

ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№1 (66) 2026

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:
С.А. Хахомов (Беларусь)

**ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО
РЕДАКТОРА:**
А.В. Рогачёв (Беларусь)
Д.Л. Коваленко (Беларусь)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Мोजаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)
М.А. Ярмоленко (Беларусь)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины
ул. Советская, 104,
246028, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

EDITOR-IN-CHIEF:
S.A. Khakhomov (Belarus)

DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:
A.V. Rogachev (Belarus)
D.L. Kovalenko (Belarus)

EDITORIAL BOARD:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)
M.A. Yarmolenko (Belarus)

EXECUTIVE SECRETARY:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

EDITION ADDRESS:
Francisk Skorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246028, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 1 (66) 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

- Гиргель С.С.** Асимметричные параксиальные оптические пучки Лагерра – Гаусса и Лагерра . 7
- Макаревич А.В., Навныко В.Н., Шандаров С.М., Блоцкая Д.С., Цырулик Е.Ю., Ропот П.И.** Оптимизация процесса считывания смешанных пропускающих голограмм в оптически активном пьезокристалле $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ произвольного среза 12
- Новикова О.В., Тюменков Г.Ю.** О термодинамических уравнениях состояния АдС чёрных дыр 21
- Руденков А.С., Джанг Сянь Хун, Ярошенко М.А., Пилипцов Д.Г.** Структура и механические свойства углеродных покрытий, сформированных на подвергнутом ионной обработке подслое на основе этилцеллюлозы и серной кислоты 25
- Тимошенко Е.В., Юревич В.А.** Особенности сверхизлучения в резонаторе в условиях резонансной нелинейности материального отклика активного элемента 32

МАТЕМАТИКА

- Воробьев Н.Т., Воробьев С.Н., Мехович А.П., Китаров Д.А.** О произведении σ -множества Фишера конечной группы и σ -класса Фишера 39
- Гальмак А.М.** Полиадические факторгруппы полиадических групп специального вида. III . 43
- Дергачева И.М., Задорожнюк Е.А., Шабалина И.П.** Критерии π -специальности, мета- π -специальности и $(1, \pi')$ -сверхразрешимости конечной группы 47
- Довженок Т.С.** Доказательство гипотезы об F -иррегулярных графах для простой цепи P_n . . 53
- Евмененко С.Ю.** Нечувствительность стационарного распределения открытых сетей обслуживания с контрольными очередями и карантинным узлом 59
- Копать Д.Я.** Применение функций Бесселя для нахождения ожидаемых доходов G -сети с ненадёжным обслуживанием и нетерпеливыми положительными и отрицательными заявками . 71
- Корзюк В.И., Рудько Я.В.** Классическое и слабое решение первой смешанной задачи для полулинейного волнового уравнения со смешанной производной 77
- Миротин А.Р., Кузьменкова Е.Ю.** О двух типах скошенных μ -ганкелевых операторов в гильбертовых пространствах 84
- Скиба А.Н.** О σ_3 -субнормальных подгруппах конечных групп 91

ИНФОРМАТИКА

- Сергеенко А.В., Хижняк А.В., Липлянин А.Ю.** Математическая модель изображения местности с учетом гиперспектральных и спектрально-поляризационных характеристик 98

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки:

- технические;
- физико-математические.

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21. Приказы Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 31.12.2020 № 338, № 339.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферирован в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е.А. Ружицкая*
Корректоры *И.А. Хорсун, Т.А. Фицнер*
Дизайн обложки *А.В. Ермаков*

Подписано в печать 11.03.26. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 12,79. Уч.-изд. л. 11,14. Тираж 15 экз. Заказ № 116.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013 г.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий в качестве:
издателя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013 г.;
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017 г.
Ул. Советская, 104, 246028, Гомель.

© Учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», 2026
© Проблемы физики, математики и техники, 2026
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2026

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December 2009

Released quarterly

№ 1 (66) 2026

CONTENTS

PHYSICS

Girgel S.S. Asymmetric paraxial optical Laguerre – Gauss and Laguerre beams	7
Makarevich A.V., Naunyka V.N., Shandarov S.M., Blotskaya D.S., Tsyruk E.Yu., Ropot P.I. Optimization of the reading process of mixed transmission holograms in an optically active $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ piezocrystal of arbitrary cut	12
Novikava V.U., Tyumenkov G.Yu. On the thermodynamic equations of state of AdS black holes	21
Rudnikov A.S., Jiang Xiahong, Yarmolenko M.A., Piliptsov D.G. Structure and mechanical properties of carbon coatings formed on an ion-based ethyl cellulose and sulfuric acid underlayer	25
Timoschenko E.V., Yurevich V.A. Features of superradiation in a resonator under conditions of resonant nonlinearity of the material response of the active element	32

MATHEMATICS

Vorobyev N.T., Vorobyev S.N., Mekhovich A.P., Kitarov D.A. On the product of σ -Fisher set of the finite group and σ -Fisher class	39
Gal'mak A.M. Polyadic quotient groups of polyadic groups of special form. III	43
Dergacheva I.M., Zadorozhnyuk E.A., Shabalina I.P. Criteria for π -speciality, meta- π -speciality, and $(1, \pi')$ -supersolubility of a finite group	47
Dovzhenok T.S. Proof of the F -irregular graph conjecture for the path P_n	53
Evmenenko S.Y. Insensitivity of the stationary distribution of open queueing networks with control queues and a quarantine node	59
Kopats D.Y. Application of Bessel function for finding expected revenues of G -network with unreliable systems and impatient positive and negative customers	71
Korzyuk V.I., Rudzko J.V. Classical and mild solutions of the first mixed problem for a semilinear wave equation with a mixed derivative	77
Mirotin A.R., Kuzmenkova E.Yu. On two types of slant μ -Hankel operators in Hilbert spaces	84
Skiba A.N. On σ_3 -subnormal subgroups of finite groups	91

INFORMATION SCIENCE

Siarheyenka A.V., Khizniak A.V., Liplianin A.Y. Mathematical model of the terrain image taking into account hyperspectral and spectral-polarization characteristics	98
--	----

Founder – Francisk Skorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science:

- **Technics;**
- **Physics and Mathematics.**

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 535.42

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_7

EDN: YVEZPY

АСИММЕТРИЧНЫЕ ПАРАКСИАЛЬНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ПУЧКИ ЛАГЕРРА – ГАУССА И ЛАГЕРРА

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ASYMMETRIC PARAXIAL OPTICAL LAGUERRE – GAUSS AND LAGUERRE BEAMS

S.S. Girgel

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Предложены аналитические выражения в замкнутой форме для новых типов асимметричных параксиальных оптических пучков Лагерра – Гаусса и Лагерра. Учтена также возможность явной азимутальной зависимости комплексной амплитуды. Классические пучки Лагерра – Гаусса (обобщенные, стандартные и элегантные) являются их предельными или частными случаями. Сформулированы также ограничения на свободные параметры, чтобы исследуемые асимметричные параксиальные оптические пучки Лагерра – Гаусса и Лагерра переносили конечную мощность и были физически реализуемыми.

Ключевые слова: параксиальные пучки, циркулярные пучки, пучки Лагерра – Гаусса, стандартные пучки Лагерра – Гаусса, элегантные пучки Лагерра – Гаусса.

Для цитирования: Гиргель, С.С. Асимметричные параксиальные оптические пучки Лагерра – Гаусса и Лагерра / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 1 (66). – С. 7–11. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_7. – EDN: YVEZPY

Abstract. Closed-form analytical expressions for new types of asymmetric paraxial optical Laguerre – Gauss and Laguerre beams are proposed. The possibility of explicit azimuthal dependence of the complex amplitude is also taken into account. Classical Laguerre – Gauss beams (generalized, standard and elegant) are their limiting or special cases. Constraints on the free parameters are also formulated so that the studied asymmetric paraxial optical Laguerre – Gauss and Laguerre beams carry finite power and are physically realizable.

Keywords: paraxial beams, circular beams, Laguerre – Gauss beams, standard Laguerre – Gauss beams, elegant Laguerre – Gauss beams.

For citation: Girgel, S.S. Asymmetric paraxial optical Laguerre – Gauss and Laguerre beams / S.S. Girgel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 1 (66). – P. 7–11. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_7 (in Russian). – EDN: YVEZPY

Введение

Пучки Лагерра – Гаусса (LG), наряду с пучками Эрмита – Гаусса и круговыми гауссовыми пучками, по-прежнему остаются популярными объектами исследований в оптике [1]–[14]. Существование мод Лагерра – Гаусса в открытых структурах впервые обсуждалось Губо (Goubau) и Шверингом (Schwering) в 1961 году [4]. С тех пор были проведены многочисленные исследования пучков LG . Следует отметить важные работы Siegman [15], Allen [2]–[3] о векторе Пойтинга в LG пучках.

Недавно, Ковалев и соавторы [11]–[12] исследовали стандартные LG (sLG) пучки с комплексным смещением поперечных координат, которые были ими названы асимметричными (aLG) пучками.

В настоящей работе более детально изучается влияние комплексных смещений iX_0 и iY_0 на sLG , элегантные LG (eLG) и обобщенные LG

(gLG) пучки. Кроме того, обсуждаются как с азимутальной симметрией $\propto \exp(im\varphi)$, так и пучки с явной азимутальной зависимостью $\cos(m\varphi)$ и, наконец, чистые пучки Лагерра, без гауссовой аподизации.

Сначала, базируясь на наших результатах, полученных для циркулярных пучков Куммера – Гаусса и Куммера, предложены явные выражения, характеризующие общие возможные параксиальные пучки Лагерра – Гаусса. Учитываются их возможные асимметрия (децентровка) и различные азимутальные зависимости. Основываясь на последнем выражении получены явные выражения, характеризующие возможные более общие $agLG$ пучки, $aeLG$ пучки, $asLG$ пучки и даже aL пучки без гауссиана. Сформулированы также условия физической реализуемости для каждого типа пучков.

1 Различные новые типы асимметричных пучков Лагерра – Гаусса

Согласно [16]–[18], комплексную амплитуду параксиального скалярного циркулярного пучка Куммера – Гаусса с цилиндрической симметрией в безразмерной форме можно записать как

$$f = \exp\left(\frac{iR^2}{Q}\right) \cdot Q^{-\nu-m-1} P^\nu \times \\ \times M\left(-\nu, m+1, i\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right)\right) \cdot R^m f_2(m, \varphi). \quad (1.1)$$

Здесь $X = \frac{x}{x_0}$, $Y = \frac{y}{x_0}$, $Z = \frac{z}{z_0}$. $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

Параметры x_0 и $z_0 = kx_0^2/2$ – некоторые характерные вещественные размеры пучка в направлениях, параллельных осям θX и θY соответственно. M – функция Куммера, или, иначе, вырожденная гипергеометрическая функция ${}_1F_1$ [19], [20]. Q и P – безразмерные комплексные параметры пучка: $Q = Z - Q_0$, $P = Z - P_0$, причем $Q_0 = Q'_0 + iQ''_0$, $P_0 = P'_0 + iP''_0$. Здесь и далее штрихами помечаем вещественные и мнимые части различных величин. Фазовый множитель f_2 можно записать в общем виде, как

$$f_2(m, \varphi) = \cos m\varphi + ib \sin m\varphi,$$

где $\varphi = \text{arctg}(X, Y)$, $b \in [0; 1]$ – азимутальный параметр модуляции. ν – радиальный комплексный параметр. Угловой параметр $m = 0, 1, 2, \dots$

Азимутальная зависимость от угла φ , как отмечает Ананьев [1], совершенно равноправна как в форме $e^{im\varphi}$, так и в виде $\cos m\varphi$ или $\sin m\varphi$. Наиболее часто встречается зависимость $e^{im\varphi}$. Она проще для анализа. Однако зависимость в форме $\cos m\varphi$ для LG пучков встречаем еще в основополагающей статье о LG пучках у Goubau [4], в статьях Тovar [7], в книгах Ярива [5], Солименко [6], Ананьева [1], Короленко [21], в теоретических работах Seshadri [8], [9] и Lewis [10].

Экспериментально LG пучки с $\cos m\varphi$ зависимостью изучались в работах Меусси [22].

Выражение (1.1) является точным решением параболического уравнения

$$(\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + 4i\partial_z)f = 0 \quad (1.2)$$

записанного в безразмерной форме для монохроматических волн.

Хорошо известна [19] связь между функцией Куммера и полиномами Лагерра

$$L_n^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)} \cdot M(-n, \alpha + 1, z).$$

Менее известно [20] обобщение этой формулы на функции Лагерра

$$L_\nu^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(\nu + \alpha + 1)}{\Gamma(\nu + 1)\Gamma(\alpha + 1)} \cdot M(-\nu, \alpha + 1, z),$$

где ν параметр является нецелым и в общем случае комплексным. Далее мы будем использовать не полиномы, а функции Лагерра для описания неисследованных пока децентрированных (асимметричных) пучков Лагерра – Гаусса и Лагерра с явной азимутальной зависимостью. С этой целью выразим (1.1) через функцию Лагерра

$$f_{gLG} = \exp\left(\frac{iR^2}{Q}\right) \cdot Q^{-\nu-m-1} P^\nu \times \\ \times L_\nu^m\left(i\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right)R^2\right) \cdot R^m f_2(m, \varphi). \quad (1.3)$$

Получили выражение, характеризующее общие LG пучки. Существенно, что здесь фигурируют функции Лагерра, а не полиномы Лагерра. В общем случае свободный параметр ν комплексный: $\nu = \nu' + i\nu''$.

2 Модификации комплексной амплитуды

Обсудим различные модификации комплексной амплитуды (1.3).

А) Осуществим предварительно комплексное смещение (децентровку) поперечных координат соотношениями $X_d = X - iX_0$; $Y_d = Y - iY_0$;

$R_d = \sqrt{X_d^2 + Y_d^2}$; $\varphi_d = \text{arctan}(X_0, Y_0)$. Получаем выражение, описывающее обобщенные асимметричные Лагерра – Гаусса ($agLG$) пучки

$$f_{agLG} = \exp\left(\frac{iR_d^2}{Q}\right) \cdot Q^{-\nu-m-1} P^\nu \times \\ \times L_\nu^m\left(i\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right)R_d^2\right) \cdot R_d^m f_2(m, \varphi_d). \quad (2.1)$$

Для физической реализуемости пучков (2.1) необходима квадратичная интегрируемость (КИ) функций f_{agLG} . Последняя осуществляется при следующих ограничениях $\{Q''_0 > 0, P''_0 > 0\}$, налагаемых на свободные параметры. При этом радиальный индекс ν может быть произвольным комплексным.

Остановимся на формализме для описания азимутальных зависимостей LG пучков. В простейшем случае фазовая модуляция пучка $f_2(m, \varphi) = \exp(im\varphi)$. Тогда при наличии децентровки

$$R_d^m f_2(m, \varphi_d) = (X_d + iY_d)^m. \quad (2.2)$$

Если же мы используем явную азимутальную зависимость $f_2(m, \varphi) = \cos(m\varphi)$, то в случае децентровки проще всего взять выражение

$$R_d^m f_2(m, \varphi_d) = \frac{1}{2} \left((X_d + iY_d)^m + (X_d - iY_d)^m \right).$$

Более подробное обсуждение различных возможностей описания явных азимутальных зависимостей для пучков с цилиндрической симметрией было проведено на примере пучков Бесселя в работе [23].

Б) Если положить $v \equiv n = 1, 2, \dots$, то (1.3) редуцируется к классическим gLG [18] пучкам. Используем также децентровку и получаем далее

$$f_{agLG} = \exp\left(\frac{iR_d^2}{Q}\right) \cdot Q^{-n-m-1} P^n \times \\ \times I_n^m\left(i\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right)R_d^2\right) \cdot R_d^m \cdot f_2(m, \varphi_d). \quad (2.3)$$

Условия квадратичной интегрируемости (КИ) для комплексной амплитуды f_{agLG} пучков $agLG$ сводятся только к ограничениям $Q_0'' > 0$, а параметр P_0'' может быть как положительным, так и отрицательным.

В) Рассмотрим теперь sLG пучки. Полагаем в (1.3) параметр $P = Q^*$. Тогда

$$f_{asLG} = \exp\left(\frac{iR_d^2}{Q}\right) \cdot Q^{-n-m-1} Q^{*n} \times \\ \times I_n^m\left(\frac{2Q_0''R_d^m}{|Q|^2}\right) \cdot R_d^m \cdot f_2(m, \varphi_d). \quad (2.4)$$

После некоторых преобразований можно представить (2.4) в более привычной форме

$$f_{asLG} = \frac{1}{Q} \exp\left(\frac{iR_d^2}{Q}\right) \cdot \left(\frac{2}{W^2}\right)^{\frac{m}{2}} \times \\ \times L_n^m\left[\frac{2R_d^2}{W^2}\right] \cdot R_d^m \cdot e^{-i(2n+m)\Phi_0}. \quad (2.5)$$

Здесь квадрат нормированного радиуса пучка равен

$$W^2 = Q_0'' \left(1 + \frac{(Z - Q_0')^2}{Q_0''^2}\right).$$

Если взять множитель $R_d^m f_2(m, \varphi_d)$ в форме (2.2), тогда выражение (2.5) соответствует формуле (3) в статье [11] Ковалева и др.

Если же использовать форму (2.3), тогда выражение (2.5) при $Q_0' = 0$ характеризует $asLG$ пучки с явной азимутальной зависимостью $\propto \cos(m\varphi)$, которые пока не исследовались.

Г) Обсудим теперь обобщенные eLG пучки. Для этого в общей формуле (1.3) полагаем параметр $|P| \rightarrow \infty$. Учтем также возможную децентровку пучка. Тогда комплексная амплитуда (2.1) редуцируется к выражению

$$f_{gaeLG} = \exp\left(\frac{iR_d^2}{Q}\right) \cdot Q^{-v-m-1} \times$$

$$\times L_v^m\left(-\frac{i}{Q}R_d^2\right) \cdot R_d^m \cdot f_2(m, \varphi_d), \quad (2.6)$$

характеризующему обобщенные асимметричные элегантные LG ($gaeLG$) пучки.

Действительно, если положить в (2.6) $v \equiv n = 1, 2, \dots$, тогда (2.6) описывают неисследованные асимметричные eLG ($aeLG$) пучки. Отметим, что классические eLG пучки без децентровки были впервые введены в [24] и обсуждались затем в [4], [5].

Если параметр v является непрерывным положительным числом, тогда (2.6) характеризует т.н. фракционные eLG пучки [25].

Однако существует еще одна интересная возможность. Согласно [16], если свободный комплексный параметр v удовлетворяет условию

$$v' < -(1+m)/2,$$

тогда функция f_{aeLG} обладает КИ. Действительно, что при выполнении ограничений $Q_0'' > 0$ и $v' < -(1+m)/2$ формула (2.6) описывает новый тип асимметричных (децентрированных) eLG пучков. При этом классические eLG пучки Сигмана [15] и фракционные eLG пучки [25] являются частными случаями пучков $gaeLG$ в (2.6)

Д) В общей формуле (1.3) полагаем параметр $|Q| \rightarrow \infty$. Учтем также возможную децентровку пучка. Тогда комплексная амплитуда (2.1), после переобозначений $Q \leftrightarrow P$, редуцируется к виду

$$f_{al} = Q^v \cdot L_v^m\left(\frac{i}{Q}R_d^2\right) \cdot R_d^m \cdot f_2(m, \varphi_d). \quad (2.7)$$

Последнее выражение описывает асимметричные Лагерра (aL) пучки. При ограничениях $\{Q_0'' > 0, v' > -m/2\}$ aL пучки являются физически реализуемыми, поскольку переносят конечную мощность. Существенно, что здесь используются функции Лагерра f_{al} непрерывного комплексного радиального индекса v , а не полиномы Лагерра. Не требуется здесь явно и гауссиан.

Следует отметить также, что выражение (2.7) эквивалентно формуле

$$f_{ack} = Q^v \cdot M\left(-v, m+1, \frac{i}{Q}R_d^2\right) \cdot R_d^m \cdot f_2(m, \varphi_d),$$

которая описывает асимметричные циркулярные пучки Куммера.

Если децентровка в последнем выражении отсутствует, тогда мы приходим к параксиальным циркулярным пучкам Куммера

$$f_{ck} = Q^v \cdot M\left(-v, m+1, \frac{i}{Q}R^2\right) \cdot R^m \cdot f_2(m, \varphi),$$

которые теоретически исследовались в наших работах [26]–[28].

Заключение

В данной статье обсуждаются новые типы оптических пучков LG и L . При этом учитываются возможные комплексные смещения поперечных компонент координат $\mathbf{R}_{\perp d} = \mathbf{R}_{\perp} + i\mathbf{R}_0$. Базируясь на результатах изучения циркулярных световых пучков Куммера – Гаусса с непрерывным угловым индексом и математической связи между функциями Куммера и Лагерра был установлен ряд закономерностей.

1. Возможны общие aLG пучки с комплексным радиальным индексом ν . При выполнении условий $\{Q_0'' > 0, P_0'' > 0\}$ они являются физически реализуемыми. Если при этом индекс ν становится целочисленным положительным, то они редуцируются к классическим gLG пучкам [17].

2. При условиях $\{Q_0'' > 0, |P_0''| \rightarrow \infty\}$ возможны также $gaeLG$ пучки. Это – новый тип eLG пучков. Возможны их различные модификации.

Если ν – вещественный положительный параметр, тогда $gaeLG$ пучки редуцируются к асимметричным фракционному [25] eLG пучкам.

Если свободный параметр ν является – вещественным целочисленным, то имеем обычные eLG пучки Сигмэна [15].

Однако радиальный индекс ν может быть и комплексным! Если его вещественная часть $\nu' < -(1+m)/2$, тогда приходим к новому типу eLG пучков, которые также переносят конечную мощность. При этом мнимая часть индекса ν не влияет на КИ векторной амплитуды. Обычные eLG и eLG являются их предельными случаями.

3. Кроме того, возможны пучки Лагерра, векторная амплитуда которых не содержит гауссиана. Тем не менее, при выполнении ограниченный $\{Q_0'' > 0, \nu' > -m/2\}$ такие пучки Лагерра являются физически реализуемыми, поскольку переносят конечную мощность.

Последние пучки эквивалентны циркулярным пучкам Куммера, которые изучались нами ранее [26]–[28].

Все обсуждаемые в настоящей работе пучки могут иметь децентровку (асимметрию), когда поперечные координаты приобретают комплексные смещения.

Наконец, все рассмотренные типы световых пучков могут иметь как круговую осевую симметрию $\propto e^{im\phi}$, так и обладать явной азимутальной асимметрией $\propto \cos(m\phi)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ананьев, Ю.А. Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев. – Москва: Наука, 1990. – 264 с.
2. *Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre – Gaussian laser modes* / L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw,

J.P. Woerdman // *Physical Review*. – 1992. – Vol. 45, № 11. – P. 8185–8189.

3. Allen, L. Spin-orbit coupling in free-space Laguerre – Gaussian light beams / L. Allen, V.E. Lembessis, M. Babiker // *Phys. Rev. A*. – 1996. – Vol. 53, № 5. – P. 2937–2939.

4. Goubau, G. On the guided propagation of electromagnetic wave beams / G. Goubau, F. Schwering // *IEEE*. – 1961. – Vol. 9, iss. 3. – P. 248–256.

5. Ярив, А. Квантовая электроника и нелинейная оптика / А. Ярив. – Москва: Советское Радио. – 1973. – 212 с.

6. Солимено, С. Дифракция и волноводное распространение оптического излучения / С. Солимено, Б. Крозиньяни, П. Ди Порто; пер. с англ. – Москва: Мир, 1989. – 664 с.

7. Tovar, A.A. Production and propagation of cylindrically polarized Laguerre-Gaussian laser beams / A.A. Tovar // *Journal Opt. Soc. Am. A*. – 1998. – Vol. 15, № 10. – P. 2705–2711.

8. Seshadri, S.R. Complex-argument Laguerre – Gauss beams: transport of mean-squared beam width / S.R. Seshadri // *Appl. Optics*. – 2005. – Vol. 34, № 34. – P. 7339–7373.

9. Seshadri, S.R. Radiation pattern of azimuthally varying scalar Laguerre – Gauss waves / S.R. Seshadri // *Journal Opt. Soc. Am. A*. – 2007. – Vol. 24, № 10. – P. 3348–3353.

10. Lewis, W.E. Maxwell-Gaussian beams with cylindrical polarization / William E. Lewis, Reeta Vyas // *Journal Opt. Soc. Am. A*. – 2014. – Vol. 31, № 7. – P. 1595–1603.

11. Пучки Лагерра – Гаусса с комплексным смещением / А.А. Ковалёв, В.В. Котляр, С.Г. Засканов, Д.С. Калинкина // *Компьютерная оптика*. – 2016. – Т. 40, № 1. – С. 5–11.

12. Ковалёв, А.А. Передача орбитального углового момента асимметричных пучков Лагерра – Гаусса диэлектрическим микрочастицам / А.А. Ковалёв, В.В. Котляр, А.П. Порфирьев // *Компьютерная оптика*. – 2016. – Т. 40, № 3. – С. 305–311.

13. April, A. Nonparaxial elegant Laguerre – Gaussian beams / A. April // *Optics Letters*. – 2008. – Vol. 33, № 12. – P. 1392–1394.

14. *Two-dimensional asymmetric Laguerre – Gaussian diffraction-free beams* / Wei-Ping Zhong [et al.] // *Physics Letters A*. – 2022. – Vol. 423. – P. 127818 (5pp).

15. Siegman, A.E. Hermite-gaussian function of complex argument as optical-beam eigenfunction / A.E. Siegman // *JOSA*. – 1973. – Vol. 63, № 9. – P. 1093–1094.

16. Гиргель, С.С. Циркулярные 3D световые пучки Куммера – Гаусса с непрерывным угловым индексом // С.С. Гиргель / *Проблемы физики, математики и техники*. – 2019. – № 1 (38). – С. 16–20.

17. *Bandres, M.A.* Circular beams / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega // *Optics Letters*. – 2008. – Vol. 33, № 2. – P. 177–179.
18. *Bandres, M.A.* Higher-order moments and overlaps of rotationally symmetric beams / M.A. Bandres, D. Lopez-Mago, J.C. Gutierrez-Vega // *Journal of Optics*. – 2010. – Vol. 12. – P. 015706.
19. *Справочник по специальным функциям*; под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 830 с.
20. *Magnus, W.* Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics / W. Magnus, F. Oberhettinger, R.P. Soni. – Springer Verlag – Berlin – Heidelberg GmbH. – Third Edition, 1966. – 516 p.
21. *Короленко, П.В.* Оптика когерентного излучения / П.В. Короленко. – Москва: МГУ, 1997. – 222 с.
22. *Meucci, R.* Polarization properties of low-order Laguerre – Gauss modes in a CO₂ laser / R. Meucci, A. Labate, M. Ciofini // *Quantum Semi-class.* – 1997. – Opt. Vol. 9. – L31–L3.
23. *Гиргель, С.С.* Смещенные поля Бесселя с различными азимутальными зависимостями / С.С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2022. – № 1 (50). – С. 14–18.
24. *Zauderer, E.* Complex argument Hermite-Gaussian and Laguerre – Gaussian beams / E. Zauderer // *Journal Opt. Soc. Am. A.* – 1986. – Vol. 3. – P. 465–469.
25. *Gutierrez-Vega, J.C.* Fractionalization of optical beams: II. Elegant Laguerre-Gaussian modes / J.C. Gutierrez-Vega // *Optics Express*. – 2007. – Vol. 15, iss. 10. – P. 6300–6313.
26. *Гиргель, С.С.* 3D световые пучки Куммера без гауссовой аподизации с переносимой конечной мощностью / С.С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2022. – № 2 (51). – С. 18–21.
27. *Гиргель, С.С.* Энергетические характеристики векторных циркулярных пучков Куммера конечной мощности. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2022. – № 4 (53). – С. 16–20.
28. *Гиргель, С.С.* Энергетические характеристики векторных циркулярных пучков Куммера конечной мощности. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2023. – № 1 (54). – С. 20–24.

Поступила в редакцию 30.09.2025.

Информация об авторах

Гиргель Сергей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА СЧИТЫВАНИЯ СМЕШАННЫХ ПРОПУСКАЮЩИХ ГОЛОГРАММ В ОПТИЧЕСКИ АКТИВНОМ ПЬЕЗОКРИСТАЛЛЕ $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ ПРОИЗВОЛЬНОГО СРЕЗА

А.В. Макаревич¹, В.Н. Навныко¹, С.М. Шандаров²,
Д.С. Блоцкая¹, Е.Ю. Цырулик¹, П.И. Ропот³

¹Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина

²Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

³Институт физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск

OPTIMIZATION OF THE READING PROCESS OF MIXED TRANSMISSION HOLOGRAMS IN AN OPTICALLY ACTIVE $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ PIEZOCRYSTAL OF ARBITRARY CUT

A.V. Makarevich¹, V.N. Naunya¹, S.M. Shandarov²,
D.S. Blotskaya¹, E.Yu. Tsyruлик¹, P.I. Ropot³

¹Mozyr State Pedagogical University named after I.P. Shamyakin

²Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics

³B.I. Stepanov Institute of Physics of NASB, Minsk

Аннотация. На основе ранее полученных экспериментальных данных выполнена теоретическая оптимизация процесса считывания смешанных пропускающих голограмм в кристалле $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ произвольного среза. Показано, что в отличие от случая чисто фазовых голограмм, учет амплитудной составляющей смешанной голографической решетки приводит к существенному изменению значений ориентационного угла кристалла и азимутов линейной поляризации считываемого голограмму пучка, при которых для фиксированного кристаллического среза достигается максимум дифракционной эффективности.

Ключевые слова: фоторефрактивный кристалл, кристалл ВТО, дифракционная эффективность, фазовая голограмма, смешанная голограмма, азимут поляризации, ориентационный угол.

Для цитирования: Оптимизация процесса считывания смешанных пропускающих голограмм в оптически активном пьезокристалле $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ произвольного среза / А.В. Макаревич, В.Н. Навныко, С.М. Шандаров, Д.С. Блоцкая, Е.Ю. Цырулик, П.И. Ропот // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 1 (66). – С. 12–20. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_12. – EDN: ZEBYEO

Abstract. Based on previously obtained experimental data, a theoretical optimization of the process of reading mixed transmission holograms in a $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ crystal of arbitrary cut was performed. It was shown that, unlike the case of purely phase holograms, taking into account the amplitude component of the mixed holographic grating leads to a significant change in the values of the crystal orientation angle and the azimuths of the linear polarization of the beam reading the hologram, at which the maximum diffraction efficiency is achieved for a fixed crystal cut.

Keywords: photorefractive crystal, BTO crystal, diffraction efficiency, phase hologram, mixed hologram, polarization azimuth, orientation angle.

For citation: Optimization of the reading process of mixed transmission holograms in an optically active $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ piezocrystal of arbitrary cut / A.V. Makarevich, V.N. Naunya, S.M. Shandarov, D.S. Blotskaya, E.Yu. Tsyruлик, P.I. Ropot // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 1 (66). – P. 12–20. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_12 (in Russian). – EDN: ZEBYEO

Введение

В настоящее время признанными фоторефрактивными материалами для формирования объемных голограмм выступают кубические оптически активные пьезокристаллы семейства силленита: силикосилленит висмута $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ (BSO), германосилленит висмута $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ (BGO) и титаносилленит висмута $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ (BTO), принадлежащие классу симметрии 23 и обладающие рядом полезных для голографии

оптических свойств и качеств, которые указаны, например, в [1]–[4]. В настоящее время такие нелинейные светочувствительные среды широко используются в голографической интерферометрии [5], томографии [6], голографической микроскопии [7], профилометрии [8], при формировании бездифракционных световых пучков [9] и в других областях. Это обуславливает интерес к изучению и оптимизации выходных энергетических характеристик голограмм, сформированных

в этих кристаллах, с целью наиболее эффективного их использования в различных практически важных приложениях.

Известно, что одной из важнейших энергетических характеристик голограмм выступает их дифракционная эффективность, которая ранее в силленитах традиционно определялась только для фазовой голографической решетки (см., например, [1], [2], [10]). Однако в работах [11], [12] было экспериментально и теоретически показано, что в кристалле ВТО помимо фазовых голограмм дополнительно формируются и амплитудные голографические решетки, что приводит к образованию результирующих фазово-амплитудных или смешанных голограмм [13]. Поэтому в данной работе с учетом экспериментально апробированной теоретической базы, полученной в [11], [12], уделено внимание теоретической оптимизации процесса считывания смешанных голограмм в кристалле ВТО произвольного среза за счет выбора оптимальных значений азимута линейной поляризации Ψ_0 считывающего голограмму пучка и угла пространственной ориентации θ кристалла, при которых для кристаллического образца с фиксированным срезом достигается наибольшая дифракционная эффективность η смешанных голографических решеток.

Отметим, что подобная теоретическая оптимизация с учетом модели чисто фазовых голограмм для кристаллов ВГО и ВСО выполнялась соответственно в [14] и [15]. Также исследование дифракционной эффективности смешанных голограмм в кристалле ВТО для семейства его различных симметрично эквивалентных кристаллических срезов $\{110\}$, $\{112\}$ и $\{111\}$ с возможностью построения указательной поверхности дифракционной эффективности в этом кристалле произвольного среза без учета определения оптимальных значений Ψ_0 и θ рассматривалась в [16].

В рамках настоящей работы показано, что учет амплитудной составляющей смешанной голографической решетки в кристалле ВТО приводит к трансформации указательной поверхности максимальных значений дифракционной эффективности голограмм, а также к изменению значений Ψ_0 и θ , при которых она образуется, по сравнению со случаем чисто фазовых голограмм, традиционно рассматриваемых в силленитах. Найденные значения Ψ_0 и θ с учетом амплитудной составляющей голограммы могут позволить оптимизировать работу оптических голографических устройств, выполненных на основе этого кристалла.

1 Теоретическая модель

В [11], [12] показано, что для теоретического описания экспериментальных данных по дифракции света на смешанных фазово-амплитудных голограммах, сформированных в кристалле ВТО, может быть использована следующая

система дифференциальных уравнений связанных волн:

$$\begin{cases} \frac{dR_{\perp}}{dz} = -\alpha R_{\perp} + \rho R_{\parallel} + \left(ie^{-i\delta} \kappa_1 - \frac{\kappa}{\cos\varphi} \right) S_{\perp} + ie^{-i\delta} \kappa_2 S_{\parallel}, \\ \frac{dR_{\parallel}}{dz} = -\rho R_{\perp} - \alpha R_{\parallel} + ie^{-i\delta} \kappa_3 S_{\perp} + \left(ie^{-i\delta} \kappa_4 - \frac{\kappa \cos 2\varphi}{\cos\varphi} \right) S_{\parallel}, \\ \frac{dS_{\perp}}{dz} = \left(ie^{i\delta} \kappa_1 - \frac{\kappa}{\cos\varphi} \right) R_{\perp} + ie^{i\delta} \kappa_3 R_{\parallel} - \alpha S_{\perp} + \rho S_{\parallel}, \\ \frac{dS_{\parallel}}{dz} = ie^{i\delta} \kappa_2 R_{\perp} + \left(ie^{i\delta} \kappa_4 - \frac{\kappa \cos 2\varphi}{\cos\varphi} \right) R_{\parallel} - \rho S_{\perp} - \alpha S_{\parallel}. \end{cases}$$

Здесь R_{\perp} и R_{\parallel} , S_{\perp} и S_{\parallel} – проекции векторных амплитуд опорной (R) и предметной (S) световых волн на направление, перпендикулярное к плоскости их распространения (\perp) и направление, лежащее в этой плоскости (\parallel); $\alpha = \alpha_0 / \cos\varphi$, где α_0 – амплитудный коэффициент поглощения кристалла, φ – брэгговский угол для опорной и предметной волн внутри кристалла (связан с углом Брэгга вне кристалла φ_0 законом Снеллиуса); $\rho = \rho_0 / \cos\varphi$, где ρ_0 – удельное вращение плоскости поляризации световой волны, характеризующее оптическую активность кристалла; κ_m – постоянные связи, посредством которых учитывается влияние электрооптического, обратного пьезоэлектрического и фотоупругого эффектов, при этом $m = 1, 2, 3, 4$; κ – параметр связи, характеризующий взаимодействие света с амплитудной голограммой, значение которого определено экспериментально в работе [11] и составило $2,1 \text{ м}^{-1}$; $\delta = \pi / 2$ – пространственный сдвиг фазовой составляющей голографической решетки относительно ее амплитудной составляющей, которая совпадает по фазе с записывающей голограмму интерференционной картиной; $z \in [0, d]$, где d – толщина кристаллического образца.

Определяя в соответствии с [11, 12] величину дифракционной эффективности голограммы как $\eta = I_S^{rec} / I_R^0 \cdot 100\%$, где I_S^{rec} – интенсивность восстановленной (reconstructed) предметной волны на выходе из кристалла, I_R^0 – интенсивность считывающего голограмму опорного пучка на входе в кристалл, и используя известное в голографии приближение $I \sim E^2$ (интенсивность I электромагнитной волны пропорциональна квадрату ее модуля вектора напряженности электрического поля \vec{E}), выражение для теоретического расчета дифракционной эффективности голограммы может быть записано в виде

$$\eta(d) = \frac{(S_{\perp}^{rec})^2 + (S_{\parallel}^{rec})^2}{(R_{\perp}^0)^2 + (R_{\parallel}^0)^2} \cdot 100\%.$$

Здесь R_{\perp}^0 и R_{\parallel}^0 – проекции векторной амплитуды восстанавливающей волны R на направление,

перпендикулярное к плоскости падения и лежащее в этой плоскости на входе в кристалл, а S_{\perp}^{rec} и S_{\parallel}^{rec} – соответствующие проекции векторной амплитуды восстановленной волны S на выходе из кристалла.

Для определения постоянных связи κ_m , значения которых зависят как от среза кристалла, так и от его пространственной ориентации [10], [15], свяжем, как показано на рисунке 1.1, рабочую и кристаллографическую системы координат с использованием углов Эйлера аналогично [16]. Рабочую систему координат будем характеризовать единичными векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, а кристаллографическую – единичными векторами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. При этом рабочая система координат определяет расположение кристаллического образца относительно плоскости распространения световых пучков и вектора голографической решетки $\vec{K} = \vec{k}_S - \vec{k}_R$, где \vec{k}_R и \vec{k}_S – волновые векторы опорной и предметной световых волн.

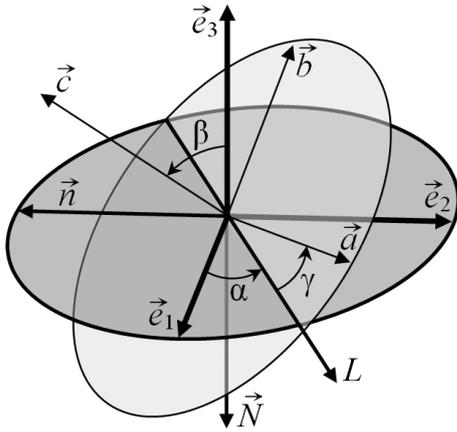


Рисунок 1.1 – Определение положения произвольного среза кристалла и его ориентации относительно плоскости распространения световых пучков с использованием углов Эйлера

Углом прецессии α (рисунок 1.1) зададим положение единичного вектора \vec{e}_1 относительно линии узлов L и характеризуем поворот кристаллографической системы координат относительно единичного вектора \vec{e}_3 , являющегося вектором внутренней нормали к лицевой грани кристалла. Углом нутации β определим величину поворота кристаллографической системы координат относительно рабочей системы координат вокруг оси L , а углом собственного вращения γ будем характеризовать поворот самой кристаллографической системы координат относительно ее оси \vec{c} . При этом будем считать, что ориентация плоскости среза кристалла в пространстве характеризуется единичным вектором внешней нормали \vec{N} к его лицевой грани ($\vec{N} = -\vec{e}_3$).

Направим единичный вектор \vec{n} , указывающий направление вектора \vec{K} , вдоль вектора $-\vec{e}_2$. Тогда его координаты в кристаллографической системе в общем виде будут определяться выражениями

$$\begin{aligned} n_1 &= \sin \theta \cos \gamma - \cos \theta \cos \beta \sin \gamma, \\ n_2 &= -\sin \theta \sin \gamma - \cos \theta \cos \beta \cos \gamma, \\ n_3 &= \cos \theta \sin \beta. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь учтено, что угол α равен ориентационному углу кристалла θ , взятому с противоположным знаком ($\alpha = -\theta$).

Связь ортонормированных векторов рабочей и кристаллографической систем координат определяется выражениями

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= l_1 \vec{a} + l_2 \vec{b} + l_3 \vec{c}, \\ \vec{e}_2 &= m_1 \vec{a} + m_2 \vec{b} + m_3 \vec{c}, \\ \vec{e}_3 &= k_1 \vec{a} + k_2 \vec{b} + k_3 \vec{c}, \end{aligned}$$

при этом величины k_j, l_j, m_j ($j = 1, 2, 3$) имеют вид:

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos \theta \cos \gamma + \sin \gamma \sin \theta \cos \beta, \\ l_2 &= -\cos \theta \sin \gamma + \cos \gamma \sin \theta \cos \beta, \\ l_3 &= -\sin \theta \sin \beta, \\ m_1 &= -\sin \theta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \theta \cos \beta, \\ m_2 &= \sin \theta \sin \gamma + \cos \gamma \cos \theta \cos \beta, \\ m_3 &= -\cos \theta \sin \beta, \\ k_1 &= \sin \gamma \sin \beta, \\ k_2 &= \cos \gamma \sin \beta, \\ k_3 &= \cos \beta. \end{aligned}$$

Здесь, как и в (1.1), проведена замена $\alpha = -\theta$.

Выражения для определения постоянных связи применительно к наклонным пропускающим голограммам могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= -\kappa_0 \{b_{11}l_1^2 + b_{22}l_2^2 + b_{33}l_3^2 + \\ &+ 2(b_{12}l_1l_2 + b_{13}l_1l_3 + b_{23}l_2l_3)\} \sec \varphi, \\ \kappa_2 &= -\kappa_0 \{P + Q \operatorname{tg} \varphi\}, \\ \kappa_3 &= -\kappa_0 \{P - Q \operatorname{tg} \varphi\}, \\ \kappa_4 &= -\kappa_0 \{b_{11}(m_1^2 \cos^2 \varphi - k_1^2 \sin^2 \varphi) + \\ &+ b_{22}(m_2^2 \cos^2 \varphi - k_2^2 \sin^2 \varphi) + \\ &+ b_{33}(m_3^2 \cos^2 \varphi - k_3^2 \sin^2 \varphi) + \\ &+ 2[b_{12}(m_1m_2 \cos^2 \varphi - k_1k_2 \sin^2 \varphi) + \\ &+ b_{13}(m_1m_3 \cos^2 \varphi - k_1k_3 \sin^2 \varphi) + \\ &+ b_{23}(m_2m_3 \cos^2 \varphi - k_2k_3 \sin^2 \varphi)]\} \sec \varphi. \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} P &= b_{11}l_1m_1 + b_{22}l_2m_2 + b_{33}l_3m_3 + b_{12}(l_1m_2 + l_2m_1) + \\ &+ b_{13}(l_1m_3 + l_3m_1) + b_{23}(l_2m_3 + l_3m_2), \\ Q &= b_{11}l_1k_1 + b_{22}l_2k_2 + b_{33}l_3k_3 + b_{12}(l_1k_2 + l_2k_1) + \end{aligned}$$

$$+ b_{13}(l_1 k_3 + l_3 k_1) + b_{23}(l_2 k_3 + l_3 k_2),$$

$$\kappa_0 = \pi n^3 |\vec{E}_{sc}| / (2\lambda),$$

где n – показатель преломления невозмущенного кристалла; λ – длина волны лазерного излучения; $\vec{E}_{sc} = \vec{n}E_{sc}$ – векторная амплитуда напряженности электрического поля пространственного заряда (space charge). Изменение компонент B_{mn} обратного тензора диэлектрической проницаемости кубического фоторефрактивного кристалла под действием этого поля при учёте обратного пьезоэлектрического и фотоупругого эффектов имеет вид [10], [15], [17]:

$$\Delta B_{mn} = b_{mn} E_{sc}.$$

Значения компонент b_{mn} определяются в соответствии с выражениями

$$\begin{aligned} b_{11} &= p_1 n_1 R_1 + p_2 n_2 R_2 + p_3 n_3 R_3, \\ b_{22} &= p_1 n_2 R_2 + p_2 n_3 R_3 + p_3 n_1 R_1, \\ b_{33} &= p_1 n_3 R_3 + p_2 n_1 R_1 + p_3 n_2 R_2, \\ b_{12} &= p_4 (n_1 R_2 + n_2 R_1) + m_3, \\ b_{13} &= p_4 (n_1 R_3 + n_3 R_1) + m_2, \\ b_{23} &= p_4 (n_2 R_3 + n_3 R_2) + m_1, \\ b_{21} &= b_{12}, \quad b_{31} = b_{13}, \quad b_{32} = b_{23}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= \gamma_{11} Q_1 + \gamma_{12} Q_2 + \gamma_{13} Q_3, \\ R_2 &= \gamma_{21} Q_1 + \gamma_{22} Q_2 + \gamma_{23} Q_3, \\ R_3 &= \gamma_{31} Q_1 + \gamma_{32} Q_2 + \gamma_{33} Q_3, \\ \gamma_{11} &= (\Gamma_{22} \Gamma_{33} - \Gamma_{23}^2) / D, \\ \gamma_{22} &= (\Gamma_{11} \Gamma_{33} - \Gamma_{13}^2) / D, \quad \gamma_{33} = (\Gamma_{11} \Gamma_{22} - \Gamma_{12}^2) / D, \\ \gamma_{12} &= \gamma_{21} = (\Gamma_{13} \Gamma_{23} - \Gamma_{12} \Gamma_{33}) / D, \\ \gamma_{13} &= \gamma_{31} = (\Gamma_{12} \Gamma_{23} - \Gamma_{13} \Gamma_{22}) / D, \\ \gamma_{23} &= \gamma_{32} = (\Gamma_{12} \Gamma_{13} - \Gamma_{11} \Gamma_{23}) / D, \\ D &= \Gamma_{11} (\Gamma_{22} \Gamma_{33} - \Gamma_{23}^2) - \Gamma_{22} \Gamma_{13}^2 - \Gamma_{33} \Gamma_{12}^2 + 2 \Gamma_{12} \Gamma_{13} \Gamma_{23}, \\ \Gamma_{11} &= c_1 n_1^2 + c_3 (n_2^2 + n_3^2), \quad \Gamma_{22} = c_1 n_2^2 + c_3 (n_1^2 + n_3^2), \\ \Gamma_{33} &= c_1 n_3^2 + c_3 (n_1^2 + n_2^2), \quad \Gamma_{12} = \Gamma_{21} = n_1 n_2 (c_2 + c_3), \\ \Gamma_{13} &= \Gamma_{31} = n_1 n_3 (c_2 + c_3), \quad \Gamma_{23} = \Gamma_{32} = n_2 n_3 (c_2 + c_3), \\ Q_1 &= 2e_0 n_2 n_3, \quad Q_2 = 2e_0 n_1 n_3, \quad Q_3 = 2e_0 n_1 n_2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В формулах (1.2), (1.3) введены следующие обозначения отличных от нуля и равных между собой компонент электрооптического тензора (r^S) механически зажатого кристалла, пьезоэлектрического тензора (e), тензора фотоупругости (p^E) и тензора упругих постоянных (c^E):

$$\begin{aligned} r_{123}^S &= r_{132}^S = r_{213}^S = r_{231}^S = r_{312}^S = r_{321}^S \equiv r, \\ e_{123} &= e_{132} = e_{213} = e_{231} = e_{312} = e_{321} \equiv e_0, \\ p_{11}^E &= p_{22}^E = p_{33}^E \equiv p_1, \quad p_{12}^E = p_{23}^E = p_{31}^E \equiv p_2, \\ p_{13}^E &= p_{21}^E = p_{32}^E \equiv p_3, \quad p_{44}^E = p_{55}^E = p_{66}^E \equiv p_4, \\ c_{11}^E &= c_{22}^E = c_{33}^E \equiv c_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{12}^E &= c_{13}^E = c_{21}^E = c_{23}^E = c_{31}^E = c_{32}^E \equiv c_2, \\ c_{44}^E &= c_{55}^E = c_{66}^E \equiv c_3. \end{aligned}$$

В данном случае для компонент тензоров четвертого ранга p^E и c^E использованы двухиндексные обозначения [18], [19].

Для отображения условий взаимодействия световых волн в кристалле ВТО, принятых в теоретических расчетах, на рисунке 1.2 в качестве примера показано положение кристаллической пластинки среза $(\bar{1}\bar{1}0)$ толщиной d_0 относительно плоскости распространения опорного R и предметного S световых пучков, связанной с рабочей системой координат, характеризуемой единичными векторами \vec{e}_1 , \vec{e}_2 и \vec{e}_3 . Здесь φ_0 – угол Брэгга вне кристалла, а Ψ_0 – азимуты линейной поляризации, задающие направления колебаний векторов напряженности электрического поля \vec{R}_0 и \vec{S}_0 опорного и предметного пучков.

В этом случае в соответствии с рисунком 1.1 для задания указанного кристаллического среза углы нутации β и собственного вращения γ составляют соответственно 90° и 45° . Угол $\theta = -\alpha$ и его отсчет производится от кристаллографического направления $[001]$ к вектору голографической решетки \vec{K} при вращении кристалла вокруг оси OO' , направленной вдоль векторов \vec{e}_3 и \vec{N} , указанных на рисунке 1.1.

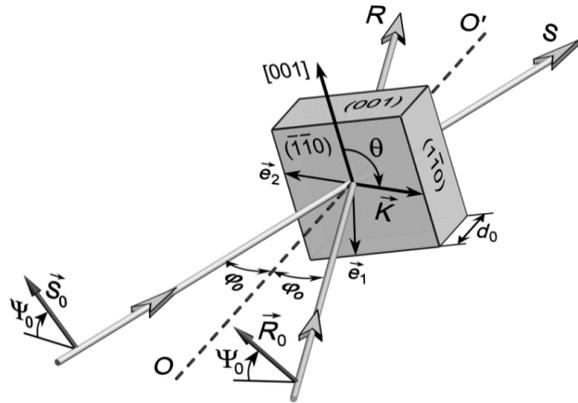


Рисунок 1.2 – Ориентация кристалла ВТО среза $(\bar{1}\bar{1}0)$ относительно плоскости распространения световых пучков

2 Результаты и обсуждение

Для теоретического изучения зависимости максимальных значений дифракционной эффективности голограмм от среза кристалла ВТО использовались его материальные параметры для длины волны лазерного излучения $\lambda = 632,8$ нм, приведенные в таблице 2.1. Кроме того, значения φ_0 и d выбирались равными 12° и $7,7$ мм, в соответствии с [11], при $E_{SC} = 9 \cdot 10^4$ В/м.

Таблица 2.1 – Физические параметры кристалла ВТО для $\lambda = 632,8$ нм

Физическая величина	Возможное обозначение	Числовое значение	Единицы измерения	Источники литературы
Показатель преломления	n	2,58	–	[20]–[22]
Электрооптический коэффициент	r, r_{41} или r_{231}	$-4,75 \cdot 10^{-12}$	м/В	
Модули упругости	c_1, C_{11} или C_{1111}	$13,7 \cdot 10^{10}$	Н/м ²	
	c_2, C_{12} или C_{1122}	$2,8 \cdot 10^{10}$	Н/м ²	
	c_3, C_{44} или C_{2323}	$2,6 \cdot 10^{10}$	Н/м ²	
Пьезоэлектрический коэффициент	e_0, e_{14} или e_{123}	1,1	Кл/м ²	[20]
Фотоупругие постоянные	p_1, p_{11} или p_{1111}	-0,136	–	
	p_2, p_{12} или p_{1122}	-0,103	–	
	p_3, p_{13} или p_{1133}	-0,091	–	
	p_4, p_{44} или p_{2323}	-0,0134	–	
Амплитудный коэффициент поглощения	α_0	38,2	м ⁻¹	измерено на образце ВТО
Удельное вращение плоскости поляризации	ρ_0	112	рад/м	

Поверхность, иллюстрирующая зависимость максимальных значений дифракционной эффективности η **фазовых** голограмм ($\kappa = 0$) от задаваемого углами Эйлера γ и β среза кристалла, представлена на рисунке 2.1.

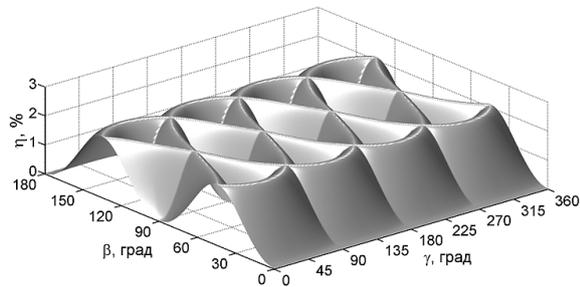


Рисунок 2.1 – Зависимость максимальных значений дифракционной эффективности η **фазовых** голограмм от среза кристалла ВТО, определяемого углами Эйлера γ и β

Из численного анализа представленной поверхности следует, что при выбранных условиях теоретических расчетов наиболее высокие значения дифракционной эффективности фазовых голографических решеток в рассматриваемом случае могут быть достигнуты в эквивалентно симметричных кристаллических срезах семейств $\{110\}$ и $\{112\}$ и составляют 2,1%.

Если представить зависимость $\eta(\gamma, \beta)$ в сферической системе координат (рисунок 2.2), откладывая вдоль радиус-вектора отрезок, равный по величине η , можно наблюдать, что образующаяся указательная поверхность в соответствии с принципом Неймана включает полное сочетание эле-

ментов симметрии кристаллического многогранника класса симметрии 23. При этом поверхности на рисунках 2.1 и 2.2 соответствуют аналогичным поверхностям, приведенным в [14] и [15] для фазовых голограмм в кристаллах ВГО и BSO.

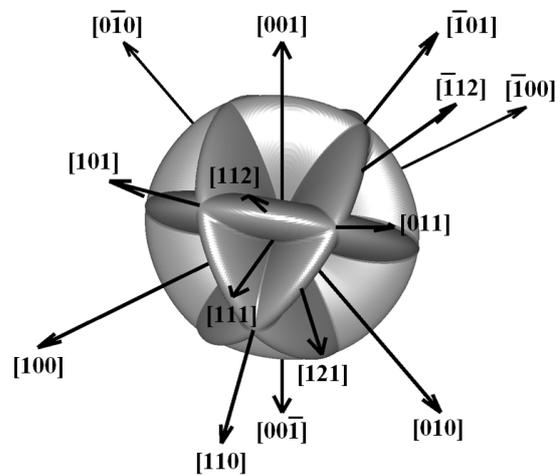


Рисунок 2.2 – Указательная поверхность зависимости максимальных значений дифракционной эффективности η **фазовых** голограмм от выбора среза кристалла ВТО

Вычисленные зависимости азимута линейной поляризации Ψ_0 считывающего голограмму пучка и ориентационного угла θ кристалла от углов γ и β , при которых образуются поверхности, представленные на рисунках 2.1 и 2.2, приведены на рисунке 2.3, из которого можно видеть некоторый периодический характер изменения указанных величин. При этом важным представляется

отметить, что для получения поверхностей на рисунках 2.1 и 2.2 достаточно изменения угла θ в пределах лишь от 0 до 180° (рисунок 2.3, б), поскольку при дальнейшем изменении θ от 180° до 360° наблюдаются аналогичные графики.

Иначе обстоит дело при учете амплитудной составляющей голографической решетки ($\kappa = 2,1 \text{ м}^{-1}$). В этом случае установлено, что максимум дифракционной эффективности также достигается в кристаллах среза $\{110\}$ и $\{112\}$ и составляет 2,6%. Однако для некоторых срезов из указанных семейств максимальное значение дифракционной эффективности имеет место уже только при $\theta \in (180^\circ; 360^\circ)$. Результаты теоретического анализа для зависимостей $\eta(\gamma, \beta)$, полученных при $\theta \in [0; 180^\circ]$ и $\theta \in (180^\circ; 360^\circ)$ представлены соответственно на фрагментах а и б рисунка 2.4. При этом на фрагменте 2.4, в приведена поверхность $\eta(\gamma, \beta)$, образуемая в результате наложения указанных графиков.

Из этого рисунка можно видеть, что в случае учета амплитудной составляющей смешанной голографической решетки при проведении оптимизации дифракционной эффективности следует рассматривать все возможные значения ориентационного угла кристалла, а не только в пределах от 0 до 180° , как это было достаточно при использовании модели чисто фазовых голограмм.

Если представить полученные результаты в сферической системе координат с привязкой к кристаллографическим направлениям (рисунок 2.5), то на фрагментах 2.5, а ($\theta \in [0; 180^\circ]$) и 2.5, б ($\theta \in (180^\circ; 360^\circ)$) можно по отдельности видеть указательные поверхности, внешняя симметрия которых ниже точечной группы симметрии кристаллического многогранника ВТО. Однако при их совмещении (рисунок 2.5, в) внешняя симметрия образуемой указательной поверхности повышается и, в соответствии с принципом Неймана, включает все элементы симметрии, присущие точечной группе 23.

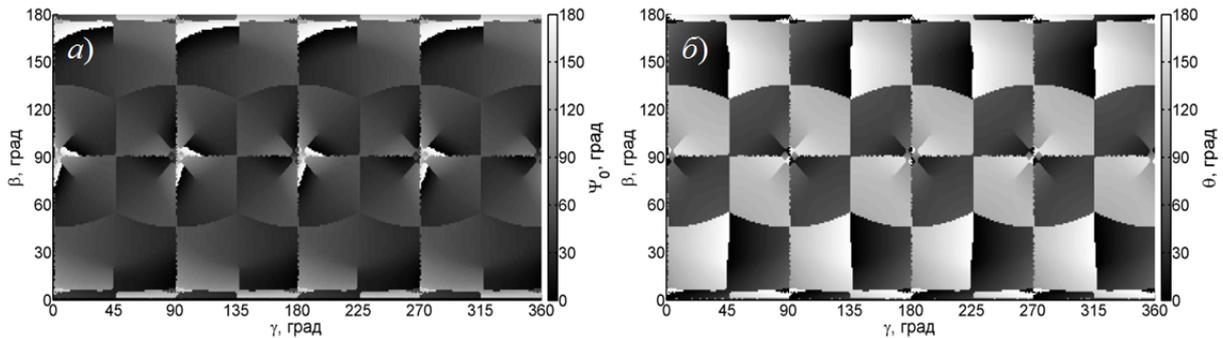


Рисунок 2.3 – Зависимости значений $\Psi_0(\gamma, \beta)$ (фрагмент а) и $\theta(\gamma, \beta)$ (фрагмент б), использованные для нахождения максимальных значений дифракционной эффективности η фазовых голограмм в кристалле ВТО

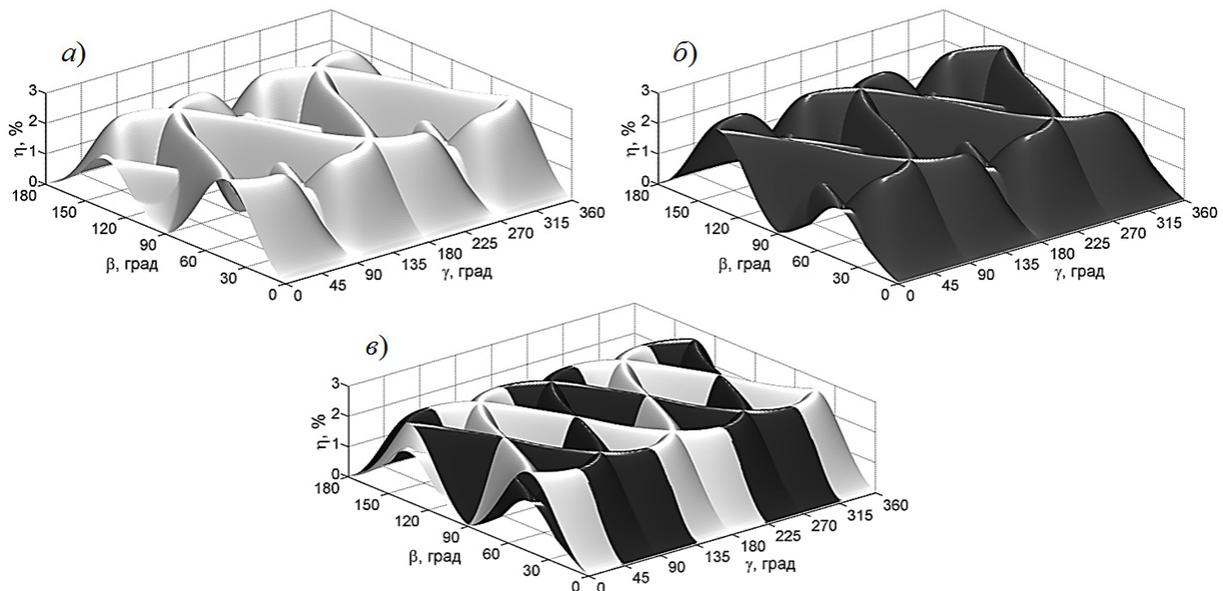


Рисунок 2.4 – Зависимость максимальных значений дифракционной эффективности η смешанных голограмм от среза кристалла ВТО, определяемого углами Эйлера γ и β : а – при $\theta \in [0; 180^\circ]$; б – при $\theta \in (180; 360^\circ)$; в – в случае наложения зависимостей, представленных на фрагментах а и б, для получения оптимизированной по кристаллическому срезу зависимости $\eta(\gamma, \beta)$

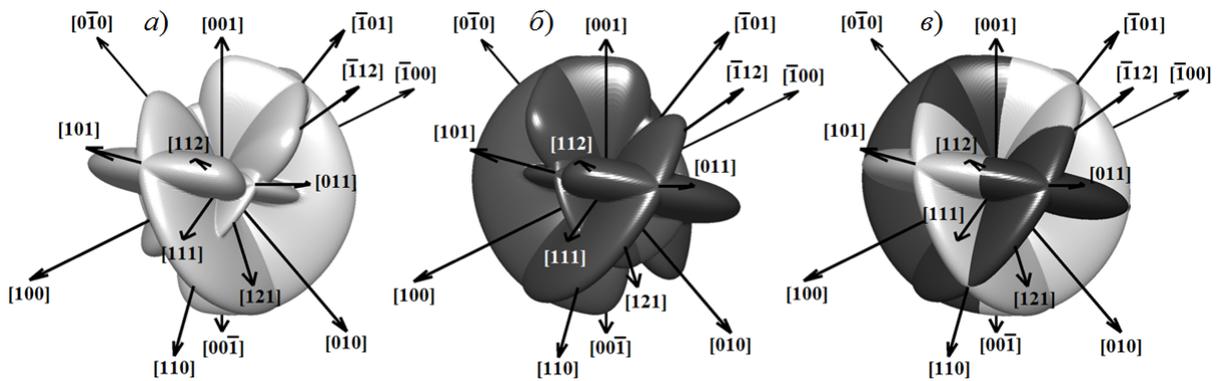


Рисунок 2.5 – Указательные поверхности оптимизированных значений дифракционной эффективности η смешанных голограмм от выбора среза кристалла ВТО: *a* – при $\theta \in [0; 180^\circ]$; *b* – при $\theta \in (180; 360^\circ)$; *v* – при наложении указательных поверхностей представленных на фрагментах *a* и *b*

Таблица 2.2 – Соответствие кристаллических срезов и углов θ для достижения наибольших значений дифракционной эффективности смешанных голограмм в кристалле ВТО

$\theta \in [0; 180^\circ]$	$\theta \in (180^\circ; 360^\circ)$	$\theta \in [0; 180^\circ]$ и $\theta \in (180^\circ; 360^\circ)$
(101), $(\bar{1}01)$, $(01\bar{1})$, $(0\bar{1}\bar{1})$, (211), $(\bar{2}11)$, $(2\bar{1}\bar{1})$, $(\bar{2}\bar{1}\bar{1})$, $(12\bar{1})$, $(\bar{1}2\bar{1})$, $(1\bar{2}\bar{1})$, $(\bar{1}\bar{2}\bar{1})$	(011), $(0\bar{1}\bar{1})$, $(10\bar{1})$, $(\bar{1}0\bar{1})$, (121), $(\bar{1}21)$, $(1\bar{2}\bar{1})$, $(\bar{1}\bar{2}\bar{1})$, $(21\bar{1})$, $(\bar{2}1\bar{1})$, $(2\bar{1}\bar{1})$, $(\bar{2}\bar{1}\bar{1})$	(110), $(\bar{1}10)$, $(1\bar{1}0)$, $(\bar{1}\bar{1}0)$
(112), $(\bar{1}\bar{1}2)$, $(1\bar{1}\bar{2})$, $(11\bar{2})$, $(\bar{1}\bar{1}\bar{2})$, $(\bar{1}\bar{1}\bar{2})$, $(1\bar{1}\bar{2})$, $(\bar{1}\bar{1}\bar{2})$		

Таким образом, при оптимизации дифракционной эффективности смешанных голограмм по срезу кристалла ВТО для получения достоверных результатов, параметр θ следует рассматривать как изменяющийся в пределах $[0; 360^\circ)$.

На основании использованной теоретической модели и выполненного анализа поверхностей на рисунках 2.4 и 2.5, в первом столбце таблицы 2.2 приведены обозначения кристаллических срезов, в которых дифракционная эффективность смешанных голограмм достигает максимальных значений при $\theta \in [0; 180^\circ]$. Во втором столбце этой таблицы перечислены срезы, в которых максимумы эффективности дифракции смешанных голографических решеток могут быть достигнуты только исключительно при $\theta \in (180^\circ; 360^\circ)$. Третий столбец таблицы содержит информацию о срезах кристалла, в которых аналогичные результаты имеют место уже при двух ориентационных углах, то есть при $\theta \in [0; 180^\circ]$ и $\theta \in (180^\circ; 360^\circ)$.

Что касается, например, срезов (112) и $(\bar{1}\bar{1}2)$, которые указаны соответствующими кристаллографическими направлениями [112] и $[\bar{1}\bar{1}2]$ на рисунке 2.5, а также приведены в первом столбце таблицы 2.2 после горизонтальной черты, то из фрагмента 2.5, *v* можно видеть, что по ним происходит условная склейка «белой» и

«черной» составляющих результирующей указательной поверхности. Это обусловлено тем, что максимальная дифракционная эффективность в этих срезах имеет место при углах θ , равных 0 или 180° . Данная ситуация также справедлива и для всех других срезов, которые приведены ниже горизонтальной черты в первом столбце таблицы 2.2, но не указаны на рисунке 2.5 кристаллографическими направлениями во избежание появления на нем дополнительных нагромождающих построений. Подтверждением сказанному, например, могут служить результаты работы [16], в которых показано, что в кристалле ВТО среза $(\bar{1}\bar{1}\bar{2})$ максимальная дифракционная эффективность достигается при $\theta = 180^\circ$.

Также ранее, например, в работе [23] было показано, что наибольшие значения дифракционной эффективности голограмм в кристалле ВТО среза $(\bar{1}\bar{1}0)$ при изменении его толщины от 0 до 20 мм достигаются при двух ориентационных углах, один из которых лежит в пределах от 0 до 180° , а второй – от 180° до 360° . При этом значения самих ориентационных углов для каждой толщины кристалла могут несколько изменяться, но из указанных пределов не «выходят». Данный факт также соответствует рисунку 2.5 и таблице 2.2.

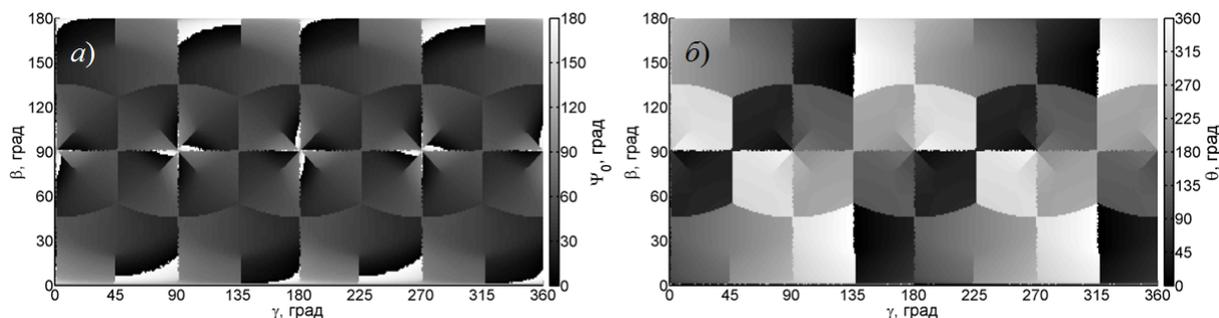


Рисунок 2.6 – Зависимости значений $\Psi_0(\gamma, \beta)$ (фрагмент *a*) и $\theta(\gamma, \beta)$ (фрагмент *б*) для формирования оптимизированных зависимостей дифракционной эффективности η смешанных голограмм в кристалле ВТО

В свою очередь, зависимости $\Psi_0(\gamma, \beta)$ и $\theta(\gamma, \beta)$, при которых могут быть реализованы поверхности, представленные на рисунках 2.4, *в* и 2.5, *в*, приведены на рисунке 2.6.

При сравнении результатов, представленных на рисунках 2.3 и 2.6, оказывается хорошо заметно, что зависимости $\Psi_0(\gamma, \beta)$ для случая чисто фазовых (рисунок 2.3, *a*) и смешанных (рисунок 2.6, *a*) голограмм имеют существенные различия. При этом, для зависимостей $\theta(\gamma, \beta)$, как уже было указано ранее, в случае смешанных голограмм поляризационная оптимизация дифракционной эффективности в кристалле ВТО произвольного среза может быть достигнута только при изменении значений угла θ в пределах от 0 до 360° (рисунок 2.6, *б*), в отличие от случая фазовых голограмм, когда для этой оптимизации достаточно изменения ориентационного угла кристалла в пределах от 0 до 180° .

Следовательно, учет амплитудной составляющей смешанной голографической решетки в кристалле ВТО является обязательным условием в широком диапазоне срезов кристалла при проведении оптимизации с целью повышения эффективности дифракции световых волн в голографических устройствах, функционирующих на основе этого представителя силленитов.

Заключение

Таким образом, при использовании теоретической модели смешанных голограмм, формируемых в оптически активном пьезокристалле ВТО, установлены кристаллические срезы семейства $\{110\}$ и $\{112\}$, в которых максимум дифракционной эффективности голографических решеток может быть достигнут только при значениях ориентационного угла кристалла $\theta \in (180^\circ; 360^\circ)$. При этом в пренебрежении амплитудной составляющей голограммы для достижения максимальной дифракционной эффективности оказывается достаточно изменения угла θ в пределах только от 0 до 180° .

Определены сочетания эквивалентно симметричных кристаллических срезов $\{110\}$, $\{112\}$

и углов θ , при которых достигаются максимальные значения поляризационно оптимизированной дифракционной эффективности смешанных голографических решеток в указанном кристалле.

Показано, что, при учете амплитудной составляющей смешанной голограммы, значения азимутов линейной поляризации считывающего пучка, при которых имеет место максимальная эффективность дифракции, могут существенно отличаться от аналогичных значений при рассмотрении модели чисто фазовых голограмм.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров, М.П. Фоторефрактивные кристаллы в когерентной оптике / М.П. Петров, С.И. Степанов, А.В. Хоменко. – СПб.: Наука. С.-Петербургское отд-ние, 1992. – 320 с.
2. Solyman, L. The physics and applications of photorefractive materials / L. Solyman, D.J. Webb, A. Grunnet-Jepsen. – Oxford: Clarendon Press, 1996. – 494 p.
3. Panchenko, T.V. Doped sillenite crystals / T.V. Panchenko, N.A. Truseeva, K.Yu. Strelets // *Funct. Mater.* – 2005. – Vol. 12, № 4. – P. 707–713.
4. Polarization effects at two-beam interaction on reflection holographic gratings in sillenite crystals / S.M. Shandarov [et al.] // *Laser Physics.* – 2007. – Vol. 17, № 4. – P. 482–490.
5. Holographic interferometric vibration measurement based on photorefractive crystal in diffusion mode / J. Gao [et al.] // *Optics Express.* – 2024. – Vol. 32, № 17. – P. 30100–30113.
6. Tao, L. Study of material properties important for an optical property modulation-based radiation detection method for positron emission tomography / L. Tao, H.M. Daghighian, C.S. Levin // *Journal of Medical Imaging.* – 2017. – Vol. 4, № 1. – P. 011010-1–011010-7.
7. Photorefractive digital holographic microscopy applied in microstructures analysis / I.V. Brito [et al.] // *Optics Communications.* – 2013. – Vol. 286, № 1. – P. 103–110.
8. Gloria, I.B. Generation and practical controlling of adaptative structured photorefractive moiré

- patterns for optical metrology applications / I.B. Glória, G.N. de Oliveira, P.A.M. dos Santos // *Applied Optics*. – 2024. – Vol. 63, № 33. – P. 8717–8722.
9. *Optical reconstruction of non-diffracting beams via photorefractive holography* / T.A. Vieira [et al.] // *Applied Physics B*. – 2017. – Vol. 123, № 4. – P. 134–143.
10. *Шепелевич, В.В.* Запись и считывание голограмм в кубических гиротропных фоторефрактивных кристаллах (Обзор) / В.В. Шепелевич // *ЖПС*. – 2011. – Т. 78, № 4. – С. 493–515.
11. *Шепелевич, В.В.* Смешанные пропускающие голограммы в фоторефрактивном пьезокристалле $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ / В.В. Шепелевич, А.В. Макаревич, С.М. Шандаров // *Письма в ЖТФ*. – 2014. – Т. 40, № 22. – С. 83–89.
12. *Макаревич, А.В.* Выходные характеристики смешанных голограмм в кристалле $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ среза $(\bar{1}\bar{1}0)$. Теория и эксперимент / А.В. Макаревич, В.В. Шепелевич, С.М. Шандаров // *Журнал технической физики*. – 2017. – Т. 87, № 5. – С. 766–771.
13. *Montemezzani, G.* Light diffraction at mixed phase and absorption gratings in anisotropic media for arbitrary geometries / G. Montemezzani, M. Zgonik // *Phys. Rev. E*. – 1997. – Vol. 55, №1. – P. 1035–1047.
14. *Diffractive properties of volume phase gratings in photorefractive sillenite crystals of arbitrary cut under the influence of an external electric field* / N.C. Deliolanis [et al.] // *Phys. Rev. E*. – 2003. – Vol. 68, № 5. – P. 056602-1–17.
15. *Шепелевич, В.В.* Голография в фоторефрактивных оптически активных кристаллах / В.В. Шепелевич. – Минск: Изд. центр БГУ, 2012. – 254 с.
16. *Дифракционная эффективность смешанных пропускающих голограмм в фоторефрактивном оптически активном пьезокристалле $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ произвольного среза* / А.В. Макаревич [и др.] // *Кристаллография*. – 2019. – Т. 64, № 5. – С. 769–775.
17. *Шандаров, С.М.* Изменение тензора диэлектрической проницаемости в кубических фоторефрактивных пьезоэлектрических кристаллах под действием электрического поля голографической решетки / С. М. Шандаров, В. В. Шепелевич, Н. Д. Хатьков // *Опт. и спектр.* – 1991. – Т. 70, № 5. – С. 1068–1073.
18. *Сиротин, Ю.И.* Основы кристаллофизики / Ю.И. Сиротин, М.П. Шаскольская. – Москва: Наука, 1975. – 680 с.
19. *Най, Дж.* Физические свойства кристаллов / Дж. Най. – Москва: Мир, 1975. – 386 с.
20. *Energy exchange optimization in (110)-cut BTO crystal by choice of interacting waves polarization* / A.E. Zagorskiy [et al.] // *Opt. mat.* – 2001. – Vol. 18, № 1. – P. 131–133.
21. *Photorefractive properties of $(\bar{1}\bar{1}0)$ and (111) -cut sillenite crystals when external electric field is applied along the direction of the optimum diffraction efficiency* / N.C. Deliolanis [et al.] // *Appl. Phys. B*. – 2002. – Vol. 75, № 1. – P. 67–73.
22. *Diffusion recording in photorefractive sillenite crystals: an analytical approach for engineering purposes* / E. Shamonina [et al.] // *Opt. Comm.* – 2000. – Vol. 180, № 1–3. – P. 183–190.
23. *Шепелевич, В.В.* Оптимизация выходных характеристик смешанных голограмм в фоторефрактивном пьезокристалле ВТО среза $(\bar{1}\bar{1}0)$ / В.В. Шепелевич, А.В. Макаревич, С.М. Шандаров // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2014. – № 3 (20). – С. 42–46.
- Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (договор от 22.03.2021 №1410/2021) в рамках Государственной программы научных исследований № 6 «Фотоника и электроника для инноваций» на 2021–2025 гг. (задание 6.1.14).*

Поступила в редакцию 17.10.2025.

Информация об авторах

Макаревич Александр Викторович – к.ф.-м.н., доцент
Навныко Валерий Николаевич – к.ф.-м.н., доцент
Шандаров Станислав Михайлович – д.ф.-м.н., профессор
Блоцкая Дарья Степановна – преподаватель
Цырулик Екатерина Юрьевна – студентка
Ропот Петр Иосифович – к.ф.-м.н., доцент

УДК 530.1

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_21

EDN: VNJBUU

О ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ СОСТОЯНИЯ АДС ЧЁРНЫХ ДЫР

О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ON THE THERMODYNAMIC EQUATIONS OF STATE OF AdS BLACK HOLES

V.U. Novikava, G.Yu. Tyumenkov

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Рассмотрены термодинамические уравнения состояния (УС) вида $P = P(V, T)$ с внутренней параметризацией горизонтом событий r_+ для чёрных дыр Райсснера – Нордстрёма (РН) и Борна – Инфельда (БИ) в пространстве анти-де Ситтера (АДС). Для РН-АДС чёрных дыр также проанализирован случай присутствия тёмной материи. Приведены критические параметры уравнений состояния и построены графики критических изотерм.

Ключевые слова: уравнение состояния, критические параметры, пространство анти-де Ситтера, чёрная дыра Райсснера – Нордстрёма, чёрная дыра Борна – Инфельда, тёмная материя.

Для цитирования: Новикова, О.В. О термодинамических уравнениях состояния АДС чёрных дыр / О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 1 (66). – С. 21–24. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_21. – EDN: VNJBUU

Abstract. The thermodynamic equations of state (EOS) of the form $P = P(V, T)$ with internal parameterization by the event horizon r_+ for Reissner – Nordström (RN) and Born – Infeld (BI) black holes in anti-de Sitter (AdS) space are considered. For RN-AdS black holes, the presence of dark matter is also analyzed. Critical parameters of the equations of state are presented and critical isotherms are plotted.

Keywords: equation of state, critical parameters, anti-de Sitter space, Reissner – Nordström black hole, Born – Infeld black hole, dark matter.

For citation: Novikava, V.U. On the thermodynamic equations of state of AdS black holes / V.U. Novikava, G.Yu. Tyumenkov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 1 (66). – P. 21–24. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_12 (in Russian). – EDN: VNJBUU

Введение

Начало термодинамической теории чёрных дыр было положено в работах Якова Бекенштейна [1] и Стивена Хокинга [2] в 70-х годах XX века. В 80-х годах появилась статья С. Хокинга и Д. Пэйджа [3], в которой термодинамика чёрных дыр обобщалась на пространство анти-де-Ситтера (АДС), играющее важную роль в ОТО, так как возникает при максимально симметричном решении уравнений Эйнштейна в вакууме с отрицательной космологической постоянной Λ . Случай наличия у чёрных дыр электрического заряда впервые был рассмотрен в работе [4], где авторы также обнаружили аналогию между фазовыми диаграммами АДС чёрных дыр и ван-дер-ваальсовской жидкости. Далее заметный вклад в понимание термодинамики и механики такого рода объектов был сделан в статье [5], а детальный анализ их поведения при джоульто-мсоновском расширении в статьях [6]–[8].

Далее в работе мы будем использовать общепринятые для данной области теоретической физики значения фундаментальных констант $G_N = \hbar = k_B = c = 1$.

1 РН-АДС чёрная дыра

Обратимся к заряженной, сферически симметричной, невращающейся РН-АДС чёрной дыре и укажем её основные физические свойства.

В рассматриваемом случае 4-мерное пространство определяется метрикой

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

в которой $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2$; параметры t , r , θ , φ имеют стандартный математический смысл – времени и трёх сферических координат; функция $f(r)$ имеет вид

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{l^2}. \quad (1.1)$$

В выражении (1.1) обозначения l , M и Q соответствуют АДС радиусу, массе чёрной дыры и заряду чёрной дыры соответственно. Радиус же горизонта событий r_+ находится, как наибольший корень уравнения

$$f(r_+) = 0. \quad (1.2)$$

Масса чёрной дыры M при этом, следуя [5], отождествляется с энтальпией H и связана с АДС

радиусом и другими характеристиками чёрной дыры выражением

$$M = \frac{r_+}{2} \left(1 + \frac{Q^2}{r_+^2} + \frac{r_+^2}{l^2} \right). \quad (1.3)$$

Тогда дифференциал массы при введении электрического потенциала вида $\Phi = Q/r_+$ запишется как

$$dM = dH = TdS + VdP + \Phi dQ. \quad (1.4)$$

Космологическая константа Λ определяет давление P , отрицательна и связана с АдС радиусом l

$$P = \frac{3}{8\pi l^2} = -\frac{\Lambda}{8\pi}, \quad (1.5)$$

а энтропия S равна четверти площади горизонта событий, то есть

$$S = \pi r_+^2. \quad (1.6)$$

Используя (1.3) и (1.4), находим выражение для температуры T

$$T = \left(\frac{\partial M}{\partial S} \right)_{P,Q} = \frac{l^2 (r_+^2 - Q^2) + 3r_+^4}{4\pi l^2 r_+^3}. \quad (1.7)$$

И далее получаем уравнение состояния вида $P = P(r_+, T)$ для РН-АдС чёрной дыры на основании связей (1.3), (1.5) и (1.7)

$$P(r_+, T) = \frac{T}{2r_+} - \frac{1}{8\pi r_+^2} + \frac{Q^2}{8\pi r_+^4}, \quad (1.8)$$

которое просто привести к стандартному виду УС для термодинамики $P = P(V, T)$, принимая во внимание, что

$$r_+ = \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (1.9)$$

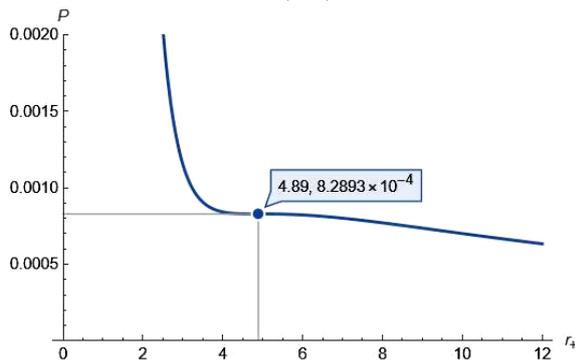


Рисунок 1.1 – Критическая изотерма РН-АдС чёрной дыры при $Q = 2$ с параметрами:
 $T_c = 0,02166$; $P_c = 8,2893 \cdot 10^{-4}$; $r_{+c} = 4,89$

В силу (1.9) очевидно, что УС (1.8) также позволяет нам определить критические параметры РН-АдС чёрной дыры на основе критерия точки перегиба

$$\frac{\partial P}{\partial r_+} = 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial r_+^2} = 0, \quad (1.10)$$

что приводит к результатам

$$T_c = \frac{\sqrt{6}}{18\pi Q}, \quad r_{+c} = \sqrt{6}Q, \quad P_c = \frac{1}{96\pi Q^2}. \quad (1.11)$$

В рассматриваемом случае критические параметры зависят от заряда Q .

Покажем корректность результатов (1.11), для чего на рисунке 1.1 изобразим явный вид критической изотермы для $Q = 2$ с указанием критической точки.

2 РН-АдС чёрная дыра в тёмной материи

Вновь рассмотрим заряженную, статичную, сферически симметричную РН-АдС чёрную дыру, но теперь помещенную в тёмную материю, обладающую свойствами идеальной жидкости (ИЖТМ).

Метрика пространства-времени сохранит прежний вид, но функция (1.1) преобразуется в

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \frac{\lambda}{r} \ln\left(\frac{r}{\lambda}\right). \quad (2.1)$$

Наличие тёмной материи приводит ко введению [9] обобщённой координаты $\lambda > 0$ и обобщённой силы A , определяемой как

$$A = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{r}{\lambda}\right). \quad (2.2)$$

В рассматриваемом случае формулы (2.1) и (2.2) на горизонте событий при выполнении условий (1.2) и (1.5) приводит к выражению для массы

$$M = \frac{r_+}{2} + \frac{4}{3} \pi P r_+^3 + \frac{Q^2}{2r_+} + \frac{1}{2} \lambda \ln\left(\frac{r_+}{\lambda}\right), \quad (2.3)$$

а дифференциал массы приобретает вид

$$dM = dH = TdS + VdP + \Phi dQ + Ad\lambda. \quad (2.4)$$

Теперь, используя (2.3) и (2.4), на основе (1.6) и (1.7) получаем температуру T и уравнение состояния $P = P(r_+, T)$

$$T = \frac{\lambda}{4\pi r_+^2} + 2Pr_+ + \frac{1}{4\pi r_+} - \frac{Q^2}{4\pi r_+^3},$$

$$P(r_+, T) = \frac{T}{2r_+} - \frac{1}{8\pi r_+^2} + \frac{Q^2}{8\pi r_+^4} - \frac{\lambda}{8\pi r_+^3}. \quad (2.5)$$

Выполнение условия для критических параметров (1.10) в (2.5) приводит к

$$r_{+c} = \frac{1}{2} \sqrt{9\lambda^2 + 24Q^2} - \frac{3\lambda}{2};$$

$$T_c = \frac{16Q^2 - 3\lambda \left(\sqrt{9\lambda^2 + 24Q^2} - 3\lambda \right)}{\pi \left(\sqrt{9\lambda^2 + 24Q^2} - 3\lambda \right)^3};$$

$$P_c = \frac{\lambda \left(3\lambda - \sqrt{9\lambda^2 + 24Q^2} \right) + 6Q^2}{\pi \left(\sqrt{9\lambda^2 + 24Q^2} - 3\lambda \right)^4}.$$

Пример критической изотермы РН-АдС чёрной дыры в ИЖТМ приведен на рисунке 2.1.

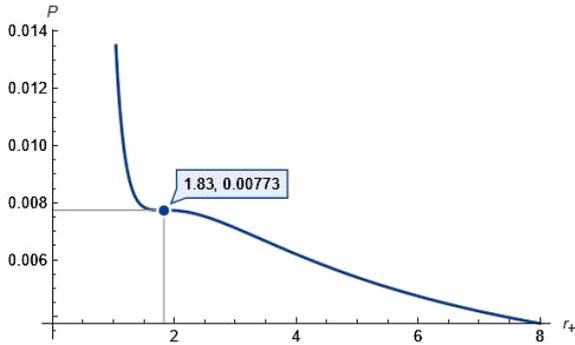


Рисунок 2.1 – Критическая изотерма РН-АдС чёрной дыры в ИЖТМ при $Q = 1$ и $\lambda = 0,5$ с параметрами: $T_c = 0,07069$; $P_c = 7,73 \cdot 10^{-3}$; $r_{+c} = 1,83$

3 БИ-АдС чёрная дыра

В этом пункте обратимся к более сложному объекту – заряженной чёрной дыре Борна –Инфельда (БИ) также в АдС пространстве. Она возникает как решение уравнений Эйнштейна в случае нелинейной электродинамики, но в БИ-подходе устраняется сингулярность электромагнитного поля в центре дыры путем использования фундаментальной длины β , накладывающей ограничение на напряженность поля.

В данном случае космологическая константа Λ , сохраняя связь с давлением P , параметризуется размерностью пространства D

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi} = \frac{(D-1)(D-2)}{16\pi l^2}. \quad (3.1)$$

Метрика также параметризуется D и содержит теперь громоздкую $f(r)$ [8]

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{D-2}^2,$$

$$f(r) = 1 - \frac{m}{r^{D-3}} + \frac{r^2}{l^2} + \frac{4\beta^2 r^2}{(D-1)(D-2)} \times$$

$$\times \left(1 - \sqrt{1 + \frac{(D-2)(D-3)q^2}{2\beta^2 r^{2D-4}}} \right) + \frac{2(D-2)q^2}{(D-1)r^{2D-6}} \times$$

$$\times {}_2F_1 \left[\frac{D-3}{2D-4}, \frac{1}{2}, \frac{3D-7}{2D-4}, -\frac{(D-2)(D-3)q^2}{2\beta^2 r^{2D-4}} \right], \quad (3.1)$$

где ${}_2F_1(a, b; c; z)$ – гипергеометрическая функция. Также в (3.2) проведены два переопределения, связанные с массой и зарядом, а в метрике использован $d\Omega_{D-2}^2$ – квадрат дифференциала телесного угла

$$M = \frac{(D-2)\Omega_{D-2}}{16\pi} m; \quad (3.3)$$

$$Q = \sqrt{2(D-2)(D-3)} \frac{\Omega_{D-2}}{8\pi} q. \quad (3.4)$$

Дифференциал массы сохраняется в виде (1.4). На горизонте событий из (3.2) и (3.3) определяем массу

$$M = \frac{(D-2)\Omega_{D-2}}{16\pi} r_+^{D-3} \left\{ 1 + \frac{r_+^2}{l^2} + \frac{4\beta^2 r_+^2}{(D-1)(D-2)} (1 - \sqrt{1-z_+}) + \frac{2(D-2)q^2}{(D-1)r_+^{2D-6}} {}_2F_1(a, b; c; z_+) \right\}. \quad (3.5)$$

Энтропия и объём в рассматриваемом случае имеют следующий вид

$$S = \frac{\Omega_{D-2}}{4} r_+^{D-2}; \quad V = \frac{\Omega_{D-2}}{D-1} r_+^{D-1}. \quad (3.6)$$

На основе (1.4), (3.1), (3.5) и (3.6) получаем выражение для температуры и уравнение состояния $P(r_+, T)$, находящееся в хорошем соответствии с [10], [11]:

$$T = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{(D-1)r_+}{l^2} + \frac{D-3}{r_+} + \frac{4\beta^2 r_+}{(D-2)} (1 - \sqrt{1-z_+}) \right],$$

$$P(r_+, T) = \frac{D-2}{4r_+} \left\{ T - \frac{D-3}{4\pi r_+} - \frac{\beta^2 r_+}{\pi(D-2)} (1 - \sqrt{1-z_+}) \right\}. \quad (3.7)$$

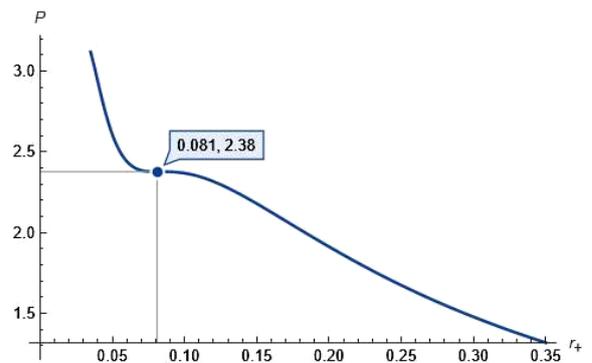


Рисунок 3.1 – Критическая изотерма БИ-АдС чёрной дыры при: $Q = 0,04$; $q = 0,04$; $\beta = 10$; $D = 4$ с параметрами: $T_c = 1,1466$; $P_c = 2,38$; $r_{+c} = 0,081$

Дальнейшие преобразования (3.7) на основе формул (1.10), (3.3) и (3.4) позволяют получить громоздкие, но явные, аналитические выражения только для критических температуры и давления. Для критического горизонта событий явного выражения нет. В частном случае, например, при $D = 4$, получим:

$$T_c = \frac{1}{2\pi r_{+c}} - \frac{Q^2}{\pi r_{+c}^3} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2/\beta^2 r_{+c}^4}};$$

$$P_c = \frac{1}{8\pi r_{+c}^2} - \frac{Q^2}{2\pi r_{+c}^4} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2/\beta^2 r_{+c}^4}} - \frac{\beta^2}{4\pi} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{Q^2}{\beta^2 r_{+c}^4}} \right).$$

Частный случай поведения критической изотермы БИ-АдС чёрной дыры представлен на рисунке 3.1.

Заключение

Таким образом, в данной работе показан метод определения явного вида термодинамических уравнений состояния чёрных дыр видов: РН-АдС, РН-АдС в ИЖТМ и БИ-АдС, приведенного в формулах (1.8), (2.5) и (3.7). Полученные для горизонта событий УС исследованы на наличие у них критических состояний. Найдены аналитические выражения для критических параметров и построены графики критических изотерм для ряда частных случаев. В дальнейшем предполагается проведение сравнительного анализа результатов данной статьи с критическим поведением реальных жидкостей в различных моделях, например, в модели Редлиха – Квонга [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bekenstein, J.D.* Black holes and the second law / J.D. Bekenstein // *Lett. Nuovo Cimento.* – 1972. – Vol. 4. – P. 737–740.
2. *Hawking, S.W.* Black hole explosions? / S.W. Hawking // *Nature.* – 1974. – Vol. 248. – P. 30–31.
3. *Hawking, S.W.* Thermodynamics of black holes in anti-de Sitter space / S.W. Hawking, D.N. Page // *Commun. Math. Phys.* – 1983. – Vol. 87. – P. 577–588.
4. *Charged AdS Black Holes and Catastrophic Holography* / A. Chamblin, R. Emparan, C.V. Johnson, R.C. Myers // *Phys. Rev. D.* – 1999. – Vol. 60. – P. 064018.

5. *Kastor, D.* Enthalpy and the Mechanics of AdS Black Holes / D. Kastor, S. Ray, J. Traschen // *Class. Quantum Gravity.* – 2009. – Vol. 26. – P. 195011.

6. *Ökcü, Ö.* Joule – Thomson expansion of the charged AdS black holes / Ö. Ökcü, E. Aydiner // *Eur. Phys. J. C.* – 2017. – Vol. 77. – Art. № 24.

7. *Joule – Thomson expansion of RN-AdS black holes immersed in perfect fluid dark matter* / Y. Cao, H. Feng, W. Hong, J. Tao // *Commun. Theor. Phys.* – 2021. – Vol. 73. – P. 095403.

8. *Joule – Thomson expansion of Born-Infeld AdS black holes* / S. Bi, M. Du, J. Tao, F. Yao // *Chin. Phys. C.* – 2021. – Vol. 45, № 2. – P. 025109.

9. *Perfect fluid dark matter influence on thermodynamics and phase transition for a Reissner – Nordstrom-anti-de Sitter black hole* / Z. Xu, X. Hou, J. Wang, Y. Liao // *Adv. High Energy Phys.* – 2019. – Vol. 2019. – Art. ID 2434390.

10. *Zou, D.* Critical behavior of Born-Infeld AdS black holes in the extended phase space thermodynamics / D. Zou, S. Zhang, B. Wang // *Phys. Rev. D.* – 2014. – Vol. 89, № 4. – P. 044002.

11. *Dey, T.K.* Born-Infeld black holes in the presence of a cosmological constant / T.K. Dey // *Pys. Lett. B.* – 2004. – Vol. 595. – P. 484–490.

12. *Новикова, О.В.* Джоуль-томсоновское расширение: жидкость Редлиха – Квонга и заряженная АдС чёрная дыра / О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2025. – № 2 (63). – С. 30–34.

Поступила в редакцию 09.02.2026.

Информация об авторах

Новикова Ольга Владимировна – магистр ф.-м.н.
Тюменков Геннадий Юрьевич – к.ф.-м.н., доцент

СТРУКТУРА И МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА УГЛЕРОДНЫХ ПОКРЫТИЙ, СФОРМИРОВАННЫХ НА ПОДВЕРГНУТОМ ИОННОЙ ОБРАБОТКЕ ПОДСЛОЕ НА ОСНОВЕ ЭТИЛЦЕЛЛЮЛОЗЫ И СЕРНОЙ КИСЛОТЫ

А.С. Руденков¹, Джанг Сянь Хун², М.А. Ярмоленко¹, Д.Г. Пилипцов¹

¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

²Нанкинский университет науки и технологии

STRUCTURE AND MECHANICAL PROPERTIES OF CARBON COATINGS FORMED ON AN ION-BASED ETHYL CELLULOSE AND SULFURIC ACID UNDERLAYER

A.S. Rudenkov¹, Jiang Xiahong², M.A. Yarmolenko¹, D.G. Piliptsov¹

¹Francisk Skorina Gomel State University

²Nanjing University of Science and Technology

Аннотация. Установлено, что обработка ионами азота с энергией до 0,3 кэВ подслоя на основе этилцеллюлозы и серной кислоты приводит к увеличению субшероховатости и уменьшению соотношения sp^3/sp^2 -гибридизированных атомов углерода у формируемых на его поверхности углеродных покрытий. Указанные структурные изменения приводят к уменьшению твердости покрытий в 1,3–1,6 раз, а коэффициента объемного изнашивания контртела в 7–12 раз в зависимости от длительности ионной обработки подслоя. При этом для покрытий с подслоем, обработанным ионами азота в течение 4 минут, характерно наличие локальных участков со значениями твердости до 22,7 ГПа и высокого среднего значения модуля Юнга – 699,3 ГПа, что, согласно данным КР-спектроскопии, может быть обусловлено наличием фуллереноподобных углеродных наноструктур либо их фрагментов.

Ключевые слова: углеродные покрытия, азот, твердость, модуль упругости, коэффициент трения, наноструктуры.

Для цитирования: Структура и механические свойства углеродных покрытий, сформированных на подвергнутом ионной обработке подслое на основе этилцеллюлозы и серной кислоты / А.С. Руденков, Джанг Сянь Хун, М.А. Ярмоленко, Д.Г. Пилипцов // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 1 (66). – С. 25–31. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_25. – EDN: VIYVMP

Abstract. It was found that irradiating a sublayer based on ethyl cellulose and sulfuric acid with nitrogen ions with energies up to 0.3 keV increases subroughness and reduces the ratio of sp^3/sp^2 -hybridized carbon atoms in the carbon coatings formed on its surface. These structural changes lead to a 1.3–1.6 fold decrease in coating hardness and a 7–12-fold decrease in the volumetric wear coefficient of the counterface, depending on the duration of ion irradiation of the sublayer. Furthermore, coatings with a sublayer treated with nitrogen ions for 4 minutes are characterized by the presence of localized areas with hardness values up to 22.7 GPa and a high average Young's modulus of 699.3 GPa. According to Raman spectroscopy data, this may be due to the presence of fullerene-like carbon nanostructures or their fragments.

Keywords: carbon coatings, nitrogen, hardness, elastic modulus, friction coefficient, nanostructure.

For citation: Structure and mechanical properties of carbon coatings formed on an ion-based ethyl cellulose and sulfuric acid underlayer / A.S. Rudenkov, Jiang Xiahong, M.A. Yarmolenko, D.G. Piliptsov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 1 (66). – P. 25–31. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_25 (in Russian). – EDN: VIYVMP

Введение

В настоящее время ионно-плазменная обработка широко применяется для модификации углеродных материалов, таких как графен [1], углеродные нанотрубки [2] и углеродные пленки [3], [4] с целью управления их структурой и свойствами. В качестве прекурсора для синтеза углеродных наноструктур в результате пиролиза, ионно-плазменного воздействия, химической обработки в настоящее время широко используют этилцеллюлозу [5]. Также необходимо отметить, что в качестве катализатора при карбонизации

этилцеллюлозы применяются серосодержащие соединения [6]. Использование ионно-плазменной и химической обработки является перспективным технологическим приемом формирования углеродных покрытий, армированных углеродными наноструктурами, из органических и неорганических прекурсоров [7], [8].

При ионно-плазменной обработке осаждаемых покрытий наблюдается рост соотношения sp^3/sp^2 -гибридизированных атомов за счет имплантации атомов углерода в приповерхностном слое и увеличении его плотности. В [9] показано,

что ионно-плазменное травление осаждаемых углеродных покрытий приводит к увеличению их твердости с 32 ГПа до 46,3 ГПа за счет увеличения доли sp^3 -связей. Установлено, что ионное азотирование приводит к увеличению твердости углеродных слоев, в первую очередь, за счет образования N-C sp^3 связей, но с одновременным увеличением содержания sp^2 -гибридизированных атомов [3].

Таким образом, варьируя состав формируемых подслоев, ионно-плазменной обработкой можно управлять фазовым составом, а, следовательно, и свойствами углеродных покрытий. Однако из-за различий в методах формирования или используемом оборудовании влияние ионно-плазменной обработки на структуру и свойства углеродных слоев изучено недостаточно.

Целью настоящей работы является определение влияния обработанного ионами азота подслоя на основе этилцеллюлозы и серной кислоты подслоя на морфологию, фазовый состав и механические свойства углеродных покрытий.

1 Методика эксперимента

Углеродные покрытия на подслое на основе этилцеллюлозы и серной кислоты, подвергнутом ионной обработке, были получены трехстадийным методом. На первой стадии слой серной кислоты был сформирован путем электронно-лучевого диспергирования (энергия электронов (0,8–1,6) кэВ, плотность тока (10–30) mA/cm^2), слой этилцеллюлозы был осажден при помощи лазерного диспергирования исходной мишени (длина волны 532 нм, энергия в импульсе накачки 43 мДж, энергия в импульсе 450 мДж, длительность импульса 6 нс). Полученные слои подвергались термообработке при температуре 120° С на воздухе в течение 30 минут. На второй стадии полученные покрытия были подвергнуты обработке ионами азота с энергией до 0,3 кэВ в течении 4 минут и 8 минут (остаточное давление – 0,04 Па, напряжение анода – 100 В, ток анода – 2 А, ток накала – 6 А). На третьей стадии из плазмы импульсного катодно-дугового разряда на осажденные подслои были осаждены углеродные покрытия (3000 импульсов, частота 5 Гц, напряжение 350 В).

Таблица 2.1 – Влияние ионной обработки подслоя на основе этилцеллюлозы и серной кислоты на морфологию H₂SO₄ / ЭЦ / С покрытий

Покрытие	Длительность ионной обработки, мин	Средняя высота, нм	Rms, нм	Плотность зерен, шт.	Средний диаметр зерен, нм
H ₂ SO ₄ / ЭЦ / С	–	35,5	6,2	262	94
	4	144,3	32,0	34	330
	8	142,2	39,0	20	540

Статистическая обработка результатов атомно-силовой микроскопии (Solver Pro, NT-MDT, Россия), полученных в полуконтактном режиме на поле сканирования размером 4x4 мкм, используемые для анализа морфологии покрытий, осуществлялась при помощи программы Gwyddion. В качестве основных параметров для сравнительного анализа были выбраны: средняя высота и продольные размеры (радиус, диаметр) отдельных структурных образований (далее – зерен), их количество, среднеквадратичная шероховатость Rms.

Анализ химических связей и состава покрытий осуществлялся средствами рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии (РФЭС) при помощи спектрометра РНИ Quanterra (Япония).

Фазовый состав и структурная упорядоченность углеродных покрытий были установлены средствами спектроскопии комбинационного рассеяния с использованием спектрометра Senterra (Bruker, Германия). Длина волны возбуждающего излучения – 532 нм, мощность – 5 мВт.

Твердость *H* и модуль Юнга *E* углеродных покрытий измерялись посредством нанотвердомера НаноСкан 4D (ТИСНУМ, Россия), оснащенного индентором Берковича.

Коэффициент трения и коэффициент объемного изнашивания контртела *j* определялись в ходе триботехнические испытания, проводимых по схеме «сфера – плоскость» с нагрузкой 0,392 Н и средней скорости перемещения 0,0135 м/с, индентор – стальной шарик с радиусом 5 мм.

2 Результаты и их обсуждение

Установлено, что обработка подслоя на основе целлюлозы и серной кислоты ионами азота оказывает существенное влияние на процессы структурообразования углеродных покрытий, формируемых на его поверхности (рисунок 2.1).

Ионная обработка подслоя приводит к увеличению средней высоты отдельных структурных образований углеродных покрытий в 4 раза, их среднего диаметра в 3–5 раз, субшероховатости в 5–6 раз (таблица 2.1). Кроме того, с увеличением времени ионной обработки с 4 минут до 8 минут средняя высота зерен несущественно уменьшается, в то время как средний диаметр отдельных структурных образований увеличивается в 1,6 раз, а субшероховатость – в 1,2 раза.

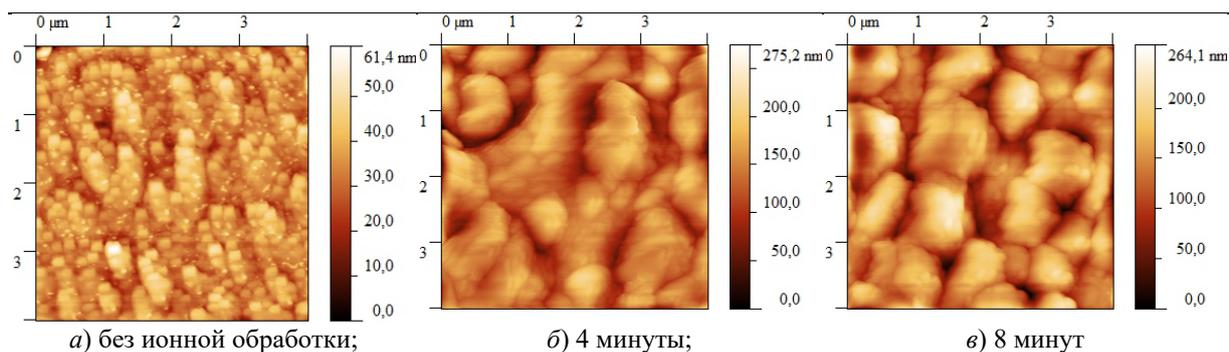


Рисунок 2.1 – АСМ изображения углеродных покрытий, сформированных на подвергнутом в течение различного времени ионной обработке подслое на основе этилцеллюлозы и серной кислоты

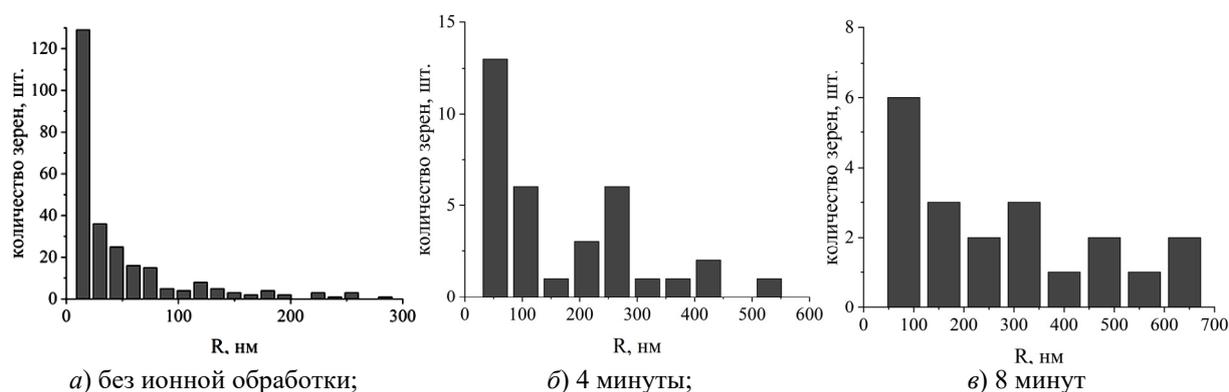


Рисунок 2.1 – Распределение зерен углеродных покрытий, сформированных на подвергнутом в течение различного времени ионной обработке подслое на основе этилцеллюлозы и серной кислоты

Данный факт объясняется неоднородностью фазового состава подслоя, его преимущественным травлением вдоль определенных кристаллографических направлений, а также возможной аморфизацией нанокристаллов графита и фазовым переходом $sp^3 \rightarrow sp^2$ вследствие нагрева при ионной обработке.

Установлено, что покрытия, сформированные без обработки ионами азота, характеризуются более высокодисперсной структурой (рисунок 2.2). Около 30% отмаркированных зерен обладают диаметром около 30 нм, в то время как в случае углеродных покрытий, полученных при ионной обработке подслоя в течение 8 минут, 30% отмаркированных зерен имеют размер около 160 нм, а 25% – свыше 800 нм.

При этом необходимо отметить, что распределение зерен по размерам в случае углеродных покрытий, полученных без ионной обработки, является унимодальным. В то время как покрытия, полученные с применением ионной обработки, характеризуются мультимодальным распределением зерен по размеру.

Спектр комбинационного рассеяния углеродных покрытий, сформированных на подслое на основе серной кислоты и целлюлозы, полученном путем лазерного диспергирования исходных компонентов с последующей обработкой ионами азота, был разложен на следующие

составляющие: Т-пик около $1180 \div 1230 \text{ см}^{-1}$, обусловленный, как правило, наличием sp^3 -кластеров с размером менее 5 нм; D-пик около $1350 \div 1450 \text{ см}^{-1}$, определяемый радиальными колебаниями шестиатомных колец с сопряженными sp^2 -связями и наличием дефектов (отсутствующий в спектрах высокоупорядоченных структур); G-пик вблизи 1550 см^{-1} , вызванный продольными колебаниями sp^2 -связей в ароматических и цепочечных молекулах углеродных материалов; D'-пик вблизи $1600 \div 1620 \text{ см}^{-1}$, формируемый наличием фрагментов графеновых плоскостей [10], [11]. При этом согласно [11] пик вблизи 1228 см^{-1} соответствует E_1 моде фуллере-на C_{70} . Одновременное наличие Т- и D'-пика, согласно [12], может указывать на наличие sp^3 -кластеров с размером менее 5 нм.

Показано, что ионная обработка подслоя на основе этилцеллюлозы и серной кислоты оказывает существенное влияние на спектры комбинационного рассеяния (а, следовательно, на процессы структурообразования), формируемые на его поверхности из плазмы импульсного катодно-дугового разряда углеродных слоев (таблица 2.2). Соотношение I_D / I_G увеличивается с 0,16 до 0,77 при увеличении длительности обработки подслоя до 8 минут, что может быть обусловлено процессами аморфизации sp^3 -кластеров, фазовой трансформацией $sp^3 \rightarrow sp^2$ и возникновением

радиационных дефектов вследствие бомбардировки ионами азота до 0,3 кэВ.

Известно, что соотношение I_D / I_G прямо пропорционально зависит от размера sp^2 -кластеров при его значении менее 2 нм и обратно пропорционально при больших размерах.

Согласно [13], [14] смещение D-пика в область более низких волновых чисел, а G-пика, наоборот, в область более высоких волновых чисел указывает на графитизацию углеродной матрицы и агломерацию sp^2 -кластеров, что подтверждается вышеприведенными данными атомно-силовой микроскопии.

Увеличение ширины G-пика $H_2SO_4 / ЭЦ / C$ покрытий вследствие ионной обработки подслоя обусловлено увеличением степени разупорядоченности sp^2 -кластеров и может косвенно свидетельствовать об их аморфизации.

Установлено, что ионная обработка подслоя на основе этилцеллюлозы и серной кислоты приводит к смещению T-пика с 1182 см^{-1} до 1234 см^{-1} в случае длительности обработки в течение 4 минут и до 1214 см^{-1} при длительности 8 минут.

Такие изменения могут быть вызваны как изменением размеров sp^3 -кластеров, так и образованием вследствие ионной обработки фрагментов монослоев углерода, характерных для фуллеренов.

Результаты рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии (таблица 2.3) согласуются с результатами КР-спектроскопии, указывающими на увеличение содержания sp^2 -связей при обработке подслоя на основе ЭЦ и H_2SO_4 ионами азота с энергией 0,3 кэВ.

$C1s$ спектр РФЭС, расположенный около 280÷290 эВ был разложен при помощи функции Гаусса следующим образом (рисунок 2.4): Csp^2 – пик с энергией связи ~ 284,6 эВ; Csp^3 – пик с энергией связи ~ 285,4 эВ [15]; Csp^2-N с энергией связи 285,9 эВ [16]. Ввиду близкого взаимного расположения и малой интенсивности пик $C = S$ пик с энергией связи ~ 287,2 эВ [17] и $C - O$ пик с энергией связи ~ 286,5 эВ [18] были объединены. Кроме того, необходимо учитывать, что пик около 287÷287,3 эВ указывает на присутствие Csp^3-N связей [16].

Таблица 2.2 – Влияние длительности ионной обработки подслоя на основе ЭЦ + H_2SO_4 на параметры КР-спектров $H_2SO_4 / ЭЦ / C$ покрытий

Покрытие	Длительность ионной обработки, мин	D-пик		G-пик		I_D / I_G
		Положение, см^{-1}	Ширина, см^{-1}	Положение, см^{-1}	Ширина, см^{-1}	
$H_2SO_4 / ЭЦ / C$	–	1414	62	1530	99	0,16
	4	1424	201	1551	130	0,62
	8	1390	181	1544	116	0,77

Таблица 2.3 – Влияние длительности ионной обработки подслоя на основе ЭЦ + H_2SO_4 на $C1s$ спектр РФЭС $H_2SO_4 / ЭЦ / C$ покрытий

Покрытие	Длительность ионной обработки, мин	Тип связи	Пик, эВ ($\pm 0,3$ эВ)	Ширина, эВ	Доля площади, %	Csp^3 / Csp^2
$H_2SO_4 / ЭЦ / C$	–	Csp^2	284,4	1,1	39,9	1,44
		Csp^3	285,1	1,1	57,5	
		$C - O$	286,3	0,7	2,6	
	4	Csp^2	284,6	1,1	54,5	0,48
		Csp^3	285,4	1,1	26,3	
		Csp^2-N	285,9	1,1	18,0	
		$C - O / C = S$	287,0	0,5	1,2	
	8	Csp^2	284,7	1,1	52,3	0,57
		Csp^3	285,4	1,3	30,0	
Csp^2-N		285,9	1,1	16,4		
$C - O / C = S$		286,9	0,7	1,3		

Таблица 2.4 – Влияние длительности ионной обработки подслоя на основе ЭЦ + H_2SO_4 на механические свойства $H_2SO_4 / ЭЦ / C$ покрытий

Покрытие	Длительность ионной обработки, мин	H , ГПа	E , ГПа	H / E	H^3 / E^2 , ГПа	Коэффициент трения	$j \cdot 10^{-17}$, $\text{м}^3 / (\text{Н} \cdot \text{м})$
$H_2SO_4 / ЭЦ / C$	–	7,6	193,8	0,049	0,0117	0,66	1330,9
	4	5,9	699,3	0,008	0,0004	0,68	109,7
	8	4,8	84,4	0,057	0,0155	0,70	190,8

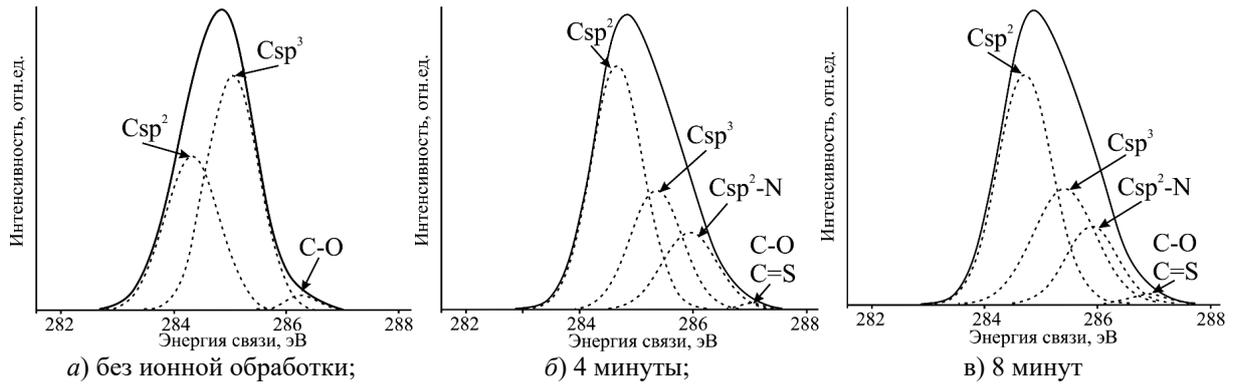


Рисунок 2.4 – C1s спектр РФЭС H₂SO₄/ЭЦ/С покрытий, осажденных на подслое на основе ЭЦ + H₂SO₄ с различной длительностью обработки ионами азота

Анализ N1s и S2p спектров провести не удалось, т. к. РФЭС чувствителен только к поверхностному слою (глубина выхода фотоэлектрон из образца составляет не более 5 нм) [19], а их интенсивность достаточно низкая из-за малой концентрации азота и серы в приповерхностных слоях – не более 0,9 ат. % и 0,8 ат. % соответственно.

Установлено, что соотношение Csp³ / Csp² покрытий, сформированных на подслое на основе этилцеллюлозы и серной кислоты, не подвергнутом ионной обработке, выше, чем у покрытий, полученных с использованием обработки ионами азота. Рост Csp² компоненты C1s пика вызван процессами фазовой трансформации sp³→sp² и образованием sp²-кластеров из-за нагрева подслоя вследствие бомбардировки ионами азота. При этом увеличение длительности ионной обработки подслоя с 4 до 8 минут приводит к незначительному уменьшению доли Csp², вероятно, вследствие травления.

Кроме того, установлен факт образования соединений Csp²-N. По всей видимости при нанесении углеродных слоев из плазмы импульсного катодно-дугового разряда после ионной обработки вследствие нагрева поверхности и дегазации, а также пористости формируемого покрытия, азот вступает во взаимодействие с осаждаемыми частицами углерода.

Изменения структуры и фазового состава H₂SO₄ / ЭЦ / С покрытий вследствие последующей обработки ионами азота с энергией 0,3 кэВ подслоя сказываются на их механических свойствах (таблица 2.4).

Установлено, что ионная обработка подслоя на основе ЭЦ и H₂SO₄ приводит к уменьшению твердости *H* покрытий H₂SO₄ / ЭЦ / С с 7,6 ГПа до 4,8 ГПа (рисунок 2.5). С увеличением длительности ионной обработки с 4 минут до 8 минут твердость уменьшается с 5,9 ГПа до 4,8 ГПа.

Данный факт обусловлен, по всей видимости, нагревом подслоя вследствие ионной обработки, вызывающей его аморфизацию, фазовую трансформацию sp³→sp², а также агломерацию и

увеличение размеров sp²-кластеров. Увеличение размеров sp²-кластеров, согласно закону Холла – Петча, также может приводить к снижению твердости покрытий [20].

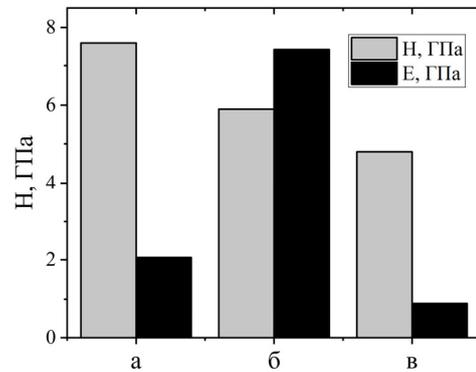


Рисунок 2.5 – Влияние длительности ионной обработки подслоя на основе ЭЦ + H₂SO₄ на твердость *H* и модуль Юнга *E* покрытий H₂SO₄ / ЭЦ / С: а) без ионной обработки; б) 4 минуты; в) 8 минут

Углеродные покрытия, сформированные на подслое на основе этилцеллюлозы и серной кислоты, который был подвержен ионной обработке в течение 4 минут, характеризуются неоднородным распределением значений твердости по поверхности (до 22,7 ГПа), что объясняется их неоднородным фазовым составом, а также наличием Csp²-N связей. Модуль Юнга вышеуказанных покрытий равняется 699,3 ГПа, что выше в 3,6 раза, чем у покрытий без ионной обработки, и выше в 8,3 раза, чем у покрытий, сформированных на подслое, обработанном в течение 8 минут. Такое высокое значение модуля упругости может быть обусловлено наличием углеродных наноструктур (согласно [21] модуль Юнга варьируется от 0,40 до 3,7 ТПа) или наличием нанокристаллических sp³-кластеров [22].

Снижение модуля Юнга H₂SO₄ / ЭЦ / С покрытий, сформированных на подслое, обработанном ионами азота в течение 8 минут,

обусловлено увеличением размеров sp^2 -кластеров, разрушением фрагментов наноструктур, аморфизацией и образованием радиационных дефектов.

Наименьшими значениями сопротивления упругой деформации H/E и сопротивления пластической деформации H^3/E^2 обладают покрытия, полученные на подслое этилцеллюлозы и серной кислоты, обработанном ионами азота в течение 4 минут, что может косвенно свидетельствовать об их низкой износостойкости [23] вследствие наименьшего значения соотношения sp^3/sp^2 из рассматриваемых образцов согласно результатам РФЭС (таблица 2.3). Наибольшей пластичностью из рассматриваемых образцов характеризуются $H_2SO_4/ЭЦ/С$ покрытия, сформированные на подслое, обработанном ионами азота в течение 8 минут, что может быть обусловлено увеличением размеров sp^2 -кластеров и аморфизацией покрытия.

Установлено, что ионная обработка подслоя на основе этилцеллюлозы и серной кислоты приводит к уменьшению значения коэффициента объемного изнашивания контртела j в 7–12 раз в зависимости от длительности ионной обработки. Данный факт объясняется нагревом подслоя в результате ионной обработки и, как следствие, увеличением содержания графита, выступающего в роли твердой смазки. Наименьшим значением коэффициента объемного изнашивания контртела j характеризуются покрытия с подслоем, обработанным в течение 4 минут, что может быть обусловлено наличием фрагментов наноструктур (например, фуллеренов), предотвращающих износ контртела. Рост коэффициента объемного изнашивания контртела с увеличением длительности ионной обработки с 4 минут до 8 минут может быть обусловлен увеличением соотношения sp^3/sp^2 с 0,48 до 0,57 и абразивным действием sp^3 -кластеров.

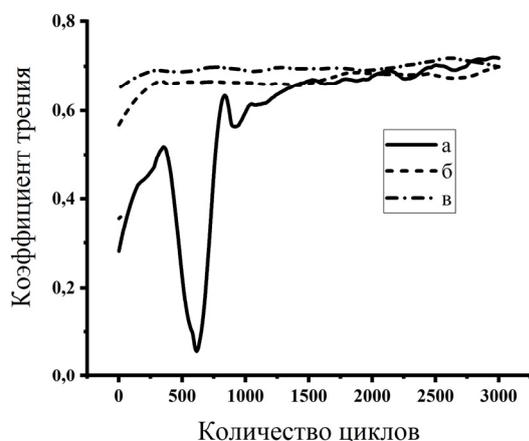


Рисунок 2.6 – Кинетические зависимости коэффициента трения углеродных покрытий на подслое на основе ЭЦ + H_2SO_4 с различной длительностью обработки ионами азота: а) без ионной обработки; б) 4 минуты; в) 8 минут

Показано, что ионная обработка подслоя на основе этилцеллюлозы и серной кислоты покрытий $H_2SO_4/ЭЦ/С$ приводит к незначительному увеличению коэффициента трения (рисунок 2.6).

При этом стадия приработки в случае покрытий с обработанным ионами азота подслоем гораздо короче, значение коэффициента трения более стабильно, что, вероятно, обусловлено увеличением содержания sp^2 -фазы (соотношение sp^3/sp^2 уменьшается с 1,44 до 0,48), выступающей в роли твердой смазки. С увеличением длительности ионной обработки с 4 минут до 8 минут коэффициент трения увеличивается с 0,68 до 0,70, что может объясняться увеличением шероховатости покрытий, размеров отдельных структурных образований и подтверждается данными атомно-силовой микроскопии (таблица 2.1).

Выводы

Установлено, что обработка ионами азота (с энергией не более 0,3 кэВ) подслоя на основе этилцеллюлозы и серной кислоты оказывает существенное влияние на процессы структурообразования и фазовый состав осаждаемых из плазмы импульсного катодного дугового разряда углеродных слоев. Углеродные покрытия, сформированные на обработанном подслое, характеризуются более низкими значениями твердости и коэффициента объемного изнашивания контртела, но более высокими значениями коэффициента трения, чем в случае покрытий, полученных без применения ионной обработки, что объясняется различной скоростью травления вдоль определенных кристаллографических направлений, а также возможной аморфизацией нанокристаллов графита и фазовым переходом $sp^3 \rightarrow sp^2$ вследствие нагрева при ионной обработке. Высокое значение модуля Юнга, равное 699,3 ГПа, для покрытий, полученных при длительности обработки ионами подслоя 4 минуты, может быть обусловлено наличием углеродных наноструктур, однако данный факт требует проведения дополнительных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tailoring properties of reduced graphene oxide by oxygen plasma treatment / I. Kondratowicz [et al.] // Applied Surface Science. – 2018. – Vol. 440. – P. 651–659.
2. Fast functionalization of vertically aligned multiwalled carbon nanotubes using oxygen plasma / A.O. Lobo [et al.] // Materials Letters. – 2012. – Vol. 70. – P. 89–93.
3. Влияние ионного азотирования на фазовый состав, структуру и свойства углеродных покрытий / А.С. Руденков [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 1 (26). – С. 37–42.
4. Aizawa, T. Oxygen plasma etching of diamond-like carbon coated mold-die for micro-texturing /

T. Aizawa, T. Fukudo // *Surface and Coatings Technology*. – 2013. – Vol. 215. – P. 364–368.

5. Витязь, П.А. Наноматериаловедение: учеб. пособие для студентов вузов / П.А. Витязь, Н.А. Свидунович, Д.В. Куис. – Минск: Вышэйшая школа, 2015. – 511 с.

6. *Fullerene-like CS_x: A first-principles study of synthetic growth* / C. Goyenola [et al.] // *Chemical Physics Letters*. – 2011. – Vol. 506. – P. 86–91.

7. Влияние условий и режима формирования подслоя на основе этилцеллюлозы и серной кислоты на структуру углеродных покрытий / А.С. Руденков, А.В. Рогачев, М.А. Ярмоленко, Д.Г. Пилипцов // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2025. – № 2 (63). – С. 35–43.

8. *A comparison between ion irradiation assisted- and electron irradiation assisted-oxygen plasma treatment on modification of nanostructured carbon films* / M. Guo [et al.] // *Surface and Coatings Technology*. – 2023. – Vol. 466. – Article 129656.

9. Dwivedi, N. Role of ex-situ oxygen plasma treatments on the mechanical and optical properties of diamond-like carbon thin films / N. Dwivedi, S. Kumar, H.K. Malik // *Materials Chemistry and Physics*. – 2012. – Vol. 134. – P. 7–12.

10. Ferrari, A.C. Interpretation of Raman spectra of disordered and amorphous carbon / A.C. Ferrari, J. Robertson // *Physical Review B*. – 2000. – Vol. 61. – P. 4095–4107.

11. *A concise review of the Raman spectra of carbon allotropes* / V. Thapliyal [et al.] // *Diamond and Related Materials*. – 2022. – Vol. 127. – Article 109180.

12. *The Raman spectrum of nanocrystalline diamond* / S. Praver [et al.] // *Chemical Physics Letters*. – 2000. – Vol. 332. – P. 93–97.

13. Однофононные рамановские спектры углерода в композитных пленках, полученных модифицированием аморфного гидрированного углерода медью и кобальтом / Э.А. Сморгонская [и др.] // *Физика твердого тела*. – 2003. – Т. 45. – С. 1579–1589.

14. *A phenomenological approach for the I_d/I_g ratio and sp³ fraction of magnetron sputtered a-C films* / S. Zhang [et al.] // *Surface and Coatings Technology*. – 2000. – Vol. 123. – P. 256–260.

15. Chen, X. A review on C1s XPS-spectra for some kinds of carbon materials / X. Chen, X. Wang, D. Fang // *Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures*. – 2020. – Vol. 28. – P. 1048–1058.

16. *Effect of nitrogen doping on the microstructure and thermal stability of diamond-like carbon coatings containing silicon and oxygen* / J. Peng, Y. Xiao, M. Yang, J. Liao // *Surface & Coatings Technology*. – 2021. – Vol. 421. – Article 127479.

17. *Reactive sputtering of CS_x thin solid films using CS₂ as precursor* / H. Hogberg [et al.] // *Vacuum*. – 2020. – Vol. 182. – Article 109775.

18. *XPS and XAS preliminary studies of diamond-like carbon films prepared by HiPIMS technique* / J. Lomon [et al.] // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2018. – Vol. 1144. – Article 012048.

19. Юдин, А.Л. Рентгеновская фотоэлектронная спектроскопия: учеб.-метод. пособие / А.Л. Юдин. – Кемерово, 2004. – 47 с.

20. Камышанченко, Н.В. Соотношение Холла-Петча при описании предела текучести и микротвёрдости технически чистого никеля, подвергнутого отжигу в диапазоне 700–1000°С / Н.В. Камышанченко, А.В. Гальцев, О.А. Печерина // *Научные ведомости*. – 2011. – № 23. – С. 201–207.

21. Ebbesen, T.W. Exceptionally high young's modulus observed for individual carbon nanotubes / T.W. Ebbesen, J.M. Gibson // *Nature*. – 1996. – Vol. 381. – P. 678–680.

22. *Tribological properties of nanocrystalline diamond films deposited by hot filament chemical vapor deposition* / N. Kumar [et al.] // *Aip Advances*. – 2012. – Vol. 2. – Article 032164.

23. Leyland, A. On the significance of the H/E ratio in wearcontrol: a nanocomposite coating approach to optimised tribological behavior / A. Leyland, A. Matthews // *Wear*. – 2000. – Vol. 246. – P. 1–11.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках НИР «Формирование наноконпозиционных углеродных покрытий в условиях ионного стимулирования», задание «Разработка принципов создания и исследование процессов и систем для формирования тонкопленочных покрытий и структур с улучшенными функциональными свойствами» ГПНИ Современное материаловедение, перспективные материалы и новые технологии», подпрограмма «Электрофизические и литейно-деформационные технологии создания и обработки материалов».

Поступила в редакцию 12.01.2026.

Информация об авторах

Руденков Александр Сергеевич – к.т.н., доцент

Цзян Сяо Хун – профессор

Ярмоленко Максим Анатольевич – д.т.н., профессор

Пилипцов Дмитрий Геннадьевич – д.т.н., доцент

ОСОБЕННОСТИ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЯ В РЕЗОНАТОРЕ В УСЛОВИЯХ РЕЗОНАНСНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ МАТЕРИАЛЬНОГО ОТКЛИКА АКТИВНОГО ЭЛЕМЕНТА

Е.В. Тимошенко¹, В.А. Юревич²

¹Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова

²Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв

FEATURES OF SUPERRADIATION IN A RESONATOR UNDER CONDITIONS OF RESONANT NONLINEARITY OF THE MATERIAL RESPONSE OF THE ACTIVE ELEMENT

E.V. Timoschenko¹, V.A. Yurevich²

¹Mogilev State A. Kuleshov University, Mogilev

²Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev

Аннотация. Проведена модификация системы уравнений Максвелла – Блоха, позволившая анализировать особенности структуры сверхизлучения, развивающегося в резонаторах импульсных лазеров. Учтена возможность влияния безынерционной по отношению к вариациям инверсионной заселенности нелинейности материального отклика активного элемента в схеме резонатора на временную структуру излучаемого светового поля. Нелинейность приводит к фазовой неустойчивости и соответствующей перенормировке фазового соотношения излучаемого поля и поляризованного отклика инвертированной среды. Это ведет к значительному повышению частоты нутационных осцилляций и изменению временного профиля интенсивности сверхизлучения. Модельные расчеты проведены для параметров микролазеров на полупроводниковых квантовых точках.

Ключевые слова: резонансная нелинейность, когерентные оптические эффекты, сверхизлучение, формализм вектора Блоха, квантоворазмерные структуры.

Для цитирования: Тимошенко, Е.В. Особенности сверхизлучения в резонаторе в условиях резонансной нелинейности материального отклика активного элемента / Е.В. Тимошенко, В.А. Юревич // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 1 (66). – С. 32–38. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_32. – EDN: TRXNLU

Abstract. The Maxwell – Bloch equations system has been modified to analyze the structural features of superradiance developing in pulsed laser resonators. The possibility of the influence of the inertialess nonlinearity of the material response of the active element in the resonator circuit on the temporal structure of the emitted light field with respect to population inversion variations has been taken into account. Nonlinearity leads to phase instability and corresponding renormalization of the phase relationship of the emitted field and the polarization response of the inverted medium. This leads to a significant increase in the frequency of nutation oscillations and a change in the time profile of the superradiance intensity. Model calculations have been performed for the parameters of semiconductor quantum dot microlasers.

Keywords: resonant nonlinearity, coherent optical effects, superradiance, Bloch vector formalism, quantum-dimensional structures.

For citation: Timoschenko, E.V. Features of superradiation in a resonator under conditions of resonant nonlinearity of the material response of the active element / E.V. Timoschenko, V.A. Yurevich // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 1 (66). – P. 32–38. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_32 (in Russian). – EDN: TRXNLU

Введение

Проблемы совершенствования низкоразмерных источников когерентного излучения остаются актуальными для целей разработки импульсных лазеров, применяемых в линиях сверхбыстрой передачи информации или совместимых с системами нанофотоники [1]. Использование возможностей оптических когерентных эффектов для оптимизации процесса формирования сверхкоротких моноимпульсов или устойчивой контрастной серии коротких импульсов в лазерном резонаторе открывает пути оптимизации

импульсных режимов излучения [2]–[5]. Эффект сверхизлучения, способный развиваться в низкодобротных резонаторах при достижении относительно высокого уровня инверсии, представляет одно из таких явлений [5]–[7]. Когерентный эффект сверхизлучения (СИ) происходит как следствие самопроизвольной фазовой корреляции (согласования фаз или фазировки) первоначально независимых элементарных резонансных центров (РЦ), включенных в матрицу инверсионной среды. Появление фазовой корреляции объясняется двумя факторами – взаимодействием РЦ,

представляемых, например, двухуровневыми диполями, через излучаемое ими световое поле и нелинейностью осцилляторных движений электронов внутри РЦ. В лазерах с низкочастотными резонаторами скорость наведения и распада поляризованности РЦ в массиве инверсной среды может оказаться значительно меньше скорости релаксации поля в схеме резонатора [7], [8]. Квантовые когерентные эффекты в динамике поляризационного отклика массива дипольных излучателей могут сыграть существенную или даже ведущую роль в реализации тех или иных режимов генерации поля излучения и установлении корреляции РЦ, взаимодействующих посредством этого поля.

В более общем случае следует учитывать, что типичная для резонансного взаимодействия кинетика когерентного излучения сопровождается фазовой неустойчивостью: в процессе формирования излучаемого структурой дипольных излучателей поля в лазерном резонаторе происходят смещение частоты и соответствующие вариации фазового соотношения действующего на РЦ светового поля с поляризационным откликом массива. Среди причин фазовой неустойчивости можно указать влияние ближних полей диполей на положение центральной частоты резонанса усиления и нелинейную рефракцию, вызванную поглощением излучения в переходах, соседних с резонансным. Известно [9], что такой нелинейный дрейф частоты (*frequency chirp*) выступает эффективным фактором радикальных изменений в динамике импульсного излучения.

В работе, положенной в основу настоящей статьи, в рамках уравнений Максвелла – Блоха с применением формализма вектора Блоха проанализированы особенности динамики излучения импульсных лазеров в условиях когерентного взаимодействия светового поля со средой усиливающего элемента и присущей среде резонансной фазовой нелинейности. Фактически рассматриваются закономерности формирования сверхизлучения в резонаторе в условиях нелинейного смещения частоты. Принципиальным моментом, определяющим новизну работы, являлось применение представлений обобщенной двухуровневой схемы [10], которое дало возможность учета нелинейной рефракции, вызванной влиянием поглощения в квазирезонансных переходах. Наряду с типичным для плотной упаковки дипольных РЦ взаимным поляризующим влиянием их ближних полей, квазирезонансная поляризованность способна стимулировать перенормировку фазового соотношения поля и поляризованности ансамбля РЦ.

1 Постановка задачи

СИ представляет собой эффект сверхбыстрого взаимодействия излучения с веществом, когда характерная длительность действующих на

образец вещества или высвечиваемых оптических импульсов значительно меньше времени действия релаксационных механизмов в среде [11]. Испускание импульса СИ ансамблем из большого числа N возбужденных РЦ способно развиваться в течение времени τ_R , много меньшего характерного времени излучения отдельного РЦ (времени продольной релаксации перехода T_1). Характерное время сверхизлучения τ_R зависит от вероятности резонансного перехода в канале вынужденного излучения и обратно пропорционально N . Пиковая интенсивность импульса на частоте ω , плотность энергии в котором определяется числом излученных квантов $N\hbar\omega$, получается пропорциональной второй степени N (N^2) – в результате высвечиваемый импульс СИ оказывается особо мощным. В этом состоит основное отличие СИ от некоррелированного испускания системы возбужденных РЦ, где характерное время спонтанного излучения порядка τ_1 , а интенсивность пропорциональна первой степени N .

СИ было экспериментально обнаружено во многих средах – газах, твердых телах и полупроводниках [2], [7], в том числе в экситонных конденсатах при низких температурах и системах квантовых точек (КТ) в наногетероструктурах [12]. Следует подчеркнуть, что в качестве активных элементов оптических и лазерных схем нанопотоники предпочтительны именно массивы КТ [13], [14]. Такого рода элементарными квантовыми излучателями с размером, превышающим атом, но с дискретным энергетическим спектром, в соответствующих технологиях образованы компактные регулярные структуры с относительно высокой концентрацией РЦ, в связи с чем такие материалы часто называют суперкристаллами (СК) [15]. Квантовые переходы с участием КТ характеризуются гигантскими силами осциллятора, что неизбежно приводит к сильному проявлению нелинейных оптических эффектов при умеренных уровнях интенсивности когерентного светового поля действующего в лазерной структуре из КТ, где в силу их высокой объёмной плотности может быть значимым эффект взаимного влияния ближних полей дипольных частиц. В субмикронном и нанометровом формате массивы КТ обладают сравнительно низкополюровым нелинейным откликом на поле когерентного излучения, особенно выраженным в экситонной области спектра. В используемых в оптике полупроводниковых материалах СИ происходит как коллективная спонтанная рекомбинация. Динамика компонентов отклика СК в режиме СИ определяет процесс генерации излучения в случае достижения максимальной инверсии в массиве КТ. В процессе формирования СИ фазы отдельных КТ, представляемых дипольными РЦ, спонтанно синхронизируются, в результате

чего в пределах образца формируется коллективный диполь с малым временем излучательной рекомбинации, равным времени СИ τ_R . Влиянием диполь-дипольного взаимодействия и реакцией на поле переходов, близких к основному, по мере резонансных вариаций населённости определяется фазовая динамика излучения, проявляющаяся в смещении центра линии ω_{12} и уширении спектральной линии усиления. Фазовая модуляция возникает даже при наличии отстройки частоты поля ω от центра линии ω_{12} . Такими особенностями, присущими резонансному взаимодействию, определяется дефазировка ансамбля РЦ, которая способна изменить форму и структуру импульса СИ.

Далее рассматривается влияние этих факторов нелинейной фазовой динамики на резонансную кинетику сверхизлучения в обычном допущении среднего поля по длине резонатора. Фазовыми эффектами определена возможность возникновения динамической обратной связи в резонаторе (амплитудно-фазовой связи), поэтому применительно к усиливающим элементам с квантоворазмерными эффектами следует говорить именно о автомодуляционном процессе с характерностью явления СИ. Поскольку наиболее контрастно фазовая нелинейность и её следствия проявляются именно в материалах квантоворазмерными эффектами, при расчетах динамики СИ в качестве исходных параметров модели использованы типичные характеристики лазеров на структурах КТ.

2 Основные уравнения

В использованном подходе уравнение для квазистационарной напряженности поля $E(t)$ в резонаторе аналогично, например, [16], решается совместно с уравнениями Блоха для электрических моментов дипольных РЦ. Этими квантовомеханическими уравнениями описывается динамика вероятностных переменных материального отклика – поляризованности $\rho(t)$ и инверсии заселенности уровней $n(t)$. Система уравнений Максвелла – Блоха применима для анализа динамики излучения лазеров, включающих массивы КТ (см., например, [17]). В общем случае рассматриваемого взаимодействия исходная формулируемая модель записывается так:

$$\frac{dE}{dt} + \frac{E}{T} = \frac{\omega}{\epsilon_0} P, \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\mu}{\hbar} nE + i\rho\Delta\omega, \quad \frac{dn}{dt} = -\frac{\mu}{2\hbar} (\rho^* E + \rho E^*). \quad (2.1)$$

Здесь P – поляризованность массива РЦ, $T = l/c$ – время обхода светом резонатора (l – оптическая длина резонатора), μ – матричный элемент дипольного момента перехода, $\Delta\omega = \omega - \omega_{12}$ – линейная отстройка (дефект) частоты.

Для поляризованности обычно применяется представление $P = \mu N \rho$. Представления обобщённой двухуровневой схемы, обобщённые в [10], приводят к перенормировке выражения для поляризованности P , в котором учитывается поляризующее влияние излучения переходов, близких к резонансному. Квазирезонансный компонент в выражении для P пропорционален вариации инверсии с коэффициентом $\Delta\alpha$, равным дефекту поляризуемости (различию поляризуемостей РЦ на уровнях перехода):

$$P = N[\mu\rho + i2\pi\Delta\alpha\epsilon_0(n-1)E'], \quad E' = \frac{E + i\mu N\rho/3\epsilon_0}{1 + 2\pi\Delta\alpha N(n-1)/3}. \quad (2.2)$$

Диполь-дипольное взаимодействие в ансамбле РЦ определено использованием в уравнениях для материального отклика (2.1) величины действующего на РЦ поля E' , различающегося с коррелирующим полем E включением локальной поправки Лоренца.

Для поля E далее использована переменная $e(t) = \mu E(t) / \hbar$, часто именуемая частотой Раби, определен временной параметр СИ, а также введены коэффициент нелинейной рефракции β и нормирующий коэффициент в поправке Лоренца γ :

$$\tau_R = \frac{\epsilon_0 \hbar c}{\mu^2 N \omega}, \quad \beta = \frac{2\pi\Delta\alpha \hbar}{\mu^2} \epsilon_0, \quad \gamma = \frac{\mu^2 N}{3\epsilon_0 \hbar}.$$

С учетом представлений (2.2) кинетическую модель СИ можно записать в виде:

$$T \frac{de}{dt} = \frac{G}{\tau_R} [\rho + i\beta(n-1)e] - e, \quad G = [1 + \beta\gamma(n-1)]^{-1}, \quad \frac{d\rho}{dt} = Gn e + i\rho(\Delta\omega + \gamma Gn), \quad \frac{dn}{dt} = -\frac{G}{2} (\rho^* e + \rho e^*). \quad (2.3)$$

Оригинальная расчетная модель процесса СИ (2.3) образует замкнутую самосогласованную систему уравнений, в которой коррелирующее поле зависит от резонансных свойств активных центров в массиве РЦ и, в свою очередь, определяет динамику их реакции в условиях одноквантового резонанса. Для возникновения СИ среда должна быть максимально инвертирована, возможность обратимого процесса изменения заселённости при сбросе инверсии не рассматривается: изначально в уравнении для вероятности инверсной заселённости n исключены релаксационные составляющие, не учитывается также фазовая релаксация поляризованности. Последним исключается рассмотрение влияния механизмов естественного (однородного, а также неоднородного) уширения спектральной линии усиления. Поэтому нелинейную модель (2.3) в отношении

описания процесса СИ в структурах полупроводниковых КТ определенным образом можно применять для оценки динамики поля в доменных образованиях, составляющих массив СК [12].

2 Результаты моделирования эффекта СИ

Для решения задачи моделирования используем в (2.3) экспоненциальное выражение комплексных переменных:

$$e(t)T = S(t) \exp[i\phi(t)], \quad \rho(t) = R(t) \exp[i\psi(t)].$$

Система (2.3) тогда представляется в следующем виде (влияние фазовой модуляции из-за отстройки резонанса не рассматривается, т. е., что $\Delta\omega = 0$, тем самым по совпадению частот выполняется условие точного резонанса):

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{G}{\tau_R} \rho \cos \varphi - \frac{S}{T}, \quad \frac{dR}{dt} = G \frac{nS}{T} \cos \varphi, \\ \frac{dn}{dt} &= -G \frac{RS}{T} \cos \varphi, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= G \left[\beta \frac{n-1}{\tau_R T} - \gamma n - \left(\frac{R}{\tau_R S} + \frac{nS}{TR} \right) \sin \varphi \right], \\ \varphi &= \phi - \psi. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Решение неавтономной задачи расчета переменных отклика R , n имеет полуаналитическое представление при любом виде нормированной амплитуды поля $S(t)$. Начальные условия обычны и соответствуют нулевому значению поляризованности $R(t=0) = 0$ при максимальном уровне инверсии, т. е. считается, что $n(t=0) = 1$. Из уравнений для отклика вытекает соотношение, представляющее собой принятый классическим закон сохранения вектора Блоха [11]: $R^2 + n^2 = 1$. Решения для материальных переменных записывают в виде функции угла поворота $\theta(t)$. С учетом использованных при формулировке (2.3) представлений решения для отклика модифицируются следующим образом:

$$\begin{aligned} R(t) &= \sin(\theta), \quad n(t) = \cos(\theta), \\ \theta(t) &= \frac{1}{1-\beta\gamma} \left[\frac{1}{T} \int_{-\infty}^t S(t) \cos \varphi dt - \beta\gamma R(t) \right]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Величиной угла поворота $\theta(t)$ (полярного угла вектора Блоха) за время формирования импульсов СИ определяется изменение вектора Блоха в пространстве переменных $\text{Re}\rho$, $\text{Im}\rho$, n . В отличие от традиционного представления подинтегральное выражение «площади импульса» поля в выражении для угла $\theta(t)$ в решениях (3.2) зависит от фазового соотношения поля и поляризованности. Тем же фазовым соотношением определяется и эффективность усиления в схеме (3.1). В сущности, значение $\cos \theta$ выступает в качестве нелинейного форм-фактора линии усиления для условий учета динамической отстройки частоты от резонанса.

В дальнейших расчетах, имеющих целью моделирование динамики СИ, используется система (3.1) с учетом решения $n(t)$, определяемого в (3.2) величиной полярного угла вектора Блоха. Использование выражения для $R(t)$ сопряжено с очевидной сложностью, поскольку оно представляет собой трансцендентное уравнение. Рассчитывалась временная развертка нормированной величины интенсивности $I_n(t) = S^2(t)$. Схема расчета (3.1) численно интегрировалась методом Рунге – Кутты при указанных выше начальных условиях для материального отклика в предположении, что «стартовое» значение амплитуды $S(t=0)$ достаточно мало, т. е. фактически решалась задача усиления относительно слабого сигнала при условии совпадения начальных фаз поля и поляризованности ($\varphi(t=0) = 0$). Вид и характер решений (3.1) для нормированной интенсивности поля СИ при этом не зависел от избранного значения $S(t=0)$.

Для оценки масштаба явлений использованы примерные значения параметров реальных излучающих устройств на основе КТ, которые взяты из научной литературы для массивов КТ в схемах InAs / (Al)GaAs на подложках GaAs [13], [14]. Так, величина плотности КТ находилась в пределах $(1,0 \dots 5,0) \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$, также предполагалось, что длина резонатора с учетом оптической длины усиливающего элемента, излучающего, в зависимости от концентрации КТ и уровня оптических потерь, была в пределах 0,3–0,4 мм. Величину дипольного момента КТ можно оценить, следуя её примерному размеру – 5...10 нм. Пиковая интенсивность импульсов соответствовала примерно 10... 100 МВт/см для диапазона длин волн $\sim (1,25 \dots 1,30) \cdot 10^{-6} \text{ м}$. Величины дефекта поляризуемости $\Delta\alpha$ соответствуют фактору Хенри, связывающему также инверсию и вариации показателя преломления в средах оптических полупроводников, по результатам его оценки в работе [17] величину $\Delta\alpha$ следует принять в пределах $(4 \dots 7) \cdot 10^{-21} \text{ см}^3$.

Решениями (3.1), (3.2) относительно $I_n(t)$, иллюстрируемыми на рисунке 3.1, в сущности, воспроизводится расчетная модель режима сверхизлучения в резонаторе. Контрастная структура квазирегулярных всплесков интенсивности, имеющей нутационную природу, указывает на квантовый характер процесса. Оптическая нутация обусловлена соответствующим вращением вектора Блоха вокруг направления коррелирующего поля и затухает по мере сброса инверсии.

В известных оценках [11], [16] основной закономерностью импульсов поля, образующих структуру СИ, является квантованная величина «площади» всплесков нормированной напряженности поля, выражаемой интегралом частоты Раби.

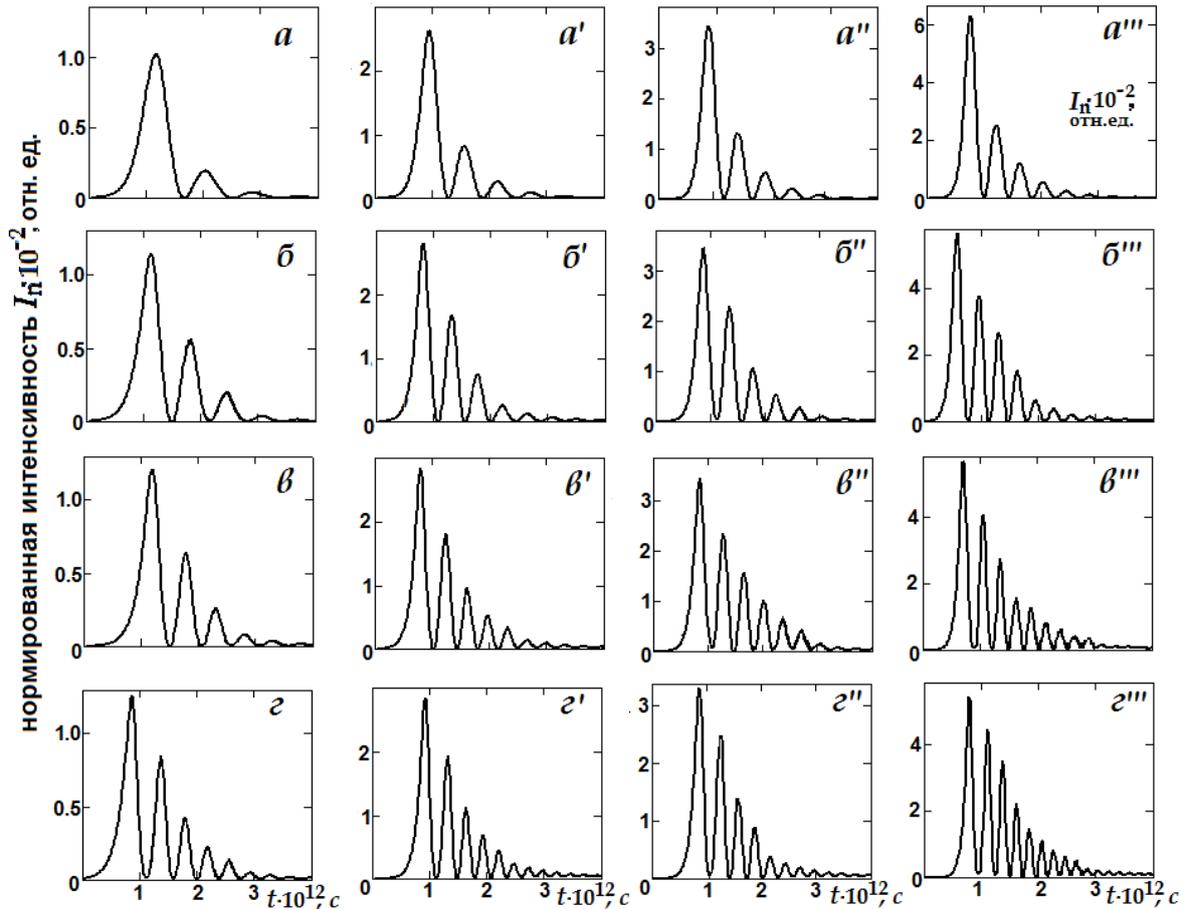


Рисунок 3.1 – Временная структура сверхизлучения на пикосекундной шкале:
 $\tau_R = 0,25$ пс ($a-z$); $0,2$ пс ($a'-z'$); $0,15$ пс ($a''-z''$); $0,1$ пс ($a'''-z'''$);
 $\beta\gamma = 0$ ($a-a'''$); $0,1$ ($b-b'''$); $0,15$ ($b-b''$); $0,2$ ($z-z'''$); $T = 1$ пс

В традиционно рассматриваемом случае полярный угол вектора Блоха (угол поворота вектора), за время излучения такого отдельного всплеска напряженности должен быть равен π . Резонансная нелинейность и обусловленная ею перенормировка фазового соотношения поля и поляризованности, судя по выражению для полярного угла вектора Блоха (3.2), указывает на иное значение «площади» импульса. Ее величина, определяющая частоту и релаксацию нутационной структуры СИ, дополнительно зависит от амплитуды поляризованности. Характерным следствием этой вариации полярного угла является предсказываемое расчетом увеличение нутационной частоты осцилляций СИ по отношению к случаю отсутствия нелинейного дрейфа частоты. Рассчитываемая кинетика процесса СИ на фрагментах рисунка 3.1 указывает, что снижение характерного времени СИ τ_R (соответственно, нарастание концентрации РЦ) обуславливает снижение периода осцилляций (иллюстрировано последовательностью фрагментов $a-z$ в вертикальных сериях). Нарастание уровня нелинейности (иллюстрировано горизонтальными сериями фрагментов $b-b'''$, $b-b''$, $z-z'''$) приводит

к резкому усложнению временной картины излучения.

Система уравнений (3.1) по аналогии с [12] может быть линеаризована вблизи стационарных значений R_S, S_S , а также

$$\sin(\varphi_S) = \left(\gamma - 2 \frac{\beta}{\tau_R T} \right) \cdot \left(\frac{1}{\tau_R} - \frac{1}{T} \right)^{-1}$$

(поскольку $n_S = -1$). Инкремент затухания в случае $\tau_R < T$ принимает комплексный характер. Его мнимая часть, выражающая частоту нутационных колебаний в линейном приближении, определяется следующим соотношением:

$$\Omega = \frac{1}{2} \left[\frac{4}{(1 - 2\beta\gamma)^2 \tau_R T} \cos^2(\varphi_S) - \frac{1}{T^2} \right]^{1/2}. \quad (3.3)$$

На рисунке 3.2 приведены рассчитанные на основе (3.3) зависимости относительного изменения нутационной частоты $m = \Omega / \Omega_0$ (Ω_0 – частота при отсутствии фазовой нелинейности) от характерного времени СИ τ_R для различных сочетаний длины резонатора (времени обхода T) и параметра нелинейности $\beta\gamma$.

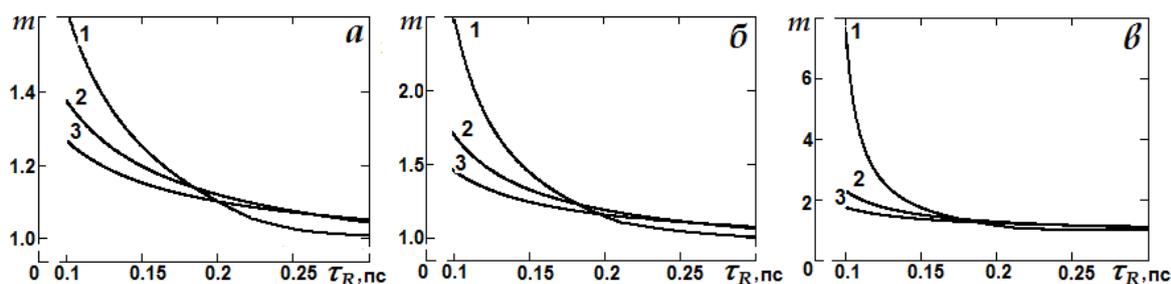


Рисунок 3.2 – Зависимость относительной частоты нутационных осцилляций в линейном приближении от параметра τ_R : $\beta\gamma = 0,1$ (а); $0,15$ (б); $0,2$ (в); $T = 1,0 \cdot 10^{-12}$ с (кривая 1); $1,0 \cdot 10^{-12}$ с (2); $1,0 \cdot 10^{-12}$ с (3)

Ход кривых $m(\tau_R)$ подтверждает один из основных выводов, который можно сделать на основе анализа результатов моделирования. С ростом различия времени релаксации поля в резонаторе и характерного времени СИ критичность нутационной структуры СИ по отношению к фазовой нелинейности, порождаемой резонансными механизмами материального отклика усиливающего элемента, может резко возрастать.

Заключение

На основе модификации известного подхода к анализу резонансного взаимодействия излучения с активным веществом, происходящего в сверхбыстром режиме, изучены закономерности протекания когерентного эффекта сверхизлучения в лазерном резонаторе. Учитывалась возможность влияния безынерционной по отношению к вариациям инверсной заселенности нелинейность материального отклика активного элемента в схеме резонатора на временную структуру излучаемого светового поля. Основным следствием взаимосвязанных механизмов нелинейности является особая фазовая неустойчивость в процессе энергообмена поля с инвертированной средой, эффективная в условиях относительно высокой плотности активных центров (диполь-дипольное взаимодействие) и поглощения в переходах, близких к основному (резонансная нелинейная рефракция).

Моделирование процесса СИ в резонаторе, совершенное на основе предложенной модели, представляющей систему кинетических уравнений для переменных поля и отклика среды, указывает на высокую критичность структуры СИ по отношению к порождаемому нелинейностью частотному дрейфу. Расчетные оценки проведены для параметров компактных лазеров на полупроводниковых квантовых точках, в которых рассматриваемые механизмы фазовой нелинейности признаны особо значимыми. В рамках формализма вектора Блоха получены уточненные решения системы уравнений для вероятностных переменных отклика среды, применимые для произвольного временного профиля

формируемого в резонаторе поля. Качественный анализ устойчивости равновесных состояний системы позволил формулировку выражения для частоты нутационных осцилляций с учетом факторов фазовой неустойчивости в линейном приближении. Результаты анализа особенностей динамики СИ в резонаторе будут полезны для целей оптимизации компактных импульсных источников когерентного излучения, используемых, например, в устройствах нанофотоники, в отношении профилирования высвечиваемых импульсов, управления характеристиками временной структурой излучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wu, K.* Pulse Generation and Compression Techniques for Microwave Electronics and Ultrafast Systems / K. Wu, M. Rahman // *Electromagn. Science.* – 2023. – Vol. 1, № 1. – P. 0010131–1–24.
2. *Васильев, П.П.* Фемтосекундное сверхизлучение в полупроводниковых лазерах: аномальная внутренняя генерация второй гармоники / П.П. Васильев, А.Н. Путилин, А.Б. Сергеев // *Квантовая электроника.* – 2016. – Т. 46, № 10. – С. 888–890.
3. *Vasil'ev, P.P.* Pulse generation with ultra-superluminal pulse propagation in semiconductor heterostructures by superradiant-phase transition enhanced by transient coherent population gratings / P.P. Vasil'ev, R.V. Penty, I.H. White // *Light: Science and Applications.* – 2016. – Vol. 5. – e16086. – DOI: 10.1038/lsa.2016.86
4. *Синхронизация мод в титан-сапфировом лазере за счет когерентного поглотителя* / М.В. Архипов, Р.М. Архипов, А.А. Шимко, И.В. Бабушкин, Н.Н. Розанов // *Письма в ЖЭТФ.* – 2019. – Т. 109, вып. 10. – С. 657–661.
5. *Параметрический эффект в сверхизлучающем лазере с самосинхронизацией мод* / Вл.В. Кочаровский, А.В. Мишин, А.Ф. Селезнев, Е.Р. Кочаровская, В.В. Кочаровский // *ТМФ.* – 2020. – Т. 203, № 1. – С. 56–77. – DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf9831>
6. *Сверхизлучение: принципы генерации и реализация в лазерах* / В.В. Кочаровский,

В.В. Железняков, Е.Р. Кочаровская, Вл.В. Кочаровский // УФН. – 2017. – Т. 187, вып. 4. – С. 367–410.

7. Динамика сверхизлучающих сред в резонаторе / А.М. Башаров, Г.Г. Григорьян, Н.В. Знаменский, Ю.В. Орлов, А.Ю. Шашков, Т.Г. Юккина // Квантовая электроника. – 2009. – Т. 39, № 3. – С. 251–255.

8. Сосуществование когерентных импульсов сверхизлучательных и квазистационарных мод в лазере с низкодобротным резонатором / Е.Р. Кочаровская, А.В. Мишин, А.Ф. Селезнев, В.В. Кочаровский, Вл.В. Кочаровский // Известия ВУЗов. Радиофизика. – 2020. – Т. 63, № 11. – С. 985–1008.

9. Wilson, M. Half of Nobel prize in physics honors the inventors of chirped pulse amplification / M. Wilson // Physics Today. – 2018. – Vol. 71, № 12. – P. 18–21.

10. Апанасевич, П.А. Основы теории взаимодействия света с веществом / П.А. Апанасевич. – Минск: Наука і тэхніка, 1977. – 496 с.

11. Андреев, А.В. Динамика сверхизлучения в резонаторе / А.В. Андреев // Квантовая электроника. – 1993. – Т. 20, № 6. – С. 581–585.

12. Формирование сверхизлучения в наногетероструктурах с квантовыми точками / А.В. Савельев, Л.Я. Карачинский, И.И. Новиков, Н.Ю. Гордеев, Р.П. Сейсян, Г.Г. Зегря // ФТП. – 2008. – Т. 42, вып. 6. – С. 730–735.

13. Light Emitting Devices Based on Quantum Well-Dots / M.V. Maximov, A.M. Nadtochiy, S.A. Mintairov, N.A. Kalyuzhnyu, N.V. Kryzhanovskaya,

E.I. Moiseev, N.Yu. Gordeev, Yu.M. Shernyakov, A.S. Payusov, F.I. Zubov, V.N. Nevedomskiy, S.S. Roudimov, A.E. Zhukov // Appl. Sci. – 2020. – Vol. 10. – P. 1038–1–27.

14. Fast switching between the ground- and excited-state lasing in a quantum-dot microdisk triggered by sub-ps pulses / A.E. Zhukov, A.M. Nadtochiy, A. Karaborchev, N. Fominykh, I. Makhov, K. Ivanov, Yu. Guseva, M. Kulagina, S. Blokhin, N.V. Kryzhanovskaya // Opt. Letters. – 2024. – Vol. 49, № 2. – P. 330–333.

15. Quantum-dot supercrystals for future nanophotonics / A.S. Baimuratov [et al.] // Scientific Reports 3. – 2013. – № 1727. – P. 1–9.

16. Ханин, Я.И. Лекции по квантовой радиофизике / Я.И. Ханин. – Н. Новгород: ИПФ, 2005. – 223 с.

17. Suppressing spatio-temporal lasing instabilities with wavechaotic microcavities / S. Bittner [et al.] // Science. – 2018. – Vol. 361. – P. 1225–1230.

18. Theory of the linewidth of semiconductor lasers / C.H. Henry // IEEE J. Quant. Electron. – 1982. – Vol. 18, № 2. – P. 259–264.

Поступила в редакцию 28.07.2025.

Информация об авторах

Тимощенко Елена Валерьевна – к.ф.-м.н., доцент

Юревич Владимир Антонович – д.ф.-м.н., профессор

О ПРОИЗВЕДЕНИИ σ -МНОЖЕСТВА ФИШЕРА КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ И σ -КЛАССА ФИШЕРА

Н.Т. Воробьев, С.Н. Воробьев, А.П. Мехович, Д.А. Китаров

Витебский государственный университет имени П.М. Машерова

ON THE PRODUCT OF σ -FISHER SET OF THE FINITE GROUP AND σ -FISHER CLASS

N.T. Vorobyev, S.N. Vorobyev, A.P. Mekhovich, D.A. Kitarov

Vitebsk State University named after P.M. Masherov

Аннотация. Пусть σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел \mathbb{P} , т. е. $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$, $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$ и $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$. σ -Классом Фишера называется класс Фиттинга \mathfrak{F} конечных групп G , который удовлетворяет условию: если $G \in \mathfrak{F}$, $N \trianglelefteq G$, $N \leq T \leq G$ и $T/N \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$ для некоторого $\sigma_i \in \sigma$, то $T \in \mathfrak{F}$. σ -Множеством Фишера группы G называется множество Фиттинга \mathcal{F} , если из $N \trianglelefteq S \in \mathcal{F}$, $N \leq T \leq S$ и $T/N \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$ для некоторого $\sigma_i \in \sigma$ следует $T \in \mathcal{F}$. Пусть \mathcal{F} – множество Фиттинга группы G и \mathfrak{X} – класс Фиттинга. Множество $\mathcal{F} \circ \mathfrak{X} = \{T \leq G : T/T_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}\}$ называется произведением множества Фиттинга и класса Фиттинга. Доказано, что если \mathcal{F} – σ -множество Фишера группы G и \mathfrak{F} – σ -класс Фишера, то произведение $\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$ является σ -множеством Фишера.

Ключевые слова: класс Фиттинга, класс Фишера, множество Фишера, σ -класс Фишера, σ -множество Фишера, произведение класса Фишера и множества Фишера.

Для цитирования: О произведении σ -множества Фишера конечной группы и σ -класса Фишера / Н.Т. Воробьев, С.Н. Воробьев, А.П. Мехович, Д.А. Китаров // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 1 (66). – С. 39–42. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_39. – EDN: PFRWCWZ

Abstract. Let $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$, be a partition of set \mathbb{P} of all prime numbers, i. e. $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ for all $i \neq j$. A σ -Fischer class is a Fitting class \mathfrak{F} , that satisfies the condition: if $G \in \mathfrak{F}$, $N \trianglelefteq G$, $N \leq T \leq G$ and $T/N \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$ for some $\sigma_i \in \sigma$, then $T \in \mathfrak{F}$. A σ -Fischer set of group G is called a Fitting set \mathcal{F} such that from $N \trianglelefteq S \in \mathcal{F}$, $N \leq T \leq S$ and $T/N \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$ for some $\sigma_i \in \sigma$, then $T \in \mathcal{F}$. Let \mathcal{F} be a Fitting set of G and \mathfrak{X} be a Fitting class. The set $\mathcal{F} \circ \mathfrak{X} = \{T \leq G : T/T_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}\}$ is called the product of the Fitting set and the Fitting class. It is proved that if \mathcal{F} is a σ -Fischer set of a group G , and \mathfrak{F} is a σ -Fischer class, then the product $\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$ is a σ -Fischer set.

Keywords: Fitting class, Fischer class, Fischer set, σ -Fischer class, σ -Fischer set, product of Fischer class and Fischer set.

For citation: On the product of σ -Fischer set of the finite group and σ -Fischer class / N.T. Vorobyev, S.N. Vorobyev, A.P. Mekhovich, D.A. Kitarov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 1 (66). – P. 39–42. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_39 (in Russian). – EDN: PFRWCWZ

Введение

В настоящей работе все рассматриваемые группы конечны. В определениях и обозначениях следуем [1]. Описание структурных свойств алгебры классов Фиттинга и строения канонических подгрупп связано с применением понятия произведения классов Фиттинга (см. например, главы IX, XI [1]). Напомним, что класс групп \mathfrak{F} называется классом Фиттинга [1, гл. IX], если выполняются следующие два условия:

- 1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$, то $N \in \mathfrak{F}$;
- 2) если $N_1, N_2 \trianglelefteq G$, и $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}$, то $N_1 N_2 \in \mathfrak{F}$.

Напомним, что для любой группы G существует единственная максимальная нормальная подгруппа, принадлежащая \mathfrak{F} . Ее называют \mathfrak{F} -радикалом G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

Класс групп \mathfrak{F} называют *классом Фишера* [2], если выполняются следующие условия:

- 1) \mathfrak{F} – класс Фиттинга;
- 2) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$, $N \leq T \leq G$ и T/N – p -группа для некоторого простого числа p , то $T \in \mathfrak{F}$.

В теории классов Фиттинга конечных разрешимых групп известен результат Локетта [3]

о том, что произведение двух любых классов Фишера является классом Фишера.

Используя понятие множество Фиттинга группы G , Дёрк и Хоукс [1, гл. VIII, определение 2.1] определили понятие множества Фишера G . Напомним, что непустое множество \mathcal{F} подгрупп группы G называется *множеством Фиттинга группы G* , если выполняются следующие три условия:

- 1) если $T \trianglelefteq S \in \mathcal{F}$, то $T \in \mathcal{F}$;
- 2) если $S, T \in \mathcal{F}$ и $S, T \trianglelefteq ST$, то $ST \in \mathcal{F}$;
- 3) если $S \in \mathcal{F}$ и $x \in G$, то $S^x \in \mathcal{F}$.

Множество Фиттинга \mathcal{F} группы G называется *множеством Фишера G* [1, гл. VIII, определение 4.3] если из условий: $N \trianglelefteq S \in \mathcal{F}$, $N \leq T \leq S$ и T/N – p -группа для некоторого простого числа p следует, что $T \in \mathcal{F}$.

В [1, гл. VIII, пример 2.2(a)] установлено, что каждому классу Фишера \mathfrak{F} соответствует множество Фишера \mathcal{F} группы G – его след в группе G , т. е. множество $\mathcal{F} = \{T \leq G : T \in \mathfrak{F}\}$, хотя обратное в общем случае неверно.

Для изучения алгебры множеств Фиттинга будем использовать понятие произведения множества Фиттинга и класса Фиттинга, которое было определено Н.Т. Воробьевым, Го Вэньбином и Яном Наньбином в работе [4]. Пусть \mathcal{F} – множество Фиттинга группы G и \mathfrak{X} – класс Фиттинга. Множество $\mathcal{F} \circ \mathfrak{X} = \{T \leq G : T/T_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}\}$ называется *произведением множества Фиттинга группы G и класса Фиттинга*. В [4] доказано, что произведение $\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$ является множеством Фиттинга группы G . Кроме того, в [5] было показано, что если \mathcal{F} – множество Фишера группы G и \mathfrak{X} – класс Фишера, то их произведение является множеством Фишера G .

В работах А.Н. Скибы [6]–[8] был предложен σ -метод исследования групп и их классов при помощи разбиения множества простых чисел σ . Основополагающие результаты по развитию и применению этого метода в теории локальных классов Фиттинга были получены Н.Т. Воробьевым, Го Вэньбином и Ли Жангом [9].

Напомним, что σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел \mathbb{P} , т. е. $\sigma = \{\sigma_i : i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$, $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$, для всех $i \neq j$. Символом \mathfrak{N}_{σ_i} будем обозначать класс всех нильпотентных σ_i -групп.

Определение 0.1. *Класс Фиттинга \mathfrak{F} назовём σ -классом Фишера, если из условия $G \in \mathfrak{F}$, $N \trianglelefteq G$, $N \leq T \leq G$ и $T/N \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$ для некоторого $\sigma_i \in \sigma$ всегда следует, что $T \in \mathfrak{F}$.*

В случае, если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$, \mathfrak{F} называют классом Фишера [2].

Аналогично определим σ -множество Фишера группы G .

Определение 0.2. *Множество Фиттинга \mathcal{F} группы G назовём σ -множеством Фишера G , если из $N \trianglelefteq S \in \mathcal{F}$, $N \leq T \leq S$ и T/N является нильпотентной σ_i -группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$ следует, что $T \in \mathcal{F}$.*

Замечание 0.3. *Очевидно, что всякое множество Фиттинга группы G , замкнутое относительно взятия подгрупп, является множеством Фишера G .*

Замечание 0.4. *В случае, если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$ – минимальное разбиение σ , то σ^1 -множество Фишера \mathcal{F} группы G совпадает с множеством Фишера этой группы.*

Основной результат работы следующая

Теорема 0.5. *Если \mathcal{F} – σ -множество Фишера группы G и \mathfrak{H} – σ -класс Фишера, то произведение $\mathcal{F} \circ \mathfrak{H}$ является σ -множеством Фишера G .*

1 Предварительные сведения

В качестве лемм приведем известные утверждения, которые будем использовать для доказательства основного результата.

Лемма 1.1 [1, гл. А, теорема 2.1 (b), (c)]. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *если U и N – подгруппы группы G и U нормализует N , то*

$$UN/N \cong U/U \cap N;$$

2) *если M, N – нормальные подгруппы группы G и $N \leq M$, то имеет место изоморфизм*

$$(G/N)/(M/N) \cong G/M.$$

Лемма 1.2 [1, гл. А 1.3, (тождество Дедекинда)]. *Если U, V, W – подгруппы группы G , причем $V \leq U$, то справедливо равенство*

$$U \cap VW = V(U \cap W).$$

Лемма 1.3 [1, гл. VIII, предложение 2.4 (d)]. *Если \mathcal{F} – множество Фиттинга группы G и N – нормальная подгруппа группы G , то*

$$N_{\mathcal{F}} = N \cap G_{\mathcal{F}}.$$

Лемма 1.4 [1, гл. IX, лемма 1.13]. *Пусть N_1, N_2 – нормальные подгруппы группы G такие, что $N_1 \cap N_2 = 1$ и факторгруппа G/N_1N_2 – нильпотентная группа. Если \mathfrak{F} – класс Фиттинга и $G/N_1 \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $G/N_2 \in \mathfrak{F}$.*

Лемма 1.5 [5, теорема 0.3]. *Если \mathcal{F} – множество Фишера группы G и \mathfrak{H} – класс Фишера, то произведение $\mathcal{F} \circ \mathfrak{H}$ является множеством Фишера G .*

Лемма 1.6 [10, лемма 2.2]. *Пусть \mathfrak{F} – σ -класс Фишера. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $Char(\mathfrak{F}) = \sigma(\mathfrak{F})$, где $\sigma(\mathfrak{F})$ – множество всех простых делителей порядка всех групп из класса \mathfrak{F} ;

$$2) \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}.$$

2 Доказательство теоремы 0.5

Пусть \mathcal{F} – множество Фишера группы G и \mathfrak{H} – класс Фишера. Тогда по лемме 1.5 их произведение $\mathcal{F} \odot \mathfrak{H}$ является множеством Фишера G . Для доказательства теоремы достаточно выяснить, что если T подгруппа группы G , $S \leq G$ и S – группа из $\mathcal{F} \odot \mathfrak{H}$ и N – ее нормальная подгруппа, $N \leq T \leq S$ и T/N является нильпотентной σ_i -группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$, то $T \in \mathcal{F} \odot \mathfrak{H}$.

Доказательство разобьем на несколько шагов.

(1) Если $T/N \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$, то факторгруппы $TS_{\mathcal{F}}/NS_{\mathcal{F}}$ и $T \cap S_{\mathcal{F}}/N \cap S_{\mathcal{F}}$ являются нильпотентными σ_i -группами.

Так как $N \trianglelefteq T$, то $N \trianglelefteq S$, следовательно, подгруппа $TS_{\mathcal{F}} = TNS_{\mathcal{F}}$. По утверждению 1 леммы 1.1 имеет место изоморфизм

$$TS_{\mathcal{F}}/NS_{\mathcal{F}} = TNS_{\mathcal{F}}/NS_{\mathcal{F}} \cong T/T \cap NS_{\mathcal{F}}.$$

Следовательно, по утверждению 2 леммы 1.1 справедлив изоморфизм

$$(T/N)/((T \cap NS_{\mathcal{F}})/N) \cong T/T \cap NS_{\mathcal{F}}.$$

Поскольку $T/N \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$ и класс нильпотентных σ_i -групп является формацией, то группа $(T/N)/((T \cap NS_{\mathcal{F}})/N)$ является σ_i -группой. Следовательно, изоморфная ей группа $T/T \cap NS_{\mathcal{F}}$ – σ_i -группа. Далее, ввиду изоморфизма

$$T/T \cap NS_{\mathcal{F}} \cong TS_{\mathcal{F}}/NS_{\mathcal{F}},$$

следует $TS_{\mathcal{F}}/NS_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$.

Покажем, что $T \cap S_{\mathcal{F}}/N \cap S_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$. Так как $N \trianglelefteq T$, то

$$T \cap S_{\mathcal{F}}/N \cap S_{\mathcal{F}} = (T \cap S_{\mathcal{F}})/(T \cap S_{\mathcal{F}}) \cap N.$$

Применяя утверждение 1 леммы 1.1, справедлив изоморфизм

$$T \cap S_{\mathcal{F}}N \cap S_{\mathcal{F}} \cong (T \cap S_{\mathcal{F}})N/N.$$

Так как $(T \cap S_{\mathcal{F}})N/N$ – нормальная подгруппа группы $T/N \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$ и \mathfrak{N}_{σ_i} – класс Фиттинга, то группа $(T \cap S_{\mathcal{F}})N/N \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$. Следовательно, и факторгруппа $T \cap S_{\mathcal{F}}/N \cap S_{\mathcal{F}}$ является нильпотентной σ_i -группой.

(2) $T/T \cap S_{\mathcal{F}}$ – нильпотентная σ_i -группа.

Для доказательства (2) будем использовать (1). Пусть $\bar{S} = S/S_{\mathcal{F}}$, $\bar{N} = NS_{\mathcal{F}}/S_{\mathcal{F}}$ и $\bar{T} = TS_{\mathcal{F}}/S_{\mathcal{F}}$. Тогда из $S \in \mathcal{F} \odot \mathfrak{H}$ следует, что

$\bar{S} \in \mathfrak{H}$. Кроме того, $\bar{N} \trianglelefteq \bar{S}$ и по утверждению 2 леммы 1.1 $\bar{T}/\bar{N} \cong TS_{\mathcal{F}}/NS_{\mathcal{F}}$. Таким образом, ввиду (1) $\bar{S} \in \mathfrak{H}$, $\bar{N} \trianglelefteq \bar{S}$, $\bar{N} \leq \bar{T} \leq \bar{S}$ и $\bar{T}/\bar{N} \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$. Поскольку по условию \mathfrak{H} – σ -класс Фишера, то $\bar{T} = TS_{\mathcal{F}}/S_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{H}$. Следовательно, по утверждению 1 леммы 1.1 справедлив изоморфизм

$$TS_{\mathcal{F}}/S_{\mathcal{F}} \cong T/T \cap S_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{H}.$$

Так как \mathfrak{H} – класс групп, то $T/T \cap S_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{H}$.

Утверждение (2) доказано.

$$(3) T_{\mathcal{F}} \cap (T \cap S_{\mathcal{F}})N = T \cap S_{\mathcal{F}}.$$

Вначале заметим, что

$$S_{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}, N \cap S_{\mathcal{F}} \trianglelefteq S_{\mathcal{F}}, N \cap S_{\mathcal{F}} \leq T \cap S_{\mathcal{F}} \leq S_{\mathcal{F}},$$

то ввиду (1) $T \cap S_{\mathcal{F}}/N \cap S_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$. Поскольку \mathcal{F} – σ -множество Фишера группы G , $T \cap S_{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$. Так как $T \cap S_{\mathcal{F}} \trianglelefteq T$, то определению \mathcal{F} -радикала группы T имеем $T \cap S_{\mathcal{F}} \leq T_{\mathcal{F}}$. Теперь, используя лемму 1.2, получаем равенство

$$T_{\mathcal{F}} \cap (T \cap S_{\mathcal{F}})N = (T \cap S_{\mathcal{F}})(N \cap S_{\mathcal{F}}).$$

Так как $N \trianglelefteq T$, то по лемме 1.3 $T_{\mathcal{F}} \cap N = N_{\mathcal{F}}$. Следовательно,

$$T_{\mathcal{F}} \cap (T \cap S_{\mathcal{F}})N = (T \cap S_{\mathcal{F}})N_{\mathcal{F}}.$$

Очевидно, $N_{\mathcal{F}} \leq T \cap S_{\mathcal{F}}$ и равенство (3) доказано.

$$(4) T/(T \cap S_{\mathcal{F}})N \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}.$$

Поскольку фактор $\bar{T}/\bar{N} \in \mathfrak{N}_{\sigma_i}$ и класс \mathfrak{N}_{σ_i} является формацией, то по утверждению 2 леммы 1.1

$$(\bar{T}/\bar{N})/((T \cap S_{\mathcal{F}})N/N) \cong T/(T \cap S_{\mathcal{F}})N$$

и $T/(T \cap S_{\mathcal{F}})N$ нильпотентная σ_i -группа. Ввиду теоремы Лангранжа, справедливо равенство

$$\begin{aligned} &|T/(T \cap S_{\mathcal{F}})| = \\ &= |T/(T \cap S_{\mathcal{F}})/((T \cap S_{\mathcal{F}})N/T \cap S_{\mathcal{F}})| \cdot \\ &\quad \cdot |(T \cap S_{\mathcal{F}})N/T \cap S_{\mathcal{F}}|. \end{aligned}$$

Следовательно, множество всех простых делителей σ_i является подмножеством множества всех простых делителей порядка группы $T/(T \cap S_{\mathcal{F}})$. Заметим, что, ввиду (2), факторгруппа $T/(T \cap S_{\mathcal{F}})$ является нильпотентной σ_i -группой и поэтому $\sigma_i \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$. Теперь, применяя лемму 1.6, получаем включение $\mathfrak{N}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{N}_{\sigma(\mathfrak{H})} \subseteq \mathfrak{H}$, и поэтому $T/(T \cap S_{\mathcal{F}})N \in \mathfrak{H}$.

(5) *Заключительный шаг.*

Покажем, что $T \in \mathcal{F} \odot \mathfrak{H}$. Пусть:

$$\tilde{S} = T/T \cap S_{\mathcal{F}}, \bar{N}_1 = (T \cap S_{\mathcal{F}})N/T \cap S_{\mathcal{F}},$$

$\bar{N}_2 = T_{\mathcal{F}}/T \cap S_{\mathcal{F}}$. Очевидно, что $\bar{N}_1 \trianglelefteq \tilde{S}$ и $\bar{N}_2 \trianglelefteq \tilde{S}$. Рассмотрим пересечение

$$\bar{N}_1 \cap \bar{N}_2 = ((T \cap S_{\mathcal{F}})N / T \cap S_{\mathcal{F}}) \cap (T_{\mathcal{F}} / T \cap S_{\mathcal{F}}).$$

Ввиду (4), получаем

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 \cap \bar{N}_2 &= ((T_{\mathcal{F}} \cap (T \cap S_{\mathcal{F}})N) / (T \cap S_{\mathcal{F}})) = \\ &= (T \cap S_{\mathcal{F}}) / (T \cap S_{\mathcal{F}}) = 1. \end{aligned}$$

Покажем, что фактор $\tilde{S} / \bar{N}_1 \bar{N}_2$ нильпотентная группа. Действительно

$$\begin{aligned} \tilde{S} / \bar{N}_1 \bar{N}_2 &= \\ &= (T / T \cap S_{\mathcal{F}}) / ((T \cap S_{\mathcal{F}})N / (T \cap S_{\mathcal{F}})(T \cap S_{\mathcal{F}})) = \\ &= (T_{\mathcal{F}} / T \cap S_{\mathcal{F}}) / ((T \cap S_{\mathcal{F}})NT_{\mathcal{F}}) / (T \cap S_{\mathcal{F}}). \end{aligned}$$

Поскольку в (3) $T \cap S_{\mathcal{F}} \subseteq T_{\mathcal{F}}$, по утверждению 2 леммы 1.1 получаем

$$\tilde{S} / \bar{N}_1 \bar{N}_2 = (T / T \cap S_{\mathcal{F}}) / (T_{\mathcal{F}}N / T \cap S_{\mathcal{F}}) \cong T / T_{\mathcal{F}}N$$

и $\tilde{S} / \bar{N}_1 \bar{N}_2$ – σ_i -группа и группа $\tilde{S} / \bar{N}_1 \bar{N}_2$ нильпотентная σ_i -группа.

Докажем, что \tilde{S} / \bar{N}_1 является нильпотентной σ_i -группой. По утверждению 2 леммы 1.1 справедлив изоморфизм

$$\begin{aligned} \tilde{S} / \bar{N}_1 &= (T / T \cap S_{\mathcal{F}}) / ((T \cap S_{\mathcal{F}})N / (T \cap S_{\mathcal{F}})) \cong \\ &\cong T / (T \cap S_{\mathcal{F}})N. \end{aligned}$$

Но, ввиду (4), $T / (T \cap S_{\mathcal{F}})N \in \mathfrak{H}$ и поэтому $\tilde{S} / \bar{N}_1 \in \mathfrak{H}$. Таким образом, все условия квази R_0 -леммы выполняются. Теперь, ввиду (2), $\tilde{S} \in \mathfrak{H}$ и по лемме 1.4 это равносильно тому, что $\tilde{S} / \bar{N}_2 \in \mathfrak{H}$. По утверждению 2 леммы 1.1 это означает, что

$$(T / T \cap S_{\mathcal{F}}) / (T_{\mathcal{F}} / T \cap S_{\mathcal{F}}) \cong T / T_{\mathcal{F}} \in \mathfrak{H}.$$

Следовательно, $T \in \mathcal{F} \circ \mathfrak{H}$ и произведение $\mathcal{F} \circ \mathfrak{H}$ является σ -множеством Фишера. \square

В случае, если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$, мы получаем результат Н.Т. Воробьева и А.С. Войткевич, который приведем как

Следствие 2.1 [5]. *Если \mathcal{F} – множество Фишера группы G и \mathfrak{X} – класс Фишера, то произведение $\mathcal{F} \circ \mathfrak{X}$ является множеством Фишера группы G .*

Заключение

В работе описывается метод построения σ -множеств Фишера конечной группы посредством произведения σ -множества Фишера и σ -класса Фишера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992.
2. Hartley, B. On Fischer’s dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193–207.
3. Lockett, F.P. On the theory of Fitting classes of finite soluble groups / F.P. Lockett. – Ph. D. thesis, University of Warwick, 1971.
4. Vorob’ev, N.T. On \mathcal{F} -injectors of Fitting set of a finite group / N.T. Vorob’ev, N. Yang, W. Guo // Comm. Algebra. – 2018. – Vol. 46, № 1. – P. 217–229.
5. Воробьев, Н.Т. О произведении множества Фишера конечной группы и класса Фишера / Н.Т. Воробьев, А.С. Войткевич // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2019. – № 3 (104). – С. 38–41.
6. Skiba, A.N. A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra and Appl. – 2015. – Vol. 15, № 5. – P. 21–36.
7. Skiba, A.N. On σ -properties of Finite groups II / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2015. – № 3 (24). – P. 70–83.
8. Чу, Ч. О Σ_i^{σ} -замкнутых классах конечных групп / Ч. Чу, А.Н. Скиба // Украинский математический журнал. – 2018. – Т. 70, № 12. – С. 1707–1716.
9. Guo, W. On σ -local Fitting classes / W. Guo, L. Zhang, N.T. Vorob’ev // J. Algebra. – 2020. – Vol. 542, № 15. – P. 116–129.
10. Залесская, Е.Н. О произведениях классов Фишера / Е.Н. Залесская, С.Н. Воробьев // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2008. – № 3 (49). – С. 101–105.

Поступила в редакцию 12.01.2026.

Информация об авторах

Воробьев Николай Тимофеевич – д.ф.-м.н., профессор
 Воробьев Сергей Николаевич – к.ф.-м.н., доцент
 Мехович Андрей Павлович – к.ф.-м.н.
 Китаров Денис Андреевич – магистрант

ПОЛИАДИЧЕСКИЕ ФАКТОРГРУППЫ ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУПП СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. III

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв

POLYADIC QUOTIENT GROUPS OF POLYADIC GROUPS OF SPECIAL FORM. III

А.М. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev

Аннотация. В статье продолжается изучение l -арных факторгрупп полиадических групп специального вида.

Ключевые слова: полиадическая операция, полунинвариантная l -арная подгруппа, n -полунинвариантная l -арная подгруппа, факторгруппа, конгруэнция, смежный класс.

Для цитирования: Гальмак, А.М. Полиадические факторгруппы полиадических групп специального вида. III / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 1 (66). – С. 43–46. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_43. – EDN: PKPFNE

Abstract. The study on the l -ary quotient groups of polyadic groups of special form is carried on.

Keywords: polyadic operation, semiinvariant l -ary subgroup, n -semiinvariant l -ary subgroup, quotient group, congruence, coset.

For citation: Gal'mak, A.M. Polyadic quotient groups of polyadic groups of special form. III / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 1 (66). – P. 43–46. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_43 (in Russian). – EDN: PKPFNE

Введение

В статье продолжается изучение l -арных факторгрупп l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ специального вида по её полунинвариантным l -арным подгруппам, начатое в статьях [1], [2]. Данная статья составляет с ними единое целое, что отражено в названиях статей. В связи с этим нумерация разделов в настоящей статье продолжает нумерацию разделов в [1], [2]. Сохраняется преемственность в отношении соглашений, определений и обозначений из [1], [2], все они остаются в силе и в данной статье. В ней ссылки на результаты из работ [1], [2] даются без указания на эти работы. Например, ссылка на теорему 2.1 означает, что имеется в виду теорема 2.1 из раздела 2 в [1], а ссылка на лемму 3.2 означает, что имеется в виду лемма 3.2 из раздела 3 в [2]. Целью данной статьи является получение новых результатов, являющихся аналогами и обобщениями основных результатов из [1], [2].

5 Вспомогательные результаты

Приведём новое доказательство леммы 3.3, дополнив её формулировку.

Лемма 5.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, $\langle B, \eta \rangle$ – её n -арная подгруппа, $d_1, \dots, d_{l-1} \in A$. Тогда:

1) если существуют элементы

$$b_1, \dots, b_{n-1} \in B$$

такие, что последовательности $d_1 \dots d_{l-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$ эквивалентны в смысле Поста, то

$$\eta(d_1 \dots d_{l-1}B) = B, \quad (5.1)$$

$$\eta(Bd_1 \dots d_{l-1}) = B, \quad (5.2)$$

$$\eta(d_1 \dots d_{l-1}B) = \eta(Bd_1 \dots d_{l-1}); \quad (5.3)$$

2) если верно одно из равенств (5.1) или (5.2), то существуют элементы $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ такие, что последовательности $d_1 \dots d_{l-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$ эквивалентны в смысле Поста, а также верны второе из указанных равенств и равенство (5.3).

Доказательство. 1) Так как последовательности $d_1 \dots d_{l-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$ эквивалентны в смысле Поста, то

$$\eta(d_1 \dots d_{l-1}b) = \eta(b_1 \dots b_{n-1}b),$$

$$\eta(bd_1 \dots d_{l-1}) = \eta(bb_1 \dots b_{n-1})$$

для любого $b \in B$. Поэтому

$$\begin{aligned} B &= \{\eta(b_1 \dots b_{n-1}b) \mid b \in B\} = \\ &= \{\eta(d_1 \dots d_{l-1}b) \mid b \in B\} = \eta(d_1 \dots d_{l-1}B), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \{\eta(bb_1 \dots b_{n-1}) \mid b \in B\} = \\ &= \{\eta(bd_1 \dots d_{l-1}) \mid b \in B\} = \eta(Bd_1 \dots d_{l-1}), \end{aligned}$$

то есть верны равенства (5.1) и (5.2), а значит и равенство (5.3).

2) Если верно, например, равенство (5.1), то для любого $c \in B$ найдётся $b \in B$ такой, что

$$\eta(d_1 \dots d_{l-1}c) = b \in B. \quad (5.4)$$

А так как $\langle B, \eta \rangle - n$ -арная группа, то для $c, b \in B$ в ней разрешимо уравнение

$$\eta(x_1 \dots x_{n-1}c) = b.$$

Следовательно, найдутся такие $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$, что

$$\eta(b_1 \dots b_{n-1}c) = b. \quad (5.5)$$

Из равенства правых частей в (5.4) и (5.5) следует равенство

$$\eta(d_1 \dots d_{l-1}c) = \eta(b_1 \dots b_{n-1}c),$$

что означает эквивалентность в смысле Поста последовательностей $d_1 \dots d_{l-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$. Поэтому согласно 1), верны равенства (5.2) и (5.3).

Для равенства (5.2) доказательство утверждения 2) проводится аналогично. \square

Полагая в лемме 5.1 $d_1 = \dots = d_{l-1} = d$, получим следствие, дополняющее следствие 3.1.

Следствие 5.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle - n$ -арная группа, $\langle B, \eta \rangle -$ её n -арная подгруппа, $d \in A$. Тогда:

1) если существуют элементы $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ такие, что последовательности $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ и

$b_1 \dots b_{n-1}$ эквивалентны в смысле Поста, то

$$\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} B) = B, \quad (5.6)$$

$$\eta(B \underbrace{d \dots d}_{l-1}) = B, \quad (5.7)$$

$$\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} B) = \eta(B \underbrace{d \dots d}_{l-1}); \quad (5.8)$$

2) если верно одно из равенств (5.6) или (5.7), то существуют элементы $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ такие, что последовательности $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ и

$b_1 \dots b_{n-1}$ эквивалентны в смысле Поста, а также верны второе из указанных равенств и равенство (5.8).

Нам понадобятся ещё две леммы.

Лемма 5.2 [3; 4, Предложение 3.5]. Если элемент a n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ имеет конечный n -адический порядок t , то $a^{[r]} = a$ тогда только тогда, когда r кратно t .

Лемма 5.3. Если $l = s(n-1) + 1$, где $s \geq 1$, $\langle B, \eta \rangle -$ полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, то порядок смежного класса $\underbrace{\eta(a B \dots B)}_{n-1}$ n -арной факторгруппы

$\langle A/B, \eta \rangle$ делит s тогда и только тогда, когда последовательность $\underbrace{a \dots a}_{l-1}$ эквивалентна в

смысле Поста последовательности $b_1 \dots b_{n-1}$ для некоторых $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$.

Доказательство. Необходимость. Так как порядок смежного класса $\underbrace{\eta(a B \dots B)}_{n-1}$ делит s , то

по лемме 5.2

$$(\underbrace{\eta(a B \dots B)}_{n-1})^{[s]} = \underbrace{\eta(a B \dots B)}_{n-1}, \quad (5.9)$$

откуда ввиду леммы 3.2 следует

$$\underbrace{\eta(a^{[s]} B \dots B)}_{n-1} = \underbrace{\eta(a B \dots B)}_{n-1}. \quad (5.10)$$

Перепишем полученное равенство, применив определение полиадической степени

$$\underbrace{\eta(\underbrace{a \dots a}_{s(n-1)+1} B \dots B)}_{n-1} = \underbrace{\eta(a B \dots B)}_{n-1}, \quad (5.11)$$

то есть

$$\underbrace{\eta(\underbrace{a \dots a}_l B \dots B)}_{n-1} = \underbrace{\eta(a B \dots B)}_{n-1}, \quad (5.12)$$

откуда, учитывая нейтральность последовательности $\underbrace{\bar{a} a \dots a}_{n-2}$, а также равенство $\underbrace{[B \dots B]}_n = B$,

получаем

$$\begin{aligned} \underbrace{\eta(\bar{a} a \dots a)}_{n-3} \underbrace{\eta(\underbrace{a \dots a}_l B \dots B)}_{n-1} &= \\ = \underbrace{\eta(\bar{a} a \dots a)}_{n-3} \underbrace{\eta(a B \dots B)}_{n-1} &= B, \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \underbrace{\eta(\bar{a} a \dots a a \dots a)}_{n-2} \underbrace{[B \dots B]}_n &= \\ = \underbrace{\eta(\bar{a} a \dots a)}_{n-2} \underbrace{[B \dots B]}_n &= B, \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\underbrace{\eta(a \dots a B)}_{l-1} = B. \quad (5.15)$$

Поэтому согласно утверждению 2) следствия 5.1, последовательность $\underbrace{a \dots a}_{l-1}$ эквивалентна в смысле

Поста последовательности $b_1 \dots b_{n-1}$ для некоторых $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$.

Достаточность. Если последовательность $\underbrace{a \dots a}_{l-1}$ эквивалентна в смысле Поста последовательности $b_1 \dots b_{n-1}$ для некоторых $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$,

то согласно утверждению 1) следствия 5.1, верны равенства

$$\underbrace{\eta(a \dots a B)}_{l-1} = B, \quad (5.16)$$

$$\underbrace{\eta(a \dots a B)}_{l-1} = \underbrace{\eta(B a \dots a)}_{l-1}. \quad (5.17)$$

Из (5.16) следует

$$\underbrace{\eta(a B \dots B a \dots a B)}_{n-2} = \underbrace{\eta(a B \dots B B)}_{n-2}.$$

Применив к левой части полученного равенства $n-2$ раза равенство (5.17), последовательно получим

$$\eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-3} a \dots a \underbrace{BB}_{l-1}) = \eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1}),$$

$$\dots$$

$$\eta(a \underbrace{B a \dots a B}_{l-1} \dots \underbrace{B \dots B}_{n-2}) = \eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1}),$$

$$\eta(a \underbrace{a \dots a}_{l-1} \dots \underbrace{a B \dots B}_{n-2}) = \eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1}),$$

то есть верно (5.12). Далее последовательно получаем (5.11), (5.10) и (5.9). Из (5.9) ввиду леммы 5.2, следует, что порядок смежного класса $\eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1})$ делит s . □

Полагая в лемме 5.3 $s = 1$, получим

Следствие 5.2. Если $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, то порядок смежного класса $\eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1})$ n -арной факторгруппы $\langle A/B, \eta \rangle$

равен 1 тогда и только тогда, когда последовательность $a \dots a$ эквивалентна в смысле Поста последовательности $b_1 \dots b_{n-1}$ для некоторых $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$.

Замечание 5.1. Легко поверяется, что если $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, то порядок смежного класса $\eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1})$ n -арной факторгруппы

$\langle A/B, \eta \rangle$ равен 1 тогда и только тогда, когда

$$\eta(a \underbrace{\dots a}_n \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1}).$$

Поэтому следующее следствие равносильное следствию 5.2.

Следствие 5.3. Если $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $a \in A$, то

$$\eta(a \underbrace{\dots a}_n \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1})$$

тогда и только тогда, когда последовательность $a \dots a$ эквивалентна в смысле Поста последовательности $b_1 \dots b_{n-1}$ для некоторых $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$.

6 Основные результаты

Применим лемму 5.3 для получения новых результатов, соответствующих результатам из [1], [2].

Лемма 5.3 и теорема 2.1 позволяет сформулировать следующий результат, эквивалентный этой теореме.

Теорема 6.1. Пусть $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, в A существует такой элемент d , что порядок смежного класса $H = \eta(d \underbrace{B \dots B}_{n-1})$

n -арной факторгруппы $\langle A/B, \eta \rangle$ делит s ; подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда:

1) декартова степень H^k замкнута относительно l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$, а универсальная алгебра $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ является полуинвариантной l -арной подгруппой l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$;

2) для полуинвариантных в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ l -арных подгрупп $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ и $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ соответствующие l -арные факторгруппы совпадают:

$$\langle A^k/H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle = \langle A^k/B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle;$$

3) конгруэнции ρ_{H^k} и ρ_{B^k} l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, определяемые полуинвариантными l -арными подгруппами $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ и $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ совпадают: $\rho_{H^k} = \rho_{B^k}$;

4) если $B \neq A$, для некоторого $i = 2, \dots, s$ подстановка $\sigma^{(i-1)(n-1)}$ не является тождественной, то l -арная подгруппа $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуинвариантной в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Замечание 5.1, следствие 5.2 и теорема 2.2 позволяют сформулировать следующий результат, эквивалентный этой теореме.

Теорема 6.2. Пусть $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, существует элемент $a \in A$ такой, что

$$\eta(a \underbrace{\dots a}_n \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1});$$

подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда справедливы утверждения 1)–4) теоремы 6.1, а также утверждение: если подстановка σ^{n-1} является тождественной, то $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – n -полуинвариантная l -арная подгруппа l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Замечание 6.1. Утверждения 2) и 3) теоремы 2.1 справедливы и для теорем 4.1 и 4.2.

В [5] была доказана приведённая ниже теорема.

Теорема 6.3 [5, теорема 4.2.1]. Пусть B – нормальная подгруппа группы A , отличная от неё; факторгруппа A/B является циклической и имеет порядок, делящий $l-1$; подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда для любого смежного класса H факторгруппы A/B декартова степень H^k замкнута относительно l -арной операции $[\]_{l, \sigma, k}$, а универсальная алгебра $\langle H^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ является полуинвариантной l -арной подгруппой l -арной группы $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$. Если же σ – нетождественная подстановка, то l -арная подгруппа $\langle H^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ не является инвариантной в $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$.

Лемма 5.3, теорема 4.1 и замечание 6.1 позволяют сформулировать следующий результат, обобщающий теорему 6.3.

Теорема 6.4. Пусть $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы

$\langle A, \eta \rangle$, отличная от неё; n -арная факторгруппа $\langle A/B, \eta \rangle$ является циклической, порождаемой смежным классом $\eta(\underbrace{aB \dots B}_{n-1})$, порядок ко-

торого делит s ; подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда:

1) для любого смежного класса H n -арной факторгруппы $\langle A/B, \eta \rangle$ декартова степень H^k замкнута относительно l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$, а универсальная алгебра $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ является полуинвариантной l -арной подгруппой l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$;

2) для полуинвариантных в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ l -арных подгрупп $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ и $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ соответствующие l -арные факторгруппы совпадают:

$$\langle A^k / H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle = \langle A^k / B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle;$$

3) конгруэнции ρ_{H^k} и ρ_{B^k} l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, определяемые полуинвариантными l -арными подгруппами $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ и $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ совпадают: $\rho_{H^k} = \rho_{B^k}$;

4) если для некоторого $i = 2, \dots, s$ подстановка $\sigma^{(i-1)(n-1)}$ не является тождественной, то l -арная подгруппа $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуинвариантной в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Замечание 5.1, следствие 5.2 и теорема 6.4 позволяют сформулировать следующий результат.

Теорема 6.5. Пусть $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, отличная от неё; n -арная факторгруппа $\langle A/B, \eta \rangle$ является циклической, порождаемой смежным классом $\eta(\underbrace{aB \dots B}_{n-1})$, выполняется

условие

$$\eta(\underbrace{a \dots a}_n \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{aB \dots B}_{n-1}),$$

подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда справедливы утверждения 1)–4) теоремы 6.4, а также утверждение: если подстановка σ^{n-1} является тождественной, то $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – n -полуинвариантная l -арная подгруппа l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Применение леммы 5.3 позволяет получить следующую теорему, которая доказывается аналогично теореме 3.1, при этом вместо теоремы 2.1 применяется теорема 6.4.

Теорема 6.6. Пусть $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа полуабелевой n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, отличная от неё; n -арная факторгруппа $\langle A/B, \eta \rangle$ является циклической, порождаемой смежным классом $\eta(\underbrace{aB \dots B}_{n-1})$, порядок которо-

го делит s ; подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^n \neq \sigma$, $\sigma^l = \sigma$. Тогда справедливы все утверждения теоремы 6.1. Кроме того, универсальная алгебра $\langle H^k, \eta_{n, \sigma, k} \rangle$ является полуинвариантной, но не n -полуинвариантной l -арной подгруппой в полуабелевой l -арной группе $\langle A^k, \eta_{n, \sigma, k} \rangle$, которая не является n -полуабелевой.

Замечание 6.2. В теореме 6.6, как и в теореме 3.1, в качестве подстановки σ можно выбрать нетождественную подстановку с условием $\sigma^{n+1} = \sigma$, и положить $l = n(n-1) + 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А.М. Полиадические факторгруппы полиадических групп специального вида. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 84–89.
2. Гальмак, А.М. Полиадические факторгруппы полиадических групп специального вида. II / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 4 (65). – С. 62–66.
3. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
4. Русаков, С.А. Алгебраические n -арные системы / С.А. Русаков. – Минск: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
5. Гальмак, А.М. Многочестные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

Поступила в редакцию 12.02.2025.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор

КРИТЕРИИ π -СПЕЦИАЛЬНОСТИ, МЕТА- π -СПЕЦИАЛЬНОСТИ И $(1, \pi')$ -СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

И.М. Дергачева, Е.А. Задорожнюк, И.П. Шабалина

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

CRITERIA FOR π -SPECIALITY, META- π -SPECIALITY, AND $(1, \pi')$ -SUPERSOLUBILITY OF A FINITE GROUP

I.M. Dergacheva, E.A. Zadorozhnyuk, I.P. Shabalina

Belarusian State University of Transport, Gomel

Аннотация. На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу; \mathbb{P} – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' \subseteq \mathbb{P} \setminus \pi$. Группа G называется: (i) π -специальной, если $G = O_{p_1}(G) \times \dots \times O_{p_t}(G) \times O_{\pi'}(G)$ для некоторых $p_1, \dots, p_t \in \pi$; (ii) мета- π -специальной, если для некоторой нормальной подгруппы N группы G обе группы N и G/N являются π -специальными. Подгруппа A группы G называется $(1, \pi')$ -субнормальной в G , если существует цепь подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G$ такая, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо секция $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является π' -группой. В данной работе мы доказываем новые критерии π -специальности, мета- π -специальности и сверхразрешимости группы. В частности, мы доказываем, что группа G является: (i) π -специальной, если каждая максимальная подгруппа группы G имеет $(1, \pi')$ -субнормальное дополнение в G ; (ii) сверхразрешимой, если каждая вторая максимальная подгруппа группы G имеет субнормальное дополнение в G ; (iii) мета- π -специальной, если каждая третья максимальная подгруппа группы G имеет $(1, \pi')$ -субнормальное дополнение в G .

Ключевые слова: конечная группа, π -специальная группа, мета- π -специальная группа, $(1, \pi')$ -сверхразрешимая группа, $(1, \pi')$ -субнормальная подгруппа.

Для цитирования: Дергачева, И.М. Критерии π -специальности, мета- π -специальности и $(1, \pi')$ -сверхразрешимости конечной группы / И.М. Дергачева, Е.А. Задорожнюк, И.П. Шабалина // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 1 (66). – С. 47–52. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_47. – EDN: JKDOYC

Abstract. Throughout this article, all groups are finite, and G always denotes a finite group; \mathbb{P} is the set of all primes, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ and $\pi' \subseteq \mathbb{P} \setminus \pi$. A group G is called: (i) π -special if $G = O_{p_1}(G) \times \dots \times O_{p_t}(G) \times O_{\pi'}(G)$ for some $p_1, \dots, p_t \in \pi$; (ii) meta- π -special if for some normal subgroup N of G both groups N and G/N are π -special. A subgroup A of G is called $(1, \pi')$ -subnormal in G if there is a subgroup chain $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G$ such that either $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ or the section $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ is a π' -group. In this paper we prove new criteria for π -speciality, meta- π -speciality, and supersolvability of a group. In particular, we prove that a group G is: (i) π -special if every maximal subgroup of G has a $(1, \pi')$ -subnormal complement in G ; (ii) supersolvable if every second maximal subgroup of G has a subnormal complement in G ; (iii) meta- π -special if every third maximal subgroup of G has a $(1, \pi')$ -subnormal complement in G .

Keywords: finite group, π -special group, meta- π -special group, $(1, \pi')$ -supersolvable group, $(1, \pi')$ -subnormal subgroup.

For citation: Dergacheva, I.M. Criteria for π -speciality, meta- π -speciality, and $(1, \pi')$ -supersolvability of a finite group / I.M. Dergacheva, E.A. Zadorozhnyuk, I.P. Shabalina // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 1 (66). – P. 47–52. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_47 (in Russian). – EDN: JKDOYC

Введение

На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу; \mathbb{P} – множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' \subseteq \mathbb{P} \setminus \pi$.

Группа G называется:

(i) π -специальной [1], [2], если

$$G = O_{p_1}(G) \times \dots \times O_{p_t}(G) \times O_{\pi'}(G)$$

для некоторых $p_1, \dots, p_t \in \pi$;

(ii) мета- π -специальной, если для некоторой нормальной подгруппы N группы G обе группы N и G/N являются π -специальными.

Подгруппа A группы G называется \mathfrak{F} -субнормальной в G в смысле Кегеля [3] или K - \mathfrak{F} -субнормальной в G [4, 6.1.4], если существует цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_i = G$$

такая, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо секция $A_i / (A_{i-1})_A$ принадлежит \mathfrak{F} .

Определение 0.1. Мы говорим, следуя [5], что подгруппа A группы G является $(1, \pi')$ -субнормальной в G , если A K - \mathfrak{F} -субнормальна в G , где \mathfrak{F} – класс всех π' -групп.

Главный фактор H/K группы G называется:

(i) \mathfrak{F} -центральным (в G), если

$$(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{F};$$

(ii) $(1, \pi')$ -центральным (в G), если $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ – π -специальная группа.

Нормальная подгруппа N называется \mathfrak{F} -гиперцентральной (соответственно, $(1, \pi')$ -гиперцентральной) в G , если каждый главный фактор группы G ниже N является \mathfrak{F} -центральным (соответственно, $(1, \pi')$ -центральным) в G .

Определение 0.2. Мы говорим, следуя [6], что группа G является $(1, \pi')$ -сверхразрешимой, если каждый главный фактор группы G ниже π -специального корадикала группы G является циклическим.

В данной работе мы доказываем следующие результаты.

Теорема 0.3. Группа G является π -специальной в том и только в том случае, когда группа G π -разрешима и для каждой ее максимальной подгруппы M в этой группе имеется $(1, \pi')$ -субнормальное добавление T к M такое, что $(M \cap T)^G$ – $(1, \pi')$ -гиперцентральная в G подгруппа.

Следствие 0.4. Группа G является нильпотентной в том и только в том случае, когда группа G разрешима и для каждой максимальной подгруппы M группы G в этой группе имеется субнормальное добавление T к M такое, что $(M \cap T)^G$ – гиперцентральная в G подгруппа.

Теорема 0.5. Если группа G π -разрешима и для каждой второй максимальной подгруппы M группы G в этой группе имеется $(1, \pi')$ -субнормальное добавление T к M такое, что $(M \cap T)^G$ – $(1, \pi')$ -гиперцентральная в G подгруппа, то группа G является $(1, \pi')$ -сверхразрешимой.

Следствие 0.6. Если группа G разрешима и для каждой второй максимальной подгруппы M группы G в этой группе имеется субнормальное добавление T к M такое, что $(M \cap T)^G$ – гиперцентральная в G подгруппа, то группа G является сверхразрешимой.

Теорема 0.7. Если группа G π -разрешима и для каждой третьей максимальной подгруппы M группы G в этой группе имеется $(1, \pi')$ -субнормальное добавление T к M такое, что

$(M \cap T)^G$ – $(1, \pi')$ -гиперцентральная в G подгруппа, то группа G является мета- π -специальной.

Следствие 0.8. Если группа G разрешима и для каждой третьей максимальной подгруппы M группы G в этой группе имеется субнормальное добавление T к M такое, что $(M \cap T)^G$ – гиперцентральная в G подгруппа, то группа G является метанильпотентной.

2 Некоторые предварительные результаты

Лемма 1.1 [7, лемма 2.6]. Пусть A, K, N – подгруппы группы G , где A является $(1, \pi')$ -субнормальной подгруппой, а N – нормальной подгруппой в G .

(1) $A \cap K$ – $(1, \pi')$ -субнормальная подгруппа в K .

(2) AN/N – $(1, \pi')$ -субнормальная подгруппа в G/N .

(3) Если $N \leq K$ и K/N является $(1, \pi')$ -субнормальной подгруппой в G/N , то K является $(1, \pi')$ -субнормальной подгруппой в G .

(4) π -специальный корадикал группы A является субнормальным в G .

(5) Если A является π -специальной группой, то A^G является π -специальной группой. Более того, если A – π' -группа, то A^G – π' -группа, и если A – p -группа, для некоторого $p \in \pi$, то A^G – p -группа.

Напомним, что класс групп \mathfrak{F} называется *формацией*, если каждый гомоморфный образ каждой \mathfrak{F} -группы является \mathfrak{F} -группой, и $G/(M \cap N) \in \mathfrak{F}$ для любых двух нормальных подгрупп M и N группы G таких, что $G/M, G/N \in \mathfrak{F}$.

Класс групп \mathfrak{F} называется *насыщенным*, если $G \in \mathfrak{F}$ всякий раз, когда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$, (*нормально*) *наследственным*, если $H \in \mathfrak{F}$ всякий раз, когда $G \in \mathfrak{F}$ и H является (нормальной) подгруппой G .

Класс групп \mathfrak{F} называется *классом Фиттинга*, если он нормально наследственный и замкнут относительно взятия произведений нормальных подгрупп.

Лемма 1.2. (1) Класс всех π -специальных групп является одновременно наследственной насыщенной формацией и классом Фиттинга [7, следствия 2.4 и лемма 2.5].

(2) Класс всех мета- π -специальных групп является одновременно наследственной насыщенной формацией и классом Фиттинга [8, лемма 2.3].

(3) Если N – нормальная $(1, \pi')$ -гиперцентральная в G подгруппа и G/N π -специальна то G π -специальна [9, 1, 2.6].

Лемма 1.3 [9, 1, 2.6]. Пусть A, K, N – подгруппы группы G , где A является $(1, \pi')$ -гиперцентральной подгруппой, а N – нормальной подгруппой в G .

(1) $A \cap K$ – $(1, \pi')$ -гиперцентральная подгруппа в K .

(2) AN/N – $(1, \pi')$ -гиперцентральная подгруппа в G/N .

(3) Если $N \leq K$ и K/N является $(1, \pi')$ -гиперцентральной подгруппой в G/N , то K является $(1, \pi')$ -гиперцентральной в G .

Лемма 1.4. Если G является минимальной не π -специальной группой, то G является группой Шмидта.

Доказательство. Понятно, что G является минимальной не π -разложимой группой. Следовательно, G является группой Шмидта согласно [10]. \square

Лемма 1.5 [11, III, 5.2]. Если G – группа Шмидта, то $G = P \rtimes Q$, где $P = P^{\pi} = G'$ – силовская p -подгруппа G , $P/\Phi(P)$ – главный фактор G , и $Q = \langle x \rangle$ – циклическая силовская q -подгруппа G с $\langle x^q \rangle \leq Z(G) \cap \Phi(G)$.

3 Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 0.3. Предположим, что эта теорема не является верной и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть R – минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда R является либо π' -группой, либо p -группой для некоторого $p \in \pi$, поскольку G является π -разрешимой по условию.

(1) G/R – π -специальная группа.

Если M/R – максимальная подгруппа G/R , то M – максимальная подгруппа G и, следовательно, M имеет $(1, \pi')$ -субнормальное добавление T в группе G такое, что $(M \cap T)^G$ – $(1, \pi')$ -гиперцентральная в G подгруппа согласно условию. Ввиду леммы 1.1 (2), TR/R – $(1, \pi')$ -субнормальная в группе G/R подгруппа. Кроме того, $(TR/R)(M/R) = G/R$ и

$$TR/R \cap M/R = R(T \cap M)/R,$$

где

$$\begin{aligned} (TR/R \cap M/R)^{G/R} &= ((TR \cap M)/R)^{G/R} = \\ &= (R(T \cap M)/R)^{G/R} = \\ &= (R(T \cap M))^G/R = R(T \cap M)^G/R \end{aligned}$$

и $R(T \cap M)^G/R$ – $(1, \pi')$ -гиперцентральная в G/R подгруппа ввиду G -изоморфизма

$$R(T \cap M)^G/R = (T \cap M)^G / ((T \cap M)^G \cap R)$$

и леммы 1.3 (2). Таким образом, TR/R – такое $(1, \pi')$ -субнормальное добавление к подгруппе

M/R в группе G/R , что $(M/R \cap TR/R)^{G/R}$ – $(1, \pi')$ -гиперцентральная в G/R подгруппа. Следовательно, гипотеза верна для G/R , поэтому G/R является π -специальной группой по выбору G .

(2) R – единственная минимальная подгруппа в G и $R \not\leq \Phi(G)$. В частности, $C_G(R) \leq R$ и в G имеется такая максимальная подгруппа M , что $G = RM$ и $M_G = 1$.

Если N – минимальная нормальная подгруппа группы G и $N \neq R$, то $N \cap R = 1$ и поэтому $G \simeq G/1 = G/(N \cap R)$ является π -специальной группой согласно леммы 1.2 (1), в отличие от выбора группы G . Отсюда следует, что R – единственная минимальная подгруппа в G и $R \not\leq \Phi(G)$, поскольку, согласно лемме 1.2 (1), класс всех π -специальных групп является насыщенной формацией.

Пусть теперь M – такая максимальная подгруппа в G , что $RM = G$ и пусть $C = C_G(R)$. Тогда $M_G = 1$. Предположим, что $C \neq 1$. Тогда $R \leq C$, поскольку C – нормальная в G подгруппа и R – единственная минимальная подгруппа в G . Следовательно,

$$C_G(R) \cap RM = R(C_G(R) \cap M),$$

где $C_G(R) \cap M$ нормальна в G и поэтому $C_G(R) \cap M \leq M_G = 1$. Следовательно, $C_G(R) \leq R$.

(3) R не является π' -группой.

Предположим, что R является π' -группой и пусть V/R – холлова π' -подгруппа в G/R . Поскольку G/R является π -специальной группой, то V/R – нормальная подгруппа в G/R . Следовательно, $V = O_{\pi'}(G)$ является холловской π' -подгруппой группы G и V π' -специальна, поэтому $R \leq V < G$. Тогда M не содержит V . Пусть T – такое $(1, \pi')$ -субнормальное добавление к M в группе G , что $(T \cap M)^G$ является $(1, \pi')$ -гиперцентральной в G . Если $(T \cap M)^G \neq 1$, то $R \leq (T \cap M)^G$ поскольку R – единственная минимальная нормальная подгруппа G . Но тогда R $(1, \pi')$ -центральна в G и это влечет π -специальность группы ввиду леммы 1.2 (2). Полученное противоречие показывает, что $(T \cap M)^G = 1$ и поэтому T дополнением к M в G .

Тогда $T \neq 1$ и $T \cap V = 1$, следовательно, $T \simeq TV/V$ является π -специальной π -группой ввиду утверждения (1). Отсюда следует, что T нильпотентна. Пусть теперь $p \in \pi(T)$ и p – силовская p -подгруппа в T . Тогда p – $(1, \pi')$ -субнормальная подгруппа в группе G и,

следовательно, $1 < P \leq O_p(G)$ согласно лемме 1.1 (5), что влечет $R \leq O_p(G)$ ввиду утверждения (1) и поэтому $p \in \pi'$. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения (3).

Заключительное противоречие. Рассуждая аналогично рассуждениям, применяемым при доказательстве утверждения (3), можно показать, что R не является p -группой для всех $p \in \pi$. Но это невозможно ввиду утверждения (3), поскольку группа G является π -разрешимой согласно условию. Это заключительное противоречие завершает доказательство теоремы. \square

Доказательство теоремы 0.5. Предположим, что эта теорема не является верной и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда G не является π -специальной группой и если R – минимальная нормальная подгруппа группы G , то R является либо π' -группой, либо p -группой для некоторого $p \in \pi$.

(1) *Каждая максимальная подгруппа группы G является π -специальной.*

Пусть M – произвольная максимальная подгруппа в G и пусть L – произвольная максимальная подгруппа в M . Тогда, согласно условию теоремы, в G имеется такое $(1, \pi')$ -субнормальное добавление к L в группе G , что подгруппа $(T \cap L)^G$ является $(1, \pi')$ -гиперцентральной в G . Тогда $M = M \cap LT = L(M \cap T)$, где $M \cap T$ является $(1, \pi')$ -субнормальным добавлением к L в группе M согласно лемме 1.1 (1). С другой стороны, ввиду леммы 1.3 (1), подгруппа $M \cap T$ является $(1, \pi')$ -гиперцентральной в M . Таким образом, M является π -специальной согласно теореме 1.2.

(2) *G является группой Шмидта. В частности, $G = P \rtimes Q$, где $P = G^{\pi'} = G'$ является силовской p -подгруппой G , а $Q = \langle x \rangle$ является циклической силовской q -подгруппой G для некоторых простых чисел p и q .*

Согласно утверждению (1), каждая максимальная подгруппа группы G является π -специальной. Таким образом, G – минимальная не π -специальная группа и поэтому G – группа Шмидта ввиду леммы 1.4. Следовательно, мы имеем (2) ввиду леммы 1.5.

(3) *Каждая $(1, \pi')$ -гиперцентральная в G подгруппа является гиперцентральной в G , а каждая $(1, \pi')$ -субнормальная в G подгруппа является субнормальной в G .*

Действительно, группа G не является π -специальной и поэтому холловская π' -подгруппа группы G является силовской в G ввиду утверждения (2). Таким образом, каждая секция K/L группы G , являющаяся π' -группой, является

R -группой для некоторого простого числа R . Из этого вытекает утверждение (3).

Заключительное противоречие. Заметим, что $P/\Phi(P)$ является нециклическим главным фактором G , поскольку G не является $(1, \pi')$ -сверхразрешимой, и, в частности, G не является сверхразрешимой. Сначала предположим, что $|Q| = q$. Тогда p является максимальной подгруппой G , поэтому максимальная подгруппа V группы p имеет субнормальное добавление T в G такое, что $(T \cap V)^G$ является гиперцентральной подгруппой в G .

Прежде предположим, что $T = G$. Тогда $P = (T \cap V)^G \leq Z_\infty(G)$, что влечет нильпотентность группы G , что противоречит выбору этой группы, поэтому $T < G$ и, следовательно, T является нильпотентной группой. Тогда группа $G = PT$ является π -специальной группой согласно лемме 1.1 (5), поскольку G является произведением двух π -специальных групп $(1, \pi')$ -субнормальных подгрупп p и T , что приводит к противоречию.

Следовательно, $|Q| > q$. Пусть V – вторая максимальная подгруппа группы q и $M = PV$.

Тогда

$$|G : M| = |PQ : PV| = |Q : V| = q^2,$$

следовательно, для некоторой субнормальной подгруппы T группы G имеем $G = VT$ и $(V \cap T)^G$ является гиперцентральной подгруппой в G .

Тогда $T \neq G$ и $Q = V \times (Q \cap T)$. Отсюда следует, что $V = 1$, следовательно, p является второй максимальной подгруппой группы G , поэтому q является субнормальной в G по гипотезе, что влечет $G = PQ$ является нильпотентной и мы снова приходим к противоречию. \square

Доказательство теоремы 0.7. Предположим, что эта теорема не является верной и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда G не является π -специальной группой и если R – минимальная нормальная подгруппа группы G , то R является либо π' -группой, либо p -группой для некоторого $p \in \pi$.

Пусть H – холлова π' -подгруппа и p – силовская p -подгруппа в G .

(1) *Группа G/R мета- π -специальна.*

Если G/R не имеет третьей максимальной подгруппы, то это очевидно.

Теперь предположим, что G/R имеет третью максимальную подгруппу M/R . Тогда M – третья максимальная подгруппа в группе G и поэтому в этой группе имеется $(1, \pi')$ -субнормальное добавление T к M такое, что $(M \cap T)^G$ – $(1, \pi')$ -гиперцентральная в G подгруппа по гипотезе.

Тогда TR/R является $(1, \pi')$ -субнормальным добавлением к M/R в G/R по лемме 1.1 (2). Кроме того,

$$(TR/R \cap M/R)^{G/R} = R(T \cap M)^G/R$$

– $(1, \pi')$ -гиперцентральная в G/R подгруппа (см. утверждение (1) в доказательстве теоремы 0.3). Следовательно, гипотеза верна для G/R , поэтому G/R является мета- π -специальной группой по выбору G .

(2) R – единственная минимальная подгруппа в G и $R \not\leq \Phi(G)$. В частности, $C_G(R) \leq R$. Кроме того, фактор $R/1$ не является $(1, \pi')$ -центральной в G .

Если N – минимальная нормальная подгруппа группы G и $N \neq R$, то $N \cap R = 1$ и поэтому $G \cong G/1 = G/(N \cap R)$ является мета- π -специальной группой, поскольку класс всех мета- π -специальных групп является насыщенной формацией (см. лемму 1.2 (3)), что противоречит выбору группы G . Отсюда следует, что R – единственная минимальная подгруппа в G и $R \not\leq \Phi(G)$.

Пусть теперь M – такая максимальная подгруппа в G , что $RM = G$ и пусть $C = C_G(R)$. Тогда $M_G = 1$ и $C_G(R) \leq R$ (см. утверждение (1) в доказательстве теоремы 0.3).

(3) $|R|$ не является простым числом.

Действительно, если $|R| = p$ – простое число, то ввиду (2), $G/R = G/C_G(R)$ – подгруппа циклической группы $Aut(R)$ и поэтому G является метанильпотентной и, следовательно, мета- π -специальной группой, что противоречит выбору группы G . Таким образом, имеет место (3).

(4) Если R – π' -группа, то в группе G имеется такая неединичная третья максимальная подгруппа V , что $|G : V|$ не является π' -числом и либо V – максимальная подгруппа в R , либо $R \leq V$.

Пусть W – максимальная подгруппа в R . Тогда $W \neq 1$ ввиду утверждения (3).

Понятно, что $R \leq H \neq G$ и поэтому $\pi \cap \pi(G) \neq \emptyset$. Пусть M – максимальная подгруппа в G , содержащая H . Тогда $|G : M| = p^n$ является p -числом для некоторого $p \in \pi$, поскольку группа G π -разрешима и $|G : M|$ является π -числом.

Если $H = M$, то $R < H$, поскольку в противном случае R и G/R являются π -специальными группами и поэтому группа G в этом случае является мета- π -специальной, что противоречит выбору группы G . Если R максимальна в H , то $W = V$ – третья максимальная подгруппа в G и $|G : V|$ не является π' -числом. Если же

$R \leq L < H$ для некоторой максимальной подгруппы L группы H , то в G имеется такая третья максимальная подгруппа V , что либо $V = W$, либо $R \leq V$ и $V \leq H$ и поэтому $|G : V|$ не является π' -числом.

Предположим теперь, что $H \leq L < M$ для некоторой второй максимальной подгруппы L группы G . Предположим, $H < L$ и пусть V – такая максимальная подгруппа в группе L , что $R \leq H \leq V$. Тогда $|G : V|$ не является π' -числом поскольку H – холлова π' -подгруппа в G .

Теперь предположим, $H = L$. Если $R = H$, то W – 3-максимальная подгруппа в G и $|G : W|$ не является π' -числом. Пусть теперь $H < L$ и V – максимальная подгруппа в L такая, что $H \leq V$. Тогда $|G : V|$ не является π' -числом и $R \leq V$.

(5) Если R – p -группа для некоторого $p \in \pi$, то в группе G имеется такая неединичная третья максимальная подгруппа V , что $|G : V|$ не является p -числом и либо V – максимальная подгруппа в R , либо $R \leq V$.

Это утверждение доказывается аналогично утверждению (4).

(6) Если T – $(1, \pi')$ -субнормальное добавление к V в G такое, что $(V \cap T)^G$ является $(1, \pi')$ -гиперцентральной в G , то $(V \cap T)^G = 1$ и π -специальный корадикал W группы T не является единичной группой.

Действительно, предположим, что $W = 1$. Тогда, ввиду леммы 1.2 (1), W является π -специальной группой.

Прежде предположим, что R – π' -группа. Тогда ввиду утверждения (4), для некоторого $p \in \pi$ имеет место $E := O_p(T) \neq 1$ и E является $(1, \pi')$ -субнормальной подгруппой в G и поэтому $(O_p(T))^G$ – нормальная p -подгруппа в G согласно лемме 1.1 (5), что невозможно ввиду (1). Если же R – p -группа, для некоторого $p \in \pi$, то ввиду утверждения (4), имеет место $B := O_\pi(T) \neq 1$ и тогда $(O_p(T))^G$ – нормальная π' -подгруппа в G согласно лемме 1.1 (5), что невозможно ввиду (1). Таким образом, мы имеем (6).

Заключительное противоречие. Ввиду (6), π -специальный корадикал W группы T является неединичной группой и W субнормальна в G по лемме 1.1 (4). Но тогда $R \leq N_G(W)$ и

$$G = VT = RT,$$

что влечет нормальность подгруппы W в G . Таким образом,

$$R \leq W \leq T < G,$$

согласно утверждению (2). Это заключительное противоречие завершает доказательство теоремы. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chunikhin, S.A.* Subgroups of finite groups / S.A. Chunikhin. – Minsk: Nauka i Tehnika, 1964.
2. *Skiba, A.N.* Some characterizations of finite σ -soluble $P\sigma T$ -groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495. – P. 114–129.
3. *Kegel, O.H.* Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den subnormalteilerverband each enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30, № 3. – S. 225–228.
4. *Ballester-Bolinches, A.* Classes of Finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Springer, Dordrecht, 2006.
5. *Wang, M.* On two classes of sublattices for a subgroup lattice of a finite group / M. Wang, A-Ming Liu, A.N. Skiba // Mathematics. – 2026. – Vol. 14. – DOI: <https://doi.org/10.3390/math14020328>.
6. *Guo, W.* On σ -supersoluble groups and one generalization of CLT -groups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 512. – P. 92–108.
7. *Skiba, A.N.* On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
8. *Huang, J.* On weakly σ -quasinormal subgroups of finite groups / J. Huang, B. Hu, A.N. Skiba // Publ. Math. Debrecen. – 2011. – Vol. 78, № 1. – P. 209–218.
9. *Guo, W.* Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups / W. Guo. – Springer, Heidelberg – New York – Dordrecht – London, 2015.
10. *Belonogov, V.A.* Finite groups all of whose 2-maximal subgroups are π -decomposable / V.A. Belonogov // Trudi Instituta Matematiki i Mekhaniki Uro RAN. – 2014. – Vol. 20, № 2. – P. 29–43.
11. *Huppert, B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1967.

Поступила в редакцию 14.02.2026.

Информация об авторах

Дергачева Ирина Михайловна – к.ф.-м.н., доцент
Задорожнюк Елена Андреевна – к.ф.-м.н., доцент
Шабалина Ирина Петровна – к.ф.-м.н., доцент

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ ОБ F -ИРРЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ ДЛЯ ПРОСТОЙ ЦЕПИ P_n

Т.С. Довженок

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

PROOF OF THE F -IRREGULAR GRAPH CONJECTURE FOR THE PATH P_n

T.S. Dovzhenok

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Пусть F и G – простые конечные неориентированные графы. Граф G называется F -иррегулярным, если любые две его различные вершины принадлежат различному числу подграфов из G , изоморфных графу F . В 1987 году Чартранд, Холберт, Оеллерман и Сварт выдвинули гипотезу о том, что для каждого связного графа F на трех и более вершинах существует нетривиальный F -иррегулярный граф. Мы подтверждаем эту гипотезу для каждой простой цепи P_n порядка $n \geq 3$. Кроме того, для любого целого числа $k \geq 6$ мы строим P_4 -иррегулярный граф порядка k и показываем, что не существует нетривиального P_4 -иррегулярного графа на пяти и менее вершинах.

Ключевые слова: гипотеза об F -иррегулярных графах, простая цепь P_n , P_n -степень вершины, P_n -иррегулярный граф, (F, P_2) -иррегулярный граф.

Для цитирования: Довженок, Т.С. Доказательство гипотезы об F -иррегулярных графах для простой цепи P_n / Т.С. Довженок // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 1 (66). – С. 53–58. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_53. – EDN: KDXMFZ

Abstract. Let F and G be simple, finite, undirected graphs. A graph G is said to be F -irregular if any two of its distinct vertices belong to a different number of subgraphs of G that are isomorphic to F . In 1987, Chartrand, Holbert, Oellermann, and Swart conjectured that for every connected graph F with at least three vertices, there exists a nontrivial F -irregular graph. We confirm this conjecture for every path P_n of order $n \geq 3$. In addition, for each integer $k \geq 6$, we construct a P_4 -irregular graph of order k and show that there does not exist a nontrivial P_4 -irregular graph on five or fewer vertices.

Keywords: F -irregular graph conjecture, path P_n , P_n -degree of a vertex, P_n -irregular graph, (F, P_2) -irregular graph.

For citation: Dovzhenok, T.S. Proof of the F -irregular graph conjecture for the path P_n / T.S. Dovzhenok // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 1 (66). – P. 53–58. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_53. – EDN: KDXMFZ

Introduction

All the graphs considered in this paper are assumed to be simple, finite, and undirected. For a graph G , let $V(G)$ and $E(G)$ denote its vertex set and edge set, respectively. The order of G , denoted by $|G|$, is the number of its vertices, i. e., $|G| = |V(G)|$.

A graph G is called nontrivial if $|G| \geq 2$. An edge incident to distinct vertices u and v is written as uv or (u, v) . The degree of a vertex v in G is the number of edges incident to v . A graph is regular if all its vertices have the same degree. The neighborhood and closed neighborhood of a vertex v in G are defined as $N_G(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$ and $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$, respectively. A graph is connected if there exists a path between any pair of its vertices.

This paper investigates F -irregular graphs, a topic pioneered in 1987 by Chartrand, Holbert, Oellermann, and Swart [1] and based on a generalization of the classical notion of vertex degree.

Definition 0.1. For a graph F , the F -degree of a vertex v in a graph G , denoted by $Fdeg_G(v)$, is the number of subgraphs of G that are isomorphic to F and contain v . A graph G is called F -irregular if any two distinct vertices in G have different F -degrees.

A central problem in this field is to characterize the connected graphs F for which a nontrivial F -irregular graph exists. Chartrand et al. [1] proved that stars and complete graphs of order at least 3 satisfy this condition and proposed the following conjecture.

Conjecture 0.1. For every connected graph F of order $|F| \geq 3$, there exists a nontrivial F -irregular graph.

In 2024, Dovzhenok, Filuta, and Chuhai [2], for any biconnected graph F containing a vertex of degree 2, constructed an infinite series of F -irregular graphs and made a stronger statement than Conjecture 0.1.

Conjecture 0.2. For each connected graph F with $|F| \geq 3$, there are infinitely many F -irregular graphs.

Currently, Conjectures 0.1 and 0.2 remain open, and much of the research in this area focuses on the study of K_3 -irregular graphs, where K_n is a complete graph on n vertices. Berikkyzy et al. [3] proved that the order of a K_3 -irregular graph (triangle-distinct graph) can be any integer not less than 7, and discovered some structural properties of triangle-distinct graphs concerning their degrees and number of edges. Stevanović et al. [4] constructed regular K_3 -irregular graphs, thereby providing an affirmative answer to the question of the existence of such graphs which was posed in 1988 by Chartrand, Erdős, and Oellermann [5].

In this article we explore the problem of F -irregular graphs in the case where F is a path.

Definition 0.2. Let $n \geq 1$ be an integer. A graph P_n with vertex set $V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ and edge set $E(P_n) = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$ is called a path of order n . Vertices v_1 and v_n are the endpoints of P_n . The path P_n is denoted by $v_1 v_2 \dots v_n$ or (v_1, v_2, \dots, v_n) , where $v_1 \dots v_1 = v_1$ by convention.

It is evident that the degree and the P_2 -degree of a vertex in a graph coincide. And since it is known that any nontrivial graph has at least two vertices with the same degree, it follows that a P_2 -irregular graph does not exist. Figure 0.1 illustrates a P_3 -irregular graph of order 6, with each vertex labeled by its P_3 -degree. Moreover, Salehi [6] constructed a P_3 -irregular graph of order k for every integer $k \geq 6$. This implies that Conjecture 0.2 holds for the path P_3 .

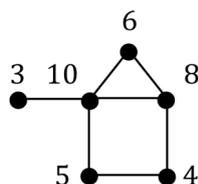


Figure 0.1 – P_3 -irregular graph H_6 of order 6

In this paper, we confirm Conjecture 0.1 for each path P_n on $n \geq 3$ vertices (Section 2). We also construct a P_4 -irregular graph of any order starting from 6, in particular, this confirms Conjecture 0.2 for a path P_4 , and prove that a nontrivial P_4 -irregular graph of order less than 6 does not exist (Section 1). Finally, in Section 3, we present the concept of (F, P_2) -irregular graphs.

The following basic statements will be useful in our work.

Proposition 0.1. If vertices u, v are symmetric in a graph G , i. e., there exists an automorphism f of G such that $f(u) = v$, then for any graph F , the vertices u, v have the same F -degrees in G .

Lemma 0.1. Let F and G be graphs, $u, v \in V(G)$, with $N_G(u) = N_G(v)$ or $N_G[u] = N_G[v]$. Then $Fdeg_G(u) = Fdeg_G(v)$.

Proof. From the condition of Lemma 0.1, it follows that there exists an automorphism f of G such that $f(u) = v$, $f(v) = u$, and $f(w) = w$ for each $w \in V(G) \setminus \{u, v\}$. Consequently, by Proposition 0.1, the vertices u, v have the same F -degrees in G . \square

1 On the order of P_4 -irregular graphs

We begin our investigation of the existence of P_n -irregular graphs by examining the case when $n = 4$, with our primary interest being the order of a P_4 -irregular graph.

First, we will construct a P_4 -irregular graph of any odd order, starting from 9.

Definition 1.1. Let $l \geq 4$ be an integer. We define a graph H_{2l+1} of order $2l+1$ (see Figure 1.1) as follows:

$$\begin{aligned} V(H_{2l+1}) &= V_1 \cup V_2 \cup \{2l+1\}, \\ V_1 &= \{1, 2, \dots, l\}, \\ V_2 &= \{l+1, l+2, \dots, 2l\}, \\ E(H_{2l+1}) &= \{(i, j) \mid i, j \in V_1, i < j\} \cup \\ &\cup \{(i, j) \mid i \in V_2, j \in V_1, i - j \leq l\} \cup \\ &\cup \{(1, 2l+1)\}. \end{aligned}$$

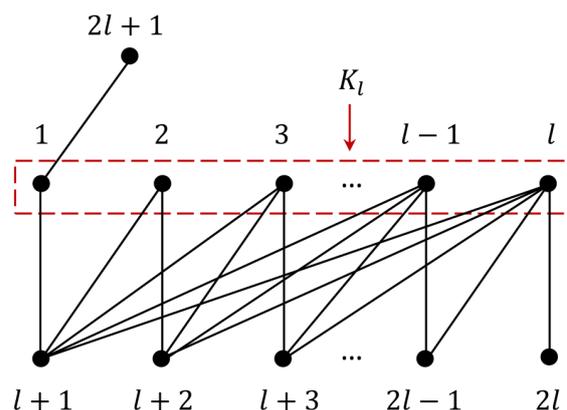


Figure 1.1 – Graph H_{2l+1}

Theorem 1.1. For every integer $l \geq 4$, the graph H_{2l+1} is P_4 -irregular.

Proof. Fix an integer $l \geq 4$ and consider the graph H_{2l+1} . We denote by P the set of all subgraphs of H_{2l+1} that are isomorphic to P_4 , and let

$$h_i = P_4 \deg_{H_{2l+1}}(i) \quad \forall i \in V(H_{2l+1}).$$

We show that the P_4 -degrees of vertices in H_{2l+1} satisfy the following inequalities:

$$h_{2l} > h_{2l+1}, \quad (1.1)$$

$$h_i > h_{i+1} \quad \forall i \in \{l+1, \dots, 2l-1\}, \quad (1.2)$$

$$h_1 > h_{l+1}, \quad (1.3)$$

$$h_2 > h_1, \quad (1.4)$$

$$h_{i+1} > h_i \quad \forall i \in \{2, \dots, l-1\}. \quad (1.5)$$

First, we calculate h_{2l} . There are exactly 3 disjoint sets of copies of P_4 in H_{2l+1} that contain vertex $2l$:

$$A_1 = \{(2l, l, u, v) \mid u \in V_2 \setminus \{2l\}, v \in \{u-l, \dots, l-1\}\},$$

$$A_2 = \{(2l, l, u, v) \mid u \in V_1 \setminus \{l\}, v \in \{1, \dots, l+u\} \setminus \{u\}\},$$

$$A_3 = \{(2l, l, 1, 2l+1)\}.$$

Therefore,

$$\begin{aligned} h_{2l} &= |A_1| + |A_2| + |A_3| = \\ &= \sum_{u=l+1}^{2l-1} (2l-u) + \sum_{u=1}^{l-1} (l+u-2) + 1 = \\ &= \frac{l(l-1)}{2} + \frac{(3l-4)(l-1)}{2} + 1 = \\ &= 2(l-1)^2 + 1. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Next, we find h_{2l+1} . We have exactly 2 disjoint sets of copies of P_4 in H_{2l+1} that contain vertex $2l+1$:

$$B_1 = \{(2l+1, 1, l+1, u) \mid u \in V_1 \setminus \{1\}\},$$

$$B_2 = \{(2l+1, 1, u, v) \mid u \in V_1 \setminus \{1\}, v \in \{2, \dots, l+u\} \setminus \{u\}\}.$$

Therefore,

$$\begin{aligned} h_{2l+1} &= |B_1| + |B_2| = \\ &= l-1 + \sum_{u=2}^l (l+u-2) = \\ &= l-1 + \frac{(3l-2)(l-1)}{2} = \frac{3l(l-1)}{2}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

From (1.6), (1.7), and the inequality $l \geq 4$, we have (1.1):

$$h_{2l} > h_{2l+1} \Leftrightarrow (l-1)(l-4) + 2 > 0.$$

Next, we prove (1.2). Fix $i \in \{l+1, \dots, 2l-1\}$. Let H (see Figure 1.2) be the graph formed from H_{2l+1} by removing the edge $(i, i-l)$.

Note that vertices i and $i+1$ have the same neighborhoods in H :

$$N_H(i) = N_H(i+1) = \{i+1-l, \dots, l\}.$$

Therefore, by Lemma 0.1,

$$P_4 \deg_H(i) = P_4 \deg_H(i+1).$$

For the graph H_{2l+1} , this means that vertices i and $i+1$ belong to the same number of subgraphs of

H_{2l+1} that are isomorphic to P_4 and do not contain the edge $(i, i-l)$. Thus,

$$\begin{aligned} h_i - h_{i+1} &= |X|, \quad i \in \{l+1, \dots, 2l-1\}, \\ X &= \{F \in P \mid (i, i-l) \in E(F), i+1 \notin V(F)\}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

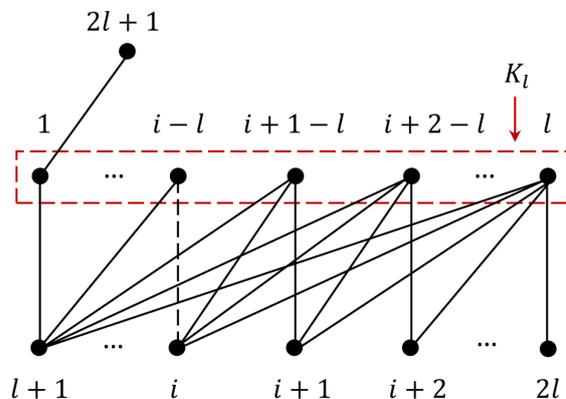


Figure 1.2 – Graph $H = H_{2l+1} \setminus \{(i, i-l)\}$

And since the path $(i, i-l, x, y) \in X$, where $x, y \in V_1 \setminus \{i-l\}$, $x < y$, then $|X| > 0$, and together with (1.8) this guarantees the truth of (1.2).

Next, to prove (1.3), consider the graph G which is formed from H_{2l+1} by removing the edge $(1, 2l+1)$. Note that the closed neighborhoods of vertices 1 and $l+1$ coincide in graph G :

$$N_G[1] = N_G[l+1] = \{1, \dots, l+1\}.$$

Therefore, by Lemma 0.1,

$$P_4 \deg_G(1) = P_4 \deg_G(l+1),$$

and hence,

$$h_1 - h_{l+1} = |Y|,$$

$$Y = \{F \in P \mid (1, 2l+1) \in E(F), l+1 \notin V(F)\}. \quad (1.9)$$

For (1.3) to be true, taking into account (1.9), it remains to note that $|Y| > 0$, since the path $(2l+1, 1, 2, 3) \in Y$.

We now prove (1.4). Let W (see Figure 1.3) be the graph obtained from H_{2l+1} by removing the two edges $(1, 2l+1)$ and $(2, l+2)$. Note that the closed neighborhoods of vertices 1 and 2 in the graph W are equal:

$$N_W[1] = N_W[2] = \{1, \dots, l+1\}.$$

Therefore, by Lemma 0.1,

$$P_4 \deg_W(1) = P_4 \deg_W(2),$$

and hence,

$$h_2 - h_1 = |M| - |K|,$$

$$K = \{F \in P \mid (1, 2l+1) \in E(F), 2 \notin V(F)\},$$

$$M = \{F \in P \mid (2, l+2) \in E(F), 1 \notin V(F)\}. \quad (1.10)$$

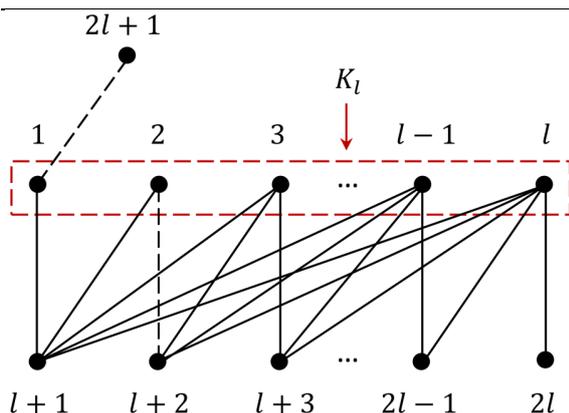


Figure 1.3 – Graph $W = H_{2l+1} \setminus \{(1, 2l+1), (2, l+2)\}$

The set M can be represented as the union of five disjoint sets:

$$M_1 = \{(l+2, 2, l+1, v) \mid v \in \{3, \dots, l\}\},$$

$$M_2 = \{(l+1, 2, l+2, v) \mid v \in \{3, \dots, l\}\},$$

$$M_3 = \{(2, l+2, u, v) \mid u \in \{3, \dots, l\}, \\ v \in \{3, \dots, l+u\} \setminus \{u, l+2\}\},$$

$$M_4 = \{(l+2, 2, u, v) \mid u \in \{3, \dots, l\}, \\ v \in \{3, \dots, l+u\} \setminus \{u, l+2\}\},$$

$$M_5 = \{(u, 2, l+2, v) \mid u, v \in \{3, \dots, l\}, u \neq v\}.$$

Therefore,

$$\begin{aligned} |M| &= |M_1| + |M_2| + |M_3| + |M_4| + |M_5| = \\ &= 2(l-2) + 2 \sum_{u=3}^l (l+u-4) + (l-2)(l-3) = \\ &= (l-2)(4l-6). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Then, taking into account (1.7), (1.10), (1.11), and the inequality $l \geq 4$, we have

$$\begin{aligned} h_2 - h_1 &= |M| - |K| \geq |M| - h_{2l+1} = \\ &= (l-2)(4l-6) - \frac{3l(l-1)}{2} = \\ &= \frac{1}{2}(5l^2 - 25l + 24) > 0, \end{aligned}$$

from which (1.4) follows.

Finally, we prove (1.5). Fix $i \in \{2, \dots, l-1\}$ and similarly to proof (1.2), we obtain

$$h_{i+1} - h_i = |Z|, \quad i \in \{2, \dots, l-1\},$$

$$Z = \{F \in P \mid (i+1, i+l+1) \in E(F), i \notin V(F)\}. \quad (1.12)$$

Note that the path $(i+l+1, i+1, z, w) \in Z$, where $z, w \in V_1 \setminus \{i, i+1\}$, $z < w$. Therefore, $|Z| > 0$ and, consequently, according to (1.12), inequality (1.5) is true.

From (1.1)–(1.5) it follows that the P_4 -degrees of the vertices in H_{2l+1} are pairwise distinct. Therefore, the graph H_{2l+1} is P_4 -irregular. \square

Now we will formulate a criterion for the existence of a nontrivial P_4 -irregular graph of order k .

Theorem 1.2. *There exists a nontrivial P_4 -irregular graph of order k if and only if k is an integer and $k \geq 6$.*

Proof. Sufficiency. Figure 1.4 shows the P_4 -irregular graphs H_6, H_7 , of order 6, 7, respectively, and each vertex of these graphs is labeled with its P_4 -degree. An example of a P_4 -irregular graph of odd order $k \geq 9$, according to Theorem 1.1, is the graph H_k . A P_4 -irregular graph of even order $k \geq 8$ can be constructed by adding an isolated vertex to the graph H_{k-1} , whose P_4 -degrees of vertices, based on Figure 1.4 and the proof of Theorem 1.1, are distinct and positive.

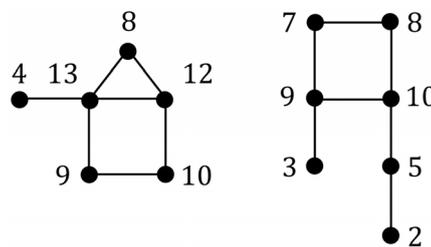


Figure 1.4 – P_4 -irregular graphs H_6, H_7 of order 6, 7

Necessity. Consider any nontrivial P_4 -irregular graph of order k . By definition, k is an integer. Moreover, $k > 4$, since in any graph of order 2, 3, or 4, the P_4 -degrees of all vertices are equal. Next, referring to the graph diagrams [7, Appendix 1, P. 216–217], it is straightforward to verify that each of the 34 existing graphs of order 5 has two symmetric vertices. Consequently, by Proposition 0.1, the P_4 -degrees of such vertices are equal in every graph of order 5, which implies that no P_4 -irregular graph of order 5 exists. From the foregoing, it follows that $k \geq 6$. This completes the proof. \square

2 Main result

Our goal in this section is to confirm Conjecture 0.1 for any path P_n with $n \geq 3$ vertices.

Theorem 2.1. *For every integer $n \geq 3$, there exists a nontrivial P_n -irregular graph.*

Proof. Since the graph H_6 (Figures 0.1, 1.4) is P_3 -irregular and P_4 -irregular, Theorem 2.1 is true for $n = 3$ and $n = 4$.

Let $n \geq 5$ be an integer. Consider a graph S_{3n-4} (Figure 2.1) with a set of vertices

$$V(S_{3n-4}) = V_1 \cup V_2 \cup V_3,$$

$$V_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\},$$

$$V_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_n\},$$

$$V_3 = \{c_1, c_2, \dots, c_{n-3}\},$$

and a set of ages

$$E(S_{3n-4}) = \{a_i a_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-2\} \cup \{b_i b_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{c_i c_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-4\} \cup \{a_{n-1} b_n, a_{n-1} c_{n-3}, b_n c_{n-3}\}.$$

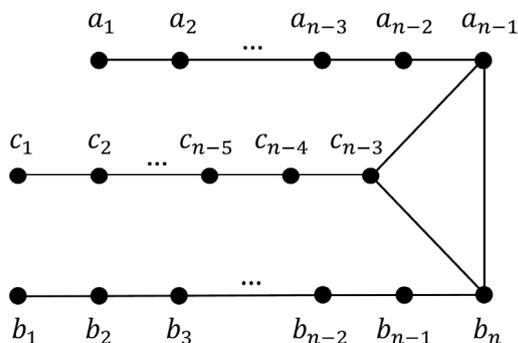


Figure 2.1 – Graph S_{3n-4}

Let us prove that S_{3n-4} is a P_n -irregular graph.

We define an n -path as any subgraph of S_{3n-4} that is isomorphic to P_n .

First, we find the P_n -degrees of vertices from the set V_1 .

The vertex a_1 belongs to exactly two n -paths: $a_1 \dots a_{n-1} b_n$, $a_1 \dots a_{n-1} c_{n-3}$. Therefore,

$$P_n \deg_{S_{3n-4}}(a_1) = 2. \quad (2.1)$$

Further, let $i \in \{2, \dots, n-3\}$. The graph S_{3n-4} contains exactly 4 n -paths with endpoint a_i :

$$\begin{aligned} & a_i \dots a_{n-1} c_{n-3} \dots c_{n-i-2}, \\ & a_i \dots a_{n-1} c_{n-3} b_n \dots b_{n-i+2}, \\ & a_i \dots a_{n-1} b_n \dots b_{n-i+1}, \\ & a_i \dots a_{n-1} b_n c_{n-3} \dots c_{n-i-1}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Note that any n -path containing a vertex a_i either contains a vertex a_{i-1} , or, alternatively, has a_i as an endpoint. From this, taking into account (2.1), (2.2), we obtain

$$\begin{aligned} P_n \deg_{S_{3n-4}}(a_i) &= P_n \deg_{S_{3n-4}}(a_{i-1}) + 4 \\ \forall i \in \{2, \dots, n-3\}, P_n \deg_{S_{3n-4}}(a_i) &= 2. \end{aligned}$$

Thus, the P_n -degrees of the vertices a_1, \dots, a_{n-3} in S_{3n-4} form an arithmetic progression with a difference of 4 and a first term of 2. Therefore,

$$P_n \deg_{S_{3n-4}}(a_i) = 4i - 2 \quad \forall i \in \{1, \dots, n-3\}. \quad (2.3)$$

Consider the vertex a_{n-2} . The graph S_{3n-4} contains exactly 3 n -paths with endpoint a_{n-2} :

$$a_{n-2} a_{n-1} c_{n-3} b_n \dots b_4,$$

$$a_{n-2} a_{n-1} b_n \dots b_3,$$

$$a_{n-2} a_{n-1} b_n c_{n-3} \dots c_1. \quad (2.4)$$

Similar to finding the P_n -degrees of vertices a_2, \dots, a_{n-3} , taking into account (2.3), (2.4), we deduce that

$$\begin{aligned} P_n \deg_{S_{3n-4}}(a_{n-2}) &= \\ &= P_n \deg_{S_{3n-4}}(a_{n-3}) + 3 = 4n - 11. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Let's look at the vertex a_{n-1} . Given the structure of S_{3n-4} , the set of all n -paths containing a_{n-1} can be represented as the union of two disjoint subsets G_1 and G_2 , where G_1 is the set of all n -paths containing a_{n-2} , and G_2 is the set of all n -paths containing a_{n-1} and not having vertices in $V_1 \setminus \{a_{n-1}\}$. From (2.5), it follows that

$$|G_1| = P_n \deg_{S_{3n-4}}(a_{n-2}) = 4n - 11. \quad (2.6)$$

Let us calculate $|G_2|$. Clearly, for every n -path from G_2 , one of its endpoints, but not both, belongs to the set $V_2 \setminus \{b_1, b_n\}$.

Next, for each $i \in \{2, \dots, n-1\}$, we list all n -paths with endpoint b_i that contain a_{n-1} and do not contain vertices from $V_1 \setminus \{a_{n-1}\}$:

$$\begin{aligned} & b_2 : b_2 \dots b_n a_{n-1}, \\ & b_3 : b_3 \dots b_n a_{n-1} c_{n-3}, \quad b_3 \dots b_n c_{n-3} a_{n-1}, \\ & b_i : b_i \dots b_n a_{n-1} c_{n-3} \dots c_{n-i} \quad \forall i \in \{4, \dots, n-1\}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

From (2.7), it follows that

$$|G_2| = n - 1. \quad (2.8)$$

Therefore, using (2.6) and (2.8), we obtain

$$P_n \deg_{S_{3n-4}}(a_{n-1}) = |G_1| + |G_2| = 5n - 12. \quad (2.9)$$

Let us find P_n -degrees of vertices from the set V_2 . Since the vertex b_1 belongs to only one n -path ($b_1 \dots b_n$), then

$$P_n \deg_{S_{3n-4}}(b_1) = 1. \quad (2.10)$$

Let H_1 be the graph obtained from S_{3n-4} by removing the vertex b_1 . It is easy to see that in H_1 the vertices b_2, \dots, b_n are symmetric to the vertices a_1, \dots, a_{n-1} , respectively.

Therefore, by Proposition 0.1, we have

$$P_n \deg_{H_1}(b_i) = P_n \deg_{H_1}(a_{i-1}) \quad \forall i \in \{2, \dots, n\}. \quad (2.11)$$

And since when deleting b_1 from S_{3n-4} , exactly one n -path $b_1 \dots b_n$ is "lost", then

$$\begin{aligned} P_n \deg_{H_1}(a_i) &= P_n \deg_{S_{3n-4}}(a_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \\ P_n \deg_{H_1}(b_i) &= P_n \deg_{S_{3n-4}}(b_i) - 1 \quad \forall i \in \{2, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Taking into account (2.3), (2.5), (2.9), (2.11), and (2.12), we have

$$\begin{aligned}
 P_n \deg_{S_{3n-4}}(b_i) &= P_n \deg_{S_{3n-4}}(a_{i-1}) + 1 = \\
 &= 4i - 5 \quad \forall i \in \{2, \dots, n-2\}, \\
 P_n \deg_{S_{3n-4}}(b_{n-1}) &= \\
 &= P_n \deg_{S_{3n-4}}(a_{n-2}) + 1 = 4n - 10, \\
 P_n \deg_{S_{3n-4}}(b_n) &= \\
 &= P_n \deg_{S_{3n-4}}(a_{n-1}) + 1 = 5n - 11. \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

Finally, we find the P_n -degrees of the vertices from the set V_3 . Let H_2 be the graph obtained from S_{3n-4} by removing vertices a_1 and a_2 . In H_2 , the vertices c_1, \dots, c_{n-3} are symmetric to the vertices a_3, \dots, a_{n-1} , respectively. Therefore, by Proposition 0.1, we have

$$\begin{aligned}
 P_n \deg_{H_2}(c_i) &= P_n \deg_{H_2}(a_{i+2}) \\
 \forall i \in \{1, \dots, n-3\}. \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

Note that when deleting vertices a_1, a_2 from S_{3n-4} , exactly 6 n -paths were “lost”:

$$\begin{aligned}
 a_1 \dots a_{n-1} b_n, \quad a_1 \dots a_{n-1} c_{n-3}, \\
 a_2 \dots a_{n-1} b_n b_{n-1}, \quad a_2 \dots a_{n-1} b_n c_{n-3}, \\
 a_2 \dots a_{n-1} c_{n-3} b_n, \quad a_2 \dots a_{n-1} c_{n-3} c_{n-4}. \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

From (2.15), it follows that

$$\begin{aligned}
 P_n \deg_{H_2}(a_i) &= P_n \deg_{S_{3n-4}}(a_i) - 6 \\
 \forall i \in \{3, \dots, n-1\}, \\
 P_n \deg_{H_2}(c_i) &= P_n \deg_{S_{3n-4}}(c_i) \\
 \forall i \in \{1, \dots, n-5\}, \\
 P_n \deg_{H_2}(c_{n-4}) &= P_n \deg_{S_{3n-4}}(c_{n-4}) - 1, \\
 P_n \deg_{H_2}(c_{n-3}) &= P_n \deg_{S_{3n-4}}(c_{n-3}) - 4. \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

Based on (2.3), (2.5), (2.9), (2.14), and (2.16), we come to the conclusion that

$$\begin{aligned}
 P_n \deg_{S_{3n-4}}(c_i) &= P_n \deg_{S_{3n-4}}(a_{i+2}) - 6 = 4i \\
 \forall i \in \{1, \dots, n-5\}, \\
 P_n \deg_{S_{3n-4}}(c_{n-4}) &= P_n \deg_{S_{3n-4}}(a_{n-2}) - 5 = 4n - 16, \\
 P_n \deg_{S_{3n-4}}(c_{n-3}) &= \\
 &= P_n \deg_{S_{3n-4}}(a_{n-1}) - 2 = 5n - 14. \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

To complete the proof of Theorem 2.1, it remains to note that for any integer $n \geq 5$, according to (2.3), (2.5), (2.9), (2.10), (2.13), and (2.17), the P_n -degrees of all vertices in S_{3n-4} are pairwise distinct. Consequently, S_{3n-4} is a P_n -irregular graph for every integer $n \geq 5$. \square

Conclusion

In this paper, for each integer $k \geq 6$, we constructed a P_4 -irregular graph of order k and proved that for every path P_n on $n \geq 3$ vertices, there exists a nontrivial P_n -irregular graph.

Ali, Chartrand, and Zhang [8, p. 31] suggest several other research directions based on variations of the F -degree of a vertex in a graph. In relation to paths, we highlight for further study the problem of the existence of $[P_n]$ -irregular graphs. In such graphs, any two distinct vertices belong to a different number of induced subgraphs isomorphic to the path P_n .

We also present a new concept of irregularity in graphs, shifting the focus from the vertices of a graph to its edges. For graphs F and G , we say that G is (F, P_2) -irregular if any two distinct edges of the graph G belong to different numbers of subgraphs of G that are isomorphic to F . Specifically, regarding paths, we pose the following problem: *for which integers $n \geq 4$, does a (P_n, P_2) -irregular graph with two or more edges exist?*

REFERENCES

1. *F-degrees in graphs* / G. Chartrand, K.S. Holbert, O.R. Oellermann, H.C. Swart // *Ars Combinatoria*. – 1987. – № 24. – P. 133–148.
2. *Dovzhenok, T.S.* On some results of the study of F -irregular graphs in the class of biconnected graphs F / T.S. Dovzhenok, A.V. Filuta, N.E. Chuhai // *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. – 2024. – № 2. – P. 54–64 (in Russian).
3. *Triangle-degree and triangle-distinct graphs* / Z. Berikkyzy, B. Bjorkman, H.S. Blake, S. Jahanbekam, L. Keough, K. Moss, D. Rorabaugh, S. Shan // *Discrete Mathematics*. – 2024. – Vol. 347, № 1. – Article no. 113695.
4. *On regular triangle-distinct graphs* / D. Stevanović, M. Ghebleh, G. Caporossi, A. Vijayakumar, S. Stevanović // *Computational and Applied Mathematics*. – 2024. – № 43. – Article no. 336.
5. *Chartrand, G.* How to define an irregular graph / G. Chartrand, P. Erdős, O.R. Oellermann // *The College Mathematics Journal*. – 1988. – Vol. 19, № 1. – P. 36–42.
6. *Salehi, E.* On P_3 -degree of graphs / E. Salehi // *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*. – 2007. – № 62. – P. 45–51.
7. *Harary, F.* *Graph Theory* / F. Harary. – Boston: Addison-Wesley, 1969. – 274p.
8. *Ali, A.* *Irregularity in Graphs* / A. Ali, G. Chartrand, P. Zhang. – New York: Springer, 2021. – 109 p.

The article was submitted 12.01.2026.

Информация об авторах

Довженок Татьяна Степановна – к.ф.-м.н.

НЕЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОТКРЫТЫХ СЕТЕЙ ОБСЛУЖИВАНИЯ С КОНТРОЛЬНЫМИ ОЧЕРЕДЯМИ И КВАРАНТИННЫМ УЗЛОМ

С.Ю. Евмененко

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

INSENSITIVITY OF THE STATIONARY DISTRIBUTION OF OPEN QUEUEING NETWORKS WITH CONTROL QUEUES AND A QUARANTINE NODE

S.Y. Evmenenko

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Рассматривается открытая сеть массового обслуживания с контрольными очередями и карантинным узлом. В [1] для данной сети обслуживания были получены условия эргодичности и исследован стационарный режим функционирования сети. Все узлы, в том числе карантинный, предполагаются однолинейными. В настоящей статье доказано, что стационарные распределения как открытой сети обслуживания с контрольными очередями, так и изолированного узла с контрольной очередью инвариантны относительно распределения времени обслуживания заявок при фиксированных первых моментах.

Ключевые слова: теория массового обслуживания, стохастические процессы, теория вероятностей, открытые сети обслуживания, сети с контрольными очередями, сети с карантинным узлом.

Для цитирования: Евмененко, С.Ю. Нечувствительность стационарного распределения открытых сетей обслуживания с контрольными очередями и карантинным узлом / С.Ю. Евмененко // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 1 (66). – С. 59–70. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_59. – EDN: MFJOOC

Abstract. An open queueing network with control queues and a quarantine node is considered. In [1], ergodicity conditions were derived for this network, and its stationary behavior was analyzed. All nodes, including the quarantine node, are assumed to be single-server. The present article proves that the stationary distributions of both the open queueing network with control queues and an isolated node with a control queue are insensitive to the service time distributions of requests, provided their first moments remain fixed.

Keywords: queueing theory, stochastic processes, probability theory, open queueing networks, networks with control queues, networks with a quarantine node.

For citation: Evmenenko, S.Y. Insensitivity of the stationary distribution of open queueing networks with control queues and a quarantine node / S.Y. Evmenenko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 1 (66). – P. 59–70. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_59 (in Russian). – EDN: MFJOOC

Введение

Теория массового обслуживания является одним из фундаментальных направлений прикладной вероятности и играет ключевую роль в анализе телекоммуникационных, вычислительных, производственных и социальных систем. Классические результаты [2], [3] показали, что для широкого класса сетей массового обслуживания стационарные распределения обладают простой факторизуемой структурой и могут быть найдены в явном виде.

Особый интерес в теории представляет свойство *нечувствительности* (insensitivity) стационарных распределений – инвариантности по отношению к форме распределений времен обслуживания при фиксированных средних. Это свойство существенно упрощает анализ сложных систем, поскольку позволяет игнорировать детали

распределений и опираться лишь на их первые моменты.

В ряде работ Гомельской школы по мультипликативным сетям была подробно исследована стохастическая динамика сетей массового обслуживания с экспоненциальным ограничением на время пребывания заявок в узлах. В частности, в одной из работ был проанализирован стационарный режим функционирования таких сетей и получены условия их эргодичности [4]. В последующих исследованиях для этого же класса моделей было доказано, что стационарное распределение числа заявок в узлах является инвариантным относительно распределений времен обслуживания при фиксированных первых моментах [5]. Кроме того, в рамках исследований Гомельской школы по мультипликативным сетям были получены результаты, касающиеся свойства нечувствительности стационарного

распределения для сетей массового обслуживания с обходами узлов заявками [6].

В работе [1] был исследован стационарный режим открытой сети массового обслуживания с контрольными очередями и карантинным узлом (все узлы являются однолинейными), а также получены условия эргодичности данной модели. Однако вопрос о нечувствительности стационарного распределения для этой сети оставался открытым.

1 Постановка задачи

В открытую сеть массового обслуживания, состоящую из N однолинейных узлов с контрольными очередями и $(N+1)$ -го узла, который назовем карантинным. В сеть поступает простейший поток заявок с параметром λ . Каждая заявка независимо от других заявок направляется в i -ый узел с контрольной очередью с вероятностью $p_{0,i}$ ($\sum_{i=1}^N p_{0,i} = 1, i = \overline{1, N}$). Каждая заявка, поступающая в i -ый узел с контрольной очередью, присоединяется к контрольной очереди, где проверяется на стандартность. Времена проверки независимы, не зависят от процессов поступления, обслуживания и имеют показательное распределение с параметром ν_i , ν_i – некоторая положительная постоянная ($i = \overline{1, N}$). Каждая заявка после окончания проверки в i -ом узле с вероятностью p_i признается нестандартной и независимо от других заявок мгновенно направляется в очередь $(N+1)$ -го узла, а с вероятностью $1-p_i$ присоединяется к очереди стандартных заявок в i -ом узле. Каждая стандартная заявка после завершения обслуживания в i -ом узле независимо от других заявок мгновенно направляется в j -ый узел с вероятностью $p_{i,j}$, а с вероятностью $p_{i,0}$ покидает сеть

$$\left(\sum_{j=1}^N p_{i,j} + p_{i,0} = 1, i = \overline{1, N} \right).$$

В $(N+1)$ -ом узле, который назовем карантинным, осуществляется восстановление качества (лечение) нестандартных заявок или их обезвреживание. Каждая заявка после обслуживания в $(N+1)$ -ом узле независимо от других заявок мгновенно направляется в очередь j -го узла с вероятностью $p_{N+1,j}$, т. е. «вылечивается» и продолжает движение по сети, а с вероятностью $p_{N+1,0}$ обезвреживается, т. е. покидает сеть

$$\left(\sum_{j=1}^N p_{N+1,j} + p_{N+1,0} = 1 \right).$$

Стандартные заявки, а также заявки, проходящие «лечение» в карантинном узле, обслуживаются единственным прибором i -го узла ($i = \overline{1, N+1}$), времена обслуживания заявок независимы, не зависят от процесса поступления, процесса проверки заявок на стандартность и имеют произвольную функцию распределения $B_i(t)$, для которой верно равенство

$$\mu_i^{-1} = \int_0^{+\infty} [1 - B_i(t)] dt, i = \overline{1, N+1}, \quad (1.1)$$

где μ_i – скорость обслуживания заявок i -ым прибором.

Дисциплина обслуживания стандартных заявок, а также заявок, находящихся в карантинном узле, – LCFS PR. Заявка, поступающая в узел, вытесняет заявку с прибора и начинает обслуживаться, а вытесненная заявка становится в начало обычной очереди на обслуживание, сдвигая стоящие в ней заявки. При повторном поступлении на прибор заявка продолжает дообслуживаться оставшееся время. Таким образом, поступающая в узел заявка имеет абсолютный приоритет перед всеми остальными заявками, находящимися в узле. Нумерация заявок в очереди каждого узла осуществляется от конца очереди к прибору.

Состояние сети в момент времени t будем описывать вектором

$$\mathbf{x}(t) = (\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_{N+1}(t)),$$

где $\mathbf{x}_i(t) = (m_i(t), n_i(t))$ – состояние i -го узла с контрольной очередью в момент времени t , $m_i(t)$ – число заявок в контрольной очереди, $n_i(t)$ – число заявок очереди на обслуживание в i -ом узле в момент времени t ($i = \overline{1, N}$); $\mathbf{x}_{N+1}(t) = n_{N+1}(t)$ – число заявок в карантинном $(N+1)$ -ом узле в момент времени t .

Для марковского случая, т. е. когда

$$B_i(t) = 1 - \exp\{-\mu_i t\}, t > 0, i = \overline{1, N+1},$$

процесс $\mathbf{x}(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и счетным пространством состояний $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{N+1}$, где

$$X_i = \{x_i = (m_i, n_i) : m_i, n_i \geq 0, i = \overline{1, N}\},$$

$$X_{N+1} = \{x_{N+1} = n_{N+1} : n_{N+1} \geq 0\}.$$

Изолируем i -й узел с контрольной очередью от сети ($i = \overline{1, N}$), помещая его в фиктивную среду и предполагая, что в него поступает простейший поток заявок интенсивности λ . Под изолированным узлом будем понимать изолированный от сети узел, в который поступает простейший поток заявок с интенсивностью, равной

интенсивности потока заявок, входящих в этот узел сети. Каждая поступающая заявка присоединяется к контрольной очереди, где проверяется экспоненциальным прибором на стандартность. Времена проверки независимы, не зависят от процессов поступления, обслуживания и имеют показательное распределение с параметром ν , ν – некоторая положительная постоянная. Дисциплина проверки заявок произвольная. Каждая заявка после окончания проверки либо с вероятностью p признается нестандартной и покидает систему, либо с вероятностью $1 - p$ присоединяется к очереди стандартных заявок.

Времена обслуживания заявок в системе независимы, не зависят от процессов поступления, проверки на стандартность и имеют произвольную функцию распределения $B(t)$, для которой выполняется

$$\mu^{-1} = \int_0^{+\infty} [1 - B(t)] dt, \quad (1.2)$$

где μ – скорость обслуживания заявок из обычной очереди единственным прибором изолированного узла с контрольной очередью ($\mu = \mu_i, i = \overline{1, N}$).

Функционирование рассматриваемой системы массового обслуживания в момент времени t описывается случайным процессом

$$x(t) = (m(t), n(t)),$$

где $m(t)$ – количество заявок в контрольной очереди в момент времени t , $n(t)$ – количество заявок в обычной очереди в момент времени t . Тогда $x(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и счетным пространством состояний $X = \{x = (m, n) : m, n \geq 0\}$.

Цель настоящей работы – доказать для дисциплины обслуживания LCFS PR инвариантность стационарного распределения числа заявок при фиксированных первых моментах для сети массового обслуживания с контрольными очередями и карантинным узлом, а также для изолированного узла с контрольной очередью.

2 Марковский случай

Стационарный режим функционирования данной сети массового обслуживания при $B_i(t) = 1 - \exp\{-\mu_i t\}, t > 0, i = \overline{1, N+1}$, был исследован в [1]. Приведем из [1] уравнения глобального равновесия для данной сети массового обслуживания в марковском случае

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) \left(\lambda + \sum_{i=1}^N \mu_i I_{n_i \neq 0} + \mu_{N+1} I_{n_{N+1} \neq 0} + \sum_{i=1}^N \nu_i I_{m_i \neq 0} \right) = \\ = \sum_{i=1}^N p(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i^1) \lambda p_{i0} I_{m_i \neq 0} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \sum_{i=1}^N p(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^2) \mu_i p_{i0} + p(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1}) \mu_{N+1} p_{N+10} + \\ + \sum_{i=1}^N p(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_{N+1}) \nu_i p_i I_{n_{N+1} \neq 0} + \\ + \sum_{i=1}^N p(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_i^2) \nu_i (1 - p_i) I_{n_i \neq 0} + \\ + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p(\mathbf{x} + \mathbf{e}_j^2 - \mathbf{e}_i^1) \mu_j p_{ji} I_{m_i \neq 0} + \\ + \sum_{i=1}^N p(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1} - \mathbf{e}_i^1) \mu_{N+1} p_{N+1i} I_{m_i \neq 0}, \mathbf{x} \in X. \quad (2.1) \end{aligned}$$

Здесь и далее \mathbf{e}_i – единичный вектор i -го направления.

Разобьем уравнение глобального равновесия (2.3) на уравнения локального равновесия следующим образом

$$\begin{aligned} \lambda p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N p(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^2) \mu_i p_{i0} + \\ + p(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1}) \mu_{N+1} p_{N+10}; \quad (2.2) \\ p(\mathbf{x}) \left(\sum_{i=1}^N \mu_i I_{n_i \neq 0} + \mu_{N+1} I_{n_{N+1} \neq 0} + \sum_{i=1}^N \nu_i I_{m_i \neq 0} \right) = \\ = \sum_{i=1}^N p(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i^1) \lambda p_{i0} I_{m_i \neq 0} + \\ + \sum_{i=1}^N p(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_{N+1}) \nu_i p_i I_{n_{N+1} \neq 0} + \\ + \sum_{i=1}^N p(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_i^2) \nu_i (1 - p_i) I_{n_i \neq 0} + \\ + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p(\mathbf{x} + \mathbf{e}_j^2 - \mathbf{e}_i^1) \mu_j p_{ji} I_{m_i \neq 0} + \\ + \sum_{i=1}^N p(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1} - \mathbf{e}_i^1) \mu_{N+1} p_{N+1i} I_{m_i \neq 0}, \mathbf{x} \in X. \quad (2.3) \end{aligned}$$

Также в [1] исследован стационарный режим работы изолированного узла с контрольной очередью при $B(t) = 1 - \exp\{-\mu t\}, t > 0$. Приведем ниже глобальные уравнения равновесия для такого изолированного узла из [1]

$$\begin{aligned} p(m, n) [\lambda + \mu I_{n \neq 0} + \nu I_{m \neq 0}] = \\ = p(m-1, n) \lambda I_{m \neq 0} + p(m, n+1) \mu + p(m+1, n) \nu p + \\ + p(m+1, n-1) \nu (1-p) I_{n \neq 0}, (m, n) \in X. \quad (2.4) \end{aligned}$$

3 Немарковский случай

3.1 Инвариантность финального распределения изолированного узла с контрольной очередью

Теперь откажемся от предположения, что времена обслуживания заявок в изолированном узле с контрольной очередью имеют показательное распределение. Однако по-прежнему предполагается независимость процесса поступления заявок, процесса обслуживания единственным прибором изолированного узла заявок из обычной очереди и проверка на стандартность заявок

в контрольной очереди. В этом случае процесс, описывающий число заявок в изолированном узле с контрольной очередью в момент времени t , не является марковским. Далее докажем, что для такого процесса справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. При выполнении условий (1.2) и

$$\frac{\lambda}{\nu} < 1, \frac{\lambda(1-p)}{\mu} < 1,$$

случайный процесс, описывающий число заявок в изолированном узле в момент времени t , имеет финальное строго положительное распределение вида

$$p(m, n) = \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^m \left(\frac{\lambda(1-p)}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\nu}\right) \left(1 - \frac{\lambda(1-p)}{\mu}\right).$$

Доказательство. Пусть $\tau_k(t)$ – остаточное время обслуживания заявки в изолированном узле с момента t до момента окончания времени обслуживания, где k – номер позиции, на которой находится заявка от «хвоста» очереди к прибору. Таким образом, $\tau(t) = (\tau_1(t), \dots, \tau_n(t))$ – вектор, описывающий остаточные времена обслуживания заявок в изолированном узле. Поскольку, вообще говоря, $x(t)$ не является марковским процессом, рассмотрим марковский процесс $\zeta(t) = \{x(t), \tau(t)\}$, добавляя к $x(t)$ непрерывную компоненту $\tau(t)$. Введем обозначение

$$F(m, n, y) = F(m, n, y_1, \dots, y_n) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{x(t) = x, \tau_1(t) < y_1, \dots, \tau_n(t) < y_n\}.$$

В [1] доказано, что марковский процесс $x(t)$ при выполнении условий теоремы 1 в марковском случае эргодичен. Используя теорему Смита [7] для регенерирующих процессов, можно доказать, что существуют финальные вероятности $F(m, n, y)$.

Так как $x(t)$ – марковский процесс, существует стационарное эргодическое распределение $x(t)$, а следовательно, в общем случае и процесса $\zeta(t)$, так как $\zeta(t)$ получается из $x(t)$ добавлением непрерывных компонент.

Пусть h – положительная малая величина. Используя определение полной вероятности, рассмотрим вероятность события

$$P\{x(t+h) = (m, n), \tau_1(t+h) < y_1, \dots, \tau_n(t+h) < y_n\};$$

описывая все способы появления данного события при различных гипотезах в момент времени t :

а) в контрольной очереди изолированного узла было на одну заявку меньше, чем в состоянии $x(t) = (m(t), n(t))$, за время h заявка пришла в контрольную очередь извне (вероятность $\lambda h + o(h)$) и за остаточное время не успела обслужиться в узле (вероятность $B(y_n + \theta_1 h)$); вероятность данного способа

$$P\{x(t) = (m-1, n), \tau_1(t) < y_1, \dots, \tau_n(t) < y_n\} \times (\lambda h + o(h)) B(y_n + \theta_1 h) I_{m \neq 0},$$

здесь и далее $0 < \theta_i < 1$;

б) в обычной очереди изолированного узла было на одну заявку больше, чем в состоянии $x(t) = (m(t), n(t))$, и за время h заявка обслужилась и покинула узел; вероятность данного способа

$$P\{x(t) = (m, n+1), \tau_1(t) < y_1, \dots, \tau_n(t) < y_n, \tau_{n+1}(t) < h\};$$

в) изолированный узел находился в состоянии $x(t) = (m(t), n(t))$, за время h заявки не покидали узел за счет обслуживания (вероятность $B(y_n + \theta_2 h)$) и заявки не переходили в обычную очередь из контрольной (вероятность $1 - \nu h + o(h)$); вероятность данного способа

$$P\{x(t) = (m, n), \tau_1(t) < y_1, \dots, \tau_n(t) < y_n\} \times B(y_n + \theta_2 h) (1 - \nu h + o(h));$$

г) изолированный узел находился в состоянии $x(t) = (m(t), n(t))$, остаточное время обслуживания заявки, находящейся в узле на месте n , было в диапазоне $[h, h + y_n]$, за время h заявки не поступали в узел (вероятность $1 - \lambda h + o(h)$); вероятность данного способа

$$P\{x(t) = (m, n), \tau_1(t) < y_1, \dots, \tau_{n-1}(t) < y_{n-1}, h \leq \tau_n(t) < y_n + h\} (1 - \lambda h + o(h));$$

д) в контрольной очереди изолированного узла было на одну заявку больше, чем в состоянии $x(t) = (m(t), n(t))$, а в обычной очереди на одну заявку меньше, чем в состоянии $x(t) = (m(t), n(t))$; за время h заявка после проверки на стандартность была признана стандартной и перешла в обычную очередь изолированного узла (вероятность $(\nu h + o(h))(1-p)$) и за остаточное время не успела обслужиться в изолированном узле (вероятность $B(y_n + \theta_3 h)$); вероятность данного способа

$$P\{x(t) = (m+1, n-1), \tau_1(t) < y_1, \dots, \tau_{n-1}(t) < y_{n-1}\} \times (\nu h + o(h))(1-p) B(y_n + \theta_3 h) I_{n \neq 0};$$

е) в контрольной очереди изолированного узла было на одну заявку больше, чем в состоянии $x(t) = (m(t), n(t))$, а в обычной очереди было столько же заявок, сколько и в состоянии $x(t) = (m(t), n(t))$; за время h заявка после проверки на стандартность была признана нестандартной и покинула изолированный узел (вероятность $(\nu h + o(h))$); вероятность данного способа

$$P\{x(t) = (m+1, n), \tau_1(t) < y_1, \dots, \tau_n(t) < y_n\} \times$$

$$\times(vh + o(h))p;$$

вероятность того, что произойдет не менее двух изменений состояний узла равна $o(h)$.

В силу сказанного выше имеем

$$\begin{aligned} P\{\mathbf{x}(t+h) = (m, n), \tau_1(t+h) < y_1, \dots, \tau_1(t+h) < y_n\} = \\ = P\{\mathbf{x}(t) = (m-1, n), \tau_1(t) < y_1, \dots, \tau_n(t) < y_n\} \times \\ \times (\lambda h + o(h))B(y_n + \theta_1 h)I_{m \neq 0} + \\ + P\{\mathbf{x}(t) = (m, n+1), \tau_1(t) < y_1, \dots, \\ \dots, \tau_n(t) < y_n, \tau_{n+1}(t) < h\} + \\ + P\{\mathbf{x}(t) = (m, n), \tau_1(t) < y_1, \dots, \tau_n(t) < y_n\} \times \\ \times B(y_n + \theta_2 h)(1 - \nu h + o(h)) + \\ + P\{\mathbf{x}(t) = (m, n), \tau_1(t) < y_1, \dots, \tau_{n-1}(t) < y_{n-1}, \\ h \leq \tau_n(t) < y_n + h\}(1 - \lambda h + o(h)) + \\ + P\{\mathbf{x}(t) = (m+1, n-1), \tau_1(t) < y_1, \dots, \tau_{n-1}(t) < y_{n-1}\} \times \\ \times (vh + o(h))(1-p)B(y_n + \theta_3 h)I_{n \neq 0} + \\ + P\{\mathbf{x}(t) = (m+1, n), \tau_1(t) < y_1, \dots, \tau_n(t) < y_n\} \times \\ \times (vh + o(h))p + o(h); \end{aligned}$$

Далее, каждую вероятность выразим через функцию вида

$$\begin{aligned} F(m, n, t, \mathbf{y}) = \\ = P\{\mathbf{x}(t) = (m, n), \tau_1(t) < y_1, \dots, \tau_n(t) < y_n\}. \end{aligned}$$

Получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} F(m, n, t+h, \mathbf{y}) = \\ = F(m-1, n, t, \mathbf{y})(\lambda h + o(h))B(y_n + \theta_1 h)I_{m \neq 0} + \\ + F(m, n+1, t, y_1, \dots, y_n, h) + \\ + F(m, n, t, y)B(y_n + \theta_2 h)(1 - \nu h + o(h)) + \\ + (F(m, n, t, y_1, \dots, y_n + h) - F(m, n, t, y_1, \dots, y_{n-1}, h)) \times \\ \times (1 - \lambda h + o(h)) + \\ + F(m+1, n-1, t, y_1, \dots, y_{n-1})(\nu h + o(h)) \times \\ \times (1-p)B(y_n + \theta_3 h)I_{n \neq 0} + \\ + F(m+1, n, t, \mathbf{y})(vh + o(h))p. \end{aligned}$$

Рассматривая $F(m, n, t, \mathbf{y})$ как сложные функции от t и предполагая, что у них существуют частные производные первого порядка по переменным t, y_n и y_{n+1} , запишем разложение этих функций по формуле Тейлора

$$\begin{aligned} F(m, n, t+h, \mathbf{y}) = \\ = F(m, n, t, \mathbf{y}) + \frac{\partial F(m, n, t, \mathbf{y})}{\partial t} h + o(h); \\ F(m, n+1, t, y_1, \dots, y_n, h) = \\ = \frac{\partial F(m, n+1, t, y_1, \dots, y_n, 0)}{\partial y_{n+1}} h + o(h); \\ B(y_n + \theta_1 h) = B(y_n); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(m, n, t, y_1, \dots, y_n + h) = F(m, n, t, y_1, \dots, y_n) + \\ + \frac{\partial F(m, n, t, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_n} h + o(h); \\ F(m, n, t, y_1, \dots, y_{n-1}, h) = \\ = \frac{\partial F(m, n, t, y_1, \dots, y_{n-1}, 0)}{\partial y_n} h + o(h), \end{aligned}$$

а также, приводя подобные слагаемые, деля обе части полученного соотношения на h и устремляя h к нулю, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(m, n, t, \mathbf{y})}{\partial t} = F(m-1, n, t, \mathbf{y})\lambda B(y_n)I_{m \neq 0} + \\ + \frac{\partial F(m, n+1, t, y_1, \dots, y_n, 0)}{\partial y_{n+1}} + \\ - F(m, n, t, \mathbf{y})B(y_n)\nu I_{m \neq 0} - F(m, n, t, y_1, \dots, y_n)\lambda + \\ + \left(\frac{\partial F(m, n, t, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_n} - \right. \\ \left. - \frac{\partial F(m, n, t, y_1, \dots, y_{n-1}, 0)}{\partial y_n} \right) I_{n \neq 0} + \\ + F(m+1, n-1, t, y_1, \dots, y_{n-1})\nu(1-p)B(y_n)I_{n \neq 0} + \\ + F(m+1, n, t, \mathbf{y})\nu p. \end{aligned}$$

Так как предельные функции не зависят от времени, имеем

$$\begin{aligned} F(m, n, \mathbf{y})B(y_n)\nu I_{m \neq 0} + F(m, n, y_1, \dots, y_n)\lambda + \\ + \left(\frac{\partial F(m, n, y_1, \dots, y_{n-1}, 0)}{\partial y_n} - \frac{\partial F(m, n, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_n} \right) I_{n \neq 0} = \\ = F(m-1, n, \mathbf{y})\lambda B(y_n)I_{m \neq 0} + \\ + \frac{\partial F(m, n+1, y_1, \dots, y_n, 0)}{\partial y_{n+1}} + \\ + F(m+1, n-1, y_1, \dots, y_{n-1})\nu(1-p)B(y_n)I_{n \neq 0} + \\ + F(m+1, n, \mathbf{y})\nu p. \quad (3.1) \end{aligned}$$

Разобьем уравнение глобального равновесия (3.1) на уравнения локального уравнения следующим образом

$$\begin{aligned} F(m, n, y_1, \dots, y_n)\lambda = \frac{\partial F(m, n+1, y_1, \dots, y_n, 0)}{\partial y_{n+1}} + \\ + F(m+1, n, \mathbf{y})\nu p; \quad (3.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(m, n, \mathbf{y})B(y_n)\nu I_{m \neq 0} + \\ + \left(\frac{\partial F(m, n, y_1, \dots, y_{n-1}, 0)}{\partial y_n} - \frac{\partial F(m, n, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_n} \right) I_{n \neq 0} = \\ = F(m-1, n, \mathbf{y})\lambda B(y_n)I_{m \neq 0} + \\ + F(m+1, n-1, y_1, \dots, y_{n-1})\nu(1-p)B(y_n)I_{n \neq 0}. \quad (3.3) \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что неотрицательным, абсолютно непрерывным по y решением уравнений локального равновесия (3.2), (3.3),

а следовательно, и уравнения глобального равновесия (3.1) является

$$F(n, m, \mathbf{y}) = p(n, m) \prod_{k=1}^n \mu \int_0^{y_k} [1 - B(u)] du, \quad (3.4)$$

где $p(n, m)$ – стационарная вероятность состояния x процесса $\mathbf{x}(t)$ в марковском случае. Действительно, подставив (3.4) в (3.2), умножив обе части полученного равенства на $\frac{p(n, m)}{F(n, m, \mathbf{y})}$,

получим

$$p(m, n)\lambda = p(m-1, n)\lambda I_{m \neq 0} + p(m+1, n)\nu p.$$

Затем, подставив (3.4) в (3.3), поделив обе части полученного равенства на $F(n, m, \mathbf{y})B(y_n)$ и умножив на

$$p(n, m) \int_0^{y_n} [1 - B(u)] du,$$

получим

$$p(m, n)[\mu I_{n \neq 0} + \nu I_{m \neq 0}] = p(m, n+1)\mu + p(m+1, n-1)\nu(1-p)I_{n \neq 0}, \quad (m, n) \in X.$$

Сложив оба полученных уравнения, получим уравнение глобального равновесия (2.4) для изолированного узла с контрольной очередью для марковского случая. \square

3.2 Инвариантность финального распределения открытой сети с контрольными очередями и карантинным узлом

Теперь рассмотрим инвариантность финального распределения открытой сети массового обслуживания с контрольными очередями и карантинным узлом. Сохранив предположения о независимости процессов поступления, проверки на «стандартность» и обслуживания заявок, будем предполагать, что $B_i(t)$ – произвольная функция распределения неотрицательной случайной величины, в таком случае процесс $\mathbf{x}(t)$, описывающий число заявок в узлах открытой сети обслуживания в момент времени t , не является марковским, тем не менее для него справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. При выполнении условий

$$\frac{\lambda \varepsilon_i}{\nu_i} < 1, \frac{\lambda \varepsilon_i (1 - p_i)}{\mu_i} < 1 \quad (i = \overline{1, N}), \frac{\lambda \varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}} < 1$$

и (1.1), случайный процесс, описывающий число заявок в открытой сети обслуживания в момент времени t , имеет финальное строго положительное распределение вида

$$p(\mathbf{x}) = p_1(x_1)p_2(x_2)\dots p_{N+1}(x_{N+1}), \quad x \in X,$$

с множителями

$$p_i(\mathbf{x}_i) = \left(\frac{\lambda \varepsilon_i}{\nu_i}\right)^{m_i} \left(\frac{\lambda \varepsilon_i (1 - p_i)}{\mu_i}\right)^{n_i} \times$$

$$\times \left(1 - \frac{\lambda \varepsilon_i}{\nu_i}\right) \left(1 - \frac{\lambda \varepsilon_i (1 - p_i)}{\mu_i}\right), \quad i = \overline{1, N},$$

$$p_{N+1}(x_{N+1}) = \left(\frac{\lambda \varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}}\right)^{n_{N+1}} \left(1 - \frac{\lambda \varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}}\right).$$

Доказательство. Пусть $\tau_{ik}(t)$ – остаточное время обслуживания заявки в i -ом узле с момента t до момента окончания времени обслуживания, где k – номер позиции, на которой находится заявка в обычной очереди от «хвоста» очереди к прибору. Тогда вектор

$$\boldsymbol{\tau}_i(t) = \tau_{i1}(t), \tau_{i2}(t), \dots, \tau_{in_i}(t)$$

описывает остаточные времена обслуживания всех задач i -го узла, находящихся в обычной очереди. Поскольку, вообще говоря, $\mathbf{x}(t)$ не является марковским процессом, рассмотрим марковский процесс $\zeta(t) = \{\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\tau}(t)\}$, добавляя к $\mathbf{x}(t)$ непрерывную компоненту

$$\boldsymbol{\tau}(t) = (\boldsymbol{\tau}_1(t); \boldsymbol{\tau}_2(t); \dots; \boldsymbol{\tau}_N(t)).$$

Введем обозначение

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F(\mathbf{x}, y_{1,1}, \dots, y_{1,n_1}, y_{2,1}, \dots, y_{2,n_2}, \dots, y_{N,1}, \dots, y_{N,n_N}, y_{N+1,1}, \dots, y_{N+1,n_{N+1}}) = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}, \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \dots, \tau_{i,n_i}(t) < y_{i,n_i}, i = \overline{1, N+1}\}.$$

В [1] доказано, что марковский процесс $\mathbf{x}(t)$ при выполнении условий теоремы 2 в марковском случае эргодичен. Используя теорему Смита [7] для регенерирующих процессов, можно доказать, что существуют финальные вероятности $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Так как $\mathbf{x}(t)$ – марковский процесс, существует стационарное эргодическое распределение $\mathbf{x}(t)$, а следовательно, в общем случае и процесса $\zeta(t)$, так как $\zeta(t)$ получается из $\mathbf{x}(t)$ добавлением непрерывных компонент.

Положим, что $[\tilde{y}_i]$ – вектор, все элементы которого совпадают с элементами вектора $(y_1, y_2, \dots, y_{N+1})$, а на месте i -го элемента находится элемент \tilde{y}_i .

Пусть h – положительная малая величина. Рассмотрим вероятность события

$$P\{\mathbf{x}(t+h) = \mathbf{x}, \tau_{i,1}(t+h) < y_{i,1}, \dots, \tau_{i,n_i}(t+h) < y_{i,n_i}, i = \overline{1, N+1}\},$$

описывая все способы появления данного события при различных гипотезах в момент времени t :

а) хотя бы в одном из узлов с контрольной очередью, скажем в i -ом, в контрольной очереди было на одну заявку меньше, чем в состоянии $\mathbf{x}(t)$, вероятность

$$P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} - \mathbf{e}_i^1, \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \dots, \tau_{i,n_i-1}(t) < y_{i,n_i-1},$$

$$i = \overline{1, N}, \tau_{N+1,1}(t) < y_{N+1,1}, \dots, \tau_{N+1,n_{N+1}}(t) < y_{N+1,n_{N+1}}\};$$

за время h заявка пришла в контрольную очередь извне (вероятность $\lambda p_{0,i}h + o(h)$) и за остаточное время не успела обслужиться в узле (вероятность $B_i(y_{i,n_i} + \theta_1 h)$); таким образом, вероятность данного способа

$$P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} - \mathbf{e}_i^1, \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \dots, \tau_{i,n_i-1}(t) < y_{i,n_i-1},$$

$$i = \overline{1, N}, \tau_{N+1,1}(t) < y_{N+1,1}, \dots, \tau_{N+1,n_{N+1}}(t) < y_{N+1,n_{N+1}}\} \times$$

$$\times (\lambda p_{0,i}h + o(h)) B_i(y_{i,n_i} + \theta_1 h) I_{n_i \neq 0};$$

б) хотя бы в одном из узлов с контрольной очередью, скажем в i -ом, в обычной очереди было на одну заявку больше, чем в состоянии $\mathbf{x}(t)$, вероятность

$$P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + \mathbf{e}_i^2, \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \dots, \tau_{i,n_i}(t) < y_{i,n_i},$$

$$\tau_{i,n_i+1}(t) < h, i = \overline{1, N},$$

$$\tau_{N+1,1}(t) < y_{N+1,1}, \dots, \tau_{N+1,n_{N+1}}(t) < y_{N+1,n_{N+1}}\},$$

и за время h заявка обслужилась и покинула узел (вероятность p_{i0}); таким образом, вероятность данного способа

$$P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + \mathbf{e}_i^2, \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \dots, \tau_{i,n_i}(t) < y_{i,n_i},$$

$$\tau_{i,n_i+1}(t) < h, i = \overline{1, N},$$

$$\tau_{N+1,1}(t) < y_{N+1,1}, \dots, \tau_{N+1,n_{N+1}}(t) < y_{N+1,n_{N+1}}\} p_{i0};$$

в) сеть находилась в состоянии $\mathbf{x}(t)$, вероятность

$$P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}, \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \dots, \tau_{i,n_i}(t) < y_{i,n_i}, i = \overline{1, N+1}\};$$

за время h заявки не покидали i -й узел, за счет обслуживания (вероятность $B_i(y_{i,n_i} + \theta_2 h)$) и не переходили в обычную очередь из контрольной (вероятность $1 - v_i h + o(h)$); таким образом, вероятность данного способа

$$P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}, \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \dots, \tau_{i,n_i}(t) < y_{i,n_i}, i = \overline{1, N+1}\} \times$$

$$\times B_i(y_{i,n_i} + \theta_2 h) (1 - v_i h + o(h));$$

г) сеть находилась в состоянии $\mathbf{x}(t)$, вероятность остаточное время обслуживания заявки, находящейся в i -ом ($i = \overline{1, N+1}$) узле на месте n_i , было в диапазоне $[h, h + y_{i,n_i}]$

$$P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}, \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \dots, h \leq \tau_{i,n_i}(t) < h + y_{i,n_i},$$

$$i = \overline{1, N+1}\},$$

и за время h заявки не поступали в узел (вероятность $1 - \lambda p_{0,i}h + o(h)$); таким образом, вероятность данного способа

$$P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}, \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \dots, h \leq \tau_{i,n_i}(t) < h + y_{i,n_i},$$

$$i = \overline{1, N+1}\} (1 - \lambda p_{0,i}h + o(h));$$

д) хотя бы в одном из узлов, скажем в i -ом ($i = \overline{1, N}$), в контрольной очереди изолированно-го узла было на одну заявку больше, чем в состоянии $\mathbf{x}(t)$, а в обычной очереди на одну заявку меньше, чем в состоянии $\mathbf{x}(t)$, вероятность

$$P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_i^2, \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \dots, \tau_{i,n_i-1}(t) < y_{i,n_i-1},$$

$$i = \overline{1, N}, \tau_{N+1,1}(t) < y_{N+1,1}, \dots, \tau_{N+1,n_{N+1}}(t) < y_{N+1,n_{N+1}}\};$$

за время h заявка после проверки на стандартность была признана стандартной и перешла в обычную очередь i -го узла (вероятность $(v_i h + o(h))(1 - p_i)$), и за остаточное время не успела обслужиться (вероятность $B_i(y_{i,n_i} + \theta_2 h)$); таким образом, вероятность данного способа

$$P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_i^2, \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \dots, \tau_{i,n_i-1}(t) < y_{i,n_i-1},$$

$$i = \overline{1, N}, \tau_{N+1,1}(t) < y_{N+1,1}, \dots, \tau_{N+1,n_{N+1}}(t) < y_{N+1,n_{N+1}}\} \times$$

$$\times (v_i h + o(h))(1 - p_i) B_i(y_{i,n_i} + \theta_2 h) I_{n_i \neq 0};$$

е) хотя бы в одном из узлов с контрольной очередью, скажем в i -ом, в контрольной очереди было на одну заявку больше, чем в состоянии $\mathbf{x}(t)$, а в карантинном узле было на одну заявку меньше, чем в состоянии $\mathbf{x}(t)$, вероятность

$$P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_{N+1}, \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \dots,$$

$$\dots, \tau_{i,n_i+1}(t) < y_{i,n_i+1}, i = \overline{1, N},$$

$$\tau_{N+1,1}(t) < y_{N+1,1}, \dots, \tau_{N+1,n_{N+1}-1}(t) < y_{N+1,n_{N+1}-1}\};$$

за время h заявка после проверки на стандартность была признана нестандартной и отправилась в карантинный узел (вероятность $(v_i h + o(h)) p_i$), и за остаточное время не успела обслужиться в карантинном узле (вероятность $B_{N+1}(y_{N+1,n_{N+1}} + \theta_2 h)$); таким образом, вероятность данного способа

$$P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_{N+1}, \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \dots,$$

$$\dots, \tau_{i,n_i+1}(t) < y_{i,n_i+1}, i = \overline{1, N},$$

$$\tau_{N+1,1}(t) < y_{N+1,1}, \dots, \tau_{N+1,n_{N+1}-1}(t) < y_{N+1,n_{N+1}-1}\} \times$$

$$\times B_{N+1}(y_{N+1,n_{N+1}} + \theta_2 h) I_{n_{N+1} \neq 0} p_i;$$

ж) в карантинном узле было на одну заявку больше, чем в состоянии $\mathbf{x}(t)$, вероятность

$$P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1}, \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \dots, \tau_{i,n_i}(t) < y_{i,n_i},$$

$$i = \overline{1, N}, \tau_{N+1,1}(t) < y_{N+1,1}, \dots, \tau_{N+1,n_{N+1}+1}(t) < h\};$$

за время h заявка после обслуживания в карантинном узле была обезврежена и покинула сеть (вероятность p_{N+10}); таким образом, вероятность данного способа

$$P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1}, \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \dots, \tau_{i,n_i}(t) < y_{i,n_i}, \\ i = \overline{1, N}, \tau_{N+1,1}(t) < y_{N+1,1}, \dots, \tau_{N+1,n_{N+1}}(t) < h\} p_{N+1,0};$$

з) в карантинном узле было на одну заявку больше, чем в состоянии $\mathbf{x}(t)$, а в контрольной очереди i -го узла было на одну заявку меньше, чем в состоянии $\mathbf{x}(t)$, вероятность

$$P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1} - \mathbf{e}_i^1, \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \dots, \tau_{i,n_i-1}(t) < y_{i,n_i-1}, \\ i = \overline{1, N}, \tau_{N+1,1}(t) < y_{N+1,1}, \dots, \tau_{N+1,n_{N+1}}(t) < h\};$$

за время h заявка после обслуживания в карантинном узле была восстановлена и перешла в i -ый узел (вероятность $p_{N+1,i}$), и за остаточное время не успела обслужиться в i -ом узле (вероятность $B_i(y_{i,n_i} + \theta_2 h)$); таким образом, вероятность данного способа

$$P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1} - \mathbf{e}_i^1, \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \dots, \tau_{i,n_i-1}(t) < y_{i,n_i-1}, \\ i = \overline{1, N}, \tau_{N+1,1}(t) < y_{N+1,1}, \dots, \tau_{N+1,n_{N+1}}(t) < h\} \times \\ \times I_{m_i \neq 0} B_i(y_{i,n_i} + \theta_2 h) p_{N+1,i};$$

и) хотя бы в одном из узлов, скажем в j -ом ($j = \overline{1, N}$), в обычной очереди было на одну заявку больше чем в состоянии $\mathbf{x}(t)$, а в каком-то другом, скажем i -ом ($i = \overline{1, N}$), было на одну заявку меньше, чем в состоянии $\mathbf{x}(t)$, вероятность

$$P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + \mathbf{e}_j^2 - \mathbf{e}_i^1, \tau_{j,1}(t) < y_{j,1}, \dots \\ \dots, \tau_{j,n_j}(t) < y_{j,n_j}, \tau_{j,n_j+1}(t) < h, j = \overline{1, N}, \\ \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \dots, \tau_{i,n_i-1}(t) < y_{i,n_i-1}, i = \overline{1, N}\};$$

за время h заявка после обслуживания в j -ом узле перешла в контрольную очередь i -го узла (вероятность p_{ji}) и за остаточное время не успела обслужиться (вероятность $B_i(y_{i,n_i} + \theta_2 h)$); таким образом, вероятность данного способа

$$P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + \mathbf{e}_j^2 - \mathbf{e}_i^1, \tau_{j,1}(t) < y_{j,1}, \dots \\ \dots, \tau_{j,n_j}(t) < y_{j,n_j}, \tau_{j,n_j+1}(t) < h, j = \overline{1, N}, \\ \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \dots, \tau_{i,n_i-1}(t) < y_{i,n_i-1}, i = \overline{1, N}\} \times \\ \times B_i(y_{i,n_i} + \theta_2 h) I_{m_i \neq 0} p_{ji};$$

вероятность того, что произойдет не менее двух изменений состояний сети, равна $o(h)$.

В силу сказанного выше имеем

$$P\{\mathbf{x}(t+h) = \mathbf{x}, \tau_{i,1}(t+h) < y_{i,1}, \dots \\ \dots, \tau_{i,n_i}(t+h) < y_{i,n_i}, i = \overline{1, N+1}\} = \\ = P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} - \mathbf{e}_i^1, \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \dots, \tau_{i,n_i-1}(t) < y_{i,n_i-1}, \\ i = \overline{1, N}, \tau_{N+1,1}(t) < y_{N+1,1}, \dots, \tau_{N+1,n_{N+1}}(t) < y_{N+1,n_{N+1}}\} \times \\ \times (\lambda p_{0,i} h + o(h)) B_i(y_{i,n_i} + \theta_1 h) I_{m_i \neq 0} +$$

$$+ P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + \mathbf{e}_i^2, \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \dots, \tau_{i,n_i}(t) < y_{i,n_i}, \\ \tau_{i,n_i+1}(t) < h, i = \overline{1, N},$$

$$\tau_{N+1,1}(t) < y_{N+1,1}, \dots, \tau_{N+1,n_{N+1}}(t) < y_{N+1,n_{N+1}}\} p_{i0} + \\ + P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}, \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \dots, \tau_{i,n_i}(t) < y_{i,n_i}, i = \overline{1, N+1}\} \times \\ \times B_i(y_{i,n_i} + \theta_2 h) (1 - v_i h + o(h)) + \\ + P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}, \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \dots, h \leq \tau_{i,n_i}(t) < h + y_{i,n_i}, \\ i = \overline{1, N+1}\} (1 - \lambda p_{0i} h + o(h)) +$$

$$+ P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_i^2, \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \dots, \tau_{i,n_i-1}(t) < y_{i,n_i-1}, \\ i = \overline{1, N}, \tau_{N+1,1}(t) < y_{N+1,1}, \dots, \tau_{N+1,n_{N+1}}(t) < y_{N+1,n_{N+1}}\} \times \\ \times (v_i h + o(h)) (1 - p_i) B_i(y_{i,n_i} + \theta_2 h) I_{n_i \neq 0} + \\ + P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_{N+1}, \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \dots$$

$$\dots, \tau_{i,n_i+1}(t) < y_{i,n_i+1}, i = \overline{1, N}, \\ \tau_{N+1,1}(t) < y_{N+1,1}, \dots, \tau_{N+1,n_{N+1}-1}(t) < y_{N+1,n_{N+1}-1}\} \times \\ \times B_{N+1}(y_{N+1,n_{N+1}} + \theta_2 h) I_{n_{N+1} \neq 0} p_i + \\ + P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1}, \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \dots, \tau_{i,n_i}(t) < y_{i,n_i},$$

$$i = \overline{1, N}, \tau_{N+1,1}(t) < y_{N+1,1}, \dots, \tau_{N+1,n_{N+1}}(t) < h\} p_{N+1,0} + \\ + P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1} - \mathbf{e}_i^1, \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \dots \\ \dots, \tau_{i,n_i-1}(t) < y_{i,n_i-1}, i = \overline{1, N}, \tau_{N+1,1}(t) < y_{N+1,1}, \dots \\ \dots, \tau_{N+1,n_{N+1}}(t) < h\} \times$$

$$\times I_{m_i \neq 0} B_i(y_{i,n_i} + \theta_2 h) p_{N+1,i} + \\ + P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + \mathbf{e}_j^2 - \mathbf{e}_i^1, \tau_{j,1}(t) < y_{j,1}, \dots \\ \dots, \tau_{j,n_j}(t) < y_{j,n_j}, \tau_{j,n_j+1}(t) < h, j = \overline{1, N}, \\ \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \dots, \tau_{i,n_i-1}(t) < y_{i,n_i-1}, i = \overline{1, N}\} \\ \times B_i(y_{i,n_i} + \theta_2 h) I_{m_i \neq 0} p_{ji}.$$

Далее, каждую вероятность выразим через функции вида

$$F(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = P\{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}, \tau_{i,1}(t) < y_{i,1}, \dots \\ \dots, \tau_{i,n_i}(t) < y_{i,n_i}, i = \overline{1, N+1}\}.$$

Таким образом, получим следующую систему дифференциально-разностных уравнений

$$F(\mathbf{x}, t+h, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^N F(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i^1, n, t, \mathbf{y}) \times \\ \times (\lambda p_{0,i} h + o(h)) B_i(y_{i,n_i} + \theta_1 h) I_{m_i \neq 0} + \\ + \sum_{i=1}^N F(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1} - \mathbf{e}_i^1, t, [y_{N+1,1}, \dots, y_{N,n_N}, h]) \times \\ \times I_{m_i \neq 0} B_i(y_{i,n_i} + \theta_2 h) p_{N+1,i} + \\ + \sum_{i=1}^N (F(\mathbf{x}, t, [y_{i,1}, \dots, y_{i,n_i} + h]) - \\ - F(\mathbf{x}, t, [y_{i,1}, \dots, y_{i,n_i-1}, h])) \times (1 - \lambda p_{0,i} h + o(h)) + \\ + (F(\mathbf{x}, t, [y_{N+1,1}, \dots, y_{N+1,n_{N+1}} + h]) -$$

$$\begin{aligned}
 & -F\left(\mathbf{x}, t, \left[y_{N+1,1}, \dots, y_{N+1, n_{N+1}-1}, h \right] \right) \times \\
 & \quad \times (1 - \lambda p_{0, N+1} h + o(h)) + \\
 & + \sum_{i=1}^N F\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_i^2, t, \left[y_{i,1}, \dots, y_{i, n_i-1} \right] \right) \times \\
 & \quad \times (v_i h + o(h)) (1 - p_i) B_i(y_{i, n_i} + \theta_2 h) I_{n_i \neq 0} + \\
 & + \sum_{i=1}^N F\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_{N+1}, t, \left[y_{N,1}, \dots, y_{N, n_N-1} \right] \right) \times \\
 & \quad \times (v_i h + o(h)) B_{N+1}(y_{N+1, n_{N+1}} + \theta_2 h) I_{n_{N+1} \neq 0} p_i + \\
 & + F\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1}, t, \left[y_{N,1}, \dots, y_{N, n_N}, h \right] \right) p_{N+1,0} + \\
 & + \sum_{i=1}^N F(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) B_i(y_{i, n_i} + \theta_2 h) (1 - v_i h + o(h)) + \\
 & + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N F\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_j^2 - \mathbf{e}_i^1, t, \left[y_{j,1}, \dots, y_{j, n_j}, h \right] \right) \times \\
 & \quad \times B_i(y_{i, n_i} + \theta_2 h) I_{m_i \neq 0} p_{j,i} + \\
 & + \sum_{i=1}^N F\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^2, t, \left[y_{i,1}, \dots, y_{i, n_i}, h \right] \right) p_{i,0}, \mathbf{x} \in X.
 \end{aligned}$$

Рассматривая $F(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ как сложные функции от t и предполагая, что у них существуют частные производные первого порядка по переменным t, y_{i, n_i} и y_{i, n_i+1} , запишем разложение этих функций по формуле Тейлора

$$\begin{aligned}
 F(\mathbf{x}, t + h, \mathbf{y}) &= F(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) + \frac{\partial F(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})}{\partial t} h + o(h); \\
 B_i(y_{i, n_i} + \theta_2 h) &= B(y_{i, n_i}); \\
 B_{N+1}(y_{N+1, n_{N+1}} + \theta_2 h) &= B(y_{N+1, n_{N+1}}); \\
 F\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^2, t, \left[y_{i,1}, \dots, y_{i, n_i}, h \right] \right) &= \\
 = \frac{F\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^2, t, \left[y_{i,1}, \dots, y_{i, n_i}, 0 \right] \right)}{\partial y_{i, n_i+1}} h + o(h); \\
 F\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1} - \mathbf{e}_i^1, t, \left[y_{N,1}, \dots, y_{N, n_N}, h \right] \right) &= \\
 = \frac{\partial F\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1} - \mathbf{e}_i^1, t, \left[y_{N,1}, \dots, y_{N, n_N}, h \right] \right)}{\partial y_{N, n_N+1}} h + o(h); \\
 F\left(\mathbf{x}, t, \left[y_{i,1}, \dots, y_{i, n_i-1}, h \right] \right) &= \\
 = \frac{\partial F\left(\mathbf{x}, t, \left[y_{i,1}, \dots, y_{i, n_i-1}, 0 \right] \right)}{y_{i, n_i}} h + o(h); \\
 F\left(\mathbf{x}, t, \left[y_{i,1}, \dots, y_{i, n_i} + h \right] \right) &= \\
 = F(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) + \frac{\partial F(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})}{\partial y_{i, n_i}} h + o(h); \\
 F\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1}, t, \left[y_{N,1}, \dots, y_{N, n_N}, h \right] \right) &= \\
 = \frac{\partial F\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1}, t, \left[y_{N,1}, \dots, y_{N, n_N}, 0 \right] \right)}{\partial y_{N, n_N+1}} h + o(h);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & F\left(\mathbf{x}, t, \left[y_{N+1,1}, \dots, y_{N+1, n_{N+1}-1}, h \right] \right) = \\
 & = \frac{\partial F\left(\mathbf{x}, t, \left[y_{N+1,1}, \dots, y_{N+1, n_{N+1}-1}, 0 \right] \right)}{\partial y_{N+1, n_{N+1}}} h + o(h); \\
 & F\left(\mathbf{x}, t, \left[y_{N+1,1}, \dots, y_{N+1, n_{N+1}} + h \right] \right) = \\
 & = F\left(\mathbf{x}, t, \left[y_{N+1,1}, \dots, y_{N+1, n_{N+1}} \right] \right) + \\
 & + \frac{\partial F\left(\mathbf{x}, t, \left[y_{N+1,1}, \dots, y_{N+1, n_{N+1}} \right] \right)}{\partial y_{N+1, n_{N+1}}} h + o(h); \\
 & F\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_j^2 - \mathbf{e}_i^1, t, \left[y_{j,1}, \dots, y_{j, n_j}, h \right] \right) = \\
 & = \frac{\partial F\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_j^2 - \mathbf{e}_i^1, t, \left[y_{j,1}, \dots, y_{j, n_j}, 0 \right] \right)}{\partial y_{j, n_j+1}} h + o(h).
 \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
 & F(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) + \frac{\partial F(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})}{\partial t} h + o(h) = \\
 & = \sum_{i=1}^N F\left(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i^1, t, \mathbf{y}\right) (\lambda p_{0,i} h + o(h)) \times \\
 & \quad \times B_i(y_{i, n_i} + \theta_1 h) I_{m_i \neq 0} + \\
 & + \sum_{i=1}^N \left(\frac{F\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^2, t, \left[y_{i,1}, \dots, y_{i, n_i}, 0 \right] \right)}{\partial y_{i, n_i+1}} h + o(h) \right) p_{i,0} + \\
 & + \sum_{i=1}^N F(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) B_i(y_{i, n_i} + \theta_2 h) (1 - v_i h + o(h)) + \\
 & + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1} - \mathbf{e}_i^1, t, \left[y_{N,1}, \dots, y_{N, n_N}, h \right] \right)}{\partial y_{N, n_N+1}} h + o(h) \right) \times \\
 & \quad \times I_{m_i \neq 0} B_i(y_{i, n_i} + \theta_2 h) p_{N+1,i} + \\
 & + \sum_{i=1}^N \left(F(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) + \frac{\partial F(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})}{\partial y_{i, n_i}} h + o(h) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\partial F\left(\mathbf{x}, t, \left[y_{i,1}, \dots, y_{i, n_i-1}, 0 \right] \right)}{y_{i, n_i}} h + o(h) \right) + \\
 & \quad \times (1 - \lambda p_{0,i} h + o(h)) + \\
 & + \left(F\left(\mathbf{x}, t, \left[y_{N+1,1}, \dots, y_{N+1, n_{N+1}} \right] \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial F\left(\mathbf{x}, t, \left[y_{N+1,1}, \dots, y_{N+1, n_{N+1}} \right] \right)}{\partial y_{N+1, n_{N+1}}} h - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\partial F\left(\mathbf{x}, t, \left[y_{N+1,1}, \dots, y_{N+1, n_{N+1}-1}, 0 \right] \right)}{\partial y_{N+1, n_{N+1}}} h \right) + \\
 & + \sum_{i=1}^N F\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_i^2, t, \left[y_{i,1}, \dots, y_{i, n_i-1} \right] \right) \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times (v_i h + o(h))(1 - p_i) B(y_{i,n_i} + \theta_2 h) I_{n_i \neq 0} + \\ & + \sum_{i=1}^N F(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_{N+1}, t, [y_{N,1}, \dots, y_{N,n_N}]) \times \\ & \times (v_i h + o(h)) B_{N+1}(y_{N+1,n_{N+1}} + \theta_2 h) I_{n_{N+1} \neq 0} p_i + \\ & + \left(\frac{\partial F(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1}, t, [y_{N,1}, \dots, y_{N,n_N}, 0])}{\partial y_{N,n_{N+1}}} h + o(h) \right) p_{N+1,0} + \\ & + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial F(\mathbf{x} + \mathbf{e}_j^2 - \mathbf{e}_i^1, t, [y_{j,1}, \dots, y_{j,n_j}, 0])}{\partial y_{j,n_j+1}} h + o(h) \right) \times \\ & \times B_i(y_{i,n_i} + \theta_2 h) I_{m_i \neq 0} p_{j,i}, \quad \mathbf{x} \in X. \end{aligned}$$

Приводя подобные слагаемые, деля обе части полученного соотношения на h , при $h \rightarrow 0$ получим

$$\begin{aligned} & \frac{F(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})}{\partial t} + \lambda \sum_{i=1}^N p_{0,i} F(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) + \\ & + \sum_{i=1}^N F(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) B_i(y_{i,n_i}) v_i I_{m_i \neq 0} = \\ & = \sum_{i=1}^N F(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i^1, t, \mathbf{y}) \lambda p_{0,i} B_i(y_{i,n_i}) I_{m_i \neq 0} + \\ & + \sum_{i=1}^N \frac{F(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^2, t, [y_{i,1}, \dots, y_{i,n_i}, 0])}{\partial y_{i,n_i+1}} p_{i,0} + \\ & + \sum_{i=1}^N \frac{\partial F(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1} - \mathbf{e}_i^1, t, [y_{N,1}, \dots, y_{N,n_N}, h])}{\partial y_{N,n_{N+1}}} \times \\ & \times I_{m_i \neq 0} B_i(y_{i,n_i}) p_{N+1,i} + \\ & + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})}{\partial y_{i,n_i}} - \frac{\partial F(\mathbf{x}, t, [y_{i,1}, \dots, y_{i,n_i-1}, 0])}{y_{i,n_i}} \right) I_{n_i \neq 0} + \\ & + \left(\frac{\partial F(\mathbf{x}, t, [y_{N+1,1}, \dots, y_{N+1,n_{N+1}}])}{\partial y_{N+1,n_{N+1}}} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial F(\mathbf{x}, t, [y_{N+1,1}, \dots, y_{N+1,n_{N+1}-1}, 0])}{\partial y_{N+1,n_{N+1}}} \right) I_{n_{N+1} \neq 0} + \\ & + \sum_{i=1}^N F(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_i^2, t, [y_{i,1}, \dots, y_{i,n_i-1}]) \times \\ & \times v_i (1 - p_i) B_i(y_{i,n_i}) I_{n_i \neq 0} + \\ & + \frac{\partial F(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1}, t, [y_{N,1}, \dots, y_{N,n_N}, 0])}{\partial y_{N,n_{N+1}}} p_{N+1,0} + \\ & + \sum_{i=1}^N F(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_{N+1}, t, [y_{N,1}, \dots, y_{N,n_N}]) \times \\ & \times v_i B_{N+1}(y_{N+1,n_{N+1}}) I_{n_{N+1} \neq 0} p_i + \\ & + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial F(\mathbf{x} + \mathbf{e}_j^2 - \mathbf{e}_i^1, t, [y_{j,1}, \dots, y_{j,n_j}, 0])}{\partial y_{j,n_j+1}} \times \\ & \times B_i(y_{i,n_i}) I_{m_i \neq 0} p_{j,i}, \quad \mathbf{x} \in X. \end{aligned}$$

Так как предельные функции не зависят от времени, имеем

$$\begin{aligned} & \lambda \sum_{i=1}^N p_{0,i} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sum_{i=1}^N F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) B_i(y_{i,n_i}) v_i I_{m_i \neq 0} = \\ & = \sum_{i=1}^N F(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i^1, \mathbf{y}) \lambda p_{0,i} B_i(y_{i,n_i}) I_{m_i \neq 0} + \\ & + \sum_{i=1}^N \frac{F(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^2, [y_{i,1}, \dots, y_{i,n_i}, 0])}{\partial y_{i,n_i+1}} p_{i,0} + \\ & + \sum_{i=1}^N \frac{\partial F(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1} - \mathbf{e}_i^1, [y_{N,1}, \dots, y_{N,n_N}, h])}{\partial y_{N,n_{N+1}}} \times \\ & \times I_{m_i \neq 0} B_i(y_{i,n_i}) p_{N+1,i} + \\ & + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_{i,n_i}} - \frac{\partial F(\mathbf{x}, [y_{i,1}, \dots, y_{i,n_i-1}, 0])}{y_{i,n_i}} \right) I_{n_i \neq 0} + \\ & + \frac{\partial F(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1}, [y_{N,1}, \dots, y_{N,n_N}, 0])}{\partial y_{N,n_{N+1}}} p_{N+1,0} + \\ & + \left(\frac{\partial F(\mathbf{x}, [y_{N+1,1}, \dots, y_{N+1,n_{N+1}}])}{\partial y_{N+1,n_{N+1}}} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial F(\mathbf{x}, [y_{N+1,1}, \dots, y_{N+1,n_{N+1}-1}, 0])}{\partial y_{N+1,n_{N+1}}} \right) I_{n_{N+1} \neq 0} + \\ & + \sum_{i=1}^N F(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_i^2, [y_{i,1}, \dots, y_{i,n_i-1}]) \times \\ & \times v_i (1 - p_i) B_i(y_{i,n_i}) I_{n_i \neq 0} + \\ & + \sum_{i=1}^N F(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_{N+1}, [y_{N,1}, \dots, y_{N,n_N}]) \times \\ & \times v_i B_{N+1}(y_{N+1,n_{N+1}}) I_{n_{N+1} \neq 0} p_i + \\ & + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial F(\mathbf{x} + \mathbf{e}_j^2 - \mathbf{e}_i^1, [y_{j,1}, \dots, y_{j,n_j}, 0])}{\partial y_{j,n_j+1}} \times \\ & \times B_i(y_{i,n_i}) I_{m_i \neq 0} p_{j,i}, \quad \mathbf{x} \in X. \quad (3.5) \end{aligned}$$

Разобьем уравнение глобального равновесия (3.5) на уравнения локального равновесия следующим образом

$$\begin{aligned} & \lambda \sum_{i=1}^N p_{0,i} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \\ & = \sum_{i=1}^N \frac{F(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^2, [y_{i,1}, \dots, y_{i,n_i}, 0])}{\partial y_{i,n_i+1}} p_{i,0} + \\ & + \frac{\partial F(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1}, [y_{N,1}, \dots, y_{N,n_N}, 0])}{\partial y_{N,n_{N+1}}} p_{N+1,0}; \quad (3.6) \\ & \sum_{i=1}^N F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) B_i(y_{i,n_i}) v_i I_{m_i \neq 0} = \\ & = \sum_{i=1}^N F(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i^1, \mathbf{y}) \lambda p_{0,i} B_i(y_{i,n_i}) I_{m_i \neq 0} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^N \frac{\partial F(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1} - \mathbf{e}_i^1, [y_{N,1}, \dots, y_{N,n_N}, h])}{\partial y_{N,n_{N+1}}} \times \\
 & \quad \times I_{m_i \neq 0} B_i(y_{i,n_i}) p_{N+1,i} + \\
 & + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_{i,n_i}} - \frac{\partial F(\mathbf{x}, [y_{i,1}, \dots, y_{i,n_i-1}, 0])}{y_{i,n_i}} \right) I_{n_i \neq 0} + \\
 & \quad + \sum_{i=1}^N F(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_i^2, [y_{i,1}, \dots, y_{i,n_i-1}]) \times \\
 & \quad \times v_i (1 - p_i) B_i(y_{i,n_i}) I_{n_i \neq 0} + \\
 & + \sum_{i=1}^N F(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_{N+1}, [y_{N,1}, \dots, y_{N,n_N-1}]) \times \\
 & \quad \times v_i B_{N+1}(y_{N+1,n_{N+1}}) I_{n_{N+1} \neq 0} p_i + \\
 & \quad + \left(\frac{\partial F(\mathbf{x}, t, [y_{N+1,1}, \dots, y_{N+1,n_{N+1}}])}{\partial y_{N+1,n_{N+1}}} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\partial F(\mathbf{x}, t, [y_{N+1,1}, \dots, y_{N+1,n_{N+1}-1}, 0])}{\partial y_{N+1,n_{N+1}}} \right) I_{n_{N+1} \neq 0} + \\
 & + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial F(\mathbf{x} + \mathbf{e}_j^2 - \mathbf{e}_i^1, [y_{j,1}, \dots, y_{j,n_j}, 0])}{\partial y_{j,n_j+1}} \times \\
 & \quad \times B_i(y_{i,n_i}) I_{m_i \neq 0} p_{j,i}, \quad \mathbf{x} \in X. \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

Далее, разобьем уравнение локального равновесия (3.7) на еще более детальные уравнения локального равновесия следующим образом

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) B(y_{i,n_i}) v_i I_{m_i \neq 0} = \\
 & = \sum_{i=1}^N F(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i^1, \mathbf{y}) \lambda p_{0,i} B_i(y_{i,n_i}) I_{m_i \neq 0} + \\
 & + \sum_{i=1}^N \frac{\partial F(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1} - \mathbf{e}_i^1, [y_{N,1}, \dots, y_{N,n_N}, h])}{\partial y_{N,n_{N+1}}} \times \\
 & \quad \times I_{m_i \neq 0} B_i(y_{i,n_i}) p_{N+1,i} + \\
 & + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_{i,n_i}} - \frac{\partial F(\mathbf{x}, [y_{i,1}, \dots, y_{i,n_i-1}, 0])}{y_{i,n_i}} \right) I_{n_i \neq 0} + \\
 & \quad + \sum_{i=1}^N F(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_i^2, [y_{i,1}, \dots, y_{i,n_i-1}]) \times \\
 & \quad \times v_i (1 - p_i) B_i(y_{i,n_i}) I_{n_i \neq 0} + \\
 & + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial F(\mathbf{x} + \mathbf{e}_j^2 - \mathbf{e}_i^1, [y_{j,1}, \dots, y_{j,n_j}, 0])}{\partial y_{j,n_j+1}} \times \\
 & \quad \times B_i(y_{i,n_i}) I_{m_i \neq 0} p_{j,i}, \quad \mathbf{x} \in X; \quad (3.8) \\
 & \left(\frac{\partial F(\mathbf{x}, t, [y_{N+1,1}, \dots, y_{N+1,n_{N+1}-1}, 0])}{\partial y_{N+1,n_{N+1}}} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\partial F(\mathbf{x}, t, [y_{N+1,1}, \dots, y_{N+1,n_{N+1}}])}{\partial y_{N+1,n_{N+1}}} \right) I_{n_{N+1} \neq 0} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & = \sum_{i=1}^N F(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_{N+1}, [y_{N,1}, \dots, y_{N,n_N-1}]) \times \\
 & \quad \times v_i B_{N+1}(y_{N+1,n_{N+1}}) I_{n_{N+1} \neq 0} p_i, \quad \mathbf{x} \in X. \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

Не трудно убедиться, что неотрицательным абсолютно непрерывным по y решением уравнений локального равновесия (3.6), (3.8) и (3.9), а следовательно, и уравнения глобального равновесия (3.5), является

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p(\mathbf{x}) \prod_{i=1}^N \prod_{k=1}^{n_i} \mu_i \int_0^{y_{ik}} [1 - B_i(u)] du, \quad (3.10)$$

где $p(\mathbf{x})$ – стационарная вероятность состояния \mathbf{x} процесса $\mathbf{x}(t)$ в марковском случае. Действительно, подставив (3.10) в (3.6), умножив обе части полученного равенства на $\frac{p(\mathbf{x})}{F(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$, получим уравнение локального равновесия для открытой сети обслуживания в марковском случае (2.2). Затем, подставив (3.10) в (3.8), поделив обе части полученного равенства на $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) B_i(y_{i,n_i})$

и умножив на $p(\mathbf{x}) \int_0^{y_{i,n_i}} [1 - B_i(u)] du$, получим

$$\begin{aligned}
 & p(\mathbf{x}) \left(\sum_{i=1}^N \mu_i I_{m_i \neq 0} + \sum_{i=1}^N v_i I_{m_i \neq 0} \right) = \\
 & = \sum_{i=1}^N p(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i^1) \lambda p_{0,i} I_{m_i \neq 0} + \\
 & + \sum_{i=1}^N p(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_i^2) v_i (1 - p_i) I_{n_i \neq 0} + \\
 & + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p(\mathbf{x} + \mathbf{e}_j^2 - \mathbf{e}_i^1) \mu_j p_{j,i} I_{m_i \neq 0} + \\
 & + \sum_{i=1}^N p(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{N+1} - \mathbf{e}_i^1) \mu_{N+1} p_{N+1,i} I_{m_i \neq 0}, \quad \mathbf{x} \in X. \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

Далее, подставив равенство (3.10) в (3.9), поделив обе части полученного равенства на

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) B_{N+1}(y_{N+1,n_{N+1}})$$

и умножив на $p(\mathbf{x}) \int_0^{y_{N+1,n_{N+1}}} [1 - B_{N+1}(u)] du$, получим

$$\begin{aligned}
 & p(\mathbf{x}) \mu_{N+1} I_{n_{N+1} \neq 0} = \\
 & = \sum_{i=1}^N p(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i^1 - \mathbf{e}_{N+1}) v_i p_i I_{n_{N+1} \neq 0}. \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

Сложив уравнения (3.11) и (3.12), получим уравнение локального равновесия для открытой сети обслуживания для марковского случая (2.3). \square

Заключение

В данной работе рассмотрена открытая сеть массового обслуживания с контрольными очередями и карантинным узлом. На основе ранее полученных условий эргодичности, установленных

в [1], доказано, что стационарное распределение числа заявок в узлах сети является инвариантным относительно распределений времен обслуживания при фиксированных средних значениях.

Полученный результат подтверждает наличие у данной модели свойства нечувствительности и, тем самым, существенно расширяет класс сетей массового обслуживания, для которых возможно применение универсальных стационарных характеристик без учета конкретной формы распределений обслуживания.

Результаты работы могут быть использованы при моделировании и анализе систем с механизмами контроля, фильтрации и карантина заявок, в том числе в телекоммуникациях, логистике и биоинформационных системах. В дальнейшем представляется перспективным исследование аналогичных свойств для сетей с более сложными маршрутными и приоритетными структурами.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Ю.В. Малинковскому за проявленное внимание к работе и неоценимую помощь, оказанную в подготовке статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Летунович, Ю.Е.* Открытые марковские сети массового обслуживания с контрольными очередями и карантинным узлом / Ю.Е. Летунович, О.В. Якубович // Вестник Томского государственного университета. – 2017. – № 41. – С. 32–38.

2. *Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers* / F.E. Baskett, K.M. Chandy, R.R. Muntz, F.G. Palacios // J. Assoc. Comput. Mach. – 1975. – Vol. 22, № 2. – P. 248–260.

3. *Towsley, D.* Queueing network models with state-dependent routing / D. Towsley // J. Assoc. Comput. Mach. – 1980. – Vol. 27, № 2. – P. 323–337.

4. *Малинковский, Ю.В.* Сети Джексона с однолинейными узлами и ограниченным временем пребывания или ожидания / Ю.В. Малинковский // Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 4. – С. 67–79.

5. *Малинковский, Ю.В.* Инвариантность стационарного распределения открытой сети обслуживания с экспоненциальным ограничением на время пребывания / Ю.В. Малинковский, С.Ю. Евмененко // Автоматика и телемеханика. – 2024. – № 9. – С. 93–100.

6. *Малинковский, Ю.В.* Инвариантность стационарного распределения состояний модифицированных сетей Джексона и Гордона – Ньюэлла / Ю.В. Малинковский // Автоматика и телемеханика. – 1998. – № 9. – С. 29–36.

7. *Гнеденко, Б.В.* Введение в теорию массового обслуживания / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. – Москва: Наука, 1966.

Поступила в редакцию 09.02.2026.

Информация об авторах

Евмененко Станислав Юрьевич – аспирант

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ОЖИДАЕМЫХ ДОХОДОВ G-СЕТИ С НЕНАДЁЖНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ И НЕТЕРПЕЛИВЫМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЗАЯВКАМИ

Д.Я. Копать

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

APPLICATION OF BESSEL FUNCTION FOR FINDING EXPECTED REVENUES OF G-NETWORK WITH UNRELIABLE SYSTEMS AND IMPATIENT POSITIVE AND NEGATIVE CUSTOMERS

D.Y. Kopats

Yanka Kupala State University of Grodno

Аннотация. Объектом исследования в статье является G-сеть, состоящая из ненадёжных систем массового обслуживания (СМО), в которую поступают нетерпеливые положительные и отрицательные заявки. Нетерпеливость отрицательных заявок проявляется в уничтожении ими положительных заявок не сразу, а по истечении случайного времени, а нетерпеливость положительных – в ограничении времени ожидания начала обслуживания положительных заявок, по истечении которого она может перемещаться по системам сети или покидать сеть. С использованием модифицированных функций Бесселя первого рода удалось избавиться от ограничения на функционирование систем сети в режиме насыщения при нахождении ожидаемых доходов систем сети в случае, когда доходы от переходов между системами сети являются случайными величинами с известными средними значениями.

Ключевые слова: G-сеть, ненадёжные линии обслуживания, функции Бесселя, ожидаемые доходы, нетерпеливые положительные и отрицательные заявки.

Для цитирования: Копать, Д.Я. Применение функций Бесселя для нахождения ожидаемых доходов G-сети с ненадёжным обслуживанием и нетерпеливыми положительными и отрицательными заявками / Д.Я. Копать // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 1 (66). – С. 71–76. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_71. – EDN: MVEWXM

Abstract. The object of the study in the article is a G-network consisting of unreliable queuing systems (QS), which receives impatient positive and negative customers. The impatience of negative customers is manifested in the destruction of positive customers not immediately, but after a random period of time, and the impatience of positive customers is manifested in limiting the waiting time for the start of servicing positive customers, after which it can move through the network systems or leave the network. Using modified Bessel functions of the first orders, it was possible to get rid of the restriction on the functioning of network systems in the saturation mode when finding the expected revenues of network systems in the case when the revenues from transitions between network systems are random variables with known average values.

Keywords: G-network, unreliable line service, Bessel function, expected revenues, impatient positive and negative customers.

For citation: Kopats, D.Y. Application of Bessel function for finding expected revenues of G-network with unreliable systems and impatient positive and negative customers / D.Y. Kopats // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 1 (66). – P. 71–76. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_71 (in Russian). – EDN: MVEWXM

Введение

G-сети как разновидность сетей массового обслуживания (СМО), в которых помимо заявок, требующих обслуживания, функционируют объекты, которые не требуют обслуживания, но приносят вред СМО, в стационарном режиме были введены в рассмотрение в статье [1], а в переходном режиме впервые исследовались в статье [2]. В статье [3] была исследована G-сеть с ненадёжными линиями обслуживания в переходном режиме в случае, когда линия обслуживания (ЛО) приходила в неисправность из-за причин, не связанных с компьютерными вирусами.

В статье [4] данная сеть исследовалась в стационарном режиме, но предполагалось, что только вирусы способны приводить ЛО в неисправность. В статье [5] исследуется G-сеть с нетерпеливыми положительными и отрицательными заявками, а статья [6] исследует данную сеть в переходном режиме. Данная модель объединяет модели статей [3], [6], но для количества исправных ЛО условие смягчено: здесь функция Хевисайда для исправных ЛО аппроксимируется не единицей, а своим средним значением. Для количества положительных и отрицательных заявок в системах сети снимается условие на

функционирование систем сети в режиме насыщения, при этом, в отличие от существующих методов, например, последовательных приближений, совмещенного с методом рядов, выражения являются аналитическими, а доходы от переходов между состояниями сети случайными величинами (СВ) с известными средними значениями.

1 Описание сети

Рассмотрим открытую G -сеть массового обслуживания [1] с n однолинейными системами массового обслуживания (СМО). В i -ю СМО из внешней среды поступают простейшие потоки положительных и отрицательных заявок с интенсивностями соответственно λ_{0i}^+ , λ_{0i}^- , $i = \overline{1, n}$. Все поступающие потоки независимы. Времена обслуживания заявок в i -й СМО независимы, не зависят от процессов поступления и для положительных заявок являются показательной случайной величиной (ПСВ) с параметром μ_i . Каждая положительная заявка в i -й СМО имеет ограниченное ПСВ с параметром θ_i время пребывания, по истечении которого переходит в j -ю систему с вероятностью q_{ij}^+ как положительная заявка, а с вероятностью q_{ij}^- как отрицательная заявка, и с вероятностью

$$q_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^n (q_{ij}^+ + q_{ij}^-)$$

уходит из сети, $i, j = \overline{1, n}$. Линии обслуживания (ЛО) подвергаются случайным поломкам, причем время исправной работы ЛО системы S_i является ПСВ с параметром β_i , $i = \overline{1, n}$. После поломки ЛО немедленно начинает восстанавливаться и время восстановления также является ПСВ с параметром γ_i , $i = \overline{1, n}$.

Каждая отрицательная заявка находится в системе случайное время, имеющее распределение ПСВ с параметром μ_i^- , по истечении которого уменьшает число положительных заявок на единицу при их наличии, и не производит никаких воздействий на систему в противном случае.

После окончания обслуживания заявки в i -й СМО, она направляется в j -ю СМО с вероятностью p_{ij}^+ как положительная заявка, с вероятностью p_{ij}^- как отрицательная заявка, и с вероятностью

$$p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^n (p_{ij}^+ + p_{ij}^-)$$

уходит из сети, $i = \overline{1, n}$.

2 Система ДУ для ожидаемых доходов систем сети

Рассмотрим динамику изменения доходов i -й СМО сети, $i = \overline{1, n}$. Пусть доход этой СМО в начальный момент времени был равен v_{i0} , $i = \overline{1, n}$. Нам нужно найти доход системы $V_i(t)$ в момент времени t , $i = \overline{1, n}$. Доход i -й СМО в момент времени $t + \Delta t$ можно записать в виде

$$V_i(t + \Delta t) = V_i(t) + \Delta V_i(t, \Delta t), \quad (2.1)$$

где $\Delta V_i(t, \Delta t)$ – изменение дохода системы S_i на интервале $[t, t + \Delta t)$. Равенство (2.1) можно переписать в виде:

$$V_i'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta V_i(t, \Delta t) (\Delta t)^{-1}.$$

Чтобы найти доход, выпишем условные вероятности событий, которые могут произойти за время Δt , а также изменения доходов i -й СМО, которые связаны с этими событиями, $i = \overline{1, n}$. Возможны следующие ситуации:

1) в i -ю СМО из внешней среды за время Δt поступит положительная заявка с вероятностью $\lambda_{0i}^+ \Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1, n}$; доход i -й СМО увеличится на r_{0i}^+ , где r_{0i}^+ – СВ с математическим ожиданием $M\{r_{0i}^+\} = a_{0i}$, $i = \overline{1, n}$;

2) в i -ю СМО за время Δt из внешней среды поступит отрицательная заявка с вероятностью $\lambda_{0i}^- \Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1, n}$; изменение дохода сети в данном случае не произойдет;

3) положительная заявка после обслуживания или по истечении времени ожидания в i -ой СМО покинет сеть с вероятностью

$$(\mu_i u(d_i) p_{i0} + \theta_i q_{i0}) u(k_i) \Delta t + o(\Delta t), \quad i = \overline{1, n};$$

убыток i -ой СМО составит R_{i0}^+ , где R_{i0}^+ – СВ с математическим ожиданием $M\{R_{i0}^+\} = b_{i0}^+$, $i = \overline{1, n}$, где k_i – количество положительных заявок в i -ой СМО, d_i – число исправных ЛО в i -ой СМО, $u(x)$ – функция Хевисайда;

4) в i -й СМО по окончании времени ожидания в ней отрицательной заявки она уничтожает в этой СМО положительную заявку с вероятностью

$$\mu_i^- u(l_i) u(k_i) \Delta t + o(\Delta t), \quad i = \overline{1, n};$$

доход для i -ой системы уменьшится на R_{i0}^- , где $M\{R_{i0}^-\} = b_{i0}^-$, $i = \overline{1, n}$;

5) в i -й СМО время ожидания отрицательной заявки закончилось, если в момент времени t в ней отсутствовали положительные заявки; вероятность этого события равна

$$\mu_i^- u(l_i)(1-u(k_i))\Delta t + o(\Delta t), \quad i = \overline{1, n};$$

изменение дохода сети в данном случае не произойдет;

6) время обслуживания или ожидания положительной заявки в i -ой СМО закончилось и она переходит в j -ую СМО опять как положительная заявка с вероятностью

$$(\mu_i u(d_i) p_{ij}^+ + \theta_i q_{ij}^+) u(k_i) \Delta t + o(\Delta t), \quad i, j = \overline{1, n};$$

доход i -ой СМО уменьшится на величину R_{ij}^- , а доход j -ой СМО увеличится на эту величину, где $M\{R_{ij}^-\} = a_{ij}^+$, $i, j = \overline{1, n}, i \neq j$. Аналогично, когда время обслуживания или ожидания положительной заявки в j -ой СМО закончилось и она переходит в i -ую СМО опять как положительная заявка, доход i -ой СМО увеличится на величину R_{ji}^+ ;

7) время обслуживания или ожидания положительной заявки в i -ой СМО закончилось и она переходит в j -ую СМО как отрицательная заявка; вероятность такого события будет равна

$$(\mu_i u(d_i) p_{ij}^- + \theta_i (k_i + 1) q_{ij}^-) u(k_i) \Delta t + o(\Delta t), \\ i, j = \overline{1, n};$$

доход i -ой СМО уменьшится на величину R_{ij}^- , а доход j -ой СМО не изменится, где $M\{R_{ij}^-\} = a_{ij}^-$, $i, j = \overline{1, n}, i \neq j$.

8) с вероятностью

$$\gamma_i u(1-d_i(t)) \Delta t + o(\Delta t), \quad i = \overline{1, n},$$

при этом за время Δt восстановится одна линия обслуживания; доход СМО S_i уменьшится на СВ g_i , где $M\{g_i\} = h_i$, $j = \overline{1, n}$.

9) с вероятностью

$$\beta_i u(d_i(t)) \Delta t + o(\Delta t), \quad i = \overline{1, n},$$

при этом за время Δt одна линия обслуживания выйдет из строя; доход сети не изменится;

10) при этом в каждую i -ую СМО, $i = \overline{1, n}$, не поступают ни положительные, ни отрицательные заявки, и в них за время Δt не обслужилось ни одной заявки, не уйдет из очереди ни одной отрицательной заявки; вероятность такого события равна

$$1 - \sum_{i=1}^n (\lambda_{0i}^+ + \lambda_{0i}^- + (\mu_i u(k_i) + \theta_i) u(k_i) + \\ + \mu_i^-(l_i) u(l_i) + \gamma_i u(1-d_i) + \alpha_i u(d_i)) \Delta t + o(\Delta t), \\ i = \overline{1, n};$$

суммарный доход системы S_i может увеличиться (уменьшиться) на величину $r_i \Delta t$, где $M\{r_i\} = c_i$, $i, j = \overline{1, n}$.

Пусть $\forall t$ СВ r_{0i} , R_{i0} , g_i , r_{ij} , \bar{r}_{ij} , не зависят от СВ r_i . Тогда получаем, что:

$$\Delta V_i(t, \Delta t) = \left\{ \begin{array}{l} r_{0i} + r_i \Delta t, \text{ с вероятностью} \\ \lambda_{0i}^+ \Delta t + o(\Delta t), \\ \hline -R_{i0}^+ + r_i \Delta t, \text{ с вероятностью} \\ \mu_i^- u(l_i) u(k_i) \Delta t + o(\Delta t), \\ \hline -R_{i0}^- + r_i \Delta t, \text{ с вероятностью} \\ (\mu_i u(d_i) p_{i0} + \theta_i q_{i0}) u(k_i) \Delta t + o(\Delta t), \\ \hline -R_{ij}^+ + r_i \Delta t, \text{ с вероятностью} \\ (\mu_i u(d_i) p_{ij}^+ + \theta_i q_{ij}^+) u(k_i) \Delta t + o(\Delta t), \\ \hline R_{ji} + r_i \Delta t, \text{ с вероятностью} \\ (\mu_j u(d_j) p_{ji}^+ + \theta_j q_{ji}^+) u(k_j) \Delta t + o(\Delta t), \\ \hline -a_{ij}^- + r_i \Delta t, \text{ с вероятностью} \\ (\mu_i u(d_i) p_{ij}^- + \theta_i q_{ij}^-) u(k_i) \Delta t + o(\Delta t), \\ \hline i, j = \overline{1, n}, i \neq j, \\ \hline -g_i + r_i \Delta t, \text{ с вероятностью} \\ \gamma_i (1-u(d_i(t))) \Delta t + o(\Delta t), \\ \hline r_i \Delta t, \text{ с вероятностью} \\ 1 - \sum_{i=1}^n [(\lambda_{0i}^+ + \lambda_{0i}^- + \mu_i) u(k_i(t)) + \\ + \gamma_i u(d_i(t)) + \beta_i u(1-d_i(t))] \Delta t + o(\Delta t). \end{array} \right.$$

Тогда математическое ожидание изменения дохода равно:

$$M\{\Delta V_i(t, \Delta t)\} = (a_{0i} + c_i \Delta t) (\lambda_{0i}^+ \Delta t + o(\Delta t)) + \\ + (-b_{i0}^+ + c_i \Delta t) (\mu_i^- M u(l_i) M u(k_i) \Delta t + o(\Delta t)) + \\ + (-b_{i0}^- + c_i \Delta t) \times \\ \times ((\mu_i M u(d_i) p_{i0} + \theta_i q_{i0}) M u(k_i) \Delta t + o(\Delta t)) + \\ + \sum_{j=1}^n (-a_{ij}^+ + c_i \Delta t) \times \\ \times ((\mu_i M u(d_i) p_{ij}^+ + \theta_i q_{ij}^+) M u(k_i) \Delta t + o(\Delta t)) + \\ + \sum_{j=1}^n (a_{ji}^+ + c_i \Delta t) \times \\ \times ((\mu_j M u(d_j) p_{ji}^+ + \theta_j q_{ji}^+) M u(k_j) \Delta t + o(\Delta t)) + \\ + \sum_{j=1}^n (-a_{ij}^- + c_i \Delta t) \times \\ \times ((\mu_i M u(d_i) p_{ij}^- + \theta_i q_{ij}^-) M u(k_i) \Delta t + o(\Delta t)) + \\ + (-h_i + c_i \Delta t) (\gamma_i (1 - M u(d_i(t))) \Delta t + o(\Delta t)) + \\ + c_i \Delta t \left[1 - \sum_{i=1}^n [(\lambda_{0i}^+ + \lambda_{0i}^- + \mu_i) M u(k_i(t)) + \right.$$

$$+ \gamma_i \mu u(d_i(t)) + \beta_i u(1 - d_i(t))] \Delta t + o(\Delta t)].$$

Рассмотрим математическое ожидание от функций Хевисайда. По определению математического ожидания и с учётом состояний в однолинейной СМО

$$d_i(t) \in \{0; 1\} \quad \mu u(d_i(t)) = P\{d_i(t) = 1\}.$$

Используя результаты работы [7] получим

$$\begin{aligned} \mu u(d_i) &= 1 - \frac{\beta_i}{\beta_i + \gamma_i} + \frac{\beta_i}{\beta_i + \gamma_i} e^{-(\beta_i + \gamma_i)t} = \\ &= \frac{\gamma_i}{\beta_i + \gamma_i} + \frac{\beta_i}{\beta_i + \gamma_i} e^{-(\beta_i + \gamma_i)t}, \end{aligned}$$

$$\mu u(k_i) = P(k_i(t) > 0) = 1 - P(k_i(t) = 0).$$

Количество заявок простейшего потока с интенсивностью λ за время t , как известно например в [8], [9], подчиняется распределению Пуассона

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

Отсюда следует, что при $k = 0$ получаем $P_0(t) = e^{-\lambda t}$, при $k = 1$ $P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$. При малом значении t обозначим это значение как Δt в силу ординарности простейшего потока $P_{>1}(\Delta t) = o(\Delta t)$. Отсюда из условия нормировки получаем, $P_1(\Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} + o(\Delta t)$. Как известно, в марковских СеМО длительности времен обслуживания заявок имеют показательное распределение, то есть вероятность обслуживания 1 заявки за время t имеет вид: $1 - e^{-\lambda t}$, а вероятность того, что это время будет больше, то есть за время t не обслужиться ни одной заявки, равно $e^{-\lambda t}$. Последняя вероятность совпадает с вероятностью поступления нуля заявок при простейшем потоке. Таким образом приходим к выводу, что при малом значении времени данные распределения близки друг к другу, а именно разность вероятностей при замене показательного распределения простейшим потоком равна $o(\Delta t)$.

С учётом того, что суперпозиция простейших потоков является простейшим потоком [8], [9], то при малых значениях времени каждую очередь в описываемой СМО можно считать СМО М/М/1. То есть такая замена будет иметь погрешность суммы конечного количества $o(\Delta t)$, то есть будет равна $o(\Delta t)$. Отсюда следует, что для каждой СМО сети можно применить результаты работы [10], согласно которым получим следующие результаты:

$$\begin{aligned} \mu u(k_i) &= 1 - p_{0i}(t) = \\ &= 1 - \int_0^t q_{1i}(y) e^{-(\lambda_i + \mu_i^*)y} dy - \delta_{0a_i}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} q_{1i}(t) &= \mu_i^* \left(\sqrt{\lambda_i / \mu_i^*} \right)^{1-a_i} (1 - \delta_{0a_i}) \times \\ &\times \left[I_{a_i-1} \left(2\sqrt{\lambda_i \mu_i^*} t \right) + I_{a_i+1} \left(2\sqrt{\lambda_i \mu_i^*} t \right) \right] + \\ &+ \lambda_i \left(\sqrt{\lambda_i / \mu_i} \right)^{-a_i} \left[I_{a_i} \left(2\sqrt{\lambda_i \mu_i^*} t \right) + I_{2+a_i} \left(2\sqrt{\lambda_i \mu_i^*} t \right) \right], \end{aligned}$$

λ_i – интенсивность входящего в i -ую СМО потока, μ_i^* – интенсивность выходящего из i -ой СМО потока, a_i – начальное состояние i -ой СМО, $I_n(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода (МФБ1) n -го порядка (для СеМО нас будет интересовать случай целого неотрицательного порядка), δ_{0a_i} – символ Кронекера. Входящий поток в нашей сети разделим на 2 части: входящий поток положительных заявок с интенсивностью $\lambda_i^{(p)}$ и входящий поток отрицательных заявок с интенсивностью $\lambda_i^{(n)}$. Аналогично для выходящего потока $\mu_i^{(p)}, \mu_i^{(n)}$. Для нашей сети данные параметры равны:

$$\lambda_i^{(p)} = \lambda_{0i}^+ + \sum_{j=1}^n \mu_j p_{ji}^+ + \sum_{j=1}^n \theta_j q_{ji}^+, \quad \mu_i^{(p)} = \mu_i + \mu_i^-.$$

Отсюда введём обозначения:

$$\begin{aligned} q_{1i}^{(p)}(t) &= \mu_i^{(p)} \left(\sqrt{\lambda_i^{(p)} / \mu_i^{(p)}} \right)^{1-a_i} (1 - \delta_{0a_i}) \times \\ &\times \left[I_{a_i-1} \left(2\sqrt{\lambda_i^{(p)} \mu_i^{(p)}} t \right) + I_{a_i+1} \left(2\sqrt{\lambda_i^{(p)} \mu_i^{(p)}} t \right) \right] + \\ &+ \lambda_i \left(\sqrt{\lambda_i^{(p)} / \mu_i^{(p)}} \right)^{-a_i} \times \\ &\times \left[I_{a_i} \left(2\sqrt{\lambda_i^{(p)} \mu_i^{(p)}} t \right) + I_{2+a_i} \left(2\sqrt{\lambda_i^{(p)} \mu_i^{(p)}} t \right) \right]. \end{aligned}$$

И наконец рассмотрим $\mu u(l_i) = P(l_i(t) > 0)$.

Аналогично прошлому случаю получим

$$\lambda_i^{(n)} = \lambda_{0i}^- + \sum_{j=1}^n \mu_j p_{ji}^- + \sum_{j=1}^n \theta_j q_{ji}^-, \quad \mu_i^{(n)} = \mu_i^-,$$

$$\begin{aligned} q_{1i}^{(n)}(t) &= \mu_i^{(n)} \left(\sqrt{\lambda_i^{(n)} / \mu_i^{(n)}} \right)^{1-a_i} (1 - \delta_{0a_i}) \times \\ &\times \left[I_{a_i-1} \left(2\sqrt{\lambda_i^{(n)} \mu_i^{(n)}} t \right) + I_{a_i+1} \left(2\sqrt{\lambda_i^{(n)} \mu_i^{(n)}} t \right) \right] + \\ &+ \lambda_i \left(\sqrt{\lambda_i^{(n)} / \mu_i^{(n)}} \right)^{-a_i} \times \\ &\times \left[I_{a_i} \left(2\sqrt{\lambda_i^{(n)} \mu_i^{(n)}} t \right) + I_{2+a_i} \left(2\sqrt{\lambda_i^{(n)} \mu_i^{(n)}} t \right) \right]. \end{aligned}$$

Введем обозначение $v_i(t) = M\{V_i(t)\}$. Из (2.1) имеем

$$v_i(t + \Delta t) = v_i(t) + M\{\Delta V_i(t, \Delta t)\},$$

откуда, перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ и задавая

начальные условия $v_i(0) = v_{i0}$, $i = \overline{1, n}$, получим выражения для ожидаемых доходов систем сети

$$\begin{aligned} v_i(t) = & c_i t + a_{0i} \lambda_{0i}^+ t - \\ & - b_{i0}^+ \mu_i^- \int_0^t Mu(l_i(\tau)) Mu(k_i(\tau)) d\tau - \\ & - b_{i0}^- \left(\mu_i p_{i0} \int_0^t Mu(d_i(\tau)) Mu(k_i(\tau)) d\tau + \right. \\ & \left. + \theta_i q_{i0} \int_0^t Mu(k_i(\tau)) d\tau \right) - \\ & - \sum_{j=1}^n a_{ij}^+ \left(\mu_j p_{ji}^+ \int_0^t Mu(d_j(\tau)) Mu(k_j(\tau)) d\tau + \right. \\ & \left. + \theta_j q_{ji}^+ \int_0^t Mu(k_j(\tau)) d\tau \right) + \\ & + \sum_{j=1}^n a_{ji}^+ \left(\mu_j p_{ji}^+ \int_0^t Mu(d_j(\tau)) Mu(k_j(\tau)) d\tau + \right. \\ & \left. + \theta_j q_{ji}^+ \int_0^t Mu(k_j(\tau)) d\tau \right) - \\ & - \sum_{j=1}^n a_{ij}^- \left(\mu_j p_{ji}^- \int_0^t Mu(d_j(\tau)) Mu(k_j(\tau)) d\tau + \right. \\ & \left. + \theta_j q_{ji}^- \int_0^t Mu(k_j(\tau)) d\tau \right) - \\ & - h_i \left(\gamma_i \left(t - \int_0^t Mu(d_i(\tau)) d\tau \right) \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим интегралы от функций Хевисайда.

$$\begin{aligned} \int_0^t Mu(d_i(\tau)) d\tau = & \int_0^t \left(\frac{\gamma_i}{\beta_i + \gamma_i} + \frac{\beta_i}{\beta_i + \gamma_i} e^{-(\beta_i + \gamma_i)\tau} \right) d\tau = \\ = & \frac{\gamma_i t}{\beta_i + \gamma_i} - \frac{\beta_i}{(\beta_i + \gamma_i)^2} e^{-(\beta_i + \gamma_i)t} + \frac{\beta_i}{(\beta_i + \gamma_i)^2}. \\ \int_0^t Mu(k_i(\tau)) d\tau = & t(1 - P(k_i(t) = 0)) = \\ = & t \left(1 - \int_0^t q_{ii}^{(p)}(y) e^{-(\lambda_i^{(p)} + \mu_i^{(p)})y} dy - \delta_{0a_i} \right). \end{aligned}$$

Перейдём к интегралам от произведения функций Хевисайда в предложении, что потоки входящих в каждую СМО положительных и отрицательных заявок, а также положительных заявок и интенсивности выхода из строя и восстановления ЛО независимы. Тогда получим:

$$\begin{aligned} \int_0^t Mu(l_i(\tau)) Mu(k_i(\tau)) d\tau = \\ = tP\{l_i(t) > 0\} P\{k_i(t) > 0\} = \\ = t \left(1 - \int_0^t q_{ii}^{(p)}(y) e^{-(\lambda_i^{(p)} + \mu_i^{(p)})y} dy + \delta_{0a_i} \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \times \left(1 - \int_0^t q_{ii}^{(n)}(y) e^{-(\lambda_i^{(n)} + \mu_i^{(n)})y} dy + \delta_{0a_i} \right). \\ \int_0^t Mu(d_i(\tau)) Mu(k_i(\tau)) d\tau = \\ = tP\{d_i(t) = 1\} P\{k_i(t) > 0\} = \\ = t \left(\frac{\gamma_i}{\beta_i + \gamma_i} + \frac{\beta_i}{\beta_i + \gamma_i} e^{-(\beta_i + \gamma_i)t} \right) \times \\ \times \left(1 - \int_0^t q_{ii}^{(p)}(y) e^{-(\lambda_i^{(p)} + \mu_i^{(p)})y} dy + \delta_{0a_i} \right). \end{aligned}$$

Пример. Рассмотрим СеМО, состоящую из $n = 5$ СМО с интенсивностями входного потока положительных и отрицательных заявок λ_{0i}^+ и λ_{0i}^- равными соответственно $\lambda_{01}^+ = 30$, $\lambda_{02}^+ = 10$, $\lambda_{03}^+ = 20$, $\lambda_{04}^+ = 20$, $\lambda_{05}^+ = 20$, $\lambda_{01}^- = \lambda_{02}^- = \lambda_{03}^- = 15$, $\lambda_{04}^- = 15$, $\lambda_{05}^- = 15$. Ожидаемые доходы от поступления положительных заявок в системы сети извне a_{0i} равны соответственно $a_{0i} = 10, i = \overline{1, 5}$. Пусть интенсивности обслуживания заявок и активации отрицательных заявок в СМО сети равны: $\mu_i = \mu_i^- = 50, i = \overline{1, 5}$. Убытки сети от активации отрицательных заявок b_{i0}^- и себестоимость обслуживания заявки b_{i0}^+ равны соответственно $b_{i0}^+ = b_{i0}^- = i, i = \overline{1, 5}$. Параметры времени работы неисправной и времени восстановления равны соответственно $\beta_i = 4, \gamma_i = 5, i = \overline{1, 5}$. Средняя величина убытка за восстановление ЛО равна $h_i = 2, i = \overline{1, 5}$. Положим, что вероятности перехода положительных и отрицательных заявок между СМО сети равны:

$$p_{ji}^- = q_{ii} = q_{ij}^+ = q_{ij}^- = 0,1; \quad i \neq j; \quad i, j = \overline{1, 5}.$$

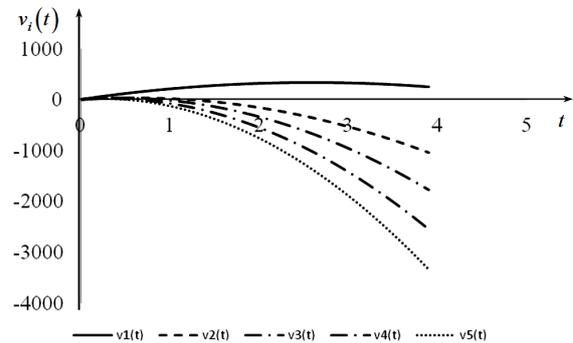


Рисунок 2.1 – График ожидаемого дохода систем сети на отрезке времени $[0; 4]$

Интенсивности досрочного перехода заявок между системами сети равны соответственно $\theta_j = 2; j = \overline{1, 5}$. Выражения для ожидаемых доходов от перехода положительных заявок между

системами сети a_{ij}^+ имеют вид $a_{ij}^+ = 5$, а в случае перехода заявок в другие СМО как отрицательных – следующий вид $a_{ij}^- = 3$. На рисунке 2.1 представлен график изменения ожидаемых доходов систем сети на отрезке времени $[0; 4]$, если в начальный момент времени все системы сети были с нулевым доходом.

Заключение

В статье представлена G -сеть, состоящая из ненадежных систем с нетерпеливыми положительными и отрицательными заявками. С помощью МФБ1 найдены ожидаемые доходы систем сети в случае, когда доходы от переходов между состояниями сети являются СВ с известными средними значениями. Показано, что если системы сети не находятся в режиме насыщения, то ожидаемый доход является нелинейной функцией времени даже если параметры сети не зависят от времени и состояний сети.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gelenbe, E.* Product form queueing networks with negative and positive customers / E. Gelenbe // *Journal of Applied Probability*. – 1991. – Vol. 28. – P. 656–663.
2. *Matalytski, M.* Non-stationary analysis of queueing network with positive and negative messages / M. Matalytski, V. Naumenko // *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*. – 2013. – Vol. 12, № 2. – P. 61–71.
3. *Копать, Д.Я.* Анализ G -сети с ненадежными линиями обслуживания / Д.Я. Копать, М.А. Матальцкий // *Вести Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук*. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 441–453.
4. *Fourneau, J.M.* G -networks of unreliable nodes / J.M. Fourneau // *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. – 2016. – Vol. 30, № 3. – С. 361–378.
5. *Малинковский, Ю.В.* Стационарное распределение вероятностей состояний G -сетей с ограниченным временем пребывания / Ю.В. Малинковский // *Автоматика и телемеханика*. – 2017. – № 10. – С. 155–167.
6. *Копать, Д.Я.* Нахождение ожидаемых доходов в сети массового обслуживания со случайным временем ожидания положительных и отрицательных заявок / Д.Я. Копать, В.В. Науменко, М.А. Матальцкий // *Вестник Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне*. – 2017. – Т. 7, № 1. – С. 147–153.
7. *Ивницкий, В.А.* Теория сетей массового обслуживания / В.А. Ивницкий. – Москва: Физматлит, 2004. – 772 с.
8. *Матальцкий, М.А.* Системы и сети МО: анализ и применения / М.А. Матальцкий, О.М. Тихоненко, Е.В. Колузаева. – Гродно: ГрГУ, 2011. – 817 с.
9. *Вишневский, В.М.* Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях / В.М. Вишневский, А.Н. Дудин, В.И. Клименок. – Москва: ТЕХНОСФЕРА, 2018. – 563 с.
10. *Parthasarathy, P.R.* A Transient solution to an $M/M/1$ queue: a simple approach / P.R. Parthasarathy // *Advances in Applied Probability*. – 1987. – Т. 19, № 4. – С. 997–998.

Поступила в редакцию 09.10.2025.

Информация об авторах

Копать Дмитрий Ярославович – к.ф.-м.н., доцент

КЛАССИЧЕСКОЕ И СЛАБОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

В.И. Корзюк¹, Я.В. Рудзько²

¹Белорусский государственный университет, Минск

²Институт математики НАН Беларуси, Минск

CLASSICAL AND MILD SOLUTIONS OF THE FIRST MIXED PROBLEM FOR A SEMILINEAR WAVE EQUATION WITH A MIXED DERIVATIVE

V.I. Korzyuk¹, J.V. Rudzko²

¹Belarusian State University, Minsk

²Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk

Аннотация. Для полулинейного волнового уравнения со смешанной производной, заданного в первом квадранте, рассматривается смешанная задача, в которой на пространственной полупрямой заданы условия Коши, а на временной – условия Дирихле. Оператор в уравнении представляет собой композицию двух операторов переноса с постоянными коэффициентами. Решение строится методом характеристик в неявном аналитическом виде как решение некоторых интегральных уравнений. Исследуется разрешимость этих уравнений, а также зависимость от начальных данных и гладкость их решений. Для рассматриваемой задачи доказана единственность решения и установлены условия существования ее классического решения. Построено слабое решение в случае недостаточно гладких данных задачи.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, волновое уравнение со смешанной производной, нелинейное волновое уравнение, смешанная задача, классическое решение, слабое решение, условия согласования.

Для цитирования: Корзюк, В.И. Классическое и слабое решение первой смешанной задачи для полулинейного волнового уравнения со смешанной производной / В.И. Корзюк, Я.В. Рудзько // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 1 (66). – С. 77–83. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_77. – EDN: HFNPUY

Abstract. We consider a mixed problem for a semilinear wave equation with a mixed derivative in the first quadrant, where the Cauchy conditions are specified on the spatial half-line and the Dirichlet condition is specified on the time half-line. The operator in the equation is a composition of two transport operators with constant coefficients. We construct the solution using the method of characteristics as an implicit analytical form that solves some integral equations. We study the solvability of these equations, as well as their dependence on the source data and the smoothness of the solutions. The uniqueness of the solution is proved for the problem in question, and the conditions under which its classical solution exists are established. In the case of insufficiently smooth data, a mild solution is constructed.

Keywords: hyperbolic equation, wave equation with mixed derivative, nonlinear wave equation, mixed problem, classical solution, mild solution, matching conditions.

For citation: Korzyuk, V.I. Classical and mild solutions of the first mixed problem for a semilinear wave equation with a mixed derivative / V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 1 (66). – P. 77–83. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_77. – EDN: HFNPUY

Introduction

Nonlinear wave equations of the form

$$(\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)u(t, x) = f(t, x, u(t, x))$$

appear in many applications, including the propagation of spin waves in liquid ³He, the propagation of resonant light pulses in a medium with atoms having degenerate energy levels [1], the quantum field theory [2, 3], rapidly rotating baroclinic fluid [4], superconductors [4], Bloch-wall motion, the propagation of a crystal dislocation [5]. It demonstrates the importance of studying mixed problems for the nonlinear wave equations. The simplest generalization of Eq. $(\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)u(t, x) = f(t, x, u(t, x))$ is the

following equation

$$(\partial_t + a_1 \partial_x)(\partial_t - a_2 \partial_x)u(t, x) = f(t, x, u(t, x)),$$

which will be studied in the present paper.

1 Statement of the problem

In the domain $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$ of two independent variables $(t, x) \in \bar{Q} \subset \mathbb{R}^2$, consider the one-dimensional nonlinear equation

$$(\partial_t + a_1 \partial_x)(\partial_t - a_2 \partial_x)u(t, x) = f(t, x, u(t, x)), \quad (1.1)$$

where $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, and f is a function given on the set $[0, \infty) \times [0, \infty) \times \mathbb{R}$. Equation (1.1) is equipped with the initial conditions

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, \infty), \quad (1.2)$$

and the boundary condition

$$u(t, 0) = \mu(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (1.3)$$

where φ , ψ , and μ are functions given on the half-line $[0, \infty)$.

We call Eq. (1.1) a semilinear wave equation with a mixed derivative, because its principal part is of the form:

$$(\partial_t + a_1 \partial_x)(\partial_t - a_2 \partial_x) = \partial_t^2 + (a_1 - a_2) \partial_t \partial_x - a_1 a_2 \partial_x^2,$$

where terms ∂_t^2 and $-a_1 a_2 \partial_x^2$ correspond to the terms ∂_t^2 and $-a^2 \partial_x^2$ of the classical wave equation, respectively, and the term $(a_1 - a_2) \partial_t \partial_x$ corresponds to an additional mixed derivative.

In the case $a_1 = a_2$ problem (1.1)–(1.3) was considered in [6]–[9]. Mixed problems for Eq. (1) in the linear case, i. e., $f(t, x, u) = F(t, x) + q(t, x)u$, were considered in [10]–[13].

2 Linear homogeneous equation

First, we consider problem (1.1)–(1.3) when

$$f(t, x, u) \equiv 0. \quad (2.1)$$

We find the solution to problem (1.1)–(2.1) using the method of characteristics. The general solution to Eq. (1.1) with (2.1) is given by the formula:

$$u(t, x) = g_1(x - a_1 t) + g_2(x + a_2 t). \quad (2.2)$$

To define the solution of problem (1.1)–(2.1) on the set \bar{Q} , the functions g_1 and g_2 must be defined for all real numbers and nonnegative real numbers, respectively. Substituting (2.2) into the Cauchy conditions (1.2) yields the following system of equations:

$$g_1(x) + g_2(x) = \varphi(x),$$

$$-a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) = \psi'(x), \quad x \in [0, \infty),$$

which has the following solution (see source [14] for an algorithm to solve this system):

$$g_1(x) = \frac{a_2 \varphi(x)}{a_1 + a_2} - \frac{C}{a_1 + a_2} - \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^x \psi(z) dz, \quad (2.3)$$

$$x \in [0, \infty),$$

$$g_2(x) = \frac{a_1 \varphi(x)}{a_1 + a_2} + \frac{C}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^x \psi(z) dz, \quad (2.4)$$

$$x \in [0, \infty),$$

where C is an integration constant.

We can use the boundary conditions (1.3) to define the function g_1 for negative values of the argument. Substituting (2.2) into the boundary conditions (1.3) yields the following representation:

$$g_1(-a_1 t) + g_2(a_2 t) = \mu(t),$$

which implies

$$g_1(x) = -g_2\left(-\frac{a_2 x}{a_1}\right) + \mu\left(-\frac{x}{a_1}\right), \quad x \in (-\infty, 0]. \quad (2.5)$$

Combining (2.5) with (2.3), we get

$$g_1(x) = \mu\left(-\frac{x}{a_1}\right) - \frac{a_2 \varphi\left(-\frac{a_2 x}{a_1}\right)}{a_1 + a_2} - \frac{C}{a_1 + a_2} - \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^{\frac{a_2 x}{a_1}} \psi(z) dz, \quad x \in (-\infty, 0]. \quad (2.6)$$

Formulas (2.3), (2.4), and (2.6) imply that

$$u(t, x) = \frac{a_2 \varphi(x - a_1 t) + a_1 \varphi(x - a_2 t)}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{x - a_1 t}^{x + a_2 t} \psi(z) dz, \quad (t, x) \in \bar{Q}^{(1)}, \quad (2.7)$$

$$u(t, x) = \mu\left(t - \frac{x}{a_1}\right) + \frac{a_1 \varphi(x + a_2 t)}{a_1 + a_2} - \frac{a_1 \varphi\left(a_2 \left(t - \frac{x}{a_1}\right)\right)}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{a_2 \left(t - \frac{x}{a_1}\right)}^{x + a_2 t} \psi(z) dz, \quad (t, x) \in \bar{Q}^{(2)}, \quad (2.8)$$

where $\bar{Q}^{(j)} = \{(t, x) : (t, x) \in \bar{Q} \wedge (-1)^j (a_1 t - x) > 0\}$, $j = 1, 2$.

Now, let us analyze the smoothness of the constructed solution. Under the smoothness conditions $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi \in C^1([0, \infty))$, and $\mu \in C^2([0, \infty))$ the function u defined by formulas (2.7) and (2.8) belongs to the classes $C^2(\bar{Q}^{(1)})$ and $C^2(\bar{Q}^{(2)})$. Thus, this function u belongs to the class $C^2(\bar{Q})$ if and only if the following conditions are met:

$$\partial_t^p \partial_x^k u(t, x = at - 0) = \partial_t^p \partial_x^k u(t, x = at + 0), \quad (2.9)$$

$$p, k = 0, 1, 2, \quad 0 \leq p + k \leq 2.$$

Substituting (2.7) and (2.8) into conditions (2.9), we obtain the following equalities:

$$\mu(0) = \varphi(0), \quad (2.10)$$

$$\mu'(0) = \psi(0), \quad (2.11)$$

$$\mu''(0) = -a_1 \psi'(0) + a_2 \psi'(0) + a_1 a_2 \varphi''(0). \quad (2.12)$$

Thus, we have proved the following assertion.

Assertion 2.1. *Let the conditions be satisfied*

$$\varphi \in C^2([0, \infty)), \quad \psi \in C^1([0, \infty)), \quad \mu \in C^2([0, \infty)).$$

The first mixed problem (1.1)–(2.1) has a unique solution $u : \bar{Q} \mapsto \mathbb{R}$ in the class $C^2(\bar{Q})$ if and only if conditions (2.10)–(2.12) are satisfied. This solution is determined by formulas (2.7) and (2.8).

Proof. 1. The existence of the solution follows from the construction. 2. The uniqueness of the solution follows from the rigorous justification of each step in the construction process. \square

3 Linear inhomogeneous equation

Now consider Eq. (1.1) with

$$f(t, x, u) = F(t, x), \quad (3.1)$$

where F is some function given on the set \bar{Q} .

According to Duhamel's method [14], we seek a solution to problem (1.1)–(1.3) and (3.1) in the form $u_{\text{inhom}} = u + v$, where u is a solution to problem (1.1)–(1.3) and (3.1) for $F \equiv 0$ and v is determined in terms of the function

$$\omega : [0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty) \ni (t, \tau, x) \mapsto \omega(t, \tau, x) \in \mathbb{R}$$

by the formula

$$v(t, x) = \int_0^t \omega(t - \tau, \tau, x) d\tau. \quad (3.2)$$

where the function ω solves the following problem:

$$\begin{aligned} (\partial_t + a_1 \partial_x)(\partial_t - a_2 \partial_x)\omega(t, \tau, x) &= 0, \quad (t, x) \in Q, \\ \omega(0, \tau, x) &= 0, \quad \partial_t \omega(0, \tau, x) = F(\tau, x), \quad x \in [0, \infty), \\ \omega(t, \tau, 0) &= 0, \quad t \in [0, \infty). \end{aligned}$$

According to Section 2, the function ω has the following form:

$$\omega(t, \tau, x) = \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{x-a_1 t}^{x+a_2 t} F(\tau, z) dz, \quad (t, x) \in \bar{Q}^{(1)}, \quad (3.3)$$

$$\omega(t, \tau, x) = \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{a_2 \left(t - \frac{x}{a_1} \right)}^{x+a_2 t} F(\tau, z) dz, \quad (t, x) \in \bar{Q}^{(2)}. \quad (3.4)$$

So, according to formulas (3.2)–(3.4), the function v takes the form

$$\begin{aligned} v(t, x) &= \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^t d\tau \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} F(\tau, z) dz, \quad (t, x) \in \bar{Q}^{(2)}, \\ v(t, x) &= \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{t-\frac{x}{a_1}}^t d\tau \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} F(\tau, z) dz + \\ &+ \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^{t-\frac{x}{a_1}} d\tau \int_{a_2 \left(t - \frac{x}{a_1} - \tau \right)}^{x+a_2(t-\tau)} F(\tau, z) dz, \quad (t, x) \in \bar{Q}^{(1)}. \end{aligned}$$

Thus, we have constructed the solution to problem (1.1)–(1.3) and (3.1) in the form

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{a_2 \varphi(x - a_1 t) + a_1 \varphi(x - a_2 t)}{a_1 + a_2} + \\ &+ \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{x-a_1 t}^{x+a_2 t} \psi(z) dz + \\ &+ \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^t d\tau \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} F(\tau, z) dz, \quad (t, x) \in \bar{Q}^{(1)}, \quad (3.5) \\ u(t, x) &= \mu \left(t - \frac{x}{a_1} \right) + \frac{a_1 \varphi(x + a_2 t)}{a_1 + a_2} - \\ &- \frac{a_1 \varphi \left(a_2 \left(t - \frac{x}{a_1} \right) \right)}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{a_2 \left(t - \frac{x}{a_1} \right)}^{x+a_2 t} \psi(z) dz + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{t-\frac{x}{a_1}}^t d\tau \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} F(\tau, z) dz + \\ &+ \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^{t-\frac{x}{a_1}} d\tau \int_{a_2 \left(t - \frac{x}{a_1} - \tau \right)}^{x+a_2(t-\tau)} F(\tau, z) dz, \quad (t, x) \in \bar{Q}^{(2)}. \quad (3.6) \end{aligned}$$

Now, let us analyze the smoothness of the constructed solution. Under the smoothness conditions $F \in C^1(\bar{Q})$, $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi \in C^1([0, \infty))$, and $\mu \in C^2([0, \infty))$ the function u defined by formulas (3.5) and (3.6) belongs to the classes $C^2(\bar{Q}^{(1)})$ and $C^2(\bar{Q}^{(2)})$. Thus, this function u belongs to the class $C^2(\bar{Q})$ if and only if conditions (2.9) are met. Substituting (3.5) and (3.6) into conditions (2.9) yields (2.10), (2.11), and

$$\mu''(0) = F(0, 0) - a_1 \psi'(0) + a_2 \psi'(0) + a_1 a_2 \varphi''(0). \quad (3.7)$$

The following assertion holds.

Assertion 3.1. *Let the conditions be satisfied $F \in C^1(\bar{Q})$, $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi \in C^1([0, \infty))$, $\mu \in C^2([0, \infty))$.*

The first mixed problem (1.1)–(1.3) and (3.1) has a unique solution $u : \bar{Q} \mapsto \mathbb{R}$ in the class $C^2(\bar{Q})$ if and only if conditions (2.10), (2.11), and (3.7) are satisfied. This solution is determined by formulas (3.5) and (3.6).

Proof. 1. The existence of the solution follows from the construction. 2. Let us prove the uniqueness. Assume that problem (1.1)–(1.3) and (3.1) has two solutions, namely, $u^{(1)}$ and $u^{(2)}$. Denote $U = u^{(1)} - u^{(2)}$. Then the function U solves the following problem

$$\begin{aligned} (\partial_t + a_1 \partial_x)(\partial_t - a_2 \partial_x)U(t, x) &= 0, \quad (t, x) \in Q, \\ U(t, x) = \partial_t U(t, x) &= 0, \quad x \in [0, \infty), \\ U(t, 0) &= 0, \quad t \in [0, \infty). \quad (3.8) \end{aligned}$$

According to Assertion 2.1, problem (3.8) has a unique solution $U \equiv 0$. Thus, $u^{(1)} \equiv u^{(2)}$ and the uniqueness is proved.

4 Integral equation

Under certain smoothness and matching conditions, it turns out that the classical solution to problem (1.1)–(1.3) is equivalent to the solution to two coupled integral equations. The following theorem addresses this equivalence.

Theorem 4.1. *Let the conditions be satisfied*

$$\begin{aligned} f &\in C^1(\bar{Q} \times \mathbb{R}), \quad \varphi \in C^2([0, \infty)), \\ \psi &\in C^1([0, \infty)), \quad \mu \in C^2([0, \infty)). \end{aligned}$$

The function $u : \bar{Q} \mapsto \mathbb{R}$ belongs to the class $C^2(\bar{Q})$ and satisfies Eq. (1.1) with conditions (1.2) and (1.3)

if and only if it is a continuous solution of the following coupled integral equations

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &= \frac{a_2\varphi(x - a_1t) + a_1\varphi(x - a_2t)}{a_1 + a_2} + \\
 &+ \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{x - a_1t}^{x + a_2t} \psi(z) dz + \\
 &+ \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^t d\tau \int_{x - a_1(t - \tau)}^{x + a_2(t - \tau)} F(\tau, z, u(\tau, z)) dz, \quad (4.1) \\
 &\quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}}, \\
 u(t, x) &= \mu \left(t - \frac{x}{a_1} \right) + \frac{a_1\varphi(x + a_2t)}{a_1 + a_2} - \\
 &- \frac{a_1\varphi \left(a_2 \left(t - \frac{x}{a_1} \right) \right)}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{a_2 \left(t - \frac{x}{a_1} \right)}^{x + a_2t} \psi(z) dz + \\
 &+ \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{t - \frac{x}{a_1}}^t d\tau \int_{x - a_1(t - \tau)}^{x + a_2(t - \tau)} F(\tau, z, u(\tau, z)) dz + \\
 &+ \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^{t - \frac{x}{a_1}} d\tau \int_{a_2 \left(t - \frac{x}{a_1} - \tau \right)}^{x + a_2(t - \tau)} F(\tau, z, u(\tau, z)) dz, \quad (4.2) \\
 &\quad (t, x) \in \overline{Q^{(2)}},
 \end{aligned}$$

and the matching conditions (2.10), (2.11), and

$$\begin{aligned}
 \mu''(0) &= f(0, 0, \varphi(0)) - a_1\psi'(0) + \\
 &+ a_2\psi'(0) + a_1a_2\varphi''(0) \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

are satisfied.

Proof. 1. Let a function $u \in C^2(\overline{Q})$ satisfy Eq. (1.1) and conditions (1.2), (1.3).

We will use the scheme proposed in [8] to derive the matching conditions (2.10), (2.11), and (4.3). By differentiating the initial and boundary conditions, we find that

$$\begin{aligned}
 \partial_x u(0, x) &= \varphi'(x), \quad \partial_x^2 u(0, x) = \varphi''(x), \\
 \partial_t \partial_x u(0, x) &= \psi'(x), \quad x \in [0, \infty), \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

$$\partial_t u(t, 0) = \mu'(t), \quad \partial_t^2 u(t, 0) = \mu''(t), \quad t \in [0, \infty). \quad (4.5)$$

Thus, we have the following:

$$\begin{aligned}
 u(0, 0) &= \mu(0), \quad \partial_t u(0, 0) = \mu'(0), \\
 \partial_t^2 u(0, 0) &= \mu''(0), \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

$$u(0, 0) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0, 0) = \psi(x). \quad (4.7)$$

Formulas (4.6) and (4.7) imply conditions (2.10) and (2.11). From Eq. (1.1) we find the quantity $\partial_t^2 u(t, 0)$, namely,

$$\begin{aligned}
 \partial_t^2 u(t, 0) &= f(0, 0, u(0, 0)) - a_1 \partial_t \partial_x u(0, 0) + \\
 &+ a_2 \partial_t \partial_x u(0, 0) + a_1 a_2 \partial_x^2 u(0, 0). \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

Substituting (4.4), (4.6), and (4.7) into (4.8) yields condition (4.3).

We seek the expression for a solution to problem (1.1)–(1.3) in the form $u = v + w$, where v is a solution to the problem

$$\begin{aligned}
 (\partial_t + a_1 \partial_x)(\partial_t - a_2 \partial_x)v(t, x) &= 0, \quad (t, x) \in Q, \\
 v(0, x) &= \varphi(x), \quad \partial_t v(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, \infty), \\
 v(t, 0) &= \mu(t), \quad t \in [0, \infty),
 \end{aligned}$$

and w is a solution to the problem

$$\begin{aligned}
 (\partial_t + a_1 \partial_x)(\partial_t - a_2 \partial_x)w(t, x) &= f(t, x, (v + w)(t, x)), \\
 &\quad (t, x) \in Q, \\
 w(t, x) &= \partial_t w(t, x) = 0, \quad x \in [0, \infty), \\
 w(t, 0) &= 0, \quad t \in [0, \infty).
 \end{aligned}$$

Then, the results of Assertion 3.1 allow us to write formulas (4.1) and (4.2).

2. Suppose that the function u can be represented as (4.1)–(4.2) and the conditions (2.10), (2.11), and (4.3) are satisfied. Due to the smoothness conditions $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi \in C^1([0, \infty))$, and $\mu \in C^2([0, \infty))$, similarly to [6], we conclude that $u \in C^2(\overline{Q^{(1)}})$ and $u \in C^2(\overline{Q^{(2)}})$. Substituting (4.1)–(4.2) into Eq. (1.1) and conditions (1.2), (1.3), we verify that the function u satisfies Eq. (1.1) in each of the subdomains $\overline{Q^{(1)}}$ and $\overline{Q^{(2)}}$, and the initial and boundary conditions everywhere. In order for the function u to belong to the class $C^2(\overline{Q})$, it is necessary and sufficient that equalities (2.9) be satisfied. For this, it suffices to satisfy conditions (2.10), (2.11), and (4.3), as can be deduced from the representations (4.1) and (4.2), and to act exactly according to the algorithm described in [6], [8]. The proof of the theorem is complete.

Theorem 4.2. *Let the conditions be satisfied*

$$\begin{aligned}
 f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R}), \quad \varphi \in C([0, \infty)), \quad \psi \in L^1_{loc}([0, \infty)), \\
 \mu \in C([0, \infty)),
 \end{aligned}$$

and let the function f satisfy the Lipschitz condition with a function $L \in L^1_{loc}(\overline{Q})$ with respect to the third variable, i. e., $|f(t, x, z) - f(t, x, w)| \leq L(t, x)|z - w|$.

Then there exist unique solutions of Eqs. (4.1) and (4.2) in the classes $C(\overline{Q^{(1)}})$ and $C(\overline{Q^{(2)}})$, respectively, and these solutions continuously depend on the source data.

Proof. The proof of the theorem will be carried out by the scheme set forth in [6], [8], [15] (in complete form) and in [14], [16] (briefly).

To be definite, consider Eq. (4.1). It will be solved by the successive approximation method. Set

$$\begin{aligned}
 G(t, x) &= \frac{a_2\varphi(x - a_1t) + a_1\varphi(x - a_2t)}{a_1 + a_2} + \\
 &+ \frac{1}{a_1 + a_2} \int_{x - a_1t}^{x + a_2t} \psi(z) dz.
 \end{aligned}$$

Take the initial approximation $u^{(0)}(t, x) = G(t, x)$,

$(t, x) \in \overline{Q^{(1)}}$. Then every subsequent approximation will be calculated by the formula

$$u^{(m)}(t, x) = G(t, x) + \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^t d\tau \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} F(\tau, z, u^{(m-1)}(\tau, z)) dz, \quad (4.9)$$

$(t, x) \in \overline{Q^{(1)}}$, $m = 1, 2, \dots$

Let us establish the estimates for the successive approximations. Let

$$\Omega_m = \text{Conv} \left\{ (0, 0), (0, m), \left(\frac{m}{a_1 + a_2}, \frac{a_1 m}{a_1 + a_2} \right) \right\},$$

$$\Lambda_m = \|L\|_{L^2(\Omega_m)}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Then $|u^{(1)}(t, x) - u^{(0)}(t, x)| \leq \mathcal{M}_m$,

$$\begin{aligned} & |u^{(2)}(t, x) - u^{(1)}(t, x)| \leq \\ & \left| \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^t d\tau \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} F(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z)) dz - \right. \\ & \left. - \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^t d\tau \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} F(\tau, z, u^{(0)}(\tau, z)) dz \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^t d\tau \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} |F(\tau, z, u^{(1)}(\tau, z)) - \\ & \quad - F(\tau, z, u^{(0)}(\tau, z))| dz \leq \\ & \leq \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^t d\tau \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} L(\tau, z) |u^{(1)}(\tau, z) - u^{(0)}(\tau, z)| dz \leq \\ & \leq \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^t d\tau \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} L(\tau, z) \mathcal{M} dz \leq \\ & \leq \frac{1}{a_1 + a_2} \sqrt{\int_0^t d\tau \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} L^2(\tau, z) dz} \sqrt{\int_0^t d\tau \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} \mathcal{M}_m^2 dz} \leq \\ & \leq \frac{\Lambda_m \mathcal{M}_m t}{\sqrt{2} \sqrt{a_1 + a_2}}, \quad (t, x) \in \Omega_m, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

In what follows, by induction in which the last inequality is chosen as the base case, one can readily prove the estimate

$$|u^{(i+1)}(t, x) - u^{(i)}(t, x)| \leq \frac{\Lambda_m^i \mathcal{M}_m t^i}{\sqrt{(2i)!} (a_1 + a_2)^{i/2}}, \quad (4.10)$$

$(t, x) \in \Omega_m, \quad m = 1, 2, \dots$

Note that

$$u^{(m)}(t, x) = u^{(0)}(t, x) + \sum_{i=0}^{m-1} (u^{(i+1)}(t, x) - u^{(i)}(t, x)).$$

The estimate (4.10) implies the absolute and uniform convergence of the series

$$u^{(\infty)}(t, x) = u^{(0)}(t, x) + \sum_{i=0}^{\infty} (u^{(i+1)}(t, x) - u^{(i)}(t, x)),$$

on the set Ω_m for any $m > 0$, since its terms are

majorized in magnitude by the terms of the uniformly converging series

$$\|u^{(0)}\|_{C(\Omega_m)} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Lambda_m^i \mathcal{M}_m t^i}{\sqrt{(2i)!} (a_1 + a_2)^{i/2}}.$$

Thus, the successive approximations by the continuous functions $u^{(m)}$ uniformly tend on the set Ω_m to a function $u^{(\infty)} : \Omega_m \mapsto \mathbb{R}$ continuous in Ω_m , and, by virtue of arbitrariness of m and the fact that $\bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m = \overline{Q^{(1)}}$, to a function $u^{(\infty)} : \overline{Q^{(1)}} \mapsto \mathbb{R}$, continuous in $\overline{Q^{(1)}}$. Passing to the limit as $m \rightarrow \infty$ in (4.10), we conclude that the function $u^{(\infty)}$ is a solution of Eq. (4.1) on the set $\overline{Q^{(1)}}$.

Let us prove the uniqueness of the solution of Eq. (4.1) by contradiction. Let Eq. (4.1) have two solutions, u_1 and u_2 . Denote $U = u_1 - u_2$.

Then

$$U(t, x) = \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^t d\tau \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} F(\tau, z, u_1(\tau, z)) dz - \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^t d\tau \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} F(\tau, z, u_2(\tau, z)) dz, \quad (4.11)$$

$(t, x) \in \overline{Q^{(1)}}$.

The function U is continuous, and hence $|U(t, x)| \leq M_{U;m}$ under the condition $(t, x) \in \Omega_m$, where $M_{U;m}$ is some constant. It follows from relation (4.11) in view of the Lipschitz condition and the Cauchy – Bunyakovsky – Schwarz inequality that

$$\begin{aligned} |U(t, x)| & \leq \frac{1}{a_1 + a_2} \sqrt{\int_0^t d\tau \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} L^2(\tau, z) dz} \times \\ & \times \sqrt{\int_0^t d\tau \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} M_{U;m}^2 dz} \leq \frac{\Lambda_m M_{U;m} t}{\sqrt{2} \sqrt{a_1 + a_2}}, \\ & (t, x) \in \Omega_m, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

By induction, we arrive at the estimate

$$|U(t, x)| \leq \frac{\Lambda_m^i \mathcal{M}_m t^i}{\sqrt{(2i)!} (a_1 + a_2)^{i/2}}$$

for any positive integer i and any pair $(t, x) \in \Omega_m, m = 1, 2, \dots$. It follows that $U \equiv 0$ on the set Ω_m ,

and since m is arbitrary and $\bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m = \overline{Q^{(1)}}$, we have

$U \equiv 0$ on the set $\overline{Q^{(1)}}$. This proves the existence of a unique continuous solution of Eq. (4.1).

To prove the continuous dependence of the solution on the initial data, along with Eq. (4.1), consider the perturbed equation

$$(u + \Delta u)(t, x) = (G + \Delta G)(t, x) +$$

$$+ \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^t d\tau \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} F(\tau, z, (u + \Delta u)(\tau, z)) dz, \quad (4.12)$$

$$(t, x) \in \overline{Q^{(1)}},$$

and the difference of the perturbed equation (4.12) and the unperturbed equation (4.1),

$$\Delta u(t, x) = \Delta G(t, x) + \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^t d\tau \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} F(\tau, z, (u + \Delta u)(\tau, z)) dz - \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^t d\tau \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} F(\tau, z, \Delta u(\tau, z)) dz, \quad (4.13)$$

$$(t, x) \in \overline{Q^{(1)}}.$$

For Eq. (4.13) for the disturbance Δu , one has the following estimate of the disturbance modulus:

$$\Delta u(t, x) \leq \Delta G(t, x) + \frac{1}{a_1 + a_2} \int_0^t d\tau \int_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)} L(\tau, z) \Delta u(\tau, z) dz.$$

Applying the multidimensional Grönwall lemma [17, Ch. 13] to the preceding inequality, we obtain $|\Delta u(t, x)| \leq C^{(1)} \|G\|_{C(\Omega_m)}$, $(t, x) \in \Omega_m$, $m = 1, 2, \dots$,

where $C^{(1)}$ is some positive constant depending only on the set Ω_m , the function L , and the numbers a_1 and a_2 . It follows from the resulting inequality that however small the perturbation ΔG , $\|G\|_{C(\Omega_m)} = \varepsilon$, is taken, the perturbation of the solution satisfies the inequality $|\Delta u(t, x)| \leq \delta = C^{(1)} \varepsilon$ on the set Ω_m , $m = 1, 2, \dots$. Since m is arbitrary and $\bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m = \overline{Q^{(1)}}$,

we conclude that the solution u to Eq. (4.1) continuously depends on the source data.

The existence of a unique continuous solution of Eq. (4.2), which continuously depends on the source data, can be proved in a similar way. The proof of the theorem is complete. \square

5 Classical solution

The main results of this paper are presented below: the existence and uniqueness of a classical solution to problem (1.1)–(1.3).

Theorem 5.1. *Let the conditions be satisfied*

$$f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R}), \quad \varphi \in C^2([0, \infty)),$$

$$\psi \in C^1([0, \infty)), \quad \mu \in C^2([0, \infty)),$$

and let the function f satisfy the Lipschitz condition with a function $L \in L^1_{loc}(\overline{Q})$ with respect to the third variable, i. e., $|f(t, x, z) - f(t, x, w)| \leq L(t, x)|z - w|$. The first mixed problem (1.1)–(1.3) has a unique solution $u: \overline{Q} \mapsto \mathbb{R}$ in the class $C^2(\overline{Q})$ if and only if conditions (2.10), (2.11), and (4.3) are satisfied. This solution is determined by formulas (4.1) and (4.2).

The proof follows from Theorem 4.1 and 4.2.

6 Mild solution

Now consider problem (1.1)–(1.3) for the case in which the functions μ , φ , ψ , and f do not have a sufficient degree of smoothness.

Definition 6.1. We call a function u representable in the form (4.1) and (4.2) a *mild solution* of problem (4.1)–(4.3).

Remark 6.1. Any classical solution of problem (4.1)–(4.3) is also a mild solution of this problem.

Remark 6.2. It is also obvious that if the additional smoothness conditions $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $\varphi \in C^2([0, \infty))$, $\psi \in C^1([0, \infty))$, and $\mu \in C^2([0, \infty))$ are satisfied, as well as the matching conditions (2.10), (2.11) and (4.3), then the mild solution of problem (1.1)–(1.3) is classical.

The following assertion holds.

Theorem 6.1. *Let the conditions be satisfied*

$$f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R}), \quad \varphi \in C([0, \infty)),$$

$$\psi \in L^1_{loc}([0, \infty)), \quad \mu \in C([0, \infty)),$$

and let the function f satisfy the Lipschitz condition with a function $L \in L^1_{loc}(\overline{Q})$ with respect to the third variable, i. e., $|f(t, x, z) - f(t, x, w)| \leq L(t, x)|z - w|$. The first mixed problem (1.1)–(1.3) has a unique mild solution $u: \overline{Q} \mapsto \mathbb{R}$ in the class $C(\overline{Q})$, where $\tilde{Q} = \overline{Q} \setminus \{(t, a_1 t) : t \in [0, \infty)\}$.

The proof follows from Theorem 4.2.

The smoothness of a mild solution to problem (1.1)–(1.3) can also be increased if the matching condition (2.10) is true.

Theorem 6.2. *Let the conditions be satisfied*

$$f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R}), \quad \varphi \in C([0, \infty)),$$

$$\psi \in L^1_{loc}([0, \infty)), \quad \mu \in C([0, \infty)),$$

and let the function f satisfy the Lipschitz condition with a function $L \in L^1_{loc}(\overline{Q})$ with respect to the third variable, i. e., $|f(t, x, z) - f(t, x, w)| \leq L(t, x)|z - w|$. The first mixed problem (1.1)–(1.3) has a unique mild solution $u: \overline{Q} \mapsto \mathbb{R}$ in the class $C(\overline{Q})$ if and only if condition (2.10) is satisfied.

Proof. In view of (4.1) and (4.2), we derive

$$u(t, x = at - 0) - u(t, x = at + 0) = \mu(0) - \varphi(0).$$

Since the constructed mild solution belongs to the class $C(\tilde{Q})$, it also belongs to the class $C(\overline{Q})$ if and only if $\mu(0) - \varphi(0) = 0$. It proves the theorem.

The following theorem further improves the smoothness of the mild solution.

Theorem 6.3. *Let the conditions be satisfied*

$$f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R}), \quad \varphi \in C^1([0, \infty)),$$

$$\psi \in C([0, \infty)), \quad \mu \in C^1([0, \infty)),$$

and let the function f satisfy the Lipschitz condition

with a function $L \in L^1_{\text{loc}}(\bar{Q})$ with respect to the third variable, i. e., $|f(t, x, z) - f(t, x, w)| \leq L(t, x)|z - w|$. The first mixed problem (1.1)–(1.3) has a unique mild solution $u: \bar{Q} \mapsto \mathbb{R}$ in the class $C^1(\bar{Q})$ if and only if conditions (2.10) and (2.11) are satisfied.

Proof. In view of (4.1) and (4.2), we derive that $u \in C^1(\bar{Q})$ under the smoothness conditions $f \in C(\bar{Q} \times \mathbb{R})$, $\varphi \in C^1([0, \infty))$, $\psi \in C([0, \infty))$, and $\mu \in C^1([0, \infty))$. Thus, this function u belongs to the class $C^1(\bar{Q})$ if and only if the following conditions are met:

$$\partial_t^p \partial_x^k u(t, x = at - 0) = \partial_t^p \partial_x^k u(t, x = at + 0), \quad (6.1)$$

$$p, k = 0, 1, \quad 0 \leq p + k \leq 1.$$

Substituting (4.1) and (4.2) into conditions (6.1), we obtain equalities (2.10) and (2.11). The proof of the theorem is complete. \square

Conclusions

In this paper, we derive the necessary and sufficient conditions for the existence of a unique classical solution to the first mixed problem in a quarter-plane for a semilinear wave equation with a mixed derivative. When the initial and boundary data are not sufficiently smooth, we construct a mild solution to the initial problem and prove its uniqueness.

REFERENCES

1. Bullough, R.K. The double sine-Gordon equations: a physically applicable system of equations / R.K. Bullough, P.J. Caudrey, H.M. Gibbs // Solitons. Topics in Current Physics; Eds.: R.K. Bullough, P.J. Caudrey. – Berlin – Heidelberg: Springer, 1980. – Vol. 17. – P. 107–141.
2. Nakayama, Y. Liouville field theory: A decade after the revolution / Y. Nakayama // Int. J. Mod. Phys. A. – 2004. – Vol. 19, № 17–18. – P. 2771–2930.
3. Campbell, D.K. Historical overview of the ϕ^4 model / D.K. Campbell // A Dynamical Perspective on the ϕ^4 Model. – Springer: Cham, 2019. – P. 1–22.
4. Gibbon, J.D. The Sine-Gordon Equation as a Model for a Rapidly Rotating Baroclinic Fluid / J.D. Gibbon, I.N. James, I.M. Moroz // Phys. Scr. – 1979. – Vol. 20. – P. 402–408.
5. Barone, A. Theory and Applications of the Sine-Gordon Equation / A. Barone, F. Esposito, C.J. Magee, A.C. Scott // Riv. Nuovo Cim. – 1971. – Vol. 1, № 2. – P. 227–267.
6. Korzyuk, V.I. Classical Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential / V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko // Differential Equations. – Vol. 58, № 2. – P. 175–186.
7. Korzyuk, V.I. Classical and Mild Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation

with a Nonlinear Potential / V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. – 2023. – Vol. 43. – P. 48–63.

8. Korzyuk, V.I. Classical Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential in a Curvilinear Quadrant / V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko // Differential Equations. – Vol. 59, № 8. – P. 1075–1089.

9. Korzyuk, V.I. Classical Solution of a Mixed Problem with the Zaremba Boundary Condition and Conjugation Conditions for a Semilinear Wave Equation / V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko // Journal of Mathematical Sciences. – 2025. – Vol. 293, № 5. – P. 678–693.

10. Rykhlov, V.S. Classical Solution of the Initial-Boundary Value Problem for the Wave Equation with Mixed Derivative / V.S. Rykhlov // Journal of Mathematical Sciences. – 2025. – Vol. 287, № 4. – P. 630–663.

11. Rykhlov, V.S. Generalized solution of the initial-boundary-value problem for the wave equation with a mixed derivative and a general potential / V.S. Rykhlov // Itogi Nauki i Tekhniki. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz. – 2024. – Vol. 232. – P. 99–121.

12. Rykhlov, V.S. On the solution of the initial-boundary problem in a half-strip for a hyperbolic equation with a mixed derivative / V.S. Rykhlov // Itogi Nauki i Tekhniki. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz. – 2023. – Vol. 226. – P. 89–107.

13. Rykhlov, V.S. Generalized initial-boundary problem for the wave equation with mixed derivative / V.S. Rykhlov // Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. – 2023. – Vol. 69, № 2. – P. 342–363.

14. Korzyuk, V.I. Equations of Mathematical Physics / V.I. Korzyuk. – Moscow: LENAND, 2021. – 480 p.

15. Korzyuk, V.I. Classical Solution for a Mixed Problem for Klein – Gordon – Fock Equation with Nonlocal Conditions / V.I. Korzyuk, I.I. Stolyarchuk // Tr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Belarusi. – 2018. – Vol. 26, № 1. – P. 54–70.

16. Bitsadze, A.V. Equations of Mathematical Physics / A.V. Bitsadze. – Moscow: Nauka Publ., 1982. – 336 p.

17. Mitrinović, D.S. Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives / D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić, A.M. Fink. – Dordrecht: Springer, 1991. – 587 p.

The article was submitted 05.12.2025.

Информация об авторах

Корзюк Виктор Иванович – д.ф.-м.н., профессор
Рудько Ян Вячеславович – магистр наук (математика и компьютерные науки)

О ДВУХ ТИПАХ СКОШЕННЫХ μ -ГАНКЕЛЕВЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.Р. Миротин, Е.Ю. Кузьменкова

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ON TWO TYPES OF SLANT μ -HANKEL OPERATORS IN HILBERT SPACES

A.R. Mirotin, E.Yu. Kuzmenkova

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. В работе вводятся два типа операторов, действующих в гильбертовом пространстве, которые обобщают как класс μ -ганкелевых операторов, так и классы скошенных ганкелевых операторов, определенные ранее. Получены описания операторов введенных классов в терминах коммутационных соотношений, даны критерии их ограниченности, ядерности и принадлежности классу Гильберта – Шмидта. Полученные результаты применяются к интегральным операторам в пространстве Харди.

Ключевые слова: оператор Ганкеля, гильбертово пространство, ограниченный оператор, ядерный оператор, пространство Харди, интегральный оператор, μ -ганкелев оператор.

Для цитирования: Миротин, А.Р. О двух типах скошенных μ -ганкелевых операторов в гильбертовых пространствах / А.Р. Миротин, Е.Ю. Кузьменкова // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 1 (66). – С. 84–90. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_84. – EDN: DUMJWV

Abstract. This paper introduces two types of operators acting in Hilbert spaces that generalize both the class of μ -Hankel operators and the classes of slant Hankel operators defined previously. The operators in these classes are described in terms of commutation relations, and the criteria for their boundedness, nuclearity, and membership in the Hilbert – Schmidt class are given. These results are applied to integral operators in Hardy spaces.

Keywords: Hankel operator, Hilbert space, bounded operator, nuclear operator, Hardy space, integral operator, μ -Hankel operator.

For citation: Mirotin, A.R. On two types of slant μ -Hankel operators in Hilbert spaces / A. R. Mirotin, E. Yu. Kuzmenkova // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 1 (66). – P. 84–90. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_84 (in Russian). – EDN: DUMJWV

Введение

Матричное задание является одним из способов введения линейных операторов, действующих между гильбертовыми пространствами (см, например, [1]). Хотя универсальный удобный критерий ограниченности при таком задании не известен, имеется ряд достаточных и необходимых условий (см, например, [4], [5]). В то же время для таких важных классов операторов, как операторы Тёплица и Ганкеля, известны критерии их ограниченности в гильбертовых пространствах в терминах их матриц (см., например, [6], [7], [9]). В последнее время появился ряд работ (см., например, [10]–[14]), в которых рассмотрены некоторые обобщения ганкелевых операторов, также допускающие матричное задание. В настоящей работе вводятся два типа операторов, действующих в гильбертовом пространстве, которые обобщают класс операторов, введенный в [11]. Получены описания операторов этих классов в терминах коммутационных соотношений, содержащих оператор сдвига, и критерии ограниченности, ядерности и

принадлежности классу Гильберта – Шмидта в терминах матриц этих операторов. Даны приложения этих результатов к интегральным операторам в пространстве Харди H^2 в единичном круге. Часть результатов данной работы была анонсирована в [15].

1 Типы скошенных μ -ганкелевых операторов

Напомним, что матрица линейного оператора T в сепарабельном гильбертовом пространстве \mathcal{H} в ортонормированном базисе $(e_k)_{k \geq 0}$ этого пространства состоит из элементов вида

$$t_{jk} = \langle Te_k, e_j \rangle.$$

Пусть μ – комплексное число, $\gamma = \{\gamma_j\}_{j \geq 0}$, $\delta = \{\delta_j\}_{j \geq 0}$ – последовательности комплексных чисел, $p \in \mathbb{N}$, и пусть \mathcal{H} – сепарабельное гильбертово пространство. Введем операторы следующих двух типов.

Определение 1.1. Оператор S в сепарабельном гильбертовом пространстве \mathcal{H} назовем

скошенным μ -ганкелевым типа [C], если для некоторого ортонормированного базиса $(e_k)_{k \geq 0} \subset \mathcal{H}$ матрица этого оператора состоит из элементов вида

$$c_{jk} = \mu^j \gamma_{pk+j}. \quad (1.1)$$

Матрица скошенного μ -ганкелева оператора типа [C] имеет вид $(c_{jk})_{k,j \geq 0} = (\mu^j \gamma_{pk+j})_{k,j \geq 0}$, т. е.

$$[C] := \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_p & \gamma_{2p} & \gamma_{3p} & \gamma_{4p} & \dots \\ \mu\gamma_1 & \mu\gamma_{p+1} & \mu\gamma_{2p+1} & \mu\gamma_{3p+1} & \dots & \\ \mu^2\gamma_2 & \mu^2\gamma_{p+2} & \mu^2\gamma_{2p+2} & \dots & & \\ \mu^3\gamma_3 & \mu^3\gamma_{p+3} & \dots & & & \\ \mu^4\gamma_4 & \dots & & & & \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Далее операторы, удовлетворяющие определению 1.1, будем обозначать также $C_{\mu,\gamma,p}$.

Определение 1.2. Оператор D в сепарабельном гильбертовом пространстве \mathcal{H} назовем скошенным μ -ганкелевым типа [D], если для некоторого ортонормированного базиса $(e_k)_{k \geq 0} \subset \mathcal{H}$ матрица этого оператора состоит из элементов вида

$$d_{jk} = \mu^j \delta_{k+pj}. \quad (1.3)$$

Матрица скошенного μ -ганкелева оператора типа [D] имеет вид $(d_{jk})_{k,j \geq 0} = (\mu^j \delta_{k+pj})_{k,j \geq 0}$, т. е.

$$[D] := \begin{pmatrix} \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & \dots \\ \mu\delta_p & \mu\delta_{1+p} & \mu\delta_{2+p} & \mu\delta_{3+p} & \dots & \\ \mu^2\delta_{2p} & \mu^2\delta_{1+2p} & \mu^2\delta_{2+2p} & \dots & & \\ \mu^3\delta_{3p} & \mu^3\delta_{1+3p} & \dots & & & \\ \mu^4\delta_{4p} & \dots & & & & \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Далее операторы, удовлетворяющие определению 1.2, будем обозначать также $D_{\mu,\delta,p}$.

Связь между операторами указанных типов устанавливает следующая

Лемма 1.1. Оператор T , действующий в \mathcal{H} , есть скошенный μ -ганкелев оператор $C_{\mu,\gamma,p}$ типа [C] тогда и только тогда, когда его сопряженный T^* есть оператор $D_{\nu,\delta,p}$ типа [D], где

$$\nu = \frac{1}{\mu^p}, \quad \delta_n = \overline{\mu^n \gamma_n}.$$

Доказательство. Оператор T имеет вид $C_{\mu,\alpha,p}$ тогда и только тогда, когда его сопряженный имеет матрицу, состоящую из элементов вида

$$t_{jk}^* = \overline{c_{kj}} = \overline{\mu^k \gamma_{k+pj}} = \left(\frac{1}{\mu^p} \right)^j \left((\overline{\mu})^{k+pj} \overline{\gamma_{k+pj}} \right) = \nu^j \delta_{k+pj},$$

где $\nu = \frac{1}{\mu^p}$, $\delta = \overline{\mu^n \gamma_n}$. □

Можно охарактеризовать скошенные μ -ганкелевы операторы рассматриваемых типов как операторы, удовлетворяющие некоторым коммутационным соотношениям.

Теорема 1.1. Справедливы следующие утверждения:

1. Ограниченный оператор C в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ является скошенным μ -ганкелевым типа [C] в том и только том случае, когда выполнено следующее коммутационное соотношение:

$$CS = \frac{1}{\mu^p} S^* C. \quad (1.5)$$

2. Ограниченный оператор D в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ является скошенным ν -ганкелевым типа [D] в том и только том случае, когда выполнено следующее коммутационное соотношение:

$$DS^p = \nu S^* D, \quad (1.6)$$

где S – оператор сдвига в $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$.

Доказательство. 1. Пусть оператор C удовлетворяет (1.1). При всех $k, j \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$\begin{aligned} \langle CSe_k, e_j \rangle &= \langle Ce_{k+1}, e_j \rangle = \mu^j \gamma_{p(k+1)+j} = \\ &= \frac{\mu^{j+p}}{\mu^p} \gamma_{pk+(j+p)} = \frac{1}{\mu^p} \langle Ce_k, e_{j+p} \rangle n = \\ &= \frac{1}{\mu^p} \langle Ce_k, S^p e_j \rangle = \frac{1}{\mu^p} \langle S^* C e_k, e_j \rangle. \end{aligned}$$

В силу ограниченности оператора C , отсюда следует (1.5).

Обратно, пусть выполняется (1.5). Тогда при $k, j \in \mathbb{Z}_+$, $k > 0$ имеем

$$\begin{aligned} c_{jk} &:= \langle Ce_k, e_j \rangle = \langle CSe_{k-1}, e_j \rangle = \\ &= \left\langle \frac{1}{\mu^p} S^* C e_{k-1}, e_j \right\rangle = \frac{1}{\mu^p} \langle Ce_{k-1}, S^p e_j \rangle n = \\ &= \frac{1}{\mu^p} \langle Ce_{k-1}, e_{j+p} \rangle = \frac{1}{\mu^p} c_{(j+p),(k-1)}. \end{aligned}$$

Итерируя полученное равенство, имеем

$$c_{jk} = \frac{1}{\mu^{pk}} c_{(pk+j),0} = \mu^{-pk} c_{(pk+j),0} = \mu^j (\mu^{-(pk+j)} c_{(pk+j),0}).$$

Так как при $k = 0$ последнее равенство очевидно, оператор C – скошенный μ -ганкелев типа [C], причем $\gamma_n = \mu^{-n} c_{n,0}$.

2. Переходя к сопряженному в (1.5), получаем, что оператор C будет μ -ганкелевым типа [C], если и только если

$$S^* C^* = \frac{1}{\mu^p} C^* S^p. \quad (1.7)$$

С другой стороны, в силу леммы 1.1 C будет μ -ганкелевым типа [C], если и только если C^* будет ν -ганкелевым типа [D], причем $\nu = \frac{1}{\mu^p}$.

Поэтому, полагая в (1.7) $C^* = D$ и подставляя $v = \frac{1}{\mu^p}$, получаем второе утверждение теоремы. \square

2 Скошенные μ -ганкелевы операторы. Неунимодулярный случай

В этом разделе будет рассмотрен случай $|\mu| \neq 1$.

Следующие теоремы дают, в частности, условия ограниченности операторов рассматриваемых классов.

Теорема 2.1. Пусть \mathcal{H} – сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство, $C = C_{\mu, \gamma, p} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ – скошенный μ -ганкелев оператор типа [C].

1. Пусть $|\mu| < 1$. Оператор $C = C_{\mu, \gamma, p}$ ограничен тогда и только тогда, когда $(\gamma_n) \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$. При этом C является ядерным с нормой Гильберта – Шмидта

$$\|C\|_{S_2} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\mu|^{2j} |\gamma_{pk+j}|^2 \right)^{1/2} \quad (2.1)$$

и следом

$$\text{tr}C = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \gamma_{(p+1)n}. \quad (2.2)$$

2. Пусть $|\mu| > 1$. Оператор $C = C_{\mu, \gamma, p}$ является ограниченным, если и только если $(\mu^n \gamma_n) \in \ell^2$. При этом C является ядерным с нормой Гильберта – Шмидта и следом, задаваемыми формулами (2.1) и (2.2) соответственно.

Доказательство. 1. Так как

$$c_{jk} = \langle C e_k, e_j \rangle = \langle e_k, C^* e_j \rangle,$$

то

$$\langle C^* e_j, e_k \rangle = \overline{c_{jk}} = \overline{\mu^j \gamma_{pk+j}}.$$

Следовательно, если оператор C ограничен, то при всех $j \geq 0$

$$\begin{aligned} |\mu^j|^2 \sum_k |\gamma_{pk+j}|^2 &= \sum_k |\mu^j|^2 |\gamma_{pk+j}|^2 = \\ &= \sum_k |c_{jk}|^2 = \|C^* e_j\|^2 < \infty. \end{aligned}$$

В частности, при всех $j = 0, 1, \dots, p-1$ сходится ряд $\sum_k |\gamma_{pk+j}|^2$. Из этого следует, что $(\gamma_n) \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$,

что и доказывает необходимость.

Для доказательства достаточности рассмотрим норму Гильберта – Шмидта

$$\|C\|_{S_2} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\mu|^{2j} |\gamma_{pk+j}|^2 \right)^{1/2}.$$

Поскольку сейчас $(\gamma_n) \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$, $|\mu| < 1$, то

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\mu|^{2j} |\gamma_{pk+j}|^2 &= \sum_{j=0}^{\infty} |\mu|^{2j} \sum_{k=0}^{\infty} |\gamma_{pk+j}|^2 \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} |\mu|^{2j} \sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_n|^2 = \frac{1}{1-|\mu|^2} \|\gamma_n\|_{\ell^2}^2 < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, C есть оператор Гильберта – Шмидта. Кроме того, он ядерный, поскольку его след

$$\text{tr}C = \sum_{n=0}^{\infty} c_{nn} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \gamma_{(p+1)n}$$

конечен в силу неравенства Коши – Буняковского:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \gamma_{(p+1)n} \right| \leq \|\mu^n\|_{\ell^2} \|\gamma_n\|_{\ell^2}.$$

2. Пусть $|\mu| > 1$. Если оператор C ограничен, то

$$C e_0 = \sum_j \mu^j \gamma_j e_j, \quad \text{и} \quad \sum_{j=0}^{\infty} |\mu^j \gamma_j| = \|C e_0\|^2 < \infty.$$

Из этого следует, что $(\mu^n \gamma_n) \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$, что и доказывает необходимость.

Пусть теперь $(\mu^n \gamma_n) \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$. Рассмотрим норму Гильберта-Шмидта оператора C

$$\begin{aligned} \|C\|_{S_2}^2 &= \sum_j \sum_k |c_{jk}|^2 = \sum_j \sum_k |\mu|^{2j} |\gamma_{pk+j}|^2 = \\ &= \sum_j \sum_k |\mu|^{-2pk} \left(|\mu|^{pk+j} |\gamma_{pk+j}| \right)^2 = \\ &= \sum_k |\mu|^{-2pk} \sum_j \left(|\mu|^{pk+j} |\gamma_{pk+j}| \right)^2 \leq \\ &\leq \sum_k \left(\frac{1}{|\mu|^{2p}} \right) \sum_n \left(|\mu|^n |\gamma_n| \right)^2 = \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{|\mu|^{2p}}} \|\mu^n \gamma_n\|_{\ell^2}^2 < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, оператор C является оператором Гильберта – Шмидта.

Более того, оператор C является ядерным, поскольку его след $\text{tr}C = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \gamma_{(p+1)n}$ конечен.

В самом деле, последовательность $(\mu^n \gamma_n)$ ограничена. Поэтому найдется такая константа $K > 0$, что $|\gamma_n| < K / |\mu|^n$ при всех n . Следовательно,

$$|\mu^n \gamma_{(p+1)n}| < |\mu|^n \frac{K}{|\mu|^{(p+1)n}} = K \left(\frac{1}{|\mu|^p} \right)^n. \quad \square$$

Теорема 2.2. Пусть \mathcal{H} – сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство, $D = D_{\nu, \delta, p} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ – скошенный μ -ганкелев оператор типа [D].

1. Пусть $|\nu| < 1$. Оператор $D_{\nu, \delta, p}$ ограничен, если и только если последовательность $(\nu^{-2n/p} \delta_n)$ принадлежит ℓ^2 . При этом условии он также принадлежит к классу Гильберта – Шмидта и является ядерным, и

$$\|D\|_{S_2} = \left(\sum_j \sum_k |\nu|^{2j} |\delta_{k+pj}|^2 \right)^{1/2}, \quad (2.3)$$

и следом

$$\text{tr}D = \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \delta_{(p+1)n}. \quad (2.4)$$

2. Пусть $|\nu| > 1$. Оператор $D_{\nu, \delta, p}$ ограничен, если и только если последовательность $(\nu^{-n/p} \delta_n)$ принадлежит ℓ^2 . При этом условии он также является ядерным с нормой Гильберта – Шмидта и следом, задаваемыми формулами (2.3) и (2.4) соответственно.

Доказательство. По лемме 1.1

$$D_{\nu, \delta, p} = C_{\mu, \gamma, p}^*$$

где $\nu = \bar{\mu}^{-p}$, $\delta_n = \bar{\mu}^n \bar{\gamma}_n$. Следовательно, $\mu = \bar{\nu}^{-1/p}$, $\gamma_n = \bar{\nu}^{-n/p} \bar{\delta}_n$.

1. Если $|\nu| < 1$, то $|\mu| > 1$. Поскольку ограниченность оператора равносильна ограниченности его сопряженного, в силу теоремы 2.1 оператор $C_{\mu, \gamma, p}^*$, а вместе с ним и оператор $D_{\nu, \delta, p}$, будут ограничены тогда и только тогда, когда ограничен оператор $C_{\mu, \gamma, p}$, т. е. когда последовательность $\mu^n \gamma_n = \bar{\nu}^{-2n/p} \bar{\delta}_n$ принадлежит ℓ^2 , что равносильно первому утверждению.

Аналогично, поскольку принадлежность оператора классу Гильберта – Шмидта (ядерность) равносильна принадлежности классу Гильберта – Шмидта (соответственно ядерности) его сопряженного, то при условии $(\nu^{-2n/p} \delta_n) \in \ell^2$ оператор $D_{\nu, \delta, p}$ принадлежит к классу Гильберта – Шмидта и является ядерным, причем

$$\|D\|_{S_2} = \left(\sum_j \sum_k |d_{jk}|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_j \sum_k |\nu|^{2j} |\delta_{k+pj}|^2 \right)^{1/2},$$

и

$$\text{tr}D = \sum_n d_{nn} = \sum_n \nu^n \delta_{(p+1)n}.$$

2. Пусть $|\nu| > 1$, т. е. $|\mu| < 1$. Как и в случае 1 в силу теоремы 2.1 операторы $C_{\mu, \gamma, p}^*$ и $D_{\nu, \delta, p}$ будут ограничены тогда и только тогда, когда ограничен оператор $C_{\mu, \gamma, p}$, то есть когда последовательность $\gamma_n = \bar{\nu}^{-n/p} \bar{\delta}_n$ принадлежит ℓ^2 , что равносильно первому утверждению.

Поскольку ядерность оператора равносильна ядерности его сопряженного, то при условии

$(\nu^{-n/p} \delta_n) \in \ell^2$ оператор $D_{\nu, \delta, p}$ также является ядерным с нормой Гильберта – Шмидта и следом, задаваемыми формулами (2.3) и (2.4) соответственно. \square

3 Скошенные μ -ганкелевы операторы. Унимодулярный случай

В этом разделе будет рассмотрен случай $|\mu| = 1$. Ниже будет показано, что теория таких операторов фактически сводится к теории скошенных ганкелевых операторов, рассмотренных в [18], [10].

Определение 3.1 [18]. Оператор L в сепарабельном гильбертовом пространстве \mathcal{H} называется скошенным ганкелевым порядка p , если для некоторого ортонормированного базиса $(e_k)_{k \geq 0} \subset \mathcal{H}$ матрица этого оператора состоит из элементов вида

$$l_{jk} := \langle L e_k, e_j \rangle = \alpha_{pk+j}.$$

Следующая теорема показывает, что в унимодулярном случае скошенные μ -ганкелевы операторы типов [C] и [D] сводятся к скошенным ганкелевым.

Теорема 3.1. Пусть $|\mu| = 1$.

1. Пусть $C = C_{\mu, \gamma, p}$ – скошенный μ -ганкелев оператор типа [C] порядка p . Тогда существует такой унитарный оператор $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, что для некоторого скошенного ганкелева оператора L порядка p в \mathcal{H}

$$C = V^{-1}L.$$

2. Пусть $D = D_{\nu, \delta, p}$ – скошенный ν -ганкелев оператор типа [D] порядка p . Тогда существует такой унитарный оператор $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, что для некоторого скошенного ганкелева оператора L порядка p в \mathcal{H}

$$D = L^*V.$$

Доказательство. Определим линейный оператор $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ по правилу $V e_k := \mu^{-k} e_k$ (и далее по линейности). Он является унитарным, так как биективен и изометричен в силу условия $|\mu| = 1$.

1. Определим оператор $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ формулой

$$V \left(\sum_{j=0}^{\infty} x_j e_j \right) := \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\mu}^j x_j e_j.$$

Этот оператор в данном базисе имеет диагональную матрицу

$$\langle V e_k, e_j \rangle = \text{diag}(1, \bar{\mu}, \bar{\mu}^2, \dots).$$

Он унитарен, поскольку $|\mu| = 1$ (имеем $V^* = V^{-1}$).

Пусть $L := VC$. Так как

$$V^* e_j = V^{-1} e_j = \mu^j e_j,$$

то $\forall j, k$

$$\begin{aligned} \langle Le_k, e_j \rangle &= \langle VCe_k, e_j \rangle = \langle Ce_k, V^*e_j \rangle = \langle Ce_k, \mu^j e_j \rangle = \\ &= \bar{\mu}^j \langle Ce_k, e_j \rangle = \bar{\mu}^j \mu^j \gamma_{pk+j} = \gamma_{pk+j}. \end{aligned}$$

Значит, L – скошенный ганкелев порядка p в \mathcal{H} .

2. Пусть $C = C_{\mu, \gamma, p}$ – сопряженный к оператору $D = D_{\nu, \delta, p}$ (лемма 1.1). Переходя в предыдущем равенстве к сопряженному и учитывая, что $V^{-1} = V^*$, получаем, что $D = C^* = L^*V$, что и требовалось доказать. \square

Следствие 3.1. Пусть $|\mu| = 1$.

1. Скошенный μ -ганкелев оператор $C = C_{\mu, \gamma, p}$ ограничен в пространстве \mathcal{H} , если и только если ограничен скошенный ганкелев оператор L .

2. Скошенный μ -ганкелев оператор $D = D_{\nu, \delta, p}$ ограничен в пространстве \mathcal{H} , если и только если ограничен скошенный ганкелев оператор L .

4 Приложения к интегральным операторам в пространстве Харди H^2

В данном разделе будут рассмотрены классы интегральных операторов в пространстве Харди, являющихся операторами типа [C] и [D].

Напомним, что пространство Харди $H^2(\mathbb{D})$ состоит из таких функций f , аналитических в открытом единичном круге \mathbb{D} комплексной плоскости, для которых последовательность (f_n) их тейлоровских коэффициентов в нуле принадлежит пространству $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$. Это сепарабельное гильбертово пространство относительно скалярного произведения

$$\langle f, g \rangle := \sum_{j=0}^{\infty} f_j \bar{g}_j.$$

Последовательность мономов $e_k(z) = z^k$ ($k \in \mathbb{Z}_+$) образует ортонормированный базис пространства $H^2(\mathbb{D})$ (см. например, [16]).

Всюду ниже σ обозначает ограниченную положительную меру на \mathbb{D} , а

$$\rho_n := \int_{\mathbb{D}} \zeta^n d\sigma(\zeta) \quad (n \in \mathbb{Z}_+)$$

– последовательность моментов меры σ .

Рассмотрим следующий оператор в пространстве $H^2(\mathbb{D})$ ($p \in \mathbb{N}$)

$$(Hf)(z) = (H_{\mu, \sigma, p} f)(z) := \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta^p)}{1 - \mu \zeta z} d\sigma(\zeta) \quad (|z| < 1).$$

Этот оператор принадлежит классу хаусдорфовых операторов с ядром, зависящим от внешней переменной, впервые рассмотренному в работе первого автора [17].

Теорема 4.1. Будем предполагать, что $|\mu| < 1$. Для того чтобы оператор $H_{\mu, \sigma, p}$ был

ограничен в пространстве $H^2(\mathbb{D})$ необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\sup_k \sum_j |\mu^j \rho_{kp+j}|^2 < \infty. \quad (4.1)$$

При условии (4.1) справедливы следующие утверждения:

1. $H_{\mu, \sigma, p} = C_{\mu, \rho, p}$.

2. Оператор $H_{\mu, \sigma, p}$ ограничен в пространстве $H^2(\mathbb{D})$, если и только если последовательность (ρ_n) принадлежит ℓ^2 . При этом условии он принадлежит классу Гильберта – Шмидта и является ядерным, причем

$$\begin{aligned} \|H\|_{S_2} &\leq \int_{\mathbb{D}} \frac{d\sigma(\zeta)}{(1 - |\mu\zeta|)(1 - |\zeta|^p)}, \\ \text{tr}H &= \int_{\mathbb{D}} \frac{d\sigma(\zeta)}{1 - \mu\zeta^{p+1}}. \end{aligned}$$

Доказательство. Если оператор $H_{\mu, \sigma, p}$ ограничен, то, разлагая подынтегральную функцию в геометрический ряд, получаем в результате почленного интегрирования

$$\begin{aligned} (H_{\mu, \sigma, p} e_k)(z) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{\zeta^{kp}}{1 - \mu\zeta z} d\sigma(\zeta) = \\ &= \int_{\mathbb{D}} \zeta^{kp} \sum_j \mu^j \zeta^j z^j d\sigma(\zeta) = \sum_j \mu^j z^j \int_{\mathbb{D}} \zeta^{kp+j} d\sigma(\zeta) = \\ &= \sum_j \mu^j \rho_{kp+j} e_j(z). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Почленное интегрирование законно в силу теоремы Лебега о почленном интегрировании ряда, поскольку

$$\begin{aligned} \sum_j \int_{\mathbb{D}} |\mu^j z^j \zeta^{kp+j}| d\sigma(\zeta) &\leq \\ &\leq \sum_j |\mu z|^j \int_{\mathbb{D}} d\sigma(\zeta) = \frac{1}{1 - |\mu z|} \sigma(\mathbb{D}) < \infty. \end{aligned}$$

Отсюда следует (4.1), так как при всех $k \geq 0$

$$\sum_j |\mu^j \rho_{kp+j}|^2 = \|H_{\mu, \sigma, p} e_k\|^2 \leq \|H_{\mu, \sigma, p}\|^2.$$

1. Из (4.2) следует, что при всех $k, j \geq 0$

$$\langle H_{\mu, \sigma, p} e_k, e_j \rangle = \mu^j \rho_{kp+j},$$

что доказывает первое утверждение теоремы.

2. Теперь в силу утверждения 1 теоремы 2.1 (при $\gamma_n = \rho_n$) оператор $H_{\mu, \sigma, p}$ ограничен, если и только если последовательность (ρ_n) принадлежит ℓ^2 . При этом условии он также принадлежит классу Гильберта – Шмидта и является ядерным, и

$$\begin{aligned} \|H\|_{S_2} &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\mu|^{2j} |\rho_{kp+j}|^2 \right)^{1/2} = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\mu|^j \left| \int_{\mathbb{D}} \zeta^{kp+j} d\sigma(\zeta) \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\mu|^j \int_{\mathbb{D}} |\zeta|^{kp+j} d\sigma(\zeta) = \\ &= \int_{\mathbb{D}} \sum_{j=0}^{\infty} |\mu \zeta|^j \sum_{k=0}^{\infty} |\zeta|^{pk} d\sigma(\zeta) = \\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{d\sigma(\zeta)}{(1-|\mu \zeta|)(1-|\zeta|^p)}. \end{aligned}$$

Выше мы воспользовались неравенством

$$\left(\sum_n a_n^2 \right)^{1/2} \leq \sum_n a_n \quad (a_n \geq 0).$$

Наконец, снова по теореме 2.1

$$\begin{aligned} \text{tr}H &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \rho_{(p+1)n} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \int_{\mathbb{D}} \zeta^{(p+1)n} d\sigma(\zeta) = \\ &= \int_{\mathbb{D}} \sum_{n=0}^{\infty} (\mu \zeta^{p+1})^n d\sigma(\zeta) = \int_{\mathbb{D}} \frac{d\sigma(\zeta)}{1-\mu \zeta^{p+1}}. \quad \square \end{aligned}$$

Рассмотрим также следующий оператор в пространстве $H^2(\mathbb{D})$ ($p \in \mathbb{N}$)

$$(\Gamma f)(z) = (\Gamma_{v,\sigma,p} f)(z) := \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{1-v\zeta^p z} d\sigma(\zeta) \quad (|z| < 1).$$

Теорема 4.2. Будем предполагать, что $|v| < 1$. Для того чтобы оператор $\Gamma_{v,\sigma,p}$ был ограничен в пространстве $H^2(\mathbb{D})$ необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\sup_k \sum_j |v^j \rho_{k+pj}|^2 < \infty.$$

При условии (4.3) справедливы следующие утверждения:

1. $\Gamma_{v,\sigma,p} = D_{v,\delta,p}$.

2. Оператор $\Gamma_{v,\sigma,p}$ ограничен в пространстве $H^2(\mathbb{D})$, если и только если последовательность $(v^{-2n/p} \rho_n) \in \ell^2$. При этом условии он также принадлежит классу Гильберта – Шмидта и является ядерным, и

$$\begin{aligned} \|\Gamma\|_{S_2} &\leq \int_{\mathbb{D}} \frac{d\sigma(\zeta)}{(1-|v||\zeta|^p)(1-|\zeta|)}, \\ \text{tr}\Gamma &= \int_{\mathbb{D}} \frac{d\sigma(\zeta)}{1-v\zeta^{p+1}}. \end{aligned}$$

Доказательство. Как в доказательстве теоремы 4.1, разлагая подынтегральную функцию в геометрический ряд, получаем в результате почленного интегрирования

$$\begin{aligned} (\Gamma_{v,\sigma,p} e_k)(z) &= \int_{\mathbb{D}} \zeta^k \sum_{j=0}^{\infty} (v\zeta^p z)^j d\sigma(\zeta) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} z^j \int_{\mathbb{D}} v^j \zeta^{k+pj} d\sigma(\zeta) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} v^j \rho_{k+pj} e_j(z). \quad (4.4) \end{aligned}$$

Почленное интегрирование законно в силу теоремы Лебега о почленном интегрировании ряда, поскольку

$$\sum_{j=0}^{\infty} |z|^j \int_{\mathbb{D}} |v|^j |\zeta|^{k+pj} d\sigma(\zeta) \leq \sum_{j=0}^{\infty} |v|^j \sigma(\mathbb{D}) < \infty.$$

Отсюда следует (4.4), так как при всех $k \geq 0$

$$\sum_j |v^j \rho_{k+pj}|^2 = \|\Gamma_{v,\sigma,p} e_k\|^2 \leq \|\Gamma_{v,\sigma,p}\|.$$

1. Из формулы (4.4) следует, что

$$\langle \Gamma_{v,\sigma,p} e_k, e_j \rangle = v^j \rho_{k+pj},$$

что доказывает первое утверждение теоремы.

2. Следовательно, в силу утверждения 1 теоремы 2.2 (при $\delta_n = \rho_n$) оператор $\Gamma_{v,\sigma,p}$ ограничен, если и только если последовательность $(v^{-2n/p} \rho_n)$ принадлежит ℓ^2 . При этом условии он также принадлежит классу Гильберта – Шмидта и является ядерным, и

$$\begin{aligned} \|\Gamma\|_{S_2} &= \left(\sum_j \sum_k |v^j \rho_{k+pj}|^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \sum_j \sum_k |v^j \rho_{k+pj}| = \sum_j \sum_k |v|^j \int_{\mathbb{D}} \zeta^{k+pj} d\sigma(\zeta) \leq \\ &\leq \sum_j \sum_k |v|^j \int_{\mathbb{D}} |\zeta|^{k+pj} d\sigma(\zeta) = \\ &= \int_{\mathbb{D}} \sum_j \sum_k |v|^j |\zeta|^j |\zeta|^{kj} d\sigma(\zeta) = \\ &= \int_{\mathbb{D}} \sum_j (|v||\zeta|^p)^j \sum_k |\zeta|^k d\sigma(\zeta) = \\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{d\sigma(\zeta)}{(1-|v||\zeta|^p)(1-|\zeta|)}. \end{aligned}$$

Наконец, как и в доказательстве предыдущей теоремы

$$\text{tr}\Gamma = \sum_{n=0}^{\infty} v^n \rho_{(p+1)n} = \int_{\mathbb{D}} \frac{d\sigma(\zeta)}{1-v\zeta^{p+1}}. \quad \square$$

Заключение

В данной статье вводятся два типа операторов, действующих в гильбертовом пространстве, которые обобщают как класс μ -ганкелевых операторов, так и класс скошенных ганкелевых операторов. Были сформулированы и доказаны критерии их ограниченности и ядерности. Полученные результаты применяются к интегральным операторам в пространстве Харди. Эти результаты могут использоваться в теории операторов и ее приложениях, а также при чтении специальных дисциплин для студентов математических специальностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахизер, Н.И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н.И. Ахизер,

- И.И. Глазман; 2-е изд. – Москва: Наука, 1966. – 544 с.
2. *Martínez-Avendaño, R.A.* An Introduction to Operators on the Hardy – Hilbert Space / R.A. Martínez-Avendaño, P. Rosenthal. – New York: Springer, 2007. – 229 p.
 3. *Гохберг, И.Ц.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн. – Москва: Наука, 1965. – 488 с.
 4. *Канторович, Л.В.* Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – Изд. СПб: БХВ; изд. 4-е, испр. – 2004. – 816 с.
 5. *Weidmann, J.* Linear Operators in Hilbert Spaces / J. Weidmann. – New York: Springer, 1980. – 415 p.
 6. *Mirotin, A.R.* Compact Hankel operators on compact Abelian groups / A.R. Mirotin // St. Petersburg Math. J. – 2022. – Vol. 33, № 3. – P. 569–584. – DOI: <https://doi.org/10.1090/spmj/1715>.
 7. *Nikolski, N.K.* Operators, functions, and systems: an easy reading. Vol. 1: Hardy, Hankel, and Toeplitz / N.K. Nikolski // Mathematical surveys and monographs. – 2002. – Vol. 92. – American Mathematical Society. – 438 p.
 8. *Nikolski, N.K.* Operators, functions, and systems: an easy reading. Vol. 2: Model Operators and Systems / N.K. Nikolski // Mathematical surveys and monographs. – 2002. – Vol. 93. – American Mathematical Society. – 438 p.
 9. *Пеллер, В.В.* Операторы Ганкеля и их приложения / В.В. Пеллер. – Москва – Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2005. – 1028 с.
 10. *Arora, S.C.* Slant Hankel operators / S.C. Arora, Ruchica Batra, M.P. Singh // Arch. Math. (Brno). – 2006. – Vol. 42, № 2. – P. 125–133.
 11. *Mirotin, A.R.* μ -Hankel operators on Hilbert spaces / A.R. Mirotin, E.Yu. Kuzmenkova // Opuscula Math. – 2021. – Vol. 41, № 6. – P. 881–898.
 12. *Bhola, J.* Properties of (C, r) -Hankel operators and (R, r) -Hankel operators on Hilbert Spaces / J. Bhola, B. Gupta // Kragujevac Journal of Math. – 2025. – Vol. 49, № 6. – P. 873–887.
 13. *Mirotin, A.R.* μ -Hankel operators on compact Abelian groups / A.R. Mirotin // Analysis Math. – 2023. – Vol. 49. – P. 617–640. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10476-023-0217-3>.
 14. *Kuzmenkova, E.Yu.* On normal μ -Hankel operators / E.Yu. Kuzmenkova, A.R. Mirotin // Siberian Mathematical Journal. – 2023. – Vol. 64. – P. 731–736.
 15. *Кузьменкова, Е.Ю.* О скошенных μ -ганкелевых операторах / Е.Ю. Кузьменкова, А.Р. Миротин // Белорусская математическая конференция: матер. XIV Межд. научной конф. 28 октября – 1 ноября 2024 г. в 3 ч. Ч. 1. – Издательство ГНУ «Институт математики Национальной академии наук Беларуси». – Минск, 2024. – С. 63–64.
 16. *Иосида, К.* Функциональный анализ / К. Иосида. – Москва: Мир, 1967. – 624 с.
 17. *Mirotin, A.R.* $L^q - L^p$ boundedness of generic Hausdorff-type operators with bi-variable kernels / A.R. Mirotin // J. Math. Sci. – 2025. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-025-08016-4>.
 18. *Arora, S.C.* k th-order slant Hankel operators / S.C. Arora, J. Bhola // Math. Sci. Res. J. – 2008. – Vol. 12, № 3. – P. 53–63.

Поступила в редакцию 20.01.2026.

Информация об авторах

Миротин Адольф Рувимович – д.ф.-м.н., профессор
Кузьменкова Екатерина Юрьевна – ст. преподаватель

О $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

А.Н. Скиба

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ON $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -SUBNORMAL SUBGROUPS OF FINITE GROUPS

A.N. Skiba

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. В данной работе: G – конечная группа; $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I \subseteq \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел \mathbb{P} , где $0 \in I$; \mathfrak{S} – класс конечных σ_0 -групп, который замкнут относительно расширений, эпиморфных образов и подгрупп и который содержит все конечные разрешимые σ_0 -группы. Группа G называется: (i) $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -примарной, если G является конечной σ_i -группой для некоторого $i \in I$ и $G \in \mathfrak{S}$, если $i = 0$; (ii) $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -нильпотентной, если G является прямым произведением $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -первичных групп. Подгруппа A группы G называется $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -субнормальной в G , если существует цепь подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G$ такая, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -примарной для всех $i = 1, \dots, t$. В данной работе мы изучаем $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -нильпотентные группы, $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -субнормальные подгруппы и соотношения между $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -нильпотентностью и $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -субнормальностью в группах. В частности, мы доказываем, что группа G является $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -нильпотентной в том и только в том случае, когда все ее подгруппы $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -субнормальны.

Ключевые слова: конечная группа, $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -примарная группа, $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -нильпотентная группа, $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -разрешимая группа, $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -субнормальная подгруппа.

Для цитирования: Скиба, А.Н. О $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -субнормальных подгруппах конечных групп / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 1 (66). – С. 91–97. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_91. – EDN: AHAGNQ

Abstract. In this paper: G is a finite group; $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I \subseteq \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ is some partition of the set of all primes \mathbb{P} , where $0 \in I$; \mathfrak{S} is a class of finite σ_0 -groups which is closed under extensions, epimorphic images and subgroups and which contains all finite soluble σ_0 -groups. A group G is said to be: (i) $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -primary provided G is a finite σ_i -group for some $i \in I$ and $G \in \mathfrak{S}$ if $i = 0$; (ii) $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -nilpotent if G is the direct product of $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -primary groups. A subgroup A of G is said to be $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -subnormal in G if there is a subgroup chain $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G$ such that either $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ or $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ is $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -primary for all $i = 1, \dots, t$. In this paper, we study $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -nilpotent groups, $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -subnormal subgroups and relations between $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -nilpotency and $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -subnormality in the groups. In particular, we prove that a group G is $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -nilpotent if and only if all its subgroups are $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -subnormal.

Keywords: finite group, $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -primary group, $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -nilpotent group, $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -soluble group, $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -subnormal subgroup.

For citation: Skiba, A.N. On $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -subnormal subgroups of finite groups / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 1 (66). – P. 91–97. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_91. – EDN: AHAGNQ

1 Introduction

Throughout this paper, all groups are finite, and G always denotes a finite group.

In what follows,

$$\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I \subseteq \{0\} \cup \mathbb{N}\}$$

is some partition of the set of all primes \mathbb{P} , where $0 \in I$; \mathfrak{S} is a class of σ_0 -groups which is closed

under extensions, epimorphic images and subgroups and which contains all soluble σ_0 -groups. Moreover, $\pi \subseteq \mathbb{P}$, $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$ and

$$\Pi \subseteq \sigma, \Pi' = \sigma \setminus \Pi.$$

Definition 1.1. We say that a group G is:

(i) $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -primary provided G is a σ_i -group for some $i \in I$ and $G \in \mathfrak{S}$ if $i = 0$;

(ii) $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -nilpotent if G is the direct product of $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -primary groups;

(iii) $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -soluble if every chief factor of G is $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -primary.

Definition 1.2. We say that a subgroup A of G is $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -subnormal in G if there is a subgroup chain

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G \quad (1.1)$$

such that either $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ or $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ is $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -primary for all $i = 1, \dots, t$.

Remark 1.3. (i) In what follows, we always omit the symbol \mathfrak{S} in all definitions and notations in the case when \mathfrak{S} is the class of all σ_0 -groups.

Thus we say, for example, that G is [1]–[3]: (i) σ -primary if G is a σ_i -group for some $i \in I$; (ii) σ -nilpotent if G is the direct product of σ -primary groups; (iii) σ -soluble if every chief factor of G is σ -primary.

We also say that a subgroup A of G is σ -subnormal in G [1]–[3] if G has a subgroup chain (1.1) such that either $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ or $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ is σ -primary for all $i = 1, \dots, t$.

(ii) If $2 \notin \sigma_0$, then every σ_0 -group is soluble by the Feit-Thompson’s theorem, so \mathfrak{S} coincides with the class of all σ_0 -groups since every soluble σ_0 -group belongs to \mathfrak{S} by the definition.

In the literature, one can find several special versions of $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -subnormality. The next results describe the first two of them.

Recall that a subgroup A of G is called \mathfrak{F} -subnormal in G in the sense of Kegel [4] or K - \mathfrak{S} -subnormal in G [5, 6.1.4] if there is a subgroup chain

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G$$

such that either $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ or $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ belongs to \mathfrak{F} for all $i = 1, \dots, t$.

Theorem 1.4. If a class of groups \mathfrak{F} is closed under extensions, epimorphic images and subgroups, then the set $\mathcal{L}_{\mathfrak{F}sn}(G)$ ($G \neq 1$), of all K - \mathfrak{F} -subnormal subgroups of G , coincides with the set of all $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -subnormal subgroups of G , where $\mathfrak{S} = \mathfrak{F}$ and

$$\sigma = \{\sigma_0, \{p_1\}, \dots, \{p_n\}, \dots\}, \quad \sigma_0 = \bigcup_{X \in \mathfrak{S}} \pi(X),$$

and

$$\{p_1, \dots, p_n, \dots\} = \mathbb{P} \setminus \sigma_0.$$

Let

$$\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I \subseteq \{0\} \cup \mathbb{N}\}$$

be some partition of \mathbb{P} , where $0 \in I$. Let $\sigma_0 \in \Pi \subseteq \sigma$ and \mathfrak{S} be a class of σ_0 -groups which is closed under extensions, epimorphic images and

subgroups. Then G is said to be $\Pi_{\mathfrak{S}}$ -primary [6] provided either $G \in \mathfrak{S}$ or G is a σ_i -group for some $\sigma_i \in \Pi \setminus \{\sigma_0\}$. A subgroup A of G is said to be $\Pi_{\mathfrak{S}}$ -subnormal in G [6] if there is a subgroup chain

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G$$

such that either $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ or $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ is $\Pi_{\mathfrak{S}}$ -primary for all $i = 1, \dots, t$.

Our next observation shows that the $\Pi_{\mathfrak{S}}$ -subnormality is also a special case of the $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -subnormality.

Theorem 1.5. A subgroup A is $\Pi_{\mathfrak{S}}$ -subnormal in G if and only if A is $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -subnormal in G , where

$$\sigma = (\Pi \setminus \{\sigma_0\}) \cup \{\{\sigma_0^*\}\} \cup \{\{p_1\}, \dots, \{p_n\}, \dots\},$$

$$\sigma_0^* = \bigcup_{X \in \mathfrak{S}} \pi(X),$$

$$\text{and } \{p_1, \dots, p_n, \dots\} = \mathbb{P} \setminus (\sigma_0^* \cup \bigcup_{\sigma_i \in \Pi \setminus \{\sigma_0\}} \sigma_i).$$

A group G is said to be: (i) π -decomposable if $G = O_{\pi}(G) \times O_{\pi'}(G)$; (ii) π -special [3], [7] if

$$G = F(G) \times O_{\pi}(G) = O_{p_1}(G) \times \dots \times O_{p_t}(G) \times O_{\pi}(G),$$

where $p_1, \dots, p_t \in \pi$.

In order to consider further useful examples, we first introduce the following three special partitions of the set \mathbb{P} :

$$(i) \quad \sigma = \sigma^1 := \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\};$$

$$(ii) \quad \sigma = \sigma^{\pi} := \{\pi, \pi'\};$$

$$(iii) \quad \sigma = \sigma^{1, \pi'} := \{\{p_1\}, \dots, \{p_n\}, \dots, \pi'\}, \quad \text{where } \pi = \{p_1, \dots, p_n, \dots\}.$$

Example 1.6. (i) In the limiting case, when $\sigma = \{\mathbb{P}\}$, $\sigma_0 = \mathbb{P}$, all soluble groups are contained in \mathfrak{S} , and every group $G \in \mathfrak{S}$ is $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -primary and so $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -nilpotent.

(ii) In the second limiting case, when $\sigma = \sigma^1$, $\sigma_0 = \{p\}$ for some prime p and so \mathfrak{S} is the class of all p -groups. Thus, G is $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -primary (respectively, $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -nilpotent, $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -soluble) if and only if G is a q -group for some prime q (respectively, G is nilpotent, soluble).

A subgroup A of G is $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -subnormal in G if and only if A is subnormal in G .

(iii) Let $\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1\} = \sigma^{\pi}$, where $\sigma_0 = \pi'$ and $\sigma_1 = \pi$.

Then G is $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -primary (respectively, $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -nilpotent) if and only if G is either an \mathfrak{S} -group or a σ_1 -group (respectively, $G = H_0 \times H_1$, where $H_0 \in \mathfrak{S}$ and H_1 is a Hall σ_1 -subgroup of G by Lemma 2.1 below). Moreover, G is $\sigma_{\mathfrak{S}}$ -soluble if

and only if every chief factor of G is either an \mathfrak{S} -group or σ_1 -group.

If $2 \in \sigma_1$, then G is σ_3 -primary (respectively, σ_3 -nilpotent, σ_3 -soluble) if and only if G is σ -primary (respectively, σ -nilpotent, σ -soluble). Moreover, in this case a subgroup A of G is σ_3 -subnormal in G if and only if A is σ -subnormal in G .

(iv) Now, let

$$\sigma = \{\sigma_0, \{p_1\}, \dots, \{p_n\}, \dots\} = \sigma^{1, \pi'}$$

where $\sigma_0 = \pi'$ and

$$\pi = \{p_1, \dots, p_n, \dots\}.$$

First assume that $2 \in \pi'$. Then G is σ_3 -primary (respectively, σ_3 -nilpotent, σ_3 -soluble) if and only if G is a \mathfrak{S} -group or a p -group for some prime $p \in \pi$ (respectively, $G = F(G) \times H$, where $F(G)$ is a Hall π -subgroup and $H \in \mathfrak{S}$ by Lemma 2.1 below).

Finally, if $2 \in \pi$, then G is σ_3 -primary (respectively, σ_3 -nilpotent, σ_3 -soluble) if and only if G is σ -primary (respectively, σ -nilpotent, σ -soluble).

Let \mathfrak{F} be a class of groups containing all identity groups. Then \mathfrak{F} is said to be:

(i) a *formation* if the following two conditions hold: (1) \mathfrak{F} is closed under taking subdirect products, that is, $G/(N \cap M) \in \mathfrak{F}$ whenever $N, M \trianglelefteq G$ and $G/N, G/M \in \mathfrak{F}$, and (2) \mathfrak{F} is closed under taking homomorphic images, that is, $G/N \in \mathfrak{F}$ whenever $N \trianglelefteq G$ and $G \in \mathfrak{F}$;

(ii) *hereditary* (Mal'cev [8]) if $G \in \mathfrak{F}$ whenever $G \leq A \in \mathfrak{F}$;

(iii) *saturated* if $G \in \mathfrak{F}$ whenever $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$;

(iv) a *Fitting class* if the following two conditions hold: (1) \mathfrak{F} is normally hereditary, that is, $G \in \mathfrak{F}$ whenever $G \trianglelefteq A \in \mathfrak{F}$, and (2) \mathfrak{F} is closed under taking products of normal subgroups, that is, $G \in \mathfrak{F}$ whenever $G = AB$, where $A, B \trianglelefteq G$ and $A, B \in \mathfrak{F}$.

If $K \leq H \leq G$, where $K, H \trianglelefteq G$, then we say that H/K is a *normal factor* or a *normal section* of G .

Definition 1.7. (i) If G is σ_3 -nilpotent, where

$$\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1\} = \sigma^\pi$$

and $\sigma_0 = \pi'$, $\sigma_1 = \pi$, then we say that G is (π, \mathfrak{S}) -decomposable.

(ii) If G is σ_3 -nilpotent, where

$$\sigma = \{\sigma_0, \{p_1\}, \dots, \{p_n\}, \dots\} = \sigma^{1, \pi'}$$

and $\sigma_0 = \pi'$, $\pi = \{p_1, \dots, p_n, \dots\}$ then we say that G is $(1, \mathfrak{S})$ -special.

Definition 1.8. (i) If a subgroup A of G is σ_3 -subnormal in G , where $\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1\} = \sigma^\pi$ and $\sigma_0 = \pi'$, $\sigma_1 = \pi$, then we say that A is (π, \mathfrak{S}) -subnormal in G .

(ii) If a subgroup A of G is σ_3 -subnormal in G , where

$$\sigma = \{\sigma_0, \{p_1\}, \dots, \{p_n\}, \dots\} = \sigma^{1, \pi'}$$

and

$$\sigma_0 = \pi', \quad \pi = \{p_1, \dots, p_n, \dots\},$$

then we say that A is $(1, \mathfrak{S})$ -subnormal in G .

Definition 1.9. Let H/K be a normal factor of G . Then we say that H/K is:

(i) σ_3 -central in G if the semidirect product

$$(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$$

is σ_3 -primary;

(ii) (π, \mathfrak{S}) -central in G if the semidirect product

$$(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$$

is either an \mathfrak{S} -group or is a π -group;

(iii) $(1, \mathfrak{S})$ -central in G if the semidirect product

$$(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$$

is either an \mathfrak{S} -group or a p -group for some prime $p \in \pi$.

Applications of the σ_3 -nilpotent groups and σ_3 -subnormal subgroups are based on our three results as follows.

Theorem 1.10. (i) The class \mathfrak{N}_{σ_3} , of all σ_3 -nilpotent groups, is both a hereditary saturated formation and a Fitting class.

(ii) If G is σ_3 -nilpotent, then every subgroup of G is σ_3 -subnormal in G .

Theorem 1.11. Any two of the following conditions are equivalent:

(i) G is σ_3 -nilpotent.

(ii) Every subgroup of G is σ_3 -subnormal in G .

(iii) Every maximal subgroup of G is σ_3 -subnormal in G .

(iv) G has a σ_3 -subnormal Hall σ_i -subgroup for every $\sigma_i \in \sigma(G)$.

(v) Every chief factor of G is σ_3 -central in G .

(vi) every factor of some normal series of G is σ_3 -central in G .

In view of Example 1.6 (iii) (iv) we get from Theorem 1.11 the following results.

Corollary 1.12. A group G is (π, \mathfrak{S}) -decomposable if and only if every subgroup of G is (π, \mathfrak{S}) -subnormal in G .

Corollary 1.13 (Kegel [4]). *A group G is $(1, \mathfrak{S})$ -special if and only if every subgroup of G is $(1, \mathfrak{S})$ -subnormal in G .*

In the case when \mathfrak{S} is the class of all σ_0 -groups we get from Corollaries 1.12 and 1.13 the following new results.

Corollary 1.14. *A group G is π -decomposable if and only if for every subgroup A of G there is a subgroup chain*

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G$$

such that either $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ or $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ is either a π -group or a π' -group.

Corollary 1.15. *A group G is π -special if and only if for every subgroup A of G there is a subgroup chain*

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G$$

such that either $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ or $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ is a π' -group.

We get also from Theorem 1.11 the following results.

Corollary 1.16. *A group G is (π, \mathfrak{S}) -decomposable if and only if every chief factor of G is (π, \mathfrak{S}) -central in G .*

Corollary 1.17. *A group G is (π, \mathfrak{S}) -special if and only if every chief factor of G is $(1, \mathfrak{S})$ -central in G .*

In the case when \mathfrak{S} is the class of all σ_0 -groups we get also from Theorem 1.11 the following known result.

Corollary 1.18 (W. Guo, A.N. Skiba [9]). *Any two of the following conditions are equivalent:*

- (i) G is σ -nilpotent.
- (ii) Every chief factor of G is σ -central in G .
- (iii) G has a σ -subnormal Hall σ_i -subgroup for every $\sigma_i \in \sigma(G)$.

(iv) Every subgroup of G is σ -subnormal in G .

(v) Every maximal subgroup of G is σ -subnormal in G .

We use $O^\Pi(G)$ to denote the subgroup of G generated by all its Π' -subgroups, where $\Pi' = \sigma \setminus \Pi$; $O_\Pi(G)$ is the product of all normal Π -subgroups of G . We also use G^{σ_3} to denote the σ_3 -nilpotent residual of G , that is, the intersection of all normal subgroups N of G with σ_3 -nilpotent G/N .

Theorem 1.19. *Let A, K and N be subgroups of G , where A is σ_3 -subnormal and N is normal in G .*

(i) $A \cap K$ is σ_3 -subnormal in K .

(ii) If K is a σ_3 -subnormal subgroup of A , then K is σ_3 -subnormal in G .

(iii) AN/N is σ_3 -subnormal in G/N .

(iv) If $N \leq K$ and K/N is σ_3 -subnormal in G/N , then K is σ_3 -subnormal in G .

(v) If $K \leq A$ and A is σ_3 -primary, then K is σ_3 -subnormal in G .

(vi) The σ_3 -nilpotent residual A^{σ_3} of A is subnormal in G .

(vii) If A is σ_3 -nilpotent, then A^G is σ_3 -nilpotent and $\sigma(A) = \sigma(A^G)$.

(viii) If $\sigma(|G:A|) \subseteq \Pi$, then $O^\Pi(A) = O^\Pi(G)$.

(ix) If A is a σ -Hall subgroup of G , then A is normal in G .

2 Proofs of the results

Proof of Theorem 1.4. First assume that A is K - \mathfrak{S} -subnormal in G and

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G,$$

where either $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ or

$$A_i / (A_{i-1})_{A_i} \in \mathfrak{S}$$

for all $i = 1, \dots, t$, then either $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ or $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ is σ_3 -primary. Hence A is σ_3 -subnormal in G .

Now assume that A is σ_3 -subnormal in G and let

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G,$$

where either $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, or $A_i / (A_{i-1})_{A_i} \in \mathfrak{S}$, or

$$A_i / (A_{i-1})_{A_i}$$

is a p -group for some prime p . But if $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ is a p -group, then A_{i-1} is subnormal in A_i . Therefore there is a subgroup chain

$$A = B_0 \leq B_1 \leq \dots \leq B_n = G$$

such that either $B_{i-1} \trianglelefteq B_i$ or

$$B_i / (B_{i-1})_{B_i} \in \mathfrak{S}$$

for all $i = 1, \dots, n$, so A is K - \mathfrak{S} -subnormal in G . \square

Proof of Theorem 1.5. First suppose that A is $\Pi_{\mathfrak{S}}$ -subnormal in G and let

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G,$$

where $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, or

$$A_i / (A_{i-1})_{A_i} \in \mathfrak{S},$$

or $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ is a σ_j -group for some

$$\sigma_j \in \Pi \setminus \{\sigma_0\}.$$

But in the last two cases, $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ is σ_3 -primary and so A is σ_3 -subnormal in G .

Finally, if A is σ_3 -subnormal in G and

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G,$$

where $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ is σ_3 -primary for some i , then $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ is Π_3 -primary (see Part (i)) and so every σ_3 -subnormal is also Π_3 -subnormal in G . \square

Lemma 2.1. Let $G \neq 1$ and $\sigma(G) = \{\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_t}\}$.

Then G is σ_3 -nilpotent if and only if

$$G = H_1 \times \dots \times H_t,$$

where H_j is a Hall σ_{i_j} -subgroup of G for all $j = 1, \dots, t$ and $H_k \in \mathfrak{S}$ for $i_k = 0$.

Proof. Indeed, assume that $G = A_1 \times \dots \times A_n$, where A_i is σ_3 -primary for all $i = 1, \dots, n$, and let H_j be the product of all factors A_i such that A_i is a σ_{i_j} -group. Then H_j is a Hall σ_{i_j} -subgroup of G for all j and, clearly, $H_k \in \mathfrak{S}$ for $i_k = 0$ since the \mathfrak{S} is closed under extensions and epimorphic images. In particular, $G = H_1 \times \dots \times H_t$. \square

Proof of Theorem 1.10. In view of Lemma 2.1, this theorem can be proved by the direct checking.

Proof of Theorem 1.19. Assume that this theorem is false and let G be a counterexample of minimal order. Then $1 \neq A \neq G$ since, in the cases $A = 1$ and $A = G$, the Statements (i)–(ix) trivially hold for G .

By hypothesis, there is a subgroup chain

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_r = G$$

such that either A_{i-1} is normal in A_i or $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ is σ_3 -primary for all $i = 1, \dots, r$. Let $M = A_{r-1}$. We can assume without loss of generality that $M \neq G$ since $A \neq G$.

(i) Consider the chain

$$K_0 = K \cap A_0 \leq K \cap A_1 \leq \dots \leq K \cap A_r = K.$$

If A_{i-1} is normal in A_i , then $K \cap A_{i-1}$ is normal in $K \cap A_i$.

Suppose that $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ is an \mathfrak{S} -group. Then $(A_i \cap K) / (A_{i-1})_{A_i} \cong (A_i \cap K) / ((A_{i-1})_{A_i} \cap K)$ is an \mathfrak{S} -group, where $(A_{i-1})_{A_i} \cap K$ is normal in $A_i \cap K$ and so

$$(A_{i-1})_{A_i} \cap K \leq (K \cap A_{i-1})_{K \cap A_i}.$$

Hence $(K \cap A_i) / (K \cap A_{i-1})_{K \cap A_i}$ is an \mathfrak{S} -group. Finally, if $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ is a σ_j -group for some $j \neq 0$, then similarly we get that $(K \cap A_i) / (K \cap A_{i-1})_{K \cap A_i}$ is a σ_j -group. Therefore $(K \cap A_i) / (K \cap A_{i-1})_{K \cap A_i}$ is σ_3 -primary for all $i = 1, \dots, r$, so $A \cap K$ is σ_3 -subnormal in K .

(ii) Assume that K is σ_3 -subnormal in A and let

$$K = K_0 \leq K_1 \leq \dots \leq K_m = A,$$

where either $K_{i-1} \trianglelefteq K_i$ or $K_i / (K_{i-1})_{K_i}$ is σ_3 -primary for all $i = 1, \dots, m$. Then the subgroup series

$$K = K_0 \leq K_1 \leq \dots \leq K_m = A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_r = G$$

has the same property in G and so K is σ_3 -subnormal in G .

(iii) Consider the chain

$$AN / N = A_0N / N \leq A_1N / N \leq \dots \leq A_rN / N = G / N.$$

Assume that $A_{i-1}N / N$ is not normal in A_iN / N . Then $L = A_{i-1}$ is not normal in $T = A_i$ and so T / L_T is σ_3 -primary. Hence

$$\begin{aligned} (T / L_T) / (L_T(T \cap N) / L_T) &= \\ &= (T / L_T) / ((T \cap NL_T) / L_T) \cong \end{aligned}$$

$$T / (T \cap NL_T) \cong TN / L_TN \cong (TN / N) / (L_TN / N)$$

is σ_3 -primary. But

$$L_TN / N \leq (LN / N)_{TN/N}.$$

Hence $(TN / N) / (LN / N)_{TN/N}$ is σ_3 -primary, so AN / N is σ_3 -subnormal in G / N .

(iv) Consider the chain

$$K / N = K_0 / N \leq K_1 / N \leq \dots \leq K_n / N = G / N$$

be a subgroup chain such that either K_{i-1} / N is normal in K_i / N or $(K_i / N) / (K_{i-1} / N)_{K_i / N}$ is σ_3 -primary for all $i = 1, \dots, n$. Suppose that K_{i-1} is not normal in K_i . Then K_{i-1} / N is not normal in K_i / N , so

$$\begin{aligned} (K_i / N) / (K_{i-1} / N)_{K_i / N} &= \\ &= (K_i / N) / ((K_{i-1})_{K_i} / N) \cong K_i / (K_{i-1})_{K_i} \end{aligned}$$

is σ_3 -primary. Hence K is σ_3 -subnormal in G .

(v) Since A is σ_3 -primary, every subgroup of

A is σ_3 -subnormal in A . Thus this assertion is a corollary of Part (ii).

(vi) First we show that $V := A^{\mathfrak{N}_{\sigma_3}} \leq M_G$.

Indeed, if M is normal in G , it is clear. Now assume that G / M_G is an \mathfrak{S} -group. Then from the isomorphism

$$AM_G / M_G \cong A / (A \cap M_G) \in \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{N}_{\sigma_3}$$

it follows that $V \leq A \cap M_G$.

Finally, if G / M_G is a σ_j -group for some $j \neq 0$, then similarly we get that $V \leq M_G$.

The choice of G implies that V is subnormal in M , so A is subnormal in M_G . Therefore V is subnormal in G .

(vii) Let $E = NA$. Then $N = N_1 \times \dots \times N_n$ for some minimal normal subgroups N_1, \dots, N_n of E and N_i is not σ_3 -primary for all i by Lemma 2.1.

Assume that $E < G$. By Part (i), A is σ_3 -subnormal in E , so due to the choice of G this means that $A \leq C_E(N_i)$ for all i . Hence $A \leq C_E(N)$.

Finally, assume that $NA = E = G$. Then $N \not\leq M$ and hence G/M_G is not σ_3 -primary, since $N \approx NM_G/M_G$ is not σ_3 -primary. This implies that M is normal in G and hence $N \cap M = 1$. Therefore $M \leq C_G(N)$ and so $A \leq C_G(N)$.

(viii) Since $A \leq M$, it follows that $|M:A|$ and $|G:M|$ are Π -numbers. Moreover, A is σ_3 -subnormal in M , so the choice of G implies that

$$O^\Pi(A) = O^\Pi(M).$$

Now we show that G/M_G is a Π -number. If M is normal in G , then $M_G = M$ and so $|G:M_G| = |G:M|$ is a Π -number. Now assume that G/M_G is σ_i -group for some $i \in I$. Then $|G/M|$ is a σ_i -number, so $\sigma_i \in \Pi$ since $|G:M|$ is a Π -number. Hence G/M_G is a Π -number.

Now let V be any Π' -subgroup of G . Then from $VM_G/M_G \leq G/M_G$ and

$$VM_G/M_G \approx V/(V \cap M_G)$$

it follows that VM_G/M_G is simultaneously a Π' -group and a Π -group, so VM_G/M_G is the identity group, that is, $V \leq M_G$. Therefore every Π' -subgroup of G is contained in M_G , so

$$O^\Pi(G) \leq O^\Pi(M_G) \leq O^\Pi(M) \leq O^\Pi(G).$$

Hence

$$O^\Pi(G) = O^\Pi(M) = O^\Pi(A).$$

(ix) By hypothesis, A is a Hall Π -subgroup of G for some $\Pi \subseteq \sigma$. Then A^x is a Hall Π -subgroup of G for every $x \in G$, so $A^x \cap A$ is a Hall Π -subgroup of A . Hence $|A:A^x \cap A|$ is a Π' -number and so $A = A^x \cap A$. Therefore $A \leq A^x$, so $A = A^x$ for all $x \in G$. \square

Lemma 2.2 [11, 3.29]. *Let R be an abelian minimal normal subgroup of G such that $G = RM$ for a maximal subgroup M of G . Then*

$$G/M_G \approx R \rtimes (G/C_G(R)).$$

Now, we are in position to prove Theorem 1.11.

Proof of Theorem 1.11. Since Conditions (i) and (iv) are equivalent by Lemma 2.1 and Theorem 1.19 (ix), (ii) \Rightarrow (iii), and Conditions (v) and (vi) are equivalent by the Jordan – Hölder theorem for the chief series. it is enough to prove the implications (i) \Rightarrow (ii), (i) \Rightarrow (vi), (iii) \Rightarrow (i), (v) \Rightarrow (i).

Let $G \neq 1$ and

$$\sigma(G) = \{\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_t}\}.$$

(i) \Rightarrow (ii), (i) \Rightarrow (vi).

Assume that G is σ_3 -nilpotent, so $G = H_1 \times \dots \times H_t$, where H_j is a Hall σ_{i_j} -subgroup of G for all $j = 1, \dots, t$ and $H_k \in \mathfrak{S}$ for $i_k = 0$, by Lemma 2.1.

Suppose that some subgroup A of G is not σ_3 -subnormal in G . Then $t > 1$ by Theorem 1.19 (v) and $1 < A < G$, so $A \leq M$ for some maximal subgroup M of G and for some i , for $i = 1$ say, we have $H_1 \not\leq M$.

It follows that

$$H_2 \cdots H_t \leq M,$$

so $M/H_2 \cdots H_t$ is σ_3 -subnormal in $G/H_2 \cdots H_t$ by induction since $G/H_2 \cdots H_t$ is σ_3 -nilpotent by Theorem 1.10 (i). Therefore M is σ_3 -subnormal in G by Theorem 1.19 (iv). In view of Theorem 1.10 (i), M is also σ_3 -nilpotent, so A is σ_3 -subnormal in M by induction on $|G|$. Therefore A is σ_3 -subnormal in G Theorem 1.19 (ii). This contradiction shows that (i) \Rightarrow (ii).

Now, consider the normal series

$$1 \leq H_1 \leq H_1 H_2 \leq \dots \leq H_1 \cdots H_{t-1} \leq H_1 \times \dots \times H_t = G$$

of G . If H/K is a chief factor of G such that

$$H_1 \cdots H_{j-1} \leq K < H \leq H_1 \cdots H_j,$$

then H/K is a σ_{i_j} -group since

$$H_1 \cdots H_t / H_1 \cdots H_{j-1} \approx H_j,$$

and

$$H_1 \cdots H_{j-1} \leq C_G(H/K).$$

On the other hand, from

$$G = (H_1 \cdots H_j) \times H_{j+1} \cdots H_t$$

it follows that

$$H_{j+1} \cdots H_t \leq C_G(H/K),$$

so $G/C_G(H/K)$ is a σ_{i_j} -group.

Moreover, if $i_j = 0$, then H/K and $G/C_G(H/K)$ belong to \mathfrak{S} , hence

$$(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{S}.$$

Hence G has a chief series whose all factors are σ_3 -central in G , so Statement (vi) holds for G .

Now, we show that if every maximal subgroup of G is σ_3 -subnormal in G , then G is σ_3 -nilpotent. Assume that this is false. Then G is not σ_3 -primary and, by Theorem 1.19 (iii), the hypothesis holds for G/R , so G/R is σ_3 -nilpotent by induction on $|G|$. Therefore R is a unique minimal normal subgroup of G and $R \not\leq \Phi(G)$ by Theorem 1.10 (i). Hence for some maximal subgroup M of G we have $G = RM$ and $M_G = 1$. It is clear that $M \neq 1$, so M

is not normal in G . Therefore $G \cong G/M_G$ is σ_3 -primary, a contradiction. Hence (iii) \Rightarrow (i).

Next we show that if every chief factor of G is σ_3 -central in G , then G is σ_3 -nilpotent. Assume that this is false and let R be a minimal normal subgroup of G . It is clear that the hypothesis holds for G/R , so G/R is σ_3 -nilpotent by induction. Therefore R is a unique minimal normal subgroup of G and $R \not\leq \Phi(G)$ by Theorem 1.10 (i). Hence for some maximal subgroup M of G we have $G = RM$ and $M_G = 1$, so $C_G(R) \leq R$ by Lemma 2.2. If R is non-abelian, $C_G(R) = 1$, hence $G \cong G/C_G(R)$ is σ_3 -primary. Therefore σ_3 -nilpotent, a contradiction. Hence $C_G(R) = R$ is abelian group, so

$$G \cong G/M_G \cong R \rtimes (G/C_G(R))$$

is σ_3 -primary by Lemma 2.2, so G is σ_3 -nilpotent. Thus, (v) \Rightarrow (i). \square

REFERENCES

1. Skiba, A.N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
2. Skiba, A.N. On Some Results in the Theory of Finite Partially Soluble Groups / A.N. Skiba // Commun. Math. Stat. – 2016. – Vol. 4. – P. 281–309.
3. Skiba, A.N. Some characterizations of finite σ -soluble $P\sigma T$ -groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2018. – Vol. 495. – P. 114–129.
4. Kegel, O.H. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den subnormalteilerverband each enthalten / O.H. Kegel // Arch. Math. – 1978. – Vol. 30, № 33. – S. 225–228.
5. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Springer Verlag, Dordrecht, 2006.
6. Guo, W. On the lattice of Π_3 -subnormal subgroups of a finite group / W. Guo, A.N. Skiba // Bull. Aust. Math. Soc. – 2017. – Vol. 96. – P. 233–244.
7. Chunikhin, S.A. Subgroups of finite groups / S.A. Chunikhin. – Minsk: Nauka i Tehnika, 1964.
8. Mal'cev, A.I. Algebraic Systems / A.I. Mal'cev. – Moscow: Nauka, 1970.
9. Guo, W. Finite groups whose N -maximal subgroups are σ -subnormal / W. Guo, A.N. Skiba // Science in China. Math. – 2019. – Vol. 62, № 7. – P. 1355–1372.
10. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1967.
11. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – Москва: Наука, 1989.
12. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Walter de Gruyter, Berlin – New York, 1992.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований: грант Ф26РНФ-101.

The article was submitted 03.02.2026.

Информация об авторах

Скиба Александр Николаевич – д.ф.-м.н., профессор

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИЗОБРАЖЕНИЯ МЕСТНОСТИ С УЧЕТОМ ГИПЕРСПЕКТРАЛЬНЫХ И СПЕКТРАЛЬНО-ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

А.В. Сергеенко, А.В. Хижняк, А.Ю. Липлянин

Военная академия Республики Беларусь, Минск

MATHEMATICAL MODEL OF THE TERRAIN IMAGE TAKING INTO ACCOUNT HYPERSPECTRAL AND SPECTRAL-POLARIZATION CHARACTERISTICS

A.V. Siarheyenka, A.V. Khizniak, A.Y. Liplianin

Military Academy of the Republic of Belarus, Minsk

Аннотация. В статье представлена разработанная математическая модель изображения, содержащая гиперспектральные и спектрально-поляризационные характеристики наблюдаемой сцены для оптико-электронных систем. Особенностью предложенной модели являются, во-первых, наличие гиперспектральных и спектрально-поляризационных характеристик; во-вторых, использование авторской математической модели для построения карты областей фоновой составляющей; в-третьих, использование искусственной нейронной сети для формирования гиперспектральных характеристик. В статье приведены количественные оценки адекватности разработанной и существующих математических моделей.

Ключевые слова: математическая модель, гиперспектральная характеристика, спектрально-поляризационная характеристика, искусственная нейронная сеть.

Для цитирования: Сергеенко, А.В. Математическая модель изображения местности с учетом гиперспектральных и спектрально-поляризационных характеристик / А.В. Сергеенко, А.В. Хижняк, А.Ю. Липлянин // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 1 (66). – С. 98–105. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_98. – EDN: DPTFJF

Abstract. The article presents a developed mathematical image model containing hyperspectral and spectral-polarization characteristics of the observed scene for optoelectronic systems. A special feature of the proposed model is, firstly, the presence of hyperspectral and spectral-polarization characteristics; secondly, the use of the author's mathematical model to build a map of the regions of the background component; thirdly, the use of an artificial neural network to form hyperspectral characteristics. The article provides quantitative estimates of the adequacy of the developed and existing mathematical models.

Keywords: mathematical model, hyperspectral characteristic, spectral and polarization characteristics, artificial neural network.

For citation: Siarheyenka, A.V. Mathematical model of the terrain image taking into account hyperspectral and spectral-polarization characteristics / A.V. Siarheyenka, A.V. Khizniak, A.Y. Liplianin // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 1 (66). – P. 98–105. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_1_66_98 (in Russian). – EDN: DPTFJF

Введение

Отраженное солнечное излучение от объектов и фонов на входе любой оптико-электронной системы содержит значительно больше характеристик и параметров, чем те, которые она способна зарегистрировать. Это и ультрафиолетовый, видимый, инфракрасный диапазоны, гиперспектральные, поляризационные и другие характеристики. Поэтому на входе каждый элемент наблюдаемой сцены – это вектор. К сожалению, нет таких систем, которые позволяют измерять и обрабатывать все характеристики сразу. Однако, системы, которые позволяют регистрировать отдельные характеристики, существуют и применяются в различных отраслях человеческой деятельности. Основными направлениями, где уже применяются гиперспектральные или спектрально-поляризационные характеристики, являются

оценка состояния сельскохозяйственных культур, лесов, атмосферы, контроль качества некоторых изделий и т. п. Одним из перспективных (неисследованных) направлений, где могут применяться данные характеристики, является обнаружение малоразмерных, малоконтрастных объектов, в том числе замаскированных средствами искусственного происхождения [1]–[3]. Настоящая статья посвящена разработке математической модели изображения местности, учитывающей гиперспектральные и спектрально-поляризационные характеристики. Наличие такой адекватной математической модели позволит вести разработку оптимальных алгоритмов обнаружения за счет: во-первых, формализации фоноцелевой обстановки; во-вторых, обоснования параметров и характеристик результатов работы алгоритмов обработки в заданных условиях применения.

1 Формирования гиперспектрально-поляризационного изображения

Постановка задачи. Для создания адекватной математической модели изображения, содержащего гиперспектральные и спектрально-поляризационные характеристики наблюдаемой сцены требуется:

- формализовать модель изображения местности содержащего гиперспектральные и спектрально-поляризационные характеристики;
- провести сравнение разработанной и существующих моделей с реальными изображениями.

При этом исходными данными являются:

- размер изображения (в пикселях);
- число классов c (объектов и фонов), составляющих фоноцелевую обстановку;
- параметры принадлежности к определенным классам на изображении (объектов и фонов);
- набор гиперспектральных характеристик объектов и фонов;
- математические выражения для расчета степеней поляризации;
- методика расчета параметров адекватности математической модели изображения [4];
- перечень существующих моделей изображений, являющихся объектом сравнения.

Целесообразно разделить процесс формирования изображения на несколько этапов, в статье предложено выполнить разделение на три этапа, подробное описание которых приведено ниже. Общий вид трехэтапного алгоритма формирования гиперспектрально-поляризационного изображения наблюдаемой сцены представлен на рисунке 1.1.

Этап 1. На первом этапе формируется карта расположения областей фона и объектов интереса. Карта представляет собой двумерную матрицу M :

$$M = (m_{ij})_{i=1, j=1}^{row, col},$$

где m_{ij} – значение класса, к которому относится элемент матрицы M ;

row – количество строк матрицы M ;

col – количество колонок матрицы M .

Сначала выполняется формирование только фоновой составляющей. Значение класса, к которому относится каждый отдельный элемент матрицы M , определяется выражением [5]:

$$P_{ij}(c) = \frac{W_c(\Omega_{ij})_{cor} W_c(i, z)_{cor} t m_{cm_{ij-1}}}{\sum_{c=1}^n W_c(\Omega_{ij})_{cor} W_c(i, z)_{cor} t m_{cm_{ij-1}}},$$

где $c \in [1, n]$ – номер класса, к которому относится элемент матрицы;

n – общее число классов;

Ω_{ij} – соседние элементы матрицы;

z – номер итерации;

$W_c(\Omega_{ij})_{cor}$ – скорректированный коэффициент появления класса c от значения соседних элементов матрицы;

$W_c(i, z)_{cor}$ – скорректированный коэффициент появления класса c от значения номера строки матрицы;

$t m_{cm_{ij-1}} \in [0, 1]$ – элемент матрицы, который

определяет, может ли элемент матрицы m_{ij} принять значение класса c при условии, что элемент матрицы с координатами $i, j-1$ относится к классу m_{ij-1} .

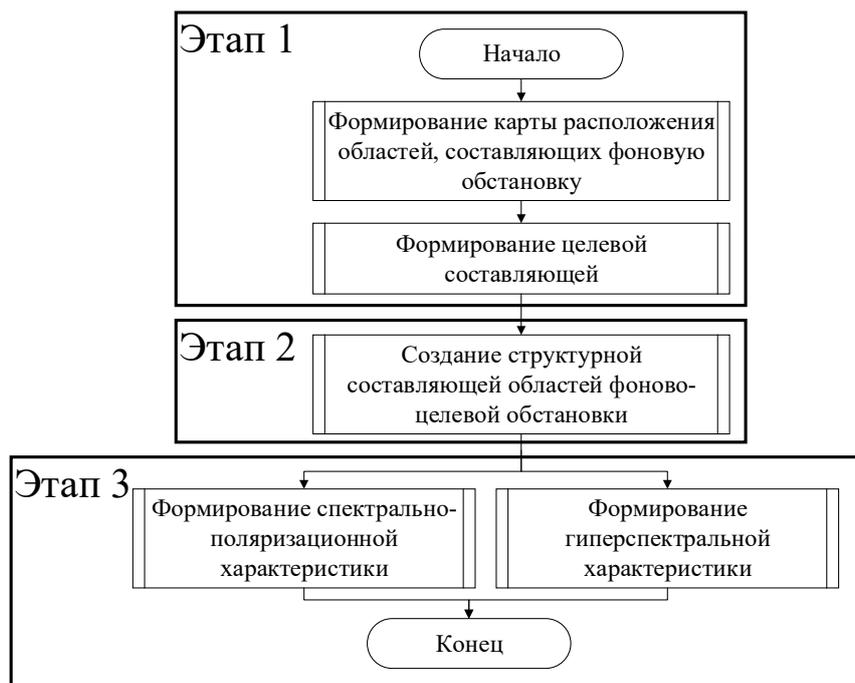


Рисунок 1.1 – Алгоритм формирования гиперспектрально-поляризационного изображения

После формирования карты расположения областей фоновой составляющей выполняется размещение областей целевой составляющей. На данном этапе на матрице M выполняется размещение областей, представляющих собой проекции типовых объектов интереса, примеры их изображений представлены на рисунках 1.2 а), б).

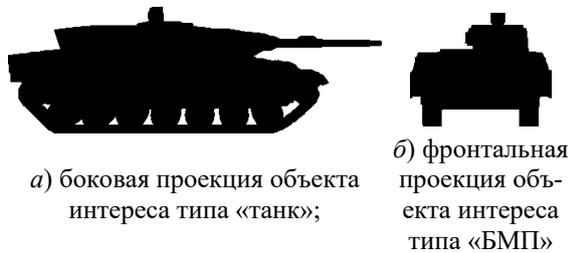


Рисунок 1.2– Примеры изображений проекций типовых объектов интереса

Положение нижнего левого угла области, представляющей объект интереса на матрице M , определяется как совокупность значений дискретных равномерных распределений с функциями вероятности $P(i)$ для колонок и $P(j)$ для рядов:

$$P(i) = \begin{cases} \frac{1}{col - col_{obj} - 1}, & 0 \leq i \leq col - col_{obj}; \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$P(j) = \begin{cases} \frac{1}{row - row_{obj} - 1}, & 0 \leq j \leq row - row_{obj}; \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

где col_{obj} – количество колонок, занимаемых областью, представляющей объект интереса;

row_{obj} – количество строк, занимаемых областью, представляющей объект интереса.

Количество строк, занимаемой областью объекта интереса, является входным параметром и задается пользователем, а количество занимаемых колонок определяется выражением:

$$col_{obj} = \frac{col_{obj\ org} row_{obj}}{row_{obj\ org}},$$

где $col_{obj\ org}$ – количество колонок оригинального изображения типового объекта интереса;

$row_{obj\ org}$ – количество строк оригинального изображения типового объекта интереса.

Этап 2. После того, как на матрицу M размещены объекты интереса, выполняется обход каждой области для определения необходимости формирования ее структурной составляющей. Формирование структуры производится только для областей, относящихся к классам, имеющим ярко выраженное разделение на разные подклассы, например хвойный лес – хвоя и кора, поле – сельскохозяйственная культура и пашня, сад – листва деревьев, кора деревьев и подстилаящая

растительность и т. п. Если для текущей области требуется формирование текстуры, то определяются параметры (координаты i и j верхнего левого угла, ширина и высота) прямоугольника, ограничивающего область. В соответствии с размерами ограничивающего прямоугольника выполняется формирование изображения-маски текстуры, представляющей собой двумерную матрицу T :

$$T = (t_{kl})_{k=1, l=1}^{row_t, col_t},$$

где row_t – количество строк матрицы T ;

col_t – количество колонок матрицы T .

Авторский метод создания текстур основан на методе А.А. Эфроса и В. Фримана [6] с рядом внесенных изменений и дополнений. Сущность нововведений заключается в следующем: во-первых, размер изображения текстуры задается размерами ограничивающего прямоугольника; во-вторых, одновременно происходит формирование двух новых изображений (первое – это изображение, используемое базовым алгоритмом для подбора лучшего соседнего блока и формирования границы между блоками, второе – это изображение-маска, используемое для определения расположения областей подклассов). При формировании текстуры области используются два изображения: первое – изображение настоящей целевой структуры, второе – изображение-маска, на которой разными цветами выделены интересующие подклассы, примеры пар изображений, используемых для генерации текстур, представлены на рисунке 1.3. На рисунках 1.2 а), б) представлены изображения настоящих целевых структур, а на рисунках 1.3 в), г) соответствующие им изображения-маски.

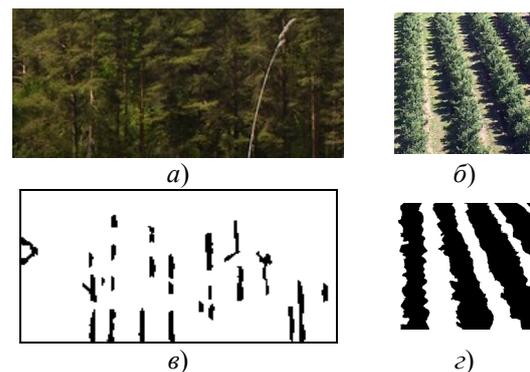


Рисунок 1.3– Изображения целевых структур и их изображения-маски

После того, как формирование изображения-маски завершится, значения элементов матрицы M , относящиеся к оцениваемой области, заменяются значениями матрицы T . После обновления значений элементов матрицы M выполняется переход к следующей области матрицы. Если оцениваемая область не требует формирования текстуры, то осуществляется переход

к следующей области. Данные действия выполняются до тех пор, пока не будут проверены все области матрицы M .

Этап 3. По завершении обхода всех областей матрицы M начинается заключительный этап – формирование гиперспектральной и спектрально-поляризационной составляющих:

$$H = (h_{ijk})_{i=1,j=1,k=1}^{row,col,v}, PL = (pl_{ijk})_{i=1,j=1,k=1}^{row,col,v}$$

где H – тензор гиперспектральной составляющей; h_{ijk} – значение интенсивности излучения; v – число каналов; PL – тензор спектрально-поляризационной составляющей;

pl_{ijk} – значение степени поляризации излучения.

Далее будет представлено описание процедуры формирования тензора H . Для каждого вектора h_{ij} формируется собственная гиперспектральная характеристика, соответствующая классу m_j . Для гиперспектральной характеристики классов с малым числом примеров для обучения (менее 10) применялись реальные гиперспектральные характеристики с наложенной Гауссовой шумовой составляющей. Для остальных классов применялось генеративно-состязательная искусственная нейронная сеть (ИНС), позволяющая добиться уникальности каждого нового спектра с одновременным сохранением формы, идентичной настоящим. Инициализирующим значением для ИНС-генератора является вектор S :

$$S = (s_i)_{i=1}^{rd} \sim \phi,$$

где $rd = 128$ – количество элементов вектора S ; ϕ – нормальное распределение (с нулевым средним и единичной дисперсией).

Путем последовательного прохождения одномерных сверточных слоев происходит преобразование вектора S в выходной вектор. Выходным слоем ИНС-генератора является сигмоидальная функция, гарантирующая, что $h_{ij} \in [0,1]$. Для уменьшения затухания градиента на этапе обучения в структуре ИНС-генератора используется техника «пропуск соединения», при использовании которой часть из последующих слоев ИНС на вход получают данные нескольких предыдущих слоев. Так, в используемой ИНС на вход 3-го блока «Слой увеличения размера» поступают выходные значения 1-го и 2-го блоков «Слой увеличения размера», а на вход 4-го блока «Слой увеличения размера» поступают значения 1-го, 2-го и 3-го блоков «Слой увеличения размера». Структура ИНС-генератора представлена на рисунке 1.4. Подробная структура блоков, составляющих ИНС-генератор, представлена на рисунках 1.6 а), б), в).

Входным значением ИНС-классификатора является вектор TR (реальная или сгенерированная гиперспектральная характеристика):

$$TR = (tr_i)_{i=1}^v,$$

где $tr_i \in [0,1]$ – гиперспектральная характеристика излучения.

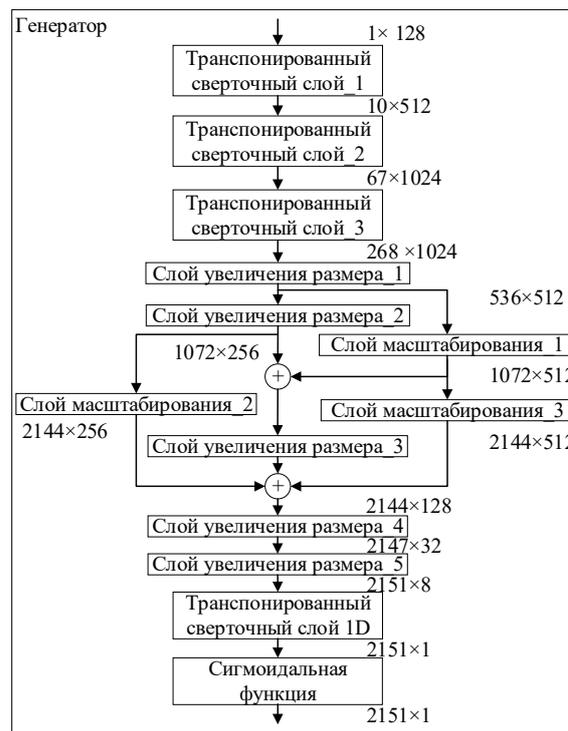


Рисунок 1.4– Структура ИНС-генератора

На первом шаге на входной вектор накладывается шум Гаусса. Необходимость добавления шума обусловлена имитацией реальных условий, когда измеренным оценкам характерно наличие ошибок. Далее путем последовательного прохождения одномерных сверточных слоев происходит извлечение информационных признаков. Аналогично с ИНС-генератором для уменьшения затухания градиента в структуре ИНС-классификатора применяется техника «пропуск соединения». Структура ИНС-классификатора представлена на рисунке 1.4. Подробная структура блоков, составляющих ИНС-классификатор представлены на рисунках 1.5 з), д).

Для формирования тренировочных наборов данных использовались гиперспектральные характеристики объектов, которые размещены в открытом доступе [7], [8], а также каталог спектров объектов и фонов, полученный сотрудниками НИИ ПФП им. А.Н. Севченко БГУ [1], а также данные, полученные авторами. Обучение ИНС выполнялось с использованием следующей методики:

1. Формирование тренировочной выборки в соответствии с целевым классом. Нормализация и аппроксимация данных (при необходимости).
2. Установка параметров обучения ИНС.
3. Инициализация весовых коэффициентов ИНС.
4. Обучение ИНС:

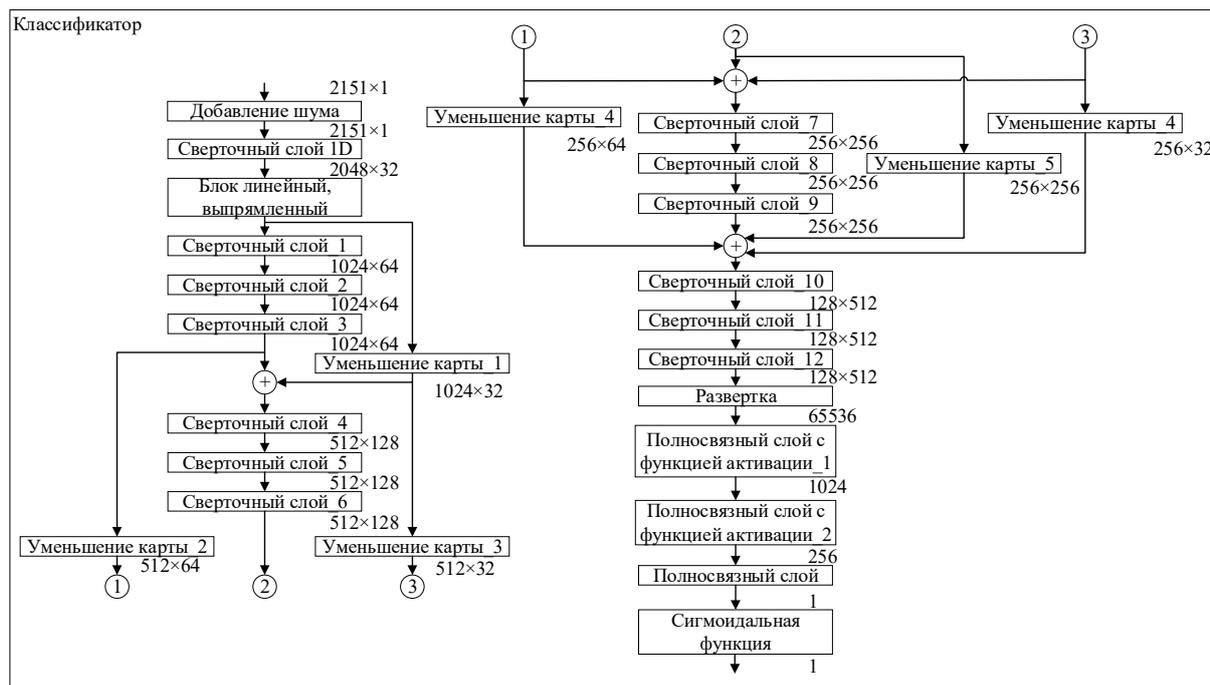


Рисунок 1.5 – Структура ИНС-классификатора

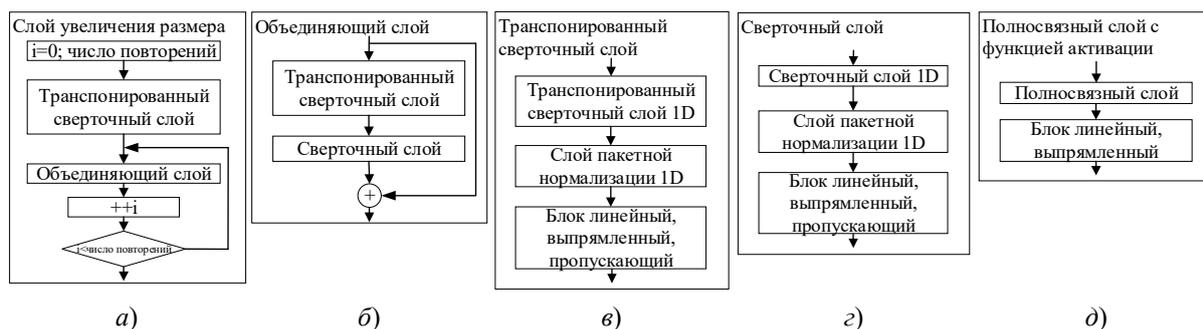


Рисунок 1.6 – Структура блоков, составляющих ИНС-генератор и ИНС-классификатор

- шаг обучения ИНС-классификатора:
- создание тренировочного набора данных, состоящего из реальных и сгенерированных гиперспектральных характеристик в пропорции 1 : 1;
 - предсказание отметок классов;
 - расчет ошибки;
 - корректировка весовых коэффициентов слоев ИНС-классификатора;
- шаг обучения ИНС-генератора:
- генерация гиперспектральных характеристик;
 - присвоение сгенерированным данным отметки «реальная»;
 - предсказание отметок классов с помощью ИНС-классификатора;
 - расчет ошибки;
 - корректировка весовых коэффициентов слоев ИНС-генератора.
5. Сохранение весовых коэффициентов обеих ИНС.

Для расчета ошибки на всех шагах использовалась бинарная кросс-энтропия [9]:

$$BCE(R, PR) = -\frac{1}{o} \sum_{i=1}^o (r_i \log(pr_i) + (1 - r_i) \log(1 - pr_i)),$$

где $R = (r)_{i=1}^o$ – вектор с реальными отметками спектров; $PR = (pr)_{i=1}^o$ – вектор с оценками спектров, полученных от ИНС-классификатора; o – число спектров, используемых на шаге обучения.

Поскольку для каждого класса обучение ИНС выполнялось отдельно, это позволило создать набор весовых коэффициентов ИНС-генератора и ИНС-классификатора. На рисунке 1.6 представлен пример, где красным цветом отображена реальная гиперспектральная характеристика сосновых иголок, а синим цветом отображена их сгенерированная гиперспектральная характеристика, которые практически совпадают.

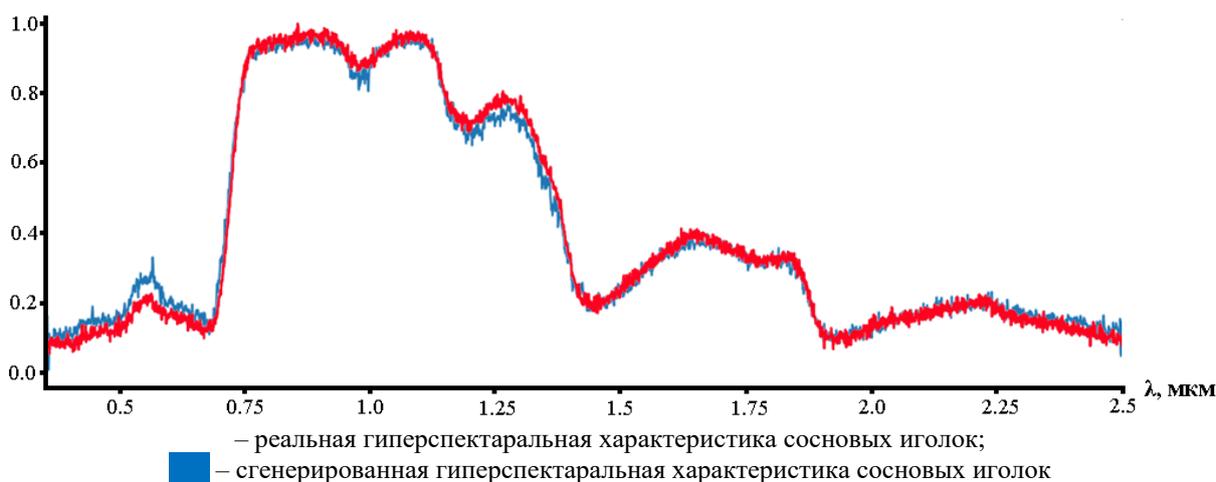


Рисунок 1.7– Пример реальных и сгенерированных гиперспектральных характеристик

Непосредственно при генерации нового спектра сначала выполняется установка весовых коэффициентов ИНС соответствующих классу m_{ij} . После загрузки весовых коэффициентов осуществляется генерация гиперспектральной характеристики, которая далее поступает на вход ИНС-классификатора. Если ИНС-классификатор оценивает сгенерированную характеристику как настоящую, то новая гиперспектральная характеристика присваивается вектору h_{ij} и выполняется переход к следующему элементу тензора H , если же характеристика была оценена как ненастоящая, то выполняется генерация новой. Новая характеристика будет генерироваться до тех пор, пока она не будет классифицирована как настоящая.

Далее выполняется формирование спектрально-поляризационной характеристики. Для этого выполняется расчет степени поляризации заданных длин волн [10]:

$$pl_{ijk} = \frac{K_{pk} - K_{sk}}{K_{pk} + K_{sk}}, \quad (1.1)$$

где K_{pk} – коэффициент отражения компоненты параллельной плоскости падения;

K_{sk} – коэффициент отражения компоненты перпендикулярной плоскости падения.

Коэффициенты отражения для обоих компонент определяются как [10]:

$$K_{sk} = |r_{sk}|^2, \quad K_{pk} = |r_{pk}|^2,$$

где r_{pk} – амплитудный коэффициент отражения компоненты параллельной плоскости падения;

r_{sk} – амплитудный коэффициент отражения компоненты перпендикулярной плоскости падения.

Исходя из закона преломления, амплитудные коэффициенты отражения рассчитываются по выражениям [10]:

$$r_{sk} = \frac{\cos \alpha_0 - r_{ck} \cos \alpha_1}{\cos \alpha_0 + r_{ck} \cos \alpha_1}, \quad (1.2)$$

$$r_{pk} = \frac{r_{ck} \cos \alpha_0 - \cos \alpha_1}{r_{ck} \cos \alpha_0 + \cos \alpha_1}, \quad (1.3)$$

где α_0 – угол падения излучения на объект сцены;

r_{ck} – показатель преломления класса c ;

α_1 – угол преломления излучения.

Для каждого элемента тензора PL , который в соответствии с картой расположения областей M относится к природным объектам, значение угла падения принадлежит диапазону $\alpha_0 \in [0^\circ, 90^\circ]$ и принимает случайное значение.

Для элементов тензора, относящихся к объектам интереса, угол падения принадлежит аналогичному диапазону, но остается постоянным внутри отдельной области класса.

Для определения угла преломления использовался закон Снелиуса [11], таким образом выражения (1.2), (1.3) примут вид:

$$r_{sk} = \frac{\cos \alpha_0 - r_{ck} \cos \left(\arcsin \left(\frac{\sin \alpha_0}{r_{ck}} \right) \right)}{\cos \alpha_0 + r_{ck} \cos \left(\arcsin \left(\frac{\sin \alpha_0}{r_{ck}} \right) \right)},$$

$$r_{pk} = \frac{r_{ck} \cos \alpha_0 - \cos \left(\arcsin \left(\frac{\sin \alpha_0}{r_{ck}} \right) \right)}{r_{ck} \cos \alpha_0 + \cos \left(\arcsin \left(\frac{\sin \alpha_0}{r_{ck}} \right) \right)}.$$

2 Анализ полученных результатов

Сравним предложенную математическую модель изображения, включающую гиперспектральные и спектрально-поляризационные характеристики наблюдаемой сцены с другими математическими моделями. Для этого воспользуемся методикой оценки адекватности математической модели изображения [4]. В ее основе лежит искусственная нейронная сеть, решающая задачу оценки сходства двух изображений по

нормированному показателю сходства и ее k -кратная перекрестная проверка.

На сегодняшний день для моделирования гиперспектральной составляющей распространение получило три способа: представление спектров как набора распределений Гаусса с различными параметрами; Марковские поля; реальные спектры, принадлежащие моделируемым объектам [12]. Спектрально-поляризационную составляющую зачастую рассчитывают также в соответствии с выражением (1.1). Для формирования карты разбиения областей широко применяются: марковская модель изображения, модель изображения Гиббса, блочная модель изображения Гиббса [4].

Для карт расположения областей, полученных с использованием трех моделей, формировались гиперспектральные характеристики с использованием распределений Гаусса с различными параметрами, Марковских полей и реальных спектров. Спектрально-поляризационные характеристики рассчитывались в соответствии с выражением (1.1), всего 9 типов моделей.

Сравнение смоделированных изображений проводилось с реальными изображениями, содержащими гиперспектральные и спектрально-поляризационные характеристики сцен, соответствующих заданным условиям. В таблице 2.1 представлены результаты оценки адекватности существующих и разработанной математических моделей с реальными изображениями.

Таблица 2.1 – Результаты оценки адекватности сравниваемых математических моделей с реальными изображениями

Наименование оцениваемой модели	Нормированная оценка сходства
Марковская модель изображения + распределение Гаусса	0,36
Модель изображения Гиббса + распределение Гаусса	0,43
Блочная модель изображения Гиббса + распределение Гаусса	0,45
Марковская модель изображения + Марковские поля	0,37
Модель изображения Гиббса + Марковские поля	0,42
Блочная модель изображения Гиббса + Марковские поля	0,47
Марковская модель изображения + реальные спектры	0,5
Модель изображения Гиббса + реальные спектры	0,52
Блочная модель изображения Гиббса + реальные спектры	0,6
Модель изображения с учетом гиперспектральных и спектрально-поляризационных характеристик (разработанная)	0,85

Исходя из полученных результатов видно, что существующие в настоящее время математические модели не могут обеспечить адекватное формирование изображения, содержащего гиперспектральные и спектрально-поляризационные характеристики, соответствующие заданным условиям съемки. Предложенная в статье модель напротив обеспечивает адекватное построение такого изображения. Нормированные оценки сходства математических моделей показали, что разработанная модель позволяет повысить адекватность итогового изображения наблюдаемой сцены в диапазоне 1,41–2,36 раза.

Заключение

Разработанная математическая модель изображения местности, отличающаяся во-первых, наличием гиперспектральных и спектрально-поляризационных характеристик; во-вторых, использованием авторской математической модели для построения карты областей фоновой составляющей; в-третьих использованием искусственной-нейронной сети для формирования гиперспектральных характеристик, что в совокупности позволило повысить оценку адекватности, основанную на нормированном показателе сходства до 2,36 раза по сравнению с существующими моделями. Разработанная модель может быть применена при разработке новых методов обработки гиперспектральных и спектрально-поляризационных изображений, а также разработки алгоритмов автоматического обнаружения и сопровождения в перспективных оптико-электронных системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беляев, Б.И.* Оптическое дистанционное зондирование / Б.И. Беляев, Л.В. Катковский / БГУ. – Минск, 2006. – 455 с.
2. *Сергеенко, А.В.* Пути повышения эффективности работы оптико-электронных систем обнаружения в условиях применения искусственных средств маскировки / А.В. Сергеенко, А.Ю. Липлянин // Военное образование и наука в условиях цифровой трансформации знаний: междунар. науч. конф. УО «ВА РБ», Минск, 20–21 апр. 2022 г.: тез. докл. / ВА РБ; редкол.: А.Ю. Зализко [и др.] – Минск: ВА РБ, 2022. – С. 105.
3. *Сергеенко, А.В.* Обзор путей повышение эффективности работы оптико-электронных систем обнаружения / А.В. Сергеенко, А.Ю. Липлянин // Технические средства защиты информации: тез. докл. XXI Бел.-Рос. науч. техн. конф., Минск, 6 июня 2023 г. / УО «БГУИР»; редкол.: Т.В. Борбатько [и др.]. – Минск, 2023. – С. 80.
4. *Сергеенко, А.В.* Методика расчета параметров адекватности математической модели изображения / А.В. Сергеенко, А.Ю. Липлянин, А.В. Хижняк // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56) – С. 94–99.

5. *Сергеенко, А.В.* Математическая модель для построения карты расположения областей, составляющих фоновую обстановку для оптико-электронных систем / А.В. Сергеенко, А.Ю. Липлянин, А.В. Хижняк // Доклады БГУИР. – 2024. – № 1. – С. 116–124.
6. *Efros, A.A.* Image quilting for texture synthesis and transfer [Electronic resource] / A.A. Efros, W. Freeman // Seminal Graphics Papers: Pushing the Boundaries. – 2023. – Vol. 2. – Mode of access: https://www.academia.edu/5396588/Image_Quilting_for_Texture_Synthesis_and_Transfer_SIGGRAPH_2001. – Date of access: 31.12.2024.
7. *The ECOSTRESS spectral library version 1.0* [Electronic resource] / S.K. Meerdink, S.J. Hook, D.A. Roberts, E.A. Abbott // Remote Sensing of Environment. – 2019. – № 230. – Mode of access: https://www.researchgate.net/publication/333447307_The_ECOSTRESS_spectral_library_version_10. – Date of access: 31.12.2024.
8. *Spectral Library Version 7* [Electronic resource] // USGS. – Mode of access: <https://pytorch.org/docs/stable/generated/torch.nn.BCELoss.html>. – Date of access: 01.05.2025.
9. *TORCH.NN* [Electronic resource] // PyTorch. – Mode of access: <https://pytorch.org/docs/stable/nn.html>. – Date of access: 23.02.2023.
10. *Путилин, Э.С.* Оптические покрытия / Э.С. Путилин, Л.А. Губанова. – СПб.: Лань, 2015. – 267 с.
11. *Физическая энциклопедия*: в 5 т. / Пойнтинга – Робертсона стримеры; редкол.: А.М. Прохоров (глав. ред.) [и др.]. – Москва: Научное издательство «Большая Российская энциклопедия», 1988–1998. – Т. 4. – 1998. – 704 с.
12. *Имитационное моделирование в задачах оптического дистанционного зондирования* / Г.М. Креков [и др.]. – Новосибирск: Наука, 1988. – 165 с.

Поступила в редакцию 10.11.2025.

Информация об авторах

Сергеенко Андрей Владимирович – мл. науч. сотрудник
Липлянин Антон Юрьевич – к.т.н.
Хижняк Александр Вячеславович – к.т.н., профессор

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;
- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;
- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e. g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).