МАТЕМАТИКА

УДК 519.872 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_71
EDN: MVEWXM

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ОЖИДАЕМЫХ ДОХОДОВ *G*-СЕТИ С НЕНАДЁЖНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ И НЕТЕРПЕЛИВЫМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЗАЯВКАМИ

Д.Я. Копать

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

APPLICATION OF BESSEL FUNCTION FOR FINDING EXPEXTED REVENUES OF *G*-NETWORK WITH UNRELIABLE SYSTEMS AND IMPATIENT POSITIVE AND NEGATIVE CUSTOMERS

D.Y. Kopats

Yanka Kupala State University of Grodno

Аннотация. Объектом исследования в статье является *G*-сеть, состоящая из ненадёжных систем массового обслуживания (СМО), в которую поступают нетерпеливые положительные и отрицательные заявки. Нетерпеливость отрицательных заявок проявляется в уничтожении ими положительных заявок не сразу, а по истечении случайного времени, а нетерпеливость положительных – в ограничении времени ожидания начала обслуживания положительных заявок, по истечении которого она может перемещаться по системам сети или покидать сеть. С использованием модифицированных функций Бесселя первого рода удалось избавиться от ограничения на функционирование систем сети в режиме насыщения при нахождении ожидаемых доходов систем сети в случае, когда доходы от переходов между системами сети являются случайными величинами с известными средними значениями.

Ключевые слова: *G-сеть*, *ненадёжные линии обслуживания*, *функции Бесселя*, *ожидаемые доходы*, *нетерпеливые положительные и отрицательные заявки.*

Для цитирования: *Копать*, *Д.Я.* Применение функций Бесселя для нахождения ожидаемых доходов *G*-сети с ненадёжным обслуживанием и нетерпеливыми положительными и отрицательными заявками / Д.Я. Копать // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 1 (66). – С. 71–76. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_71. – EDN: MVEWXM

Abstract. The object of the study in the article is a *G*-network consisting of unreliable queuing systems (QS), which receives impatient positive and negative customers. The impatience of negative customers is manifested in the destruction of positive customers not immediately, but after a random period of time, and the impatience of positive customers is manifested in limiting the waiting time for the start of servicing positive customers, after which it can move through the network systems or leave the network. Using modified Bessel functions of the first orders, it was possible to get rid of the restriction on the functioning of network systems in the saturation mode when finding the expected revenues of network systems in the case when the revenues from transitions between network systems are random variables with known average values.

Keywords: *G-network*, *unreliable line service*, *Bessel function*, *expected revenues*, *impatient positive and negative customers.*

For citation: *Kopats*, *D.Y.* Application of Bessel function for finding expexted revenues of *G*-network with unreliable systems and impatient positive and negative customers / D.Y. Kopats // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 1 (66). – P. 71–76. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_71 (in Russian). – EDN: MVEWXM

Введение

G-сети как разновидность сетей массового обслуживания (СеМО), в которых помимо заявок, требующих обслуживания, функционируют объекты, которые не требуют обслуживания, но приносят вред СеМО, в стационарном режиме были введены в рассмотрение в статье [1], а в переходном режиме впервые исследовались в статье [2]. В статье [3] была исследована G-сеть с ненадёжными линиями обслуживания в переходном режиме в случае, когда линия обслуживания (ЛО) приходила в неисправность из-за причин, не связанных с компьютерными вирусами. В статье [4] данная сеть исследовалась в стационарном режиме, но предполагалось, что только вирусы способны приводить ЛО в неисправность. В статье [5] исследуется *G*-сеть с нетерпеливыми положительными и отрицательными заявками, а статья [6] исследует данную сеть в переходном режиме. Данная модель объединяет модели статей [3], [6], но для количества исправных ЛО условие смягчено: здесь функция Хевисайда для исправных ЛО аппроксимируется не единицей, а своим средним значением. Для количества положительных и отрицательных заявок в системах сети снимается условие на функционирование систем сети в режиме насыщения, при этом, в отличие от существующих методов, например, последовательных приближений, совмещённого с методом рядов, выражения являются аналитическими, а доходы от переходов между состояниями сети случайными величинами (СВ) с известными средними значениями.

1 Описание сети

Рассмотрим открытую G-сеть массового обслуживания [1] с n однолинейными системами массового обслуживания (СМО). В i-ю СМО из внешней среды поступают простейшие потоки положительных и отрицательных заявок с интенсивностями соответственно λ_{0i}^{+}, λ_{0i}^{-}, $i=\overline{1,\ n}$. Все поступающие потоки независимы. Времена обслуживания заявок в i-й СМО независимы, не зависят от процессов поступления и для положительных заявок являются показательной случайной величиной (ПСВ) с параметром μ_i. Каждая положительная заявка в i-й СМО имеет ограниченное ПСВ с параметром θ_i время пребывания, по истечении которого переходит в j-ю систему с вероятностью q_{ij}^{+} как положительная заявка, а с вероятностью q_{ij}^{-} как отрицательная заявка, и с вероятностью

$$q_{i0}=1-\sum_{j=1}^{n}\left(q_{ij}^{+}+q_{ij}^{-}\right)$$

уходит из сети, $i,j=\overline{1,\ n}$. Линии обслуживания (ЛО) подвергаются случайным поломкам, причем время исправной работы ЛО системы S_i является ПСВ с параметром β_i, $i=\overline{1,n}$. После поломки ЛО немедленно начинает восстанавливаться и время восстановления также является ПСВ с параметром γ_i, $i=\overline{1,n}$.

Каждая отрицательная заявка находится в системе случайное время, имеющее распределение ПСВ с параметром μ_i^{-}, по истечении которого уменьшает число положительных заявок на единицу при их наличии, и не производит никаких воздействий на систему в противном случае.

После окончания обслуживания заявки в i-й СМО, она направляется в j-ю СМО с вероятностью p_{ij}^{+} как положительная заявка, с вероятностью p_{ij}^{-} как отрицательная заявка, и с вероятностью

$$p_{i0}=1-\sum_{j=1}^{n}\left(p_{ij}^{+}+p_{ij}^{-}\right)$$

уходит из сети, $i=\overline{1,\ n}$.

2 Система ДУ для ожидаемых доходов систем сети

Рассмотрим динамику изменения доходов i-й СМО сети, $i=\overline{1,n}$. Пусть доход этой СМО в начальный момент времени был равен v_{i0}, $i=\overline{1,n}$. Нам нужно найти доход системы $V_i(t)$ в момент времени t, $i=\overline{1,n}$. Доход i-й СМО в момент времени $t+\Delta t$ можно записать в виде

$$V_i\left(t+\Delta t\right)=V_i\left(t\right)+\Delta V_i\left(t,\Delta t\right), \qquad (2.1)$$

где $\Delta V_i\left(t,\Delta t\right)$ – изменение дохода системы S_i на интервале $\left[t,t+\Delta t\right)$. Равенство (2.1) можно переписать в виде:

$$V_i'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\Delta V_i\left(t,\Delta t\right)\left(\Delta t\right)^{-1}.$$

Чтобы найти доход, выпишем условные вероятности событий, которые могут произойти за время Δt, а также изменения доходов i-й СМО, которые связаны с этими событиями, $i=\overline{1,n}$. Возможны следующие ситуации:

1) в i-ю СМО из внешней среды за время Δt поступит положительная заявка с вероятностью $\lambda_{0i}^{+}\Delta t+o\left(\Delta t\right)$, $i=\overline{1,n}$; доход i-й СМО увеличится на r_{0i}^{+}, где r_{0i}^{+} – СВ с математическим ожиданием $M\left\{r_{0i}\right\}=a_{0i}$, $i=\overline{1,n}$;

2) в i-ю СМО за время Δt из внешней среды поступит отрицательная заявка с вероятностью $\lambda_{0i}^{-}\Delta t+o\left(\Delta t\right)$, $i=\overline{1,n}$; изменение дохода сети в данном случае не произойдет;

3) положительная заявка после обслуживания или по истечении времени ожидания в i-ой СМО покинет сеть с вероятностью

$$\left(\mu_i u\left(d_i\right)p_{i0}+\theta_i q_{i0}\right)u\left(k_i\right)\Delta t+o\ (\Delta t),\ \ i=\overline{1,\ n};$$

убыток i-ой СМО составит R_{i0}^{+}, где R_{i0}^{+} – СВ с математическим ожиданием $M\left\{R_{i0}^{-}\right\}=b_{i0}^{-}$, $i=\overline{1,\ n}$, где k_i – количество положительных заявок в i-ой СМО, d_i – число исправных ЛО в i-ой СМО, $u\left(x\right)$ – функция Хевисайда;

4) в i-й СМО по окончании времени ожидания в ней отрицательной заявки она уничтожает в этой СМО положительную заявку с вероятностью

$$\mu_i^{-}u\left(l_i\right)u\left(k_i\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right),\ \ i=\overline{1,\ n};$$

доход для i-ой системы уменьшится на R_{i0}^{-}, где $M\left\{R_{i0}^{+}\right\}=b_{i0}^{+}$, $i=\overline{1,\ n}$;

5) в i-й СМО время ожидания отрицательной заявки закончилось, если в момент времени t в ней отсутствовали положительные заявки; вероятность этого события равна

$$\mu_i^- u(l_i)(1-u(k_i))\Delta t + o(\Delta t),\ \ i=\overline{1,n};$$

изменение дохода сети в данном случае не произойдет;

6) время обслуживания или ожидания положительной заявки в i-ой СМО закончилось и она переходит в j-ую СМО опять как положительная заявка с вероятностью

$$\left(\mu_i u(d_i) p_{ij}^+ + \theta_i q_{ij}^+\right) u(k_i)\Delta t + o(\Delta t),\ \ i,j=\overline{1,n};$$

доход i-ой СМО уменьшится на величину R_{ij}, а доход j-ой СМО увеличится на эту величину, где $M\{R_{ij}\}=a_{ij}^+,\ \ i,j=\overline{1,n},\ i\neq j.$ Аналогично, когда время обслуживания или ожидания положительной заявки в j-ой СМО закончилось и она переходит в i-ую СМО опять как положительная заявка, доход i-ой СМО увеличится на величину R_{ji};

7) время обслуживания или ожидания положительной заявки в i-ой СМО закончилось и она переходит в j-ую СМО как отрицательная заявка; вероятность такого события будет равна

$$\left(\mu_i u(d_i) p_{ij}^- + \theta_i (k_i+1) q_{ij}^-\right) u(k_i)\Delta t + o(\Delta t),$$
$$i,\ j=\overline{1,n};$$

доход i-ой СМО уменьшится на величину R_{ij}^-, а доход j-ой СМО не изменится, где $M\{R_{ij}^-\}=a_{ij}^-,\ \ i,\ j=\overline{1,n},\ i\neq j.$

8) с вероятностью

$$\gamma_i u(1-d_i(t))\Delta t + o(\Delta t),\ \ i=\overline{1,n},$$

при этом за время Δt восстановится одна линия обслуживания; доход СМО S_i умень-шится на СВ g_i, где $M\{g_i\}=h_i,\ \ j=\overline{1,\ n}.$

9) с вероятностью

$$\beta_i u(d_i(t))\Delta t + o(\Delta t),\ i=\overline{1,n},$$

при этом за время Δt одна линия обслуживания выйдет из строя; доход сети не изменится;

10) при этом в каждую i-ую СМО, $i=\overline{1,n}$, не поступают ни положительные, ни отрицательные заявки, и в них за время Δt не обслужилось ни одной заявки, не уйдет из очереди ни одной отрицательной заявки; вероятность такого события равна

$$1-\sum_{i=1}^{n}\Big(\lambda_{0i}^+ + \lambda_{0i}^- + \left(\mu_i u(k_i)+\theta_i\right) u(k_i) +$$
$$+\mu_i^-(l_i)u(l_i)+\gamma_i u(1-d_i)+\alpha_i u(d_i)\Big)\Delta t + o(\Delta t),$$
$$i=\overline{1,n};$$

суммарный доход системы S_i может увеличиться (уменьшиться) на величину $r_i\Delta t$, где $M\{r_i\}=c_i$, $i,\ j=\overline{1,n}.$

Пусть $\forall t$ СВ r_{0i}, R_{i0}, g_i, r_{ij}, $\overline{r}_{ij}$, не зависят от СВ r_i. Тогда получаем, что:

$$\Delta V_i(t,\Delta t)=\begin{cases} r_{0i}+r_i\Delta t, \text{ с вероятностью} \\ \lambda_{0i}^+\Delta t + o(\Delta t), \\ \hline -R_{i0}^+ + r_i\Delta t, \text{ с вероятностью} \\ \mu_i^- u(l_i)u(k_i)\Delta t + o(\Delta t), \\ \hline -R_{i0}^- + r_i\Delta t, \text{ с вероятностью} \\ \left(\mu_i u(d_i)p_{i0}+\theta_i q_{i0}\right)u(k_i)\Delta t + o(\Delta t), \\ \hline -R_{ij}+r_i\Delta t, \text{ с вероятностью} \\ \left(\mu_i u(d_i)p_{ij}^+ + \theta_i q_{ij}^+\right)u(k_i)\Delta t + o(\Delta t), \\ \hline R_{ji}+r_i\Delta t, \text{ с вероятностью} \\ \left(\mu_j u(d_j)p_{ji}^+ + \theta_j q_{ji}^+\right)u(k_j)\Delta t + o(\Delta t), \\ \hline -a_{ij}^- + r_i\Delta t, \text{ с вероятностью} \\ \left(\mu_i u(d_i)p_{ij}^- + \theta_i q_{ij}^-\right)u(k_i)\Delta t + o(\Delta t), \\ i,\ j=\overline{1,n}, i\neq j, \\ \hline -g_i + r_i\Delta t, \text{ с вероятностью} \\ \gamma_i\left(1-u(d_i(t))\right)\Delta t + o(\Delta t), \\ \hline r_i\Delta t, \text{ с вероятностью} \\ 1-\sum_{i=1}^{n}\left[(\lambda_{0i}^+ + \lambda_{0i}^- + \mu_i)u(k_i(t)) + \right. \\ \left. +\gamma_i u(d_i(t)) + \beta_i u(1-d_i(t))\right]\Delta t + o(\Delta t). \end{cases}$$

Тогда математическое ожидание изменения дохода равно:

$$M\{\Delta V_i(t,\Delta t)\}=\left(a_{0i}+c_i\Delta t\right)\left(\lambda_{0i}^+\Delta t + o(\Delta t)\right)+$$
$$+\left(-b_{i0}^+ + c_i\Delta t\right)\left(\mu_i^- Mu(l_i)Mu(k_i)\Delta t + o(\Delta t)\right)+$$
$$+\left(-b_{i0}^- + c_i\Delta t\right)\times$$
$$\times\left(\left(\mu_i Mu(d_i)p_{i0}+\theta_i q_{i0}\right)Mu(k_i)\Delta t + o(\Delta t)\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\left(-a_{ij}^+ + c_i\Delta t\right)\times$$
$$\times\left(\left(\mu_i Mu(d_i)p_{ij}^+ + \theta_i q_{ij}^+\right)Mu(k_i)\Delta t + o(\Delta t)\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ji}^+ + c_i\Delta t\right)\times$$
$$\times\left(\left(\mu_j Mu(d_j)p_{ji}^+ + \theta_j q_{ji}^+\right)Mu(k_j)\Delta t + o(\Delta t)\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\left(-a_{ij}^- + c_i\Delta t\right)\times$$
$$\times\left(\left(\mu_i Mu(d_i)p_{ij}^- + \theta_i q_{ij}^-\right)Mu(k_i)\Delta t + o(\Delta t)\right)+$$
$$+\left(-h_i + c_i\Delta t\right)\left(\gamma_i\left(1-Mu(d_i(t))\right)\Delta t + o(\Delta t)\right)+$$
$$+c_i\Delta t\Bigg[1-\sum_{i=1}^{n}\left[(\lambda_{0i}^+ + \lambda_{0i}^- + \mu_i)Mu(k_i(t)) + \right.$$

$$+\gamma_i Mu\left(d_i(t)\right)+\beta_i u\left(1-d_i(t)\right)\Big]\Delta t+o(\Delta t)\Big].$$

Рассмотрим математическое ожидание от функций Хевисайда. По определению математического ожидания и с учётом состояний в однолинейной СМО

$$d_i(t)\in\{0;1\}\quad Mu\left(d_i(t)\right)=P\{d_i(t)=1\}.$$

Используя результаты работы [7] получим

$$Mu\left(d_i\right)=1-\frac{\beta_i}{\beta_i+\gamma_i}+\frac{\beta_i}{\beta_i+\gamma_i}e^{-(\beta_i+\gamma_i)t}=$$

$$=\frac{\gamma_i}{\beta_i+\gamma_i}+\frac{\beta_i}{\beta_i+\gamma_i}e^{-(\beta_i+\gamma_i)t},$$

$$Mu\left(k_i\right)=P\left(k_i(t)>0\right)=1-P\left(k_i(t)=0\right).$$

Количество заявок простейшего потока с интенсивностью λ за время *t*, как известно например в [8], [9], подчиняется распределению Пуассона

$$P_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}.$$

Отсюда следует, что при $k=0$ получаем $P_0(t)=e^{-\lambda t}$, при $k=1$ $P_1(t)=\lambda te^{-\lambda t}$. При малом значении *t* обозначим это значение как Δt в силу ординарности простейшего потока $P_{>1}(\Delta t)=o(\Delta t)$. Отсюда из условия нормировки получаем, $P_1(\Delta t)=1-e^{-\lambda\Delta t}+o(\Delta t)$. Как известно, в марковских СеМО длительности времен обслуживания заявок имеют показательное распределение, то есть вероятность обслуживания 1 заявки за время *t* имеет вид: $1-e^{-\lambda t}$, а вероятность того, что это время будет больше, то есть за время *t* не обслужиться ни одной заявки, равно $e^{-\lambda t}$. Последняя вероятность совпадает с вероятностью поступления нуля заявок при простейшем потоке. Таким образом приходим к выводу, что при малом значении времени данные распределения близки друг к другу, а именно разность вероятностей при замене показательного распределения простейшим потоком равна $o(\Delta t)$. С учётом того, что суперпозиция простейших потоков является простейшим потоком [8], [9], то при малых значениях времени каждую очередь в описываемой СМО можно считать СМО M / M / 1. То есть такая замена будет иметь погрешность суммы конечного количества $o(\Delta t)$, то есть будет равна $o(\Delta t)$. Отсюда следует, что для каждой СМО сети можно применить результаты работы [10], согласно которым получим следующие результаты:

$$Mu\left(k_i\right)=1-p_{0i}(t)=$$

$$=1-\int_0^t q_{1i}(y)e^{-\left(\lambda_i+\mu_i^*\right)y}dy-\delta_{0a_i},$$

где

$$q_{1i}(t)=\mu_i^*\left(\sqrt{\lambda_i/\mu_i^*}\right)^{1-a_i}\left(1-\delta_{0a_i}\right)\times$$

$$\times\left[I_{a_i-1}\left(2\sqrt{\lambda_i\mu_i^*}t\right)+I_{a_i+1}\left(2\sqrt{\lambda_i\mu_i^*}t\right)\right]+$$

$$+\lambda_i\left(\sqrt{\lambda_i/\mu_i}\right)^{-a_i}\left[I_{a_i}\left(2\sqrt{\lambda_i\mu_i^*}t\right)+I_{2+a_i}\left(2\sqrt{\lambda_i\mu_i^*}t\right)\right],$$

λ_i – интенсивность входящего в *i*-ую СМО потока, μ_i^* – интенсивность выходящего из *i*-ой СМО потока, a_i – начальное состояние *i*-ой СМО, $I_n(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода (МФБ1) *n*-го порядка (для СеМО нас будет интересовать случай целого неотрицательного порядка), δ_{0a_i} – символ Кронекера. Входящий поток в нашей сети разделим на 2 части: входящий поток положительных заявок с интенсивностью $\lambda_i^{(p)}$ и входящий поток отрицательных заявок с интенсивностью $\lambda_i^{(n)}$. Аналогично для выходящего потока $\mu_i^{(p)},\mu_i^{(n)}$. Для нашей сети данные параметры равны:

$$\lambda_i^{(p)}=\lambda_{0i}^{+}+\sum_{j=1}^{n}\mu_j p_{ji}^{+}+\sum_{j=1}^{n}\theta_j q_{ji}^{+},\quad \mu_i^{(p)}=\mu_i+\mu_i^{-}.$$

Отсюда введём обозначения:

$$q_{1i}^{(p)}(t)=\mu_i^{(p)}\left(\sqrt{\lambda_i^{(p)}/\mu_i^{(p)}}\right)^{1-a_i}\left(1-\delta_{0a_i}\right)\times$$

$$\times\left[I_{a_i-1}\left(2\sqrt{\lambda_i^{(p)}\mu_i^{(p)}}t\right)+I_{a_i+1}\left(2\sqrt{\lambda_i^{(p)}\mu_i^{(p)}}t\right)\right]+$$

$$+\lambda_i\left(\sqrt{\lambda_i^{(p)}/\mu_i^{(p)}}\right)^{-a_i}\times$$

$$\times\left[I_{a_i}\left(2\sqrt{\lambda_i^{(p)}\mu_i^{(p)}}t\right)+I_{2+a_i}\left(2\sqrt{\lambda_i^{(p)}\mu_i^{(p)}}t\right)\right].$$

И наконец рассмотрим $Mu\left(l_i\right)=P\left(l_i(t)>0\right)$. Аналогично прошлому случаю получим

$$\lambda_i^{(n)}=\lambda_{0i}^{-}+\sum_{j=1}^{n}\mu_j p_{ji}^{-}+\sum_{j=1}^{n}\theta_j q_{ji}^{-},\quad \mu_i^{(n)}=\mu_i^{-},$$

$$q_{1i}^{(n)}(t)=\mu_i^{(n)}\left(\sqrt{\lambda_i^{(n)}/\mu_i^{(n)}}\right)^{1-a_i}\left(1-\delta_{0a_i}\right)\times$$

$$\times\left[I_{a_i-1}\left(2\sqrt{\lambda_i^{(n)}\mu_i^{(n)}}t\right)+I_{a_i+1}\left(2\sqrt{\lambda_i^{(n)}\mu_i^{(n)}}t\right)\right]+$$

$$+\lambda_i\left(\sqrt{\lambda_i^{(n)}/\mu_i^{(n)}}\right)^{-a_i}\times$$

$$\times\left[I_{a_i}\left(2\sqrt{\lambda_i^{(n)}\mu_i^{(n)}}t\right)+I_{2+a_i}\left(2\sqrt{\lambda_i^{(n)}\mu_i^{(n)}}t\right)\right].$$

Введем обозначение $v_i(t)=M\{V_i(t)\}$. Из (2.1) имеем

$$v_i(t+\Delta t)=v_i(t)+M\{\Delta V_i(t,\,\Delta t)\},$$

откуда, перейдя к пределу при $\Delta t\to 0$ и задавая начальные условия $v_i(0)=v_{i0}$, $i=\overline{1,n}$, получим выражения для ожидаемых доходов систем сети

$$\begin{aligned}
v_i(t) &= c_i t + a_{0i}\lambda_{0i}^{+}t - \\
&-b_{i0}^{+}\mu_i^{-}\int_0^t Mu\big(l_i(\tau)\big)Mu\big(k_i(t)\big)d\tau - \\
&-b_{i0}^{-}\Bigg(\mu_i p_{i0}\int_0^t Mu\big(d_i(\tau)\big)Mu\big(k_i(\tau)\big)d\tau + \\
&+\theta_i q_{i0}\int_0^t Mu\big(k_i(\tau)\big)d\tau\Bigg) - \\
&-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{+}\Bigg(\mu_i p_{ij}^{+}\int_0^t Mu\big(d_i(\tau)\big)Mu\big(k_i(\tau)\big)d\tau + \\
&+\theta_i q_{ij}^{+}\int_0^t Mu\big(k_i(\tau)\big)d\tau\Bigg) + \\
&+\sum_{j=1}^{n} a_{ji}^{+}\Bigg(\mu_j p_{ji}^{+}\int_0^t Mu\big(d_j(\tau)\big)Mu\big(k_j(\tau)\big)d\tau + \\
&+\theta_j q_{ji}^{+}\int_0^t Mu\big(k_i(\tau)\big)d\tau\Bigg) - \\
&-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-}\Bigg(\mu_i p_{ij}^{-}\int_0^t Mu\big(d_i(\tau)\big)Mu\big(k_i(\tau)\big)d\tau + \\
&+\theta_i q_{ij}^{-}\int_0^t Mu\big(k_i(\tau)\big)d\tau\Bigg) - \\
&-h_i\left(\gamma_i\left(t-\int_0^t Mu\big(d_i(\tau)\big)d\tau\right)\right).
\end{aligned}$$

Рассмотрим интегралы от функций Хевисайда.

$$\int_0^t Mu\big(d_i(\tau)\big)d\tau = \int_0^t\left(\frac{\gamma_i}{\beta_i+\gamma_i}+\frac{\beta_i}{\beta_i+\gamma_i}e^{-(\beta_i+\gamma_i)\tau}\right)d\tau =$$

$$=\frac{\gamma_i t}{\beta_i+\gamma_i}-\frac{\beta_i}{(\beta_i+\gamma_i)^2}e^{-(\beta_i+\gamma_i)t}+\frac{\beta_i}{(\beta_i+\gamma_i)^2}.$$

$$\int_0^t Mu\big(k_i(\tau)\big)d\tau = t\Big(1-P\big(k_i(t)=0\big)\Big)=$$

$$=t\left(1-\int_0^t q_{1i}^{(p)}(y)e^{-\left(\lambda_i^{(p)}+\mu_i^{(p)}\right)y}dy-\delta_{0a}\right).$$

Перейдём к интегралам от произведения функций Хевисайда в предложении, что потоки приходящих в каждую СМО положительных и отрицательных заявок, а также положительных заявок и интенсивности выхода из строя и восстановления ЛО независимы. Тогда получим:

$$\int_0^t Mu\big(l_i(\tau)\big)Mu\big(k_i(t)\big)d\tau =$$

$$=tP\big\{l_i(t)>0\big\}P\big\{k_i(t)>0\big\}=$$

$$=t\left(1-\int_0^t q_{1i}^{(p)}(y)e^{-\left(\lambda_i^{(p)}+\mu_i^{(p)}\right)y}dy+\delta_{0a_i}\right)\times$$

$$\times\left(1-\int_0^t q_{1i}^{(n)}(y)e^{-\left(\lambda_i^{(n)}+\mu_i^{(n)}\right)y}dy+\delta_{0a_i}\right).$$

$$\int_0^t Mu\big(d_i(\tau)\big)Mu\big(k_i(\tau)\big)d\tau =$$

$$=tP\big\{d_i(t)=1\big\}P\big\{k_i(t)>0\big\}=$$

$$=t\left(\frac{\gamma_i}{\beta_i+\gamma_i}+\frac{\beta_i}{\beta_i+\gamma_i}e^{-(\beta_i+\gamma_i)t}\right)\times$$

$$\times\left(1-\int_0^t q_{1i}^{(p)}(y)e^{-\left(\lambda_i^{(p)}+\mu_i^{(p)}\right)y}dy+\delta_{0a_i}\right).$$

Пример. Рассмотрим СеМО, состоящую из $n=5$ СМО с интенсивностями входного потока положительных и отрицательных заявок λ_{0i}^{+} и λ_{0i}^{-} равными соответственно $\lambda_{01}^{+}=30$, $\lambda_{02}^{+}=10$, $\lambda_{03}^{+}=20$, $\lambda_{04}^{+}=20$, $\lambda_{05}^{+}=20$, $\lambda_{01}^{-}=\lambda_{02}^{-}=\lambda_{03}^{-}=15$, $\lambda_{04}^{-}=15, \lambda_{05}^{-}=15$. Ожидаемые доходы от поступления положительных заявок в системы сети извне a_{0i} равны соответственно $a_{0i}=10, i=\overline{1,5}$. Пусть интенсивности обслуживания заявок и активации отрицательных заявок в СМО сети равны: $\mu_i=\mu_i^{-}=50$, $i=\overline{1,5}$. Убытки сети от активации отрицательных заявок b_{i0}^{-} и себестоимость обслуживания заявки b_{i0}^{+} равны соответственно $b_{i0}^{+}=b_{i0}^{-}=i, i=\overline{1,5}$. Параметры времени работы неисправной и времени восстановления равны соответственно $\beta_i=4$, $\gamma_i=5$, $i=\overline{1,5}$. Средняя величина убытка за восстановление ЛО равна $h_i=2, i=\overline{1,5}$. Положим, что вероятности перехода положительных и отрицательных заявок между СМО сети равны:

$$p_{ji}^{-}=q_{ii}=q_{ij}^{+}=q_{ij}^{-}=0{,}1;\ i\neq j;\quad i,j=\overline{1,5}.$$

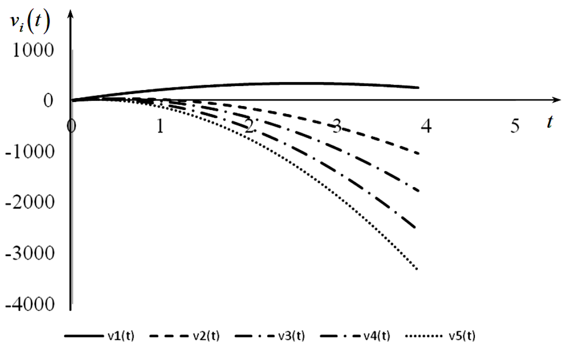

Рисунок 2.1 – График ожидаемого дохода систем сети на отрезке времени [0; 4]

Интенсивности досрочного перехода заявок между системами сети равны соответственно $\theta_j=2$; $j=\overline{1,5}$. Выражения для ожидаемых доходов от перехода положительных заявок между системами сети a_{ij}^{+} имеют вид $a_{ij}^{+}=5,$ а в случае перехода заявок в другие СМО как отрицательных – следующий вид $a_{ij}^{-}=3.$ На рисунке 2.1 представлен график изменения ожидаемых доходов систем сети на отрезке времени [0; 4], если в начальный момент времени все системы сети были с нулевым доходом.

Заключение

В статье представлена *G*-сеть, состоящая из ненадежных систем с нетерпеливыми положительными и отрицательными заявками. С помощью МФБ1 найдены ожидаемые доходы систем сети в случае, когда доходы от переходов между состояниями сети являются СВ с известными средними значениями. Показано, что если системы сети не находятся в режиме насыщения, то ожидаемый доход является нелинейной функцией времени даже если параметры сети не зависят от времени и состояний сети.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gelenbe*, *E*. Product form queueing networks with negative and positive customers / E. Gelenbe // Journal of Applied Probability. – 1991. – Vol. 28. – P. 656–663.

2. *Matalytski*, *M*. Non-stationary analysis of queueing network with positive and negative messages / M. Matalytski, V. Naumenko // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. – 2013. – Vol. 12, № 2. – P. 61–71.

3. *Копать*, *Д.Я*. Анализ *G*-сети с ненадежными линиями обслуживания / Д.Я. Копать, М.А. Маталыцкий // Вести Национальной академия наук Беларуси. Серия физико-математических наук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 441–453.

4. *Fourneau*, *J.M*. *G*-networks of unreliable nodes / J.M. Fourneau // Probability in the Engineering and Informational Sciences. – 2016. – Vol. 30, № 3. – С. 361−378.

5. *Малинковский*, *Ю.В*. Стационарное распределение вероятностей состояний *G*-сетей с ограниченным временем пребывания / Ю.В. Малинковский // Автоматика и телемеханика. – 2017. – № 10. – С. 155−167.

6. *Копать*, *Д.Я*. Нахождение ожидаемых доходов в сети массового обслуживания со случайным временем ожидания положительных и отрицательных заявок / Д.Я. Копать, В.В. Науменко, М.А. Маталыцкий // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2017. – Т. 7, № 1. – С. 147–153.

7. *Ивницкий*, В.А. Теория сетей массового обслуживания / В.А. Ивницкий. – Москва: Физматлит, 2004. – 772 с.

8. *Маталыцкий*, *М.А*. Системы и сети МО: анализ и применения / М.А. Маталыцкий, О.М. Тихоненко, Е.В. Колузаева. – Гродно: ГрГУ, 2011. – 817 с.

9. *Вишневский*, *В.М*. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях / В.М. Вишневский, А.Н. Дудин, В.И. Клименок. – Москва: ТЕХНОСФЕРА, 2018. – 563 с.

10. *Parthasarathy*, *P.R*. A Transient solution to an M / M / 1 queue: a simple approach / P.R. Parthasarathy // Advances in Applied Probability. – 1987. – Т. 19, №. 4. – С. 997–998.

Поступила в редакцию 09.10.2025.

Информация об авторах

Копать Дмитрий Ярославович – к.ф.-м.н., доцент