МАТЕМАТИКА

УДК 512.548 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_46
EDN: PRVDBM

ДЕЛИТЕЛИ НУЛЯ В ОБОБЩЁННЫХ ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППОИДАХ

А. М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, *Могилёв*

ZERO DIVISORS IN GENERALIZING POLYADIC GROUPOIDS

A. M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, *Mogilev*

Аннотация. В статье доказывается, что в обобщённых полиадических группоидах все элементы являются делителями нуля.

Ключевые слова: *группоид*, *l-арная операция*, *l-арный группоид*, *делитель нуля.*

Для цитирования: *Гальмак, А. М.* Делители нуля в обобщённых полиадических группоидах / А. М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 3 (68). – С. 46–50. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_46. – EDN: PRVDBM

Abstract. It is proved that in the generalizing polyadic groupoids all elements are zero divisors.

Keywords: *groupoid*, *l-ary operation*, *l-ary groupoid*, *zero divisor.*

For citation: *Gal'mak, A. M.* Zero divisors in generalizing polyadic groupoids / A. M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 3 (68). – P. 46–50. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_3_68_46 (in Russian). – EDN: PRVDBM

Введение

В [1] для любого целого $l \geq 2$, любого группоида A и любого непустого множества J на декартовом произведении $\mathbf{S}_J \times A^J$ была определена l-арная операция $[\,]_{l,\mathbf{S}_J,J}$, где $\mathbf{S}_J$ – симметрическая группа всех биекций (подстановок) множества J, A^J – множество всех функций с областью определения J и со значениями в A. Частными случаями этой l-арной операции являются изучавшиеся автором ранее l-арные операции $[\,]_{l,\sigma,k}$ [2], $[\,]_{l,\sigma,J}$ [3] и $[\,]_{l,\mathbf{S}_k,k}$ [4]. В свою очередь, частными случаями l-арной операции $[\,]_{l,\sigma,k}$ являются две полиадические операции Э. Поста, которые он определил [5] на упорядоченных наборах подстановок и упорядоченных наборах матриц соответственно. Основным результатом данной статьи является теорема, в которой описывается ситуация, когда в обобщённом полиадическом группоиде все элементы являются делителями нуля. Под обобщённым полиадическим группоидом понимается l-арный группоид $< \mathbf{S}_J \times A^J, [\,]_{l,\mathbf{S}_J,J} >$.

1 *Предварительные сведения*

Напомним определение l-арной операции $[\,]_{l,\mathbf{S}_J,J}$. Пусть A – группоид, J – произвольное непустое множество, σ – подстановка из $\mathbf{S}_J$. Определим на A^J бинарную операцию $\mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{y}$, полагая

$$(\mathbf{x} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{y})(j) = \mathbf{x}(j)\mathbf{y}(\sigma(j)), j \in J.$$

Далее для любого целого $l \geq 2$ определим на множестве

$$\mathbf{S}_J \times A^J = \{(\sigma, \mathbf{a}) \mid \sigma \in \mathbf{S}_J, \mathbf{a} \in A^J\}$$

l-арную операцию $[\,]_{l,\mathbf{S}_J,J}$ следующим образом:

$$[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{x}_l)]_{l,\mathbf{S}_J,J_j} = (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{y}), \quad (1.1)$$

где

$$\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_l, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 \overset{\sigma_1}{\circ} (\mathbf{x}_2 \overset{\sigma_2}{\circ} (\dots (\mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma_{l-2}}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma_{l-1}}{\circ} \mathbf{x}_l)) \dots)). \quad (1.3)$$

Умножение подстановок в правой части (1.2) осуществляется по правилу

$$\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_l(j) = \sigma_l(\dots\sigma_2(\sigma_1(j))\dots).$$

***Теорема* 1.1** [1]. *Функция* $\mathbf{y}$, *определяемая равенством* (1.3), *принимает в каждой точке* $j \in J$ *значение*

$$\mathbf{y}(j) = \mathbf{x}_1(j)(\mathbf{x}_2(\sigma_1(j))(\mathbf{x}_3(\sigma_1\sigma_2(j))(\dots \dots (\mathbf{x}_{l-1}(\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(j))\mathbf{x}_l(\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(j))) \dots))).$$

Считая в определении операции $[\,]_{l,\mathbf{S}_J,J}$ $J = \{1, 2, \dots, k\}$, $k \geq 2$, получим определённую на множестве $\mathbf{S}_k \times A^k$ l-арную операцию $[\,]_{l,\mathbf{S}_k,k}$:

© *Гальмак А. М.*, 2026

$$[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{x}_l)]_{l, \mathbf{s}_k, k} =$$
$$= (\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_l, \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k)),$$

где все компоненты y_j определяются, согласно теореме 1.1, формулой

$$y_j = x_{1j}\ (x_{2\sigma_1(j)}\ (\dots$$
$$\dots (x_{(l-1)\sigma_1 \dots \sigma_{l-2}(j)}\ x_{l\sigma_1 \dots \sigma_{l-1}(j)}) \dots)). \qquad (1.4)$$

Для полугруппы A операция $[\ ]_{l, \mathbf{s}_k, k}$ определена в [4].

Считая в определении операции $[\ ]_{l, \mathbf{s}_J, J}$ $J = \mathrm{N}$, получим определённую на множестве $\mathbf{S}_\mathrm{N} \times A^\mathrm{N}$ l-арную операцию $[\ ]_{l, \mathbf{s}_\mathrm{N}, \mathrm{N}}$:

$$[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{x}_l)]_{l, \mathbf{s}_\mathrm{N}, \mathrm{N}} =$$
$$= (\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_l, \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k, \dots)),$$

где все компоненты y_j ($j \in \mathrm{N}$) определяются, согласно теореме 1.1, формулой (1.4).

Считая в определении операции $[\ ]_{l, \mathbf{s}_J, J}$ $J = \mathrm{Z}$, получим определённую на множестве $\mathbf{S}_\mathrm{Z} \times A^\mathrm{Z}$ l-арную операцию $[\ ]_{l, \mathbf{s}_\mathrm{Z}, \mathrm{Z}}$:

$$[(\sigma_1, \mathbf{x}_1)(\sigma_2, \mathbf{x}_2) \dots (\sigma_l, \mathbf{x}_l)]_{l, \mathbf{s}_\mathrm{Z}, \mathrm{Z}} =$$
$$= (\sigma, \mathbf{y} = (\dots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \dots)),$$

где все компоненты y_j ($j \in \mathrm{Z}$) определяются, согласно теореме 1.1, формулой (1.4).

Определим на множестве $\mathbf{S}_J$ l-арную операцию $(\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_l)_l = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_l$, которая, как несложно заметить, является ассоциативной. Другими словами, $< \mathbf{S}_J, (\ )_l >$ – l-арная полугруппа. Так как $\mathbf{S}_J$ – группа, то $< \mathbf{S}_J, (\ )_l >$ – l-арная группа.

***Предложение* 1.1** [1]. *Если подмножество $T \subseteq \mathbf{S}_J$ замкнуто относительно l арной операции $(\ )_l$, то множество $T \times A^J$ замкнуто относительно l-арной операции $[\ ]_{l, \mathbf{s}_J, J}$, то есть $< T \times A^J, [\ ]_{l, \mathbf{s}_J, J} >$ – l-арный подгруппоид l-арного группоида $< \mathbf{S}_J \times A^J, [\ ]_{l, \mathbf{s}_J, J} >$.*

***Замечание* 1.1.** Если T – подполугруппа группы $\mathbf{S}_J$, то множество T замкнуто относительно l-арной операции $(\ )_l$, то есть $< T, (\ )_l >$ – l-арная подполугруппа l-арной группы $< \mathbf{S}_J, (\ )_l >$.

Из предложения 1.1, ввиду замечания 1.1, вытекает

***Следствие* 1.1.** *Если T – подполугруппа группы $\mathbf{S}_J$, то множество $T \times A^J$ замкнуто относительно l-арной операции $[\ ]_{l, \mathbf{s}_J, J}$, то есть $< T \times A^J, [\ ]_{l, \mathbf{s}_J, J} >$ – l-арный подгруппоид l-арного группоида $< \mathbf{S}_J \times A^J, [\ ]_{l, \mathbf{s}_J, J} >$.*

Если для подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_J$ выполняется условие $\sigma^l = \sigma$, то $< \{\sigma\}, (\ )_l >$ – l-арная подгруппа l-арной группы $< \mathbf{S}_J, (\ )_l >$. Поэтому из предложения 1.1 при $T = \{\sigma\}$ вытекает

***Теорема* 1.2.** [1]. *Если A – группоид, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< \{\sigma\} \times A^J, [\ ]_{l, \{\sigma\}, J} >$ – l-арный группоид.*

Следующая лемма позволяет отождествить l-арную операцию $[\ ]_{l, \{\sigma\}, J}$ и l-арную операцию $[\ ]_{l, \sigma, J}$ из [3].

***Лемма* 1.1.** *Если A – группоид, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то отображение φ: $(\sigma, \mathbf{a}) \to \mathbf{a}$ является изоморфизмом l-арного группоида $< \{\sigma\} \times A^J, [\ ]_{l, \{\sigma\}, J} >$ на l-арный группоид $< A^J, [\ ]_{l, \sigma, J} >$.*

2 Основной результат

Напомним, что элемент a l-арного группоида $< A, [\ ] >$ называется его *нулем*, если для всех $x_1, \dots, x_l \in A$ верно

$$[ax_2 \dots x_l] = [x_1 a x_3 \dots x_l] = \dots$$
$$\dots = [x_1 \dots x_{l-2} a x_l] = [x_1 \dots x_{l-1} a] = a.$$

Понятно, что l-арный группоид не может иметь более одного нуля.

Элемент a l-арного группоида $< A, [\ ] >$ с нулем 0 называют его *i-ым делителем нуля*, где $i \in \{1, \dots, l\}$, если существуют $b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_l \in A$, отличные от нуля, такие, что

$$[b_1 \dots b_{i-1} a b_{i+1} \dots b_l] = 0.$$

Если элемент a является i-ым делителем нуля для каждого $i \in \{1, \dots, l\}$, то a называют *делителем нуля* в $< A, [\ ] >$.

Понятно, что сам нуль является делителем нуля.

***Теорема* 2.1.** *Если θ – нуль l-арной подполугруппы $< T, (\ )_l >$ l-арной группы $< \mathbf{S}_J, (\ )_l >$, 0 – нуль группоида A, то пара $(\theta, \mathbf{0}) \in T \times A^J$, где $\mathbf{0}(j) = 0$ для любого $j \in J$, является нулем l-арного группоида $< T \times A^J, [\ ]_{l, \mathbf{s}_J, J} >$. Если к тому же $l \geq 3$, каждое из множеств J и A содержит более одного элемента, то в $< T \times A^J, [\ ]_{l, \mathbf{s}_J, J} >$ все элементы являются делителями нуля.*

Доказательство. Пусть $i \in \{1, 2, \dots, l\}$,

$$(\sigma_1, \mathbf{a}_1), \dots, (\sigma_{i-1}, \mathbf{a}_{i-1}),$$
$$(\sigma_{i+1}, \mathbf{a}_{i+1}), \dots, (\sigma_l, \mathbf{a}_l) \in T \times A^J$$

и положим

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1) \dots (\sigma_{i-1}, \mathbf{a}_{i-1})(\theta, \mathbf{0})$$
$$(\sigma_{i+1}, \mathbf{a}_{i+1}) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, \mathbf{s}_J, J_j}]_{l, \mathbf{s}_J, J_j} = (\sigma, \mathbf{y}).$$

Тогда

$$\sigma_1 \dots \sigma_{i-1} \theta \sigma_{i+1} \dots \sigma_l = \sigma,$$

$$\mathbf{y}(j) = \mathbf{a}_1(j)\mathbf{a}_2(\sigma_1(j)) \dots \mathbf{a}_{i-1}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-2}(j))$$
$$\mathbf{0}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}(j))\mathbf{a}_{i+1}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}\theta(j))$$
$$\mathbf{a}_{i+2}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}\theta\sigma_{i+1}(j)) \dots$$
$$\dots \mathbf{a}_l(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}\theta\sigma_{i+1} \dots \sigma_{l-1}(j)), j \in J.$$

Так как θ является нулём в $< T, (\ )_l >$, то из первого равенства следует $\sigma = \theta$, а так как $\mathbf{0}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}(j)) = 0$ – нуль группоида A, то из второго равенства следует $\mathbf{y}(j) = 0$ для любого $j \in J$. Таким образом, $(\sigma, \mathbf{y}) = (\theta, \mathbf{0})$ и верно равенство

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1) \dots (\sigma_{i-1}, \mathbf{a}_{i-1})(\theta, \mathbf{0})$$
$$(\sigma_{i+1}, \mathbf{a}_{i+1}) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, \mathbf{S}_J, J_j} = (\theta, \mathbf{0}).$$

Следовательно, $(\theta, \mathbf{0})$ – нуль l-арного группоида $< T \times A^J, [\ ]_{l, \mathbf{S}_J, J} >$.

Далее, как и в приведенных выше вычислениях, для сокращения записей мы не будем в длинных произведениях элементов из A расставлять скобки, указывающие порядок выполнения бинарной операции в группоиде A, считая, что элементы перемножаются последовательно справа налево.

Пусть $l \geq 3$, $i \in \{1, \dots, l\}$; $(\tau, \mathbf{c})$ – произвольный элемент из $T \times A^J$. Так как группоид A содержит более одного элемента, то в A имеются элементы, отличные от 0. Зафиксируем $k \in J$ и рассмотрим три случая.

1) Если $i \geq 3$, то положим:

$$\sigma_1 = \theta, \sigma_2, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_l \text{ – любые из } T;$$
$$\mathbf{a}_1(k) \neq 0, \mathbf{a}_1(j) = 0, j \in J, j \neq k;$$
$$\mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}, \mathbf{a}_2(\sigma_1(k)) = 0;$$
$$\mathbf{a}_s \neq \mathbf{0}, s \in \{3, \dots, i-1, i+1, \dots, l\}.$$

Тогда, полагая

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1) \dots (\sigma_{i-1}, \mathbf{a}_{i-1})(\tau, \mathbf{c})$$
$$(\sigma_{i+1}, \mathbf{a}_{i+1}) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, \mathbf{S}_J, J_j} = (\rho, \mathbf{z}),$$

получим: во-первых,

$$\rho = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_{i-1}\tau\sigma_{i+1} \dots \sigma_l =$$
$$= \theta\sigma_2 \dots \sigma_{i-1}\tau\sigma_{i+1} \dots \sigma_l = \theta;$$

во-вторых, для $j \in J, j \neq k$ имеем

$$\mathbf{z}(j) = \mathbf{a}_1(j)\mathbf{a}_2(\sigma_1(j)) \dots \mathbf{a}_{i-1}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-2}(j))$$
$$\mathbf{c}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}(j))\mathbf{a}_{i+1}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}\tau(j))$$
$$\mathbf{a}_{i+2}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}\tau\sigma_{i+1}(j)) \dots \mathbf{a}_l(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}\tau\sigma_{i+1} \dots \sigma_{l-1}(j)) =$$
$$= 0\mathbf{a}_2(\sigma_1(j)) \dots \mathbf{a}_{i-1}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-2}(j))$$
$$\mathbf{c}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}(j))\mathbf{a}_{i+1}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}\theta\tau(j))$$
$$\mathbf{a}_{i+2}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}\tau\sigma_{i+1}(j)) \dots \mathbf{a}_l(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}\tau\sigma_{i+1} \dots \sigma_{l-1}(j)) = 0,$$

а для $j = k$ имеем

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{a}_1(k)\mathbf{a}_2(\sigma_1(k))\mathbf{a}_3(\sigma_1\sigma_2(k)) \dots \mathbf{a}_{i-1}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-2}(k))$$
$$\mathbf{c}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}(k))\mathbf{a}_{i+1}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}\tau(k))$$
$$\mathbf{a}_{i+2}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}\tau\sigma_{i+1}(k)) \dots \mathbf{a}_l(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}\tau\sigma_{i+1} \dots \sigma_{l-1}(k)) =$$
$$= \mathbf{a}_1(k)0\mathbf{a}_3(\sigma_1\sigma_2(k)) \dots \mathbf{a}_{i-1}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-2}(k))$$
$$\mathbf{c}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}(k))\mathbf{a}_{i+1}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}\tau(k))$$
$$\mathbf{a}_{i+2}(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}\tau\sigma_{i+1}(k)) \dots \mathbf{a}_l(\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}\tau\sigma_{i+1} \dots \sigma_{l-1}(k)) = 0.$$

Таким образом, если $i \geq 3$, то $\rho = \theta$, $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Следовательно,

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1) \dots (\sigma_{i-1}, \mathbf{a}_{i-1})(\tau, \mathbf{c})$$
$$(\sigma_{i+1}, \mathbf{a}_{i+1}) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, \mathbf{S}_J, J_j} = (\theta, \mathbf{0}),$$

где все $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_l$ отличны от $\mathbf{0}$, а значит и все

$$(\sigma_1, \mathbf{a}_1), \dots, (\sigma_{i-1}, \mathbf{a}_{i-1}), (\sigma_{i+1}, \mathbf{a}_{i+1}), \dots, (\sigma_l, \mathbf{a}_l)$$

отличны от нуля $(\theta, \mathbf{0})$ l-арного группоида $< T \times A^J, [\ ]_{l, \mathbf{S}_J, J} >$.

2) Если $i = 2$, то положим:

$$\sigma_1 = \theta, \sigma_3, \dots, \sigma_l \text{ – любые из } T;$$

$\mathbf{a}_1$ – таким же, как и в случае $i \geq 3$; в $\mathbf{a}_3 \neq \mathbf{0}$ компонента $\mathbf{a}_3(\sigma_1\tau(k))$ равна нулю группоида A; элементы $\mathbf{a}_4, \dots, \mathbf{a}_l$ отличны от $\mathbf{0}$. Тогда, полагая

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1)(\tau, \mathbf{c})(\sigma_3, \mathbf{a}_3) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, \mathbf{S}_J, J_j} = (\rho, \mathbf{z}),$$

получим: во-первых,

$$\rho = \sigma_1\tau\sigma_3 \dots \sigma_l = \theta\tau\sigma_3 \dots \sigma_l = \theta;$$

во-вторых, для $j \in J, j \neq k$ снова имеем $\mathbf{z}(j) = 0$, а для $j = k$ имеем

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{a}_1(k)\mathbf{c}(\sigma_1(k))\mathbf{a}_3(\sigma_1\tau(k))$$
$$\mathbf{a}_4(\sigma_1\tau\sigma_3(k)) \dots \mathbf{a}_l(\sigma_1\tau\sigma_3 \dots \sigma_{l-1}(k)) =$$
$$= \mathbf{a}_1(k)\mathbf{c}(\sigma_1(k))0\mathbf{a}_4(\sigma_1\tau\sigma_3(k)) \dots \mathbf{a}_l(\sigma_1\tau\sigma_3 \dots \sigma_{l-1}(k)) = 0.$$

Таким образом, если $i = 2$, то $\rho = \theta$, $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Следовательно,

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1)(\tau, \mathbf{c})(\sigma_3, \mathbf{a}_3) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, \mathbf{S}_J, J_j} = (\theta, \mathbf{0}),$$

где все $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_l$ отличны от $\mathbf{0}$, а значит и все

$$(\sigma_1, \mathbf{a}_1), (\sigma_3, \mathbf{a}_3), \dots, (\sigma_l, \mathbf{a}_l)$$

отличны от нуля $(\theta, \mathbf{0})$ l-арного группоида $< T \times A^J, [\ ]_{l, \mathbf{S}_J, J} >$.

3) Если $i = 1$, то положим:

$$\sigma_2 = \theta, \sigma_3, \dots, \sigma_l \text{ – любые из } T;$$
$$\mathbf{a}_2(\tau(k)) \neq 0, \mathbf{a}_2(\tau(j)) = 0, j \in J, j \neq k;$$

в $\mathbf{a}_3 \neq \mathbf{0}$ компонента $\mathbf{a}_3(\tau\sigma_2(k))$ равна нулю группоида A; элементы $\mathbf{a}_4, \dots, \mathbf{a}_l$ отличны от $\mathbf{0}$. Тогда, полагая

$$[(\tau, \mathbf{c})(\sigma_2, \mathbf{a}_2)(\sigma_3, \mathbf{a}_3) \dots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, \mathbf{S}_J, J_j} = (\rho, \mathbf{z}),$$

получим: во-первых,

$$\rho = \tau\sigma_2\sigma_3 \dots \sigma_l = \tau\theta\sigma_3 \dots \sigma_l = \theta;$$

во-вторых, для $j \in J, j \neq k$ имеем

$$\mathbf{z}(j) = \mathbf{c}(j)\mathbf{a}_2(\tau(j))\mathbf{a}_3(\tau\sigma_2(j)) \dots \mathbf{a}_l(\tau\sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j)) =$$
$$= \mathbf{c}(j)0\mathbf{a}_3(\tau\sigma_2(j)) \dots \mathbf{a}_l(\tau\sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j)) = 0,$$

а для $j = k$ имеем

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{c}(k)\mathbf{a}_2(\tau(k))\mathbf{a}_3(\tau\sigma_2(k))$$
$$\mathbf{a}_4(\theta\tau\sigma_2\sigma_3(k)) \dots \mathbf{a}_l(\theta\tau\sigma_2 \dots \sigma_{l-1}(j)) =$$

$= \mathbf{c}(k)\mathbf{a}_2(\tau(k))0\mathbf{a}_4(\tau\sigma_2\sigma_3(k)) \ldots \mathbf{a}_l(\tau\sigma_2 \ldots \sigma_{l-1}(j)) = 0.$

Таким образом, если $i = 1$, то $\rho = \theta$, $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Следовательно,

$$[(\tau, \mathbf{c})(\sigma_2, \mathbf{a}_2) \ldots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, \mathbf{S}_J, J_j} = (\theta, \mathbf{0}),$$

где все $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_l$ отличны от $\mathbf{0}$, а значит и все

$$(\sigma_2, \mathbf{a}_2), \ldots, (\sigma_l, \mathbf{a}_l)$$

отличны от нуля $(\theta, \mathbf{0})$ l-арного группоида $< T \times A^J, [\,]_{l, \mathbf{S}_J, J} >$.

Так как для любого $i \in \{1, \ldots, l\}$ существуют такие

$$(\sigma_1, \mathbf{a}_1), \ldots, (\sigma_{i-1}, \mathbf{a}_{i-1}),$$
$$(\sigma_{i+1}, \mathbf{a}_{i+1}), \ldots, (\sigma_l, \mathbf{a}_l) \in T \times A^J,$$

отличные от $(\theta, \mathbf{0})$, что

$$[(\sigma_1, \mathbf{a}_1) \ldots (\sigma_{i-1}, \mathbf{a}_{i-1})(\tau, \mathbf{c})$$
$$(\sigma_{i+1}, \mathbf{a}_{i+1}) \ldots (\sigma_l, \mathbf{a}_l)]_{l, \mathbf{S}_J, J} = (\theta, \mathbf{0}),$$

то $(\tau, \mathbf{c})$ – делитель нуля l-арного группоида $< T \times A^J, [\,]_{l, \mathbf{S}_J, J} >$. □

***Замечание* 2.1.** В доказательстве теоремы 2.1 функция $\mathbf{a}_2$ (пункт 3)) определена корректно, так как для биекции τ из $j \neq k$ всегда следует $\tau(j) \neq \tau(k)$.

***Замечание* 2.2.** Теорема 2.1 останется верной, если в её формулировке l-арную подполугруппу $< T, (\,)_l >$ l-арной группы $< \mathbf{S}_J, (\,)_l >$ заменить подполугруппой T группы $\mathbf{S}_J$.

Полагая в теореме 2.1 $J = \mathrm{N}$, получим

***Следствие* 2.1.** *Если* θ *– нуль* l*-арной подполугруппы* $< T, (\,)_l >$ l*-арной группы* $< \mathbf{S}_\mathrm{N}, (\,)_l >$, 0 *– нуль группоида* A, *то элемент*

$$(\theta, (0_0 = 0, \ldots, 0_j = 0, \ldots)) \in T \times A^\mathrm{N}$$

является нулем l*-арного группоида* $< T \times A^\mathrm{N}, [\,]_{l, \mathbf{S}_\mathrm{N}, \mathrm{N}} >$. *Если к тому же* $l \geq 3$, *группоид* A *содержит более одного элемента*, *то в* $< T \times A^\mathrm{N}, [\,]_{l, \mathbf{S}_\mathrm{N}, \mathrm{N}} >$ *все элементы являются делителями нуля*.

Полагая в теореме 2.1 $J = \mathrm{Z}$, получим

***Следствие* 2.2.** *Если* θ *– нуль* l*-арной подполугруппы* $< T, (\,)_l >$ l*-арной группы* $< \mathbf{S}_\mathrm{Z}, (\,)_l >$, 0 *– нуль группоида* A, *то элемент*

$$(\theta, (\ldots, 0_{-j} = 0, \ldots, 0_0 = 0, \ldots, 0_j = 0, \ldots)) \in T \times A^\mathrm{Z}$$

является нулем l*-арного группоида* $< T \times A^\mathrm{Z}, [\,]_{l, \mathbf{S}_\mathrm{Z}, \mathrm{Z}} >$. *Если к тому же* $l \geq 3$, *группоид* A *содержит более одного элемента*, *то в* $< T \times A^\mathrm{Z}, [\,]_{l, \mathbf{S}_\mathrm{Z}, \mathrm{Z}} >$ *все элементы являются делителями нуля*.

Если подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_J$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то σ – нуль одноэлементной l-арной подполугруппы $< T = \{\sigma\}, (\,)_l >$ l-арной группы $< \mathbf{S}_J, (\,)_l >$. Поэтому из теоремы 2.1 вытекает

***Следствие* 2.3.** *Если подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, 0 *– нуль группоида* A, *то элемент* $(\sigma, \mathbf{0}) \in \{\sigma\} \times A^J$, *где* $\mathbf{0}(j) = 0$ *для любого* $j \in J$, *является нулем* l*-арного группоида* $< \{\sigma\} \times A^J, [\,]_{l, \{\sigma\}, J} >$. *Если к тому же* $l \geq 3$, *каждое из множеств* J *и* A *содержит более одного элемента*, *то в* $< \{\sigma\} \times A^J, [\,]_{l, \{\sigma\}, J} >$ *все элементы являются делителями нуля*.

Следствие 2.3 и лемма 1.1, позволяют сформулировать ещё одно

***Следствие* 2.4.** *Если подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_J$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, 0 *– нуль группоида* A, *то элемент* $\mathbf{0} \in A^J$ *такой*, *что* $\mathbf{0}(j) = 0$ *для любого* $j \in J$, *является нулем* l*-арного группоида* $< A^J, [\,]_{l, \sigma, J} >$. *Если к тому же* $l \geq 3$, *каждое из множеств* J *и* A *содержит более одного элемента*, *то в* $< A^J, [\,]_{l, \sigma, J} >$ *все элементы являются делителями нуля*.

В следствии 2.4 условие $\sigma^l = \sigma$ излишне, так как имеет место

***Теорема* 2.2** [3, теорема 2.8.1]. *Если* 0 *– нуль группоида* A, *то функция* $\mathbf{0} \in A^J$ *такая*, *что* $\mathbf{0}(j) = 0$ *для любого* $j \in J$, *является нулем* l*-арного группоида* $< A^J, [\,]_{l, \sigma, J} >$. *Если к тому же* $l \geq 3$, *каждое из множеств* J *и* A *содержит более одного элемента*, *то в* $< A^J, [\,]_{l, \sigma, J} >$ *все элементы являются делителями нуля*.

***Замечание* 2.3.** Доказательство теоремы 2.1 ценно своей независимостью от соответствующих результатов об операциях $[\,]_{l, \sigma, k}$, $[\,]_{l, \sigma, J}$ и $[\,]_{l, \mathbf{s}_k, k}$, являющихся частными случаями l-арной операции $[\,]_{l, \mathbf{S}_J, J}$. В этом доказательстве используются только определение делителя нуля l-арного группоида и определение l-арной операция $[\,]_{l, \mathbf{S}_J, J}$. Если же воспользоваться результатами об операциях $[\,]_{l, \sigma, k}$, $[\,]_{l, \sigma, J}$ и $[\,]_{l, \mathbf{S}_k, k}$, то доказательство теоремы 2.1 можно значительно сократить. Приведём пример такого доказательства, воспользовавшись теоремой 2.8.1 из [3] об операции $[\,]_{l, \sigma, J}$.

Второе доказательство теоремы 2.1. Пусть $(\sigma, \mathbf{a})$ – произвольный элемент из $T \times A^J$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $i \in \{1, 2, \ldots, l-1\}$. По теореме 2.8.1 из [3] в l-арном группоиде $< A^J, [\,]_{l, \sigma, J} >$ все элементы являются делителями нуля, то есть для любого $i \in \{1, \ldots, l\}$ существуют

$$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_l \in A^J,$$

отличные от нуля, такие, что

$$[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{i-1}\mathbf{a}\mathbf{a}_{i+1} \ldots \mathbf{a}_l]_{l, \sigma, J} = \mathbf{0}.$$

Это равенство, в силу определения l-арной операции $[\,]_{l, \sigma, J}$, переписывается в виде

$$\mathbf{a}_1 \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{a}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\dots (\mathbf{a}_{i-1} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{a} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{a}_{i+1} \overset{\sigma}{\circ} \dots$$

$$\dots (\mathbf{a}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{a}_l) \dots))) \dots)) = \mathbf{0}. \qquad (2.1)$$

Для элементов

$$(\sigma, \mathbf{a}_1), \dots, (\sigma, \mathbf{a}_{i-1}), (\sigma, \mathbf{a}), (\sigma, \mathbf{a}_{i+1}), \dots$$
$$\dots, (\sigma, \mathbf{a}_{l-1}), (\theta, \mathbf{a}_l) \in T \times A^J$$

положим:

$$[(\sigma, \mathbf{a}_1) \dots (\sigma, \mathbf{a}_{i-1})(\sigma, \mathbf{a})(\sigma, \mathbf{a}_{i+1}) \dots$$
$$\dots (\sigma, \mathbf{a}_{l-1})(\theta, \mathbf{a}_l)]_{l, \mathbf{s}_J, J} = (\rho, \mathbf{b}).$$

Тогда, в силу определения l-арной операции $[\,]_{l, \mathbf{s}_J, J}$, имеем

$$\sigma^{l-1}\theta = \rho$$

и, кроме того,

$$\mathbf{a}_1 \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{a}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\dots (\mathbf{a}_{i-1} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{a} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{a}_{i+1} \overset{\sigma}{\circ} \dots$$
$$\dots (\mathbf{a}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{a}_l) \dots))) \dots)) = \mathbf{b},$$

Так как θ является нулём в l-арном группоиде $< T, (\,)_l >$, то из первого равенства следует $\rho = \theta$, а из второго равенства и из (2.1) вытекает $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Следовательно,

$$[(\sigma, \mathbf{a}_1) \dots (\sigma, \mathbf{a}_{i-1})(\sigma, \mathbf{a})(\sigma, \mathbf{a}_{i+1}) \dots$$
$$\dots (\sigma, \mathbf{a}_{l-1})(\theta, \mathbf{a}_l)]_{l, \mathbf{s}_J, J} = (\theta, \mathbf{0}).$$

А так как все элементы

$$(\sigma, \mathbf{a}_1), \dots, (\sigma, \mathbf{a}_{i-1}), (\sigma, \mathbf{a}_{i+1}), \dots, (\sigma, \mathbf{a}_{l-1}), (\theta, \mathbf{a}_l)$$

отличны от нуля $(\theta, \mathbf{0})$ l-арного группоида $< T \times A^J, [\,]_{l, \mathbf{s}_J, J} >$, то элемент $(\sigma, \mathbf{a})$ является i-ым делителем нуля этого l-арного группоида для любого $i \in \{1, 2, \dots, l-1\}$.

2) Пусть теперь $i = l$. По теореме 2.8.1 из [3] в l-арном группоиде $< A^J, [\,]_{l, \theta, J} >$ все элементы являются делителями нуля. В частности, для $i = l$ существуют

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{l-1}, \in A^J,$$

отличные от нуля, такие, что

$$[\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_{l-1}\mathbf{a}]_{l, \theta, J} = \mathbf{0}.$$

Это равенство, в силу определения l-арной операции $[\,]_{l, \theta, J}$, переписывается в виде

$$\mathbf{a}_1 \overset{\theta}{\circ} (\mathbf{a}_2 \overset{\theta}{\circ} (\dots (\mathbf{a}_{l-1} \overset{\theta}{\circ} \mathbf{a}) \dots)) = \mathbf{0}. \qquad (2.2)$$

Для элементов

$$(\theta, \mathbf{a}_1), (\theta, \mathbf{a}_2), \dots, (\theta, \mathbf{a}_{l-1}), (\sigma, \mathbf{a}) \in T \times A^J$$

положим:

$$[(\theta, \mathbf{a}_1)(\theta, \mathbf{a}_2) \dots (\theta, \mathbf{a}_{l-1})(\sigma, \mathbf{a})]_{l, \mathbf{s}_J, J} = (\tau, \mathbf{c}).$$

Тогда, в силу определения l-арной операции $[\,]_{l, \mathbf{s}_J, J}$, имеем

$$\theta^{l-1}\sigma = \tau$$

и, кроме того,

$$\mathbf{a}_1 \overset{\theta}{\circ} (\mathbf{a}_2 \overset{\theta}{\circ} (\dots (\mathbf{a}_{l-1} \overset{\theta}{\circ} \mathbf{a}) \dots)) = \mathbf{c},$$

Так как θ является нулём в l-арном группоиде $< T, (\,)_l >$, то из первого равенства следует $\tau = \theta$, а из второго равенства и из (2.2) вытекает $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Следовательно,

$$[(\theta, \mathbf{a}_1)(\theta, \mathbf{a}_2) \dots (\theta, \mathbf{a}_{l-1})(\sigma, \mathbf{a})]_{l, \mathbf{s}_J, J} = (\theta, \mathbf{0}).$$

А так как все элементы

$$(\theta, \mathbf{a}_1), (\theta, \mathbf{a}_2), \dots, (\theta, \mathbf{a}_{l-1})$$

отличны от нуля $(\theta, \mathbf{0})$ l-арного группоида $< T \times A^J, [\,]_{l, \mathbf{s}_J, J} >$, то элемент $(\sigma, \mathbf{a})$ является l-ым делителем нуля этого l-арного группоида.

Из 1) и 2) вытекает, что элемент $(\sigma, \mathbf{a})$ является делителем нуля l-арного группоида $< T \times A^J, [\,]_{l, \mathbf{s}_J, J} >$. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гальмак, А. М.* Об операции $[\,]_{l, T, J}$ / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2014. – № 1. – С. 5–13.

2. *Гальмак*, А. М. Многоместные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Мн. : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

3. *Гальмак, А. М.* Полиадические операции на множествах функций / А. М. Гальмак, Ю. И. Кулаженко. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2013. – 192 с.

4. *Гальмак, А. М.* Обобщённые полиадические операции / А. М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 2 (15). – С. 50–57.

5. *Post, E. L.* Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

Поступила в редакцию 07.08.2026.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор