ФИЗИКА

УДК 530.1

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_21
EDN: VNJBUU

О ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ СОСТОЯНИЯ АдС ЧЁРНЫХ ДЫР

О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ON THE THERMODYNAMIC EQUATIONS OF STATE OF AdS BLACK HOLES

V.U. Novikava, G.Yu. Tyumenkov

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Рассмотрены термодинамические уравнения состояния (УС) вида $P = P(V, T)$ с внутренней параметризацией горизонтом событий r_+ для чёрных дыр Райсснера – Нордстрёма (РН) и Борна – Инфельда (БИ) в пространстве анти-де Ситтера (АдС). Для РН-АдС чёрных дыр также проанализирован случай присутствия тёмной материи. Приведены критические параметры уравнений состояния и построены графики критических изотерм.

Ключевые слова: *уравнение состояния*, *критические параметры*, *пространство анти-де Ситтера*, *чёрная дыра Райсснера – Нордстрёма*, *чёрная дыра Борна – Инфельда*, *тёмная материя*.

Для цитирования: *Новикова*, *О.В.* О термодинамических уравнениях состояния АдС чёрных дыр / О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 1 (66). – С. 21–24. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_21. – EDN: VNJBUU

Abstract. The thermodynamic equations of state (EOS) of the form $P = P(V, T)$ with internal parameterization by the event horizon r_+ for Reissner – Nordström (RN) and Born – Infeld (BI) black holes in anti-de Sitter (AdS) space are considered. For RN-AdS black holes, the presence of dark matter is also analyzed. Critical parameters of the equations of state are presented and critical isotherms are plotted.

Keywords: *equation of state*, *critical parameters*, *anti-de Sitter space*, *Reissner – Nordström black hole*, *Born – Infeld black hole*, *dark matter*.

For citation: *Novikava*, *V.U.* On the thermodynamic equations of state of AdS black holes / V.U. Novikava, G.Yu. Tyumenkov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 1 (66). – P. 21–24. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_12 (in Russian). – EDN: VNJBUU

Введение

Начало термодинамической теории чёрных дыр было положено в работах Якова Бекенштейна [1] и Стивена Хокинга [2] в 70-х годах XX века. В 80-х годах появилась статья С. Хокинга и Д. Пэйджа [3], в которой термодинамика чёрных дыр обобщалась на пространство анти-де-Ситтера (АдС), играющее важную роль в ОТО, так как возникает при максимально симметричном решении уравнений Эйнштейна в вакууме с отрицательной космологической постоянной Λ. Случай наличия у чёрных дыр электрического заряда впервые был рассмотрен в работе [4], где авторы также обнаружили аналогию между фазовыми диаграммами АдС чёрных дыр и ван-дер-ваальсовской жидкости. Далее заметный вклад в понимание термодинамики и механики такого рода объектов был сделан в статье [5], а детальный анализ их поведения при джоуль-томсоновском расширении в статьях [6]–[8].

Далее в работе мы будем использовать общепринятые для данной области теоретической физики значения фундаментальных констант $G_N = \hbar = k_B = c = 1$.

1 РН-АдС чёрная дыра

Обратимся к заряженной, сферически симметричной, невращающейся РН-АдС чёрной дыре и укажем её основные физические свойства.

В рассматриваемом случае 4-мерное пространство определятся метрикой

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

в которой $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2$; параметры t, r, θ, φ имеют стандартный математический смысл – времени и трёх сферических координат; функция $f(r)$ имеет вид

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{l^2}. \tag{1.1}$$

В выражении (1.1) обозначения l, M и Q соответствуют АдС радиусу, массе чёрной дыры и заряду чёрной дыры соответственно. Радиус же горизонта событий r_+ находится, как наибольший корень уравнения

$$f(r_+) = 0. \tag{1.2}$$

Масса чёрной дыры M при этом, следуя [5], отождествляется с энтальпией H и связана с АдС радиусом и другими характеристиками чёрной дыры выражением

$$M = \frac{r_+}{2}\left(1 + \frac{Q^2}{r_+^2} + \frac{r_+^2}{l^2}\right). \quad (1.3)$$

Тогда дифференциал массы при введении электрического потенциала вида $\Phi = Q / r_+$ запишется как

$$dM = dH = TdS + VdP + \Phi dQ. \quad (1.4)$$

Космологическая константа Λ определяет давление P, отрицательна и связана с АдС радиусом l

$$P = \frac{3}{8\pi l^2} = -\frac{\Lambda}{8\pi}, \quad (1.5)$$

а энтропия S равна четверти площади горизонта событий, то есть

$$S = \pi r_+^2. \quad (1.6)$$

Используя (1.3) и (1.4), находим выражение для температуры T

$$T = \left(\frac{\partial M}{\partial S}\right)_{P,Q} = \frac{l^2\left(r_+^2 - Q^2\right) + 3r_+^4}{4\pi l^2 r_+^3}. \quad (1.7)$$

И далее получаем уравнение состояния вида $P = P(r_+, T)$ для РН-АдС чёрной дыры на основании связей (1.3), (1.5) и (1.7)

$$P\left(r_+, T\right) = \frac{T}{2r_+} - \frac{1}{8\pi r_+^2} + \frac{Q^2}{8\pi r_+^4}, \quad (1.8)$$

которое просто привести к стандартному виду УС для термодинамики $P = P(V, T)$, принимая во внимание, что

$$r_+ = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (1.9)$$

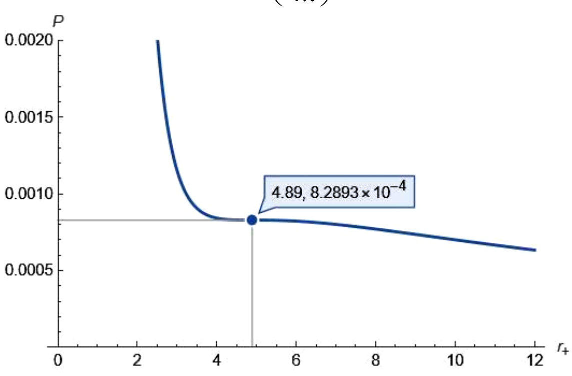

Рисунок 1.1 – Критическая изотерма РН-АдС чёрной дыры при $Q = 2$ с параметрами: $T_c = 0{,}02166$; $P_c = 8{,}2893 \cdot 10^{-4}$; $r_{+c} = 4{,}89$

В силу (1.9) очевидно, что УС (1.8) также позволяет нам определить критические параметры РН-АдС чёрной дыры на основе критерия точки перегиба

$$\frac{\partial P}{\partial r_+} = 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial r_+^2} = 0, \quad (1.10)$$

что приводит к результатам

$$T_c = \frac{\sqrt{6}}{18\pi Q}, \quad r_{+c} = \sqrt{6}Q, \quad P_c = \frac{1}{96\pi Q^2}. \quad (1.11)$$

В рассматриваемом случае критические параметры зависят от заряда Q.

Покажем корректность результатов (1.11), для чего на рисунке 1.1 изобразим явный вид критической изотермы для $Q = 2$ с указанием критической точки.

2 РН-АдС чёрная дыра в тёмной материи

Вновь рассмотрим заряженную, статичную, сферически симметричную РН-АдС чёрную дыру, но теперь помещенную в тёмную материю, обладающую свойствами идеальной жидкости (ИЖТМ).

Метрика пространства-времени сохранит прежний вид, но функция (1.1) преобразуется в

$$f\left(r\right) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \frac{\lambda}{r}\ln\left(\frac{r}{\lambda}\right). \quad (2.1)$$

Наличие тёмной материи приводит ко введению [9] обобщённой координаты $\lambda > 0$ и обобщённой силы A, определяемой как

$$A = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{r}{\lambda}\right). \quad (2.2)$$

В рассматриваемом случае формулы (2.1) и (2.2) на горизонте событий при выполнении условий (1.2) и (1.5) приводит к выражению для массы

$$M = \frac{r_+}{2} + \frac{4}{3}\pi P r_+^3 + \frac{Q^2}{2r_+} + \frac{1}{2}\lambda\ln\left(\frac{r_+}{\lambda}\right), \quad (2.3)$$

а дифференциал массы приобретает вид

$$dM = dH = TdS + VdP + \Phi dQ + Ad\lambda. \quad (2.4)$$

Теперь, используя (2.3) и (2.4), на основе (1.6) и (1.7) получаем температуру T и уравнение состояния $P = P\left(r_+, T\right)$

$$T = \frac{\lambda}{4\pi r_+^2} + 2Pr_+ + \frac{1}{4\pi r_+} - \frac{Q^2}{4\pi r_+^3},$$

$$P\left(r_+, T\right) = \frac{T}{2r_+} - \frac{1}{8\pi r_+^2} + \frac{Q^2}{8\pi r_+^4} - \frac{\lambda}{8\pi r_+^3}. \quad (2.5)$$

Выполнение условия для критических параметров (1.10) в (2.5) приводит к

$$r_{+c} = \frac{1}{2}\sqrt{9\lambda^2 + 24Q^2} - \frac{3\lambda}{2};$$

$$T_c = \frac{16Q^2 - 3\lambda\left(\sqrt{9\lambda^2 + 24Q^2} - 3\lambda\right)}{\pi\left(\sqrt{9\lambda^2 + 24Q^2} - 3\lambda\right)^3};$$

$$P_c = \frac{\lambda\left(3\lambda - \sqrt{9\lambda^2 + 24Q^2}\right) + 6Q^2}{\pi\left(\sqrt{9\lambda^2 + 24Q^2} - 3\lambda\right)^4}.$$

Пример критической изотермы РН-АдС чёрной дыры в ИЖТМ приведен на рисунке 2.1.

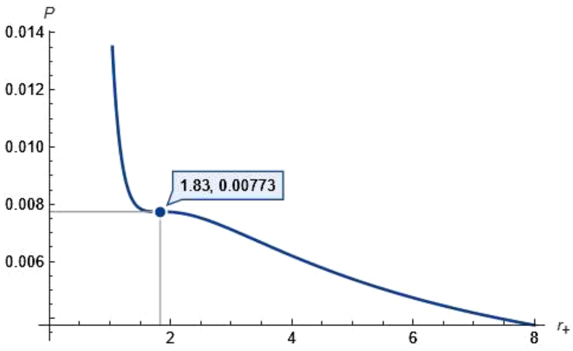

Рисунок 2.1 – Критическая изотерма РН-АдС чёрной дыры в ИЖТМ при $Q = 1$ и $\lambda = 0{,}5$ с параметрами: $T_c = 0{,}07069$; $P_c = 7{,}73 \cdot 10^{-3}$; $r_{+c} = 1{,}83$

3 БИ-АдС чёрная дыра

В этом пункте обратимся к более сложному объекту – заряженной чёрной дыре Борна –Инфельда (БИ) также в АдС пространстве. Она возникает как решение уравнений Эйнштейна в случае нелинейной электродинамики, но в БИ-подходе устраняется сингулярность электромагнитного поля в центре дыры путем использования фундаментальной длины β, накладывающей ограничение на напряженность поля.

В данном случае космологическая константа Λ, сохраняя связь с давлением P, параметризуется размерностью пространства D

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi} = \frac{(D-1)(D-2)}{16\pi l^2}. \qquad (3.1)$$

Метрика также параметризуется D и содержит теперь громоздкую $f(r)$ [8]

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 \mathrm{d}\Omega_{D-2}^2,$$

$$f(r) = 1 - \frac{m}{r^{D-3}} + \frac{r^2}{l^2} + \frac{4\beta^2 r^2}{(D-1)(D-2)} \times$$

$$\times \left(1 - \sqrt{1 + \frac{(D-2)(D-3)q^2}{2\beta^2 r^{2D-4}}}\right) + \frac{2(D-2)q^2}{(D-1)r^{2D-6}} \times$$

$$\times {}_2F_1\left[\frac{D-3}{2D-4}, \frac{1}{2}, \frac{3D-7}{2D-4}, -\frac{(D-2)(D-3)q^2}{2\beta^2 r^{2D-4}}\right], \qquad (3.1)$$

где ${}_2F_1(a,b;c;z)$ – гипергеометрическая функция. Также в (3.2) проведены два переопределения, связанные с массой и зарядом, а в метрике использован $d\Omega_{D-2}^2$ – квадрат дифференциала телесного угла

$$M = \frac{(D-2)\Omega_{D-2}}{16\pi} m; \qquad (3.3)$$

$$Q = \sqrt{2(D-2)(D-3)} \frac{\Omega_{D-2}}{8\pi} q. \qquad (3.4)$$

Дифференциал массы сохраняется в виде (1.4). На горизонте событий из (3.2) и (3.3) определяем массу

$$M = \frac{(D-2)\Omega_{D-2}}{16\pi} r_+^{D-3} \left\{1 + \frac{r_+^2}{l^2} + \right.$$

$$+ \frac{4\beta^2 r_+^2}{(D-1)(D-2)} \left(1 - \sqrt{1 - z_+}\right) +$$

$$\left. + \frac{2(D-2)q^2}{(D-1)r_+^{2D-6}} {}_2F_1(a,b;c;z_+) \right\}. \qquad (3.5)$$

Энтропия и объём в рассматриваемом случае имеют следующий вид

$$S = \frac{\Omega_{D-2}}{4} r_+^{D-2}; \; V = \frac{\Omega_{D-2}}{D-1} r_+^{D-1}. \qquad (3.6)$$

На основе (1.4), (3.1), (3.5) и (3.6) получаем выражение для температуры и уравнение состояния $P(r_+, T)$, находящееся в хорошем соответствие с [10], [11]:

$$T = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{(D-1)r_+}{l^2} + \frac{D-3}{r_+} + \frac{4\beta^2 r_+}{(D-2)}\left(1 - \sqrt{1 - z_+}\right)\right],$$

$$P(r_+, T) =$$

$$= \frac{D-2}{4r_+}\left\{T - \frac{D-3}{4\pi r_+} - \frac{\beta^2 r_+}{\pi(D-2)}\left(1 - \sqrt{1 - z_+}\right)\right\}. \qquad (3.7)$$

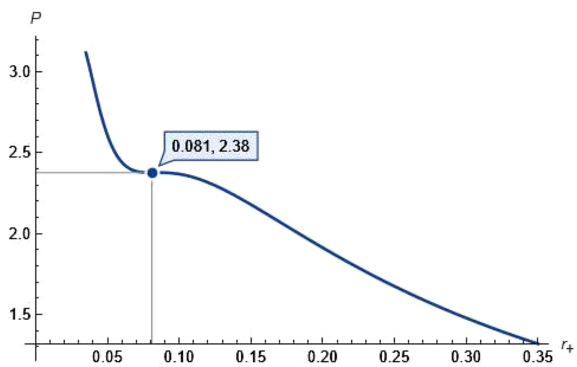

Рисунок 3.1 – Критическая изотерма БИ-АдС чёрной дыры при: $Q = 0{,}04$; $q = 0{,}04$; $\beta = 10$; $D = 4$ с параметрами: $T_c = 1{,}1466$; $P_c = 2{,}38$; $r_{+c} = 0{,}081$

Дальнейшие преобразования (3.7) на основе формул (1.10), (3.3) и (3.4) позволяют получить громоздкие, но явные, аналитические выражения только для критических температуры и давления. Для критического горизонта событий явного выражения нет. В частном случае, например, при $D = 4$, получим:

$$T_c = \frac{1}{2\pi r_{+c}} - \frac{Q^2}{\pi r_{+c}^3} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2/\beta^2 r_{+c}^4}};$$

$$P_c = \frac{1}{8\pi r_{+c}^2} - \frac{Q^2}{2\pi r_{+c}^4}\frac{1}{\sqrt{1+Q^2/\beta^2 r_{+c}^4}} - \\ -\frac{\beta^2}{4\pi}\left(1-\sqrt{1+\frac{Q^2}{\beta^2 r_{+c}^4}}\right).$$

Частный случай поведения критической изотермы БИ-АдС чёрной дыры представлен на рисунке 3.1.

Заключение

Таким образом, в данной работе показан метод определения явного вида термодинамических уравнений состояния чёрных дыр видов: РН-АдС, РН-АдС в ИЖТМ и БИ-АдС, приведенного в формулах (1.8), (2.5) и (3.7). Полученные для горизонта событий УС исследованы на наличие у них критических состояний. Найдены аналитические выражения для критических параметров и построены графики критических изотерм для ряда частных случаев. В дальнейшем предполагается проведение сравнительного анализа результатов данной статьи с критическим поведением реальных жидкостей в различных моделях, например, в модели Редлиха – Квонга [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bekenstein*, *J.D.* Black holes and the second law / J.D. Bekenstein // Lett. Nuovo Cimento. – 1972. – Vol. 4. – P. 737–740.

2. *Hawking*, *S.W.* Black hole explosions? / S.W. Hawking // Nature. – 1974. – Vol. 248. – P. 30–31.

3. *Hawking*, *S.W.* Thermodynamics of black holes in anti-de Sitter space / S.W. Hawking, D.N. Page // Commun. Math. Phys. – 1983. – Vol. 87. – P. 577–588.

4. *Charged AdS Black Holes and Catastrophic Holography* / A. Chamblin, R. Emparan, C.V. Johnson, R.C. Myers // Phys. Rev. D. – 1999. – Vol. 60. – P. 064018.

5. *Kastor*, *D.* Enthalpy and the Mechanics of AdS Black Holes / D. Kastor, S. Ray, J. Traschen // Class. Quantum Gravity. – 2009. – Vol. 26. – P. 195011.

6. *Ökcü*, *Ö.* Joule – Thomson expansion of the charged AdS black holes / Ö. Ökcü, E. Aydıner // Eur. Phys. J. C. – 2017. – Vol. 77. – Art. № 24.

7. *Joule – Thomson expansion of* RN-AdS *black holes immersed in perfect fluid dark matter* / Y. Cao, H. Feng, W. Hong, J. Tao // Commun. Theor. Phys. – 2021. – Vol. 73. – P. 095403.

8. *Joule – Thomson expansion of Born-Infeld AdS black holes* / S. Bi, M. Du, J. Tao, F. Yao // Chin. Phys. C. – 2021. – Vol. 45, № 2. – P. 025109.

9. *Perfect fluid dark matter influence on thermodynamics and phase transition for a Reissner – Nordstrom-anti-de Sitter black hole* / Z. Xu, X. Hou, J. Wang, Y. Liao // Adv. High Energy Phys. – 2019. – Vol. 2019. – Art. ID 2434390.

10. *Zou*, *D.* Critical behavior of Born-Infeld AdS black holes in the extended phase space thermodynamics / D. Zou, S. Zhang, B. Wang // Phys. Rev. D. – 2014. – Vol. 89, № 4. – P. 044002.

11. *Dey*, *T.K.* Born-Infeld black holes in the presence of a cosmological constant / T.K. Dey // Pys. Lett. B. – 2004. – Vol. 595. – P. 484–490.

12. *Новикова*, *О.В.* Джоуль-томсоновское расширение: жидкость Редлиха – Квонга и заряженная АдС чёрная дыра / О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 30–34.

Поступила в редакцию 09.02.2026.

Информация об авторах

Новикова Ольга Владимировна – магистр ф.-м.н.

Тюменков Геннадий Юрьевич – к.ф.-м.н., доцент