

КРИТЕРИИ π -СПЕЦИАЛЬНОСТИ, МЕТА- π -СПЕЦИАЛЬНОСТИ И $(1, \pi')$ -СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

И.М. Дергачева, Е.А. Задорожнюк, И.П. Шабалина

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

CRITERIA FOR π -SPECIALITY, META- π -SPECIALITY, AND $(1, \pi')$ -SUPERSOLUBILITY OF A FINITE GROUP

I.M. Dergacheva, E.A. Zadorozhnyuk, I.P. Shabalina

Belarusian State University of Transport, Gomel

Аннотация. На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу; \mathbb{P} – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' \subseteq \mathbb{P} \setminus \pi$. Группа G называется: (i) π -специальной, если $G = O_{p_1}(G) \times \dots \times O_{p_t}(G) \times O_{\pi'}(G)$ для некоторых $p_1, \dots, p_t \in \pi$; (ii) мета- π -специальной, если для некоторой нормальной подгруппы N группы G обе группы N и G/N являются π -специальными. Подгруппа A группы G называется $(1, \pi')$ -субнормальной в G , если существует цепь подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G$ такая, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо секция $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является π' -группой. В данной работе мы доказываем новые критерии π -специальности, мета- π -специальности и сверхразрешимости группы. В частности, мы доказываем, что группа G является: (i) π -специальной, если каждая максимальная подгруппа группы G имеет $(1, \pi')$ -субнормальное дополнение в G ; (ii) сверхразрешимой, если каждая вторая максимальная подгруппа группы G имеет субнормальное дополнение в G ; (iii) мета- π -специальной, если каждая третья максимальная подгруппа группы G имеет $(1, \pi')$ -субнормальное дополнение в G .

Ключевые слова: конечная группа, π -специальная группа, мета- π -специальная группа, $(1, \pi')$ -сверхразрешимая группа, $(1, \pi')$ -субнормальная подгруппа.

Для цитирования: Дергачева, И.М. Критерии π -специальности, мета- π -специальности и $(1, \pi')$ -сверхразрешимости конечной группы / И.М. Дергачева, Е.А. Задорожнюк, И.П. Шабалина // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 1 (66). – С. 47–52. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_47. – EDN: JKDOYC

Abstract. Throughout this article, all groups are finite, and G always denotes a finite group; \mathbb{P} is the set of all primes, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ and $\pi' \subseteq \mathbb{P} \setminus \pi$. A group G is called: (i) π -special if $G = O_{p_1}(G) \times \dots \times O_{p_t}(G) \times O_{\pi'}(G)$ for some $p_1, \dots, p_t \in \pi$; (ii) meta- π -special if for some normal subgroup N of G both groups N and G/N are π -special. A subgroup A of G is called $(1, \pi')$ -subnormal in G if there is a subgroup chain $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G$ such that either $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ or the section $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ is a π' -group. In this paper we prove new criteria for π -speciality, meta- π -speciality, and supersolvability of a group. In particular, we prove that a group G is: (i) π -special if every maximal subgroup of G has a $(1, \pi')$ -subnormal complement in G ; (ii) supersolvable if every second maximal subgroup of G has a subnormal complement in G ; (iii) meta- π -special if every third maximal subgroup of G has a $(1, \pi')$ -subnormal complement in G .

Keywords: finite group, π -special group, meta- π -special group, $(1, \pi')$ -supersolvable group, $(1, \pi')$ -subnormal subgroup.

For citation: Dergacheva, I.M. Criteria for π -speciality, meta- π -speciality, and $(1, \pi')$ -supersolvability of a finite group / I.M. Dergacheva, E.A. Zadorozhnyuk, I.P. Shabalina // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 1 (66). – P. 47–52. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_47 (in Russian). – EDN: JKDOYC

Введение

На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу; \mathbb{P} – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' \subseteq \mathbb{P} \setminus \pi$.

Группа G называется:

(i) π -специальной [1], [2], если

$$G = O_{p_1}(G) \times \dots \times O_{p_t}(G) \times O_{\pi'}(G)$$

для некоторых $p_1, \dots, p_t \in \pi$;

(ii) мета- π -специальной, если для некоторой нормальной подгруппы N группы G обе группы N и G/N являются π -специальными.

Подгруппа A группы G называется \mathfrak{F} -субнормальной в G в смысле Кегеля [3] или K - \mathfrak{F} -субнормальной в G [4, 6.1.4], если существует цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_i = G$$

такая, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо секция $A_i / (A_{i-1})_A$ принадлежит \mathfrak{F} .

Определение 0.1. Мы говорим, следуя [5], что подгруппа A группы G является $(1, \pi')$ -субнормальной в G , если A K - \mathfrak{F} -субнормальна в G , где \mathfrak{F} – класс всех π' -групп.

Главный фактор H/K группы G называется:

(i) \mathfrak{F} -центральным (в G), если

$$(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{F};$$

(ii) $(1, \pi')$ -центральным (в G), если $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ – π -специальная группа.

Нормальная подгруппа N называется \mathfrak{F} -гиперцентральной (соответственно, $(1, \pi')$ -гиперцентральной) в G , если каждый главный фактор группы G ниже N является \mathfrak{F} -центральным (соответственно, $(1, \pi')$ -центральным) в G .

Определение 0.2. Мы говорим, следуя [6], что группа G является $(1, \pi')$ -сверхразрешимой, если каждый главный фактор группы G ниже π -специального корадикала группы G является циклическим.

В данной работе мы доказываем следующие результаты.

Теорема 0.3. Группа G является π -специальной в том и только в том случае, когда группа G π -разрешима и для каждой ее максимальной подгруппы M в этой группе имеется $(1, \pi')$ -субнормальное добавление T к M такое, что $(M \cap T)^G$ – $(1, \pi')$ -гиперцентральная в G подгруппа.

Следствие 0.4. Группа G является нильпотентной в том и только в том случае, когда группа G разрешима и для каждой максимальной подгруппы M группы G в этой группе имеется субнормальное добавление T к M такое, что $(M \cap T)^G$ – гиперцентральная в G подгруппа.

Теорема 0.5. Если группа G π -разрешима и для каждой второй максимальной подгруппы M группы G в этой группе имеется $(1, \pi')$ -субнормальное добавление T к M такое, что $(M \cap T)^G$ – $(1, \pi')$ -гиперцентральная в G подгруппа, то группа G является $(1, \pi')$ -сверхразрешимой.

Следствие 0.6. Если группа G разрешима и для каждой второй максимальной подгруппы M группы G в этой группе имеется субнормальное добавление T к M такое, что $(M \cap T)^G$ – гиперцентральная в G подгруппа, то группа G является сверхразрешимой.

Теорема 0.7. Если группа G π -разрешима и для каждой третьей максимальной подгруппы M группы G в этой группе имеется $(1, \pi')$ -субнормальное добавление T к M такое, что

$(M \cap T)^G$ – $(1, \pi')$ -гиперцентральная в G подгруппа, то группа G является мета- π -специальной.

Следствие 0.8. Если группа G разрешима и для каждой третьей максимальной подгруппы M группы G в этой группе имеется субнормальное добавление T к M такое, что $(M \cap T)^G$ – гиперцентральная в G подгруппа, то группа G является метанильпотентной.

2 Некоторые предварительные результаты

Лемма 1.1 [7, лемма 2.6]. Пусть A, K, N – подгруппы группы G , где A является $(1, \pi')$ -субнормальной подгруппой, а N – нормальной подгруппой в G .

(1) $A \cap K$ – $(1, \pi')$ -субнормальная подгруппа в K .

(2) AN/N – $(1, \pi')$ -субнормальная подгруппа в G/N .

(3) Если $N \leq K$ и K/N является $(1, \pi')$ -субнормальной подгруппой в G/N , то K является $(1, \pi')$ -субнормальной подгруппой в G .

(4) π -специальный корадикал группы A является субнормальным в G .

(5) Если A является π -специальной группой, то A^G является π -специальной группой. Более того, если A – π' -группа, то A^G – π' -группа, и если A – p -группа, для некоторого $p \in \pi$, то A^G – p -группа.

Напомним, что класс групп \mathfrak{F} называется *формацией*, если каждый гомоморфный образ каждой \mathfrak{F} -группы является \mathfrak{F} -группой, и $G/(M \cap N) \in \mathfrak{F}$ для любых двух нормальных подгрупп M и N группы G таких, что $G/M, G/N \in \mathfrak{F}$.

Класс групп \mathfrak{F} называется *насыщенным*, если $G \in \mathfrak{F}$ всякий раз, когда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$, (нормально) *наследственным*, если $H \in \mathfrak{F}$ всякий раз, когда $G \in \mathfrak{F}$ и H является (нормальной) подгруппой G .

Класс групп \mathfrak{F} называется *классом Фиттинга*, если он нормально наследственный и замкнут относительно взятия произведений нормальных подгрупп.

Лемма 1.2. (1) Класс всех π -специальных групп является одновременно наследственной насыщенной формацией и классом Фиттинга [7, следствия 2.4 и лемма 2.5].

(2) Класс всех мета- π -специальных групп является одновременно наследственной насыщенной формацией и классом Фиттинга [8, лемма 2.3].

(3) Если N – нормальная $(1, \pi')$ -гиперцентральная в G подгруппа и G/N π -специальна то G π -специальна [9, 1, 2.6].

Лемма 1.3 [9, 1, 2.6]. Пусть A, K, N – подгруппы группы G , где A является $(1, \pi')$ -гиперцентральной подгруппой, а N – нормальной подгруппой в G .

(1) $A \cap K$ – $(1, \pi')$ -гиперцентральная подгруппа в K .

(2) AN/N – $(1, \pi')$ -гиперцентральная подгруппа в G/N .

(3) Если $N \leq K$ и K/N является $(1, \pi')$ -гиперцентральной подгруппой в G/N , то K является $(1, \pi')$ -гиперцентральной в G .

Лемма 1.4. Если G является минимальной не π -специальной группой, то G является группой Шмидта.

Доказательство. Понятно, что G является минимальной не π -разложимой группой. Следовательно, G является группой Шмидта согласно [10]. \square

Лемма 1.5 [11, III, 5.2]. Если G – группа Шмидта, то $G = P \rtimes Q$, где $P = P^{\pi} = G'$ – силовская p -подгруппа G , $P/\Phi(P)$ – главный фактор G , и $Q = \langle x \rangle$ – циклическая силовская q -подгруппа G с $\langle x^q \rangle \leq Z(G) \cap \Phi(G)$.

3 Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 0.3. Предположим, что эта теорема не является верной и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть R – минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда R является либо π' -группой, либо p -группой для некоторого $p \in \pi$, поскольку G является π -разрешимой по условию.

(1) G/R – π -специальная группа.

Если M/R – максимальная подгруппа G/R , то M – максимальная подгруппа G и, следовательно, M имеет $(1, \pi')$ -субнормальное добавление T в группе G такое, что $(M \cap T)^G$ – $(1, \pi')$ -гиперцентральная в G подгруппа согласно условию. Ввиду леммы 1.1 (2), TR/R – $(1, \pi')$ -субнормальная в группе G/R подгруппа. Кроме того, $(TR/R)(M/R) = G/R$ и

$$TR/R \cap M/R = R(T \cap M)/R,$$

где

$$\begin{aligned} (TR/R \cap M/R)^{G/R} &= ((TR \cap M)/R)^{G/R} = \\ &= (R(T \cap M)/R)^{G/R} = \\ &= (R(T \cap M))^G/R = R(T \cap M)^G/R \end{aligned}$$

и $R(T \cap M)^G/R$ – $(1, \pi')$ -гиперцентральная в G/R подгруппа ввиду G -изоморфизма

$$R(T \cap M)^G/R = (T \cap M)^G / ((T \cap M)^G \cap R)$$

и леммы 1.3 (2). Таким образом, TR/R – такое $(1, \pi')$ -субнормальное добавление к подгруппе

M/R в группе G/R , что $(M/R \cap TR/R)^{G/R}$ – $(1, \pi')$ -гиперцентральная в G/R подгруппа. Следовательно, гипотеза верна для G/R , поэтому G/R является π -специальной группой по выбору G .

(2) R – единственная минимальная подгруппа в G и $R \not\leq \Phi(G)$. В частности, $C_G(R) \leq R$ и в G имеется такая максимальная подгруппа M , что $G = RM$ и $M_G = 1$.

Если N – минимальная нормальная подгруппа группы G и $N \neq R$, то $N \cap R = 1$ и поэтому $G \simeq G/1 = G/(N \cap R)$ является π -специальной группой согласно леммы 1.2 (1), в отличие от выбора группы G . Отсюда следует, что R – единственная минимальная подгруппа в G и $R \not\leq \Phi(G)$, поскольку, согласно лемме 1.2 (1), класс всех π -специальных групп является насыщенной формацией.

Пусть теперь M – такая максимальная подгруппа в G , что $RM = G$ и пусть $C = C_G(R)$. Тогда $M_G = 1$. Предположим, что $C \neq 1$. Тогда $R \leq C$, поскольку C – нормальная в G подгруппа и R – единственная минимальная подгруппа в G . Следовательно,

$$C_G(R) \cap RM = R(C_G(R) \cap M),$$

где $C_G(R) \cap M$ нормальна в G и поэтому $C_G(R) \cap M \leq M_G = 1$. Следовательно, $C_G(R) \leq R$.

(3) R не является π' -группой.

Предположим, что R является π' -группой и пусть V/R – холлова π' -подгруппа в G/R . Поскольку G/R является π -специальной группой, то V/R – нормальная подгруппа в G/R . Следовательно, $V = O_{\pi'}(G)$ является холловской π' -подгруппой группы G и V π' -специальна, поэтому $R \leq V < G$. Тогда M не содержит V . Пусть T – такое $(1, \pi')$ -субнормальное добавление к M в группе G , что $(T \cap M)^G$ является $(1, \pi')$ -гиперцентральной в G . Если $(T \cap M)^G \neq 1$, то $R \leq (T \cap M)^G$ поскольку R – единственная минимальная нормальная подгруппа G . Но тогда R $(1, \pi')$ -центральна в G и это влечет π -специальность группы ввиду леммы 1.2 (2). Полученное противоречие показывает, что $(T \cap M)^G = 1$ и поэтому T дополнением к M в G .

Тогда $T \neq 1$ и $T \cap V = 1$, следовательно, $T \simeq TV/V$ является π -специальной π -группой ввиду утверждения (1). Отсюда следует, что T нильпотентна. Пусть теперь $p \in \pi(T)$ и p – силовская p -подгруппа в T . Тогда p – $(1, \pi')$ -субнормальная подгруппа в группе G и,

следовательно, $1 < P \leq O_p(G)$ согласно лемме 1.1 (5), что влечет $R \leq O_p(G)$ ввиду утверждения (1) и поэтому $p \in \pi'$. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения (3).

Заключительное противоречие. Рассуждая аналогично рассуждениям, применяемым при доказательстве утверждения (3), можно показать, что R не является p -группой для всех $p \in \pi$. Но это невозможно ввиду утверждения (3), поскольку группа G является π -разрешимой согласно условию. Это заключительное противоречие завершает доказательство теоремы. \square

Доказательство теоремы 0.5. Предположим, что эта теорема не является верной и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда G не является π -специальной группой и если R – минимальная нормальная подгруппа группы G , то R является либо π' -группой, либо p -группой для некоторого $p \in \pi$.

(1) *Каждая максимальная подгруппа группы G является π -специальной.*

Пусть M – произвольная максимальная подгруппа в G и пусть L – произвольная максимальная подгруппа в M . Тогда, согласно условию теоремы, в G имеется такое $(1, \pi')$ -субнормальное добавление к L в группе G , что подгруппа $(T \cap L)^G$ является $(1, \pi')$ -гиперцентральной в G . Тогда $M = M \cap LT = L(M \cap T)$, где $M \cap T$ является $(1, \pi')$ -субнормальным добавлением к L в группе M согласно лемме 1.1 (1). С другой стороны, ввиду леммы 1.3 (1), подгруппа $M \cap T$ является $(1, \pi')$ -гиперцентральной в M . Таким образом, M является π -специальной согласно теореме 1.2.

(2) *G является группой Шмидта. В частности, $G = P \rtimes Q$, где $P = G^{\pi'} = G'$ является силовской p -подгруппой G , а $Q = \langle x \rangle$ является циклической силовской q -подгруппой G для некоторых простых чисел p и q .*

Согласно утверждению (1), каждая максимальная подгруппа группы G является π -специальной. Таким образом, G – минимальная не π -специальная группа и поэтому G – группа Шмидта ввиду леммы 1.4. Следовательно, мы имеем (2) ввиду леммы 1.5.

(3) *Каждая $(1, \pi')$ -гиперцентральная в G подгруппа является гиперцентральной в G , а каждая $(1, \pi')$ -субнормальная в G подгруппа является субнормальной в G .*

Действительно, группа G не является π -специальной и поэтому холловская π' -подгруппа группы G является силовской в G ввиду утверждения (2). Таким образом, каждая секция K/L группы G , являющаяся π' -группой, является

R -группой для некоторого простого числа R . Из этого вытекает утверждение (3).

Заключительное противоречие. Заметим, что $P/\Phi(P)$ является нециклическим главным фактором G , поскольку G не является $(1, \pi')$ -сверхразрешимой, и, в частности, G не является сверхразрешимой. Сначала предположим, что $|Q| = q$. Тогда p является максимальной подгруппой G , поэтому максимальная подгруппа V группы p имеет субнормальное добавление T в G такое, что $(T \cap V)^G$ является гиперцентральной подгруппой в G .

Прежде предположим, что $T = G$. Тогда $P = (T \cap V)^G \leq Z_\infty(G)$, что влечет нильпотентность группы G , что противоречит выбору этой группы, поэтому $T < G$ и, следовательно, T является нильпотентной группой. Тогда группа $G = PT$ является π -специальной группой согласно лемме 1.1 (5), поскольку G является произведением двух π -специальных групп $(1, \pi')$ -субнормальных подгрупп p и T , что приводит к противоречию.

Следовательно, $|Q| > q$. Пусть V – вторая максимальная подгруппа группы q и $M = PV$.

Тогда

$$|G : M| = |PQ : PV| = |Q : V| = q^2,$$

следовательно, для некоторой субнормальной подгруппы T группы G имеем $G = VT$ и $(V \cap T)^G$ является гиперцентральной подгруппой в G .

Тогда $T \neq G$ и $Q = V \times (Q \cap T)$. Отсюда следует, что $V = 1$, следовательно, p является второй максимальной подгруппой группы G , поэтому q является субнормальной в G по гипотезе, что влечет $G = PQ$ является нильпотентной и мы снова приходим к противоречию. \square

Доказательство теоремы 0.7. Предположим, что эта теорема не является верной и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда G не является π -специальной группой и если R – минимальная нормальная подгруппа группы G , то R является либо π' -группой, либо p -группой для некоторого $p \in \pi$.

Пусть H – холлова π' -подгруппа и p – силовская p -подгруппа в G .

(1) *Группа G/R мета- π -специальна.*

Если G/R не имеет третьей максимальной подгруппы, то это очевидно.

Теперь предположим, что G/R имеет третью максимальную подгруппу M/R . Тогда M – третья максимальная подгруппа в группе G и поэтому в этой группе имеется $(1, \pi')$ -субнормальное добавление T к M такое, что $(M \cap T)^G$ – $(1, \pi')$ -гиперцентральная в G подгруппа по гипотезе.

Тогда TR/R является $(1, \pi')$ -субнормальным добавлением к M/R в G/R по лемме 1.1 (2). Кроме того,

$$(TR/R \cap M/R)^{G/R} = R(T \cap M)^G/R$$

– $(1, \pi')$ -гиперцентральная в G/R подгруппа (см. утверждение (1) в доказательстве теоремы 0.3). Следовательно, гипотеза верна для G/R , поэтому G/R является мета- π -специальной группой по выбору G .

(2) R – единственная минимальная подгруппа в G и $R \not\leq \Phi(G)$. В частности, $C_G(R) \leq R$. Кроме того, фактор $R/1$ не является $(1, \pi')$ -центральной в G .

Если N – минимальная нормальная подгруппа группы G и $N \neq R$, то $N \cap R = 1$ и поэтому $G \cong G/1 = G/(N \cap R)$ является мета- π -специальной группой, поскольку класс всех мета- π -специальных групп является насыщенной формацией (см. лемму 1.2 (3)), что противоречит выбору группы G . Отсюда следует, что R – единственная минимальная подгруппа в G и $R \not\leq \Phi(G)$.

Пусть теперь M – такая максимальная подгруппа в G , что $RM = G$ и пусть $C = C_G(R)$. Тогда $M_G = 1$ и $C_G(R) \leq R$ (см. утверждение (1) в доказательстве теоремы 0.3).

(3) $|R|$ не является простым числом.

Действительно, если $|R| = p$ – простое число, то ввиду (2), $G/R = G/C_G(R)$ – подгруппа циклической группы $Aut(R)$ и поэтому G является метанильпотентной и, следовательно, мета- π -специальной группой, что противоречит выбору группы G . Таким образом, имеет место (3).

(4) Если R – π' -группа, то в группе G имеется такая неединичная третья максимальная подгруппа V , что $|G : V|$ не является π' -числом и либо V – максимальная подгруппа в R , либо $R \leq V$.

Пусть W – максимальная подгруппа в R . Тогда $W \neq 1$ ввиду утверждения (3).

Понятно, что $R \leq H \neq G$ и поэтому $\pi \cap \pi(G) \neq \emptyset$. Пусть M – максимальная подгруппа в G , содержащая H . Тогда $|G : M| = p^n$ является p -числом для некоторого $p \in \pi$, поскольку группа G π -разрешима и $|G : M|$ является π -числом.

Если $H = M$, то $R < H$, поскольку в противном случае R и G/R являются π -специальными группами и поэтому группа G в этом случае является мета- π -специальной, что противоречит выбору группы G . Если R максимальна в H , то $W = V$ – третья максимальная подгруппа в G и $|G : V|$ не является π' -числом. Если же

$R \leq L < H$ для некоторой максимальной подгруппы L группы H , то в G имеется такая третья максимальная подгруппа V , что либо $V = W$, либо $R \leq V$ и $V \leq H$ и поэтому $|G : V|$ не является π' -числом.

Предположим теперь, что $H \leq L < M$ для некоторой второй максимальной подгруппы L группы G . Предположим, $H < L$ и пусть V – такая максимальная подгруппа в группе L , что $R \leq H \leq V$. Тогда $|G : V|$ не является π' -числом поскольку H – холлова π' -подгруппа в G .

Теперь предположим, $H = L$. Если $R = H$, то W – 3-максимальная подгруппа в G и $|G : W|$ не является π' -числом. Пусть теперь $H < L$ и V – максимальная подгруппа в L такая, что $H \leq V$. Тогда $|G : V|$ не является π' -числом и $R \leq V$.

(5) Если R – p -группа для некоторого $p \in \pi$, то в группе G имеется такая неединичная третья максимальная подгруппа V , что $|G : V|$ не является p -числом и либо V – максимальная подгруппа в R , либо $R \leq V$.

Это утверждение доказывается аналогично утверждению (4).

(6) Если T – $(1, \pi')$ -субнормальное добавление к V в G такое, что $(V \cap T)^G$ является $(1, \pi')$ -гиперцентральной в G , то $(V \cap T)^G = 1$ и π -специальный корадикал W группы T не является единичной группой.

Действительно, предположим, что $W = 1$. Тогда, ввиду леммы 1.2 (1), W является π -специальной группой.

Прежде предположим, что R – π' -группа. Тогда ввиду утверждения (4), для некоторого $p \in \pi$ имеет место $E := O_p(T) \neq 1$ и E является $(1, \pi')$ -субнормальной подгруппой в G и поэтому $(O_p(T))^G$ – нормальная p -подгруппа в G согласно лемме 1.1 (5), что невозможно ввиду (1). Если же R – p -группа, для некоторого $p \in \pi$, то ввиду утверждения (4), имеет место $B := O_\pi(T) \neq 1$ и тогда $(O_p(T))^G$ – нормальная π' -подгруппа в G согласно лемме 1.1 (5), что невозможно ввиду (1). Таким образом, мы имеем (6).

Заключительное противоречие. Ввиду (6), π -специальный корадикал W группы T является неединичной группой и W субнормальна в G по лемме 1.1 (4). Но тогда $R \leq N_G(W)$ и

$$G = VT = RT,$$

что влечет нормальность подгруппы W в G . Таким образом,

$$R \leq W \leq T < G,$$

согласно утверждению (2). Это заключительное противоречие завершает доказательство теоремы. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chunikhin, S.A.* Subgroups of finite groups / S.A. Chunikhin. – Minsk: Nauka i Tehnika, 1964.
2. *Skiba, A.N.* Some characterizations of finite σ -soluble $P\sigma T$ -groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495. – P. 114–129.
3. *Kegel, O.H.* Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den subnormalteilerverband each enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30, № 3. – S. 225–228.
4. *Ballester-Bolinches, A.* Classes of Finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Springer, Dordrecht, 2006.
5. *Wang, M.* On two classes of sublattices for a subgroup lattice of a finite group / M. Wang, A-Ming Liu, A.N. Skiba // Mathematics. – 2026. – Vol. 14. – DOI: <https://doi.org/10.3390/math14020328>.
6. *Guo, W.* On σ -supersoluble groups and one generalization of CLT -groups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 512. – P. 92–108.
7. *Skiba, A.N.* On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
8. *Huang, J.* On weakly σ -quasinormal subgroups of finite groups / J. Huang, B. Hu, A.N. Skiba // Publ. Math. Debrecen. – 2011. – Vol. 78, № 1. – P. 209–218.
9. *Guo, W.* Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups / W. Guo. – Springer, Heidelberg – New York – Dordrecht – London, 2015.
10. *Belonogov, V.A.* Finite groups all of whose 2-maximal subgroups are π -decomposable / V.A. Belonogov // Trudi Instituta Matematiki i Mekhaniki Uro RAN. – 2014. – Vol. 20, № 2. – P. 29–43.
11. *Huppert, B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1967.

Поступила в редакцию 14.02.2026.

Информация об авторах

Дергачева Ирина Михайловна – к.ф.-м.н., доцент
Задорожнюк Елена Андреевна – к.ф.-м.н., доцент
Шабалина Ирина Петровна – к.ф.-м.н., доцент