного на активированную бумагу, к истиранию связано с проявлением более сильного адгезионного взаимодействия печатной краски с подложкой. Это подтверждается более высокой

(в среднем на 10–20%) износостойкостью бумаги при реализации обработки по схеме активация – печать – нанесение покрытия в сравнении с износостойкостью материала, обработанного по схеме печать – активация – нанесение покрытия, данными оценки гидрофобных свойств модифицированной бумаги (таблица 1).

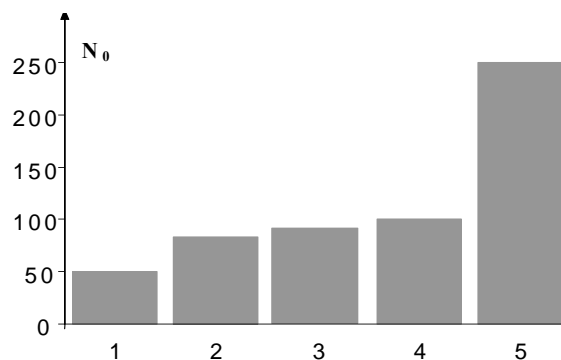


Рисунок 2 – Число циклов истирания до начала интенсивного изнашивания N_0 при трении влажным индентором по бумаге без покрытия (1), с покрытием ПТФЭ (2), с покрытием ПИ (3), обработанной в разряде и с покрытием ПТФЭ (4), обработанной в разряде и с покрытием ПИ (5)

Таблица 1 – Гидрофобные свойства модифицированной бумаги

Вид модификации	Угол смачивания до истирания, град.	Угол смачивания после истирания, град.
Без обработки	75	67
Нанесение покрытия ПИ на необработанную поверхность	92	78
Обработка в разряде при $P=30$ Вт, нанесение покрытия ПИ	96	83
Обработка в разряде при $P=60$ Вт, нанесение покрытия ПИ	103	91

Сохранение высокой гидрофобности поверхности после истирания свидетельствует об объемном характере модифицирования, значительном проникновении летучих частиц диспергирования в объем материала. При этом увеличение эффективной толщины наносимого на бумагу покрытия ПТФЭ (при относительно невысоких ее значениях) вызывает практически линейное повышение краевого угла смачивания.

Выводы

Установлена высокая эффективность метода модифицирования целлюлозосодержащих материалов, заключающегося в предварительной плазменной обработке с последующим осаждением полимерного покрытия из активной газовой

фазы. Показано, что нанесение полимерных слоев политетрафторэтилена и полиамида на поверхность бумаги, предварительно активированной в плазме барьерного разряда, приводит к повышению стойкости нанесенного на ее поверхность текста к истиранию в 1,5 – 10 раз, значительной ее гидрофобизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бердичевский, М.Г. Нанесение покрытий. Травление и модифицирование полимеров с использованием низкоэнтальпийной неравновесной плазмы: обзор работ / М.Г. Бердичевский, В.В. Марусин // Сиб. отд-ние. Ин-т теплофизики. – Новосибирск, 1993. – 107 с.
2. Плазмохимические реакции и процессы / под редакцией Л.С. Полака. – М. : Наука, 1979. – 312 с.
3. Рогачев, А.В. Технологические особенности плазмохимического аппретирования и окрашивания волокнисто-тканевых материалов / А.В. Рогачев [и др.] // *Материалы, технологии, инструмент.* – 1998. – № 3. – С. 55–58.
4. Способ обработки целлюлозосодержащих материалов : пат. Респ. Беларусь, МПК 7 D 21H 19/16 / А.В. Рогачев, А.И. Егоров, В.Т. Гаврильчик, А.А. Рогачев, В.П. Казаченко ; заявитель и

патентообладатель Белорус. гос. ун-т трансп. – № а 20040121; заявл. 20.02.2004; опубл. 08.12.2006 / Дзярж. пат. кам. Рэсп. Беларусь.

5. Гаврильчик, В.Т. Влияние плазмохимического аппретирования целлюлозосодержащих материалов на их физико-механические свойства / В.Т. Гаврильчик // *Вестник БелГУТа : Наука и транспорт.* – 2003. – 1 (6). – С. 48–51.

6. Физико-механические свойства целлюлозосодержащих материалов, аппретированных в активной газовой фазе / В.Т. Гаврильчик [и др.] // *Материалы, технологии, инструмент.* – 2003. – Т. 8. – № 3. – С. 69–72.

7. Гаврильчик, В.Т. Влияние плазмохимической обработки целлюлозосодержащих материалов на устойчивость печатного текста к стиранию / В.Т. Гаврильчик // *Проблемы и перспективы развития транспортных систем и строительного комплекса.* – Гомель : БелГУТ. – 2003. – С. 86–87.

8. Особенности обработки целлюлозосодержащих материалов в плазме барьерного разряда и ее влияние на адсорбционные свойства / В.Т. Гаврильчик [и др.] // *Материалы, технология, инструмент.* – 2003. – № 3. – С. 99–103.

Поступила в редакцию 29.11.10.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна соответствовать его профилю. Она представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на дискете 3,5" или CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (6.0/95/97/2000), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Допускается сквозная нумерация рисунков и таблиц. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутонные фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются сведения об авторах и экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати.

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный и домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями. Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (банделеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах и экспертного заключения можно посмотреть на сайте журнала по адресу <http://pfmt.gsu.by>.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

The paper submitted to the Editorial Board of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics», should meet the following requirements. Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a floppy (CD) or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (6.0/95/97/2000), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. Through numbering of figures and tables is possible. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e.g. [1], [2]).

The paper is signed by all authors. The information about the authors and the conclusion of the experts about the possibility of publication in press are enclosed.

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home and office phone numbers, fax number, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charters top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

In case of questions relating to paper submission visit website of the journal <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).