УДК 512.542

# О ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ $\sigma$-СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

**С.Ф. Каморников**[1], **О.Л. Шеметкова**[2]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, Москва*

# ON PERMUTABILITY OF $\sigma$-SUBNORMAL SUBGROUPS OF FINITE GROUP

**S.F. Kamornikov**[1], **O.L. Shemetkova**[2]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*Plekhanov Russian University of Economics, Moscow*

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел. В работе исследуется проблема перестановочности $\sigma$-субнормальных подгрупп в конечной группе.

***Ключевые слова**: конечная группа, $\sigma$-группа, $\sigma$-субнормальная подгруппа, формация, корадикал.*

Let $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ be some partition of the set of all primes. In this paper the problem of permutability of $\sigma$-subnormal subgroups of finite group is established.

***Keywords**: finite group, $\sigma$-group, $\sigma$-subnormal subgroup, formation, residual.*

## Введение

Развивая теорему о перестановочности субнормальных подгрупп, одна из которых перфектна (т.е. совпадает со своим коммутантом), Х. Виландт [1] на основе развитой им теории операторов показал, что в конечной группе $G$ субнормальные подгруппы $H$ и $K$ перестановочны, если имеет место равенство $(|H : H'|, |K : K'|) = 1$. Эквивалентная формулировка этого результата состоит в том, что $HK = KH$, если $\pi(H / H^{\mathfrak{N}}) \cap \pi(K / K^{\mathfrak{N}}) = \varnothing$, где $\mathfrak{N}$ – формация всех нильпотентных групп.

Отмеченный результат инициировал соответствующий вопрос для $\sigma$-субнормальных подгрупп конечной группы, поставленный А.Н. Скибой в [2] под номером 4.1 (см. также вопрос 7.6 из [3] и вопрос 6.7 из [4]):

*Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел. Пусть H и K – $\sigma$-субнормальные подгруппы конечной группы G. Верно ли, что $HK = KH$, если*

$$\pi(H / H^{\mathfrak{N}_\sigma}) \cap \pi(K / K^{\mathfrak{N}_\sigma}) = \varnothing ?$$

В настоящей работе дается отрицательный ответ на данный вопрос и приводятся два критерия перестановочности $\sigma$-субнормальных подгрупп конечной группы. В случае, когда $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$, эти критерии превращаются в известные признаки перестановочности субнормальных подгрупп, представленные Х. Виландтом в работе [5] и утверждающие, что субнормальные подгруппы $H$ и $K$ конечной группы перестановочны тогда и только тогда, когда при любом гомоморфизме группы $< H, K >$ в нильпотентную (примарную) группу образы подгрупп $H$ и $K$ перестановочны. В [6] показано, что условие конечности группы в теореме Виландта можно отбросить.

Главная цель данной работы – доказательство следующих двух теорем, которые редуцируют вопрос перестановочности $\sigma$-субнормальных подгрупп конечной группы к вопросу о перестановочности соответствующих образов этих подгрупп в $\sigma$-нильпотентных и $\sigma$-примарных группах.

***Теорема* 0.1.** *Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел. Пусть H и K – $\sigma$-субнормальные подгруппы конечной группы G. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $HK = KH$;

2) $< H, K > = HK < H, K >^{\mathfrak{N}_\sigma}$;

3) $H^\varphi K^\varphi = K^\varphi H^\varphi$ *для любого гомоморфизма $\varphi$ группы $< H, K >$ в $\sigma$-нильпотентную группу.*

***Теорема* 0.2.** *Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел. Пусть H и K – $\sigma$-субнормальные подгруппы конечной группы G. Тогда и только тогда $HK = KH$, когда $H^\varphi K^\varphi = K^\varphi H^\varphi$ для каждого гомоморфизма $\varphi$ группы $< H, K >$ в $\sigma$-примарную группу.*

Теоремы 0.1 и 0.2, по сути, являются частными проявлениями общей схемы перестановочности $\mathfrak{F}$-субнормальных (в смысле Кегеля) подгрупп, предложенной в [7] (см. также [8]).

## 1 Основные определения и предварительные результаты

В работе рассматриваются только конечные группы. Используемые определения и обозначения стандартны и соответствуют [9]. Что касается терминологии теории $\sigma$-субнормальных подгрупп, то мы отсылаем читателя к [10].

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Если $n$ – натуральное число, то через $\pi(n)$ обозначается множество всех простых чисел, делящих $n$; в частности, $\pi(G) = \pi(|G|)$ – множество всех простых чисел, делящих порядок $|G|$ группы $G$. Далее всегда $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$, т. е. $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Пусть

$$\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$$

и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$.

Следуя [10], будем говорить, что группа $G$ является:

– $\sigma$-*примарной*, если $G$ является $\sigma_i$-группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$;

– $\sigma$-*нильпотентной* (или $\sigma$-*разложимой*), если $G$ является прямым произведением некоторых $\sigma$-примарных групп, т. е. группа $G$ представима в виде прямого произведения своих $\sigma_i$-холловых подгрупп.

Простая проверка показывает, что класс $\mathfrak{N}_\sigma$ всех $\sigma$-нильпотентных групп является наследственной насыщенной формацией Фиттинга. Отсюда, в частности, следует, что в любой группе $G$ существует наименьшая нормальная подгруппа, фактор-группа по которой $\sigma$-нильпотентна. Эта подгруппа обозначается $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ и называется $\sigma$-*нильпотентным корадикалом* (или $\mathfrak{N}_\sigma$-*корадикалом*) группы $G$.

Концепция $\sigma$-субнормальности, развивающая идею субнормальной подгруппы из [1], предложена А.Н. Скибой в работе [10]. Эта концепция базируется на следующем определении. Подгруппа $H$ группы $G$ называется $\sigma$-*субнормальной*, если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ либо подгруппа $H_{i-1}$ нормальна в $H_i$, либо группа $H_i / Core_{H_i}(H_{i-1})$ является $\sigma$-примарной. Понятно, что подгруппа $H$ субнормальна в $G$ тогда и только тогда, когда она $\sigma$-субнормальна в $G$ для $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$.

Другое понятие, обобщающее концепцию субнормальной подгруппы, предложено Кегелем [11]. Для непустого класса групп $\mathfrak{F}$ подгруппа $H$ конечной группы $G$ называется $\mathfrak{F}$-*субнормальной в смысле Кегеля* (или просто *К*-$\mathfrak{F}$-*субнормальной*), если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = G$$

такая, что либо подгруппа $H_{i-1}$ нормальна в $H_i$, либо $H_i / Core_{H_i}(H_{i-1}) \in \mathfrak{F}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Следующая лемма, доказательство которой осуществляется простой проверкой, устанавливает связь между $\sigma$-субнормальными и *К*-$\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами группы $G$.

***Лемма* 1.1**. *Подгруппа $H$ $\sigma$-субнормальна в $G$ тогда и только тогда, когда она К-$\mathfrak{N}_\sigma$-субнормальна в $G$.*

Следуя [12], будем говорить, что формация $\mathfrak{F}$ обладает *обобщенным свойством Виландта для корадикалов* (или является *GWP-формацией, the formation with generalised Wielandt property*), если для любых двух *К*-$\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп $H$ и $K$ каждой группы $G$ выполняется равенство $< H, K >^{\mathfrak{F}} = < H^{\mathfrak{F}}, K^{\mathfrak{F}} >$.

Серии *GWP*-формаций построены в [7]. В частности, из [7, теорема 2.1] следует, что для любого разбиения $\sigma$ формация всех $\sigma$-нильпотентных групп является *GWP*-формацией.

В дальнейшем нам понадобятся следующие два результата, которые мы приведем в виде лемм.

***Лемма* 1.2** [7, теорема 3.1]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – GWP-формация. Пусть $H$ и $K$ – К-$\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы $J = < H, K >$. Если все абелевы композиционные факторы подгруппы $H$ принадлежат $\mathfrak{F}$, то следующие утверждения равносильны*:

1) $HK = KH$;

2) $J = HKJ^{\mathfrak{F}}$;

3) *каждый гомоморфизм группы $J$ в $\mathfrak{F}$-группу переводит $H$ и $K$ в перестановочные подгруппы.*

Как отмечено в [12], любая *GWP*-формация $\mathfrak{F}$ является насыщенной, т. е. обладает тем свойством, что для любой группы $G$ из $G / \Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому на основании теоремы Гашюца – Любезедер – Шмида [9, теорема IV.4.6] любая *GWP* -формация $\mathfrak{F}$ является локальной. В частности, для формации $\mathfrak{F}$ существует такое каноническое локальное определение *f*, что $\mathfrak{F} = LF(f)$.

Напомним определение локальной формации. Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел. Тогда функция

$$f : \mathbb{P} \to \{\text{формации конечных групп}\}$$

называется *формационной функцией*.

Для формационной функции *f* главный фактор $A/B$ группы *G* называется *f-центральным* (*f-эксцентральным*), если

$$G/C_G(A/B) \cong \mathrm{Aut}(A/B) \in f(p)$$

для всех простых $p \in \pi(A/B)$ (соответственно $G/C_G(A/B)$ не принадлежит $f(p)$ хотя бы для одного простого числа $p \in \pi(A/B)$). Класс групп $\mathfrak{F} = LF(f)$ называется *локальной формацией*, если он состоит из всех групп *G* таких, что либо $G=1$, либо $G \neq 1$ и любой главный фактор $A/B$ группы *G* является *f*-центральным. При этом говорят, что локальная формация $\mathfrak{F}$ *определяется с помощью формационной функции f*, а *f – локальное определение* формации $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{N}_p$ – класс всех *p*-групп, *f* – формационная функция и $\mathfrak{F} = LF(f)$. Тогда функция *f* называется:

(а) *внутренней*, если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \mathbb{P}$;

(в) *полной*, если $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для всех $p \in \mathbb{P}$;

(с) *канонической*, если она является полной и внутренней.

Как показано в [9, теорема IV.3.7], для любой локальной формации $\mathfrak{F}$ существует единственная каноническая формационная функция *f* такая, что $\mathfrak{F} = LF(f)$. Эта функция называется *каноническим локальным определением* формации $\mathfrak{F}$.

***Лемма* 1.3** [7, теорема 3.2]. *Пусть f – каноническое локальное определение GWP-формации* $\mathfrak{F}$. *Пусть H и K – K-*$\mathfrak{F}$*-субнормальные подгруппы группы* $J = <H, K>$, *причем все абелевы композиционные факторы группы H принадлежат* $\mathfrak{F}$. *Тогда и только тогда* $HK = KH$, *когда для всех p из* $\pi(\mathfrak{F})$ *каждый гомоморфизм группы J в* $f(p)$*-группу переводит H и K в перестановочные подгруппы*.

## 2 Доказательство теорем

Теорема 0.1 следует из леммы 1.2 и того факта, что для любого разбиения σ множества всех простых чисел $\mathbb{P}$ формация $\mathfrak{N}_\sigma$ всех σ-нильпотентных групп является *GWP*-формацией.

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$. Тогда из определения σ-нильпотентной группы следует, что $\mathfrak{N}_\sigma = \times_{i \in I} \mathfrak{G}_{\sigma_i}$, где $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – формация всех $\sigma_i$-групп. Простая проверка показывает, что формация $\mathfrak{N}_\sigma$ определяется с помощью формационной функции *f* такой, что $f(p) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ для всех $p \in \sigma_i$. Более того, функция *f* является каноническим локальным определением формации $\mathfrak{F}$. Если *H* и *K* – σ-субнормальные подгруппы группы $J = <H, K>$, то из определения класса $\mathfrak{N}_\sigma$ следует, что все абелевы композиционные факторы группы *H* принадлежат $\mathfrak{N}_\sigma$. Отсюда ввиду леммы 1.3 $HK = KH$ тогда и только тогда, когда для любого простого числа *p* каждый гомоморфизм группы *J* в $f(p)$-группу (т. е. в σ-примарную группу) переводит *H* и *K* в перестановочные подгруппы. Теорема 0.2 доказана. □

## 3 Следствия и примеры

При $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$ имеем

***Следствие* 3.1** [5]. *Пусть H и K – субнормальные подгруппы группы G. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) $HK = KH$;

2) $<H, K> = HK <H, K>^{\mathfrak{N}}$;

3) *любой гомоморфизм группы* $<H, K>$ *в нильпотентную группу переводит H и K в перестановочные подгруппы.*

***Следствие* 3.2** [5]. *Пусть H и K – субнормальные подгруппы группы G. Тогда и только тогда* $HK = KH$, *когда каждый гомоморфизм группы* $<H, K>$ *в примарную группу переводит H и K в перестановочные подгруппы.*

Теоремы 0.1 и 0.2 редуцируют вопрос перестановочности σ-субнормальных подгрупп конечной группы к соответствующему вопросу для σ-нильпотентных и σ-примарных групп. Таким образом, вопрос А.Н. Скибы о перестановочности σ-субнормальных подгрупп *H* и *K* с условием $\pi(H/H^{\mathfrak{N}_\sigma}) \cap \pi(K/K^{\mathfrak{N}_\sigma}) = \varnothing$ сводится к вопросу о перестановочности в σ-примарной группе *G* подгрупп *H* и *K* с условием $\pi(H) \cap \pi(K) = \varnothing$. Ввиду следующего результата, подчеркивающего уникальность разбиения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$, вопрос А.Н. Скибы имеет отрицательный ответ для всех разбиений, кроме разбиения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$.

***Следствие* 3.3**. *Для любого разбиения* $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, *отличного от разбиения* $\{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$, *существует бипримарная группа, обладающая неперестановочными σ-субнормальными σ-нильпотентными подгруппами H и K с условием* $\pi(H) \cap \pi(K) = \varnothing$.

Действительно, так как $\sigma \neq \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$, то для некоторого $i \in I$ найдется такое множество $\sigma_i$, что $|\sigma_i| \geq 2$. Пусть *p* и *q* – различные простые числа из $\sigma_i$ и *G* – регулярное сплетение групп *A* и *B* с условием $|A| = p$ и $|B| = q$. Пусть *N* – база сплетения *G*. Тогда $N = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_q$, где $N_i \cong A$ для всех $i = 1, 2, .., q$. Очевидно, подгруппы $N_1$ и $B$ группы $G$ являются $\sigma$-субнормальными в $G$. Кроме того, они $\sigma$-нильпотентны и выполняется условие $\pi(N_1) \cap \pi(A) = \varnothing$. В то же время $N_1 B \neq B N_1$.

Приведем достаточное условие, при котором $\sigma$-субнормальные подгрупп $H$ и $K$ с условием $\pi(H / H^{\mathfrak{N}_\sigma}) \cap \pi(K / K^{\mathfrak{N}_\sigma}) = \varnothing$ являются перестановочными.

Следуя [13], для разбиения $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ будем говорить, что натуральные числа $m$ и $n$ являются $\sigma$-*копростыми*, если для любого $i \in I$ всегда из $\pi(m) \cap \sigma_i \neq \varnothing$ следует $\pi(n) \cap \sigma_i = \varnothing$.

Отметим, что если числа $|H / H^{\mathfrak{N}_\sigma}|$ и $|K / K^{N_\sigma}|$ являются $\sigma$-копростыми, то выполняется условие $\pi(H / H^{\mathfrak{N}_\sigma}) \cap \pi(K / K^{\mathfrak{N}_\sigma}) = \varnothing$. Обратное утверждение неверно.

***Следствие* 3.4**. *Пусть* $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ *– некоторое разбиение множества всех простых чисел. Пусть H и K –* $\sigma$*-субнормальные подгруппы конечной группы G. Если порядки групп* $H / H^{\mathfrak{N}_\sigma}$ *и* $K / K^{\mathfrak{N}_\sigma}$ *являются* $\sigma$*-копростыми числами*, *то подгруппы H и K перестановочны.*

Действительно, ввиду того, что порядки групп $H / H^{\mathfrak{N}_\sigma}$ и $K / K^{\mathfrak{N}_\sigma}$ являются $\sigma$-копростыми числами, для любого гомоморфизма $\varphi$ подгруппы $< H, K >$ в $\sigma$-примарную группу одна из подгрупп $H^\varphi$ или $K^\varphi$ является единичной. Поэтому для любого такого гомоморфизма $\varphi$ выполняется равенство $H^\varphi K^\varphi = K^\varphi H^\varphi$. Отсюда на основании теоремы 0.2 подгруппы $H$ и $K$ являются перестановочными.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Wielandt*, *H.* Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen / H. Wielandt // Math. Z. – 1939. – Vol. 45. – P. 209–244.

2. *Skiba*, *A.N.* On $\sigma$-subnormal and $\sigma$-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

3. *Skiba*, *A.N.* On some results in the theory of finite partially soluble groups / A.N. Skiba // Commun. Math. Stat. – 2016. – Vol. 4, № 3. – P. 281–309.

4. *Скиба*, *А.Н.* О $\sigma$-свойствах конечных групп II / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 70–83.

5. *Wielandt*, *H.* Subnormale Untergruppen endlicher Gruppen / H. Wielandt. – Tübingen: Lecture Notes, 1971. – 180 p.

6. *Brewster*, *D.C.* A criterion for the permutability of subnormal subgroups / D.C. Brewster // J. Algebra. – 1975. – Vol. 36, № 1. – P. 85–87.

7. *Каморников*, *С.Ф.* Перестановочность подгрупп и $\mathfrak{F}$-субнормальность / С.Ф. Каморников // Сиб. матем. журн. – 1996. – Т. 37, № 5. – С. 1065–1080.

8. *Каморников*, *С.Ф.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск: Белорус. наука, 2003. – 256 с.

9. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

10. *Скиба*, *А.Н.* О $\sigma$-свойствах конечных групп I / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 89–96.

11. *Kegel*, *O.H.* Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30, № 3. – P. 225–228.

12. *Ballester-Bolinches*, *A*. On formations of finite groups with the generalised Wielandt property for residuals / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, V. Perez-Calabuig // J. Algebra. – 2014. – Vol. 412. – P. 173–178.

13. *Мурашко*, *В.И.* Об одном обобщении теорем Бэра о гиперцентре и нильпотентном корадикале / В.И. Мурашко // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 3 (16). – С. 84–88.

*Поступила в редакцию* 10.05.19.