МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О $\mathfrak{U}\Phi$ -ГИПЕРЦЕНТРАЛЬНО ВЛОЖЕННЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В.А. Васильев

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

ON $\mathfrak{U}\Phi$ -HYPERCENTRALLY EMBEDDED SUBGROUPS OF FINITE GROUPS

V.A. Vasilyev

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Подгруппа M группы G называется модулярной подгруппой в G, если выполняются следующие условия:
(1) $\langle X, M\cap Z\rangle = \langle X, M\rangle \cap Z$ для всех $X \le G, Z \le G$ таких, что $X \le Z,$ и
(2) $\langle M, Y\cap Z\rangle = \langle M, Y\rangle \cap Z$ для всех $Y \le G, Z \le G$ таких, что $M \le Z.$
Найдены условия $\mathfrak{U}\Phi$ -гиперцентрального вложения подгрупп конечных групп с заданными модулярными примарными подгруппами.

***Ключевые слова**: конечная группа, модулярная подгруппа, силовская р-подгруппа,* $\mathfrak{U}\Phi$ *-гиперцентр.*

A subgroup M of a group G is a modular subgroup in G if the following conditions are true:
(1) $\langle X, M\cap Z\rangle = \langle X, M\rangle \cap Z$ for all $X \le G, Z \le G$ with $X \le Z,$ and
(2) $\langle M, Y\cap Z\rangle = \langle M, Y\rangle \cap Z$ for all $Y \le G, Z \le G$ with $M \le Z.$
Conditions for $\mathfrak{U}\Phi$ -embedding of hypercentral subgroups of finite groups with given modular primary subgroups are found.

***Keywords**: finite group, modular subgroup, Sylow p-subgroup,* $\mathfrak{U}\Phi$ *-hypercentre.*

Введение

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны.

Напомним, что подгруппа M группы G называется модулярной подгруппой в G, если выполняются следующие условия:

(1) $\langle X, M\cap Z\rangle = \langle X, M\rangle \cap Z$ для всех $X \le G,$ $Z \le G$ таких, что $X \le Z,$ и

(2) $\langle M, Y\cap Z\rangle = \langle M, Y\rangle \cap Z$ для всех $Y \le G,$ $Z \le G$ таких, что $M \le Z.$

Отметим, что модулярная подгруппа является модулярным элементом (в смысле Куроша, [1, гл. 2, с. 43]) решетки всех подгрупп группы. Понятие модулярной подгруппы впервые анализировалось в работе Р. Шмидта [2] и оказалось полезным в вопросах классификации составных групп. В частности, в монографии Р. Шмидта [1, гл. 5] модулярные подгруппы были использованы для получения новых характеризаций различных классов групп.

Мы используем символ $\mathfrak{U}$ для обозначения класса всех сверхразрешимых групп и $\mathfrak{N}$ – для обозначения класса всех нильпотентных групп. Символ $[A]B$ обозначает полупрямое произведение групп A и B, где B – оператор группы A. Главный фактор H/K группы G называется фраттиниевым при условии $H/K \le \Phi(G/K)$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп. Главный фактор H/K группы G называется $\mathfrak{X}$-центральным при условии $[H/K](G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{X}$ [3]. Произведение всех нормальных подгрупп из G, чьи G-главные факторы являются $\mathfrak{X}$-центральными в G называется $\mathfrak{X}$-гиперцентром группы G и обозначается $Z_{\mathfrak{X}}(G)$ [4, с. 389].

$\mathfrak{X}$-гиперцентр существенным образом влияет на структуру группы. Например, если в группе G все подгруппы простого порядка или порядка 4 содержатся в $Z_{\mathfrak{N}}(G)$, то G нильпотентна (Н. Ито). Если все такие подгруппы содержатся в $Z_{\mathfrak{U}}(G)$, то G сверхразрешима (Хупперт, Дерк). Если в группе G все подгруппы простого порядка содержатся в $Z_{\mathfrak{U}}(G)$, то G разрешима (Гашюц). Отметим также, что если G имеет нормальную подгруппу E такую, что $G/E \in \mathfrak{X}$ и $E \le Z_{\mathfrak{X}}(G)$, то $G \in \mathfrak{X}$, для многих конкретных классов $\mathfrak{X}$.

Напомним, что $\mathfrak{U}\Phi$ -гиперцентром [5] группы G называется произведение всех нормальных подгрупп H из G таких, что все нефраттиниевы G-главные факторы группы H имеют простой порядок.

Целью данной работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть E – нормальная подгруппа группы G, и p – простой делитель* $|E|$. *Предположим, что силовская p-подгруппа P из E имеет подгрупну D такую, что* $1<|D|<|P|$ *и каждая подгруппа H из P с порядком* $|H|=|D|$ *и каждая циклическая подгруппа из P порядка* 4 (*если* $|D|=2$ *и P является неабелевой 2-группой*), *не имеющие p-нильпотентного добавления в G, являются модулярными в G. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(I) *Если* $(p-1,|G|)=1$, *то*

$$E/O_{p'}(E)\leq Z_{\Phi}(G/O_{p'}(E)).$$

(II) *Если* $(p-1,|E|)=1$, *то*

$$E/O_{p'}(E)\leq Z_{\mathfrak{U}\Phi}(G/O_{p'}(E)).$$

Мы докажем эту теорему в разделе 2. Используемая в статье терминология стандартна и при необходимости мы отсылаем читателя к монографиям [4], [6].

1 Некоторые предварительные результаты

Следующие известные свойства модулярных подгрупп будут использованы в данной работе.

***Лемма* 1.1** [1, с. 201]. *Пусть M – модулярная подгруппа в группе G. Тогда:*

(1) $H\bigcap M$ *является модулярной подгруппой в* H *для всех* $H\leq G$;

(2) *если* $N\trianglelefteq G$, *то* MN/N *модулярна в* G/N;

(3) *если* M_1 *и* M_2 *модулярные подгруппы в G, то* $\langle M_1,M_2\rangle$ *так же модулярная подгруппа в G.*

***Лемма* 1.2** [1, гл. 5, теорема 5.2.5]. *Если подгруппа* M *модулярна в группе* G, *то*

$$M^G/M_G\leq Z_{\mathfrak{U}}(G/M_G).$$

***Лемма* 1.3** [5, лемма 2.3]. *Пусть* $Z=Z_{\mathfrak{X}\Phi}(G)$ *и N и T – нормальные подгруппы группы G. Тогда:*

(1) *каждый нефраттиниевый G-главный фактор из* Z *является* $\mathfrak{X}$ *-центральным в* G;

(2) $ZN/N\leq Z_{\mathfrak{X}\Phi}(G/N)$;

(3) *если* $TN/N\leq Z_{\mathfrak{X}\Phi}(G/N)$ *и* $(|T|,|N|)=1$, *тогда* $T\leq Z$.

***Лемма* 1.4.** *Пусть* N *– нормальная элементарная абелева подгруппа группы* G. *Предположим, что* N *имеет подгруппу* D *такую, что* $1<|D|<|N|$ *и каждая подгруппа* H *из* N *удовлетворяющая* $|H|=|D|$ *является модулярной в* G. *Тогда некоторая максимальная подгруппа из* N *нормальна в* G.

Доказательство. Предположим, что лемма не верна и (G,N) является контрпримером, для которого $|G|+|N|$ минимально. Тогда $|N|>p$. По условию леммы каждая подгруппа H из N, удовлетворяющая условию $|H|=|D|$, модулярна в G. Предположим, что N является минимальной нормальной в G подгруппой. Пусть V – максимальная подгруппа из N. Тогда V модулярна в G по лемме 1.1 (3) как произведение некоторых модулярных в G подгрупп из N. По лемме 1.2 получаем $V/V_G=V/1\leq Z_{\mathfrak{U}}(G/1)$. Но тогда $1\neq V\leq N\bigcap Z_{\mathfrak{U}}(G)$. Так как $Z_{\mathfrak{U}}(G)\trianglelefteq G$, то $N\leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$. Получили противоречие с тем, что $|N|\neq p$, где p – простое число. Предположим теперь, что N не является минимальной нормальной в G подгруппой. Пусть R – минимальная нормальная в G подгруппа, входящая в N. Тогда условие леммы выполняется для $(G/R,N/R)$ и поэтому в силу выбора (G,N) существует такая максимальная подгруппа M/R из N/R, что M/R нормальна в G/R. Но тогда M – такая максимальная подгруппа из N, что M нормальна в G. Получили противоречие с выбором (G,N), которое завершает доказательство леммы.

***Лемма* 1.5.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, и пусть G – группа с разрешимым* $\mathfrak{F}$ *-корадикалом* $P=G^{\mathfrak{F}}$. *Предположим, что каждая максимальная подгруппа из* G, *не содержащая* P, *принадлежит* $\mathfrak{F}$. *Тогда* P *является p-группой для некоторого простого числа* p. *Более того, если каждая циклическая подгруппа из* P *простого порядка или порядка* 4 (*если* $p=2$ *и* P *неабелева*), *не имеющая сверхразрешимого добавления в* G, *является модулярной в* G, *то* $|P/\Phi(P)|=p$.

Доказательство. Согласно [6, VI, теорема 24.2] $P=G^{\mathfrak{F}}$ является p-группой для некоторого простого числа p и верны следующие утверждения:

(1) $P/\Phi(P)$ является G-главным фактором из P;

(2) P является группой экспоненты p или экспоненты 4 (если $p=2$ и P неабелева). Предположим, что каждая циклическая подгруппа из P простого порядка или порядка 4 (если $p=2$ и P неабелева), не имеющая сверхразрешимого добавления в G, является модулярной подгруппой в G. Пусть $\Phi=\Phi(P)$, X/Φ – подгруппа простого порядка из P/Φ, $x\in X\setminus\Phi$ и $L=\langle x\rangle$. Тогда $|L|=p$ или $|L|=4$. Поэтому L либо имеет сверхразрешимое добавление T в G, либо является модулярной подгруппой в G. В первом случае мы можем предполагать, что $T\neq G$ и поэтому $T\Phi\neq G$, так как $\Phi\leq\Phi(G)$. С другой стороны $LT=G$ и поэтому

$$(T\Phi/\Phi)(L\Phi/\Phi)=(T\Phi/\Phi)(X/\Phi)=G/\Phi.$$

Значит, $|G/\Phi : T\Phi/\Phi| = p$ и поэтому

$$|P/\Phi(P)| = p,$$

так как $G/\Phi = (P/\Phi)(T\Phi/\Phi)$. Предположим теперь, что L модулярная в G подгруппа. Тогда $L\Phi(P)/\Phi(P) = X/\Phi(P)$ является модулярной в $G/\Phi(P)$ подгруппой по лемме 1.1 (2). Теперь согласно (1) и по лемме 1.4 заключаем, что $|P/\Phi(P)| = p$.

***Лемма* 1.6** [7, теорема 1.4]. *Пусть H/K – p-главный фактор группы G. $|H/K| = p$ тогда и только тогда, когда*

$$G/C_G(H/K) \simeq Aut_G(H/K)$$

является абелевой группой экспоненты, делящей $p-1$.

***Лемма* 1.7** [8]. *Пусть E – нормальная подгруппа группы G, P – силовская 2-подгруппа из E с $|P| > 4$. Предположим, что каждая подгруппа H из P порядка 4, не имеющая 2-нильпотентного добавления в G, является модулярной в G. Тогда $E/O_{2'}(E) \le Z_\infty(G/O_{2'}(E))$.*

***Лемма* 1.8** [5, лемма 2.10]. *Пусть G – группа, p – наименьший простой делитель $|G|$ и P – нециклическая силовская p-подгруппа из G. Пусть E – нормальная неединичная подгруппа из G, содержащаяся в P. Если либо каждая максимальная подгруппа из P имеет p-нильпотентное добавление в G, либо каждая максимальная подгруппа из E имеет p-нильпотентное добавление в G, то G p-нильпотентна.*

2 Доказательство основной теоремы

Предположим, что теорема неверна и рассмотрим контрпример (G, E), для которого произведение $|G||E|$ минимально.

(1) $O_{p'}(E) = 1$.

Предположим, что $O_{p'}(E) \ne 1$. Легко показать, что по лемме 1.1 (2) условие теоремы выполняется для $(G/O_{p'}(E), E/O_{p'}(E))$. Следовательно, по выбору (G, E) теорема верна для $(G/O_{p'}(E), E/O_{p'}(E))$, и значит, для (G, E). Получили противоречие с выбором (G, E).

(2) *Если $E \ne G$, то $E = P$* .

Предположим, что $E \ne G$. По лемме 1.1(1) условие теоремы остается верным для (E, E), поэтому E является p-сверхразрешимой по выбору (G, E). Но так как по условию $(p-1, |E|) = 1$, то E является p-нильпотентной группой. Но согласно (1), $O_{p'}(E) = 1$. Значит, $E = P$.

(3) $O_{p'}(G) = 1$.

Предположим, что $V = O_{p'}(G) \ne 1$. Тогда согласно (1) и (2), $E = P$. По лемме 1.1 (2) условие теоремы остается верным для $(G/V, EV/V)$. Значит, теорема верна для $(G/V, EV/V)$ по выбору (G, E). Теперь согласно (1) и по лемме 1.3 (3) мы заключаем, что теорема верна для (G, E), что противоречит выбору (G, E).

(4) $|D| > p$.

Предположим, что $|D| = p$. Сначала покажем, что G не имеет циклического главного фактора вида E/V. Предположим, что это не так. Тогда V не является циклической группой, поэтому $|V|$ – не простое число. Пусть V_p – силовская p-подгруппа из V. Предположим, что $|V_p| = p$. Так как $(p-1, |E|) = 1$, то V p-нильпотентна. Но так как $O_{p'}(V)$ $char$ V, то

$$O_{p'}(V) \le O_{p'}(E) = 1.$$

Значит, $|V| = p$. Получили противоречие с выбором V. Поэтому $|V_p| > p$. Следовательно, условие теоремы остается верным для пары (G, V), что влечет $V \le Z_{\mathfrak{U}\Phi}(G)$ по выбору (G, E). Значит, $E \le Z_{\mathfrak{U}\Phi}(G)$. Если $(p-1, |G|) = 1$, то из этого следует, что $E \le Z_\Phi(G)$. Это противоречие показывает, что G не имеет циклического главного фактора вида E/V.

Сначала предположим, что $(p-1, |G|) = 1$. Тогда G не имеет p-замкнутую подгруппу Шмидта вида $H = [H_p]H_q$, где $H_p \le E$. Действительно, по лемме 1.1 (1) каждая подгруппа из H порядка p и порядка 4 (если H_p является неабелевой 2-группой), не имеющая p-нильпотентного добавления в G, является модулярной в H. Но по лемме 1.5, $|H_p/\Phi(H_p)| = p$, что ввиду леммы 1.6 противоречит условию $(p-1, |G|) = 1$. Так как каждая не p-нильпотентная группа имеет p-замкнутую группу Шмидта [9, теорема IV, 5.4], то $G \ne E$. Значит, согласно (2), $E = P$ и $x \in C_G(P)$ для любого p'-элемента x из G. Действительно, если $x \notin C_G(P)$, то $H = [P]\langle x \rangle$ не является p-нильпотентной группой. Значит, H имеет p-замкнутую группу Шмидта $[A_p]A_q$. По лемме 1.1 (1) каждая подгруппа из H порядка p и порядка 4 (если A_p является неабелевой 2-группой), не имеющая p-нильпотентного добавления в G, является модулярной в H. Но тогда по лемме 1.5 $|A_p/\Phi(A_p)| = p$, что ввиду леммы 1.6 противоречит условию $(p-1, |G|) = 1$. Так как

$$O^p(G) = \langle x \mid x - p' \text{ элемент} \rangle,$$

то $O^p(G) \le C_G(P)$ и поэтому $G/C_G(P)$ – p-группа. Следовательно, $P \le Z_\infty(G)$. Получили противоречие.

Предположим теперь, что p не является наименьшим простым делителем $|G|$. Тогда $p>2$ и согласно (2) $E=P$. Предположим, что некоторая подгруппа H из P с $|H|=p$ имеет p-нильпотентное добавление T в G. Тогда $T\cap P$ – максимальная подгруппа в P, поэтому она нормальна в G. Но тогда из

$$|P:T\cap P|=|PT:T|=|G:T|=p$$

следует, что $E=P$ имеет циклический G-главный фактор $P/T\cap P$.

Это противоречие показывает, что каждая подгруппа H из P с $|H|=p$ является модулярной в G. Применяем теорему 1.1 из [10] и получаем противоречие с выбором группы G. Значит, $|D|>p$.

(5) *Предположим, что* $|P:D|>p$. *Тогда* G *не имеет нормальной максимальной подгруппы* M *с* $|G:M|=p$ *и* $MP=G$.

В противном случае, условие теоремы выполняется для $(G, E\cap M)$. Следовательно, теорема верна для $(G, E\cap M)$ по выбору (G,E). С другой стороны, из G-изоморфизма $G/M\simeq E/M\cap E$ заключаем, что $E/M\cap E$ является центральным главным фактором группы G. Значит, теорема верна для (G,E). Получили противоречие.

(6) $|P:D|>p$.

Ввиду выбора группы G, это утверждение вытекает из [11, теорема 1.2].

(7) $|N|\le|D|$ *для любой минимальной нормальной подгруппы* N *из* G, *содержащейся в* P.

Предположим, что $|D|<|N|$. Если некоторая подгруппа H из N с порядком $|H|=|D|$ имеем p-нильпотентное добавление T в G, то $TN=G$ и $T\ne G$. Значит, $N\cap T$ является собственной неединичной в N подгруппой потому, что $N=N\cap HT=H(N\cap T)$. Но очевидно, что $N\cap T$ нормальна в G, что противоречит минимальности N. Значит, каждая подгруппа H из N с порядком $|H|=|D|$ является модулярной в G и поэтому по лемме 1.4 некоторая максимальная подгруппа из N является нормальной в G. Получили противоречие, которое показывает, что утверждение (7) верно.

(8) *Если* $E=P$ *и* p *– наименьший простой делитель* $|G|$, *тогда* P *является силовской подгруппой группы* G.

Пусть G_p – силовская p-подгруппа из G. Предположим, что $E=P\ne G_p$ и пусть Q – силовская q-подгруппа из G, где $q\ne p$. Тогда $|PQ|<|G|$ и по лемме 1.1 (1) условие теоремы выполняется для (PQ,P). Значит, $P\le Z_{\Phi}(PQ)$. Поэтому PQ нильпотентна. Следовательно, $Q\le C_G(P)$. Пусть теперь $1=P_0\le P_1\le\ldots\le P_t=P$, где P_{i+1}/P_i – главный фактор группы G_p, $i=0,1,\ldots,t-1$. Тогда P_{i+1}/P_i – главный фактор группы G. Поэтому $P\le Z(G)$, что противоречит выбору (G,E). Значит, $P=G_p$.

(9) *Предположим, что* $p=2$, $|P:D|>2$ *и некоторая подгруппа* H *из* P *порядка* 4 *имеет* 2*-нильпотентное добавление* T *в* G. *Тогда* H *не является циклической группой,* $G/T_G\simeq A_4$, *каждая подгруппа из* H *порядка* 2 *не является модулярной в* G, *и* T_G *является* 2*-группой.*

Ввиду (5), $|G:T|=4$. Рассматривая перестановочное представление G/T_G на правые смежные классы группы T/T_G, можно заметить, что G/T_G изоморфна некоторой подгруппе симметрической группы S_4 степени 4. Но так как согласно (5) G не имеет подгруппы M с $|G:M|=2$, то $G/T_G\simeq A_4$. Отсюда следует, что $H\simeq HT_G/T_G$ не является циклической группой. Так как согласно (3) $O_{2'}(G)=1$, то получаем $O_{2'}(T_G)=1$. Значит, T_G является 2-группой. Предположим, что некоторая подгруппа V из H порядка 2 является модулярной в G. Заметим, что V ненормальна в G. Действительно, если V нормальна в G, то VT нормальная максимальная подгруппа в G, что противоречит (5). Значит, $V_G=1$ и поэтому $V\le Z=Z_{\infty}(G)$ по лемме 1.2. Рассмотрим ряд $T_G\le ZT_G\le G$. Ввиду G-изоморфизма $ZT_G/T_G\simeq Z/T_G\cap Z$ заключаем, что $ZT_G/T_G\le Z_{\infty}(G/T_G)$. Легко заметить, что $|P/T_G:ZT_G/T_G|\le 2$. Следовательно, порядок силовской 2-подгруппы из $(G/T_G)/(ZT_G/T_G)$ не превосходит 2. Значит, $(G/T_G)/(ZT_G/T_G)$ 2-нильпотентна. Так как $ZT_G/T_G\le Z_{\infty}(G/T_G)$, то G/T_G 2-нильпотентна. Получили противоречие с тем, что $G/T_G\simeq A_4$.

(10) *Если* P *– неабелева* 2*-группа и* $|P:D|>2$, *то* $|D|>4$.

Это утверждение следует из леммы 1.7.

(11) *Если* N *является абелевой минимальной нормальной подгруппой из* G, *содержащейся в* E, *то условие теоремы остается верным для* $(G/N, E/N)$.

Если либо $p>2$ и $|N|<|D|$, либо $p=2$ и $2|N|<|D|$, то, применяя лемму 1.1 (2), получаем, что утверждение (11) верно. Ввиду (6) $|P:D|>p$ и, либо $p>2$ и $|N|=|D|$, либо $p=2$ и $|N|\in\{|D|,|D|:2\}$. По условию теоремы каждая подгруппа H из P порядка $|D|$, не имеющая p-нильпотентного добавления в G, является модулярной в G. Кроме того, ввиду утверждения (4), $|D|>p$. Предположим, что $|N|=|D|$. Тогда N является нециклической группой и, значит, каждая подгруппа из G, содержащая N, является нециклической. Пусть $N\le K\le P$, где $|K:N|=p$. Так как K – нециклическая группа, то она имеет максимальную подгруппу $L\ne N$. Если как минимум одна из подгрупп L или N имеет p-нильпотентное добавление в G, то также и K имеет p-нильпотентное добавление. В противном случае $K=LN$ является модулярной подгруппой в G, как произведение двух модулярных в G подгрупп. Таким образом, если либо $p>2$, либо P/N абелева, то условие теоремы верно для $(G/N, E/N)$ по лемме 1.1 (2). Предположим теперь, что P/N неабелева 2-группа. Тогда P неабелева, поэтому $|D|>4$ согласно (10). Пусть $N\le K\le V$, где $|V:N|=4$ и $|V:K|=2$. Пусть K_1 – максимальная подгруппа из V такая, что $V=K_1K$. Предположим, что K_1 – циклическая группа. Тогда $N\nsubseteq K_1$, поэтому $V=K_1N$, что влечет $|N|=4$. Но тогда $|D|=4$, что противоречит (10). Значит, K_1 не является циклической группой и, следовательно, как и выше можно показать, что K_1 либо модулярна в G, либо имеет 2-нильпотентное добавление в G. Поэтому каждая подгруппа из P/N порядка 2 или порядка 4, не имеющая p-нильпотентного добавления в G/N, является модулярной в G/N.

В заключение, предположим, что $|D|=2|N|$. Если $|N|>2$, то, рассуждая как и выше, можно показать, что каждая подгруппа из P/N порядка 2 или порядка 4 (если P/N неабелева), не имеющая 2-нильпотентного добавления в G/N является модулярной в G/N. Теперь предположим, что $|N|=2$ и P/N неабелева. Тогда P неабелева и $|D|=4$, что противоречит (10). Следовательно, утверждение (11) верно.

(12) $E=G$.

Предположим, что $E=P$ и пусть N – любая минимальная нормальная подгруппа из G, содержащаяся в P. Тогда согласно (11) условие теоремы верно для $(G/N, E/N)$. Значит, $E/N\le Z_{\mathfrak{U}\Phi}(G/N)$, $N\nsubseteq\Phi(G)$ и $|N|>p$. Поэтому $\Phi(G)\bigcap E=1$. Следовательно, согласно [6, лемма 7.9], P является прямым произведением некоторых минимальных нормальных подгрупп из G. Ввиду леммы 1.4, $P\ne N$. Значит, для некоторой минимальной нормальной подгруппы R из G, содержащейся в P, имеем $R\ne N$. Тогда согласно [4, гл. A, лемма 9.11],

$$NR/N\nsubseteq\Phi(G/N).$$

Поэтому $|R|=|NR/N|=p$, откуда следует, что теорема верна для (G,E). Полученное противоречие показывает, что утверждение (12) верно.

(13) *Некоторая максимальная подгруппа из P не имеет p-нильпотентного добавления в G* (это следует из леммы 1.8).

(14) *E p-разрешима.*

Согласно (11), необходимо только показать, что $P_G\ne 1$. Предположим, что это не так. По условию теоремы каждая подгруппа H из P порядка $|H|=|D|$, не имеющая p-нильпотентного добавления в G, является модулярной. Пусть $V\le P$, $V\ne 1$ и V – модулярная подгруппа в G. Тогда $V/V_G\le Z_{\mathfrak{U}}(G/V_G)$. Очевидно, что $V_G=1$. Значит, $V\le Z_{\mathfrak{U}}(G)$. Следовательно,

$$1\ne V\le P\cap Z_{\mathfrak{U}}(G)\le P_G.$$

Получили противоречие. Таким образом, заключаем, что каждая подгруппа H из P порядка $|H|=|D|$ имеет p-нильпотентное добавление в G и поэтому каждая максимальная подгруппа из P имеет p-нильпотентное добавление в G, что противоречит (13). Отсюда получаем, что утверждение (14) верно.

Заключительное противоречие.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа из G. Тогда ввиду (1), (12) и (14), $N\le P$. Значит, согласно (11) и по выбору группы G для каждой минимальной нормальной подгруппы N из G фактор-группа G/N p-нильпотентна. Поэтому $|N|>p$, $N\nsubseteq\Phi(G)$ и $N=O_p(G)=F(G)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа в G согласно [4, гл. A, теорема 15.2]. Согласно (6) $|P:D|>p$. По условию теоремы каждая подгруппа H из P порядка $|H|=|D|$, не имеющая p-нильпотентного добавления в G, является модулярной. Так как каждая модулярная в G подгруппа из P содержится в $O_p(G)=N$, то это влечет, что каждая подгруппа H из P, отличная от N и удовлетворяющая $|H|=|D|$, имеет p-нильпотентное добавление в G. Поэтому каждая максимальная подгруппа из P имеет p-нильпотентное добавление в G, что противоречит (13). Это противоречие завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schmidt*, *R*. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin etc: Walter de Gruyter, 1994. – 572 p.

2. *Schmidt*, *R*. Modulare Untergruppen endlicher Gruppen / R. Schmidt // J. Ill. Math. – 1969. – Vol. 13. – P. 358–377.

3. *Скиба*, *А.Н.* Формации алгебраических систем / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1989. – 256 с.

4. *Doerk*, *K.* Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes; Berlin etc: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

5. *Shemetkov*, *L.A.* On the $\mathfrak{X}\Phi$ -hypercentre of finite groups / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2009. – Vol. 322. – P. 2106–2117.

6. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

7. *Weinstein*, M. Between Nilpotent and Solvable / H.G. Bray [and others]; edited by M. Weinstein. – Passaic: Polugonal Publishing House, 1982. – 240 p.

8. *Васильев*, *В.А.* Конечные группы с модулярными подгруппами порядка 4 / В.А. Васильев // Известия ГГУ им. Ф.Скорины. – 2014. – № 3 (84). – С. 30–34.

9. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin etc: Springer, 1967. – 793 s.

10. *Васильев*, *В.А.* Об одном обобщении модулярных подгрупп / В.А. Васильев, А.Н. Скиба // Укр. мат. журн. – 2011. – Т. 63, № 10. – С. 1314–1325.

11. *Васильев*, *В.А.* Конечные группы с m-добавляемыми максимальными подгруппами силовских подгрупп / В.А. Васильев // Известия ГГУ им. Ф.Скорины. – 2011. – № 4 (67). – С. 29–37.

Поступила в редакцию 23.07.14.