ФИЗИКА

УДК 539.12.01 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_23
EDN: TSCRYC

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПАРЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ *s*-СОСТОЯНИЙ ДВУХЧАСТИЧНОЙ СИСТЕМЫ

В. Н. Капшай, А. А. Гришечкина

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ANALYTICAL AND NUMERICAL SOLUTION OF INTEGRAL QUASIPOTENTIAL PARTIAL EQUATIONS FOR *s*-STATES OF A TWO-PARTICLE SYSTEM

V. N. Kapshai, A. A. Grishechkina

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Парциальные квазипотенциальные интегральные уравнения Логунова – Тавхелидзе и Кадышевского решены аналитически и численно применительно к связанным состояниям двухчастичной системы с нулевой энергией: найдены собственные значения константы связи и собственные функции. В отношении состояний двухчастичной системы с ненулевой энергией аналогичные результаты получены посредством численных методов.

Ключевые слова: *квазипотенциальный подход*, *импульсное представление*, *функция Грина*, *связанные состояния*, *s-состояние.*

Для цитирования: *Капшай*, *В. Н.* Аналитическое и численное решение интегральных квазипотенциальных парциальных уравнений для *s*-состояний двухчастичной системы / В. Н. Капшай, А. А. Гришечкина // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 3 (68). – С. 23–29. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_23. – EDN: TSCRYC

Abstract. The partial quasipotential Logunov – Tavkhelidze and Kadyshevsky integral equations are solved analytically and numerically for the bound states of a two-particle system with zero energy: the eigenvalues of the coupling constant and eigenfunctions are found. Similar results for the states of a two-particle system with nonzero energy are obtained using numerical methods.

Keywords: *quasipotential approach*, *momentum representation*, *Green's function*, *bound states*, *s-state.*

For citation: *Kapshai*, *V. N.* Analytical and numerical solution of integral quasipotential partial equations for *s*-states of a two-particle system / V. N. Kapshai, A. A. Grishechkina // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 3 (68). – P. 23–29. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_23 (in Russian). – EDN: TSCRYC

Введение

Основным уравнением, посредством которого реализуется описание релятивистских составных систем в квантовой теории поля, является уравнение Бете – Солпитера, использование которого сопряжено с трудностями – как при его решении, так и при интерпретации результатов. Посредством редукции уравнения Бете – Солпитера удалось получить несколько вариантов квазипотенциальных уравнений, более простых по сравнению с исходным уравнением. При записи квазипотенциальных уравнений используется свободная функция Грина (ФГ). В силу неоднозначности её определения можно сформулировать различные варианты редуцированных уравнений. После анализа таких уравнений и их решений выявлено, что одними из наиболее часто используемых являются уравнения Логунова – Тавхелидзе и Кадышевского.

Первоначально квазипотенциальные уравнения были сформулированы в импульсном представлении. Применяя к ним релятивистский аналог преобразования Фурье, можно перейти в так называемое релятивистское конфигурационное представление. Если при этом квазипотенциал зависит только от разности векторов в импульсном пространстве Лобачевского, реализованного на верхнем поле массового гиперболоида, то в результате получается уравнение с локальным в конфигурационном представлении потенциалом.

Однако, такой переход возможен не всегда. Существуют такие лобачевско-локальные квазипотенциалы, которые невозможно записать в релятивистском конфигурационном представлении. Вместе с тем уравнения с такими квазипотенциалами возможно рассматривать и решать в исходном импульсном представлении. Решение уравнений в импульсном представлении с одним из таких потенциалов и реализовано в настоящей работе.

Производя разложение всех величин, входящих в квазипотенциальное уравнение в импульсном представлении, в ряды по сферическим

© *Капшай В. Н.*, *Гришечкина А. А.*, 2026

гармоникам, можно перейти от трёхмерных уравнений к парциальным, описывающим состояния систем частиц с определенным значением орбитального квантового числа. В данной статье рассматривается решение квазипотенциальных парциальных интегральных уравнений применительно к *s*-состояниям двухчастичных систем.

1 Интегральные парциальные квазипотенциальные уравнения в сферически-симметричном случае

В импульсном представлении описание связанных состояний системы двух частиц одинаковой массы $m_1 = m_2 = m$ осуществляется на основе уравнений для волновых функций, формулируемых в системе центра масс в виде [1]

$$\psi(E,\mathbf{p}) = G_0(E,E_p)\int V(E;\mathbf{p},\mathbf{k})\psi(E,\mathbf{k})\frac{m}{E_k}d\mathbf{k}, \quad (1.1)$$

где $2E$ – энергия двухчастичной системы (для связанных состояний $2E < 2m$),

$\mathbf{p}$ – относительный импульс частиц,

$E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ и $E_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$,

$G_0(E,E_p)$ – свободная функция Грина,

$V(E;\mathbf{p},\mathbf{k})$ – квазипотенциал.

Свободная ФГ в квазипотенциальном подходе определена неоднозначно. Рассмотрим ФГ, которые соответствуют уравнениям Логунова – Тавхелидзе (*LT*) и Кадышевского (*K*):

$$G_0^{(LT)}(E,E_p) = \frac{1}{E^2 - E_p^{\,2}}, \quad (1.2)$$

$$G_0^{(K)}(E,E_p) = \frac{1}{2E_p(E-E_p)}. \quad (1.3)$$

Ранее уравнение (1.1) рассматривалось с различными квазипотенциалами [2]. Для некоторых квазипотенциалов удалось получить точные решения в частных случаях (например, при $2E = 0$) [2], [3]. В настоящей работе мы хотим обратить внимание на существование ещё одного квазипотенциала, при использовании которого можно получить точные решения при нулевой энергии двухчастичной системы, а именно квазипотенциала

$$V(E;\mathbf{p},\mathbf{k}) \equiv V(\mathbf{p},\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{\lambda}{\sqrt{m(\Delta^0 - m)}},$$
$$\Delta^0 = (E_pE_k - \mathbf{pk})/m, \quad (1.4)$$

где λ – константа связи.

Отличительной особенностью этого потенциала является то, что его нельзя записать в релятивистском конфигурационном представлении.

В состояниях с нулевым значением момента импульса (*s*-состояниях), когда волновая функция $\psi(E,\mathbf{p})$ не зависит от углов, определяющих направление вектора $\mathbf{p}$, уравнение (1.1) можно свести к виду:

$$\psi_0(E,\chi_p) = mG_0(E,m\,\mathrm{ch}\,\chi_p)\times$$
$$\times\int_0^\infty V_0(E;\chi_p,\chi_k)\psi_0(E,\chi_k)d\chi_k, \quad (1.5)$$

где χ_p и χ_k – быстроты, связанные с импульсами соотношениями

$$|\mathbf{p}| = p = m\,\mathrm{sh}\,\chi_p, \ |\mathbf{k}| = k = m\,\mathrm{sh}\,\chi_k,$$

$V_0(E;\chi_p,\chi_k)$ – парциальный потенциал, выражаемый через трехмерный потенциал в соответствии с формулой

$$V_0(E;\chi_p,\chi_k) = 2\pi pk\int_{-1}^{1} V(E;\mathbf{p},\mathbf{k})\,d\cos\theta_{pk}, \quad (1.6)$$

θ_{pk} – угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$.

После вычисления интеграла (1.6) с учётом квазипотенциала (1.4) получаем не зависящий от углов парциальный потенциал

$$V_0(\chi_p,\chi_k) = \frac{4\sqrt{2}}{(2\pi)^2}m\lambda\begin{cases} u(\chi_p)v(\chi_k), \chi_p > \chi_k; \\ u(\chi_k)v(\chi_p), \chi_p < \chi_k, \end{cases} \quad (1.7)$$

где

$$u(\chi) = \mathrm{ch}(\chi/2), \ v(\chi) = \mathrm{sh}(\chi/2). \quad (1.8)$$

В уравнении (1.5) представим неизвестную функцию в виде

$$\psi_0(E,\chi_p) = G_0(E,m\,\mathrm{ch}\,\chi_p)\phi_0(E,\chi_p). \quad (1.9)$$

С учётом выражения (1.7) запишем парциальные уравнения для *s*-состояний в импульсном представлении в терминах функции $\phi_0(E,\chi_p)$:

$$\phi_0(E,\chi_p) = \sqrt{2}\left(\frac{m}{\pi}\right)^2\lambda\times$$
$$\times\left(\int_0^{\chi_p} u(\chi_p)v(\chi_k)G_0(E,m\,\mathrm{ch}\,\chi_k)\phi_0(E,\chi_k)d\chi_k + \right.$$
$$\left. + \int_{\chi_p}^\infty u(\chi_k)v(\chi_p)G_0(E,m\,\mathrm{ch}\,\chi_k)\phi_0(E,\chi_k)d\chi_k\right). \quad (1.10)$$

Это интегральное уравнение представляет задачу на собственные значения. Подчеркнём, что если константа связи λ задана, то следует искать собственные значения энергии E. Если же константа связи λ неизвестна, то задачу на собственные

значения можно решать именно относительно её, фиксируя предварительно значение энергии E.

2 Задача Штурма – Лиувилля

Потенциал (1.4) и записанное с его учётом уравнение (1.10) обладают ещё одним важным свойством: из уравнения (1.10) можно получить дифференциальное уравнение для искомой функции. Покажем это, предварительно определяя вторую производную от функции $\phi_0\left(E,\chi_p\right)$ по χ_p. Воспользуемся при этом формулой для определения производной от интеграла, в котором один из пределов интегрирования зависит от параметра, по которому ведётся дифференцирование, и получим

$$\frac{d^2\phi_0\left(E,\chi_p\right)}{d\chi_p{}^2}=\sqrt{2}\left(\frac{m}{\pi}\right)^2\times$$

$$\times\lambda\left(\int_0^{\chi_p}v\left(\chi_k\right)\frac{d^2u\left(\chi_p\right)}{d\chi_p{}^2}G_0\left(E,E_k\right)\phi_0\left(E,\chi_k\right)d\chi_k+\right.$$

$$+\int_{\chi_p}^{\infty}u\left(\chi_k\right)\frac{d^2v\left(\chi_p\right)}{d\chi_p{}^2}G_0\left(E,E_k\right)\phi_0\left(E,\chi_k\right)d\chi_k-$$

$$\left.-\frac{1}{2}G_0\left(E,E_p\right)\phi_0\left(E,\chi_p\right)\right). \qquad (2.1)$$

Правую часть равенства (2.1), с учётом явных выражений (1.8) функций $u\left(\chi\right)$ и $v\left(\chi\right)$, упростим – выделим функцию $\phi_0\left(E,\chi_p\right)$ в виде (1.10); в итоге из интегрального уравнения (1.10) получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2\phi_0\left(E,\chi_p\right)}{d\chi_p{}^2}=$$

$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{m}{\pi}\right)^2\lambda G_0\left(E,E_p\right)\right)\phi_0\left(E,\chi_p\right). \qquad (2.2)$$

Анализируя поведение функции (1.10) при $\chi_p\to 0$ и $\chi_p\to\infty$, сформулируем граничные условия для $\phi_0\left(E,\chi_p\right)$:

$$\phi_0\left(E,\chi_p\right)\Big|_{\chi_p\to 0}=0;$$

$$\left(\mathrm{sh}\left(\frac{\chi_p}{2}\right)\phi_0\left(E,\chi_p\right)-\right.$$

$$\left.-2\,\mathrm{ch}\left(\frac{\chi_p}{2}\right)\frac{d\phi_0\left(E,\chi_p\right)}{d\chi_p}\right)\Bigg|_{\chi_p\to\infty}=0. \qquad (2.3)$$

Дифференциальное уравнение (2.2) совместно с граничными условиями (2.3) представляют формулировку задачи Штурма – Лиувилля (ЗШЛ), эквивалентной интегральному уравнению (1.10).

Рассмотрим аналитическое решение ЗШЛ (2.2)–(2.3) в частном случае, а именно при $2E=0$. При нулевой энергии двухчастичной системы свободные функции Грина для уравнений Логунова – Тавхелидзе и Кадышевского определяются выражением:

$$G_0^{(LT)}\left(0,E_p\right)=2G_0^{(K)}\left(0,E_p\right)=-\left(m\,\mathrm{ch}\,\chi_p\right)^{-2},$$

а соответствующее им уравнение (2.2) преобразуется в уравнение относительно функции $\phi_0\left(0,\chi_p\right)\equiv\phi_0\left(\chi_p\right)$:

$$\frac{d^2\phi_0\left(\chi_p\right)}{d\chi_p{}^2}-\left(\frac{1}{4}+\tilde{\lambda}\frac{1}{\mathrm{ch}^2\,\chi_p}\right)\phi_0\left(\chi_p\right)=0, \quad (2.4)$$

где $\tilde{\lambda}=\dfrac{\sqrt{2}}{2\pi^2}\lambda$.

Уравнение (2.4) по виду совпадает с одномерным уравнением Шрёдингера для модифицированного потенциала Пёшля – Теллера [4], [5]. Аналогичное уравнение получено при решении в релятивистском конфигурационном представлении одномерного квазипотенциального уравнения с другим модельным потенциалом [6].

В уравнении (2.4) перейдём от переменной χ_p к новой переменной $y=\mathrm{th}\,\chi_p$ и новой функции $\left(\phi_0\left(\chi_p\right)=\Psi\left(\mathrm{th}\,\chi_p\right)=\Psi\left(y\right)\right)$:

$$\left(1-y^2\right)\frac{d^2\Psi\left(y\right)}{dy^2}-2y\frac{d\Psi\left(y\right)}{dy}-$$

$$-\left(\frac{1}{4\left(1-y^2\right)}+\tilde{\lambda}\right)\Psi\left(y\right)=0. \qquad (2.5)$$

Его общее решение имеет вид

$$\Psi\left(y\right)=C_1P^{1/2}_{K/2-1/2}\left(y\right)+C_2Q^{1/2}_{K/2-1/2}\left(y\right),$$

где введено обозначение:

$$K=\sqrt{1-4\tilde{\lambda}}, \qquad (2.6)$$

$P^{1/2}_{K/2-1/2}\left(y\right)$ и $Q^{1/2}_{K/2-1/2}\left(y\right)$ – присоединённые функции Лежандра первого и второго рода соответственно [7].

Возвращаясь к исходной переменной, решение уравнения (2.5) представим в виде

$$\phi_0\left(\chi_p\right)=C_1P^{1/2}_{K/2-1/2}\left(\mathrm{th}\,\chi_p\right)+C_2Q^{1/2}_{K/2-1/2}\left(\mathrm{th}\,\chi_p\right). \quad (2.7)$$

Применим к решению (2.7) граничные условия (2.3). Если $\chi_p\to 0$, тогда $\mathrm{th}\,\chi_p\to 0$, и для анализа поведения функции (2.7) при таких условиях необходимо использовать формулы для определения функций Лежандра первого и второго рода при нулевом значении аргумента [7].

После применения первого из граничных условий (2.3) получим:

$$\phi_0(\chi_p)\Big|_{\chi_p\to 0} = \\ = C_1\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(\frac{\pi K}{4}\right) - C_2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi K}{4}\right) = 0. \quad (2.8)$$

Аргумент функции $\phi_0(\chi_p)$ меняется в пределах от 0 до ∞. В таком случае аргумент присоединённых функций Лежандра, входящих в выражение для функции (2.7), варьируется в диапазоне $0 \le \text{th}\,\chi_p < 1$. Поэтому, применяя второе из граничных условий (2.3), воспользуемся формулами для функций Лежандра на разрезе [7]; в результате получим

$$\left(\text{sh}\left(\frac{\chi_p}{2}\right)\phi_0(\chi_p) - 2\,\text{ch}\left(\frac{\chi_p}{2}\right)\frac{d\phi_0(\chi_p)}{d\chi_p}\right)\Bigg|_{\chi_p\to\infty} = \\ = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} + \frac{C_2\sqrt{\pi}K}{2} = 0. \quad (2.9)$$

Решая систему уравнений (2.8), (2.9) относительно C_1 и C_2, приходим к выводу, что ЗШЛ (2.2), (2.3) имеет нетривиальное решение только при выполнении условия:

$$\text{tg}\,\frac{\pi K}{4} = -K, \quad K \ne 0. \quad (2.10)$$

Значения K, удовлетворяющие условию (2.10), соответствуют точкам пересечения графиков функций $f_1(K) = \text{tg}(\pi K/4)$ и $f_2(K) = -K$, изображенных на рисунке 2.1, и являются вещественными. Значения $\tilde{\lambda}$, связанные с K, определяются из формулы (2.6).

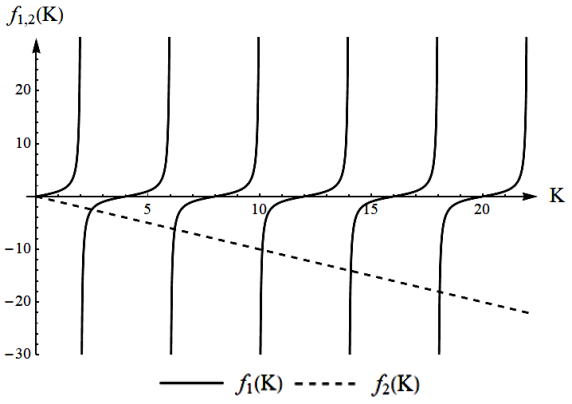


Рисунок 2.1 – Графическое определение корней трансцендентного уравнения (2.10)

Возвращаясь к функции

$$\psi_0(0,\chi_p) \equiv \psi_0(\chi_p),$$

выражаемой через функцию $\phi_0(\chi_p)$ по формуле (1.9), запишем

$$\psi_{0n}(\chi_p) = C_{1n}G_0(0,E_p)\times \\ \times\left(P^{1/2}_{K_n/2-1/2}(\text{th}\,\chi_p) - \frac{2}{\pi K_n}Q^{1/2}_{K_n/2-1/2}(\text{th}\,\chi_p)\right). \quad (2.11)$$

В целях численного нахождения коэффициентов C_{1n} воспользуемся условием нормировки волновой функции:

$$\int_0^\infty \frac{m}{E_p}\left(\psi_0(\chi_p)\right)^2 dp = 1.$$

Графики получаемых в итоге нормированных волновых функций, соответствующих $n = 0, 1, 2$, построены на рисунке 2.2.

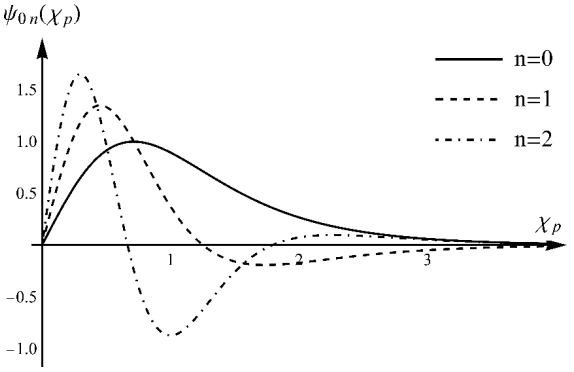


Рисунок 2.2 – Графики первых трёх волновых функций (2.11), соответствующих нулевой энергии двухчастичной системы

Таким образом, при $E = 0$ получено точное аналитическое решение ЗШЛ (2.2)–(2.3).

3 Численное решение интегрального уравнения и эквивалентной ему задачи Штурма – Лиувилля для двухчастичной системы с нулевой энергией

Интегральное уравнение (1.10) для двухчастичной системы в состоянии с нулевой энергией можно представить в виде

$$\phi_0(\chi_p) = -\tilde{\lambda}\int_0^\infty\left(\text{sh}\,\frac{\chi_p+\chi_k}{2} - \text{sh}\,\frac{|\chi_p-\chi_k|}{2}\right)\times \\ \times\frac{1}{\text{ch}^2\,\chi_k}\phi_0(\chi_k)\,d\chi_k, \quad (3.1)$$

удобном для его последующего численного решения. Интеграл, содержащийся в правой части (3.1), заменим квадратурной формулой метода прямоугольников и осуществим переход к задаче о собственных значениях системы линейных алгебраических уравнений. К полученным результатам применим уточняющую процедуру Ричардсона [8], [9].

Таблица 3.1 – Сравнение результатов, полученных аналитически и численными методами

	Аналитическое решение	Численное решение ЗШЛ (2.2), (2.3)	$\Delta_{ЗШЛ}$	Численное решение интегрального уравнения (3.1)	$\Delta_{ИУ}$
$\tilde{\lambda}_0$	–1,2960483528	–1,2960490906	$7,4\cdot10^{-7}$	–1,2960483580	$5,2\cdot10^{-9}$
$\tilde{\lambda}_1$	–9,3708373890	–9,3708377369	$3,5\cdot10^{-7}$	–9,3708374572	$6,8\cdot10^{-8}$
$\tilde{\lambda}_2$	–25,3806343359	–25,3806345716	$2,3\cdot10^{-7}$	–25,3806348239	$4,9\cdot10^{-7}$
$\tilde{\lambda}_3$	–49,3835195660	–49,3835193615	$2,0\cdot10^{-7}$	–49,3835222999	$2,7\cdot10^{-6}$
$\tilde{\lambda}_4$	–81,3847324729	–81,3847321353	$3,4\cdot10^{-7}$	–81,3847437032	$1,1\cdot10^{-5}$

Задачу Штурма – Лиувилля (2.2)–(2.3), эквивалентную интегральному уравнению (3.1), решим численно методом стрельбы [10].

Значения параметра $\tilde{\lambda}_{0-4}$, полученные аналитически и двумя методами численно, приведены в таблице 3.1. Там же содержатся модули разностей $\Delta_{ИУ}$ значений указанных параметров, полученных аналитически, и значений, полученных при численном решении интегрального уравнения (3.1), а также сведения о различии результатов, полученных при аналитическом и численном решении ЗШЛ (2.2), (2.3), обозначенные символами $\Delta_{ЗШЛ}$.

На основании данных, представленных в таблице 3.1, можно сделать вывод об эффективности выбранных численных методов и возможности их использования для решения аналогичной задачи применительно к состояниям двухчастичной системы, в которых значение её энергии E отлично от нуля.

4 Решение задачи Штурма – Лиувилля и интегрального уравнения для двухчастичной системы, энергия которой отлична от нуля

Рассмотрим теперь численное решение ЗШЛ (2.2), (2.3) и интегрального уравнения (1.10) при отличной от нуля энергии системы. Для этого в свободных ФГ (1.2), (1.3), содержащихся в указанных уравнениях, введём обозначение $E = m\cos w.$. При этом свободные функции Грина можно представить в виде:

$$G_0^{(LT)}\left(E, m\,\mathrm{ch}\,\chi_p\right) = G_0^{(LT)}\left(m\cos w, m\,\mathrm{ch}\,\chi_p\right) = \\ = \frac{1}{m^2\cos^2 w - m^2\,\mathrm{ch}^2\,\chi_p},$$

$$G_0^{(K)}\left(E, m\,\mathrm{ch}\,\chi_p\right) = G_0^{(K)}\left(m\cos w, m\,\mathrm{ch}\,\chi_p\right) = \\ = \frac{1}{2m\,\mathrm{ch}\,\chi_p\left(m\cos w - m\,\mathrm{ch}\,\chi_p\right)}.$$

Варьируя значения w от $\pi/2$ до 0, при каждом из них численно решим интегральное уравнение и соответствующую ему ЗШЛ, построим графики зависимости $\lambda_{0,1,2}$ от параметра w, определяющего энергию двухчастичной системы, основываясь на уравнении Логунова – Тавхелидзе (рисунок 4.1) и уравнении Кадышевского (рисунок 4.2).

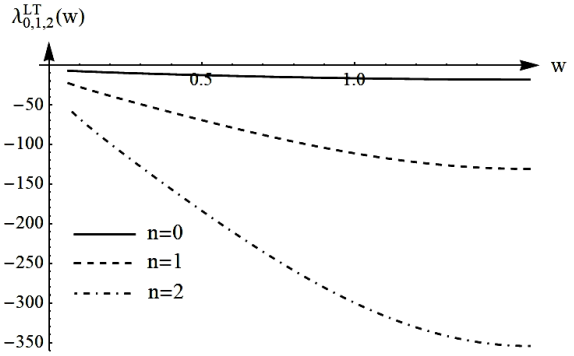


Рисунок 4.1 – Зависимость константы связи λ от параметра w для уравнения Логунова – Тавхелидзе

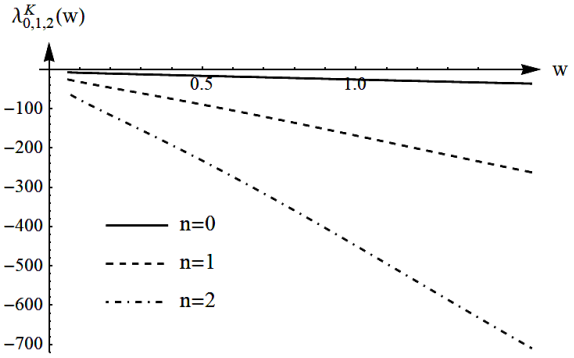


Рисунок 4.2 – Зависимость константы связи λ от параметра w для уравнения Кадышевского

На рисунках 4.3, 4.4 приведены графики волновых функций с $n = 0$, соответствующих уравнениям Логунова – Тавхелидзе и Кадышевского, построенные при значениях параметра $w = 0,15\pi;\ 0,3\pi;\ 0,45\pi$ на основании результатов их численного решения.

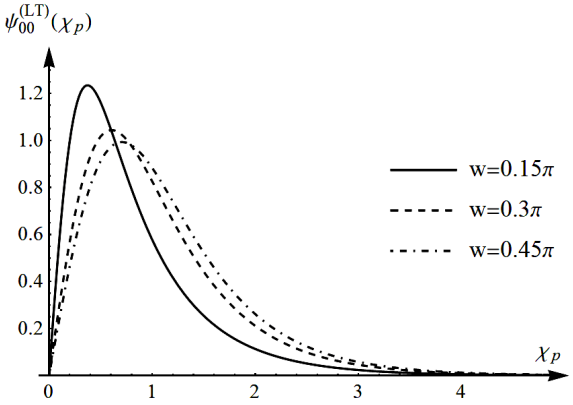


Рисунок 4.3 – Зависимость волновых функций уравнения Логунова – Тавхелидзе от быстроты при различных значениях энергии

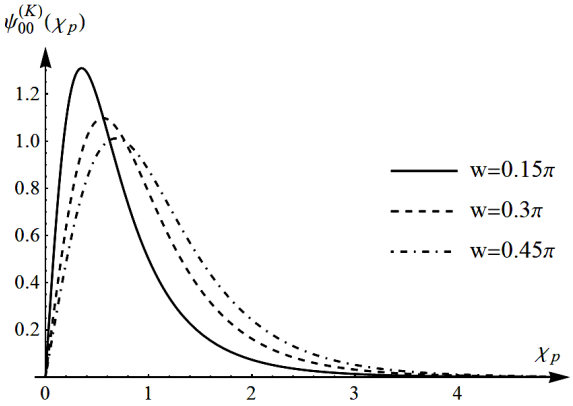


Рисунок 4.4 – Зависимость волновых функций уравнения Кадышевского от быстроты при различных значениях энергии

На рисунках 4.5, 4.6 приведены графики волновых функций основного и первых двух возбужденных состояний $(n = 0, 1, 2)$ двухчастичной системы, построенные соответственно на основе результатов численного решения уравнений Логунова – Тавхелидзе и Кадышевского при значениях параметра $w = 0,3\pi$.

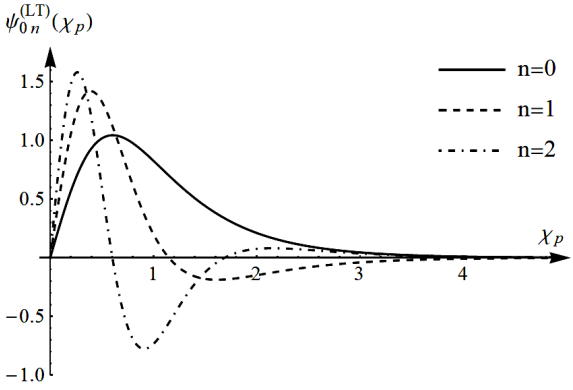


Рисунок 4.5 – Зависимость волновых функций уравнения Логунова – Тавхелидзе от быстроты при различных значениях n

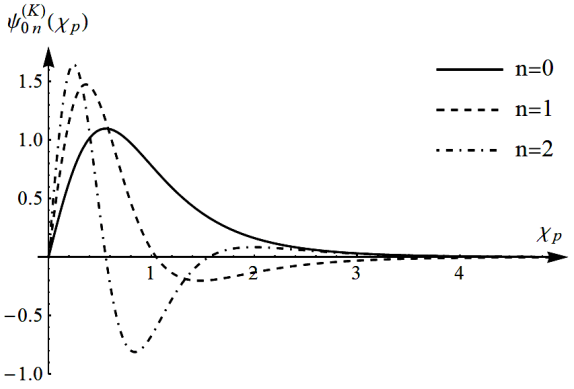


Рисунок 4.6 – Зависимость волновых функций уравнения Кадышевского от быстроты при различных значениях n

Отметим, что волновые функции, соответствующие состояниям с нулевой энергией при различных значениях λ_n, удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_0^\infty \psi_{0n}(\chi_k)\psi_{0m}(\chi_k)\frac{1}{\mathrm{ch}^2\,\chi_k}d\chi_k = 0;\ \ n \neq m,$$

вытекающему из уравнения (3.1).

Заключение

Таким образом, в настоящей статье решены задачи об определении собственных состояний двухчастичной системы, характеризуемой квазипотенциалом, не представимым в релятивистском конфигурационном представлении, но в импульсном представлении обеспечивающим сведение интегрального уравнения к задаче Штурма – Лиувилля. Сформулированная указанным способом задача Штурма – Лиувилля решена точно применительно к состояниям двухчастичной сиситемы с нулевой энергией: найдены собственные значения константы связи, а также собственные волновые функции. Такие же результаты получены при численном решении задачи Штурма – Лиувилля и интегрального уравнения. Произведен сравнительный анализ собственных значений, полученных аналитически и численно. Сделан вывод об эффективности использованных моделей расчета. Зависимости собственных значений константы связи от параметра w и волновых функций от быстроты, полученные в импульсном представлении численно, иллюстрированы графически.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Капшай, В. Н.* Релятивистские парциальные интегральные уравнения для двухчастичных связанных состояний и задача Штурма – Лиувилля / В. Н. Капшай, С. И. Фиалка // Известия вузов. Физика. – 2015. – Т. 58, № 9. – С. 32–40; Kapshai, V.N. Relativistic Partial Integral Equations

for Two-Particle Bound States and the Sturm-Liouville Problem / V. N. Kapshai, S. I. Fialka // Russ. Phys. Journal. – 2016. – Vol. 58, № 9. – P. 1237–1247.

2. *Капшай*, *В. Н.* Об одном классе точных решений квазипотенциальных уравнений / В. Н. Капшай, С. П. Кулешов, Н. Б. Скачков // ТМФ. – 1983. – Т. 55, № 3. – С. 349–360.

3. *Капшай*, *В. Н.* Решение релятивистских двухчастичных уравнений с произвольным орбитальным моментом / В. Н. Капшай, С. И. Фиалка // Известия вузов. Физика. – 2017. – Т. 60, № 1. – С. 34–43; Kapshai, V. N. Solution of relativistic two-particle equations with arbitrary orbital angular momentum / V. N. Kapshai, S. I. Fialka // Russ. Phys. Journal. – 2017. – Vol. 60, № 1. – P. 37–49.

4. *Флюгге*, *З.* Задачи по квантовой механике: в 2 т. / З. Флюгге. – 3-е изд. – Москва : ЛКИ, 2010. – Т. 1. – 344 с.

5. *Ландау*, *Л. Д.* Теоретическая физика: в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – 5-е изд. – М. : Физматлит, 2002. – Т. 3: Квантовая механика: нерелятивистская теория. – 808 с.

6. *Гришечкин*, *Ю. А.* Приближенное аналитическое решение одномерного квазипотенциального уравнения с потенциалом $\left(\rho^2+\rho_0{}^2\right)^{-1}$ в релятивистском конфигурационном представлении / Ю. А. Гришечкин, А. В. Бужан, В. Н. Капшай // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 12–15.

7. *Бейтмен*, *Г.* Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – 2-е изд. – М. : Наука, 1973. – Т. 1: Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. – 296 с.

8. *Марчук*, *Г. И.* Повышение точности решений разностных схем / Г. И. Марчук, В. В. Шайдуров. – М. : Наука, 1979. – 320 с.

9. *Вычисления на квазиравномерных сетках* / Н. Н. Калиткин, А. Б. Альшин, Е. А. Альшина, Б. В. Рогов. – М. : Физматлит, 2005. – 224 с. 10.

10. *Калиткин*, *Н. Н.* Численные методы / Н. Н. Калиткин. – Санкт-Петербург : БВХ-Петербург, 2011. – 592 с.

Поступила в редакцию 07.07.2026.

Информация об авторах

Капшай Валерий Николаевич – к.ф.-м.н., доцент
Гришечкина Анастасия Александровна – старший преподаватель