МАТЕМАТИКА

УДК 517.986.2 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_51
EDN: QIDNBE

АЛГЕБРЫ ОПЕРАТОРОВ УМНОЖЕНИЯ НА РАЗРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

И. Л. Люксембург

Институт математики НАН Беларуси, *Минск*
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, *Минск*

ALGEBRAS OF OPERATORS OF MULTIPLICATION BY DISCONTINUOUS FUNCTIONS

I. L. Luxemburg

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, *Minsk*;
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, *Minsk*

Аннотация. В работе рассматривается банахова алгебра $SD[0;1]$, состоящая из функций на отрезке, допускающих разрывы разве лишь первого рода, и алгебры операторов умножения на функции из $SD[0;1]$, действующих в пространствах $L_p([0;1],\mu)$, где μ – заданная непрерывная мера. Показано, что все эти алгебры изоморфны подалгебре $T[0;1] \subset SD[0;1]$, состоящей из функций, непрерывных в 0 и непрерывных слева в остальных точках и что пространства максимальных идеалов рассматриваемых алгебр операторов гомеоморфны неметризуемому компакту «две стрелки» Александрова – Урысона.

Ключевые слова: *разрывная функция*, *разрыв* 1*-го рода*, *алгебра операторов*, *функциональная алгебра*, *непрерывная мера*, *фактор-алгебра*.

Для цитирования: *Люксембург*, *И. Л.* Алгебры операторов умножения на разрывные функции / И. Л. Люксембург // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 3 (68). – С. 51–55. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_51. – EDN: QIDNBE

Abstract. This paper considers the Banach algebra $SD[0;1]$ consisting of functions on the interval that admit only simple discontinuities, and the algebras of multiplication operators by functions from $SD[0;1]$ acting on the spaces $L_p([0;1],\mu)$, where μ is a given continuous measure. It is shown that all these algebras are isomorphic to the subalgebra $T[0;1] \subset SD[0;1]$, consisting of functions continuous at 0 and left-continuous at all other points, and that the maximal ideal spaces of the operator algebras under consideration are homeomorphic to the Aleksandrov – Urysohn non-metrizable “two arrows” space.

Keywords: *discontinuous function*, *simple discontinuity*, *operator algebra*, *function algebra*, *continuous measure*, *quotient algebra*.

For citation: *Luxemburg*, *I. L.* Algebras of operators of multiplication by discontinuous functions / I. L. Luxemburg // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 3 (68). – P. 51–55. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_51 (in Russian). – EDN: QIDNBE

1 Постановка задачи

Согласно теории И. М. Гельфанда [1], каждая алгебра $\mathcal{A}(X)$, состоящая из ограниченных функций, определённых на множестве X, вкладывается в алгебру непрерывных функций на компактном пространстве $\mathfrak{M}(\mathcal{A}(X))$, которое является ее пространством максимальных идеалов. Топологическая структура пространства $\mathfrak{M}(\mathcal{A}(X))$ тесно связана со структурой исходной алгебры $\mathcal{A}(X)$, и свойствами ее элементов. Некоторые из таких связей установлены, например, в работах [2]–[7].

Если на исходном множестве X задана топология, то алгебра $\mathcal{A}(X)$ может включать разрывные функции. В такой ситуации пространство максимальных идеалов содержит информацию о виде допустимых разрывов.

Одним из направлений, в которых возникают такие алгебры, является исследование уравнений с разрывными коэффициентами. При построении математических моделей различных физических, химических и биологических процессов обычно используются дифференциальные и интегральные уравнения, коэффициенты которых описывают состояние внешней среды, в которой протекает исследуемый процесс. Эти коэффициенты отражают такие параметры, как температура, давление, плотность, химический состав или другие факторы, определяющие состояние среды. В классических подходах к моделированию обычно предполагается, что коэффициенты уравнений являются непрерывными функциями, что значительно упрощает их анализ.

Однако при моделировании процессов, протекающих в средах с резкими изменениями

© *Люксембург И. Л.*, 2026

параметров, например, при моделировании турбулентности, фазовых переходов или других явлений с резкими градиентами, возникают уравнения, коэффициенты которых могут иметь разрывы. Такие уравнения устроены существенно сложнее, их исследование требует новых подходов, и результаты получены только для некоторых конкретных классов. Например, сингулярные интегральные уравнения, коэффициенты которых имеют разрывы первого рода, рассматривались в работах [8], [9]. Некоторые уравнения типа свертки, коэффициенты которых имеют особенности, рассматривались в [10]. Теория псевдодифференциальных операторов с символами, имеющими разрывы специального вида, разработана в [11], [12].

С операторной точки зрения в уравнения с разрывными коэффициентами входят операторы умножения на разрывные функции, поэтому на свойства этих уравнений оказывает влияние структура алгебры, порожденной такими операторами, и, соответственно, топология пространства максимальных идеалов соответствующей алгебры.

Одной из наиболее часто используемых алгебр разрывных функций является алгебра $SD[0;1]$, состоящая из всех комплекснозначных функций на отрезке $[0;1]$, допускающих разрывы только первого рода (Simple Discontinuity). Это означает, что каждая функция f при $x \in (0;1]$ имеет предел слева:

$$f^{-}(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$$

и при $x \in [0;1)$ имеет предел справа:

$$f^{+}(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Из стандартных свойств пределов следует, что всякая функция из этой алгебры имеет не более чем счётное множество точек разрыва, и алгебра $SD[0;1]$ является полной в равномерной норме $\|f\| = \sup\limits_{x \in [0;1]} |f(x)|$ и является C^*-алгеброй. Откуда, согласно теореме Гельфанда – Наймарка [1], $SD[0;1]$ изометрически изоморфна алгебре непрерывных функций на пространстве максимальных идеалов.

Пусть $\mathcal{A}(\mu)$ есть алгебра операторов умножения на функции из $SD[0;1]$, действующих в $L_p([0;1],\mu)$, где μ – заданная непрерывная (т. е. $\mu(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in [0;1]$) борелевская мера. Для определенности будем считать, что мера нормирована, т. е. $\mu([0;1]) = 1$. Далее будет показано, что при заданных условиях на меру алгебры $\mathcal{A}(\mu)$ изоморфны.

Целью настоящей работы является исследование структуры алгебр операторов $\mathcal{A}(\mu)$, в зависимости от свойств заданной непрерывной меры μ. Обнаружено, что алгебры, соответствующие разным мерам μ, изоморфны, а их пространства максимальных идеалов гомеоморфны известному топологическому пространству «две стрелки». Это пространство было сконструировано П. С. Александровым и П. С. Урысоном в [13] и используется как универсальный контрпример в общей топологии. Установлен ряд свойств рассматриваемых алгебр. В работе приведены лишь формулировки теорем. В дальнейшем планируется публикация расширенной версии статьи с доказательствами.

2 Основные результаты

Пусть $S = supp\mu$ – носитель меры μ, без ограничения общности будем считать, что $0,1 \in S$, (но может быть, что $S \neq [0;1]$). Обозначим $SD(S)$ алгебру функций, являющихся ограничениями на S функций из $SD[0;1]$. S есть компакт, содержащийся в $[0;1]$. В силу непрерывности μ, S является совершенным множеством (не содержит изолированных точек), его дополнение есть счётное семейство непересекающихся интервалов. Концы этих интервалов, а также точки 0 и 1 будем называть крайними точками множества S, а остальные точки – внутренними (здесь определение внутренних точек отличается от стандартного топологического). Определим подалгебру $T(S) \subset SD(S)$, состоящую из функций, непрерывных в крайних точках множества S и непрерывных слева во внутренних. В частности, если $S = [0;1]$, то $T[0;1]$ состоит из непрерывных в 0 и 1 и непрерывных слева на $(0;1)$ функций.

Пусть I_S – идеал алгебры $SD[0;1]$, состоящий из принадлежащих этой алгебре функций, μ-почти всюду равных нулю. Рассмотрим фактор-алгебру $SD[0;1]/I_S$. Согласно [1] (см. §2), норма класса $X = f + I_S$ эквивалентных функций определяется как инфимум их норм: $\|X\| = \inf\limits_{f \in X} \|f\|$.

***Теорема* 2.1.** *Если* μ *непрерывная мера с носителем* $S \subset [0;1]$, *то алгебра* $\mathcal{A}(\mu)$ *изометрически изоморфна*:

1) *фактор-алгебре* $SD[0;1]/I_S$;

2) *подалгебре* $T(S) \subset SD(S)$.

Первый изоморфизм $\mathcal{A}(\mu) \cong SD[0;1]/I_S$ является следствием теоремы о гомоморфизме алгебр, так как ядро естественного отображения состоит из функций, равных нулю μ-почти всюду (идеал I_S).

Для доказательства второго изоморфизма показывается, что у всех функций из одного класса эквивалентности $X \in SD[0;1]/I_S$ совпадают односторонние пределы во внутренних

точках S. Это позволяет выбрать в каждом классе эквивалентности единственного канонического представителя из алгебры $T(S)$. Изометричность следует из однозначности нормы на C^* -алгебрах.

Из сформулированной теоремы следует, что структура исследуемой алгебры $\mathcal{A}(\mu)$ не зависит от вида конкретной меры μ, а зависит лишь от её носителя S.

Известно, что всякая борелевская мера μ на отрезке задается монотонно возрастающей функцией. Обозначим эту функцию m, также для определённости положим $m(0) = 0$. Поскольку рассматриваемая мера непрерывна, то и функция, ее порождающая, также непрерывна, следовательно $\mathrm{Im}(m) = [0;1]$. Функция m постоянна на любом интервале, имеющем меру нуль, поэтому ее ограничение $\pi = m|_S$ на носитель обладает свойством: $\mathrm{Im}(\pi) = \mathrm{Im}(m) = [0;1]$. Отображение π также может быть определено как фактор-отображение, склеивающее концы интервалов из дополнения $(a_i \sim b_i)$. Полученное фактор-пространство есть связный, сепарабельный, упорядоченный компакт; по утверждению 6.3.2 (b) из [14], $S/_\sim$ гомеоморфно отрезку. Для отображения π построим правое обратное отображение $g : [0;1] \to S$, по правилам: $g(x) = \pi^{-1}(x)$, если x является образом внутренней точки множества S и $g(x) = a_i$, если $\pi(a_i) = x$, где a_i – левый конец интервала из дополнения.

Напомним, что полной вариацией функции f на упорядоченном множестве S называется величина

$$\mathrm{Var}_S(f) = \sup \sum_i |f(x_{i+1}) - f(x_i)|,$$

где супремум берется по всем конечным упорядоченным наборам точек $x_i \in S$. Обозначим через $BV(S)$ пространство функций ограниченной вариации на S. Это пространство является банаховой алгеброй относительно нормы $\|f\|_{BV} = \|f\|_\infty + \mathrm{Var}_S(f)$. В следующей теореме изометрия в пункте 4 понимается именно в смысле этой нормы.

***Теорема* 2.2.** *Введенное отображение* π *порождает*:

1) *отображение меры* μ *на меру Лебега на* $[0;1]$, *по формуле* $\lambda(E) = \mu(\pi^{-1}(E))$ *для всякого борелевского* E;

2) *изометрический изоморфизм*

$$\Pi : L_p(S,\mu) \to L_p[0;1],$$

действующий по правилу: $\Pi(f) = f \circ g$;

3) *изометрический изоморфизм*

$$\Pi : T(S) \to T[0;1],$$

действующий по правилу: $\Pi(f) = f \circ g$;

4) *изометрический изоморфизм*

$$\Pi : BV(S) \cap T(S) \to BV[0;1] \cap T[0;1],$$

действующий по правилу: $\Pi(f) = f \circ g$.

Доказательство базируется на свойствах функции распределения непрерывной меры $m(x) = \mu([0;x])$. Изометричность в пространствах L_p обеспечивается теоремой о замене переменных в интеграле, поскольку π переводит меру μ в меру Лебега. Изоморфизм подалгебр $T(S)$ и $T[0;1]$ (а также сохранение полной вариации для пространств BV) гарантируется тем, что отображение g монотонно. Благодаря этому свойству композиция с g корректно переводит функции с заданными односторонними пределами на S в функции с соответствующими односторонними пределами на $[0;1]$.

***Замечание* 2.1.** *Важной особенностью построенного изоморфизма* $\Pi : T(S) \to T[0;1]$ *является то, что он порожден отображением* π, *сохраняющим порядок точек, ввиду чего он обладает рядом дополнительных свойств. Как было отмечено,* Π *сохраняет полную вариацию функции. Кроме того, сохранение порядка гарантирует инвариантность интеграла Римана – Стилтьеса. Для любой функции* $u \in T(S)$ *и функции ограниченной вариации* $v \in T(S)$ *выполняется равенство:*

$$\int_S u(t)dv(t) = \int_0^1 (\Pi(u))(\tau)d(\Pi(v))(\tau).$$

Данные факты имеют принципиальное значение для приложений к дифференциальным уравнениям с обобщенными коэффициентами и импульсным системам. Решения таких уравнений записываются через интегралы Стилтьеса и изоморфизм Π *позволяет сводить исследование дифференциальных уравнений на сложном носителе* S *к эквивалентным задачам на отрезке* $[0;1]$ *с сохранением оценок устойчивости и норм возмущений.*

***Замечание* 2.2.** *Если вместо операторов умножения на функции из* $SD[0;1]$, *рассмотреть операторы умножения на функции из* $C[0;1]$, *то соответствующая алгебра операторов будет изоморфна* $C(S)$ *– алгебре непрерывных функций на носителе меры* μ. *Отметим, что алгебры* $C(S)$ *изоморфны лишь в случае гомеоморфности соответствующих носителей* S.

Ранее автором было построено пространство максимальных идеалов алгебры $T(S)$ в случае, когда S есть отрезок $[0;1]$ (соответствующая статья принята к печати во «Владикавказском математическом журнале»). Оказалось, что это пространство гомеоморфно известному топологическому пространству «две стрелки» (рисунок 2.1),

сконструированному ранее П. С. Александровым и П. С. Урысоном в их классической работе [13] в качестве примера компактного пространства, обладающего многими свойствами метрических пространств, но не метризуемого. В последующем пространство «две стрелки» изучалось с разных точек зрения и стало универсальным примером компакта с экзотическими свойствами. В качестве следствия свойств пространства «две стрелки» получено, что всякий чистый идеал в алгебре $T[0;1]$ является проективным и порождённым не более чем счётным множеством идемпотентов. Замкнутость чистого идеала эквивалентна тому, что он является главным, порождённым одним идемпотентом. В силу теоремы 2.2 все алгебры $T(S)$ имеют аналогичные свойства.

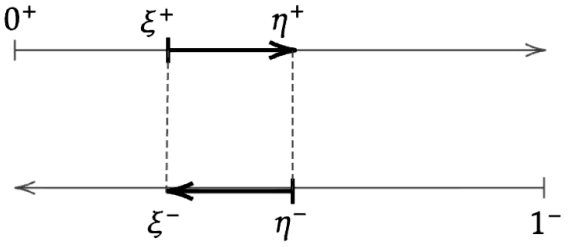


Рисунок 2.1 – Пространство «две стрелки» с выделенным элементом из стандартной базы, являющимся окрестностью точек ξ^+ и η^-

Заключение

В настоящей работе исследована структура банаховых алгебр операторов умножения на функции с разрывами первого рода, действующих в пространствах Лебега с произвольной непрерывной мерой.

Установлено, что все рассматриваемые алгебры операторов $\mathcal{A}(\mu)$ изометрически изоморфны, то есть не зависят от конкретной непрерывной меры μ и даже от топологической структуры носителя $supp\mu$ этой меры.

Построены изометрические изоморфизмы, позволяющие сводить изучение пространств функций на сложном носителе S и действующих в них операторов к эквивалентным объектам на отрезке $[0;1]$ с сохранением интеграла Римана – Стилтьеса и полной вариации.

Показано, что пространства максимальных идеалов рассматриваемых алгебр гомеоморфно неметризуемому компакту «две стрелки» Александрова – Урысона.

Отметим, что полученные результаты допускают естественное обобщение. Поскольку основную роль в построении изоморфизмов играет тождество $\|M_a\| = \|a\|_{L^\infty(\mu)}$, вытекающее из свойства монотонности нормы, выводы работы остаются справедливыми для широкого класса функциональных пространств.

В частности, результаты без труда переносятся на шкалу пространств Лоренца $L^{p,q}$ (см. [15]), играющих важную роль в интерполяционной теории операторов. Более того, учитывая свойства однородности и монотонности квазинорм, аналогичные изоморфизмы алгебр имеют место и для пространств типа Харди – Лоренца $\mathcal{H}^{p,q}$ (подробно свойства таких пространств, определяемых через некасательные максимальные операторы, изложены в [16], [17]). Наконец, изометричность построенных отображений и структура пространства максимальных идеалов полностью сохраняются при переходе к пространствам Орлича L^Φ [18], которые, в частности, используются при исследовании интегральных уравнений со степенными нелинейностями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфанд*, *И. М.* Коммутативные нормированные кольца / И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов. – М. : Физматгиз, 1960. – 315 с.

2. *Вечтомов*, *Е. М.* Кольца непрерывных функций. Алгебраические аспекты / Е. М. Вечтомов // Итоги науки и техники. Серия Алгебра. Топология. Геометрия. – 1991. – Т. 29. – С. 119–191.

3. *Вечтомов*, *Е. М.* Подалгебры в полукольцах непрерывных частичных действительнозначных функций / Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина // Фундаментальная и прикладная математика. – 2022. – Т. 24, № 1. – С. 125–140.

4. *Gillman*, *L.* Rings of Continuous Functions / L. Gillman, M. Jerison. – New York : Springer, 1976. – 300 p.

5. *Келли*, *Дж. Л.* Общая топология / Дж. Л. Келли. – М. : Наука, 1981. – 432 с.

6. *Myers*, *S. B.* Normed Linear Spaces of Continuous Functions / S. B. Myers // Annals of Mathematics. – 1950. – Vol. 51, № 3. – P. 528–540.

7. *Агеев*, *С. М.* Функциональные методы в теории абсолюта / С. М. Агеев // УМН. – 1983. – Т. 38, № 5. – С. 177–178.

8. *Крупник*, *Н. Я.* Банаховы алгебры с символом и сингулярные интегральные операторы / Н. Я. Крупник. – Кишинев : Штиинца, 1984. – 138 с.

9. *Karlovich*, *Y. I.* Algebras of Convolution-Type Operators with Piecewise Slowly Oscillating Data on Weighted Lebesgue Spaces / Y. I. Karlovich // Mediterranean Journal of Mathematics. – 2017. – Vol. 14, art. № 182. – DOI: 10.1007/s00009-017-0979-6.

10. *Авсянкин*, *О. Г.* Парные интегральные операторы с однородными ядрами, возмущенные операторами мультипликативного сдвига / О. Г. Авсянкин, А. М. Ковальчук // Владикавказский математический журнал. – 2018. – Т. 20, № 1. – С. 10–20. – DOI: 10.23671/VNC.2018.1.11392.

11. *Пламеневский*, *Б. А*. Алгебры псевдодифференциальных операторов / Б. А. Пламеневский. – М. : Наука, 1986. – 296 с.

12. *Пламеневский*, *Б. А*. Разрешимость алгебры псевдодифференциальных операторов с кусочно гладкими коэффициентами на гладком многообразии / Б. А. Пламеневский // Алгебра и анализ. – 2009. – Т. 21, № 2. – С. 214–263.

13. *Александров*, *П. С*. Мемуар о компактных топологических пространствах / П. С. Александров, П. С. Урысон. – М. : Наука, 1971. – 144 с.

14. *Энгелькинг*, *Р*. Общая топология / Р. Энгелькинг. – М. : Мир, 1986. – 752 с.

15. *Grafakos*, *L*. Classical Fourier Analysis / L. Grafakos. – 3rd ed. – New York : Springer, 2014. – 655 p. (Graduate Texts in Mathematics; № 249).

16. *Кротов*, *В. Г*. Интерполяционная теорема Марцинкевича для пространств типа Харди / В. Г. Кротов // Математические заметки. – 2023. – Т. 113, № 2. – С. 311–315.

17. *Кротов*, *В. Г*. Интерполяция операторов в пространствах типа Харди / В. Г. Кротов // Труды Математического института имени В. А. Стеклова РАН. – 2023. – Т. 323. – С. 181–195.

18. *Красносельский*, *М. А*. Выпуклые функции и пространства Орлича / М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий. – М. : Физматгиз, 1958. – 271 с.

Работа выполнена при финансовой поддержке НАН Беларуси в рамках государственной программы «*Конвергенция* – 2030» (*задание* 1.08.1) *и поддержке БРФФИ* (№ Ф26М-025).

Поступила в редакцию 09.07.2026.

Информация об авторах

Люксембург Иосиф Леонович – аспирант