МАТЕМАТИКА

УДК 512.542 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_41
EDN: OGDMXN

О НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЯХ СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ ГРУПП, ИХ w-РАСШИРЕНИЯХ И НЕКОТОРЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

А. Ф. Васильев[1], **Т. И. Васильева**[2]

[1]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*
[2]*Белорусский государственный университет транспорта*, *Гомель*

ON SATURATED FORMATIONS OF SUPERSOLUBLE GROUPS, THEIR w-EXTENSIONS AND SOME APPLICATIONS

A. F. Vasil'ev[1], **T. I. Vasil'eva**[2]

[1]*Francisk Skorina Gomel State University*
[2]*Belarusian State University of Transport*, *Gomel*

Аннотация. Пусть t – некоторое натуральное число. Подгруппа H группы G называется K-$\mathbb{P}_t$-субнормальной в G, если существует цепь подгрупп $H = H_0 \le H_1 \le \cdots \le H_{n-1} \le H_n = G$ такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $|H_i : H_{i-1}|$ является некоторым простым числом p и $p-1$ не делится на $(t+1)$-ые степени простых чисел для каждого $i = 1,\ldots,n$. Через $\mathfrak{U}_t^0$ и $\mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$ обозначаются класс сверхразрешимых групп, соответственно класс всех групп, в которых каждая силовская подгруппа является K-$\mathbb{P}_t$-субнормальной. В работе доказаны критерии принадлежности группы этим классам, найдены приложения $\mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$ к группам, являющимися произведениями K-$\mathbb{P}_t$-субнормальных подгрупп.

Ключевые слова: *насыщенная формация*, *сверхразрешимая группа*, K-$\mathbb{P}_t$*-субнормальная подгруппа*.

Для цитирования: *Васильев*, *А. Ф.* О насыщенных формациях сверхразрешимых групп, их w-расширениях и некоторых приложениях / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 3 (68). – С. 41–45. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_41. – EDN: OGDMXN

Abstract. Let t be a chosen positive integer. A subgroup H of G is said to be K-$\mathbb{P}_t$-subnormal in G if there exists a chain of subgroups $H = H_0 \le H_1 \le \cdots \le H_{n-1} \le H_n = G$ such that either $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$ or $|H_i : H_{i-1}|$ is some prime p and $p-1$ is not divisible by $(t+1)$st powers of primes for each $i = 1,...,n$. By $\mathfrak{U}_t^0$ and $\mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$ we denote the class of supersoluble groups, respectively, the class of all groups in which every Sylow subgroup is K-$\mathbb{P}_t$-subnormal. In this paper, we prove criteria for a group to belong to these classes and find applications of $\mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$ to groups that are products of K-$\mathbb{P}_t$-subnormal subgroups.

Keywords: *saturated formation*, *supersoluble group*, K-$\mathbb{P}_t$*-subnormal subgroup*.

For citation: *Vasil'ev*, *A. F.* On saturated formations of supersoluble groups, their w-extensions and some applications / A. F. Vasil'ev, T. I. Vasil'eva // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 3 (68). – P. 41–45. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_41 (in Russian). – EDN: OGDMXN

Введение

В работе все группы предполагаются конечными. Среди насыщенных формаций наряду с формацией всех нильпотентных групп в теории групп и их приложениях важную роль играет формация $\mathfrak{U}$ всех свехразрешимых групп (см., например, [1]). В работах [2], [3] был разработан метод изучения сверхразрешимых групп и их обобщений путем введения понятий $\mathbb{P}$-субнормальности и K-$\mathbb{P}$-субнормальности. Подгруппа H группы G называется: $\mathbb{P}$*-субнормальной в* G, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \le H_1 \le \cdots \le H_{n-1} \le H_n = G \qquad (0.1)$$

такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ является простым числом для каждого $i = 1,\ldots,n$; K-$\mathbb{P}$*-субнормальной в* G, если существует цепь подгрупп (0.1) такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $|H_i : H_{i-1}|$ является простым числом для каждого $i = 1,\ldots,n$.

Субнормальная подгруппа разрешимой группы является $\mathbb{P}$-субнормальной, в произвольной группе это не всегда верно. Очевидно, что субнормальная подгруппа любой группы является K-$\mathbb{P}$-субнормальной.

В последние годы понятия $\mathbb{P}$-субнормальной и K-$\mathbb{P}$-субнормальной подгрупп нашли приложения в работах многих авторов к решению различных задач теории групп (см., например, [4]–[10]).

В работе [11] рассматривалась задача исследования вложений подгрупп в группу, занимающих промежуточное положение между

© *Васильев А. Ф.*, *Васильева Т. И.*, 2026

субнормальными и K-$\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами и обладающих общими с ними свойствами (инвариантность при гомоморфизмах, транзитивность и др.).

***Определение* 0.1** [11]. *Пусть t – фиксированное натуральное число. Подгруппа H группы G называется* K-$\mathbb{P}_t$*-субнормальной в G, если существует цепь подгрупп*

$$H = H_0 \le H_1 \le \cdots \le H_{n-1} \le H_n = G$$

такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $|H_i : H_{i-1}|$ является некоторым простым числом p и $p-1$ не делится на $(t+1)$-ые степени простых чисел для каждого $i = 1,\ldots,n$.

Любая K-$\mathbb{P}_t$-субнормальная подгруппа группы является K-$\mathbb{P}$-субнормальной. Обратное утверждение в общем случае не всегда справедливо. Например, пусть $t = 7$ и $G = G_1 G_2$ – группа, где $G_1 \cong Z_{257}$ и $G_1 \cong Aut(Z_{257}) \cong Z_{256}$. В G существует цепь подгрупп $H_0 \trianglelefteq H_1 < G$, где $|H_0| = 2$. Тогда H_0 является K-$\mathbb{P}$-субнормальной и $\mathbb{P}$-субнормальной в G, но H_0 не является K-$\mathbb{P}_7$-субнормальной в G, поскольку $|G : H_1| = 257$, $257 - 1 = 2^8$.

***Определение* 0.2** [11]. *Через $\mathfrak{U}_t^0$ обозначается класс всех сверхразрешимых групп, в которых каждая силовская подгруппа является* K-$\mathbb{P}_t$*-субнормальной, через* w$\mathfrak{U}_t^0$ *– класс всех групп, в которых каждая силовская подгруппа является* K-$\mathbb{P}_t$*-субнормальной.*

В [11] найдены свойства классов $\mathfrak{U}_t^0$ и w$\mathfrak{U}_t^0$.

В настоящей работе получен критерий принадлежности группы классу $\mathfrak{U}_t^0$. Найдены эквивалентные утверждения принадлежности группы классу w$\mathfrak{U}_t^0$. Также установлены приложения формации w$\mathfrak{U}_t^0$ к группам, которые представимы произведениями своих K-$\mathbb{P}_t$-субнормальных подгрупп.

1 Предварительные сведения

В работе используются обозначения и определения из [12], [13]. Напомним некоторые важные для статьи понятия.

Для группы G через $|G|$ обозначается ее порядок; $\pi(G)$ – множество всех различных простых делителей $|G|$; Syl(G) – множество всех силовских подгрупп из G; $F(G)$ – подгруппа Фиттинга из G; $F_p(G)$ – p-нильпотентный радикал из G, p – некоторое простое число. Если H – подгруппа из G, то $|G : H|$ – индекс H в G; $\pi(G : H)$ – множество всех различных простых делителей $|G : H|$; $\mathrm{Core}_G(H) = \cap H^x$ для всех $x \in G$; Z_n – циклическая группа порядка n; $\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп; $\mathfrak{U}$ – класс всех сверхразрешимых групп; $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп; $\mathfrak{N}_p$ – класс всех p-групп, p – некоторое простое число; $\mathfrak{A}(p-1)$ – класс всех абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$. Для непустой формации $\mathfrak{F}$ через $\mathcal{M}(\mathfrak{F})$ обозначается класс всех минимальных не $\mathfrak{F}$-групп, т. е. всех групп $G \notin \mathfrak{F}$, все собственные подгруппы которых принадлежат $\mathfrak{F}$; группа Шмидта – это группа из $\mathcal{M}(\mathfrak{N})$.

Приведем необходимые в работе свойства K-$\mathbb{P}_t$-субнормальных подгрупп из [11].

***Лемма* 1.1.** *Если G – группа, H – ее подгруппа и $N \trianglelefteq G$, то справедливы следующие утверждения*:

1) *если H* K-$\mathbb{P}_t$*-субнормальна в G, то H^x* K-$\mathbb{P}_t$*-субнормальна в G для всех $x \in G$*;

2) *если $H \le R \le G$, H* K-$\mathbb{P}_t$*-субнормальна в R и R* K-$\mathbb{P}_t$*-субнормальна в G, то H* K-$\mathbb{P}_t$*-субнормальна в G*;

3) *если H* K-$\mathbb{P}_t$*-субнормальна в G, то $(H \cap N)$* K-$\mathbb{P}_t$*-субнормальна в N*;

4) *подгруппа HN* K-$\mathbb{P}_t$*-субнормальна в G тогда и только тогда, когда HN/N* K-$\mathbb{P}_t$*-субнормальна в G/N.*

Если G – разрешимая группа, то справедливы следующие утверждения:

5) *если H* K-$\mathbb{P}_t$*-субнормальна в G, то $(H \cap U)$* K-$\mathbb{P}_t$*-субнормальна в U для любой подгруппы U из G*;

6) *если H и U –* K-$\mathbb{P}_t$*-субнормальные в G подгруппы, то $(H \cap U)$ –* K-$\mathbb{P}_t$*-субнормальная в G подгруппа.*

***Теорема* 1.1** [11]. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *класс групп $\mathfrak{U}_t^0$ является наследственной насыщенной формацией и определяется локальной функцией X такой, что $X(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}(p-1)$, если $p-1$ не делится на $(t+1)$-ые степени простых чисел; $X(p) = \mathfrak{N}_p$, если $p-1$ делится на $(t+1)$-ую степень некоторого простого числа*;

2) *класс групп* w$\mathfrak{U}_t^0$ *является наследственной насыщенной формацией, состоит из дисперсивных по Оре групп и определяется локальной функцией F такой, что*

$$F(p) = (G \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{N}_p \mathfrak{A}(p-1)),$$

если $p-1$ не делится на $(t+1)$-ые степени простых чисел; $F(p) = \mathfrak{N}_p$, если $p-1$ делится на $(t+1)$-ю степень некоторого простого числа.

***Теорема* 1.2** [11]. *Группа принадлежит $\mathfrak{U}_t^0$ тогда и только тогда, когда её можно предста-*

вить в виде произведения двух своих нильпотентных K-$\mathbb{P}_t$*-субнормальных подгрупп.*

***Теорема* 1.3** [14, теорема 5.4, IV]. *Пусть в группе G все собственные подгруппы являются p-нильпотентными, а сама G таковой не является. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *G – группа Шмидта*;

2) $|G| = p^{\alpha}q^{\beta}$ *для некоторого простого q*;

3) *G имеет нормальную силовскую p-подгруппу, которая для* $p > 2$ *имеет экспоненту p и для* $p = 2$ *имеет экспоненту не более* 4;

4) *в G силовская q-подгруппа является циклической.*

2 Основные результаты

***Теорема* 2.1.** *Группа* $G \in \mathfrak{U}_t^0$ *тогда и только тогда, когда G метанильпотентна и любая ее силовская подгруппа является* K-$\mathbb{P}_t$*-субнормальной в G.*

Доказательство. Если $G \in \mathfrak{U}_t^0$, то в G все силовские подгруппы являются K-$\mathbb{P}_t$-субнормальными. Метанильпотентность G следует из того, что G сверхразрешима, а значит, имеет нильпотентный коммутант. Необходимость доказана.

Предположим теперь, что G – группа наименьшего порядка такая, что G метанильпотентна, любая ее силовская подгруппа является K-$\mathbb{P}_t$-субнормальной в G, но G не принадлежит $\mathfrak{U}_t^0$. Выберем в G минимальную нормальную подгруппу N. Из выбора G следует, что $G/N \in \mathfrak{U}_t^0$. Так как $\mathfrak{U}_t^0$ является насыщенной формацией, N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $\Phi(G) = 1$. Тогда в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = NM$, $\mathrm{Core}_G(M) = 1$, $N \cap M = 1$ и $N = C_G(N)$.

Пусть p – наибольший простой делитель $|G|$. Так как $\mathfrak{U}_t^0 \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$ и $\mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$ состоит из дисперсивных по Оре групп, заключаем, что в G силовская p-подгруппа G_p нормальна. Из $N \le G_p$ и $O_p(M) = 1$ следует, что $N = G_p$ и M является p'-группой.

Пусть S – силовская q-подгруппа группы M.

Если $G = NS$, то по теореме 1.2 $G \in \mathfrak{U}_t^0$; противоречие с выбором G.

Предположим, что $G \ne NS$ для любого $q \in \pi(M)$. Обозначим $H = NS$. Из $N = C_G(N)$ следует, что $N = F_p(H)$. Из $H \in \mathfrak{U}_t^0$ по лемме 4.5 [12] и 1) теоремы 1.1 имеем $S \cong H/F_p(H) \in X(p)$. Если $p-1$ делится на $(t+1)$-ю степень некоторого простого числа, то $S \in X(p) = \mathfrak{N}_p$, что противоречит с $p \ne q$. Значит, $p-1$ не делится на $(t+1)$-ые степени простых чисел и $S \in X(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$. Откуда следует, что $S \in \mathfrak{A}(p-1)$. Так как G метанильпотентна и $N = F(G)$, из $G/N \cong M$ следует нильпотентность M. Тогда $M \in \mathfrak{A}(p-1)$. Поскольку $N = F_p(G)$, имеем $G/F_p(G) \cong M \in \mathfrak{A}(p-1)$. Таким образом, G сверхразрешима. Получили противоречие с выбором G. □

***Лемма* 2.1.** *Любая минимальная не* $\mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$*-группа является бипримарной не* $\mathfrak{U}_t^0$*-группой.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathcal{M}(\mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0)$ и q – наименьший простой делитель $|G|$. Так как $\mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$ состоит из дисперсивных по Оре групп, в G любая собственная подгруппа q-нильпотентна. Из $\mathfrak{N} \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$ следует, что $|\pi(G)| \ge 2$.

1. Предположим, что G q-нильпотентна. Тогда G имеет нормальную q'-холлову подгруппу S. Так как S дисперсивна по Оре и G/S – q-группа, заключаем, что G разрешима.

Рассмотрим случай, когда $\Phi(G) = 1$. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в G. Тогда $\pi(N) = \{p\}$ для некоторого простого p и в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = NM$. Из $M \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$ следует, что $G/N \cong M/M \cap N \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$. Так как $\mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$ – формация, N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G.

Пусть R – любая силовская r-подгруппа из G для $r \in \pi(G)$. Ввиду $G/N \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$ в G/N силовская r-подгруппа RN/N является K-$\mathbb{P}_t$-субнормальной. Тогда по 4) леммы 1.1 RN K-$\mathbb{P}_t$-субнормальна в G.

Если $RN \ne G$, то из $RN \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$ следует, что R K-$\mathbb{P}_t$-субнормальна в RN. Тогда по 2) леммы 1.1 R K-$\mathbb{P}_t$-субнормальна в G и $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$. Получили противоречие.

Предположим, что $RN = G$. Возьмем в G любую собственную подгруппу T. Тогда T метанильпотентна и $T \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$. По теореме 2.1 $T \in \mathfrak{U}_t^0$. Ввиду $\mathfrak{U}_t^0 \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$, группа $G \notin \mathfrak{U}_t^0$. Итак, $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{U}_t^0)$ и G бипримарна.

Рассмотрим случай, когда $\Phi = \Phi(G) \ne 1$. Из насыщенности $\mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$ следует, что $G/\Phi \notin \mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$. В G/Φ любая собственная подгруппа $L/\Phi \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$, так как $L \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$. Значит, $G/\Phi \in \mathcal{M}(\mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0)$. Так как $\Phi(G/\Phi) = 1$, по доказанному выше $G/\Phi \in \mathcal{M}(\mathfrak{U}_t^0)$ и G/Φ – бипримарная группа. Ввиду того, что Φ состоит из необразующих элементов, G – бипримарная группа. Заметим,

что $G \notin \mathfrak{U}_t^0$ и в G каждая собственная подгруппа $H \in \mathfrak{U}_t^0$, так как $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{U}_t^0 \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$. □

***Теорема* 2.2.** *Для группы G следующие утверждения эквивалентны.*

(1) $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$.

(2) *В G любая бипримарная подгруппа принадлежит* $\mathfrak{U}_t^0$.

(3) *В G любая метанильпотентная подгруппа принадлежит* $\mathfrak{U}_t^0$.

Доказательство. Обозначим следующие классы групп:

$\mathfrak{X} = (G \mid$ любая бипримарная подгруппа из G принадлежит $\mathfrak{U}_t^0)$,

$\mathfrak{Y} = (G \mid$ любая метанильпотентная подгруппа из G принадлежит $\mathfrak{U}_t^0)$.

Докажем, что из (1) следует (2). Пусть $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$ и H – ее бипримарная подгруппа. Тогда в H найдутся силовская p-подгруппа p и силовская q-подгруппа q такие, что $H = PQ$. Ввиду наследственности $\mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$ имеем $H \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$. Поэтому p и q являются K-$\mathbb{P}_t$-субнормальными в H. По теореме 2.1 $H \in \mathfrak{U}_t^0$. Итак, $G \in \mathfrak{X}$ и $(1) \Rightarrow (2)$ доказано.

Установим, что из (2) следует (3). Пусть G – группа наименьшего порядка такая, что $G \in \mathfrak{X}$ и G не принадлежит $\mathfrak{Y}$. Тогда в G найдется метанильпотентная подгруппа A, которая не принадлежит $\mathfrak{U}_t^0$. Если $A \neq G$, то из $A \in \mathfrak{X}$ следует, что $A \in \mathfrak{Y}$. Но тогда получаем противоречие $A \in \mathfrak{U}_t^0$. Значит, $A = G$, т. е. G метанильпотентна и G не принадлежит $\mathfrak{U}_t^0$. Ввиду теоремы 2.1 для некоторого $r \in \pi(G)$ в G найдется силовская r-подгруппа R, которая не является K-$\mathbb{P}_t$-субнормальной. Рассмотрим два случая.

1. $\Phi = \Phi(G) \neq 1$. Пусть T/Φ – любая бипримарная подгруппа из G/Φ и пусть $\pi(T/\Phi) = \{q_1, q_2\}$. Из разрешимости T/Φ и нильпотентности Φ следует разрешимость T. Тогда в T существует $\{q_1, q_2\}$-холлова подгруппа L. Из $G \in \mathfrak{X}$ следует, что $L \in \mathfrak{U}_t^0$. Откуда следует, что $T/\Phi = L\Phi/\Phi \cong L/L \cap \Phi \in \mathfrak{U}_t^0$. Это означает, что $G/\Phi \in \mathfrak{X}$. Тогда $G/\Phi \in \mathfrak{U}_t^0$ по выбору G. Из насыщенности $\mathfrak{U}_t^0$ следует, что $G \in \mathfrak{U}_t^0$; противоречие.

2. $\Phi(G) = 1$. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа из G. Тогда $G = NM$ для некоторой максимальной в G подгруппы M. Из $M \in \mathfrak{X}$ и $|M| < |G|$ заключаем, что $M \in \mathfrak{Y}$. Так как M метанильпотентна, $M \in \mathfrak{U}_t^0$. Поэтому $G/N \cong M/M \cap N \in \mathfrak{U}_t^0$. Ввиду того, что $\mathfrak{U}_t^0$ – формация, заключаем следующее: N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G, $\mathrm{Core}_G(M) = 1$. Отметим, что $\pi(N) = \{p\}$ для некоторого простого p и $N = C_G(N)$. Из метанильпотентности G и $N = F(G)$ следует, что $M \cong G/N \in \mathfrak{N}$. Если P – силовская p-подгруппа из G, то $N \leq P$ и $P = N(P \cap M)$ по тождеству Дедекинда. По теореме Силова $P \cap M$ содержится в некоторой силовской p-подгруппе из M. Ввиду нильпотентности M заключаем, что $P \cap M \leq O_p(M) = 1$. Значит, $N = P$ – силовская p-подгруппа из G. Ввиду нормальности N в G имеем $p \neq r$.

Из $G \in \mathfrak{X}$ следует, что $|\pi(G)| \geq 3$. Так как M является p'-группой, $r \in \pi(M)$. По теореме Силова R^x является силовской r-подгруппой в M. Из бипримарности NR^x и $G \in \mathfrak{X}$ следует, что $NR^x \in \mathfrak{U}_t^0$. Поэтому R^x K-$\mathbb{P}_t$-субнормальна в NR^x. Ввиду нильпотентности M имеем $R^x \trianglelefteq M$. Тогда $NR^x \trianglelefteq NM = G$. Таким образом, R^x K-$\mathbb{P}_t$-субнормальна в G. Тогда по 1) леммы 1.1 R является K-$\mathbb{P}_t$-субнормальной в G. Получили противоречие. Итак, $(2) \Rightarrow (3)$ доказано.

Докажем, что из (3) следует (1). Пусть G – группа наименьшего порядка такая, что $G \in \mathfrak{Y}$ и $G \notin \mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$. Очевидно, что в G любая собственная подгруппа принадлежит $\mathfrak{Y}$, а значит, принадлежит $\mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$ по выбору G. Тогда $G \in \mathcal{M}(\mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0)$. По лемме 2.1 $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{U}_t^0)$ и $|\pi(G)| = 2$.

Если G сверхразрешима, то G метанильпотентна. Из $G \in \mathfrak{Y}$ следует, что $G \in \mathfrak{U}_t^0 \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$. Получили противоречие с выбором G.

Предположим, что G не является сверхразрешимой. Из $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{U}_t^0)$ заключаем, что в G любая собственная подгруппа принадлежит $\mathfrak{U}_t^0 \subseteq \mathfrak{U}$. Поэтому $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{U})$. По теореме 26 (4) из [12] G имеет нормальную силовскую подгруппу. Тогда G метанильпотентна и принадлежит $\mathfrak{U}_t^0 \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$. Получили противоречие. Таким образом, $(3) \Rightarrow (1)$ доказано. □

Далее приведем одно из приложений формации $\mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$ к группам, представимым произведениями своих подгрупп. Нами будет использоваться известный результат о том, что если A и B – подгруппы группы G, причем

$$(|G:A|, |G:B|) = 1,$$

то $G = AB$.

***Теорема* 2.3.** *Если группа G имеет подгруппы* $A \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$ *и* $B \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$ *такие, что*

$$(|G:A|,|G:B|)=1,$$

A и B являются K-$\mathbb{P}_t$*-субнормальными в G, то* $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$.

Доказательство. Обозначим через A_p, B_p, G_p такие силовские *p*-подгруппы из *A*, *B* и *G* соответственно, что $G_p = A_p B_p$. Пусть $|A|=|A_p|m_1$, $|B|=|B_p|m_2$ и $|G|=|G_p|m_3$, где $(p,m_i)=1$ для $i = 1, 2, 3$. Тогда из

$$|G|=|A_p|m_1|G:A|=|B_p|m_2|G:B|=\frac{|A_p||B_p|m_3}{|A_p\cap B_p|}$$

следует, что

$$m_1|G:A|=\frac{|B_p|m_3}{|A_p\cap B_p|},\ m_2|G:B|=\frac{|A_p|m_3}{|A_p\cap B_p|}.$$

Откуда заключаем, что либо $G_p = A_p$, либо $G_p = B_p$.

Пусть $G_p = A_p$. Из $A \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$ следует, что G_p является K-$\mathbb{P}_t$-субнормальной в *A*. По условию *A* K-$\mathbb{P}_t$-субнормальна в *G*. По 2) леммы 1.1 заключаем, что G_p является K-$\mathbb{P}_t$-субнормальной в *G*. Аналогичные рассуждения справедливы для $G_p = B_p$. Итак, $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$. □

Заключение

В работе получен критерий, при котором группа принадлежит формации $\mathfrak{U}_t^0$ всех сверхразрешимых групп с K-$\mathbb{P}_t$-субнормальными силовскими подгруппами. Доказаны эквивалентные утверждения принадлежности группы w-расширению этой формации, а именно, $\mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$. Также найдены приложения формации $\mathrm{w}\mathfrak{U}_t^0$ к группам, которые являются произведениями K-$\mathbb{P}_t$-субнормальных подгрупп.

Заметим, что $\cup_{t=1}^{\infty}\mathfrak{U}_t^0 = \mathfrak{U}$. Это позволяет расширять результаты, полученные для формации $\mathfrak{U}$.

***Следствие* 1** [2]. *Группа* $G \in \mathfrak{U}$ *тогда и только тогда, когда G метанильпотентна и любая ее силовская подгруппа является* $\mathbb{P}$*-субнормальной в G.*

***Следствие* 2** [3]. *Если группа G имеет подгруппы* $A \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ *и* $B \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ *такие, что* $(|G:A|,|G:B|)=1$, *A и B являются* K-$\mathbb{P}$*-субнормальными в G, то* $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев*, *А. Ф.* Проблемы теории классов конечных групп через призму приложений. I / А. Ф. Васильев, В. И. Мурашко, В. Г. Сафонов // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 2 (67). – С. 7–16. – EDN: QCYRRH

2. *Васильев*, *А. Ф.* О конечных группах сверхразрешимого типа / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов // Сибирский математический журнал. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

3. *Васильев*, *А. Ф.* О K-$\mathbb{P}$-субнормальных подгруппах конечных групп / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов // Математические заметки. – 2014. – Т. 95. № 4. – С. 517–528.

4. *Kniahina*, *V.* On supersolvability of finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups / V. Kniahina, V. Monakhov // Internat. J. of Group Theory. – 2013. – Vol. 2, № 4. – P. 21–29.

5. *Мурашко*, *В. И.* Свойства класса конечных групп с $\mathbb{P}$-субнормальными циклическими примарными подгруппами / В. И. Мурашко // Доклады НАН Беларуси. – 2016. – Т. 58, № 1. – С. 5–8.

6. *On Factorised Finite Groups* / A. Ballester-Bolinches, Y. Li, M. C. Pedraza-Aguilera, N. Su // Mediterr. J. Math. – 2020. – Vol. 17, № 2. – P. 65.

7. *On Certain Products of Permutable Subgroups* / A. Ballester-Bolinches, S. Y. Madanha, T. M. Mudziiri Shumba, S. Y. Pedraza-Aguilera // Bull. Aust. Math. Soc. – 2022. – Vol. 105, № 2. – P. 278–285.

8. *Chen*, *R.* $\mathbb{P}$-Subnormal Subgroups and the Structure of Finite Groups / R. Chen, X. Zhao, X. Li // Ric. Mat. – 2023. – Vol. 72. – P. 771–778.

9. *Murashka*, *V. I.* Formations of finite groups in polynomial time: $\mathfrak{F}$-residuals and $\mathfrak{F}$-subnormality / V. I. Murashka // Journal of Symbolic Computation. – 2024. – Vol. 122. – P. 102271.

10. *Йи*, *С.* Конечные группы с $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами Шмидта / С. Йи, Ч. Сюй, С. Ф. Каморников // Тр. ИММ УрО РАН. – 2024. – Т. 30, № 1. – С. 100–108.

11. *Васильев*, *А. Ф.* Подгрупповые вложения в конечную группу: между субнормальностью и K-P-субнормальностью / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева // Математические заметки. – 2025. – Т. 118, № 2. – С. 177–190.

12. *Шеметков*, *Л. А.* Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

13. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

14. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen. I. / B. Huppert. – Berlin : Springer, 1967. – 795 s.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования Республики Беларусь (*грант* № 20262141 «*Конвергенция*-2030»).

Поступила в редакцию 23.06.2026.

Информация об авторах

Васильев Александр Федорович – д.ф.-м.н., профессор
Васильева Татьяна Ивановна – к.ф.-м.н., доцент