УДК 535.42 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_7
EDN: YVEZPY

АСИММЕТРИЧНЫЕ ПАРАКСИАЛЬНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ПУЧКИ ЛАГЕРРА – ГАУССА И ЛАГЕРРА

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ASYMMETRIC PARAXIAL OPTICAL LAGUERRE – GAUSS AND LAGUERRE BEAMS

S.S. Girgel

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Предложены аналитические выражения в замкнутой форме для новых типов асимметричных параксиальных оптических пучков Лагерра – Гаусса и Лагерра. Учтена также возможность явной азимутальной зависимости комплексной амплитуды. Классические пучки Лагерра – Гаусса (обобщенные, стандартные и элегантные) являются их предельными или частными случаями. Сформулированы также ограничения на свободные параметры, чтобы исследуемые асимметричные параксиальные оптические пучки Лагерра – Гаусса и Лагерра переносили конечную мощность и были физически реализуемыми.

Ключевые слова: *параксиальные пучки*, *циркулярные пучки*, *пучки Лагерра – Гаусса*, *стандартные пучки Лагерра – Гаусса*, *элегантные пучки Лагерра – Гаусса*.

Для цитирования: *Гиргель*, *С.С.* Асимметричные параксиальные оптические пучки Лагерра – Гаусса и Лагерра / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 1 (66). – С. 7–11. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_7. – EDN: YVEZPY

Abstract. Closed-form analytical expressions for new types of asymmetric paraxial optical Laguerre – Gauss and Laguerre beams are proposed. The possibility of explicit azimuthal dependence of the complex amplitude is also taken into account. Classical Laguerre – Gauss beams (generalized, standard and elegant) are their limiting or special cases. Constraints on the free parameters are also formulated so that the studied asymmetric paraxial optical Laguerre – Gauss and Laguerre beams carry finite power and are physically realizable.

Keywords: *paraxial beams*, *circular beams*, *Laguerre – Gauss beams*, *standard Laguerre – Gauss beams*, *elegant Laguerre – Gauss beams.*

For citation: *Girgel*, *S.S.* Asymmetric paraxial optical Laguerre – Gauss and Laguerre beams / S.S. Girgel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 1 (66). – P. 7–11. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_7 (in Russian). – EDN: YVEZPY

Введение

Пучки Лагерра – Гаусса (*LG*), наряду с пучками Эрмита – Гаусса и круговыми гауссовыми пучками, по-прежнему остаются популярными объектами исследований в оптике [1]–[14]. Существование мод Лагерра – Гаусса в открытых структурах впервые обсуждалось Губо (Goubau) и Шверингом (Schwering) в 1961 году [4],С тех пор были проведены многочисленные исследования пучков *LG*. Следует отметить важные работы Siegman [15], Allen [2]–[3] о векторе Пойнтинга в *LG* пучках.

Недавно, Ковалев и соавторы [11]–[12] исследовали стандартные *LG* (*sLG*) пучки с комплексным смещением поперечных координат, которые были ими названы асимметричными (*aLG*) пучками.

В настоящей работе более детально изучается влияние комплексных смещений iX_0 и iY_0 на *sLG*, элегантные *LG* (*eLG*) и обобщенные *LG* (*gLG*) пучки. Кроме того, обсуждаются как с азимутальной симметрией $\propto \exp(im\varphi)$, так и пучки с явной азимутальной зависимостью $\cos(m\varphi)$ и, наконец, чистые пучки Лагерра, без гауссовой аподизации.

Сначала, базируясь на наших результатах, полученных для циркулярных пучков Куммера – Гаусса и Куммера, предложены явные выражения, характеризующие общие возможные параксиальные пучки Лагерра – Гаусса. Учитываются их возможные асимметрия (децентровка) и различные азимутальные зависимости. Основываясь на последнем выражении получены явные выражения, характеризующие возможные более общие *agLG* пучки, *aeLG* пучки*, asLG* пучки и даже *aL* пучки без гауссиана. Сформулированы также условия физической реализуемости для каждого типа пучков.

1 Различные новые типы асимметричных пучков Лагерра – Гаусса

Согласно [16]–[18], комплексную амплитуду параксиального скалярного циркулярного пучка Куммера – Гаусса с цилиндрической симметрией в безразмерной форме можно записать как

$$f = \exp\left(\frac{iR^2}{Q}\right)\cdot Q^{-\nu-m-1}P^{\nu}\times$$

$$\times M\left(-\nu, m+1, i\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{Q}\right)\right)\cdot R^m f_2(m,\varphi). \quad (1.1)$$

Здесь $X=\dfrac{x}{x_0}$, $Y=\dfrac{y}{x_0}$, $Z=\dfrac{z}{z_0}$. $R=\sqrt{X^2+Y^2}$.

Параметры x_0 и $z_0 = kx_0^2/2$ – некоторые характерные вещественные размеры пучка в направлениях, параллельных осям $0X$ и $0Y$ соответственно. M – функция Куммера, или, иначе, вырожденная гипергеометрическая функция ${}_1F_1$ [19], [20]. Q и P – безразмерные комплексные параметры пучка: $Q = Z - Q_0$, $P = Z - P_0$, причем $Q_0 = Q_0' + iQ_0''$, $P_0 = P_0' + iP_0''$. Здесь и далее штрихами помечаем вещественные и мнимые части различных величин. Фазовый множитель f_2 можно записать в общем виде, как

$$f_2(m,\varphi) = \cos m\varphi + ib\sin m\varphi,$$

где $\varphi = arctg(X,Y)$, $b\in[0;1]$ – азимутальный параметр модуляции. ν – радиальный комплексный параметр. Угловой параметр $m = 0,1,2,\ldots$

Азимутальная зависимость от угла φ, как отмечает Ананьев [1], совершенно равноправна как в форме $e^{im\varphi}$, так и в виде $\cos m\varphi$ или $\sin m\varphi$. Наиболее часто встречается зависимость $e^{im\varphi}$. Она проще для анализа. Однако зависимость в форме $\cos m\varphi$ для LG пучков встречаем еще в основополагающей статье о LG пучках у Goubau [4], в статьях Tovar [7], в книгах Ярива [5], Солимено [6], Ананьева [1], Короленко [21], в теоретических работах Seshadri [8], [9] и Lewis [10].

Экспериментально LG пучки с $\cos m\varphi$ зависимостью изучались в работах Meucci [22].

Выражение (1.1) является точным решением параболического уравнения

$$(\partial_{XX}^2 + \partial_{YY}^2 + 4i\partial_Z)f = 0 \quad (1.2)$$

записанного в безразмерной форме для монохроматических волн.

Хорошо известна [19] связь между функцией Куммера и полиномами Лагерра

$$L_n^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}\cdot M\left(-n,\alpha+1,z\right).$$

Менее известно [20] обобщение этой формулы на функции Лагерра

$$L_\nu^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\alpha+1)}\cdot M\left(-\nu,\alpha+1,z\right),$$

где ν параметр является нецелым и в общем случае комплексным. Далее мы будем использовать не полиномы, а функции Лагерра для описания неисследованных пока децентрированных (асимметричных) пучков Лагерра – Гаусса и Лагерра с явной азимутальной зависимостью. С этой целью выразим (1.1) через функцию Лагерра

$$f_{gLG} = \exp\left(\frac{iR^2}{Q}\right)\cdot Q^{-\nu-m-1}P^{\nu}\times$$

$$\times L_\nu^m\left(i\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{Q}\right)R^2\right)\cdot R^m f_2(m,\varphi). \quad (1.3)$$

Получили выражение, характеризующее общие LG пучки. Существенно, что здесь фигурируют функции Лагерра, а не полиномы Лагерра. В общем случае свободный параметр ν комплексный: $\nu = \nu' + i\nu''$.

2 Модификации комплексной амплитуды

Обсудим различные модификации комплексной амплитуды (1.3).

А) Осуществим предварительно комплексное смещение (децентровку) поперечных координат соотношениями $X_d = X - iX_0$; $Y_d = Y - iY_0$; $R_d = \sqrt{X_d^2 + Y_d^2}$; $\varphi_d = \arctan\left(X_0, Y_0\right)$. Получаем выражение, описывающее обобщенные асимметричные Лагерра – Гаусса (*agLG*) пучки

$$f_{agLG} = \exp\left(\frac{iR_d^2}{Q}\right)\cdot Q^{-\nu-m-1}P^{\nu}\times$$

$$\times L_\nu^m\left(i\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{Q}\right)R_d^2\right)\cdot R_d^m f_2(m,\varphi_d). \quad (2.1)$$

Для физической реализуемости пучков (2.1) необходима квадратичная интегрируемость (КИ) функций f_{agLG}. Последняя осуществляется при следующих ограничениях $\{Q_0'' > 0_0,\ P_0'' > 0\}$, налагаемых на свободные параметры. При этом радиальный индекс ν может быть произвольным комплексным.

Остановимся на формализме для описания азимутальных зависимостей LG пучков. В простейшем случае фазовая модуляция пучка $f_2(m,\varphi) = \exp(im\varphi)$. Тогда при наличии децентровки

$$R_d^m f_2(m,\varphi_d) = \left(X_d + iY_d\right)^m. \quad (2.2)$$

Если же мы используем явную азимутальную зависимость $f_2(m,\varphi) = \cos(m\varphi)$, то в случае децентровки проще всего взять выражение

$$R_d^m f_2(m,\varphi_d) = \frac{1}{2}\left(\left(X_d + iY_d\right)^m + \left(X_d - iY_d\right)^m\right).$$

Более подробное обсуждение различных возможностей описания явных азимутальных зависимостей для пучков с цилиндрической симметрией было проведено на примере пучков Бесселя в работе [23].

Б) Если положить $v \equiv n = 1,2,...,$ то (1.3) редуцируется к классическим gLG [18] пучкам. Используем также децентровку и получаем далее

$$f_{agLG} = \exp\left(\frac{iR_d^2}{Q}\right) \cdot Q^{-n-m-1} P^n \times$$
$$\times L_n^m \left(i \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q} \right) R_d^2 \right) \cdot R_d^m \cdot f_2(m, \varphi_d). \qquad (2.3)$$

Условия квадратичной интегрируемости (КИ) для комплексной амплитуды f_{agLG} пучков $agLG$ сводятся только к ограничениям $Q_0'' > 0_0$, а параметр P_0'' может быть как положительным, так и отрицательным.

В) Рассмотрим теперь sLG пучки. Полагаем в (1.3) параметр $P = Q^*$. Тогда

$$f_{asLG} = \exp\left(\frac{iR_d^2}{Q}\right) \cdot Q^{-n-m-1} Q^{*n} \times$$
$$\times L_n^m \left(\frac{2Q_0'' R_d^m}{|Q|^2} \right) \cdot R_d^m \cdot f_2(m, \varphi_d). \qquad (2.4)$$

После некоторых преобразований можно представить (2.4) в более привычной форме

$$f_{asLG} = \frac{1}{Q} \exp\left(\frac{iR_d^2}{Q}\right) \cdot \left(\frac{2}{W^2}\right)^{\frac{m}{2}} \times$$
$$\times L_n^m \left[\frac{2R_d{}^2}{W^2} \right] \cdot R_d^m \cdot e^{-i(2n+m)\Phi_0}. \qquad (2.5)$$

Здесь квадрат нормированного радиуса пучка равен

$$W^2 = Q_0'' \left(1 + \frac{(Z - Q_0')^2}{Q_0''^2} \right).$$

Если взять множитель $R_d^m f_2(m, \varphi_d)$ в форме (2.2), тогда выражение (2.5) соответствует формуле (3) в статье [11] Ковалева и др.

Если же использовать форму (2.3), тогда выражение (2.5) при $Q_0' = 0$ характеризует $asLG$ пучки с явной азимутальной зависимостью $\propto \cos(m\varphi)$, которые пока не исследовались.

Г) Обсудим теперь обобщенные eLG пучки. Для этого в общей формуле (1.3) полагаем параметр $|P| \to \infty$. Учтем также возможную децентровку пучка. Тогда комплексная амплитуда (2.1) редуцируется к выражению

$$f_{gaeLG} = \exp\left(\frac{iR_d^2}{Q}\right) \cdot Q^{-v-m-1} \times$$
$$\times L_v^m \left(-\frac{i}{Q} R_d^2 \right) \cdot R_d^m \cdot f_2(m, \varphi_d), \qquad (2.6)$$

характеризующему обобщенные асимметричные элегантные LG ($gaeLG$) пучки.

Действительно, если положить в (2.6) $v \equiv n = 1,2,...,$ тогда (2.6) описывают неисследованные асимметричные eLG ($aeLG$) пучки. Отметим, что классические eLG пучки без децентровки были впервые введены в [24] и обсуждались затем в [4], [5].

Если параметр v является непрерывным положительным числом, тогда (2.6) характеризует т.н. фракционные eLG пучки [25].

Однако существует еще одна интересная возможность. Согласно [16], если свободный комплексный параметр v удовлетворяет условию

$$v' < -(1+m)/2,$$

тогда функция f_{aeLG} обладает КИ. Действительно, что при выполнении ограничений $Q_0'' > 0$ и $v' < -(1+m)/2$ формула (2.6) описывает новый тип асимметричных (децентрированных) eLG пучков. При этом классические eLG пучки Сигмана [15] и фракционные eLG пучки [25] являются частными случаями пучков $gaeLG$ в (2.6)

Д) В общей формуле (1.3) полагаем параметр $|Q| \to \infty$. Учтем также возможную децентровку пучка. Тогда комплексная амплитуда (2.1), после переобозначений $Q \leftrightarrow P$, редуцируется к виду

$$f_{aL} = Q^v \cdot L_v^m \left(\frac{i}{Q} R_d^2 \right) \cdot R_d^m \cdot f_2(m, \varphi_d). \qquad (2.7)$$

Последнее выражение описывает асимметричные Лагерра (aL) пучки. При ограничениях $\{Q_0'' > 0,\ v' > -m/2\}$ aL пучки являются физически реализуемыми, поскольку переносят конечную мощность. Существенно, что здесь используются функции Лагерра f_{aL} непрерывного комплексного радиального индекса v, а не полиномы Лагерра. Не требуется здесь явно и гауссиан.

Следует отметить также, что выражение (2.7) эквивалентно формуле

$$f_{acK} = Q^v \cdot M\left(-v, m+1, \frac{i}{Q} R_d^2 \right) \cdot R_d^m \cdot f_2(m, \varphi_d),$$

которая описывает асимметричные циркулярные пучки Куммера.

Если децентровка в последнем выражении отсутствует, тогда мы приходим к параксиальным циркулярным пучкам Куммера

$$f_{cK} = Q^v \cdot M\left(-v, m+1, \frac{i}{Q} R^2 \right) \cdot R^m \cdot f_2(m, \varphi),$$

которые теоретически исследовались в наших работах [26]–[28].

Заключение

В данной статье обсуждаются новые типы оптических пучков *LG* и *L*. При этом учитываются возможные комплексные смещения поперечных компонент координат $\mathbf{R}_{\perp\mathbf{d}} = \mathbf{R}_{\perp} + i\mathbf{R}_0$. Базируясь на результатах изучения циркулярных световых пучков Куммера – Гаусса с непрерывным угловым индексом и математической связи между функциями Куммера и Лагерра был установлен ряд закономерностей.

1. Возможны общие aLG пучки с комплексным радиальным индексом ν. При выполнении условий $\{Q_0'' > 0_0,\ P_0'' > 0\}$ они являются физически реализуемыми. Если при этом индекс ν становится целочисленным положительным, то они редуцируются к классическим *gLG* пучкам [17].

2. При условиях $\{Q_0'' > 0_0,\ \ |P_0''| \to \infty\}$ возможны также $gaeLG$ пучки. Это – новый тип *eLG* пучков. Возможны их различные модификации.

Если ν – вещественный положительный параметр, тогда $gaeLG$ пучки редуцируются к асимметричным фракционным [25] *eLG* пучкам.

Если свободный параметр ν является – вещественным целочисленным, то имеем обычные *eLG* пучки Сигмэна [15].

Однако радиальный индекс ν может быть и комплексным! Если его вещественная часть $\nu' < -(1+m)/2$, тогда приходим к новому типу *eLG* пучков, которые также переносят конечную мощность. При этом мнимая часть индекса ν не влияет на КИ векторной амплитуды. Обычные *eLG* и *eLG* являются их предельными случаями.

3. Кроме того, возможны пучки Лагерра, векторная амплитуда которых не содержит гауссиана. Тем не менее, при выполнении ограничений $\{Q_0'' > 0, \nu' > -m/2\}$ такие пучки Лагерра являются физически реализуемыми, поскольку переносят конечную мощность.

Последние пучки эквивалентны циркулярным пучкам Куммера, которые изучались нами ранее [26]–[28].

Все обсуждаемые в настоящей работе пучки могут иметь децентровку (асимметрию), когда поперечные координаты приобретают комплексные смещения.

Наконец, все рассмотренные типы световых пучков могут иметь как круговую осевую симметрию $\propto e^{im\varphi}$, так и обладать явной азимутальной асимметрией $\propto \cos(m\varphi)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ананьев*, *Ю.А.* Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев. – Москва: Наука, 1990. – 264 с.

2. *Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre – Gaussian laser modes* / L. Allen, M.W. Beijersergen, R.J.C. Spreeuw, J.P. Woerdman // Physical Review. – 1992. – Vol. 45, № 11. – P. 8185–8189.

3. *Allen*, *L.* Spin-orbit coupling in free-space Laguerre – Gaussian light beams / L. Allen, V.E. Lembessis, M. Babiker // Phys. Rev. A. – 1996. – Vol. 53, № 5. – P. 2937–2939.

4. *Goubau*, *G.* On the guided propagation of electromagnetic wave beams / G. Goubau, F. Schwering // IEEE. – 1961. – Vol. 9, iss. 3. – P. 248–256.

5. *Ярив*, *А.* Квантовая электроника и нелинейная оптика / А. Ярив. – Москва: Советское Радио. – 1973. – 212 с.

6. *Солимено*, *С.* Дифракция и волноводное распространение оптического излучения / С. Солимено, Б. Крозиньяни, П. Ди Порто; пер. с англ. – Москва: Мир, 1989. – 664 с.

7. *Tovar*, *A.A.* Production and propagation of cylindrically polarized Laguerre-Gaussian laser beams / A.A. Tovar // Journal Opt. Soc. Am. A. – 1998. – Vol. 15, № 10. – P. 2705–2711.

8. *Seshadri*, *S.R.* Complex-argument Laguerre – Gauss beams: transport of mean-squared beam width / S.R. Seshadri // Appl. Optics. – 2005. – Vol. 34, № 34. – P. 7339–7373.

9. *Seshadri*, *S.R.* Radiation pattern of azimuthally varying scalar Laguerre – Gauss waves / S.R. Seshadri // Journal Opt. Soc. Am. A. – 2007. – Vol. 24, № 10. – P. 3348–3353.

10. *Lewis*, *W.E.* Maxwell-Gaussian beams with cylindrical polarization / William E. Lewis, Reeta Vyas // Journal Opt. Soc. Am. A. – 2014. – Vol. 31, № 7. – P. 1595–1603.

11. *Пучки Лагерра – Гаусса с комплексным смещением* / А.А. Ковалёв, В.В. Котляр, С.Г. Засканов, Д.С. Калинкина // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 40, № 1. – С. 5–11.

12. *Ковалёв*, *А.А.* Передача орбитального углового момента асимметричных пучков Лагерра – Гаусса диэлектрическим микрочастицам / А.А. Ковалёв, В.В. Котляр, А.П. Порфирьев // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 40, № 3. – С. 305–311.

13. *April*, *A.* Nonparaxial elegant Laguerre – Gaussian beams / A. April // Optics Letters. – 2008. – Vol. 33, № 12. – P. 1392–1394.

14. *Two-dimensional asymmetric Laguerre – Gaussian diffraction-free beams* / Wei-Ping Zhong [et al.] // Physics Letters A. – 2022. – Vol. 423. – P. 127818 (5pp).

15. *Siegman*, *A.E.* Hermite-gaussian function of complex argument as optical-beam eigenfunction / A.E. Siegman // JOSA. – 1973. – Vol. 63, № 9. – P. 1093–1094.

16. *Гиргель*, *С.С.* Циркулярные 3D световые пучки Куммера – Гаусса с непрерывным угловым индексом // С.С. Гиргель / Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 1 (38). – С. 16–20.

17. *Bandres*, *M.A*. Circular beams / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2008. – Vol. 33, № 2. – P. 177–179.

18. *Bandres*, *M.A*. Higher-order moments and overlaps of rotationally symmetric beams / M.A. Bandres, D. Lopez-Mago, J.C. Gutierrez-Vega // Journal of Optics. – 2010. – Vol. 12. – P. 015706.

19. *Справочник по специальным функциям*; под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 830 с.

20. *Magnus*, *W*. Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics / W. Magnus, F. Oberhettinger, R.P. Soni. – Springer Verlag – Berlin – Heidelberg GmbH. – Third Edition, 1966. – 516 p.

21. *Короленко*, *П.В*. Оптика когерентного излучения / П.В. Короленко. – Москва: МГУ, 1997. – 222 с.

22. *Meucci*, *R*. Polarization properties of low-order Laguerre – Gauss modes in a CO_2 laser / R. Meucci, A. Labate, M. Ciofini // Quantum Semiclass. – 1997. – Opt. Vol. 9. – L31–L3.

23. *Гиргель*, *С.С*. Смещенные поля Бесселя с различными азимутальными зависимостями / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 1 (50). – С. 14–18.

24. *Zauderer*, *E*. Complex argument Hermite-Gaussian and Laguerre – Gaussian beams / E. Zauderer // Journal Opt. Soc. Am. A. – 1986. – Vol. 3. – P. 465–469.

25. *Gutierrez-Vega*, *J.C*. Fractionalization of optical beams: II. Elegant Laguerre-Gaussian modes / J.C. Gutierrez-Vega // Optics Express. – 2007. – Vol. 15, iss. 10. – P. 6300–6313.

26. *Гиргель*, *С.С*. 3D световые пучки Куммера без гауссовой аподизации с переносимой конечной мощностью / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 18–21.

27. *Гиргель*, *С.С*. Энергетические характеристики векторных циркулярных пучков Куммера конечной мощности. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 4 (53). – С. 16–20.

28. *Гиргель*, *С.С*. Энергетические характеристики векторных циркулярных пучков Куммера конечной мощности. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 20–24.

Поступила в редакцию 30.09.2025.

Информация об авторах

Гиргель Сергей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор