

ГОМОМОРФИЗМЫ ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППОИДОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв

HOMOMORPHISMS OF POLYADIC GROUPOIDS OF A SPECIAL FORM

A. M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev

Аннотация. В статье изучаются гомоморфизмы полиадических группоидов специального вида, то есть полиадических группоидов с l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, которая называется полиадической операцией специального вида и определяется на декартовой степени A^k n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки $\sigma \in S_k$ и n -арной операции η .

Ключевые слова: полиадический группоид, n -арный группоид, гомоморфизм, полуинвариантная l -арная подгруппа, факторгруппа.

Для цитирования: Гальмак, А. М. Гомоморфизмы полиадических группоидов специального вида / А. М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 2 (67). – С. 59–63. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_2_67_59. – EDN: YHRUBL

Abstract. The article studies homomorphisms of polyadic groupoids of a special form, that is polyadic groupoids with l -ary operation $\eta_{s, \sigma, k}$, that is called polyadic operation of a special form and defined on Cartesian power of A^k n -ary groupoids $\langle A, \eta \rangle$ by substitution $\sigma \in S_k$ and n -ary operation η .

Keywords: polyadic groupoid, n -ary groupoid, homomorphism, semiinvariant l -ary subgroups, quotient group.

For citation: Gal'mak, A. M. Homomorphisms of polyadic groupoids of a special form / A. M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 2 (67). – P. 59–63. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_2_67_59 (in Russian). – EDN: YHRUBL

Введение

Полиадическим группоидом специального вида называют [1] универсальную алгебру $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ с одной l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, где $l = s(n-1) + 1$, которая определяется на декартовой степени A^k n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ и n -арной операции η следующим образом.

Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид,

$$n \geq 2, s \geq 1, l = s(n-1) + 1, k \geq 2, \sigma \in S_k.$$

Определим на A^k вначале n -арную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) &= \\ &= \eta_{1, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{n1}, \dots, x_{nk})) = \\ &= (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \dots, \\ &\dots, \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(k)})), \end{aligned}$$

а затем l -арную операцию

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) &= \\ &= \eta_{s, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{l1}, \dots, x_{lk})) = \\ &= \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{n-1} \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_n \dots \mathbf{x}_{2(n-1)})) \\ &= \eta_{1, \sigma, k}(\dots \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1} \dots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)})) \end{aligned}$$

$$\eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \dots \mathbf{x}_{s(n-1)+1}) \dots).$$

При $s = 1$ l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$, определяемая последним равенством, совпадает с n -арной операцией $\eta_{1, \sigma, k}$, определяемой предыдущим равенством.

Частным случаем ($n = 2$) полиадической операции $\eta_{s, \sigma, k}$ является l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$, где $l = s + 1$, которая первоначально была определена в [2] для любых целых $k \geq 2, l \geq 2$ и любой подстановки $\sigma \in S_k$ на k -ой декартовой степени A^k полугруппы A . Изучению l -арных операций $[]_{l, \sigma, k}$ и $\eta_{s, \sigma, k}$ посвящены соответственно книги [3] и [4].

Для n -арной полугруппы $\langle A, \eta \rangle$ l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ может быть определена следующим образом [1]:

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) &= \\ &= \eta_{s, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{l1}, \dots, x_{lk})) = \\ &= (y_1, \dots, y_k), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} y_j &= \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) = \\ &= \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \dots x_{l\sigma^{l-1}(j)}), j = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

В данной статье изучаются гомоморфизмы полиадических группоидов $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ с l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, определённой выше.

1 Вспомогательные результаты

В [1] было доказано, что если n -арная операция η является ассоциативной, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ также является ассоциативной, то есть имеет место

Теорема 1.1 [1, теорема 2.1]. *Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная полугруппа.*

Следующая теорема, доказанная в [5], показывает, что в случае тождественности подстановки σ^{l-1} не только свойство ассоциативности, но и свойство быть полиадической группой также переносится с $\langle A, \eta \rangle$ на $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Теорема 1.2 [5, теорема 4.1]. *Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа.*

Как показывает следующая теорема, для переноса свойства быть полиадической квазигруппой с n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ на l -арный группоид $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не требуется тождественность подстановки σ^{l-1} .

Теорема 1.3 [5, теорема 3.1]. *Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная квазигруппа, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная квазигруппа.*

Нам понадобятся также следующие лемма и теорема.

Лемма 1.1 [6, лемма 2.1]. *Пусть $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$. Тогда*

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}) = \eta(x_1 \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(x_k \underbrace{B \dots B}_{n-1}).$$

Теорема 1.4 [6, теорема 3.1]. *Если подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ полуинвариантна в ней тогда и только тогда, когда n -арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ полуинвариантна в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$.*

Информацию о полуинвариантных полиадических подгруппах полиадических групп можно найти у Поста [7], а также в монографиях [8]–[10].

2 Основные результаты

Основным результатом данной статьи является

Теорема 2.1. *Пусть φ – гомоморфизм (изоморфизм) n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ на n -арный группоид $\langle B, \mu \rangle$, ψ – отображение A^k на B^k по правилу*

$$\psi : \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \rightarrow \mathbf{x}^\psi = (x_1^\psi, \dots, x_k^\psi).$$

Тогда ψ является гомоморфизмом (изоморфизмом) l -арного группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ на l -арный группоид $\langle B^k, \mu_{s, \sigma, k} \rangle$.

Доказательство. Докажем вначале, что отображение ψ является гомоморфизмом (изоморфизмом) n -арного группоида $\langle A^k, \eta_{1, \sigma, k} \rangle$ на n -арный группоид $\langle B^k, \mu_{1, \sigma, k} \rangle$.

Так как для любых $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik}) \in A^k$, где $i = 1, \dots, n$ верно

$$\begin{aligned} & (\eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n))^\psi = \\ &= (\eta_{1, \sigma, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{n1}, \dots, x_{nk})))^\psi = \\ &= (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \dots \\ & \dots, \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(k)}))^\psi = \\ &= ((\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(1)}))^\psi, \dots \\ & \dots, (\eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \dots x_{n\sigma^{n-1}(k)}))^\psi) = \\ &= (\mu(x_{11}^\psi x_{2\sigma(1)}^\psi \dots x_{n\sigma^{n-1}(1)}^\psi), \dots \\ & \dots, \mu(x_{1k}^\psi x_{2\sigma(k)}^\psi \dots x_{n\sigma^{n-1}(k)}^\psi)) = \\ &= \mu_{1, \sigma, k}((x_{11}^\psi, \dots, x_{1k}^\psi) \dots (x_{n1}^\psi, \dots, x_{nk}^\psi)) = \\ &= \mu_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_1^\psi \dots \mathbf{x}_n^\psi), \end{aligned}$$

то

$$(\eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n))^\psi = \mu_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_1^\psi \dots \mathbf{x}_n^\psi).$$

Следовательно ψ – гомоморфизм $\langle A^k, \eta_{1, \sigma, k} \rangle$ на $\langle B^k, \mu_{1, \sigma, k} \rangle$.

Ясно, что если φ – биекция A на B , то ψ – биекция A^k на B^k . Поэтому для изоморфизма φ отображение ψ также является изоморфизмом.

Так как ψ – гомоморфизм (изоморфизм) $\langle A^k, \eta_{1, \sigma, k} \rangle$ на $\langle B^k, \mu_{1, \sigma, k} \rangle$, то

$$\begin{aligned} & (\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l))^\psi = \\ &= (\eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_{n-1} \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_n \dots \mathbf{x}_{2(n-1)} \\ & \eta_{1, \sigma, k}(\dots \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1} \dots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)} \\ & \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \dots \mathbf{x}_{s(n-1)+1})) \dots)))^\psi = \\ &= \mu_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_1^\psi \dots \mathbf{x}_{n-1}^\psi (\eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_n \dots \mathbf{x}_{2(n-1)} \\ & \eta_{1, \sigma, k}(\dots \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1} \dots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)} \\ & \eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \dots \mathbf{x}_{s(n-1)+1})) \dots)))^\psi = \\ & \dots \\ &= \mu_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_1^\psi \dots \mathbf{x}_{n-1}^\psi \mu_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_n^\psi \dots \mathbf{x}_{2(n-1)}^\psi \\ & \mu_{1, \sigma, k}(\dots \mu_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1}^\psi \dots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)}^\psi \\ & (\eta_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \dots \mathbf{x}_{s(n-1)+1}))^\psi) \dots))) = \\ &= \mu_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_1^\psi \dots \mathbf{x}_{n-1}^\psi \mu_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_n^\psi \dots \mathbf{x}_{2(n-1)}^\psi \\ & \mu_{1, \sigma, k}(\dots \mu_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1}^\psi \dots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)}^\psi \\ & \mu_{1, \sigma, k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1}^\psi \dots \mathbf{x}_{s(n-1)+1}^\psi) \dots))) = \\ &= \mu_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1^\psi \dots \mathbf{x}_l^\psi), \end{aligned}$$

то есть

$$(\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l))^{\psi} = \mu_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1^{\psi} \dots \mathbf{x}_l^{\psi}).$$

Следовательно, ψ – гомоморфизм (изоморфизм) $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ на $\langle B^k, \mu_{s, \sigma, k} \rangle$. $\square$

Теоремы 2.1 и 1.3 позволяют сформулировать

Следствие 2.1. Если φ – гомоморфизм (изоморфизм) n -арной квазигруппы $\langle A, \eta \rangle$ на n -арную квазигруппу $\langle B, \mu \rangle$, то отображение ψ из теоремы 2.1 является гомоморфизмом (изоморфизмом) l -арной квазигруппы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ на l -арную квазигруппу $\langle B^k, \mu_{s, \sigma, k} \rangle$.

Теоремы 2.1 и 1.1 позволяют сформулировать

Следствие 2.2. Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, φ – гомоморфизм (изоморфизм) n -арной полугруппы $\langle A, \eta \rangle$ на n -арную полугруппу $\langle B, \mu \rangle$, то отображение ψ из теоремы 2.1 является гомоморфизмом (изоморфизмом) l -арной полугруппы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ на l -арную полугруппу $\langle B^k, \mu_{s, \sigma, k} \rangle$.

Теоремы 2.1 и 1.2 позволяют сформулировать

Следствие 2.3. Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, φ – гомоморфизм (изоморфизм) n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ на n -арную группу $\langle B, \mu \rangle$, то отображение ψ из теоремы 2.1 является гомоморфизмом (изоморфизмом) l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ на l -арную группу $\langle B^k, \mu_{s, \sigma, k} \rangle$.

Замечание 2.1. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арный группоид, то на декартовой степени A^k его носителя A можно с помощью n -арной операции η поточечно определить n -арную операцию, которую обычно обозначают тем же символом η :

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) &= \\ &= \eta((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{n1}, \dots, x_{nk})) = \\ &= (\eta(x_{11}x_{21} \dots x_{n1}), \dots, \eta(x_{1k}x_{2k} \dots x_{nk})). \end{aligned}$$

С другой стороны, если в определении n -арной операции $\eta_{1, \sigma, k}$ подстановка σ совпадает с тождественной подстановкой ε , то согласно этому определению

$$\begin{aligned} \eta_{1, \varepsilon, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) &= \\ &= \eta_{1, \varepsilon, k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{n1}, \dots, x_{nk})) = \\ &= (\eta(x_{11}x_{21} \dots x_{n1}), \dots, \eta(x_{1k}x_{2k} \dots x_{nk})). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\eta(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) = \eta_{1, \varepsilon, k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n),$$

то есть n -арные группоиды $\langle A^k, \eta \rangle$ и $\langle A^k, \eta_{1, \sigma, k} \rangle$ совпадают. Поэтому любой результат, справедливый для n -арного группоиды $\langle A^k, \eta_{1, \sigma, k} \rangle$, будет справедливым и для n -арного группоиды $\langle A^k, \eta \rangle$. В частности, из теоремы 1.3

следует, что, если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная квазигруппа, то $\langle A^k, \eta \rangle$ – n -арная квазигруппа. Так как тождественная подстановка ε удовлетворяет условию $\varepsilon^n = \varepsilon$, то согласно теореме 1.1 (теореме 1.2), если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа (n -арная группа), то $\langle A^k, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа (n -арная группа). Разумеется, эти результаты могут быть получены и без ссылок на указанные теоремы.

В качестве ещё одного примера такого рода сформулируем следующий результат, соответствующий теореме 2.1 (следствиям 1.1–1.3), если в них положить $s = 1$.

Следствие 2.4. Если φ – гомоморфизм (изоморфизм) n -арного группоиды $\langle A, \eta \rangle$ на n -арный группоид $\langle B, \mu \rangle$, то отображение ψ из теоремы 2.1 является гомоморфизмом (изоморфизмом) n -арного группоиды (n -арной полугруппы, n -арной группы, n -арной квазигруппы) $\langle A^k, \eta \rangle$ на n -арный группоид (n -арную полугруппу, n -арную группу, n -арную квазигруппу) $\langle B^k, \mu \rangle$.

Полагая в теореме 2.1 и следствиях 1.1–1.3 $n = 2$, получим ещё два следствия.

Следствие 2.5. Если φ – гомоморфизм (изоморфизм) группоиды (квазигруппы) A на группоид (квазигруппу) B , то отображение ψ из теоремы 2.1 является гомоморфизмом (изоморфизмом) l -арного группоиды (l -арной квазигруппы) $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ на l -арную квазигруппу $\langle B^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$.

Следствие 2.6. Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, φ – гомоморфизм (изоморфизм) полугруппы (группы) A на полугруппу (группу) B , то отображение ψ из теоремы 2.1 является гомоморфизмом (изоморфизмом) l -арной полугруппы (l -арной группы) $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ на l -арную полугруппу (l -арную группу) $\langle B^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$.

Следствиями теоремы 2.1 и следствий 1.1–1.3 являются также следующие два следствия.

Следствие 2.7. Если φ – эндоморфизм (автоморфизм) n -арного группоиды (n -арной квазигруппы) $\langle A, \eta \rangle$, то отображение ψ из теоремы 2.1 является эндоморфизмом (автоморфизмом) l -арного группоиды (l -арной квазигруппы) $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Теоремы 2.1 и 1.1 позволяют сформулировать

Следствие 2.8. Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, φ – эндоморфизм (автоморфизм) n -арной полугруппы (n -арной группы) $\langle A, \eta \rangle$, то отображение ψ из теоремы 2.1 является эндоморфизмом (автоморфизмом) l -арной полугруппы (l -арной группы) $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Полагая в следствиях 2.7 и 2.8 $n = 2$, получим ещё два следствия.

Следствие 2.9. Если φ – эндоморфизм (автоморфизм) группоиды (квазигруппы) A , то

отображение ψ из теоремы 2.1 является эндоморфизмом (автоморфизмом) l -арной группы (ида (l -арной квазигруппы) $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$.

Теоремы 2.1 и 1.1 позволяют сформулировать

Следствие 2.10. Если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, φ – эндоморфизм (автоморфизм) полугруппы (группы) A , то отображение ψ из теоремы 2.1 является эндоморфизмом (автоморфизмом) l -арной полугруппы (l -арной группы) $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$.

Предложение 1.1. Пусть φ – гомоморфизм n -арной квазигруппы $\langle A, \eta \rangle$ на n -арную квазигруппу $\langle B, \mu \rangle$, ψ – отображение из теоремы 2.1, $\mathbf{x} = \mathbf{c}$ – решение $\mathbf{v} \in A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ уравнения

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{i-1} \mathbf{x} \mathbf{a}_{i+1} \dots \mathbf{a}_l) = \mathbf{b},$$

$\mathbf{v} = \mathbf{b}^\psi, \mathbf{u}_m = \mathbf{a}_m^\psi$, где $m = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, l$. Тогда $\mathbf{c}^\psi$ – решение $\mathbf{v} \in B^k, \mu_{s, \sigma, k} \rangle$ уравнения

$$\mu_{s, \sigma, k}(\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_{i-1} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_{i+1} \dots \mathbf{u}_l) = \mathbf{v}.$$

Доказательство. Согласно теореме 1.3 $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ и $\langle B^k, \mu_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арные квазигруппы. Поэтому указанные в формулировке предложения уравнения действительно разрешимы.

Так как

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{i-1} \mathbf{c} \mathbf{a}_{i+1} \dots \mathbf{a}_l) = \mathbf{b},$$

ψ – гомоморфизм $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ на $\langle B^k, \mu_{s, \sigma, k} \rangle$, то

$$(\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{i-1} \mathbf{c} \mathbf{a}_{i+1} \dots \mathbf{a}_l))^\psi = \mathbf{b}^\psi,$$

откуда

$$\mu_{s, \sigma, k}(\mathbf{a}_1^\psi \dots \mathbf{a}_{i-1}^\psi \mathbf{c}^\psi \mathbf{a}_{i+1}^\psi \dots \mathbf{a}_l^\psi) = \mathbf{b}^\psi,$$

$$\mu_{s, \sigma, k}(\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_{i-1} \mathbf{c}^\psi \mathbf{u}_{i+1} \dots \mathbf{u}_l) = \mathbf{v}.$$

Следовательно, $\mathbf{c}^\psi$ – решение второго уравнения из формулировки предложения. $\square$

Теорема 2.2. Пусть подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, φ – естественный гомоморфизм n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ на n -арную факторгруппу $\langle A/B, \eta \rangle$, τ – естественный гомоморфизм l -арной группы $\langle A^k/B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ на l -арную факторгруппу $\langle A^k/B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. Тогда:

1) для любого $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$ верно равенство

$$\mathbf{x}^\tau = x_1^\varphi \times \dots \times x_k^\varphi;$$

2) l -арная факторгруппа

$$\begin{aligned} & \langle A^k/B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle = \\ & = \langle \{ \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x} B^k \dots B^k) \mid \mathbf{x} \in A^k \}, \eta_{s, \sigma, k} \rangle = \\ & = \langle \{ \eta_{s, \sigma, k}((x_1, \dots, x_k) B^k \dots B^k) \mid \end{aligned}$$

$$x_1, \dots, x_k \in A \}, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$$

может быть представлена следующим образом

$$\begin{aligned} & \langle A^k/B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle = \\ & = \langle \{ \eta(x_1 \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(x_k \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \mid \\ & \quad x_1, \dots, x_k \in A \}, \eta_{s, \sigma, k} \rangle = \\ & = \langle \{ x_1^\varphi \times \dots \times x_k^\varphi \mid x_1, \dots, x_k \in A \}, \eta_{s, \sigma, k} \rangle; \end{aligned}$$

3) для любых смежных классов

$$\begin{aligned} & \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}) = \\ & \eta_{s, \sigma, k}((x_{i1}, \dots, x_{ik}) \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}), i = 1, \dots, l \end{aligned}$$

l -арной факторгруппы $\langle A^k/B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ верно равенство

$$\begin{aligned} & \eta_{s, \sigma, k}(\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}) \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}) \dots \\ & \dots \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}) \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1})) = \\ & = \eta(\eta(x_{11} x_{2\sigma(1)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(1)} x_{l1}) \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \\ & \dots \times \eta(\eta(x_{1k} x_{2\sigma(k)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(k)} x_{lk}) \underbrace{B \dots B}_{n-1}). \end{aligned}$$

Доказательство. Существование l -арной факторгруппы $\langle A^k/B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ является следствием теоремы 1.4, согласно которой $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – полуинвариантная l -арная подгруппа l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

1) Выпишем в явном виде гомоморфизмы φ и τ :

$$\varphi: x \rightarrow \eta(\underbrace{x B \dots B}_{n-1});$$

$$\begin{aligned} \tau: \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) & \rightarrow \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}) = \\ & = \eta_{s, \sigma, k}((x_1, \dots, x_k) \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}). \end{aligned}$$

Тогда, используя лемму 1.1, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\tau & = \{ \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}) = \\ & = \eta_{s, \sigma, k}((x_1, \dots, x_k) \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}) = \\ & = \eta(\underbrace{x_1 B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(\underbrace{x_k B \dots B}_{n-1}) = x_1^\varphi \times \dots \times x_k^\varphi, \end{aligned}$$

то есть

$$\mathbf{x}^\tau = x_1^\varphi \times \dots \times x_k^\varphi.$$

2) Используется лемма 1.1.

3) Так как $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – полуинвариантная l -арная подгруппа l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, то

$$\begin{aligned} & \eta_{s, \sigma, k}(\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{x_1 B^k \dots B^k}_{l-1}) \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{x_2 B^k \dots B^k}_{l-1}) \dots \\ & \dots \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{x_{l-1} B^k \dots B^k}_{l-1}) \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{x_l B^k \dots B^k}_{l-1})) = \\ & = \eta_{s, \sigma, k}(\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{x_1 x_2 \dots x_{l-1} x_l}_{l-1}) B^k \dots B^k). \end{aligned}$$

А так как согласно определению l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$,

$$\eta_{s, \sigma, k}(x_1 x_2 \dots x_{l-1} x_l) = (y_1, \dots, y_k),$$

где

$$y_j = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_{l\sigma^{l-1}(j)})$$

для любого $j = 1, \dots, k$, то

$$\begin{aligned} & \eta_{s, \sigma, k}(\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{x_1 B^k \dots B^k}_{l-1}) \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{x_2 B^k \dots B^k}_{l-1}) \dots \\ & \dots \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{x_{l-1} B^k \dots B^k}_{l-1}) \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{x_l B^k \dots B^k}_{l-1})) = \\ & = \eta_{s, \sigma, k}((\eta(x_{11} x_{2\sigma(1)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(1)} x_{l\sigma^{l-1}(1)}), \dots \\ & \dots, \eta(x_{1k} x_{2\sigma(k)} \dots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(k)} x_{l\sigma^{l-1}(k)})) \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}). \end{aligned}$$

Осталось воспользоваться тождественностью подстановки σ^{l-1} и применить лемму 1.1. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А. М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А. М. Гальмак, А. Д. Русаков // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2014. – № 3 (84). – С. 35–40.
2. Гальмак, А. М. Многочестные ассоциативные операции на декартовых степенях /

А. М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.

3. Гальмак, А. М. Многочестные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Мн. : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

4. Гальмак, А. М. Специальные полиадические операции / А. М. Гальмак. – Могилёв : Изд. центр МГУП, 2024. – 231 с.

5. Гальмак, А. М. О разрешимости уравнений в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ / А. М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А. А. Куляшова. – 2018. – № 1 (51). – С. 4–10.

6. Гальмак, А. М. Полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида. I / А. М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 54–58.

7. Post, E. L. Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

8. Русаков, С. А. Алгебраические n -арные системы / С. А. Русаков. – Мн. : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

9. Гальмак, А. М. n -Арные группы. Часть 1 / А. М. Гальмак. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.

10. Щучкин, Н. А. Введение в теорию n -групп / Н. А. Щучкин. – Волгоград : Принт, 2019. – 236 с.

Поступила в редакцию 06.05.2026.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор