МАТЕМАТИКА

УДК 512.542 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_39
EDN: PFRCWZ

О ПРОИЗВЕДЕНИИ σ-МНОЖЕСТВА ФИШЕРА КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ И σ-КЛАССА ФИШЕРА

Н.Т. Воробьев, С.Н. Воробьев, А.П. Мехович, Д.А. Китаров

Витебский государственный университет имени П.М. Машерова

ON THE PRODUCT OF σ-FISHER SET OF THE FINITE GROUP AND σ-FISHER CLASS

N.T. Vorobyev, S.N. Vorobyev, A.P. Mekhovich, D.A. Kitarov

Vitebsk State University named after P.M. Masherov

Аннотация. Пусть σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma=\{\sigma_i : i\in I\}$, $\sigma_i\cap\sigma_j=\varnothing$ для всех $i\neq j$ и $\mathbb{P}=\bigcup_{i\in I}\sigma_i$. σ-Классом Фишера называется класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ конечных групп *G*, который удовлетворяет условию: если $G\in\mathfrak{F}$, $N\trianglelefteq G$, $N\leq T\leq G$ и $T/N\in\mathfrak{N}_{\sigma_i}$ для некоторого $\sigma_i\in\sigma$, то $T\in\mathfrak{F}$. σ-Множеством Фишера группы *G* называется множество Фиттинга $\mathcal{F}$, если из $N\trianglelefteq S\in\mathcal{F}$, $N\leq T\leq S$ и $T/N\in\mathfrak{N}_{\sigma_i}$ для некоторого $\sigma_i\in\sigma$ следует $T\in\mathcal{F}$. Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы *G* и $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга. Множество $\mathcal{F}\odot\mathfrak{X}=\{T\leq G : T/T_{\mathcal{F}}\in\mathfrak{X}\}$ называется произведением множества Фиттинга и класса Фиттинга. Доказано, что если $\mathcal{F}$ – σ-множество Фишера группы *G* и $\mathfrak{F}$ – σ-класс Фишера, то произведение $\mathcal{F}\odot\mathfrak{X}$ является σ-множеством Фишера.

Ключевые слова: *класс Фиттинга*, *класс Фишера*, *множество Фишера*, σ-*класс Фишера*, σ-*множество Фишера*, *произведение класса Фишера и множества Фишера.*

Для цитирования: *О произведении* σ*-множества Фишера конечной группы и* σ*-класса Фишера* / Н.Т. Воробьев, С.Н. Воробьев, А.П. Мехович, Д.А. Китаров // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 1 (66). – С. 39–42. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_39. – EDN: PFRCWZ

Abstract. Let $\sigma=\{\sigma_i : i\in I\}$, be a partition of set $\mathbb{P}$ of all prime numbers, i. e. $\mathbb{P}=\bigcup_{i\in I}\sigma_i$. and $\sigma_i\cap\sigma_j=\varnothing$ for all $i\neq j$. A σ-Fischer class is a Fitting class $\mathfrak{F}$, that satisfies the condition: if $G\in\mathfrak{F}$, $N\trianglelefteq G$, $N\leq T\leq G$ and $T/N\in\mathfrak{N}_{\sigma_i}$ for some $\sigma_i\in\sigma$, then $T\in\mathfrak{F}$. A σ-Fischer set of group *G* is called a Fitting set $\mathcal{F}$ such that from $N\trianglelefteq S\in\mathcal{F}$, $N\leq T\leq S$ and $T/N\in\mathfrak{N}_{\sigma_i}$ for some $\sigma_i\in\sigma$, then $T\in\mathcal{F}$. Let $\mathcal{F}$ be a Fitting set of *G* and $\mathfrak{X}$ be a Fitting class. The set $\mathcal{F}\odot\mathfrak{X}=\{T\leq G : T/T_{\mathcal{F}}\in\mathfrak{X}\}$ is called the product of the Fitting set and the Fitting class. It is proved that if $\mathcal{F}$ is a – σ-Fischer set of a group *G*, and $\mathfrak{F}$ is a – σ-Fischer class, then the product $\mathcal{F}\odot\mathfrak{X}$ is a σ-Fischer set.

Keywords: *Fitting class*, *Fischer class*, *Fischer set*, σ*-Fischer class*, σ*-Fischer set*, *product of Fischer class and Fischer set*.

For citation: *On the product of* σ*-Fisher set of the finite group and* σ*-Fisher class* / N.T. Vorobyev, S.N. Vorobyev, A.P. Mekhovich, D.A. Kitarov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 1 (66). – P. 39–42. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_39 (in Russian). – EDN: PFRCWZ

Введение

В настоящей работе все рассматриваемые группы конечны. В определениях и обозначениях следуем [1]. Описание структурных свойств алгебры классов Фиттинга и строения канонических подгрупп связано с применением понятия произведения классов Фиттинга (см. например, главы IX, XI [1]). Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга [1, гл. IX], если выполняются следующие два условия:

1) если $G\in\mathfrak{F}$ и $N\trianglelefteq G$, то $N\in\mathfrak{F}$;

2) если $N_1, N_2\trianglelefteq G$, и $N_1, N_2\in\mathfrak{F}$, то $N_1N_2\in\mathfrak{F}$.

Напомним, что для любой группы *G* существует единственная максимальная нормальная подгруппа, принадлежащая $\mathfrak{F}$. Ее называют $\mathfrak{F}$-радикалом *G* и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называют *классом Фишера* [2], если выполняются следующие условия:

1) $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга;

2) если $G\in\mathfrak{F}$ и $N\trianglelefteq G$, $N\leq T\leq G$ и T/N – *p*-группа для некоторого простого числа *p*, то $T\in\mathfrak{F}$.

В теории классов Фиттинга конечных разрешимых групп известен результат Локетта [3] о том, что произведение двух любых классов Фишера является классом Фишера.

Используя понятие множество Фиттинга группы G, Дёрк и Хоукс [1, гл. VIII, определение 2.1] определили понятие множества Фишера G. Напомним, что непустое множество $\mathcal{F}$ подгрупп группы G называется *множеством Фиттинга группы* G, если выполняются следующие три условия:

1) если $T \trianglelefteq\trianglelefteq S \in \mathcal{F}$, то $T \in \mathcal{F}$;

2) если $S, T \in \mathcal{F}$ и S, $T \trianglelefteq ST$, то $ST \in \mathcal{F}$;

3) если $S \in \mathcal{F}$ и $x \in G$, то $S^x \in \mathcal{F}$.

Множество Фиттинга $\mathcal{F}$ группы G называется *множеством Фишера* G [1, гл. VIII, определение 4.3] если из условий: $N \trianglelefteq S \in \mathcal{F}$, $N \le T \le S$ и T / N – p-группа для некоторого простого числа p следует, что $T \in \mathcal{F}$.

В [1, гл. VIII, пример 2.2(a)] установлено, что каждому классу Фишера $\mathfrak{F}$ соответствует множество Фишера $\mathcal{F}$ группы G – его след в группе G, т. е. множество $\mathcal{F} = \{T \le G : T \in \mathfrak{F}\}$, хотя обратное в общем случае неверно.

Для изучения алгебры множеств Фиттинга будем использовать понятие произведения множества Фиттинга и класса Фиттинга, которое было определено Н.Т. Воробьевым, Го Вэньбинем и Яном Наньином в работе [4]. Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фиттинга группы G и $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга. Множество $\mathcal{F} \odot \mathfrak{X} = \{T \le G : T / T_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}\}$ называется *произведением множества Фиттинга группы G и класса Фиттинга*. В [4] доказано, что произведение $\mathcal{F} \odot \mathfrak{X}$ является множеством Фиттинга группы G. Кроме того, в [5] было показано, что если $\mathcal{F}$ – множество Фишера группы G и $\mathfrak{X}$ – класс Фишера, то их произведение является множеством Фишера G.

В работах А.Н. Скибы [6]–[8] был предложен σ-метод исследования групп и их классов при помощи разбиения множества простых чисел σ. Основополагающие результаты по развитию и применению этого метода в теории локальных классов Фиттинга были получены Н.Т. Воробьевым, Го Вэньбинем и Ли Жангом [9].

Напомним, что σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, т. е. $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$, $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$, для всех $i \ne j$. Символом $\mathfrak{N}_{\sigma_i}$ будем обозначать класс всех нильпотентных σ_i-групп.

***Определение* 0.1.** *Класс Фиттинга* $\mathfrak{F}$ *назовём σ-классом Фишера, если из условия* $G \in \mathfrak{F}$, $N \trianglelefteq G$, $N \le T \le G$ *и* $T / N \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$ *для некоторого* $\sigma_i \in \sigma$ *всегда следует, что* $T \in \mathfrak{F}$.

В случае, если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, ...\}$, $\mathfrak{F}$ называют классом Фишера [2].

Аналогично определим σ-множество Фишера группы G.

***Определение* 0.2.** *Множество Фиттинга* $\mathcal{F}$ *группы G назовем σ-множеством Фишера G, если из* $N \trianglelefteq S \in \mathcal{F}$, $N \le T \le S$ *и* T / N *является нильпотентной* σ_i*-группой для некоторого* $\sigma_i \in \sigma$ *следует, что* $T \in \mathcal{F}$.

***Замечание* 0.3.** *Очевидно, что всякое множество Фиттинга группы G, замкнутое относительно взятия подгрупп, является множеством Фишера G.*

***Замечание* 0.4.** *В случае, если* $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\} ...\}$ *– минимальное разбиение* σ, *то* σ^1*-множество Фишера* $\mathcal{F}$ *группы G совпадает с множеством Фишера этой группы.*

Основной результат работы следующая

***Теорема* 0.5.** *Если* $\mathcal{F}$ *– σ-множество Фишера группы G и* $\mathfrak{H}$ *– σ-класс Фишера, то произведение* $\mathcal{F} \odot \mathfrak{H}$ *является σ-множеством Фишера G.*

1 Предварительные сведения

В качестве лемм приведем известные утверждения, которые будем использовать для доказательства основного результата.

***Лемма* 1.1** [1, гл. A, теорема 2.1 (b), (c)]. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *если U и N – подгруппы группы G и U нормализует N, то*

$$UN / N \cong U / U \cap N;$$

2) *если M, N – нормальные подгруппы группы G и* $N \le M$, *то имеет место изоморфизм*

$$(G / N) / (M / N) \cong G / M.$$

***Лемма* 1.2** [1, гл. A 1.3, (тождество Дедекинда)]. *Если U, V, W – подгруппы группы G, причем* $V \le U$, *то справедливо равенство*

$$U \cap VW = V(U \cap W).$$

***Лемма* 1.3** [1, гл. VIII, предложение 2.4 (d)]. *Если* $\mathcal{F}$ *– множество Фиттинга группы G и N – нормальная подгруппа группы G, то*

$$N_{\mathcal{F}} = N \cap G_{\mathcal{F}}.$$

***Лемма* 1.4** [1, гл. IX, лемма 1.13]. *Пусть* N_1, N_2 *– нормальные подгруппы группы G такие, что* $N_1 \cap N_1 = 1$ *и факторгруппа* $G / N_1 N_2$ *– нильпотентная группа. Если* $\mathfrak{F}$ *– класс Фиттинга и* $G / N_1 \in \mathfrak{F}$, *то* $G \in \mathfrak{F}$ *тогда и только тогда, когда* $G / N_2 \in \mathfrak{F}$.

***Лемма* 1.5** [5, теорема 0.3]. *Если* $\mathcal{F}$ *– множество Фишера группы G и* $\mathfrak{H}$ *– класс Фишера, то произведение* $\mathcal{F} \odot \mathfrak{H}$ *является множеством Фишера G.*

***Лемма* 1.6** [10, лемма 2.2]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– σ-класс Фишера. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $Char(\mathfrak{F}) = \sigma(\mathfrak{F})$, *где* $\sigma(\mathfrak{F})$ *– множество всех простых делителей порядка всех групп из класса* $\mathfrak{F}$;

2) $\mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$.

2 Доказательство теоремы 0.5

Пусть $\mathcal{F}$ – множество Фишера группы G и $\mathfrak{H}$ – класс Фишера. Тогда по лемме 1.5 их произведение $\mathcal{F} \odot \mathfrak{H}$ является множеством Фишера G. Для доказательства теоремы достаточно выяснить, что если T подгруппа группы G, $S \leq G$ и S – группа из $\mathcal{F} \odot \mathfrak{H}$ и N – ее нормальная подгруппа, $N \leq T \leq S$ и T / N является нильпотентной σ_i-группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$, то $T \in \mathcal{F} \odot \mathfrak{H}$.

Доказательство разобьем на несколько шагов.

(1) *Если* $T / N \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$, *то факторгруппы* $TS_{\mathcal{F}} / NS_{\mathcal{F}}$ *и* $T \cap S_{\mathcal{F}} / N \cap S_{\mathcal{F}}$ *являются нильпотентными* σ_i*-группами.*

Так как $N \trianglelefteq T$, то $N \trianglelefteq S$, следовательно, подгруппа $TS_{\mathcal{F}} = TNS_{\mathcal{F}}$. По утверждению 1 леммы 1.1 имеет место изоморфизм

$$TS_{\mathcal{F}} / NS_{\mathcal{F}} = TNS_{\mathcal{F}} / NS_{\mathcal{F}} \cong T / T \cap NS_{\mathcal{F}}.$$

Следовательно, по утверждению 2 леммы 1.1 справедлив изоморфизм

$$\left(T / N\right) / ((T \cap NS_{\mathcal{F}}) / N) \cong T / T \cap NS_{\mathcal{F}}.$$

Поскольку $T / N \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$ и класс нильпотентных σ_i-групп является формацией, то группа $(T / N) / ((T \cap NS_{\mathcal{F}}) / N)$ является σ_i-группой. Следовательно, изоморфная ей группа $T / T \cap NS_{\mathcal{F}}$ – σ_i-группа. Далее, ввиду изоморфизма

$$T / T \cap NS_{\mathcal{F}} \cong TS_{\mathcal{F}} / NS_{\mathcal{F}},$$

следует $TS_{\mathcal{F}} / NS_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$.

Покажем, что $T \cap S_{\mathcal{F}} / N \cap S_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$. Так как $N \trianglelefteq T$, то

$$T \cap S_{\mathcal{F}} / N \cap S_{\mathcal{F}} = (T \cap S_{\mathcal{F}}) / (T \cap S_{\mathcal{F}}) \cap N.$$

Применяя утверждение 1 леммы 1.1, справедлив изоморфизм

$$T \cap S_{\mathcal{F}} N \cap S_{\mathcal{F}} \cong (T \cap S_{\mathcal{F}})N / N.$$

Так как $(T \cap S_{\mathcal{F}})N / N$ – нормальная подгруппа группы $T / N \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$ и $\mathfrak{N}_{\sigma_i}$ – класс Фиттинга, то группа $(T \cap S_{\mathcal{F}})N / N \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$. Следовательно, и факторгруппа $T \cap S_{\mathcal{F}} / N \cap S_{\mathcal{F}}$ является нильпотентной σ_i-группой.

(2) $T / T \cap S_{\mathcal{F}}$ *– нильпотентная* σ_i*-группа.*

Для доказательства (2) будем использовать (1). Пусть $\bar{S} = S / S_{\mathcal{F}}$, $\bar{N} = NS_{\mathcal{F}} / S_{\mathcal{F}}$ и $\bar{T} = TS_{\mathcal{F}} / S_{\mathcal{F}}$. Тогда из $S \in \mathcal{F} \odot \mathfrak{H}$ следует, что $\bar{S} \in \mathfrak{H}$. Кроме того, $\bar{N} \trianglelefteq \bar{S}$ и по утверждению 2 леммы 1.1 $\bar{T} / \bar{N} \cong TS_{\mathcal{F}} / NS_{\mathcal{F}}$. Таким образом, ввиду (1) $\bar{S} \in \mathfrak{H}$, $\bar{N} \trianglelefteq \bar{S}$, $\bar{N} \leq \bar{T} \leq \bar{S}$ и $\bar{T} / \bar{N} \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$. Поскольку по условию $\mathfrak{H}$ – σ-класс Фишера, то $\bar{T} = TS_{\mathcal{F}} / S_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{H}$. Следовательно, по утверждению 1 леммы 1.1 справедлив изоморфизм

$$TS_{\mathcal{F}} / S_{\mathcal{F}} \cong T / T \cap S_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{H}.$$

Так как $\mathfrak{H}$ – класс групп, то $T / T \cap S_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{H}$. Утверждение (2) доказано.

(3) $T_{\mathcal{F}} \cap (T \cap S_{\mathcal{F}})N = T \cap S_{\mathcal{F}}$.

Вначале заметим, что

$$S_{\mathcal{F}} \in \mathcal{F},\ N \cap S_{\mathcal{F}} \trianglelefteq S_{\mathcal{F}},\ N \cap S_{\mathcal{F}} \leq T \cap S_{\mathcal{F}} \leq S_{\mathcal{F}},$$

то ввиду (1) $T \cap S_{\mathcal{F}} / N \cap S_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$. Поскольку $\mathcal{F}$ – σ-множество Фишера группы G, $T \cap S_{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$. Так как $T \cap S_{\mathcal{F}} \trianglelefteq T$, то определению $\mathcal{F}$-радикала группы T имеем $T \cap S_{\mathcal{F}} \leq T_{\mathcal{F}}$. Теперь, используя лемму 1.2, получаем равенство

$$T_{\mathcal{F}} \cap (T \cap S_{\mathcal{F}})N = (T \cap S_{\mathcal{F}})(N \cap S_{\mathcal{F}}).$$

Так как $N \trianglelefteq T$, то по лемме 1.3 $T_{\mathcal{F}} \cap N = N_{\mathcal{F}}$. Следовательно,

$$T_{\mathcal{F}} \cap (T \cap S_{\mathcal{F}})N = (T \cap S_{\mathcal{F}})N_{\mathcal{F}}.$$

Очевидно, $N_{\mathcal{F}} \leq T \cap S_{\mathcal{F}}$ и равенство (3) доказано.

(4) $T / (T \cap S_{\mathcal{F}})N \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$.

Поскольку фактор $\bar{T} / \bar{N} \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$ и класс $\mathfrak{N}_{\sigma_i}$ является формацией, то по утверждению 2 леммы 1.1

$$(\bar{T} / \bar{N}) / ((T \cap S_{\mathcal{F}})N / N) \cong T / (T \cap S_{\mathcal{F}})N$$

и $T / (T \cap S_{\mathcal{F}})N$ нильпотентная σ_i-группа. Ввиду теоремы Лангранжа, справедливо равенство

$$\left|T / (T \cap S_{\mathcal{F}})\right| =$$
$$= \left|T / (T \cap S_{\mathcal{F}}) / ((T \cap S_{\mathcal{F}})N / T \cap S_{\mathcal{F}})\right| \cdot$$
$$\cdot \left|(T \cap S_{\mathcal{F}})N / T \cap S_{\mathcal{F}}\right|.$$

Следовательно, множество всех простых делителей σ_i является подмножеством множества всех простых делителей порядка группы $T / (T \cap S_{\mathcal{F}})$. Заметим, что, ввиду (2), факторгруппа $T / (T \cap S_{\mathcal{F}})$ является нильпотентной σ_i-группой и поэтому $\sigma_i \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$. Теперь, применяя лемму 1.6, получаем включение $\mathfrak{N}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{H})} \subseteq \mathfrak{H}$, и поэтому $T / (T \cap S_{\mathcal{F}})N \in \mathfrak{H}$.

(5) *Заключительный шаг.*

Покажем, что $T \in \mathcal{F} \odot \mathfrak{H}$. Пусть:

$$\tilde{S} = T / T \cap S_{\mathcal{F}},\ \bar{N}_1 = (T \cap S_{\mathcal{F}})N / T \cap S_{\mathcal{F}},$$

$\bar{N}_2 = T_{\mathcal{F}} / T \cap S_{\mathcal{F}}$. Очевидно, что $\bar{N}_1 \trianglelefteq \tilde{S}$ и $\bar{N}_2 \trianglelefteq \tilde{S}$. Рассмотрим пересечение

$$\bar{N}_1 \cap \bar{N}_2 = ((T \cap S_{\mathcal{F}})N / T \cap S_{\mathcal{F}}) \cap (T_{\mathcal{F}} / T \cap S_{\mathcal{F}}).$$

Ввиду (4), получаем

$$\bar{N}_1 \cap \bar{N}_2 = ((T_{\mathcal{F}} \cap (T \cap S_{\mathcal{F}})N) / (T \cap S_{\mathcal{F}}) = \\ = (T \cap S_{\mathcal{F}}) / (T \cap S_{\mathcal{F}}) = 1.$$

Покажем, что фактор $\tilde{S} / \bar{N}_1\bar{N}_2$ нильпотентная группа. Действительно

$$\tilde{S} / \bar{N}_1\bar{N}_2 = \\ = (T / T \cap S_{\mathcal{F}}) / ((T \cap S_{\mathcal{F}})N / (T \cap S_{\mathcal{F}})(T \cap S_{\mathcal{F}})) = \\ = (T_{\mathcal{F}} / T \cap S_{\mathcal{F}}) / ((T \cap S_{\mathcal{F}})NT_{\mathcal{F}}) / (T \cap S_{\mathcal{F}}).$$

Поскольку в (3) $T \cap S_{\mathcal{F}} \subseteq T_{\mathcal{F}}$, по утверждению 2 леммы 1.1 получаем

$$\tilde{S} / \bar{N}_1\bar{N}_2 = (T / T \cap S_{\mathcal{F}}) / (T_{\mathcal{F}}N / T \cap S_{\mathcal{F}}) \cong T / T_{\mathcal{F}}N$$

и $\tilde{S} / \bar{N}_1\bar{N}_2$ – σ_i-группа и группа $\tilde{S} / \bar{N}_1\bar{N}_2$ нильпотентная σ_i-группа.

Докажем, что $\tilde{S} / \bar{N}_1$ является нильпотентной σ_i-группой. По утверждению 2 леммы 1.1 справедлив изоморфизм

$$\tilde{S} / \bar{N}_1 = (T / T \cap S_{\mathcal{F}}) / ((T \cap S_{\mathcal{F}})N / (T \cap S_{\mathcal{F}}) \cong \\ \cong T / (T \cap S_{\mathcal{F}})N.$$

Но, ввиду (4), $T / (T \cap S_{\mathcal{F}})N \in \mathfrak{H}$ и поэтому $\tilde{S} / \bar{N}_1 \in \mathfrak{H}$. Таким образом, все условия квази R_0-леммы выполняются. Теперь, ввиду (2), $\tilde{S} \in \mathfrak{H}$ и по лемме 1.4 это равносильно тому, что $\tilde{S} / \bar{N}_2 \in \mathfrak{H}$. По утверждению 2 леммы 1.1 это означает, что

$$(T / T \cap S_{\mathcal{F}}) / (T_{\mathcal{F}} / T \cap S_{\mathcal{F}}) \cong T / T_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{H}.$$

Следовательно, $T \in \mathcal{F} \odot \mathfrak{H}$ и произведение $\mathcal{F} \odot \mathfrak{H}$ является σ-множеством Фишера. □

В случае, если σ = σ^1 = {{2}, {3}, {5}, ...}, мы получаем результат Н.Т. Воробьева и А.С. Войткевич, который приведем как

***Следствие* 2.1** [5]. *Если* $\mathcal{F}$ *– множество Фишера группы G и* $\mathfrak{X}$ *– класс Фишера, то произведение* $\mathcal{F} \odot \mathfrak{X}$ *является множеством Фишера группы G.*

Заключение

В работе описывается метод построения σ-множеств Фишера конечной группы посредством произведения σ-множества Фишера и σ-класса Фишера.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992.

2. *Hartley*, *B.* On Fischer's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.

3. *Lockett*, *F.P.* On the theory of Fitting classes of finite soluble groups / F.P. Lockett. – Ph. D. thesis, University of Warwick, 1971.

4. *Vorob'ev*, *N.T.* On $\mathcal{F}$-injectors of Fitting set of a finite group / N.T. Vorob'ev, N. Yang, W. Guo // Comm. Algebra. – 2018. – Vol. 46, № 1. – P. 217–229.

5. *Воробьев*, *Н.Т.* О произведении множества Фишера конечной группы и класса Фишера / Н.Т. Воробьев, А.С. Войткевич // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2019. – № 3 (104). – С. 38–41.

6. *Skiba*, *A.N.* A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and Appl. – 2015. – Vol. 15, № 5. – P. 21–36.

7. *Skiba*, *A.N.* On σ-properties of Finite groups II / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2015. – № 3 (24). – P. 70–83.

8. *Чи*, *Ч.* О $\sum_{\tau}^{\sigma}$-замкнутых классах конечных групп / Ч. Чи, А.Н. Скиба // Украинский математический журнал. – 2018. – Т. 70, № 12. – С. 1707–1716.

9. *Guo*, *W.* On σ-local Fitting classes / W. Guo, L. Zhang, N.T. Vorob'ev // J. Algebra. – 2020. – Vol. 542, № 15. – P. 116–129.

10. *Залесская*, *Е.Н.* О произведениях классов Фишера / Е.Н. Залесская, С.Н. Воробьев // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2008. – № 3 (49). – С. 101–105.

Поступила в редакцию 12.01.2026.

Информация об авторах

Воробьев Николай Тимофеевич – д.ф.-м.н., профессор
Воробьев Сергей Николаевич – к.ф.-м.н., доцент
Мехович Андрей Павлович – к.ф.-м.н.
Китаров Денис Андреевич – магистрант