



ISSN 2077-8708

Проблемы физики, математики и техники

№4 (65) 2025

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:
С.А. Хахомов (Беларусь)

**ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО
РЕДАКТОРА:**
А.В. Рогачёв (Беларусь)
Д.Л. Коваленко (Беларусь)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миروتин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)
М.А. Ярмоленко (Беларусь)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины
ул. Советская, 104,
246028, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

EDITOR-IN-CHIEF:
S.A. Khakhomov (Belarus)

DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:
A.V. Rogachev (Belarus)
D.L. Kovalenko (Belarus)

EDITORIAL BOARD:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)
M.A. Yarmolenko (Belarus)

EXECUTIVE SECRETARY:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

EDITION ADDRESS:
Francisk Skorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246028, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 4 (65) 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЗОРЫ

- Пилипцов Д.Г., Цзян Сяо Хун, Рогачёв А.В., Руденков А.С., Саховский К.А.** Технологические методы регулирования структуры, повышения механических свойств композиционных углеродных покрытий 7

ФИЗИКА

- Гиргель С.С.** Децентрированные циркулярные пучки Куммера – Гаусса различных типов ... 14
- Калоша Л.А., Гайда Л.С., Заерко Д.В.** Моделирование систем на основе материалов с изменяемыми диэлектрическими параметрами для перестройки характеристик рассеяния оптического и сверхвысокочастотного полей 20
- Никитюк Ю.В., Марченко Л.Н., Сердюков А.Н.** Исследование и оптимизация лазерного раскалывания кристаллического кварца с использованием генетического алгоритма, нейросетевых и нейро-нечетких моделей 29
- Новикова О.В., Тюменков Г.Ю.** Сходства и различия джоуль-томсоновского расширения керровских и заряженных чёрных дыр в АдС-пространстве и двухпараметрических жидкостей ... 35
- Салицкий В.С.** Уравнения равновесия упругопластической пятислойной симметричной по толщине пластины 42
- Соловцов С.Л., Фаняев И.А., Кудин В.П.** Теорема Фостера для антенны в свободном пространстве 47
- Старовойтов Э.И., Суслов К.В.** Изгиб пятислойного симметричного по толщине стержня .. 51
- Ярмоленко М.А., Рогачёв А.В., Рогачёв А.А.** Газофазный синтез, молекулярная структура многослойных покрытий на основе полипиррола 56

МАТЕМАТИКА

- Гальмак А.М.** Полиадические факторгруппы полиадических групп специального вида. II ... 62
- Княгина В.Н.** О конечной группе, факторизуемой B -группой и z -группой 67
- Косенок Н.С., Блинец И.В.** Об одном классе подрешеток решетки подгрупп конечной группы 72
- Мансимов К.Б., Мансимзаде А.Ф.** Аналог уравнения Эйлера и необходимые условия оптимальности второго порядка в одной двухступенчатой задаче управления интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра 75

ТЕХНИКА

- Занько А.И., Жамойть А.Е., Шидловский А.Г.** Влияние режимов магнетронного распыления на свойства тонких пленок оксида ванадия 85
- Киселев Д.А., Старухина С.С., Быков А.С., Петров А.В., Юденков А.Г., Семченко А.В., Каланда Н.А.** Магнитные свойства пленок $\text{Sr}_2\text{Fe}_{1-x}\text{Mo}_{1+x}\text{O}_{6-\delta}$, осажденных методом ионно-плазменного напыления 91
- Купо А.Н., Никитюк Ю.В., Емельянов В.А., Сердюков А.Н.** Моделирование температурного поля в процессах двулучевого лазерного термораскалывания материалов электронной техники 98
- Фаняев И.А., Тимошенко А.А., Самофалов А.Л., Хахомов С.А., Семченко И.В., Цзихун Гу, Даши Динг.** Активная передающая бианизотропная метаповерхность с функцией управления фазой для 5G/6G приложений беспроводной связи 103

ИНФОРМАТИКА

- Борчик Е.М., Якимов Д.А., Власова А.Ю., Демиденко О.М., Алексейков М.В.** Применение комплекса математических методов для диагностики дегенеративно-дистрофических изменений поясничного отдела позвоночника 108

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки:

- **технические;**
- **физико-математические.**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21. Приказы Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 31.12.2020 № 338, № 339.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е.А. Ружицкая*
Корректоры *И.А. Хорсун, Т.А. Фицнер*
Дизайн обложки *А.В. Ермаков*

Подписано в печать 08.12.25. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 13,72. Уч.-изд. л. 11,95. Тираж 17 экз. Заказ № 694.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013 г.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий в качестве:
издателя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013 г.;
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017 г.
Ул. Советская, 104, 246028, Гомель.

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2025
© Проблемы физики, математики и техники, 2025
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2025

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December 2009

Released quarterly

№ 4 (65) 2025

CONTENTS

REVIEWS

- Piliptsov D.G., Jiang Xiaohong, Rogachev A.V., Rudenkov A.S., Sakhovskij K.A.** Technological methods for controlling the structure and improving the mechanical properties of composite carbon coatings 7

PHYSICS

- Girgel S.S.** Decentered circular Kummer – Gauss beams of various types 14
- Kalosha L.A., Gaida L.S., Zaerko D.V.** Modeling of systems based on materials with variable dielectric parameters for reconstructing the scattering characteristics of optical and microwave fields 20
- Nikityuk Yu.V., Marchenko L.N., Serdyukov A.N.** Study and optimization of laser cleaving of crystalline quartz using genetic algorithm, neural network and neuro-fuzzy models 29
- Novikava V.U., Tyumenkov G.Yu.** Similarities and differences of Joule – Thomson expansion of Kerr and charged black holes in AdS-space and two-parametric fluids 35
- Salicki V.S.** Equations of equilibrium of an elastic-plastic pentalayer symmetric in thickness plate 42
- Solovtsov S.L., Fanyaev I.A., Kudzin V.P.** Foster's theorem for a free-space antenna 47
- Starovoitov E.I., Suslov K.V.** Bending of a five-layer symmetrical thickness rod 51
- Yarmolenko M.A., Rogachev A.V., Rogachev A.A.** Gas-phase synthesis, molecular structure of multilayer coatings based on polypyrrole 56

MATHEMATICS

- Gal'mak A.M.** Polyadic quotient groups of polyadic groups of a special form. II 62
- Kniahina V.N.** On a finite group factorized by a B -group and a z -group 67
- Kosenok N.S., Blisnets I.V.** On a class of sublattices of the subgroup lattice of a finite group 72
- Mansimov K.B., Mansimzade A.F.** An analogue of the Euler equation and necessary conditions for second-order optimality in one two-stage control problem for integro-differential equations of Volterra type 75

TECHNICS

- Zanka A.I., Zhamoits A.E., Shydouski A.H.** Influence of magnetron sputtering process parameters on the properties of vanadium oxide thin films 85
- Kiselev D.A., Starukhina S.S., Bykov A.S., Petrov A.V., Yudenkov A.G., Semchenko A.V., Kalanda N.A.** Magnetic properties of $\text{Sr}_2\text{Fe}_{1-x}\text{Mo}_{1+x}\text{O}_{6-\delta}$ films deposited by ion-plasma sputtering 91
- Kupo A.N., Nikityuk Yu.V., Yemelyanov V.A., Serdyukov A.N.** Modeling the temperature field in dual-beam laser thermal cleaving processes for electronic materials 98
- Fanyaev I.A., Timoshenko A.A., Samofalov A.L., Khakhomov S.A., Semchenko I.V., Jihong Gu, Dazhi Ding.** Active transmitting bianisotropic metasurface with phase control function for B5G/6G applications of wireless communications 103

INFORMATION SCIENCE

- Borchyk K.M., Yakimov D.A., Vladova A.Yu., Demidenko O.M., Alekseikov M.V.** Application of a set of mathematical methods for the diagnosis of degenerative-dystrophic changes in the lumbar spine 108

Founder – Francisk Skorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science:

- Technics;**
- Physics and Mathematics.**

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 538.951:620.3

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_7

EDN: XHSDAV

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ СТРУКТУРЫ, ПОВЫШЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КОМПОЗИЦИОННЫХ УГЛЕРОДНЫХ ПОКРЫТИЙ

Д.Г. Пилипцов^{1,2}, Цзян Сяо Хун¹, А.В. Рогачёв^{1,2}, А.С. Руденков^{1,2}, К.А. Саховский²

¹Международная китайско-белорусская лаборатория по вакуумно-плазменным технологиям,
Нанкинский университет науки и технологии

²Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

TECHNOLOGICAL METHODS FOR CONTROLLING THE STRUCTURE AND IMPROVING THE MECHANICAL PROPERTIES OF COMPOSITE CARBON COATINGS

D.G. Piliptsov^{1,2}, Jiang Xiaohong¹, A.V. Rogachev^{1,2}, A.S. Rudenkov^{1,2}, K.A. Sakhovskij²

¹International China-Belarusian Laboratory of Vacuum-Plasma Technologies,
Nanjing University of Science and Technology

²Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Проведен анализ основных технологических приемов регулирования структуры и свойств композиционных углеродных покрытий. Обобщены экспериментальные данные о влиянии напряжения разряда, формы, длительности и частоты импульсов разрядов при генерации углеродной плазмы на фазовый состав и свойства углеродных покрытий. Проанализированы основные особенности формирования, фазовый состав и свойства углеродных покрытий, легированных карбидообразующими и инертными по отношению к углероду химическими элементами и соединениями, их изменения при термообработке.

Ключевые слова: углеродные покрытия, композиционные покрытия, структура, механические свойства.

Для цитирования: Технологические методы регулирования структуры, повышения механических свойств композиционных углеродных покрытий / Д.Г. Пилипцов, Цзян Сяо Хун, А.В. Рогачёв, А.С. Руденков, К.А. Саховский // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 4 (65). – С. 7–13. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_7 – EDN: XHSDAV

Abstract. An analysis of the main technological methods for controlling the structure and properties of composite carbon coatings has been carried out. The experimental data on the influence of discharge voltage, as well as the shape, duration, and frequency of discharge pulses during carbon plasma generation on the phase composition and properties of carbon coatings, have been summarized. The main features of the formation, phase composition, and properties of carbon coatings doped with carbide-forming and chemically inert elements and compounds with respect to carbon, as well as their changes during heat treatment, have been analyzed.

Keywords: carbon coatings, composite coatings, structure, mechanical properties.

For citation: Technological methods for controlling the structure and improving the mechanical properties of composite carbon coatings / D.G. Piliptsov, Jiang Xiaohong, A.V. Rogachev, A.S. Rudenkov, K.A. Sakhovskij // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 4 (65). – P. 7–13. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_7 (in Russian). – EDN: XHSDAV

Введение

Среди материалов на основе углерода важное место отводят осаждаемым различными вакуумными методами углеродным покрытиям (УП), находящим широкое применение в машиностроении, электронике, медицине и других отраслях [1]. Свойства углеродных покрытий определяются, в первую очередь, их структурой, типом связи между атомами, наличием легирующих элементов, которые, в свою очередь, определяются в значительной степени методом и условиями их осаждения [2]. В числе углеродных тонкопленочных материалов, характеризующихся

высокими механическими свойствами и наиболее широким применением, выделяют углеродные алмазоподобные покрытия, структура, фазовый состав и свойства которых в зависимости от метода осаждения и последующей обработки может изменяться в широких пределах [3], [4].

В настоящее время разработаны и достаточно эффективно используются на практике ряд методов осаждения углеродных покрытий, в числе которых доминируют термические и плазмохимические методы синтеза углеродных покрытий. В основе плазмохимических методов лежат процессы диссоциации и активации,

ионизации углеродсодержащих газов в электрических разрядах различной природы и мощности [2]. К термическим относят методы, при реализации которых основным фактором является тепловое воздействие на углеродную мишень и образование в результате потока ионов углерода с энергией ~ 100 эВ. В качестве теплового воздействия наиболее эффективным является использование импульсного катодно-дугового разряда в парах углерода, приводящего к образованию потока углеродной плазмы. Данный метод характеризуется, в сравнении с другими, технологичностью, возможностью регулирования достаточно простыми приемами химического состава и конструкции осаждаемых слоев, наиболее высокой скоростью роста покрытий.

Алмазоподобные покрытия проявляют высокие механические свойства, имеют микронанотвердость (10...70 ГПа), низкий коэффициент трения ($\sim 0,1$), прозрачны в видимом и ИК диапазоне, являются стойкими при действии агрессивных химических сред. К основным недостаткам таких покрытий относят высокие внутренние напряжения (5...10 ГПа), невысокую термическую стойкость в кислородсодержащих средах (до 600 К), низкую прочность адгезионного соединения при осаждении на стальные поверхности, высокую хрупкость. При нанесении покрытий из плазмы импульсного катодно-дугового разряда в потоке содержатся микро-, наночастицы графита, которые при осаждении на поверхность создают высокую структурную неоднородность, дефектность. С целью снижения данных недостатков, повышения их эксплуатационных характеристик предложен ряд технологических решений. В их числе наиболее эффективным является введение на стадии осаждения покрытий в его состав легирующих элементов, модифицирующее влияние которых заключается в направленном изменении фазового состава углеродной матрицы (соотношения sp^3 и sp^2 гибридных атомов углерода, дисперсность кластеров), возможном образовании с углеродом химических соединений или же в формировании твердых растворов и даже отдельных самостоятельных фаз. Степень и характер модифицирования углеродных покрытий определяется в значительной степени природой и механизмом протекающих физико-химических процессов, поэтому их изучение является актуальной задачей [5].

Основной целью настоящей работы является анализ технологических особенностей формирования композиционных углеродных покрытий из импульсной катодной плазмы, результатов исследований зависимости их структуры и свойств от химической природы и концентрации легирующих элементов, условий и режимов легирования, последующей обработки.

1 Влияние условий и режимов осаждения углеродного потока на фазовый состав и свойства покрытий

Наиболее эффективные варианты устройств формирования композиционных углеродсодержащих покрытий из импульсной катодной плазмы представлены на рисунке 1.1.

Представленные схемы устройств позволяют реализовать следующие основные технологические процессы нанесения композиционных углеродных покрытий:

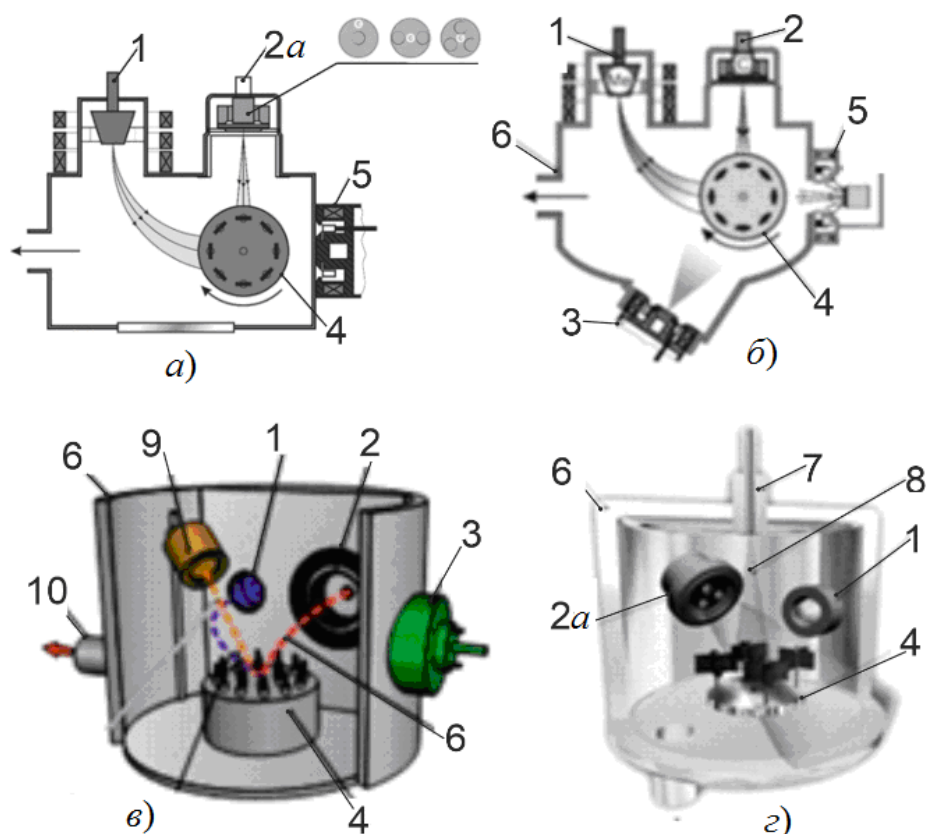
1. Формирование многослойных покрытий на основе углерода и легирующего элемента с регулируемыми толщинами слоев. Осаждение углеродного слоя осуществляется из потока углеродной импульсной плазмы, слой легирующего элемента – из потока, генерируемого электродуговым испарителем (рисунок 1.1 а, б).

2. Формирование композиционных покрытий из плазмы импульсного катодно-дугового разряда, создаваемого при использовании составного или композиционного, содержащего легирующий элемент углеродного катода. При этом возможно применение ассистирующей обработки ионами инертных газов, а также многокомпонентное легирование покрытий ионами азота, генерируемых ионным источником (рисунок 1.1 а, в). Легирование УП азотом проводят и путем его напуска в вакуумную камеру.

3. Осаждение многокомпонентно легированных углеродных покрытий при использовании дополнительно размещенных в камере электродугового (рисунок 1.1, а), ионного (рисунок 1.1, б) источника или же магнетронного распылителя (рисунок 1.1, в).

Данные технологические варианты нанесения покрытий характеризуются различной степенью активации и концентрации легирующих элементов, энергетическими параметрами углеродной плазмы, изменение которых имеет место не только при использовании различных режимов испарения углеродного катода, но и в результате взаимодействия ионов углерода с атомами легирующих элементов в газовой фазе. Данные особенности определяют в значительной степени зависимость структуры и свойств покрытий от используемой технологической схемы их нанесения.

В числе важнейших технологических параметров, влияющих на скорость осаждения углеродных слоев, их морфологию и механические, физико-химические свойства, выделяют режимы генерации углеродной плазмы: напряжение разряда, форма, длительность и частота импульсов. В [6] показано, что при использовании двухстадийного импульса с амплитудами 350 и 150 В, в сравнении с моноимпульсом такой же длительностью и амплитудой 350 В, микротвердость возрастает в 2,5...3,5 раза, уровень внутренних напряжений снижается в 4...5 раз, при этом однако



- 1 – дуговой испаритель постоянного тока с металлическим (Ti, Cu, Zr, Al, Cr) катодом;
 2 – источник плазмы импульсного катодно-дугового разряда с графитовым катодом;
 2а – источник плазмы импульсного катодно-дугового разряда с композиционным (металл, кремний)-графитовым катодом;
 3 – ассистирующий ионный источник;
 4 – вращающаяся технологическая оснастка с подложками;
 5 – распыляющий ионный источник;
 6 – вакуумная камера;
 7 – регулятор расхода газа (азот);
 8 – поток N_2 ;
 9 – магнетронная распылительная система постоянного тока;
 10 – система откачки

Рисунок 1.1 – Схемы вакуумных установок для получения композиционных покрытий на основе углерода

наблюдается снижение скорости роста в покрытии в 1,5...2 раза, что объясняется снижением интегральной энергии в импульсе.

В работах [7]–[9] определены закономерности влияния частоты следования разрядных импульсов на структуру углеродных покрытий. Показано, что с увеличением частоты импульсов от 3 Гц до 20 Гц имеет место уменьшение размера, увеличение количества и степени упорядочения Csp^2 -кластеров, возрастание твердости и внутренних напряжений в покрытии, а также снижение ширины запрещенной зоны покрытий от 1,35 эВ до 0,9 эВ. При толщине 80–106 нм и частоте импульсов разряда 3 Гц углеродное покрытие имеет максимальное содержание Csp^3 связей, характеризуется высокими механическими и оптическими свойствами.

Данные закономерности проявляются при осаждении однокомпонентных покрытий и при их легировании. Как правило, влияние частоты следования импульсов на свойства покрытий имеет немонотонный характер. Так при нанесении покрытий в среде молекулярного азота их твердость незначительно уменьшается с повышением частоты от 3 до 10 Гц, а затем возрастает на 16% с увеличением частоты до 20 Гц. При этом ширина оптической запрещенной зоны таких покрытий снижается незначительно с 0,85 эВ (3 Гц) до 0,71 эВ (20 Гц). Установлено, что при ионном легировании углеродного слоя при частоте импульсов 10 Гц относительное содержание C-N связей максимально и значительно превышает число связей при легировании покрытия путем напуска в камеру молекулярного азота.

Значительное влияние на фазовый состав покрытий и их свойства оказывают геометрические параметры нанесения. Так, в [10] установлено, что при увеличении расстояния между источником генерации углеродной плазмы и подложкой происходит увеличение числа sp^2 гибридных атомов углерода, монотонное снижение твердости и модуля упругости покрытий, что в значительной степени определяется изменением энергии ионов и снижением плотности углеродного потока при его транспортировке от катода к подложке. При осаждении потока ионов углерода, имеющих практически одинаковую энергию и различную плотность, что достигается изменением ориентации поверхности подложки относительно осаждаемого потока, установлено немонотонное изменение твердости и модуля упругости, показателя преломления покрытий от угла падения углеродного потока (твердость и модуль упругости при угле падения 15° , а показатель преломления при 45° имеет максимальное значение) [11], [12].

2 Особенности формирования, фазовый состав и свойства композиционных углеродных покрытий

Представленные на рисунке 1.1 схемы установок позволяют осаждать композиционные углеродные покрытия практически любого химического состава с различной концентрацией ингредиентов и при заданном распределении их по толщине слоя. Изменяя при этом степень ионизации и плотность потока осаждаемых атомов, температуру поверхности подложки, проводя дополнительную ионную обработку, предоставляется возможность инициирования на стадии осаждения протекание различных химических и физических (диффузии, структурообразования, фазовые превращения и другие) процессов. Анализ основных протекающих процессов достаточно подробно рассмотрен в работах [13], [14]. При легировании УП металлами их влияние на структуру и свойства определяется, прежде всего, реакционной активностью по отношению к углероду, способностью металлов образовывать с углеродом химические соединения. При этом, в зависимости от условий и режимов осаждения, природы и концентрации, металл в объёме углеродного покрытия может находиться, кроме химического соединения, также в виде самостоятельной фазы, либо в твердом растворе [13]–[15].

В числе наиболее перспективных для практического применения УП, легированных химически активными металлами, кроме детально изученных покрытий а-С:Ti, следует отметить композиционные покрытия а-С:Si и а-С:B. При введении Si в структуру покрытия происходит образование карбида и оксида кремния (SiC и SiO_x), и с ростом концентрации кремния установлено увеличение содержания более твердой

sp^3 фазы. При осаждении таких покрытий имеет место замещение атомами кремния атомов углерода преимущественно в sp^2 кластерах [16]–[18]. Легирование а-С покрытий бором приводит к образованию в покрытии карбидов и оксида бора либо выделению его в виде отдельной фазы. При концентрации бора меньше 17 масс. % установлено высокое содержание атомов углерода с sp^3 гибридизацией связей, с ростом концентрации бора происходит уменьшение отношения фаз Csp^3 / Csp^2 . Покрытия характеризуются низкими значениями коэффициентов трения (0,12...0,15) и износа контртела [19]–[21].

Введение в состав УП инертных металлов сопровождается выделением его в виде самостоятельной фазы, дисперсность которой зависит от природы металла, его концентрации и условий осаждения. При этом проявляется его активное влияние на фазовый состав углеродной матрицы, заключающееся, как правило, в ее графитизации. Такие покрытия имеют достаточно низкий уровень внутренних механических напряжений. На примере УП, легированных медью и серебром, показана высокая эффективность их применения в узлах трения в качестве не только антифрикционных, но и электротехнических слоев [22]–[24].

Одним из наиболее эффективных технологических приемов повышения механических свойств УП является их многокомпонентное легирование, в частности металлами и азотом [25], [26]. Отметим, что при легировании УП молекулярным азотом снижается размер углеродных Csp^2 кластеров, уровень внутренних механических напряжений, повышается износостойкость контртела в сравнении с однокомпонентными а-С покрытиями. При их обработке в процессе осаждения ионами азота установлено преимущественное образование соединений азота с атомами углерода с sp^2 -гибридизацией связей, концентрация которых в значительной степени зависит от частоты импульсов разряда, плотности потока ионов азота [27]. При осаждении покрытий а-С:Me:N протекающие физико-химические процессы значительно усложняются. Химически активные металлы в таких слоях образуют не только карбиды, но нитриды, карбонитриды, оказывают более сложное влияние на дисперсность размеров Csp^2 кластеров [7], [27]–[29].

Перспективным является и комплексное легирование УП металлами различной природы. Так, при осаждении а-С:(Ni+Cr) покрытий установлен эффект неаддитивного влияния концентрации легирующих элементов на структуру, отношение Csp^3 / Csp^2 и механические свойства, обусловленные образованием в покрытии дисперсных фаз сложного состава на основе карбида хрома и интерметаллических соединений [30]. В целом это технологическое направление недостаточно разработано, и при оптимальном подборе ингредиентов, проявляющих комплексное

каталитическое влияние на процессы образования Csp^3 фаз, возможно существенное повышение служебных свойств УП.

3 Влияние термообработки на свойства композиционных углеродных покрытий

Нагрев легированных УП вследствие более интенсивного протекания процессов межфазной диффузии, релаксации внутренних механических напряжений, активации фазовых и структурных превращений является эффективным технологическим приемом изменения физико-химических, механических свойств [6], [7], [31]. Особенно значительное влияние нагрева проявляется при обработке слоистых композиционных УП. Характер протекающих процессов, а, следовательно, и степень изменения структуры и свойств определяются условиями термообработки, химическим составом покрытия. Так, установлено, что отжиг покрытий на воздухе практически всегда сопровождается монотонным при повышении температуры снижением доли sp^3 гибридных атомов углерода, твердости. При термообработке УП, легированных карбидообразующими металлами, температурная зависимость внутренних напряжений имеет экстремальный характер: при нагреве до $300^\circ C$ имеет место их снижение и при дальнейшем повышении температуры значение напряжений возрастет вследствие интенсификации процесса образования карбидов [32]. Следует отметить, что значительное влияние на структуру и свойства композиционных покрытий при таких условиях нагрева оказывают процессы окисления. Значительную роль эти процессы оказывают, например, при термообработке композиционных а-C:Al покрытий [26].

При термообработке покрытий в вакууме характер протекающих изменений иной. На примере (TiN:Al) / а-C, (CrN:Al) / а-C покрытий показано, что после термообработки в вакууме при $400^\circ C$ имеет место формирование более однородной структуры, повышение твердости, снижение модуля упругости в сравнении с не отожженными покрытиями [7], [30].

Главная проблема импульсного вакуумно-дугового испарения графитового катода – это образование при испарении катода «капельной фазы» (макрочастиц). При испарении графита из катодного пятна, помимо ионов углерода, вылетают микроскопические осколки горячего графита (от долей микрометра до десятков микрометров). Следовательно, необходим поиск решений. Одним из наиболее простых и технологических является использование сепаратора потока, который отклоняет поток ионов углерода, направляя их на подложку. Тяжелые нейтральные макрочастицы и осколки графита не взаимодействуют с магнитным полем, летят по прямой и оседают на стенках фильтра, не попадая на изделие.

Как показано в работах [33], [34], использование сепарации импульсного потока углеродной плазмы является технологически приемом, позволяющим получить твердые, атомарно-гладкие и однородные покрытия.

Заключение

Проведен анализ основных технологических приемов регулирования структуры и свойств композиционных углеродных покрытий. Рассмотрены основные схемы установок, реализующих различные варианты нанесения композиционных углеродных покрытий. Обобщены закономерности влияния напряжения разряда, формы, длительности и частоты импульсов разряда при генерации углеродной плазмы на фазовый состав и свойства углеродных покрытий. Проанализированы основные особенности формирования, фазовый состав и свойства углеродных покрытий, легированных карбидообразующими и инертными по отношению к углероду металлами. Отмечена высокая перспективность многокомпонентного легирования углеродных покрытий с целью достижения оптимального сочетания механических свойств. Проведена оценка влияния условий и режима термообработки композиционных покрытий на их фазовый состав и свойства.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Diamond-like Carbon Coatings in the Biomedical Field: Properties, Applications and Future Development* / Y. Peng, J. Peng, Z. Wang, Y. Xiao, X. Qiu // *Coatings*. – 2022. – Vol. 12. – P. 1088.
2. *Modification Methods of Diamond like Carbon Coating and the Performance in Machining Applications: A Review* / L. Wang, Y. Liu, H. Chen, M. Wang // *Coatings*. – 2022. – Vol. 12. – P. 224.
3. *Schultrich, B. Structure and Characterization of Vacuum Arc Deposited Carbon Films – A Critical Overview* / B. Schultrich // *Coatings*. – 2022. – Vol. 12. – P. 109.
4. *Vetter, J. 60 years of DLC coatings: historical highlights and technical review of cathodic arc processes to synthesize various DLC types, and their evolution for industrial applications* / J. Vetter // *Surface and Coatings Technology*. – 2014. – Vol. 257. – P. 213–240.
5. *Doping effects on the tribological performance of diamond-like carbon coatings: A Review* / O. Sharifahmadian [et al.] // *Journal of Materials Research and Technology*. – 2023. – Vol. 27. – P. 7748–7765.
6. *Effect of carbon cathode plasma parameters on the structure and properties of deposited coatings* / Y.M. Liu, Z.Ch. Song, X.H. Jiang, D.G. Pilipstou, A.V. Rogachev // *Proceedings of 8th International Congress on Energy Fluxes and Radiation Effects* / ed. by D. Sorokin, A. Grishkov. – Tomsk: TPU Publishing House, 2022. – P. 1041–1046.

7. *Influences of pulse frequency on structure and mechanical properties of DLC films synthesized by pulsed cathodic arc evaporation* / Bing Ye, Xiaohong Jiang, Bing Zhou, D.G. Piliptsou, A.V. Rogachev // *Applied Mechanics and Materials*. – 2014. – Vol. 670–671. – P. 560–564.
8. *Влияние напряжения разряда на структуру и механические свойства углеродных покрытий, осажденных из сепарированных потоков углеродной плазмы* / Д.Г. Пилипцов, Н.Н. Федосенко, К.А. Саховский, С.Ю. Чепкасов // *Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого*. – 2023. – № 4. – С. 40–47.
9. *Саховский, К.А. Влияние параметров разряда на структуру и свойства АПП* / К.А. Саховский, Д.Г. Пилипцов, А.Н. Попов // *Полимерные композиты и трибология (Поликомтриб-2022): тез. докл. междунар. науч.-техн. конф., Гомель, 28–30 июня 2022 г. / НАН Беларуси [и др.]; редкол.: В.Н. Адериша [и др.]*. – Гомель, 2022. – С. 162.
10. *Исследование структуры и механических свойств пленок тетраэдрального аморфного углерода, осажденных при различных расстояниях* / С.Ю. Чепкасов, А.С. Золкин, Д.Г. Пилипцов, Е.В. Гладких, К.С. Кравчук // *Сибирский физический журнал*. – 2018. – Т. 13, № 3. – С. 55–60.
11. *The effect of the substrate spatial orientation on the properties of amorphous carbon coatings deposited from pulse plasma flows* / S. Chepkasov, A. Zolkin, D. Piliptsou, M. Khomyakov, E. Maksimovskii // *2020 International Conference on Actual Problems of Electron Devices Engineering (APEDE)*. – Piscataway: IEEE, 2020. – P. 856–862.
12. *Влияние условий осаждения на структуру и механические свойства а-С покрытий* / Ван Цзинцзе, Д.Г. Пилипцов, А.В. Рогачев, А.С. Руденков, К.А. Саховский, С.Ю. Чепкасов // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2024. – № 4 (61). – С. 7–12.
13. *Нанокмпозиционные покрытия и технологии в микроэлектронике* / В.А. Емельянов, А.В. Рогачев, Н.Н. Федосенко, Д.Г. Пилипцов. – Минск: Беларус. навука, 2014. – 410 с.
14. *Композиционные углеродные покрытия, осажденные из импульсной катодной плазмы* / Д.Г. Пилипцов, А.С. Руденков, П.А. Лучников, А.В. Рогачев, Цзян Сяо Хун, Чжоу Бин; под ред. А.В. Рогачева. – Москва: Радиотехника, 2020. – 283 с.
15. *Structure and properties of metal-carbon a-C coatings alloyed with Ti, Zr and Al with a high concentration* / J. Fang, D.G. Piliptsou, A.V. Rogachev, X.H. Jiang, N.N. Fedosenko, E.A. Kulesh // *Lecture Notes in Networks and Systems*. – 2022. – Vol. 422. – P. 195–202.
16. *Improving the mechanical property of amorphous carbon films by silicon doping* / A.S. Chaus, X.H. Jiang, P. Pokorný, D.G. Piliptsou, A.V. Rogachev // *Diamond and Related Materials*. – 2018. – Vol. 82. – P. 137–142.
17. *Морфология и фазовый состав кремний-углеродных покрытий* / А.С. Руденков, А.В. Рогачев, Д.Г. Пилипцов, А.Н. Купо, А.С. Побяха, П.А. Лучников // *Нanomатериалы и наноструктуры – XXI век*. – 2019. – Т. 10, № 1. – С. 35–42.
18. *Structure and optical properties of a-C coatings doped with nitrogen and silicon* / D.G. Piliptsou, A.S. Pobiyaha, A.V. Rogachev, A.S. Rudenkov // *Lecture Notes in Networks and Systems*. – 2022. – Vol. 422. – P. 171–180.
19. *Вакуумно-плазменные бор-углеродные покрытия: структура, морфология и механические свойства* / Д.Г. Пилипцов, А.В. Рогачев, А.С. Руденков, Цзян Сяо Хун, Е.А. Кулеш, П.А. Лучников // *Наукоемкие технологии*. – 2020. – Т. 21, № 9. – С. 22–32.
20. *Boron-carbon coatings: structure, morphology and mechanical properties* / E.A. Kulesh, D.G. Piliptsou, A.V. Rogachev, J.X. Hong, N.N. Fedosenko, V. Kolesnyk // *Journal of Engineering Sciences*. – 2020. – Vol. 7, № 1. – P. C1–C9.
21. *Structural properties of carbon composites doped with boron* / D.G. Piliptsou, A.S. Rudenkov, A.V. Rogachev, Jiang Xiao Hong, E.A. Kulesh, A.P. Surzhikov, A.P. Luchnikov, O.A. Frolova // *Bulletin of the Karaganda University. "Physics Series"*. – 2020. – Vol. 3 (99). – P. 31–37.
22. *Structure, optical and mechanical performance of silver-doped diamond-like carbon composite film* / J. Fang, A.V. Rogachev, Y. Liu, D.G. Piliptsou, X. Jiang, E. A. Kulesh // *2020 International Conference on Actual Problems of Electron Devices Engineering (APEDE)*. – Piscataway: IEEE, 2020. – P. 1338–1343.
23. *Структура, механические свойства градиентных нанокмпозиционных медь-углеродных покрытий* / А.С. Руденков, Ванг Цзинцзе, А.В. Рогачев, Лю Джубо, Д.Г. Пилипцов, Е.А. Кулеш, А.Н. Купо // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2025. – № 1 (62). – С. 43–50.
24. *Оптимизация методов формирования Си-С покрытий электротехнического назначения* / А.Н. Купо, А.С. Руденков, Ванг Цзинцзе, Д.Г. Пилипцов // *Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого*. – 2025. – № 1. – С. 58–67.
25. *Synthesis and characterization of Ti and N binary-doped a-C films deposited by pulse cathode arc with ionic source assistant* / Bing Zhou, Zhifeng Wang, Zhubo Liu, D.G. Piliptsou, Bin Xu, Shengwang Yu, Yanxia Wu, A.V. Rogachev // *Surface and Interface Analysis*. – 2018. – Vol. 50, № 4. – P. 506–515.
26. *Структура и механические свойства легированных азотом и алюминием углеродных покрытий* / Д.Г. Пилипцов, Джоу Бин, А.В. Рогачев, Н.Н. Федосенко, Е.А. Кулеш // *Проблемы физики математики и техники*. – 2023. – № 1 (54). – С. 47–54.

27. *Effect of discharge pulse frequency on the microstructure and field-emission performance of CNX films deposited by pulse cathode arc evaporation* / Haowei Du, Bing Zhou, D.G. Piliptsov, Hui Sun, Yong Ma, Hongjun Hei, Shengwang Yu, Zhubo Liu // *Journal of Vacuum Science & Technology A*. – 2024. – Vol. 42. – Article 063410.

28. *Influence of annealing on the structure and properties of carbon coatings containing Ti and TiN layers* / D.G. Piliptsov, X.H. Jiang, A.S. Chaus, A.V. Rogachev, L. Morovic // *Diamond and Related Materials*. – 2023. – Vol. 135. – Article 109890.

29. *Effect of the alloying elements in TiN sublayer on the structure and mechanical properties of carbon coatings* / Jialin Fang, D.G. Piliptsov, R. Bekarevich, A.V. Rogachev, Xiaohong Jiang, E. Kulesh // *Thin Solid Films*. – 2022. – Vol. 755. – Article 139324.

30. *Structure and mechanical properties of Ni and Cr binary doped amorphous carbon coatings deposited by magnetron sputtering and pulse cathodic arc* / Bingbing Zhou, D.G. Piliptsov, X. Jiang, A.V. Rogachev, A.S. Rudenkov, E.A. Kulesh // *Thin Solid Films*. – 2020. – Vol. 701. – Article 137942.

31. *Влияние термообработки на структуру и механические свойства азотированных углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием* / А.С. Руденков, Цзян Сяохун, А.В. Рогачёв // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2025. – № 3 (64). – С. 73–83.

32. *Effects of post-deposition annealing on structure and mechanical properties of multilayer Ti / DLC films* / Zicheng Song, Yiming Liu, Shangzhe Jiang, Xiaohong Jiang, D.G. Piliptsov, A.V. Rogachev // *Diamond and Related Materials*. – 2024. – Vol. 147. – Article 111340.

33. *Структура и свойства а-С:Ti покрытий, осажденных из сепарированных потоков плазмы* / К.А. Саховский, Д.Г. Пилипцов // *ПОЛИКОМТРИБ-2025: Тезисы докладов международной научно-технической конференции, Гомель, 24-27 июня 2025 г.* – Гомель: ИММС НАН Беларуси, 2025. – С. 210.

34. *Features of the Structure and Properties of the ta-C Coatings Deposited from Filtered Flows of the Pulsed Cathodic-Arc Discharge* / Yang Gao, K.A. Sakhovsky, Shangzhe Jiang, S.Y. Chepkasov, Xiaohong Jiang, A.S. Rudenkov, Urol K. Makhmanov, D.G. Piliptsov, A.V. Rogachev // *Eurasian Chemico-Technological Journal*. – 2025. – Vol. 27, № 2. – P. 89–100.

Материалы статьи подготовлены в рамках выполнения задания 4.1.6 (НИР 20212076) и задания 3.1.03 (НИР 20212075)

Поступила в редакцию 01.10.2025.

Информация об авторах

Пилипцов Дмитрий Геннадьевич – д.т.н., доцент

Цзян Сяо Хун – профессор

Рогачёв Александр Владимирович – чл.-корр. НАН Беларуси, д.х.н., профессор

Руденков Александр Сергеевич – к.т.н., доцент

Саховский Кирилл Артурович – аспирант

УДК 535.42

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_14

EDN: ZOXSOSH

ДЕЦЕНТРИРОВАННЫЕ ЦИРКУЛЯРНЫЕ ПУЧКИ КУММЕРА – ГАУССА РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

DECENTERED CIRCULAR KUMMER – GAUSS BEAMS OF VARIOUS TYPES

S.S. Girgel

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Предложены и исследуются аналитические выражения в замкнутой форме для децентрированных циркулярных световых пучков Куммера – Гаусса различных типов. Анализируются различные варианты, включающие как новые типы пучков, так и частные случаи, включающие известные пучки Лагерра – Гаусса. Сформулированы ограничения на свободные параметры, чтобы такие децентрированные пучки Куммера – Гаусса переносили конечную мощность. Графически исследуется влияние различных свободных параметров на картины интенсивности таких пучков.

Ключевые слова: параксиальные пучки, циркулярные пучки, пучки Куммера – Гаусса, децентрированные пучки.

Для цитирования: Гиргель, С.С. Децентрированные циркулярные пучки Куммера – Гаусса различных типов / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 4 (65). – С. 14–19. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_14. – EDN: ZOXSOSH

Abstract. The analytical expressions in closed form are proposed and investigated for various types of decentered circular Kummer – Gauss light beams. Various options are analyzed, including both new types of beams and special cases involving well-known Laguerre – Gauss beams. The constraints on free parameters are formulated so that such decentered Kummer – Gauss beams carry finite power. The influence of various free parameters on the intensity patterns of such beams is investigated graphically.

Keywords: paraxial beams, circular beams, Kummer – Gauss beams, decentered beams.

For citation: Girgel, S.S. Decentered circular Kummer – Gauss beams of various types / S.S. Girgel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 4 (65). – P. 14–19. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_14 (in Russian). – EDN: ZOXSOSH

Введение

Общий подход для изучения циркулярных световых пучков был предложен в [1], [2]. Такие пучки мы будем называть циркулярными пучками Куммера – Гаусса (КГ). Скалярные оптические циркулярные пучки КГ исследовались в [1]–[3]. Обобщение на векторный случай – в [4].

Более общие пучки КГ возникнут, если осуществить комплексное смещение поперечных координат. Авторы [5] называют такого типа пучки смещенными. Мы будем называть такие пучки децентрированными. Децентрированные пучки Бесселя – Гаусса обсуждались в [6], а децентрированные декартовы пучки КГ – в [7].

В настоящей работе будут исследоваться децентрированные циркулярные пучки КГ. Кроме того, будут учитываться возможные различные типы угловой симметрии: $e^{im\varphi}$ и $\cos(m\varphi)$.

1 Децентрированные циркулярные пучки Куммера – Гаусса

Ограничимся обсуждением параксиальных скалярных оптических пучков. Параболическое

нормированное уравнение имеет форму $(\partial_{x,x}^2 + \partial_{y,y}^2 + 4i\partial_z)f = 0$. Здесь $X = x/x_0$,

$Y = y/x_0$, $Z = z/z_0$, $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Параметры x_0 и $z_0 = kx_0^2/2$ – некоторые характерные вещественные размеры пучка в направлениях, параллельных осям OX и OY соответственно.

Согласно [3], [4], комплексную амплитуду параксиального скалярного циркулярного пучка Куммера – Гаусса с цилиндрической симметрией в безразмерной форме можно записать как

$$f = \exp\left(\frac{iR^2}{Q}\right) Q^{-v-m-1} P^v M \times \\ \times \left(-v, m+1, i\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right)\right) R^m f_3(m, \varphi), \quad (1.1)$$

где Q и P – введенные безразмерные комплексные параметры пучка:

$$Q = Z - Q_0, \quad P = Z - P_0, \quad (1.2)$$

причем $Q_0 = Q'_0 + iQ''_0$ и аналогично для P_0 . Здесь и далее штрихами помечаем вещественные и мнимые части различных величин.

Обобщим формулу (1.1) в двух направлениях.

Во-первых, осуществим комплексную децентрировку поперечных координат соотношениями $X_d = X - iX_0$, $Y_d = Y - iY_0$, $\varphi_d = \arctan(X_0, Y_0)$.

Во-вторых, для децентрированных циркулярных пучков КГ азимутальную зависимость $f_2 \equiv R^m f_3(m, \varphi) = R^m \{e^{im\varphi}, \cos m\varphi\}$ представим двояким образом:

$$f_2 = \left\{ (X_d + iY_d)^m, \frac{1}{2} \left((X_d + iY_d)^m + (X_d - iY_d)^m \right) \right\}. \quad (1.3)$$

Комплексная амплитуда децентрированного циркулярного пучка КГ теперь имеет форму $f = f_1 f_2$, где для множителя f_1 достаточно использовать два варианта:

$$f_1 = \left\{ \begin{array}{l} \exp\left(\frac{iR_d^2}{Q}\right) Q^{-v-m-1} P^v M \times \\ \times \left(-v, m+1; i\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right) R_d^2\right), \\ \exp\left(\frac{iR_d^2}{Q}\right) Q^{-v-m-1} M\left(-v, m+1; -\frac{iR_d^2}{Q}\right) \end{array} \right\}. \quad (1.4)$$

В итоге, всё множество циркулярных децентрированных пучков КГ с различными азимутальными зависимостями можно представить в компактном виде, как совокупность четырех типов $f = f_{1k} f_{2j}$, где $k, j = 1, 2$.

2 Исследование влияния свободных параметров на картины интенсивности децентрированных циркулярных пучков КГ

Будем анализировать сначала случай обобщенных циркулярных децентрированных пучков Куммера – Гаусса (*gcdKG*), комплексная амплитуда которых равна

$$f_{gcdKG} = \exp\left(\frac{iR_d^2}{Q}\right) Q^{-v-m-1} P^v \times \\ \times M\left(-v, m+1; i\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right) R_d^2\right) f_2 \quad (2.1)$$

с азимутальной зависимостью $e^{im\varphi}$. Для физической реализуемости пучков, описываемых формулой (2.1), необходима квадратичная интегрируемость (КИ) функций f_{gcdKG} . Последняя осуществляется при следующих ограничениях $\{Q_0'' > 0, P_0'' > 0\}$, налагаемых на свободные параметры. Существенно, что при этом радиальный индекс v может быть произвольным комплексным.

С помощью системы компьютерной математики Mathematica далее будет изучаться влияние различных свободных параметров на ненормированные картины интенсивности *gcdKG* пучков. Для большей наглядности мы изображаем интенсивность в условных единицах в поперечном сечении пучка не плоской, а 3D картиной. В большинстве вариантов будем использовать угловую зависимость в виде $e^{im\varphi}$, если не оговорено обратное. Везде полагаем $Y_0 = 0$, поскольку влияние параметра Y_0 на физические свойства пучка совершенно такое же, как и влияние параметра X_0 . Компьютерное моделирование интенсивности в поперечном сечении *gcdKG* пучков показывает, что, как правило, наблюдается одно кольцо или одно пятно.

Простейший случай, когда $v = 0$. Тогда возникает гауссов пучок с внедренным оптическим вихрем, который уже исследовался.

Интересен вариант, когда $v = iv''$, т. е. радиальный индекс v – чисто мнимый. Такие пучки пока не исследовались. Возьмем, для определенности, следующие значения параметров $\{Q_0'' = 0,02; X_0 = 0; P_0' = Q_0' = 0; m = 0; v' = 0; Z = 0,5; v'' = -4,5\}$ и рассмотрим трансформацию картин интенсивности пучка при вариациях параметра P_0'' (рисунок 2.1).

Видим, что при возрастании параметра P_0'' вокруг центрального пика постепенно возникает кольцо, а центральное пятно пропадает. Так как $m = 0$ и $X_0 = Y_0 = 0$, то картины интенсивности обладают вращательной симметрией вокруг оси пучка *OZ*.

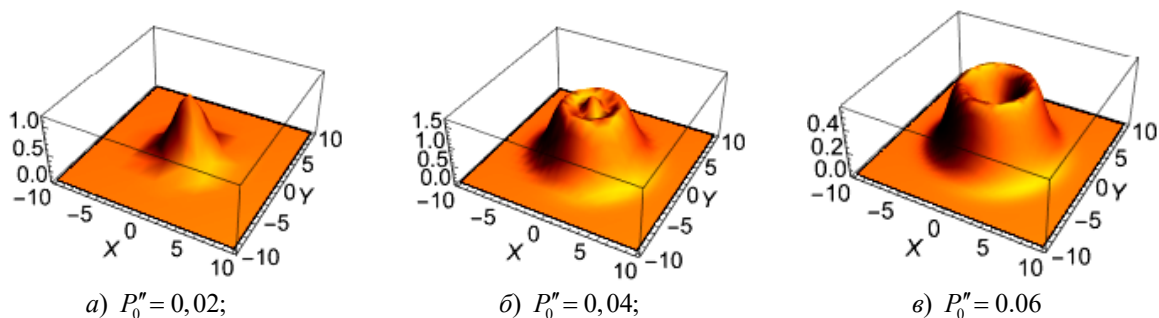


Рисунок 2.1 – Влияние параметра P_0'' на интенсивность *gcdKG* пучка

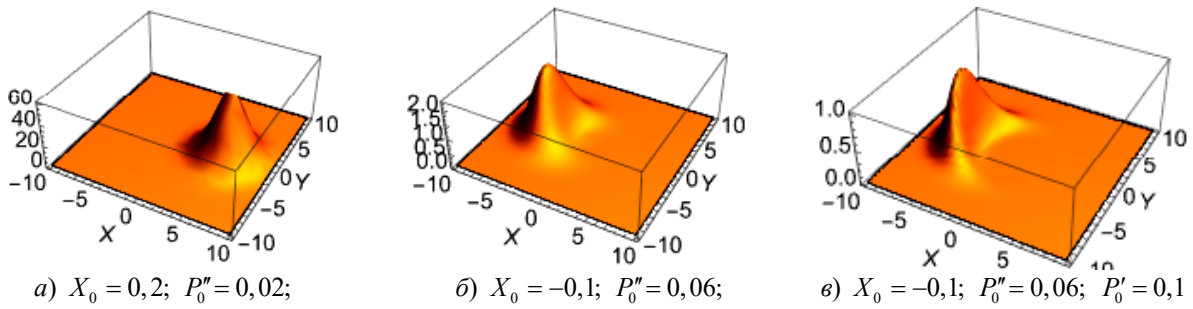


Рисунок 2.2 – Совместное влияние параметров X_0 и P_0'' на интенсивность $gcdKG$ пучка

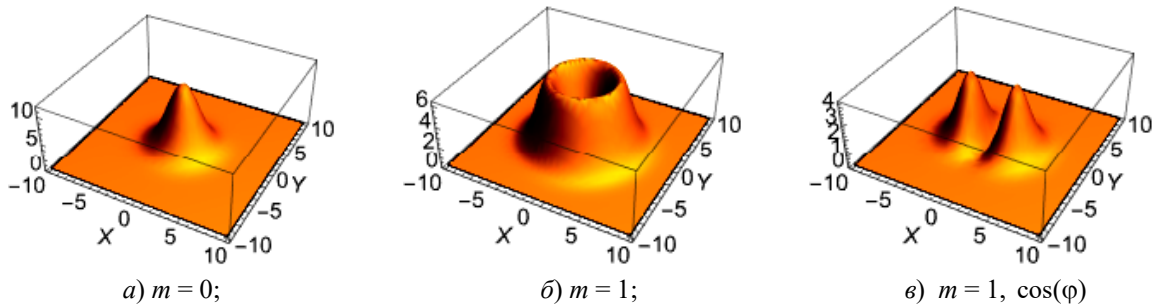


Рисунок 2.3 – Зависимость интенсивности $gcdKG$ пучка от индекса m . Общие параметры: $X_0 = 0; P_0'' = 0,02$

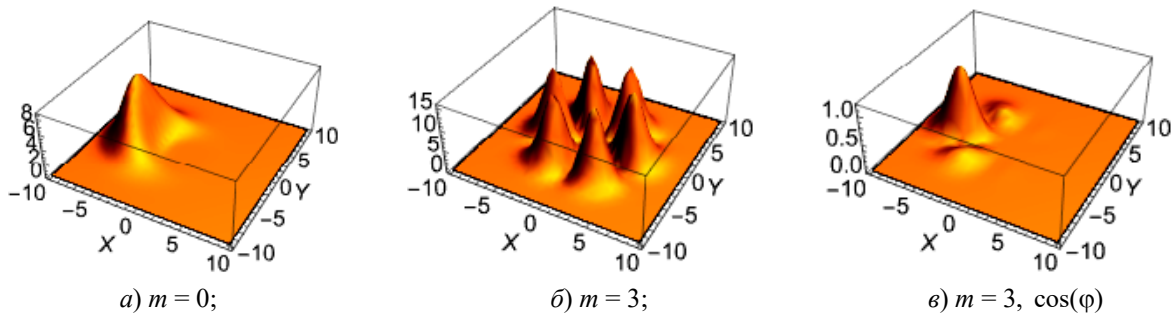


Рисунок 2.4 – Зависимость интенсивности $gcdKG$ пучка от параметров P_0'' и индекса m .
Общие параметры: $X_0 = -0,1; P_0'' = 0,02$

При возрастании параметров ν', Q_0', P_0'', Q_0'' картины интенсивности расширяются и качественно почти не изменяются (рисунки 2.2, 2.3).

Таким образом, децентрировка поперечных координат X и Y качественно видоизменяет картины интенсивности, возникает полумесяц. Иначе, изменение параметра X_0 приводит к сильной деформации и смещению картины вдоль оси OY .

Сейчас будем менять угловой индекс m . Если $m = 1, 2, \dots$, то вместо пика имеем кольцеобразную картину.

Картины рисунка 2.4, б) аналогичны картинам стандартных пучков Лагерра – Гаусса. Подчеркнем, однако, что здесь радиальный параметр ν не целочисленный, а чисто мнимый нецелый. Замена азимутального множителя $e^{im\varphi}$ на $\cos m\varphi$ качественно изменяет картины интенсивности (рисунки 2.4, в).

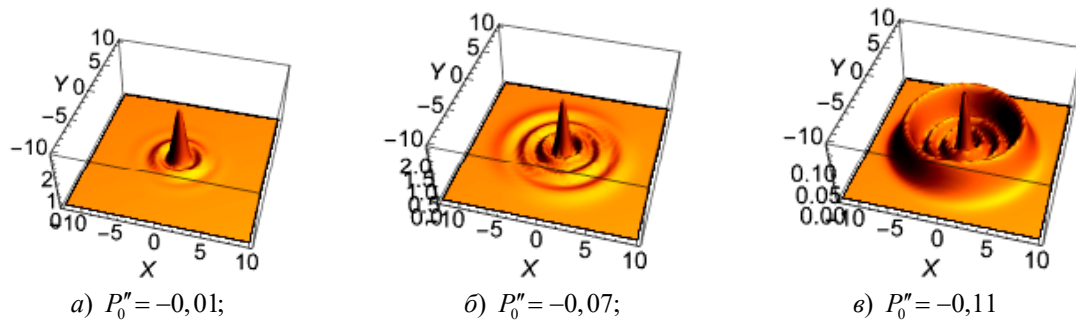
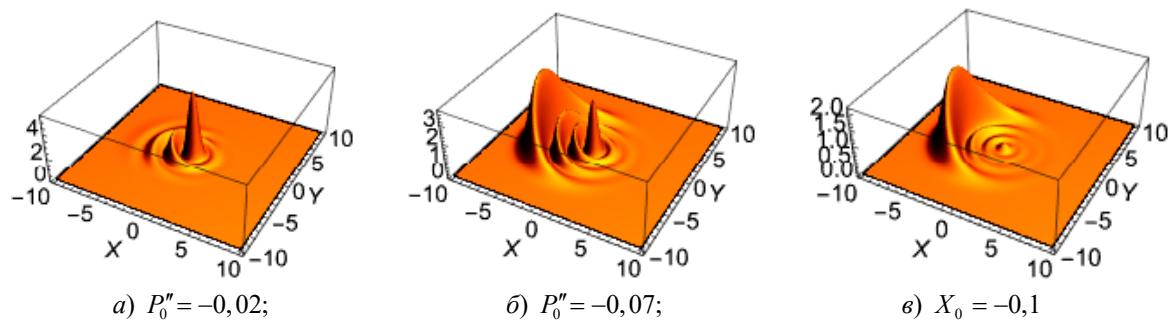
2. Будем анализировать теперь случай $gcdKG$ пучков, у которых комплексная амплитуда

$$f_{gcdKG} = \exp\left(\frac{iR_d^2}{Q}\right) Q^{-n-m-1} P^\nu \times \\ \times M\left(-n, m+1; i\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right) R_d^2\right) f_2. \quad (2.2)$$

Здесь, по-прежнему, $Q_0'' > 0_0$, однако $\nu \equiv n = 0, 1, 2, \dots$, а мнимая часть P_0'' второго комплексного параметра пучка P может принимать любые значения, исключая $P'' = 0$.

Если теперь исключить децентрировку поперечных координат, то приходим к обобщенным пучкам Лагерра – Гаусса, по терминологии [1], [2].

2.1. Пусть $P_0'' < 0$. Такие пучки для произвольных $P_0'' < 0$ пока еще не исследовались.


 Рисунок 2.5 – Влияние параметра P_0'' на интенсивность $gcdKG$ пучка

 Рисунок 2.6 – Влияние параметров P_0'' и X_0 на интенсивность $gcdKG$ пучка. Постоянный параметр $X_0 = -0,1$

В качестве примера рассмотрим пучки с параметрами $\{Z = 0,7; m = 0; n = 3; Q_0'' = 0,8; Q_0' = P_0' = 0\}$. При $P_0'' = -0,01$ наблюдается яркий центральный пик и практически одно кольцо. При последующем убывании параметра P_0'' постепенно появляются еще три кольца. В дальнейшем самое широкое кольцо относительно растет, а остальные уменьшаются. Децентрировка и приводит к деформации и смещению картины интенсивности вдоль оси OY (рисунок 2.6).

2.2. При $P_0'' = -Q_0''$ приходим фактически к стандартным пучкам Лагерра – Гаусса. Для конкретности возьмём первоначальные параметры $\{Z = 0,7; X_0 = 0; m = 1; n = 3; Q_0'' = 0,8; P_0'' = -0,8; Q_0' = P_0' = 0\}$. При этом кольца интенсивности наиболее четкие. При дальнейшем убывании параметра P_0'' центральное кольцо продолжает возрастать, а остальные постепенно уменьшаются.

При увеличении параметров $|Z|$, $|Q_0'|$, $|P_0'|$, наоборот, центральное кольцо уменьшается, а остальные относительно растут.

Теперь проанализируем влияние мнимых децентрировок X_0 и Y_0 поперечных координат на картины интенсивности рассматриваемых $gcdKG$ пучков. При росте $|X_0|$ (либо $|Y_0|$) картины интенсивности сплющиваются вдоль оси OY (либо OX). Если же $(X_0 \neq 0, Y_0 \neq 0)$, то наблюдается пятно эллипсовидной формы.

Если азимутальный параметр $m = 0$, то наблюдаются аналогичные закономерности. Только вместо центрального кольца выступает центральный пик (яркое пятно).

3. Теперь обсудим случай, когда $Q_0'' > 0$, $|P_0''| \rightarrow \infty$, а параметр $v = v' + iv''$ – комплексный. Здесь параметр пучка P отсутствует. Получаем циркулярные децентрированные элегантные Куммера – Гаусса ($cdeKG$) пучки

$$f_{cdeKG} = \exp\left(\frac{iR_d^2}{Q}\right) Q^{-v-m-1} \times \\ \times M\left(-v, m+1; \frac{-iR_d^2}{Q}\right) f_2. \quad (2.3)$$

Если свободный комплексный параметр v удовлетворяет условию [1] $v' > -(1+m)/2$, тогда функция f_{cdeKG} обладает КИ. Отметим, что это – новый тип пучков, который не фигурирует в работах [1], [2]. Здесь, если параметр v становится вещественным, тогда пучки (2.3) редуцируются к децентрированным элегантным фракционным пучкам Лагерра – Гаусса ($defLG$) [8]. Если дополнительно $v \equiv n = 0, 1, 2, \dots$, то мы приходим к обычным децентрированным элегантным пучкам Лагерра – Гаусса, введенным Сигмэном ($deLG$) [9].

Обсудим теперь влияние различных свободных параметров на картины интенсивности $cdeKG$ пучков. Пусть $v' > -(1+m)/2$.

Если $m=1$, тогда $\nu' = -0.9$ удовлетворяет условию КИ (1.11). Этот вариант характеризует не *eKG* пучки и даже не *defLG*, а новый тип пучков ЛГ. Существенно, что здесь фигурируют не полиномы Лагерра, а функции Лагерра с непрерывным комплексным индексом ν .

В простейшем случае $Z=0$, $X_0=0$, $Q'_0=0$. Возьмем параметр $Q''_0=0.8$, чтобы выполнялось условие физической реализуемости пучка. Тогда картина интенсивности представляет собой простое кольцо. При возрастании параметра $|\nu''|$ кольцо расширяется.

Если $Z \neq 0$, то образуется множество колец (рисунок 2.7). При возникновении децентровки $X_0 \neq 0$; с ее увеличением край кольца в области $Y > 0$ начинает постепенно убывать и картина кольца последовательно трансформируется в картину пика (максимума). При убывании параметра $|X_0|$ эти процессы происходят в обратном направлении.

Еще интереснее ситуация, когда Q''_0 мало (рисунок 2.8). Например, возьмем параметры $\{\nu' = -0.9; \nu'' = 0; Q''_0 = 0.02; X_0 = 0; Q'_0 = 0; m = 0\}$. Тогда картины интенсивности представляют собой бесконечное множество колец.

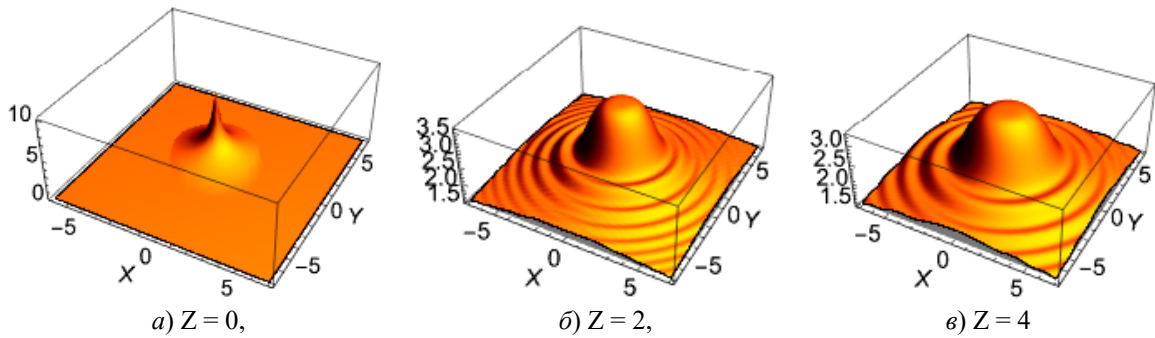


Рисунок 2.7 – Зависимость интенсивности *cdeKG* пучка от параметров P''_0 и индекса m .

Общие параметры: $X_0 = -0.1; P''_0 = 0.02; Q''_0 = 0.02$

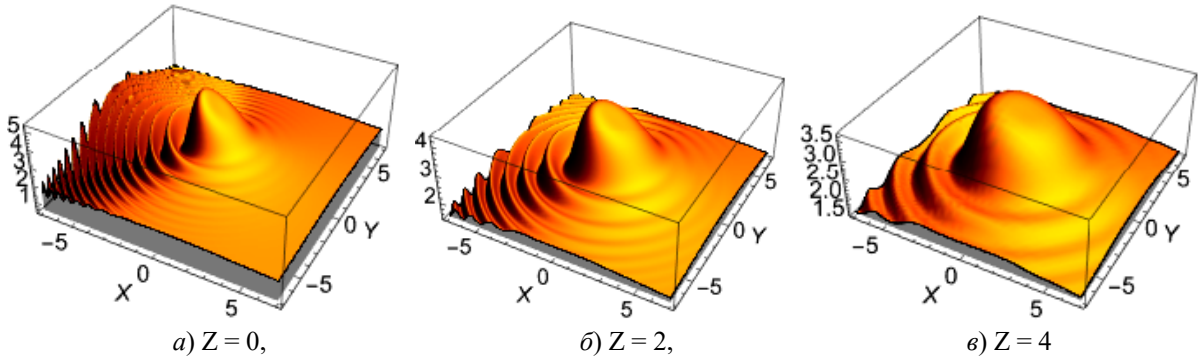


Рисунок 2.8 – Зависимость интенсивности *cdeKG* пучка от параметров P''_0 и индекса m .

Общие параметры: $\nu' = -0.9; \nu'' = 0; Q''_0 = 0.02; Y_0 = 0; Q'_0 = 0; m = 0; X_0 = -0.4$

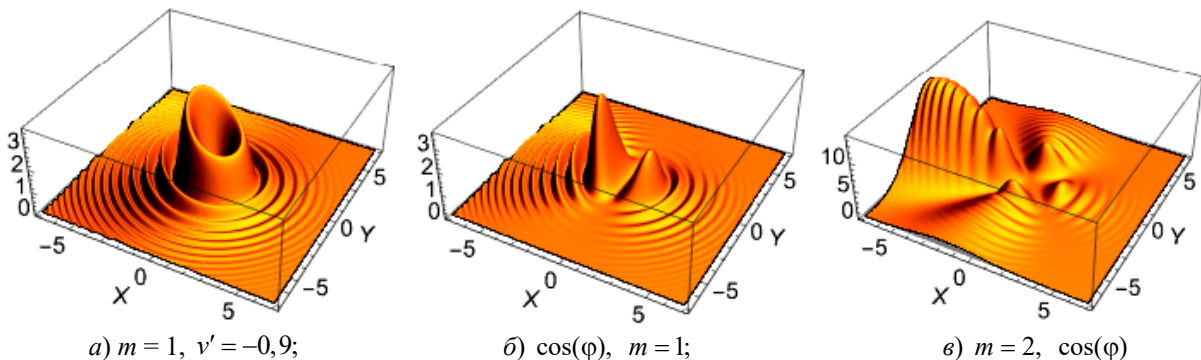


Рисунок 2.9 – Зависимость интенсивности *cdeKG* пучка от параметров P''_0 и индекса m .

Общие параметры: $\nu' = -0.9; \nu'' = 0; Q''_0 = 0.02; Q'_0 = 0; Z=1; X_0 = -0.1$

Совершенно необычная картина интенсивности, изображенная на рисунке 2.9, в). Она обусловлена совместным влиянием двух факторов: $m \neq 0$, $X_0 \neq 0$.

Итак, на рисунках 2.7–2.9 представлены некоторые характерные результаты графического моделирования интенсивности для пучков КГ. Картины интенсивности в поперечном сечении исследуемых световых пучков представляют собой кольца. Хотя число колец бесконечно, мощность пучка конечна. Однако чаще всего видно одно или несколько колец. Остальные кольца не видны из-за их слабой интенсивности. Кольца хорошо наблюдаются, если параметр v' близок к $(v')_{\min}$, а Q_0'' мало. При $m \neq 0$ изменение параметра v'' слабо влияет на картину. Последняя качественно не изменяется.

Заключение

В данной работе выведены выражения, описывающие практически не изучавшиеся типы пучков – параксиальные децентрированные циркулярные световые пучки КГ различных типов, переносящие конечную мощность и поэтому физически реализуемые. Они характеризуются шестью свободными параметрами: тремя вещественными – (m, X_0, Y_0) и тремя комплексными параметрами (Q_0, P_0, v) .

Сформулированы условия физической реализуемости циркулярных параксиальных пучков КГ с переносимой конечной мощностью во всем пространстве. Выполнено графическое моделирование их интенсивности для целочисленных значений m , непрерывных вещественных параметров X_0, Y_0 и для непрерывных комплексных значений параметров Q_0, P_0, v . Проведен соответствующий анализ. Установлено, что выбор различных свободных параметров пучка приводит к качественно различным физическим картинам. Картины интенсивности – самые разнообразные. Множество свободных параметров позволяет варьировать в широких пределах физические свойства исследуемых пучков и, тем самым, расширяет возможности выбора пучков с наперед заданными свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bandres, M.A. Circular beams / Miguel A. Bandres, Julio C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2008. – Vol. 33, № 2. – P. 177–179.
2. Bandres, M.A. Higher-order moments and overlaps of rotationally symmetric beams / M.A. Bandres, D. Lopez-Mago, J.C. Gutierrez-Vega // Journal of Optics. – 2010. – Vol. 12. – P. 015706.
3. Гиргель, С.С. Циркулярные 3D световые пучки Куммера – Гаусса с непрерывным угловым индексом / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 1 (38). – С. 16–20.
4. Гиргель, С.С. Векторные циркулярные параксиальные пучки Куммера – Гаусса. Поляризация и энергетические свойства / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 7–11.
5. Ковалёв, А.А. Пучки Лагерра – Гаусса с комплексным смещением / А.А. Ковалёв, В.В. Котляр, С.Г. Засканов, Д.С. Калинкина // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 40, № 1. – С. 5–11.
6. Гиргель, С.С. Обобщенные асимметричные волновые пучки Бесселя – Гаусса непрерывного порядка / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 2 (31). – С. 10–14.
7. Гиргель, С.С. Децентрированные пучки Куммера – Гаусса / С.С. Гиргель // Известия Гомельского госуниверситета имени Ф. Скорины. – 2015. – № 6 (93). – 112–116
8. Gutierrez-Vega, J.C. Fractionalization of optical beams: II. Elegant Laguerre-Gaussian modes / J.C. Gutierrez-Vega // Optics Express. – 2007. – Vol. 15, iss. 10. – P. 6300–6313.
9. Siegman, A.E. Hermite-gaussian function of complex argument as optical-beam eigenfunction / A.E. Siegman // JOSA. – 1973. – Vol. 63, № 9. – P. 1093–1094.

Поступила в редакцию 29.08.2025.

Информация об авторах

Гиргель Сергей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ МАТЕРИАЛОВ С ИЗМЕНЯЕМЫМИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ ДЛЯ ПЕРЕСТРОЙКИ ХАРАКТЕРИСТИК РАССЕЯНИЯ ОПТИЧЕСКОГО И СВЕРХВЫСОКОЧАСТОТНОГО ПОЛЕЙ

Л.А. Калоша, Л.С. Гайда, Д.В. Заерко

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

MODELING OF SYSTEMS BASED ON MATERIALS WITH VARIABLE DIELECTRIC PARAMETERS FOR RECONSTRUCTING THE SCATTERING CHARACTERISTICS OF OPTICAL AND MICROWAVE FIELDS

L.A. Kalosha, L.S. Gaida, D.V. Zaerko

Yanka Kupala State University of Grodno

Аннотация. Представлены результаты исследования влияния изменения диэлектрической проницаемости диэлектрических включений в сложно структурированных средах на их рассеивающие свойства в оптическом и СВЧ-диапазонах. Приведены зависимости коэффициентов прохождения и отражения электромагнитного поля от диэлектрической проницаемости материала, геометрических размеров элементов и частоты оптического и СВЧ-полей. Проведен анализ выявленных зависимостей и определены требования к диэлектрическим и геометрическим параметрам составляющих структур для обеспечения изменения коэффициентов прохождения и отражения по частоте и значению.

Ключевые слова: СВЧ-излучение, периодическая структура, полимеры, коэффициент диэлектрической проницаемости, коэффициенты прохождения и отражения.

Для цитирования: Калоша, Л.А. Моделирование систем на основе материалов с изменяемыми диэлектрическими параметрами для перестройки характеристик рассеяния оптического и сверхвысокочастотного полей / Л.А. Калоша, Л.С. Гайда, Д.В. Заерко // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 4 (65). – С. 20–28. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_20. – EDN: ZRJSZY

Abstract. The results of the study of the influence of changes in the permittivity coefficient of dielectric inclusions in complexly structured medium on their scattering properties in the optical and microwave ranges are presented. The dependences of the transmission and reflection coefficients of the electromagnetic field on the dielectric constant of the material, the geometric dimensions of the elements and the frequency of the optical and microwave fields are given. An analysis of the identified dependencies was carried out and requirements for the dielectric and geometric parameters of the constituent structures were determined to ensure changes in the transmission and reflection coefficients by frequency and value.

Keywords: microwave radiation, periodic structure, polymers, permittivity coefficient, transmission and reflection coefficients.

For citation: Kalosha, L.A. Modeling of systems based on materials with variable dielectric parameters for reconstructing the scattering characteristics of optical and microwave fields / L.A. Kalosha, L.S. Gaida, D.V. Zaerko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 4 (65). – P. 20–28. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_20 (in Russian). – EDN: ZRJSZY

Введение

Получение материалов с изменяемыми физическими параметрами является одним из актуальных направлений в создании перестраиваемых технических устройств. Одним из способов изменения физических параметров материалов и систем является воздействие электромагнитных полей. При этом в сложно структурированных средах это позволяет эффективно использовать как свойства компонентов в отдельности, так и взаимосвязи их внутри системы. Разработка способов управления свойствами материалов является актуальной задачей, обеспечивающей совершенствование устройств микроволнового и оптического диапазонов [1].

Существуют следующие технологии управления свойствами материалов и систем, получившие наибольшее распространение: механические, магнитные, электрические, оптические, термические. При этом каждая из них имеет свои ограничения и сложности в применении, такие как: сложность реализации однородности магнитного поля в большом объеме или подмагничивающих элементов, высокие управляющие напряжения, малая скорость перестройки, нестабильность по температуре, большое энергопотребление, сложность конструктивной реализации управляющих устройств, высокие стоимость и сложность конструктивных решений, низкая стойкость к механическим воздействиям,

ограниченное количество переключений, дребезг контактов, существование механических резонансов и т. д.

Управление свойствами материалов с использованием электрического поля является одним из наиболее перспективных вследствие наименьшего количества недостатков. Данная технология подразумевает использование материалов, обладающих изменяемыми параметрами в условиях воздействия электрических полей различных частотных диапазонов. Примером таких материалов могут быть материалы с дисперсией диэлектрической проницаемости, возникающей при помещении их в поля различной напряженности при определенных температуре, давлении и т. д. [2], [3].

Однако для такой технологии при изменении свойств материалов характерно применение постоянных или переменных полей очень высокой напряженности, что вызывает сложности в технической реализации. Вследствие вышеупомянутого, разработка новых и усовершенствование существующих технологий управления является актуальной задачей, решение которой позволит улучшить параметры энергопотребления, быстродействия, эффективности, универсальности и безопасности систем электродинамики.

Проблему реализации управления электрическими полями высокой напряженности можно решить использованием явления резонанса, позволяющего уменьшить значения напряженности для изменения параметров материалов и систем. Так же это позволит упростить реализацию электрической технологии управления, сделав ее энергетически более эффективной.

Вопрос выбора материала и систем, для которых можно реализовать резонансное изменение диэлектрической проницаемости, является актуальной задачей. Материалы, проявляющие поляризационные свойства за счет изменения внутренней структуры при воздействии внешнего электрического поля, являются перспективными при разработке новых методов управления электромагнитными параметрами систем. В качестве примера таких материалов можно привести сегнетоэлектрики со значениями диэлектрической проницаемости свыше 100, обладающие доменной структурой и имеющие дисперсию диэлектрической проницаемости в электрических полях мегагерцового диапазона [1]–[4]. В то же время актуальна проблема создания материалов с более низкими значениями диэлектрической проницаемости и способов управления их параметрами.

В работе представлены результаты исследования взаимодействия электромагнитного поля СВЧ и оптического диапазонов со структурами из элементов с изменяемой диэлектрической проницаемостью. Перспективным является использование композитных материалов на основе

полимеров. Данные материалы характеризуются значениями диэлектрической проницаемости от 2 до 120, а также обладают низким значением коэффициента поглощения для электромагнитного поля сверхвысокочастотного и оптического диапазонов.

Рассматривается возможность применения резонансного управления свойствами материалов для изменения характеристик рассеяния излучения СВЧ-диапазона на структурах с элементами из высокодобротного полимера [5]. Объектом исследования являются структуры на основе включений из материалов с перестраиваемой диэлектрической проницаемостью. Предметом исследования является влияние изменения диэлектрической проницаемости композитных полимерных включений периодических структур, а также геометрических размеров их компонентов на коэффициенты прохождения и отражения СВЧ-поля.

1 Выбор материалов и методика построения периодических структур

Для проведения исследования взаимодействия электромагнитного излучения со структурированной средой методами численного моделирования была выбрана решетка, состоящая из металлических лент с диэлектрическими вставками между ними. Диэлектрик размещается в зазорах между металлическими проводниками, расположенными параллельно друг другу. Величина зазора между металлическими проводниками соответствует размеру диэлектрической вставки (рисунок 1.1). Пространство между рядами проводников и диэлектрических включений заполнено материалом с диэлектрической ϵ и магнитной μ проницаемостями равными единице, и не имеющим частотной дисперсии данных параметров во всем рассматриваемом частотном диапазоне (воздушная прослойка).

Оценивалось влияние геометрических размеров элементов решетки, диэлектрической проницаемости и добротности диэлектрических вставок на коэффициенты прохождения и отражения электромагнитного поля.

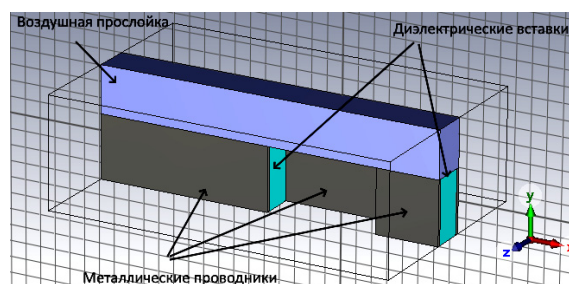


Рисунок 1.1 – Модель фрагмента решетки

В случае значений диэлектрической проницаемости элементов решетки от 550 и выше

возникает большое количество собственных резонансов. Это обуславливает наличие резкого изменения коэффициентов прохождения и отражения поля от 0,01 до 80 дБ во всем рассматриваемом частотном диапазоне (1–10 ГГц), однако количество экстремумов коэффициентов и близость их расположения по частоте затрудняет реализацию управления рассеянием поля на решетках с указанными параметрами [6].

Более низкие значения диэлектрической проницаемости материала позволяют уменьшить количество собственных резонансов. При этом сохраняется возможность управления коэффициентами прохождения и отражения в широком диапазоне значений.

2 Моделирование взаимодействия излучения СВЧ и оптического диапазонов с периодическими решетками из металлических и диэлектрических элементов

Для создания модели периодической решетки взяты структуры на основе проводящих лент. Такие решетки удобны для оценки влияния конструктивных и материальных характеристик вследствие известной постановки задачи дифракции электромагнитного поля и ее решения [7], [8].

Численный эксперимент проводился с помощью программного продукта CST MICROWAVE STUDIO, который позволяет выполнять

математическое моделирование высокочастотных устройств и рассеяние электромагнитного излучения на объектах сложной формы и структуры.

В ходе проведения численного моделирования варьировались следующие геометрические параметры элементов: длина, ширина, высота диэлектрических включений и металлических фрагментов в виде лент; расстояние между рядами лент (период решетки), диэлектрическая проницаемость материала. Значение тангенса диэлектрических потерь не превышало 10^{-3} . Рассматривался только случай нормального падения плоской электромагнитной волны на периодическую решетку. Направление распространения электромагнитного поля вдоль оси Z , а его электрической компоненты вдоль оси X . Используемый диапазон частот от 7 до 12 ГГц. Анализируются значения коэффициентов прохождения и отражения электромагнитного поля для ТЕ и ТМ гармоник.

Для выбора оптимальных размеров металлических лент было проведено моделирование структуры с длинами лент в диапазоне от 15 до 30 мм. Остальные параметры не изменялись и равнялись: диэлектрическая проницаемость 25; длина, ширина, высота диэлектрической вставки 4 мм; период по оси Y 15 мм. Коэффициенты прохождения и отражения для ТЕ и ТМ гармоник представлены на рисунках 2.1–2.2.

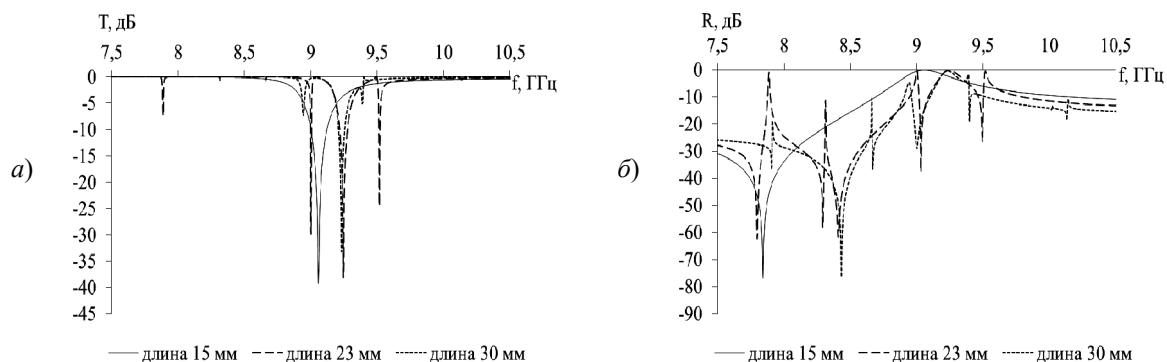


Рисунок 2.1 – Коэффициенты прохождения (а) и отражения (б) для ТЕ гармоник при различных значениях длины ленты

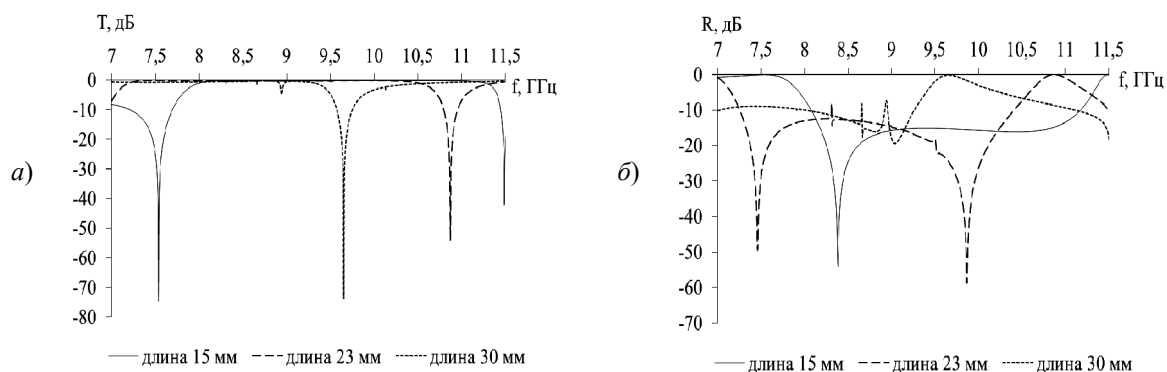


Рисунок 2.2 – Коэффициенты прохождения (а) и отражения (б) для ТМ гармоник при различных значениях длины ленты

Для ТЕ гармоники при увеличении длины характерно наличие нескольких минимумов в пределах 0,5 ГГц. При этом для всех значений длины минимальные значения наблюдаются в районе частоты 9–9,5 ГГц. Для ТМ гармоники расстояние между минимумами порядка 2,5–3 ГГц, при этом они разнесены по частотному диапазону. Коэффициент отражения принимает максимальные значения на частотах, соответствующих минимальным значениям коэффициента прохождения и принимает значения -75 – -65 дБ для ТЕ гармоники и до -60 дБ для ТМ гармоники.

Изменение коэффициента отражения обусловлено наличием резонансного характера взаимодействия электромагнитного поля с решеткой. Наблюдаемые закономерности изменения коэффициентов отражения и прохождения позволяют определить частоты, на которых решетка максимально чувствительна к изменению диэлектрической проницаемости элементов.

Исходя из результатов, была выбрана длина лент 15 мм, для которой наблюдался один минимум коэффициента прохождения в диапазоне 7,5–10 ГГц.

Изменение расстояния между лентами по оси Y (периода) также оказывает влияние на картину рассеяния (рисунки 2.3, 2.4).

Оптимальным расстоянием между лентами для дальнейшего моделирования выбрано 15 мм, так как увеличение периода сопровождается изменением частоты наблюдения минимума в сторону более высоких частот и появлением дополнительных экстремумов.

Исследование влияния изменения длины диэлектрической вставки (вдоль оси x) проводилось при следующих постоянных параметрах: диэлектрическая проницаемость 20; ширина и высота диэлектрической вставки 4 мм; период по оси Y 15 мм, длина металлических лент 15 мм. Коэффициенты прохождения и отражения для ТЕ и ТМ гармоник представлены на рисунках 2.5, 2.6.

Изменение длины диэлектрических вставок влияет на частоту наблюдения минимумов коэффициента прохождения. При этом для ТЕ гармоники увеличение длины приводит к сдвигу минимума в сторону более низких частот, с 11,3 ГГц для 2 мм до 8,1 ГГц для 15 мм. Для ТМ гармоники разброс по частоте присутствует, но зависимость уже не такая однозначная как для ТЕ гармоники. Глубина минимумов коэффициента прохождения для ТЕ гармоники составляет от -50 до -35 дБ, а для ТМ гармоники от -50 до -30 дБ. В обоих случаях коэффициент отражения максимален при минимальном коэффициенте прохождения и принимает значения до -60 дБ.

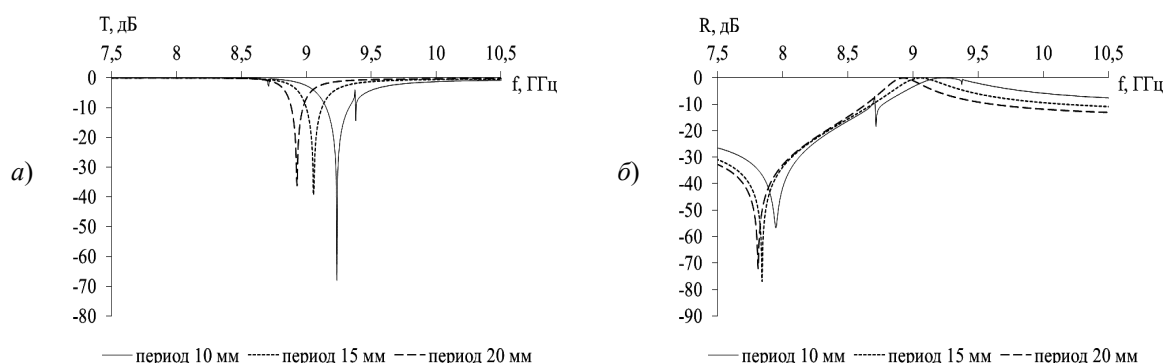


Рисунок 2.3 – Коэффициенты прохождения (а) и отражения (б) для ТЕ гармоники при различных значениях периода вдоль оси Y

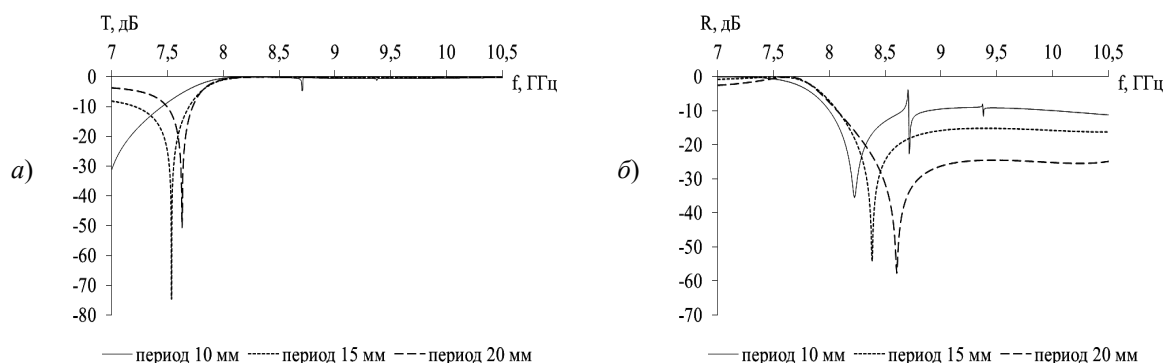


Рисунок 2.4 – Коэффициенты прохождения (а) и отражения (б) для ТМ гармоники при различных значениях периода вдоль оси Y

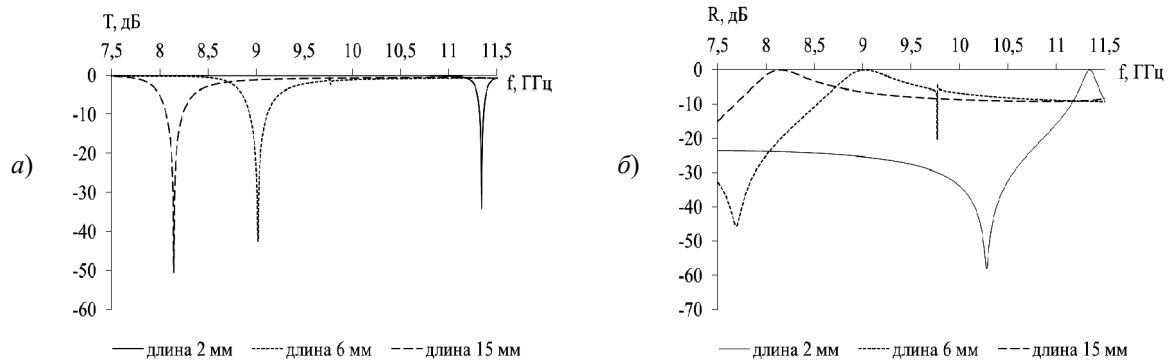


Рисунок 2.5 – Коэффициенты прохождения (а) и отражения (б) для ТЕ гармоника при различных значениях длины диэлектрических вставок

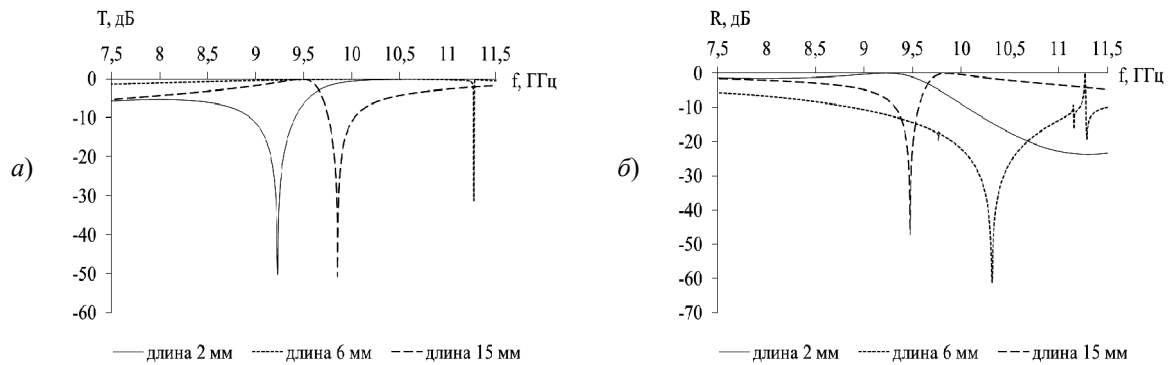


Рисунок 2.6 – Коэффициенты прохождения (а) и отражения (б) для ТМ гармоника при различных значениях длины диэлектрических вставок

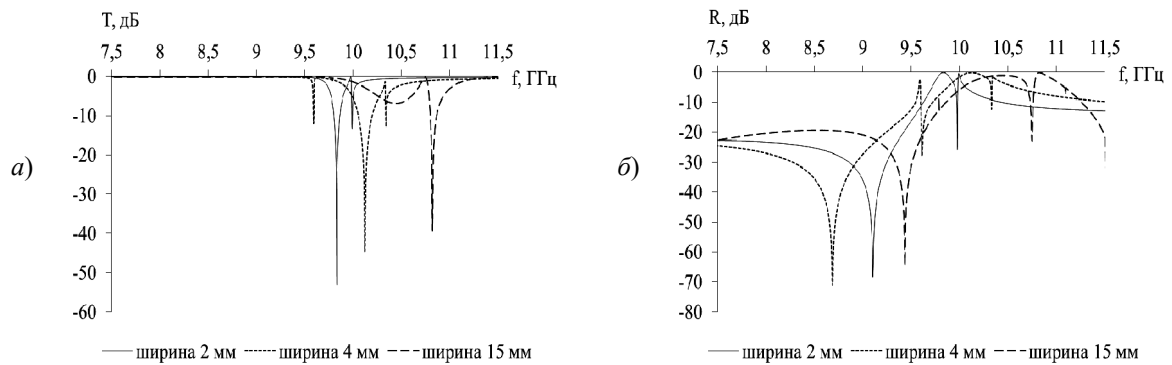


Рисунок 2.7 – Коэффициенты прохождения (а) и отражения (б) для ТЕ гармоника при различных значениях ширины диэлектрических вставок

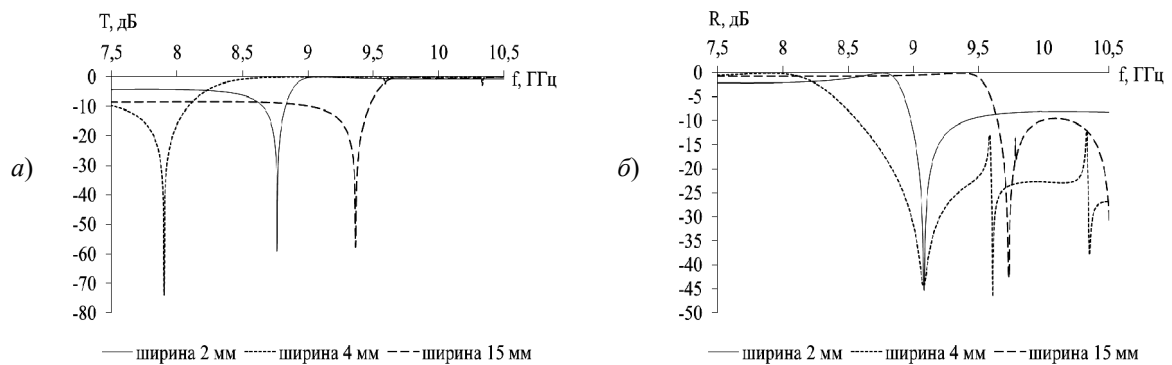


Рисунок 2.8 – Коэффициенты прохождения (а) и отражения (б) для ТМ гармоника при различных значениях ширины диэлектрических вставок

Варьирование ширины диэлектрической вставки (вдоль оси Z) осуществлялось при сохранении следующих значений параметров структуры: диэлектрическая проницаемость 20; длина и высота диэлектрической вставки 4 мм; период по оси Y 15 мм, длина металлических лент 15 мм. Коэффициенты прохождения и отражения для ТЕ и ТМ гармоник представлены на рисунках 2.7, 2.8.

При изменении ширины диэлектрических элементов решетки, а, следовательно, и расстояния между металлическими лентами, для ТЕ гармоники также наблюдается сдвиг максимумов по частоте, только в сторону более высоких частот с 9,8 ГГц до 10,8 ГГц. Для ТМ гармоники сдвиг по частоте присутствует, но максимумы находятся как на более низких, так и на более высоких частотах по сравнению с частотой для ширины, равной 2 мм. Глубина минимума принимает значения от -53 до -40 для ТЕ гармоники и от -75 до -60 для ТМ гармоники. В обоих случаях наблюдается соответствие максимальных значений коэффициента отражения на частотах минимальных значений коэффициента прохождения. Для ТЕ гармоники значение коэффициента отражения до -70 дБ, а для ТМ – до -45 дБ.

Изменение высоты диэлектрических вставок (вдоль оси Y), а, следовательно, и высоты

лент, также оказывает влияние на расположение и глубину минимумов коэффициента прохождения (рисунки 2.9, 2.10).

Коэффициент прохождения для ТЕ гармоники сдвигается по частоте как в сторону более низких, так и более высоких частот. Также наблюдаются дополнительные минимумы вблизи основных максимумов для высоты элементов 10 мм. Для ТМ гармоники в данном случае однозначно можно видеть сдвиг минимумов в сторону более низких частот. При этом дополнительные минимумы вблизи основных максимумов отсутствуют. Изменение коэффициента прохождения находится в диапазоне до -45 – -30 дБ для ТЕ гармоники и -75 – -70 для ТМ гармоники. Коэффициент отражения для ТЕ гармоники не менее -70 дБ, а для ТМ – до -60 дБ.

Исходя из вышеприведенного, для дальнейшего исследования влияния изменения диэлектрической проницаемости материалов на рассеяние электромагнитного излучения были выбраны следующие габаритные размеры периодической структуры: длина лент 15 мм, период по оси Y 15 мм, длина, ширина, высота диэлектрического элемента 4 мм.

Рассматривалось влияние изменения диэлектрической проницаемости элементов решетки с 2 до 140 на картину рассеивания.

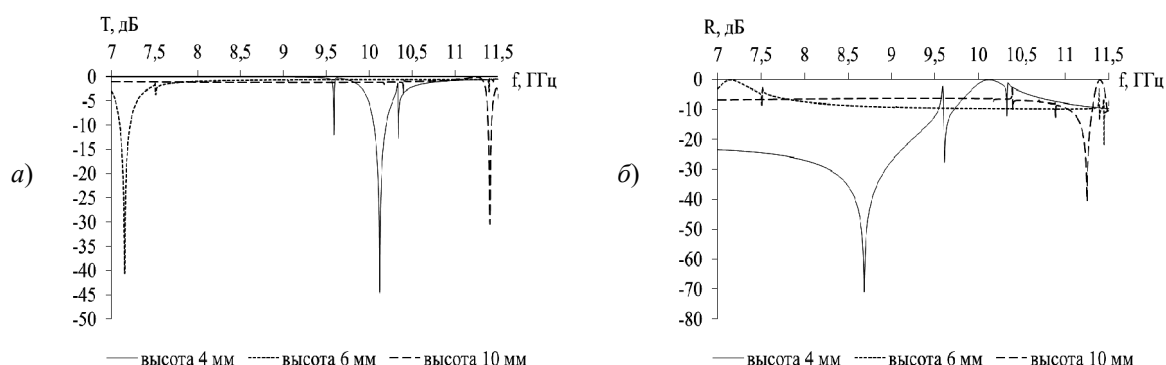


Рисунок 2.9 – Коэффициенты прохождения (а) и отражения (б) для ТЕ гармоники при различных значениях высоты диэлектрических вставок

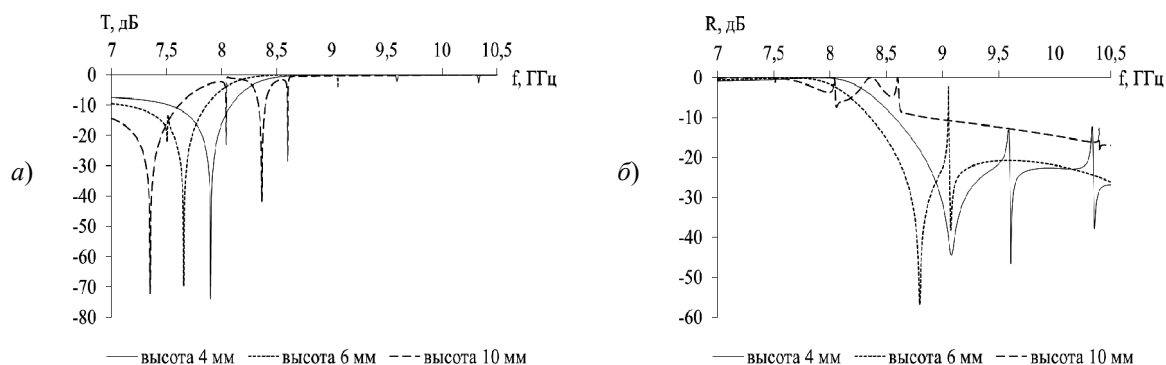


Рисунок 2.10 – Коэффициенты прохождения (а) и отражения (б) для ТМ гармоники при различных значениях высоты диэлектрических вставок

Изменение диэлектрической проницаемости от 2 до 10 для ТЕ гармоник не приводит к появлению минимумов коэффициента прохождения. Его значения не опускаются ниже -1 дБ. При этом для ТМ гармоник при диэлектрической проницаемости равной 2, коэффициент прохождения плавно изменяется от -8 дБ до $-0,2$ дБ на частотах от 7 до 9,5 ГГц, и затем остается постоянным. Для диэлектрической проницаемости 5 и 10 наблюдаются минимумы коэффициента прохождения на частотах 7,6 ГГц и 8,5 ГГц соответственно.

Зависимости коэффициентов прохождения и отражения от частоты для значений диэлектрической проницаемости 2, 20 и 40 для ТЕ гармоник и 10, 20, 30 для ТМ гармоник приведены на рисунках 2.11, 2.12.

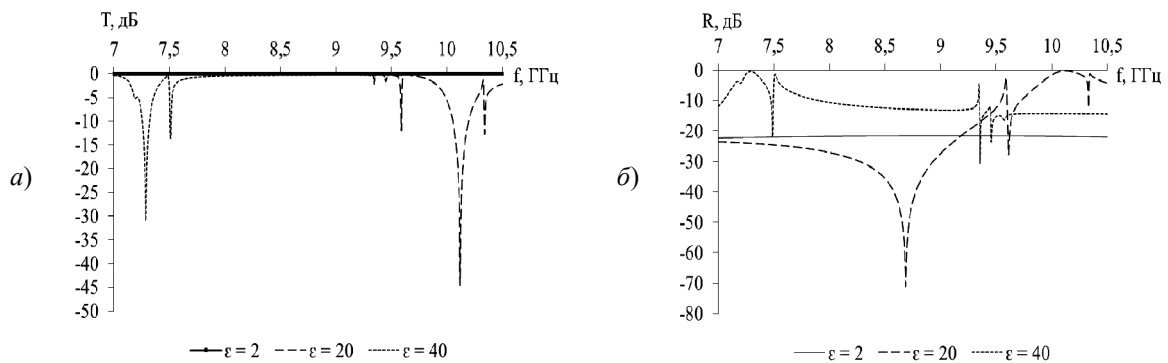


Рисунок 2.11 – Коэффициенты прохождения (а) и отражения (б) для ТЕ гармоник при различных значениях диэлектрической проницаемости вставок

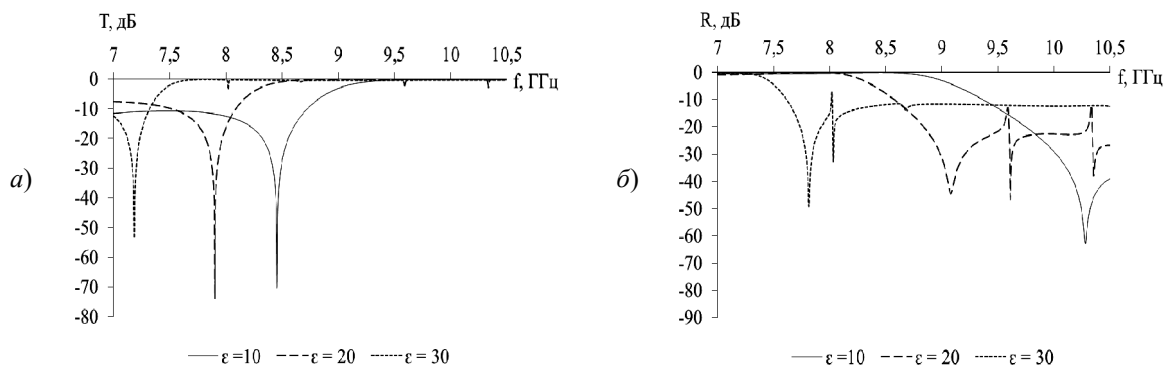


Рисунок 2.12 – Коэффициенты прохождения (а) и отражения (б) для ТМ гармоник при различных значениях диэлектрической проницаемости вставок

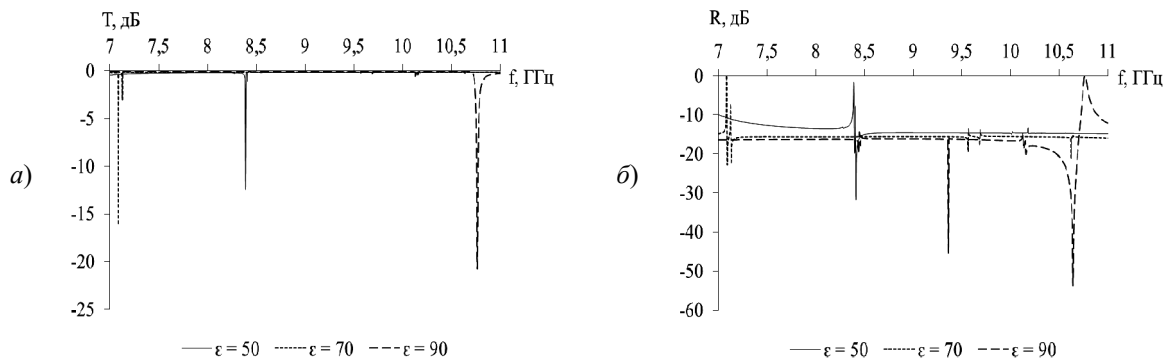


Рисунок 2.13 – Коэффициенты прохождения (а) и отражения (б) для ТЕ гармоник при значениях диэлектрической проницаемости вставок 50, 70, 90

Изменение значений диэлектрической проницаемости приводит к появлению минимумов коэффициентов прохождения для ТЕ и ТМ гармоник. При этом минимумы наблюдаются на различных частотах. Коэффициент отражения имеет максимальное значение на частотах наблюдения минимумов прошедшего поля. Минимальные значения коэффициента отражения -70 дБ для ТЕ гармоник, и -60 дБ для ТМ гармоник.

При увеличении диэлектрической проницаемости до 90 для ТЕ гармоник наблюдается резко выраженный один минимум коэффициента прохождения (рисунок 2.13). В то же время для ТМ гармоник в рассматриваемом диапазоне характерно наличие большего числа экстремумов коэффициентов прохождения и отражения.

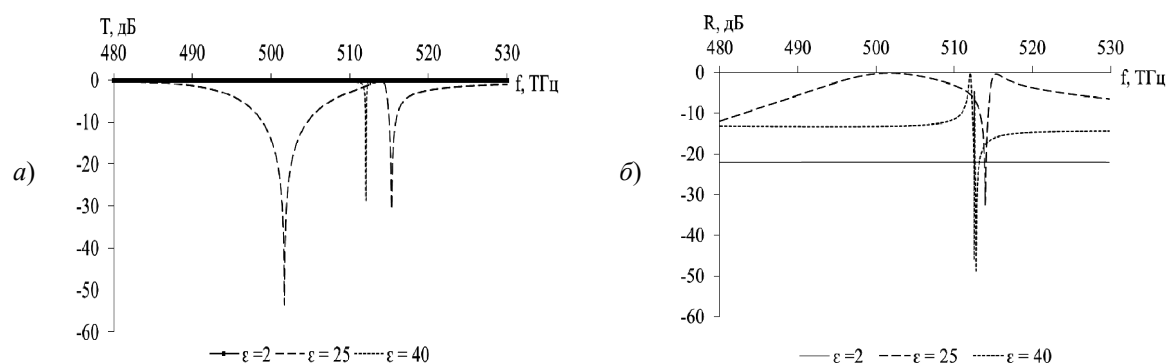


Рисунок 2.14 – Коэффициенты прохождения (а) и отражения (б) для ТЕ гармоники при значениях диэлектрической проницаемости вставок 2, 25, 40

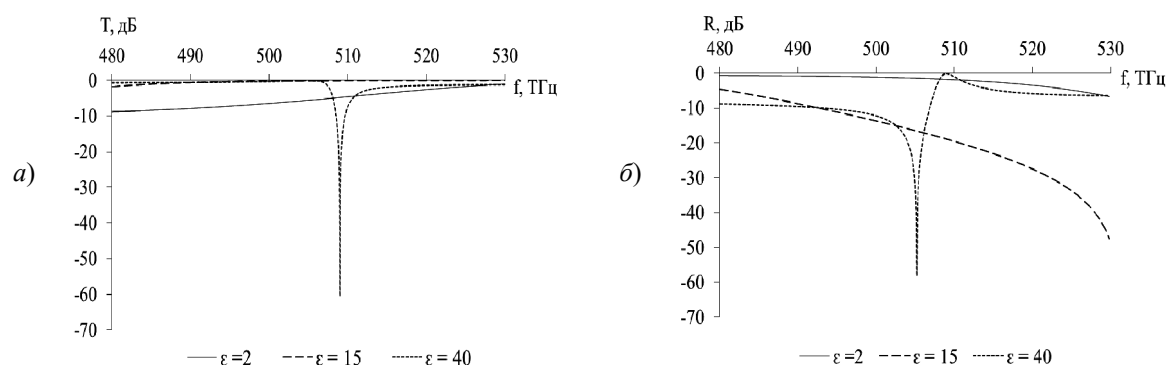


Рисунок 2.15 – Коэффициенты прохождения (а) и отражения (б) для ТМ гармоники при значениях диэлектрической проницаемости вставок 2, 15, 40

При дальнейшем увеличении значений диэлектрической проницаемости, для ТЕ гармоники происходит смещение глубоких минимумов в сторону более высоких частот, начиная с 10,5 ГГц. Для ТМ гармоники наблюдается большое число минимумов, глубина которых до -50 дБ.

Полимерные материалы за счет своих свойств используются для создания покрытий с требуемыми селективно-частотными свойствами. В частности, композиты с добавлением проводящих или иных наполнителей, где свойства изменяются как по толщине, так и по площади поверхности материала. Некоторые технические приложения требуют использования тонких металлических слоев для создания градиентов и неоднородностей диэлектрической проницаемости.

Сочетание материалов позволяет создать гладкие градиентные покрытия, отличающиеся широким рабочим диапазоном в случае правильного подбора электромагнитных параметров. Эффективность взаимодействия структуры с излучением определяется подстройкой электромагнитных параметров материалов ее элементов. Толщина слоя с градиентом изменения параметров выбирается в зависимости от рабочей длины волны. Таким образом, однотипные структуры могут использоваться в различных частотных диапазонах с соответствующим приведением их габаритных размеров.

В оптическом диапазоне при изменении диэлектрической проницаемости материала в тех же пределах также возможно использование решетки с полученными выше параметрами для управления коэффициентами прохождения и отражения излучения. Параметры решетки были адаптированы для видимого оптического диапазона 480–530 ТГц и составили: длина, ширина и высота диэлектрической вставки 73 нм; длина ленты и период по оси Y 275 нм.

На рисунке 2.14 показано влияние различных значений диэлектрической проницаемости вставок на уровень прошедшего и отраженного излучения для ТЕ гармоники.

Для значений диэлектрической проницаемости равной 2 не наблюдается изменений коэффициентов прохождения и отражения в рассматриваемом частотном диапазоне. При увеличении диэлектрической проницаемости для ТЕ гармоники картина рассеяния изменяется. Таким образом, для коэффициента прохождения существует возможность изменения до -50 дБ. При этом, коэффициент отражения принимает значения до -50 дБ.

Для ТМ гармоники (рисунок 2.15) минимум коэффициента прохождения наблюдается для значения диэлектрической проницаемости 40 на частоте 509 ТГц.

Варьирование диэлектрической проницаемости приводит к перестройке значений минимумов и максимумов коэффициентов прохождения и отражения по частоте и глубине, как для ТЕ, так и для ТМ гармоник. Таким образом, рассматриваемая структура может использоваться для управления рассеянием излучения как в сверхвысокочастотном, так и оптическом диапазонах.

Заключение

Изменение характеристик рассеяния электромагнитного излучения на приведенных периодических структурах может быть осуществлено путем изменения диэлектрической проницаемости элементов решеток. Это является более перспективным по сравнению с механической перестройкой структуры.

Оптимальные размеры периодической структуры для проведения натурального эксперимента по оценке влияния изменения материальных параметров элементов решеток на характеристики рассеяния электромагнитного поля оптического и СВЧ-диапазона зависят от электромагнитных параметров используемых материалов и частоты облучающего поля.

В качестве диэлектриков с изменяемым коэффициентом диэлектрической проницаемости могут выступать композитные материалы на основе поливинилового спирта с сегнетоэлектрическими включениями, а также включениями различных материалов. Изменение диэлектрической проницаемости композитного материала возможно при условии его размещения в электрическом поле. Локальное управление диэлектрической проницаемостью элементов решетки при минимальных напряжениях управляющих электрических полей эффективно при условии минимизации зазоров, в которых эти поля локализованы и являются однородными. Так же это позволяет разработать энергетически эффективно перестраиваемые структуры.

Описанные технологические решения позволяют использовать решетку с приведенной конфигурацией в качестве чувствительного инструмента для идентификации наличия изменения диэлектрической проницаемости материала элементов решетки при воздействии внешних полей малой напряженности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fan, K. Dynamic electromagnetic metamaterials / K. Fan, W.J. Padilla // *Materials Today*. – 2014. – Vol. 18, № 1. – P. 39–50.
2. Вендик, И.Б. Метаматериалы и их применение в технике сверхвысоких частот: обзор / И.Б. Вендик, О.Г. Вендик // *Журнал технической физики*. – 2013. – Т. 83, вып. 1. – С. 3–28.
3. *Распространение электромагнитных волн СВЧ-диапазона в управляемых двумерных периодических структурах* / Ю.М. Рычков [и др.] // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 1. – С. 50–53.
4. Заерко, Д.В. Применение резонансных свойств доменной структуры сегнетоэлектрических материалов для энергетически эффективно управления их диэлектрической проницаемостью / Д.В. Заерко, Л.А. Калоша, Л.С. Гайда // *Квантовая электроника: материалы XIII Международ. науч.-техн. конф., Минск, 22–26 ноября. 2021 г.* / Мин. обр. РБ, БГУ, НИИ ПФП БГУ имени А.Н. Севченко; Институт физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси, БРФФИ. – Минск: БГУ, 2021. – С. 114–118.
5. *Управление высокочастотной дисперсией диэлектрической проницаемости пленок на основе полярных диэлектриков* / Л.А. Калоша [и др.] // *Вестник Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне*. – 2017. – Т. 7, № 3. – С. 82–89.
6. *Моделирование применения поляризационных свойств сегнетоэлектриков для разработки решеток и сложноструктурированных сред для СВЧ-диапазона* / Л.А. Калоша [и др.] // *Вестник ГрДУ імя Янкі Купалы. Серія 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне*. – 2023. – Т. 13, № 2. – С. 41–49.
7. *Дифракция волн на решетках* / В.П. Шестопалов [и др.]. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1973. – 288 с.
8. Амтей, Н. Теория и анализ фазированных антенных решеток: пер. с англ. / Н. Амтей, В. Галиндо, Ч. Ву; под ред. А.Ф. Чаплина. – Москва: МИР, 1974. – 456 с.

Поступила в редакцию 22.05.2025.

Информация об авторах

Калоша Любовь Александровна – аспирант
Гайда Леонид Станиславович – д.ф.-м.н., профессор
Заерко Дмитрий Владимирович – к.ф.-м.н.

УДК 535.33:539.3.075:621.373.8:621.9.048.7:549.6 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_29
EDN: ZXSJJW

ИССЛЕДОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЛАЗЕРНОГО РАСКАЛЫВАНИЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО КВАРЦА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА, НЕЙРОСЕТЕВЫХ И НЕЙРО-НЕЧЕТКИХ МОДЕЛЕЙ

Ю.В. Никитюк, Л.Н. Марченко, А.Н. Сердюков

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

STUDY AND OPTIMIZATION OF LASER CLEAVING OF CRYSTALLINE QUARTZ USING GENETIC ALGORITHM, NEURAL NETWORK AND NEURO-FUZZY MODELS

Yu.V. Nikityuk, L.N. Marchenko, A.N. Serdyukov

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Работа посвящена разработке метамодели процесса лазерного раскалывания кристаллического кварца, включающей моделирование и оптимизацию. На основе конечно-элементной модели с использованием языка программирования APDL определены температурные поля и поля термоупругих напряжений, которые формируются в монокристаллической кварцевой пластине в результате последовательного лазерного нагрева и воздействия хладагента для трех различных вариантов: I – анализ среза ZY при перемещении лазерного пучка в направлении оси X ; II – анализ среза YX при перемещении лазерного пучка в направлении оси X ; III – анализ среза XY при перемещении лазерного пучка в направлении оси Z . С использованием центрального композиционного плана проведен численный эксперимент, в котором в качестве факторов были использованы скорость обработки, геометрические параметры эллиптического лазерного пучка, мощность CO_2 -лазера и толщина кварцевой пластины. Согласно плану численного эксперимента выполнены расчеты для 27 комбинаций факторов с определением значений максимальных температур T_1, T_2, T_3 для трех вариантов обработки квадратной кварцевой пластины и трех соответствующих значений максимальных напряжений растяжения S_1, S_2, S_3 , действующих перпендикулярно фронту лазерно-индуцированных трещин. Выявлены эффективные архитектуры искусственных нейронных сетей для определения максимальных температур и максимальных термоупругих напряжений в зоне лазерной обработки кристаллического кварца с использованием TensorFlow. Построены нейро-нечеткие модели в системе ANFIS, проведено сравнение нейросетевых и нейро-нечетких моделей. Определены эффективные входные параметры лазерного раскалывания кристаллического кварца на основе оптимизационного генетического алгоритма MOGA.

Ключевые слова: лазерная резка; искусственные нейронные сети; искусственная нейронная сеть, основанная на нечеткой системе вывода; оптимизационный генетический алгоритм MOGA; программа ANSYS.

Для цитирования: Никитюк, Ю.В. Исследование и оптимизация лазерного раскалывания кристаллического кварца с использованием генетического алгоритма, нейросетевых и нейро-нечетких моделей / Ю.В. Никитюк, Л.Н. Марченко, А.Н. Сердюков // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 4 (65). – С. 29–34. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_29. – EDN: ZXSJJW

Abstract. The study focuses on developing a metamodel for the laser cleaving process of crystalline quartz, encompassing modeling and optimization. Using a finite element model implemented in the APDL programming language, temperature fields and thermoelastic stress fields were determined. These fields arise in a monocrystalline quartz plate due to sequential laser heating and coolant exposure, analyzed for three distinct variants: I – analysis of the ZY -plane cross-section with laser beam movement along the X -axis; II – analysis of the YX -plane cross-section with laser beam movement along the X -axis; III – analysis of the XY -plane cross-section with laser beam movement along the Z -axis. A central composite design was employed to conduct a numerical experiment, where the factors included processing speed, geometric parameters of the elliptical laser beam, CO_2 laser power, and quartz plate thickness. According to the experimental design, calculations were performed for 27 factor combinations, determining the maximum temperature values (T_1, T_2, T_3) for three processing variants of a square quartz plate, along with three corresponding values of maximum tensile stress (S_1, S_2, S_3) acting perpendicular to the laser-induced crack fronts. The optimal artificial neural network architectures were identified for predicting maximum temperatures and thermoelastic stresses in the laser processing zone of crystalline quartz using TensorFlow. Neuro-fuzzy models were developed in the ANFIS framework, followed by a comparative analysis of neural network and neuro-fuzzy approaches. Furthermore, the most effective input parameters for laser cleaving of crystalline quartz were determined through optimization using the MOGA.

Keywords: laser cutting, Artificial Neural Networks, adaptive network-based fuzzy inference system, MOGA optimization genetic algorithm, ANSYS program.

For citation: Nikityuk, Yu.V. Study and optimization of laser cleaving of crystalline quartz using genetic algorithm, neural network and neuro-fuzzy models / Yu.V. Nikityuk, L.N. Marchenko, A.N. Serdyukov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 4 (65). – P. 29–34. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_29. – EDN: ZXSJJW

1 Introduction

The relevance of studying laser cleaving of crystalline quartz stems from increasing demands for precision and quality in processing brittle non-metallic materials within microelectronics and optoelectronics applications. Traditional machining methods face significant limitations, necessitating novel approaches to enhance the efficiency and quality of quartz cutting. Laser cleaving technology offers an effective solution for brittle material processing, based on generating localized thermoelastic stresses through combined laser irradiation and coolant application. The process involves material heating by laser radiation followed by cooling-induced stress generation, which initiates controlled crack propagation. This technology provides three key advantages: high cutting precision, minimal material damage, and superior processing productivity [1].

Finite element modeling (FEM) has become a widely adopted approach for investigating laser cleaving processes in brittle non-metallic materials [2]–[5]. However, FEM implementations demand substantial computational resources, limiting their utility for real-time process analysis and parameter optimization. This constraint has driven growing interest in metamodeling techniques, which enable significant computational cost reduction through

simplified yet sufficiently accurate models derived from FEM-generated datasets [6]. Within this paradigm, artificial neural networks (ANNs) and adaptive neuro-fuzzy inference systems (ANFIS) have demonstrated successful applications in studying laser processing of brittle non-metallic materials. Furthermore, genetic algorithms provide an effective methodology for determining optimal laser processing parameters [7]–[16].

This study implements finite element modeling of controlled laser cleaving processes in crystalline quartz. The resulting simulation data was utilized to develop artificial neural network and neuro-fuzzy models, and to determine optimal parameters for laser-induced crack propagation in crystalline quartz through genetic algorithm optimization.

2 Discussion

The proposed metamodel representing the laser cleaving process of crystalline quartz is shown in Figure 2.1.

Let us examine the key structural components of the metamodel.

I. Finite Element Modeling. The simulation of temperature fields and thermoelastic stresses arising during controlled laser cleaving of crystalline quartz was performed using a quasi-static formulation with application of uncoupled thermoelasticity theory.

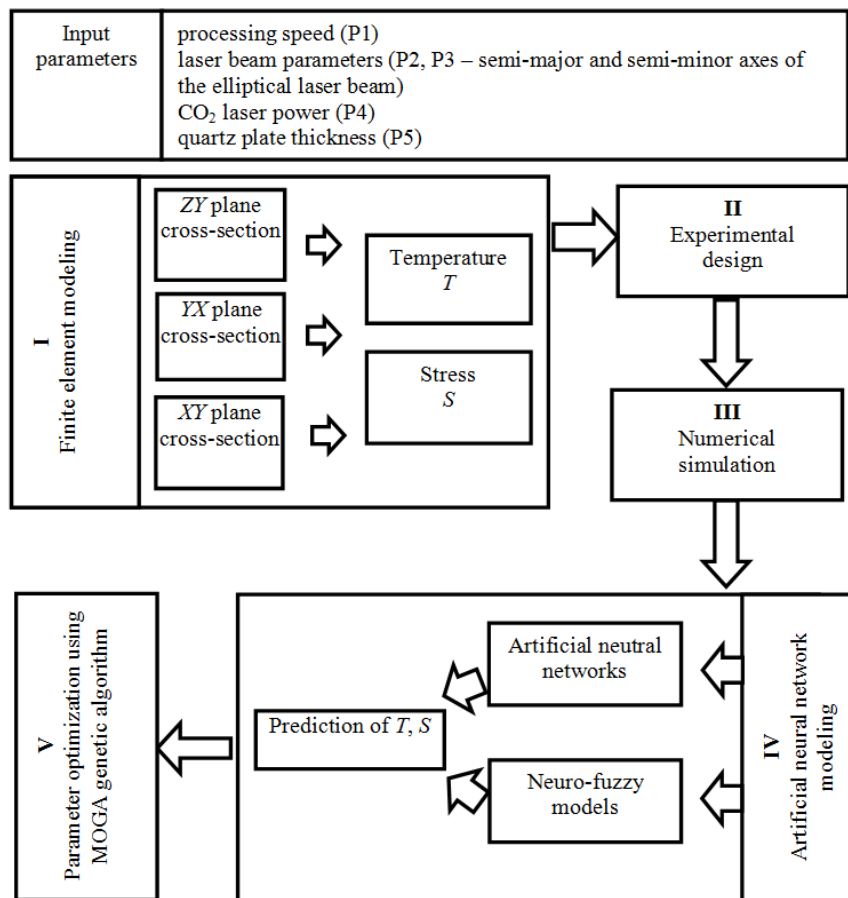


Figure 2.1 – Metamodel of the laser cleaving process for crystalline quartz

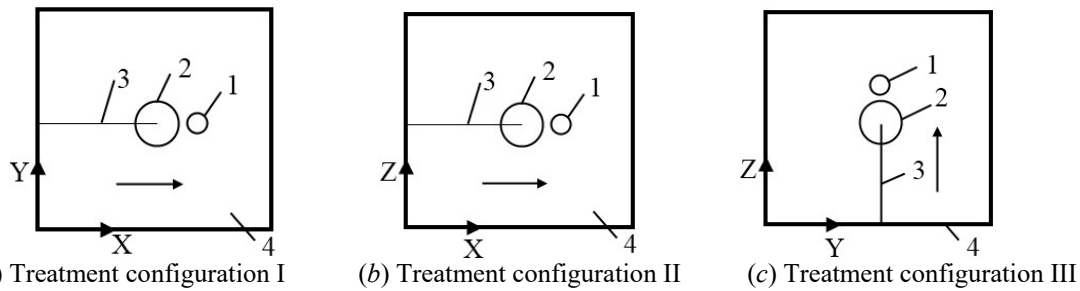


Figure 2.2 – Layout diagrams of laser irradiation and refrigerant application zones in the processing plane

In the finite element modeling, crystalline quartz was assigned the following material properties: density $\rho = 2643 \text{ kg/m}^3$ and specific heat capacity $C = 741 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$. The thermal conductivity and linear thermal expansion coefficients were defined as $\lambda_{\parallel} = 12.3 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ and $\alpha_{\parallel} = 9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ along the Z-axis (third-order symmetry axis), with perpendicular values $\lambda_{\perp} = 6.8 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ and $\alpha_{\perp} = 14.8 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. The elastic stiffness constants applied in calculations were: $C_{11} = 86.75 \cdot 10^9 \text{ MPa}$, $C_{12} = 5.95 \cdot 10^9 \text{ MPa}$, $C_{13} = 11.91 \cdot 10^9 \text{ MPa}$, $C_{14} = -17.8 \cdot 10^9 \text{ MPa}$, $C_{33} = 107.2 \cdot 10^9 \text{ MPa}$, and $C_{44} = 57.8 \cdot 10^9 \text{ MPa}$ [5].

The studies were conducted on square plates measuring $20 \times 20 \text{ mm}$, with sample thickness varying in the range of 0.5 to 2 mm . The modeling was performed for conditions involving laser radiation exposure at a wavelength of $10.6 \text{ }\mu\text{m}$.

The modeling employed standard initial orientations for the square-shaped crystalline samples. For each of the three cross-sections, the laser beam movement direction was aligned with the crystallographic axes lying within the respective processing plane. Notably, following the convention established in [17], the cross-sections were designated using two-letter codes indicating the crystallographic axes: the first letter represents the axis oriented along the sample's thickness direction, while the second denotes the axis aligned with its length.

The thermoelastic field calculations in the monocrystalline quartz plate, resulting from sequential laser heating and coolant application, were performed for three distinct configurations: I – ZY-plane analysis with laser beam movement along the X-axis, II – YX-plane analysis with laser beam movement along the X-axis, and III – XY-plane analysis with laser beam movement along the Z-axis.

Figure 2.2 illustrates the spatial arrangements of laser irradiation and coolant application zones within the processing plane for the three treatment configurations investigated in this study.

The diagram is annotated as follows: (1) laser beam, (2) refrigerant, (3) laser-induced crack, and (4) quartz plate. The horizontal arrow indicates the direction of the sample movement relative to the laser beam and the refrigerant application zone.

II – III. Experimental Design and Numerical Simulation. A central composite design was implemented in ANSYS DesignXplorer to plan the

numerical experiments. The following input parameters were selected: P_1 is the processing speed (V), P_2 , P_3 are the semi-major (A) and semi-minor (B) axes of the elliptical laser beam, P_4 is the CO_2 laser power (P), P_5 is the quartz plate thickness (H).

In accordance with the experimental design, simulations were performed for 27 factor combinations. The analysis determined maximum temperature values (T_1 , T_2 , T_3) for the three processing configurations of square quartz plates described previously, along with the corresponding maximum tensile stress values (S_1 , S_2 , S_3) acting perpendicular to the laser-induced crack fronts (see Table 2.1).

IV. Artificial Neural Network (ANN) Modeling. The laser processing simulation using artificial neural networks was implemented with the TensorFlow library. The neural network implementation employed ReLU activation functions and mean squared error (MSE) as the loss metric, with model optimization performed using the Adam optimizer over 300 training epochs. The dataset incorporated the original 27 central composite design configurations supplemented by 100 additional finite element simulation cases, of which 10 were reserved for testing the neural network models (see Table 2.2).

The model quality assessment used the following performance metrics: mean absolute error (MAE), root mean square error (RMSE), mean absolute percentage error (MAPE), and the coefficient of determination (R^2).

The optimal architectures for predicting maximum temperatures were achieved with a [5-50-30-6] neural network for T1 and [5-40-40-6] networks for both T2 and T3. For maximum tensile stress prediction (S_1 , S_2 , S_3), the best-performing architectures selected through metric analysis were [5-20-30-6], [5-40-40-6], and [5-50-30-6], respectively. The complete evaluation results for all neural network models are provided in Table 2.3.

Subsequently, a neuro-fuzzy model was developed using the ANFIS (Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System) framework, i. e., a hybrid architecture integrating neural networks with fuzzy logic principles. The optimization and training of membership functions followed standard artificial neural network algorithms. As detailed in [18], the ANFIS inference system structure comprises five distinct layers.

Table 2.1 – Experimental design and computational results

N	P_1 (V, m/s)	P_2 (A, m)	P_3 (B, m)	P_4 (P, W)	P_5 (H, m)	T_1 , °K	T_2 , °K	T_3 , °K	S_1 , MPa	S_2 , MPa	S_3 , MPa
1	0.015	0.002	0.0015	45	0.00125	780	787	802	66	147	65
2	0.005	0.002	0.0015	45	0.00125	1098	1069	1101	60	141	63
3	0.025	0.002	0.0015	45	0.00125	678	691	698	63	142	61
4	0.015	0.001	0.0015	45	0.00125	914	930	942	55	135	57
5	0.015	0.003	0.0015	45	0.00125	716	712	731	75	156	72
6	0.015	0.002	0.001	45	0.00125	897	904	924	63	143	63
7	0.015	0.002	0.002	45	0.00125	699	706	717	67	150	67
8	0.015	0.002	0.0015	30	0.00125	618	622	632	44	121	48
9	0.015	0.002	0.0015	60	0.00125	942	951	972	88	174	83
10	0.015	0.002	0.0015	45	0.0005	1172	1111	1180	60	65	67
11	0.015	0.002	0.0015	45	0.002	736	738	740	56	129	60
12	0.005	0.001	0.001	30	0.002	1003	1001	1008	38	100	54
13	0.025	0.001	0.001	30	0.0005	875	911	944	35	37	25
14	0.005	0.003	0.001	30	0.0005	1350	1186	1307	114	83	118
15	0.025	0.003	0.001	30	0.002	544	545	546	34	100	39
16	0.005	0.001	0.002	30	0.0005	1272	1219	1200	78	57	83
17	0.025	0.001	0.002	30	0.002	545	546	546	27	94	33
18	0.005	0.003	0.002	30	0.002	618	612	619	47	119	56
19	0.025	0.003	0.002	30	0.0005	623	612	633	56	58	40
20	0.005	0.001	0.001	60	0.0005	2885	2692	2782	163	113	174
21	0.025	0.001	0.001	60	0.002	1210	1211	1211	54	124	65
22	0.005	0.003	0.001	60	0.002	1118	1105	1122	87	166	93
23	0.025	0.003	0.001	60	0.0005	1204	1121	1245	106	107	76
24	0.005	0.001	0.002	60	0.002	1220	1217	1230	67	147	76
25	0.025	0.001	0.002	60	0.0005	968	1037	1045	73	78	53
26	0.005	0.003	0.002	60	0.0005	2184	1935	2057	239	180	248
27	0.025	0.003	0.002	60	0.002	617	619	620	70	143	69

Table 2.2 – Test dataset

N	P_1 (V, m/s)	P_2 (A, m)	P_3 (B, m)	P_4 (P, W)	P_5 (H, m)	T_1 , °K	T_2 , °K	T_3 , °K	S_1 , MPa	S_2 , MPa	S_3 , MPa
1	0.015	0.002	0.0015	45	0.00125	780	787	802	66	147	65
2	0.005	0.002	0.0015	45	0.00125	1098	1069	1101	60	141	63
3	0.025	0.002	0.0015	45	0.00125	678	691	698	63	142	61
4	0.015	0.001	0.0015	45	0.00125	914	930	942	55	135	57
5	0.015	0.003	0.0015	45	0.00125	716	712	731	75	156	72
6	0.015	0.002	0.001	45	0.00125	897	904	924	63	143	63
7	0.015	0.002	0.002	45	0.00125	699	706	717	67	150	67
8	0.015	0.002	0.0015	30	0.00125	618	622	632	44	121	48
9	0.015	0.002	0.0015	60	0.00125	942	951	972	88	174	83
10	0.015	0.002	0.0015	45	0.0005	1172	1111	1180	60	65	67

Table 2.3 – Neural network model evaluation results

Criterion	T_1	T_2	T_3	S_1	S_2	S_3
RMSE	30 K	37 K	31 K	3.8MPa	4.6 MPa	7.0 MPa
MAE	23 K	21 K	19 K	2.7 MPa	5.4 MPa	5.1 MPa
MAPE	2.0%	1.9%	1.7%	3.6%	3.7%	7.3%
R^2	0.9846	0.9799	0.9890	0.9680	0.9849	0.8959

Table 2.4 – Neuro-fuzzy model evaluation results

Criterion	T_1	T_2	T_3	S_1	S_2	S_3
RMSE	66 K	53 K	66 K	9.9 MPa	11.0 MPa	8.3 MPa
MAE	60 K	49 K	60 K	7.9 MPa	9.3 MPa	7.3 MPa
MAPE	7.2%	5.9%	7.0%	11.2%	10.3%	11.3%
R^2	0.9490	0.9601	0.9522	0.7808	0.9222	0.8553

Layer 1 (adaptive) represents fuzzification. This initial adaptive layer handles the conversion of crisp input parameters x_1, \dots, x_n into fuzzy linguistic variables. The layer outputs are membership function values $\mu_{i,j}$, $i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n$. Various membership functions (MFs) in this layer generate membership degree assessments from the input variables.

Layer 2 (non-adaptive) represents implication. This layer implements fuzzy “if-then” rules, where each fixed node establishes both the rule content and its position within the fuzzy inference system. The neurons in this layer output firing strengths w_q ($q = 1, \dots, L$), which quantify the truth values of each rule’s premise in the system’s knowledge base.

Layer 3 (non-adaptive) represents normalization. This layer performs normalization of rule activation weights (firing strengths). The non-adaptive nodes compute: $\bar{w}_q = \frac{w_q}{\sum_{q=1}^L w_q}$, where $q = 1, \dots, L$.

Layer 4 (adaptive) represents defuzzification. This adaptive layer implements the fuzzy inference model, calculating output values $\bar{w}_q f_q$ for each rule’s conclusion, where f_q stands for input parameter functions ($q = 1, \dots, L$).

Layer 5 (non-adaptive) represents output. This final layer computes the system’s crisp output value through weighted summation of all incoming signals from Layer 4: $Y = \sum_{q=1}^L \bar{w}_q f_q + \bar{w}_0$.

The training process involves simultaneous optimization of both premise parameters and consequent parameters.

A neuro-fuzzy inference system was developed to predict maximum temperatures (T_1, T_2, T_3) and tensile stresses (S_1, S_2, S_3) based on five input parameters: processing speed (V), laser beam elliptical axes (semi-major A and semi-minor B), CO₂ laser power (P), and quartz plate thickness (H). The system implements Sugeno-type if-then rules with linear consequent functions, where crisp input parameters are first converted into fuzzy sets through triangular, trapezoidal, and Gaussian membership functions during the fuzzification stage

If P_1 is A and P_2 is B and P_3 is C and P_4 is D and P_5 is E then Y is out $a_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 + a_4 P_4 + a_5 P_5$, where a_0, a_1, \dots, a_5 signify the coefficients to be determined, and Y denotes either the maximum temperature (T) or maximum tensile stress (S).

The ANFIS neuro-fuzzy model was trained using dataset obtained from numerical experiments. A hybrid learning algorithm combining gradient descent and least-squares estimation was employed, implementing a two-phase optimization process: first, while keeping the premise parameters fixed, it adjusts the consequent parameters using the least-squares method; then, with the consequents held constant, it refines the premise parameters through gradient descent optimization. The training protocol

was configured with 10 epochs and a target error tolerance of 0.

Table 2.4 presents the performance metrics of the ANFIS neuro-fuzzy model for predicting both maximum temperatures (T_1, T_2, T_3) and tensile stresses (S_1, S_2, S_3). The developed model demonstrates satisfactory accuracy compared to neural network approaches, while requiring an order of magnitude smaller training dataset than equivalent neural network models.

V. Parameter optimization using MOGA genetic algorithm. The multi-objective genetic algorithm (MOGA) in ANSYS DesignXplorer was implemented to optimize crystalline quartz laser cleaving parameters. This optimization procedure focused specifically on Processing Configuration I. Notably, the developed algorithm provides universal capability for selecting optimal laser processing parameters across all possible crystalline plane orientations.

The optimization considered the following criteria:

$$V \rightarrow \max, S_1 \rightarrow \max, T \leq 1988 \text{ K.}$$

The optimal parameter set was determined for a quartz plate with 0.001 m thickness. The optimized parameters are presented in Table 2.5, with corresponding finite element modeling reference values shown in parentheses. The MOGA algorithm demonstrated high fidelity, with maximum relative error not exceeding 5% across all response predictions.

Table 2.5 – Optimization results

P_1 (V , m/s)	P_2 (A , m)	P_3 (B , m)	P_4 (P , W)	P_5 (H , m)	T_1 , °K	S_1 , MPa
0.0053	0.0023	0.0017	58	0.001	1381 (1413)	102 (98)

Conclusion

This study has developed an integrated meta-model comprising five key components: finite element modeling (I), experimental design (II) and numerical simulation (III), neural network and neuro-fuzzy system development (IV), genetic algorithm optimization (V) using MOGA methodology.

Using APDL programming language, the finite element model determined temperature distributions and thermoelastic stress fields generated in monocrystalline quartz plates during sequential laser heating and refrigerant application. The numerical investigation analyzed how four key parameters, namely processing speed, elliptical laser beam geometry, CO₂ laser power, and plate thickness, affect peak temperatures and tensile stresses generated during laser cleaving of crystalline quartz, following a central composite design framework for the computational experiment. The study identified optimal artificial neural network architectures for predicting maximum temperatures and stresses under specified input parameters. While ANN models demonstrated high accuracy, the developed ANFIS neuro-fuzzy systems, combining neural networks with fuzzy logic, achieved satisfactory precision with significantly

smaller training datasets. Parameter optimization using the MOGA genetic algorithm in DesignXplorer yielded effective processing conditions, delivering results with high fidelity (<5% error margin).

The developed metamodel offers an effective practical solution for improving crystalline quartz laser cleaving quality, significantly reducing both time expenditures and computational resource requirements compared to direct numerical simulations or costly physical experiments. Its key advantage lies in genetic algorithm-based process optimization that automatically identifies optimal laser processing parameters (power, speed, beam focus, and plate thickness) to produce clean fracture surfaces with minimal defects. By combining finite element analysis, neural networks, and neuro-fuzzy systems, the model enables rapid high-accuracy process simulation while substantially reducing the need for expensive equipment trial runs on physical equipment.

The proposed metamodel serves as an effective tool for enhancing efficiency, reducing production costs, and ensuring consistent high quality in industrial laser cleaving of quartz.

REFERENCES

1. Kondratenko, V.S. Precision Cutting of Glass and Other Brittle Materials by Laser-Controlled Thermo-Splitting (Review) / V.S. Kondratenko, S.A. Kudzh // Glass and Ceramics. – 2017. – № 74. – P. 75–81. – <https://doi.org/10.1007/s10717-017-9932-1>.
2. Nikityuk, Yu.V. Laser cleaving of brittle non-metallic materials / Yu.V. Nikityuk, A.A. Sereda, A.N. Serdyukov. – Gomel: Francisk Skorina Gomel State University, 2025. – 217 p.
3. Kharche, Prashant P. Systematic review of optimization techniques for laser beam machining / Prashant P. Kharche, Vijay H. Patil // Engineering Research Express. – 2024. – Vol. 6, № 2. – DOI: 10.1088/2631-8695/ad594b.
4. Serdyukov, A.N. Features of controlled laser thermal cleavage of crystalline silicon / A.N. Serdyukov, S.V. Shalupaev, Y.V. Nikityuk // Crystallography Reports. – 2010. – Vol. 55, № 6. – P. 933–937. – DOI: 10.1134/S1063774510060064.
5. Features of controlled laser thermal cleavage of crystal quartz / A.N. Serdyukov [et al.] // Crystallography Reports. – 2012. – Vol. 57, № 6. – P. 792–797. – DOI: 10.1134/S1063774512060120.
6. Jiang, P. Surrogate model-based engineering design and optimization / P. Jiang, Q. Zhou, X. Shao // Springer Singapore: Springer. – 2020. – 240 p. – DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-15-0731-1_8.
7. Kharche, P.P. Systematic review of optimization techniques for laser beam machining / P.P. Kharche, V.H. Patil // Engineering Research Express. – 2024. – Vol. 6 (2). – P. 213–219. – DOI: 10.1088/2631-8695/ad594b.
8. Nisar, S. Optimization of Laser Beam Geometry for Controlling Thermal Stresses in CO₂ Laser Glass Cutting / S. Nisar // Lasers Manuf. Mater. Process. – 2025. – DOI: 10.1007/s40516-025-00289-6.
9. Nikityuk, Y. Optimization of two-beam laser cleavage of silicate glass / Y. Nikityuk, A. Serdyukov, I. Aushev // Journal of Optical Technology. – 2022. – Vol. 89, № 2. – P. 121–125.
10. Parameters optimization of silicate glass two-beam asymmetric laser splitting / Yu.V. Nikityuk [et al.] // Opticheskii Zhurnal. – 2023. – Vol. 90, № 6. – P. 15–24. – DOI: <http://doi.org/10.17586/1023-5086-2023-90-06-15-24>.
11. Nikitjuk, Y. Determination of the Parameters of Controlled Laser Thermal Cleavage of Crystalline Silicon Using Regression and Neural Network Models / Y. Nikitjuk, A. Serdyukov // Crystallography Reports. – 2023. – Vol. 68, № 7. – P. 195–200.
12. Nikitjuk, Y.V. Determination of the parameters of two-beam laser splitting of silicate glasses using regression and neural network models / Y.V. Nikitjuk, A.N. Serdyukov, I.Y. Aushev // Journal of the Belarusian State University. Physics. – 2022. – № 1. – P. 35–43. – DOI: <https://doi.org/10.33581/2520-2243-2022-1-35-43>.
13. Golovko, V.A. Neural network data processing technologies: Textbook / V.A. Golovko, V.V. Krasnoproshin. – Minsk: BSU, 2017. – 263 p.
14. Optimization of Quartz Sol-gel Glass Cutting Parameters by Elliptical Laser Beams Using Neural Network Simulation and Genetic Algorithm / Y. Nikityuk [et al.] // Recent Advances in Technology Research and Education. Inter-Academia 2023. Lecture Notes in Networks and Systems. – Cham: Springer, 2024. – Vol. 939. – P. 343–350. – DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-54450-7_34.
15. Software Package for Modeling and Optimizing Parameters of Laser Processing of Brittle Non-Metallic Materials Using Laser Splitting Methods / Y. Nikityuk [et al.] // 2024 8th International Conference on Information, Control, and Communication Technologies (ICCT). Vladikavkaz, Russian Federation. – 2024. – P. 1–3. – DOI: 10.1109/ICCT62929.2024.10874981.
16. Determining parameters of controlled laser cleaving of silicate glasses using regression, neural network, and fuzzy models / Yu.V. Nikityuk [et al.] // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 2 (59). – P. 32–38.
17. Glukman, L.I. Piezoelectric quartz resonators / L.I. Glukman. – Moscow: Radio i Svyaz, 1981. – 232 p.
18. Shtovba, S.D. Designing fuzzy systems using MATLAB tools / S.D. Shtovba. – Moscow: Goryachaya Liniya, 2007. – 284 p.

The article was submitted 08.07.2025.

Информация об авторах

Никитюк Юрий Валерьевич – к.ф.-м.н., доцент
Марченко Лариса Николаевна – к.т.н., доцент
Сердюков Анатолий Николаевич – чл.-корр. НАН Беларуси, д.ф.-м.н., профессор

СХОДСТВА И РАЗЛИЧИЯ ДЖОУЛЬ-ТОМСОНОВСКОГО РАСШИРЕНИЯ КЕРРОВСКИХ И ЗАРЯЖЕННЫХ ЧЁРНЫХ ДЫР В АДС-ПРОСТРАНСТВЕ И ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЖИДКОСТЕЙ

О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

SIMILARITIES AND DIFFERENCES OF JOULE – THOMSON EXPANSION OF KERR AND CHARGED BLACK HOLES IN AdS-SPACE AND TWO-PARAMETRIC FLUIDS

V.U. Novikava, G.Yu. Tyumenkov

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. В работе изучено джоуль-томсоновское расширение Керровских и заряженных черных дыр в АдС-пространстве, а также двухпараметрических жидкостей. На основе уравнений состояния получены аналитические выражения для температур инверсии, построены инверсионные кривые в TP -плоскости и определены области положительного и отрицательного эффекта. Выявлены сходства и различия поведения черных дыр и двухпараметрических жидкостей в рассматриваемом процессе.

Ключевые слова: АдС-пространство, Керровская чёрная дыра, заряженная чёрная дыра, двухпараметрические жидкости, расширение Джоуля – Томсона, кривая инверсии, области охлаждения и нагревания.

Для цитирования: Новикова, О.В. Сходства и различия джоуль-томсоновского расширения Керровских и заряженных чёрных дыр в АдС-пространстве и двухпараметрических жидкостей / О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 4 (65). – С. 35–41. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_35. – EDN: AITAVS

Abstract. In the paper we study the Joule – Thomson expansion of Kerr and charged black holes in AdS-space, as well as two-parameter fluids. Based on the equations of state, analytical expressions for inversion temperatures are obtained, inversion curves in the TP -plane are constructed, and the regions of positive and negative effects are determined. Similarities and differences in the behavior of black holes and two-parameter fluids in the considered process are found.

Keywords: AdS-space, Kerr black hole, charged black hole, two-parameter fluids, Joule – Thomson expansion, inversion curve, cooling and heating regions.

For citation: Novikava, V.U. Similarities and differences of Joule – Thomson expansion of Kerr and charged black holes in AdS-space and two-parametric fluids / V.U. Novikava, G.Yu. Tyumenkov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 4 (65). – P. 35–41. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_35 (in Russian). – EDN: AITAVS

Введение

Начало термодинамике чёрных дыр было положено в ныне классических работах Бекенштейна и Хокинга [1], [2]. Термодинамическое изучение чёрных дыр в пространстве анти-де-Ситтера (АдС-пространство), начатое в пионерской работе Хокинга и Пэйджа [3], было обобщено на случай наличия электрического заряда в работе [4], где авторы обнаружили аналогию между фазовыми диаграммами чёрных дыр и ван-дер-ваальсовской жидкости. Поэтому в последнее десятилетие делается акцент на возможность проведения сравнительного анализа поведения чёрных дыр и реальных жидкостей [5], [6] также в рамках процесса Джоуля – Томсона [7]. В данной работе мы рассмотрим и сравним джоуль-томсоновское расширение (или процесс Джоуля – Томсона) Керровской и заряженной

АдС чёрных дыр и двухпараметрических неидеальных жидкостей в модели Редлиха – Квонга, наиболее качественно описывающей данный процесс в классических макросистемах [8], а также в моделях Бергло, Дитеричи I, Дитеричи II.

Суть процесса Джоуля – Томсона заключается в следующем: макросистема изотермически при $H = \text{Const}$, из области высокого давления переходит в область более низкого давления, что сопровождается изменением её температуры. При понижении температуры (охлаждении) эффект Джоуля – Томсона считается положительным, при повышении температуры (нагревании) – отрицательным. Производная, характеризующая процесс представима в виде [7]

$$\mu = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_H = - \frac{\lambda}{c_p} \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_T,$$

$$\lambda = v \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_T + T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v, \quad (0.1)$$

где параметры процесса μ и λ имеют знак, совпадающий со знаком эффекта, в данном случае, дифференциального.

Области положительного и отрицательного эффекта Джоуля – Томсона разделяются инверсионной кривой, удовлетворяющей условию $\lambda = 0$, при этом полагается, что $T = T_i$.

1 Джоуль-томсоновское расширение Керровской АдС чёрной дыры

Вначале кратко коснёмся характеристик Керровской АдС чёрной дыры и основных её термодинамических свойств. Используем традиционную для теоретической астрофизики рациональную систему единиц с $G = \hbar = k_B = c = 1$.

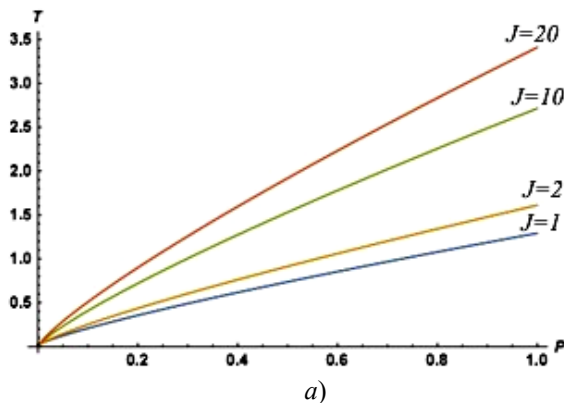
Керровское приближение учитывает вращение чёрной дыры, что приводит к более сложной геометрии макросистемы, и в этом случае:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} \left(dt - \frac{a \sin^2 \theta}{\Xi} d\phi \right)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \frac{\rho^2}{\Delta_0} d\theta^2 + \frac{\Delta_0 \sin^2 \theta}{\rho^2} \left(a dt - \frac{r^2 + a^2}{\Xi} d\phi \right)^2, \\ \Delta = \frac{(r^2 + a^2)(l^2 + r^2)}{l^2} - 2mr, \quad \Delta_0 = 1 - \frac{a^2}{l^2} \cos^2 \theta, \\ \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Xi = 1 - \frac{a^2}{l^2},$$

$$M = \frac{m}{\Xi^2}, \quad J = a \frac{m}{\Xi^2}.$$

Здесь M – масса, допускающая интерпретацию в терминах энтальпии [9]; J – момент инерции. Если учесть энтропию S и давление P , то

$$M = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\left(S + \frac{8PS^2}{3} \right)^2 + 4\pi^2 \left(1 + \frac{8PS}{3} \right) J^2}{\pi S}}. \quad (1.1)$$



Первый закон термодинамики имеет вид $dM = TdS + VdP + \Omega dJ$, что приводит к следующим соотношениям для температуры T , объема V и угловой скорости Ω

$$T = \left(\frac{\partial M}{\partial S} \right)_{J,P} = \frac{1}{8\pi M} \left[\left(1 + \frac{8PS}{3} \right) (1 + 8PS) - 4\pi^2 \left(\frac{J}{S} \right)^2 \right], \quad (1.2)$$

$$V = \left(\frac{\partial M}{\partial P} \right)_{S,J} = \frac{2}{3\pi M} \left[S \left(S + \frac{8PS^2}{3} \right) + 2\pi^2 J^2 \right], \quad (1.3)$$

$$\Omega = \left(\frac{\partial M}{\partial J} \right)_{S,P} = \frac{\pi J}{MS} \left(1 + \frac{8PS}{3} \right). \quad (1.4)$$

При постоянной энтальпии и моменте инерции $dM = dJ = 0$: $TdS = -VdP$.

Поэтому параметр процесса μ и давление приобретают вид

$$\mu = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_M = \frac{1}{S} \left[P \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_M - J \left(\frac{\partial \Omega}{\partial P} \right)_M + 2V \right], \quad (1.5)$$

$$P = \frac{3}{8} \left[\frac{2\sqrt{\pi} \sqrt{\pi^3 J^4 + M^2 S^3} - 2\pi^2 J^2}{S^3} - \frac{1}{S} \right]. \quad (1.6)$$

Совместное использование выражений (1.1)–(1.4), а также (1.5), (1.6) при выполнении условия (0.1) приводит к сложной связи

$$256P_i^3 S^7 + 256P_i^2 S^6 + 84P_i S^5 + (9 - 384\pi^2 J^2 P_i^2) S^4 - 336\pi^2 J^2 P_i S^3 - 72\pi^2 J^2 S^2 - 72\pi^4 J^4 = 0,$$

допускающей, однако, численный анализ, позволяющий получить графики кривых инверсии и изоэнтальп, приведенные на рисунке 1.1 (а, б).

Следует отметить, что этот результат очень хорошо согласуется с работой [5].

Области охлаждения и нагревания несложно идентифицировать по знаку параметра μ из (0.1), очевидному из графического поведения изоэнтальп.

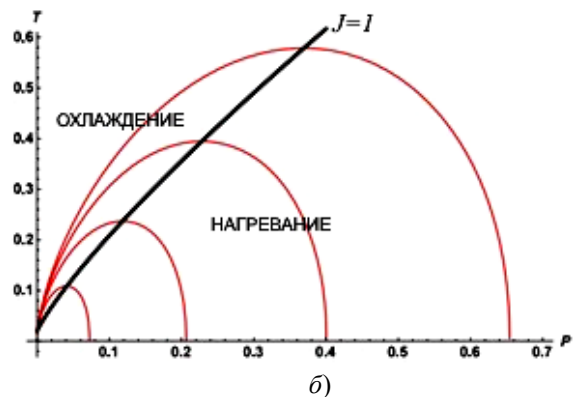


Рисунок 1.1 – а) семейство кривых инверсии для Керровской АдС чёрной дыры, параметризованное моментом инерции J ;

б) кривая инверсии для Керровской АдС чёрной дыры с $J = 1$, областями положительного (охлаждение) и отрицательного (нагревание) эффекта Джоуля – Томсона и изоэнтальпами

2 Джоуль-томсоновское расширение заряженной АдС чёрной дыры

Пространственно-временной интервал в этом случае определяется как

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

где $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$ и функция $f(r)$ имеет вид

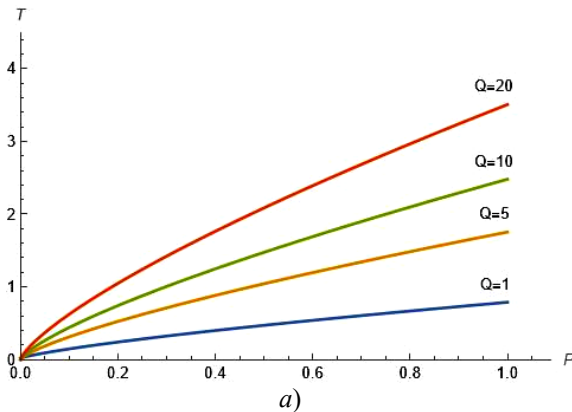
$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{l^2}.$$

Радиус горизонта событий r_+ находится как наибольший корень уравнения $f(r_+) = 0$ и выражается в виде

$$r_+ = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{1+24P_i\pi Q^2}}{P_i\pi} - \frac{1}{P_i\pi}}. \quad (2.1)$$

Масса чёрной дыры при этом оказывается равной

$$M = \frac{r_+}{2} \left(1 + \frac{Q^2}{r_+^2} + \frac{r_+^2}{l^2} \right), \quad (2.2)$$



и в данном случае также сопоставляется с энтропией [9].

Подробный анализ процесса Джоуля–Томсона в заряженных АдС чёрных дырах проведен в работе [10], подтверждающей результаты, полученные в [6]. По этой причине здесь приведём лишь окончательное выражение для температуры инверсии, параметризованное зарядом

$$T_i = \frac{\sqrt{P_i}}{\sqrt{2\pi}} \frac{(1 + 16\pi P_i Q^2 - \sqrt{1 + 24\pi P_i Q^2})}{(-1 + \sqrt{1 + 24\pi P_i Q^2})^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.3)$$

Используя (2.1) и (2.3), получаем окончательный вид кривых инверсии в TP -плоскости с зарядовой параметризацией. Семейство кривых инверсии приведено на рисунке 2.1 (а). Поведение изоэнтальп, следующее из (2.2) демонстрируется на рисунке 2.1 (б).

Из рисунка 2.1 (б) видно, что область положительного эффекта находится над кривыми инверсии для любого заряда Q , что также следует из вида изоэнтальп.

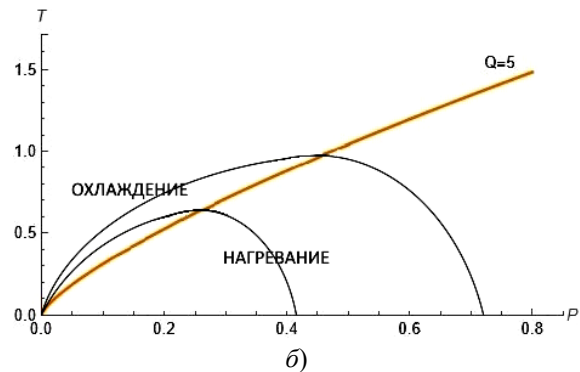


Рисунок 2.1 – а) семейство кривых инверсии для заряженной АдС чёрной дыры, параметризованное зарядом Q ;

б) кривая инверсии для заряженной АдС чёрной дыры с $Q = 5$, областями положительного (охлаждение) и отрицательного (нагревание) эффекта Джоуля – Томсона и двумя изоэнтальпами

3 Джоуль-томсоновское расширение жидкости Редлиха – Квонга

Стандартное уравнение состояния Редлиха – Квонга, например [10], [11] может быть записано в виде

$$P = \frac{k_B T}{v-b} - \frac{a}{\sqrt{T}v(v+b)} \quad (3.1)$$

при условии введения параметра $v = V/N$, где V – объём, N – постоянное число частиц, P – давление, T – температура, k_B – постоянная Больцмана, а параметры сил парного межмолекулярного отталкивания и притяжения заданы заменами $b \Rightarrow b/N$, $a \Rightarrow a/N^2$.

Уравнение (3.1) и определение (0.1) дают явный вид параметра λ

$$\lambda = -\frac{k_B T b}{(v-b)^2} + \frac{5av + 3ab}{2\sqrt{T}v(v+b)^2}. \quad (3.2)$$

Из (3.2) следует выражение для T_i , которое совместно с (3.1) определяет систему уравнений для построения кривой инверсии

$$\begin{cases} T_i = \left[\left(\frac{5av + 3ab}{2k_B b v} \right) \left(\frac{v-b}{v+b} \right)^2 \right]^{\frac{2}{3}}; \\ P = \frac{k_B T_i}{v-b} - \frac{a}{\sqrt{T_i}v(v+b)}. \end{cases} \quad (3.3)$$

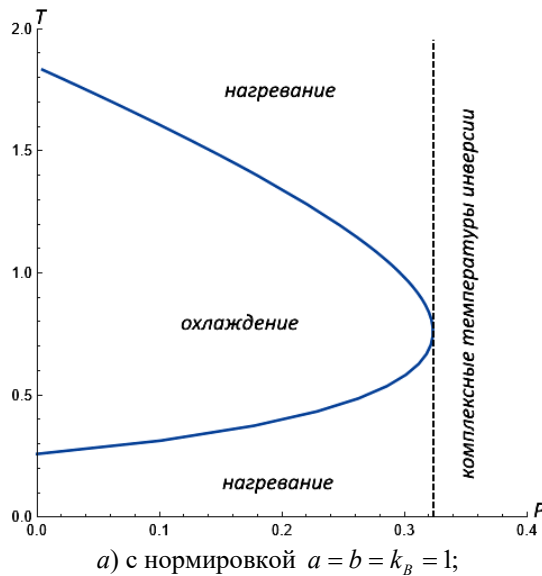
В свою очередь, формула (3.2) по очевидному асимптотическому поведению $\lambda_{T \rightarrow \infty} < 0$ позволяет выделить области положительного и отрицательного эффекта – охлаждения и нагревания соответственно, что позволяет не

использовать явный вид графического поведения изотермических кривых. Уравнения (18) также определяют физическую область некомплексных и неотрицательных температур в TP -плоскости. Вышесказанное в случае фиксации параметров $k_B = a = b = 1$, по аналогии с [5] и [6], проиллюстрировано на рисунке 3.1 (а).

Также следует отметить, что приведенная форма уравнения Редлиха – Квонга, учитывающая значения критических параметров

$$P_{кр} = \left(\frac{a^2 k_B \xi^7}{3b^5} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad T_{кр} = \left(\frac{3a\xi^2}{k_B b} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad V_{кр} = \frac{b}{\xi},$$

где $\xi = \sqrt[3]{2} - 1 \approx 0,259921 \approx 0,260$, ранее изучалась в рамках процесса Джоуля – Томсона в уже вышеупомянутой работе [11]. В этом случае



система уравнений для инверсионной кривой имеет вид:

$$\begin{cases} T_{i,r} = \left[\frac{(5V_r + 3\xi)}{6\xi^2 V_r} \left(\frac{V_r - \xi}{V_r + \xi} \right)^2 \right]^{\frac{2}{3}}; \\ P_r = \frac{3T_{i,r}}{V_r - \xi} - \frac{1}{\xi \sqrt{T_{i,r}} V_r (V_r + \xi)}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Приведенная кривая инверсии, следующая из (3.4) изображена на рисунке 3.1 (б).

Критерий выделения областей нагревания и охлаждения и в этом случае тот же $\lambda_{r,T \rightarrow \infty} < 0$ и также не требует явного вида изотермических кривых.

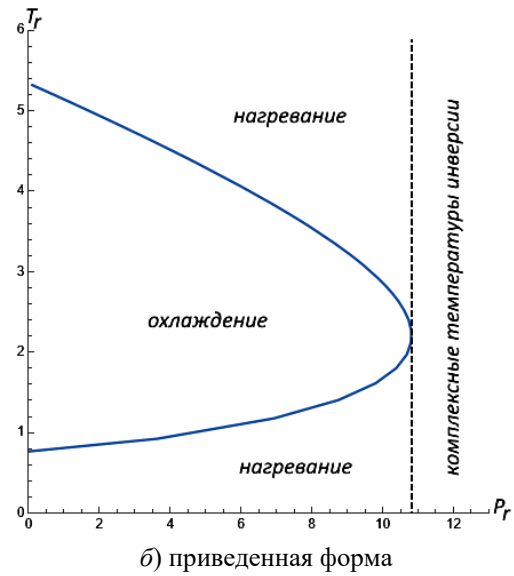


Рисунок 3.1 – Кривая инверсии для жидкости Редлиха – Квонга

4 Джоуль-томсоновское расширение жидкости Бергло

Уравнение состояния Бергло [7] также может быть записано в виде с использованием $v = V / N$

$$P = \frac{k_B T}{v - b} - \frac{a}{T v^2}. \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) и определение (0.1) дают явный вид λ

$$\lambda = \frac{3a}{T v^2} - \frac{k_B T b}{(v - b)^2}. \quad (4.2)$$

Тогда из (4.2) следует выражение для T_i , а из него находим v :

$$T_i = \sqrt{\frac{3a}{k_B b}} \frac{v - b}{v}, \quad v = \sqrt{\frac{3ab}{k_B}} \left(\sqrt{\frac{3a}{k_B b}} - T_i \right)^{-1}.$$

Подстановка v в (4.1) приводит к уравнению

$$P = \sqrt{\frac{25ak_B}{3b^3}} - \frac{4k_B T_i}{3b} - \frac{a}{b^2 T_i},$$

которое переписывается в удобном для анализа виде

$$T_i^2 + \left(\frac{3b}{4k_B} P - \sqrt{\frac{75a}{16k_B b}} \right) T_i + \frac{3a}{4k_B b} = 0. \quad (4.3)$$

Решения уравнения (4.3) задают вид верхней и нижней кривых инверсии

$$\begin{aligned} T_i^{upper/lower} = & \left(\sqrt{\frac{75a}{64k_B b}} - \frac{3b}{8k_B} P \right) \pm \\ & \pm \sqrt{\left(\sqrt{\frac{75a}{64k_B b}} - \frac{3b}{8k_B} P \right)^2 - \frac{3a}{4k_B b}}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

а также позволяют выделить физическую область некомплексных и неотрицательных температур в TP -плоскости, что изображено на рисунке 4.1 (а). Физическое и максимальные значения давления следующие

$$0 \leq P \leq \sqrt{\frac{ak_B}{3b^3}}, \quad P_{\max} = \sqrt{\frac{ak_B}{3b^3}}.$$

При этом предельные значения температур также становятся известны:

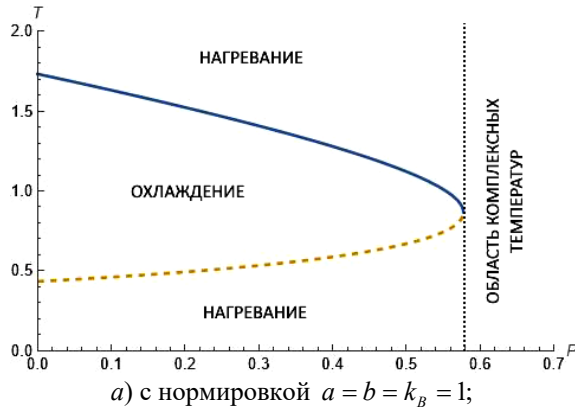
$$T_i(P_{\max}) = \sqrt{\frac{3a}{4k_B b}}, \quad T_i^{\text{lower}}(0) = \sqrt{\frac{3a}{16k_B b}},$$

$$T_i^{\text{upper}}(0) = \sqrt{\frac{3a}{k_B b}}.$$

Ранее приведенная форма уравнения Бергло, полученная с использованием критических параметров

$$P_{\text{кр}} = \left(\frac{ak_B}{216b^3}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad T_{\text{кр}} = \left(\frac{8a}{27k_B b}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad V_{\text{кр}} = 3b,$$

изучалась в рамках процесса Джоуля – Томсона



в работе [12]. Полученная в этой работе приведенная кривая инверсии изображена на рисунке 4.1 (б).

В этом случае верхние и нижние кривые инверсии имеют вид

$$T_{i,r}^{\text{upper/lower}}(P_{i,r}) = \frac{3}{64} \left[(30\sqrt{2} - P_{i,r}) \pm \sqrt{(30\sqrt{2} - P_{i,r})^2 - 1152} \right].$$

Идентификация на графиках областей нагревания и охлаждения в обоих случаях не требует явного вида изохентальпических кривых, а очевидна из (4.2), так как $\lambda_{T \rightarrow \infty} < 0$

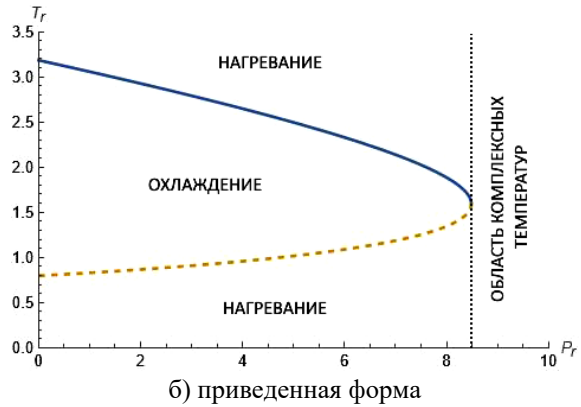


Рисунок 4.1 – Нижняя (пунктирная линия) и верхняя (непрерывная линия) кривые инверсии для жидкости Бергло

5 Джоуль-томсоновское расширение жидкости Дитеричи I

Уравнение состояния Дитеричи I записывается как

$$P = \frac{k_B T}{v-b} \exp\left(-\frac{a}{k_B T v}\right). \quad (5.1)$$

В этом случае уравнение (5.1) и определение (0.1) дают явный вид параметра процесса

$$\lambda = \frac{1}{v-b} \exp\left(-\frac{a}{k_B T v}\right) \left[k_B T + \frac{2a}{v} - \frac{k_B T v}{v-b} \right],$$

который при условии инверсии $\lambda = 0$ и $T = T_i$ приводит к связи

$$k_B T_i + \frac{2a}{v} - \frac{k_B T_i v}{v-b} = 0. \quad (5.2)$$

Использование (5.1) и (5.2) позволяет получить формулу для кривой инверсии

$$P = \frac{1}{b} \left(\frac{2a}{b} - k_B T_i \right) \exp\left[\frac{1}{2} - \frac{a}{b k_B T_i} \right],$$

которая представлена на рисунке 5.1 (а) с указанием областей охлаждения и нагревания.

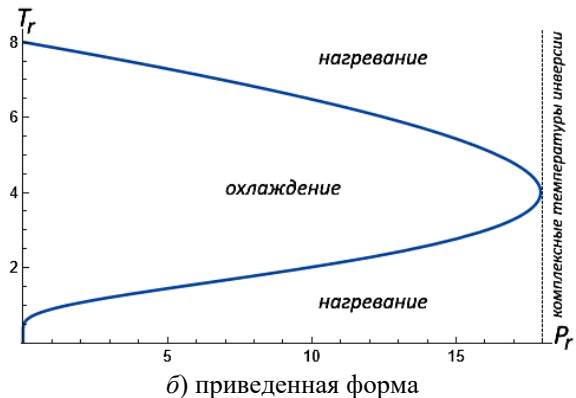
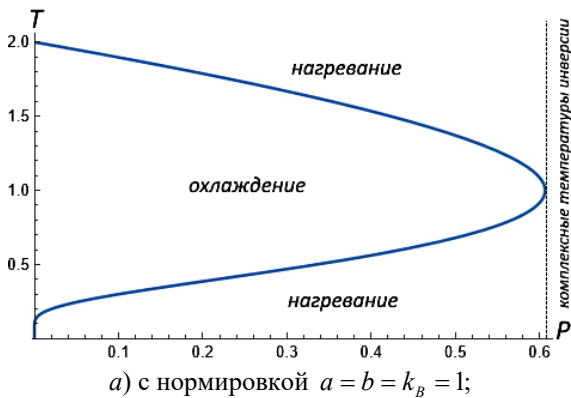


Рисунок 5.1 – Кривая инверсии для жидкости Дитеричи I

Ранее в работе [12] была получена кривая инверсии для уравнения Дитеричи I в терминах приведенных переменных, изображённая на рисунке 5.1 (б). В этом случае

$$P_r = (8 - T_r) \exp \left[\frac{5}{2} - \frac{4}{T_i} \right].$$

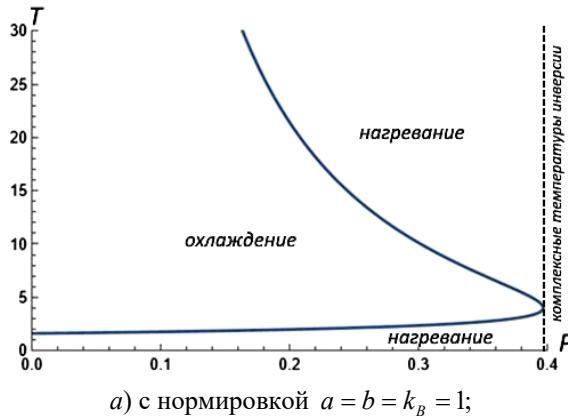
6 Джоуль-томсоновское расширение жидкости Дитеричи II

Уравнение состояния Дитеричи II представляется в виде

$$P = \frac{k_B T}{v - b} - \frac{a}{v^{5/3}}. \quad (6.1)$$

Уравнение состояния (6.1) и определение (0.1) в этом случае дают следующий вид параметра процесса

$$\lambda = \frac{5a}{3v^{5/3}} - \frac{k_B T b}{(v - b)^2},$$



который при инверсии $\lambda = 0$ и $T = T_i$ приводит к связи

$$T_i = \frac{5a}{3k_B b} \frac{(v - b)^2}{v^{5/3}};$$

$$T_i = \left(P + \frac{a}{v^{5/3}} \right) (v - b) \frac{1}{k_B}. \quad (6.2)$$

Пара уравнения из (6.2) не позволяет получить явное аналитическое выражение $T_i = T_i(P)$ для кривой инверсии, но ее графический вид, представленный на рисунке 6.1 (а), легко определить численными методами. В работе [13] была получена инверсионная кривая для уравнения Дитеричи II в терминах приведенных переменных, изображённая на рисунке 6.1 (б). В этом случае система уравнений для кривой инверсии имеет следующий вид:

$$T_{i,r} = \frac{4(4V_r - 1)^2}{9V_r^{5/3}}; \quad T_{i,r} = \frac{1}{15} \left(P_r + \frac{4}{V_r^{5/3}} \right) (4V_r - 1).$$

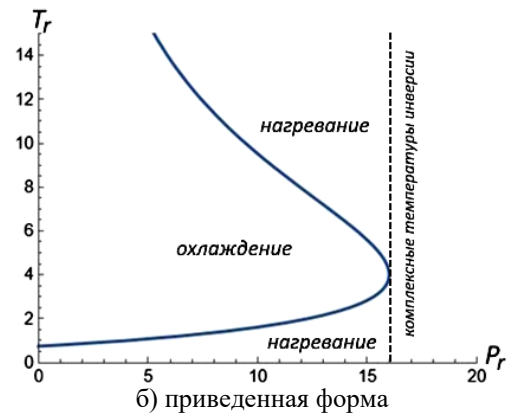


Рисунок 6.1 – Кривая инверсии для жидкости Дитеричи II

7 Сходства и различия

Предполагая физическую тождественность TP -плоскостей для рассматриваемых макросистем при условии использования рациональной системы единиц и нормировки $a = b = k_B = 1$, укажем на их выявленные сходства и различия при джоуль-томсоновском расширении.

Сходства:

1. Термодинамические уравнения состояния Керровских и заряженных чёрных дыр, как и двухпараметрических неидеальных жидкостей, допускают физически корректный анализ в рамках джоуль-томсоновского расширения, тем самым, делая возможной реализацию процесса в данных макросистемах.

2. Для всех рассмотренных макросистем кривые инверсии знака дифференциального эффекта Джоуля – Томсона построены в TP -плоскости.

3. Для всех рассмотренных макросистем определены и указаны на графиках области

положительного и отрицательного эффекта на основе поведения параметров процесса λ или μ .

4. Поведение кривых инверсии чёрных дыр допускает сравнение с поведением только «нижних» кривых инверсии неидеальных газов.

5. Влияние параметризации зарядом или моментом инерции на вид кривых инверсии АдС чёрных дыр позволяет сделать вывод о наличии некоторого заряда или момента инерции, при котором их кривые инверсии имеют точку касания A с кривыми инверсии жидкостей. Так, например, в работе [10] было показано, что для заряженных АдС чёрных дыр и жидкости Редлиха – Квонга данной ситуации соответствует заряд $Q = 2,75$. Координаты точки касания: $P_A = 0,28$; $T_A = 0,43$.

6. Так как область положительного эффекта у чёрных дыр располагается над кривой инверсии, то при прохождении кривой ниже точки касания эта область полностью содержит область положительного эффекта неидеальной жидкости, что позволяет в этом случае использовать

«жидкостную» терминологию применительно к чёрным дырам.

7. Наличии точки касания с нижней стороны кривой инверсии говорит о правомерности использования термина «жидкость» для вещества в модели Редлиха – Квонга и других, так как именно нижняя часть соответствует жидкой фазе состояния.

Различия:

1. Область положительного эффекта чёрных дыр не имеет ограничения сверху.

2. У чёрных дыр в TP -плоскости не возникает нефизическая область комплексных температур.

3. Область положительного эффекта для неидеальных жидкостей в TP -плоскости фиксирована, в то время как область положительного эффекта для чёрных дыр увеличивается с уменьшением заряда или момента инерции.

Заключение

В работе рассмотрено джоуль-томсоновское расширение Керровской и заряженной черных дыр в АдС-пространстве и ряда двухпараметрических неидеальных жидкостей. Масса черной дыры в АдС пространстве отождествлялась с энтальпией и считалась постоянной. Во всех случаях получены кривые инверсии знака дифференциального эффекта Джоуля – Томсона и определены области охлаждения и нагревания, то есть показано, что на уровне современных термодинамических представлений в рассматриваемых макросистемах реализация процесса Джоуля – Томсона физически допустима. Проведен возможный сравнительный анализ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bekenstein, J.D.* Black holes and the second law / J.D. Bekenstein // *Lett. Nuovo Cimento*. – 1972. – Vol. 4. – P. 737–740.
2. *Hawking, S.W.* Black hole explosions? / S.W. Hawking // *Nature*. – 1974. – Vol. 248. – P. 30–31.
3. *Hawking, S.W.* Thermodynamics of black holes in anti-de Sitter space / S.W. Hawking, D.N. Page // *Commun. Math. Phys.* – 1983. – Vol. 87. – P. 577–588.
4. *Charged AdS Black Holes and Catastrophic Holography* / A. Chamblin, R. Emparan, C.V. Johnson, R.C. Myers // *Phys. Rev. D*. – 1999. – Vol. 60. – P. 064018.

5. *Ökcü, Ö.* Joule – Thomson expansion of Kerr-AdS black holes / Ö. Ökcü, E. Aydiner // *Eur. Phys. J. C*. – 2018. – Vol. 78. – Art. № 123.

6. *Ökcü, Ö.* Joule – Thomson expansion of the charged AdS black holes / Ö. Ökcü, E. Aydiner // *Eur. Phys. J. C*. – 2017. – Vol. 77. – Art. № 24.

7. *Румер, Ю.Б.* Термодинамика, статистическая физика и кинетика / Ю.Б. Румер, М.Ш. Рывкин. – Новосибирск: НГУ, 2000. – 608 с.

8. *Hendricks, R.C.* Joule – Thomson Inversion Curves and Related Coefficients for Several Simple Fluids / R.C. Hendricks, I.C. Peller, A.K. Baron // *NASA Technical Note TN D-6807*. – NASA, 1972. – 59 p.

9. *Kastor, D.* Enthalpy and the Mechanics of AdS Black Holes / D. Kastor, S. Ray, J. Traschen // *Class. Quantum Gravity*. – 2009. – Vol. 26. – P. 195011.

10. *Новикова, О.В.* Джоуль-томсоновское расширение: жидкость Редлиха – Квонга и заряженная АдС чёрная дыра / О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2025. – № 2 (63). – С. 30–34.

11. *Дей, Е.А.* Расчет параметров изохнтальпического охлаждения газов Редлиха – Квонга / Е.А. Дей, О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков // *Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины*. – 2012. – № 6 (75). – С. 38–42.

12. *Тюменков, Г.Ю.* Об эффекте Джоуля-Томсона в газах Бертло и Дитеричи-I / Г.Ю. Тюменков, С.В. Станкевич, Т.В. Скачёк // *Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины*. – 2009. – № 4 (55). – С. 184–187.

13. *Тюменков, Г.Ю.* О некоторых параметрах и изохнтальпическом охлаждении газа Дитеричи II / Г.Ю. Тюменков, Е.А. Дей, О.В. Гарнаванская // *Чрезвычайные ситуации: Образование и наука*. – 2011. – Т. 6, № 1. – P. 135–140.

Поступила в редакцию 01.09.2025.

Информация об авторах

Новикова Ольга Владимировна – магистр ф.-м.н.
Тюменков Геннадий Юрьевич – к.ф.-м.н., доцент

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЯТИСЛОЙНОЙ СИММЕТРИЧНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ ПЛАСТИНЫ

В.С. Салицкий

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

EQUATIONS OF EQUILIBRIUM OF AN ELASTIC-PLASTIC PENTALAYER SYMMETRIC IN THICKNESS PLATE

V.S. Salicki

Belarusian State University of Transport, Gomel

Аннотация. Предложена постановка краевой задачи об изгибе симметричной по толщине упругопластической круглой пятислойной пластины с двумя заполнителями. Деформирование внутреннего и внешних несущих слоев подчиняется гипотезам Кирхгофа. В сравнительно толстых заполнителях выполняется гипотеза Тимошенко. Физические уравнения состояния соответствуют теории малых упругопластических деформаций. Система нелинейных дифференциальных уравнений равновесия пластины получена вариационным методом Лагранжа с учетом работы касательных напряжений в заполнителях. Для ее решения предложен итерационный метод, основанный на методе упругих решений Ильюшина. Искомые функции являются прогиб пластины и относительный сдвиг в заполнителях.

Ключевые слова: круглая пятислойная пластина, симметрия по толщине, упругопластическое деформирование, уравнения равновесия.

Для цитирования: Салицкий, В.С. Уравнения равновесия упругопластической пятислойной симметричной по толщине пластины / В.С. Салицкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 4 (65). – С. 42–46. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_42. – EDN: VWYSNY

Abstract. The paper proposes a formulation of the boundary value problem for the bending of a thickness-symmetric elastoplastic circular five-layer plate with two fillers. The deformation of the inner and outer load-bearing layers is governed by Kirchhoff's hypotheses. In the relatively thick fillers, Timoshenko's hypothesis is assumed. The physical state equations correspond to the theory of small elastoplastic deformations. The system of nonlinear differential equations of plate equilibrium is obtained with the variational method of Lagrange, taking into account the work of tangential stresses in the fillers. An iterative method based on the Ilyushin method of elastic solutions is proposed to solve this problem. The sought functions are the deflection of the plate and the relative shear in the fillers.

Keywords: circular five-layer plate, thickness symmetry, elastic-plastic deformation, equations of equilibrium.

For citation: Salicki, V.S. Equations of equilibrium of an elastic-plastic pentalayer symmetric in thickness plate / V.S. Salicki // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 4 (65). – P. 42–46. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_42 (in Russian). – EDN: VWYSNY

Введение

Слоистые элементы конструкций широко применяются в различных областях современной техники и строительства. Это потребовало разработку методик их расчета при различных внешних воздействиях. В монографиях [1]–[8] предлагаются подходы к разработке расчетных моделей трехслойных конструкций, выполненных из композитных материалов, проявляющих в процессе деформирования физически нелинейные свойства. Несущие слои, как правило, приняты тонкими, достаточно жесткими, подчиняющимися гипотезам Бернулли (Кирхгофа). В легких заполнителях справедлива гипотеза Тимошенко, т. е. учитывается деформация относительного сдвига.

В статьях [9]–[11] рассмотрены особенности колебаний трехслойных стержней, связанных

с упругим основанием и находящихся под действием локальных, импульсных и нестационарных нагрузок. Свободные и собственные колебания трехслойных и пятислойных пластин и стержней исследованы в работах [12]–[14]. Для решения соответствующих начально-краевых задач использован метод разложения искомых перемещений в ряды по системам собственных функций. В статьях [15]–[17] исследованы динамические характеристики цилиндрических и сферических оболочек с учетом влияния упругого основания и нестационарного контактного взаимодействия.

Деформирование трехслойных пластин, связанных с упругим основанием исследовано в публикациях [18]–[20].

Изгиб упругой круглой пятислойной симметричной по толщине пластины непрерывными

и локальными нагрузками рассмотрен в статьях [21]–[24]. Здесь приводится нелинейная система дифференциальных уравнений равновесия симметричной по толщине упругопластической пятислойной пластины.

1 Постановка задачи

В пятислойной, симметричной по толщине пластине введена цилиндрическая система координат, связанная со срединной плоскостью внутреннего несущего слоя (рисунок 1.1). В достаточно тонких жестких несущих слоях (1, 2, 4) справедливы гипотезы Кирхгофа. Для описания деформирования сравнительно толстых заполнителей (3, 5) используется гипотеза Тимошенко, учитывающая поворот нормали на дополнительный угол $\psi(r)$ – относительный сдвиг. Искомые функции являются прогиб пластины $w(r)$ и $\psi(r)$. Осесимметричная нагрузка $q(r)$ распределена по поверхности пластины. На контуре ($r = r_0$) принимается наличие жесткой диафрагмы, которая не допускает относительный сдвиг ($\psi = 0$). Через h_k – обозначена толщина k -го слоя, причем $h_2 = h_4$, $h_3 = h_5$.

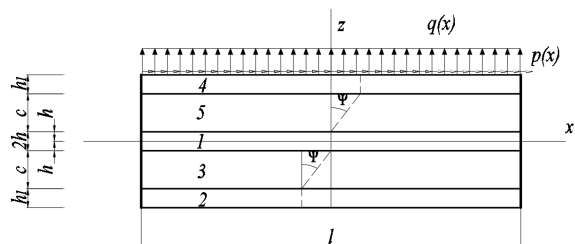


Рисунок 1.1 – Расчетная схема и нумерация слоев в пятислойной пластине

Из гипотезы Тимошенко о прямолинейности нормалей заполнителей следует

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{rz}^{(5)} &= u_{r,z}^{(5)} + w_{,r} = \psi, \\ 2\varepsilon_{rz}^{(3)} &= u_{r,z}^{(3)} + w_{,r} = \psi, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\psi(r)$ – относительный сдвиг в заполнителях (3), (5), запятой в индексе обозначена операция дифференцирования по следующей за ней координате, числовые индексы здесь и далее, если другое не указано, обозначают номера слоев.

После интегрирования соотношений (1.1) получим формулы для вычисления радиальных перемещений $u_r^{(k)}$ в слоях:

$$\begin{aligned} u_r^{(4)} &= -zw_{,r} + h_5\psi, \quad \frac{h_1}{2} + h_5 \leq z \leq \frac{h_1}{2} + h_5 + h_4; \\ u_r^{(5)} &= -zw_{,r} + \left(z - \frac{h_1}{2}\right)\psi, \quad \frac{h_1}{2} \leq z \leq \frac{h_1}{2} + h_5; \\ u_r^{(1)} &= -zw_{,r}, \quad -\frac{h_1}{2} \leq z \leq \frac{h_1}{2}; \\ u_r^{(3)} &= -zw_{,r} + \left(z + \frac{h_1}{2}\right)\psi, \quad -\frac{h_1}{2} - h_3 \leq z \leq -\frac{h_1}{2}; \end{aligned}$$

$$u_r^{(2)} = -zw_{,r} - h_3\psi, \quad -\frac{h_1}{2} - h_3 - h_2 \leq z \leq -\frac{h_1}{2} - h_3; \quad (1.2)$$

где z – координата рассматриваемой точки поперечного сечения; $h_5\psi$, $-h_3\psi$ – величины смещений верхнего и нижнего несущих слоев за счет относительного сдвига в предстоящих заполнителях.

Искомые функциями являются прогиб пластины $w(r)$, радиальное перемещение $u(r)$, относительные сдвиги $\psi_1(r)$ и $\psi_2(r)$. Деформации следуют из (1.2) и соотношений Коши [1]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(4)} &= -zw_{,rr} + h_5\psi_{1,r}, \quad \varepsilon_\phi^{(4)} = \frac{1}{r}(-zw_{,r} + h_5\psi_1), \\ \varepsilon_{rz}^{(4)} &= 0, \quad \varepsilon_r^{(5)} = -zw_{,rr} + \left(z - \frac{h_1}{2}\right)\psi_{1,r}, \\ \varepsilon_\phi^{(5)} &= \frac{1}{r}\left(-zw_{,r} + \left(z - \frac{h_1}{2}\right)\psi_1\right), \quad \varepsilon_{rz}^{(5)} = \frac{\psi}{2}, \\ \varepsilon_r^{(1)} &= -zw_{,rr}, \quad \varepsilon_\phi^{(1)} = -\frac{1}{r}zw_{,r}, \\ \varepsilon_r^{(3)} &= -zw_{,rr} + \left(z + \frac{h_1}{2}\right)\psi_{2,r}, \\ \varepsilon_\phi^{(3)} &= \frac{1}{r}\left(-zw_{,r} + \left(z + \frac{h_1}{2}\right)\psi_2\right), \quad \varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{\psi}{2}, \\ \varepsilon_r^{(2)} &= -zw_{,rr} - h_3\psi_{2,r}, \quad \varepsilon_\phi^{(2)} = \frac{1}{r}(-zw_{,r} - h_3\psi_2), \\ \varepsilon_{rz}^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Связь напряжений и деформаций в слоях описывается соотношениями теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [1], которые справедливы также и для нелинейно упругих материалов при прямом нагружении:

$$\begin{aligned} s_\alpha^{(k)} &= 2G_k \left(1 - \omega_k \left(\varepsilon_u^{(k)}\right)\right) \varepsilon_\alpha^{(k)}, \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k \varepsilon^{(k)} \quad (\alpha = r, \phi; k = 1, \dots, 5), \\ s_{rz}^{(3)} &= G_3 \left(1 - \omega_3 \left(\varepsilon_u^{(3)}\right)\right) \psi_2, \\ s_{rz}^{(5)} &= 2G_3 \left(1 - \omega_3 \left(\varepsilon_u^{(5)}\right)\right) \psi_1, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $s_\alpha^{(k)}$, $s_{rz}^{(3)}$, $s_{rz}^{(5)}$, $\varepsilon_\alpha^{(k)}$ – девиаторы, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций; G_k , K_k – модули сдвига и объемной деформации материалов слоев, причем материалы внешних несущих слоев одинаковы, заполнители тоже ($G_3 = G_5$, $K_3 = K_5$); $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций, в нашем случае

$$\varepsilon_u^{(k)} = \frac{2}{3} \sqrt{\left(\varepsilon_\phi^{(k)}\right)^2 + \left(\varepsilon_r^{(k)}\right)^2 - \varepsilon_r^{(k)} \varepsilon_\phi^{(k)} + 3\left(\varepsilon_{rz}^{(k)}\right)^2},$$

причем $\varepsilon_{rz}^{(1)} = \varepsilon_{rz}^{(2)} = \varepsilon_{rz}^{(4)} = 0$; $\omega_k \left(\varepsilon_u^{(k)}\right)$ – функции пластичности и физической нелинейности материалов слоев, которые при $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}$ обращаются в ноль; $\varepsilon_y^{(k)}$ – деформационный предел текучести

материалов несущих слоев; $\varepsilon_s^{(k)}$ – предел физической нелинейности материала заполнителей.

Используя компоненты тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha = r, \varphi$), введем обобщенные внутренние усилия и моменты в пластине:

$$\begin{aligned} T_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^5 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^5 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \\ M_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^5 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^5 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \\ Q &= \int_{h_5} \sigma_{rz}^{(5)} dz + \int_{h_3} \sigma_{rz}^{(3)} dz, \\ H_\alpha &= h_3 (T_\alpha^{(4)} - T_\alpha^{(2)}) - \frac{h_1}{2} (T_\alpha^{(5)} - T_\alpha^{(3)}) + \\ &\quad + M_\alpha^{(5)} + M_\alpha^{(3)}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

Система дифференциальных уравнений равновесия во внутренних обобщенных усилиях рассматриваемой упругой пластины была получена с использованием принципа возможных перемещений Лагранжа в [26]:

$$\begin{aligned} H_{r,r} + \frac{1}{r} (H_r - H_\varphi) - Q &= 0; \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r} (2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) &= -q. \end{aligned} \quad (1.6)$$

На границе $r = 1$ должны выполняться силовые условия

$$\begin{aligned} H_r &= H_r^0, \quad M_r = M_r^0, \\ M_{r,r} + \frac{1}{r} (M_r - M_\varphi) &= Q^0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Система уравнений (1.6) и силовые граничные условия (1.7) будут справедливы и в рассматриваемом случае, т. к. при их выводе не были использованы физические уравнения связи напряжений с деформациями.

Используя соотношения (1.4), выразим компоненты тензора напряжений в слоях пластины через девиаторную, шаровую части тензора деформаций и нелинейную составляющую:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^{(k)} &= 2G_k \varepsilon_\alpha^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)} - 2G_k \omega_k \varepsilon_\alpha^{(k)} \\ (\alpha &= r, \varphi; k = 1, \dots, 5), \\ \sigma_{rz}^{(3)} &= 2G_3 \varepsilon_{rz}^{(3)} - 2G_3 \omega_3 \varepsilon_{rz}^{(3)}, \\ \sigma_{rz}^{(5)} &= 2G_3 \varepsilon_{rz}^{(5)} - 2G_3 \omega_3 \varepsilon_{rz}^{(5)}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Выделим в компонентах тензора напряжений (1.8) упругие (индекс «е») и неупругие (индекс «ω») слагаемые:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^{(k)} &= \sigma_{ae}^{(k)} - \sigma_{a\omega}^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi; k = 1, \dots, 5), \\ \sigma_{rz}^{(3)} &= \sigma_{rze}^{(3)} - \sigma_{rz\omega}^{(3)}, \quad \sigma_{rz}^{(5)} = \sigma_{rze}^{(5)} - \sigma_{rz\omega}^{(5)}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{ae}^{(k)} &= 2G_k \varepsilon_\alpha^{(k)} + K_k \theta^{(k)}, \\ \sigma_{a\omega}^{(k)} &= 2G_k \omega_k \varepsilon_\alpha^{(k)}, \\ \sigma_{rze}^{(3)} &= 2G_3 \varepsilon_{rz}^{(3)}, \quad \sigma_{rz\omega}^{(3)} = 2G_3 \omega_3 \varepsilon_{rz}^{(3)}, \\ \sigma_{rze}^{(5)} &= 2G_3 \varepsilon_{rz}^{(5)}, \quad \sigma_{rz\omega}^{(5)} = 2G_3 \omega_3 \varepsilon_{rz}^{(5)}. \end{aligned}$$

Внутренние усилия и моменты (1.5) в слоях пластины также разложим на линейную (индекс «е») и нелинейную (индекс «ω») составляющие:

$$\begin{aligned} T_\alpha^{(k)} &= T_{ae}^{(k)} - T_{a\omega}^{(k)}, \quad M_\alpha^{(k)} = M_{ae}^{(k)} - M_{a\omega}^{(k)}, \\ Q_i &= Q_{ie} - Q_{i\omega}, \\ (\alpha &= r, \varphi; i = 1, 2; k = 1, \dots, 5), \end{aligned} \quad (1.10)$$

где упругие $T_{ae}^{(k)}, M_{ae}^{(k)}, Q_{ie}$ и нелинейные составляющие $T_{a\omega}^{(k)}, M_{a\omega}^{(k)}, Q_{i\omega}$ вычисляются по интегральным формулам (1.5), в которых напряжения $\sigma_\alpha^{(k)}$ нужно заменить соответственно на $\sigma_{ae}^{(k)}$ и $\sigma_{a\omega}^{(k)}$, или $\sigma_{rze}^{(i)}$, на $\sigma_{rze}^{(i)}$ и $\sigma_{rz\omega}^{(i)}$ из соотношений (1.9).

После этого соответствующие обобщенные внутренние усилия, будут

$$\begin{aligned} T_\alpha &= T_{ae} - T_{a\omega} \equiv \sum_{k=1}^5 T_{ae}^{(k)} - \sum_{k=1}^5 T_{a\omega}^{(k)}, \\ M_\alpha &= M_{ae} - M_{a\omega} \equiv \sum_{k=1}^5 M_{ae}^{(k)} - \sum_{k=1}^5 M_{a\omega}^{(k)}, \\ H_\alpha &= H_{ae} - H_{a\omega}, \\ H_{ae} &= h_3 (T_{ae}^{(4)} - T_{ae}^{(2)}) - 0,5 (T_{ae}^{(5)} - T_{ae}^{(3)}) + \\ &\quad + M_{ae}^{(5)} + M_{ae}^{(3)}, \\ H_{a\omega} &= h_3 (T_{a\omega}^{(4)} - T_{a\omega}^{(2)}) - 0,5 h_1 (T_{a\omega}^{(5)} - T_{a\omega}^{(3)}) + \\ &\quad + M_{a\omega}^{(5)} + M_{a\omega}^{(3)}, \\ Q_\alpha &= Q_{ae} - Q_{a\omega}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Так как уравнения равновесия в усилиях пятислойной пластины (1.6) и граничные условия (1.7) были получены без привлечения физических уравнений состояния, то ими можно воспользоваться и для упругопластической пластины. Подставив в них выражения для внутренних усилий (1.8), получим

$$\begin{aligned} H_{r,r} + \frac{1}{r} (H_r - H_\varphi) - Q &= p + h_\omega, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r} (2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) &= -q + q_\omega. \end{aligned} \quad (1.12)$$

На границе $r = 1$ должны выполняться силовые условия

$$\begin{aligned} H_r &= H_r^0 + H_{r\omega}, \quad M_r = M_r^0 + M_{r\omega}, \\ M_{r,r} + \frac{1}{r} (M_r - M_\varphi) &= \\ &= Q^0 + M_{r\omega,r} + \frac{1}{r} (M_{r\omega} - M_{\varphi\omega}). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь левая часть уравнений содержит линейные составляющие внутренних усилий, в которых нижний индекс «е» опущен для простоты. Справа сосредоточены члены с нижним индексом «ω», в которые включены добавки, отражающие физическую нелинейность материалов несущих слоев и заполнителя:

$$h_\omega = H_{r\omega,r} + \frac{1}{r} (H_{r\omega} - H_{\varphi\omega}) - Q_\omega,$$

$$q_\omega = M_{r\omega},_{rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega},_r - M_{\phi\omega},_r). \quad (1.14)$$

Линейные (упругие) составляющие обобщенных внутренних усилий по-прежнему выражаются через перемещения формулами, введенными в [25]–[28], поэтому система уравнений равновесия в перемещениях, соответствующая (1.12), сохраняет левую часть и приводится к виду:

$$\begin{aligned} L_2(a_4\psi - a_5w_{,r}) - 2cG_3\psi &= p + h_\omega, \\ L_3(a_5\psi - a_6w_{,r}) &= -q + q_\omega. \end{aligned} \quad (1.15)$$

где коэффициенты и операторы

$$\begin{aligned} a_4 &= \left[2K_2^+ h_2 h_3^2 + 2K_3^+ \frac{h_3^3}{3} \right], \\ a_5 &= \left[K_2^+ h_2 h_3 (h_1 + 2h_3 + h_2) + 2K_3^+ h_3 \left(\frac{h_1 h_3}{4} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right], \\ a_6 &= \left[2K_2^+ h_2 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + K_1^+ \frac{h_1^3}{12} + 2K_3^+ h_3 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right], \\ L_2(g) &\equiv \left(\frac{1}{r}(rg),_r \right),_r \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \\ L_3(g) &\equiv \frac{1}{r}(rL_2(g),_r),_r \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}. \end{aligned}$$

Для замыкания краевой задачи к системе (1.15) необходимо добавить силовые (1.14) либо кинематические граничные условия.

2 Методика решения задачи

Точное решение нелинейной системы дифференциальных уравнений (1.15) с граничными условиями (1.14) получить не представляется возможным, поэтому необходимо для ее исследования применять численные или приближенные методы.

Предполагается для решения применить алгоритм приближенного решения задачи, основанный на методе упругих решений Ильюшина, который позволяет на каждом шаге итерации рассматриваемую задачу сводить к соответствующей задаче теории упругости с некоторыми дополнительными «внешними» нагрузками. В этом случае система дифференциальных уравнений (1.15) принимает следующий рекуррентный вид:

$$\begin{aligned} L_2(a_4\psi^{(n)} - a_5w_{,r}^{(n)}) - 2cG_3\psi^{(n)} &= p + h_\omega^{(n-1)}, \\ L_3(a_5\psi^{(n)} - a_6w_{,r}^{(n)}) &= -q + q_\omega^{(n-1)}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где n – номер приближения.

Нелинейные добавки $q_\omega^{(n-1)}$, $h_\omega^{(n-1)}$ вычисляются на каждом шаге итерации по результатам предыдущего приближения по формулам типа (1.14) с учетом соотношений (1.11):

$$h_\omega^{(n-1)} = H_{r\omega}^{(n-1)},_r + \frac{1}{r}(H_{r\omega}^{(n-1)} - H_{\phi\omega}^{(n-1)}) - Q_\omega^{(n-1)},$$

$$q_\omega^{(n-1)} = M_{r\omega}^{(n-1)},_{rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega}^{(n-1)},_r - M_{\phi\omega}^{(n-1)},_r). \quad (2.2)$$

С силовыми граничными условиями (1.13) необходимо проделать подобную операцию.

Выводы

Предложенная система дифференциальных уравнений равновесия и методика ее решения позволяют при изгибе исследовать перемещения в пятислойной упругопластической пластине симметричной по толщине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков, А.Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Москва: Физматлит, 2005. – 576 с. – EDN: RXGSLJ.
2. Тарлаковский, Д.В. Общие соотношения и вариационные принципы математической теории упругости: учебное пособие / Д.В. Тарлаковский, Г.В. Федотенков; Федеральное агентство по образованию, Московский авиационный ин-т (гос. технический ун-т). – Москва: Изд-во МАИ-Принт, 2009. – 111 с.
3. Журавков, М.А. Математические модели механики твердого тела / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. – Минск: БГУ, 2021. – 535 с.
4. Zhuravkov, M.A. Mechanics of Solid Deformable Body / M.A. Zhuravkov, Lyu Yongtao, E.I. Starovoitov. – Singapore: Springer, 2022. – 317 p.
5. Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагрузках / А. Абдусаттаров, Э.И. Старовойтов, Н.Б. Рузиева. – Ташкент: «IDEAL PRESS», 2023. – 381 с.
6. Deformation of Three-layer Structural Elements in Thermal Radiation Fields // E.I. Starovoitov, M.A. Zhuravkov, D.V. Leonenko, Lyu Yongtao. – Springer Nature Singapore, Pte Ltd, 2024. – 384 p.
7. Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках / Э.И. Старовойтов, Ю.В. Шафиева, А.В. Нестерович, А.Г. Козел. – Гомель: БелГУТ, 2024. – 395 с.
8. Яровая, А.В. Строительная механика. Статика стержневых систем / А.В. Яровая. – Гомель: БелГУТ, 2013. – 447 с.
9. Старовойтов, Э.И. Особенности колебания трехслойного стержня при локальных и импульсных воздействиях / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, А.В. Яровая // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 7. – С. 122–129.
10. Vibrations of sandwich beam on an elastic foundation / V.D. Kubenko, Yu.M. Pleskachevskii, E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International

Applied Mechanics. – 2006. – Vol. 42, № 5. – P. 541–547.

11. Fedotenkov, G.V. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G.V. Fedotenkov, D.V. Tarlakovsky, Y.A. Vahterova // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 40. – № 4. – P. 439–447.

12. Старовойтов, Э.И. Свободные колебания в нейтронном потоке круговой трехслойной пластины, скрепленной с упругим основанием / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2012. – № 2. – С. 92–97.

13. Будникова, Д.А. Собственные частоты колебаний пятислойного стержня / Д.А. Будникова // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 11–15.

14. Лачугина, Е.А. Собственные колебания пятислойной круговой пластины при различных креплениях контура / Е.А. Лачугина // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 25–30.

15. Leonenko, D. V. Vibrations of Cylindrical Sandwich Shells with Elastic Core Under Local Loads / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // International Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 52, № 4. – P. 359–367. – DOI: 10.1007/s10778-016-0760-8.

16. Tarlakovskii, D.V. Two-Dimensional Non-stationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D.V. Tarlakovskii, G.V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, № 2. – P. 145–152.

17. Михайлова, Е.Ю. Обобщенная линейная модель динамики тонких упругих оболочек / Е.Ю. Михайлова, Д.В. Тарлаковский, Г.В. Федотенков // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2018. – Т. 160, № 3. – С. 561–577.

18. Старовойтов, Э.И. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом

основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2006. – Т. 3, № 4. – С. 55–62.

19. Starovoitov, E.I. Deformation of a composite plate on an elastic foundation by local loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, M. Suleyman // Mechanics of Composite Materials. – 2007. – Vol. 43, № 1. – P. 75–84.

20. Старовойтов, Э.И. Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / Э.И. Старовойтов, А.Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 392–406.

21. Салицкий, В.С. Изгиб защемленной по контуру круговой пятислойной пластины / В.С. Салицкий // Механика. Исследования и инновации. – Гомель, 2022. – Вып. 15 – С. 209–213.

22. Салицкий, В.С. Изгиб круговой пятислойной пластины / В.С. Салицкий // Теоретическая и прикладная механика. Минск, 2023. – Вып. 38 – С. 234–239.

23. Салицкий, В.С. Круглая пятислойная пластина под действием осесимметричной кольцевой нагрузки / В.С. Салицкий // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – № 17. – С. 114–119.

24. Салицкий, В.С. Изгиб локальной нагрузкой круглой пятислойной пластины / В.С. Салицкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 27–31.

Поступила в редакцию 10.09.2025.

Информация об авторах

Салицкий Владислав Сергеевич – аспирант

ТЕОРЕМА ФОСТЕРА ДЛЯ АНТЕННЫ В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С.Л. Соловцов¹, И.А. Фаняев¹, В.П. Кудин²¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины²Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого

FOSTER'S THEOREM FOR A FREE-SPACE ANTENNA

S.L. Solovtsov¹, I.A. Fanyaev¹, V.P. Kudzin²¹Francisk Skorina Gomel State University²Sukhoi State Technical University of Gomel

Аннотация. Рассматривается обобщение теоремы Фостера на случай антенны, излучающей в свободное пространство. Показано, что производная по частоте от фазы коэффициента отражения на входе антенны является положительной величиной и пропорциональна временной задержке излучаемого радиоимпульса. На основе леммы Лоренца и анализа энергетического баланса в объёме, окружающем антенну, выведено соотношение, связывающее эту задержку с запасом реактивной энергии в ближней зоне антенны. Полученное соотношение позволяет экспериментально определять время задержки по измеренным параметрам коэффициента отражения и использовать эту величину в качестве диагностической и сравнительной характеристики антенн. Теорема имеет практическую ценность для проектирования антенн и понимания фундаментальных физических ограничений.

Ключевые слова: теорема Фостера, антенна, вектор Пойнтинга, фаза коэффициента отражения, время задержки, радиоимпульс.

Для цитирования: Соловцов, С.Л. Теорема Фостера для антенны в свободном пространстве / С.Л. Соловцов, И.А. Фаняев, В.П. Кудин // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 4 (65). – С. 47–50. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_47. – EDN: WJVEXT

Abstract. A generalization of Foster's theorem to the case of an antenna radiating into free space is considered. It is demonstrated that the frequency derivative of the phase of the antenna input reflection coefficient is a positive quantity and is proportional to the time delay of the radiated radio pulse. By employing the Lorentz reciprocity lemma and analyzing the energy balance within a volume surrounding the antenna, a relationship is derived that links this time delay to the stored reactive energy in the antenna's near field. The obtained relation enables experimental determination of the time delay from measured reflection coefficient parameters and permits the use of this quantity as a diagnostic and comparative metric for antennas. The theorem holds practical significance for antenna design and for understanding fundamental physical limitations.

Keywords: Foster's theorem, antenna, Poynting vector, reflection coefficient phase, delay time, radio pulse.

For citation: Solovtsov, S.L. Foster's theorem for a free-space antenna / S.L. Solovtsov, I.A. Fanyaev, V.P. Kudzin // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 4 (65). – P. 47–50. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_47 (in Russian). – EDN: WJVEXT

Введение

В классической теории цепей и пассивных линейных систем широко известна теорема Фостера [1], утверждающая, что для любого пассивного двухполосника без потерь производная реактивного сопротивления (или проводимости) по частоте строго положительна. Эта теорема является прямым следствием принципа положительности запасённой реактивной энергии и играет ключевую роль при анализе резонансных цепей, синтезе фильтров и оценке физической реализуемости импедансов [2], [3]. Однако её применение традиционно ограничено закрытыми или внутренними цепями, где энергия локализована в реактивных элементах (индуктивностях и ёмкостях), а излучение отсутствует.

В то же время, антенна, как физическая система, принципиально отличается от классического

двухполосника: она представляет собой открытую электродинамическую структуру, предназначенную для преобразования энергии источника в излучаемые электромагнитные волны. В такой системе энергия не только запасается в ближней зоне в виде реактивных полей, но и непрерывно уходит в дальнюю зону в виде излучения. Это делает прямое применение классической теоремы Фостера к антеннам некорректным и требует её обобщения с учётом излучательных процессов.

Несмотря на значительный прогресс в антенной теории и теории электромагнитного излучения, в доступной литературе отсутствует строгое обобщение теоремы Фостера на случай антенны, излучающей в свободное пространство. Большинство работ, посвящённых анализу частотных характеристик антенн, ограничиваются

либо численным моделированием, либо эмпирическими оценками ширины полосы пропускания и добротности [4], [5]. В то же время понимание связи между фазой коэффициента отражения, запасённой реактивной энергией и временной задержкой излучаемого сигнала имеет фундаментальное значение как для теории, так и для практики – особенно в задачах сверхширокополосной связи, импульсной радиолокации и миниатюризации антенн.

Интерес к этой проблеме возобновился в контексте анализа фундаментальных пределов антенн. В работах [6]–[8] показано, что минимально достижимая добротность антенны связана с объёмом её реактивного поля и определяет пределы полосы пропускания и временной дисперсии. Особенно актуальной становится связь между временной задержкой радиоимпульса и фазовой характеристикой коэффициента отражения, поскольку именно эта задержка определяет искажения сигнала в импульсных системах.

В настоящей работе предлагается обобщение теоремы Фостера на случай антенны в свободном пространстве. Показано, что производная по частоте от фазы коэффициента отражения на входе антенны является положительной величиной и пропорциональна временной задержке излучаемого радиоимпульса. На основе леммы Лоренца и анализа энергетического баланса в объёме, окружающем антенну, выведено соотношение, связывающее эту задержку с запасом реактивной энергии в ближней зоне. Полученный результат позволяет экспериментально определять временную задержку по измеренным S -параметрам и использовать её в качестве диагностической и сравнительной характеристики антенн. Теорема имеет не только теоретическую, но и практическую ценность для проектирования антенн, особенно в условиях жёстких требований к временной и частотной стабильности сигнала.

1 Формулировка задачи

Пусть поле \vec{E}_1 , \vec{H}_1 – поле антенны на частоте ω_1 , \vec{E}_2 , \vec{H}_2 – на частоте ω_2 . Поле \vec{E}_2^* , $-\vec{H}_2^*$, удовлетворяет уравнениям Максвелла, поэтому можно применить лемму Лоренца к полям \vec{E}_1 , \vec{H}_1 и \vec{E}_2^* , $-\vec{H}_2^*$ в объёме V .

Поверхности, ограничивающие V (рисунок 1.1), состоят из S_R , которая охватывает антенну во внешнем пространстве, S_a – поверхность антенны, условно изображенной в виде рупора, повторяющая идеально проводящую конструкцию антенны, и участок S_ϕ – поперечное сечение питающего волновода, \vec{n} – нормаль.

Учитывая, что в объёме V отсутствуют сторонние токи и на поверхности S_a тангенциальная

составляющая поля \vec{E} равна нулю, лемма Лоренца примет следующий вид:

$$\int_{S_\phi + S_R} \left\{ \left[\vec{E}_2^* \vec{H}_1 \right] + \left[\vec{E}_1 \vec{H}_2^* \right] \right\} d\vec{S} = i(\omega_2 - \omega_1) \int_V \left(\epsilon \vec{E}_1 \vec{E}_2^* + \mu \vec{H}_1 \vec{H}_2^* \right) dV. \quad (1.1)$$

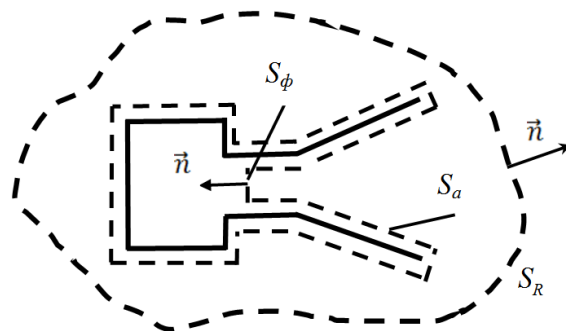


Рисунок 1.1 – Рупорная антенна в свободном пространстве

В сечении волновода S_ϕ поля представим в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= a_1 \vec{e} + b_1 \vec{e}^*; \\ \vec{E}_2 &= a_2 \vec{e} + b_2 \vec{e}^*; \\ \vec{H}_1 &= a_1 \vec{h} - b_1 \vec{h}^*; \\ -\vec{H}_2^* &= -a_2^* \vec{h}^* + b_2^* \vec{h}, \end{aligned}$$

где \vec{e} , \vec{h} – поле рабочего типа волны; a_1 , b_1 – амплитуды падающей от генератора на антенну и отраженной волны на частоте ω_1 ; a_2 , b_2 – амплитуды на частоте ω_2 .

Примем условия нормировки (учитывая направление нормали \vec{n})

$$-\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_{S_\phi} \left[\vec{e} \vec{h}^* \right] d\vec{S} \right) = 1.$$

После вставки в (1), получим

$$4a_1 a_2^* (1 - \Gamma_1 \Gamma_2^*) = \oint_{S_\phi} \left\{ \left[\vec{E}_2^* \vec{H}_1 \right] + \left[\vec{E}_1 \vec{H}_2^* \right] \right\} d\vec{S} - i(\omega_2 - \omega_1) \int_V \left(\epsilon \vec{E}_1 \vec{E}_2^* + \mu \vec{H}_1 \vec{H}_2^* \right) dV, \quad (1.2)$$

где $\Gamma = \frac{b}{a}$ – коэффициент отражения в волноводе, $\Gamma = |\Gamma| e^{-i\varphi}$, φ – фаза коэффициента отражения.

2 Доказательство теоремы Фостера для антенны

Предположим, что поверхность S_R – сфера радиусом R в дальней зоне антенны. Учитывая связь \vec{E} и \vec{H} в этой области, получим

$$1 - \Gamma_1 \Gamma_2^* = \frac{1}{2wa_1 a_2^*} \oint_{S_\phi} (\vec{E}_1 \vec{E}_2^*) dS - \\ - i \frac{\omega_2 - \omega_1}{4a_1 a_2^*} \int_V (\varepsilon \vec{E}_1 \vec{E}_2^* + \mu \vec{H}_1 \vec{H}_2^*) dV, \quad (2.1)$$

где $w = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ – волновое сопротивление пространства.

Представим поле \vec{E} антенны в дальней зоне в виде

$$\vec{E}(R, \theta, \varphi) = \vec{\xi}(\theta, \varphi) \frac{e^{-ik(R+\Delta)}}{R}. \quad (2.2)$$

Здесь $\vec{\xi}(\theta, \varphi)$ определяет ненормированную амплитудно-фазовую и поляризованную характеристику антенны в зависимости от угловых координат; $\Delta \ll R$ – разность хода между точкой в сечении S_ϕ фидера антенны и началом выбранной системы координат R, θ, φ .

После подстановки (2.2) в (2.1) получаем

$$\frac{1 - \Gamma_1 \Gamma_2^*}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{1}{2wa_1 a_2^*} \int_{4\pi} (\vec{\xi}_1 \vec{\xi}_2^*) \frac{e^{i(R+\Delta)(k_2 - k_1)}}{\omega_2 - \omega_1} d\Omega - \\ - \frac{i}{4a_1 a_2^*} \int_V (\varepsilon \vec{E}_1 \vec{E}_2^* + \mu \vec{H}_1 \vec{H}_2^*) dV. \quad (2.3)$$

Далее выделим мнимую часть (2.3) и найдём предел $\omega_1 \rightarrow \omega_2$:

$$-|\Gamma|^2 \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \frac{(R+\Delta)\sqrt{\varepsilon\mu}}{2w|a|^2} \oint_{4\pi} |\vec{\xi}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega - \\ - \frac{1}{4|a|^2} \int_V (\varepsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2) dV. \quad (2.4)$$

Учитывая баланс энергии

$$|a|^2 (1 - |\Gamma|^2) = \frac{1}{2w} \oint_{4\pi} |\vec{\xi}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega$$

получим

$$-|\Gamma|^2 \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \sqrt{\varepsilon\mu} (R+\Delta) (1 - |\Gamma|^2) - \\ - \frac{1}{4|a|^2} \int_V (\varepsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2) dV. \quad (2.5)$$

В свободном пространстве $\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{c}$, где c – скорость света.

Формулу (2.5) перепишем в виде

$$\frac{|\Gamma|^2}{1 - |\Gamma|^2} \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \\ = \frac{\frac{1}{4} \int_V (\varepsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2) dV}{|a|^2 (1 - |\Gamma|^2)} - \frac{(R+\Delta)}{c}. \quad (2.6)$$

Здесь в первом слагаемом в правой части числитель – полная энергия электромагнитного поля в объёме V , а знаменатель – излучаемый

антенной поток мощности, их отношение имеет размерность времени. Поэтому обозначим

$$\frac{\frac{1}{4} \int_V (\varepsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2) dV}{|a|^2 (1 - |\Gamma|^2)} = t. \quad (2.7)$$

Это время, требуемое для заполнения электромагнитным полем объёма V с момента включения генератора, питающего антенну. В результате получим

$$\frac{|\Gamma|^2}{1 - |\Gamma|^2} \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = t - t_0, \quad (2.8)$$

где $t_0 = \frac{(R+\Delta)}{c}$ – время распространения сигнала от точки в сечении S_ϕ волноводе антенны до

точки наблюдения в дальней зоне расходящейся сферической волны (2.2) на расстоянии R в выбранной системе координат.

Отметим, что в левой части (2.8) присутствуют экспериментально измеряемые параметры сигнала в волноводном тракте антенны. Проведя соответствующие измерения, можно определить разность

$$t - t_0 \geq 0, \quad (2.9)$$

так как c – максимальная скорость распространения сигналов.

Из (2.8), (2.9) следует неравенство

$$\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \geq 0. \quad (2.10)$$

Время $\Delta t = t - t_0$ можно интерпретировать как задержку сигнала антенной данного типа (данной конструкции) при передаче радиоимпульсов по сравнению со скоростью света, что нужно учитывать, например, в радиолокации.

Конструкция антенны определяет в том числе количество запасаемой мнимой реактивной энергии в ближней зоне антенны [9]. Эта энергия влияет на величину объёмного интеграла в (2.7) и увеличивает время t по сравнению с t_0 , что и является причиной задержки радиоимпульса.

Действительно, в промежуточной и дальней зоне антенны её электромагнитное поле имеет поперечный характер локально-плоской волны, вектор Пойнтинга направлен радиально и его мнимая часть равна нулю [9]

$$\frac{1}{2} [\vec{E} \vec{H}^*] \vec{R}_0 = \frac{1}{4w} |\vec{E}|^2 \vec{R}_0, \text{ а также } |\vec{H}|^2 = \frac{\varepsilon}{\mu} |\vec{E}|^2.$$

Баланс энергии антенны выполняется для любой сферы интегрирования S_R с радиусом

$$R_0 \leq R \leq \infty: \quad |a|^2 (1 - |\Gamma|^2) = \frac{1}{2w} \oint_{S_R} |\vec{E}|^2 dS, \quad \text{где}$$

$R_0 = \frac{D}{4} + \frac{D}{2} \left(\frac{D}{\lambda} \right)^{\frac{1}{3}}$ – верхняя граница ближней зоны, D – максимальный размер антенны.

Рассмотрим в (2.7) часть объемного интеграла, включающего только промежуточную и дальнюю зоны антенны. С учетом вышеперечисленных допущений получим

$$\frac{1}{4} \int_{V_{np.} + V_{\Delta}} \left(\varepsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2 \right) dV = \\ = \frac{\varepsilon}{2} \int_{R_0}^R dR \oint_{S_R} |\vec{E}|^2 dS = \frac{R - R_0}{c} |a|^2 (1 - |\Gamma|^2).$$

Это означает, что расстояние от R_0 до R сигнал преодолевает со скоростью света.

Таким образом, промежуточная и дальняя зоны антенны не влияют на величину задержки радиоимпульса. Кстати, это открывает возможность использования компактного полигона для прямых измерений времени Δt задержки радиоимпульса с применением выносного приемного зонда, либо отражающей цели на расстоянии $R \geq R_0$.

В ближней зоне для расчета электромагнитного поля антенны, которое может иметь все пространственные составляющие, следует применять строгие формулы, вектор Пойнтинга становится комплексным, движение энергии имеет сложный характер [9].

Теоретическое излучение конкретных антенн и определение влияния ближнего поля на их входные характеристики не всегда возможно из-за трудности создания адекватных математических моделей и громоздкости расчетов.

Формула (2.8) открывает реальные возможности экспериментальных исследований в этом направлении и использовании времени задержки радиоимпульсов Δt в качестве одной из характеристик антенн.

Заключение

В настоящей работе показано, что производная по частоте от фазы коэффициента отражения на входе произвольной антенны представляет собой положительную величину, пропорциональную временной задержке радиоимпульса, излучаемого антенной. Эта задержка обусловлена тем, что конструкция антенны определяет количество реактивной энергии, запасаемой в её ближней зоне. Именно запас реактивной энергии в окрестности антенны является физической причиной наблюдаемой временной задержки излучаемого импульса.

Полученное соотношение (2.8) открывает возможности для экспериментальных исследований в данной области и позволяет использовать измеряемую величину временной задержки радиоимпульсов Δt в качестве одной из диагностических и сравнительных характеристик антенн.

Таким образом, доказательство теоремы Фостера представляет собой не просто формальную математическую процедуру, а обладает значительной практической ценностью. Данная теорема может служить критерием физической корректности, выступать как эффективный инструмент проектирования, а также способствовать пониманию фундаментальных физических ограничений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Foster, R.M. A reactance theorem / R.M. Foster // Bell System technical journal. – 1924. – Vol. 3, № 2. – P. 259–267.
2. Альтман, Д.Л. Устройства сверхвысоких частот: пер. с англ. / Д.Л. Альтман. – Москва: Мир, 1968. – 488 с.
3. Collin, R.E. Foundations for microwave engineering: 2-ed. / R.E. Collin. – NY: John Wiley & Sons, 2001. – 945 p.
4. Capek, M. Stored electromagnetic energy and quality factor of radiating structures / M. Capek, L. Jelinek, G.A.E. Vandenbosch // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 2016. – Vol. 472, № 2188. – P. 20150870.
5. Best, S.R. The Foster reactance theorem and quality factor for antennas / S.R. Best // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. – 2004. – Vol. 3. – P. 306–309.
6. Geyi, W. The Foster reactance theorem for antennas and radiation Q / W. Geyi, P. Jarmuszewski, Y. Qi // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2002. – Vol. 48, № 3. – P. 401–408.
7. Study of generalized resonance in multi-antenna system and generalized Foster reactance theorem / L. Li, H.-X. Liu, Y. Shi, C.-H. Liang // Progress In Electromagnetics Research. – 2005. – Vol. 52. – P. 255–276.
8. Reincorporating circuit theory into information theory / A. Mezghani [et al.] // IEEE BITS the Information Theory Magazine. – 2023. – Vol. 4. – P. 40–58.
9. Сазонов, Д.М. Антенны и устройства СВЧ: учебник для радиотехнических спец. вузов / Д.М. Сазонов. – Москва: Высшая школа, 1988. – 432 с.

Работа выполнена в рамках проекта БРФФИ № Ф24КИПТ-005.

Поступила в редакцию 10.10.2025.

Информация об авторах

Соловцов Сергей Леонидович – научный сотрудник
Фаняев Иван Александрович – к.т.н., доцент
Кудин Виктор Пантелеевич – д.т.н., профессор

ИЗГИБ ПЯТИСЛОЙНОГО СИММЕТРИЧНОГО ПО ТОЛЩИНЕ СТЕРЖНЯ

Э.И. Старовойтов, К.В. Суслов

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

BENDING OF A FIVE-LAYER SYMMETRICAL THICKNESS ROD

E.I. Starovoitov, K.V. Suslov

Belarusian State University of Transport, Gomel

Аннотация. Приведена постановка краевой задачи об изгибе пятислойного симметричного по толщине стержня. Центральный и внешние слои предполагаются несущими, тонкими, повышенной жесткости, воспринимают основную часть механической нагрузки. В них деформирование подчиняется гипотезам Бернулли. Два относительно толстых жестких заполнителя обеспечивают перераспределение усилий между несущими слоями. Для них справедливы гипотезы Тимошенко. Для вывода системы дифференциальных уравнений равновесия стержня применен принцип возможных перемещений. Получены аналитическое решение краевой задачи и расчетные формулы для перемещений при равномерно распределенной нагрузке. Проведена численная апробация полученного решения.

Ключевые слова: пятислойный симметричный стержень, упругость, изгиб.

Для цитирования: Старовойтов, Э.И. Изгиб пятислойного симметричного по толщине стержня / Э.И. Старовойтов, К.В. Суслов // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 4 (65). – С. 51–55. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_51. – EDN: ULZAYM

Abstract. The formulation of the boundary value problem of bending a five-layer symmetrical thickness rod is given. The central and outer layers are assumed to be load-bearing, thin, of increased rigidity, and absorb the bulk of the mechanical load. In them, the deformation obeys the Bernoulli hypothesis. Two relatively thick rigid fillers provide a redistribution of forces between the load-bearing layers. Timoshenko's hypotheses are valid for them. The principle of possible displacements is applied to derive a system of differential equations for the equilibrium of the rod. An analytical solution of the boundary value problem and calculation formulas for displacements under uniformly distributed load are obtained. Numerical approbation of the obtained solution is carried out.

Keywords: five-layer symmetrical rod, elasticity, bending.

For citation: Starovoitov, E.I. Bending of a five-layer symmetrical thickness rod / E.I. Starovoitov, K.V. Suslov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 4 (65). – P. 51–55. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_51 (in Russian). – EDN: ULZAYM

Введение

Применение слоистых конструкций в различных сферах современной техники и строительства интенсивно продолжается с начала 40-х годов прошлого века. Это потребовало разработку методик расчета слоистых элементов конструкций, учитывающих воздействие внешней среды. В монографиях [1]–[7] предлагаются расчетные модели трехслойных стержней, пластин и оболочек, учитывающие не только различные внешние силовые нагрузки, но и влияние температурных и радиационных воздействий.

В статьях [8]–[13] приведены решения ряда частных задач о динамическом воздействии на композитные, в том числе трехслойные стержни и пластины, в которых кинематические гипотезы приняты индивидуально для каждого слоя. Несущие слои жесткие, подчиняются гипотезам Бернулли (Кирхгофа). В легких заполнителях справедлива гипотеза Тимошенко, т. е. учитывается деформация относительного сдвига.

В статьях [14], [15] исследованы закономерности, присущие волнам в одномерных и двумерных элементах конструкций, проводится сравнение характеристик волн, распространяющихся в пластинах на упругом основании. Уравнения свободных колебаний пятислойных круглых симметричных по толщине пластин и стержней получены и исследованы в работах [16]–[18]. Решения получены в виде разложения искомых перемещений в ряды по системам собственных функций.

Влияние сжимаемости заполнителя на деформирование трехслойной пластины исследовано в [19], функция сжимаемости принята линейной по толщине заполнителя. Термосиловое деформирование круговой упругопластической пластины нагрузкой, параллельной плоскости пластины, рассмотрено в статье [20]. Влияние упругого основания на напряженно-деформированное состояние трехслойных пластин исследуется в работах [21]–[24].

В статье [25] рассмотрен изгиб круглой пятислойной пластины локальными нагрузками. В работе [26] для получения системы дифференциальных уравнений равновесия пятислойного стержня с двумя заполнителями применен метод Лагранжа.

Здесь приводится решение задачи об изгибе симметричного по толщине пятислойного стержня и его численное исследование.

1 Постановка задачи об изгибе пятислойного стержня

В пятислойном, симметричном по толщине стержне введена декартова система координат, связанная со срединной плоскостью внутреннего несущего слоя (рисунок 1.1). В достаточно тонких жестких несущих слоях (1, 2, 4) справедливы гипотезы Бернулли о плоскостности и нормальности поперечных сечений деформированной осевой линии. Для описания деформирования сравнительно толстых заполнителей (3, 5) применяется гипотеза Тимошенко, учитывающая поворот нормали на дополнительный угол $\psi(x)$ – относительный сдвиг. Вместе с прогибом стержня $w(x)$ эти функции являются искомыми. Нагрузка q равномерно распределена по поверхности стержня.

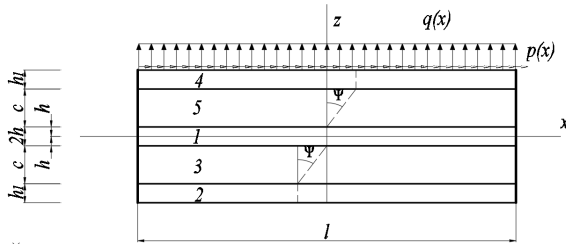


Рисунок 1.1 – Нумерация слоев и нагрузка в пятислойном стержне

Продольные перемещения $u_x^{(k)}$ в слоях ($k = 1, 2, 3, 4, 5$ – номер слоя) выражаются через искомые функции формулами, следующими из принятых гипотез:

$$\begin{aligned} u_x^{(4)} &= -zw_{,x} + c\psi, \quad \text{при } c+h \leq z \leq c+h+h_1, \\ u_x^{(5)} &= -zw_{,x} + (z-h)\psi, \quad \text{при } h \leq z \leq c+h, \\ u_x^{(1)} &= -zw_{,x}, \quad \text{при } -h \leq z \leq h, \\ u_x^{(3)} &= -zw_{,x} + (z+h)\psi, \quad \text{при } -h-c \leq z \leq -h, \\ u_x^{(2)} &= -zw_{,x} - c\psi, \quad \text{при } -h-h_1-c \leq z \leq -h-c, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где z – координата рассматриваемой точки поперечного сечения; h, h_1, c – толщины слоев; запятой в индексе обозначена операция дифференцирования по координате x .

Используя перемещения (1.1) и соотношения Коши [1], получим продольные деформации (нумерация в соответствии с рисунком 1.1):

$$\varepsilon_x^{(4)} = -zw_{,xx} + c\psi_{,x}; \quad \varepsilon_{xz}^{(4)} = 0;$$

$$\varepsilon_x^{(5)} = -zw_{,xx} + (z-h)\psi_{,x}; \quad \varepsilon_{xz}^{(5)} = \frac{\psi}{2};$$

$$\varepsilon_x^{(1)} = -zw_{,xx}; \quad \varepsilon_{xz}^{(1)} = 0;$$

$$\varepsilon_x^{(3)} = -zw_{,xx} + (z+h)\psi_{,x}; \quad \varepsilon_{xz}^{(3)} = \frac{\psi}{2};$$

$$\varepsilon_x^{(2)} = -zw_{,xx} - c\psi_{,x}; \quad \varepsilon_{xz}^{(2)} = 0. \quad (1.2)$$

Напряжения в слоях определяются через деформации (1.2) с помощью закона Гука в девиаторно-сферической форме:

$$\begin{aligned} s_{xx}^{(k)} &= 2G_k \vartheta_{xx}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)}, \\ s_{xz}^{(3)} &= 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)}, \quad s_{xz}^{(5)} = 2G_5 \vartheta_{xz}^{(5)}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $s_{ij}^{(k)}, \vartheta_{ij}^{(k)}$ – девиаторы тензоров напряжений и деформаций, $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ – средние напряжения и деформации в слоях; G_k, K_k – модули упругости материалов слоев.

Система дифференциальных уравнений равновесия рассматриваемого стержня получена с использованием принципа возможных перемещений Лагранжа:

$$\delta A = \delta W, \quad (1.4)$$

где δA – вариация работы внешней нагрузки; δW – виртуальная работа внутренних усилий

$$\begin{aligned} \delta A &= \iint_S q \delta w dS = b_0 \int_0^l q \delta w dx; \\ \delta W &= \iint_S \sum_{k=1}^5 \int_{h_k} (\sigma_x^{(k)} \delta \varepsilon_x^{(k)} + \sigma_{xz}^{(3)} \delta \varepsilon_{xz}^{(3)} \delta_{k3} + \sigma_{xz}^{(5)} \delta \varepsilon_{xz}^{(5)} \delta_{k5}) dz dS; \end{aligned}$$

b_0 – ширина поперечного сечения; δ – оператор варьирования; δ_{ki} – символы Кронекера.

С помощью соотношений (1.1)–(1.4) получена [26] система дифференциальных уравнений равновесия в виде:

$$\begin{aligned} a_1 \psi_{,xx} - a_2 w_{,xxx} - a_3 \psi &= 0, \\ a_2 \psi_{,xxx} - a_4 w_{,xxxx} &= -q, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned} a_1 &= \left[c^2 \left(\frac{2}{3} K_2^+ c + 2K_3^+ h_1 \right) \right], \\ a_2 &= \left[\frac{1}{3} K_2^+ c^2 (2c + 3h) + K_3^+ h_1 c (h_1 + 2h + 2c) \right], \\ a_3 &= [2G^{(2)} c], \\ a_4 &= \left[\frac{2}{3} K_2^+ c (c^2 + 3hc + 3h^2) + K_1^+ \frac{2h^3}{3} + \frac{2}{3} K_3^+ h_1 (h_1^2 + 3(h_1 + h + c)(h + c)) \right]. \end{aligned}$$

Для замыкания краевой задачи к системе (1.5) необходимо добавить граничные условия. В этом качестве принимаем условия жесткой заделки торцов стержня ($x=0; l$):

$$\psi(x) = w(x) = w_{,x}(x, t) = 0. \quad (1.6)$$

2 Аналитическое решение краевой задачи

Проинтегрируем второе уравнение системы (1.5) и с его помощью из первого уравнения получим отдельное уравнение для определения относительного сдвига $\psi(x)$:

$$\psi_{,xx} - \beta^2 \psi = \gamma q x + C_1, \quad (2.1)$$

где C_1 – константа интегрирования,

$$\beta^2 = \frac{a_3 a_4}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad \gamma = \frac{a_2}{a_1 a_4 - a_2^2}.$$

Вид решения уравнения (2.1) зависит от знака перед коэффициентом β^2 . Численное исследование показало, что разность $a_1 a_4 - a_2^2 > 0$ и не уходит в бесконечность [26].

В результате решение уравнения (2.1) и прогиб стержня, следующий из второго уравнения системы (1.5), будут

$$\begin{aligned} \psi &= C_2 \operatorname{sh}(\beta x) + C_3 \operatorname{ch}(\beta x) - \frac{\gamma q_0 x}{\beta^2} - \frac{\gamma C_1}{\beta^2}, \\ w &= \frac{a_2}{a_4} \left(\frac{C_2}{\beta} \operatorname{ch}(\beta x) + \frac{C_3}{\beta} \operatorname{sh}(\beta x) \right) - \frac{a_2 \gamma q_0 x^2}{2 a_4 \beta^2} + \\ &+ \frac{q_0}{24 a_4} x^4 + C_1 \left(-\frac{a_2 \gamma}{a_4 \beta^2} x + \frac{1}{6 a_4} x^3 \right) - \\ &\frac{1}{2} C_4 x^2 - C_5 x + C_6. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Определим константы интегрирования для случая жесткого защемления торцов стержня. Удовлетворяя решением (2.2) требованиям (1.6) получим следующую алгебраическую систему уравнений

$$\begin{aligned} C_2 \operatorname{sh}(\beta l) + C_3 \operatorname{ch}(\beta l) - \frac{\gamma q_0 l}{\beta^2} - \frac{\gamma C_1}{\beta^2} &= 0, \quad C_3 - \frac{\gamma C_1}{\beta^2} = 0, \\ \frac{a_2}{a_4} (C_2 \operatorname{sh}(\beta l) + C_3 \operatorname{ch}(\beta l)) - \frac{a_2 \gamma q_0 l}{a_4 \beta^2} + \frac{q_0 l^3}{6 a_4} + \\ &+ C_1 \left(\frac{l^2}{2 a_4} - \frac{a_2 \gamma}{a_4 \beta^2} \right) - l C_4 - C_5 = 0, \\ \frac{a_2}{a_4} C_3 - \frac{\gamma a_2}{a_4 \beta^2} C_1 - C_5 &= 0, \quad \frac{a_2}{a_4 \beta} C_2 + C_6 = 0, \\ \frac{a_2}{a_4 \beta} (C_2 \operatorname{sh}(\beta l) + C_3 \operatorname{ch}(\beta l)) - \frac{a_2 \gamma q_0 l^2}{2 a_4 \beta^2} + \frac{C_1 l^3}{6 a_4} - \\ &- \frac{C_1 a_2 \gamma l}{a_4 \beta^2} + \frac{q_0 l^4}{24 a_4} - \frac{C_4 l^2}{2} - l C_5 + C_6 = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Решив систему уравнений (2.3) получим константы интегрирования при жесткой заделке торцов стержня:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(\beta l (\beta^2 l^3 + 12 a_2 \gamma) \operatorname{sh}(\beta l) - \\ &- 24 \beta a_2 \gamma (\operatorname{ch}(\beta l) - 1)) q_0}{2 l \beta (6 \gamma (l+1) a_2 + \beta^2 l^2) \operatorname{sh}(\beta l) - \\ &- 24 a_2 \gamma (\operatorname{ch}(\beta l) - 1) (l+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{((\beta^3 l^4 + 12 a_2 \gamma) \operatorname{sh}(\beta l) - \\ &- 24 a_2 \gamma (\operatorname{ch}(\beta l) - 1)) q_0}{2 l \beta (6 \gamma (l+1) a_2 + \beta^2 l^2) \operatorname{sh}(\beta l) - \\ &- 24 a_2 \gamma (\operatorname{ch}(\beta l) - 1) (l+1)} \end{aligned}$$

$$C_3 = \frac{\gamma}{\beta^2} C_1,$$

$$\begin{aligned} C_4 &= -\frac{\beta l (72 \gamma^2 (l+2) (l-1) a_2^3 - \\ &- 6 \beta^2 \gamma l^2 (l^2 + l - 4) a_2 + \beta^4 l^5) \operatorname{sh}(\beta l) + \\ &+ 24 (\operatorname{ch}(\beta l) - 1) a_2 \gamma \times \\ &\times (-6 \gamma (l+2) (l-1) a_2 + \beta^2 l^2 (l^2 + l - 3))}{12 l \beta^2 a_4 (\beta l (6 \gamma (l+1) a_2 + \beta^2 l^2) \operatorname{sh}(\beta l) - \\ &- 12 a_2 \gamma (\operatorname{ch}(\beta l) - 1) (l+1))} q_0, \\ C_5 &= 0, \\ C_6 &= -\frac{a_2}{a_4 \beta} C_2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

3 Численные результаты

Получены при равномерно распределенной нагрузке $q_0 = 2,5$ МПа. Для основной расчетной модели принимаем несущие слои выполненными из дюралюминия Д16-Т, заполнители – из фторопласта-4. Толщины слоев, отнесенные к длине стержня, в (2.2), (2.3) полагались $h = h_1 = 0,02$, $c = 0,1$, $l = 1$ м. Упругие характеристики используемых материалов заимствованы в [1].

На рисунке 3.1 приведены графики изменения прогиба – a) и относительного сдвига – b) по длине стержня с различными материалами внешних несущих слоев: 1 – Д16-Т; 2 – титановый сплав; 3 – кордиерит. Центральный несущий слой – Д16-Т, заполнители – фторопласт-4. При замене дюралюминия на титановый сплав максимальный прогиб уменьшается примерно на 12%, относительный сдвиг практически не изменяется. В случае кордиерита расчетный прогиб уменьшается на 43%. Относительный сдвиг уменьшается на 38%.

На рисунке 3.2 показано уменьшение максимального прогиба – a) и максимального относительного сдвига – b) при увеличении толщины внешних несущих слоев h_1 . Нумерация кривых прежняя. Центральный несущий слой – Д16-Т, заполнители – фторопласт-4. При замене дюралюминия на более жесткие материалы скорость уменьшения максимальных прогибов и относительных сдвигов возрастает с увеличением толщины несущих внешних слоев.

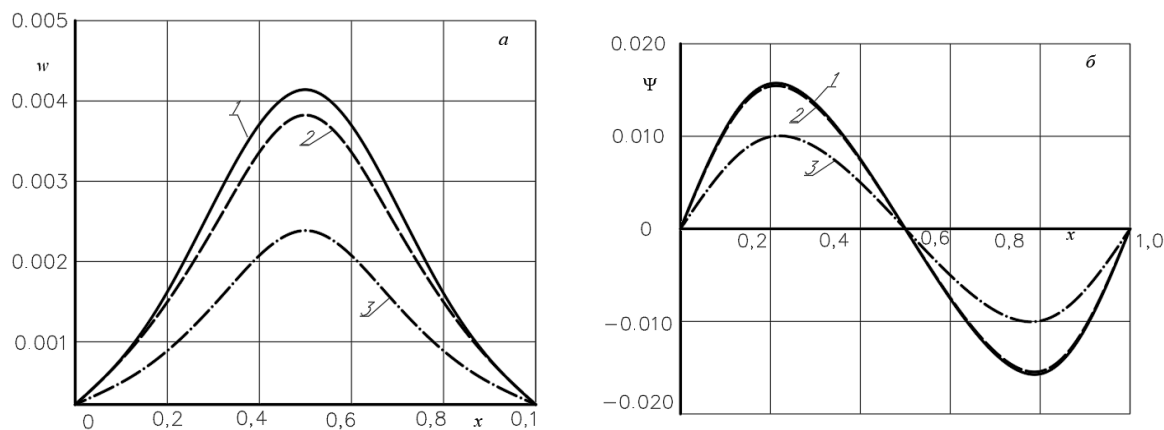
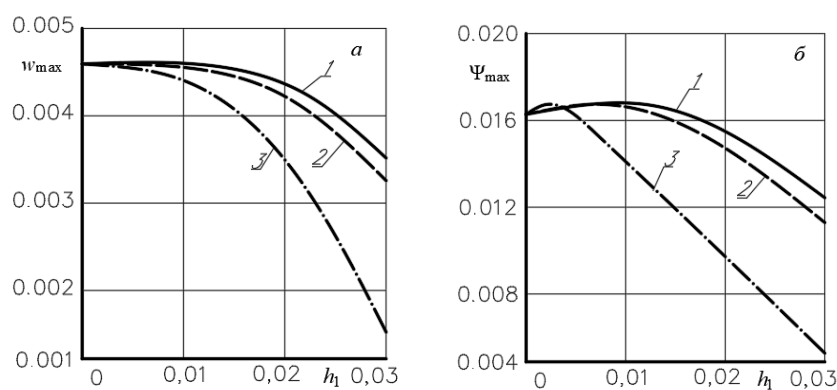


Рисунок 3.1. – Изменение перемещений по длине стержня

Рисунок 3.2. – Изменение максимальных перемещений в зависимости от толщины внешних несущих слоев h_1

Выводы

Предложенная система дифференциальных уравнений равновесия, полученное аналитическое решение и проведенный численный анализ позволяют исследовать перемещения при изгибе пятислойного упругого стержня с двумя заполнителями, симметричного по толщине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков, А.Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Москва: Физматлит, 2005. – 576 с. – EDN: RXGSLJ.
2. Журавков, М.А. Математические модели механики твердого тела / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. – Минск: БГУ, 2021. – 535 с.
3. Zhuravkov, M.A. Mechanics of Solid Deformable Body // M.A. Zhuravkov, Lyu Yongtao, E.I. Starovoitov. – Singapore: Springer, 2022. – 317 p.
4. Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э.И. Старовойтов, Н.Б. Рузиева. – Ташкент: «IDEAL PRESS», 2023. – 381 с.

5. *Deformation of Three-layer Structural Elements in Thermal Radiation Fields* / E.I. Starovoitov, M.A. Zhuravkov, D.V. Leonenko, Lyu Yongtao. – Springer Nature Singapore, Pte Ltd, 2024. – 384 p.

6. *Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках* / Э.И. Старовойтов, Ю.В. Шафиева, А.В. Нестерович, А.Г. Козел. – Гомель: БелГУТ, 2024. – 395 с.

7. Яровая, А.В. Строительная механика. Статика стержневых систем / А.В. Яровая. – Гомель: БелГУТ, 2013. – 447 с.

8. *Vibrations of sandwich beam on an elastic foundation* / V.D. Kubenko, Yu.M. Pleskachevskii, E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2006. – Vol. 42, № 5. – P. 541–547.

9. Старовойтов, Э.И. Особенности колебания трехслойного стержня при локальных и импульсных воздействиях / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, А.В. Яровая // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 7. – С. 122–129.

10. Старовойтов, Э.И. Свободные колебания в нейтронном потоке круговой трехслойной пластины, скрепленной с упругим основанием / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Проблемы

машиностроения и автоматизации. – 2012. – № 2. – С. 92–97.

11. *Tarlovskii, D.V.* Two-Dimensional Non-stationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D.V. Tarlovskii, G.V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, № 2. – P. 145–152.

12. *Fedotenkov, G.V.* Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G.V. Fedotenkov, D.V. Tarlovskiy, Y.A. Vahterova // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 40, № 4. – P. 439–447.

13. *Paimushin, V.N.* Static and monoharmonic acoustic impact on a laminated plate / V.N. Paimushin, R.K. Gazizullin // Mechanics of Composite Materials. – 2017. – Vol. 53, № 3. – P. 407–436.

14. *Kaplunov, J.* Dispersion of elastic waves in a strongly inhomogeneous three-layered plate / J. Kaplunov, D.A. Prikazchikov, L.A. Prikazchikova // International Journal of Solids and Structures. – 2017. – Vol. 113–114. – P. 169–179.

15. *Ерофеев, В.И.* О некоторых кинематических и энергетических соотношениях для волн, распространяющихся в упругих системах / В.И. Ерофеев, Е.Е. Лисенкова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2025. – Т. 65, № 5. – С. 641–653.

16. *Лачугина, Е.А.* Свободные колебания пятислойной круговой пластины с легкими заполнителями / Е.А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2023. – № 16. – С. 111–116.

17. *Лачугина, Е.А.* Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими заполнителями / Е.А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 212–219.

18. *Будникова, Д.А.* Анализ собственных колебаний пятислойного стержня / Д.А. Будникова // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – № 17. – С. 33–39.

19. *Захарчук, Ю.В.* Трехслойная круговая упругопластическая пластина со сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 72–79.

20. *Нестерович, А.В.* Осесимметричное нагружение круглой физически нелинейной трехслойной пластины в своей плоскости / А.В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 3 (48). – С. 24–29.

21. *Старовойтов, Э.И.* Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2006. – Т. 3, № 4. – С. 55–62.

22. *Старовойтов, Э.И.* Деформирование локальными нагрузками композитной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Механика композитных материалов. – 2007. – Т. 43, № 1. – С. 109–120.

23. *Козел, А.Г.* Математическая модель деформирования круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 42–46.

24. *Старовойтов, Э.И.* Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / Э.И. Старовойтов, А.Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 392–406.

25. *Салицкий, В.С.* Изгиб локальной нагрузкой круглой пятислойной пластины / В.С. Салицкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 27–31.

26. *Суслов, К.В.* Методика решения задачи о равновесии пятислойного симметричного по толщине стержня / К. В. Суслов // Механика. Исследования и инновации. – 2024. – № 17. – С. 134–139.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-2025».

Поступила в редакцию 17.07.2025.

Информация об авторах

Старовойтов Эдуард Иванович – д.ф.-м.н., профессор
Суслов Константин Валерьевич – магистрант

ГАЗОФАЗНЫЙ СИНТЕЗ, МОЛЕКУЛЯРНАЯ СТРУКТУРА МНОГОСЛОЙНЫХ ПОКРЫТИЙ НА ОСНОВЕ ПОЛИПИРРОЛА

М.А. Ярмоленко¹, А.В. Рогачёв¹, А.А. Рогачёв²

¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

²Институт химии новых материалов НАН Беларуси, Минск

GAS-PHASE SYNTHESIS, MOLECULAR STRUCTURE OF MULTILAYER COATINGS BASED ON POLYPYRROLE

М.А. Yarmolenko¹, A.V. Rogachev¹, A.A. Rogachev²

¹Francisk Skorina Gomel State University

²Institute of Chemistry of New Materials of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk

Аннотация. Определены молекулярная структура, морфология и электрическая проводимость покрытий полипиррола, нанесенных на подслои хлорида железа. Установлены изменения молекулярной структуры и электрической проводимости при термообработке сформированных слоев полипиррола. С целью эффективного снижения разрушения покрытий полипиррола при нагреве предложено формирование на их поверхности сульфатного или фосфатного слоя. Снижение проводимости при термообработке и повышение порогового значения напряжения, при превышении которого регистрируется возрастание проводимости, при хранении и является следствием химического взаимодействия медного электрода с хлоридом железа.

Ключевые слова: покрытия полипиррол, молекулярная структура, электрическая проводимость, морфология, термообработка.

Для цитирования: Ярмоленко, М.А. Газофазный синтез, молекулярная структура многослойных покрытий на основе полипиррола / М.А. Ярмоленко, А.В. Рогачёв, А.А. Рогачёв // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 4 (65). – С. 56–61. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_56. – EDN: DFVRRQ

Abstract. The molecular structure, morphology, and electrical conductivity of polypyrrole coatings deposited on an iron chloride sublayer were determined. The changes in the molecular structure and electrical conductivity during heat treatment of the synthesized polypyrrole layers were established. To effectively mitigate the degradation of polypyrrole coatings during heating, the formation of a sulfate or phosphate passivation layer on their surface was proposed. The decrease in conductivity during heat treatment and the increase in the threshold voltage, above which a conductivity increase is observed, during storage are attributed to the chemical interaction between the copper electrode and iron chloride.

Keywords: polypyrrole coatings, molecular structure, electrical conductivity, morphology, heat treatment.

For citation: Yarmolenko, M.A. Gas-phase synthesis, molecular structure of multilayer coatings based on polypyrrole / M.A. Yarmolenko, A.V. Rogachev, A.A. Rogachev // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 4 (65). – P. 56–61. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_56 (in Russian). – EDN: DFVRRQ

Введение

Проводящие полимерные покрытия находят эффективное применение при решении широкого круга технических задач. Так, покрытия полипиррола обладают антистатическими и антикоррозионными свойствами [1], перспективны при создании радиопоглощающих элементов [2]. Модифицирование электродных материалов нанесением на их поверхность проводящих слоев полипиррола является основными направлениями повышения эксплуатационных характеристик литий-ионных аккумуляторов за счет снижения электрического сопротивления электродов, степени их деградации при эксплуатации.

В числе проводящих полисопряженных полимеров полипиррол является наиболее изученным, для него характерна высокая электрическая проводимость. Однако значительные перспективы

его применения существенно ограничены, так как он является сшитым и неплавким полимером, что исключает использование при его переработке характерных для полимеров технологических методов. Наиболее часто синтез таких покрытий осуществляется электрохимическим способом, который заключается в электроокислении растворенного мономера на поверхности электрода с формированием полимерной пленки. Успешная реализация этого метода, достижение достаточной адгезии и приемлемых механических свойств получаемых покрытий возможно при строгом контроле условий проведения процесса. Отметим также, что использование растворных технологий весьма ограничено, так как этим методом невозможно формирование сплошных наноразмерных слоев и их легирование затруднено.

Недостатком покрытий полипиррола является их низкая стойкость к химическому и термическому окислению [3]. Одним из методов ее повышения является формирование на поверхности покрытий наноразмерных экранирующих слоев и определение их оптимального состава, условий и режима осаждения является актуальной задачей.

Основной целью настоящей работы является изучение особенностей синтеза композиционных покрытий на основе полипиррола из газовой фазы с повышенной стойкостью к окислению, определение их молекулярной структуры, морфологии.

1 Методика нанесения покрытий и их исследования

Осаждение покрытий полипиррола проводили путем полимеризации паров пиррола на подложке, содержащей тонкий слой хлорида железа (III) ($\text{FeCl}_3 \cdot 6 \text{H}_2\text{O}$) или хлорида меди (II) ($\text{CuCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$).

Покрытия хлоридов металла формировали из активной газовой фазы, генерирование которой осуществлялось в результате воздействия на однородный порошок или механическую смесь порошков потока электронов с энергией 800–1600 эВ и плотностью 0,01–0,03 А/см². Процесс осаждения покрытий производился при начальном давлении остаточных газов в вакуумной камере $\approx 4 \cdot 10^{-2}$ Па.

В качестве материала диспергируемой мишени использовали порошки хлорида железа (III), хлорида меди (II), P_2O_5 (Sigma-Aldrich), а также серную кислоту (H_2SO_4).

Подложками при осаждении слоев служили пластины NaCl (для ИК-спектроскопических исследований), кварцевые резонаторы для определения адсорбционной активности покрытия полипиррола.

Спектроскопические исследования проводили на ИК-Фурье спектрофотометре Vertex-70 (Bruker) и УФ-Вид спектрофотометре Cary-50 (Varian) с использованием стандартной термоячейки, установленной в кюветное отделение прибора. Скорость нагрева и охлаждения составляла 10° С/мин.

Адсорбционную активность тонкого слоя полипиррола определяли с помощью кварцевого измерителя толщины. Для этого на поверхности кварцевых резонаторов осаждали слой полипиррола. В дальнейшем измеритель толщины с различными кварцевыми резонаторами (чистый и с покрытием полипиррола), помещали в емкость с насыщенными парами кислоты. Датчик в парах кислоты находился в течение 1 минуты, после на 1 минуту извлекался на атмосферу воздуха. Процедура повторялась 5 раз. В ходе эксперимента фиксировали изменение частоты кварцевого резонатора.

Для построения ВАХ проводящих покрытий на основе пиррола были изготовлены встречно-штыревые электроды, состоящие из двух чередующихся полосок меди на диэлектрической подложке (стеклотекстолит). Первоначально на встречно-штыревые электроды осаждали покрытие на основе хлористого железа. После электроды с подслоем FeCl_3 помещали в пары пиррола. Для всех образцов толщина подслоя хлористого железа и время выдержки электродов в парах пиррола являлись одинаковыми. Построение ВАХ осуществляли с использованием измерителя иммитанса (RLC) Е7-20.

2 Результаты экспериментов и их обсуждение

ИК-спектры покрытия полипиррола до и после нагрева до 190° С представлены на рисунке 2.1.

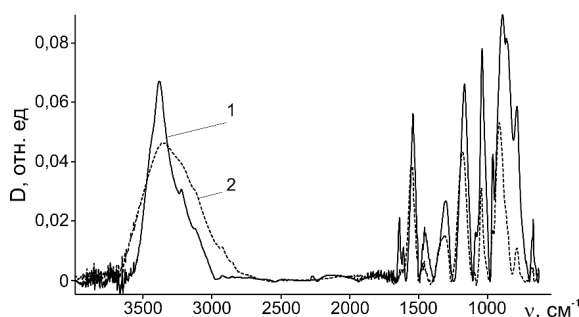


Рисунок 2.1 – ИК-спектры покрытия полипиррола (подслой FeCl_3):

1 – до нагрева; 2 – после нагрева до 190° С

При анализе представленного ИК-спектра следует учитывать возможное наложение полос поглощения хлорида железа на ИК-спектр покрытия полипиррола. Для ИК-спектра двухслойной системы FeCl_3 + полипиррол характерно интенсивное поглощение в области волновых чисел (3600–3000) см⁻¹. В отмеченной области проявляются валентные колебания ОН-групп и N – Н связей [4], [5]. При этом валентные колебания ОН-групп фиксируются в виде широкой полосы. По этой причине наличие узких полос поглощения в области (3600–3000) см⁻¹ обусловлено валентными колебаниями N – Н связей вторичных аминов. Полосу при 3223 см⁻¹ можно соотнести с комбинированными валентными колебаниями N – Н и О – Н связей в условиях возникновения водородного взаимодействия [6]. Положение полосы N – Н связи определяется уровнем межмолекулярного взаимодействия [6]. Полосу при 3440 см⁻¹ можно соотнести с колебаниями N – Н связей, свободных от межмолекулярного взаимодействия. Полосы при 3390 см⁻¹ и 3150 см⁻¹ – валентные колебания вторичного амина в условиях межмолекулярного взаимодействия [4], [5], [7].

Следует отметить, что наличие интенсивной полосы поглощения при 3390 см⁻¹ характерно

для ИК-спектра слоя FeCl_3 . Поглощение обусловлено способностью соли железа сорбировать различные соединения из атмосферы воздуха, в том числе и содержащие азот. В целом, согласно данным ИК-спектроскопии, в двухслойной системе существует выраженное межмолекулярное взаимодействие между полярными группами. Поглощение в области $(3200\text{--}3000)\text{ см}^{-1}$ может быть соотнесено с валентными колебаниями $\text{C}-\text{H}$ связей гетероатомного каркаса, адсорбированными солью из атмосферы воздуха углеводородными фрагментами [7]. В ИК-спектре покрытия присутствуют слабоинтенсивные полосы поглощения при 2270 см^{-1} и в области валентных чисел $(2200\text{--}2100)\text{ см}^{-1}$. Отмеченные полосы поглощения указывают на присутствие в молекулярной структуре покрытия NH^+ групп. Деформационные колебания молекул воды проявляются в виде полосы поглощения при 1640 см^{-1} . Поглощение при 1612 см^{-1} характерно для ИК-спектра слоя FeCl_3 . Ранее было сделано предположение, что данная полоса может быть обусловлена присутствием в составе с хлоридом железа углеводородных и азотсодержащих фрагментов. Данные соединения поглощаются из атмосферы воздуха при длительном хранении соли железа. Полосы поглощения при $1545, 1460, 1340\text{ см}^{-1}$ могут быть соотнесены с валентными колебаниями $\text{C}=\text{C}/\text{C}-\text{C}/\text{C}-\text{N}$, при 1170 и 1040 см^{-1} – с плоскостными деформационными колебаниями $\text{C}-\text{H}$ в кольце, при $914, 860, 790\text{ см}^{-1}$ – внеплоскостные деформационные колебания $\text{C}-\text{H}$ связей [8], [9]. Полосу поглощения при 965 см^{-1} соотносят не только с деформационными колебаниями $\text{C}-\text{H}$ связей, но и с валентными колебаниями $\text{C}=\text{N}^+-\text{C}$ [10]. Таким образом, двухслойная система представлена хлоридом железа, пирролом и адсорбированными из атмосферы воздуха низкомолекулярными соединениями (вода, углеводородные и азотсодержащие фрагменты).

Нагрев покрытия сопровождается снижением оптической плотности полос поглощения в области $(3600\text{--}3000)\text{ см}^{-1}$ и при 1640 см^{-1} . Это обусловлено процессом десорбции молекул воды. Снижение поглощения в области $(3600\text{--}3000)\text{ см}^{-1}$ не сопровождается появлением выраженных узких полос поглощения. Подобное изменение ИК-спектра указывало бы на структурирование тонкого слоя с возникновением сильного межмолекулярного взаимодействия. Таким образом, сформированный тонкий слой полипиррола характеризуется относительно низкой сегментальной подвижностью. Термообработка не приводит к исчезновению заряженных NH^+ групп, она проявляется в заметном уменьшении оптической плотности всех полос поглощения. Наиболее заметное уменьшение оптической плотности характерно для полос, соотносимых с деформационными колебаниями $\text{C}-\text{H}$ связей

$(900\text{--}700)\text{ см}^{-1}$. Термообработка не сопровождается появлением новых полос поглощения. Изменение ИК-спектра указывает на постепенное снижение количества материала покрытия при его нагреве. Снижение оптической плотности может являться следствием интенсивной десорбции низкомолекулярных фрагментов полипиррола.

Согласно данным ИК-спектроскопии, кратковременное повышение температуры не приводит к заметному окислению тонкого слоя. В ИК-спектре не фиксируется появление кислородсодержащих групп. Отсутствие окисленных углеводородных фрагментов может являться следствием интенсивной десорбции низкомолекулярных фрагментов в атмосферу воздуха. Для подтверждения данного предположения покрытие подвергалось длительному низкотемпературному (120°C) отжигу на атмосфере воздуха. Относительно низкая температура нагрева снижает интенсивную десорбцию низкомолекулярных фрагментов покрытия. ИК-спектры покрытий при таком нагреве представлены на рисунке 2.2.

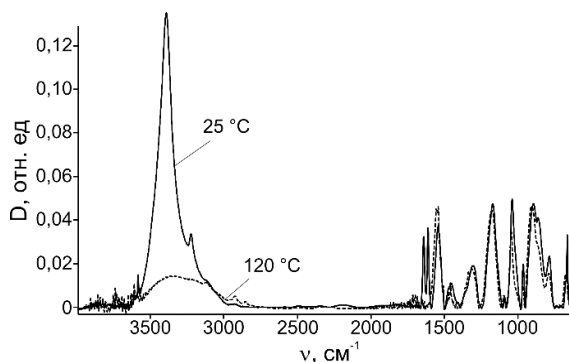


Рисунок 2.2 – ИК-спектры двухслойной системы FeCl_3 + полипиррол до и после отжига при 120°C (2 ч)

Отжиг в течение 2 ч не сопровождался заметным окислением тонкого покрытия. На термоокисление полимерного слоя в ИК-спектре указывает появление только малоинтенсивного поглощения при 1700 см^{-1} (валентные колебания $\text{C}=\text{O}$ связей). В ИК-спектре после отжига фиксируется снижение оптической плотности полос поглощения в области $(3600\text{--}3000)\text{ см}^{-1}$, исчезновение полос поглощения при 1640 и 1612 см^{-1} . Таким образом, при термообработке в первую очередь происходит десорбция молекул, адсорбированных покрытием влаги и низкомолекулярных соединений. Снижение величины оптической плотности полос при 3390 и 1612 см^{-1} подтверждает правильность их соотнесения с адсорбированным слоем хлорида железа низкомолекулярными соединениями. Важным является то, что продолжительная низкотемпературная обработка не приводит к заметному снижению

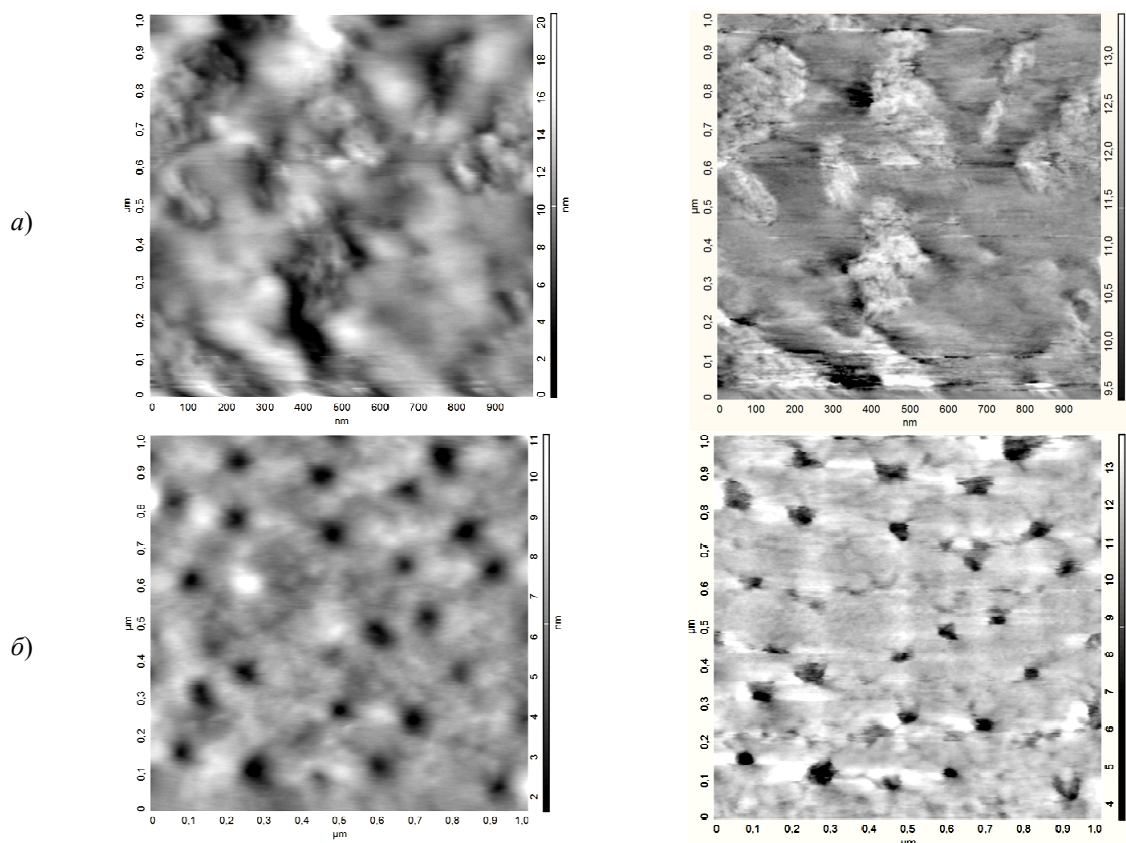


Рисунок 2.3 – АСМ изображения покрытий FeCl_3 (а) и FeCl_3 + полипиррол (б), осажденных при 250°C

оптической плотности полос деформационных колебаний $\text{C}-\text{H}$ связей ($(900-700)\text{ cm}^{-1}$). Таким образом, формируемый на поверхности полимерный слой интенсивно разрушается при температурах выше 120°C .

Результаты АСМ, представленные на рисунке 2.3, показывают, что покрытие полипиррола содержит достаточно равномерно расположенные по поверхности поры и его морфология в значительной степени определяется геометрическими параметрами подслоя. Возникновение пор может являться следствием присутствия на поверхности хлорида железа молекул воды.

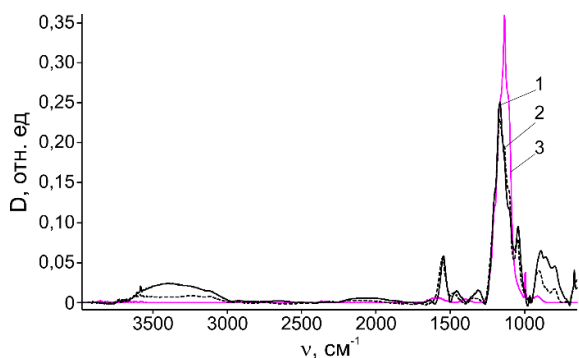


Рисунок 2.4 – ИК-спектры трехслойных систем:
1 – FeCl_3 + полипиррол + H_2SO_4 (до нагрева);
2 – FeCl_3 + полипиррол + H_2SO_4 (после нагрева 190°C); 3 – покрытие H_2SO_4

Методом ИК-спектроскопии оценены изменения молекулярной структуры покрытий при нагреве в присутствии окислителя (рисунок 2.4).

Нанесение верхнего слоя на основе серной кислоты снижает способность трехслойной системы к поглощению влаги из атмосферы воздуха. Высокотемпературный нагрев (190°C) приводит к снижению оптической плотности всех полос поглощения. Наибольшие изменения фиксируются в области волновых чисел области ($3600-3000$) и ($900-700$) cm^{-1} . Изменения ИК-спектра указывают на десорбцию адсорбированных молекул воды и разрушение/десорбцию колец пиррола. В ИК-спектре трехслойной системы полосы поглощения, характерные для серной кислоты, не накладываются на полосы поглощения полипиррола в области ($900-700$) cm^{-1} . Это позволяет определить влияние отжига на изменение значения оптической плотности полос в отмеченной области (таблица 2.1).

Согласно ИК-спектроскопии, нанесение серосодержащего слоя снижает величину соотношения оптических плотностей полос поглощения в области ($900-700$) cm^{-1} до и после нагрева. Как ранее было отмечено, нанесение серосодержащего слоя уменьшает способность тонкослойной системы сорбировать влагу. Это означает, что на достоверность полученного результат не оказывает влияние присутствие в рассматриваемой частотной области поглощения OH -групп.

Таблица 2.1 – Значения оптической плотности полос до и после нагрева покрытия на атмосфере воздуха

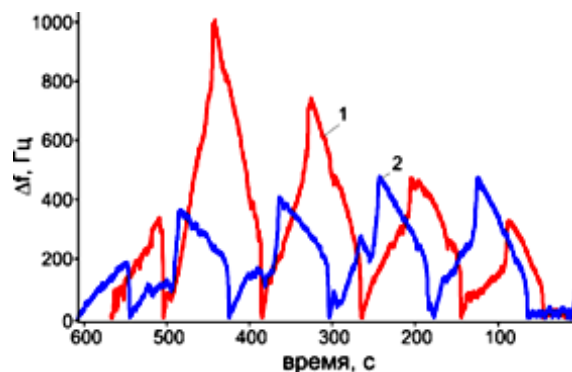
Покрытие (температура нагрева)	Полоса поглощения		
	914 см ⁻¹	860 см ⁻¹	790 см ⁻¹
FeCl ₃ + полипиррол (190° С)	1,5	3,7	3,9
FeCl ₃ + полипиррол (120° С, 2 ч)	1	1,5	1,6
FeCl ₃ + полипиррол + H ₂ SO ₄ (190° С)	1,5	3,1	2,3
FeCl ₃ + полипиррол + P ₂ O ₅ (190° С)	0,8	1,3	2,1

Следует отметить, что продолжительный низкотемпературный отжиг слоя FeCl₃ + полипиррол в наименьшей степени сказывается на изменении оптической плотности полос деформационных колебаний С – Н связей. Таким образом, верхний слой способен препятствовать высокотемпературной десорбции низкомолекулярных фрагментов полипиррола. Для подтверждения данного предположения в качестве третьего слоя было сформировано покрытие на основе P₂O₅. В ИК-спектре фосфорсодержащего слоя полосы поглощения при 900 и 888 см⁻¹ соотносятся с колебаниями Р – ОН связей. В работе [11] показано, что высокотемпературный (190° С) нагрев слоя на основе P₂O₅ не приводит к заметному изменению оптической плотности полос в области (900–700) см⁻¹. Изменения оптической плотности полос в области (900–700) см⁻¹ для трехслойной системы FeCl₃ + полипиррол + P₂O₅ после высокотемпературного отжига заметно ниже, чем для системы FeCl₃ + полипиррол + H₂SO₄. Таким образом, нанесение на поверхность двухслойной системы FeCl₃ + полипиррол верхнего химически активного слоя является эффективным приемом повышения стойкости проводящего слоя к термодеструкции. Результаты исследования позволяют сделать предположение об отсутствии интенсивной деструкции проводящего слоя полипиррола в окислительных средах (электродитах).

Проведена оценка адсорбционной активности тонкого слоя полипиррола к насыщенным парам азотной кислоты (рисунок 2.5).

При помещении кварцевого резонатора в насыщенный пар азотной кислоты ее молекулы адсорбируются на поверхности металлического слоя (никель). Это приводит к увеличению частоты колебаний резонатора. Количество адсорбированных молекул кислоты непрерывно увеличивается с увеличением числа циклов нахождения резонатора в парах кислоты. Подобное может являться следствием химического взаимодействия кислоты с металлом. Нанесение тонкого покрытия пиррола позволяет повысить

стойкость металлического слоя к воздействию паров кислоты. В каждом цикле поверхность кварцевого резонатора сорбируется приблизительно одно и то же количество молекул кислоты. Косвенно это может являться следствием низкой химической активности полипиррола по отношению к азотной кислоте.

Рисунок 2.5 – Изменение частоты кварцевого резонатора без покрытия (1) и с покрытием полипиррола (2) от времени при периодическом нахождении в парах HNO₃

Определение ВАХ покрытий полипиррола показало, что они являются проводящими (рисунок 2.6).

При этом электрическая проводимость в значительной степени зависит от времени хранения сформированной двухслойной системы и химического состава подслоя. Повышение порогового значения напряжения, при превышении которого регистрируется повышение проводимости, при хранении и снижение проводимости при термообработке является следствием химического взаимодействия медного электрода с хлоридом железа. При нанесении покрытий полипиррола на подслои CuCl₂ снижение проводимости связано с образованием более тонкого слоя из-за его низкой полимеризационной эффективности, а повышение электрического сопротивления в процессе хранения может являться следствием окисления металла.

Выводы

Определена молекулярная структура, морфология и электрическая проводимость покрытий полипиррола, нанесенных на подслои хлорида железа. Установлено, что термообработка сформированного тонкого слоя полипиррола сопровождается процессами его термоокислительной деструкции и десорбцией образующихся низкомолекулярных соединений. Формирование на поверхности покрытий полипиррола сульфатного или фосфатного слоя препятствуют разрушению слоя полипиррола при нагреве.

Электрическая проводимость покрытий полипиррола на подслое хлоридов зависит от времени хранения сформированной двухслойной

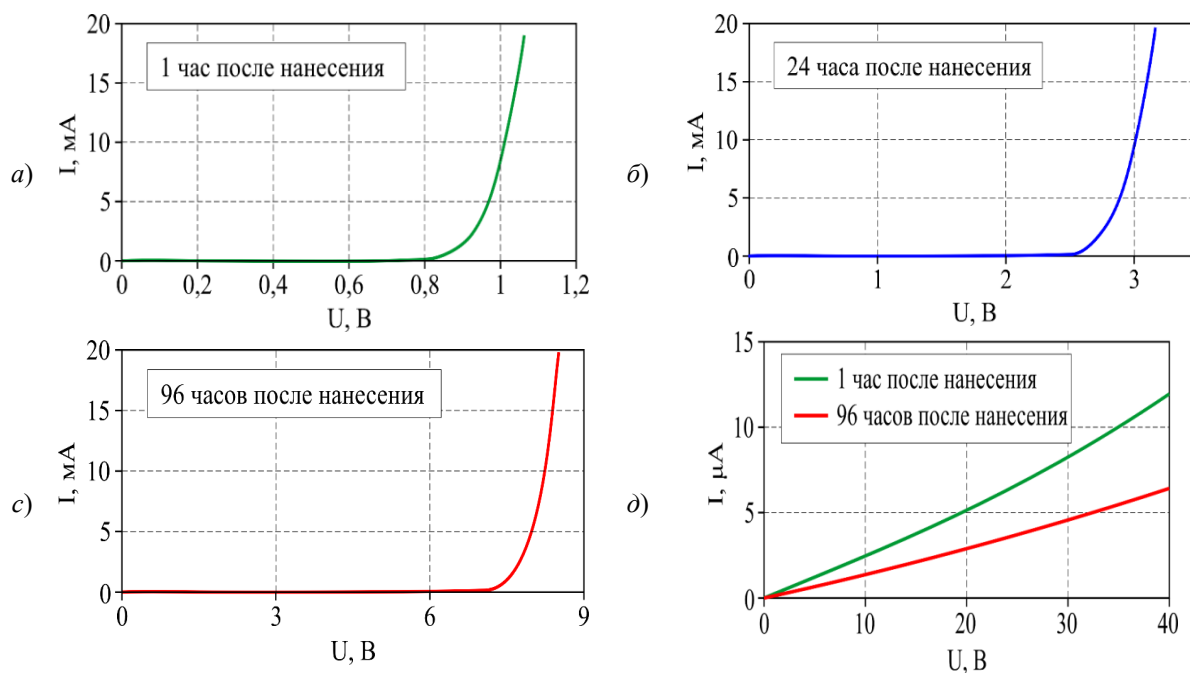


Рисунок 2.6 – ВАХ покрытий FeCl_3 + полипиррол после хранения 1 час (а), 24 часа (б), 96 часов (с) и покрытий CuCl_2 + полипиррол (д)

системы и химического состава подслоя. Повышение порогового значения напряжения, при превышении которого регистрируется повышение проводимости, при хранении является следствием химического взаимодействия медного электрода с хлоридом железа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Межуев, Я.О. Применение полианилина и полипиррола в электронике / Я.О. Межуев, М.И. Штильман, Ю.В. Коршак // Пластические массы. – 2020. – № 7–8. – С. 28–31.
2. Щербаков, А.Е. Особенности радиопоглощения и экранирования электромагнитного излучения тканями, модифицированными полипирролом и магнетитом, в диапазоне частот от 3,9 до 8 ГГц / А.Е. Щербаков // Известия вузов России. Радиоэлектроника. – 2024. – Т. 27 (6). – С. 68–79.
3. Кожимова, К.Р. Синтез новых пирролсодержащих мономеров и полимеров реакцией (поли)гетероциклизации: автореф. дис. ... канд. хим. наук: 02.00.06 / К.Р. Кожимова; Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова. – Нальчик, 2015. – 22 с.
4. Bellamy, L.J. The Infra-red Spectra of Complex Molecules / L.J. Bellamy. – Methuen, 1954. – 323 p.
5. Nakanishi, K. Infrared Absorption Spectroscopy / K. Nakanishi. – Holden-Day Inc., San Francisco, 1962. – 233 p.
6. Lee, S. Polypyrrole wool composite with electrical heating properties fabricated via layer-by-layer method / S. Lee // Scientific Reports. – 2024. – Vol. 14. – Article 3883.

7. Investigation of polypyrrole based composite material for lithium sulfur batteries / V. Niscakova [et al.] // Scientific Reports. – 2024. – Vol. 14. – Article 22928.

8. Vibrational spectroscopy of polypyrrole, theoretical study / R. Kostic [et al.] // The Journal of Chemical Physics. – 1995. – Vol. 102. – P. 3104–3109.

9. Davidson, R.G. An IR spectroscopic study of the electrochemical reduction of polypyrrole doped with dodecylsulfate anion / R.G. Davidson, T.G. Turner // Synthetic Metals. – 1995. – Vol. 72. – P. 121–128.

10. Preparation and characterization of hybrid polypyrrole nanoparticles as a conducting polymer with controllable size / J. Mahmood [et al.] // Scientific Reports. – 2024. – Vol. 14. – Article 11653.

11. The structure and properties of bioactive multilayer coatings applied by a low-energy electron beam on the implant surface / Y. Liu [et al.] // Surface and Coatings Technology. – 2019. – Vol. 378. – Article 124969.

Материалы статьи подготовлены при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № T25КИ-056 от 06.02.2025 г.)

Поступила в редакцию 19.09.2025.

Информация об авторах

Ярмоленко Максим Анатольевич – д.т.н., профессор
 Рогачёв Александр Владимирович – чл.-корр. НАН Беларуси, д.х.н., профессор
 Рогачёв Александр Александрович – чл.-корр. НАН Беларуси, д.т.н., профессор
 Цзян Сяо Хун – доктор наук, профессор

УДК 512.548

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_62
EDN: RJSZOUПОЛИАДИЧЕСКИЕ ФАКТОРГРУППЫ
ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУПП СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. II

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв

POLYADIC QUOTIENT GROUPS
OF POLYADIC GROUPS OF A SPECIAL FORM. II

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev

Аннотация. В статье продолжается изучение l -арных факторгрупп полиадических групп специального вида.**Ключевые слова:** полиадическая операция, полуинвариантная l -арная подгруппа, n -полуинвариантная l -арная подгруппа, факторгруппа, конгруэнция, смежный класс.**Для цитирования:** Гальмак, А.М. Полиадические факторгруппы полиадических групп специального вида. II / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 4 (65). – С. 62–66. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_62 – EDN: RJSZOU**Abstract.** The study on the l -ary quotient groups of polyadic groups of a special form is carried on.**Keywords:** polyadic operation, semiinvariant l -ary subgroup, n -semiinvariant l -ary subgroup, quotient group, congruence, coset.**For citation:** Gal'mak, A.M. Polyadic quotient groups of polyadic groups of a special form. II / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 4 (65). – P. 62–66. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_62 (in Russian). – EDN: RJSZOU**Введение**

Данная статья, посвящённая изучению l -арных факторгрупп l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ специального вида по её полуинвариантным l -арным подгруппам, является продолжением статьи [1] и составляет с ней единое целое, что отражено в названиях обеих статей. В связи с этим нумерация разделов в настоящей статье продолжает нумерацию разделов в [1]. Сохраняется преемственность в отношении соглашений, определений и обозначений из [1], все они остаются в силе и в данной статье. В ней ссылки на эту работу. Например, ссылка на теорему 2.1 означает, что имеется в виду теорема 2.1 из раздела 2 в [1]. Одной из основных целей данной статьи является доказательство того, что в случае цикличности n -арной факторгруппы $\langle A/B, \eta \rangle$ любой её смежный класс может быть l -арной подгруппой l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

3 Вспомогательные результаты

Сформулируем несколько утверждений, используемых при получении основного результата.

Лемма 3.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, $\langle B, \eta \rangle$ – её полуинвариантная n -арная подгруппа. Тогда

© Гальмак А.М., 2025

$$\overline{\eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1})} = \eta(\bar{a} \underbrace{B \dots B}_{n-1}).$$

Доказательство. Используя полуинвариантность $\langle B, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$ и определение косого элемента, получим

$$\begin{aligned} \eta(\underbrace{\eta(\bar{a} \underbrace{B \dots B}_{n-1})}_{n-1} \underbrace{\eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1})}_{n-1} \dots \underbrace{\eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1})}_{n-1}) &= \\ = \eta(\underbrace{\eta(\bar{a} \underbrace{a \dots a}_{n-1})}_{n-1} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) &= \eta(\underbrace{a \underbrace{B \dots B}_{n-1}}_{n-1}), \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned} \eta(\underbrace{\eta(\bar{a} \underbrace{B \dots B}_{n-1})}_{n-1} \underbrace{\eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1})}_{n-1} \dots \underbrace{\eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1})}_{n-1}) &= \\ = \eta(\underbrace{a \underbrace{B \dots B}_{n-1}}_{n-1}). \end{aligned}$$

Следовательно, доказываемое равенство верно. \square

Лемма 3.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, $\langle B, \eta \rangle$ – её полуинвариантная n -арная подгруппа. Тогда

$$(\eta(\underbrace{a \underbrace{B \dots B}_{n-1}}_{n-1}))^{[m]} = \eta(\underbrace{a^{[m]} \underbrace{B \dots B}_{n-1}}_{n-1})$$

для любого целого m .

Доказательство. Для $n = 2$ доказываемое равенство верно. Поэтому считаем $n \geq 3$.

Используя определение полиадической степени для случая $m = 0$, получим

$$(\eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1}))^{[0]} = \eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \eta(a^{[0]} \underbrace{B \dots B}_{n-1}).$$

Если $m > 0$, то, используя определение полиадической степени и полуинвариантность $\langle B, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$, получим

$$\begin{aligned} (\eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1}))^{[m]} &= \eta(\underbrace{\eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \dots \eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1})}_{m(n-1)+1}) = \\ &= \eta(\underbrace{a \underbrace{B \dots B}_{n-1} \dots a \underbrace{B \dots B}_{n-1}}_{m(n-1)+1}) = \eta(\underbrace{a \dots a}_{m(n-1)+1} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \\ &= \eta(\eta(\underbrace{a \dots a}_{m(n-1)+1}) \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \eta(a^{[m]} \underbrace{B \dots B}_{n-1}), \end{aligned}$$

то есть для $m > 0$ доказываемое равенство верно.

Если $m < 0$, то, снова используя определение полиадической степени, полуинвариантность $\langle B, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$, а также лемму 3.1, получим

$$\begin{aligned} (\eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1}))^{[m]} &= \eta(\underbrace{\eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \dots \eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1})}_{-2m}) = \\ &= \eta(\underbrace{\eta(\bar{a} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \dots \eta(\bar{a} \underbrace{B \dots B}_{n-1})}_{-m(n-3)+1}) = \\ &= \eta(\underbrace{\eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \dots \eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1})}_{-m(n-3)+1}) = \\ &= \eta(\eta(\underbrace{\bar{a} \dots \bar{a}}_{-2m} \underbrace{a \dots a}_{-m(n-3)+1}) \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \eta(a^{[m]} \underbrace{B \dots B}_{n-1}), \end{aligned}$$

то есть для $m < 0$ доказываемое равенство верно. \square

Замечание 3.1. Так как

$$\eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1})^{[-1]} = \eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1}), \quad a^{[-1]} = \bar{a},$$

то лемма 3.1 содержится в лемме 3.2 при $m = -1$.

Лемма 3.3. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, $\langle B, \eta \rangle$ – её n -арная подгруппа, $d_1, \dots, d_{l-1} \in A$. Тогда:

1) если существуют элементы $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ такие, что последовательности $d_1 \dots d_{l-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$ эквивалентны в смысле Поста, то

$$\eta(d_1 \dots d_{l-1} B) = B, \quad (3.1)$$

$$\eta(B d_1 \dots d_{l-1}) = B; \quad (3.2)$$

2) если верно равенство (3.1) или равенство (3.2), то существуют элементы $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ такие, что последовательности $d_1 \dots d_{l-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$ эквивалентны в смысле Поста.

Доказательство. 1) Так как последовательности $d_1 \dots d_{l-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$ эквивалентны в смысле Поста, то

$$\eta(d_1 \dots d_{l-1} b) = \eta(b_1 \dots b_{n-1} b)$$

для любого $b \in B$, откуда следует

$$\eta(d_1 \dots d_{l-1} B) \subseteq B.$$

Так как для любого $b \in B$ уравнение

$$b = \eta(b_1 \dots b_{n-1} x)$$

имеет решение $x = c \in B$, то

$$b = \eta(b_1 \dots b_{n-1} c),$$

откуда и из эквивалентности в смысле Поста последовательностей $d_1 \dots d_{l-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$ следует

$$b = \eta(d_1 \dots d_{l-1} c).$$

Следовательно,

$$B \subseteq \eta(d_1 \dots d_{l-1} B).$$

Из доказанных включений следует требуемое равенство.

2) Если верно равенство (3.1), то для любого $c \in B$ имеем

$$\eta(d_1 \dots d_{l-1} c) = b \in B. \quad (3.3)$$

А так как $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная группа, то для $c, b \in B$, в ней разрешимо уравнение

$$\eta(x_1 \dots x_{n-1} c) = b.$$

Следовательно, найдутся такие $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$, что

$$\eta(b_1 \dots b_{n-1} c) = b. \quad (3.4)$$

Из равенства правых частей в (3.3) и (3.4) следует равенство

$$\eta(d_1 \dots d_{l-1} c) = \eta(b_1 \dots b_{n-1} c),$$

что означает эквивалентность в смысле Поста последовательностей $d_1 \dots d_{l-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$.

Для равенства (3.2) доказательство проводится аналогично. \square

Следствие 3.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, $\langle B, \eta \rangle$ – её n -арная подгруппа, $d \in A$. Тогда:

1) если существуют элементы $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ такие, что последовательности $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$ эквивалентны в смысле Поста, то

$$\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} B) = B, \quad (3.5)$$

$$\eta(B \underbrace{d \dots d}_{l-1}) = B; \quad (3.6)$$

2) если верно равенство (3.5) или равенство (3.6), то существуют элементы $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ такие, что последовательности $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$ эквивалентны в смысле Поста.

Лемма 3.4. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, $\langle B, \eta \rangle$ – её n -арная подгруппа, существуют натуральное i и элементы $a \in A$, $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ такие, что последовательности $\underbrace{a \dots a}_{i(n-1)}$ и

$b_1 \dots b_{n-1}$ эквивалентны в смысле Поста. Тогда последовательность $\underbrace{\bar{a} \dots \bar{a}}_{i(n-1)}$ эквивалентна в смысле Поста последовательности $c_1 \dots c_{n-1}$ для некоторых элементов $c_1, \dots, c_{n-1} \in B$.

Доказательство. Так как последовательность $\underbrace{\bar{a} a \dots a}_{n-2}$ – нейтральная, то нейтральной является и последовательность

$$\underbrace{\bar{a} \dots \bar{a}}_{n-2} \dots \underbrace{\bar{a} \dots \bar{a}}_{n-2},$$

которая в силу перестановочности любого элемента со своим косым, эквивалентна в смысле Поста последовательности

$$\underbrace{\bar{a} \dots \bar{a}}_{i(n-1)} \underbrace{a \dots a}_{i(n-1)} \dots \underbrace{a \dots a}_{i(n-1)},$$

также являющейся нейтральной. Заменяя в этой последовательности каждую последовательность $\underbrace{a \dots a}_{i(n-1)}$ эквивалентной в смысле Поста последовательностью $b_1 \dots b_{n-1}$, получим нейтральную последовательность

$$\underbrace{\bar{a} \dots \bar{a}}_{i(n-1)} \underbrace{b_1 \dots b_{n-1}}_{n-2} \dots \underbrace{b_1 \dots b_{n-1}}_{n-2}, \quad (3.7)$$

которая эквивалентна в смысле Поста последовательности

$$\underbrace{\bar{a} \dots \bar{a}}_{i(n-1)} b_1 \dots b_{n-2} c, \quad (3.8)$$

где

$$c = \eta(b_{n-1} \underbrace{b_1 \dots b_{n-1}}_{n-3} \dots b_1 \dots b_{n-1}) \in B.$$

Из нейтральности последовательности (3.7), а значит и последовательности (3.8), следует

$$\eta(\underbrace{\bar{a} \dots \bar{a}}_{i(n-1)} b_1 \dots b_{n-2} c b) = b$$

для любого $b \in B$, откуда

$$\eta(\underbrace{\bar{a} \dots \bar{a}}_{i(n-1)} d) = b, \quad (3.9)$$

где

$$d = \eta(b_1 \dots b_{n-2} c b) \in B.$$

Так как $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная группа, то для $b, d \in B$ в ней разрешимо уравнение

$$\eta(x_1 \dots x_{n-1} d) = b.$$

Следовательно, найдутся такие $c_1, \dots, c_{n-1} \in B$, что

$$\eta(c_1 \dots c_{n-1} d) = b. \quad (3.10)$$

Из (3.9) и (3.10) следует равенство

$$\eta(\underbrace{\bar{a} \dots \bar{a}}_{i(n-1)} d) = \eta(c_1 \dots c_{n-1} d),$$

что означает эквивалентность в смысле Поста последовательностей $\underbrace{\bar{a} \dots \bar{a}}_{i(n-1)}$ и $c_1 \dots c_{n-1}$. \square

Полагая в лемме 3.4 $i = 1$, получим

Следствие 3.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, $\langle B, \eta \rangle$ – её n -арная подгруппа, существуют элементы $a \in A$, $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ такие, что последовательности $\underbrace{a \dots a}_{n-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$ эквивалентны в смысле Поста. Тогда последовательность $\underbrace{\bar{a} \dots \bar{a}}_{n-1}$ эквивалентна в смысле Поста последовательности $c_1 \dots c_{n-1}$ для некоторых $c_1, \dots, c_{n-1} \in B$.

Нам понадобится также следующая

Теорема 3.1. Пусть $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа полуабелевой n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, отличная от неё; существуют элементы $d \in A$, $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ такие, что последовательности $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$ эквивалентны в смысле Поста;

подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^n \neq \sigma$, $\sigma^l = \sigma$. Тогда справедливы все утверждения теоремы 2.1. Кроме того, универсальная алгебра $\langle H^k, \eta_{n, \sigma, k} \rangle$ является полуинвариантной, но не n -полуинвариантной l -арной подгруппой в полуабелевой l -арной группе $\langle A^k, \eta_{n, \sigma, k} \rangle$, которая не является n -полуабелевой.

Доказательство. 1) В полуабелевой n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$ n -арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ является полуинвариантной. Кроме того, по условию теоремы, при $i = 2$ подстановка $\sigma^{(i-1)(n-1)} = \sigma^{n-1}$ не является тождественной. Таким образом, выполняются все условия теоремы 2.1. Следовательно, справедливы все утверждения этой теоремы. Осталось применить теорему 4.5 из [2], по которой $\langle A^k, \eta_{n, \sigma, k} \rangle$ – полуабелева l -арная группа, не являющаяся n -полуабелевой. \square

Замечание 3.2. Если σ – нетождественная подстановка, для которой подстановка σ^n является тождественной, то $\sigma^n \neq \sigma$, $\sigma^l = \sigma$, где $l = n(n-1) + 1$. Поэтому в теореме 3.1 в качестве подстановки σ можно выбрать нетождественную подстановку с условием $\sigma^{n+1} = \sigma$ и положить $l = n(n-1) + 1$.

4 Основные результаты

Теорема 4.1. Пусть $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, отличная от неё; n -арная факторгруппа $\langle A/B, \eta \rangle$ является циклической, порождаемой смежным классом $\eta(\underbrace{aB \dots B}_{n-1})$; последовательность $\underbrace{a \dots a}_{l-1}$ эквивалентна в смысле Поста

последовательности $b_1 \dots b_{n-1}$ для некоторых $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$; подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда:

1) для любого смежного класса H n -арной факторгруппы $\langle A/B, \eta \rangle$ декартова степень H^k замкнута относительно l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$, а универсальная алгебра $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ является полуинвариантной l -арной подгруппой l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$;

2) если для некоторого $i = 2, \dots, s$ подстановка $\sigma^{(i-1)(n-1)}$ не является тождественной, то l -арная подгруппа $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуинвариантной в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Доказательство. 1) Так как n -арная факторгруппа $\langle A/B, \eta \rangle$ является циклической,

порождаемой элементом $\eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1})$, то любой

элемент H этой n -арной факторгруппы совпадает с некоторой степенью порождающего элемента. Будем для определенности считать

$$H = (\eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1}))^{[r]}$$

для некоторого целого r . По лемме 3.2

$$H = \eta(a^{[r]} \underbrace{B \dots B}_{n-1}).$$

Пусть $r \geq 0$. Так как последовательность $\underbrace{a \dots a}_{l-1}$ эквивалентна в смысле Поста последова-

тельности $b_1 \dots b_{n-1}$ для некоторых элементов $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$, то

$$\begin{aligned} \eta(\underbrace{\eta(a^{[r]} \dots a^{[r]})}_{l-1} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) &= \eta(a^{[r]} \underbrace{a^{[r]} \dots a^{[r]}}_{l-1} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \\ &= \eta(a^{[r]} \underbrace{\eta(a \dots a) \dots \eta(a \dots a)}_{r(n-1)+1} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \\ &= \eta(a^{[r]} \underbrace{a \dots a \dots a}_{l-1} \underbrace{a \dots a}_{l-1} \underbrace{a \dots a}_{n-1} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \\ &= \eta(a^{[r]} \underbrace{b_1 \dots b_{n-1} \dots b_1 \dots b_{n-1}}_{r(n-1)+1} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \\ &= \eta(a^{[r]} \underbrace{B \dots B}_{n-1}), \end{aligned}$$

то есть

$$\eta(\underbrace{\eta(a^{[r]} \dots a^{[r]})}_{l-1} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \eta(a^{[r]} \underbrace{B \dots B}_{n-1}). \quad (4.1)$$

Если теперь $r < 0$, то по лемме 3.4 последовательность

$$\underbrace{\bar{a} \dots \bar{a}}_{l-1} = \underbrace{\bar{a} \dots \bar{a}}_{s(n-1)}$$

эквивалентна в смысле Поста последовательности $c_1 \dots c_{n-1}$ для некоторых $c_1, \dots, c_{n-1} \in B$. А так как, кроме того, последовательность $\underbrace{a \dots a}_{l-1}$ эк-

вивалентна в смысле Поста последовательности $b_1 \dots b_{n-1}$ для некоторых $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$, то

$$\begin{aligned} \eta(\underbrace{\eta(a^{[r]} \dots a^{[r]})}_{l-1} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) &= \eta(a^{[r]} \underbrace{a^{[r]} \dots a^{[r]}}_{l-1} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \\ &= \eta(a^{[r]} \underbrace{\eta(\underbrace{\bar{a} \dots \bar{a}}_{-2r} \dots \underbrace{\bar{a} \dots \bar{a}}_{-r(n-3)+1} \underbrace{a \dots a}_{-2r} \dots \underbrace{a \dots a}_{-r(n-3)+1})}_{l-1} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \\ &= \eta(a^{[r]} \underbrace{\bar{a} \dots \bar{a}}_{l-1} \underbrace{\bar{a} \dots \bar{a}}_{l-1} \underbrace{a \dots a}_{l-1} \underbrace{a \dots a}_{l-1} \underbrace{a \dots a}_{n-1} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \\ &= \eta(a^{[r]} \underbrace{c_1 \dots c_{n-1} \dots c_1 \dots c_{n-1}}_{-2r} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \\ &= \eta(a^{[r]} \underbrace{b_1 \dots b_{n-1} \dots b_1 \dots b_{n-1}}_{-r(n-3)+1} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \eta(a^{[r]} \underbrace{B \dots B}_{n-1}), \end{aligned}$$

то есть и для $r < 0$ верно равенство (4.1), следствием которого является следующее равенство

$$\begin{aligned} \eta(\underbrace{\bar{a}^{[r]} \dots \bar{a}^{[r]}}_{n-3} \underbrace{\eta(\underbrace{a^{[r]} \dots a^{[r]}}_l \underbrace{B \dots B}_{n-1})}_{n-1}) &= \\ &= \eta(\underbrace{\bar{a}^{[r]} \dots \bar{a}^{[r]}}_{n-3} \underbrace{\eta(a^{[r]} \underbrace{B \dots B}_{n-1})}_{n-1}). \end{aligned}$$

Из этого равенства в силу нейтральности последовательности $\underbrace{\bar{a}^{[r]} \dots \bar{a}^{[r]}}_{n-2}$ следует равенство

$$\eta(\underbrace{a^{[r]} \dots a^{[r]}}_{l-1} \underbrace{B}_{n-1}) = B.$$

Поэтому, согласно утверждению 2) следствия 3.1, последовательность $\underbrace{a^{[r]} \dots a^{[r]}}_{l-1}$ эквивалентна

в смысле Поста последовательности $u_1 \dots u_{n-1}$ для некоторых $u_1, \dots, u_{n-1} \in B$. Осталось применить утверждение 1) теоремы 2.1.

2) Применяется утверждение 4) теоремы 2.1. □

Полагая в теореме 4.1 $i = 2$, получим следующий результат.

Теорема 4.2. Пусть $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, отличная от неё; n -арная факторгруппа $\langle A/B, \eta \rangle$ является циклической, порождаемой смежным классом $\eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1})$; последователь-

ность $\underbrace{a \dots a}_{l-1}$ эквивалентна в смысле Поста

последовательности $b_1 \dots b_{n-1}$ для некоторых $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$; подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда:

1) для любого смежного класса H n -арной факторгруппы $\langle A/B, \eta \rangle$ декартова степень H^k замкнута относительно l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$, а универсальная алгебра $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ является полуинвариантной l -арной подгруппой l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$;

2) если подстановка σ^{n-1} не является тождественной, то l -арная подгруппа $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуинвариантной в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 3.1, при этом вместо теоремы 2.1 применяется теорема 4.1.

Теорема 4.3. Пусть $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа полуабелевой n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, отличная от неё; n -арная факторгруппа $\langle A/B, \eta \rangle$ является циклической, порождаемой смежным классом $\eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1})$; последователь-

ность $\underbrace{a \dots a}_{l-1}$ эквивалентна в смысле Поста по-

следовательности $b_1 \dots b_{n-1}$ для некоторых $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$; подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^n \neq \sigma$, $\sigma^l = \sigma$. Тогда справедливы все утверждения теоремы 4.1. Кроме того, универсальная алгебра $\langle H^k, \eta_{n, \sigma, k} \rangle$ является полуинвариантной, но не n -полуинвариантной l -арной подгруппой в полуабелевой l -арной группе

$\langle A^k, \eta_{n, \sigma, k} \rangle$, которая не является n -полуабелевой.

Замечание 4.1. В теореме 4.3, как и в теореме 3.1, в качестве подстановки σ можно выбрать нетождественную подстановку из замечания 3.2.

Бинарный случай ($n = 2$) Сформулируем следствия из теорем 4.1–4.3 для $n = 2$.

Теорема 4.4. Пусть B – нормальная подгруппа группы A , отличная от неё; факторгруппа A/B является циклической, порождаемой смежным классом aB ; $a^{l-1} \in B$, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда:

1) для любого смежного класса H факторгруппы A/B декартова степень H^k замкнута относительно l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$, а универсальная алгебра $\langle H^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ является полуинвариантной l -арной подгруппой l -арной группы $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$;

2) если для некоторого $i = 2, \dots, l-1$ подстановка σ^{i-1} – не является тождественной, то l -арная подгруппа $\langle H^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ не является инвариантной в $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$.

Теорема 4.5. Пусть B – нормальная подгруппа группы A , отличная от неё; факторгруппа A/B является циклической, порождаемой смежным классом aB ; $a^{l-1} \in B$, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда:

1) для любого смежного класса H факторгруппы A/B декартова степень H^k замкнута относительно l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$, а универсальная алгебра $\langle H^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ является полуинвариантной l -арной подгруппой l -арной группы $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$;

2) если подстановка σ не является тождественной, то l -арная подгруппа $\langle H^k, \eta_{l, \sigma, k} \rangle$ не является инвариантной в $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$.

Теорема 4.6. Пусть B – подгруппа абелевой группы A , отличная от неё; факторгруппа A/B является циклической, порождаемой смежным классом aB ; $a^{l-1} \in B$, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^2 \neq \sigma$, $\sigma^l = \sigma$. Тогда для любого смежного класса H факторгруппы A/B

декартова степень H^k замкнута относительно l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$, а универсальная алгебра $\langle H^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ является полуинвариантной, но неинвариантной l -арной подгруппой в полуабелевой l -арной группе $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, которая не является абелевой.

Полагая в теореме 4.6 $l = 3$, получим

Следствие 4.1. Пусть для нетождественной подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^2 является тождественной, B – подгруппа абелевой группы A , отличная от неё; факторгруппа A/B является циклической, порождаемой смежным классом aB ; $a^2 \in B$. Тогда для любого смежного класса H факторгруппы A/B декартова степень H^k замкнута относительно тернарной операции $[]_{3, \sigma, k}$, а универсальная алгебра $\langle H^k, []_{3, \sigma, k} \rangle$ является полуинвариантной, но неинвариантной тернарной подгруппой в полуабелевой тернарной группе $\langle A^k, []_{3, \sigma, k} \rangle$, которая не является абелевой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А.М. Полиадические факторгруппы полиадических групп специального вида. / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 84–89.

2. Гальмак, А.М. Перестановочность элементов в полиадических группоидах специального вида / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 3 (36). – С. 70–75.

Поступила в редакцию 09.09.2025.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор

О КОНЕЧНОЙ ГРУППЕ, ФАКТОРИЗУЕМОЙ B -ГРУППОЙ И Z -ГРУППОЙ

В.Н. Княгина

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ON A FINITE GROUP FACTORIZED BY A B -GROUP AND A Z -GROUP

V.N. Kniyahina

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Конечная ненильпотентная группа называется B -группой, если в ее фактор-группе по подгруппе Фраттини все собственные подгруппы примарны. Конечная группа, у которой все силовские подгруппы циклические, называется z -группой. Исследуется конечная группа G , представляемая в виде произведения ее B -подгруппы и z -подгруппы взаимно простых порядков. Устанавливается, что если группа G разрешима, то ее второй коммутант нильпотентен, производная длина ее фактор-группы по подгруппе Фраттини не превышает трех, а p -длина не больше двух. Если группа G простая, то $G \cong \text{PSL}_2(p^m)$ и все значения для p^m указаны.

Ключевые слова: конечная группа, B -группа, z -группа, p -длина, производная длина, факторизуемая группа.

Для цитирования: Княгина, В.Н. О конечной группе, факторизуемой B -группой и z -группой / В.Н. Княгина // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 4 (65). – С. 67–71. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_67 – EDN: TKJHKY

Abstract. A finite non-nilpotent group is called a B -group if all proper subgroups of its quotient group by the Frattini subgroup are primary. A finite group whose Sylow subgroups are all cyclic is called a z -group. We study a finite group G that can be represented as a product of its B -subgroup and z -subgroup of coprime orders. For a solvable groups G , we prove that the second derived subgroup is nilpotent, the derivative length of the quotient group by the Frattini subgroup does not exceed three, and the p -length is at most two. If G is a simple group, then G is isomorphic to $\text{PSL}_2(p^m)$, and all possible values of p^m are determined.

Keywords: finite group, B -group, z -group, p -length, derivative length, factorizable group.

For citation: Kniyahina, V.N. On a finite group factorized by a B -group and a z -group / V.N. Kniyahina // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 4 (65). – P. 67–71. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_67 (in Russian). – EDN: TKJHKY

Введение

Конечная группа, у которой все силовские подгруппы циклические, называется z -группой. B -группа – это конечная ненильпотентная группа, у которой в фактор-группе по подгруппе Фраттини все собственные подгруппы примарны. Группа Шмидта также является B -группой. Обе эти группы бипримарны, одна из силовских подгрупп в этих группах – нормальная, а другая – циклическая, см. лемму 2.2 [1]. Фактор-группа нормальной силовской подгруппы по подгруппе Фраттини – главный фактор и в группе Шмидта, и в B -группе. Однако между B -группами и группами Шмидта есть и различия. Так, если в группе Шмидта подгруппа Фраттини нормальной силовской подгруппы содержится в центре группы, то в B -группе это свойство нарушается.

В работе [1] установлены основные свойства B -групп и изучена группа, факторизуемая B -группой и примарной группой. В частности, доказано, что если конечная группа $G = HK$ представима в виде произведения B -подгруппы

H и примарной подгруппы K , и если порядок ненормальной силовской подгруппы в H не равен 3 и 7, то группа G разрешима. В работе [2] мы установили, что конечная p -разрешимая группа, представляемая в виде произведения двух своих подгрупп Шмидта, имеет p -длину не более 2. Эта оценка точная. Примером является симметрическая группа S_4 . В работе [3] была исследована конечная группа $G = HK$, факторизуемая двумя B -подгруппами H и K . Такая группа может быть простой, например, знакопеременная группа A_5 степени 5, которая факторизуется двумя своими B -подгруппами $H \cong A_4$ и $K \cong [C_5]C_2$. В случае, если конечная группа $G = HK$ p -разрешима, установлены достаточные условия, при которых p -длина группы G равна единице. Если B -подгруппы H и K сверхразрешимы, то конечная группа $G = HK$ разрешима. Кроме того, если группа G нечетного порядка, то G сверхразрешима.

Конечная факторизуемая группа, у которой оба сомножителя являющиеся z -группами, исследовалась в [4]–[6]. В работе [7] было доказано, что конечная разрешимая группа, которая представима в виде произведения холловой z -подгруппы и группы Шмидта, содержит нильпотентную нормальную подгруппу, фактор-группа по которой метабелева.

В настоящей работе исследуются свойства конечной группы $G = HK$, представимой в виде произведения нильпотентной или B -подгруппы H и z -подгруппы K взаимно простых порядков. Устанавливается, что если группа G разрешима, то ее второй коммутант нильпотентен, производная длина ее фактор-группы по подгруппе Фраттини не превышает трех, p -длина группы G не превышает 2 для каждого $p \in \pi(H)$ и равна 1 для каждого $p \in \pi(K)$. Если группа G простая, то $G \cong PSL_2(p^m)$ и все значения для p^m указаны.

1 Вспомогательные результаты

В статье рассматриваются только конечные группы. Мы используем стандартные обозначения, определения, а также терминологию из [8], [9].

Приведем некоторые наиболее часто используемые обозначения. Центр, коммутант, подгруппы Фраттини и Фиттинга группы G обозначаются соответственно через $Z(G)$, G' , $\Phi(G)$ и $F(G)$. Запись $Y \leq X$ ($Y < X$) используется для обозначения подгруппы (собственной подгруппы) группы X , а $O_p(X)$ – наибольшая нормальная p -подгруппа группы X .

Для определенных групп будем использовать следующие обозначения:

Z_m – циклическая группа порядка m ,

E_{p^m} – элементарная абелева группа порядка p^m ,

D_{2n} – диэдральная группа порядка $2n$,

S_n и A_n – симметрическая и знакопеременная группы степени n ,

\mathfrak{N} – класс всех нильпотентных групп,

\mathfrak{A} – класс всех абелевых групп,

$\mathfrak{NA}^2 = \mathfrak{N}\mathfrak{A}\mathfrak{A}$ – формационное произведение.

Полупрямое произведение двух подгрупп A и B с нормальной подгруппой A мы будем записывать двумя способами: $[A]B$ либо $A \rtimes B$ в связи тем, что в цитируемых источниках оно обозначается по-разному. Группа G с нормальной силовской p -подгруппой G_p называется p -замкнутой. Если в группе G есть нормальная подгруппа $G_{p'}$ такая, что $G = [G_{p'}]G_p$, то группа G называется p -нильпотентной.

Для B -группы с нормальной силовской p -подгруппой и ненормальной силовской q -подгруппой будем использовать обозначение $B_{\langle p, q \rangle}$.

Приведем свойства B -групп, которые мы будем использовать при доказательстве теоремы.

Лемма 1.1 [1, леммы 2.2 и 2.4]. Пусть B – $B_{\langle p, q \rangle}$ -группа, p и q – ее силовские p - и q -подгруппы. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) $B = [P]Q$;

(2) $P \cap \Phi(B) = \Phi(P)$, $P = B'$ и $P / \Phi(P)$ –

главный фактор группы B порядка p^m , где m – показатель числа p по модулю q ;

(3) $Q = \langle y \rangle$ – циклическая подгруппа и $y^q \in Z(B)$. Кроме того, $\Phi(B) = \Phi(P) \times \langle y^q \rangle$ и $Z(B) \leq \Phi(B)$;

(4) Если H – нормальная в B подгруппа и $H \neq B$, то H нильпотентна;

(5) Если M – максимальная в B подгруппа, то либо M нормальна в B и $M = P \times \langle y^q \rangle$, либо $M = [\Phi(P)]Q^x$ для некоторого $x \in B$.

(6) Если N – нормальная подгруппа $B_{\langle p, q \rangle}$ -группы B , $N \neq B$, то

(6.1) силовская p -подгруппа P_1 из N либо совпадает с силовской p -подгруппой группы B , либо $P_1 \leq \Phi(B) \cap P = \Phi(P)$;

(6.2) силовская q -подгруппа Q_1 из N содержится в $\langle y^q \rangle \leq Z(B)$, где $\langle y \rangle$ – силовская q -подгруппа группы B ;

(6.3) либо $P \leq N$, либо $N \leq \Phi(B)$;

(6.4) фактор-группа B/N либо является $B_{\langle p, q \rangle}$ -группой, либо циклической q -группой.

Лемма 1.2 [7, лемма 2.1]. Пусть \mathfrak{F} – формация. Тогда произведение $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ является насыщенной формацией.

Лемма 1.3. Пусть \mathfrak{F} – насыщенная формация и G – разрешимая группа. Предположим, что G не принадлежит \mathfrak{F} , но $G/N \in \mathfrak{F}$ для каждой неединичной нормальной подгруппы N группы G . Тогда G – примитивная группа.

Доказательство. Утверждение легко выводится из соответствующих определений. \square

Если H – подгруппа группы G , то пересечение всех подгрупп, сопряженных с H , называется ядром подгруппы H в группе G . Группа называется примитивной, если она содержит максимальную подгруппу с единичным ядром.

Лемма 1.4 [9, теоремы 4.41, 4.42]. Пусть G – примитивная группа с примитиватором M . Тогда:

(1) $\Phi(G) = 1$;

(2) $F(G) = C_G(F(G)) = O_p(G)$ и $F(G)$ является элементарной абелевой p -подгруппой порядка p^n для некоторого простого p ;

(3) в группе G единственная минимальная нормальная подгруппа, совпадающая с $F(G)$;

(4) $G = [F(G)]M$ и $O_p(M) = 1$;

(5) M изоморфна неприводимой подгруппе группы $GL(n, p)$.

Лемма 1.5 [9, теорема 2.8]. Если $K \leq G$, то $N_G(K)/C_G(K)$ изоморфна подгруппе из $\text{Aut}(K)$.

Лемма 1.6 [9, теорема 2.16]. Если N – нормальная подгруппа в группе G и N циклическая, то $\text{Aut}(N)$ абелева. Кроме того, если $|N| = p$, то $\text{Aut}(N) \cong Z_{p-1}$.

Лемма 1.7 [10, лемма 5]. Если G – метанильпотентная группа, то p -длина группы G не превышает 1 для любого простого p .

Лемма 1.8 [11, лемма 7]. Пусть $G = AB$ – простая неабелева группа, где A и B – собственные холловы разрешимые подгруппы группы G . Тогда G является группой одного из следующих типов и допускает только приведенные факторизации:

1. $G \cong SL_2(2^n)$, $n \geq 2$, причем $A \cong C_2^n \rtimes C_{2^n-1}$, $B \cong C_{2^n+1}$ и $A \cap B = 1$;
2. $G \cong PSL_2(q)$, $q \equiv -1 \pmod{4}$, $q \notin \{7, 11\}$, причем $A \cong U \rtimes Z_{\frac{1}{2}(q-1)}$ ($|U| = q$), $B \cong D_{q+1}$ и $A \cap B = 1$;
3. $G \cong PSL_2(7)$
 - (a) $A \cong C_7$, $B \cong S_4$ и $A \cap B = 1$,
 - (b) $A \cong C_7 \rtimes C_3$, $B \cong S_4$ и $A \cap B \cong C_3$,
 - (c) $A \cong C_7 \rtimes C_3$, $B \cong D_8$ и $A \cap B = 1$;
4. $G \cong PSL_2(11)$
 - (a) $A \cong A_4$, $B \cong C_{11} \rtimes C_5$ и $A \cap B = 1$,
 - (b) $A \cong D_{12}$, $B \cong C_{11} \rtimes C_5$ и $A \cap B = 1$;
5. $G \cong PSL_3(3)$, причем $A \cong C_{11}$, $B \cong 3^2 : 2S_4$, $A \cap B = 1$;
6. $G \cong M_{11}$, причем $A \cong C_{11} \rtimes C_5$, $B \cong 3^2 : Q_8$, $A \cap B = 1$.

2 Основные результаты

Теорема 2.1. Пусть $G = HK$ – конечная группа, H – В-подгруппа или нильпотентна, K – z-подгруппа и $(|H|, |K|) = 1$.

- (1) Если группа G разрешима, то
 - (1.1) второй коммутант $(G')'$ является нильпотентной подгруппой;
 - (1.2) производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 3;
 - (1.3) p -длина группы G не превышает 2 для каждого $p \in \pi(H)$ и равна 1 для каждого $p \in \pi(K)$.

(2) Если группа G – простая, то G – группа одного из следующих типов:

- (2.1) $G \cong SL_2(2^n)$, $n \geq 2$, $2^n - 1$ – простое число, $H \cong C_2^n \rtimes C_{2^n-1}$, $K \cong C_{2^n+1}$;
- (2.2) $G \cong PSL_2(q)$, $q = 2^m - 1$ – простое число, $m \geq 5$, $H \cong D_{q+1}$, $K \cong C_q \rtimes C_{\frac{1}{2}(q-1)}$;

$$(2.3) G \cong PSL_2(7), H \cong D_8, K \cong C_7 \rtimes C_3;$$

$$(2.4) G \cong PSL_2(7), H \cong A_4 \text{ или } H \cong D_{12}, K \cong C_{11} \rtimes C_5.$$

Доказательство. (1) Воспользуемся индукцией по порядку группы G . Докажем, что $G \in \mathfrak{NA}^2$. Пусть N – неединичная нормальная подгруппа группы G . Фактор-группа

$$G/N = (HN/N)(KN/N),$$

где $HN/N \cong H/H \cap N$, поэтому HN/N либо В-группа, (см. лемму 1.1), либо нильпотентная группа. А фактор-группа $KN/N \cong K/K \cap N$, поэтому KN/N является z-группой. Ясно, что $(|HN/N|, |KN/N|) = 1$.

По индукции $G/N \in \mathfrak{NA}^2$. По лемме 1.2 произведение \mathfrak{NA}^2 – насыщенная формация. Следовательно, по лемме 1.3, группа G примитивна. А по лемме 1.4 G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу, которая совпадает с подгруппой Фиттинга $F = F(G)$, а подгруппа Фраттини $\Phi(G) = E$ – единичная подгруппа. Кроме того, группа $G = [F]M$, $F = C_G(F)$ и $F = O_p(G)$ – элементарная абелева p -группа для некоторого простого числа $p \in \pi(G)$.

Предположим, что подгруппа F циклическая. Тогда $|F| = p$. По леммам 1.5 и 1.6 фактор-группа G/F изоморфна подгруппе из Z_{p-1} . Теперь $G \in \mathfrak{A}^2 \subseteq \mathfrak{NA}^2$.

Значит будем считать, что подгруппа F нециклическая. Так как H и K – холловы подгруппы группы G , то возможны следующие включения: $F \leq H$ или $F \leq K$.

Предположим, что $F \leq K$. Так как F – элементарная абелева p -группа, содержащаяся в циклической силовой p -подгруппе z-группы K , то F имеет простой порядок p . Противоречие.

Теперь предположим, что $F \leq H$. Если подгруппа H нильпотентна, тогда $H = H_p \times H_{p'}$, где H_p – силовая p -подгруппа, а $H_{p'}$ – p' -холлова подгруппа группы H . Ясно, что $F \leq H_p$. Так как $F = C_G(F)$, то $H_{p'} = 1$. По лемме 1.4 $O_p(G/F) = 1$, следовательно $F(G/F) = F_2/F$ – p' -группа. Теперь

$$F_2/F \leq KF/F \cong K/K \cap F,$$

значит все силовые подгруппы фактор-группы F_2/F циклические, а так как F_2/F нильпотентна, то F_2/F – циклическая. Из свойств подгруппы Фиттинга разрешимой группы следует, что $C_{G/F}(F_2/F) = F_2/F$. По лемме 1.5

$$(G/F)/(C_{G/F}(F_2/F)) = (G/F)/(F_2/F) \cong G/F_2 \cong U \leq \text{Aut}(F_2/F).$$

Так как F_2/F – циклическая, то по лемме 1.6 группа $\text{Aut}(F_2/F)$ – абелева. Теперь $G/F_2 \in \mathfrak{A}$, $F_2/F \in \mathfrak{A}$ и $F \in \mathfrak{A}$, поэтому $G \in \mathfrak{A}^3 \subseteq \mathfrak{NA}^2$.

Предположим теперь, что подгруппа H ненильпотентна. Тогда она является B -группой. По лемме 1.1 $H = [R]Q$, где R – нормальная силовская R -подгруппа, а Q – циклическая силовская q -подгруппа, причем r и q – простые числа и $r \neq q$. Так как подгруппа F нециклическая, то F – r -подгруппа и значит $r = p$. По лемме 1.4 $O_p(G/F) = 1$, следовательно, $F(G/F) = F_2/F$ – p' -группа. Теперь в $F(G/F) = F_2/F$ все силовские подгруппы циклические, поэтому $F(G/F) = F_2/F$ – циклическая подгруппа. Повторяя доказательство из предыдущего абзаца, заключаем, что $G \in \mathfrak{NA}^2$. Из определения произведения формаций \mathfrak{N} , \mathfrak{A} и \mathfrak{A} следует, что второй коммутант группы G нильпотентен. Утверждение (1.1) доказано.

По лемме 1.4 фактор-группа $F(G)/\Phi(G)$ абелева, значит $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^3$. Это означает, что производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 3, и утверждение (1.2) справедливо.

Из утверждения (1.1) следует, что $G \in \mathfrak{NA}^2$. Поэтому группа G является расширением метанильпотентной группы с помощью метанильпотентной. Так как по лемме 1.7 метанильпотентная группа имеет p -длину не более 1, то p -длина группы G не превышает 2 для всех $p \in \pi(G)$. Если $p \in \pi(K)$, то силовская p -подгруппа в G циклическая ввиду условий: $(|H|, |K|) = 1$ и K – z -подгруппа. Теперь $I_p(G) = 1$ согласно [8, IV.6.6] и утверждение (1.3) справедливо.

Утверждение (1) доказано полностью.

(2) Пусть теперь группа G – простая. Тогда применима лемма 1.8, согласно которой для группы имеется шесть возможностей.

Предположим, что $G = AB \cong SL_2(2^n)$, $n \geq 2$, причем $A \cong C_2^n \rtimes C_{2^{n-1}}$, $B \cong C_{2^{n+1}}$ и $A \cap B = 1$. Так как A ненильпотентна и содержит нециклическую силовскую подгруппу C_2^n , то $A \cong H \cong C_2^n \rtimes C_{2^{n-1}}$ – B -группа. Поскольку $C_G(G_2) = G_2 \cong C_2^n$, то $\Phi(H) = 1$ и H – группа Шмидта. По свойствам групп Шмидта заключаем, что $|C_{2^{n-1}}|$ – простое число. Теперь G – группа из пункта (2.1).

Пусть теперь $G = AB \cong PSL_2(q)$, $q \equiv -1 \pmod{4}$, $q \notin \{7, 11\}$, причем $A \cong U \rtimes Z_{\frac{1}{2}(q-1)}$ ($|U| = q$), $B \cong D_{q+1}$ и $A \cap B = 1$. Так как $|D_{q+1}|$ делится на 4, то силовская 2-подгруппа в D_{q+1} не циклическая и

$B = D_{q+1}$ не может быть z -группой. Поэтому $H \cong B = D_{q+1}$ либо 2-группа, либо B -группа. Но B -группой она быть не может, поскольку D_{q+1} не 2-замкнута и ее силовская 2-подгруппа нециклическая. Следовательно, $H \cong B = D_{q+1}$ – диэдральная 2-группа и $q+1 = 2^m$ для некоторого $m \geq 4$. Подгруппа $A \cong K$ должна быть z -группой, значит, q – простое число. Поэтому $q = 2^m - 1$ – простое число Мерсенна. Теперь G – группа из пункта (2.2).

Так как H и K не могут быть изоморфны группе S_4 , то при $G \cong PSL_2(7)$ подгруппа $H \cong D_8$, а подгруппа $K \cong C_7 \rtimes C_3$.

Так как A_4 и D_{12} являются B -группами, то при $G \cong PSL_2(7)$ подгруппа $H \cong A_4$ или $H \cong D_{12}$, а подгруппа $K \cong C_{11} \rtimes C_5$.

Изоморфизмы $G \cong PSL_3(3)$ и $G \cong M_{11}$ в нашем случае исключаются, поскольку в факторизациях этих групп не участвуют в качестве сомножителей нильпотентные группы и B -группы. \square

Пример. Симметрическая группа S_4 степени 4 имеет производную длину, равную 3, и 2-длину, равную 2. Группа S_4 является произведением 2-подгруппы и циклической подгруппы порядка 3. S_4 также является произведением B -подгруппы S_3 и циклической подгруппы порядка 4. Этот пример указывает на то, что полученные оценки производной длины и p -длины являются точными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Княгина, В.Н. О произведении B -группы и примарной группы / В.Н. Княгина // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 3 (32). – С. 52–57.
2. Княгина, В.Н. О p -длине произведения двух групп Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Сибирский математический журнал. – 2004. – Т. 45, № 2. – С. 329–333.
3. Княгина, В.Н. О p -длине произведения двух групп B -групп / В.Н. Княгина // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 48–52.
4. Беркович, Я.Г. О разрешимых группах конечного порядка / Я.Г. Беркович // Математический сборник. – 1967. – Т. 74, № 1. – С. 75–92.
5. Монахов, В.С. О частичной сверхразрешимости конечной факторизуемой группы / В.С. Монахов // Доклады НАН Беларуси. – 2001. – Т. 45, № 3. – С. 32–36.
6. Монахов, В.С. О сверхразрешимости конечной факторизуемой группы с циклическими силовскими подгруппами в сомножителях /

В.С. Монахов, И.К. Чирик // Математические заметки. – 2014. – Т. 96, № 6. – С. 911–920.

7. Монахов, В.С. О произведении z -группы и группы с нильпотентными собственными подгруппами / В.С. Монахов, Т.В. Тихоненко // Вестник Полоцкого государственного университета. – 2008. – № 10. – С. 18–21.

8. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York, 1967.

9. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006.

10. Монахов, В.С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп /

В.С. Монахов, Е.Е. Грибовская // Математические заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.

11. Тихоненко, Т.В. О факторизации конечных групп холловыми подгруппами / Т.В. Тихоненко, В.Н. Тютянов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2009. – № 1 (52). – С. 125–133.

Поступила в редакцию 15.08.2025.

Информация об авторах

Княгина Виктория Николаевна – к.ф.-м.н., доцент

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОДРЕШЕТОК РЕШЕТКИ ПОДГРУПП КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

Н.С. Косенок, И.В. Блинец

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ON A CLASS OF SUBLATTICES OF THE SUBGROUP LATTICE OF A FINITE GROUP

N.S. Kosenok, I.V. Blisnets

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. В данной работе: G – конечная группа; $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел \mathbb{P} ; $\Pi \subseteq \sigma$; $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ (n – целое число) и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. Группа G называется: (i) σ -примарной, если G является σ_i -группой для некоторого $i \in I$; (ii) σ -нильпотентной, если G – прямое произведение σ -примарных групп; Π -группой, если $\sigma(G) \subseteq \Pi$. Подгруппа A конечной группы G называется: (i) σ -субнормальной в G , если в G существует цепь подгрупп $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G$ такая, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является σ -примарной группой для всех $i = 1, \dots, t$; (ii) холловской Π -подгруппой G , если A является Π -группой и $\sigma(|G:A|) \cap \Pi = \emptyset$. Мы говорим, что подгруппа H группы G является строго σ -субнормальной, если H^G / H_G является σ -нильпотентной группой. В данной работе мы доказываем, что множество всех строго σ -субнормальных подгрупп, перестановочных с холловой Π -подгруппой конечной группы G , образует подрешётку решётки всех подгрупп $L(G)$ группы G .

Ключевые слова: конечная группа, решетка подгрупп, группа операторов, подрешетка решетки, холлова Π -подгруппа.

Для цитирования: Косенок, Н.С. Об одном классе подрешеток решетки подгрупп конечной группы / Н.С. Косенок, И.В. Блинец // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 4 (65). – С. 72–74. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_72. – EDN: KEQNCF

Abstract. In this paper: G is a finite group; $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ is some partition of the set of all primes \mathbb{P} ; $\Pi \subseteq \sigma$; $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ (n is an integer) and $\sigma(G) = \sigma(|G|)$. A group G is said to be: (i) σ -primary provided G is a σ_i -group for some $i \in I$; (ii) σ -nilpotent if G is the direct product of σ -primary groups; a Π -group if $\sigma(G) \subseteq \Pi$. A subgroup A of a finite group G is said to be: (i) σ -subnormal in G if there is a subgroup chain $A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_t = G$ such that either $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ or $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ is σ -primary for all $i = 1, \dots, t$; (ii) a Hall Π -subgroup of G if A is a Π -group and $\sigma(|G:A|) \cap \Pi = \emptyset$.

We say that a subgroup H of G is strongly σ -subnormal if H^G / H_G is σ -nilpotent. In this paper, we prove that the set of all strongly σ -subnormal subgroups which permute with a Hall Π -subgroup of a finite group G forms a sublattice of the lattice of all subgroups $L(G)$ of G .

Keywords: finite group, lattice of subgroups, operator group, sublattice of a lattice, Hall Π -subgroup.

For citation: Kosenok, N.S. On a class of sublattices of the subgroup lattice of a finite group / N.S. Kosenok, I.V. Blisnets // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 4 (65). – P. 72–74. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_72. – EDN: KEQNCF

Introduction

Throughout this paper, all groups are finite and G always denotes a finite group. Moreover, \mathbb{P} is the set of all primes and $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ is some partition of \mathbb{P} ; $\Pi \subseteq \sigma$ and $\Pi' = \sigma \setminus \Pi$.

If n is an integer, the symbol $\pi(n)$ denotes the set of all primes dividing n ; as usual, $\pi(G) = \pi(|G|)$, the set of all primes dividing the

order of G ; $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ and $\sigma(G) = \sigma(|G|)$ [1]–[4].

A σ -property of a group [1]–[4] is understood to be any of its properties that depends on σ and which does not imply any restrictions on σ .

Before continuing, let us recall some of the most important concepts of the theory of σ -properties of a group.

A group G is said to be [1]–[4]:

- (i) σ -primary if G is a σ_i -group for some $i \in I$;
- (ii) σ -nilpotent if G is the direct product of σ -primary groups;

A subgroup A of G is said to be [1]–[4]:

- (i) σ -subnormal in G if there is a subgroup chain

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G$$

such that either $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ or $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ is σ -primary for all $i = 1, \dots, n$;

- (ii) σ -permutable in G provided G is σ -full, that is, G has a Hall σ_i -subgroup for all $i \in I$ and A permutes with all Hall σ_i -subgroups of G for all i .

We use H^G to denote the normal closure of the subgroup H in G (so H^G is the intersection of all normal subgroups of G containing H), and H_G is the core of H in G , that is, the subgroup of H generated by all normal subgroups of G contained in H .

Let us recall that a subgroup H of G is strongly σ -subnormal in G [6] if H^G / H_G is σ -nilpotent.

If $\sigma(H) \subseteq \Pi$, then H is called a Π -subgroup of G . A Π -subgroup H of G is called a Hall Π -subgroup of G if $\sigma(|G:H|) \cap \Pi = \emptyset$.

In this paper, we prove the following result.

Theorem 0.1. *Let G be a group. If H is a Hall Π -subgroup of G , then the set of all strongly σ -subnormal subgroups of G which permute with H forms a sublattice in $\mathcal{L}(G)$.*

Taking in Theorem 0.1 $H = G$, we get from this theorem the following two results.

Corollary 0.2 (A.N. Skiba [6]). *The set of all strongly σ -subnormal subgroups of G forms a sublattice in $\mathcal{L}(G)$.*

Corollary 0.3. *Let G be a group. If H is a Hall Π -subgroup of G , then the set of all strongly σ -subnormal subgroups of G which permute with H forms a sublattice in $\mathcal{L}(G)$.*

Let us recall that G is said to be: (i) a D_π -group if G possesses a Hall π -subgroup E and every π -subgroup of G is contained in some conjugate of E ; (ii) a σ -full group of Sylow type [2] if every subgroup E of G is a D_{σ_i} -group for every $\sigma_i \in \sigma(E)$.

In view of [8, Theorem 1.2.14], every Sylow permutable subgroup of G is strongly subnormal in G . On the other hand, if G is a σ -full group of Sylow type, then every σ -permutable subgroup is strongly σ -subnormal in G by Theorem B in [2]. Therefore, since the intersection of any set of sublattices of a lattice is a sublattice of this lattice, we also get from Theorem 0.1 the following two known results.

Corollary 0.4 (Kegel [9]). *The set of all Sylow permutable subgroups of G forms a sublattice in $\mathcal{L}(G)$.*

Corollary 0.5 (A.N. Skiba [2]). *If G is a σ -full group of Sylow type, then the set of all σ -permutable subgroups of G forms a sublattice in $\mathcal{L}(G)$.*

1 Lemmas used

Lemma 1.1 (A.N. Skiba [2]). *The class \mathfrak{N}_σ , of all σ -nilpotent groups, is a hereditary Fitting formation.*

Lemma 1.2 [5, Ch. A, Proposition 1.6]. *Let A, B and H be subgroups of G . If $AH = HA$ and $BH = HB$, then $\langle A, B \rangle H = H \langle A, B \rangle$.*

We use $O^\Pi(G)$ to denote the subgroup of G generated by all its Π' -subgroups, where $\Pi' = \sigma \setminus \Pi$; $O_\Pi(G)$ is the product of all normal Π -subgroups of G .

Lemma 1.3 (A.N. Skiba [2, Lemma 2.6]). *If A is σ -subnormal in G and $\sigma(|G:A|) \subseteq \Pi$ -number, then $O^\Pi(A) = O^\Pi(G)$.*

2 Proof of Theorem 0.1

Proof. Let us assume that this theorem is false and let G be a counterexample of minimal order.

Let \mathcal{L} be the set of all strongly σ -subnormal subgroups L of G which permute with H .

Let $A, B \in \mathcal{L}$ and let $K = \langle A, B \rangle$, $V = A \cap B$.

First we show that K is strongly σ -subnormal in G . By hypothesis, A^G / A_G is σ -nilpotent. Therefore, in view of the isomorphisms

$$\begin{aligned} A^G(A_G B_G) / A_G B_G &\simeq A^G / (A^G \cap A_G B_G) = \\ &= A^G / A_G(A^G \cap B_G) \simeq \\ &\simeq (A^G / A_G) / (A_G(A^G \cap B_G) / A_G), \end{aligned}$$

we get that

$$A^G(A_G B_G) / A_G B_G \in \mathfrak{N}_\sigma$$

since the class \mathfrak{N}_σ is closed under taking homomorphic images by Lemma 1.1.

Similarly, we can get that

$$B^G(A_G B_G) / A_G B_G \in \mathfrak{N}_\sigma.$$

Moreover,

$$\begin{aligned} A^G B^G / A_G B_G &= \\ &= (A^G(A_G B_G) / A_G B_G)(B^G(A_G B_G) / A_G B_G) \end{aligned}$$

and so, we have

$$A^G B^G / A_G B_G \in \mathfrak{N}_\sigma$$

since the class \mathfrak{N}_σ is a Fitting formation by Lemma 1.1.

Next note that $\langle A, B \rangle^G = A^G B^G$ and $A_G B_G \leq \langle A, B \rangle_G$. Therefore we get that

$$\langle A, B \rangle^G / \langle A, B \rangle_G \in \mathfrak{N}_\sigma$$

since the class \mathfrak{N}_σ is closed under taking homomorphic images by Lemma 1.1. Hence $\langle A, B \rangle$ is strongly σ -subnormal in G .

Moreover, in view of Lemma 1.2,

$$\langle A, B \rangle H = H \langle A, B \rangle$$

since $AH = HA$ and $BH = HB$ by the choice of A and B . Therefore $K \in \mathcal{L}$.

Now we show that $V \in \mathcal{L}$. First note that

$$(A \cap B)_G = A_G \cap B_G.$$

On the other hand, from the isomorphism

$$\begin{aligned} (A^G \cap B^G) / (A_G \cap B_G) &= \\ &= (A^G \cap B^G) / (A_G \cap B^G \cap A^G) \simeq \\ &\simeq A_G (B^G \cap A^G) / A_G \leq A^G / A_G \end{aligned}$$

we get that

$$(A^G \cap B^G) / (A_G \cap B_G) \in \mathfrak{N}_\sigma$$

since the class \mathfrak{N}_σ is closed under taking normal subgroup by Lemma 1.1. Similarly, we get that

$$(B^G \cap A^G) / (B_G \cap A_G) \in \mathfrak{N}_\sigma.$$

But then we get that

$$(A^G \cap B^G) / (A_G \cap B_G) \in \mathfrak{N}_\sigma$$

since the class \mathfrak{N}_σ is a formation by Lemma 1.1.

It is also clear that

$$(A \cap B)^G \leq A^G \cap B^G.$$

Therefore we get that

$$(A \cap B)^G / (A \cap B)_G \in \mathfrak{N}_\sigma.$$

Therefore $A \cap B$ is strongly σ -subnormal in G .

Finally, we show that $V = A \cap B$ is permutable with H . Let us assume that this is false. Then G is not a Π -group, since otherwise we have $H = G$ and so

$$G = (A \cap B)H = H(A \cap B).$$

First, let us assume that $R := (A \cap B)_G \neq 1$. Then

$$(A/R)^G / (A/R)_G = (A^G/R) / (A_G/R) \simeq A^G / A_G$$

is σ -nilpotent, so A/R is strongly σ -subnormal in G/R . Similarly, B/R is strongly σ -subnormal in G/R . It is also clear that HR/R is a Hall Π -subgroup of G/R and A/R and B/R permute with HR/R , so the choice of G implies that

$$\begin{aligned} ((A \cap B)/R)(HR/R) &= \\ &= ((A/R) \cap (B/R))(HR/R) = \\ &= (HR/R)((A/R) \cap (B/R)) = \\ &= (HR/R)((A \cap B)/R). \end{aligned}$$

But then

$$(A \cap B)H = (A \cap B)HR = HR(A \cap B) = H(A \cap B),$$

which is a contradiction.

Thus, $(A \cap B)_G = 1$, so $(A \cap B)^G$ is σ -nilpotent and hence $(A \cap B)^G = V \times W$, where W is a Hall Π -subgroup of $(A \cap B)^G$. Then $W \leq H$. It is also clear that $A \cap B = L \times K$, where K is a Hall Π -subgroup of $A \cap B$ and that $K \leq H$. Moreover,

$$L = O^\Pi(A \cap B) = O_{\Pi'}(A \cap B).$$

Now we show that $H \leq N_G(L)$. Indeed, we have $H \leq N_G(O^\Pi(A))$ and $H \leq N_G(O^\Pi(B))$ by Lemma 1.3, so $H \leq N_G(O^\Pi(A) \cap O^\Pi(B))$.

Now observe that $O^\Pi(A) \cap O^\Pi(B)$ is normal in $A \cap B$ and from

$$(A \cap B) / (A \cap O^\Pi(A) \cap B) \simeq (A \cap B) O^\Pi(A) / O^\Pi(A)$$

and

$$(A \cap B) / (B \cap O^\Pi(B) \cap A) \simeq (A \cap B) O^\Pi(B) / O^\Pi(B)$$

we get that

$$(A \cap B) / (O^\Pi(A) \cap O^\Pi(B)) =$$

$$= (A \cap B) / ((A \cap O^\Pi(A) \cap B) \cap (B \cap O^\Pi(B) \cap A))$$

is a Π -group. Hence

$$L = O_{\Pi'}(A \cap B) = O_{\Pi'}(O^\Pi(A) \cap O^\Pi(B)),$$

so $H \leq N_G(L)$.

Since $A \cap B = L \times K$, where $K \leq H$ and $H \leq N_G(L)$, we have

$$\begin{aligned} (A \cap B)H &= (L \times K)H = LH = HL = \\ &= H(L \times K) = H(A \cap B), \end{aligned}$$

a contradiction. Therefore $V \in \mathcal{L}$, so \mathcal{L} is a sublattice of the lattice $\mathcal{L}(G)$. \square

REFERENCES

1. Skiba, A.N. On σ -properties of finite groups I / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2014. – № 4 (21). – P. 89–96.
2. Skiba, A.N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – № 436. – P. 1–16.
3. Skiba, A.N. A generalization of a Hall theorem / A.N. Skiba // J. Algebra Appl. – 2015. – Vol. 15, № 4. – P. 21–36.
4. Skiba, A.N. On Some Results in the Theory of Finite Partially Soluble Groups / A.N. Skiba // Commun. Math. Stat. – 2016. – № 4. – P. 281–309.
5. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992.
6. Skiba, A.N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – № 550. – P. 69–85.
7. Shemetkov, L.A. Formations of Algebraic Systems / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba // Moscow: Nauka, 1989.
8. Ballester-Bolinches, A. Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 2010.
9. Kegel, O.H. Sylow-Gruppen und Subnormalteilerendlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1962. – № 78. – P. 205–221.

The article was submitted 12.09.2025.

Информация об авторах

Косенок Николай Сергеевич – к.ф.-м.н., доцент
Близнец Игорь Васильевич – к.ф.-м.н., доцент

АНАЛОГ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА И НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОДНОЙ ДВУХСТУПЕНЧАТОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

К.Б. Мансимов^{1,2}, А.Ф. Мансимзаде¹

¹Бакинский государственный университет

²Институт Систем управления Министерства Науки и Образования Азербайджана, Баку

AN ANALOGUE OF THE EULER EQUATION AND NECESSARY CONDITIONS FOR SECOND-ORDER OPTIMALITY IN ONE TWO-STAGE CONTROL PROBLEM FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF VOLTERRA TYPE

K.B. Mansimov^{1,2}, A.F. Mansimzade¹

¹Baku State University

²Institute of Management Systems of Ministry of Science and Education of Azerbaijan, Baku

Аннотация. Рассматривается одна двухэтапная (ступенчатая) задача оптимального управления, описываемая на двух отрезках времени различными интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра. При предположении открытости области управления вычислены первая и вторая вариации функционала качества типа Больца. Получен аналог уравнения Эйлера (необходимое условие оптимальности первого порядка). Используя условие не отрицательности второй вариации функционала качества вдоль оптимального управления, доказан ряд конструктивно проверяемых необходимых условий оптимальности второго порядка. Изучен случай классически особых управлений.

Ключевые слова: ступенчатая задача оптимального управления, интегро-дифференциальное уравнение типа Вольтерра, вариация функционала, аналог уравнения Эйлера, оптимальное управление, особое в классическом смысле управление.

Для цитирования: Мансимов, К.Б. Аналог уравнения Эйлера и необходимые условия оптимальности второго порядка в одной двухступенчатой задаче управления интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра / К.Б. Мансимов, А.Ф. Мансимзаде // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 4 (65). – С. 75–84. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_75. – EDN: OBWYCA

Abstract. We consider one two-stage (step) optimal control problem, described in two-time intervals by various Volterra-type integro-differential equations. Under the assumption that the control domain is open, the first and second variations of the Boltz-type quality functional are calculated. An analogue of the Euler equation (first order necessary optimality condition) has been received. Using the condition of non-negativity of the second variation of the quality functional along the optimal control, a number of constructively verifiable necessary conditions for second-order optimality are proved. The case of classically singular controls is studied.

Keywords: stepwise optimal control problem, integro-differential equation of Volterra type, variation of the functional, analogue of the Euler equation, optimal control, singular control in the classical sense.

For citation: Mansimov, K.B. An analogue of the Euler equation and necessary conditions for second-order optimality in one two-stage control problem for integro-differential equations of Volterra type / K.B. Mansimov, A.F. Mansimzade // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 4 (65). – P. 75–84. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_75 (in Russian). – EDN: OBWYCA

Введение

Многие процессы являются многоэтапными (их называют также ступенчатыми) [1]–[6]. Подобные процессы в различных отрезках времени описываются различными уравнениями. В работах [1]–[6] и др. исследованы ряд ступенчатых задач оптимального управления, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. В этих работах доказаны аналогии принципа максимума Л.С. Понтрягина.

Как известно (см., напр., [7]–[9]), многие модели управляемых динамических систем

описываются интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра.

Выводу ряда необходимых условий оптимальности первого порядка типа принципа максимума Понтрягина в задачах оптимального управления, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями, посвящены работы [10]–[12].

В работе [13] была рассмотрена одна ступенчатая задача оптимального управления, описываемая на различных отрезках времени нелинейными интегро-дифференциальными уравнениями.

Был доказан аналог принципа максимума, а в случае выпуклости областей управления установлен аналог линейризованного условия максимума.

В предлагаемой работе аналогичная задача (т. е. задача оптимального управления из [13]) исследуется при предположении открытости областей управления.

Получен аналог уравнения Эйлера (необходимое условие оптимальности первого порядка) [14], [15] и установлено общее необходимое условие оптимальности второго порядка, носящее конструктивный характер.

Отдельно изучен случай особых, в классическом смысле (см., например, [16]–[18]), управлений.

1 Постановка задачи

Предположим, что $T_1 = [t_0, t_1]$, $T_2 = [t_1, t_2]$ ($t_0 < t_1 < t_2$) – заданные отрезки, $U_1 \subset R^n, U_2 \subset R^q$ – заданные непустые, ограниченные и открытые множества.

Допустим, что ступенчатый процесс описывается двумя системами нелинейных интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра

$$\dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1(t), u_1(t)) + \int_{t_0}^t K_1(t, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau)) d\tau, \quad t \in T_1, \quad (1.1)$$

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad (1.2)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(t, x_2(t), u_2(t)) + \int_{t_1}^t K_2(t, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau)) d\tau, \quad t \in T_2. \quad (1.3)$$

$$x_2(t_1) = G(x_1(t_1)). \quad (1.4)$$

Здесь $f_i(t, x_i, u_i)$, $K_i(t, \tau, x_i(\tau), u_i(\tau))$, $i = 1, 2$ – заданные n -мерные вектор-функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по (x_i, u_i) , $i = 1, 2$ до второго порядка включительно, $G(x_1)$ – дважды непрерывно-дифференцируемая n -мерная вектор-функция, x_{10} – постоянный вектор, $u_1(t)$ ($u_2(t)$) – $r(q)$ -мерный кусочно-непрерывный вектор управляющих функций со значениями из множества U_1 (U_2), т. е.

$$\begin{aligned} u_1(t) &\in U_1 \subset R^n, \quad t \in T_1, \\ u_2(t) &\in U_2 \subset R^q, \quad t \in T_2. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Такие управляющие функции назовем допустимыми управлениями, пару $(u_1(t), u_2(t))$ – допустимым управлением.

Будем предполагать, что каждому допустимому управлению $(u_1(t), u_2(t))$ соответствует единственное кусочно-гладкое (в смысле,

например, [14]) решение $(x_1(t), x_2(t))$ задачи (1.1)–(1.4).

На решениях задач (1.1), (1.2) и (1.3), (1.4), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим функционал типа Больца

$$\begin{aligned} J(u_1, u_2) &= \varphi_1(x_1(t_1)) + \varphi_2(x_2(t_2)) + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{t_0}^t F_1(t, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau)) d\tau \right) dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{t_1}^t F_2(t, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau)) d\tau \right) dt. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь $\varphi_i(x_i)$, $i = 1, 2$ – заданные дважды непрерывно-дифференцируемые скалярные функции, $F_i(t, \tau, x_i, u_i)$, $i = 1, 2$ – скалярные функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по (x_i, u_i) , $i = 1, 2$ соответственно.

Допустимое управление $(u_1(t), u_2(t))$, доставляющее минимальное значение функционалу (1.6) при ограничениях (1.1)–(1.5), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u_1(t), u_2(t), x_1(t), x_2(t))$ – оптимальным процессом.

Целью настоящей работы является вывод необходимых условий оптимальности первого и второго порядков в рассматриваемой задаче оптимального управления.

2 Формула приращения второго порядка критерия качества

Пусть $(u_1(t), u_2(t), x_1(t), x_2(t))$ – некоторый допустимый процесс,

$$(\bar{u}_1(t) = u_1(t) + \Delta u_1(t), \quad \bar{u}_2(t) = u_2(t) + \Delta u_2(t),$$

$$\bar{x}_1(t) = x_1(t) + \Delta x_1(t), \quad \bar{x}_2(t) = x_2(t) + \Delta x_2(t))$$

– произвольный допустимый процесс.

Запишем приращение функционала (1.6), отвечающее допустимым управлениям $(u_1(t), u_2(t))$ и $(\bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t))$:

$$\begin{aligned} \Delta J(u_1, u_2) &= J(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - J(u_1, u_2) = \\ &= \sum_{i=1}^2 \left(\varphi_i(\bar{x}_i(t_i)) - \varphi_i(x_i(t_i)) \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^t (F_i(t, \tau, \bar{x}_i(\tau), \bar{u}_i(\tau)) - \right. \\ &\quad \left. - F_i(t, \tau, x_i(\tau), u_i(\tau))) d\tau \right) dt. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В силу введенных обозначений ясно, что приращения $\Delta x_1(t), \Delta x_2(t)$ траекторий $x_1(t)$ и $x_2(t)$ будут соответственно решениями задач

$$\Delta \dot{x}_1(t) = f_1(t, \bar{x}_1(t), \bar{u}_1(t)) - f_1(t, x_1(t), u_1(t)) +$$

$$+ \int_{t_0}^t (K_1(t, \tau, \bar{x}_1(\tau), \bar{u}_1(\tau)) - K_1(t, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau))) d\tau, \quad (2.2)$$

$$\Delta x_1(t_0) = 0, \quad (2.3)$$

$$\Delta \dot{x}_2(t) = f_2(t, \bar{x}_2(t), \bar{u}_2(t)) - f_2(t, x_2(t), u_2(t)) + \\ + \int_{t_1}^t (K_2(t, \tau, \bar{x}_2(\tau), \bar{u}_2(\tau)) - K_2(t, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau))) d\tau, \quad (2.4)$$

$$\Delta x_2(t_1) = G(\bar{x}_1(t_1)) - G(x_1(t_1)). \quad (2.5)$$

Пусть $\psi_i(t), i = 1, 2$ — пока неизвестные n -мерные кусочно-гладкие вектор-функции.

Применяя формулу Дирихле (см., например, [15]) доказываем, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{t_0}^t \psi'_1(\tau) (K_1(t, \tau, \bar{x}_1(\tau), \bar{u}_1(\tau)) - \right. \\ \left. - K_1(t, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau))) d\tau \right) dt = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_t^{t_1} \psi'_1(\tau) (K_1(\tau, t, \bar{x}_1(t), \bar{u}_1(t)) - \right. \\ \left. - K_1(\tau, t, x_1(t), u_1(t))) d\tau \right) dt, \quad (2.6)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{t_1}^t \psi'_2(\tau) (K_2(t, \tau, \bar{x}_2(\tau), \bar{u}_2(\tau)) - \right. \\ \left. - K_2(t, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau))) d\tau \right) dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_t^{t_2} \psi'_2(\tau) (K_2(\tau, t, \bar{x}_2(t), \bar{u}_2(t)) - \right. \\ \left. - K_2(\tau, t, x_2(t), u_2(t))) d\tau \right) dt, \quad (2.7)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{t_0}^t (F_1(t, \tau, \bar{x}_1(\tau), \bar{u}_1(\tau)) - F_1(t, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau))) d\tau \right) dt = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_t^{t_1} (F_1(\tau, t, \bar{x}_1(t), \bar{u}_1(t)) - \right. \\ \left. - F_1(\tau, t, x_1(t), u_1(t))) d\tau \right) dt, \quad (2.8)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{t_1}^t (F_2(t, \tau, \bar{x}_2(\tau), \bar{u}_2(\tau)) - F_2(t, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau))) d\tau \right) dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_t^{t_2} (F_2(\tau, t, \bar{x}_2(t), \bar{u}_2(t)) - \right. \\ \left. - F_2(\tau, t, x_2(t), u_2(t))) d\tau \right) dt. \quad (2.9)$$

Далее, учитывая начальные условия (2.3) и (2.5), получаем, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \psi'_1(t) \Delta \dot{x}_1(t) dt =$$

$$= \psi'_1(t_1) \Delta x_1(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}'_1(t) \Delta x_1(t) dt, \quad (2.10)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \psi'_2(t) \Delta \dot{x}_2(t) dt = \psi'_2(t_2) \Delta x_2(t_2) -$$

$$- \psi'_2(t_1) (G(\bar{x}_1(t_1)) - G(x_1(t_1))) - \int_{t_1}^{t_2} \dot{\psi}'_2(t) \Delta x_2(t) dt. \quad (2.11)$$

Введем аналоги функции Гамильтона — Понтрягина в виде

$$H_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t)) = \psi'_i(t) f_i(t, x_i(t), u_i(t)) + \\ + \int_t^{t_i} \psi'_i(\tau) K_i(\tau, t, x_i(t), u_i(t)) d\tau - \\ - \int_t^{t_i} F_i(\tau, t, x_i(t), u_i(t)) d\tau, \quad i = 1, 2.$$

Учитывая тождества (2.7)–(2.11), а также введенные обозначения, приращение (2.1) функционала (1.6) записывается в виде

$$\Delta J(u_1, u_2) = \sum_{i=1}^2 (\varphi_i(\bar{x}_i(t_i)) - \varphi_i(x_i(t_i))) + \\ - \sum_{i=1}^2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} (H_i(t, \bar{x}_i(t), \bar{u}_i(t), \psi_i(t)) - \\ - H_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t))) dt + \\ + \sum_{i=1}^2 \psi'_i(t_i) \Delta x_i(t_i) - \sum_{i=1}^2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\psi}'_i(t) \Delta x_i(t) dt + \\ - \psi'_2(t_1) (G(\bar{x}_1(t_1)) - G(x_1(t_1))). \quad (2.12)$$

Введем обозначение

$$M(\psi_2(t_1), x_1) = \psi'_2(t_1) G(x_1)$$

и преобразуем отдельные слагаемые в формуле приращения (2.12).

Используя формулу Тейлора, получим, что

$$\varphi_i(\bar{x}_i(t_i)) - \varphi_i(x_i(t_i)) = \frac{\partial \varphi_i(x_i(t_i))}{\partial x_i} \Delta x_i(t_i) + \\ + \frac{1}{2} \Delta x'_i(t_i) \frac{\partial^2 \varphi_i(x_i(t_i))}{\partial x_i^2} \Delta x_i(t_i) + o_i(\|\Delta x_i(t_i)\|^2), \quad (2.13)$$

$$i = 1, 2,$$

$$H_i(t, \bar{x}_i(t), \bar{u}_i(t), \psi_i(t)) - H_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t)) = \\ = \frac{\partial H'_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t))}{\partial x_i} \Delta x_i(t) + \\ + \frac{\partial H'_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t))}{\partial u_i} \Delta u_i(t) + \\ + \frac{1}{2} \Delta x'_i(t) \frac{\partial^2 H_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t))}{\partial x_i^2} \Delta x_i(t) + \\ + 2 \Delta u'_i(t) \frac{\partial^2 H_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t))}{\partial u_i \partial x_i} \Delta x_i(t) +$$

$$+ \Delta u_i'(t) \frac{\partial^2 H_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t))}{\partial u_i^2} \Delta u_i(t) +$$

$$+ o_{i+2} \left(\left(\|\Delta x_i(t)\| + \|\Delta u_i(t)\| \right)^2 \right), i = 1, 2, \quad (2.14)$$

$$M(\psi_2(t_1), \bar{x}_1(t_1)) - M(\psi_2(t_1), x_1(t_1)) =$$

$$= \frac{\partial M'(\psi_2(t_1), x_1(t_1))}{\partial x_1} \Delta x_1(t_1) +$$

$$+ \frac{1}{2} \Delta x_1'(t_1) \frac{\partial^2 M(\psi_2(t_1), x_1(t_1))}{\partial x_1^2} \Delta x_1(t_1) +$$

$$+ o_5 \left(\|\Delta x_1(t_1)\|^2 \right). \quad (2.15)$$

Здесь $\|\alpha\|$ – норма вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)'$, определяемая формулой $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$, а $o(\alpha^2)$ – величина более высокого порядка малости, чем α^2 , т. е. $\frac{o(\alpha^2)}{\alpha^2} \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$.

Учитывая разложения (2.13)–(2.15), формула приращения (2.12) функционала (1.6) будет иметь вид:

$$\Delta J(u_1, u_2) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \varphi_i'(x_i(t_i))}{\partial x_i} \Delta x_i(t_i) -$$

$$+ \frac{1}{2} \Delta x_i'(t_i) \frac{\partial^2 \varphi_i(x_i(t_i))}{\partial x_i^2} \Delta x_i(t_i) -$$

$$- \sum_{i=1}^2 \psi_i'(t_i) \Delta x_i(t_i) - \sum_{i=1}^2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\psi}_i'(t) \Delta x_i(t) dt -$$

$$- \frac{\partial M'(\psi_2(t_1), x_1(t_1))}{\partial x_1} \Delta x_1(t_1) -$$

$$- \sum_{i=1}^2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\frac{\partial H_i'(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t))}{\partial x_i} \Delta x_i(t) + \right.$$

$$+ \left. \frac{\partial H_i'(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t))}{\partial u_i} \Delta u_i(t) \right) dt -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\Delta x_i'(t) \frac{\partial^2 H_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t))}{\partial x_i} \Delta x_i(t) + \right.$$

$$+ 2 \Delta u_i'(t) \frac{\partial^2 H_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t))}{\partial u_i \partial x_i} \Delta x_i(t) +$$

$$+ \left. \Delta u_i'(t) \frac{\partial^2 H_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t))}{\partial u_i^2} \Delta u_i(t) \right) dt -$$

$$- \frac{1}{2} \Delta x_1'(t_1) \frac{\partial^2 M(\psi_2(t_1), x_1(t_1))}{\partial x_1^2} \Delta x_1(t_1) -$$

$$- \sum_{i=1}^2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} o_{i+2} \left(\left(\|\Delta x_i(t)\| + \|\Delta u_i(t)\| \right)^2 \right) dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^2 o_i \left(\|\Delta x_i(t_i)\|^2 \right) - o_5 \left(\|\Delta x_1(t_1)\|^2 \right). \quad (2.16)$$

Предположим, что вектор-функции $\psi_i(t)$, $i = 1, 2$ являются решениями линейных интегродифференциальных уравнений

$$\dot{\psi}_i(t) = - \frac{\partial H_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t))}{\partial x_i}, \quad (2.17)$$

$$i = 1, 2, t \in T_i,$$

$$\psi_1(t_1) = - \frac{\partial \varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1} + \frac{\partial M(\psi_2(t_1), x_1(t_1))}{\partial x_1},$$

$$\psi_2(t_2) = - \frac{\partial \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2}.$$

Тогда формула приращения (2.16) принимает вид

$$\Delta J(u_1, u_2) = - \sum_{i=1}^2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{\partial H_i'(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t))}{\partial u_i} \Delta u_i(t) dt -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \Delta x_i'(t_i) \frac{\partial^2 \varphi_i(x_i(t_i))}{\partial x_i^2} \Delta x_i(t_i) -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\Delta x_i'(t) \frac{\partial^2 H_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t))}{\partial x_i} \Delta x_i(t) + \right.$$

$$+ 2 \Delta u_i'(t) \frac{\partial^2 H_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t))}{\partial u_i \partial x_i} \Delta x_i(t) +$$

$$+ \left. \Delta u_i'(t) \frac{\partial^2 H_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t))}{\partial u_i^2} \Delta u_i(t) \right] dt -$$

$$- \frac{1}{2} \Delta x_1'(t_1) \frac{\partial^2 M(\psi_2(t_1), x_1(t_1))}{\partial x_1^2} \Delta x_1(t_1) -$$

$$- \sum_{i=1}^2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} o_{i+2} \left(\left(\|\Delta x_i(t)\| + \|\Delta u_i(t)\| \right)^2 \right) dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^2 o_i \left(\|\Delta x_i(t_i)\|^2 \right) - o_5 \left(\|\Delta x_1(t_1)\|^2 \right). \quad (2.18)$$

Из результатов работы [13] следует, что при сделанных предположениях в случае $\Delta u_2(t) \equiv 0$

$$\|\Delta x_1(t)\| \leq L_1 \int_{t_0}^{t_1} \|\Delta u_1(\tau)\| d\tau, t \in T_1, \quad (2.19)$$

$$\|\Delta x_2(t)\| \leq L_2 \int_{t_0}^{t_1} \|\Delta u_1(\tau)\| d\tau, t \in T_2, \quad (2.20)$$

$$L_i = \text{const} > 0, i = 1, 2.$$

В случае, когда $\Delta u_1(t) \equiv 0$, $\Delta u_2(t) \neq 0$, имеют место оценки:

$$\Delta x_1(t) = 0, t \in T_1,$$

$$\|\Delta x_2(t)\| \leq L_3 \int_{t_1}^{t_2} \|\Delta u_2(\tau)\| d\tau, t \in T_2, \quad (2.21)$$

$$L_3 = \text{const} > 0.$$

Используя эти оценки, с помощью формулы приращения (2.18), найдем выражения первой и второй вариаций функционала качества.

3 Вариации функционала

В силу независимости управляющих функций, полагая $\Delta u_2(t) = 0$, определим $\Delta u_1(t)$ следующим специальным образом

$$\Delta u_1(t; \varepsilon) = \varepsilon \delta u_1(t), t \in T_1. \quad (3.1)$$

Здесь ε – достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u_1(t) \in R^r$, $t \in T_1$ – произвольная, кусочно-непрерывная вектор-функция.

Через $\Delta x_1(t; \varepsilon)$, $\Delta x_2(t; \varepsilon)$ обозначим специальные приращения траекторий $x_1(t)$ и $x_2(t)$, отвечающие специальному приращению (3.1) управляющей функции $u_1(t)$.

Из оценок (2.19) и (2.20) следует, что $\|\Delta x_1(t; \varepsilon)\|$ и $\|\Delta x_2(t; \varepsilon)\|$ имеют порядок малости ε .

Из задач Коши (2.2), (2.3) и (2.4), (2.5) получаем, что $\Delta x_1(t)$ и $\Delta x_2(t)$ являются решениями следующих линеаризованных задач Коши:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_1(t) = & \frac{\partial f_1(t, x_1(t), u_1(t))}{\partial x_1} \Delta x_1(t) + \\ & + \frac{\partial f_1(t, x_1(t), u_1(t))}{\partial u_1} \Delta u_1(t) + o_6(\|\Delta x_1(t)\| + \|\Delta u_1(t)\|) + \\ & + \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial K_1(t, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau))}{\partial x_1} \Delta x_1(\tau) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial K_1(t, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau))}{\partial u_1} \Delta u_1(\tau) \right) d\tau + \\ & + \int_{t_0}^t o_7(\|\Delta x_1(\tau)\| + \|\Delta u_1(\tau)\|) d\tau, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\Delta x_1(t_0) = 0, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_2(t) = & \frac{\partial f_2(t, x_2(t), u_2(t))}{\partial x_2} \Delta x_2(t) + \\ & + \frac{\partial f_2(t, x_2(t), u_2(t))}{\partial u_2} \Delta u_2(t) + o_8(\|\Delta x_2(t)\|) + \\ & + \int_{t_1}^t \frac{\partial K_2(t, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau))}{\partial x_2} \Delta x_2(\tau) d\tau + \\ & + \int_{t_1}^t o_9(\|\Delta x_2(\tau)\|) d\tau, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\Delta x_2(t_1) = \frac{\partial G(x_1(t_1))}{\partial x_1} \Delta x_1(t_1) + o_{10}(\|x_1(t_1)\|). \quad (3.5)$$

Заметим, что при $\Delta u_1(t) = 0$ линеаризованная задача для $\Delta x_2(t)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_2(t) = & \frac{\partial f_2(t, x_2(t), u_2(t))}{\partial x_2} \Delta x_2(t) + \\ & + \frac{\partial f_2(t, x_2(t), u_2(t))}{\partial u_2} \Delta u_2(t) + \\ & + o_{11}(\|\Delta x_2(t)\| + \|\Delta u_2(t)\|) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \int_{t_1}^t \left(\frac{\partial K_2(t, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau))}{\partial x_2} \Delta x_2(\tau) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial K_2(t, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau))}{\partial u_2} \Delta u_2(\tau) + \right. \\ & \left. + o_{12}(\|\Delta x_2(\tau)\| + \|\Delta u_2(\tau)\|) \right) d\tau, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\Delta x_2(t_1) = 0. \quad (3.7)$$

Учитывая формулу (3.1) и того, что при этом $\|\Delta x_1(t; \varepsilon)\|$ и $\|\Delta x_2(t; \varepsilon)\|$ имеют порядок малости ε , с помощью задач (3.2), (3.3) и (3.4), (3.5) доказывается следующее утверждение

Лемма 3.1. Для $\Delta x_1(t; \varepsilon)$, $\Delta x_2(t; \varepsilon)$ имеют место следующие разложения:

$$\Delta x_1(t; \varepsilon) = \varepsilon \delta x_1(t) + o_{13}(\varepsilon; t), \quad (3.8)$$

$$\Delta x_2(t; \varepsilon) = \varepsilon \delta x_2(t) + o_{14}(\varepsilon; t). \quad (3.9)$$

Здесь $\delta x_1(t)$ и $\delta x_2(t)$ являются решениями уравнений в вариациях

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}_1(t) = & \frac{\partial f_1(t, x_1(t), u_1(t))}{\partial x_1} \delta x_1(t) + \\ & + \frac{\partial f_1(t, x_1(t), u_1(t))}{\partial u_1} \delta u_1(t) + \\ & + \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial K_1(t, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau))}{\partial x_1} \delta x_1(\tau) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial K_1(t, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau))}{\partial u_1} \delta u_1(\tau) \right) d\tau, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\delta x_1(t_0) = 0, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}_2(t) = & \frac{\partial f_2(t, x_2(t), u_2(t))}{\partial x_2} \delta x_2(t) + \\ & + \int_{t_1}^t \frac{\partial K_2(t, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau))}{\partial x_2} \delta x_2(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\delta x_2(t_1) = \frac{\partial G(x_1(t_1))}{\partial x_1} \delta x_1(t_1). \quad (3.13)$$

Положим $\Delta u_1(t) = 0$, тогда $\Delta u_2(t)$ определим по формуле

$$\Delta u_2(t; \mu) = \mu \delta u_2(t), t \in T_2. \quad (3.14)$$

Здесь, μ – достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u_2(t) \in R^q$, $t \in T_2$ произвольная, кусочно-непрерывная и ограниченная вектор-функция (допустимая вариация управления $u_2(t)$).

Через $\Delta x_2(t; \mu)$ обозначим специальное приращение траектории $x_2(t)$, отвечающее специальному приращению (3.14) управляющей функции $u_2(t)$.

При этом, с помощью линеаризованной системы (3.6), (3.7) доказывается

Лемма 3.2. Для $\Delta x_2(t; \mu)$ имеет место следующее разложение:

$$\Delta x_2(t; \mu) = \mu y(t) + o_{10}(\mu; t). \quad (3.15)$$

Здесь $y(t)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & \frac{\partial f_2(t, x_2(t), u_2(t))}{\partial x_2} y(t) + \\ & + \frac{\partial f_2(t, x_2(t), u_2(t))}{\partial u_2} \delta u_2(t) + \\ & + \int_{t_1}^t \left(\frac{\partial K_2(t, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau))}{\partial x_2} y(\tau) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial K_2(t, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau))}{\partial u_2} \delta u_2(\tau) \right) d\tau, \quad (3.16) \\ y(t_1) = & 0. \quad (3.17) \end{aligned}$$

Используя формулы (3.1), (3.14), (3.8), (3.9) и (3.15), из формулы приращения (2.18) получаем справедливость разложений

$$\begin{aligned} J(u_1 + \varepsilon \delta u_1, u_2) - J(u_1, u_2) = & \\ = -\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1} \delta u_1(t) dt - \\ - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta x'_1(t) \frac{\partial^2 H'_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial x_1^2} \delta x_1(t) + \right. \\ & + 2 \delta u'_1(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1 \partial x_1} \delta x_1(t) + \\ & \left. + \delta u'_1(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1^2} \delta u_1(t) \right) dt - \\ - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{t_1}^{t_2} \delta x'_2(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial x_2^2} \delta x_2(t) dt + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \delta x'_1(t_1) \frac{\partial^2 \Phi'_1(x_1(t_1))}{\partial x_1^2} \delta x_1(t_1) + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \delta x'_2(t_2) \frac{\partial^2 \Phi'_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} \delta x_2(t_2) - \\ - \frac{\varepsilon^2}{2} \delta x'_1(t_1) \frac{\partial^2 M(\psi_2(t_1), x_1(t_1))}{\partial x_1^2} \delta x_1(t_1) + o(\varepsilon^2), \quad (3.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(u_1, u_2 + \mu \delta u_2) - J(u_1, u_2) = & \\ = -\mu \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H'_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2} \delta u_2(t) dt - \\ - \frac{\mu^2}{2} y'(t_2) \frac{\partial^2 \Phi'_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} y(t_2) - \\ - \frac{\mu^2}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(y'(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial x_2} y(t) + \right. \\ & \left. + 2 \delta u'_2(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2 \partial x_2} y(t) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. + \delta u'_2(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2^2} \delta u_2(t) \right) dt + \\ & o(\mu^2). \quad (3.19) \end{aligned}$$

Из разложений (3.18) и (3.19) следует, что первая и вторая вариации функционала (1.6) имеют соответственно вид:

$$\begin{aligned} \delta^1 J(u_1, u_2; \delta u_1) = & \\ = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1} \delta u_1(t) dt, \quad (3.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta^1 J(u_1, u_2; \delta u_2) = & \\ = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H'_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2} \delta u_2(t) dt, \quad (3.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta^2 J(u_1, u_2; \delta u_1) = & \delta x'_1(t_1) \frac{\partial^2 \Phi'_1(x_1(t_1))}{\partial x_1^2} \delta x_1(t_1) + \\ & + \delta x'_2(t_2) \frac{\partial^2 \Phi'_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} \delta x_2(t_2) - \\ & - \delta x'_1(t_1) \frac{\partial^2 M(\psi_2(t_1), x_1(t_1))}{\partial x_1^2} \delta x_1(t_1) - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta x'_1(t) \frac{\partial^2 H'_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial x_1^2} \delta x_1(t) + \right. \\ & + 2 \delta u'_1(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1 \partial x_1} \delta x_1(t) + \\ & \left. + \delta u'_1(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1^2} \delta u_1(t) \right) dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \delta x'_2(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial x_2^2} \delta x_2(t) dt, \quad (3.22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta^2 J(u_1, u_2; \delta u_1) = & y'(t_2) \frac{\partial^2 \Phi'_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} y(t_2) - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \left(y'(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial x_2} y(t) + \right. \\ & + 2 \delta u'_2(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2 \partial x_2} y(t) + \\ & \left. + \delta u'_2(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2^2} \delta u_2(t) \right) dt. \quad (3.23) \end{aligned}$$

4 Необходимые условия оптимальности

Доказанные выражения первой и второй вариации функционала качества (1.6) позволяют установить необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

В силу открытости областей управления вдоль оптимального управления $(u_1(t), u_2(t))$ первые вариации функционала должны равняться нулю. Поэтому из формул (3.20) и (3.21) получаем, что вдоль оптимального управления

$(u_1(t), u_2(t))$, для всех $\delta u_1(t) \in R^r$, $t \in T_1$ и $\delta u_2(t) \in R^q$, $t \in T_2$

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H'_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1} \delta u_1(t) dt = 0,$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H'_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2} \delta u_2(t) dt = 0.$$

Из этих соотношений, в силу произвольности $\delta u_1(t)$ и $\delta u_2(t)$, следует

Теорема 4.1. Для оптимальности допустимого управления $(u_1(t), u_2(t))$ необходимо, чтобы соотношения

$$\frac{\partial H_1(\theta, x_1(\theta), u_1(\theta), \psi_1(\theta))}{\partial u_1} = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial H_2(\theta, x_2(\theta), u_2(\theta), \psi_2(\theta))}{\partial u_2} = 0 \quad (4.2)$$

выполнялись для всех $\theta \in [t_0, t_1]$ и $\theta \in [t_1, t_2]$ соответственно.

Соотношения (4.1) и (4.2) являются необходимыми условиями оптимальности первого порядка и представляют собой аналог уравнения Эйлера из классического вариационного исчисления (см., например, [2]–[4]).

Каждое допустимое управление $(u_1(t), u_2(t))$, являющееся решением уравнения Эйлера (4.1) и (4.2), следуя, например, [4], назовем классической экстремалью.

Для сужения множества классических экстремалей надо иметь необходимые условия оптимальности второго порядка, носящие конструктивный характер.

Из выражений (3.22), (3.23) вторых вариаций функционала качества (1.6) следует, что для оптимальности классической экстремали, $(u_1(t), u_2(t))$ необходимо, чтобы неравенства

$$\begin{aligned} & \delta x'_1(t_1) \frac{\partial^2 \phi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1^2} \delta x_1(t_1) + \\ & + \delta x'_2(t_2) \frac{\partial^2 \phi'_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} \delta x_2(t_2) - \\ & - \delta x'_1(t_1) \frac{\partial^2 M(\psi_2(t_1), x_1(t_1))}{\partial x_1^2} \delta x_1(t_1) - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta x'_1(t) \frac{\partial^2 H'_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial x_1^2} \delta x_1(t) + \right. \\ & + 2\delta u'_1(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1 \partial x_1} \delta x_1(t) + \\ & \left. + \delta u'_1(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1^2} \delta u_1(t) \right) dt - \end{aligned}$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} \delta x'_2(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial x_2^2} \delta x_2(t) dt \geq 0, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} & y'(t_2) \frac{\partial^2 \phi'_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} y(t_2) - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \left(y'(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial x_2^2} y(t) + \right. \\ & + 2\delta u'_2(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2 \partial x_2} y(t) + \\ & \left. + \delta u'_2(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2^2} \delta u_2(t) \right) dt \geq 0 \quad (4.4) \end{aligned}$$

выполнялись для всех допустимых вариаций $\delta u_1(t)$ и $\delta u_2(t)$ классической экстремали $(u_1(t), u_2(t))$.

Как видно, необходимые условия оптимальности (4.3) и (4.4) носят неявный характер. Поэтому их практическая ценность невелика.

Учитывая это, получим необходимые условия оптимальности явно выраженные через параметры рассматриваемой задачи оптимального управления.

Пусть $F_1(t, \tau)$ и $F_2(t, \tau)$ ($n \times n$) матричные функции, являющиеся решениями матричных интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1(t, \tau)}{\partial \tau} &= -F_1(t, \tau) \frac{\partial f_1(\tau, x_1(\tau), u_1(\tau))}{\partial x_1} - \\ & - \int_{\tau}^t F_1(t, s) \frac{\partial K_1(s, \tau, x_1(s), u_1(s))}{\partial x_1} ds, \\ \frac{\partial F_2(t, \tau)}{\partial \tau} &= -F_2(t, \tau) \frac{\partial f_2(\tau, x_2(\tau), u_2(\tau))}{\partial x_2} - \\ & - \int_{\tau}^t F_2(t, s) \frac{\partial K_2(s, \tau, x_2(s), u_2(s))}{\partial x_2} ds, \\ F_1(t, t) &= E, \quad F_2(t, t) = E. \end{aligned}$$

Здесь E – единичная матрица.

Имеет место следующее утверждение

Лемма 4.1. Решения задач (3.10), (3.11), (3.12), (3.13) и (3.16), (3.17) имеют вид:

$$\begin{aligned} \delta x_1(t) &= \int_{t_0}^t F_1(t, \tau) \frac{\partial f_1(\tau, x_1(\tau), u_1(\tau))}{\partial u_1} \delta u_1(\tau) d\tau + \\ & + \int_{t_0}^t \left(\int_{\tau}^t F_1(t, s) \frac{\partial K_1(s, \tau, x_1(s), u_1(s))}{\partial x_1} ds \right) \delta u_1(\tau) d\tau, \quad (4.5) \end{aligned}$$

$$\delta x_2(t) = F_2(t, t_1) \frac{\partial G(x_1(t_1))}{\partial x_1} \delta x_1(t_1), \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t_1}^t F_2(t, \tau) \frac{\partial f_2(\tau, x_2(\tau), u_2(\tau))}{\partial u_2} \delta u_2(\tau) d\tau + \\ & + \int_{t_1}^t \left(\int_{\tau}^t F_2(t, s) \frac{\partial K_2(s, \tau, x_2(s), u_2(s))}{\partial x_2} ds \right) \delta u_2(\tau) d\tau. \quad (4.7) \end{aligned}$$

Учитывая формулы (4.5) и (4.6), получим

$$\begin{aligned} \delta x_2(t) = & F_2(t, t_1) \frac{\partial G(x_1(t_1))}{\partial x_1} \times \\ & \times \int_{t_0}^{t_1} \left(F_1(t_1, \tau) \frac{\partial f_1(\tau, x_1(\tau), u_1(\tau))}{\partial u_1} + \right. \\ & \left. + \int_{\tau}^{t_1} F_1(t_1, s) \frac{\partial K_1(s, \tau, x_1(s), u_1(s))}{\partial x_1} ds \right) \delta u_1(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Введя обозначения

$$\begin{aligned} Q_1(t, \tau) = & F_1(t, \tau) \frac{\partial f_1(\tau, x_1(\tau), u_1(\tau))}{\partial u_1} + \\ & + \int_{\tau}^t F_1(t, s) \frac{\partial K_1(s, \tau, x_1(s), u_1(s))}{\partial x_1} ds, \\ Q_2(t, \tau) = & F_2(t, t_1) \frac{\partial G(x_1(t_1))}{\partial x_1} \times \\ & \times F_1(t_1, \tau) \frac{\partial f_1(\tau, x_1(\tau), u_1(\tau))}{\partial u_1} + \\ & + \int_{\tau}^{t_1} F_1(t_1, s) \frac{\partial K_1(s, \tau, x_1(s), u_1(s))}{\partial x_1} ds, \\ Q_3(t, \tau) = & F_2(t, \tau) \frac{\partial f_2(\tau, x_2(\tau), u_2(\tau))}{\partial u_2} + \\ & + \int_{\tau}^t F_2(t, s) \frac{\partial K_2(s, \tau, x_2(s), u_2(s))}{\partial x_2} ds, \end{aligned}$$

формулы (4.5), (4.6) и (4.7) записываются в виде

$$\delta x_1(t) = \int_{t_0}^t Q_1(t, \tau) \delta u_1(\tau) d\tau, \quad t \in T_1, \quad (4.8)$$

$$\delta x_2(t) = \int_{t_0}^t Q_2(t, \tau) \delta u_1(\tau) d\tau, \quad t \in T_2, \quad (4.9)$$

$$y(t) = \int_{t_1}^t Q_3(t, \tau) \delta u_2(\tau) d\tau, \quad t \in T_2. \quad (4.10)$$

Полученные формулы позволяют доказать конструктивно проверяемые необходимые условия оптимальности второго порядка.

Преобразуем отдельные слагаемые в неравенствах (4.3), (4.4).

Используя (4.8) и (4.9) доказываем, что

$$\begin{aligned} \delta x_1'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1^2} \delta x_1(t_1) = & \quad (4.11) \\ = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \delta u_1'(\tau) Q_1'(t_1, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1^2} Q_1(t_1, s) \delta u_1(s) ds d\tau, \\ \int_{t_0}^{t_1} \delta x_1'(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial x_1^2} \delta x_1(t) = & \\ = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \delta u_1'(\tau) \left(\int_{\max(\tau, s)}^{t_1} Q_1'(t, \tau) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial x_1^2} \times \right. & \\ \left. \times Q_1(t, s) \right) dt \delta u_1(s) ds d\tau, & \quad (4.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \delta u_1'(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1 \partial x_1} \delta x_1(t) dt = & \\ = \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{\tau}^{t_1} \delta u_1'(\tau) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1 \partial x_1} \times \right. & \\ \left. \times Q_1(\tau, t) d\tau \right) \delta u_1(t) dt, & \quad (4.13) \end{aligned}$$

$$\delta x_2'(t_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} \delta x_2(t_2) = \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \delta u_1'(\tau) Q_2'(t_1, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} Q_2(t_1, s) \delta u_1(s) ds d\tau, \\ \int_{t_1}^{t_2} \delta x_2'(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial x_2^2} \delta x_2(t) = & \\ = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \delta u_1'(\tau) \left(\int_{t_1}^{t_2} Q_2'(t, \tau) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial x_2^2} \times \right. & \\ \left. \times Q_2(t, s) dt \right) \delta u_2(s) ds d\tau. & \quad (4.15) \end{aligned}$$

Далее используя (4.10) доказываем, что

$$y'(t_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} y(t_2) = \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} \delta u_2'(\tau) Q_3'(t_2, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} Q_3(t_2, s) \delta u_2(s) ds d\tau, \\ = \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} \delta u_2'(t) \left(\int_{\max(\tau, s)}^{t_2} Q_3'(t, \tau) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial x_2^2} \times \right. & \\ \left. \times Q_3(t, s) dt \right) \delta u_3(s) ds d\tau, & \quad (4.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta u_2'(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2 \partial x_2} y(t) dt = & \\ = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{t_1}^{t_2} \delta u_2'(t) \frac{\partial^2 H_2(\tau, x_2(\tau), u_2(\tau), \psi_2(\tau))}{\partial u_2 \partial x_2} \times \right. & \\ \left. \times Q_3(\tau, t) d\tau \right) \delta u_2(t) dt. & \quad (4.18) \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} K_1(\tau, s) = & -Q_1'(t_1, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1^2} Q_1(t_1, s) - \\ & - Q_2'(t_1, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} Q_2(t_1, s) + \\ & + \int_{\max(\tau, s)}^{t_1} Q_1'(t, \tau) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial x_1^2} Q_1(t, s) dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} Q_2'(t, \tau) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial x_2^2} Q_2(t, s) dt, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$K_2(\tau, s) = -Q'_3(t_2, \tau) \frac{\partial^2 \Phi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} Q_2(t_2, s) + (4.20) \\ + \int_{\max(\tau, s)}^{t_2} Q'_3(t, \tau) \frac{\partial^2 H'_2(t, x_2(t), u_2(t), \Psi_2(t))}{\partial x_2^2} Q_3(t, s) dt.$$

Учитывая доказанные тождества (4.11)–(4.18) и обозначения (4.19), (4.20) в неравенствах (4.3), (4.4), получим справедливость неравенств

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \delta u'_1(\tau) K'_1(\tau, s) \delta u_1(s) ds d\tau + \\ + 2 \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_t^{t_1} \delta u'_1(\tau) \frac{\partial^2 H_1(\tau, x_1(\tau), u_1(\tau), \Psi_1(\tau))}{\partial u_1 \partial x_1} \times \right. \\ \left. \times Q_1(\tau, t) d\tau \right) \delta u_1(t) dt + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \delta u'_1(t) \frac{\partial^2 H'_1(t, x_1(t), u_1(t), \Psi_1(t))}{\partial u_1^2} \delta u_1(t) \leq 0, (4.21) \\ \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} \delta u'_2(\tau) K'_2(\tau, s) \delta u_2(s) ds d\tau + \\ + 2 \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_t^{t_2} \delta u'_2(\tau) \frac{\partial^2 H_2(\tau, x_2(\tau), u_2(\tau), \Psi_2(\tau))}{\partial u_2 \partial x_2} \times \right. \\ \left. \times Q_2(\tau, t) d\tau \right) \delta u_2(t) dt + \\ + \int_{t_1}^{t_2} \delta u'_2(t) \frac{\partial^2 H'_2(t, x_2(t), u_2(t), \Psi_2(t))}{\partial u_2^2} \delta u_2(t) \leq 0. \quad \square$$

Теорема 4.2. Для оптимальности классической экстремали $(u_1(t), u_2(t))$ необходимо, чтобы неравенства (4.21) и (4.22) выполнялись для всех $\delta u_1(t) \in R^r$, $t \in T_1$ и $\delta u_2(t) \in R^q$, $t \in T_2$ соответственно.

Эти неравенства (необходимые условия оптимальности второго порядка) являются общими.

Из них, используя произвольность допустимых вариаций $\delta u_1(t)$ и $\delta u_2(t)$, можно получить ряд новых необходимых условий оптимальности.

Следствием теоремы 4.2 является

Теорема 4.3. Для оптимальности классической экстремали $(u_1(t), u_2(t))$ необходимо, чтобы неравенства

$$v'_1 \frac{\partial^2 H_1(\theta, x_1(\theta), u_1(\theta), \Psi_1(\theta))}{\partial u_1^2} v_1 \leq 0, (4.23)$$

$$v'_2 \frac{\partial^2 H_2(\theta, x_2(\theta), u_2(\theta), \Psi_2(\theta))}{\partial u_2^2} v_2 \leq 0 (4.24)$$

выполнялись для всех $v_1 \in R^r$, $\theta \in [t_0, t_1)$ и $v_2 \in R^q$, $\theta \in [t_1, t_2)$ соответственно.

Неравенства (4.23) и (4.24) являются аналогом условия Лежандра – Клебша (см., например, [4]) для рассматриваемой задачи оптимального

управления из классического вариационного исчисления.

Как видно, аналог условия Лежандра – Клебша менее информативен, чем условия оптимальности (4.21) и (4.22).

Более того, во многих задачах оптимального управления аналог условия Лежандра – Клебша может вырождаться (см., например, [4]–[6]).

Определение 4.1. Классическую экстремаль $(u_1(t), u_2(t))$ назовем особой, в классическом смысле в рассматриваемой задаче, если соотношения

$$v'_1 \frac{\partial^2 H_1(\theta, x_1(\theta), u_1(\theta), \Psi_1(\theta))}{\partial u_1^2} v_1 = 0, \\ v'_2 \frac{\partial^2 H_2(\theta, x_2(\theta), u_2(\theta), \Psi_2(\theta))}{\partial u_2^2} v_2 = 0$$

выполняются для всех $v_1 \in R^r$, $\theta \in [t_0, t_1)$ и $v_2 \in R^q$, $\theta \in [t_1, t_2)$ соответственно.

Получим необходимое условие оптимальности особых, в классическом смысле, управлений.

Пусть $(u_1(t), u_2(t))$ особое, в классическом смысле, оптимальное управление.

В силу произвольности допустимых вариаций $(\delta u_1(t), \delta u_2(t))$ управления $(u_1(t), u_2(t))$, полагая $\delta u_2(t) = 0$, $\delta u_1(t)$ определим по формуле

$$\delta u_1(t; \varepsilon) = \begin{cases} v_1, & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \\ 0, & t \in T_1 \setminus [\theta, \theta + \varepsilon). \end{cases} (4.25)$$

Здесь $v_1 \in R^r$ – произвольный вектор, $\theta \in [t_0, t_1)$ произвольная точка непрерывности управления $u_1(t)$, а $\varepsilon > 0$ произвольное малое число, такое, что $\theta + \varepsilon < t_1$.

Учитывая формулу (4.25), определение особого, в классическом смысле, управления $u_1(t)$, из неравенства (4.21) получим, что

$$\varepsilon^2 \left(v'_1 (K_1(\theta, \theta) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 H_1(\theta, x_1(\theta), u_1(\theta), \Psi_1(\theta))}{\partial u_1 \partial x_1} Q_1(\theta, \theta)) v_1 \right) + o(\varepsilon^2) \leq 0.$$

Разделяя обе части этого неравенства на ε^2 и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим, что

$$v'_1 \left(K_1(\theta, \theta) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 H_1(\theta, x_1(\theta), u_1(\theta), \Psi_1(\theta))}{\partial u_1 \partial x_1} Q_1(\theta, \theta) \right) v_1 \leq 0. (4.26)$$

Полагая $\delta u_1(t) = 0$, допустимую вариацию $\delta u_2(t)$ управления определим по формуле

$$\delta u_2(t; \mu) = \begin{cases} v_2, & t \in [\theta, \theta + \mu), \\ 0, & t \in T_2 \setminus [\theta, \theta + \mu). \end{cases} (4.27)$$

Здесь $v_2 \in R^q$ произвольный вектор, $\theta \in [t_1, t_2)$ произвольная точка непрерывности управления $u_2(t)$, а $\mu > 0$ произвольное малое число, такое, что $\theta + \mu < t_2$.

Учитывая формулу (4.27) в неравенстве (4.22), получим, что

$$\mu^2 \left(v_2' \left(K_2(\theta, \theta) + \frac{\partial^2 H_2(\theta, x_2(\theta), u_2(\theta), \psi_2(\theta))}{\partial u_2 \partial x_2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times Q_2(\theta, \theta) \right) v_2 \right) \leq 0. \quad (4.28)$$

Отсюда в силу произвольности $\mu > 0$ приходим к неравенству

$$v_2' \left(K_2(\theta, \theta) + \frac{\partial^2 H_2(\theta, x_2(\theta), u_2(\theta), \psi_2(\theta))}{\partial u_2 \partial x_2} \times \right. \\ \left. \times Q_2(\theta, \theta) \right) v_2 \leq 0. \quad (4.29)$$

Следовательно, доказана

Теорема 4.4. Для оптимальности особого, в классическом смысле, управления $(u_1(t), u_2(t))$ необходимо, чтобы неравенства (4.28) и (4.29) выполнялись для всех $v_1 \in R^r$, $\theta \in [t_0, t_1)$ и $v_2 \in R^q$, $\theta \in [t_1, t_2)$ соответственно.

Заключение

Рассматривается двухэтапная задача оптимального управления, описываемая на различных отрезках времени различными интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра. Начальное условие второго уравнения связано с конечным значением решения первого уравнения.

При предположении открытости областей управления получен аналог уравнения Эйлера (необходимое условие оптимальности первого порядка).

Установлено общее необходимое условие оптимальности второго порядка, позволяющее получить ряд конструктивно проверяемых необходимых условий оптимальности второго порядка, в частности, необходимое условие оптимальности особых, в классическом смысле управлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Медведев, В.А. Оптимальное управление ступенчатыми системами / В.А. Медведев, В.Н. Розова // Автоматика и телемеханика. – 1972. – № 3. – С. 15–23.
2. Розова, В.Н. Оптимальное управление ступенчатыми системами: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / В.Н. Розова. – Москва, 1971. – 13 с.
3. Розова, В.Н. Оптимальное управление ступенчатыми системами с неинтегральным функционалом / В.Н. Розова // Вестник РУДН.

Серия Прикладная и компьютерная математика. – 2002. – № 1. – С. 131–136.

4. Ащепков, Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами / Л.Т. Ащепков. – Москва: Наука, 1987. – 226 с.

5. Захаров, Г.К. Оптимизация ступенчатых систем управления / Г.К. Захаров // Автоматика и телемеханика. – 1981. – № 8. – С. 5–9.

6. Захаров, Г.К. Оптимизация ступенчатых систем с управляемыми условиями перехода / Г.К. Захаров // Автоматика и телемеханика. – 1966. – № 6. – С. 32–36.

7. Вольтерра, В. Теория функционалов интегральных и интегро-дифференциальных уравнений / В. Вольтера. – Москва: Наука, 1982. – 304 с.

8. Вольтерра, В. Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтера. – Москва: Наука, 1976. – 281 с.

9. Васильева, А.Б. Интегральные уравнения / А.Б. Васильева, Н.А. Тихонов. – Москва: МГУ. – 1989.

10. Габасов, Р. Принцип максимума в теории оптимального управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. – Москва: Либроком, 2011. – 272 с.

11. Васильев, Ф.П. Об условиях существования седловой точки в детерминированных интегро-дифференциальных играх с запаздыванием / Ф.П. Васильев // Журнал Вычислительной математики и математической физики. – 1970. – № 1. – С. 15–25.

12. Васильев, Ф.П. Об условиях существования седловой точки в детерминированных интегро-дифференциальных системах с запаздыванием нейтрального типа / Ф.П. Васильев // Автоматика и телемеханика. – 1972. – № 2. – С. 40–50.

13. Мансимов, К.Б. К необходимым условиям оптимальности в одной двухступенчатой задаче управления интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра / К.Б. Мансимов, А.Ф. Мансимзаде // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (59). – С. 84–89.

14. Методы оптимизации / Р. Габасов [и др.]. – Минск: Изд-во «Четыре четверти», 2011. – 472 с.

15. Алексеев, В.М. Оптимальное управление / В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин. – Москва: Физматлит, 2018. – 384 с.

16. Габасов, Р. Особые оптимальные управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. – Москва: Либроком, 2011. – 256 с.

17. Калинин, А.И. К проблеме особых управлений / А.И. Калинин // Дифференциальные уравнения. – 1985. – № 3. – С. 380–385.

18. Мансимов, К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием / К.Б. Мансимов. – Баку: ЭЛМ, 1999. – 176 с.

Поступила в редакцию 02.06.2025.

Информация об авторах

Мансимов Камиль Байрамали оглы – д.ф.-м.н., профессор
Мансимзаде Айгюль Фазил кызы – диссертант

ВЛИЯНИЕ РЕЖИМОВ МАГНЕТРОННОГО РАСПЫЛЕНИЯ НА СВОЙСТВА ТОНКИХ ПЛЕНОК ОКСИДА ВАНАДИЯ

А.И. Занько, А.Е. Жамойть, А.Г. Шидловский

ОАО «ИНТЕГРАЛ» – управляющая компания холдинга «ИНТЕГРАЛ», Минск

INFLUENCE OF MAGNETRON SPUTTERING PROCESS PARAMETERS ON THE PROPERTIES OF VANADIUM OXIDE THIN FILMS

A.I. Zanka, A.E. Zhamoits, A.H. Shydlovski

JSC “INTEGRAL” – “INTEGRAL” Holding Managing Company, Minsk

Аннотация. Исследован процесс магнетронного распыления ванадиевой мишени в среде аргона и кислорода. Получены гистерезисные зависимости изменения тока катода от содержания кислорода и мощности распыления. Температурный коэффициент сопротивления полученных тонких пленок оксида ванадия при их удельном сопротивлении до 0,1 Ом·м достигает 2,6% / °C. Установлено, что наиболее подходящие пленки оксида ванадия для инфракрасных фотоприемных устройств имеют аморфную структуру с кристаллическими фазами.

Ключевые слова: магнетронное распыление, ток катода, удельное сопротивление, температурный коэффициент сопротивления, терморезистор.

Для цитирования: Занько, А.И. Влияние режимов магнетронного распыления на свойства тонких пленок оксида ванадия / А.И. Занько, А.Е. Жамойть, А.Г. Шидловский // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 4 (65). – С. 85–90. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_85. – EDN: PBERFZ

Abstract. The magnetron sputtering process of a vanadium target in an argon and oxygen atmosphere has been investigated. Hysteresis dependencies of the cathode current change on the oxygen content and sputtering power were obtained. The temperature coefficient of resistance of the obtained vanadium oxide thin films, with a resistivity up to 0,1 Ohm·m, reaches 2,6% / °C. The most suitable vanadium oxide films for infrared photodetectors have an amorphous structure with crystalline phases.

Keywords: magnetron sputtering, cathode current, electrical resistivity, temperature coefficient of resistance, thermistor.

For citation: Zanka, A.I. Influence of magnetron sputtering process parameters on the properties of vanadium oxide thin films / A.I. Zanka, A.E. Zhamoits, A.H. Shydlovski // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 4 (65). – P. 85–90. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_85 (in Russian). – EDN: PBERFZ

Введение

В настоящее время микроболометры широко используются в различных сферах и их производство с каждым годом увеличивается [1]. Микроболометр представляет собой детектор инфракрасного излучения, состоящий из матрицы терморезисторов и интегральной системы считывания. В качестве термочувствительного слоя используются такие материалы, как оксид ванадия и аморфный кремний [2]. Наибольшее распространение получили микроболометры с терморезисторами на основе оксида ванадия ввиду того, что данный материал обладает высоким отрицательным температурным коэффициентом сопротивления (ТКС) при невысоком удельном сопротивлении [3]. Терморезисторы могут изготавливаться на основе тонких пленок оксида ванадия с температурным коэффициентом сопротивления более 2% / °C и удельным сопротивлением менее 0,1 Ом·м, измеренными при температуре 25° C [3], [4]. Для получения требуемых пленок оксида ванадия применим

метод реактивного магнетронного распыления [5], [6]. Разрядные параметры, ток и напряжение катода (мишени) магнетронной распылительной системы (МРС) определяют свойства наносимых пленок. При этом ванадий с кислородом образует множество соединений, описываемых рядом Магнели, с постоянной валентностью ванадия от 2 до 5 и соединений с переменной валентностью ванадия, насчитываемых более 15 [7], [8]. В связи с этим получение тонких пленок оксида ванадия магнетронным распылением представляет собой сложный процесс, требующий точных настроек технологического процесса.

Целью данной работы является исследование режимов магнетронного распыления ванадиевой мишени в среде аргона и кислорода для последующего применения полученных тонких пленок в микроболометрах. В рамках работы планируется исследовать влияние параметров осаждения на структурные свойства и электрофизические характеристики тонких пленок оксида ванадия.

1 Материалы и методика исследования

Пленки оксида ванадия были получены методом импульсного реактивного магнетронного распыления. Распыление проводилось из мишени ванадия (чистота 99,5%) в среде аргона (Ar) и кислорода (O₂). Импульсный режим распыления позволяет снизить накопление отрицательного заряда на поверхности мишени и повысить стабильность процесса нанесения. Блок питания MPC работал в режиме стабилизации мощности. Во всех режимах распыления фиксированными параметрами были частота отрицательных импульсов 100 кГц, длительность положительных импульсов 1 мкс, рабочее давление в камере 0,6 Па. В качестве подложки использовались кремниевые пластины с термическим оксидом кремния. Перед нанесением пленок оксида ванадия исследовались зависимости тока катода MPC от расхода O₂ в смеси Ar / O и мощности распыления.

Рентгеноструктурный анализ пленок проводился на рентгеновском дифрактометре *Ultima IV*. Фазовый состав оксида ванадия изучался методом спектроскопии комбинационного рассеяния на Рамановском микроскопе *Confotec NR500* с длиной волны лазера 633 нм при мощности 1,5 мВт. Толщину и морфологию поверхности пленок оксида ванадия определяли с помощью растрового электронного микроскопа (РЭМ) *HITACHI S-4800* и атомно-силового микроскопа (АСМ) *NTEGRA Prima*. Поверхностное сопротивление пленок оксида ванадия измеряли четырехзондовым методом. Удельное сопротивление пленок рассчитывали, исходя из известной толщины и величины поверхностного сопротивления. Температурный коэффициент сопротивления пленок оксида ванадия рассчитывался из уравнения [9]:

$$\alpha = \frac{1}{R} \frac{dR}{dT} = -\frac{\Delta E}{kT^2}, \quad (1.1)$$

где ΔE – энергия активации; k – постоянная Больцмана; T – температура.

Отношение энергии активации к постоянной Больцмана определяется из зависимости поверхностного сопротивления от температуры:

$$R(T) = R_0 \exp\left(\frac{\Delta E}{kT}\right), \quad (1.2)$$

где $R(T)$ – функция поверхностного сопротивления от температуры; R_0 – поверхностное сопротивление при нулевой температуре.

2 Результаты и их обсуждение

В данной работе показаны два подхода определения рабочих параметров MPC для нанесения пленок оксида ванадия, применяемых в изготовлении терморезисторов.

В первом подходе фиксированными параметрами являлись мощность распыления 300 Вт,

при общем расходе Ar и O₂ (Q_{Ar+O_2}) 12 и 40 см³/мин. Изменяемым параметром было содержание расхода O₂ в среде Ar / O₂. На рисунке 2.1 показана зависимость тока катода MPC от расхода O₂. Стрелками показано изменение тока катода при увеличении и уменьшении расхода O₂, а штриховыми линиями необратимые переходы.

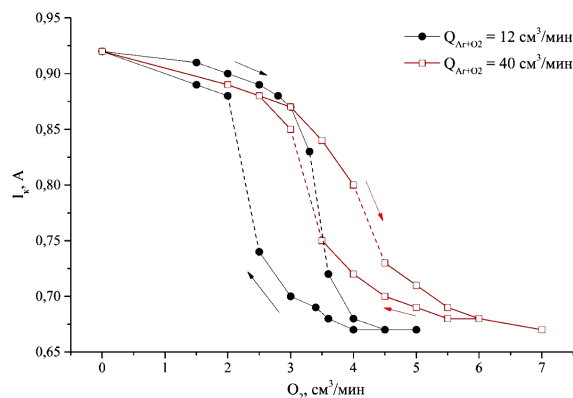


Рисунок 2.1 – Зависимость тока катода от O₂ при Q_{Ar+O_2} 12 и 40 см³/мин

Из рисунка 2.1 видно, что зависимости тока катода от расхода O₂ имеют гистерезисный характер. С увеличением расхода O₂ ток катода снижается, происходит локальное окисление поверхности мишени ванадия. При повышении Q_{Ar+O_2} ширина гистерезисной области уменьшается. Это связано с увеличением количества положительных ионов Ar в плазме магнетронного разряда, повышением скорости распыления оксидных слоев на мишени, и, в следствии, к более быстрому восстановлению мишени. Эти характерные особенности указывают на то, что время пребывания реактивных частиц над мишенью является обратной функцией от скорости откачки. При низких скоростях откачки потока реактивные газовые частицы имеют достаточно времени, чтобы повлиять на состояние мишени. Например, при фиксированном общем давлении, по мере увеличения расхода реактивного газа, необходимо увеличивать скорость откачки камеры. В результате изменения на поверхности мишени происходят тем быстрее, чем выше общий расход газов. Величина тока катода и ее положение на гистерезисной петле определяется отношением расхода реактивного газа O₂ к расходу инертного газа Ar.

Процесс реактивного распыления металлической мишени ванадия можно разделить на три режима в зависимости от массового расхода O₂ и величины тока катода. Первый режим распыления определяется при малых расходах O₂, а импеданс плазмы практически не изменяется. Это режим металлической мишени. Во втором режиме,

по мере увеличения расхода O_2 , происходит насыщение O_2 растущей пленки, и она способна меньше поглощать O_2 . Данный режим распыления является промежуточным и характеризуется гистерезисом тока катода от расхода O_2 . Возникающий избыток O_2 в камере приводит к окислению мишени и увеличению площади окисленной поверхности. Происходит уменьшение зоны распыления ванадиевой мишени, снижается поток ванадия на подложку, что приводит к снижению скорости нанесения. Эта последовательность событий в конечном итоге приводит к резкому увеличению импеданса плазмы до тех пор, пока мишень не приближается в предельное состояние. Площадь зоны распыления мишени значительно уменьшается, распыление происходит в режиме окисленной мишени.

Во втором подходе фиксированным параметром был расход Q_{Ar+O_2} , равный $12 \text{ см}^3/\text{мин}$.

Изменяемым параметром была мощность распыления при различном процентном содержании расхода O_2 в среде Ar/O_2 . На рисунке 2.2 представлены зависимости тока катода от мощности распыления.

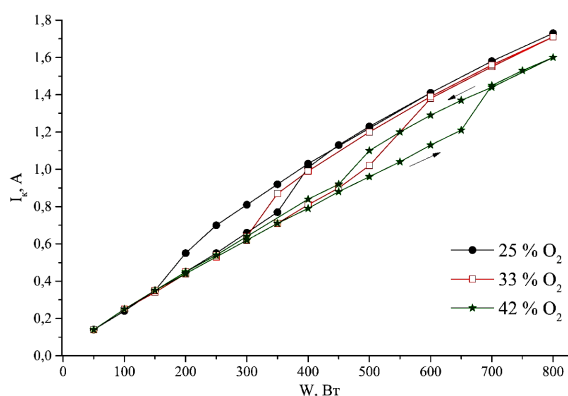


Рисунок 2.2 – Зависимость тока катода от мощности распыления

Как видно из рисунка 2.2, зависимость тока катода от мощности распыления также характеризуется гистерезисом. Для каждой зависимости тока катода от мощности при различном расходе O_2 имеются переходы с резким изменением тока катода. Это границы перехода поверхности состояния мишени из металлического в окисленное и окисленного в металлическое состояние. Мощность распыления, при которой происходят такие изменения, можно назвать граничной. В рассмотренных процентных содержаниях O_2 , в случае повышения мощности, поверхность мишени практически сразу переходит в окисленное состояние, как на рисунке 2.1. Превышение мощности распыления приводит к резкому увеличению тока катода до величины, характерной для металлического состояния мишени (первая граничная мощность). В случае снижения мощности

распыления мишень переходит из металлического состояния в окисленное и ток катода снижается. Происходит переход через вторую граничную мощность. В данном случае рабочий диапазон нанесения плёнок оксида ванадия располагается на обратной ветви тока катода при снижении мощности распыления. С увеличением содержания O_2 наблюдается повышение граничной мощности. Данный характер зависимости объясняется конкурирующими процессами на поверхности мишени, ее распыления и окисления в среде Ar/O_2 . В плазме магнетронного разряда от мощности распыления, по-видимому, изменяется отношение образуемых ионов Ar к O_2 из-за различной их степени ионизации. При постоянном расходе O_2 выйти из режима окисленной мишени можно увеличением мощности распыления.

Как в первом, так и во втором подходе ключевым параметром является количество кислорода в камере и его поддержание в стабильном состоянии. Для этого необходима газовая система с регуляторами расхода газа (РРГ) с наименьшим шагом и высокой стабильностью поддержания заданного потока газа и рабочего давления.

Для определения структуры и фазового состава пленок оксида ванадия был проведен рентгеноструктурный анализ. На рисунке 2.3 показаны рентгеновские дифракционные спектры нанесенных пленок оксида ванадия в различных режимах распыления мишени.

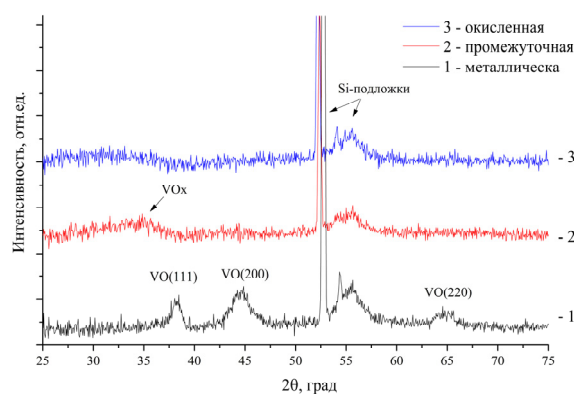


Рисунок 2.3 – Рентгеновские дифракционные спектры пленок оксида ванадия

В режиме распыления металлической мишени на рентгеновских спектрах имеются выраженные пики кремниевой подложки и фазы VO. Данные пики оксида ванадия указывают на наличие в пленке кристаллических фаз. На спектре пленки, нанесенной в промежуточном режиме, наблюдается широкая полоса низкой интенсивности на 35 градусах. Идентифицировать данную полосу с определенной фазой оксида ванадия не удалось, возможно, имеет место сложение нескольких пиков в один, на рисунке пик обозначен как VOx. При нанесении пленок в режимах

промежуточной и окисленной мишени отчетливых пиков оксида ванадия на спектрах не наблюдается, можно говорить, что пленки рентгеноаморфны. Это объясняется тем, что в этих режимах нанесения ток катода меньше и растущая пленка бомбардируется ионами с меньшей энергией, которой недостаточно для формирования кристаллических фаз оксида ванадия.

Для определения фазового состава пленок оксида ванадия, в дополнение к рентгеноструктурному анализу, было проведено исследование методом спектроскопии комбинационного рассеяния. На рисунке 2.4 показаны спектры комбинационного рассеяния нанесенных пленок оксида ванадия в различных режимах распыления мишени и подложки без пленки оксида ванадия. Математическая обработка полученных спектров комбинационного рассеяния не проводилась.

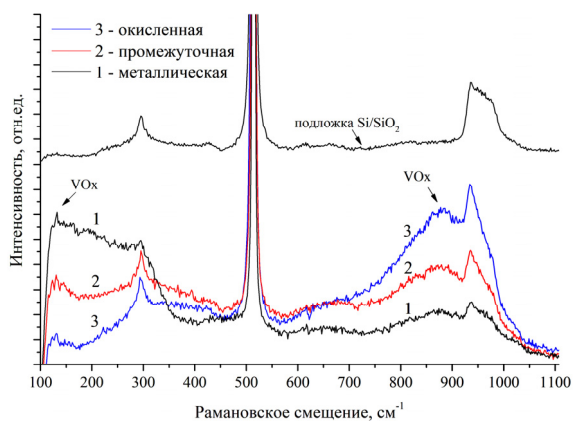


Рисунок 2.4 – Спектры комбинационного рассеяния пленок оксида ванадия и подложки без пленки оксида ванадия

На всех образцах с плёнкой оксида ванадия наблюдается повышенная интенсивность спектральных линий, нанесенных в режиме металлической мишени в диапазоне $100\text{--}300\text{ см}^{-1}$, в режиме окисленной мишени $800\text{--}1000\text{ см}^{-1}$. Данный эффект возможен за счет шумов в результате фотолюминесценции в пленках. Из полученных результатов видно, что на спектрах образцов с пленками оксида ванадия можно выделить пик при 130 см^{-1} , широкие пики в области 650 и 880 см^{-1} , которые относятся к связям $\text{V} - \text{O}$ [10]. Ширина пика при 880 см^{-1} говорит о наличии в пленке аморфных фаз оксида ванадия. Другие ярко выраженные пики при 300 , 520 и $940\text{--}980\text{ см}^{-1}$ относятся к подложке Si / SiO_2 .

Для определения морфологии поверхности и скола пленок оксида ванадия в различных режимах распыления мишени было проведено исследование образцов с использованием РЭМ. Полученные изображения сколов пленок оксида ванадия на РЭМ представлены на рисунке 2.5.

На представленных изображениях видно, что морфология поверхности пленок отличается

при распылении мишени в различных режимах. Пленка, нанесенная в режиме металлической мишени, имеет столбчатую структуру. В режиме промежуточной мишени наблюдается структура из вытянутых и округлых зерен и кристаллитов. В режиме окисленной мишени формируются сплошные пленки с небольшими кристаллическими включениями. Такое изменение морфологии поверхности согласуется с рентгеновскими спектрами.

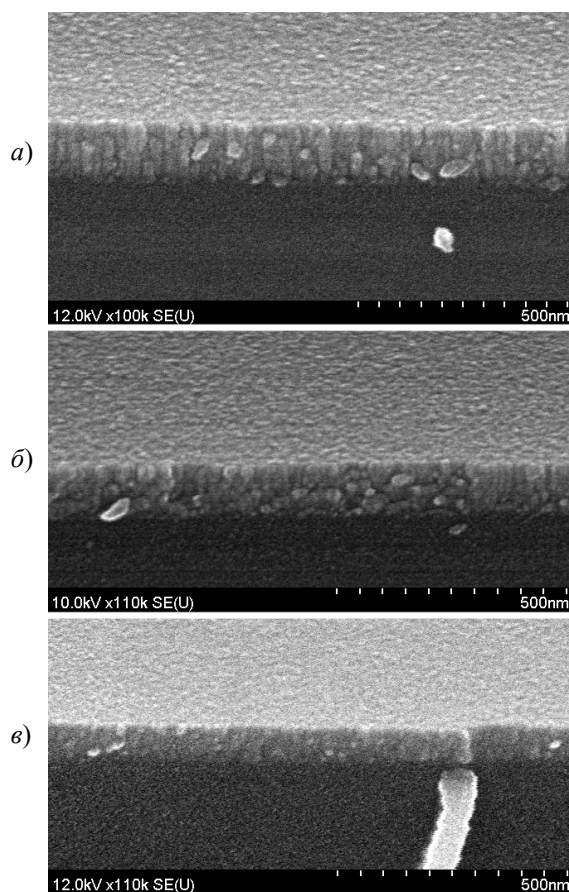


Рисунок 2.5 – Изображения сколов пленок оксида ванадия, полученные на РЭМ, нанесенные в различных режимах распыления мишени: а) металлическая, б) промежуточная, в) окисленная

Изображения поверхности пленки оксида ванадия, полученные на АСМ, представлены на рисунке 2.6.

Из полученных на АСМ изображений определялась шероховатость пленок по R_a . При переходе из режима распыления мишени от металлической к окисленной R_a снижается с $1,3$ до $0,8\text{ нм}$. Такая низкая шероховатость поверхности характерна для аморфных пленок [11]. Можно утверждать, что пленки, нанесенные в режиме окисленной мишени, более аморфны, чем нанесенные в других режимах.

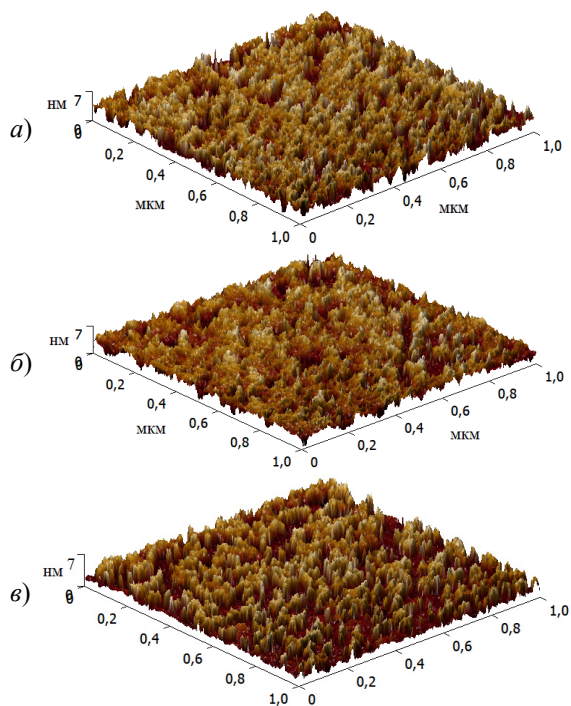


Рисунок 2.6 – Изображение поверхности пленок оксида ванадия, полученные на АСМ, нанесенные в различных режимах распыления мишени: а) металлическая, б) промежуточная, в) окисленная

На основании проведенных исследований установлено, что методом импульсного магнетронного распыления формируются пленки оксида ванадия смешанной аморфной и кристаллической структуры или преимущественно аморфной структуры в зависимости от режима распыления.

Режимы распыления мишени определяют электрофизические параметры наносимых пленок оксида ванадия. Для измерения ТКС пленок проводился их нагрев в диапазоне от 25 до 85° С. С повышением температуры их сопротивление уменьшается. Пленки оксида ванадия демонстрируют линейную зависимость поверхностного сопротивления от температуры в логарифмическом масштабе, коэффициент достоверности аппроксимации составляет более 0,98. Электрофизические параметры пленок оксида ванадия представлены в таблице 2.1. Удельное сопротивление ТКС пленок рассчитано при температуре 25° С.

Таблица 2.1 – Электрофизические параметры пленок оксида ванадия

Режим распыления мишени	Удельное сопротивление, Ом·м	ТКС, %/С
металлическая	$\leq 0,001$	$\leq 1,5$
промежуточная	0,004 – 0,086	2,0 – 2,6
окисленная	0,1 – 2,8	1,7 – 2,9

Пленки, нанесенные в режиме металлической мишени, имеют низкое удельное сопротивление и ТКС, в режиме промежуточной мишени – умеренное удельное сопротивление при высоком ТКС, а в режиме окисленной мишени – высокое удельное сопротивление при умеренном и высоком ТКС. Прослеживается прямая корреляция структуры пленок оксида ванадия к их удельному сопротивлению. В результате наиболее подходящие пленки оксида ванадия для изготовления эффективных терморезисторов получены в режиме распыления промежуточной мишени.

На основе полученных плёнок оксида ванадия были изготовлены матрицы терморезисторов с размером пикселя 25 мкм, представляющие собой подвесные структуры, где в качестве несущих и пассивирующих слоёв использовались плёнки нитрида кремния, а для металлизации – плёнки титана [12]. На рисунке 2.7 показаны зависимости сопротивления единичного терморезистора при циклическом нагреве и охлаждении (1-й, 3-й и 5-й термоциклы) в диапазоне от 25 до 85° С. Результаты демонстрируют стабильность электрофизических свойств: разброс сопротивлений в контрольных точках не превышает $\pm 2\%$.

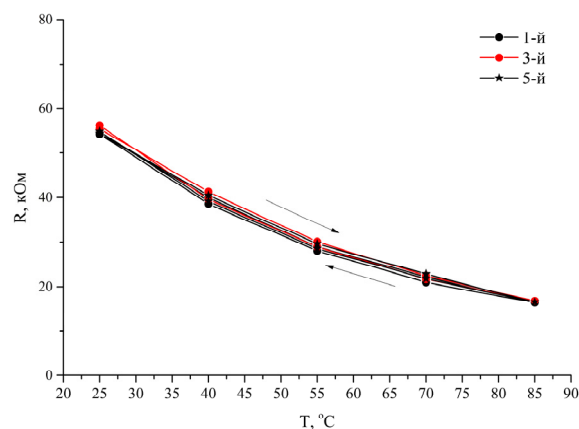


Рисунок 2.7 – Зависимость сопротивления терморезистора от температуры при первом, третьем и пятом термоцикле

Заключение

Рассмотрены два подхода по определению рабочих параметров МРС для нанесения пленок оксида ванадия, которые зависят как от регулирования и расхода реактивного газа, так и мощности распыления. Эти подходы могут быть использованы при работе с установками магнетронного нанесения, учитывая их конфигурацию и исполнение. Установлены структурные и электрофизические изменения параметров пленок оксида ванадия в зависимости от режимов реактивного магнетронного распыления. Пленки с высоким ТКС и подходящим сопротивлением для использования в качестве термочувствительных слоев микроболометров имеют аморфно-кристаллическую структуру.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Infrared Microbolometer Market Analysis Industry Size, Share, Research Report, Insights, Covid-19 Impact, Statistics, Trends, Growth and Forecast 2024–2032* [Electronic resource] / Mark Wide Research. – Torrance, 2024. – Mode of access: <https://markwideresearch.com/infrared-microbolometer-market>. – Date of access: 29.10.2024.
2. Кульчицкий, А. Рынок неохлаждаемых микроболометров для ИК-камер: тенденции и перспективы / Н. Кульчицкий, А. Наумов, В. Старцев // *Электроника НТБ*. – 2019. – № 1 (00182). – С. 156–164.
3. Niklaus, F. MEMS-based uncooled infrared bolometer arrays: a review / F. Niklaus, C. Vieider, H. Jakobsen // *MEMS / MOEMS Technologies and Applications III*. – 2008. – Vol. 6836. – P. 68360D-1–68360D-15.
4. *Recent progress on physics and applications of vanadium dioxide* / Kai Liu, Sangwook Lee, Shan Yang, Olivier Delaire, Junqiao Wu // *Materials Today*. – 2019. – Vol. 21, № 8. – P. 875–896.
5. *Potential for reactive pulsed-dc magnetron sputtering of nanocomposite Vox microbolometer thin films* / Y.O. Jin, A. Ozcelik, M.W. Horn, T.N. Jackson // *J. Vac. Sci. Technol. A*. – 2014. – Vol. 32. – P. 061501.
6. *Электрофизические свойства пленок оксида ванадия, нанесенных методом реактивного магнетронного распыления* / Т.Д. Нгуен [и др.] // *Доклады БГУИР*. – 2020. – Т. 18, № 6. – С. 94–102.
7. Ильинский, А.В. Фазовый переход оксидов ряда Магнели: VO, V₂O₃, VO₂, V₂O₅ / А.В. Ильинский, Е.Б. Шадрин // *ФТТ*. – 2023. – Т. 65, № 12. – С. 2068–2070.
8. *Vanadium Oxide: Phase Diagrams, Structures, Synthesis, and Applications* / H. Peng [et al.] // *Chem. Rev.* – 2023. – Vol. 123, № 8. – P. 4353–4415.
9. Wood, R.A. Monolithic silicon microbolometer arrays / R.A. Wood // *Uncooled Infrared Imaging Array and Systems*; Editors by Kruse P.W. and Skatrud D.D. – CA, USA: Academic Press, 1997. – Chapter. 3. – P. 43–121.
10. *A review of Raman spectroscopy of vanadium oxides* / P. Shvets, O. Dikaya, K. Maksimova, A. Goikhman // *J. Raman Spectrosc.* – 2019. – Vol. 50, № 8. – P. 1126–1244.
11. Новак, А.В. Шероховатость пленок аморфного, поликристаллического кремния и поликристаллического кремния с полусферическими зернами / А.В. Новак, В.Р. Новак // *Письма в ЖТФ*. – 2013. – Т. 39, № 19. – С. 32–40.
12. *Получение многослойных подвесных структур чувствительных элементов микроболометров с низкой остаточной деформацией* / С.А. Демидович, Я.А. Соловьёв, В.В. Колос, Н.С. Ковальчук // *Материалы XXVII Международной научно-технической конференции по фотоэлектронике и приборам ночного видения. Москва, 29–31 мая 2024 г.* – Москва: АО «НПО» «Орион» – 2024. – С. 255–257.

Поступила в редакцию 15.04.2025.

Информация об авторах

Занько Андрей Иванович – магистр технических наук
 Жамойть Александр Евгеньевич – магистр технических наук
 Шидловский Андрей Геннадьевич – ведущий инженер-технолог

МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ПЛЕНОК $\text{Sr}_2\text{Fe}_{1-x}\text{Mo}_{1+x}\text{O}_{6-\delta}$, ОСАЖДЕННЫХ МЕТОДОМ ИОННО-ПЛАЗМЕННОГО НАПЫЛЕНИЯ

Д.А. Киселев¹, С.С. Старухина¹, А.С. Быков¹, А.В. Петров²,
А.Г. Юденков³, А.В. Семченко⁴, Н.А. Каланда²

¹Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС», Москва

²НПЦ НАН Беларуси по материаловедению, Минск

³НТЦ «Белмикросистемы» ОАО «ИНТЕГРАЛ», Минск

⁴Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

MAGNETIC PROPERTIES OF $\text{Sr}_2\text{Fe}_{1-x}\text{Mo}_{1+x}\text{O}_{6-\delta}$ FILMS DEPOSITED BY ION-PLASMA SPUTTERING

D.A. Kiselev¹, S.S. Starukhina¹, A.S. Bykov¹, A.V. Petrov²,
A.G. Yudenko³, A.V. Semchenko⁴, N.A. Kalanda²

¹National University of Science and Technology MISIS, Moscow

²Scientific-Practical Materials Research Centre of the NAS of Belarus, Minsk

³Scientific-Technical Center “Belmicroanalysis” of JSC “INTEGRAL”, Minsk

⁴Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Определена аномальная зависимость коэффициента Блоха (**B**) от магнитного поля в пленках двойного перовскита $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}$, которая противоречит классической модели, предсказывающей уменьшение **B**. Установлено, что величина **B** монотонно возрастает с увеличением магнитного поля (в диапазоне 0,01–0,16 Тл). Показано, что данный эффект обусловлен не доминированием магнетонного вклада, а конкуренцией механизмов размагничивания, связанных с дефектами структуры. Исследования демонстрируют, что внешнее магнитное поле изменяет баланс между магнетонным и дефектным вкладами в термическое размагничивание.

Ключевые слова: двойной перовскит, $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_6$, закон Блоха, коэффициент Блоха, термическое размагничивание, магнеты, катионный беспорядок, антифазные границы.

Для цитирования: Магнитные свойства пленок $\text{Sr}_2\text{Fe}_{1-x}\text{Mo}_{1+x}\text{O}_{6-\delta}$, осажженных методом ионно-плазменного напыления / Д.А. Киселев, С.С. Старухина, А.С. Быков, А.В. Петров, А.Г. Юденков, А.В. Семченко, Н.А. Каланда // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 4 (65). – С. 91–97. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_91. – EDN: PXYFEU

Abstract. The anomalous dependence of the Bloch coefficient (**B**) on the magnetic field in double perovskite $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}$ thin films was determined, which contradicts the classical model predicting the decrease of **B**. It has been found that the value of **B** increases monotonically with the increase of the magnetic field (in the range of 0.01–0.16 T). It was shown that this effect is not due to the dominance of the magnon contribution but is caused by the competition of demagnetization mechanisms associated with structural defects. The investigation results demonstrate that an external magnetic field alters the balance between magnon and defect contributions to thermal demagnetization.

Keywords: double perovskite, $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_6$, Bloch's law, Bloch coefficient, thermal demagnetization, magnons, cation disorder, anti-phase boundaries.

For citation: Magnetic properties of $\text{Sr}_2\text{Fe}_{1-x}\text{Mo}_{1+x}\text{O}_{6-\delta}$ films deposited by ion-plasma sputtering / D.A. Kiselev, S.S. Starukhina, A.S. Bykov, A.V. Petrov, A.G. Yudenko, A.V. Semchenko, N.A. Kalanda // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 4 (65). – P. 91–97. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_91 (in Russian). – EDN: PXYFEU

Введение

Двойные перовскиты типа $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_6$ привлекают значительное внимание исследователей благодаря своим уникальным магнитным и транспортным свойствам, что делает их перспективными материалами для устройств спинтроники [1]–[4]. Одной из фундаментальных характеристик, определяющих магнитное поведение этих соединений, является температурная зависимость намагниченности в низкотемпературной

области, которая традиционно описывается законом Блоха [5], [6]. Согласно этому закону, уменьшение намагниченности с ростом температуры обусловлено возбуждением спиновых волн (магнонов) и следует зависимости

$$M(T) = M(0)(1 - BT^{3/2}),$$

где параметр **B** (постоянная Блоха) содержит информацию о жесткости спиновых волн и особенностях микроструктуры материала.

Особый интерес представляет исследование влияния внешнего магнитного поля на коэффициент Блоха, поскольку анализ зависимости $B(H)$ позволяет не только верифицировать магнетный механизм размагничивания, но и получить ценную информацию о дефектах структуры. В случае двойных перовскитов, где свойства критически зависят от катионного упорядочения и стехиометрии, такой анализ приобретает особую значимость.

В настоящей работе систематически исследуется зависимость коэффициента Блоха от магнитного поля в пленках $\text{Sr}_2\text{Fe}_{1-x}\text{Mo}_{1+x}\text{O}_{6-\delta}$ с различным составом: как с избытком железа – $\text{Sr}_2\text{Fe}_{1.2}\text{Mo}_{0.8}\text{O}_{6-\delta}$ ($\text{SF}_{1.2}\text{M}_{0.8}\text{O}$), так и с его дефицитом – $\text{Sr}_2\text{Fe}_{0.9}\text{Mo}_{1.1}\text{O}_{6-\delta}$ ($\text{SF}_{0.9}\text{M}_{1.1}\text{O}$). Целью работы является установление корреляции между химическим составом, типом структурных дефектов и характером зависимости $B(H)$, что представляет не только фундаментальный интерес для понимания механизмов размагничивания, но и имеет практическое значение для управления функциональными свойствами этих перспективных материалов.

Проведенное исследование демонстрирует, что анализ полевой зависимости коэффициента Блоха может служить эффективным диагностическим инструментом для характеристики микроструктурных особенностей сложных магнитных материалов.

1 Синтез, материалы и методы исследования

Пленки составов $\text{SF}_{1.2}\text{M}_{0.8}\text{O}$ и $\text{SF}_{0.9}\text{M}_{1.1}\text{O}$, толщиной порядка ~ 1 мкм, наносились методом ионно-плазменного напыления на вакуумной установке Z-400 (“Leybold-Heraeus”), оснащенной безмасляной системой откачки на базе турбомолекулярного насоса. В качестве распыляемого материала использовались мишени составов $\text{SF}_{1.2}\text{M}_{0.8}\text{O}$ и $\text{SF}_{0.9}\text{M}_{1.1}\text{O}$, диаметром 50 мм и толщиной 5 мм. Камера вакуумной установки была оборудована фланцевым двухлучевым ионным источником с замкнутым дрейфом электронов на основе ускорителя с анодным слоем и магнетронной распылительной системой. Особенностью ионного источника является возможность генерирования двух независимых ионных пучков, один из которых служит для распыления материала мишени, а второй – для очистки подложек. Предварительно производилась очистка подложек ионным пучком. Для этого камера вакуумной установки откачивалась до остаточного давления 10^{-3} Па. В ионный источник подавался Ar до рабочего давления $2,0 \cdot 10^{-2}$ Па. Время очистки, энергия ионов и ток разряда во всех экспериментах были постоянными и составляли, соответственно, 3 мин, 700 эВ, 40 мА. Расход газов контролировался автоматическими регуляторами расхода газа РРГ-1. Распыление мишеней

осуществлялось аргоном (энергия ионов 1250 эВ, ток 65 мА) на подложки поликора (Al_2O_3), что обеспечивало химическую инертность и высокую адгезию к пленкам системы $\text{Sr}_2\text{Fe}_{1-x}\text{Mo}_{1+x}\text{O}_{6-\delta}$. Остаточное давление аргона в газовой камере соответствовало $5 \cdot 10^{-2}$ Па. Температура подложки, согласно техническим возможностям установки, была 670 К. Толщина нанесенных пленок измерялась на различных участках пленок – свидетелей при помощи интерферометра МИИ-4 и корректировалась изменением времени нанесения слоев.

Дополнительный отжиг пленок в потоке смеси газов 5% H_2/Ar осуществлялся в термоустановках, температура в которых поддерживалась с помощью регулятора температуры РИФ-101 и контролировалась Pt – Pt/Rh(10%) термопарой с точностью $\pm 0,5$ К.

Фазовый состав пленок и степень сверхструктурного упорядочения катионов железа и молибдена ($P, \%$) определялись на основании анализа дифракционных данных, полученных на установке ДРОН-3 в $\text{CuK}\alpha$ -излучении, с использованием базы данных “ICSD-PDF2” (Release 2000), программ “POWDERCELL” и “FULL-PROF” [7], [8].

Микроструктура и морфология зёрен изучались на металлографическом микроскопе “OLYMPUS GX-41”, а также методом сканирующей электронной микроскопии на установке “Hitachi S-4800”. Температурные зависимости намагниченности пленок исследовались на универсальной установке фирмы “Cryogenic Limited” в диапазоне 4.2–300 К в магнитном поле 0,1 Тл с точностью не более 2%.

2 Результаты исследования и их обсуждение

Эффективной представляется двухступенчатая стратегия напыления пленок: начальная пониженная скорость способствует формированию буферного слоя между пленкой и подложкой для увеличения адгезии и уменьшению напряжения на границе «пленка – подложка». Последующая повышенная скорость напыления уменьшает временные затраты на напыление и увеличивает однородность основной части пленки [9]. Скорость осаждения при толщине пленки до 20 нм составляла 2 нм/мин; при дальнейшем увеличении толщины плёнки до 1 мкм скорость увеличивалась до 8 нм/мин.

Достижение структурного совершенства тонких пленок $\text{Sr}_2\text{Fe}_{1-x}\text{Mo}_{1+x}\text{O}_{6-\delta}$, синтезируемых методом ионно-лучевого напыления (ИЛН), требует тщательной оптимизации ряда взаимосвязанных технологических параметров, включая скорость осаждения, температуру послеростового отжига пленок и парциальное давление кислорода. Преимуществом метода ИЛН является возможность формирования плотной плёнки при

относительно низких температурах, что способствует снижению количества дефектов [9].

При скорости напыления на втором этапе 8 нм/мин и толщине пленки до 3 мкм с последующим отжигом при $T = 1173$ К в течение 1 часа в потоке смеси инертных газов 1% H_2/Ar привело к однофазности пленок $\text{SF}_{0.9}\text{M}_{1.1}\text{O}$ и концентрации антиструктурных дефектов $n \approx 18\%$ при $P \approx 64\%$. В то же время, в пленках состава $\text{SF}_{1.2}\text{M}_{0.8}\text{O}$ также наблюдается однофазность, тогда как сверхструктурное упорядочение отсутствует ($P \approx 0\%$), рисунок 2.1. При изучении микроструктуры пленок наблюдается увеличение их плотности, адгезии и уменьшение шероховатости рельефа поверхности (рисунок 2.2).

При проведении сравнительного анализа магнитных свойств полученных пленок было обнаружено, что пленки $\text{SF}_{1.2}\text{M}_{0.8}\text{O}$ и $\text{SF}_{0.9}\text{M}_{1.1}\text{O}$ характеризуются различными величинами намагниченности насыщения M_s (рисунок 2.3). При температуре 10 К и магнитном поле, приложенном вдоль плоскости пленки, намагниченность

насыщения составила $M_s \sim 1,8$ $\mu_B/\text{ф.е.}$ для пленки $\text{SF}_{1.2}\text{M}_{0.8}\text{O}$ и $M_s \sim 2,47$ $\mu_B/\text{ф.е.}$ для пленки $\text{SF}_{1.1}\text{M}_{0.9}\text{O}$.

Эти значения значительно ниже теоретически предсказанной величины $M_{\text{теор}} = 4$ $\mu_B/\text{ф.е.}$ [4]. При этом, коэрцитивная сила составляет $\mu_0 H_c = 0,031 \text{ Тл}$ для пленки $\text{SF}_{1.2}\text{M}_{0.8}\text{O}$ и $\mu_0 H_c = 0,018 \text{ Тл}$ для пленки $\text{SF}_{0.9}\text{M}_{1.1}\text{O}$.

Меньшее значение намагниченности насыщения пленки $\text{SF}_{1.2}\text{M}_{0.8}\text{O}$ обусловлено более высокой концентрацией антиструктурных дефектов ($[\text{Fe}_{\text{Mo}}]$ и $[\text{Mo}_{\text{Fe}}]$), чем в пленках $\text{SF}_{0.9}\text{M}_{1.1}\text{O}$. Данные дефекты нарушают катионное упорядочение Fe/Mo, изменяют ориентацию сильно гибридинизированных $4d_{2g}$ -орбиталей катионов Mo^{5+} ($S = 1/2$) и $3d(t_{2g}^3 e_g^2)$ -орбиталей катионов Fe^{3+} ($S = 5/2$), что подавляет ферромагнитное упорядочение между подрешетками Fe и Mo [2]–[4]. Кроме того, в условиях кислородного дефицита ($\delta > 0$) часть катионов Fe^{3+} ($3d^5$) может восстанавливаться до Fe^{2+} ($3d^6$), которые в октаэдрическом кристаллическом поле Fe^{2+} , как правило, находятся в высокоспиновом состоянии ($t_{2g}^4 e_g^2$, $S = 2$).

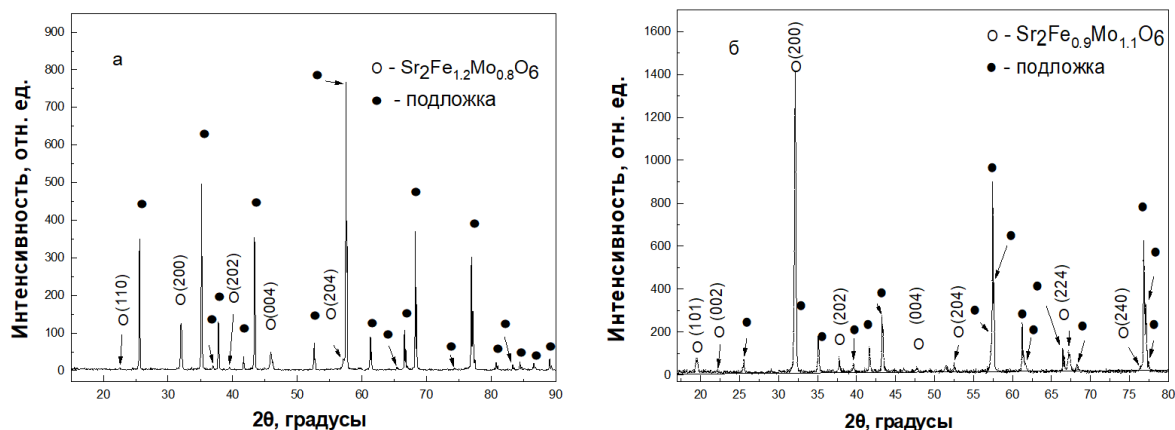


Рисунок 2.1 – Рентгеновские дифрактограммы пленок $\text{SF}_{1.2}\text{M}_{0.8}\text{O}$ (a) и $\text{SF}_{0.9}\text{M}_{1.1}\text{O}$ (б), напыленных в два этапа. Пленки осаждались на втором этапе со скоростью 8 нм/мин с последующим отжигом при $T = 1173$ К в течение 1 часа в потоке смеси инертных газов 1% H_2/Ar

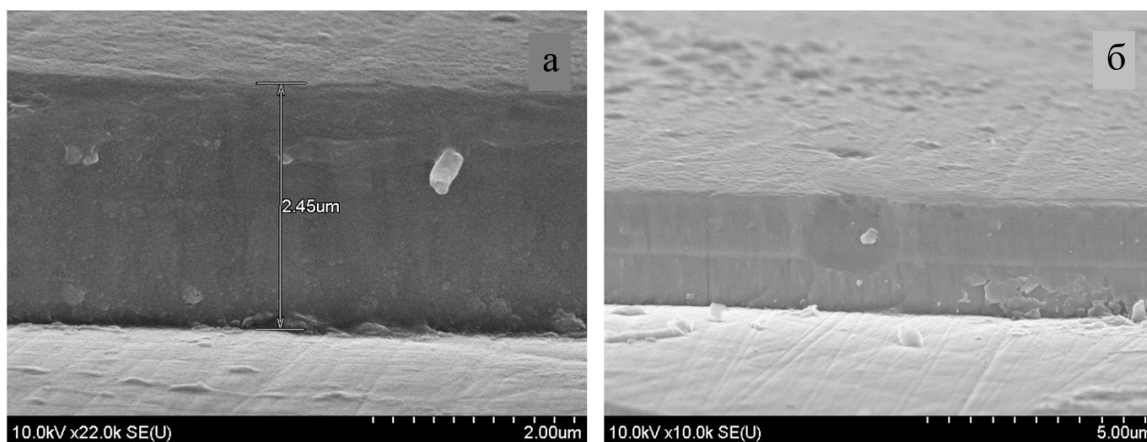


Рисунок 2.2 – Изображения сканирующей электронной микроскопии микроструктуры пленок $\text{SF}_{1.2}\text{M}_{0.8}\text{O}$ (a) и $\text{SF}_{0.9}\text{M}_{1.1}\text{O}$ (б), напыленных в два этапа. Пленки осаждались на втором этапе со скоростью 8 нм/мин с последующим отжигом при $T = 1173$ К в течение 1 часа в потоке смеси инертных газов 1% H_2/Ar

Появление ионов Fe^{2+} способствует образованию кластеров типа $\text{Fe}^{2+} - \text{O}^{2-} - \text{Fe}^{2+}$, в которых сверхобменное взаимодействие является антиферромагнитным, согласно правилам Гуденафа – Канамори – Андерсена [10]. Таким образом, в структуре пленки $\text{SF}_{1.2}\text{Mo}_{0.8}\text{O}$ могут присутствовать как антиструктурные дефекты, так и антиферромагнитные кластеры на основе Fe^{2+} , что в совокупности способствует формированию магнитно-неоднородной структуры, которая увеличивает коэрцитивную силу [1], [3]. Пленки $\text{SF}_{0.9}\text{Mo}_{1.1}\text{O}$ характеризуются более однородной магнитной структурой по сравнению с $\text{SF}_{1.2}\text{Mo}_{0.8}\text{O}$, что подтверждается большими значениями намагниченности насыщения M_s и меньшими величинами $\mu_0 H_c$ для составов с избытком молибдена по сравнению с пленками, содержащими избыток железа (рисунок 2.3).

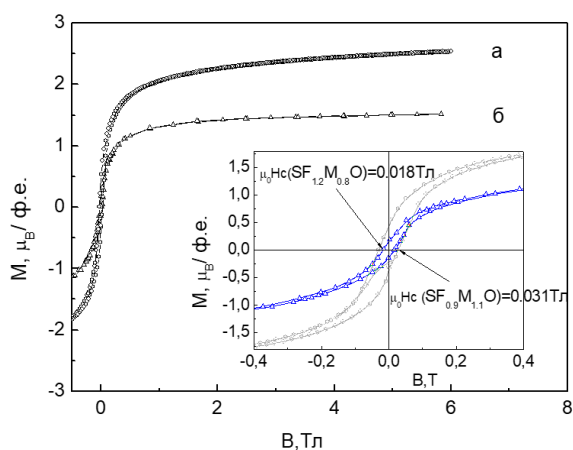


Рисунок 2.3 – Полевые зависимости намагниченности пленок $\text{SF}_{0.9}\text{Mo}_{1.1}\text{O}$ (а) и $\text{SF}_{1.2}\text{Mo}_{0.8}\text{O}$ (б), которые осаждались на втором этапе со скоростью 8 нм/мин с последующим отжигом при $T = 1173$ К в течение 1 часа в потоке смеси инертных газов 1% H_2/Ar

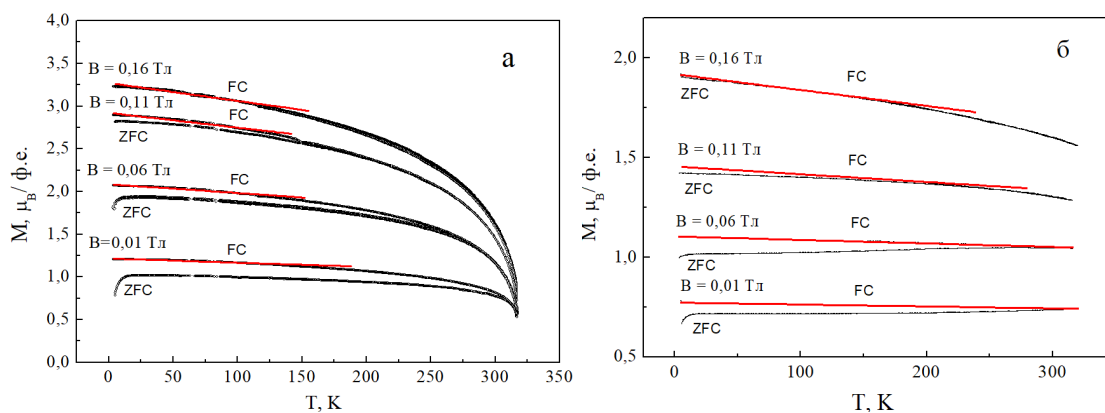


Рисунок 2.4 – Температурные зависимости намагниченности (измеренные в режимах ZFC – “zero-field cooling” и FC – “field cooling”) пленок $\text{SF}_{1.2}\text{Mo}_{0.8}\text{O}$ (а) и $\text{SF}_{0.9}\text{Mo}_{1.1}\text{O}$ (б), которые осаждались на втором этапе со скоростью 8 нм/мин с последующим отжигом при $T = 1173$ К в течение 1 часа в потоке смеси инертных газов 1% H_2/Ar . Черные линии – экспериментальные данные; красные линии – аппроксимация экспериментальных данных функцией (2.1)

Поскольку закон Блоха лежит в основе моделирования, прогнозирования и реализации функциональности современных магнитных устройств, представляет значительный интерес исследование зависимости его параметров от химического состава и дефектной структуры в пленках $\text{Sr}_2\text{Fe}_{1-x}\text{Mo}_{1+x}\text{O}_{6-\delta}$. Особый интерес вызывает влияние внешнего магнитного поля на величину коэффициента Блоха \mathbf{B} , характеризующего вклад спиновых волн в термальное размагничивание, как в пленках $\text{Sr}_2\text{Fe}_{1-x}\text{Mo}_{1+x}\text{O}_{6-\delta}$ с избытком железа ($x > 0$), так и с его дефицитом ($x < 0$).

В данной работе исследуется влияние магнитного поля в диапазоне от 0,01 Тл до 0,16 Тл на температурную зависимость намагниченности и полевой зависимости коэффициента Блоха в пленках $\text{SF}_{1.2}\text{Mo}_{0.8}\text{O}$ и $\text{SF}_{0.9}\text{Mo}_{1.1}\text{O}$. Сравнительный анализ этих систем позволяет выявить взаимосвязь между составом, микроструктурой (в частности, концентрацией антиструктурных дефектов) и эффективностью подавления магнетных возбуждений внешним магнитным полем.

Поведение $M(T)$ при увеличении температуры определяется сложным взаимодействием магнитных подрешеток, структурных дефектов и тепловых флуктуаций. В низкотемпературной области основным механизмом размагничивания является термальное возбуждение магнонов – квазичастиц спиновых волн.

Для акустических магнонов с квадратичной дисперсией $E(k) \sim k^2$, плотность состояний возрастает пропорционально $T^{3/2}$, что приводит к уменьшению намагниченности. В этом приближении температурная зависимость удовлетворительно описывается законом Блоха:

$$M(T) = M(0)(1 - \mathbf{B}T^{3/2}), \quad (2.1)$$

где $M(0)$ – намагниченность при абсолютном нуле, а \mathbf{B} – коэффициент Блоха, характеризующий вклад магнонных возбуждений в термальное снижение намагниченности.

Ключевым фактором, влияющим на величину **B**, является дефектная структура материала. В исследуемых пленках наличие антиструктурных дефектов ($[\text{Fe}_{\text{Mo}}]$ и $[\text{Mo}_{\text{Fe}}]$) нарушает идеальное чередование магнитных подрешеток ионов Fe^{3+} ($S = 5/2$) и Mo^{5+} ($S = 1/2$). Эти дефекты действуют как центры рассеяния для спиновых волн, что приводит к увеличению коэффициента **B** и, как следствие, к более быстрому спаду намагниченности с ростом температуры.

Анализ зависимости коэффициента Блоха **B** от величины внешнего магнитного поля H является эффективным методом диагностики магнитного состояния и дефектной структуры сложных материалов, таких как двойные перовскиты $\text{Sr}_2\text{Fe}_{1-x}\text{Mo}_{1+x}\text{O}_{6-\delta}$. Хотя для ферромагнетиков в общем случае может потребоваться обобщенная модель, в низкотемпературной области вклад члена $T^{3/2}$ является доминирующим. В этом приближении параметр **B**, связанный с жесткостью спиновых волн (обменным взаимодействием) и плотностью состояний магнонов, адекватно описывает спектр длинноволновых магнонных возбуждений.

Экспериментально обнаружено, что для пленок $\text{SF}_{0.9}\text{M}_{1.1}\text{O}$ наилучшая аппроксимация температурной зависимости намагниченности $M(T)$ законом Блоха в полях 0,01 Тл, 0,06 Тл, 0,11 Тл и 0,16 Тл достигается в интервале $4,2 \text{ K} < T < 150 \text{ K}$, а для пленок $\text{SF}_{1.2}\text{M}_{0.8}\text{O}$ – в интервале $4,2 \text{ K} < T < 300 \text{ K}$ (рисунок 2.4). Полученные величины подгоночных коэффициентов представлены в таблицах 2.1 и 2.2.

Сравнение значений коэффициента Блоха **B**, измеренных в магнитных полях 0,01 Тл, 0,06 Тл, 0,11 Тл и 0,16 Тл, выявляет четкую тенденцию: с ростом магнитного поля $\mu_0 H$ величина **B** монотонно увеличивается (таблицы 2.1, 2.2). Данное явление имеет прямую физическую интерпретацию: внешнее магнитное поле подавляет магнонные возбуждения, создавая энергетическую щель в их спектре. Это приводит к уменьшению вероятности термального возбуждения магнонов и, как следствие, к снижению их вклада в размагничивание, что проявляется в уменьшении эффективного значения коэффициента Блоха. Наблюдаемая тенденция уменьшения **B**(H) служит не только убедительным подтверждением магнонной природы размагничивания, но и предоставляет количественный метод для диагностики обменных взаимодействий в спиновой системе.

Рассчитанные для пленок $\text{SF}_{1.2}\text{M}_{0.8}\text{O}$ значения коэффициента Блоха $\mathbf{B} = (3,11 - 0,786) \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-3/2}$ и для пленок $\text{SF}_{0.9}\text{M}_{1.1}\text{O}$ $\mathbf{B} = (2,04 - 0,902) \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-3/2}$ практически соответствуют значениям, обнаруженным другими авторами (например, $7,03 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-3/2}$ для $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_{5.5}\text{S}_{0.5}$ [11]; $5,9 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-3/2}$ для $\text{Fe}_{29}\text{Ni}_{49}\text{P}_{14}\text{B}_6\text{Si}_2$ [12]). Близкие значения полученных результатов с другими авторами можно

связать с помощью хорошей подгонки, согласно выражению (2.2), при коэффициенте детерминации ($R^2 > 0,98$) (таблицы 2.1, 2.2).

Рассмотрим физический механизм подавления магнонных возбуждений в рамках закона Блоха. Магноны, как кванты спиновых волн, представляют собой коллективные возбуждения в системе спинов и играют определяющую роль в процессе теплового размагничивания. Энергетический спектр магнонов во внешнем магнитном поле описывается соотношением:

$$\hbar\omega(q) = Dq^2 + g\mu_B H, \quad (2.2)$$

где D – жесткость спиновых волн, g – фактор Ланде, μ_B – магнетон Бора, H – магнитное поле.

Таблица 2.1 – Подгоночные коэффициенты, полученные при аппроксимации температурной зависимости намагниченности пленок $\text{SF}_{0.9}\text{M}_{1.1}\text{O}$ с помощью функции (2.1)

Параметры	Значение	Погрешность
$\mu_0 H = 0,01 \text{ Тл}$		
$M(0), \mu_B/\text{ф.е.}$	1,2158	$3,76605 \cdot 10^{-4}$
$\mathbf{B}, \text{K}^{3/2}$	$3,95551 \cdot 10^{-4}$	$4,79175 \cdot 10^{-6}$
R^2	0,9575	
$\mu_0 H = 0,06 \text{ Тл}$		
$M(0), \mu_B/\text{ф.е.}$	2,08667	$8,01205 \cdot 10^{-4}$
$\mathbf{B}, \text{K}^{3/2}$	$4,91324 \cdot 10^{-4}$	$5,91636 \cdot 10^{-6}$
R^2	0,9579	
$\mu_0 H = 0,11 \text{ Тл}$		
$M(0), \mu_B/\text{ф.е.}$	2,92251	0,00114
$\mathbf{B}, \text{K}^{3/2}$	$5,91018 \cdot 10^{-4}$	$5,98539 \cdot 10^{-6}$
R^2	0,9693	
$\mu_0 H = 0,16 \text{ Тл}$		
$M(0), \mu_B/\text{ф.е.}$	3,27217	0,00136
$\mathbf{B}, \text{K}^{3/2}$	$6,40564 \cdot 10^{-4}$	$6,12349 \cdot 10^{-6}$
R^2	0,9728	

Таблица 2.2 – Подгоночные коэффициенты, полученные при аппроксимации температурной зависимости намагниченности пленок $\text{SF}_{1.2}\text{M}_{0.8}\text{O}$ с помощью функции (2.1)

Параметры	Значение	Погрешность
$\mu_0 H = 0,01 \text{ Тл}$		
$M(0), \mu_B/\text{ф.е.}$	0,77265	$4,35053 \cdot 10^{-5}$
$\mathbf{B}, \text{K}^{3/2}$	$1,25047 \cdot 10^{-4}$	$2,78059 \cdot 10^{-7}$
R^2	0,9934	
$\mu_0 H = 0,06 \text{ Тл}$		
$M(0), \mu_B/\text{ф.е.}$	1,10374	$2,05646 \cdot 10^{-4}$
$\mathbf{B}, \text{K}^{3/2}$	$1,59333 \cdot 10^{-4}$	$9,24921 \cdot 10^{-7}$
R^2	0,9820	
$\mu_0 H = 0,11 \text{ Тл}$		
$M(0), \mu_B/\text{ф.е.}$	1,45528	$6,09042 \cdot 10^{-5}$
$\mathbf{B}, \text{K}^{3/2}$	$2,68984 \cdot 10^{-4}$	$6,44623 \cdot 10^{-7}$
R^2	0,9976	
$\mu_0 H = 0,16 \text{ Тл}$		
$M(0), \mu_B/\text{ф.е.}$	1,91755	$9,64898 \cdot 10^{-5}$
$\mathbf{B}, \text{K}^{3/2}$	$4,15516 \cdot 10^{-4}$	$6,41 \cdot 10^{-7}$
R^2	0,9987	

Увеличение напряженности магнитного поля приводит к сдвигу вверх всей энергетической шкалы магнанных возбуждений, что, в соответствии со статистикой Бозе – Эйнштейна, снижает вероятность их теплового возбуждения. В результате вклад магнов в уменьшение намагниченности $M(T)$ ослабевает.

Сравнение значений коэффициента Блоха B , измеренных в магнитных полях 0,01 Тл, 0,06 Тл, 0,11 Тл и 0,16 Тл, выявляет четкую тенденцию: с ростом магнитного поля μH величина B монотонно увеличивается (таблицы 2.1, 2.2). Данное явление имеет важное физическое значение: в классической модели Блоха рост магнитного поля подавляет магнанные возбуждения, что должно приводить к уменьшению B . Наблюдаемый рост B свидетельствует о том, что вклад магнов в термическое размагничивание не является основным, и доминирующую роль играют другие механизмы. В пленках двойного перовскита со значительным катионным беспорядком внешнее магнитное поле может модифицировать вклад различных магнитных подсистем в общее размагничивание.

Например, плёнки с избытком Мо ($Sr_{0.9}Mo_{1.1}O$) характеризуются более слабой зависимостью B от поля. Избыток молибдена, вероятно, приводит к образованию вакансий на Fe-позициях или появлению немагнитных ионов Мо в магнитной подрешётке, создавая эффект магнитного разбавления. Такой тип дефектов в меньшей степени формирует протяжённые неупорядоченные области, а скорее приводит к образованию локализованных магнитных моментов. Особенности их реакции на поле объясняют, почему разница между значениями B в слабом и сильном поле оказывается менее выраженной по сравнению с Fe-обогащённой плёнкой.

При рассмотрении плёнок с избытком железа (например, $Sr_{1.2}Mo_{0.8}O$) его избыток приводит к появлению антиструктурных дефектов и росту числа антифазных границ [13], [14]. Это разрушает дальний магнитный порядок и создаёт магнитно-неупорядоченные области. В слабых магнитных полях спины в таких областях легко разориентируются тепловыми флуктуациями. Сильное магнитное поле поляризует эти локализованные, неупорядоченные спины, выстраивая их вдоль поля. Хотя это и увеличивает мгновенную намагниченность, «замороженные» в поле дефекты становятся более эффективными центрами рассеяния для спиновых волн, что в терминах закона Блоха ведёт к увеличению эффективного коэффициента B . Кроме того, наблюдается изменение баланса между магнанным и дефектным вкладами. В пленках $Sr_{1.2}Mo_{0.8}O$ и $Sr_{0.9}Mo_{1.1}O$ конкурируют два механизма размагничивания: магнанный (коллективные возбуждения) и дефектный (локализованные моменты). Магнитное поле подавляет магнанные

возбуждения, увеличивая энергетическую щель в их спектре [15]. В результате относительный вклад от тепловых флуктуаций локализованных моментов, связанных с дефектами, становится более значимым. Таким образом, даже если абсолютный вклад дефектов не меняется, их относительная роль в процессе размагничивания усиливается.

Заключение

Наблюдаемый рост коэффициента Блоха B с увеличением магнитного поля H в пленках $Sr_2Fe_{1-x}Mo_{1+x}O_{6-\delta}$ служит индикатором смены доминирующего механизма размагничивания. Этот эффект связан с тем, что поле подавляет коллективные магнанные возбуждения и одновременно усиливает роль тепловых флуктуаций локализованных спинов, связанных с дефектами структуры (антиструктурными-дефектами, антифазными границами, вакансиями).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Structural and magnetic properties of $Sr_2Fe_{1+x}Mo_{1-x}O_6$* / D. Topwal, D.D. Sarma, H. Kato, Y. Tokura, M. Avignon // *Physical Review B*. – 2006. – Vol. 73. – P. 094419.
2. *Serrate, D. Double perovskites with ferromagnetism above room temperature* / D. Serrate, J.M. De Teresa, M.R. Ibarra // *Journal of Physics: Condensed Matter*. – 2007. – Vol. 19. – P. 1–86.
3. *Electronic structure of Sr_2FeMoO_6* / D.D. Sarma, P. Mahadevan, T. Saha-Dasgupta, S. Ray, A. Kumar // *Physical Review Letters*. – 2000. – Vol. 85, № 12. – P. 2549–2552.
4. *Room-temperature magnetoresistance in an oxide material with an ordered double-perovskite structure* / K.-I. Kobayashi, T. Kimura, H. Sawada, K. Terakura, Y. Tokura // *Nature*. – 1998. – Vol. 395. – P. 677–680.
5. *Bloch, F. Zur Theorie des Ferromagnetismus* / F. Bloch // *Zeitschrift für Physik*. – 1930. – Vol. 61. – P. 206–219.
6. *Magnetic response of core-shell cobalt ferrite nanoparticles at low temperature* / K. Maaz, M. Usman, S. Karim, A. Mumtaz, S.K. Hasanain, M. Bertino // *J. Appl. Phys.* – Vol. 105, № 11. – P. 113917.
7. *Kraus, W. POWDER CELL – a program for the representation and manipulation of crystal structures and calculation of the resulting X-ray powder patterns* / W. Kraus, G. Nolze // *Journal of Applied Crystallogr.* – 1996. – Vol. 29, № 3. – P. 301–303.
8. *Rodriguez-Carvajal, J. Recent developments of the program FULLPROF* / J. Rodriguez-Carvajal // *Commission on powder diffraction (IUCr). Newsletter*. – 2001. – Vol. 2. – P. 19.
9. *Challenges in $Sr_2FeMoO_{6-\delta}$ thin film deposition* / G. Suchaneck, N. Kalanda, E. Artsiukh, G. Gerald // *Physica Status Solidi B*. – 2020. – Vol. 257, № 3. – P. 1900312.

10. *Structural and magnetic properties of double perovskites $\text{AA}'\text{FeMoO}_6$ ($\text{AA}' = \text{Ba}_2, \text{BaSr}, \text{Sr}_2$ and Ca_2)* / C. Ritter, M.R. Ibarra, L. Morellon, J. Blasco, J. Garcia, J.M. De Teresa // J. Phys.: Condens. Matter. – 2000. – Vol. 12, № 38. – P. 8295–8308.

11. *The disorder is induced by S doping at O-sites in double perovskite $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_6$ compound* / G. Huo, X. Ren, L. Qian, N. Zhang, S. Liu, X. Yan // J. Magn. Magn. Mater. – 2013. – Vol. 343. – P. 119–125.

12. *Bhagat, S.M.* Temperature dependence of the magnetization in amorphous alloys / S.M. Bhagat, M.L. Spano, K.V. Rao // J. Appl. Phys. – 1979. – Vol. 50, № B3. – P. 1580–1582.

13. *Sequence of phase transformations and inhomogeneous magnetic state in nanosized $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}$* / M.V. Yarmolich, N.A. Kalanda, A.A. Yaremchenko, S.A. Gavrilov, A.A. Dronov, M.V. Silibin // Inorganic Materials. – 2017. – Vol. 53, № 1. – P. 96–102.

14. *Magnetic properties of the ordered and disordered double perovskite $\text{Sr}_2\text{Fe}_{1+x}\text{Mo}_{1-x}\text{O}_6$ ($-1 \leq x \leq 1/3$)* / J.R. Suarez, F. Estrada, O. Navarro,

M. Avignon // Eur. Phys. J. B. – 2011. – Vol. 84. – P. 53–58.

15. *Interrelation among superstructural ordering, oxygen non-stoichiometry, and lattice strain of double perovskite $\text{Sr}_2\text{FeMoO}_{6-\delta}$ materials* / N. Kalanda, D. Karpinsky, I. Bobrikov, M. Yarmolich, V. Kuts, L. Huang, C. Hwang, D.-H. Kim // J. Mater. Sci. – 2021. – Vol. 56. – P. 11698–11710.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф24В-005), а также в рамках гранта Российского научного фонда № 24-19-00729, <https://rscf.ru/project/24-19-00729>.

Поступила в редакцию 15.10.2025.

Информация об авторах

Киселев Дмитрий Александрович – к.ф.-м.н.

Старухина София Сергеевна – аспирант

Быков Александр Сергеевич – к.т.н., доцент

Петров Александр Владимирович – к.ф.-м.н., доцент

Юденков Андрей Геннадьевич – инженер

Семченко Алина Валентиновна – д.ф.-м.н., доцент

Каланда Николай Александрович – д.ф.-м.н., доцент

УДК 621.373.826

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_98

EDN: FDSCIN

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ПРОЦЕССАХ ДВУЛУЧЕВОГО ЛАЗЕРНОГО ТЕРМОРАСКАЛЫВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ

А.Н. Купо¹, Ю.В. Никитюк¹, В.А. Емельянов², А.Н. Сердюков¹

¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

²ОАО «ИНТЕГРАЛ», Минск

MODELING THE TEMPERATURE FIELD IN DUAL-BEAM LASER THERMAL CLEAVING PROCESSES FOR ELECTRONIC MATERIALS

A.N. Kupo¹, Yu.V. Nikityuk¹, V.A. Yemelyanov², A.N. Serdyukov¹

¹Francisk Skorina Gomel State University

²JSC "INTEGRAL", Minsk

Аннотация. Рассчитаны температурные поля в процессах лазерного управляемого термораскалывания хрупких неметаллических материалов с использованием двух пучков лазерного излучения в присутствии хладагента. На основании данных о распределении температуры по поверхности и в объеме материалов проведена оценка верхнего предела термического микронапряжения. Эта информация необходима для обоснованного выбора режимов лазерной обработки указанных материалов, в частности, кварцевого и силикатного стёкол, в технологических процессах микроэлектроники.

Ключевые слова: лазерное излучения, температурное поле, микромеханические термоупругие напряжения, математическое моделирование.

Для цитирования: Моделирование температурного поля в процессах двулучевого лазерного термораскалывания материалов электронной техники / А.Н. Купо, Ю.В. Никитюк, В.А. Емельянов, А.Н. Сердюков // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 4 (65). – С. 98–102. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_98. – EDN: FDSCIN

Abstract. The study presents calculations of temperature fields in controlled laser thermal cleaving of brittle non-metallic materials using two laser beams with a coolant. An estimation of the upper limit of thermal micro-stress was conducted based on the temperature distribution data across the surface and within the volume of the materials. This information is essential for the substantiated selection of laser processing parameters for the specified materials, particularly quartz and silicate glasses, in microelectronics manufacturing processes.

Keywords: laser radiation, temperature field, micromechanical thermoelastic stresses, mathematical modeling.

For citation: Modeling the temperature field in dual-beam laser thermal cleaving processes for electronic materials / A.N. Kupo, Yu.V. Nikityuk, V.A. Yemelyanov, A.N. Serdyukov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 4 (65). – P. 98–102. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_98. – EDN: FDSCIN

Introduction

Laser cleaving is a technique for cutting brittle non-metallic materials such as silicate glasses. This procedure separates the material by initiating a crack through sequential laser heating followed by coolant application to the treated surface [1], [2]. Currently, the dual-beam laser thermal cleaving method for brittle non-metallic materials is widely employed [3]–[7]. This technique utilizes three processing tools simultaneously: radiation from a solid-state laser (1.06 μm), radiation from a CO₂ laser (10.6 μm), and a flow of air-water mixture serving as a coolant. Figure 0.1 illustrates a schematic diagram of the experimental setup for dual-beam laser thermal cleaving of glass.

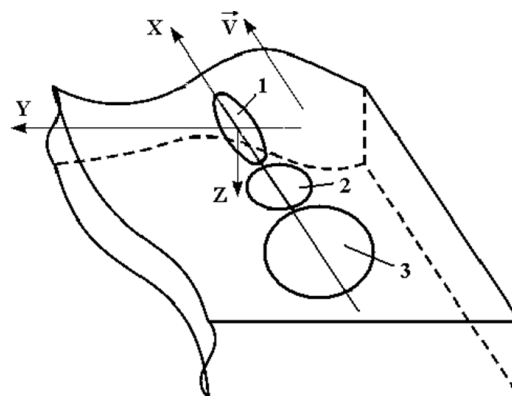


Figure 0.1 – Schematic diagram of the laser beams and coolant arrangement in the processing plane

Item 1 represents the CO₂ laser beam, item 2 denotes the YAG laser beam, and item 3 refers to the coolant. The optical system forms the laser beam with a wavelength of $\lambda = 10.6 \mu\text{m}$ into an elliptical spot on the sample surface, oriented with its major axis along the material processing line. Directly following this beam is the laser beam with a wavelength of $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$, which is focused on the sample surface, with its center located on the material processing line. The coolant, in the form of an air-water mixture, is delivered directly after the beam with a wavelength of $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$ and is formed into a circular spot on the sample surface, whose center also lies on the material processing line.

1 Problem Statement for the Modeling

Such combined thermal impact on the surface of the processed material can be modeled by a combination of heat sources (laser radiation) and heat sinks (coolant action), as shown in Figure 1.1.

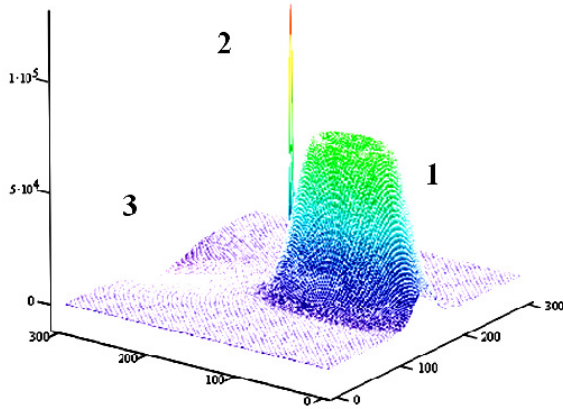


Figure 1.1 – Visualization of the laser beams and coolant model in the processing plane: 1 – CO₂ laser beam, 2 – YAG laser beam, 3 – cooling zone

In this case, the solution to the heat conduction problem can be obtained using the Green's function method. The Green's function for a semi-infinite medium, dependent on spatial coordinates $r = (x, y, z)$ and time t , is given by [8], [9]:

$$G(r, r', t - t') = \frac{Q(r, t)}{(2\sqrt{\pi a t})^3} \times \exp\left(-\frac{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}{4a(t - t')}\right), \quad (1.1)$$

where $a = \lambda/(c \cdot \rho)$ is the thermal diffusivity; λ is the thermal conductivity, c is the specific heat capacity, ρ is the density, $Q(r, t)$ is the volume heat generation rate, $r' = (x', y', z')$.

Thus, the solution to the heat conduction equation can be represented as:

$$T(r, t) = \int \sigma(r, t; r', t) Q(r; t') dt' d^3 r'. \quad (1.2)$$

Based on equations (1.1) and (1.2), it is possible to model the dynamics of the temperature field

within the region of the described combined action. Here, the heat source model $Q(r, t)$ can be represented as a superposition of the effects from both types of laser radiation and the coolant, according to Table 1.1.

2 Evaluation of Model Parameters and Computation of Values

The calculations were conducted in the Mathcad system to represent the dynamics of the temperature field resulting from the combined action, using equations (1.1) and (1.2) along with Table 1.1. The heat source model represented a superposition of the three impacts listed in Table 1, shifted along the x -axis in the direction of the controlled thermal cleaving line formation. Figure 2.1 shows the thermal impact profile along the processing direction (left to right) for the case of $P_0 = 1 \cdot 10^6 \text{ W/m}^2$, $A_1 = 10^{-4} \text{ m}$, $A_2 = 2 \cdot A_1$, $A_3 = 3 \cdot A_1$ (see Table 1.1).

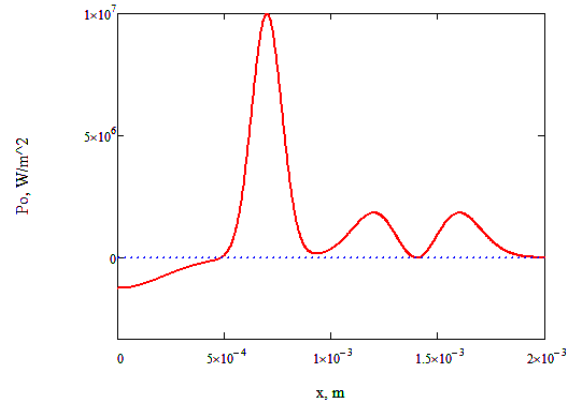


Figure 2.1 – Thermal impact profile along the processing direction

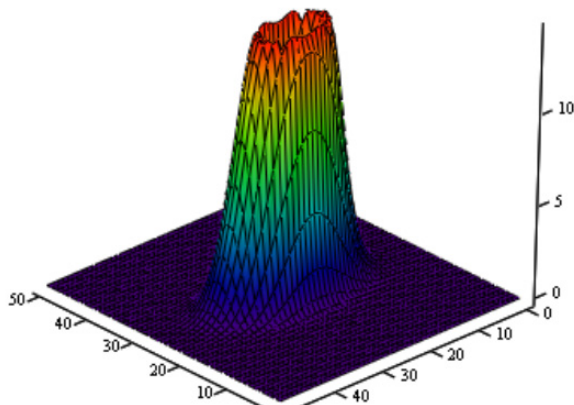
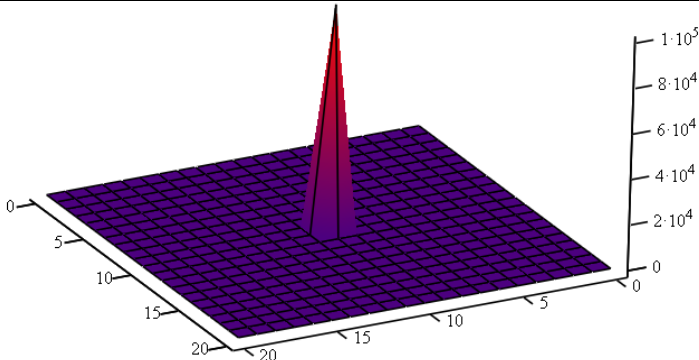
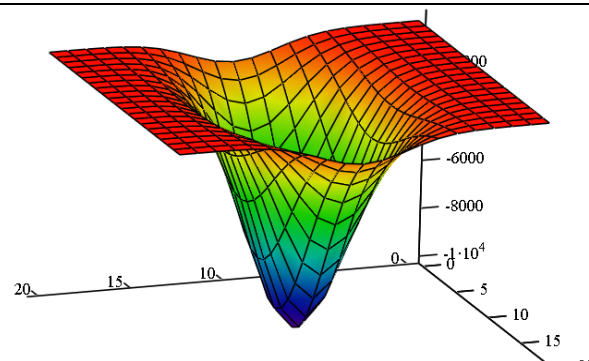
Figure 2.2 depicts the temperature distribution as a function of the distance from the center of the coolant impact zone at a processing speed of $v = 10^{-3} \text{ m/s}$ at different time instances from the onset of the thermal influence on the surface of quartz glass (see Figure 2.2, a) and silicate glass (see Figure 2.2, b) with their respective thermophysical characteristics.

The primary criterion for optimizing the technological parameters, derived from the temperature field data, is the maximum temperature value in the processing zone, which determines the material fracture mechanism.

For glasses, the corresponding glass transition temperature of the specific glass grade is selected as the upper limit of allowable temperatures. Specifically, the glass transition temperature is 789 K for sheet silicate glass and 1473 K for quartz glass.

Furthermore, the information about the development of thermoelastic fracture can be obtained from the temperature distribution data through the depth of the studied materials. Figure 2.3 shows the temperature distribution across the material depth at different time instances.

Table 1.1 – Models of energy impact on the material surface during dual-beam laser thermal cleaving, implemented in the computer mathematics system Mathcad.

1.Type of impact	Elliptical CO ₂ laser beam ($\lambda = 10.6 \mu\text{m}$)
Mathcad Formula	$Q_2(x, y, z, t) := \frac{\gamma P_0}{\pi A_2 B_2} \left(\frac{(x - vt)^2}{A_2^2} + \frac{y^2}{B_2^2} \right) \exp \left(-\frac{(x - vt)^2}{A_2^2} - \frac{y^2}{B_2^2} \right) \exp(-\gamma z)$
Model Visualization	
2. Type of impact	Circular YAG laser beam ($\lambda = 1.06 \mu\text{m}$)
Mathcad Formula	$Q_1(x, y, z, t) := P_0 \exp \left(-\frac{(x - vt)^2}{A_1^2} - \frac{y^2}{B_1^2} - \gamma z \right)$
Model Visualization	
3. Type of impact	Coolant
Mathcad Formula	$Q_x(x, y, z, t) := \frac{P_0}{10} \exp \left(-\frac{(x - vt)^2}{(50A_1)^2} - \frac{y^2}{(50B_1)^2} - \gamma z \right)$
Model Visualization	

Under high-temperature micro-deformation conditions, these materials may exhibit brittle fracture. To analyze the feasibility of implementing dual-beam laser cleaving [10], [11] of glasses with

subsequent formation of a laser-induced crack, it is essential to obtain information regarding the distribution of thermoelastic stresses within the volume of the materials being processed.

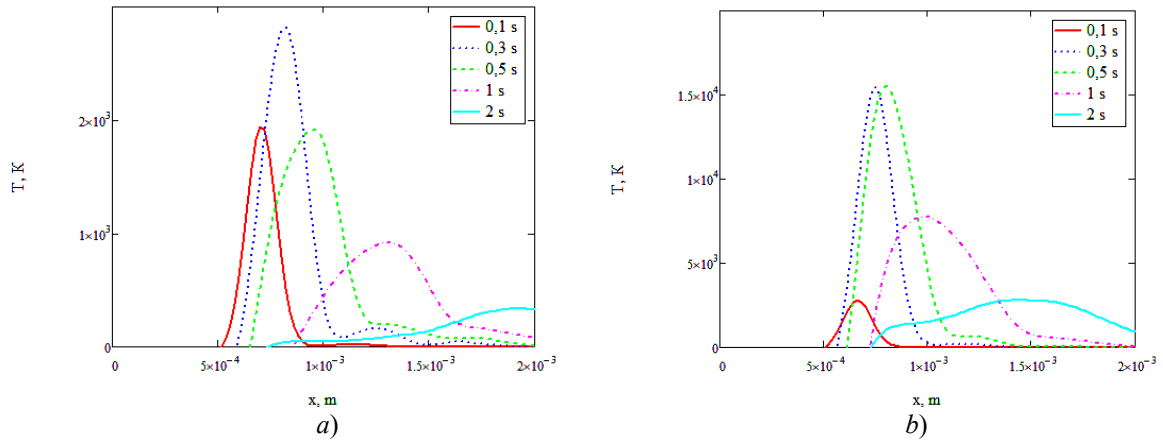


Figure 2.2 – Temperature distribution profile on the surface of quartz (a) and silicate (b) glass at different processing time instances

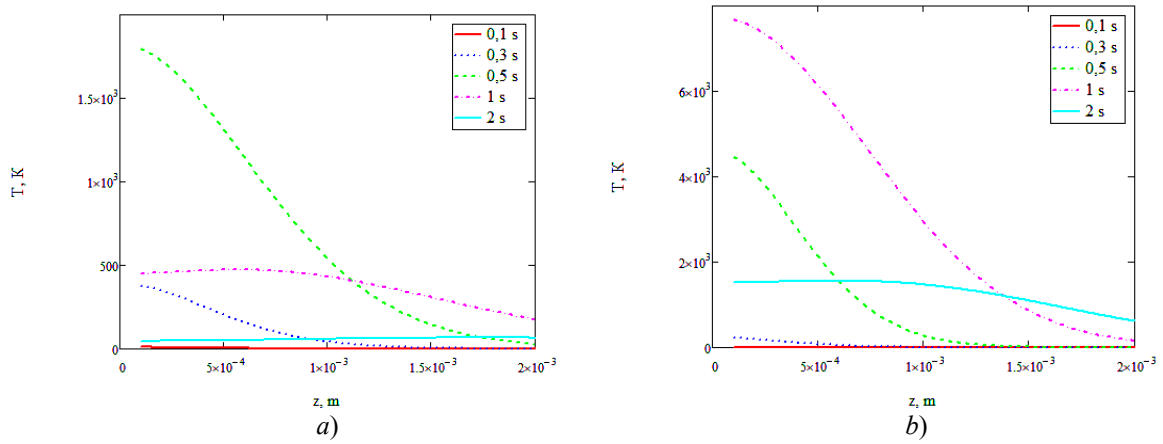


Figure 2.3 – Temperature distribution through the depth of quartz (a) and silicate (b) glass at different processing time instances

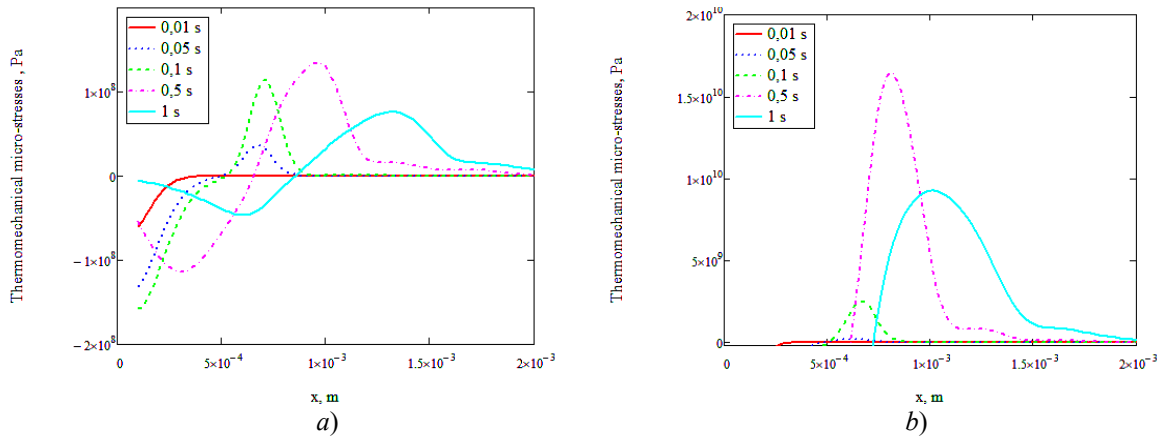


Figure 2.4 – Distribution profile of thermomechanical micro-stresses along the scanning axis at different time instances for quartz (a) and silicate (b) glass

An important challenge involves studying the thermal response of a region with a time-varying boundary under heating and/or cooling. According to the methodology proposed in [12], the upper estimate of thermal micro-stress σ during surface

processing along the direction r can be calculated using the formula:

$$\sigma(r, t)_{\max} = \frac{\sqrt{\frac{r}{R}} E \alpha (T(r, t) - T_0)}{1 - 2\nu},$$

where: E is the Young's modulus for diamond, α is the linear expansion coefficient, ν is the Poisson's ratio.

Figure 2.4 presents the computed values of the upper estimate of thermal micro-stress σ along the sample processing line at different time instances for a scanning speed of $v = 10^{-3}$ m/s at a depth of 10^{-4} m.

The analysis of the distribution of the upper stress estimates σ shown in Figure 2.4 reveals that the initiation of a separating micro-crack occurs in the material's surface layers, starting from a crack-like microstructural defect within the tensile stress zone generated by the coolant supply. Subsequently, the initial micro-crack begins to propagate and extends until it reaches the compressive stress zone created by the laser radiation. The distribution of compressive stresses within the sample volume determines the shape and penetration depth of the micro-crack, whose initiation and intensive development occur in the tensile stress zone generated in the coolant application area.

After the micro-crack reaches its maximum penetration depth, unsteady crack growth ceases, and its subsequent propagation is determined by changes in the spatial distribution of tensile and compressive stress zones. The observed changes result from the relative movement between the processed material, laser radiation, and coolant.

Conclusion

The constructed model for dual-beam thermal cleaving of brittle non-metallic materials provides a straightforward means to assess the feasibility of forming thermoelastic micro-stress fields both on the surface and within the material volume. This enables informed selection of laser processing parameters for silicate glasses and other brittle non-metallic materials in electronics technologies.

REFERENCES

1. Kondratenko, V.S. Precision Cutting of Glass and Other Brittle Materials by Laser-Controlled Thermo-Splitting (Review) / V.S. Kondratenko, S.A. Kudzh // Glass and Ceramics. – 2017. – № 74. – P. 75–81. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10717-017-9932-1>.
2. Nikityuk, Yu.V. Laser cleaving of brittle non-metallic materials / Yu.V. Nikityuk, A.A. Sereda, A.N. Serdyukov. – Gomel: Francisk Skorina Gomel State University, 2025. – 217 p.
3. Two-beam laser thermal cleavage of brittle nonmetallic materials / S.V. Shalupaev, E.B. Shershnev, Yu.V. Nikityuk, A.A. Sereda // Journal of Optical Technology. – 2006. – Vol. 73, № 5. – P. 356–359. – DOI: <https://doi.org/10.1364/JOT.73.000356>.
4. Nikityuk, Yu.V. Physical regularities of laser thermal cleaving of silicate glasses and alumina ceramics / Yu.V. Nikityuk // Abstract of Ph. D. thesis. – Minsk, 2009. – 24 p.
5. Dual laser beam revising the separation path technology of laser induced thermal-crack propagation for asymmetric linear cutting glass / C. Zhao, H. Zhang, L. Yang, Y. Wang, Y. Ding // International Journal of Machine Tools and Manufacture. – 2016. – Vol. 106. – P. 43–55. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2016.04.005>.
6. Nikityuk, Y.V. Determination of the parameters of two-beam laser splitting of silicate glasses using regression and neural network models / Y.V. Nikityuk, A.N. Serdyukov, I.Y. Aushev // Journal of the Belarusian State University. Physics. – 2022. – № 1. – P. 35–43. – DOI: <https://doi.org/10.33581/2520-2243-2022-1-35-43>.
7. Nikityuk, Yu. Optimization of two-beam laser cleavage of silicate glass / Yu. Nikityuk, A. Serdyukov, I. Aushev // Journal of Optical Technology. – 2022. – Vol. 89, № 2. – P. 121–125.
8. Carslaw, H.S. Conduction of Heat in Solids / H.S. Carslaw, J.C. Jaeger. – Moscow: Nauka, 1964. – 487 p.
9. Green's Function for Boundary Value Problems [Electronic resource]. – Access mode: <https://tkachenko-mephi.narod.ru/pdfs/DIUIec2.pdf>. – Date of access: 14 Aug 2025.
10. Advances in thermal laser separation: process monitoring in a kerf-free laser-based cutting technology to ensure high yield / M.C. Baretto [et al.] // Procedia CIRP 74. – 2018. – P. 645–648.
11. Shershnev, E.B. Features of Manufacturing High-Temperature Electronics Component Base Using Laser Radiation / E.B. Shershnev // Doklady BGUR. – 2025. – Vol. 23, № 2. – P. 77–83. – DOI: <https://doi.org/10.35596/1729-7648-2025-23-2-77-83>.
12. Nenakhov, E.V. Estimates of Thermal Stresses in Dynamic Thermoelasticity Models / E.V. Nenakhov, E.M. Kartashov // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences. – 2022. – № 1. – P. 88–106.

The article was submitted 04.11.2025.

Информация об авторах

Купо Александр Николаевич – к.т.н., доцент
 Никитюк Юрий Валерьевич – к.ф.-м.н., доцент
 Емельянов Виктор Андреевич – чл.-корр. НАН Беларуси, д.т.н., профессор
 Сердюков Анатолий Николаевич – чл.-корр. НАН Беларуси, д.ф.-м.н., профессор

АКТИВНАЯ ПЕРЕДАЮЩАЯ БИАНИЗОТРОПНАЯ МЕТАПОВЕРХНОСТЬ С ФУНКЦИЕЙ УПРАВЛЕНИЯ ФАЗОЙ ДЛЯ B5G/6G ПРИЛОЖЕНИЙ БЕСПРОВОДНОЙ СВЯЗИ

И.А. Фаняев¹, А.А. Тимошенко¹, А.Л. Самофалов¹, С.А. Хахомов¹, И.В. Семченко²,
Цзихун Гу³, Даши Динг³

¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

²Государственное научно-производственное объединение
«Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника», Минск

³Нанкинский университет науки и технологии

ACTIVE TRANSMITTING BIANISOTROPIC METASURFACE WITH PHASE CONTROL FUNCTION FOR B5G/6G APPLICATIONS OF WIRELESS COMMUNICATIONS

I.A. Fanyaev¹, A.A. Timoshenko¹, A.L. Samofalov¹, S.A. Khakhomov¹, I.V. Semchenko²,
Jihong Gu³, Dazhi Ding³

¹Francisk Skorina Gomel State University

²State Scientific and Production Association "Optics, Optoelectronics and Laser Technology", Minsk

³Nanjing University of Science and Technology

Аннотация. Предложена конструкция активного микрорезонатора, предназначенного для реализации реконфигурируемой метаповерхности, применимой в системах беспроводной связи поколений B5G/6G. Разработанная структура обеспечивает управление фазой прошедшей электромагнитной волны и позволяет динамически изменять фазовый фронт. Проведено численное моделирование в Ka-диапазоне СВЧ волн, подтвердившее возможность широкодиапазонного управления фазой за счёт изменения электроёмкости варикапов. Полученные результаты демонстрируют потенциал использования разработанной метаповерхности в антеннах нового поколения беспроводной связи B5G/6G для адаптивного управления диаграммой направленности.

Ключевые слова: принцип Гюйгенса, активная метаповерхность, варикап, приложения B5G, фаза прошедшей волны.

Для цитирования: Активная передающая бианизотропная метаповерхность с функцией управления фазой для B5G/6G приложений беспроводной связи / И.А. Фаняев, А.А. Тимошенко, А.Л. Самофалов, С.А. Хахомов, И.В. Семченко, Цзихун Гу, Даши Динг // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 4 (65). – С. 103–107. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_103. – EDN: EBZCMH

Abstract. A design of an active microresonator intended for the implementation of a reconfigurable metasurface applicable to B5G/6G wireless communication systems is proposed. The developed structure enables phase control of the transmitted electromagnetic wave and allows dynamic modification of the transmitted wavefront. The numerical simulations carried out in the Ka-band of microwave waves have confirmed the capability of wide-range phase tuning through the variation of varicap capacitance. The obtained results demonstrate the potential of employing the proposed metasurface in a new generation of wireless communications B5G/6G antennas for adaptive beam steering.

Keywords: Huygens principle, active metasurface, varicap, B5G applications, transmitted wave phase.

For citation: Active transmitting bianisotropic metasurface with phase control function for B5G/6G applications of wireless communications / I.A. Fanyaev, A.A. Timoshenko, A.L. Samofalov, S.A. Khakhomov, I.V. Semchenko, Jihong Gu, Dazhi Ding // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 4 (65). – P. 103–107. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_103 (in Russian). – EDN: EBZCMH

Введение

В условиях стремительного развития высокоскоростной беспроводной связи [1] и радиолокационных систем наблюдается высокий спрос на динамическое управление диаграммами направленности антенн [2], [3]. Перенастраиваемые антенны с управляемым лучом являются эффективным решением для повышения адаптивности и производительности подобных систем [4].

Традиционные антенны с фиксированной диаграммой направленности не обеспечивают требуемого уровня управляемости излучением. Использование миллиметрового диапазона частот предоставляет значительные преимущества, включая более высокие скорости передачи данных, увеличенную пропускную способность и снижение уровня взаимных помех.

Фазированные антенные решётки широко применяются для формирования направленного излучения, однако их недостатком является высокая стоимость из-за сложной структуры питающей сети и необходимости использования большого числа передающих и приёмных модулей [5]. Фазовый сдвиг в таких системах обычно реализуется с помощью активных компонентов, таких как р-і-п диоды [6], ВЧ МЭМС-переключатели [7] и варакторные диоды [8], [9]. Ранние подходы к фазовой компенсации нередко требовали многослойных конфигураций с большим числом активных элементов, что приводило к усложнению конструкции и росту стоимости изготовления. Многослойные структуры на основе каскадных частотно-избирательных поверхностей (FSS) [10] также характеризуются сложностью и высокой стоимостью, особенно в миллиметровом диапазоне частот. В отличие от варакторов, обеспечивающих непрерывное управление фазой при низком энергопотреблении, р-і-п диоды из-за своей дискретной природы вносят фазовые ошибки, вызывают появление выраженных боковых лепестков и снижение усиления при сканировании.

Особое внимание в последние годы уделяется метаповерхностям, способным управлять фазой [11], амплитудой [12] и поляризацией [13] электромагнитного излучения. Такие структуры позволяют реализовать динамическую адаптацию диаграммы направленности и эффективное формирование луча без применения механических приводов [14].

Настоящая работа посвящена разработке и численному исследованию активной бианизотропной метаповерхности с функцией управления фазой прошедшей электромагнитной волны для приложений В5G/6G беспроводной связи. Предлагаемая метаповерхность предназначена для динамической манипуляции фазовым фронтом прошедшей волны за счёт использования в каждом элементе активного компонента, такого как варикап, с последующим включением её в состав антенны перспективных систем связи стандарта В5G.

1 Структура и принцип действия элементарной ячейки Гюйгенса

Элементарная ячейка состоит из пары антисимметричных П-образных проводников (рисунк 1.1), расположенных на верхней и нижней поверхностях диэлектрической подложки F4В (диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 2,2$, тангенс угла потерь 0,002). Период ячейки составляет $p = 7,2$ мм. Элемент на нижней стороне является зеркальным отражением элемента на верхней стороне в плоскости, ортогональной оси Y . Численные значения геометрических параметров микрорезонатора: $n = 5$ мм, $g = 3,7$ мм, $d = 0,7$ мм, $w = 0,35$ мм, $wp = 0,2$ мм, $d = 0,7$ мм. Толщина медного слоя $t = 18$ мкм, диэлектрическая подложка толщиной $h = 2,1$ мм. Варикапы показаны на рисунке в виде квадратов серого и зелёного цвета.

Активная метаповерхность основана на использовании активных микрорезонаторов для фазового управления прошедшей волны. Предлагаемая конструкция активного микрорезонатора включает П-образный проводящий элемент и варикап MAVR-011020-1411, подключённый в его центральной части (рисунк 1.1, а). Также имеются две медные полоски питания варикапов по обе стороны диэлектрического слоя, на которые будет подаваться постоянное напряжение от 0 до 20 В. При описании модели метаповерхности были использованы граничные условия, позволяющие анализировать её по одной элементарной ячейке.

Возбуждение колебаний в таком элементе осуществляется за счёт энергии электромагнитной волны при её нормальном падении. Вектор напряжённости электрического поля падающей волны был направлен вдоль оси X . Предлагаемая структура вследствие использования варикапа позволяет путём изменения напряжения на нем менять электрическую ёмкость, и как следствие – реактивное сопротивление. Это даёт возможность изменять фазу прошедшей электромагнитной волны в некоторых пределах.

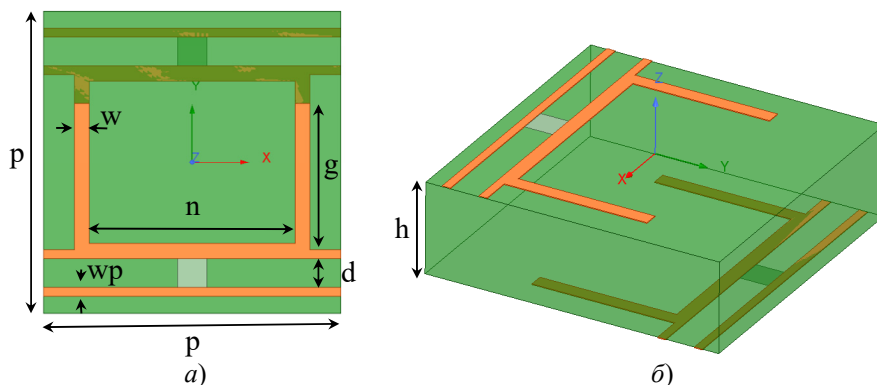


Рисунок 1.1 – Конструкция активного микрорезонатора с варикапами как элементарной ячейки метаповерхности (а) вид сверху и (б) вид под углом

Физический механизм работы структуры основан на возбуждении так называемого резонанса Гюйгенса, при котором отраженная от метаповерхности волна отсутствует. То есть метаповерхность ведёт себя аналогично поверхности Гюйгенса, создающей проходящую волну при отсутствии обратной волны. В рассматриваемом нами случае антисимметричное расположение элементов приводит к тому, что поверхностные токи на верхней и нижней сторонах подложки проходят в противоположных направлениях. Это формирует замкнутый контур тока, индуцирующий искусственный магнетизм, характеризующийся магнитным моментом элементарной ячейки. Одновременное существование в элементарной ячейке ортогональных электрических и магнитных моментов при выполнении условия их баланса приводит к возникновению резонанса Гюйгенса. Рассматривая метаповерхность является бианизотропной, поскольку одновременно проявляет как диэлектрические, так и магнитные свойства.

Возникновение магнитных моментов в близкорасположенных элементарных ячейках позволяет ввести в рассмотрение, для метаповерхности в целом, так называемые магнитные токи, выражаемые через поверхностную плотность магнитных моментов. Рассмотрение таких магнитных токов в совокупности с поверхностными электрическими токами облегчает расчёты [15].

При падении плоской электромагнитной волны на метаповерхность Гюйгенса по обе стороны подложки возникают эквивалентные поверхностные электрические и магнитные токи. Эти токи можно охарактеризовать тензором электрической поверхностной проводимости Y_{es} и тензором магнитного поверхностного импеданса Z_{ms} [16].

Исходя из теории электромагнетизма и граничных условий, нормированные на импеданс свободного пространства поверхностная проводимость ηY_{es} и магнитный импеданс $\frac{Z_{ms}}{\eta}$ удовлетворяют следующим уравнениям [17]:

$$\eta Y_{es} = 2 \cdot \frac{1 - T - R}{1 + T + R}, \quad (1.1)$$

$$\frac{Z_{ms}}{\eta} = 2 \cdot \frac{1 - T + R}{1 + T - R}, \quad (1.2)$$

где T – коэффициент прохождения, R – коэффициент отражения, вычисленные для амплитуд волн, η – импеданс свободного пространства.

Исследования показали [17], что когда нормированные электрическая поверхностная проводимость и магнитное поверхностное сопротивление равны и являются чисто мнимыми, т. е.

$$\text{Im}(\eta Y_{es}) = \text{Im}\left(\frac{Z_{ms}}{\eta}\right), \text{ может быть возбужден}$$

резонанс Гюйгенса, что приводит к полному прохождению электромагнитной волны и близкому к нулю отражению от метаповерхности.

2 Численное исследование метаповерхности

Проведено численное моделирование метаповерхности, в ходе которого построены частотные зависимости нормированных поверхностной проводимости ηY_{es} и магнитного импеданса

$$\frac{Z_{ms}}{\eta} \quad (\text{рисунок 2.1}). \text{ Исследования выполнялись}$$

в диапазоне частот от 24 до 26 ГГц.

По результатам моделирования, как и предполагалось, наблюдается резонанс Гюйгенса предлагаемой структуры на частоте 25,2 ГГц. Это следует из равенства мнимых частей

$$\text{Im}(\eta Y_{es}) = \text{Im}\left(\frac{Z_{ms}}{\eta}\right) = -1,$$

а действительные части этих величин близки к нулю, $\text{Re}(\eta Y_{es}) = 0,055$ и $\text{Re}\left(\frac{Z_{ms}}{\eta}\right) = 0,22$ соответственно.

Также в ходе численного моделирования активной метаповерхности были построены частотные зависимости коэффициентов отражения, прохождения и фазы прошедшей электромагнитной волны (рисунки 2.2 и 2.3) при различных значениях электроемкости варикапа (0,04 пФ; 0,07 пФ; 0,09 пФ; 0,2 пФ).

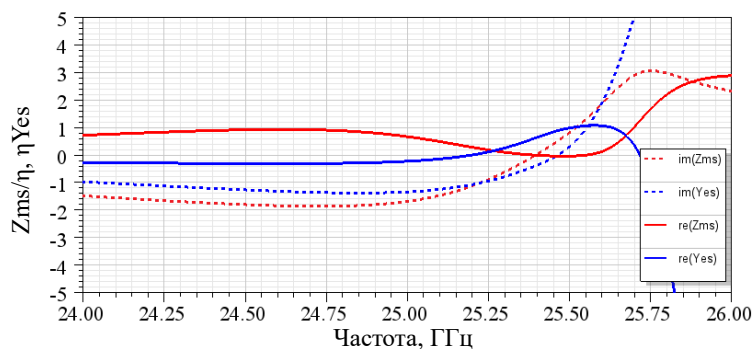


Рисунок 2.1 – Частотная зависимость нормированных электрической поверхностной проводимости и магнитного поверхностного импеданса элементарной ячейки

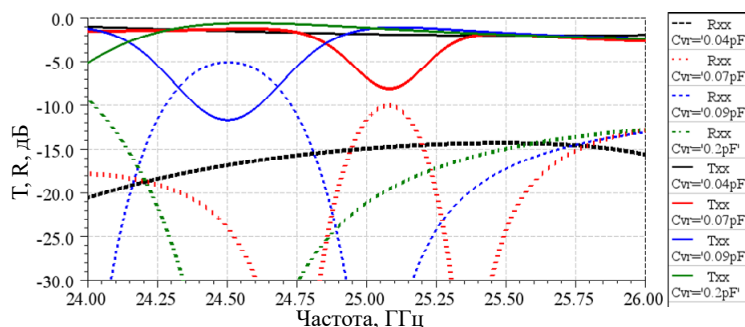


Рисунок 2.2 – Частотная зависимость коэффициентов прохождения T и отражения R электромагнитных волн при различных значениях емкости варикапа. Индексы xx у всех величин показывают, что векторы напряженности электрического поля падающей и отраженной волн направлены вдоль оси X

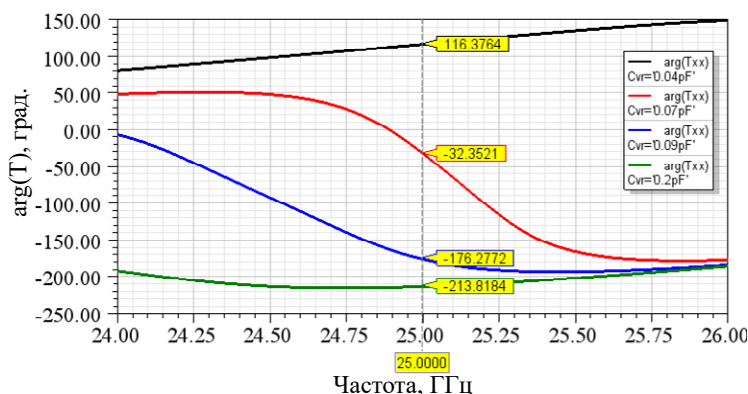


Рисунок 2.3 – Частотная зависимость фазы прошедшей волны при различных значениях емкости варикапа. Индексы xx у всех величин показывают, что векторы напряженности электрического поля падающей и отраженной волн направлены вдоль оси X

Резонанс Гюйгенса обеспечивает практически полное прохождение электромагнитной волны (коэффициент передачи близок к 0 дБ) и низкий уровень отражения в широкой полосе частот. На резонансной частоте при разных значениях ёмкости варикапа коэффициент прохождения T не превышает -4 дБ, а коэффициент отражения R остаётся ниже -15 дБ.

Как видно из рисунка 2.3, изменение ёмкости варикапа существенно влияет на фазу прошедшей волны, при этом наблюдается её выраженная зависимость от частоты. Моделирование показало, что изменение управляющего напряжения на варикапе в пределах от 0 до 20 В позволяет динамически варьировать фазу прошедшей волны в диапазоне около 330° . Это свойство обеспечивает возможность интеграции предложенной активной метаповерхности в антенные структуры для динамического управления диаграммой направленности, что делает её перспективной для приложений B5G/6G беспроводной связи.

Предложенный подход отличается тем, что приводит к формированию искусственного магнитного отклика, характеризуемого магнитным моментом элементарной ячейки, который создается исключительно за счёт геометрии асимметричных электрических диполей без необходимости

введения отдельных магнитных резонансных элементов. Это обеспечивает компактность элементарной ячейки и упрощает технологию её изготовления. В ходе численных исследований также установлено, что толщина подложки $h = 2,1$ мм является критически важным параметром для эффективного возбуждения резонанса.

Заключение

В работе представлена и численно исследована конструкция активной передающей бианизотропной метаповерхности на основе элементарных ячеек, обладающих сбалансированными электрическим и магнитным моментами, с интегрированными варикапами, предназначенная для применения в перспективных системах беспроводной связи B5G/6G.

Результаты моделирования подтвердили существование эффекта, при котором активная метаповерхность с варикапами ведёт себя аналогично поверхности Гюйгенса, создающей проходящую волну при отсутствии обратной волны. Имеет место возбуждение так называемого резонанса Гюйгенса на частоте 25,2 ГГц, при котором достигается прохождение волны, близкое к полному (коэффициент передачи ≥ -4 дБ) и подавление отражения (коэффициент отражения ≤ -15 дБ). Благодаря динамической настройке

ёмкости варикапа удалось реализовать фазовый сдвиг прошедшей волны до $\sim 330^\circ$, что открывает возможности для адаптивного формирования и сканирования диаграммы направленности антенн без использования механических или сложных многослойных конструкций.

Особенностью предложенной метаповерхности является компактность и технологическая простота элементарной ячейки, основанной на антисимметричных П-образных проводниках, формирующих искусственный магнитный отклик без отдельных магнитных резонаторов. Полученные результаты демонстрируют значительный потенциал разработанной структуры для интеграции в антенные системы следующих поколений с функцией программного управления лучом, однако для практического внедрения необходима дальнейшая оптимизация как геометрии ячейки, так и схемы управления активными элементами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Selvaraj, M. Reflective metasurface for 5G & beyond Wireless communications / M. Selvaraj, R. Vijay, R. Anbazhagan // Scientific Reports. – 2025. – Vol. 15, № 1. – P. 126.
2. 1-bit transmission-type digital programmable coding metasurface with multi-functional beam-shaping capability for ka-band applications / A.H. Naqvi [et al.] // Micromachines. – 2023. – Vol. 14, № 6. – P. 1250.
3. Naqvi, A.H. Low-profile electronic beam-scanning metasurface antenna for Ka-band applications / A.H. Naqvi, S. Lim // Waves in Random and Complex Media. – 2023. – P. 1–16.
4. Mailloux, R.J. Phased array antenna handbook. 2nd ed. / R.J. Mailloux. – Norwood: Artech house, 2017. – 654 p.
5. 1 bit electronically reconfigurable folded reflectarray antenna based on pin diodes for wide-angle beam-scanning applications / Z. Wang [et al.] // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2020. – Vol. 68, № 9. – P. 6806–6810.
6. Nguyen, B.D. Unit-cell loaded with PIN diodes for 1-bit linearly polarized reconfigurable transmitarrays / B.D. Nguyen, C. Pichot // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. – 2018. – Vol. 18, № 1. – P. 98–102.
7. Cheng, C.C. A programmable lens-array antenna with monolithically integrated MEMS switches / C.C. Cheng, B. Lakshminarayanan, A. Abbaspour-Tamijani // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 2009. – Vol. 57, № 8. – P. 1874–1884.
8. Frank, M. Design of a 24 GHz reconfigurable transmitarray element with continuous phase range / M. Frank, R. Weigel, A. Koelpin // 2017 11th European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP). – IEEE. – 2017. – P. 2400–2404.
9. Electronically reconfigurable 6×6 element transmitarray at K-band based on unit cells with continuous phase range / M. Frank [et al.] // IEEE antennas and wireless propagation letters. – 2019. – Vol. 18, № 4. – P. 796–800.
10. A reconfigurable planar Fresnel lens for millimeter-wave 5G frontends / Q. Xi [et al.] // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 2020. – Vol. 68, № 11. – P. 4579–4588.
11. Verho, S. Design of a compact and minimalist intermediate phase shifting feed network for Ka-band electrical beam steering / S. Verho, J.Y. Chung // Sensors. – 2024. – Vol. 24, № 4. – P. 1235.
12. Dynamic metasurface reflectors based on coupled resonators for simultaneous magnitude and phase control / M.K. Emara [et al.] // IEEE Access. – 2023. – Vol. 11. – P. 129552–129565.
13. Ge, Y. Broadband folded transmitarray antenna based on an ultrathin transmission polarizer / Y. Ge, C. Lin, Y. Liu // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2018. – Vol. 66, № 11. – P. 5974–5981.
14. Активная 5×5-элементная метаповерхность с функцией управления фазой для приложений в Ka-диапазоне частот / И.А. Фаняев, А.А. Тимошенко, А.Л. Самофалов, С.А. Хахомов, И.В. Семченко // IX Международная конференция «Информационные технологии и технические средства управления» (ICCT-2025). – 2025, 7–11 октября, Гомель. – С. 1–3.
15. Asadchy, V.S. Bianisotropic metasurfaces: physics and applications / V.S. Asadchy, A. Diaz-Rubio, S.A. Tretyakov // Nanophotonics. – 2018. – Vol. 7, № 6. – P. 1069–1094.
16. Ultra-compact active induced-magnetism Huygens' metasurfaces: design and application / C. Qiu [et al.] // Journal of Physics D: Applied Physics. – 2023. – Vol. 56, № 13. – P. 135101.
17. Ultrathin dual-polarized Huygens' metasurface: design and application / C. Xue [et al.] // Annalen der Physik. – 2020. – Vol. 532, № 7. – P. 2000151.

Работа выполнена в рамках проектов БРФФИ №Ф24К1ТГ-005 и Ф25К1И-034.

Поступила в редакцию 08.10.2025.

Информация об авторах

Фаняев Иван Александрович – к.т.н., доцент
Тимошенко Алексей Анатольевич – студент
Самофалов Андрей Леонидович – к.ф.-м.н., доцент
Хахомов Сергей Анатольевич – д.ф.-м.н., доцент
Семченко Игорь Валентинович – д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. НАН Беларуси
Цзихун Гу – к.ф.-м.н., доцент
Дашин Динг – д.т.н., профессор

ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ ДЕГЕНЕРАТИВНО-ДИСТРОФИЧЕСКИХ ИЗМЕНЕНИЙ ПОЯСНИЧНОГО ОТДЕЛА ПОЗВОНОЧНИКА

Е.М. Борчик¹, Д.А. Якимов², А.Ю. Влагова³, О.М. Демиденко⁴, М.В. Алексейков¹

¹Белорусско-Российский университет

²Могилевская областная клиническая больница

³Финансовый университет при Правительстве РФ

⁴Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

APPLICATION OF A SET OF MATHEMATICAL METHODS FOR THE DIAGNOSIS OF DEGENERATIVE-DYSTROPHIC CHANGES IN THE LUMBAR SPINE

K.M. Borchyk¹, D.A. Yakimov², A.Yu. Vladova³, O.M. Demidenko⁴, M.V. Alekseykov¹

¹Belarusian-Russian University

²Mogilev Regional Clinical Hospital

³Financial University under the Government of Russian Federation

⁴Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Рассматривается постановка диагноза «остеохондроз» поясничного отдела на основании измерения межпозвонковых расстояний на рентгеновских снимках в поясничном отделе. Для более точной диагностики и автоматизации предлагается комплекс методов математического анализа данных, позволяющих во множестве снимков пациентов и соответствующих измерений межпозвонковых расстояний отделить здоровых пациентов, заболевших и пограничные случаи заболевания.

Ключевые слова: поясничный отдел позвоночника, диагностика остеохондроза, многомерные данные, кластерный анализ, нейрон «возрастания», обработка экспериментальных данных.

Для цитирования: Применение комплекса математических методов для диагностики дегенеративно-дистрофических изменений поясничного отдела позвоночника / Е.М. Борчик, Д.А. Якимов, А.Ю. Влагова, О.М. Демиденко, М.В. Алексейков // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 4 (65). – С. 108–114. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_108. – EDN: CUFUJF

Abstract. The diagnosis of lumbar osteochondrosis based on measurement of intervertebral distances on lumbar x-rays is reviewed. For more accurate diagnosis and automation, a set of methods of mathematical data analysis is proposed, allowing to separate healthy patients, diseased patients and borderline cases of the disease in a set of patient images and corresponding measurements of intervertebral distances.

Keywords: lumbar spine, diagnosis of osteochondrosis, multivariate data, cluster analysis, ascending neuron, experimental data processing.

For citation: Application of a set of mathematical methods for the diagnosis of degenerative-dystrophic changes in the lumbar spine / K.M. Borchyk, D.A. Yakimov, A.Yu. Vladova, O.M. Demidenko, M.V. Alekseykov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 4 (65). – P. 108–114. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_4_65_108 (in Russian). – EDN: CUFUJF

Введение

Точный анализ и правильная обработка результатов рентгенологических исследований позволяют эффективно выделять патологические состояния и процессы. Проблему повышения качества диагностирования требуется решать на всех этапах распознавания изображений: сегментации, выделении и анализе объектов, параметрическом описании, классификации [1]. Форму позвоночника определяют множество характеристик, таких как наличие или отсутствие отклонения

позвоночного столба или его отделов вперед или назад относительно положения вертикальной линии, а также степень выраженности естественных существующих изгибов. Большое количество параметров, требуемых для объективной оценки состояния позвоночника, делает процесс их вычисления очень трудоемким [2].

Вопросы повышения эффективности принятия решений о диагностике и лечении различных заболеваний с применением информационных систем решаются на основе табличных методов

формализации алгоритмов принятия решения, методов логического проектирования, а также нейросетевых методов обработки изображений и машинного обучения [3]–[6]. Однако все существующие средства автоматизации диагностики имеют узкую специализацию и не могут применяться для оценки состояния позвоночника без существенной модификации.

Несмотря на все более широкое использование компьютерной томографии (КТ) и магнитно-резонансной томографии (МРТ) при изучении заболеваний позвоночника, рентгенография по-прежнему играет важную роль при многих заболеваниях, поражающих позвоночник. Разработаны показания к рентгенографии при различных патологических состояниях, которые поражают позвоночник, включая врожденные, травматические, дегенеративные, воспалительные, инфекционные и опухолевые заболевания [7]. Для построения моделей радиомики (извлечение количественных характеристик из медицинских изображений) использовались алгоритмы логистической регрессии, алгоритмы машинного обучения для классификации и регрессии, и др. [8]. Для уменьшения размерности данных и выделения признаков была применена многомерная логистическая регрессия при построении комбинированной клинко-радиомической модели, включающей радиомикроскопические признаки и клинические характеристики [9].

1 Материалы и методы

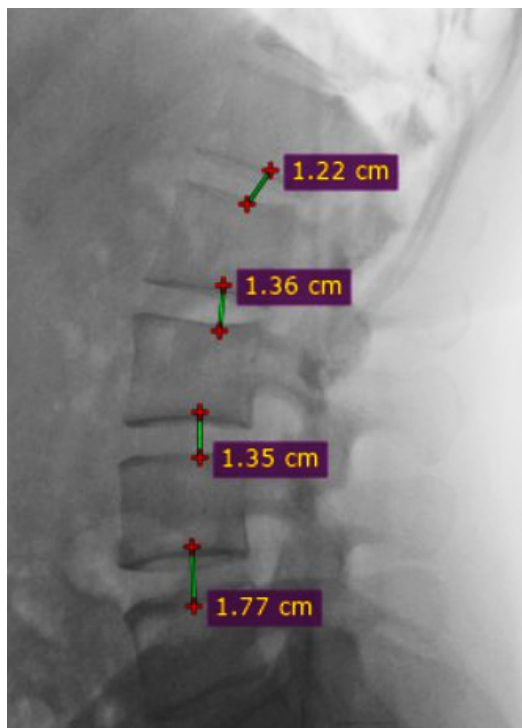


Рисунок 1.1 – Измерение расстояний между 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, 4 и 5 позвонками

В настоящей работе рассматривается комплексное применение методов кластерного анализа и нейросетевой модели в процессе постановки диагноза «остеохондроз» поясничного отдела на основании измерения расстояний на рентгеновских снимках между 1 и 2 позвонком, 2 и 3, 3 и 4, 4 и 5 в поясничном отделе. Далее для краткости расстояние между 1 и 2 позвонком обозначим «1 позвонок», между 2 и 3 – «2 позвонок», между 3 и 4 – «3 позвонок», между 4 и 5 – «4 позвонок». При постановке диагноза эксперт-диагност руководствуется наличием последовательного возрастания расстояний между рассматриваемыми позвонками поясничного отдела.

В результате работы рентген-кабинета накоплено определенное количество снимков, по каждому из которых измерены расстояния «1 позвонок», ..., «4 позвонок» (рисунок 1.1), известны диагнозы пациентов.

Для формирования групп пациентов со сходными признаками заболевания или их отсутствием применены методы кластерного анализа многомерных данных.

2 Анализ методов кластеризации

Описание методов кластеризации данных достаточно широко отражено в различных источниках [10]–[13]. Большинство алгоритмов, при всём их разнообразии, основано на гипотезе компактности, состоящей в том, что объекты одного класса по результатам измерений близко расположены по отношению друг к другу, а объекты разных классов заметно различаются между собой.

Методы разбиения множеств на кластеры можно разделить на иерархические (подразделяют на агломеративные: Tree Clustering, CURE, SACTUS и дивизимные: Смита Макнаотона и Кауфмана – Роузеува) и неиерархические (подразделяют на сравнение по статистикам: EM (Expectation Maximization, Scalable EM и сравнение по расстоянию, которые в свою очередь разделяют на сравнение по расстоянию до центра кластера: семейство K-Means и на сравнение по расстоянию между образцами: Fuzzy Relation Clustering)). Семейство K-Means в свою очередь подразделяют на числовые: K-Means (Hard C-Means), Scalable K-Means, Fuzzy C-Means, Гюстафсона-Кесселя; категорийные: K-Modes; смешанные: K-prototypes. Для исследования отобраны методы кластеризации Fuzzy Relation Clustering, Tree Clustering, Fuzzy C-Means, EM (Expectation Maximization), Смита Макнаотона, которые являются представителями основных видов методов кластеризации для разделения множества исследуемых данных.

Метод нечеткого кластерного анализа Fuzzy Relation Clustering (FRC) имеет следующие особенности: не требует охвата каждого кластера отдельным выпуклым множеством, т. е.

не накладывает ограничения на геометрическую форму кластеров.

Метод нечеткого кластерного анализа Fuzzy C-Means является представителем семейства не-иерархических методов кластерного анализа группы K-Means и, следовательно, накладывает ограничения на геометрию кластеров, требуя охвата каждого кластера отдельным выпуклым множеством. Трудоемкость метода меньше трудоемкости метода нечеткого кластерного анализа Fuzzy Relation Clustering (FRC) и, следовательно, скорость работы Fuzzy C-Means превысит скорость работы FRC на больших объемах данных.

Метод кластерного анализа Tree Clustering является представителем группы иерархических агломеративных методов. Скорость работы метода по сравнению с Fuzzy C-Means и FRC более выигрышна, точность работы метода сравнима с Fuzzy Relation Clustering.

Метод ожидания-максимизации EM – это неиерархический алгоритм кластеризации, основанный на статистических методах, который предполагает, что данные можно представить как линейную комбинацию многомерных нормальных распределений. Преимущества EM-алгоритма включают эффективную обработку больших данных, устойчивость к шумам и пропускам, возможность создания заданного числа кластеров и быструю сходимость при удачной инициализации.

Алгоритм максимального локального расстояния, предложенный британским ученым Смитом Макнаотоном, рассматривает каждый объект как отдельный кластер. Объекты объединяются в один кластер, если максимальное локальное расстояние между кластерами минимально. Алгоритм основан на подходе, который минимизирует максимальное расстояние между объектами разных кластеров, обеспечивая формирование групп на основе наименьшего максимального расстояния между элементами. Преимущества алгоритма включают возможность обрабатывать разнородные данные, минимизировать межкластерные расстояния и обеспечивать более компактные кластеры в сравнении с другими методами кластеризации.

3 Постановка задачи кластеризации

Предлагается комплексное применение $L, L \geq 3$ методов кластерного анализа, позволяющее учесть и обобщить достоинства выбранных методов.

На вход каждого из выбранных методов кластерного анализа подаются многомерные данные (вектора действительных чисел – данные пациентов, количественные данные) вида

$$X = \{x_i \mid x_i \in R^n, i = 1, \dots, m\}, m \geq 3 \quad (3.1)$$

и также качественные данные – информация о пациентах (шифровки, означающие наименование,

код пациента), управляющие параметры методов. Например, необходимым параметром методов кластерного анализа группы K-Means является параметр k – количество кластеров (задаваемое исследователем-экспертом), которое необходимо построить в результате кластеризации. Для более точной идентификации кластеров предлагается указание контрольных точек (КТ) кластеров (задаваемое исследователем-экспертом).

В результате разбиения множества X на кластеры каждый метод кластерного анализа ставит в соответствие номерам $i = 1, \dots, m$ элементов x_i соответствующие им номера кластеров $K_j, j = 1, \dots, k$, где k – количество построенных кластеров. В идеальном случае результаты работы всех методов кластерного анализа совпадают.

4 Решение задачи комплексной кластеризации в общем виде

Утверждение 1. Результат кластеризации многомерного множества X для каждого из методов кластеризации M_1, M_2, \dots, M_L может быть представлен в виде матрицы вероятностей принадлежности объектов $b_r \in B, r = 1, \dots, |B|$ определенным кластерам:

$$P_l = \|p_{lrj}\|, p_{lrj} \in [0, 1], l = 1, \dots, L, j = 1, \dots, k_l. \quad (4.1)$$

Определение 1. Объект $b_r \in B$ является элементом определённого кластера $K_j, j = 1, \dots, k$ тогда и только тогда, когда он отнесен к данному кластеру, по крайней мере, L^* из L выбранных методов кластерного анализа, причём $LE < L^* \leq L, L \geq 3$, пороговое значение LE определяется экспертом.

Утверждение 2. Пусть P_1, P_2, \dots, P_L – матрицы вида (4.1) вероятностей принадлежности объектов $b_r \in B, r = 1, \dots, |B|$ определенным кластерам $K_j, j = 1, \dots, k$, согласно методам кластеризации M_1, M_2, \dots, M_L соответственно.

Методика определения кластеров объектов состоит из нескольких этапов.

Этап 1. Кластеризация множества X методами $M_l, l = 1, \dots, L$. Интерпретация результатов кластеризации; подготовка к этапу обобщения.

Этап 2. Обобщение результатов кластеризации. Определение кластеров объектов.

Пусть Экспертом заданы следующие дополнительные начальные условия кластеризации $X \subset R^n$:

1) ψ – предполагаемое количество кластеров $K_j, j = 1, \dots, \psi$;

2) Y – множество контрольных точек кластеров:

$$Y = \{y_j \mid y_j \in R^n, j = 1, \dots, \gamma\}, Y \subset X, \gamma \geq \psi. \quad (4.2)$$

Обозначим через P_E – (эталонную, согласно оценке Эксперта) матрицу вероятностей принадлежности контрольных точек (КТ) – начальное условие кластеризации, определённое экспертом; P_T – (тестируемую) матрицу вероятностей принадлежности элементов множества X , соответствующих КТ, построенную по результатам кластеризации X методом M_I .

Определение 2. Перестановкой из элементов конечного множества I называется всякое упорядочивание элементов этого множества. Обозначим через $P_T(I_t)$ матрицы, образованные из матрицы P_T перестановками I_t её столбцов $j = 1, \dots, k$:

$$\begin{aligned} P_T(I_0) &= P_T, \quad P_T(I_1), \dots, P_T(I_t), \quad t = 0, \dots, k!-1, \\ I_0 &= (1, 2, \dots, k), \quad I_1 = (2, 1, \dots, k), \\ I_t, \quad t &= 0, \dots, k!-1, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где t – номер выполненной перестановки I_t столбцов матрицы P_T , с целью задания порядка их следования, общее количество возможных перестановок k столбцов матрицы P_T составляет $k!$.

Могут рассматриваться перестановки только тех столбцов матрицы P_T , которые не совпадают со столбцами P_E .

Определение 3. Для матричных пар $(P_T(I_t), P_E)$, $t = 0, k!-1$, определяется метрика вида:

$$\rho(P_T(I_t), P_E) = \sum_{r=1}^{|B|} \sum_{j=1}^k \min(p_{Trj}(I_t), p_{Erj}), \quad t = 0, k!-1, \quad (4.4)$$

где $p_{Trj}(I_t)$ – элементы матрицы $P_T(I_t)$ со столбцами j , следующими в порядке, соответствующем произведённой перестановке I_t столбцов матрицы P_T , p_{Erj} – элементы матрицы P_E .

Метрика $\rho(P_T(I_t), P_E) \geq 0$ позволяет определить меру совпадения элементов соответствующих матриц. Значение ρ прямо пропорционально количеству общих элементов $x_i \in X$ в кластерах матричной пары.

Утверждение 3. Перестановка I^* столбцов матрицы P_T по отношению к матрице P_E оптимальна тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\begin{aligned} \rho(P_T(I^*), P_E) &= \\ &= \max \{ \rho(P_T(I_t), P_E) \mid t = 0, \dots, k!-1 \}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где ρ – метрика вида (4.4).

Возвращаясь к прежним обозначениям, результат упорядочивания столбцов P_T относительно эталонной матрицы P_E

$$P_T = P_T(I^*). \quad (4.6)$$

На практике методы кластерного анализа могут применяться в следующей последовательности:

Шаг 1. Метод Tree Clustering строит дендрограмму, по которой Эксперт определяет необходимое количество кластеров k и их элементы, разрезая дендрограмму на определенном уровне α , $0 \leq \alpha \leq 1$ (экспериментально изменяя уровень α до получения необходимого количества кластеров). Определяются элементы кластеров.

Шаг 2. Метод Fuzzy C-Means строит k кластеров, определяются их элементы.

Шаг 3. Применяется метод кластерного анализа Fuzzy Relation Clustering (FRC), в котором экспериментально изменяется уровень α , $0 \leq \alpha \leq 1$ до получения необходимого количества кластеров.

Шаг 4. Если результаты работы первых трех методов эквивалентны, процесс кластеризации завершается. Иначе – применяются последовательно методы кластеризации Expectation Maximization (EM) и Кауфмана – Роузеува.

Утверждение 4. Объект $b_r \in B$, $r = 1, \dots, |B|$ принадлежит кластеру K_{j_0} , $j_0 \in \{1, \dots, k\}$ тогда и только тогда, когда вероятность принадлежности объекта кластеру в r -й строке j обобщённой матрицы P максимальна.

Методы кластерного анализа присваивают номера построенным кластерам в произвольном порядке. Для более информативного описания кластеров и возможности присваивания им некоторых характеристик предлагается проведение качественного анализа для определения элементов, вошедших в данные кластеры, их особенностей и причину включения в кластер.

5 Определение оценочных характеристик для кластеров

Предложена математическая модель определения возрастания расстояний между позвонками – нейрон «возрастания» (перцептрон) с выходом Y :

$$Y = z_1 w_1 + z_2 w_2 + z_3 w_3 + z_4 w_4, \quad (5.1)$$

где входные значения z_i , $i = 1, \dots, 4$ – не отрицательные действительные числа – расстояния (математические ожидания расстояний, полученных по четырем позвонкам) между 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, 4 и 5 позвонками; w_i , $i = 1, \dots, 4$ – весовые нагрузки нейрона (веса синапсов), соответственно $w_1 = -6$, $w_2 = 1$, $w_3 = 2$, $w_4 = 3$. Если значения z_i , $i = 1, \dots, 4$ возрастают (или, по крайней мере, не убывают), выход Y нейрона будет положительным. В противном случае, выход Y будет отрицательным.

В таблице 5.1 приведен пример определения наличия возрастания расстояний между позвонками.

Таблица 5.1 – Определение наличия возрастания расстояний между позвонками

№	z_1	z_2	z_3	z_4	Y	Пороговое значение	Классификация
1	1	1	1	1	0	$Y_1 = 0$	Расстояния постоянны
2	1	2	3	4	14	$Y_2 > 0$	Возрастание расстояний
3	5	4	3	2	-18	$Y_3 < 0$	Убывание расстояний

Ниже определяются выходные значения Y при входных (z_1, z_2, z_3, z_4) .

Случай 1: $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (1, 1, 1, 1)$,

$$Y_1 = -6 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 0.$$

Классификация: $Y_1 = 0$, значения z_1, z_2, z_3, z_4 постоянны – не убывают.

Случай 2: $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (1, 2, 3, 4)$,

$$Y_2 = -6 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 14.$$

Классификация: $Y_2 > 0$, имеет место возрастание значений z_1, z_2, z_3, z_4 .

Случай 3: $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (5, 4, 3, 2)$,

$$Y_3 = -6 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = -18.$$

Классификация: $Y_3 < 0$ – отрицательное значение, убывание значений z_1, z_2, z_3, z_4 .

6 Классификация остеохондроза

В таблице 6.1 приведены нормированные значения (определены относительно максимального расстояния в исследуемой выборке) расстояний между 1 и 2 позвонком (1 позвонком, z_1), ...,

4 и 5 позвонком (4 позвонком, z_4) для 10 пациентов a_1, \dots, a_{10} . Известны диагнозы пациентов Д1 – условно здоров, Д2 – патология (остеохондроз поясничного отдела позвоночника), Д3 – пограничные состояния относительно диагноза остеохондроз.

По результатам кластерного анализа с применением комплекса из $L = 5$ методов определены кластеры (таблица 6.2), сгруппировавшие пациентов с близкими показателями расстояний (z_1, z_2, z_3, z_4) относительно диагноза остеохондроз, значения метрик нейрон (5.1) возрастания и Евклидовой метрики.

Ниже определяются выходные значения Y (5.1) при входных (z_1, z_2, z_3, z_4) .

Случай 4: Входные (нормированные) значения (z_1, z_2, z_3, z_4) – элемент (пациент) a_7 (кластер 1) – имеет место возрастание после 1 позвонка, убывание после 2 позвонка, возрастание после 3 позвонка:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (0,729; 0,928; 0,624; 0,635);$$

$$Y_4 = -6 \cdot 0,729 + 1 \cdot 0,928 + 2 \cdot 0,624 + 3 \cdot 0,635 = -0,293.$$

Классификация: Отрицательное значение Y нейрона (5.1), убывание значений z_1, z_2, z_3, z_4 – наличие патологии (остеохондроз крестцового отдела позвоночника, поскольку в кластере присутствует элемент a_7 с диагнозом Д2).

Случай 5: Входные (нормированные) значения (z_1, z_2, z_3, z_4) – кластер 2 с элементами a_6, a_9, a_{10} – (имеет место возрастание после 1, 2 позвонков, убывание после 3 позвонка):

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (0,799; 0,838; 0,936; 0,915);$$

$$Y_5 = 0,659.$$

Таблица 6.1 – Элементы исследуемой выборки

Элементы выборки	Диагноз	1 позвонком, расстояния (z_1)	2 позвонком, расстояния (z_2)	3 позвонком, расстояния (z_3)	4 позвонком, расстояния (z_4)
a_1	Д3	0,680	0,735	0,912	0,691
a_2	Д3	0,552	0,580	0,680	0,630
a_3	Д3	0,613	0,663	0,862	0,729
a_4	Д3	0,597	0,564	0,586	0,807
a_5	Д3	0,569	0,680	0,762	0,580
a_6	Д3	0,669	0,735	0,890	0,917
a_7	Д2	0,729	0,928	0,624	0,635
a_8	Д3	0,586	0,613	0,724	0,895
a_9	Д1	0,807	0,829	0,917	0,978
a_{10}	Д3	0,923	0,950	1,000	0,851

Таблица 6.2 – Определение центров кластеров

Элементы выборки	z_1	z_2	z_3	z_4	Нейрон, Y	Евклидова метрика	Кластер	Патология
a_7	0,729	0,928	0,624	0,635	-0,293<0	1,479→min	1	+
a_6, a_9, a_{10}	0,799	0,838	0,936	0,915	0,659>0	1,748→max	2	-
a_1-a_5, a_8	0,599	0,639	0,754	0,722	0,716>0	1,363	3	±

Таблица 6.3 – Кластеры, построенные согласно диагнозам Д1, Д2, Д3

Элементы выборки	z_1	z_2	z_3	z_4	Нейрон, Y	Евклидова метрика	Кластер
a_7	0,729	0,928	0,624	0,635	-0,293	1,479→min	1
a_9	0,807	0,829	0,917	0,978	0,757	1,771→max	2
a_1-a_6, a_8, a_{10}	0,648	0,690	0,802	0,762	0,690	1,456	3

Классификация: Положительное значение Y нейрона (5.1), возрастание значений z_1, z_2, z_3, z_4 – отсутствие патологии, поскольку в кластере присутствует элемент a_9 с диагнозом Д1.

Случай 6: Входные (нормированные) значения (z_1, z_2, z_3, z_4) – кластер 3 с элементами a_1-a_5, a_8 (имеет место возрастание после 1, 2 позвонков, убывание после 3 позвонка):

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (0,599; 0,639; 0,754; 0,722);$$

$$Y_6 = 0,716.$$

Классификация: Положительное значение Y нейрона (5.1), возрастание значений z_1, z_2, z_3, z_4 – пограничная ситуация относительно наличия либо отсутствия патологии, поскольку в кластере не присутствуют элементы a_9, a_7 . Все пациенты кластера 3 имеют диагноз Д3.

В таблице 6.3 приведены кластеры (сгруппированы пациенты), построенные согласно диагностики врачом.

Кластер 1 (элемент a_7) в таблицах 6.2 и 6.3 совпадает, $Y_4 = -0,293$.

Кластер 2: Входные (нормированные) значения (z_1, z_2, z_3, z_4) – элемент a_9 , имеет место возрастание расстояний z_1, z_2, z_3, z_4 :

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (0,807; 0,829; 0,917; 0,978);$$

$$Y_7 = 0,757.$$

Классификация: Положительное значение Y нейрона (5.1), возрастание значений z_1, z_2, z_3, z_4 .

Кластер 3: Входные (нормированные) значения (z_1, z_2, z_3, z_4) – элементы a_1-a_6, a_8, a_{10} (имеет место возрастание после 1 – 3 позвонков):

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (0,648; 0,690; 0,802; 0,762),$$

$$Y_8 = 0,690.$$

Классификация: Положительное значение Y нейрона (5.1), возрастание значений z_1, z_2, z_3, z_4 .

В таблице 6.4 представлены результаты диагностики поликлиникой.

Таблица 6.4 – Диагнозы пациентов a_7, a_9 (контрольные точки кластеров)

Нейрон, Y	Классификация, элемент	Заключение поликлиники по пациентам
$Y_4 = -0,293 < 0$	Убывание расстояний, (патология), a_7	R-признаки межпозвонкового остеохондроза II степени
$Y_7 = 0,757 > 0$	Возрастание Расстояний (отсутствие патологии), a_9	Минимальные признаки межпозвонкового остеохондроза поясничного отдела позвоночника

Диагностика методами кластерного анализа (реальный случай): Y_4 (Кластер 1, патология) $< Y_5$ (Кластер 2, отсутствие патологии) $< Y_6$ (Кластер 1, пограничное состояние).

Диагностика врача поликлиники (идеальный случай): Y_4 (Кластер 1, патология) $< Y_8$ (Кластер 1, пограничное состояние) $< Y_7$ (Кластер 3, отсутствие патологии).

Оценка погрешности диагностики представлена в таблице 6.5.

Погрешности (отклонения) между оценкой Эксперта и оценкой комплекса методов кластерного анализа вычислены посредством использования Евклидовой метрики – стандартной метрики для пространства R^n , применяемой для вычисления расстояний между n -ками координат соответствующих векторов.

Таблица 6.5 – Погрешности (отклонения) между оценками Эксперта и комплекса методов кластерного анализа

Кластер	Оценка	Элементы выборки	Нейрон, Y	Евклидова метрика	Погрешность оценки, %
2	Эксперт	a_9	0,757	1,771	10
	Кластерный анализ	a_6, a_9, a_{10}	0,659	1,748	
3	Эксперт	a_1-a_6, a_8, a_{10}	0,690	1,456	10
	Кластерный анализ	a_1-a_5, a_8	0,716	1,363	
1	Эксперт	a_7	-0,293	1,479	0
	Кластерный анализ				

Так для кластера 2 и кластера 3 погрешности составили 10%:

$$\sqrt{(0,757-0,659)^2 + (1,771-1,748)^2} \approx 0,1;$$

$$\sqrt{(0,690-0,716)^2 + (1,456-1,363)^2} \approx 0,1.$$

Для кластера 1 погрешность между результатами диагностирования составила 0%.

Замечание (классификация по сортировке значений выходов): можно использовать несколько нейронов возрастания, подобных нейрону (5.1) (например, по 2 нейрона для каждой пары позвонков) для более точного анализа. Сортировка значений выходов этих нейронов может более точно определить наличие остеохондроза.

Заключение

Таким образом, в комплексе с методами кластерного анализа модель нейрона «возрастания» позволяет диагностировать остеохондроз с погрешностью до 10% по сравнению с оценкой и постановкой диагноза Экспертом.

Нейрон «возрастания» с четырьмя входами может быть использован для индикации возрастания значений на входе, что может быть полезно для выявления соответствующих тенденций. Однако для точного определения остеохондроза требуется более сложная модель, учитывающая множество факторов и контекст.

В качестве дополнительного этапа анализа исследуемых исходных данных может быть предложено применение кластерного и корреляционного анализа данных на основании расстояний между позвонками и метрик, построенных для каждого пациента на основании нейрона «возрастания».

ЛИТЕРАТУРА

1. Козарь, Р.В. Методы распознавания медицинских изображений в задачах компьютерной диагностики / Р.В. Козарь, А.А. Навроцкий, А.Б. Гуринович // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2020. – № 3 (120). – С. 116–121.
2. Курочка, К.С. Локализация позвонков человека на рентгеновских изображениях с использованием Darknet YOLO / К.С. Курочка, Т.В. Лучшева, К.А. Панарин // Доклады БГУИР. – 2018. – № 3. – С. 32–38.
3. Knowledge distillation on individual vertebrae segmentation exploiting 3D U-Net / L. Serrador, F.P. Villani, S. Moccia, C.P. Santos // Computerized Medical Imaging and Graphics. – 2024. – № 1. – P. 1–11. – DOI: 10.1016/j.compmedimag.2024.102350.
4. Масалитина, Н.Н. Математическая модель принятия решений при лечении остеохондроза поясничного отдела позвоночника / Н.Н. Масалитина, К.С. Курочка, Е.Л. Цитко // Информатика. – 2019. – № 1. – С. 24–35.

5. Моделирование дегенеративно-дистрофических изменений межпозвонкового диска в эксперименте на поясничном отделе позвоночника / О.А. Гольдберг, А.П. Животенко, В.А. Сорокиных, З.В. Кошкарёва // ACTA BIOMEDICA SCIENTIFICA. – 2019. – № 4. – С. 137–142. – DOI: 10.29413/ABS.2019-4.6.22.

6. Оценка качества работы искусственного интеллекта в выявлении дегенеративных заболеваний пояснично-крестцового отдела позвоночника / Н.В. Нуднов, А.В. Коробов, А.А. Скачков, Т.В. Кульнева, В.В. Шерстобоев, Л.А. Титова [и др.] // Вестник рентгенологии и радиологии. – 2024. – № 1. – С. 20–28. – DOI: 10.20862/0042-4676-2024-105-1-20-28.

7. The role of radiography in the study of spinal disorders / F.R. Santiago, A.J.L. Ramos-Bossini, Y.X.J. Wang, D.L. Zúñiga // Quantitative Imaging in Medicine and Surgery. – 2020. – № 10. – P. 2322–2355. – DOI:10.21037/qims-20-1014.

8. A diagnostic approach integrated multimodal radiomics with machine learning models based on lumbar spine CT and X-ray for osteoporosis / L. Cheng, F. Cai, M. Xu, J. Liao, Sh. Zong // Journal of Bone and Mineral Metabolism. – 2023. – № 41. – С. 877–889. – DOI: 10.1007/s00774-023-01469-0.

9. Development and validation of a machine learning-derived radiomics model for diagnosis of osteoporosis and osteopenia using quantitative computed tomography / Q. Xie, Y. Chen, Y. Hu, F. Zeng, P. Wang, L. Xu [et al.] // BMC Medical Imaging. – 2022. – № 1. – P. 140–148. – DOI: 10.1186/s12880-022-00868-5.

10. Методы и модели анализа данных: OLAP и Data Mining / А.А. Барсегян, М.С. Куприянов, В.В. Степаненко, И.И. Холод. – СПб.: БХВ – Петербург. – 2004. – 336 с.

11. Якимов, А.И. О совместном использовании методов кластерного анализа многомерных данных / А.И. Якимов, Е.М. Борчик, В.В. Башаримов // Доклады БГУИР. – 2011. – № 5. – С. 95–102.

12. Elkan, C. Using the triangle inequality to accelerate k-means / C. Elkan // Proc. Twentieth Int. Conf. on Machine Learning (ICML'03). – 2003. – P. 147–153.

13. Farnstrom, F. Scalability for clustering algorithms revisited / F. Farnstrom, J. Lewis, C. Elkan // SIGKDD Explorations. – 2000. – № 1. – P. 51–57.

Поступила в редакцию 28.09.2025.

Информация об авторах

Борчик Екатерина Михайловна – к.т.н.

Якимов Дмитрий Анатольевич – к.м.н.

Влодова Алла Юрьевна – д.т.н., доцент

Демиденко Олег Михайлович – д.т.н., профессор

Алексейков Михаил Викторович – аспирант

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfint@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfint.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;
- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;
- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e. g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).