ФИЗИКА

УДК 535.42 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_18
EDN: UIYJVT

ПУЧКИ ЭРМИТА НЕПРЕРЫВНОГО КОМПЛЕКСНОГО ИНДЕКСА С ПЕРЕНОСИМОЙ КОНЕЧНОЙ МОЩНОСТЬЮ

С. С. Гиргель

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

HERMITE BEAMS OF A CONTINUOUS COMPLEX INDEX WITH TRANSFERABLE FINITE POWER

S. S. Girgel

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Предложено новое решение параболического уравнения, описывающее декартовы параксиальные 2D световые пучки. Такие пучки описываются функциями Эрмита комплексного аргумента с двумя свободными параметрами без гауссовой аподизации. Установлены ограничения на параметры, при которых пучки Эрмита переносят конечную мощность и являются физически реализуемыми. Формализм для описания 2D пучков Эрмита обобщен на декартовы 3D пучки Эрмита конечной мощности. Представлены выражения для плотности энергии и потоков энергии для векторных пучков Эрмита с однородной поляризацией. Выполненное графическое моделирование интенсивности и поперечных потоков энергии таких пучков Эрмита подтверждает проведенные аналитические расчеты.

Ключевые слова: *параксиальные пучки*, *пучки Эрмита*, *квадратичная интегрируемость.*

Для цитирования: *Гиргель*, *С. С.* Пучки Эрмита непрерывного комплексного индекса с переносимой конечной мощностью / С. С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 3 (68). – С. 18–22. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_18. – EDN: UIYJVT

Abstract. A new solution to the parabolic equation describing Cartesian paraxial 2D light beams is proposed. Such beams are described by Hermite functions of complex argument with two free parameters, without Gaussian apodization. The constraints on the parameters under which Hermite beams carry finite power and are physically realizable are established. The formalism for describing 2D Hermite beams is generalized to Cartesian 3D Hermite beams of finite power. Expressions for the energy density and energy fluxes for vector Hermite beams with uniform polarization are presented. The graphical modeling of the intensity and transverse energy fluxes of such Hermite beams confirms the analytical calculations.

Keywords: *paraxial beams*, *Hermite beams*, *quadratic integrability.*

For citation: *Girgel*, *S. S.* Hermite beams of a continuous complex index with transferable finite power / S. S. Girgel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 3 (68). – P. 18–22. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_18 (in Russian). – EDN: UIYJVT

Введение

Обычно [1], [2] для параксиальных пучков используется аподизация соответствующей функции в форме гауссиана, чтобы функция, описывающая такой пучок, была квадратично интегрируема (КИ). Тогда такие волновые поля переносят конечную мощность через поперечное сечение перпендикулярно оси *Z* пучка. Простейшими примерами являются пучки Гаусса, Эрмита – Гаусса, Лагерра – Гаусса и Бесселя – Гаусса.

В настоящей работе будет показано, что возможен новый тип параксиальных световых пучков, у которых гауссова аподизация отсутствует. Такие пучки описываются функциями Эрмита, которые сами КИ при определенных ограничениях на их параметры.

1 Пучки Эрмита

Для монохроматических волн в безразмерных переменных $\{X = x / x_0, Z = z / z_0\}$ скалярное 2D параболическое уравнение [3]–[5]

$$(\partial^2_{X,X} + 4i\partial_Z) f = 0 \qquad (1.1)$$

после замены переменных $\{X_1 = \sqrt{i / Q_X} \cdot X,$ $Q_X = Z - Q_{0X}\}$, где комплексный параметр пучка $Q_{0X} = Q'_{0X} + iQ''_{0X}$ в плоскости *XZ*, сводится к дифференциальному уравнению

$$\partial^2_{X_1,X_1} f + \frac{4i}{Q_X} X_1 \partial_{X_1} f + 4Q_X \partial_{Q_X} f = 0. \qquad (1.2)$$

Здесь и далее $x_0 > 0$, $z_0 = k x_0^2 / 2$ – некоторые характерные размеры пучка в направлениях, параллельных осям *OX* и *OZ* соответственно.

Применяя подстановку

$$f(X_1, Q_X) = f_1(X_1) \cdot f_3(Q_X),$$

© *Гиргель С. С.*, 2026

где $f_3(Q_X)=\left(\frac{Q_X(Z)}{Q_X(0)}\right)^{\frac{\nu}{2}}$, получаем уравнение

$$(d_{X,X}^2-2X_1d_X+2\nu_X)f_1=0. \qquad (1.3)$$

В качестве решений уравнения (1.3) обычно [4]–[5] используют 2 типа решений (четное и нечетное)

$$f_{1o}=X_1\cdot M\left(\frac{1}{2}-\frac{\nu_X}{2},\frac{3}{2},X_1^2\right);$$

$$f_{1e}=M\left(-\frac{\nu_Y}{2},\frac{1}{2},X_1^2\right). \qquad (1.4)$$

Здесь функция Куммера *M* является конфлюэнтной гипергеометрической функцией ${}_1F_1$ [6]. 2D пучки, описываемые функциями f_{1o} и f_{1e}, описывают пучки Куммера [7], [8]. Функции (1.4) зависят от двух произвольных комплексных параметров Q_X и ν_X. Постоянная разделения переменных ν является, в общем случае, свободным комплексным параметром: $\nu_X=\nu'_X+i\nu''_X$.

Однако существуют еще и другие решения уравнения (1.3), выражающиеся через функции Эрмита [9], [10], например

$$f_1=H_{\nu_X}\left(\sqrt{\frac{i}{Q_X}}X\right). \qquad (1.5)$$

Можно показать [10], что функция (1.5) является специальной линейной комбинацией функций f_{1o} и f_{1e}. Поэтому решениями параболического уравнения (1.1) являются функции

$$f_X=H_{\nu_X}\left(\sqrt{\frac{i}{Q_X}}X\right)\left(\frac{Q_X(Z)}{Q_X(0)}\right)^{\frac{\nu_X}{2}}, \qquad (1.6)$$

которые описывают новый тип параксиальных пучков Эрмита. Существенно, что здесь отсутствует гауссова аподизация функции Эрмита, а сам индекс ν_X, как мы покажем ниже, может быть непрерывным комплексным параметром, в отличие от классических пучков Эрмита – Гаусса, где индекс ν_X должен быть целочисленным и положительным.

2 Условия физической реализуемости 2D и 3D пучков Эрмита

Наибольший практический интерес представляют физически реализуемые пучки конечной мощности [1], [2]. Амплитуда такого пучка должна быть ограниченной при всех *X*. Более того, при $X\to\pm\infty$ амплитуда *f* должна стремиться к нулю и быть квадратично интегрируемой (КИ).

Анализ показывает, что необходимое условие КИ пучков Эрмита – $Q''_{0X}>0$.

А) Если $\nu'_X<-1/2$, то пучок является КИ.

Б) Если $\nu'_X\in[-1/2,0)$, то $|f_X|\to 0$ при $|x|\to\infty$, но пучок – не КИ.

В) Если $\nu'_X=0$, то $|f_X|\to const$ при $|x|\to\infty$ и пучок – не КИ.

Г) Если $\nu'_X>0$, то $|f_X|\to\infty$ при $|x|\to\infty$ и пучок тем более не КИ.

При этом мнимая часть ν''_X комплексного параметра $\nu_X=\nu'_X+i\nu''_X$ не влияет на КИ. Все найденные выше условия КИ для функций, используемых при описании пучков Эрмита, подтверждаются также при графическом моделировании их свойств.

Для 3D пучков Эрмита условия КИ в плоскостях *XZ* и *YZ* аналогичны. Отметим, что по своим свойствам пучки Эрмита схожи с пучками Куммера [7], [8]. Так, пучки Эрмита и Куммера в процессе распространения изменяют свой поперечный профиль.

3 Энергетические характеристики 3D векторных пучков Эрмита с однородной поляризацией

Заметим, что трехмерные скалярные решения (2+1)D параболического уравнения

$$(\partial_{X,X}^2+\partial_{Y,X}^2+4i\partial_Z)f=0 \qquad (3.1)$$

для пучков Эрмита можно построить как произведения 2D решений типа (1.6):

$$f(X,Y,Z)=f_X(X,Q_X,\nu_X)f_Y(Y,Q_Y,\nu_Y). \qquad (3.2)$$

Поэтому, в общем случае, амплитуда 3D скалярного пучка Эрмита зависит от трех координат и четырех свободных комплексных параметров. Это расширяет возможности при конструировании пучков с требуемыми свойствами.

Начнем с обсуждения векторных пучков Эрмита с однородной поляризацией. Векторную амплитуду $\boldsymbol{E}$ такого пучка можно представить в виде $\mathbf{E}=(\mathbf{e}_X+i\gamma\mathbf{e}_Y)f+i\theta\mathbf{e}_z(\partial_X f+i\gamma\partial_Y f)$, где *f* является некоторым решением параксиального параболического уравнения (3.1).

Плотности энергии, продольного и поперечного потоков энергии электромагнитного поля для параксиальных векторных пучков с однородной поляризацией соответственно равны [11], [12]:

$$w=\frac{\varepsilon|f|^2}{8\pi};\quad S_z=\frac{c}{n}w;$$

$$\mathbf{S}_\perp=\frac{c\varepsilon}{8\pi n}\theta\left(\mathrm{Im}(f^*\nabla_\perp f)+\mathrm{th}\,2\psi''[\nabla_\perp,\mathbf{e}_z]|f|^2/2\right). \qquad (3.3)$$

Здесь θ – параметр параксиальности, $\theta<<1$. В последнем выражении целесообразно выделить множителем плотность продольного потока

энергии S_z. Получаем [11]

$$\mathbf{S}_\perp = \mathbf{S}_o + \mathbf{S}_s = \\ = \theta S_z \left(\mathrm{Im}\left(\frac{\nabla_\perp f}{f} \right) + \mathrm{th}\, 2\psi'' \left[\mathrm{Re}\left(\frac{\nabla_\perp f}{f} \right), \mathbf{e}_z \right] \right), \quad (3.4)$$

где выражены явно, следуя Берри и Бекшаеву [13]–[15], плотность орбитального $\mathbf{S}_o$ и спинового $\mathbf{S}_s$ потоков энергии.

Если скалярная амплитуда однородно поляризованного пучка Эрмита $f = f_x f_y$, где $f_x = f_x(X)$, $f_y = f_y(Y)$, тогда плотность орбитального и спинового потоков энергии равна

$$\mathbf{S}_o = \frac{S_z}{k} \mathrm{Im}\left(a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y \right);$$

$$\mathbf{S}_s = \frac{S_z}{k} \mathrm{Re}\left(a_x \mathbf{e}_y - a_y \mathbf{e}_x \right) \mathrm{th}\, 2\psi'',$$

где введены, для краткости, обозначения $a_x = \frac{\partial_X f_x}{f_x}$; $a_y = \frac{\partial_Y f_y}{f_y}$. Например,

$$a_x = \frac{\frac{-2iX\nu_X}{Q_X(Z)} M\left(\frac{1-\nu_X}{2}, \frac{3}{2}, \frac{iX^2}{Q_X(Z)} \right)}{M\left(-\frac{\nu_X}{2}, \frac{1}{2}, \frac{iX^2}{Q_X(Z)} \right)}$$

и аналогично a_y. Здесь использованы преобразования Куммера

$$\partial_u M(a,b,u) = \frac{a}{b} M(a+1, b+1, u)$$

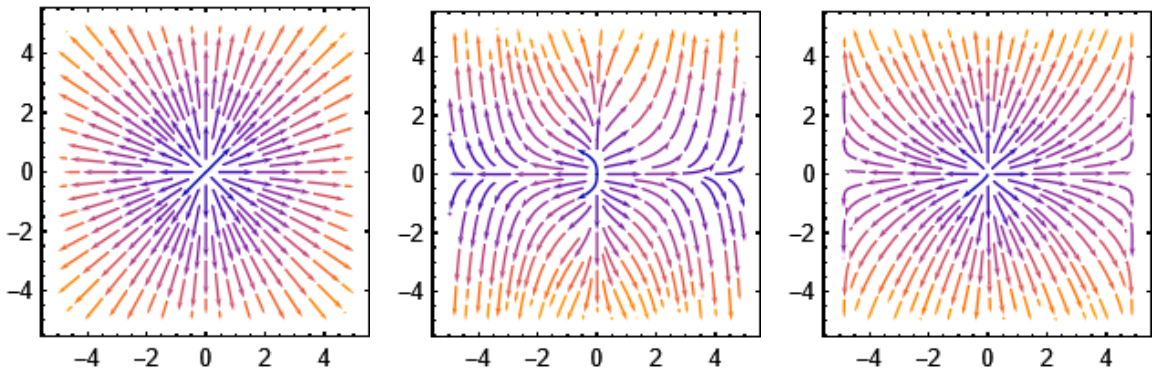
[6] для функции Куммера M.

С помощью системы компьютерной математики «Mathematica» было проведено графическое моделирование интенсивности и поперечных потоков энергии векторных декартовых пучков Эрмита с однородной поляризацией и переносимой конечной мощностью. Некоторые результаты изображены на рисунках 3.1–3.3 при различных значениях свободных параметров. Выбирались параметры $\nu'_X \le -1$; $\nu'_Y \le -1$, чтобы обеспечить КИ функций f пучков Эрмита и, тем самым, переносимую конечную мощность через поперечное сечение пучка. Последнее обеспечивает необходимые условия для физической реализации таких пучков.

На рисунке 3.1 показаны направления поперечных орбитальных потоков энергии $\mathbf{S}_o$ для пучков Эрмита. Видно, что если $\nu''_X = \nu''_Y = 0$, то такие потоки строго радиальны. При $\nu''_X \ne 0$ возникает составляющая орбитального потока энергии, параллельная оси OY потока, однако КИ не нарушается. При увеличении продольного расстояния Z картина немного видоизменяется.

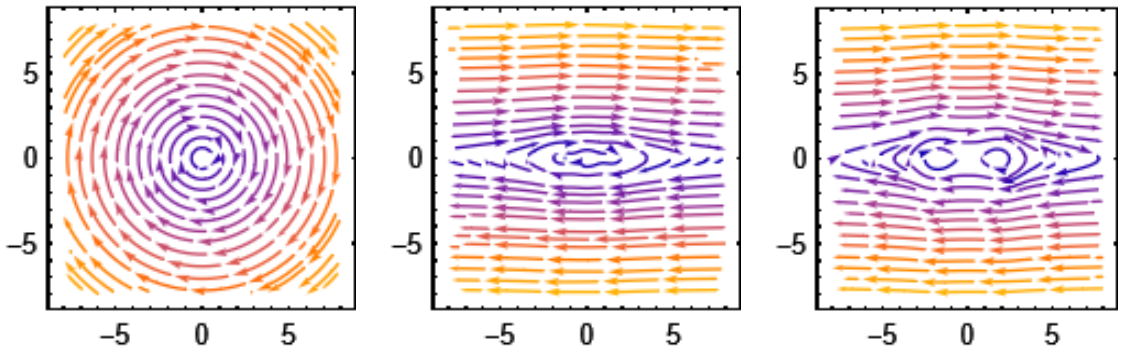
На рисунке 3.2 показаны поперечные спиновые потоки энергии $\mathbf{S}_s$ пучков Эрмита для циркулярной поляризации (эллиптичность $\gamma = 1$). В части *a*) видно, что поток $\mathbf{S}_s$ направлен азимутально. Однако включение мнимой части ν''_X свободного параметра ν приводит к дополнительной компоненте спинового потока энергии $\mathbf{S}_s$, параллельной оси OX. В части 3.2 *c*) видно, что возрастание расстояния средств приводит к значительному изменению картины.

На рисунке 3.3 изображена интенсивность в относительных единицах в 3D формате для нескольких значений свободных параметров. Видно, что, при малых значениях параметров ν'_X и ν'_Y и отсутствии мнимых частей ν''_X и ν''_Y свободных параметров ν_X и ν_Y, картина интенсивности представляет собой гауссовоподобную или колоколообразную поверхность, аналогичную поверхности интенсивности гауссова пучка.



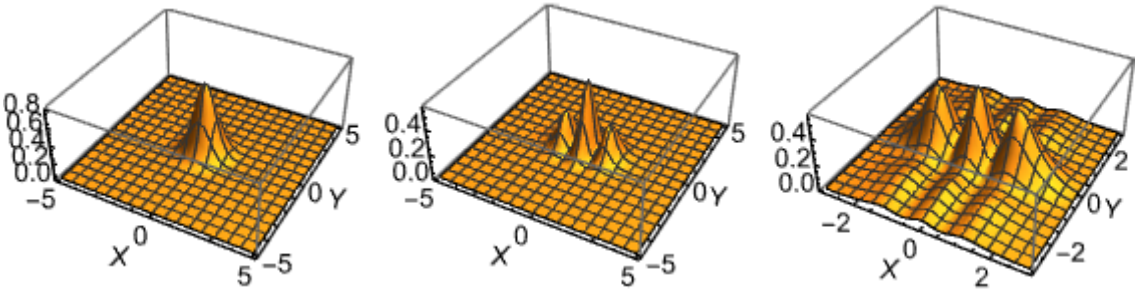
a) $\nu''_X = 0$; $Z = 0.5$ *b*) $\nu''_X = 1$; $Z = 0.5$ *c*) $\nu''_X = 1$; $Z = 3$

Рисунок 3.1 – Орбитальные потоки энергии S_0 для пучков Эрмита.
Во всех случаях $\nu'_X = \nu'_Y = -1$; $\nu''_Y = 0$; $Q''_{0X} = Q''_{0Y} = 1$



a) $\nu''_X = 0;\ Z = 0.5$ b) $\nu''_X = 1;\ Z = 0.5$ c) $\nu''_X = 1;\ Z = 1$

Рисунок 3.2 – Спиновые потоки энергии S_s для пучков Эрмита.
Во всех случаях $\nu'_X = \nu'_Y = -1;\ \nu''_Y = 0;\ \ Q''_{0X} = Q''_{0Y} = 1;$ эллиптичность $\gamma = 1$



a) $\nu'_X = -1;\ \nu''_X = 0$ *b*) $\nu'_Y = -4;\ \nu''_X = 0$ *c*) $\nu''_X = -4;\ \nu''_Y = -1$

Рисунок 3.3 – 3D интенсивность пучков Эрмита.
Во всех случаях $Q''_{0X} = Q''_{0Y} = 1;\ \nu'_Y = -1;\ \nu''_Y = 0;\ Z = 0.5$

Однако уменьшение параметра ν'_X приводит к возникновению двух дополнительных максимумов, которые постепенно растут и при $\nu'_X = -4$ видны уже чёткие три максимума. Появление мнимых частей параметров ν''_X и ν''_Y свободных параметров ν_X и ν_Y приводит к сильной деформации поверхности интенсивности (рисунок 3.3 *c*), однако КИ по-прежнему сохраняется.

Заключение

В данной работе представлены новые решения скалярного параболического уравнения для параксиальных 2D световых пучков. Такие пучки описываются функциями Эрмита комплексного аргумента с двумя свободными параметрами без гауссовой аподизации. Эти результаты обобщены на 3 пучки Эрмита с непрерывными комплексными индексами ν_X и ν_Y и переносящими конечную мощность.

Найдены ограничения на параметры, при соблюдении которых полученные решения соответствуют параксиальным пучкам с конечной энергией, то есть физически реализуемым. Для классических пучков Эрмита – Гаусса индексы ν_X и ν_Y должны быть дискретными целочисленными и положительными. Для обсуждаемых пучков Эрмита индексы ν_X и ν_Y являются непрерывными комплексными. Для КИ и физической реализуемости на вещественные части параметров ν_X и ν_Y накладываются ограничения $\nu'_X \le -1/2;\ \ \nu'_Y \le -1/2$. Картины интенсивности представляют собой несколько пиков.

Фазовая и амплитудная поверхности обсуждаемых пучков Эрмита даже при распространении в свободном пространстве непрерывно трансформируются. Поэтому пучки Эрмита являются пучками с изменяющейся геометрией.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ананьев, Ю. А.* Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю. А. Ананьев. – М. : Наука, 1990. – 264 с.

2. *Абрамочкин, Е. Г.* Современная оптика гауссовых пучков / Е. Г. Абрамочкин, В. Г. Волостников. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 184 с.

3. *Гиргель, С. С.* Физические свойства скалярных 2D пучков Куммера – Гаусса / С. С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2011.– № 4 (9).– С. 19 – 23.

4. *Гиргель, С. С.* Скалярные астигматические 3D световые пучки Куммера – Гаусса /

С. С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (14). – С. 19–23.

5. *Bandres*, *M. A.* Cartesian beams / M. A. Bandres and J. C. Gutierres-Vega // Optics Letters. – 2007. – Vol. 32, № 23. – P. 3459–3461.

6. *Флюгге*, *З.* Задачи по квантовой механике. Т. 2 / З. Флюгге. – М. : Мир, 1974. – 418 с.

7. *Гиргель*, *С. С.* Пучки Куммера без гауссовой аподизации с переносимой конечной мощностью // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 7–9.

8. *Гиргель*, *С. С.* 3D световые пучки Куммера без гауссовой аподизации с переносимой конечной мощностью / С. С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 18–21.

9. *Лебедев*, *Н. Н.* Специальные функции и их приложения / Н. Н. Лебедев. – М. : ГИТТЛ, 1953. – 379 с.

10. *Nikiforov*, *A. F.* Special functions of mathematical physics / A. F. Nikiforov, V. N. Uvarov. – Basel; Boston: Birkhäuser, 1988. – 428 p.

11. *Гиргель*, *С. С.* Энергетические характеристики векторных декартовых пучков Куммера с переносимой конечной мощностью / С. С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 3 (52). – С. 13–17.

12. *Гиргель*, *С. С.* Энергетические характеристики векторных циркулярных пучков Куммера конечной мощности. I. Однородная поляризация / С. С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 4 (53). – С. 16–20.

13. *Berry*, *M. V.* Optical currents / M. V. Berry // Journal of Optics A: Pure and Applied Optics. – 2009. – Vol. 11 (9). – P. 094001.

14. *Bekshaev*, *A. Y.* Transverse energy flows in vectorial fields of paraxial beams with singularities / A. Y. Bekshaev, M. S. Soskin // Optics Communications. – 2007. – Vol. 271. – P. 332–348.

15. *Bekshaev*, *A.* Internal flows and energy circulation in light beams / A. Bekshaev, K. Bliokh, M. Soskin // Journal of Optics – 2011. – Vol. 13 (5). – P. 053001.

Поступила в редакцию 05.08.2026.

Информация об авторах

Гиргель Сергей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор