МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.32 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_56
EDN: QNPSSD

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВОМ ФУНКЦИИ СКОРОСТИ ВО ВНУТРЕННЕЙ И ГРАНИЧНОЙ ТОЧКАХ

Я. В. Рудько

Институт математики НАН Беларуси, *Минск*;
Белорусский государственный университет, *Минск*

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS TO A MIXED PROBLEM FOR THE WAVE EQUATION WITH A DISCONTINUOUS VELOCITY FUNCTION AT INTERIOR AND BOUNDARY POINTS

J. V. Rudzko

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, *Minsk*;
Belarusian State University, *Minsk*

Аннотация. Изучается смешанная задача в первом квадранте плоскости для волнового уравнения с условиями Коши и условием Дирихле. Условие Коши на производную по временной переменной имеет разрыв первого рода в одной точке. Предложены различные способы определения решения. Построены решения исследуемой задачи в явном аналитическом виде. Выведены необходимые и достаточные условия гладкости для существования решений. Доказана единственность решений. Установлены условия сопряжения, которым удовлетворяют построенные решения.

Ключевые слова: *волновое уравнение*, *смешанная задача*, *негладкие начальные условия*, *условия согласования*, *условия сопряжения*.

Для цитирования: *Рудько*, *Я. В.* Существование и единственность решений смешанной задачи для волнового уравнения с разрывом функции скорости во внутренней и граничной точках / Я. В. Рудько // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 3 (68). – С. 56–64. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_56. – EDN: QNPSSD

Abstract. We study a mixed problem in the first quadrant of the plane for the wave equation with the Cauchy conditions and the Dirichlet boundary condition. The Cauchy condition for the time-derivative has a discontinuity of the first kind at a single point. Various approaches to defining a solution are proposed. Explicit analytical representations of solutions to the problem under consideration are constructed. Necessary and sufficient smoothness conditions for the existence of solutions are derived. The uniqueness of solutions is proved. The matching conditions satisfied by the constructed solutions are established.

Keywords: *wave equation*, *mixed problem*, *nonsmooth initial conditions*, *compatibility conditions*, *matching conditions*.

For citation: *Rudzko*, *J. V.* Existence and uniqueness of solutions to a mixed problem for the wave equation with a discontinuous velocity function at interior and boundary points / J. V. Rudzko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 3 (68). – P. 56–64. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_56 (in Russian). – EDN: QNPSSD

Введение

Корректная постановка задачи для дифференциального уравнения с частными производными зависит от области, в которой задается уравнение, а также от условий, которые присоединяются к заданному уравнению. Гладкость решения зависит от гладкости заданных функций, но, как показывают последние исследования [1], [2], [9], она также существенно зависит от условий согласования для заданных функций, а те взаимно однозначным образом связаны с условиями сопряжения (см., например, [8]). Поэтому в случае плохих заданных условий постановка задачи получается с использованием условий сопряжения на характеристиках.

Продемонстрируем вышесказанное на примере. Следуя [3, с. 143–153], рассмотрим смешанную задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in Q = (0,\infty)\times(0,\infty), \tag{0.1}$$

$$u(0,x) = \phi(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x), \ x \in [0,\infty), \tag{0.2}$$

$$u(t,0) = \mu(t), \ t \in [0,\infty). \tag{0.3}$$

Пусть $f \in C^1(\bar{Q})$, $\phi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$,

© *Рудько Я. В.*, 2026

$\mu \in C^2\left([0,\infty)\right)$. Как известно [3, с. 143–153], в этом случае задача (0.1)–(0.3) допускает классическое решение u тогда и только тогда, когда для заданных функций f, ϕ, ψ и μ справедливы однородные условия согласования:

$$D^2\mu(0)-\left(a^2D^2\phi(0)+f(0,0)\right)=0,$$

$$D\mu(0)-\psi(0)=0,\ \ \mu(0)-\phi(0)=0. \qquad (0.4)$$

Это решение u имеет вид

$$u(t,x)=\begin{cases}u_1(t,x),\ (t,x)\in\overline{\tilde{Q}^{(1)}},\\ u_2(t,x),\ (t,x)\in\overline{\tilde{Q}^{(2)}},\end{cases} \qquad (0.5)$$

где

$$\tilde{Q}^{(1)}=\{(t,x):(t,x)\in Q, x-at>0\},$$

$$\tilde{Q}^{(2)}=\{(t,x):(t,x)\in Q, x-at<0\},$$

$$u_1(t,x)=w(t,x)+\frac{\phi(x+at)+\phi(x-at)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi,$$

$$u_2(t,x)=w(t,x)-w\left(t-\frac{x}{a},0\right)+\mu\left(t-\frac{x}{a}\right)+$$

$$+\frac{\phi(x+at)-\phi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{at+x}\psi(\xi)d\xi,$$

$$w(t,x)=\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\tilde{f}(\tau,\xi)d\xi,$$

$$\tilde{f}(t,x)=\begin{cases}f(t,0)+x\partial_x f(t,0),\ x<0,\\ f(t,x),\ x\ge 0.\end{cases}$$

***Замечание* 0.1.** *В формуле* (0.5) *функция* $\tilde{f}$ *– это непрерывно дифференцируемое продолжение функции* f (*это означает, что если* $f\in C^1(\overline{Q})$, *то* $\tilde{f}\in C^1(\overline{Q})$), *а функция* w *является частным решением волнового уравнения* (0.1), *которое удовлетворяет однородным условиям Коши*

$$w(0,x)=0,\ \frac{\partial w}{\partial t}(0,x)=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(0,x)=f(0,x).$$

Также следует сказать, что, вообще говоря, в качестве w можно брать любое другое частное классическое решение волнового уравнения (0.1), удовлетворяющее однородным условиям Коши, и независимо от выбранного решения w представление (0.5) будет определять одну и ту же функцию в силу теоремы существования и единственности классического решения задачи (0.1)–(0.3) [3, с. 153].

Однородные условия согласования (0.4) сильно ограничивают выбор заданных функций. Также в случае моделирования имеются погрешности, и эти условия однородности нарушаются. В этом случае мы можем рассматривать задачу в случае неоднородных условий согласования:

$$D^2\mu(0)-\left(a^2D^2\phi(0)+f(0,0)\right)=\delta_2,$$

$$D\mu(0)-\psi(0)=\delta_1,\ \ \mu(0)-\phi(0)=\delta_0.$$

В этом случае аналитическое представление решения остается тем же самым, а только на прямой $x=at$ следует вычислить предельные значения функций u_1 и u_2 и их частных производных до второго порядка включительно и затем рассмотреть их разность. Проделав эти несложные вычисления, мы получим

$$(u_1-u_2)(t,at)=\phi(0)-\mu(0)=-\delta_0, \qquad (0.6)$$

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}-\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)(t,at)=\psi(0)-D\mu(0)=-\delta_1, \qquad (0.7)$$

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}-\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)(t,at)=\frac{D\mu(0)-\psi(0)}{a}=\frac{\delta_1}{a}, \qquad (0.8)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\right)(t,at)=$$

$$=a^2D^2\phi(0)+f(0,0)-\mu(0)=-\delta_2, \qquad (0.9)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)(t,at)=$$

$$=\frac{a^2D^2\phi(0)+f(0,0)-\mu(0)}{a^2}=-\frac{\delta_2}{a^2}, \qquad (0.10)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t\partial x}-\frac{\partial^2 u_2}{\partial t\partial x}\right)(t,at)=$$

$$\frac{D^2\mu(0)-\left(a^2D^2\phi(0)+f(0,0)\right)}{a}=\frac{\delta_2}{a}. \qquad (0.11)$$

Соотношения (0.6)–(0.11) можно рассматривать как условия сопряжения. Поэтому в задаче (0.1)–(0.3) из формул (0.6)–(0.11) следует взаимно-однозначное соответствие между условиями сопряжения и условиями согласования.

В случае неоднородных условий согласования

$$\delta_0^2+\delta_1^2+\delta_2^2\ne 0$$

постановка задачи такова: требуется найти кусочно-гладкое решение

$$u(t,x)=\begin{cases}u_1(t,x),\ (t,x)\in\overline{\tilde{Q}^{(1)}},\\ u_2(t,x),\ (t,x)\in\overline{\tilde{Q}^{(2)}},\end{cases}$$

уравнения (0.1), такое что $u_j\in C^2\left(\overline{\tilde{Q}^{(j)}}\right)$, $j=1,2$,

функция u_1 удовлетворяет условиям Коши

$$u_1(0,x)=\phi(x),\quad \frac{\partial u_1}{\partial t}(0,x)=\psi(x),\quad x\in(0,\infty),$$

функция u_2 – граничному условию

$$u_2(t,0)=\mu(t),\quad t\in(0,\infty),$$

и на характеристике $\gamma=\{(t,x)\in\bar{Q}: x=at\}$, которая проходит через угловую точку $(0,0)$ множества $\bar{Q}$, выполняются условия сопряжения (0.6)–(0.11).

Как видно, гладкость решения зависит не только от гладкости заданных функций, но и от выполнения условий сопряжения. Подобно работе [4], в данной статье мы будем рассматривать задачи с негладким условием Коши. Согласно [4], если в условии Коши $u(0,x)=\phi(x)$ имеется разрыв (т. е. если функция ϕ разрывная), то решение получается, в общем случае, только разрывным кусочно-гладким. Возникает вопрос, что будет с гладкостью решения, если разрыв допускает функция ψ второго условия Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=\psi(x),$$

а функция ϕ непрерывно дифференцируема до второго порядка включительно на множестве своего задания.

1 Первая смешанная задача с разрывом функции во внутренней точке множества задания

Рассмотрим вначале задачу, где разрыв допускает функция ψ второго условия Коши (0.2) во внутренней точке множества своего задания, а именно: рассмотрим задачу (0.1)–(0.3) в случае

$$\psi(x)=\begin{cases}\psi_1(x), & x\in[0,x^*),\\ \psi_2(x), & x\in(x^*,\infty),\end{cases}\qquad(1.1)$$

где $x^*>0$.

Считаем, что функции f, ϕ, ψ_1, ψ_2 и μ задачи (0.1)–(0.3) и (1.1) достаточно гладкие, а именно:

$$f\in C^1(\bar{Q}),\ \phi\in C^2([0,\infty)),\ \mu\in C^2([0,\infty)),$$
$$\psi_1\in C^1([0,x^*]),\ \psi_2\in C^1([x^*,\infty)).\qquad(1.2)$$

Задача (0.1)–(0.3) и (1.1) моделирует следующую задачу из теории поперечного удара [3, с. 82–84], [5, с. 126, 134]. Пусть полуограниченная струна, левая граница $x=0$ которой движется по определенному закону $\mu(t)$, подвергается в начальный момент $t=0$ удару молоточком, сообщающим ее точкам $x\in[0,x^*)$ дополнительную скорость, которая задается функцией v. Мы также полагаем, что в начальный момент времени $t=0$ профиль струны описывается функцией ϕ, скорости точек струны задаются функцией $\tilde{\psi}$, и в струне отсутствуют ударные волны. Тогда, функция u, задающая вертикальное (поперечное) смещение точек струны, удовлетворяет смешанной задаче (0.1)–(0.3) и (1.1), где $\psi_1=\tilde{\psi}|_{[0,x^*]}+v$, $\psi_2=\tilde{\psi}|_{[x^*,\infty)}$, $a=\sqrt{T\rho^{-1}}$, $T>0$ – сила натяжения струны, $\rho>0$ – погонная плотность струны (масса на единицу длины). Функция f – это плотность внешней силы, деленная на ρ.

Вообще говоря, из физических свойств струны (непрерывность профиля струны) должно выполняться условие согласования

$$\mu(0)=\phi(0).\qquad(1.3)$$

Однако мы будем рассматривать смешанную задачу (0.1)–(0.3) и (1.1) в общем случае, не предполагая истинности (1.3). В связи с этим величины $\mu(0)$ и $\phi(0)$ понимаются как $\mu(0)=u(0+0,0)$ и $\phi(0)=u(0,0+0)$. Величина $\psi(0)$ в этой задаче также понимается как $\psi(0)=\partial_t u(0,0+0)$.

Невыполнение условия (1.3) может иметь место в случае резкого рывка, например: конец $x=0$ струны жестко закреплен на вибраторе, который за пренебрежимо малое время сместился к положению $\mu(0)$, что, в некотором приближении, сгенерировало ударную волну.

Слабое решение. Как известно, если задача (0.1)–(0.3) и (1.1), допускает классическое решение, то оно представляется в виде (0.5). Однако представление (0.5) корректно задает кусочно-гладкую функцию u, даже если не выполняются необходимые условия согласования и гладкости, обеспечивающие существование классического решения. Достаточно потребовать

$$f\in C^1(\bar{Q}),\ \phi\in C([0,\infty)),$$
$$\psi\in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty)),\ \mu\in C([0,\infty)),\qquad(1.4)$$

чтобы формула (0.5) задавала функцию u из класса $C(\bar{Q}\setminus\gamma)$. Докажем это. Перепишем формулу (0.5) при (1.1) в следующем виде

$$u(t,x)=u^{(1)}(t,x)=w(t,x)+\frac{\phi(x+at)+\phi(x-at)}{2}+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\tilde{\psi}_1(\xi)\,d\xi,\quad (t,x)\in Q^{(1)},\qquad(1.5)$$

$$u(t,x)=u^{(2)}(t,x)=$$
$$=w(t,x)+\frac{\phi(x+at)+\phi(x-at)}{2}+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\tilde{\psi}_2(\xi)d\xi,\quad (t,x)\in Q^{(2)},\qquad (1.6)$$

$$u(t,x)=u^{(3)}(t,x)=$$
$$=w(t,x)+\frac{\phi(x+at)+\phi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x^*-at}^{x^*}\tilde{\psi}_1(\xi)d\xi+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{x^*}^{x^*+at}\tilde{\psi}_2(\xi)d\xi,\ (t,x)\in Q^{(3)},\qquad (1.7)$$

$$u(t,x)=u^{(4)}(t,x)=$$
$$=w(t,x)-w\left(t-\frac{x}{a},0\right)+\mu\left(t-\frac{x}{a}\right)+$$
$$+\frac{\phi(x+at)-\phi(at-x)}{2}+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x}\tilde{\psi}_1(\xi)d\xi,\quad (t,x)\in Q^{(4)},\qquad (1.8)$$

$$u(t,x)=u^{(5)}(t,x)=$$
$$=w(t,x)-w\left(t-\frac{x}{a},0\right)+\mu\left(t-\frac{x}{a}\right)+$$
$$+\frac{\phi(x+at)-\phi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x^*}\tilde{\psi}_1(\xi)d\xi+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{x^*}^{at+x}\tilde{\psi}_2(\xi)d\xi,\quad (t,x)\in Q^{(5)},\qquad (1.9)$$

$$u^{(6)}(t,x)=w(t,x)-w\left(t-\frac{x}{a},0\right)+\mu\left(t-\frac{x}{a}\right)+$$
$$+\frac{\phi(x+at)-\phi(at-x)}{2}+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x}\tilde{\psi}_2(\xi)d\xi,\quad (t,x)\in Q^{(6)}.\qquad (1.10)$$

На рисунке 1.1 показано разделение области Q характеристиками $x-at=0$, $x+at=x^*$, $x-at=x^*$ и $x-at=-x^*$ на шесть подобластей $Q^{(j)}, j=1,2,\ldots,6$:

$$Q^{(1)}=Q\cap\{(t,x):x+at<x^*,x-at\langle x^*,x-at\rangle 0\},$$

$$Q^{(2)}=Q\cap\{(t,x):x+at>x^*,x-at>x^*,x-at>0\},$$

$$Q^{(3)}=Q\cap\{(t,x):x+at>x^*,x-at\langle x^*,x-at\rangle 0\},$$

$$Q^{(4)}=Q\cap\{(t,x):x+at<x^*,x-at<x^*,x-at<0\},$$

$$Q^{(5)}=Q\cap\{(t,x):x+at>x^*,x-at>-x^*,x-at<0\},$$

$$Q^{(6)}=Q\cap\{(t,x):x-at<-x^*\}.$$

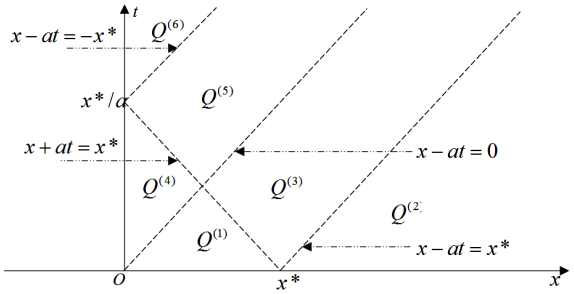


Рисунок 1.1 – Разделение области Q

Значит, чтобы было верно $u\in C(\bar{Q}\setminus\gamma)$ должны выполнятся условия

$$u^{(5)}(t,x=at-x^*)=u^{(6)}(t,x=at-x^*),$$
$$u^{(4)}(t,x=x^*-at)=u^{(5)}(t,x=x^*-at),$$
$$u^{(1)}(t,x=x^*-at)=u^{(3)}(t,x=x^*-at),$$
$$u^{(2)}(t,x=x^*+at)=u^{(3)}(t,x=x^*+at).\qquad (1.11)$$

Непосредственной подстановкой выражений (1.5)–(1.10) в (1.11) убеждаемся в истинности условий (1.11) без каких-либо дополнительных условий.

***Определение* 1.1.** *Функцию* u, *определяемую формулой* (0.5), *назовем слабым решением задачи* (0.1)–(0.3).

Согласно вышесказанному, имеет место утверждение.

***Утверждение* 1.1.** *Пусть выполняются условия гладкости* (1.4). *Тогда задача* (0.1)–(0.3) *и* (1.1) *имеет единственное слабое решение из класса* $C(\bar{Q}\setminus\gamma)$.

Повысим гладкость слабого решения.

***Утверждение* 1.2.** *Пусть выполняются условия гладкости* (1.4). *Тогда задача* (0.1)–(0.3) *и* (1.1) *имеет единственное слабое решение из класса* $C(\bar{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняется условие* (1.3).

Доказательство. Для того чтобы функция u принадлежала классу $C(\bar{Q})$ достаточно потребовать условий

$$u^{(1)}(t,x=at)=u^{(4)}(t,x=at),$$
$$u^{(5)}(t,x=at)=u^{(3)}(t,x=at).\qquad (1.12)$$

Подставив выражения (1.5) и (1.7)–(1.9) в равенства (1.12), получим, что условия (1.12) верны при $\mu(0)=\phi(0)$.

Необходимость условия $\mu(0)=\phi(0)$ следует из того, что

$$u(0,0)=\lim_{t\to 0}u(t,0)=\lim_{t\to 0}\mu(t)=\mu(0)$$

и

$$u(0,0)=\lim_{x\to 0}u(0,x)=\lim_{t\to 0}\phi(x)=\phi(0). \qquad \square$$

Кусочно-гладкое решение. Заметим, что если выполняются условия (1.2), то из формул (1.5)–(1.10) следует, что $u^{(j)}\in C^2\left(\overline{Q^{(j)}}\right), j=1,2,...,6.$ Это влечет $u\in C^2\left(\overline{Q}\setminus\mathcal{M}\right),$ где

$$\mathcal{M}=\left\{(t,x): x-at=0, x-at=\pm x^*, x+at=x^*\right\}.$$

Представления (1.5)–(1.10) также влекут, что в этом случае слабое решение u задачи (0.1)–(0.3) и (1.1) удовлетворяет в обычном смысле волновому уравнению (0.1) на множестве $\overline{Q}\setminus\mathcal{M},$, первому условию Коши из (0.2) на множестве $(0,\infty),$ второму условию Коши из (0.2) на множестве $(0,\infty)\setminus\{x^*\},$ граничному условию (0.3) на множестве $(0,\infty)$ и условиям сопряжения:

$$\left[(u)^+-(u)^-\right](t,at-x^*)=0,\ t\in\left(a^{-1}x^*,\infty\right),$$

$$\left[(u)^+-(u)^-\right](t,x^*+at)=0,\ t\in(0,\infty),$$

$$\left[(u)^+-(u)^-\right](t,x^*-at)=0,\quad t\in\left(0,\frac{x^*}{a}\right)\setminus\left\{\frac{x^*}{2a}\right\},$$

$$\left[(u)^+-(u)^-\right](t,at)=\phi(0)-\mu(0),\ t\in(0,\infty). \quad (1.13)$$

Здесь было использовано обозначение $(u)^{\pm}$ – предельные значения функции u с разных сторон на характеристиках вида $x=r(t),$ т. е.

$$(u)^{\pm}(t,r(t))=\lim_{\Delta x\to 0+}u(t,r(t)\pm\Delta x),$$

где r – функция действительного переменного.

Формулы (1.13) следуют из представлений (1.5) – (1.10). Докажем это. В самом деле,

$$\left[(u)^+-(u)^-\right](t,at-x^*)=$$
$$=\left(u^{(5)}-u^{(6)}\right)(t,at-x^*),\ t\in\left(a^{-1}x^*,\infty\right),$$

$$\left[(u)^+-(u)^-\right](t,x^*+at)=$$
$$=\left(u^{(2)}-u^{(3)}\right)(t,x^*+at),\ t\in(0,\infty),$$

$$\left[(u)^+-(u)^-\right](t,x^*-at)=$$
$$=\left(u^{(3)}-u^{(1)}\right)(t,x^*-at),\quad t\in\left(0,\frac{x^*}{2a}\right),$$

$$\left[(u)^+-(u)^-\right](t,x^*-at)=$$
$$=\left(u^{(5)}-u^{(4)}\right)(t,x^*-at),\quad t\in\left(\frac{x^*}{2a},\frac{x^*}{a}\right),$$

$$\left[(u)^+-(u)^-\right](t,at)=\left(u^{(1)}-u^{(4)}\right)(t,at),\ t\in\left(0,\frac{x^*}{2a}\right),$$

$$\left[(u)^+-(u)^-\right](t,at)=\left(u^{(3)}-u^{(4)}\right)\left(\frac{x^*}{2a},\frac{x^*}{2}\right),\ t=\frac{x^*}{2a},$$

$$\left[(u)^+-(u)^-\right](t,at)=$$
$$=\left(u^{(3)}-u^{(5)}\right)(t,at),\ t\in\left(\frac{x^*}{2a},\infty\right), \quad (1.14)$$

Вычисляем величины, входящие в правые части равенств (1.14)

$$u^{(1)}(t,x=at)=$$
$$=\frac{1}{2a}\int_0^{2at}\psi_1(\xi)\,d\xi+w(t,at)+\frac{1}{2}\left(\phi(0)+\phi(2at)\right),$$

$$u^{(4)}(t,x=at)=\frac{1}{2a}\int_0^{2at}\psi_1(\xi)\,d\xi+w(t,at)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\phi(2at)-\phi(0)\right)+\mu(0)-w(0,0),$$

$$u^{(3)}(t,x=at)=\frac{1}{2a}\int_0^{x^*}\psi_1(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2a}\int_{x^*}^{2at}\psi_2(\xi)\,d\xi+$$
$$+w(t,at)+\frac{\phi(0)+\phi(2at)}{2},$$

$$u^{(3)}(t,x=at+x^*)=\frac{1}{2a}\int_{x^*}^{2at+x^*}\psi_2(\xi)\,d\xi+$$
$$+w(t,at+x^*)+\frac{\phi(x^*)+\phi(2at+x^*)}{2},$$

$$u^{(2)}(t,x=at+x^*)=\frac{1}{2a}\int_{x^*}^{2at+x^*}\psi_2(\xi)\,d\xi+$$
$$+w(t,at+x^*)+\frac{\phi(x^*)+\phi(2at+x^*)}{2},$$

$$u^{(1)}(t,x=x^*-at)=\frac{1}{2a}\int_{x^*-2at}^{x^*}\psi_1(\xi)\,d\xi+$$
$$+w(t,x^*-at)+\frac{\phi(x^*)+\phi(x^*-2at)}{2},$$

$$u^{(3)}\left(t,x=x^*-at\right)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x^*-2at}^{x^*}\psi_1\left(\xi\right)\mathrm{d}\xi+$$

$$+w\left(t,x^*-at\right)+\frac{\phi\left(x^*\right)+\phi\left(x^*-2at\right)}{2},$$

$$u^{(4)}\left(t,x=x^*-at\right)=$$

$$=\frac{1}{2a}\int\limits_{x^*-2at}^{x^*}\psi_1\left(\xi\right)\mathrm{d}\xi+w\left(t,x^*-at\right)-$$

$$-w\left(2t-\frac{x^*}{a},0\right)+\mu\left(2t-\frac{x^*}{a}\right)+\frac{\phi\left(x^*\right)-\phi\left(2at-x^*\right)}{2},$$

$$u^{(5)}\left(t,x=x^*-at\right)=$$

$$=\frac{1}{2a}\int\limits_{x^*-2at}^{x^*}\psi_1\left(\xi\right)\mathrm{d}\xi+w\left(t,x^*-at\right)-$$

$$-w\left(2t-\frac{x^*}{a},0\right)+\mu\left(2t-\frac{x^*}{a}\right)+\frac{\phi\left(x^*\right)-\phi\left(2at-x^*\right)}{2},$$

$$u^{(6)}\left(t,x=at-x^*\right)=$$

$$=\frac{1}{2a}\int\limits_{x^*}^{2at-x^*}\psi_2\left(\xi\right)\mathrm{d}\xi+w\left(t,at-x^*\right)-w\left(\frac{x^*}{a},0\right)+$$

$$+\mu\left(\frac{x^*}{a}\right)+\frac{\phi\left(2at-x^*\right)-\phi\left(x^*\right)}{2},$$

и подставляем их в (1.14), что в результате дает (1.11).

Согласно вышесказанному, при условиях (1.2) слабое решение можно рассматривать как решение задачи с условиями сопряжения. Сформулируем такую задачу.

Задача* (0.1)–(0.3) *и* (1.1) *с условиями сопряжения на характеристиках. Требуется найти классическое решение уравнения (0.1) на множестве $\bar{Q}\setminus\mathcal{M}$, удовлетворяющее первому условию Коши из (0.2) на множестве $\left(0,\infty\right)$, второму условию Коши из (0.2) на множестве $\left(0,\infty\right)\setminus\left\{x^*\right\}$ и граничному условию (0.3) на множестве $\left(0,\infty\right)$ и условиям сопряжения (1.13).

Согласно вышеописанному, классическое решение задачи (0.1)–(0.3) и (1.1) с условиями сопряжения (1.13) существует при условиях гладкости (1.2) и определяется формулой (0.5). Докажем единственность такого решения. Для этого воспользуемся тем фактом, что решение задачи (0.1)–(0.3) и (1.1) с условиями сопряжения (1.13) представляет собой совокупность решений задач Коши на множествах $\overline{Q^{(1)}}$ и $\overline{Q^{(2)}}$, Гурса на множествах $\overline{Q^{(3)}}$ и $\overline{Q^{(5)}}$ и Пикара на множествах $\overline{Q^{(4)}}$ и $\overline{Q^{(6)}}$. Классические решения этих подзадач определяются единственным образом (см. [3, с. 138–142] для задачи Коши, [6] для задачи Гурса, а решение задачи Пикара построено в работе [7]).

Введем определение кусочно-гладкого решения задачи (0.1)–(0.3) и (1.1).

***Определение* 1.2.** *Кусочно-гладким решением задачи* (0.1)–(0.3) *и* (1.1) *будем считать классическое решение задачи* (0.1)–(0.3) *и* (1.1) *с условиями сопряжения* (1.13).

Согласно проведенным рассуждениям, имеет место следующая теорема.

***Теорема* 1.1.** *Пусть выполняются условия гладкости* (1.4). *Тогда задача* (0.1)–(0.3) *и* (1.1) *имеет единственное кусочно-гладкое решение из класса* $C^2\left(\bar{Q}\setminus\mathcal{M}\right)$. *Это решение определяется формулой* (0.5).

Заметим, что при условиях (1.4) кусочно-гладкое решение задачи (0.1)–(0.3) и (1.1) является слабым и, наоборот, поскольку они определяются одним и тем же выражением (0.5), и единственным.

Имеет место утверждение.

***Утверждение* 1.3.** *Пусть выполняются условия гладкости* (1.4). *Тогда задача* (0.1)–(0.3) *и* (1.1) *имеет единственное кусочно-гладкое решение из класса* $C^2\left(\bar{Q}\setminus\mathcal{M}\right)\cup C\left(\bar{Q}\right)$ *тогда и только тогда*, *когда выполняется условие* (1.3).

Доказательство следует из утверждения 1.2 и теоремы 1.1, а также эквивалентности слабого и кусочно-гладкого решения.

2 Первая смешанная задача с разрывом функции в граничной точке множества задания

Рассмотрим теперь задачу (0.1)–(0.3) в случае

$$\psi\left(x\right)=\begin{cases}\psi_1, & x=0,\\ \psi_2\left(x\right), & x\in\left(0,\infty\right),\end{cases}\qquad(2.1)$$

где ψ_1 не обязательно равно $\psi_2\left(0\right)$.

Считаем, что функции f, ϕ, ψ_2 и μ задачи (0.1)–(0.3) и (2.1) достаточно гладкие, а именно:

$$f\in C^1\left(\bar{Q}\right),\ \ \phi\in C^2\left(\left[0,\infty\right)\right),$$

$$\mu\in C^2\left(\left[0,\infty\right)\right),\ \ \psi_2\in C^1\left(\left[0,\infty\right)\right).\qquad(2.2)$$

Логично рассматривать задачу (0.1)–(0.3) и (2.1) как предельный случай задачи (0.1)–(0.3) и (1.1), т. е. понимать решение задачи (0.1)–(0.3) и (2.1) как предел решений задачи (0.1)–(0.3) и (1.1). Причем предел можно брать только по классическим решениям, что существенно упрощает построение.

***Определение* 2.1.** *Предельным кусочно-гладким решением задачи* (0.1)–(0.3) *и* (2.1) *назовем функцию u*, *которая определяется формулой*

$$u(t,x)=\lim_{x^*\to 0}u_{x^*}(t,x), \qquad (2.3)$$

где предел поточечный и u_{x^*} – классическое решение задачи

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u_{x^*}(t,x)=f(t,x),\quad (t,x)\in Q,$$

$$u_{x^*}(0,x)=\varphi(x),\ 0\le x<\infty,$$

$$\frac{\partial u_{x^*}}{\partial t}(0,x)=\tilde\psi(x)=\begin{cases}\tilde\psi_1(x), & x<x^*,\\ \tilde\psi_2(x), & x\ge x^*,\end{cases}$$

$$u_{x^*}(t,0)=\mu(t),\ 0\le t<\infty,$$

где $x^*>0$, $\tilde\psi_1(0)=\psi_1$, $\tilde\psi_2=\psi_2\big|_{[x^*,\infty)}$,

$$\|\tilde\psi_1\|_{C([0,x^*])}\le\|\psi_2\|_{C([0,x^*])}+|\psi_1-\psi_2(0)|$$

и $\tilde\psi\in C^1([0,+\infty))$.

Согласно [3, с. 153], если выполняются условия гладкости (2.2), то функция $u_{x^*}\in C^2(\overline{Q})$ корректно определена, если и только если выполняются условия согласования

$$D^2\mu(0)-\left(a^2D^2\phi(0)+f(0,0)\right)=0,$$

$$D\mu(0)-\tilde\psi(0)=D\mu(0)-\psi_1=0,$$

$$\mu(0)-\phi(0)=0. \qquad (2.4)$$

При этом функция u_{x^*} определяется формулой (0.5) со значением

$$\psi(x)=\tilde\psi(x)=\begin{cases}\tilde\psi_1(x), & x<x^*,\\ \tilde\psi_2(x), & x\ge x^*.\end{cases}$$

Для предельного перехода по формуле (2.3), нам понадобиться следующее вспомогательное утверждение.

***Утверждение* 2.1.** *Пусть* $l>0$. *Тогда*

$$\lim_{x^*\to 0}\int_0^l\tilde\psi(\xi)d\xi=\int_0^l\psi_2(\xi)d\xi.$$

Доказательство. Функция $\tilde\psi$ сходится поточечно к функции ψ. В силу условий, наложенных на функцию $\tilde\psi_1$ в определении 2.1, имеет место неравенство

$$\|\tilde\psi_1\|_{C([0,x^*])}\le\|\psi_2\|_{C([0,x^*])}+|\psi_1-\psi_2(0)|.$$

Таким образом, число $\|\psi_2\|_{C([0,x^*])}+|\psi_1-\psi_2(0)|$ равномерно ограничивает семейство функций $\tilde\psi$. Следовательно, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости можем записать

$$\lim_{x^*\to 0}\int_0^l\tilde\psi(\xi)d\xi=\int_0^l\left(\lim_{x^*\to 0}\tilde\psi(\xi)\right)d\xi=\int_0^l\psi(\xi)d\xi.$$

Поскольку $\psi(x)=\psi_2(x)$ почти всюду на отрезке $[0,l]$, то имеет место равенство

$$\lim_{x^*\to 0}\int_0^l\tilde\psi(\xi)d\xi=\int_0^l\psi(\xi)d\xi=\int_0^l\psi_2(\xi)d\xi.$$

□

Вычислив предел (2.3), получим выражение

$$u(t,x)=w(t,x)+\frac{\phi(x+at)+\phi(x-at)}{2}+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi_2(\xi)d\xi,\ (t,x)\in\overline{\tilde Q^{(1)}}, \qquad (2.5)$$

$$u(t,x)=w(t,x)-w\left(t-\frac{x}{a},0\right)+\mu\left(t-\frac{x}{a}\right)+$$
$$+\frac{\phi(x+at)-\phi(at-x)}{2}+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x}\psi_2(\xi)d\xi,\ (t,x)\in\overline{\tilde Q^{(2)}}, \qquad (2.6)$$

а функция w определена во введении. Заметим, что если не выполняется хотя бы одно из условий согласования (2.4), то функция u не определена, поскольку в таком случае функции u_{x^*} не существуют.

Легко видеть, что $u\in C^2(\overline{Q}\setminus\gamma)$, если выполняются условия гладкости (2.2). Более того, из (2.5) и (2.6) следует

$$u(t,x=at+0)=$$
$$=\frac{1}{2a}\int_0^{2at}\psi_2(\xi)\mathrm{d}\xi+w(t,at)+\frac{1}{2}\left(\phi(0)+\phi(2at)\right),$$

$$u(t,x=at-0)=\frac{1}{2a}\int_0^{2at}\psi_2(\xi)\mathrm{d}\xi+w(t,at)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\phi(2at)-\phi(0)\right)+\mu(0)-w(0,0),$$

что влечет $\left[(u)^+-(u)^-\right](t,at)=\phi(0)-\mu(0)=0$ для всех $t\in(0,\infty)$. Таким образом, $u\in C(\overline{Q})$. При этом, вообще говоря, $\partial_t u\notin C(\overline{Q})$ и $\partial_x u\notin C(\overline{Q})$, поскольку

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x=at+0)=$$
$$=\frac{\psi_2(0)+\psi_2(2at)}{2}+\frac{a\phi'(2at)-a\phi'(0)}{2}+\frac{\partial w}{\partial t}(t,at),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x = at + 0) =$$

$$= \frac{\psi_2(2at) - \psi_2(0)}{2a} + \frac{\phi'(0) + \phi'(2at)}{2} + \frac{\partial w}{\partial x}(t, at),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x = at) = \frac{\psi_2(2at) - \psi_2(0)}{2} +$$

$$+ \mu'(0) + \frac{a\phi'(2at) - a\phi'(0)}{2} + \frac{\partial w}{\partial t}(t, at),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x = at) = \frac{\psi_2(0) + \psi_2(2at)}{2a} -$$

$$- \frac{\mu'(0)}{a} + \frac{\phi'(0) + \phi'(2at)}{2} + \frac{\partial w}{\partial x}(t, at),$$

что влечет

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^+ - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^-\right](t, at) = \psi_2(0+) - D\mu(0),$$

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^+ - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^-\right](t, at) = \frac{D\mu(0) - \psi_2(0+)}{a}.$$

Здесь мы использовали запись

$$\frac{\partial^{p+k} w}{\partial t^p \partial x^k}\left(f_1(t,x), f_2(t,x)\right),$$

которая понимается как

$$\frac{\partial^{p+k} w}{\partial \tau^p \partial \xi^k}\left(\tau = f_1(t,x), \xi = f_2(t,x)\right),$$

где k и p это целые числа. Следовательно, имеет место теорема.

***Теорема* 2.1.** *Пусть выполняются условия гладкости* (2.2). *Тогда задача* (0.1)–(0.3) *и* (2.1) *имеет единственное предельное кусочно-гладкое решение из класса* $C^2(\overline{Q} \setminus \gamma) \cap C(\overline{Q})$ *тогда и только тогда*, *когда выполняются условия согласования* (2.4). *Это решение определяется формулами* (2.5) *и* (2.6).

Из формул (2.5) и (2.6) следует, что кусочно-гладкое решение u задачи (0.1)–(0.3) и (2.1) удовлетворяет в обычном смысле волновому уравнению (0.1) на множестве $\overline{Q} \setminus \gamma$, первому условию Коши из (0.2) на множестве $[0, \infty)$, второму условию Коши из (0.2) на множестве $(0, \infty)$, граничному условию (0.3) на множестве $[0, \infty)$ и условию сопряжения

$$\left[(u)^+ - (u)^-\right](t, at) = 0.$$

Может показаться, что решение задачи (0.1)–(0.3) и (2.1) в смысле определения 2.1 не зависит от константы ψ_1. Однако, это не так. Если мы рассмотрим две задачи (0.1)–(0.3) и (2.1), в которых все данные, кроме числа ψ_1, совпадают, то только одна из них может иметь решение: та, в которой $\psi_1 = D\mu(0)$ – если это условие не выполнено в обеих этих задачах, то обе эти задачи не имеют решения.

Решение задачи (0.1)–(0.3) и (2.1) можно построить и в случае, когда $\mu(0) \neq \phi(0)$.

***Определение* 2.2.** *Обобщенным предельным кусочно-гладким решением задачи* (0.1)–(0.3) *и* (2.1) *назовем функцию* u, *которая определяется формулой*

$$u(t,x) = \theta(at - x)\left(\phi(0) - \mu(0)\right) + \lim_{x^* \to 0} u_{x^*}(t,x),$$

где *предел поточечный,* θ *– функция Хэвисайда и* u_{x^*} *– классическое решение задачи*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u_{x^*}(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in Q,$$

$$u_{x^*}(0,x) = \varphi(x), \; 0 \le x < \infty,$$

$$\frac{\partial u_{x^*}}{\partial t}(0,x) = \tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \tilde{\psi}_1(x), & x < x^*, \\ \tilde{\psi}_2(x), & x \ge x^*, \end{cases}$$

$$u_{x^*}(t,0) = \tilde{\mu}(t) = \mu(t) + \phi(0) - \mu(0), \; 0 \le t < \infty,$$

где $x^* > 0$, $\tilde{\psi}_1(0) = \psi_1$, $\tilde{\psi}_2 = \psi_2\big|_{[x^*, \infty)}$,

$$\|\tilde{\psi}_1\|_{C([0,x^*])} \le \|\psi_2\|_{C([0,x^*])} + |\psi_1 - \psi_2(0)|$$

и $\tilde{\psi} \in C^1([0, +\infty))$.

Повторив рассуждения, которые привели нас к теореме 2.1, получим, что при условиях (2.2) обобщенное предельное кусочно-гладкое решение задачи u определяется по формулам (2.5) и (2.6) и существует тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$D^2\mu(0) - \left(a^2 D^2 \phi(0) + f(0,0)\right) = 0,$$

$$D\mu(0) - \psi_1 = 0. \qquad (2.7)$$

Следовательно, предельное кусочно-гладким решением задачи (0.1)–(0.3) и (2.1) – это частный случай обобщенного предельного кусочно-гладкого решения.

***Теорема* 2.2.** *Пусть выполняются условия гладкости* (2.2). *Тогда задача* (0.1)–(0.3) *и* (2.1) *имеет единственное обобщенное предельное кусочно-гладкое решение из класса* $C^2(\overline{Q} \setminus \gamma)$ *тогда и только тогда*, *когда выполняются условия согласования* (2.7). *Это решение определяется формулами* (2.5) *и* (2.6).

Из формул (2.5) и (2.6) следует, что кусочно-гладкое решение u задачи (0.1)–(0.3) и (2.1) удовлетворяет в обычном смысле волновому уравнению (0.1) на множестве $\overline{Q}\setminus\gamma$, первому условию Коши из (0.2) на множестве $(0,\infty)$, второму условию Коши из (0.2) на множестве $(0,\infty)$, граничному условию (0.3) на множестве $(0,\infty)$ и условию сопряжения

$$\left[(u)^{+}-(u)^{-}\right](t,at)=\phi(0)-\mu(0).$$

Можно также построить решение задачи (0.1)–(0.3) и (2.1) без каких-либо условий согласования. Для этого заметим, что формулы (2.5) и (2.6) определяют классическое решение задачи (0.1)–(0.3) и (2.1), если таковое существует. Однако, формулы (2.5) и (2.6) имеют смысл при более слабых условиях гладкости и согласования, чем те, которые требуются для существования классического решения.

***Определение* 2.3.** *Слабым решением задачи* (0.1)–(0.3) *и* (2.1) *назовем функцию* u, *определяемую формулами* (2.5) *и* (2.6).

Выражения (2.5) и (2.6) корректно определены при

$$f\in C^{1}\left(\overline{Q}\right),\ \ \phi\in C\left([0,\infty)\right),$$
$$\mu\in C\left([0,\infty)\right),\ \ \psi_2\in L^{1}_{\mathrm{loc}}\left([0,\infty)\right). \qquad (2.8)$$

При этом $u\in C\left(\overline{Q}\setminus\gamma\right)$. Таким образом, имеет место утверждение.

***Утверждение* 2.2.** *Пусть выполняются условия гладкости* (2.8). *Тогда задача* (0.1)–(0.3) *и* (2.1) *имеет единственное слабое решение из класса* $C\left(\overline{Q}\setminus\gamma\right)$.

При этом слабое решение задачи (0.1)–(0.3) и (2.1) не зависит от константы ψ_1. Более того, такое решение не зависит от поведения функции ψ на множестве меры нуль.

При условиях (2.2) и (2.4) слабое и предельное кусочно-гладкое решения задачи (0.1)–(0.3) и (2.1) эквивалентны, поскольку они представляются одной формулой и единственны. По тем же причинам, при условиях (2.2) и (2.7) слабое и обобщенное предельное кусочно-гладкое решения задачи (0.1)–(0.3) и (2.1) эквивалентны.

Заключение

В настоящей работе изучена первая смешанная задача в четверти плоскости для волнового уравнения со вторым негладкими условием Коши. Введены различные определения решения: слабое решение, кусочно-гладкое решение, предельное кусочно-гладкое решение и обобщенное предельное кусочно-гладкое решение. Выведены необходимые и достаточные условия согласования для существования и единственности трех последних решений. При определенных условиях показана эквивалентность слабого решения и кусочно-гладкого решения. Установлено, что предельное кусочно-гладкое решение является частным случаем обобщенного предельного кусочно-гладкого решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Корзюк*, *В. И.* Решение смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока с интегральными условиями в случае неоднородных условий согласования / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Доклады НАН Беларуси. – 2019. – Т. 63, № 2. – С. 142–149.

2. *Корзюк*, *В. И.* Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши / В. И. Корзюк, И. С. Козловская, С. Н. Наумовец // Известия НАН Беларуси. Серия физико-математических наук. – 2015. – № 1. – С. 7–21.

3. *Корзюк*, *В. И.* Уравнения математической физики / В. И. Корзюк. – 2–е изд., испр. и доп. – М.: URSS, 2021. – 480 с.

4. *Корзюк*, *В. И.* Классическое решение смешанных задач для одномерного волнового уравнения с негладкими условиями Коши / В. И. Корзюк, С. И. Пузырный // Известия НАН Беларуси. Серия физико-математических наук. – 2016. – Т. 52, № 2. – С. 22–31.

5. *Кошляков*, *Н. С.* Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М. : «Высшая школа», 1970. – 712 с.

6. *Корзюк*, *В. И.* Решения задач для волнового уравнения с условиями на характеристиках / В. И. Корзюк, О. А. Ковнацкая // Известия НАН Беларуси. Серия физико-математических наук. – 2021. – Т. 57, № 2. – С. 148–155.

7. *Корзюк*, *В. И.* Задачи для одномерного волнового уравнения с условиями на характеристиках и нехарактеристических линиях / В. И. Корзюк, О. А. Ковнацкая, В. П. Сериков // Труды Ин-та математики. – 2021. – Т. 29, № 1–2. – С. 106–112.

8. *Корзюк*, *В. И.* Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока с неоднородными условиями согласования / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Доклады НАН Беларуси. – 2019. – Т. 63, № 1. – С. 7–13.

9. *Корзюк*, *В. И.* Классическое решение произвольной гладкости первой смешанной задачи для полулинейного уравнения типа Клейна – Гордона – Фока / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2025. – Т. 15, № 3. – С. 66–77.

Поступила в редакцию 29.07.2026.

Информация об авторах

Рудько Ян Вячеславович – магистр наук (математика и компьютерные науки)