

КОЛЕБАНИЯ ПЯТИСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛОКАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

Д. А. Будникова

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

VIBRATIONS OF A FIVE-LAYER ROD UNDER THE ACTION OF A LOCAL LOAD

D. A. Budnikova

Belarusian State University of Transport, Gomel

Аннотация. Рассмотрена задача о вынужденных колебаниях пятислойного симметричного по толщине стержня под действием локальной равномерно распределенной поверхностной нагрузки. Три несущих слоя (центральный и два внешних) предполагаются тонкими, высокопрочными. Для них приняты гипотезы Бернулли. В двух относительно толстых легких заполнителях выполняется гипотеза Тимошенко, т. е. учитывается дополнительный сдвиг нормали. Система дифференциальных уравнений колебаний выведена вариационными методами. Аналитическое решение задачи получено с помощью разложения искомых перемещений в ряд по построенной системе собственных ортонормированных функций. Проведен параметрический анализ зависимости перемещений от длины пятна нагрузки, материалов несущих слоев и заполнителей.

Ключевые слова: симметричный пятислойный стержень, локальная нагрузка, колебания, параметрический анализ перемещений.

Для цитирования: Будникова, Д. А. Колебания пятислойного стержня под действием локальной нагрузки / Д. А. Будникова // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 2 (67). – С. 17–22. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_2_67_17. – EDN: ESGYJF

Abstract. This paper examines the problem of forced vibrations of a five-layer rod symmetric in thickness under a local, uniformly distributed surface load. The three load-bearing layers (the central layer and the two outer layers) are assumed to be thin and high-strength. Bernoulli's assumptions are adopted for them. In the two relatively thick lightweight fillers, Timoshenko's assumption is applied, i. e., additional shear of the normal is taken into account. The system of differential equations of vibration is derived using variational methods. An analytical solution to the problem is obtained by expanding the sought displacements into a series based on a constructed system of eigenfunctions. A parametric analysis of the dependence of displacements on the length of the load patch, the materials of the load-bearing layers, and the fillers is performed.

Keywords: symmetrical five-layer rod, localized load, vibrations, parametric displacement analysis.

For citation: Budnikova, D. A. Vibrations of a five-layer rod under the action of a local load / D. A. Budnikova // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 2 (67). – P. 17–22. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_2_67_17 (in Russian). – EDN: ESGYJF

Введение

Разработке методов расчета слоистых конструкций на различные виды и типы нагрузок посвящен ряд публикаций. В монографиях [1]–[3] предложены различные подходы к построению расчетных моделей слоистых конструкций, выполненных из композитных материалов, проявляющих в процессе деформирования упругие и пластические свойства. Тонкие несущие слои приняты достаточно жесткими, для них выполняются гипотезы Кирхгофа. Заполнители легкие, в них справедлива гипотеза Тимошенко, т. е. учитывается деформация относительного сдвига. Прикладные проблемы применения и расчета неоднородных конструкций рассматривались в [4], [5].

Динамическое деформирование трехслойных цилиндрических оболочек под действием локальных нагрузок исследовалось в статье [6], [7]. Анализ собственных и вынужденных колебаний трехслойных стержней приведен в [8]. Колебания трех- и пятислойных круговых пластин при внешнем воздействии рассмотрены в работах [9]–[12]. Решения задач динамики получены методом разложения искомых перемещений в ряды по системам собственных функций.

Дисперсионные и энергетические характеристики изгибных волн в упругой пластине, лежащей на двухпараметрическом упругом основании, исследованы в статье [13].

Постановки и решения краевых задач о квазистатическом деформировании трехслойных упругих стержней и круговых пластин,

взаимодействующих с упругими однопараметрическими и двухпараметрическими основаниями, предложены в публикациях [14]–[16]. Изгиб трехслойных упругопластических пластин при термостатических нагрузках рассмотрен в [17]. Деформирование упругой пятислойной симметричной по толщине круговой пластины под действием непрерывной нагрузки исследовано в [18].

Собственные колебания пятислойных симметричных по толщине стержней рассмотрены в работах [19]–[23]. Изучены собственные частоты и формы колебаний, построены системы собственных ортонормированных функций.

Представленная работа посвящена анализу динамического поведения пятислойного симметричного стержня, находящегося под действием мгновенно приложенной локальной нагрузки.

1 Постановка задачи

Рассматривается задача о вынужденных колебаниях пятислойного симметричного по толщине стержня (рисунок 1.1) под действием локальной поверхностной нагрузки, равномерно распределенной на отрезке $0 \leq x \leq b$:

$$q(x, t) = q_0 H_0(b - x), \quad (1.1)$$

где $q_0 = \text{const}$; $H_0(b - x)$ – функция Хэвисайда.

Три несущих слоя 1, 2, 4 (центральный и два внешних) предполагаются тонкими, высокопрочными. Для них приняты гипотезы Бернулли. В двух относительно толстых легких заполнителях 3, 5 выполняется гипотеза Тимошенко, т. е. учитывается дополнительный относительный сдвиг нормали.

Система дифференциальных уравнений, описывающая вынужденные колебания симметричного по толщине пятислойного стержня, следует из соответствующих уравнений свободных колебаний [22] при добавлении внешней нагрузки (1.1):

$$\begin{aligned} a_1 \psi_{,xx} - a_2 w_{,xxx} &= 0, \\ a_2 \psi_{,xxx} - a_4 w_{,xxx} - M_0 \ddot{w} &= -q_0 H_0(b - x), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где запятая в индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате; коэффициенты

$$a_1 = 2c^2 \left(\frac{1}{3} K_3^+ c + K_2^+ h_2 \right),$$

$$a_2 = K_2^+ h_2 c (h_2 + 2h_1 + 2c) + \frac{1}{3} K_3^+ c^2 (3h_1 + 2c),$$

$$a_4 = \frac{2}{3} \left[K_1^+ h_1^3 + K_2^+ h_2 (h_2^2 + 3(h_2 + h_1 + c)(h_1 + c) + K_3^+ c(c^2 + 3h_1 c + 3h_1^2)) \right],$$

$$K_k + \frac{4}{3} G_k \equiv K_k^+;$$

$2h_1$ – толщина центрального слоя, h_2 – толщина внешних слоев, c – толщина заполнителей; G_k, K_k – модули сдвига и объемного деформирования материалов слоев.

Для замыкания начально-краевой задачи необходимо к уравнениям движения (1.2) добавить начальные и граничные условия. В качестве начальных принимаются однородные условия

$$w(x, 0) = 0, \quad \dot{w}(x, 0) = 0. \quad (1.3)$$

При жесткой заделке торцов стержня $x = 0; l$ должны выполняться требования

$$\psi(0, t) = w(0, t) = w_{,x}(0, t) = 0,$$

$$\psi(l, t) = w(l, t) = w_{,x}(l, t) = 0.$$

В случае шарнирного опирания граничные условия следующие:

$$\psi(0, t) = w(0, t) = M(0, t) = 0,$$

$$\psi(l, t) = w(l, t) = M(l, t) = 0. \quad (1.4)$$

2 Решение задачи

После некоторых преобразований из системы (1.2) выделяется отдельное уравнение для прогиба, а относительный сдвиг выражается через его производную:

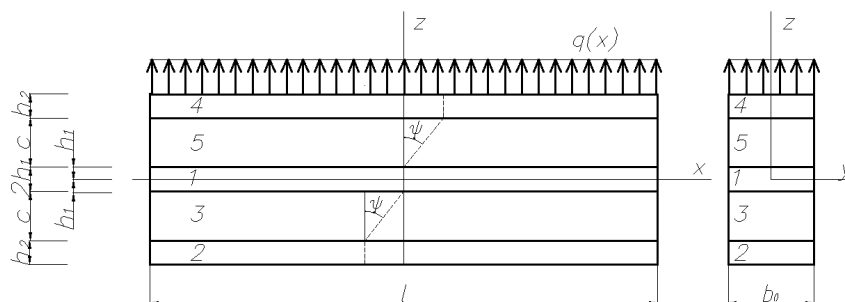


Рисунок 1.1 – Расчетная схема пятислойного стержня

$$w_{,xxxx} - \frac{a_1 M_0}{a_2^2 - a_1 a_4} \ddot{w} = -\frac{a_1}{a_2^2 - a_1 a_4} q_0 H_0(b-x),$$

$$\psi = \frac{a_2}{a_1} w_{,x} + C_5 x + C_6. \quad (2.1)$$

В общем случае прогиб, относительный сдвиг и нагрузка в пятислойном стержне раскладывается в ряд по системе собственных функций, полученной в [22] для случаев заделки (1.4) и шарнирного опирания (2.1) торцов стержня:

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t), \quad \psi(x, t) = \frac{a_2}{a_1} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t),$$

$$q(x, t) = M_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t),$$

$$v_n = \frac{1}{d_n} (\operatorname{sh}(\beta_n x) - \sin(\beta_n x) - S_n (\operatorname{ch}(\beta_n x) - \cos(\beta_n x))),$$

$$\varphi_n = \frac{\beta_n}{d_n} (\operatorname{ch}(\beta_n x) - \cos(\beta_n x) - S_n (\operatorname{sh}(\beta_n x) + \sin(\beta_n x))),$$

$$S_n = \frac{\operatorname{sh}(\beta_n l) - \sin(\beta_n l)}{\operatorname{ch}(\beta_n l) - \cos(\beta_n l)}; \quad (2.2)$$

d_n – ортонормирующие множители; β_n – собственные числа, которые связаны с частотами колебаний ω_n формулой $\beta_n^4 = a_1 M_0 \omega_n^2 / (a_4 a_1 - a_2^2)$.

Выражения для коэффициентов разложения нагрузки в ряд $q_n(t)$ получим, умножив третье из соотношений в (2.2) на v_n и проинтегрировав его по длине стержня:

$$\int_0^l q(x, t) v_n dx = M_0 \int_0^l \sum_{m=0}^{\infty} v_m q_m(t) v_n dx =$$

$$= M_0 \sum_{m=0}^{\infty} q_m(t) \int_0^l v_m v_n dx.$$

В силу ортонормированности системы собственных функций имеем

$$q_n(t) = \frac{1}{M_0} \int_0^l q(x, t) v_n dx. \quad (2.3)$$

Подставив в уравнение (2.1) выражение для прогиба и нагрузки (2.2) получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_{n,xxxx} T_n(t) - \frac{a_1 M_0}{a_2^2 - a_1 a_4} \sum_{n=0}^{\infty} v_n \ddot{T}_n(t) =$$

$$= -\frac{a_1 M_0}{a_2^2 - a_1 a_4} \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t). \quad (2.4)$$

Из дифференциального уравнения собственных колебаний [22] следует

$$v_{n,xxxx} = \beta_n^4 v_n. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.4), с учетом (2.5), принимает вид

$$-\frac{a_1 M_0}{a_2^2 - a_1 a_4} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^2 v_n T_n(t) - \frac{a_1 M_0}{a_2^2 - a_1 a_4} \sum_{n=0}^{\infty} v_n \ddot{T}_n(t) =$$

$$= -\frac{a_1 M_0}{a_2^2 - a_1 a_4} \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t).$$

После сокращения получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n (\omega_n^2 T_n(t) + \ddot{T}_n(t) - q_n(t)) = 0. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) должно выполняться в каждый момент, поэтому функция времени будет удовлетворять следующему дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = q_n. \quad (2.7)$$

Общее решение уравнения (2.7) известно [1]:

$$T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) +$$

$$+ \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin(\omega_n(t-\tau)) q_n(\tau) d\tau. \quad (2.8)$$

Следует отметить, что наличие интегрального слагаемого в (2.8) не влияет на величины коэффициентов A_n, B_n , т. к. оно при $t = 0$ обращается в ноль.

Подставив нагрузку (1.1) в формулу (2.3), получим параметры ее разложения в ряд по системе собственных функций:

$$q_n = \frac{q_0}{M_0 d_n} \int_0^l H_0(b-x) (\operatorname{sh}(\beta_n x) - \sin(\beta_n x) -$$

$$- S_n (\operatorname{ch}(\beta_n x) - \cos(\beta_n x))) dx.$$

После взятия интегралов имеем

$$q_n = \frac{q_0}{M_0 d_n \beta_n} (\operatorname{ch}(\beta_n b) + \cos(\beta_n b) -$$

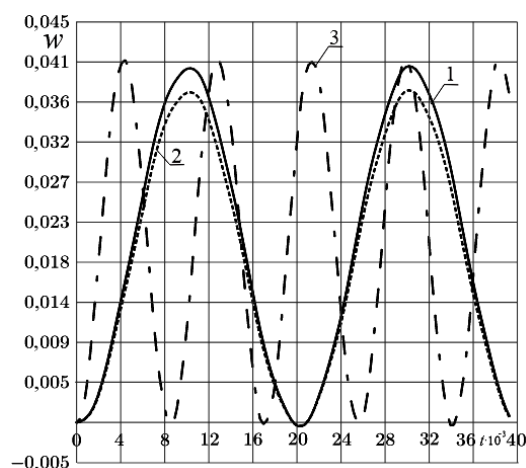
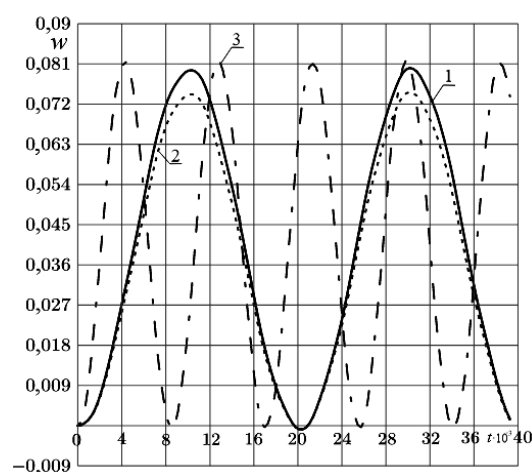
$$- S_n (\operatorname{sh}(\beta_n b) - \sin(\beta_n b)) - 2). \quad (2.9)$$

Функция времени (2.8) при локальной равномерно распределенной нагрузке и однородных начальных условиях (1.3) принимает вид

$$T_n(t) = \frac{q_n}{\omega_n} \int_0^t \sin(\omega_n(t-\tau)) d\tau =$$

$$= \frac{q_n}{\omega_n^2} \cos(\omega_n(t-\tau)) \Big|_0^t = \frac{q_n}{\omega_n^2} (1 - \cos(\omega_n t)).$$

Следовательно, функция времени определяется формулой

а) $b = 0,5$ б) $b = 1$ Рисунок 3.3 – Изменение прогиба во времени при различных размерах b пятна нагрузки:

1 – базовый пакет; 2 – титан – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – титан;

3 – Д16Т – пенополиуретан – Д16-Т – пенополиуретан – Д16Т

3 – Д16Т – пенополиуретан – Д16-Т – пенополиуретан – Д16Т. При замене дюралюминия во внешних слоях на титановый сплав максимальный прогиб уменьшается на 8,1%. Использование в качестве заполнителей пенополиуретана, более легкого и менее жесткого чем фторопласт-4, особых изменений в график не вносит, т. к. основную нагрузку воспринимают жесткие несущие слои. Рисунок 3.3 иллюстрирует изменения прогиба во времени при различных размерах b пятна нагрузки: 1 – Д16Т – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – Д16Т; 2 – титан – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – титан; 3 – Д16Т – пенополиуретан – Д16-Т – пенополиуретан – Д16Т. Использование титана в качестве несущих слоев приводит к уменьшению амплитуды на 12–14%. С пенополиуретановыми заполнителями амплитуда колебаний увеличивается незначительно, частота возрастает в 2 раза. Увеличение пятна нагрузки в 2 раза не изменяет характер колебаний, возрастает только амплитуда в 2 раза.

Заключение

Разработанная механико-математическая модель вынужденных колебаний пятислойного симметричного по толщине стержня при локальных мгновенно приложенных нагрузках позволяет исследовать параметры динамического деформирования в зависимости от геометрических размеров, упругих свойств материалов слоев и размеров пятна нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zhuravkov, M. A. Mechanics of Solid Deformable Body / M. A. Zhuravkov, Lyu Yongtao, E. I. Starovoirov. – Singapore: Springer, 2022. – 317 p.

2. *Deformation of Three-layer Structural Elements in Thermal Radiation Fields* / E. I. Starovoirov, M. A. Zhuravkov, D. V. Leonenko, Lyu Yongtao. – Springer Nature Singapore, Pte Ltd., 2024. – 384 p.

3. *Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках* / Э. И. Старовойтов, Ю. В. Шафиева, А. В. Нестерович, А. Г. Козел. – Гомель : БелГУТ, 2024. – 395 с.

4. Яровая, А. В. Строительная механика. Статика стержневых систем / А. В. Яровая. – Гомель : БелГУТ, 2013. – 447 с.

5. *Старовойтов, Э. И. Сопротивление материалов* / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2025. – 396 с.

6. Leonenko, D. V. Vibrations of Cylindrical Sandwich Shells with Elastic Core Under Local Loads / D. V. Leonenko, E. I. Starovoirov // International Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 52, № 4. – P. 359–367.

7. Semenov, A. A. Dynamic buckling analysis of doubly curved orthotropic shallow shells via the Kantorovich and Rosenbrock methods / A. A. Semenov // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. – 2024. – Vol. 46, № 7. – P. 410.

8. Горшков, А. Г. Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2004. – Т. 1, № 1. – С. 45–52.

9. Горшков, А. Г. Гармоническое нагружение слоистых вязкоупругопластических систем / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая // Известия Академии наук. Механика твердого тела. – 2000. – № 6. – С. 91–98.

10. Леоненко, Д. В. Колебания круговой трехслойной пластины под действием внешней нагрузки / Д. В. Леоненко, М. В. Маркова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2023. – № 1. – С. 49–63.
11. Могилевич, Л. И. Гидроупругость виброопоры с трехслойной круглой упругой пластиной с несжимаемым заполнителем / Л. И. Могилевич, В. С. Попов, Э. И. Старовойтов // Наука и техника транспорта. – 2006. – № 2. – С. 56–63.
12. Лачугина, Е. А. Собственные колебания пятислойной круговой пластины при различных закреплениях контура / Е. А. Лачугина // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 25–30.
13. Erofeev, V. I. Dispersion and Energy Characteristics of Bending Waves in a Plate Lying on a Two-Parameter Elastic Foundation / V. I. Erofeev, E. E. Lisenkova // Acoustical Physics. – 2023. – Vol. 69, № 3. – С. 285–291.
14. Козел, А. Г. Термоупругий изгиб круглой трехслойной пластины, связанной с основанием Пастернака / А. Г. Козел // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 31–37.
15. Starovoytov, E. I. Deformation of a composite plate on an elastic foundation by local loads / E. I. Starovoytov, D. V. Leonenko, M. Suleyman // Mechanics of Composite Materials. – 2007. – Vol. 43, № 1. – Р. 75–84.
16. Старовойтов, Э. И. Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании / Э. И. Старовойтов, Е. П. Доровская // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2006. – № 3. – С. 45–50.
17. Старовойтов, Э. И. Упругопластическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле / Э. И. Старовойтов // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2012. – № 3. – С. 91–98.
18. Салицкий, В. С. Изгиб локальной нагруженной круглой пятислойной пластины / В. С. Салицкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 27–31.
19. Будникова, Д. А. Анализ собственных колебаний пятислойного стержня / Д. А. Будникова // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – № 17. – С. 33–39.
20. Старовойтов, Э. И. Собственные колебания пятислойного стержня, вызванные начальным прогибом / Э. И. Старовойтов, Д. А. Будникова // Механика машин, механизмов и материалов. – 2025. – № 2 (71). – С. 70–77.
21. Старовойтов, Э. И. Собственные колебания симметричного по толщине пятислойного стержня / Э. И. Старовойтов, Д. А. Будникова // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2025. – Т. 31, № 1. – С. 25–39.
22. Будникова, Д. А. Собственные частоты колебаний пятислойного стержня / Д. А. Будникова // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 11–15.
23. Будникова, Д. А. Влияние условий закрепления пятислойного стержня на частоты собственных колебаний / Д. А. Будникова // Актуальные вопросы машиноведения. – 2025. – Т. 14. – С. 66–69.

Поступила в редакцию 30.03.2026.

Информация об авторах

Будникова Дарья Андреевна – магистрант