



ISSN 2077-8708

Проблемы физики, математики и техники

№3 (64) 2025

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:

С.А. Хахомов (Беларусь)

**ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО
РЕДАКТОРА:**

А.В. Рогачёв (Беларусь)

Д.Л. Коваленко (Беларусь)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

В.Е. Агабеков (Беларусь)

П.Н. Богданович (Беларусь)

А.Ф. Васильев (Беларусь)

Го Вэньбинь (Китай)

С.С. Гиргель (Беларусь)

В.И. Громак (Беларусь)

А.Н. Дудин (Беларусь)

В.А. Еровенко (Беларусь)

А.И. Калинин (Беларусь)

Матс Ларссон (Швеция)

В.Д. Мазуров (Россия)

Ю.В. Малинковский (Беларусь)

А.Р. Миротин (Беларусь)

В.В. Можаровский (Беларусь)

В.С. Монахов (Беларусь)

Н.К. Мышкин (Беларусь)

Ю.М. Плескачевский (Беларусь)

И.В. Семченко (Беларусь)

А.Н. Сердюков (Беларусь)

А. Сихвола (Финляндия)

А.Н. Скиба (Беларусь)

С.А. Третьяков (Финляндия)

М.А. Ярмоленко (Беларусь)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:

Е.А. Ружицкая (Беларусь)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины
ул. Советская, 104,
246028, г. Гомель, Беларусь

Тел. +375(232)51-00-77

+375(232)51-03-21

E-mail: pfmt@gsu.by

Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

EDITOR-IN-CHIEF:

S.A. Khakhomov (Belarus)

DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:

A.V. Rogachev (Belarus)

D.L. Kovalenko (Belarus)

EDITORIAL BOARD:

V.E. Agabekov (Belarus)

P.N. Bogdanovich (Belarus)

A.F. Vasilyev (Belarus)

Guo Wenbin (China)

S.S. Girgel (Belarus)

V.I. Gromak (Belarus)

A.N. Dudin (Belarus)

V.A. Erovenko (Belarus)

A.I. Kalinin (Belarus)

Mats Larsson (Sweden)

V.D. Mazurov (Russia)

Yu.V. Malinkovsky (Belarus)

A.R. Mirotin (Belarus)

V.V. Mozharovsky (Belarus)

V.S. Monakhov (Belarus)

N.K. Myshkin (Belarus)

Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)

I.V. Semchenko (Belarus)

A.N. Serdyukov (Belarus)

A. Sihvola (Finland)

A.N. Skiba (Belarus)

S.A. Tretyakov (Finland)

M.A. Yarmolenko (Belarus)

EXECUTIVE SECRETARY:

E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

EDITION ADDRESS:

Francisk Skorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246028, Gomel, Republic of Belarus

Ph. +375(232)51-00-77

+375(232)51-03-21

E-mail: pfmt@gsu.by

Website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 3 (64) 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЗОРЫ

(к 95-летию Гомельского государственного университета
имени Франциска Скорины)

- Васильев А.Ф., Монахов В.С., Сафонов В.Г., Скиба А.Н.** О становлении и развитии исследований по алгебре в Гомельском государственном университете: история, результаты и перспективы 7
- Можаровский В.В.** Математические модели расчета напряженно-деформированного состояния композиционных изделий и покрытий для элементов машин и трибологических систем . 16
- Рогачёв А.В., Ярмоленко М.А., Рогачёв А.А., Цзян Сяо Хун.** Основные результаты и перспективы формирования функциональных нанокomпозиционных полимерных покрытий из активной газовой фазы 29

ФИЗИКА

- Баевич Г.А., Никитюк Ю.В., Марченко Л.Н., Максименко А.В.** Нейро-нечеткое и нечеткое моделирование лазерного легирования стали 30ХГСН2А 37
- Гиргель С.С.** Векторные вращающиеся гауссовы пучки Арно со сложным астигматизмом .. 43
- Ивашкевич А.В., Саченок П.О., Овсюк Е.М., Кисель В.В.** Частица со спином 1/2, аномальным магнитным моментом и поляризуемостью во внешнем магнитном поле 49
- Капшай В.Н., Павленко А.В., Гришечкин Ю.А.** Численное решение двумерного уравнения Логунова – Тавхелидзе для потенциала Гаусса, заданного в релятивистском конфигурационном представлении 56
- Кравченко В.М., Кузьмицкая А.С., Малютина-Бронская В.В., Конойко А.И.** Перестраиваемый резонатор Фабри – Перо 62
- Павленко А.В., Капшай В.Н., Гришечкин Ю.А.** Точные решения двумерного уравнения Логунова – Тавхелидзе с потенциалом «дельта-окружность» для состояний рассеяния 67
- Руденков А.С., Цзян Сяохун, Пилипцов Д.Г.** Влияние термообработки на структуру и механические свойства азотированных углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием 73

МАТЕМАТИКА

- Гальмак А.М.** Полиадические факторгруппы полиадических групп специального вида. I ... 84
- Коранчук А.Г.** Классы конечных групп с формационно гиперцентральной вложением силовских подгрупп в свои нормализаторы 90
- Майоровская С.В., Мироненко В.В.** Достаточные условия центра для некоторых дифференциальных уравнений 96
- Сафонова И.Н., Скрундь В.В.** О $\mathfrak{H}_c^1$ -критических формациях конечных групп 99

ТЕХНИКА

- Белый А.В., Латушкина С.Д., Посылкина О.И., Сечко И.А., Комаровская В.М.** Формирование коррозионностойких многослойных покрытий на основе системы Ti – Cu методом вакуумно-дугового осаждения 112

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки:

- **технические;**
- **физико-математические.**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21. Приказы Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 31.12.2020 № 338, № 339.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е.А. Ружицкая*
Корректоры *И.А. Хорсун, Т.А. Фицнер*
Дизайн обложки *А.В. Ермаков*

Подписано в печать 12.09.25. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 14,18. Уч.-изд. л. 12,35. Тираж 27 экз. Заказ № 447.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013 г.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий в качестве:
издателя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013 г.;
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017 г.
Ул. Советская, 104, 246028, Гомель.

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2025
© Проблемы физики, математики и техники, 2025
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2025

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December 2009

Released quarterly

№ 3 (64) 2025

CONTENTS

REVIEWS

(to the 95th Anniversary of Francisk Skorina Gomel State University)

Vasil'ev A.F., Monakhov V.S., Safonov V.G., Skiba A.N. On the formation and development of research in Algebra at Gomel State University: history, results and prospects	7
Mozharovsky V.V. Mathematical models for calculating the stress-strain state of composite products and coatings for machine elements and tribological systems	16
Rogachev A.V., Yarmolenko V.A., Rogachev A.A., Jiang Xiao Hong. Main results and prospects of forming functional nanocomposite polymer coatings from the active gas phase	29

PHYSICS

Baevich G.A., Nikityuk Yu.V., Marchenko L.N., Maksimenko A.V. Neuro-fuzzy and fuzzy modeling of laser alloying of steel 30XГCH2A	37
Girgel S.S. Vector rotating Gaussian Arnaud beams with complex astigmatism	43
Ivashkevich A.V., Sachenok P.O., Ovsyuk E.M., Kisel V.V. Spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment and polarizability in the external magnetic field	49
Kapshai V.N., Paulenka A.V., Grishechkin Yu.A. Numerical solution of the two-dimensional Logunov – Tavkhelidze equation for Gaussian potential in the relativistic configuration representation ..	56
Kravchenko V.M., Kuzmitskaya H.S., Malyutina-Bronskaya V.V., Konoiko A.I. Tunable Fabry – Perot resonator	62
Paulenka A.V., Kapshai V.N., Grishechkin Yu.A. Exact solutions of the two-dimensional Logunov – Tavkhelidze equation with the “delta-circle” potential for scattering states	67
Rudnikov A.S., Jiang Xiaohong, Piliptsov D.G. Influence of heat treatment on the structure and mechanical properties of carbon coatings doped with zirconium and silicon	73

MATHEMATICS

Gal'mak A.M. Polyadic quotient groups of polyadic groups of special form. I	84
Koranchuk A.G. Classes of finite groups with formationally hypercentral embedding of Sylow subgroups into their normalizers	90
Mayorovskaia S.V., Mironenko V.V. Sufficient center conditions for some differential equations	96
Safonova I.N., Skrundz V.V. On $\mathfrak{H}_c^\tau$ -critical formations of finite groups	99

TECHNICS

Belyi A.V., Latushkina S.D., Posylkina O.I., Sechko I.A., Komarovskaya V.M. Formation of corrosion-resistant multilayer coatings based on the Ti – Cu system by vacuum-arc deposition	112
--	-----

Founder – Francisk Skorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science:

- Technics;**
- Physics and Mathematics.**

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 512.548

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_7

EDN: YLSTHQ

О СТАНОВЛЕНИИ И РАЗВИТИИ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО АЛГЕБРЕ В ГОМЕЛЬСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ: ИСТОРИЯ, РЕЗУЛЬТАТЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ

А.Ф. Васильев¹, В.С. Монахов¹, В.Г. Сафонов², А.Н. Скиба¹¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины²Институт математики НАН Беларуси, Минск

ON THE FORMATION AND DEVELOPMENT OF RESEARCH IN ALGEBRA AT GOMEL STATE UNIVERSITY: HISTORY, RESULTS AND PROSPECTS

A.F. Vasil'ev¹, V.S. Monakhov¹, V.G. Safonov², A.N. Skiba¹¹Francisk Skorina Gomel State University²Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk

Аннотация. Анализируется история становления и развития всемирно известной Гомельской алгебраической школы. Показана роль академика АН БССР С.А. Чунихина и его ученика члена-корреспондента НАН Беларуси Л.А. Шеметкова как научных лидеров в формировании и развитии научной школы.

Ключевые слова: конечная группа, научная школа, С.А. Чунихин, Л.А. Шеметков.

Для цитирования: О становлении и развитии исследований по алгебре в Гомельском государственном университете: история, результаты и перспективы / А.Ф. Васильев, В.С. Монахов, В.Г. Сафонов, А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 7–15. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_7. – EDN: YLSTHQ

Abstract. The paper analyzes the history of the formation and development of the famous algebraic school at Gomel State University. The role of Academician of the Academy of Sciences of the BSSR S.A. Chunikhin and his student, Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, L.A. Shemetkov as scientific leaders in the formation and development of the scientific school is shown.

Keywords: finite group, scientific school, S.A. Chunikhin, L.A. Shemetkov.

For citation: On the formation and development of research in Algebra at Gomel State University: history, results and prospects / A.F. Vasil'ev, V.S. Monakhov, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 3 (64). – P. 7–15. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_7 (in Russian). – EDN: YLSTHQ

Посвящается 95-летию Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины и 120-летию со дня рождения академика С.А. Чунихина

Введение

В настоящее время руководством нашей страны поставлена задача прорывного научно-технологического развития Республики Беларусь на период до 2045 года. Для достижения поставленной цели необходимо вкладывать существенные ресурсы в развитие математики и математического образования, поддерживать сложившиеся активно работающие математические научно-педагогические школы, целенаправленно привлекать в них молодые силы.

Теория групп сегодня является одним из центральных разделов современной математики. Группы возникают во многих отраслях современной науки и активно используются приложениями. Понятие группы является математической

моделью идеи симметрии, имеющей фундаментальное значение и применения в различных направлениях. Классическими областями приложения групп являются теория элементарных частиц, кристаллография, криптология, решение дифференциальных уравнений и др. [1]. Развитие во второй половине двадцатого века дискретной математики и наук, связанных с компьютерами, привело к значительному росту роли групп, в частности, конечных групп в современной науке и появлению новых их приложений в таких областях, как криптография [2], [3], генетика [4], распознавание формальных языков [5], машинное обучение [6], статистическая механика, работы, связанные с решениями уравнений Янга – Бакстера [7] и др. Поэтому проведение научных исследований и подготовка специалистов в области современной алгебры (теория групп, решетки, колец, универсальной алгебры и др.) является актуальной задачей.

1 С.А. Чунихин – основатель Гомельской алгебраической школы

21 сентября 2025 года исполняется 120 лет со дня рождения выдающегося советского алгебраиста академика АН БССР Сергея Антоновича Чунихина. Сергей Антонович родился в Харькове в семье сельского врача и школьной учительницы. В 1929 году окончил математическое отделение Московского государственного университета. Во время обучения в университете Сергей Антонович получил блестящее математическое образование, слушая лекции выдающихся математиков: О.Ю. Шмидта, Н.Н. Лузина, Д.Ф. Егорова, П.С. Александрова, А.Я. Хинчина, Э. Нётер и др. С 1929 по 1932 гг. учился в аспирантуре под руководством академика О.Ю. Шмидта, приобщившего его к изучению и исследованиям в теории групп. В 1934 г. С.А. Чунихину было присвоено ученое звание профессора по математике, а в 1936 году он получил степень доктора физико-математических наук. В московский период Сергей Антонович прошел путь от ассистента до заведующего кафедрой: 1933–1935 гг. являлся заведующим кафедрой математики Тульского механического института Наркомтяжпрома СССР, с 1935 по 1941 гг. заведовал кафедрой математики Московского вечернего металлургического института Наркомчермета СССР. С началом войны находился в эвакуации в Томске, где с 1941 по 1953 гг. работал заведующим кафедрами математики в Томском электромеханическом институте инженеров железнодорожного транспорта и алгебры в Томском государственном университете. Томский 12-летний период научно-образовательной деятельности С.А. Чунихина достаточно подробно освещен в статьях [8], [9].

До середины XX века в Гомеле не было математических школ. Первые исследования по алгебре появились в Гомеле в 50-х годах прошлого века и связаны с именем Сергея Антоновича Чунихина. В 1953 г. С.А. Чунихин переехал в Гомель по рекомендации академика О.Ю. Шмидта для работы заведующим кафедрой высшей математики Белорусского института инженеров железнодорожного транспорта (БИИЖТ). К тому времени он был уже известным ученым, имеющим свое самостоятельное научное направление и огромный опыт научно-образовательной и организаторской работы. В феврале 1954 г. была открыта аспирантура при кафедре высшей математики БИИЖТа, в которую были приняты первые аспиранты Е.Н. Торопов, С.А. Сафонов, В.П. Громыко. После открытия в 1959 г. Института математики и вычислительного центра АН БССР, в феврале 1960 г. С.А. Чунихин, С.А. Сафонов и С.А. Русаков по решению Президиума АН БССР были откомандированы на основную работу в созданную в институте лабораторию теории конечных групп.

В 1960–1985 гг. С.А. Чунихин являлся заведующим лабораторией конечных групп Института математики АН БССР (Гомельское отделение), одновременно в 1964–1969 гг. он работал заведующим кафедрой алгебры Гомельского педагогического института им. В.П. Чкалова, а в 1978–1985 гг. – заместителем директора Института математики АН БССР по Гомельскому отделению.

Гомельский этап жизни и деятельности Сергея Антоновича был самым продолжительным (33 года) и самым плодотворным. В этот период он основал Гомельскую алгебраическую школу мирового уровня. В Гомеле С.А. Чунихин написал большинство своих научных работ, в том числе монографию «Подгруппы конечных групп» [10], переведенную в 1969 г. на английский язык. В Гомеле им было подготовлено 25 кандидатов наук, а пятеро его учеников (Л.А. Шеметков, А.В. Романовский, Э.М. Пальчик, В.А. Ведерников, С.А. Русаков) стали докторами наук. Дважды (1968 и 1975 гг.) в Гомеле проходили всесоюзные алгебраические конференции, председателем оргкомитета которых был С.А. Чунихин. Заслуги С.А. Чунихина были достойно оценены научной общественностью и руководством СССР и БССР. В 1956 году он был избран членом-корреспондентом, в 1966 г. действительным членом Академии наук БССР. При избрании академиком он получил блестящие отзывы и рекомендации ведущих математиков СССР: академиков АН СССР И.М. Виноградова, А.И. Мальцева, В.М. Глушкова, члена-корреспондента АН СССР И.Р. Шафаревича, члена-корреспондента АН УССР С.Н. Черникова, которые можно найти в [11].

Заслуги С.А. Чунихина отмечены тремя орденами, четырьмя медалями, пятью почетными грамотами Верховного Совета БССР, ему было присвоено звание «Заслуженный деятель науки БССР». На здании, где работал С.А. Чунихин, установлена и торжественно открыта в 1995 г. мемориальная доска.

В своих научных исследованиях С.А. Чунихин затронул многие фундаментальные слои теории конечных групп и получил классические результаты, вошедшие в основные учебники и монографии по алгебре. Особое внимание он уделит изучению свойств конечной группы, связанных с некоторым определенным множеством простых чисел π , которые называются π -свойствами. Ранее, до него, π -свойства изучались, особенно для случая, когда π состоит из одного простого числа p . Здесь примером является знаменитая теорема Силова. Ф. Холл при построении структурной теории конечных разрешимых групп использовал π -подгруппы, у которых порядок и индекс взаимно просты. В дальнейшем такие подгруппы стали называться π -холловыми подгруппами. В 1946–1949 гг.

в работах [12], [13] С.А. Чунихиным была получена четкая формулировка и обоснование понятия π -свойства конечной группы и начато систематическое применение его в качестве самостоятельного метода изучения конечных групп. Этот метод исследования позволяет для каждой теоремы теории групп, условия которой имеют арифметический характер, искать ей соответствующую более общую « π -теорему», сохраняя заключения исходной теоремы лишь для элементов из π . Начиная с 1950-х годов, результаты и идеи С.А. Чунихина в этом направлении получили распространение и признание во всем мире. В разные годы изучением π -свойств групп, помимо Ф. Холла и С.А. Чунихина, занимались такие известные алгебраисты как Р. Бэр, Х. Виландт, П. Ито, Дж. Томпсон, Л.А. Шеметков, В.Д. Мазуров, Л.С. Казарин, Ф. Гросс, Б. Хартли, Г. Цаппа, ученики С.А. Чунихина и многие другие. Существенный вклад в развитие данной тематики в последние годы внесли новосибирские математики Е.П. Вдовин и Д.О. Ревин. Важным итогом метода π -свойств стало введение и изучение новых классов: π -разрешимых, π -отделимых, π -нильпотентных, π -замкнутых, π -сверхразрешимых групп и т. д. Отметим, что понятие π -разрешимой группы вошло в основные классические монографии и учебники по теории групп, например, [14]–[17].

С.А. Чунихин также считается одним из основоположников систематического изучения факторизаций конечных групп. Под факторизацией конечной группы понимается представление ее в виде произведения двух или нескольких подгрупп, взятых в определенном порядке. Исследуются как способы факторизации заданной группы (прямая задача факторизации), так и свойства групп, допускающих ту или иную заданную факторизацию (обратная задача). Сергей Антонович получил целый ряд классических факторизационных результатов. Он установил, что любому разбиению последовательности индексов главного ряда конечной группы G на подмножества соответствует факторизация группы G с помощью попарно перестановочных подгрупп, порядки которых зависят от указанного разбиения. Этот результат включает в себя классическую теорему Ф. Холла о факторизации конечных разрешимых групп.

Еще одно направление научного творчества С.А. Чунихина связано с развитием работы О.Ю. Шмидта «О группах, все подгруппы которых специальные» [18], в которой было установлено строение минимальных неспециальных (нильпотентных) конечных групп, т. е. неспециальных (нильпотентных) конечных групп, все собственные подгруппы которых специальные (нильпотентные). Такие группы в настоящее время называются группами Шмидта. Отмеченная выше работа [18] в настоящее время широко

используется и цитируется различными исследователями и нашла весьма важные приложения во многих вопросах теории конечных групп. С.А. Чунихин первым заметил большие возможности использования групп Шмидта, посвятив исследованию их цикл своих работ. В работах [19], [20] были найдены два типа приложений групп Шмидта (группы типа S – по терминологии С.А. Чунихина): нахождение признаков нильпотентности (p -нильпотентности) конечных групп, а также нахождение нильпотентных подгрупп у конечных ненильпотентных групп. Полученные им результаты существенно расширили знания о подгрупповом строении конечных групп.

Также С.А. Чунихин ввел понятие индексиала конечной группы и на его основе разработал метод индексалов, позволяющий исследовать условия существования подгрупп, порядки и индексы которых не обязательно взаимно просты. Отметим, что полученные им в этой области результаты охватывают все остальные предшествующие теоремы о существовании подгрупп, определяемых арифметическими свойствами, и объясняют единую природу рассматривавшихся ранее классических теорем Силова, Шура и Ф. Холла о существовании подгрупп. Основные итоги более чем тридцатилетних исследований С.А. Чунихина подведены в его оригинальной монографии [10].

2 Деятельность С.А. Чунихина в Гомельском педагогическом институте им. В.П. Чкалова с 1961 по 1970 гг.

В 1961 году С.А. Чунихин был приглашен на работу в Гомельский педагогический институт им. В.П. Чкалова и был зачислен на должность исполняющего обязанности профессора кафедры математики на 0,5 ставки приказом № 228-а от 22 декабря 1961 г. В этом году была открыта аспирантура по алгебре и теории чисел. Эта была третья аспирантура, открытая в Гомеле С.А. Чунихиным. Ее первыми аспирантами стали выпускники Гомельского пединститута А.В. Романовский, Э.М. Пальчик, М.П. Лельчук. Все они в разное время защитили кандидатские диссертации, первые два впоследствии стали докторами наук. В этот период стало понятно, чтобы масштабировать подготовку научно-педагогических специалистов (которых остро не хватало), сделать ее более эффективной, необходимо начинать формировать будущих ученых со студенческой скамьи. По инициативе С.А. Чунихина 1 сентября 1964 г. (Приказ № 295 от 1 сентября 1964 г.) в пединституте была открыта кафедра алгебры и теории чисел. Сергей Антонович являлся первым ее заведующим (по совместительству) с 1964 г. по 1969 г. Первыми алгебраистами, которые стали работать на этой кафедре вместе с С.А. Чунихиным, были его ученики – кандидаты

физ.-мат. наук С.А. Сафонов (доцент) и С.А. Русаков (старший преподаватель). В 1965 году в штат кафедры был зачислен Л.Я. Поляков (кандидат физ.-мат. наук, 1966 г.), в 1967 году – В.Д. Черток (кандидат физ.-мат. наук, 1966 г.), оба ученики С.А. Чунихина. Таким образом, к началу 1969 г., благодаря усилиям С.А. Чунихина и его учеников, была сформирована кафедра мирового уровня, которая вместе с Гомельской лабораторией конечных групп стала основой научно-педагогической Гомельской алгебраической школы.

Ярким свидетельством признания возникшей научно-педагогической школы стали организация и проведение под председательством С.А. Чунихина со 2 по 8 июля 1968 г. в Гомеле IX Всесоюзного алгебраического коллоквиума. Для участия в коллоквиуме в Гомель прибыло 295 алгебраистов из 50 городов Советского Союза (из них 17 докторов и 130 кандидатов наук, 54 аспиранта, 19 студентов, 74 работника высших учебных заведений и научно-исследовательских и др. учреждений и 1 школьник). С докладами выступили ведущие алгебраисты Советского Союза. Чтобы передать дух того времени, отметим, что коллоквиум [21] постановил также поддержать предложение об открытии в Гомеле второго в Беларуси государственного университета и о расширении Гомельского отделения Института математики АН БССР.

С.А. Чунихин умер 29 октября 1985 г. В день его рождения 21 сентября 1995 г. в Гомеле проходила международная конференция «Алгебра и кибернетика», специально посвященная его памяти. Конференция собрала большое число участников (только докторов наук было 33: из Беларуси, России, Украины, Польши, США). На здании, в котором работал С.А. Чунихин, установлена мемориальная доска.

3 Деятельность Л.А. Шеметкова по развитию исследований в Гомельском госуниверситете с 1970 по 2013 гг.

В 1969 г. на базе Гомельского педагогического института им. В.П. Чкалова был открыт Гомельский государственный университет. Началась большая серьезная работа по преобразованию института в классический университет, которая требовала активных действий и молодых энергичных кадров. С.А. Чунихин в 1969 г. завершил руководство кафедрой алгебры и теории чисел, в дальнейшем получившей название кафедра алгебры и геометрии. По приказу он еще проработал в 1969–1970 учебном году профессором на 0,5 ставки кафедры алгебры Гомельского госуниверситета с нагрузкой по подготовке аспирантов. По окончании учебного года он ушел из университета, сосредоточившись на своей основной должности заведующего лабораторией теории конечных групп Института математики АН БССР.

Дальновидность Сергея Антоновича состояла в том, что им был подготовлен преемник, который сможет его заменить и развить дальше его дело, начатое в Гомельском пединституте. Таким преемником стал Л.А. Шеметков, который родился в 1937 г. в Гомеле. Здесь в 1959 г. он окончил с отличием педагогический институт и поступил в аспирантуру к профессору С.А. Чунихину. После окончания аспирантуры Леонид Александрович до 1977 г. работал в Гомельском отделении Института математики АН БССР. В 1964 г. Л.А. Шеметков защитил кандидатскую диссертацию, а в 1969 г. – докторскую диссертацию по алгебре. Начиная с 1969 г. по 2013 г. Леонид Александрович работал в Гомельском государственном университете, до 1977 г. по совместительству. В 1973 г. ему присвоено звание профессора. В 1977 г. Л.А. Шеметков был переведен на должность проректора по учебной работе Гомельского государственного университета. В 1980 г. Л.А. Шеметков был избран членом-корреспондентом Академии наук БССР. С 1989 по 2000 гг. Леонид Александрович работал ректором Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины. С 2002 г. по 2012 г. возглавлял в университете кафедру алгебры и геометрии.

Л.А. Шеметков награжден орденом Трудового Красного Знамени (1986), орденом Святого равноапостольного Великого Князя Владимира (1999), орденом Франциска Скорины (2002), почетными грамотами Верховного Совета БССР (1978) и Национального собрания Республики Беларусь (1999). За заслуги в развитии высшей школы и науки Леонид Александрович удостоен званий «Заслуженный деятель науки Республики Беларусь» (1995), «Отличник образования Республики Беларусь» (1997), «Почетный гражданин города Гомеля» (2002).

Мы остановимся на научной и научно-организаторской деятельности Л.А. Шеметкова во время его работы в Гомельском госуниверситете. В 60-х годах XX в. после выхода знаменитой работы Гашюца [22] возникло новое крупное направление исследований конечных непростых групп – теория классов конечных групп (формаций, классов Фиттинга, классов Шунка). Поняв перспективность теории классов в современной алгебре, Л.А. Шеметков вместе со своими учениками начинает активно разрабатывать новое для СССР направление, прежде всего – теорию формаций конечных групп. В самом начале этого пути он получил серьезные результаты: решил известную проблему формационной стабильности, идущей от классических результатов Ф. Холла, Л.А. Калужнина и Р. Бэра, получил изящную внешнюю характеризацию сверхразрешимых групп, нашел условия дополняемости корадикалов, распространил теорию формационных нормализаторов с разрешимых групп на произвольные

и др. В середине 70-х годов Л.А. Шеметковым был разработан наиболее общий метод построения формаций с помощью групповых функций [23], что позволило ему впервые ввести в математическую практику композиционные формации, которые в дальнейшем, наряду с локальными формациями В. Гашюца, стали основными объектами исследований, важными для приложений. Полученные Л.А. Шеметковым и учениками результаты были изложены в его монографии «Формации конечных групп» [24], вышедшей в 1978 году в московском издательстве «Наука». Это издание было первой монографией в мировой литературе по теории формаций. В этой книге Леонид Александрович привел результаты С.А. Чунихина и некоторых его учеников (А.П. Кохно, А.Н. Новицкого, Л.Я. Полякова, А.В. Романовского, С.А. Русакова, В.И. Харламовой), а также своих учеников (В.С. Монахова, А.Н. Скибы, Н.Т. Воробьева, В.Д. Подуфаловой, К.А. Решко, М.В. Селькина, В.Г. Сементовского, В.Н. Семенчука, Л.М. Слеповой, В.В. Шлыка).

В монографии было сформулировано 26 открытых проблем, которые в дальнейшем решались в докторских диссертациях А.Н. Скибы, Н.Т. Воробьева, Го Вэньбиня, М.В. Селькина, В.А. Ведерникова, А.Ф. Васильева, С.Ф. Каморникова, В.Н. Семенчука, В.Н. Тютянова, а также авторами ряда кандидатских диссертаций отечественных и зарубежных алгебраистов.

Отметим, что в 1986 г. В.С. Монахов и А.Н. Скиба перешли на постоянную работу на кафедру алгебры и геометрии из Института математики АН БССР. В период с 1974 по 1985 гг. В.С. Монахов работал в университете по совместительству и в этот период возглавлял в Гомельском отделении Института математики филиал кафедры алгебры и геометрии ГГУ. В 80-е годы на кафедре появились перспективные аспиранты В.Н. Семенчук, Н.Т. Воробьев, С.Ф. Каморников, А.Ф. Васильев, А.В. Сидоров, А.Д. Ходалевич, К.О. Ергалиева, Е.А. Таргонский, А.В. Бузланов, защитившие в дальнейшем кандидатские диссертации, а В.Н. Семенчук, Н.Т. Воробьев, С.Ф. Каморников и А.Ф. Васильев стали докторами физико-математических наук.

В этот период в университете активно работал Гомельский алгебраический семинар, на котором обсуждались работы участников и новые статьи зарубежных алгебраистов. Благодаря этому постепенно выкристаллизовались основные направления исследований в теории классов конечных групп:

(1) Развитие функциональных методов (локальных и композиционных функций) построения формаций и классов Фиттинга;

(2) Исследование свойств алгебры (решеток, полугрупп) классов (формаций, классов Фиттинга) конечных групп;

(3) Проблема распознавания (проблема различимости и перечисления) конечных групп и их классов по заданным свойствам.

Первому направлению много внимания уделял Л.А. Шеметков на протяжении всей своей научной деятельности. Программой для этого направления стала фундаментальная статья А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова «Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп» [25], опубликованная в журнале «Математические труды» в 1999 г. Значение этой работы подчеркивает более 230 цитирований по данным Google Scholar на 31.08.2025 и первое место среди 40 самых цитируемых статей журнала «Математические труды».

Второе направление берет начало в теории многообразий. Оно состоит в алгебраизации системы исследуемых классов (формаций, классов Фиттинга) групп, что позволяет использовать при изучении классов групп методы общей алгебры, в частности, теоремы о полугруппах и решётках. Результаты этого подхода отражены в монографии А.Н. Скибы [26]. По этому направлению было защищено 3 докторские (В.Г. Сафонов (2008), В.М. Селькин (2012), Н.Н. Воробьев (2013)) и более 15 кандидатских диссертаций. Наиболее яркими полученными результатами в этом направлении стали решения В.Г. Сафонова следующих проблем: А.И. Мальцева о коммутативных полугруппах totally насыщенных формаций, Л.А. Шеметкова, А.Н. Скибы и Го Вэньбиня о дистрибутивности и Б.И. Плоткина об алгебраичности решетки totally насыщенных формаций.

Третье направление состоит в выделении и конструктивном описании различных формаций конечных групп, важных для приложений. В основу таких исследований обычно кладутся известные теоретико-групповые результаты, связанные с классической формацией конечных групп (например, формацией всех нильпотентных групп, всех сверхразрешимых групп и др.), с последующим описанием всех формаций, приводящих к данному результату. Общая программа такого подхода, а также постановка целого ряда конкретных задач, связанного с ним, были предложены Л.А. Шеметковым в пленарном докладе «Новые идеи и результаты теории формаций», прочитанном на X Всесоюзном симпозиуме по теории групп, который проходил в 1986 году в городе Гомеле. В 1991 году эта программа, расширенная и дополненная списком нерешенных проблем, освещалась Л.А. Шеметковым в лекциях в качестве приглашенного докладчика в университете Уорика города Ковентри (Англия) и была опубликована в [27], [28]. Целый ряд проблем, поставленных Л.А. Шеметковым в данном направлении, например, проблемы 9.74 и 9.75 из Коуровской тетради [29], проблемы 10.13, 10.21–10.22 из [27], привлек внимание специалистов из

разных стран и активно исследовался в течение последних тридцати лет в работах многих авторов.

Одним из итогов рассмотрения этих проблем явилось выделение семейств формаций нильпотентного типа: формаций Шеметкова, решеточных формаций, формаций с условием Кегеля, сверхрадикальных, гиперрадикальных и др. Особо отметим решение проблемы Кегеля – Шеметкова об описании решеточных формаций в работе А.Ф. Васильева, С.Ф. Каморникова и В.Н. Семенчука [30] и, независимо, в классе разрешимых групп в работе А. Баллестера-Болиншеса, К. Дерка, Д.М. Перес-Рамос [31]. Полученные результаты отражены в монографии [32].

Обладея тонким стратегическим мышлением Л.А. Шеметков начинает формировать докторский корпус своей научной школы, нацеливая своих учеников на разработку крупных проектов, решение сложных актуальных задач.

Примером реализации такого проекта стала его совместная со А.Н. Скибой монография «Формации алгебраических систем» [33], в которой была построена теория формаций алгебраических систем. Результаты из этой монографии нашли применение в исследовании формальных языков.

Особое место в научных исследованиях Гомельской алгебраической научной школы занимает развитие теории подгрупповых функторов А.Н. Скибой [26], С.Ф. Каморниковым и М.В. Селькиным [34], нашедшей применение для решения целого ряда проблем при подготовке докторских и кандидатских диссертаций.

Л.А. Шеметков умер 24 марта 2013 г. В 2014 г. в день его рождения на здании университета (корпус № 2, ул. Кирова, 119) установлена мемориальная доска.

Итогом целенаправленной деятельности Л.А. Шеметкова стало появление в Гомельской алгебраической школе целой плеяды активно работающих докторов физ.-мат. наук, подготовленных под его руководством: А.Н. Скиба (1993), С.Ф. Каморников (1995), В.С. Монахов (1997), Н.Т. Воробьев (1998), М.В. Селькин (1998), В.Н. Тютянов (2002), Го Вэньбинь (2002), А.Ф. Васильев (2007), А.М. Гальмак (2011). Своих докторов наук подготовили А.Н. Скиба: В.Г. Сафонов (2008), В.М. Селькин (2012), Н.Н. Воробьев (2013) и В.С. Монахов: А.А. Трофимук (2022). Свои научно-педагогические школы мирового уровня создали А.Н. Скиба, В.С. Монахов, Н.Т. Воробьев и Го Вэньбинь.

4 Открытие и работа совета по защите диссертаций Д 02.12.01 в Гомельском государственном университете

В период с 1953 г. по 1995 г. защиты диссертаций участниками Гомельской алгебраической школы осуществлялись в различных научных центрах СССР (Математический институт

имени В.А. Стеклова, Москва; Московский государственный педагогический институт имени В.И. Ленина; Уральский университет, Свердловск; Институт математики Академии наук Украины, Киев; Новосибирский университет; Институт математики АН БССР, Минск). В этот период успешно защитили кандидатские диссертации 56 представителей Гомельской алгебраической школы под научным руководством С.А. Чунихина (24 диссертации), Л.А. Шеметкова (22), С.А. Русакова (4), В.С. Монахова (2), А.В. Романовского (2) и В.И. Сергеев (2). Первая докторская диссертация в Гомельской алгебраической школе была защищена в 1969 году в Киеве, в Институте математики Академии наук Украины Л.А. Шеметковым на тему «К теории конечных групп». Всего в период с 1953 г. по 1995 г. было защищено 7 докторских диссертаций, из них 5 по алгебре и 2 кандидатами физ.-мат. наук по педагогике. Первая докторская диссертация в научной школе Л.А. Шеметкова была защищена в 1993 году в Минске, в Институте математики БССР А.Н. Скибой на тему «Локальные формации с заданными внутренними свойствами». Таким образом, были созданы предпосылки для открытия совета по защите диссертаций при Гомельском государственном университете.

Совет по защите диссертаций Д 02.12.01 утвержден в Гомельском государственном университете им. Ф. Скорины приказом Председателя Государственного Высшего аттестационного комитета Республики Беларусь от 24 января 1995 г., № 2. Сроки полномочий Совета продлевались приказами ВАК Республики Беларусь, № 3 от 22 февраля 2000 г.; № 63-с от 5 мая 2005 г.; № 72-с от 2 июня 2010 г.; №170 от 16 июля 2015 г. и № 158 от 08 июля 2020 г. Срок полномочий нынешнего совета с 10 октября 2023 г. по 15 октября 2026 г.

За весь период работы в совете было успешно защищено 90 кандидатских и 13 докторских диссертаций, четырнадцатая докторская диссертация, защищенная 23 мая 2025 г. И.Н. Сафоновой (научный консультант – профессор А.Н. Скиба), находится на рассмотрении ВАК РБ. Три диссертации: докторская Н.Н. Воробьева (2013 г., научный консультант – профессор А.Н. Скиба), кандидатские В.А. Васильева (2017 г., научный руководитель – профессор А.Н. Скиба) и В.И. Мурашко (2021 г., научный руководитель – профессор А.Ф. Васильев) – были признаны ВАК РБ лучшими в номинации «Естественные науки». Все 103 защищенные в Совете диссертации выполнены на высоком научном уровне и могут служить основой для дальнейших исследований по теории групп и их формаций в алгебраических школах Минска, Гомеля, Бреста, Витебска, Могилева, Брянска, Екатеринбурга, Новосибирска,

Красноярска, Тюмени, Киева, Днепра, в алгебраических центрах Китая, Германии, Испании, Италии, Австралии, Польши, Англии, Египта, ЮАР и др.

5 Современный этап развития алгебраических исследований в Гомельском университете

В настоящее время научными лидерами Гомельской алгебраической школы в ГГУ им. Ф. Скорины являются профессора кафедры алгебры и геометрии А.Н. Скиба и В.С. Монахов. В научной школе А.Н. Скибы подготовлено 33 кандидата и 4 доктора наук из них: под руководством профессора А.Н. Скиба – 29 к.ф.-м.н. и 4 д.ф.-м.н.; под руководством учеников А.Н. Скибы: профессором В.Г. Сафоновым – 2 к.ф.-м.н.; профессором Н.Н. Воробьевым – 2 к.ф.-м.н. Созданы новые научные направления: «Алгебра классов групп», «Перестановочность подгрупп», «Теория σ -свойств групп с условиями конечности».

Последнее направление является глубоким развитием теории π -свойств Чунихина, систематическое развитие которого было начато в 2015 г. в работе А.Н. Скибы [35]. Отметим, что классический подход С.А. Чунихина связан с анализом строения групп относительно разбиения $\pi \cup \pi' = \mathbb{P}$ множества всех простых чисел.

Однако разработанные методы, связанные с этим разбиением, оказались неприменимыми к решению целого ряда открытых проблем теории групп. Потребовались разработка новых методов относительно более общего разбиения $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ множества всех простых чисел $\mathbb{P}$ и изучения связанных с ним σ -свойств групп. В работе [35] была предложена общая концепция σ -свойств групп относительно произвольного разбиения σ множества всех простых чисел, введены исходные понятия теории σ -свойств групп: σ -примарной, σ -нильпотентной, σ -разрешимой группы, σ -субнормальной, σ -перестановочной подгруппы, заложена методика построения σ -теорем.

Идеи и техника работы [35] стремительно развивались в последние 10 лет, получили дальнейшее развитие и приложения в более чем 380 публикациях многих белорусских и зарубежных математиков из более чем 15 стран. В 2025 году по данной тематике защитила докторскую диссертацию И.Н. Сафонова, ученица А.Н. Скибы.

В научно-педагогической школе В.С. Монахова защищено 20 кандидатских диссертаций и две докторские (одна по алгебре и одна кандидатом физ.-мат. наук В.И. Горбачевым по педагогике). Из них под руководством В.С. Монахова – 19 к.ф.-м.н. и 1 д.ф.-м.н.; под руководством Т.И. Васильевой – 1 к.ф.-м.н. Созданы научные направления: «Инварианты конечных групп», «Факторизации непростых групп». В рамках этих направлений докторант В.С. Монахова,

ныне заведующий кафедрой фундаментальной математики Брестского госуниверситета имени А.С. Пушкина А.А. Трофимук, выпустил две монографии [36], [37], которые стали основой его докторской диссертации, успешно защищенной в 2022 г. в Институте математики НАН Беларуси. В 2006 г. в издательстве «Вышэйшая школа», Минск, с грифом Минобразования вышла книга В.С. Монахова «Введение в теорию конечных групп и их классов» [38]. Она вместе с практическим пособием В.С. Монахова и Д.А. Ходановича «Теория групп: практическое пособие» [39] составляют единый учебно-методический комплекс по теории групп, используемый в рамках специализации «Алгебра и теория чисел».

Ряд выходцев научно педагогических школ А.Н. Скибы и В.С. Монахова, выпускники Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины в настоящее время успешно занимаются административной и научно-организаторской работой. Ученики А.Н. Скибы: профессор, доктор физ.-мат. наук В.Г. Сафонов является директором Института математики НАН Беларуси; кандидат физ.-мат. наук Т.Р. Якубович (Вишневская) – председатель Белорусского профессионального союза работников образования и науки. Ученики В.С. Монахова: кандидат физ.-мат. наук Д.А. Ходанович работает в ГГУ им. Ф. Скорины в должности проректора по идеологической и воспитательной работе; кандидат физ.-мат. наук О.А. Шпырко возглавляет Филиал Московского государственного университета в г. Севастополе; кандидат физ.-мат. наук В.В. Подгорная работает заместителем директора Института механики металлополимерных систем имени В.А. Белого НАН Беларуси.

В научной группе заведующего кафедрой алгебры и геометрии профессора А.Ф. Васильева под его руководством защищено 3 кандидатские диссертации в рамках направления «Распознавание конечных групп и их классов». В 2019 г. А.Ф. Васильев и его ученик В.И. Мурашко в работе [40] открыли новое перспективное направление изучения арифметических графов и их применений при решении теоретико-групповых проблем. В.И. Мурашко в 2024 г. в работе [41] и последующей серии из трех работ заложил основы вычислительной теории классов конечных групп.

Профессор кафедры финансов и кредита ГГУ имени Франциска Скорины С.Ф. Каморников является рекордсменом в Гомельской алгебраической школе по числу решенных трудных проблем по теории групп, в том числе из Коровской тетради [29]. Он активно проводит научные исследования по теории групп совместно с испанскими, российскими и китайскими математиками, публикует статьи в высокорейтинговых научных журналах.

Активно работает над докторской диссертацией начальник НИС университета кандидат физ.-мат. наук, доцент Р.В. Бородич. За последние 5 лет алгебраистами Гомельского госуниверситета было опубликовано более 140 научных статей в журналах, индексируемых в Scopus и/или WOS.

Семь представителей Гомельской алгебраической школы (С.А. Чунихин, Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба, В.С. Монахов, Н.Т. Воробьев М.В. Селькин, С.А. Русаков) вошли в список «Выдающиеся математики Беларуси». <https://obm.bsu.by/>.

ЛИТЕРАТУРА

1. Артамонов, В.А. Группы и их приложения в физике, химии, кристаллографии: учебное пособие для студентов вузов / В.А. Артамонов, Ю.Л. Словохотов. – Москва: Издательский центр «Академия», 2005. – 512 с.
2. Романьков, В.А. Алгебраическая криптография: монография / В.А. Романьков. – Омск: Изд-во Омского гос. ун-та, 2020. – 262 с.
3. *Applications of Group Theory in Cryptography: Post-quantum Group-based Cryptography* / D. Kahrobaei, R. Flores, M. Noce, M.E. Habeeb, C. Battarbee. – Providence, Rhode Island: American Mathematical Society. Series: Mathematical surveys and monographs. – 2024. – Vol. 278. – 142 p.
4. Antoneli, F. Symmetry breaking in the genetic code: Finite groups / F. Antoneli, M. Forger // *Mathematical and Computer Modelling*. – 2011. – Vol. 53, № 7–8. – P. 1469–1488.
5. Ballester-Bolinches, A. Languages associated with saturated formations of groups / A. Ballester-Bolinches, Jean-Éric Pin, Xaro Soler-Escrivà // *Forum Math.* – 2015. – Vol. 27, № 3. – P. 1471–1505.
6. Kondor, R. Group theoretical methods in machine learning. / R. Kondor. – Ph.D. – thesis, Columbia University. – 2008.
7. *On Yang-Baxter groups* / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, P. Jiménez-Seral, V. Pérez-Calabuig // *Quaest. Math.* – 2023. – Vol. 46, № 7. – P. 1273–1281.
8. Гриншпон, С.Я. Заметки об истории кафедры алгебры Томского государственного университета / С.Я. Гриншпон, П.А. Крылов // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2011. – № 3 (15). – С. 127–138.
9. Крылов, П.А. К 110-летию со дня рождения Сергея Антоновича Чунихина / П.А. Крылов, А.Р. Чехлов // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2015. – № 1 (19). – С. 115–138.
10. Чунихин, С.А. Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Минск: Наука и техника, 1964. – 158 с.

11. Монахов, В.С. Сергей Антонович Чунихин. Библиогр. указ. / В.С. Монахов. – Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1995. – 50 с.

12. Чунихин, С.А. О p -свойствах групп / С.А. Чунихин // *ДАН*. – 1947. – Т. 55, № 6. – С. 481–484.

13. Чунихин, С.А. О P -свойствах конечных групп / С.А. Чунихин // *Математический сборник*. – 1949. – Т. 25 (67), № 3. – С. 321–346.

14. Huppert, B. Endliche Gruppen. I. / B. Huppert. – Berlin: Springer, 1967. – 795 s.

15. Robinson, D. A Course in the Theory of Groups / D. Robinson. – New York: Springer, 1982. – 502 p.

16. Suzuki, M. Group Theory I / M. Suzuki. – Berlin – Heidelberg – New-York: Springer, 1982. – 434 p.

17. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

18. Шмидт, О.Ю. О группах, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // *Математический сборник*. – 1924. – Т. 31, № 3–4. – С. 366–372.

19. Чунихина, И.К. О p -разложимых группах / И.К. Чунихина, С.А. Чунихин // *Математический сборник*. – 1944. – Т. 15 (57), № 2. – С. 325–342.

20. Чунихин, С.А. О комплексах неспециальных подгрупп и p -нильпотентности конечных групп / С.А. Чунихин // *Математический сборник*. – 1963. – Т. 62 (104), № 1. – С. 76–103.

21. Чунихин, С.А. IX Всесоюзный алгебраический коллоквиум / С.А. Чунихин // *УМН*. – 1968. – Т. 23, № 6 (144). – С. 201–205.

22. Gaschütz, W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen / W. Gaschütz // *Math. Z.* – 1963. – Bd. 80, № 4. – S. 300–305.

23. Шеметков, Л.А. Ступенчатые формации групп / Л.А. Шеметков // *Математический сборник*. – 1974. – Т. 94 (136), № 4 (8) – С. 628–648.

24. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978. – 272 с.

25. Скиба, А.Н. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп / А.Н. Скиба, Л.А. Шеметков // *Матем. тр.* – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 114–147.

26. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.

27. Shemetkov, L.A. Some ideas and results in the theory of formations of finite groups / L.A. Shemetkov. – Warwick, 1991. – 44 p. – (Warwick Preprints; № 13).

28. Shemetkov, L.A. Some ideas and results in the theory of formations of finite groups / L.A. Shemetkov // *Вопросы алгебры: межведомств. сб.* – Гомель, 1992. – Вып. 7. – С. 3–38.

29. Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). – Новосибирск, 1992. – 172 с.

30. Васильев, А.Ф. О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // В книге: Бесконечные группы и

примыкающие алгебраические системы. – Киев, 1993. – С. 27–54.

31. *Ballester-Bolinchés, A.* On the lattice of $\mathfrak{F}$ -subnormal subgroups / A. Ballester-Bolinchés, K. Doerk, M.D. Perez-Ramos // *J. Algebra*. – 1992. – Vol. 148. – P. 42–52.

32. *Ballester-Bolinchés, A.* Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinchés, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer, 2006. – 385 p.

33. *Шеметков, Л.А.* Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – Москва: Наука, 1989. – 257 с.

34. *Каморников, С.Ф.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск: Беларуская навука, 2003. – 254 с.

35. *Skiba, A.N.* On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // *J. Algebra*. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

36. *Трофимук, А.А.* Инварианты конечных групп и их связь с арифметическими формационными свойствами структурных объектов / А.А. Трофимук. – Минск: Издательский центр БГУ, 2019. – 302 с.

37. *Трофимук, А.А.* Конечные факторизуемые группы с арифметическими ограничениями на сомножители / А.А. Трофимук. – Минск: Издательский центр БГУ, 2021. – 262 с.

38. *Монахов, В.С.* Введение в теорию групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

39. *Монахов, В.С.* Теория групп: практическое пособие / В.С. Монахов, Д.А. Ходанович. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2014. – 40 с.

40. *Васильев, А.Ф.* Арифметические графы и классы конечных групп / А.Ф. Васильев, В.И. Мурашко // *Сибирский математический журнал*. – 2019. – Т. 60, № 1. – С. 55–73.

41. *Murashka, V.I.* Formations of finite groups in polynomial time: F-residuals and F-subnormality / V.I. Murashka // *J. Symb. Comput.* – 2024. – Vol. 122. – P. 102271.

Поступила в редакцию 19.08.2025.

Информация об авторах

Васильев Александр Федорович – д.ф.-м.н., профессор
Монахов Виктор Степанович – д.ф.-м.н., профессор
Сафонов Василий Григорьевич – д.ф.-м.н., профессор
Скиба Александр Николаевич – д.ф.-м.н., профессор

УДК 539.3:620.22:419.8

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_16
EDN: XQJHGI

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ ИЗДЕЛИЙ И ПОКРЫТИЙ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТОВ МАШИН И ТРИБОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.В. Можаровский*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

MATHEMATICAL MODELS FOR CALCULATING THE STRESS-STRAIN STATE OF COMPOSITE PRODUCTS AND COATINGS FOR MACHINE ELEMENTS AND TRIBOLOGICAL SYSTEMS

V.V. Mozharovsky*Francisk Skorina Gomel State University*

Аннотация. На основании многолетних исследований, проведенных в Гомельском государственном университете имени Франциска Скорины, и совместных разработок с научными учреждениями Беларуси и зарубежными научными центрами сделан обзор литературы по вопросам создания математических моделей и методов расчета напряженно-деформированного состояния трибологических элементов деталей из композиционных материалов.

Ключевые слова: трибология, зубчатые колеса, контактное напряжение, покрытия, зона контакта, функционально-градиентный материал, композит.

Для цитирования: Можаровский, В.В. Математические модели расчета напряженно-деформированного состояния композиционных изделий и покрытий для элементов машин и трибологических систем / В.В. Можаровский // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 16–28. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_16. – EDN: XQJHGI

Abstract. Based on many years of research conducted at Francisk Skorina Gomel State University and joint developments with scientific institutions in Belarus and foreign scientific centers, a review of literature on the creation of mathematical models and methods for calculating the stress-strain state of tribological elements of parts made of composite materials has been made.

Keywords: tribology, gears, contact stress, coatings, contact area, functionally graded material, composite.

For citation: Mozharovsky, V.V. Mathematical models for calculating the stress-strain state of composite products and coatings for machine elements and tribological systems / V.V. Mozharovsky // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 3 (64). – P. 16–28. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_16 (in Russian). – EDN: XQJHGI

Введение

На основании многолетних исследований, проведенных в Гомельском государственном университете имени Франциска Скорины, и совместных разработок с ведущими научными учреждениями Беларуси, России, Украины, Армении, Польши и другими научными центрами по вопросам создания математических моделей и методов расчета напряженно-деформированного состояния трибологических элементов деталей из композиционных материалов для статических и динамических задач, механики неоднородных структур строятся теории и алгоритмы инженерного расчета, новые методики решения задач взаимодействия слоистых систем из композитов, созданы современные инженерные методики расчета слоистых систем с учетом анизотропных физико-механических характеристик материалов, что позволяет эффективно применять новые

инженерные подходы в машиностроении для расчета конструкций, подвергающихся силовым нагрузкам [1]–[20]. Предыстория исследований по данному направлению начинается с 70-х годов 20 столетия в Институте механики металло-полимерных систем АН БССР, когда под руководством академика В.А. Белого интенсивно получило развитие новой научно-технической тематики об использовании полимеров в инженерной практике и в народном хозяйстве.

Первые научные работы были посвящены разработке новых методик расчета деформации и прочности зубьев зубчатых колес из полимерных материалов на базе решения контактных задач теории упругости, экспериментальным исследованиям, созданию алгоритмов и программ расчета. Интенсивное внедрение в инженерную практику новых композиционных материалов требовало создания новых методов расчета

деталей машин, базирующихся на теории упругости и вязко-упругости. Этим вопросам посвящены многочисленные статьи и монографии в ИММС АН БССР, например [20], а также с точки зрения механики деформируемого тела, был представлен расчет напряженного состояния покрытий из композитов на Всесоюзной научной конференции по контактным задачам (Тбилиси, 1974 г. [21]). Развитие фундаментальных исследований в области контактного взаимодействия трибологических элементов деталей машин продолжилось с защитой кандидатской и докторской диссертаций В.В. Можаровским и кандидатских диссертаций его учениками С.В. Шилько [22], Н.А. Рогачевой [23], Е.М. Березовской [24], С.А. Марьиным [25]. Так, В.В. Можаровский и его ученики, работая над созданием методов расчета на прочность зубчатых колес, опор трения и других деталей из композиционных материалов (КМ), столкнулись с тем, что отсутствуют глубокие аналитические разработки исследований напряженно-деформируемого состояния покрытий из КМ. Поэтому руководитель и сотрудники стали заниматься проблемой о создании научных основ напряженно-деформированного состояния анизотропных покрытий упругих тел трибосопряжений. Решению данной проблемы были посвящены многочисленные статьи, выступления на зарубежных симпозиумах и конференциях, монография «Прикладная механика слоистых тел из композитов» [1], а также кандидатские диссертации. Для успешного решения данной проблемы и выполнения заданий по госпрограммам фундаментальных исследований в области естественных наук по программам «Поверхность», «Материалы», «Механика», «Триботехника», «Машиностроение» и др., и хоздоговоров в ГГУ имени Франциска Скорины была создана научно-исследовательская лаборатория «Математическое моделирование сложных систем».

В итоге многолетней деятельности были получены новые научные результаты, основная сущность которых заключается в разработке точных и асимптотических методов решения контактных задач для тел с покрытиями с учетом анизотропии и трения [1]; на основании аналитических и численных решений выявлены новые механические эффекты при контактном взаимодействии тел трибосопряжений с анизотропными покрытиями, обусловленные явлением анизотропии материалов, упругими свойствами оснований, усложненными условиями на взаимодействующих поверхностях (трение, скольжение, сцепление и т. д.); построены алгоритмы и программы, по которым исследовано влияние на параметры контакта анизотропии механических свойств волокнистых композитов, жесткости основания, толщины покрытия, вязкоупругости и трения [2], [5], [8], [11], [17]. Разработаны теоретические зависимости для определения

компонент тензоров напряжений и деформаций с целью исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) анизотропных покрытий и оснований [1], [4].

Применение в мировой практике высокоскоростного и надежного промышленного транспорта с массивными шинами (автомобильные, электропоезда, подвесные канатные дороги, эскалаторы метро и др.), а также новых способов передачи движений требует создания новых армирующих материалов и инженерных методик расчета. Недостаточно изучено влияние конструктивной анизотропии на напряженно-деформированное состояние дорожного покрытия при силовом квазистатическом воздействии, что не позволяет обосновать практику их проектирования; не существует сравнимых по эффективности методов расчета поведения конструкций из композитов при контакте. Возникает необходимость создавать новые методики расчета элементов деталей машин из композитов. В связи с этим разрабатываются математические модели и компьютерные программы расчета напряжений при статическом контакте индентора в тело (или покрытие) из композита при различных физических параметрах взаимодействия. Особенно важно исследовать механические свойства армированных материалов, работающих в процессе:

- статического контактного взаимодействия цилиндрического тела (моделирующие шину) и слоистого основания;
- зависимость напряженного состояния упругих тел из композитов (при статическом контакте) от типа ориентации волокон материала, например, армированного кордом.

Анализ применения анизотропных композиционных материалов нельзя производить без учета их взаимодействия с другими телами сопряжения, а также материала матрицы и армирующих элементов, геометрии компонентов и структуры и расположению компонентов. По сути, важно учитывать также и метод изготовления материала, что является весьма сложной и многопараметрической задачей. Следовательно, возникает цель новых перспективных исследований – создание математических моделей и алгоритмов расчета напряженно-деформированного состояния слоистых систем при силовом статическом воздействии, например, для зубчатых передач для элементов машиностроительных конструкций. Ниже представлен обзор теоретических исследований и подходов, которые создавались в ГГУ им. Ф. Скорины и зарубежными научными центрами для создания алгоритмов расчета трибологических параметров, включая покрытия из композитов, с учетом анизотропии материалов.

1 Существующие подходы расчета напряженно-деформированного состояния композиционных изделий и покрытий для элементов машин и трибологических систем

В настоящее время имеется достаточно большой опыт эксплуатации деталей сопряжения (подшипников скольжения, опор трения, зубчатых колес и т. д.) из композиционных материалов на основе вязкоупругих тканей, стеклянных волокон и других армирующих наполнителей. Однако возрастающие потребности современной инженерной практики требуют создания аналитических и численных методов расчета этих узлов.

Из анализа научно-технической литературы можно сделать вывод о возрастающем интересе к проблеме использования волокнистых композиционных материалов в узлах трения.

На этапе исследований (80–90 гг.) появилась серия работ [26]–[29], в которых не только исследовалось влияние взаимной ориентации армирующих волокон и направления скольжения, но и степени адгезии волокон к матрице, объема и типа наполнителя, показаны механизмы изнашивания. Так, в работе [30] представлены результаты экспериментального исследования триботехнических характеристик полиэфирнитрита, армированного волокнами углерода (стекла). Проводились испытания на изнашивание о стальной цилиндр при различном направлении скольжения.

Влияние содержания углеродного волокна на триботехнические свойства углепластиков на основе полиамидов изучалось в работе [31]. Влияние на трение и изнашивание волокнистого композита типа контртела и направления его скольжения относительно волокон рассматривалось в работе [32]. В качестве контртела использовались металлические образцы и абразивная бумага. Установлено, что при трении композита о гладкую поверхность металла наименьшее трение и износ наблюдаются при скольжении поперек волокон в их плоскости, тогда как для абразивной бумаги при таком направлении скольжения износ наибольший.

Особую важность приобрели композиционные материалы (КМ) с металлической матрицей [33], т. к. значительно превосходят по своим свойствам конструкционные материалы и сплавы. Несмотря на то, что проведены обширные исследования механических свойств композитов с металлической матрицей (модули упругости, предел текучести, усталости, ползучесть), в то же время их триботехнические свойства изучены недостаточно. Результаты исследований усиленного волокнами композита с металлической матрицей [34], показали, что содержание волокон и их ориентация являются важным фактором, поскольку анизотропия усиливающих волокон влияет на анизотропию изнашивания [35]. Теоретические аспекты контактного взаимодействия

материалов затронуты в работе [36]. Рассмотрены три фазы взаимодействия: упругая, упруго-пластическая и пластическая.

1.1 Модели контактного взаимодействия волокнистых материалов в трибосистемах

Прежде чем сделать расчет узлов трения из гетерогенных волокнистых материалов, необходимо выбрать оптимальные модели расчета, разработать схему решений. Изучение упругого поведения композита сводится к определению модулей упругости упрочняющих элементов (волокон) и матрицы с учетом ориентации волокон матрицы. Строгое определение упругих характеристик композита является довольно сложной задачей.

Приведенный обзор исследований в области контактного взаимодействия в узлах трения из волокнистых композиционных материалов показывает необходимость создания новых математических моделей, учитывающих расположение волокон в матрице в контактирующих композитных телах и их влияние на коэффициент трения.

Для определения трибохарактеристик волокнистых КМ применяется теория как изотропного и трансверсально-изотропного, так и ортотропного тела. Первыми известными работами в области трансверсально-изотропного расчета упругого тела можно считать [37], [38].

1.2 Математическая модель контактного взаимодействия шарового индентора с трансверсально-изотропным слоем

Решение плоских контактных задач для анизотропных покрытий представлено, например, в [1], [15], [16], [37]–[39]. Существенно продвинуты исследования в области асимптотических методов расчета слоистых систем применительно к контактному взаимодействию в статьях и трудах И.И. Аргатова, например [36], но, в то же время, процесс реализации задачи на ЭВМ в инженерных расчетах с заданной точностью является актуальной задачей. В ГГУ им. Ф. Скорины рассмотрены задачи исследований об определении параметров контакта для покрытий из композита при вдавливании упругого шарового и цилиндрического инденторов. На основании аналитических зависимостей в ранее представленных статьях [40], [41], разработан алгоритм и создана программа, реализующая определение параметров контакта для покрытия из композита. Программа позволяет рассчитать ширину зоны контакта, глубину вдавливания, приближение для P , давление $P(r)$ и выводит результаты в табличном и графическом виде.

1.3 Анализ научно-технической литературы по исследованию покрытий в материаловедении и в технике

На современном этапе развития машиностроения актуальными задачами являются создание

новых термостабильных износостойких слоев с градиентной структурой на основе нитридов железа и хрома, а также современная разработка и создание новых математических моделей расчета напряженного состояния и температуры в покрытиях и основаниях. Следует отметить, что актуальной научной и практической задачей современного материаловедения является применение новых методик для повышения твердости поверхностного слоя при нанесении простых нитридов, изучение упругих, прочностных свойств и твердости тонких ионно-плазменных покрытий. В современных исследованиях [42], [43] представлен анализ методик конечных элементов (МКЭ), проведены опыты определения напряжений и деформаций в модельных образцах в условиях контактного давления и теплового состояния. На рисунке 1.1 представлена картина распределения напряжений по критерию Губера – Мизеса в покрытии без учета касательных усилий, возникающих при учете трения в контакте. Ключевой задачей для разработки и создания математической модели расчета напряжений и температур в упругих покрытиях является определение их модулей упругости и решения проблемы упругости тонких покрытий.

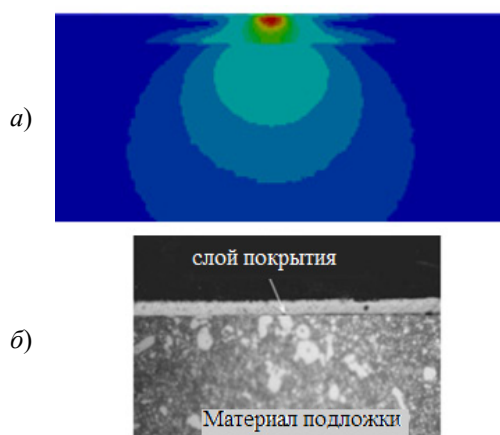


Рисунок 1.1 – Распределение напряжений в покрытии и основании по расчету МКЭ модель Губер – Мизеса [43], а);
б) – физическая модель для расчета параметров контакта в слоистом теле [45]

В работе [44] приводятся формулы для определения модуля Юнга E для пленок CrN. При этом важной задачей является корреляция между значениями модулей упругости и значениями твердости покрытий. Исследования о моделировании основных механических свойств в покрытиях из TiCN, TiAlN, CrN модулей упругости, твердости, износа и усталости при контакте представлены в работе [45]. Следует отметить, что в БНТУ проводятся исследования об упрочняющих покрытиях из предварительно модефицированной поверхности применительно

к эксплуатации элементов деталей машин. В [46] показано, как влияет модификация поверхности на механические свойства системы «подложка – покрытие» и почему изменяется износостойкость и микроведость. А также проведены исследования о трибологических характеристиках изделий, которые взаимосвязаны со структурой покрытий и их механическими свойствами. Анализ литературных источников показывает, что теоретически проблема математического моделирования расчета напряженного состояния и температуры в покрытиях и основаниях недостаточно изучена, создается необходимость теоретического описания и создания алгоритма расчета таких систем с позиций механики деформируемого твердого тела.

Анализ литературы по расчету температуры для покрытия. В результате контакта индентора и покрытия в процессе движения происходит нагрев покрытия и основания, а количество создаваемого тепла определяется деформационными свойствами материала покрытия, температурой окружающей среды, скоростью деформации и т. д. Вопрос состоит в создании математической модели, описывающей температуру и напряженное состояние системы «покрытие – основание». Так, в работе [47] разработан математический аппарат решения задач теории термоупругости на основе комплексных потенциалов Колосова – Мусхелишвили. Возможно также применение интегральных преобразований для решения краевых задач теории термоупругости [48]. Суть метода заключается в том, что находим решение граничной задачи для ортотропной полуплоскости, т. е. распределение температур $T(x,y)$ в полупространстве удовлетворяет стационарному уравнению теплопроводности (здесь применяется решение для покрытия с неоднородной структурой). Выведено решение для $T(x,y)$. Аналогично решаем граничную задачу для покрытия, моделируя его как полосу [47], так для изотропной полосы имеем

$$T(x, y) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(\alpha y) T(\alpha)}{k \operatorname{ch}(\alpha h)} \cos(\alpha x) d\alpha.$$

Для определения компонент тензора напряжений строим функцию Грина, а затем решаем задачу термоупругости по определенному алгоритму, добавляя составляющие компоненты от температуры, а силовые нагружения на границе заменяем на дискретные постоянные температурные. Для более широкого применения данной теории считается, что рассматриваемое тело ортотропное (изотропность получаем как частный случай при равенстве упругих направлений, модулей упругости). Пусть ортотропное тело занимает область ($y < 0$), ограниченную прямой L ($y = 0$). Найдем напряженное состояние в случае, когда температура T на контуре L задана кусочно-постоянной функцией. Напряжения

$\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ всюду на контуре L ; $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ – на бесконечности. Решение этой задачи через комплексные постоянные представлено в работе [47]; комплексный потенциал температурного поля определяется функцией

$$\Psi_0(\xi) = \frac{T_0}{2\pi i} \ln \frac{\xi + a}{\xi - a},$$

и также находим компоненты напряжений. Некоторые теоретические результаты для расчета распределения температуры как в покрытии, так и в основании представлены в работе [49]. На основании этой работы возникает возможность создания нового алгоритма и программы расчета распределения температуры в покрытиях при контактом взаимодействии. Например, если использовать обзоры и подходы, представленные в работах [47]–[51], то можно изучить вопрос о влиянии коэффициента трения на распределение температуры для функционально-градиентного материала.

Анализ литературы по расчету напряженного состояния в покрытии. Изменения напряженного состояния в покрытии и влияния упругих свойств основания на параметры контакта был разработан, например, в [52]. На рисунке 1.2. показана реализация расчета при статическом контакте цилиндрического индентора с ортотропным покрытием на упругом изотропном основании. На основании разработанной теории расчета покрытий из композитов построена методика определения параметров контакта.

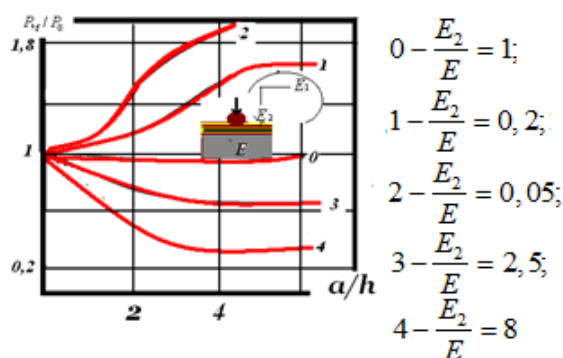


Рисунок 1. 2 – Зависимость относительного давления P_M / P_0 от a / h цилиндрического штампа в ортотропное покрытие для различных отношений упругих постоянных покрытия и основания E_i / E [52]

В последнее время предложен ряд математических и физических моделей для расчета покрытий [50]. Так, в [50], [53] предложена физикоматематическая модель, описывающая деформирование и разрушение функционально-градиентных материалов. Математическая модель контакта между цилиндром и функционально-градиентным полупространством представлена Giannakopoulos и Pallot в [54], подложки в

покрытиях были изучены Гюлер и Эрдоган [55], [56]. Фундаментальные исследования в качестве основы механики для контакта градиентных материалов для осесимметричных моделей функционально-градиентных полупространств под действием сосредоточенной силы или осесимметричных инденторов были рассмотрены Giannakopoulos и Суреш [57]. Обширный перечень публикаций последних десятилетий, связанный с решением граничных и контактных задач для слоистых неоднородных тел анизотропной структуры от теоретических исследований до практических реализаций и экспериментов в различных областях теории упругости, приведен в диссертации Е.М. Березовской. Решению контактной задачи с учетом трения в области контакта посвящены работы И.А. Солдатенкова [58], [59]. В.В. Васильев и С.А. Лурье [60] рассмотрели контактную задачу теории упругости для прямоугольной ортотропной полосы. Методом разделения переменных решение задачи сводится к проблеме разложения заданных граничных функций на противоположных краях полосы в ряды по обобщенным собственным функциям. Используя алгебру псевдодифференциальных операторов, находят явные выражения для коэффициентов искомых разложений. Контактная задача для неоднородного (слоистого или функционально градиентного) упругого полупространства рассмотрена С.М. Айзикович [61] и С.А. Чижиком [62]. В работах [63], [64] исследованы задачи по определению напряженно-деформированного состояния (НДС) слоистой системы изотропная полоса – ортотропное основание. Решена контактная задача о взаимодействии волокнистого композиционного материала с однородным покрытием и цилиндрическим индентором. В работе [65] исследуется температурное поле покрытия из градиентных материалов в случае движения индентора по поверхности. Используя известные теоретические подходы, составлен алгоритм расчета изменения температуры в покрытии для различных температурных параметров, построены графические зависимости, например, изменения теплопроводности в зависимости от глубины. В конечном итоге задача определения температуры сводится к численному решению интегралов, полученных из преобразования Фурье. Классические методики расчета напряженного состояния слоистых тел представлены в работах [66], [67]. В основу этих работ положен сложный математический подход, который усложняет процедуру алгоритмизации с целью получения достаточно приемлемых инженерных расчетов.

Обзор литературных источников показал, что, исходя из поставленных целей исследования, имеется возможность успешно решить поставленные задачи: разработать основные теоретические положения об определении температу-

ры и напряжений в слоистых телах при трении; создать алгоритм расчета примеров определения напряжений и температуры в покрытиях; исследовать влияние толщин покрытий и его физических параметров на напряженное и деформированное состояние в покрытиях.

Рассмотрим краткую характеристику исследований и полученных результатов, касающихся решения проблемы определения напряженного состояния взаимодействующих упругих слоистых тел и возникающих в этой связи инженерных задач применительно к расчету деталей машин из композитов.

2 Создания методик расчета контактного взаимодействия и износа зубьев зубчатых колес из изотропного и композиционного материала

В применяемой практике машиностроения одной из актуальных задач является создание и использование материалов, которые отличались бы своей износостойкостью и долговечностью, что значительно влияет на экономическую составляющую изготовления и эксплуатацию деталей элементов конструкций. Это, в свою очередь, требует разработки более детального подхода к новым алгоритмам расчета, базирующегося на современном программном обеспечении, которое позволит выбрать оптимальные свойства композиционных материалов.

В работах [3], [6], [7] рассмотрена реализация алгоритма и методики расчета износа зубьев зубчатого колеса из волокнистого композиционного материала. Теоретической основой реализации поставленной задачи является решение задач о контактом взаимодействии ортотропных цилиндров, которые моделируют контакт зубьев зубчатых колес [1]–[5]. Следует отметить, что расчет параметров контакта (зон контакта, напряжений, износа и т. д.) применительно к работе таких передач, как зубчатые колеса из композитов, является многопрофильным, включает расчеты, связанные с напряжениями зубьев и трибологическими отказами, такими, как износ. Для автоматизации процесса расчета на износ зубьев, т. е. элементов деталей машин, необходимо создавать современные компьютерные программы, по которым легко прогнозировать и определять ресурс работы такой передачи, делать визуализацию результатов в виде графических зависимостей, таблиц и т. д. В работах [3], [7], [9] была написана программа в среде Delphi, позволяющая строить профиль зубьев зубчатых колес, определять зону контакта взаимодействующих зубьев зубчатых колес, вычислять толщину изношенного слоя, учитывать расположение волокон в матрице на параметры износа.

Рассматривается контактная задача о взаимодействии зубьев зубчатых колес, считая, что их контакт можно моделировать соприжением

двух цилиндров с радиусами R_1 и R_2 , прижатыми друг к другу силой P . Материалы зубчатых колес, работающих в зубчатой передаче, различны: анизотропный (композиционный) и изотропный материал. Схема контакта двух цилиндров из волокнистого композиционного и изотропного материала представлена на рисунке 2.1.

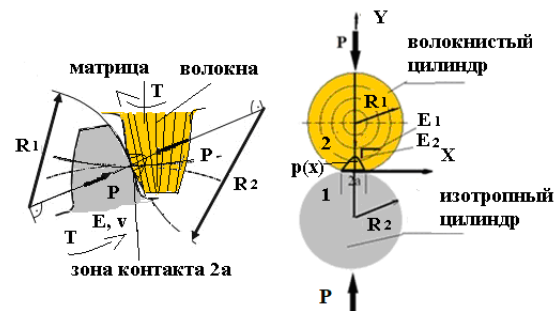


Рисунок 2.1 – Схема контакта зубьев зубчатых колес из композита [5]

Для определения контактного напряжения при взаимодействии ортотропных цилиндров величина зоны контакта (полуширина) a определяется по формуле [1]:

$$a = \sqrt{\frac{2PR_1R_2}{\pi m L(R_1 + R_2)}},$$

где P – сила давления двух цилиндров; L – осевая длина цилиндров (толщина цилиндров); R_1 и R_2 – радиусы двух взаимодействующих цилиндров (мм); параметр

$$m = [((\beta_1 + \beta_2)S_{22})^{(1)} + ((\beta_1 + \beta_2)S_{22})^{(2)}]^{-1},$$

индексы (1) и (2) – характеризуют материалы двух цилиндров, величины $\beta_{1,2}$ для каждого цилиндра вычисляются по формулам [1]

$$\beta_{1,2} = \left(\frac{\sqrt{S_{66} + 2S_{12}} \pm \sqrt{(S_{66} + 2S_{12})^2 - 4S_{11}S_{22}}}{2S_{11}} \right)^{-1},$$

где постоянные S_{ij} при плоской деформации определяются из [1] следующим образом:

$$S_{11} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1}, S_{12} = -\frac{\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{31}}{E_1},$$

$$S_{22} = \frac{1 - \nu_{32}\nu_{23}}{E_2}, S_{66} = \frac{1}{G_{12}},$$

индексы 1, 3 модуля упругости E (МПа), коэффициента Пуассона ν и модуля сдвига G (МПа) характеризуют различные направления. Модули вычисляются по зависимостям по правилу смесей.

Уравнение, описывающее давления $p(x)$ и максимальные контактные напряжения в зоне контакта a , имеет вид [1]:

$$p(x) = m \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \sqrt{a^2 - x^2}, \sigma_c = \frac{2P}{\pi a L}, -a \leq x \leq a.$$

Расчет зубьев на контактную прочность. В работе [17] рассматривается компьютерная реализация методики расчета контактных напряжений и перемещений зубьев зубчатых колес из изотропного и анизотропного (композиционного) материалов, построенная на основе теории Герца [1] и анизотропной теории упругости [2]. Получены инженерные формулы расчета на прочность:

$$\sigma_{np} = Z_H Z_M Z_\xi \sqrt{\frac{u \pm 1}{u} \cdot \frac{W_H}{d_{p1}}} \leq [\sigma_{доп}],$$

где для прямозубых передач $Z_\xi = \sqrt{(4 - \xi)/3}$; коэффициент торцового перекрытия

$$\xi = 1.88 - 3.2 \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right),$$

z_1 и z_2 – количество зубьев шестерни и колеса соответственно; $[\sigma_{доп}]$ – допускаемое контактное напряжение для зубьев (МПа). Обозначения даны в работе [17].

Одним из главных параметров, характеризующих контактное взаимодействие зубьев зубчатых колес, является контактное сближение или перемещение. Если материал зубьев колес обладает свойствами ортотропии, то контактное перемещение v (мм) определяется по зависимости [2]:

$$v = -\frac{P}{\pi} \left\{ S_{22} (\beta_1 + \beta_2) \left[\ln \frac{a}{2q} - \frac{1}{2} \right] + \frac{S_{22}}{\beta_1 - \beta_2} (\beta_1^2 \ln \beta_1 - \beta_2^2 \ln \beta_2) + \frac{S_{12}}{\beta_1 - \beta_2} \ln \frac{\beta_2}{\beta_1} \right\},$$

где q – мера контактного сближения расстояния (мм), равная, например, $20a$.

Данная зависимость легко преобразуется в формулу для определения контактного сближения изотропного цилиндра при $\beta_1 = \beta_2 = 1$ [2], [10].

Сближение двух контактирующих зубьев δ (мм) представляет собой сумму контактных перемещений каждого зуба.

Анализ напряженно-деформированного состояния зубьев с покрытиями в зубчатых колесах из композитов. Целью расчета зубьев зубчатых колес с покрытиями из композитов (с твердой смазкой) является установление допустимых значений контактных напряжений и деформаций для действующей нагрузки и других параметров и их соответствия физико-механическим свойствам выбранных материалов пары контакта «зуб металлического колеса – покрытие из композита» при принятых геометрических соотношениях, обеспечивающих наибольший срок службы и достаточно высокие эксплуатационные свойства, получение наибольшей работоспособности зубчатой передачи.

В последнее время для проектирования зубчатой передачи стали применяться композиционные

материалы на основе различных смол, а также волокнистые армированные материалы. Расчет таких передач при контактном взаимодействии, в основном, построен на изотропных свойствах материала. Но современные волокнистые композиты имеют выраженную анизотропию механических свойств. Эти особенности необходимо учитывать при расчете и конструировании зубчатых колес из композитов.

В работах [12]–[14] строится математическая модель расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) зубьев с покрытиями для зубчатых колес из композитов при их взаимодействии для системы контакта «зуб металлического колеса – покрытие из волокнистого материала на жестком основании» (рисунок 2.2), используя в основе математическую теорию упругости анизотропного тела.

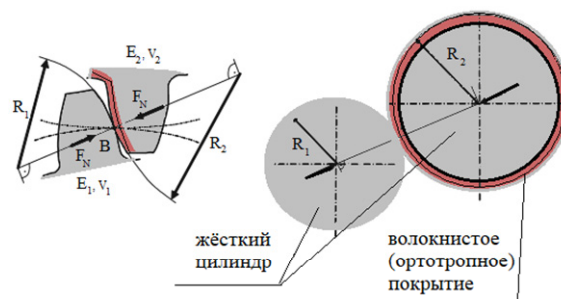


Рисунок 2.2 – Схема, моделирующая контакт зубьев с покрытием

Расчет НДС металлических деталей с покрытиями из композита по схеме «бесконечная упругая полоса, адгезионно связанная с жестким основанием». Контакт зубьев с покрытием моделируется в виде контакта двух цилиндров, один из которых имеет покрытие из композита (рисунок 2.2).

Разработана программа для расчета НДС ортотропной полосы на упругом основании [1], [2]. Из работы следует, что напряжения σ_y практически линейно убывают по глубине, а напряжения σ_x имеют максимальные значения на поверхности при $y = 0$ и на границе раздела с жестким основанием.

Разработан алгоритм и создана программа, реализующая решение задачи об определении напряжений в покрытии из композита зуба зубчатого колеса при контакте с металлическим. Представлена методика расчета напряженно-деформированного состояния упругих тел из композитов, в частности, зубьев зубчатых колес из современных композиционных материалов на основе теории о математических моделях ортотропных и функционально-градиентных материалов (ФГМ) [13]. Построены графики зависимости напряжений по глубине от поверхности

контакта для различных материалов, показано хорошее соответствие для предельного случая – изотропии материала. На рисунке 2.3 показаны линии уровня максимальных касательных напряжений $\tau_{\max} / p_0$ для функционально-градиентного материала с заданным действующим давлением на границе

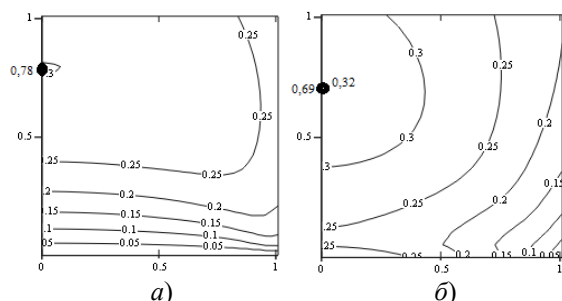


Рисунок 2.3 – Линии уровня максимальных касательных напряжений $\tau_{\max} / p_0$ для ФГМ при $k = 0$ (а); $k = 0,5$ (б) [13]

По приведенным зависимостям и графическим иллюстрациям можно легко определить возникающие максимальные напряжения при контакте жесткого цилиндрического тела с упругой полуплоскостью из вышеуказанных материалов, то есть для ортотропии и ФГМ. Анализ вычисленных напряжений $\tau_{\max} / p_0$ показал, что изменение закона распределения давления, действующего на поверхности полуплоскости из ФГМ, незначительно влияет на окончательный результат, поэтому для оценки возникающих напряжений можно применять более простую зависимость.

Расчет параметры контакта «вал – втулка» для подшипников скольжения из композитов. В процессе исследований [9] создана математическая модель, которая применяется при разработке алгоритма инженерного расчета давления при контактом взаимодействии для системы «вал – втулка» из волокнистого материала расположенного перпендикулярно, параллельно и радиально оси втулки» (рисунок 2.4).

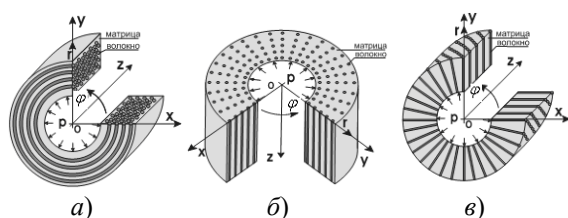


Рисунок 2.4 – Расположение волокон во втулке по отношению к её оси ($\varphi r z$ и $x y z$ – цилиндрическая и декартова системы координат) [9]:

а) перпендикулярно; б) параллельно;
в) радиально

Математические модели расчета контактных параметров для подшипников скольжения из волокнистых композитов. Представлен расчет напряженного состояния ортотропного тела при взаимодействии вала с втулкой композита [9], подверженного воздействию поверхностного давления p , распределенного в соответствии с законом

$$p(x) = p_0 \sqrt{a^2 - x^2}, p_0 = 2P / (L\pi a^2),$$

где R_1 и R_2 – радиусы двух взаимодействующих тел – втулки и цилиндра (мм); P и L – действующее усилие и длина цилиндра, параметр t вычисляется по выше приведенной формуле.

Величина зоны контакта при сопряжении рассматриваемых упругих ортотропных тел определяется по формуле:

$$a = \sqrt{\frac{2PR_1R_2}{\pi mL(R_1 - R_2)}}.$$

Для оценки применимости формул, определяющих параметры контакта для внутреннего взаимодействия изотропного цилиндра с ортотропной втулкой, сделана оценка применимости формул аналогично, как сделано в работе [19].

3 Методы математического программирования и конечных элементов при исследовании качения и зоны контакта автошины с основанием

Для описания и анализа контактных процессов, происходящих при качении автомобильных колес по основанию и механизма изнашивания автошин колес, были рассмотрены задачи о математическом моделировании процесса качения двух ортотропных (из композитов) цилиндров с параллельными осями, прижатых друг к другу с силой P , и их реализация в виде компьютерных программ. Решение данной проблемы позволяет оценить влияния механических и упругих свойств армированной шины колеса. В связи с построением решения данной задачи возникает и другая проблема расчета напряженно-деформированного состояния армированной шины и определения дискретных зон контакта в системе взаимодействия «шина – основание». Разработана теоретико-экспериментальная методика на базе МКЭ и проведения опытов на основе современных технических достижений сканирования зон контакта (например, фотопринт) или сбор сигналов от пьезодатчиков давления и обработка их на компьютере.

Программа, реализующая определение зоны контакта напряжений и перемещений построена на основе МКЭ, в которой используются экспериментальные исследования, например, применяя фотопринт [9], рисунок 3.1. Разработан алгоритм и создана программа, реализующая определение напряжений в контактирующих телах.

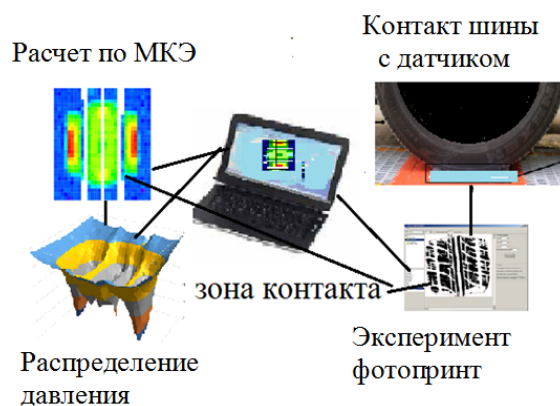


Рисунок 3.1 – Схема расчета параметров контакта [7]

Результаты экспериментального исследования о взаимодействии шины колеса с основанием, а также определения размеров зоны контакта и деформативности шины, получены вследствие опытов в ИММС НАН РБ [20], [21]. Так как давление в зоне контакта распределено неравномерно, то зона контакта является дискретной и различная в цветовом диапазоне, рисунок 3.2.

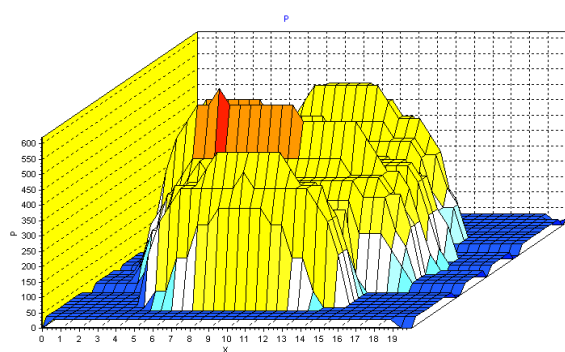


Рисунок 3.2 – Эпюра изменения давления при контакте шины колеса [10]

4 Создание математических моделей и методов расчета напряженно-деформированного состояния слоистых систем из композитов для статических и динамических задач

На основании проведенных совместных исследований в Гомельском государственном университете имени Ф. Скорины и Институте механики НАН Республики Армения по вопросам создания математических моделей и методов расчета напряженно-деформированного состояния слоистых систем из композитов для статических [68] и динамических задач [69], [70] механики неоднородных структур построена теория и алгоритм инженерного расчета, новые методики решения задач взаимодействия для слоистых систем из композитов, созданы современные инженерные методики расчета слоистых систем с учетом вязкоупругих физико-механических характеристик материалов, что позволяет эффективно применять новые инженерные подходы

в машиностроении для расчета конструкций, подвергающихся силовым нагрузкам.

На основании совместных исследований, отраженных в работе [68], предложены методы нахождения напряженно-деформированного состояния различных покрытий из композитов, методы повышения триботехнических свойств сопряжений, используя материалы, упрочненные путем армирования дисперсным или волокнистым наполнителем. Для расчета различных моделей расположения волокон в покрытии предлагается использовать метод граничных элементов. Построенный алгоритм расчета слоистых систем для тел неоднородной структуры [68] был апробирован для создания математической модели расчета изменяющегося давления при контакте жесткого цилиндрического индентора с вязкоупругой изотропной полосой жестко скрепленной с ортотропным основанием [6].

Что касается исследований волновых процессов, происходящих в слоистых телах, то основательная теория была построена и отражена в совместных исследованиях, представленных в работах [71], [72]. Так, в работе [72] предлагается математическая модель для исследования влияния свойства тонких покрытий на характеристики упругого волновода. Получены зависимости, определяющие фазовые скорости в изотропном слое с покрытием с различными геометрическими и физическими характеристиками. Построены асимптотические формулы, определяющие зависимость фазовой скорости от частоты, т. е. дисперсию. Установлено, что выбором упругих свойств покрытий можно увеличить или уменьшить фазовые скорости сдвиговых волн. Значительное продвижение по вопросу изучения динамики пьезоэлектрических поверхностных волн сдвига вблизи границы с несовершенной связью между слоем и полупространством доложено и обсуждено на Международной конференции «Проблемы взаимодействия деформируемых сред» (1–6 октября 2018 г., г. Горис, Республика Армения), посвященной 75-летию Академии наук Республики Армения [71]. При исследовании основное внимание уделяется распространению поверхностных волн сдвига в слоистых пьезокерамических средах (слой и полупространство) с несовершенной связью.

Проведенные совместные исследования дают основу для построения дальнейшего углубленного и перспективного направления исследований. Проблема аналитического и численного исследования задач механики деформируемого твердого тела в случае тел сложной геометрии и неоднородного строения (слоистых систем, изделий и покрытий из композиционных материалов) представляет практический интерес и предполагает не только исследование деформационных процессов, инициированных интенсивными импульсными нагрузками при контактном

взаимодействии, но и моделирование волновых процессов, приводящих в конечном итоге к частичному или полному разрушению тела. Решение этой важной научно-технической проблемы является перспективным направлением для дальнейшего развития современных методов расчета элементов конструкций из композиционных материалов. Основная научная сущность развития – это создание аналитическо-численного решения задач динамики элементов механических и слоистых систем, изделий и покрытий из композиционных материалов с учетом особенностей контактного взаимодействия и физико-механических характеристик материалов с учетом вязкоупругости [73], [74].

Практические результаты по исследованиям трибологических параметров для элементов деталей машин на примере нахождения закономерности изнашивания упрочненной ионами азота аустенитной стали 12X18H10T, полученные совместно с институтом ОИМ НАН РБ, представлены в работах [8], [15]. Для слоистого материала «высокопрочное покрытие – основа» с различающимися значениями толщины упрочнённого слоя проведено конечно-элементное моделирование напряженно-деформированного состояния, формирующегося при трении. Показано, что с уменьшением толщины покрытия регистрируется существенное возрастание уровня сдвиговых напряжений, действующих в основе при трении [15].

Получены результаты исследований о численном моделировании с помощью метода конечных элементов, расчета и анализа напряженного состояния в слоистом теле (изотропное упругое покрытие на упругом основании [8]) при взаимодействии цилиндрического индентора с упругим покрытием с учетом трения. Исследование направлено на изучение механизма износоустойчивости высокохромистых сталей, модифицированных ионами азота при различных температурах.

Заключение

Представленный обзор исследований, отраженный в научно-технической литературе о трибологических взаимодействиях элементов машин из композитов, показал, что определения параметров контактирующих тел зависит от множества факторов. Поэтому для описания методики и автоматизации расчетов и иллюстрации схем работы элементов машин необходимо создавать новые компьютерные программы, разрабатывать инженерный расчёт НДС взаимодействующих тел при контакте с дорожным основанием (покрытием). На основании методов математического программирования и численных расчетов по МКЭ напряженного состояния упругих волокнистых тел углублено разрабатывать алгоритмы решения задачи качения цилиндров из композитов и расчеты элементов деталей машин.

Для успешного использования на практике алгоритмов и программ для вышеуказанных исследований нужно решить следующие задачи:

- разработать новые математические модели и методы исследования динамических процессов в упругих элементах машин и конструкций, возникающих при контактировании тел из композитов;
- создать алгоритмы и методики расчета НДС слоистых систем из композитов с учетом трибологических эффектов;
- создать аналитическо-численные алгоритмы расчета НДС анизотропных слоистых систем, изделий и покрытий из композиционных материалов с учетом физико-механических характеристик материалов в новых магнито-электрических средах;
- создать современные инженерные методики расчета контактного взаимодействия слоистых систем с учетом динамики элементов, механических анизотропных и вязкоупругих характеристик конструкционных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Можаровский, В.В.* Прикладная механика слоистых тел из композитов / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский. – Минск: Наука и техника, 1988. – 280 с.
2. *Реализация алгоритмов расчета напряженно-деформированного состояния элементов машин и трибологических систем* / В.В. Можаровский [и др.] // Теоретическая и прикладная механика. – Минск. – 2020. – Вып. 35. – С. 36–43.
3. *Влияние расположения волокон на параметры контакта и износа для зубьев зубчатых передач из композитов* / В.В. Можаровский [и др.] // Математические методы в технологиях и технике. – 2023. – № 10. – С. 71–75.
4. *Применение математических методов к расчету контактного взаимодействия упругих тел из композитов* / В.В. Можаровский [и др.] // Математические методы в технологиях и технике. – 2021. – № 11. – С. 7–11.
5. *Реализация алгоритмов расчётов напряженно-деформированного состояния элементов машин и трибологических систем* / В.В. Можаровский [и др.] // Теоретическая и прикладная механика. – 2020. – Вып. 35. – С. 36–43.
6. *Реализация методики расчета износа зубьев зубчатого колеса из волокнистого композиционного материала* / В.В. Можаровский [и др.] // Теоретическая и прикладная механика. – 2024. – Вып. 39. – С. 109–115.
7. *Можаровский, В.В.* Применение методов математического программирования и конечных элементов при исследовании качения и зоны контакта автошины с основанием / В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков, Ю.В. Василевич // Теоретическая и прикладная механика. – 2023. – № 38. – С. 50–54.

8. Численный расчет и анализ напряженно-го состояния в слоистом теле при трении с учетом изменения модулей упругости покрытия и основания / В.В. Можаровский [и др.] // Проблемы физики, математики и техники, 2024. – № 1 (58). – С. 22–28.
9. Можаровский, В.В. Влияние расположения волокон на параметры контакта «вал – втулка» для подшипников скольжения из композитов / В.В. Можаровский, С.В. Киргинцева // Теоретическая и прикладная механика. – 2023. – № 38. – С. 55–60.
10. Методика и алгоритм расчета параметров контакта при взаимодействии шины колеса с основанием / В.В. Можаровский [и др.] // Математические методы в технологиях и технике. – 2022. – № 11. – С. 43–47.
11. Некоторые вопросы исследования покрытий из функционально-градиентных материалов при контактном взаимодействии / В.В. Можаровский [и др.] // Теоретическая и прикладная механика. – 2021. – Вып. 36. – С. 83–92.
12. Можаровский, В.В. Расчет напряженно-деформированного состояния зубьев зубчатых колес из композиционных и функционально-градиентных материалов / В.В. Можаровский, С.В. Киргинцева // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 31–37.
13. Можаровский, В.В. Компьютерная реализация методики расчета контактного взаимодействия зубьев зубчатых колес из изотропного и композиционного материалов / В.В. Можаровский, С.В. Киргинцева // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2021. – № 6 (129). – С. 171–177.
14. Реалізація методики розрахунку контактної взаємодії зубів зубчастих коліс з композиційних матеріалів / В.В. Можаровський [и др.] // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 2021. – № 4. – С. 50–55.
15. *Wear Resistance of Nitrogen-Modified High-Alloy Steels Under Friction Conditions without Lubricant* / V.A. Kukareko [et al.] // *Friction and Wear*. – 2024. – Vol. 45, iss. 6. – P. 322–331.
16. Можаровский, В.В. Асимптотические зависимости расчета параметров контакта и износа зубьев зубчатых колес с покрытием из композита при контактном взаимодействии / В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков, С.В. Киргинцева // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (63). – С. 37–42.
17. Mozharovsky, V.V. Calculation of the contact interaction of gear teeth from composite materials / V.V. Mozharovsky, D.S. Kuzmenkov, S.V. Kirhintsava // *International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology*, February 2022. – Vol. 9, iss. 2. – P. 18921–18928.
18. Анализ контактного взаимодействия автомобильной шины с колесным диском и дорожным покрытием / В.В. Можаровский [и др.] // Доклады Белорусского конгресса по механике: сборник научных трудов. – Минск, 2007. – С. 135–142.
19. Киргинцева, С.В. Математические модели расчета контактных параметров для подшипников скольжения из волокнистых композитов / С.В. Киргинцева, В.В. Можаровский // Материалы I Международной научно-практической конференции «Композиты в машиностроении и транспорте» (Гомель, 20 апреля 2023 г.). – Гомель: БелГУТ, 2023. – С. 31–34.
20. Белый, В.А. Металло-полимерные зубчатые передачи / В.А. Белый, В.Е. Старжинский, С.В. Щербаков. – Минск: Наука и техника, 1981. – 352 с.
21. Можаровский, В.В. Соотношения между напряжениями и перемещениями на границе упругой полосы, спаянной с жестким основанием / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский // Всесоюзный научный семинар «Контактная жесткость в машиностроении». – Тбилиси, 1974. – С. 107–109.
22. Шилько, С.В. Расчет фрикционных характеристик металлополимерных трибосопряжений методом вариационных неравенств: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.02.04 / С.В. Шилько; Ин-т механики металлополимерных систем. – Гомель, 1991. – 20 с.
23. Рогачева, Н.А. Создание математических моделей взаимодействия покрытий и оснований из волокнистых композиционных материалов в телах сопряжений: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Н.А. Рогачева; БелГУТ. – Гомель, 2000. – 17 с.
24. Березовская, Е.М. Решение граничных задач для ортотропных неоднородных тел и покрытий: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Е.А. Березовская; БелГУТ. – Гомель, 2002. – 21 с.
25. Марьин, С.А. Расчетные модели и методы определения напряженно-деформированного состояния цилиндрических тел (труб) из волокнистых композиционных материалов: автореф. дисс. ... канд. техн. наук: 01.02.04 / С.А. Марьин; БелГУТ. – Гомель, 2006. – 20 с.
26. Berg, C.A. Wear and friction of two different types of graphite fibre-reinforced composite materials / C.A. Berg, S. Batra, J. Tirosh // *Fiber Sci. and Technol.* – 1973. – № 3. – P. 159–185.
27. Eliezer, Z. Friction and wear properties of an epoxy-steel system / Z. Eliezer, C. Schulz, J.W. Borlow // *Wear*. – 1978. – Vol. 46, № 2. – P. 397–403.
28. Sung, N. Effect of fiber orientation on friction and wear of fiber-reinforced polymeric composites / N. Sung, W. Suh // *Wear*. – 1979. – Vol. 53. – P. 129–141.
29. Chang, H.W. Wear characteristics of composites: effect of fiber orientation / H.W. Chang // *Wear*. – 1983. – Vol. 85. – P. 81–85.

30. *Srivastava, V.K.* Wear and friction characteristics of mica-filled fibre-reinforced epoxy resin composites / V.K. Srivastava, J.P. Pathak, K. Tahzibi // *Wear*. – 1992. – Vol. 152, № 2. – P. 343–350.
31. *Буря, А.И.* Трение и изнашивание полиамида-6 и углепластиков на его основе / А.И. Буря, Б.И. Молчанов // *Трение и износ*. – 1992. – № 5. – С. 900–904.
32. *Композиционные материалы: справочник* / под общ. ред. В.В. Васильева. – Москва: Машиностроение, 1990.
33. *Saks, N.* Friction and wear of fiber-reinforced metal-matrix 339 composites / N. Saks, N.K. Szeto, T. Erturk // *Wear*. – 1992. – Vol. 157, № 2. – P. 339–357.
34. *On the sliding wear performance of polyethernitrite composites* / K. Friedrich [et al.] // *Wear*. – 1992. – Vol. 158, № 1–2. – P. 157–170.
35. *Pearsall, K.I.* The effect of sliding time and speed on the wear of composite materials / K.I. Pearsall, Z. Eliezer, M.F. Amateau // *Wear*. – 1980. – Vol. 63. – P. 121–130.
36. *Argatov, I.I.* Small-scale indentation of an elastic coated half-space: influence of poisson's ratios on the substrate effect / I.I. Argatov, F.J. Sabina // *Int. J. Eng. Sci.* – 2014. – Vol. 81. – P. 33–40.
37. *Willis, J.R.* Hertzian contact of anisotropic bodies / J.R. Willis // *Journal of Mechanics and Physics of Solids*. – 1966. – Vol. 14. – P. 163–176.
38. *Свекло, В.А.* Действие штампа на упругое полупространство / В.А. Свекло // *Прикладная математика и механика*. – 1970. – Т. 34, вып. 1. – С. 72–178.
39. *Напряженно-деформированное состояние композиционных покрытий в трибологических системах* / В.В. Можаровский [и др.] // *Трение и износ*. – 2001. – Т. 22, № 4. – С. 379–385.
40. *Можаровский, В.В.* Моделирование напряженно-деформированного состояния массивных шин из армированных материалов / В.В. Можаровский // *Материалы, технологии, инструменты*. – 2008. – № 3. – С. 14–21.
41. *Pleskachevsky, Yu. M.* Mathematical models of quasi-static interaction between fibrous composite bodies / Yu.M. Pleskachevsky, V.V. Mozharovsky, Yu.F. Rouba // *Computational methods in contact mechanics III: Proc. Int. Conf., Madrid, July 3–5, 1997*. – Madrid, 1997. – P. 363–372.
42. *Cholakova, T.M.* Effect of the heat treatment on mechanical and structural properties of CrTiAlN coatings deposited at low temperature / T.M. Cholakova, L.P. Kolaklieva, R.D. Kakanakov // *Bulgarian Chemical Communications*. – 2018. – Vol. 50. – P. 197–204.
43. *Jabłoński, P.* Structural FEM analysis of thermal sprayed coatings under conditions of contact pressure and high temperature / P. Jabłoński, P. Czajka // *Poznan University of Technology, Institute of Mechanical Technology Conference Paper, April 2017*. – Vol. 1. – P. 24–25.
44. *Асанов, Б.У.* Нитридные покрытия, полученные вакуумно-дуговым осаждением / Б.У. Асанов, В.П. Макаров // *Вестник КPCY*. – 2002. – № 2. – С. 48–52.
45. *Maysara, K.* Mathematical Modeling of Mechanical Properties of PVD Coated Steel Blanking Punch / K. Maysara [et. al] // *International Journal in IT and Engineering*. – September, 2016. – Vol. 4, № 9. – P. 1776–2321.
46. *Константинов, В.М.* Механические свойства нанопокрывтий, полученных на предварительно модифицированной поверхности / В.М. Константинов, А.В. Ковальчук, Г.А. Ткаченко // *Новые материалы и технологии: порошковая металлургия, композиционные материалы, защитные покрытия, сварка: материалы 10-й Международной научно-технич. конф. (Минск, 12–14 сентября 2012 г.)* / гл. ред. П.А. Витязь. – Минск: Беларуская навука, 2012. – С. 175–178.
47. *Прусов, И.А.* Термоупругие анизотропные пластинки / И.А. Прусов. – Минск: БГУ, 1978. – 200 с.
48. *Акоц, А.* Температурные напряжения в ортотропном упругом полупространстве / А. Акоц, Т. Тошер // *Прикладная механика*. – 1972. – № 1. – С. 86.
49. *Ming-Hsien, Hsieh.* Analitical investigations for heat conduction problems in anisotropic thin-layer media with embedded heat sources / Ming-Hsien Hsieh, Chien-Ching Ma // *I. J. of Heat and Mass Transfer*. – 2002. – № 45. – P. 4117–4132.
50. *Можаровский, В.В.* Анализ механико-математических моделей расчета функционально-градиентных материалов, работающих в условиях контактного взаимодействия / В.В. Можаровский, Е.М. Березовская // *Материалы, технологии, инструменты*. – 2013. – № 3. – С. 14–21.
51. *Можаровский, В.В.* О расчете напряженного состояния покрытий из функционально-градиентных и термочувствительных материалов / В.В. Можаровский, Е.М. Березовская // *Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины*. – 2014. – № 3 (84). – С. 86–92.
52. *Можаровский, В.В.* Методика определения параметров контакта индентора с ортотропным покрытием на упругом изотропном основании / В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2016. – № 4 (29). – С. 74–81.
53. *Герасимов, А.В.* Численное моделирование деформирования и разрушения функционально-градиентных пористых материалов при взрывном и ударном нагружении / А.В. Герасимов, Р.А. Кректулева // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 1999. – Т. 5, № 3. – С. 94–106.
54. *Giannakopoulos, A.E.* Two-dimensional contact analysis of elastic graded materials / A.E. Giannakopoulos, P. Pallot // *J. Mech. Phys. Solids*. – 2000. – № 48. – P. 1597–1631.

55. Guler, M.A. Contact mechanics of two deformable elastic solids with graded coatings / M.A. Guler, F. Erdogan // *Mech. Mater.* – 2006. – № 38. – P. 633–647.
56. Guler, M.A. The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings / M.A. Guler, F. Erdogan // *Int. J. Mech. Sci.* – 2007. – № 49. – P. 161–182.
57. Giannakopoulos, A.E. Indentation of solids with gradients in elastic properties / A.E. Giannakopoulos, S. Suresh // *Point force. Int. J. Solids Struct.* – 1977. – № 34. – P. 2357–2392.
58. Солдатенков, И.А. Приближенное решение задачи об изнашивании тонкой полосы, связанной с упругой полуплоскостью / И.А. Солдатенков // *Известия РАН. Механика твердого тела.* – 1997. – № 1. – С. 48–55.
59. Солдатенков, И.А. Контактная задача для полуплоскости при учете касательного перемещения на контакте / И.А. Солдатенков // *Известия РАН. Механика твердого тела.* – 1994. – № 4. – С. 51–61.
60. Васильев, В.В. О точных решениях плоской задачи теории упругости для ортотропной полосы / В.В. Васильев, С.А. Лурье // *Известия РАН. Механика твердого тела.* – 1994. – № 1. – С. 120–130.
61. Айзикович, С.М. Внедрение сферического индентора в полупространство с функционально-градиентным упругим покрытием / С.М. Айзикович, Л.И. Кренев, Т.А. Кузнецова // *Доклады Академии наук.* – 2008. – Т. 418, № 2. – С. 186.
62. Задача о внедрении в функционально-градиентное упругое полупространство осесимметричного штампа / С.М. Айзикович [и др.] // *VIII Международный семинар.* – Минск, 2010. – С. 154–156.
63. Напряженно-деформированное состояние композиционных покрытий в трибологических системах / В.В. Можаровский, Ю.М. Плещачевский, С.Ю. Бабич, Е.М. Березовская // *Трение и износ.* – 2001. – Т. 22, № 4. – С. 379–385.
64. Можаровский, В.В. Напряженное состояние упругого ортотропного основания с однородным покрытием с учетом трения / В.В. Можаровский, Н.А. Рогачева // *Трение и износ.* – 1999. – Т. 20, № 5. – С. 471–479.
65. Choi, H.J. On the plane contact problem of a functionally graded elastic layer loaded by a frictional sliding flat punch / H.J. Choi // *J. Mech. Sci. Technol.* – 2009. – № 23. – P. 2703–2713.
66. Bikartas, I. The contact problem of an orthotropic non-homogeneous elastic half space / I. Bikartas // *Int. J. Eng. Sci.* – 1984. – № 22. – P. 347–359.
67. Peijian, C. Thermo-contact mechanics of rigid cylindrical stamps sliding on a finite graded-Layer / Chen Peijian, Chen Shaohua // *Acta Mech.* – 2012. – Vol. 223. – P. 2647–2665.
68. Boundary element method in determining the stress-strain state of composite coating in tribological systems // V. V. Mozharovsky [et al.] // *Ukrainian Conference in Applied Mathematics, L'viv, September 28–30, 2017 / Ivan Franko National University of L'viv.* – L'viv, 2017. – P. 76–77.
69. Ghazaryan, K.B. Shear waves in a two-phase oppositely polarized viscoelastic piezoelectric waveguide / K.B. Ghazaryan, V.V. Mozharovsky, S.K. Ohanyan // *Topical problems of continuum mechanics: material's V International Conference with a Special Session in Honor of Alexander Manzhirrov's 60th Birthday, Tsaghkadzor, October 2–7, 2017 / Institute of mechanics of the National Academy of Sciences of the Republic of Armenia.* – Tsaghkadzor, 2017. – P. 174–176.
70. Generalized Love waves in bi-material waveguide with viscous slip interface / K. Ghazaryan [et al.] // *Modern problems of Mechanics and Mathematics: material's International Conference, L'viv, May 22–25, 2018.: in 3 vol. / Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine; edited by Academician of NAS of Ukraine A. M. Samoilenko and Academician of NAS of Ukraine R. M. Kushnir.* – L'viv, 2018. – Vol. 1. – P. 144–145.
71. Piezoelectric shear surface waves near an imperfectly bonded interface between layer and half-space / K. B. Ghazaryan [et al.] // *The problems of interaction of deformable media: material's IX International Conference dedicated to the 75th anniversary of NAS RA, Goris, October 1–6, 2018 / Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of the Republic of Armenia.* – Goris, 2018. – P. 331–335.
72. Распространение сдвиговых волн в плоском изотропном слое с тонкими покрытиями / В.М. Белубекян [и др.] // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2017. – № 4 (33). – С. 40–43.
73. Можаровский, В.В. Реализация решения контактной задачи о вдавливании жесткого цилиндрического индентора в изотропную вязкоупругую полосу на ортотропном основании / В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков, Н.А. Марьина // *Проблемы физики, математики и техники.* – 2018. – № 2 (35). – С. 51–56.
74. Можаровський, В.В. Методика розрахунку напружено-деформованого стану шаруватих труб з урахуванням явищ повзучості і релаксації / В.В. Можаровський, Е.А. Голубова, Д.С. Кузьменков // *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер. фізико-математичні науки.* – 2017. – № 3. – С. 151–156.

Поступила в редакцию 27.07.2025.

Информация об авторах

Можаровский Валентин Васильевич – д.т.н., профессор

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ ФОРМИРОВАНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ НАНОКОМПОЗИЦИОННЫХ ПОЛИМЕРНЫХ ПОКРЫТИЙ ИЗ АКТИВНОЙ ГАЗОВОЙ ФАЗЫ

А.В. Рогачёв¹, М.А. Ярмоленко¹, А.А. Рогачёв², Цзян Сяо Хун³

¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

²Институт химии новых материалов НАН Беларуси, Минск

³Нанкинский университет науки и технологии

MAIN RESULTS AND PROSPECTS OF FORMING FUNCTIONAL NANOCOMPOSITE POLYMER COATINGS FROM THE ACTIVE GAS PHASE

A.V. Rogachev¹, V.A. Yarmolenko¹, A.A. Rogachev², Jiang Xiao Hong³

¹Francisk Skorina Gomel State University

²Institute of Chemistry of New Materials of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk

³Nanjing University of Science and Technology

Аннотация. Проведен анализ закономерностей протекания основных стадий нанесения композиционных полимерных покрытий из активной газовой фазы, генерируемой электронно-лучевым диспергированием. В качестве основных наиболее эффективных применений данного метода отмечаются формирование покрытий медицинского назначения, слоев с высокими гидрофобными и гидрофильными свойствами, а также антифрикционных покрытий для прецизионных узлов трения. Основываясь на преимуществах метода осаждения покрытий из газовой фазы, предложен ряд других перспективных его применений для решения широкого круга технологических задач.

Ключевые слова: полимерные покрытия, электронно-лучевое диспергирование, покрытия медицинского назначения, гидрофобные покрытия, антифрикционные покрытия.

Для цитирования: Основные результаты и перспективы формирования функциональных нанокomпозиционных полимерных покрытий из активной газовой фазы / А.В. Рогачёв, М.А. Ярмоленко, А.А. Рогачёв, Цзян Сяо Хун // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 29–36. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_29. – EDN: VGMOLJ

Abstract. The analysis of the regularities of the main stages of applying composite polymer coatings from the active gas stage generated by electron-beam dispersion is carried out. The most effective applications of this method are the formation of medical coatings, layers with high hydrophobic and hydrophilic properties, as well as antifriction coatings for precision friction units. Based on the advantages of the method of deposition of coatings from the gas phase, a number of other promising applications are proposed for solving a wide range of technological problems.

Keywords: polymer coatings, electron-beam dispersion, medical coatings, hydrophobic coatings, antifriction coatings.

For citation: Main results and prospects of forming functional nanocomposite polymer coatings from the active gas phase / A.V. Rogachev, V.A. Yarmolenko, A.A. Rogachev, Jiang Xiao Hong // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 3 (64). – P. 29–36. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_29 (in Russian). – EDN: VGMOLJ

Введение

Тонкие нанокomпозиционные полимерные покрытия имеют широкую сферу практического применения. Они используются не только для поверхностного модифицирования различных материалов с целью повышения их адсорбционных, защитных, электрофизических, антифрикционных свойств, но и в качестве активных функциональных элементов различных устройств сенсорики, микроэлектроники, оптоэлектроники, медицинских препаратов. В числе методов, применяемых для осаждения таких покрытий, в настоящее время активно разрабатываются и находят эффективное практическое применение для генерации газовой фазы и ее

активации технологические приемы с использованием плазменных, электронно-лучевых, лазерных потоков [1]–[3]. Анализ особенностей реализации таких методов свидетельствует о значительной перспективности применения электронно-лучевого диспергирования. Технологическое осуществление данного метода имеет ряд сложностей, однако в сравнении с другими методами диспергирования реализуется ряд преимуществ, в числе которых возможность активации образовавшихся летучих продуктов, проведение дополнительной обработки растущего слоя вторичными электронами, изменение в широких пределах его молекулярной структуры и морфологии.

Сложные физико-химические процессы протекают и на стадии переноса летучих продуктов в газовой фазе, их адсорбции на поверхности с последующим участием в образовании макромолекул и надмолекулярных структур. Закономерности протекающих процессов в значительной степени зависят не только от условий и режимов диспергирования, но и в значительной степени определяются природой, химическим составом диспергируемого вещества.

Решение проблемы создания тонкопленочных материалов, покрытий с заданным составом и структурой возможно только при реализации комплексных эффективных технологических методов и приемов на всех стадиях их формирования. Основной целью настоящей работы является анализ основных процессов, протекающих при осаждении покрытий из газовой фазы, определение особенностей формирования ряда функциональных покрытий и наиболее перспективных направлений практического применения газозащитного синтеза наноконпозиционных слоев.

1 Закономерности генерации газовой фазы диспергированием и осаждения покрытия

При воздействии потока электронов на полимерную мишень протекают процессы ее зарядки, радиационно-термического воздействия на макромолекулы полимера, приводящей их деструкции с образованием низкомолекулярных фрагментов с различной активностью и последующей их десорбцией. Параметры данных процессов изменяются в процессе диспергирования, что определяет в значительной степени нестационарный характер диспергирования, изменяющуюся в процессе диспергирования реакционную активность летучих продуктов [1].

В [4], [5] рассмотрены особенности переноса заряда при электронно-лучевом диспергировании полимеров. Предложена модель, учитывающая изменение адсорбированного заряда за счет вторичной электронной эмиссии, десорбции заряженных частиц диспергирования. Показано, что при достаточно длительном диспергировании величина ускоряющего напряжения электронной пушки практически не влияет на скорость диспергирования. При проведении электроннолучевого диспергирования в условиях лазерного ассистирования вследствие имеющей место фотоэлектронной эмиссии зарядка поверхности снижается, и при повышении плотности мощности излучения регистрируется практически линейное возрастание давления летучих продуктов диспергирования, а, соответственно, и скорости роста покрытия [5]. Результаты аналитического рассмотрения согласуются с данными экспериментальных исследований зависимости скорости диспергирования от плотности потока электронов [2], [6] и являются обоснованием условий и режимов наиболее эффективных

технологических приемов снижения зарядки поверхности, повышения реакционной активности летучих продуктов диспергирования, в числе которых использование для обработки оптимизированных по энергии потоков электронов, проведение процесса в условиях лазерного ассистирования, создание в газовой фазе электрических разрядов, введение в состав мишени функциональных наполнителей.

С целью оценки влияния теплового воздействия потока электронов на процессы генерации летучих продуктов электроннолучевого диспергирования расчетными на основании уравнения теплового баланса при квазиравновесном режиме диспергирования и экспериментальными методами определены значения максимальной температуры в зоне действия потока электронов. Установлено, что ее значение недостаточно для образования летучих продуктов термодеструкции. Так, при диспергировании ПТФЭ потоком электронов с $U = 2,3$ кэВ и $j = 4,6$ А/м² максимальная температура не превышает 665 К. Нагрев полимера в тигле до такой температуры в условиях вакуума не вызывает экспериментально наблюдаемую скорость изменения массы. Кроме этого в [7] отмечается, что при нагреве ПТФЭ в интервале температур 700–1000 К процесс термодеструкции идет с почти 100% выходом мономера и осаждение покрытия не происходит. По данным работы [8] только нагрев до температуры 1300–1400 К приводит к образованию конденсированного слоя при осаждении летучих продуктов термодеструкции. Таким образом, тепловой механизм электроннолучевого диспергирования не является доминирующим. Отметим также, что распыление твердой мишени потоком электронов является также маловероятным, так как масса электронов значительно меньше массы атомов и значение передаваемой при столкновении энергии имеет достаточно малую величину.

На основании результатов данного рассмотрения и с учетом данных о пространственном распределении летучих продуктов, зависимости их плотности от условий и режимов диспергирования [9] в качестве наиболее реального объяснения кинетических особенностей процесса диспергирования полимерных, органических материалов предлагается модель, учитывающая значительный вклад эффекта анафореза, в соответствии с которой образование летучих продуктов в результате реализации следующих основных актов:

- нагрев материала мишени и протекание процессов термо- и электронно-стимулированной деструкции макромолекул, сложных органических соединений, приводящих к образованию в поверхностном слое относительно низкомолекулярных фрагментов;

- зарядка поверхности и находящихся на ней образовавшихся молекулярных фрагментов;

– генерация летучих продуктов, осуществляемая в результате термодесорбции, активированной электростатическим взаимодействием отрицательно заряженных поверхности и молекулярных фрагментов.

Сложные процессы, зависящие от природы полимеры, состава и плотности потока летучих продуктов, протекают и на поверхности при формировании покрытия. На основании анализа морфологических особенностей осаждаемых покрытий, из молекулярной структуры установлено, что в зависимости от природы полимера, режимов диспергирования рост покрытий осуществляется по следующим двум основным механизмам:

1) адсорбционно-полимеризационному, включающему в качестве основных стадий адсорбцию летучих продуктов диспергирования на поверхности и их вторичную полимеризацию;

2) аэрозольному (капельному): образование на стадии диспергирования или же в результате полимеризации в газовой фазе микро- и/или наночастиц полимера и их закрепление на поверхности.

Адсорбционно-полимеризационный механизм осаждения реализуется при протекании на поверхности, например, процессов радиационно-стимулированной полимеризации с участием адсорбированных фрагментов при осаждении из относительно низких плотности потоков продуктов диспергирования и концентрации активных частиц в потоке, при которой выполняется соотношение $l_k < \lambda$ (l_k – характерный размер камеры, λ – длина свободного размера фрагментов) [2].

Аэрозольный механизм проявляется при образовании потоков диспергирования, характеризующихся высокими плотностью и реакционной способностью (например, вследствие наличия в нем долгоживущих радикалов). Установлено, что объем образовавшихся частиц полимера зависит от соотношения плотностей активных и неактивных частиц в газовой фазе и наиболее значительное его изменение имеет место вблизи зоны диспергирования. Процессы газовой полимеризации могут активно протекать и в поверхностном слое диспергируемого полимера в процессе его обработки концентрированным потоком энергии, когда наблюдается образование в объеме мишени включений из летучих продуктов разрушения.

Особый научный и практический интерес представляет использование метода диспергирования для получения композиционных полимер-полимерных и наполненных неорганическими наночастицами пленочных материалов. Формирование таких систем возможно путем одновременного или последовательно проводимого диспергирования исходных веществ и осаждения летучих продуктов на поверхности. В первом случае формируются покрытия с равномерным

по толщине слоя распределением частиц, во втором – многослойное покрытие. При этом, изменяя условия и режимы диспергирования, пленкообразования, предоставляется возможность регулирования в широких пределах структуры материала а, соответственно, и их свойств.

Анализ физико-химических процессов, протекающих при осаждении конденсированных слоев из активной газовой фазы, генерируемой электроннолучевым, лазерным диспергированием, позволяют рассматривать их как отдельный, характеризующий существенными особенностями метод синтеза конденсированных слоев, химический состав, структура которых, как правило, отличается от материала мишени. При его реализации возможно осаждение покрытий различного состава и конструкции, не достижимых другими методами, что в значительной степени определяет широкие перспективы их практического применения.

2 Молекулярная структура и свойства покрытий медицинского назначения

Антибактериальные покрытия стали важным инструментом в борьбе с инфекциями бактериальных патогенов благодаря их способности улучшать соблюдение пациентом режима лечения и их возможности персонализации. Они наряду с гидрогелями [10], функциональными марлевыми повязками [11], специальными пенами [12] активно используются для лечения различных типов ран. В последние годы особое внимание уделяется разработке и проектированию систем длительного, контролируемого высвобождения лекарств. Биопленочные материалы на основе полисахаридов, белков и липидов имеют большие преимущества при их использовании в качестве скаффолда для доставки лекарств. В их числе гидроксипропилцеллюлоза (ГЭЦ), производное целлюлозы, обладает хорошей гидрофильностью из-за замены гидроксильных групп на гидроксипропильные, имеет молекулярную массу около 90 кДа, не содержит функциональных групп со значительными положительными или отрицательными зарядами в своей молекулярной структуре, совместима с другими материалами и обладает превосходной способностью к образованию пленки с хорошей биосовместимостью и биоразлагаемостью [13]. Эти свойства не только делают ГЭЦ отличным кандидатом на роль носителей лекарств, но и определяют высокий потенциал их использования в других практических приложениях, в частности, в энергетических материалах, где полимерные матрицы выполняют функцию связующих для стабилизации энергетических частиц, регулирования характеристик горения и улучшения механических свойств.

Достаточно подробная информация об эффективности применения методов нанесения из активной газовой фазы, генерируемой электрон-

но-лучевым диспергированием полимеров и испарением низкомолекулярных соединений, для формирования многокомпонентных с регулируемым пролонгированным действием биопокрытий приведена в [14].

Выбор электронно-лучевого диспергирования для формирования таких покрытий обусловлен возможностью осаждения однородных, высокочистых и высокоплотных пленок. Метод не требует использования жидких сред, подложка не подвергается термическому воздействию во время процесса осаждения и в качестве подложки может использоваться любой материал, включая металлы и полимерные органические соединения. Данная технология позволяет реализовать возможность точного, контролируемого осаждения слоистых материалов, что является важным при нанесении в едином технологическом цикле покрытий с заданным распределением в его объеме наноразмерных частиц функционального наполнителя и, соответственно, параметрами пролонгированного действия.

Реализация идеи пролонгированного, регулируемого освобождения лекарственного препарата или другого функционального агента возможна только при формировании многокомпонентных покрытий, содержащих строго определенные функциональные ингредиенты. В качестве такого покрытия в [15] предлагается трехслойная композиционная система, содержащая гидроксиэтилцеллюлозу, поликапролактон, норфлоксацин и куркумин, осаждение которой в едином технологическом цикле возможно только с использованием развиваемого метода электронно-лучевого диспергирования при режимах, исключающих значительное изменение молекулярной структуры исходных соединений.

В качестве основы покрытия выбрана гидроксиэтилцеллюлоза – многофункциональный полимер, сетчатая структура и способность удерживать воду дают ему большое преимущество в медицинских материалах. Помимо биомедицинских применений такие покрытия имеют общие фундаментальные характеристики с другими полимерными связующими и матрицами, используемыми в энергетических материалах, где стабильность материала играет решающую роль в оптимизации производительности. Поликапролактон (PCL) – это биосовместимый полимер, одобренный Управлением по контролю за продуктами и лекарствами США и обладающий такими характеристиками, как длительное время биоразложения, хорошая биосовместимость и механические свойства, среди которых его длительное разложение делает его выгодным для пролонгированной доставки лекарств. Способность PCL образовывать стабильные полимерные сети также предполагает его актуальность в энергетических приложениях, где полимерные компоненты влияют на контроль скорости горе-

ния и термическую стабильность. Норфлоксацин эффективно используется против грамположительных и грамотрицательных микроорганизмов, включая *Staphylococcus aureus*, *Pseudomonas aeruginosa*, *Escherichia coli*, *Salmonella*, *Campylobacter*, *Vibrio cholerae* и *Shigella*. В настоящее время он часто применяется в качестве антибактериального средства в перевязочных материалах для ран.

Важное практическое применение имеет синтезированное в [16] многослойное покрытие на основе кремнийорганических полимеров, Mg, CaH₂, Zn и фосфорсодержащих соединений, важной особенностью которого является высокая сорбция влаги и его трансформация в биологических средах в гидроксипатит.

Полученные результаты использованы также при отработке технологии нанесения покрытий биотина на поверхность титановых имплантатов [17]. Установлено, что молекулярная структура монослоя биотиновой пленки полностью соответствует молекулярной структуре исходных биотиновых порошков, при этом она проявляет хорошую гидрофильность, превосходную биосовместимость и биобезопасность.

Электроннолучевое диспергирование многокомпонентных мишеней является эффективным технологическим приемом формирования антибактериальных покрытий с целью снижения воспаления в местах имплантации контаминированных спиц в мягких тканях. Высокую эффективность проявляют многокомпонентные покрытия, в которых в качестве полимерной матрицы выступают полиуретан, биосовместимый и биodeградируемый полилактид, а в качестве биоцидных компонентов – ципрофлоксацин и наночастицы серебра [18].

3 Покрытия с заданными адсорбционными свойствами

Высокая перспективность применения электроннолучевого диспергирования для создания гидрофильных или гидрофобных слоев проиллюстрирована на примере осаждения покрытий на основе кремнийорганических полимеров [19]. Показано, что изменяя состав покрытия и используя методы активационной обработки представляется возможным изменения адсорбционных свойств в пределах от гидрофильных (при проведении плазменной обработки) до супергидрофобных (при введении в кремнийорганическую смолу галогенсодержащих полимеров, магния). Перспективными гидрофобными покрытиями являются однокомпонентные и композиционные слои на основе политетрафторэтилена [3].

В [20] показана высокая эффективность нанесения полимерных покрытий с использованием радиационно-термоэлектростатической активации процессов генерации летучих продуктов при формировании трековой мембраны из

полиэтилентерефталата с осажденным на ее поверхности слоем поливинилхлорида. Показано, что в процессе модифицирования происходит образование композиционных мембран, состоящих из двух слоев, одним из которых является исходная мембрана, характеризующаяся наличием на поверхности концевых карбоксильных групп и имеющая средний уровень гидрофильности. Угол смачивания по воде для этого слоя составляет 65° . Второй осажденный слой имеет гидрофобную природу, величина угла смачивания которого в среднем составляет 93° . Мембраны подобного образца могут быть использованы в процессах опреснения морских вод методом мембранной дистилляции.

Предлагаемый метод проявил высокую эффективность и при нанесении на поверхность трековых мембран ПЭТФ покрытий ксаметилдисиладана, гексаметилдисилоксана и 1, 1, 1, 2-тетрафторэтана, а также сверхвысокомолекулярного полиэтилена [21]. Установлено, что нанесение покрытий на поверхность трековых мембран ПЭТ методом электронно-лучевого диспергирования полимеров в вакууме приводит к формированию биполярных композитных мембран, имеющих асимметричную форму пор: диаметр пор на необработанной стороне мембраны не изменяется, а на модифицированной уменьшается. При этом нанесение полимерных покрытий вызывает образование шероховатости, значение которой возрастает с увеличением толщины покрытия. Так, при формировании покрытия ПТФЭ толщиной 100 нм значение R_{ms} составляет 9,6 нм, а при толщине покрытия 300 нм шероховатость поверхности увеличивается и становится равной 16,4 нм.

В [22] изучена стабильность гидрофобных свойств покрытий с морфологически развитой (текстурированной) поверхностью, полученных из политетрафторэтилена и сверхвысокомолекулярного полиэтилена при хранении, а также при длительном контакте с водой и водными растворами хлорида натрия с концентрацией от 5 до 15 г/л. Данные покрытия наносились на поверхность полиэтилентерефталатной трековой мембраны методом электронно-лучевого осаждения исходных полимеров в вакууме с целью получения композиционных мембран для опреснения воды. Установлено, что покрытия на основе политетрафторэтилена под воздействием реальных условий окружающей среды имеют тенденцию к старению и постепенно теряют свои гидрофобные свойства. Угол смачивания водой таких покрытий уменьшается в среднем на 30° при хранении образцов композитных мембран в течение 5 лет. Это составляет 23% от исходного значения. Уменьшение угла смачивания покрытий данного типа обусловлено переходом от гетерогенного режима смачивания к гомогенному, причиной чего является образование на их поверхности

адсорбционного слоя воды. Напротив, для покрытий сверхвысокомолекулярного полиэтилена краевой угол смачивания водой практически не изменяется в процессе хранения образцов мембран. Исследование стабильности полимерных покрытий при длительном контакте композитных мембран с водой и водными растворами хлорида натрия показало, что покрытия сверхвысокомолекулярного полиэтилена устойчивы как в воде, так и в водных растворах хлорида натрия. Покрытия политетрафторэтилена более устойчивы к воздействию водно-солевых растворов, чем воды.

4 Покрытия триботехнического назначения

Перспективным и достаточно эффективным методом повышения триботехнических свойств поверхностей является нанесение на них тонких многослойных и композиционных покрытий на основе полимеров из летучих продуктов диспергирования. Такие покрытия позволяют реализовать правило положительного градиента механических свойств и получить триботехнические сопряжения с минимальными значениями износа и коэффициента трения. При нанесении покрытий представляется возможность также одновременного улучшения защитных, антикоррозионных свойств поверхностей трения, расширения диапазона рабочих температур. Эти преимущества реализованы, в частности, при проведении поверхностного модифицирования резинотехнических изделий [3], [23]. Установлено, что существенное влияние на триботехнические и адсорбционные свойства модифицированных РТИ оказывает метод и режим предварительной активационной обработки. Для обработанных бутадиен-нитрильных резин наиболее высокие эксплуатационные свойства проявляются при проведении предварительной обработки в плазме тлеющего разряда. Особенно значимым эффектом повышения триботехнических свойств достигается при осаждении многослойных и комбинированных покрытий на основе ПУ и ПТФЭ. Модифицированные резины в сравнении с необработанными меньше (в 3–6 раз) набухают в жидких углеводородных средах и имеют более высокую (в 3–6 раз) долговечность. Объемные свойства РТИ (прочность, твердость, удлинение при разрушении, морозостойкость и другие) после нанесения полимерного покрытия практически не изменяются. При этом установлен сложный характер зависимости триботехнических свойств от толщины покрытия, обусловленный протеканием в тонких слоях при его толщине, большей критической, процессов объемного структурообразования. Отмечается, что при трении модифицированных резин низкие значения коэффициента трения и скорости изнашивания наблюдаются при толщине изношенного слоя, значительно

превосходящей толщину нанесенного покрытия, что можно объяснить, с одной стороны, глубоким проникновением активных, способных к прививке частиц в объем пористой резины и, с другой, протеканием процессов образования модифицированных фторсодержащих структур.

5 Перспективные применения нанесения функциональных покрытий из активной газовой фазы

В числе наиболее перспективных технологических направлений применения функциональных полимерных покрытий, осажденных из активной газовой фазы, генерируемой методами электроннолучевого, лазерного диспергирования, следует отметить следующие:

1. Дальнейшая разработка физико-химических и технологических основ формирования биоразлагаемых материалов на основе наноразмерных полимерных систем и лекарств, обладающих комплексом антибактериальных, адсорбционных свойств и проявляющих заданное пролонгированное действие, а также исследование их структуры, физико-химических и физико-биологических свойств.

2. Разработка физико-химических основ модифицирования электродных материалов источников тока с использованием наноконпозиционных слоев на основе проводящих полимеров, установление влияния условий и режимов синтеза на морфологию, молекулярную структуру и электрофизические свойства осажденных полимерных слоев, электрохимические свойства ионных источников с модифицированными электродами. Модифицирование электродов с использованием проводящих полимерных слоев (полианилина) проводится с целью повышения эксплуатационных характеристик аккумуляторов, снижения электрического сопротивления электродов, степени их деградации при эксплуатации. При этом использование растворяющих технологий весьма ограничено, так как этим методом невозможно формирование сплошных наноразмерных слоев и ряд проводящих полимеров не растворяются и их легирование затруднено.

3. Исследование процессов и разработка физико-химических основ формирования из активной газовой фазы электрохромных наноконпозиционных покрытий на основе полианилина и оксидов металлов, методов их допирования другими проводящими полимерами, определение их молекулярной структуры, электрофизических и оптических свойств. Предлагаемый метод нанесения таких покрытий снимает ограничения по их химическому составу, позволяет значительно расширить функциональные свойства.

4. Развитие научных и технологических основ нового метода синтеза гибридных полимернеорганических полупроводниковых материалов на основе наносистем, инкорпорированных

полупроводниковыми соединениями для создания элементной базы отечественной микроэлектроники, ИК-оптики и фотоники, в частности, для создания матриц, проявляющих пьезоэлектрические свойства.

5. Установлено, что при диспергировании ряда полимеров протекают процессы карбонизации и осаждаемые из активной газовой фазы микро-, наноконпозиционные полимер-полимерные покрытия в зависимости от природы полимеров, условий и режимов диспергирования могут представлять собой различные морфологические структуры в диапазоне от высокодисперсных смесей компонентов мишени до специфических композиционных структур, фазовый и химический состав которых отличается от состава исходных полимеров. В связи с этим особый интерес представляет изучение процессов карбонизации полимеров при использовании в качестве материала мишени полимеров и соответствующих катализаторов. Использование составных мишеней, последовательное или одновременное диспергирование полимеров, нагрев и даже испарение низкомолекулярных соединений различной природы в значительной степени определяют природу и механизм протекающих на всех стадиях нанесения покрытий физико-химических процессов.

Так, в [24] показано, что при диспергировании полиэтилена, поливинилхлорида в присутствии катализаторов осаждаются карбонизированные слои различной морфологии, которые могут найти эффективное применение в качестве армирующих элементов композиционных систем, матриц антибактериальных покрытий с пролонгированным высвобождением антибактериальных препаратов, придания поверхности гидрофобных или гидрофильных свойств.

Таким образом, осаждение органических, в том числе и полимерных слоев и композиционных покрытий на их основе из газовой фазы, образованной электронно-лучевым диспергированием исходных веществ в вакууме, является достаточно перспективным методом синтеза функциональных материалов. В зависимости от природы диспергируемых веществ, условий и режимов процесса генерации газовой фазы и осаждения продуктов диспергирования возможно формирование конденсированных слоев с различной морфологией, молекулярной структурой. Дальнейшее развитие методов формирования таких покрытий может быть связано с реализацией условий и режимов, при которых на границе раздела фаз протекают процессы химического взаимодействия.

Следует отметить, что данный метод синтеза перспективен и при решении других технических задач и в процессе дальнейшего его изучения будут определены новые эффективные приемы управления структурой и свойствами формируемых слоев.

Выводы

Обобщены и синтезированы результаты исследования основных стадий при формировании композиционных полимерных покрытий из активной газовой фазы; особенности генерации летучих продуктов методом электронно-лучевого диспергирования; процессы адсорбции и формирования слоев. Отмечается, что данный метод следует рассматривать как отдельный, характеризующийся существенными особенностями и проявляющий в сравнении с другими ряд преимуществ. Наиболее эффективное проявление особенностей данного метода установлено при формировании антибактериальных покрытий на имплантаты, перевязочные материалы, реализующие эффект пролонгированного эффективного действия, а также при лечении костных повреждений. В качестве эффективного применения данного метода отмечается также формирование покрытий с высокими гидрофобными и гидрофильными свойствами, с целью модифицирования мембран. На примере модифицирования резиновых изделий показано, что нанесение тонких композиционных полимерных покрытий позволяет получить триботехнические сопряжения с минимальными значениями износа и коэффициента трения, а также антифрикционных покрытий для прецизионных узлов трения. Основываясь на преимуществах метода осаждения покрытий из газовой фазы, предложен ряд других перспективных его применений для решения широкого круга технологических задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ткачук, Б.В. Получение тонких полимерных пленок из газовой фазы / Б.В. Ткачук, В.М. Колотыркин. – Москва: Химия, 1977. – 216 с.
2. Рогачев, А.А. Физико-химия полимерных покрытий, осаждаемых из активной газовой фазы / А.А. Рогачев. – Москва: Научный мир, 2014. – 287 с.
3. Микро- и нанокмпозиционные полимерные покрытия, осаждаемые из активной газовой фазы / М.А. Ярмоленко [и др.]; под ред. А.В. Рогачева. – Москва: Радиотехника, 2016. – 424 с.
4. Казаченко, В.П. Закономерности диспергирования политетрафторэтилена потоком электронов средних энергий / В.П. Казаченко, А.В. Рогачев // Химия высоких энергий. – 1999. – Т. 33, № 4. – С. 270–273.
5. Особенности кинетики электронно-лучевого диспергирования полимеров в условиях лазерного ассистирования / М.А. Ярмоленко, Д.Л. Горбачев, А.В. Рогачев, А.С. Руденков, А.М. Михалко // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 3 (52). – С. 61–66.
6. Влияние технологических режимов электронного диспергирования политетрафторэтилена на скорость роста покрытий из газовой фазы / А.В. Рогачев, А.И. Егоров, В.П. Казаченко,

С.С. Сидорский // Материалы, технология, инструмент. – 2000. – № 2 (5). – С. 77–80.

7. Мадорский, С. Термическое разложение органических полимеров / С. Мадорский; пер. с англ. под ред. С.П. Рафикова. – Москва: Мир, 1967. – 328 с.

8. Красовский, А.М. Получение тонких пленок распылением полимеров в вакууме / А.М. Красовский, Е.М. Толстомятов. – Минск: Наука и техника, 1989. – 181 с.

9. Рост полимерных покрытий из активной газовой фазы / А.В. Рогачев, В.П. Казаченко, М.В. Буй, А.И. Егоров // Материалы, технология, инструмент. – 1998. – № 1. – С. 60–64.

10. *An injectable self-healing hydrogel with adhesive and antibacterial properties effectively promotes wound healing* / H. Chen, J. Cheng, L. Ran, K. Yu, B. Lu, G. Lan, F. Dai, F. Lu // Carbohydr. Polym. – 2018. – № 201. – P. 522–531.

11. *Comfort and infection control of Chitosan-impregnated cotton gauze as wound dressing* / J.M. Souza, M. Henriques, P. Teixeira, M.M. Fernandes, R. Figueiro, A. Zille // Fibers Polym. – 2019. – Vol. 20, № 5. – P. 922–932.

12. *Rapid hemostatic and mild polyurethane-urea foam wound dressing for promoting wound healing* / X. Liu, Y. Niu, K.C. Chen, S. Chen // Mater. Sci. Eng. – 2017. – № C 71. – P. 289–297.

13. *Hydroxyethylcellulose-g-poly (Lactic Acid) blended polyurethanes: preparation, characterization and biological studies* / A. Noreen, K.M. Zia, S. Tabasum, W. Aftab, M. Shahid, M. Zuber // Int. J. Biol. Macromol. – 2020. – № 151. – P. 993–1003.

14. Перспективы синтеза функциональных биоматериалов из активной газовой фазы / А.В. Рогачев, М.А. Ярмоленко, А.А. Рогачев, Цзян Сяо Хун // Полимерные материалы и технологии. – 2023. – № 4. – С. 97–104.

15. *Antibacterial hydroxyethyl cellulose composite coatings: Structural and controlled release properties with relevance to energetic systems* / Zhenggang Li, Xiaoxue Tan, M.A. Yarmolenko, A.V. Rogachev, Xiaohong Jiang // FirePhysChem. – 2025. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.fpc.2025.02.001>

16. *Formation features, structure and properties of bioactive coatings based on phosphate-calcium layers, deposited by a low energy electron beam* / Jintao Xiao, A.V. Rogachev, V.A. Yarmolenko, A.A. Rogachev, Yiming Liu, Xiaohong Jiang, Dongping Sun, M.A. Yarmolenko // Surface & Coatings Technology. – 2019. – № 359. – P. 6–15.

17. *Study on osteoinductive activity of biotin film by low-energy electron beam deposition* / Tongfei Cheng, Jinxing Cao, Tiantian Wu, Xiaohong Jiang, M.A. Yarmolenko, A.A. Rogachev, A.V. Rogachev // Biomaterials Advances. – 2022. – № 135. – P. 212730. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.bioadv.2022.212730>

18. Перифокальные реакции мягких тканей на введение контаминированных имплантатов с

композиционным антибактериальным покрытием: экспериментальное исследование / О.П. Савчук, Д.В. Тапальский, Д.А. Зиновкин, В.И. Николаев, М.А. Ярмоленко, А.А. Рогачев // Травматология и ортопедия России. – 2023. – Т. 29, № 1. – С. 36–45. – DOI: <https://doi.org/10.17816/2311-2905-2000>.

19. Влияние плазменной обработки покрытий на основе кремнийорганических полимеров, осажденных методом электроннолучевого диспергирования, на их структуру и морфологию / М.А. Ярмоленко, О.А. Саркисов, Лю Имин, А.В. Рогачёв // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 1 (46). – С. 38–43.

20. Формирование на поверхности трековых мембран гидрофобных покрытий методом электронно-лучевого диспергирования поливинилхлорида в вакууме / Л.И. Кравец, М.А. Ярмоленко, А.А. Рогачев, Р.В. Гайнутдинов, В.А. Алтынов, Н.Е. Лизунов // Наноиндустрия. – 2021. – Т. 14, № S6. – С. 44–54. – DOI: 10.22184/1993-8578.2021.14.6s.44.54.

21. Formation of hydrophobic polymer coatings on the tracketched membrane surface / L.I. Kravets, M.A. Yarmolenko, R.V. Gainutdinov, V. Satulu, B. Mitu, G. Dinescu // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 1954, № 1. – P. 012022. – DOI: 10.1088/1742-6596/1954/1/012022.

22. Analysis of long-term hydrophobic properties stability of the textured polymer coatings produced via electron-beam deposition of polymers on the track-etched membrane surface / L. Kravets, M. Yarmolenko, A. Rogachev, R. Gainutdinov, M. Kuvaitseva, V. Altynov, N. Lizunov // High Temperature Material Processes: An International

Quarterly of High-Technology Plasma Processes. – 2025. – Vol. 29, № 3. – P. 57–81. – DOI: 10.1615/HighTempMatProc.2025057717.

23. Триботехнические свойства покрытий на основе политетрафторэтилена и полиуретана, осаждаемых из активной газовой фазы / А.В. Рогачев, Цзян Сяо Хун, Луде Лу, М.А. Ярмоленко // Трение и износ. – 2004. – № 2 (25). – С. 197–201.

24. Физико-химические закономерности плазмохимического синтеза, структура и свойства нанокмпозиционных полимерных покрытий / А.В. Рогачев, М.А. Ярмоленко, А.А. Рогачев, О.А. Саркисов // Наноструктурные материалы: технология, свойства, применение: сборник научных статей / Нац. Акад. Наук Беларуси, Науч.-практ. центр НАН Беларуси по материаловедению; редкол.: П.А. Витязь (гл. ред.) [и др.]. – Минск: Беларуская наука, 2017. – С. 162–171.

Материалы статьи подготовлены при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № T25КИ-056 от 06.02.2025 г.)

Поступила в редакцию 19.08.2025.

Информация об авторах

Рогачёв Александр Владимирович – чл.-корр. НАН Беларуси, д.х.н., профессор
Ярмоленко Максим Анатольевич – д.т.н., профессор
Рогачёв Александр Александрович – чл.-корр. НАН Беларуси, д.т.н., профессор
Цзян Сяо Хун – доктор наук, профессор

НЕЙРО-НЕЧЕТКОЕ И НЕЧЕТКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛАЗЕРНОГО ЛЕГИРОВАНИЯ СТАЛИ 30XГCH2A

Г.А. Баевич¹, Ю.В. Никитюк¹, Л.Н. Марченко^{1,2}, А.В. Максименко¹

¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

²Псковский государственный университет

NEURO-FUZZY AND FUZZY MODELING OF LASER ALLOYING OF STEEL 30XГCH2A

G.A. Baevich¹, Yu.V. Nikityuk¹, L.N. Marchenko^{1,2}, A.V. Maksimenko¹

¹Francisk Skorina Gomel State University

²Pskov State University

Аннотация. Работа посвящена построению нейро-нечетких и нечетких моделей лазерного легирования хромом конструкционной стали 30XГCH2A на основе результатов численного эксперимента. Конечно-элементное моделирование лазерного легирования стали 30XГCH2A выполнено с учетом зависимости теплофизических свойств материалов от температуры и плотностей на языке программирования APDL с использованием границентрированного варианта центрального композиционного плана эксперимента. В качестве факторов эксперимента использовались временные интервалы, соответствующие длительностям трех фронтов лазерного импульса, и пиковые плотности мощности этих фронтов, в качестве – максимальные температуры в зоне обработки. Оценка качества моделей осуществлялась по статистическим метрикам *RMSE*, *MAE*, *MAPE*, *R*² на тестовом наборе данных. Выявлена более высокая эффективность нейро-нечетких моделей при прогнозировании параметров лазерного легирования стали в сравнении с нечеткими моделями.

Ключевые слова: лазерное легирование, нечеткий вывод Мамдани.

Для цитирования: Нейро-нечеткое и нечеткое моделирование лазерного легирования стали 30XГCH2A / Г.А. Баевич, Ю.В. Никитюк, Л.Н. Марченко, А.В. Максименко // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 37–42. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_37. – EDN: VTZKRT

Abstract. The study focuses on developing neuro-fuzzy and fuzzy models for laser alloying of structural steel 30XГCH2A with chromium, based on numerical experiment results. Finite element modeling of laser alloying for steel 30XГCH2A was performed using APDL programming language, accounting for temperature-dependent thermophysical material properties and power densities, and employing a face-centered central composite experimental design. The experimental factors included time intervals corresponding to the durations of three laser pulse fronts and their peak power densities, while the response variables were maximum temperatures in the processing zone. The model quality was evaluated using statistical metrics (*RMSE*, *MAE*, *MAPE*, *R*²) on a test dataset. The results demonstrate the superior predictive accuracy of neuro-fuzzy models over conventional fuzzy models for laser alloying parameters.

Keywords: laser alloying, Mamdani fuzzy inference.

For citation: Neuro-fuzzy and fuzzy modeling of laser alloying of steel 30XГCH2A / G.A. Baevich, Yu.V. Nikityuk, L.N. Marchenko, A.V. Maksimenko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 3 (64). – P. 37–42. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_37. – EDN: VTZKRT

Introduction

Modern technologies, particularly laser processing, enable targeted modification of surface properties without affecting the base material. The key advantages of laser processing are its versatility and precision, which allow for coating deposition with various materials and treatment of components with virtually any geometry or size.

Among laser processing technologies, laser alloying has gained widespread adoption as an effective method for enhancing metal surface properties. This technique enables precise modification of a component's surface layer composition and microstructure through laser

irradiation, offering high processing accuracy and improved material performance characteristics [1], [2].

The application of artificial intelligence methods, particularly fuzzy logic and adaptive neuro-fuzzy inference systems, enables optimization of laser processing parameters. This approach is especially relevant for investigating laser alloying of steels such as 30XГCH2A. The formation of fuzzy rules through integration of artificial neural networks into fuzzy inference systems allows training such systems without expert involvement. Hybrid networks combine the advantages of both approaches, thereby overcoming the fundamental limitations of each individual method [3]–[5].

Our analysis shows that reference [6] examined neural networks with genetic optimization and adaptive neuro-fuzzy systems for laser forming processes, while the work in [7] developed a neuro-fuzzy model that accurately predicts geometric parameters of laser-clad layers.

This study aims to develop fuzzy and neuro-fuzzy models of chromium laser alloying for structural steel 30XГCH2A.

1 Research results

Temperature determination was performed using the ANSYS finite element analysis software. The computational model consisted of a 30XГCH2A steel plate with dimensions of $3 \times 3 \times 1$ mm, coated with a 100 μm thick flux layer containing the alloying component that ensured formation of a uniformly melted layer. Figure 1.1 illustrates the laser irradiation scheme applied to the treated surface.

The numerical experiment employed a six-factor face-centered central composite design [8]. The experimental factors consisted of time intervals t_1 , t_2 , and t_3 (corresponding to the durations of three laser pulse fronts) and peak power densities p_1 , p_2 , and p_3 of these fronts (Figure 1.2). The model responses were temperatures in the processing zone: T_1 , T_2 , and T_3 represented surface temperatures of the alloying-component flux layer at the completion times of the first, second, and third laser pulse fronts, respectively, while T_4 denoted the temperature at 100 μm depth upon completion of the third front. The finite element analysis, implemented via APDL programming language, generated a dataset for constructing and validating neuro-fuzzy models [8].

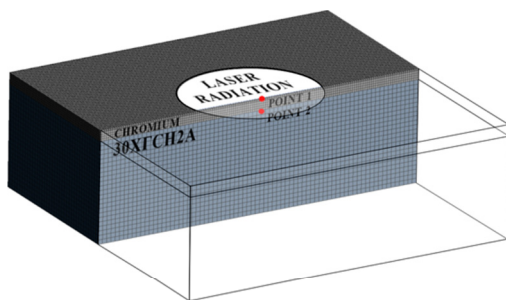


Figure 1.1 – Schematic of laser irradiation impact

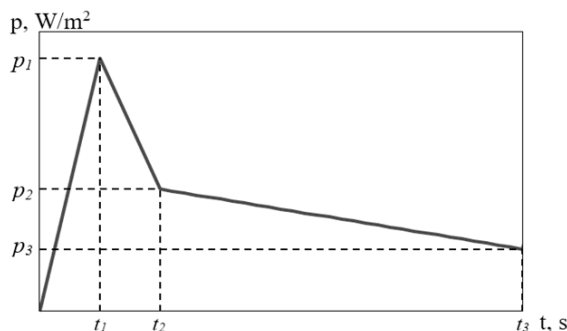


Figure 1.2 – Laser pulse waveform

The neuro-fuzzy model was developed using ANFIS (Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System), a hybrid architecture combining neural networks and fuzzy logic. For training, we employed a hybrid learning algorithm integrating gradient descent with least squares estimation [9]. During the first stage, premise parameters were fixed while consequent parameters were optimized using least squares. In the second stage, consequent parameters remained fixed while premise parameters were refined through gradient descent.

The neuro-fuzzy model approximating the relationships between maximum temperatures (T_1 , T_2 , T_3 , T_4) and laser pulse front durations (t_1 , t_2 , t_3) with their corresponding power densities (p_1 , p_2 , p_3) was trained over 20 epochs. The model testing was performed using a test dataset (Table 1.1), which was also generated through finite element analysis employing the APDL programming language.

Table 1.1 – Test dataset

N	1	2	3	4	5
t_1 , ms	1.05	1.59	1.54	0.81	0.73
t_2 , ms	14.51	3.45	13.95	11.57	8.63
t_3 , ms	3.14	2.62	3.88	1.08	1.01
p_1 , $\text{W/m}^2 \cdot 10^9$	4.33	2.13	2.43	5.88	5.73
p_2 , $\text{W/m}^2 \cdot 10^9$	0.90	0.46	0.14	0.64	0.47
p_3 , $\text{W/m}^2 \cdot 10^9$	4.63	2.28	0.52	1.20	3.90
T_1 , °C	10831	5268	2355	5688	8646
T_2 , °C	4587	2545	793	2259	2984
T_3 , °C	5467	3049	3577	7116	6375
T_4 , °C	3842	2106	677	1732	2559

The neuro-fuzzy model's performance was evaluated using the following statistical metrics: the coefficient of determination (R^2), Mean Absolute Error (MAE), Root Mean Square Error (RMSE), and Mean Absolute Percentage Error (MAPE).

Table 1.2 – Performance evaluation metrics of neuro-fuzzy models

Statistical Metric	Model Response			
	T_1	T_2	T_3	T_4
RMSE	411 K	169 K	250 K	149 K
MAE	355 K	150 K	218 K	133 K
MAPE	6.7%	5.3%	5.0%	6.4%
R^2	0.9802	0.9808	0.9747	0.9795

The metric values demonstrate sufficient agreement between the neuro-fuzzy model and the finite element analysis results. As an example, Figure 1.3 shows the derived relationship between the maximum temperature T_1 and the processing parameters t_1 and p_1 .

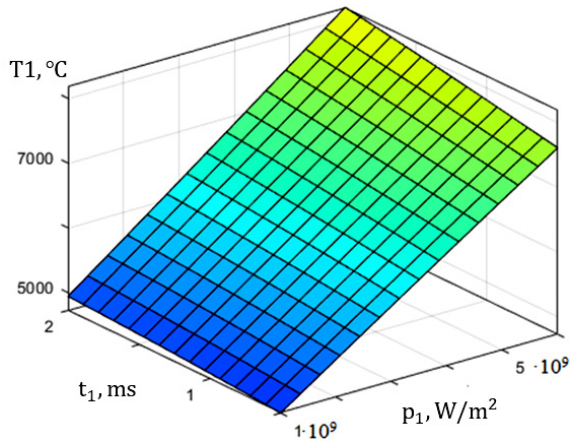


Figure 1.3 – Dependence of temperature T_1 on processing parameters t_1 and p_1 derived using the neuro-fuzzy model

The fuzzy model establishing relationships between maximum temperatures (T_1, T_2, T_3, T_4) and laser pulse front durations (t_1, t_2, t_3) with their corresponding power densities (p_1, p_2, p_3) was developed using the same numerical experiment data generated via APDL programming [8]. The fuzzy system implementation employed Python's Scikit-Fuzzy library, where input parameter fuzzification utilized triangular membership functions (Figure 1.4), while Gaussian membership functions were selected for output fuzzification due to their smoothness and superior ability to approximate nonlinear dependencies (Figure 1.5).

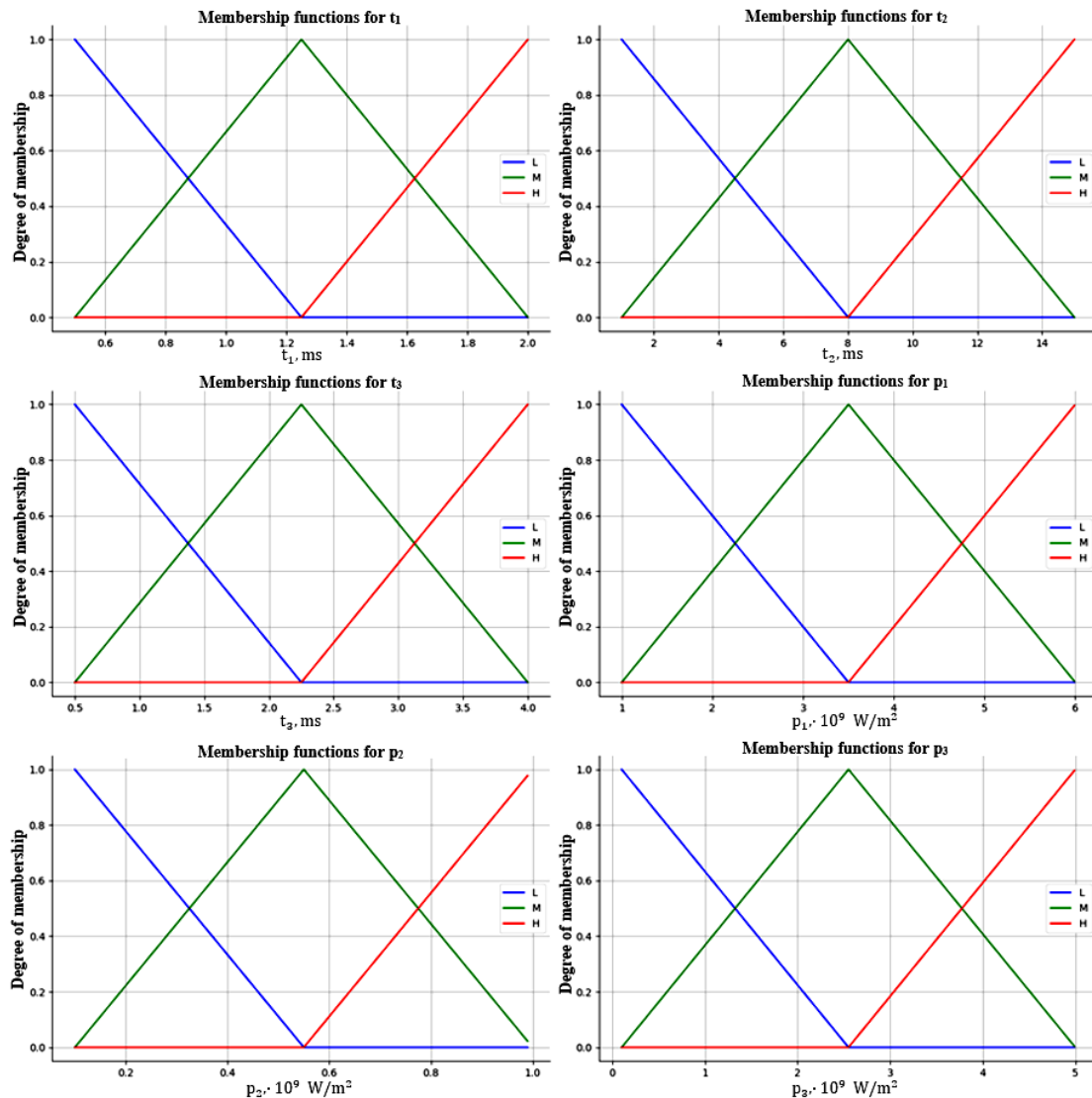
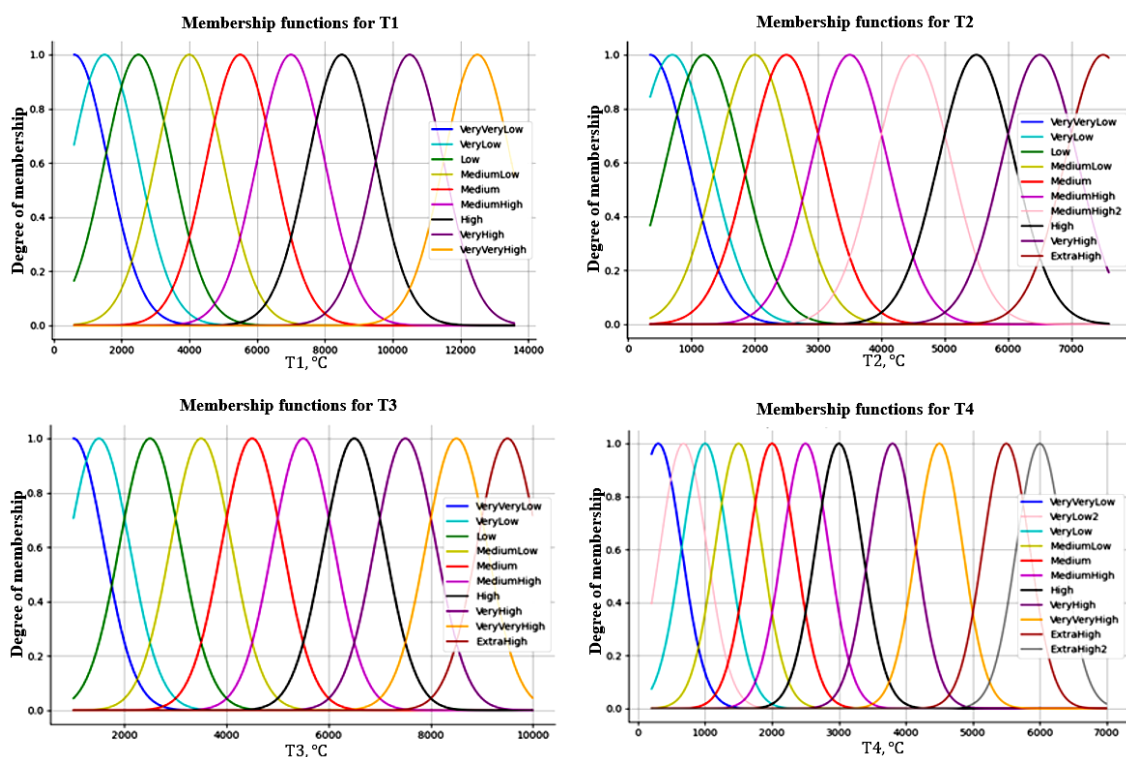


Figure 1.4 – Membership functions of linguistic variables for input parameters t_1, t_2, t_3 and p_1, p_2, p_3

Figure 1.5 – Membership functions of linguistic variables for output parameters $T1$, $T2$, $T3$, and $T4$

2 Mamdani fuzzy inference algorithm

The fuzzy modeling of laser alloying for steel 30X1CH2A is based on the Mamdani fuzzy inference algorithm [3]. Specifically, the generated rules for determining temperatures $T1$ in the processing zone are formulated as follows:

```
rule1 = ctrl.Rule(t1['M'] & t2['M'] &
t3['M'] & p1['M'] & p2['M'] & p3['M'],
T_ctrl['Medium'])
rule2 = ctrl.Rule(t1['L'] & t2['M'] &
t3['M'] & p1['M'] & p2['M'] & p3['M'],
T_ctrl['Medium'])
rule3 = ctrl.Rule(t1['H'] & t2['M'] &
t3['M'] & p1['M'] & p2['M'] & p3['M'],
T_ctrl['Medium'])
rule4 = ctrl.Rule(t1['M'] & t2['L'] &
t3['M'] & p1['M'] & p2['M'] & p3['M'],
T_ctrl['Medium'])
rule5 = ctrl.Rule(t1['M'] & t2['H'] &
t3['M'] & p1['M'] & p2['M'] & p3['M'],
T_ctrl['Medium'])
rule6 = ctrl.Rule(t1['M'] & t2['M'] &
t3['L'] & p1['M'] & p2['M'] & p3['M'],
T_ctrl['MediumLow'])
rule7 = ctrl.Rule(t1['M'] & t2['M'] &
t3['H'] & p1['M'] & p2['M'] & p3['M'],
T_ctrl['Medium'])
rule8 = ctrl.Rule(t1['M'] & t2['M'] &
t3['M'] & p1['L'] & p2['M'] & p3['M'],
T_ctrl['Low'])
rule9 = ctrl.Rule(t1['M'] & t2['M'] &
t3['M'] & p1['H'] & p2['M'] & p3['M'],
T_ctrl['High'])
rule10 = ctrl.Rule(t1['M'] & t2['M'] &
t3['M'] & p1['M'] & p2['L'] & p3['M'],
T_ctrl['Medium'])
```

```
rule11 = ctrl.Rule(t1['M'] & t2['M'] &
t3['M'] & p1['M'] & p2['H'] & p3['M'],
T_ctrl['Medium'])
rule12 = ctrl.Rule(t1['M'] & t2['M'] &
t3['M'] & p1['M'] & p2['M'] & p3['L'],
T_ctrl['VeryLow'])
rule13 = ctrl.Rule(t1['M'] & t2['M'] &
t3['M'] & p1['M'] & p2['M'] & p3['H'],
T_ctrl['VeryHigh'])
rule14 = ctrl.Rule(t1['L'] & t2['L'] &
t3['L'] & p1['L'] & p2['L'] & p3['L'],
T_ctrl['VeryVeryLow'])
rule15 = ctrl.Rule(t1['L'] & t2['H'] &
t3['L'] & p1['L'] & p2['L'] & p3['H'],
T_ctrl['Low'])
rule16 = ctrl.Rule(t1['L'] & t2['H'] &
t3['L'] & p1['L'] & p2['L'] & p3['H'],
T_ctrl['Low'])
rule17 = ctrl.Rule(t1['H'] & t2['H'] &
t3['L'] & p1['L'] & p2['L'] & p3['L'],
T_ctrl['VeryVeryLow'])
rule18 = ctrl.Rule(t1['L'] & t2['L'] &
t3['H'] & p1['L'] & p2['L'] & p3['H'],
T_ctrl['VeryHigh'])
rule19 = ctrl.Rule(t1['H'] & t2['L'] &
t3['H'] & p1['L'] & p2['L'] & p3['L'],
T_ctrl['VeryVeryLow'])
rule20 = ctrl.Rule(t1['L'] & t2['H'] &
t3['H'] & p1['L'] & p2['L'] & p3['L'],
T_ctrl['VeryVeryLow'])
rule21 = ctrl.Rule(t1['H'] & t2['H'] &
t3['H'] & p1['L'] & p2['L'] & p3['H'],
T_ctrl['VeryHigh'])
rule22 = ctrl.Rule(t1['L'] & t2['L'] &
t3['L'] & p1['H'] & p2['L'] & p3['H'],
T_ctrl['High'])
rule23 = ctrl.Rule(t1['H'] & t2['L'] &
t3['L'] & p1['H'] & p2['L'] & p3['L'],
T_ctrl['Low'])
```

```

rule24 = ctrl.Rule(t1['L'] & t2['H'] &
t3['L'] & p1['H'] & p2['L'] & p3['L'],
T_ctrl['Low'])
rule25 = ctrl.Rule(t1['H'] & t2['H'] &
t3['L'] & p1['H'] & p2['L'] & p3['H'],
T_ctrl['VeryHigh'])
rule26 = ctrl.Rule(t1['L'] & t2['L'] &
t3['H'] & p1['H'] & p2['L'] & p3['L'],
T_ctrl['Low'])
rule27 = ctrl.Rule(t1['H'] & t2['L'] &
t3['H'] & p1['H'] & p2['L'] & p3['H'],
T_ctrl['VeryVeryHigh'])
rule28 = ctrl.Rule(t1['L'] & t2['H'] &
t3['H'] & p1['H'] & p2['L'] & p3['H'],
T_ctrl['VeryVeryHigh'])
rule29 = ctrl.Rule(t1['H'] & t2['H'] &
t3['H'] & p1['H'] & p2['L'] & p3['L'],
T_ctrl['Low'])
rule30 = ctrl.Rule(t1['L'] & t2['L'] &
t3['L'] & p1['L'] & p2['H'] & p3['H'],
T_ctrl['Low'])
rule31 = ctrl.Rule(t1['H'] & t2['L'] &
t3['L'] & p1['L'] & p2['H'] & p3['L'],
T_ctrl['VeryVeryLow'])
rule32 = ctrl.Rule(t1['L'] & t2['H'] &
t3['L'] & p1['L'] & p2['H'] & p3['L'],
T_ctrl['VeryVeryLow'])
rule33 = ctrl.Rule(t1['H'] & t2['H'] &
t3['L'] & p1['L'] & p2['H'] & p3['H'],
T_ctrl['Low'])
rule34 = ctrl.Rule(t1['L'] & t2['L'] &
t3['H'] & p1['L'] & p2['H'] & p3['L'],
T_ctrl['VeryVeryLow'])
rule35 = ctrl.Rule(t1['H'] & t2['L'] &
t3['H'] & p1['L'] & p2['H'] & p3['H'],
T_ctrl['VeryHigh'])
rule36 = ctrl.Rule(t1['L'] & t2['H'] &
t3['H'] & p1['L'] & p2['H'] & p3['H'],
T_ctrl['VeryHigh'])
rule37 = ctrl.Rule(t1['H'] & t2['H'] &
t3['H'] & p1['L'] & p2['H'] & p3['L'],
T_ctrl['VeryVeryLow'])
rule38 = ctrl.Rule(t1['L'] & t2['L'] &
t3['L'] & p1['H'] & p2['H'] & p3['L'],
T_ctrl['Low'])
rule39 = ctrl.Rule(t1['H'] & t2['L'] &
t3['L'] & p1['H'] & p2['H'] & p3['H'],
T_ctrl['VeryHigh'])
rule40 = ctrl.Rule(t1['L'] & t2['H'] &
t3['L'] & p1['H'] & p2['H'] & p3['H'],
T_ctrl['High'])
rule41 = ctrl.Rule(t1['H'] & t2['H'] &
t3['L'] & p1['H'] & p2['H'] & p3['L'],
T_ctrl['Low'])
rule42 = ctrl.Rule(t1['L'] & t2['L'] &
t3['H'] & p1['H'] & p2['H'] & p3['H'],
T_ctrl['VeryVeryHigh'])
rule43 = ctrl.Rule(t1['H'] & t2['L'] &
t3['H'] & p1['H'] & p2['H'] & p3['L'],
T_ctrl['Low'])
rule44 = ctrl.Rule(t1['L'] & t2['H'] &
t3['H'] & p1['H'] & p2['H'] & p3['L'],
T_ctrl['Low'])
rule45 = ctrl.Rule(t1['H'] & t2['H'] &
t3['H'] & p1['H'] & p2['H'] & p3['H'],
T_ctrl['VeryVeryHigh'])

```

Similar Mamdani-type fuzzy inference rules were also constructed for T_2 , T_3 , and T_4 .

The models were tested using the test dataset (Table 1.1). The fuzzy models' performance evaluation results, including statistical metrics $RMSE$, MAE , $MAPE$, and R^2 , are presented in Table 2.1.

Table 2.1 – Fuzzy models performance evaluation results

Statistical Metric	Model Response			
	T_1	T_2	T_3	T_4
$RMSE$	922 K	468 K	463 K	376 K
MAE	916 K	389 K	345 K	320 K
$MAPE$	17.2%	26.1%	8.9%	19.9%
R^2	0.9005	0.8530	0.9130	0.8680

The best results were obtained for T_3 (minimum $MAPE = 8.9\%$ and maximum $R^2 = 0.9130$), with all metric values confirming the fuzzy model's satisfactory accuracy against finite element analysis. Upon comparing the outcomes of neuro-fuzzy modelling within the ANFIS framework for the laser alloying of steel 30XГCH2A (Table 1.2) with those of fuzzy modelling (Table 2.1), it is evident that all $RMSE$, MAE , and $MAPE$ metrics of the neuro-fuzzy model were inferior to their fuzzy model counterparts, whereas the R^2 determination coefficients were superior.

Figure 2.1 illustrates the graph depicting the relationship between maximum temperature T_1 and the processing parameters t_1 and p_1 , as derived from the fuzzy model.

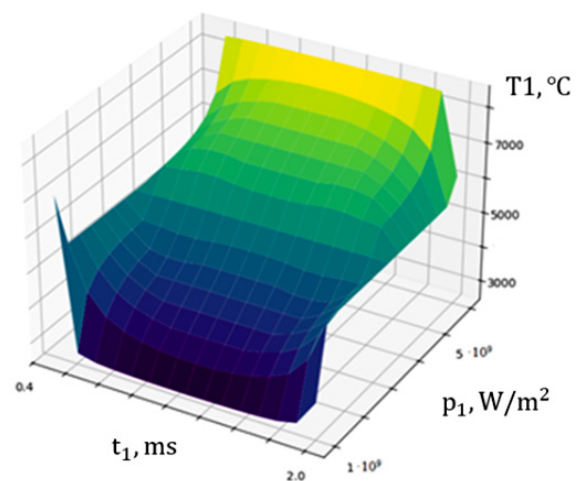


Figure 2.1 – Dependence of temperature T_1 on processing parameters t_1 and p_1 as determined by the fuzzy system

Conclusion

This study conducted comparative modeling of the laser alloying process for 30XГCH2A structural steel with chromium using two approaches: an adaptive neuro-fuzzy inference system (ANFIS) and fuzzy logic. The modeling was based on finite element analysis data and aimed to establish relationships between pulsed laser parameters and temperatures in the processing zone.

Neuro-fuzzy and fuzzy models were developed to predict key thermal parameters (maximum surface temperatures T_1 , T_2 , T_3 and subsurface temperature T_4) during laser alloying of 30XГCH2A steel.

Both models demonstrated agreement with finite element analysis results, confirming their validity.

A comparative accuracy assessment of the models was conducted on the test dataset using statistical metrics (*RMSE*, *MAE*, *MAPE*, R^2), revealing that the neuro-fuzzy model achieves significantly higher predictive accuracy than the Mamdani fuzzy logic model. The determination coefficient R^2 for neuro-fuzzy models ranged between 0.9747 and 0.9808 compared to 0.8530–0.9130 for fuzzy models, while the mean absolute percentage error (MAPE) of neuro-fuzzy models remained below 7%, demonstrating their strong agreement with experimental data.

The study confirmed that hybrid systems combining neural networks and fuzzy logic serve as effective tools for modeling complex nonlinear processes, including laser material processing. The neuro-fuzzy systems' capability to learn and automatically adjust membership functions based on experimental data eliminates the reliance on expert knowledge inherent in conventional fuzzy inference systems, while significantly improving prediction accuracy.

The developed models can be used to optimize laser alloying process parameters for fabricating surface layers with tailored performance characteristics. Future research will focus on adapting this approach for other steel grades and alloying elements.

REFERENCES

1. Grigoryants, A.G. Technological Processes of Laser Treatment / A.G. Grigoryants, I.N. Shiganov, A.I. Misyurov; ed. by A.G. Grigoryants. – Moscow: BMSTU Press, 2006. – 664 p.
2. *Technology of Wear-Resistant Coatings Formation on Iron-Based Materials by Laser Treatment* / O.G. Devoino [et al.]. – Minsk: BNTU Press, 2020. – 280 p.
3. Shtovba, S.D. Fuzzy System Design Using MATLAB / S.D. Shtovba. – Moscow: Hotline Publishing, 2007. – 284 p.
4. Golovko, V.A. Neural Network Data Processing Technologies: Textbook / V.A. Golovko,

V.V. Krasnoproshin. – Minsk: BSU Press, 2017. – 263 p.

5. *Fuzzy MCDM Methodology for Analysis of Fibre Laser Cutting Process* / M. Trifunović, M. Madić, G. Petrović, D. Marinković, P. Janković // Appl. Sci. – 2025. – Vol. 15, iss. 13. – P. 7364. – DOI: <https://doi.org/10.3390/app15137364>.

6. Maji, K. Analysis and synthesis of laser forming process using neural networks and neuro-fuzzy inference system / K. Maji, D.K. Pratihari, A.K. Nath // Soft Computing. – 2013. – № 17. – P. 849–865. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s00500-012-0949-7>.

7. Sohrabpoor, H. Perspective of Applying Adaptive Neuro Fuzzy Inference System (ANFIS) in Laser Cladding of Graphene-Metal Alloys / H. Sohrabpoor // J. Nanotechnol Nanomed Nanobio-technol. – 2017. – Vol. 4. – P. 017.

8. *Optimization of laser alloying parameters of 30XГCH2A steel using a genetic algorithm and neural network modeling* / G.A. Bayevich, Yu.V. Nikityuk, A.V. Maksimenko, V.V. Kim, S.R. Kamalov, I.Yu. Aushev // Vestnik Gomel'skogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta imeni P.O. Sukhogo. – 2025. – iss. 2 (101). – P. 23–32 (in Russian).

9. Jang, J.-S.R. ANFIS: Adaptive-Network-Based Fuzzy Inference System / J.-S.R. Jang // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. – 1993. – iss. 23 (3). – P. 665–685.

The article was prepared as part of the implementation of the project “Sofia Kovalevskaya Northwestern Center for Mathematical Research” (Agreement № 075-02-2025-1607, dated February 27, 2025)

The article was submitted 30.07.2025.

Информация об авторах

Баевич Георгий Александрович – старший преподаватель
Никитюк Юрий Валерьевич – к.ф.-м.н., доцент
Марченко Лариса Николаевна – к.т.н., доцент
Максименко Александр Васильевич – к.т.н., доцент

ВЕКТОРНЫЕ ВРАЩАЮЩИЕСЯ ГАУССОВЫ ПУЧКИ АРНО СО СЛОЖНЫМ АСТИГМАТИЗМОМ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

VECTOR ROTATING GAUSSIAN ARNAUD BEAMS WITH COMPLEX ASTIGMATISM

S.S. Girgel

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Обсуждаются физические свойства решений параболического уравнения, описывающих векторные вращающиеся параксиальные ТМ световые пучки Арно со сложным астигматизмом. Установлены возможные значения свободных параметров, при которых пучки Арно переносят конечную мощность. Найдены явные выражения, описывающие энергетические и поляризационные свойства векторных световых пучков Арно со сложным астигматизмом. Выполнено графическое моделирование и проведен соответствующий анализ эллипсов поляризации, интенсивности и поперечных потоков энергии векторных параксиальных световых пучков Арно с однородной и неоднородной (ТМ-моды) поляризациями.

Ключевые слова: поляризация, векторные пучки, вращающиеся пучки, гауссовы пучки, сложный астигматизм, квадратичная интегрируемость, поперечные потоки энергии.

Для цитирования: Гиргель, С.С. Векторные вращающиеся гауссовы пучки Арно со сложным астигматизмом / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 43–48. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_43. – EDN: UPGBEC

Abstract. New solutions of the parabolic equation describing vector rotating paraxial TM Arnaud beams with complex astigmatism are investigated. Permissible values of free parameters for which Arnaud beams carry finite power are established. Explicit expressions describing the energy and polarization properties of vector Arnaud beams with complex astigmatism are proposed. Graphical modeling and corresponding analysis of polarization ellipses, intensity and transverse energy fluxes of vector paraxial Arnaud beams with homogeneous and inhomogeneous (TM modes) polarization are carried out.

Keywords: polarization, vector beams, rotating beams, Gaussian beams, complex astigmatism, TM-modes, transverse energy fluxes.

For citation: Girgel, S.S. Vector rotating Gaussian Arnaud beams with complex astigmatism / S.S. Girgel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 3 (64). – P. 43–48. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_43 (in Russian). – EDN: UPGBEC

Введение

В настоящее время широко используются лазерные круговые гауссовы световые пучки, у которых пучки обладают круговой симметрией относительно оси пучка z [1]. Пучки с общим астигматизмом изучены значительно меньше [1]–[14]. Данная работа развивает направление исследований работ автора [7]–[14], где обсуждались энергетические и поляризационные свойства различных векторных световых пучков. Здесь разработанный математический формализм применяется для описания достаточно общих вращающихся векторных гауссовых световых пучков Арно со сложным астигматизмом.

Предварительно кратко излагается общий формализм для описания вращающихся скалярных гауссовых световых пучков Арно со сложным астигматизмом. В следующих разделах сначала обсуждаются энергетические и

поляризационные свойства вращающихся векторных гауссовых световых пучков Арно со сложным астигматизмом и однородной поляризацией по сечению пучка, затем гауссовы ТМ-моды Арно со сложным астигматизмом и неоднородно поляризованные по сечению пучка. Обсуждается влияние свободных параметров на поляризационные и энергетические свойства векторных пучков Арно со сложным астигматизмом. В заключении кратко сформулированы основные результаты работы.

1 Скалярные гауссовы световые пучки Арно со сложным астигматизмом и свойства эллиптического светового пятна

Настоящая работа является продолжением работы [13], где анализировались геометрические характеристики эллипса интенсивности скалярных гауссовых световых пучков Арно.

Сейчас мы будем обсуждать физические свойства векторных гауссовых световых пучков Арно с однородной и неоднородной поляризациями.

Скалярное параболическое уравнение $(\partial_{xx} + \partial_{yy} + 2ik\partial_z)f = 0$ описывает параксиальные световые пучки и имеет множество самых разнообразных решений. Так, согласно [2], [14], комплексная амплитуда скалярного гауссового светового пучка Арно описывается астигматическим гауссианом

$$G_A = \sqrt{\frac{q_{ox}q_{oy}}{q_xq_y}} \exp\left(\frac{ik}{2}(\mathbf{r}_\perp \Gamma \mathbf{r}_\perp)\right), \quad (1.1)$$

где $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$ – поперечный радиус-вектор. Матрица Γ гауссиана G_A со сложным астигматизмом является комплексной и может быть представлена в форме [2]: $\Gamma = \Gamma' + i\Gamma''$. Вещественная часть матрицы Γ : $\Gamma' = \begin{pmatrix} \Gamma'_{11}; \Gamma'_{12} \\ \Gamma'_{12}; \Gamma'_{22} \end{pmatrix}$, где

$$\Gamma'_{11,22} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \pm \text{ch } 2\alpha \frac{\rho_1 - \rho_2}{2};$$

$$\Gamma'_{12} = -\text{sh } 2\alpha \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}.$$

Мнимая часть матрицы Γ : $\Gamma'' = \begin{pmatrix} \Gamma''_{11}; \Gamma''_{12} \\ \Gamma''_{12}; \Gamma''_{22} \end{pmatrix}$, где

$$\Gamma''_{11,22} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \pm \text{ch } 2\alpha \frac{\omega_1 - \omega_2}{2};$$

$$\Gamma''_{12} = \text{sh } 2\alpha \frac{\rho_2 - \rho_1}{2}.$$

Здесь и далее применяются обозначения Арно [2]: $q_{x,y}^{-1} = \rho_{1,2} + i\omega_{1,2}$. Два комплексных параметра пучка $q_{x,y} = z - q_{ox,oy}$ включают два свободных комплексных параметра $q_{ox,oy} = q'_{ox,oy} + iq''_{ox,oy}$, $i = \sqrt{-1}$.

Значения свободных параметров q''_{ox} , q''_{oy} и угла поворота α не могут быть произвольными и должны быть ограничены. Условия квадратичной интегрируемости (КИ) гауссиана G_A и, тем самым, физической реализуемости скалярного гауссового пучка Арно со сложным астигматизмом можно представить в следующей форме [14]:

$$\left\{ q''_{0x} > 0, q''_{0y} > 0, \text{sh } 2\alpha = c \frac{2\sqrt{q''_{0x}q''_{0y}}}{|q_x - q_y|}, 0 \leq c < 1 \right\}. \quad (1.2)$$

2 Векторные гауссовы световые пучки Арно с однородной поляризацией

Перейдем к обсуждению векторных гауссовых световых пучков Арно. В [13] предложен формализм для описания векторных параксиальных световых пучков с общим астигматизмом. Этот формализм применим и для векторных

пучков Арно. Отличие от [13] состоит в том, что гауссиан G_A (1.1) отличается от общего гауссиана G в [13]. Однако общие формулы из [13] применимы и для пучков Арно.

Следуя [13], можем записать, что для параксиальных векторных гауссовых пучков Арно со сложным астигматизмом и однородной поляризацией векторы электрического и магнитного полей соответственно равны

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_\perp - \mathbf{r}_\perp \mathbf{b}_\perp \cdot \mathbf{e}_z\} G_A,$$

$$\mathbf{H}^{(1)} = \frac{\varepsilon}{n} ([\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\perp] - [\mathbf{e}_\perp, \mathbf{b}_\perp]) G_A.$$

Здесь, для удобства, введен вектор $\mathbf{b}_\perp \equiv \Gamma \mathbf{r}_\perp$. Его компоненты $(b_x, b_y) = (\Gamma_{11}x + \Gamma_{12}y, \Gamma_{12}x + \Gamma_{22}y)$. Поляризацию пучка Арно задает нормированный $(|\mathbf{e}_\perp|^2 = 1)$ вектор поляризации $\mathbf{e}_\perp = \eta_x \mathbf{e}_x + \eta_y \mathbf{e}_y$. Геометрические свойства эллипса поляризации электрического вектора светового пучка задаются комплексным параметром $\eta_y / \eta_x = tg(\psi' + i\psi'')$ [8], который содержит азимут ψ' главной оси эллипса поляризации относительно оси ox и эллиптичность волны $\gamma = \text{th } \psi''$.

Однородно поляризованный векторный пучок Арно со сложным астигматизмом переносит конечную мощность, как можно показать, при выполнении прежних требований (1.2).

Энергетические характеристики векторного пучка Арно с однородной поляризацией удобно выразить через вектор $\mathbf{b}_\perp$. Плотность энергии и плотности продольного потока энергии S_z электромагнитного поля пучка Арно равны соответственно

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi} \left| \frac{\det Q(0)}{\det Q(z)} \right| \exp(-k \mathbf{r}_\perp \text{Im}(\mathbf{b}_\perp)), \quad S_z = \frac{c}{n} w.$$

Плотности поперечного орбитального $\mathbf{S}_o$ и спинного $\mathbf{S}_s$ потоков энергии параксиального пучка соответственно равны [13]

$$\mathbf{S}_o = S_z \cdot \text{Re}(b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y),$$

$$\mathbf{S}_s = S_z \cdot \text{th } 2\psi'' \cdot \text{Im}(-b_y \mathbf{e}_x + b_x \mathbf{e}_y)$$

и удовлетворяют равенству $\mathbf{S}_\perp = \mathbf{S}_o + \mathbf{S}_s$.

Для графического моделирования полученных результатов для наглядности мы перешли к безразмерным переменным $X = x/x_0$, $Y = y/x_0$, $Z = z/z_0$, где $x_0 > 0$, $z_0 = kx_0^2/2$ – характерные линейные размеры пучка в поперечном и продольном направлениях соответственно. Чтобы обеспечить квадратичную интегрируемость (КИ) функций векторной амплитуды пучков Арно и, тем самым, переносимую конечную мощность через поперечное сечение пучка, выбирались параметры, удовлетворяющие условиям (1.2).

Картина интенсивности однородно поляризованного светового пучка Арно со сложным

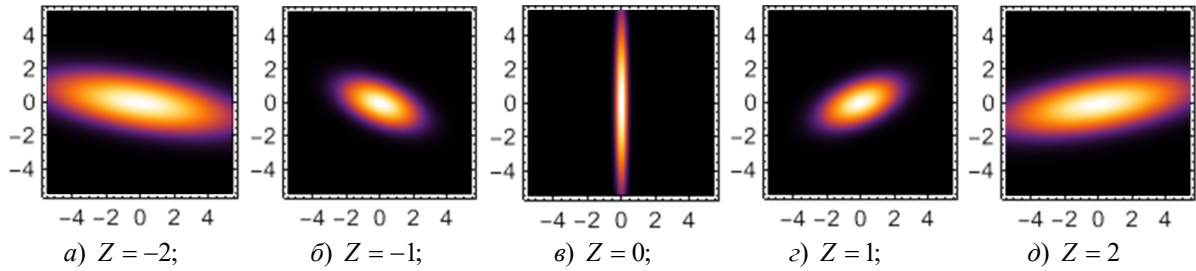


Рисунок 1.1 – Деформация и вращение эллипсов интенсивности однородно поляризованных пучков Арно со сложным астигматизмом. Свободные параметры: $q'_{0x} = 0$; $q'_{0y} = 0$; $q''_{0x} = 0,2$; $q''_{0y} = 2$; $c = 0,5$

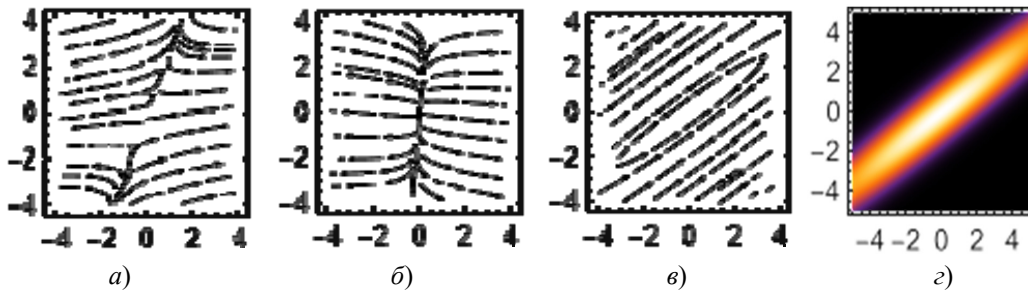


Рисунок 1.2 – Орбитальный (а), спиновый (б), общий поперечный потоки энергии однородно поляризованных пучков Арно (ТМ моды) со сложным астигматизмом (в), интенсивность пучка (г). Свободные параметры: $Z = 1,8$; $q'_{0x} = 0$; $q'_{0y} = 0$; $q''_{0x} = 0,2$; $q''_{0y} = 2,9$; $c = 0,97$

астигматизмом представляет собой световое пятно эллиптической формы (рисунки 1.1–1.2). Азимуты главных осей эллипса интенсивности светового пятна определяются формулой

$\text{tg}(2\psi) = \frac{2\Gamma''_{12}}{\Gamma''_{11} - \Gamma''_{22}}$. Параметр эллиптичности светового пятна можно вычислить, как [13]

$$\sin(2\chi) = \frac{2\sqrt{\Gamma''_{11}\Gamma''_{22} - \Gamma''_{12}^2}}{\Gamma''_{11} + \Gamma''_{22}} = \frac{2\sqrt{\Gamma''}}{\Gamma''_c}.$$

Некоторые результаты графического моделирования поперечных потоков энергии и интенсивности однородно поляризованного параксиального светового пучка Арно со сложным астигматизмом изображены в относительных единицах на рисунках 1.1–1.2 при различных значениях свободных параметров.

Для наглядности выбиралась циркулярная поляризация пучков Арно. Тем самым спиновые потоки энергии были максимальными. Вращение эллипсов интенсивности и их деформация по мере распространения в свободном пространстве однородно поляризованных пучков Арно со сложным астигматизмом аналогичны таковым для скалярных пучков Арно. Однако картины поперечных потоков энергии являются сложными и зависят от выбора ряда свободных параметров. На рисунке 1.2 видно, что картина поперечного полного потока энергии может повторять очертания эллипсов интенсивности светового пятна пучка в поперечном сечении. В то же время симметрия спинового и орбитального потоков

энергии не соответствует симметрии светового пятна пучка.

3 ТМ моды векторных гауссовых световых пучков Арно

Перейдем к обсуждению физических свойств гауссовых световых пучков Арно со сложным астигматизмом и неоднородной по сечению поляризацией. Рассмотрим ТМ-моды. Для ТМ мод векторы электрического и магнитного полей гауссового пучка Арно со сложным астигматизмом соответственно будут равны [13]

$$\mathbf{E}_{TM} = \left(\mathbf{b}_\perp + \left(\frac{i}{k} (\Gamma_{11} + \Gamma_{22}) - \mathbf{b}_\perp^2 \right) \mathbf{e}_z \right) G_A;$$

$$\mathbf{H}_{TM}^{(1)} = \frac{\varepsilon}{n} [\mathbf{e}_z, \mathbf{b}_\perp] G_A.$$

Поляризация пучка определяется комплексным параметром $\frac{\mathbf{r}_\perp \Gamma \mathbf{e}_y}{\mathbf{r}_\perp \Gamma \mathbf{e}_x} = \text{tg}(\psi' + i\psi'')$. Азимут эллипсов поляризации ψ' , эллиптичность $\gamma = \text{th} \psi''$.

Условия физической реализуемости векторного пучка Арно со сложным астигматизмом и с неоднородной поляризацией, как можно показать, остаются прежние (1.2).

Плотность продольного потока энергии ТМ мод пучков Арно $S_z = \frac{c\varepsilon}{8\pi n} |\mathbf{b}_\perp G_A|^2$. Общая плотность поперечного потока энергии для ТМ мод равна [13]

$$\mathbf{S}_\perp = \mathbf{S}_o + \mathbf{S}_s = \frac{c\varepsilon|G|^2}{8\pi n} \operatorname{Im} \left(\mathbf{b}_\perp^* \left((\Gamma_{11} + \Gamma_{22}) / k + i\mathbf{b}_\perp^2 \right) \right).$$

Согласно [13], плотности орбитального $\mathbf{S}_o$ и спинного $\mathbf{S}_s$ потоков энергии парааксиального гауссового пучка Арно можно записать как

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_o &= \frac{c\varepsilon|G|^2}{8\pi n} \times \\ &\times \operatorname{Im} \left\{ \frac{\Gamma_{12}^* (\Gamma_{11} - \Gamma_{22})}{k} (\mathbf{e}_x y - \mathbf{e}_y x) + i\mathbf{b}_\perp \cdot |\mathbf{b}_\perp|^2 \right\}, \\ \mathbf{S}_s &= \frac{c\varepsilon|G|^2}{8\pi n} \times \\ &\times \operatorname{Im} \left\{ \left(\frac{\Gamma_{22} (2\Gamma_{12}^* y + \Gamma_{11}^* x)}{k} - 2b_x^* b_y \operatorname{Im}(b_y) \right) \mathbf{e}_x + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\Gamma_{11} (2\Gamma_{12}^* x + \Gamma_{22}^* y)}{k} - 2b_y^* b_x \operatorname{Im}(b_x) \right) \mathbf{e}_y \right\}. \end{aligned}$$

На рисунках 3.1–3.4 показаны некоторые характерные картины поперечных потоков энергии и общих интенсивностей в относительных единицах для ТМ мод Арно со сложным астигматизмом. На всех рисунках 3.1–3.4 взят одинаковый свободный параметр $k \rightarrow 2$. Чтобы обеспечить КИ функций векторной амплитуды пучков Арно и, тем самым, переносимую конечную мощность через поперечное сечение пучка, выбирались параметры, удовлетворяющие условиям (1.2).

Для ТМ мод Арно, в отличие от пучков Арно с однородной поляризацией, в поперечном сечении пучка наблюдаются не одно, а два эллиптических пятна, которые иногда могут сливаться в эллиптическое кольцо. По мере распространения в свободном пространстве эти два пятна независимо и синхронно деформируются и вращаются (рисунок 3.1). В интервале $(-\infty > Z > \infty)$ главные оси эллипсов интенсивности снова вращаются на 180° градусов, при этом все время оставаясь параллельными.

Поляризация ТМ мод Арно со сложным астигматизмом является сильно неоднородной по поперечному сечению пучка и, в общем случае, эллиптической. При изменении расстояния Z от оси пучка поляризация периодически видоизменяется от линейной до круговой.

Видно, что линии орбитальных и спинных потоков энергии ориентированы самыми разнообразными способами.

Любопытно, что линии спинных потоков энергии ТМ пучков Арно часто образуют замкнутые кривые. Это соответствует общим спиралевидным энергетическим спинным потокам. Как и для однородной поляризации, на рисунках 3.3–3.5 эллипсы поперечных спинных потоков энергии по форме похожи на эллипсы интенсивности.

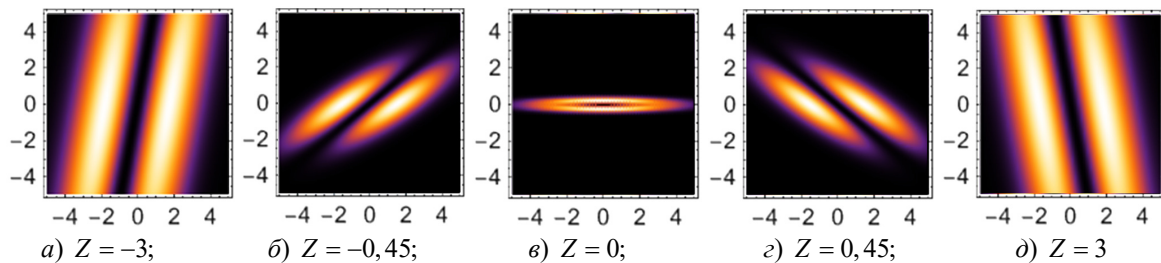


Рисунок 3.1 – Вращение картины интенсивности векторных пучков Арно (ТМ моды) со сложным астигматизмом по мере распространения в пространстве.

Свободные параметры: $Z = 0$; $q'_{0x} = 0$; $q'_{0y} = 0$; $q''_{0x} = 4,4$; $q''_{0y} = 0,1$; $c = 0,82$

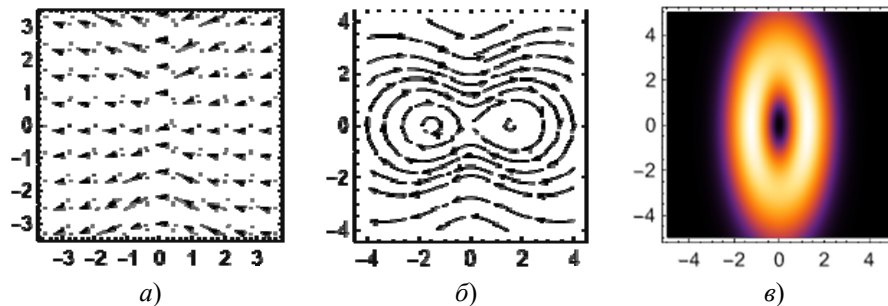


Рисунок 3.2 – Эллипсы поляризации (а), общий поперечный поток энергии (б), интенсивность векторных пучков Арно (ТМ моды) со сложным астигматизмом (в).

Свободные параметры: $Z = 0$; $q'_{0x} = -0,8$; $q'_{0y} = 0$; $q''_{0x} = 4,8$; $q''_{0y} = 6$; $c = 0,7$

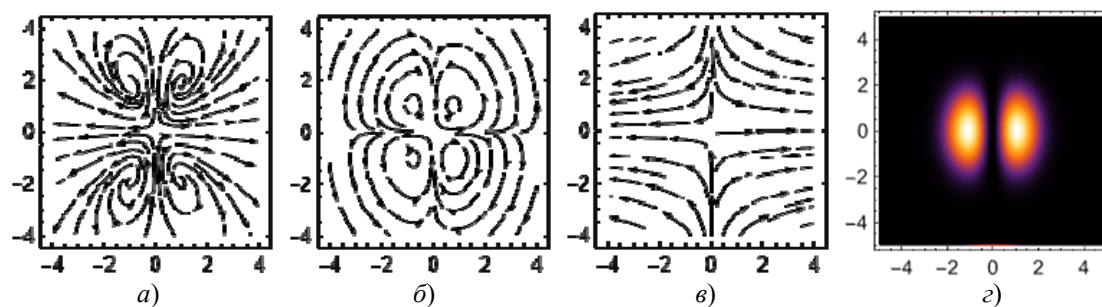


Рисунок 3.3 – Орбитальный (а), спиновый (б), общий поперечный потоки энергии векторных пучков Арно (ТМ моды) со сложным астигматизмом (в), интенсивность пучка (z).

Свободные параметры: $Z = 0$; $q'_{0x} = -0,8$; $q'_{0y} = 0,8$; $q''_{0x} = 2$; $q''_{0y} = 4$; $c = 0$

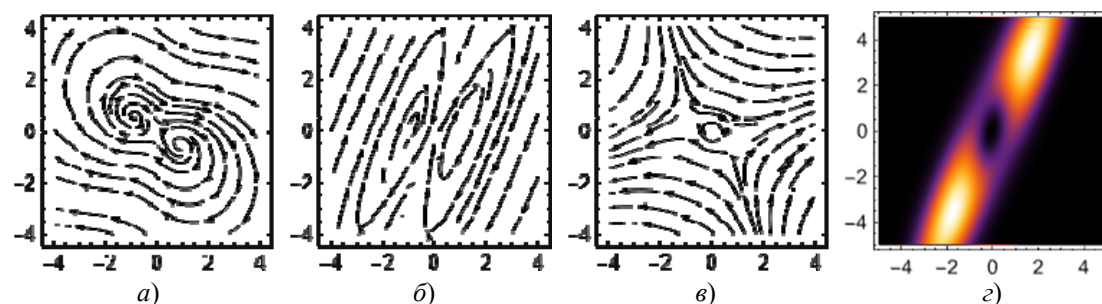


Рисунок 3.4 – Орбитальный (а), спиновый (б), общий поперечный потоки энергии векторных пучков Арно (ТМ моды) со сложным астигматизмом (в), интенсивность пучка (z).

Свободные параметры: $Z = 0$; $q'_{0x} = -0,8$; $q'_{0y} = 0,8$; $q''_{0x} = 2$; $q''_{0y} = 4$; $c = 0,9$

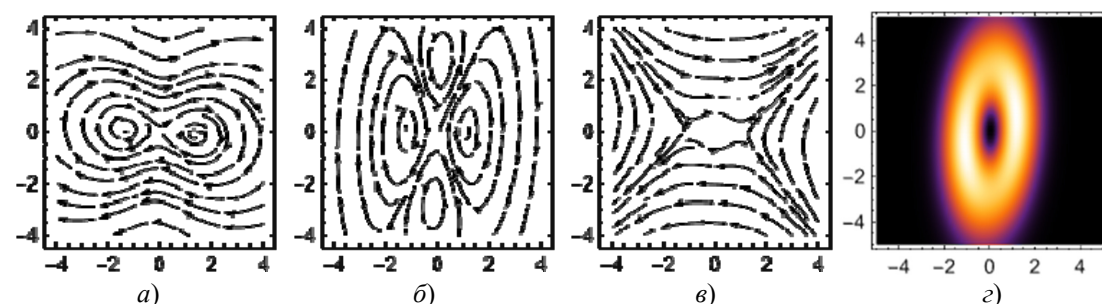


Рисунок 3.5 – Орбитальный (а), спиновый (б), общий поперечный потоки энергии векторных пучков Арно (ТМ моды) со сложным астигматизмом (в), интенсивность пучка (z).

Свободные параметры: $Z = 0,16$; $q'_{0x} = 0$; $q'_{0y} = 0,2$; $q''_{0x} = 3,5$; $q''_{0y} = 5,9$; $c = 0,67$

Отметим также важное свойство пучков Арно со сложным астигматизмом и ТМ поляризацией. При распространении их световое пятно деформируется и вращается, как и для однородно поляризованных пучков Гаусса. В интервале $(-\infty > Z > \infty)$ главная ось эллипса интенсивности снова вращается на 180° градусов.

Заключение

В данной работе представлены новые решения векторного параболического уравнения, описывающие вращающиеся параксиальные векторные пучки Арно со сложным астигматизмом и различными типами поляризации однородной и неоднородной поляризациями (ТМ-моды).

Представлены явные выражения для векторов поля, для интенсивности орбитального, спинного и общего потоков энергии пучков Арно с однородной и неоднородной поляризациями.

Проведенное графическое моделирование эллипсов поляризации, интенсивности и поперечных потоков энергии (орбитального S_o , спинного S_s и общего $S_\perp = S_o + S_s$) для обсуждаемых векторных пучков Арно подтвердило и проиллюстрировало аналитические расчеты.

Картины общей интенсивности векторных ТМ пучков Арно содержат два пика интенсивности, которые при изменении свободных параметров видоизменяются, вращаются и могут трансформироваться даже в эллиптические кольца.

Наличие нескольких свободных параметров позволяет в определенных пределах изменять физические свойства рассматриваемых пучков Арно со сложным астигматизмом. Дальнейшее их изучение откроет новые возможности использования таких пучков.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамочкин, Е.Г.* Современная оптика гауссовых пучков / Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 184 с.
2. *Arnaud, J.* Gaussian beams with general astigmatism / J. Arnaud, H. Kogelnik // *Applied Optics*. – 1969. – Vol. 25. – P. 2908–2911.
3. *Гончаренко, А.М.* Гауссовы пучки света / А.М. Гончаренко. – Минск: Наука и техника, 1977. – 142 с.
4. *Ананьев, Ю.А.* Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев. – Москва: Наука, 1990. – 264 с.
5. *Heyman, H.* Gaussian beam and pulsed beam dynamics: complex-source and complex-spectrum formulations within and beyond paraxial asymptotics / E. Heyman, L.B. Felsen // *J. Opt. Soc. Am. A*. – 2001. – Vol. 18. – P. 1588–1611.
6. *Modeling of the general astigmatic Gaussian beam and its propagation through 3D optical systems* / E. Kochkina [et al.] // *Applied Optics*. – 2013. – Vol. 42, № 24. – P. 6030–6040.
7. *Гиргель, С.С.* Скалярные параксиальные двумерные гауссовоподобные пучки / С.С. Гиргель // *Проблемы, физики, математики и техники*. – 2010. – № 1 (2). – С. 7–11.
8. *Гиргель, С.С.* Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2016. – № 1 (26). – С. 17–21.
9. *Гиргель, С.С.* Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2017. – № 4 (33). – С. 7–10.
10. *Гиргель, С.С.* Энергетические характеристики векторных циркулярных пучков Куммера конечной мощности. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // *Проблемы, физики, математики и техники*. – 2023. – № 1 (54). – С. 20–24.
11. *Гиргель, С.С.* Поляризационные свойства и поперечные потоки энергии векторных бессель-гауссовых ТМ световых пучков / С.С. Гиргель // *Проблемы, физики, математики и техники*. – 2023. – № 2 (55). – С. 15–19.
12. *Гиргель, С.С.* Энергетические и поляризационные свойства векторных гауссовых световых пучков с простым астигматизмом / С.С. Гиргель // *Проблемы, физики, математики и техники*. – 2024. – № 4 (61). – С. 19–24.
13. *Гиргель, С.С.* Энергетические и поляризационные свойства векторных гауссовых световых пучков со сложным астигматизмом / С.С. Гиргель // *Проблемы, физики, математики и техники*. – 2025. – № 1 (58). – С. 14–19.
14. *Гиргель, С.С.* Вращающиеся скалярные гауссовы пучки Арно со сложным астигматизмом / С.С. Гиргель // *Проблемы, физики, математики и техники*. – 2025. – № 2 (59). – С. 22–26.
15. *Bekshaev, A.* Internal flows and energy circulation in light beams / A. Bekshaev, K. Bliokh, M. Soskin // *Journal of Optics*. – 2011. – Vol. 13 (5). – P. 053001.

Поступила в редакцию 12.12.2024.

Информация об авторах

Гиргель Сергей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор

ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 1/2, АНОМАЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ МОМЕНТОМ И ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬЮ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А.В. Ивашкевич¹, П.О. Саченок², Е.М. Овсийук^{2,3}, В.В. Кисель⁴

¹Институт физики имени Б.И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск

²Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина

³Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

⁴Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск

SPIN 1/2 PARTICLE WITH ANOMALOUS MAGNETIC MOMENT AND POLARIZABILITY IN THE EXTERNAL MAGNETIC FIELD

A.V. Ivashkevich¹, P.O. Sachenok², E.M. Ovsyuk^{2,3}, V.V. Kisel⁴

¹B.I. Stepanov Institute of Physics of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk

²Mozyr State Pedagogical University named after I.P. Shamyakin

³Francisk Skorina Gomel State University

⁴Belarusian State Agrarian Technical University, Minsk

Аннотация. Уравнение для частицы со спином 1/2 и двумя дополнительными характеристиками – аномальным магнитным моментом и поляризуемостью – исследовано при наличии внешнего однородного магнитного поля. После разделения переменных получена система четырех дифференциальных уравнений в полярной координате. Для решения системы применяется метод Федорова – Гронского, основанный на использовании проективных операторов. Согласно этому подходу, четыре полярные компоненты выражаются через две различные функции, последние сводятся к вырожденному гипергеометрическому уравнению; при этом возникает правило квантования. Построены два типа волновых функций, соответствующие энергетические спектры найдены в аналитическом виде и исследованы численно.

Ключевые слова: частица со спином 1/2, дополнительные электромагнитные характеристики, магнитное поле, проективные операторы, точные решения, обобщенные энергетические спектры.

Для цитирования: Частица со спином 1/2, аномальным магнитным моментом и поляризуемостью во внешнем магнитном поле / А.В. Ивашкевич, П.О. Саченок, Е.М. Овсийук, В.В. Кисель // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 49–55. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_49. – EDN: TMXGPY

Abstract. In the present paper, we examine the equation for a spin 1/2 particle with two additional characteristics, anomalous magnetic moment and polarizability in presence of external uniform magnetic field. After separating the variables, we derive the system of four differential equations in the polar coordinate. To resolve the system of equations, we apply the method by Fedorov – Gronskiy, which is based on the use of projective operators. According to this approach, four polar components are expressed through only two different functions, the last reduce to the confluent hypergeometric equation; moreover there arises a definite quantization rule. We have constructed two types of the wave functions, the corresponding energy spectra are found in analytical form. The energy spectra are studied numerically as well.

Keywords: spin 1/2 particle, additional electromagnetic characteristics, magnetic field, projective operators, exact solutions, generalized energy spectra.

For citation: Spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment and polarizability in the external magnetic field / A.V. Ivashkevich, P.O. Sachenok, E.M. Ovsyuk, V.V. Kisel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 3 (64). – P. 49–55. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_49. – EDN: TMXGPY

1 Introduction

In the paper [1], within the general method by Gel'fand – Yaglom [2], starting with the extended set of representations of the Lorentz group, it was constructed a relativistic generalized equation for a spin 1/2 particle with two additional characteristics (concerning general formalism see in [3]–[5]). After eliminating the accessory variables of the complete wave function, it was derived the generalized Dirac-like equation, the last includes two additional interaction terms which are interpreted as related

to anomalous magnetic moment [6]–[9] and a second additional characteristics:

$$\left\{ \gamma^c i(\partial_c + ieA_c) + \frac{e\mu}{2M} j^{[ab]} F_{[ab]} + \frac{e\sigma}{2M^2} \gamma^c i(\partial_c + ieA_c) j^{[ab]} F_{[ab]} - M \right\} \Psi = 0; \quad (1.1)$$

the parameter μ corresponds to anomalous magnetic moment of a spin 1/2 particle, and the second parameter σ looks as related to a polarizability of the particle.

In the present paper, we will examine this equation in presence of the external uniform magnetic field.

2 Particle in magnetic field

We will apply the cylindrical coordinates and the tetrad formalism. Let the magnetic field be oriented along the axis z , $A_\phi = eBr^2/2$, $F_{12} = B$.

Then the above equation (1.1) takes on the form

$$\left\{ \left[\gamma^0 i \partial_t + \gamma^1 \left(\partial_r + \frac{1}{2r} \right) + \frac{\gamma^2}{r} + \left(i \partial_\phi - \frac{eBr^2}{2} + ij^{12} \right) + \gamma^3 i \partial_z \right] \left(1 + \frac{e\sigma}{M^2} j^{12} F_{12} \right) + \frac{e\mu}{M} j^{12} F_{12} - M \right\} \Psi = 0.$$

We will apply the Pauli basis for the Dirac matrices

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ j^{12} &= \frac{1}{2} \gamma^1 \gamma^2 = -i \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \\ ij^{12} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

and the following substitution for the wave function

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-i\epsilon t} e^{im\phi} e^{ikz} \begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \\ f_3(r) \\ f_4(r) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-i\epsilon t} e^{im\phi} e^{ikz} F(r),$$

where $F(r)$ is a 4-dimensional column

$$F(r) = \begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \\ f_3(r) \\ f_4(r) \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Let us (temporarily) simplify the notations

$$eB \Rightarrow B, \quad eF_{12} \Rightarrow B, \quad e\mu \Rightarrow \mu, \quad e\sigma \Rightarrow \sigma;$$

correspondingly, the main equation reads

$$\left\{ \left[\epsilon \gamma^0 + i \gamma^1 \partial_r + \frac{\gamma^2}{r} \left(-m - \frac{Br^2}{2} + ij^{12} \right) - k \gamma^3 \right] \times \right. \\ \left. \times \left(1 + \frac{\sigma B}{M^2} j^{12} \right) + \frac{\mu B}{M} j^{12} - M \right\} \Psi = 0,$$

or

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i\partial_r \\ 0 & 0 & -i\partial_r & 0 \\ 0 & i\partial_r & 0 & 0 \\ i\partial_r & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \right. \\ & \left. + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{i}{r} \\ 0 & 0 & -\frac{i}{r} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{r} & 0 & 0 \\ \frac{i}{r} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \right. \\ & \left. \times \begin{pmatrix} -m + \frac{1}{2} - \frac{Br^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m - \frac{1}{2} - \frac{Br^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m + \frac{1}{2} - \frac{Br^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m - \frac{1}{2} - \frac{Br^2}{2} \end{pmatrix} - \right. \\ & \left. - k \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \right. \\ & \left. \times \left(1 - i \frac{\sigma B}{M^2} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \right) - \right. \\ & \left. - i \frac{\mu B}{M} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} - M \right\} \Psi = 0. \end{aligned}$$

With the use of notations

$$\begin{aligned} a_{m+1/2} &= \frac{d}{dr} + \frac{m+1/2+Br^2/2}{r}, \\ b_{m-1/2} &= \frac{d}{dr} - \frac{m-1/2+Br^2/2}{r}, \end{aligned}$$

the last equation reads simpler

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & (\epsilon+k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\epsilon-k) \\ (\epsilon-k) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\epsilon+k) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(1 - i \frac{\sigma B}{2M^2} \right) f_1(r) \\ \left(1 + i \frac{\sigma B}{2M^2} \right) f_2(r) \\ \left(1 - i \frac{\sigma B}{2M^2} \right) f_3(r) \\ \left(1 + i \frac{\sigma B}{2M^2} \right) f_4(r) \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -ia_{m+1/2} \\ 0 & 0 & -ib_{m-1/2} & 0 \\ 0 & ia_{m+1/2} & 0 & 0 \\ ib_{m-1/2} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \left(1+i\frac{\sigma B}{2M^2}\right)f_1(r) \\ \left(1-i\frac{\sigma B}{2M^2}\right)f_2(r) \\ \left(1+i\frac{\sigma B}{2M^2}\right)f_3(r) \\ \left(1-i\frac{\sigma B}{2M^2}\right)f_4(r) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \left(-i\frac{\mu B}{2M}-M\right)f(r)_1 \\ \left(+i\frac{\mu B}{2M}-M\right)f_2(r) \\ \left(-i\frac{\mu B}{2M}-M\right)f_3(r) \\ \left(+i\frac{\mu B}{2M}-M\right)f_4(r) \end{vmatrix} = 0,$$

it leads to the separate equations

$$\begin{aligned} & -a_{m+1/2}f_4(r)\left(\frac{B\sigma}{2M^2}+i\right) + \\ & + f_3(r)(k+\varepsilon)\left(1-\frac{iB\sigma}{2M^2}\right) + f_1(r)\left(-\frac{iB\mu}{2M}-M\right) = 0, \\ & b_{m-1/2}f_3(r)\left(\frac{B\sigma}{2M^2}-i\right) + \\ & + f_4(r)(\varepsilon-k)\left(1+\frac{iB\sigma}{2M^2}\right) + f_2(r)\left(+\frac{iB\mu}{2M}-M\right) = 0, \\ & a_{m+1/2}f_2(r)\left(\frac{B\sigma}{2M^2}+i\right) + \\ & + f_1(r)(\varepsilon-k)\left(1-\frac{iB\sigma}{2M^2}\right) + f_3(r)\left(-\frac{iB\mu}{2M}-M\right) = 0, \\ & -b_{m-1/2}f_1(r)\left(\frac{B\sigma}{2M^2}-i\right) + \\ & + f_2(r)(\varepsilon+k)\left(1+\frac{iB\sigma}{2M^2}\right) + f_4(r)\left(+\frac{iB\mu}{2M}-M\right) = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

In order to resolve this system, we will apply the method by Fedorov – Gronskey [10]. It is based on the use of projective operators related to the third spin projection

$$Y = ij^{12} = \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{vmatrix}; P_+ = \begin{vmatrix} 1000 \\ 0000 \\ 0010 \\ 0000 \end{vmatrix}, P_- = \begin{vmatrix} 0000 \\ 0100 \\ 0000 \\ 0001 \end{vmatrix};$$

according to this approach, each projective constituent is determined through one function:

$$\Psi_+(r) = \begin{vmatrix} f_1 \\ 0 \\ f_3 \\ 0 \end{vmatrix} F_1(r), \quad \Psi_-(r) = \begin{vmatrix} 0 \\ f_2 \\ 0 \\ f_4 \end{vmatrix} F_2(r),$$

where $F_1(r)$, $F_2(r)$ note two main functions from which functions $f_1(r)$, $f_2(r)$, $f_3(r)$, $f_4(r)$ are constructed (see (2.1)); f_1 , f_2 , f_3 , f_4 stand for numerical variables that will be found below.

Therefore, equations (2.2) take on the form

$$\begin{aligned} & -a_{m+1/2}f_4F_2(r)\left(\frac{B\sigma}{2M^2}+i\right) + \\ & + f_3F_1(r)(k+\varepsilon)\left(1-\frac{iB\sigma}{2M^2}\right) + f_1F_1(r)\left(-\frac{iB\mu}{2M}-M\right) = 0, \\ & b_{m-1/2}f_3F_1(r)\left(\frac{B\sigma}{2M^2}-i\right) + \\ & + f_4F_2(r)(\varepsilon-k)\left(1+\frac{iB\sigma}{2M^2}\right) + f_2F_2(r)\left(+\frac{iB\mu}{2M}-M\right) = 0, \\ & a_{m+1/2}f_2F_2(r)\left(\frac{B\sigma}{2M^2}+i\right) + \\ & + f_1F_1(r)(\varepsilon-k)\left(1-\frac{iB\sigma}{2M^2}\right) + f_3F_1(r)\left(-\frac{iB\mu}{2M}-M\right) = 0, \\ & -b_{m-1/2}f_1F_1(r)\left(\frac{B\sigma}{2M^2}-i\right) + \\ & + f_2F_2(r)(\varepsilon+k)\left(1+\frac{iB\sigma}{2M^2}\right) + f_4F_2(r)\left(+\frac{iB\mu}{2M}-M\right) = 0. \end{aligned}$$

Also, we should impose differential constraints that will permit us to transform differential equations into algebraic ones:

$$\begin{aligned} & -a_{m+1/2}f_4F_2(r)\left(\frac{B\sigma}{2M^2}+i\right) + \\ & + f_3F_1(r)f(k+\varepsilon)\left(1-\frac{iB\sigma}{2M^2}\right) + \\ & + f_1F_1(r)\left(-\frac{iB\mu}{2M}-M\right) = 0, \quad a_{m+1/2}F_2(r) = C_1F_1; \\ & b_{m-1/2}f_3F_1(r)\left(\frac{B\sigma}{2M^2}-i\right) + f_4F_2(r)(\varepsilon-k)\left(1+\frac{iB\sigma}{2M^2}\right) + \\ & + f_2F_2(r)\left(+\frac{iB\mu}{2M}-M\right) = 0, \quad b_{m-1/2}F_1(r) = C_2F_2; \\ & a_{m+1/2}f_2F_2(r)\left(\frac{B\sigma}{2M^2}+i\right) + f_1F_1(r)(\varepsilon-k)\left(1-\frac{iB\sigma}{2M^2}\right) + \\ & + f_3F_1(r)\left(-\frac{iB\mu}{2M}-M\right) = 0, \quad a_{m+1/2}F_2(r) = C_1F_1; \\ & -b_{m-1/2}f_1F_1(r)\left(\frac{B\sigma}{2M^2}-i\right) + f_2F_2(r)(\varepsilon+k)\left(1+\frac{iB\sigma}{2M^2}\right) + \\ & + f_4F_2(r)\left(+\frac{iB\mu}{2M}-M\right) = 0, \quad b_{m-1/2}F_1(r) = C_2F_2. \end{aligned}$$

Taking into account these two constraints

$$a_{m+1/2}F_2(r) = C_1F_1, \quad b_{m-1/2}F_1(r) = C_2F_2,$$

we get the algebraic system

$$\begin{aligned} & -C_1\left(\frac{B\sigma}{2M^2}+i\right)f_4 + (k+\varepsilon)\left(1-\frac{iB\sigma}{2M^2}\right)f_3 + \\ & + \left(-\frac{iB\mu}{2M}-M\right)f_1 = 0, \\ & C_2\left(\frac{B\sigma}{2M^2}-i\right)f_3 + (\varepsilon-k)\left(1+\frac{iB\sigma}{2M^2}\right)f_4 + \\ & + \left(+\frac{iB\mu}{2M}-M\right)f_2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C_1 \left(\frac{B\sigma}{2M^2} + i \right) f_2 + (\varepsilon - k) \left(1 - \frac{iB\sigma}{2M^2} \right) f_1 + \\
& + \left(-\frac{iB\mu}{2M} - M \right) f_3 = 0, \\
& -C_2 \left(\frac{B\sigma}{2M^2} - i \right) f_1 + (\varepsilon + k) \left(1 + \frac{iB\sigma}{2M^2} \right) f_2 + \\
& + \left(\frac{iB\mu}{2M} - M \right) f_4 = 0.
\end{aligned}$$

Without loss of generality, we can equate two parameters, $C_2 = C_1 = C$, so we obtain

$$\begin{aligned}
a_{m+1/2} F_2(r) &= C F_1, \quad b_{m-1/2} F_1(r) = C F_2 \Rightarrow \\
(a_{m+1/2} b_{m-1/2} - C^2) F_1(r) &= 0, \\
(b_{m-1/2} a_{m+1/2} - C^2) F_2(r) &= 0;
\end{aligned}$$

then the above algebraic system reads simpler

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{iB\mu}{2M} + M \right) f_1 + 0 \cdot f_2 + (k + \varepsilon) \left(1 - \frac{iB\sigma}{2M^2} \right) f_3 - \\
& -C \left(\frac{B\sigma}{2M^2} + i \right) f_4 = 0, \\
& 0 \cdot f_1 + \left(\frac{iB\mu}{2M} - M \right) f_2 + C \left(\frac{B\sigma}{2M^2} - i \right) f_3 + \\
& + (\varepsilon - k) \left(1 + \frac{iB\sigma}{2M^2} \right) f_4 = 0, \\
& (\varepsilon - k) \left(1 - \frac{iB\sigma}{2M^2} \right) f_1 + C \left(\frac{B\sigma}{2M^2} + i \right) f_2 - \\
& - \left(\frac{iB\mu}{2M} + M \right) f_3 + 0 \cdot f_4 = 0, \\
& -C \left(\frac{B\sigma}{2M^2} - i \right) f_1 + (\varepsilon + k) \left(1 + \frac{iB\sigma}{2M^2} \right) f_2 + \\
& + 0 \cdot f_3 + \left(\frac{iB\mu}{2M} - M \right) f_4 = 0. \quad (2.3)
\end{aligned}$$

3 Solving the second order equations for $F_1(r)$ and $F_2(r)$

We have two equations

$$\begin{aligned}
(a_{m+1/2} b_{m-1/2} - C^2) F_1(r) &= 0, \\
(b_{m-1/2} a_{m+1/2} - C^2) F_2(r) &= 0,
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
a_{m+1/2} &= \frac{d}{dr} + \frac{m+1/2 + Br^2/2}{r}, \\
b_{m-1/2} &= \frac{d}{dr} - \frac{m-1/2 + Br^2/2}{r}.
\end{aligned}$$

In explicit form, these equations read

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 F_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF_1}{dr} + \\
& + \left[-\frac{1}{4} B^2 r^2 - \frac{1}{2} B - mB - C^2 - \frac{(m-1/2)^2}{r^2} \right] F_1 = 0, \\
& \frac{d^2 F_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF_2}{dr} +
\end{aligned}$$

$$+ \left[-\frac{1}{4} B^2 r^2 + \frac{1}{2} B - mB - C^2 - \frac{(m+1/2)^2}{r^2} \right] F_2 = 0.$$

Let us transform them to another variable, $x = -Br^2/2$:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 F_1}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dF_1}{dx} + \\
& + \left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{B + 2mB + 2C^2}{Bx} - \frac{1}{4} \frac{(1/2 - m)^2}{x^2} \right] F_1 = 0, \\
& \frac{d^2 F_2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dF_2}{dx} + \\
& + \left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{-B + 2mB + 2C^2}{Bx} - \frac{1}{4} \frac{(m+1/2)^2}{x^2} \right] F_2 = 0.
\end{aligned}$$

These two equations are related by the simple symmetry

$$B \Rightarrow -B, \quad m \Rightarrow -m, \quad F_1 \Rightarrow F_2;$$

so it suffices to solve the equation for $F_1(x)$:

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= x^A e^{Dx} f(x), \\
f'' + \left(\frac{2A+1}{x} + 2D \right) f' + \frac{A^2}{x^2} f - \frac{1}{4} \frac{(1/2 - m)^2}{x^2} f + \\
& + D^2 f - \frac{1}{4} f + \frac{(2A+1)D}{x} f + \frac{1}{4} \frac{1+2m+2C^2/B}{x} f = 0.
\end{aligned}$$

Let us impose the constraints

$$A^2 = \frac{1}{4} (1/2 - m)^2, \quad D^2 = \frac{1}{4},$$

in order to have solutions finite at two singular points, we should use

$$A = \frac{|m-1/2|}{2}, \quad D = 1/2 \quad (\text{let } B > 0).$$

In this way, we arrive at a simpler equation

$$\begin{aligned}
& x \frac{d^2 f}{dx^2} + (2A+1+x) \frac{df}{dx} + \\
& + \left[\left(A + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} \left(1+2m + \frac{2C^2}{B} \right) \right] f = 0.
\end{aligned}$$

In the variable $y = -x$, we get a confluent hypergeometric equation

$$\begin{aligned}
& y \frac{d^2 f}{dy^2} + (2A+1-y) \frac{df}{dy} - \\
& - \left[\left(A + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} \left(1+2m + \frac{2C^2}{B} \right) \right] f = 0,
\end{aligned}$$

with parameters

$$\begin{aligned}
c &= 2A+1 = |m-1/2|+1, \\
a &= \left(A + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} \left(1+2m + \frac{2C^2}{B} \right) = \\
& = \frac{|m-1/2|+m+1/2}{2} + \frac{C^2}{2B} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

The polynomial condition $a = -n$ gives the following quantization rule

$$C^2 = -2B \left(n + \frac{|m-1/2| + m+1/2}{2} + \frac{1}{2} \right), \quad (3.1)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Relevant solutions for the second function $F_2(z)$ may be found by using the first order relation

$$b_{m-1/2} F_1(r) = C F_2,$$

$$b_{m-1/2} = \frac{d}{dr} - \frac{m-1/2 + Br^2/2}{r}.$$

4 Helicity operator

Let us turn to the differential system (2.2) and try to impose the linear constraints

$$f_3 = A f_1, \quad f_4 = A f_2;$$

in the case of ordinary Dirac particle, they relate to diagonalization of the helicity operator. Then, collecting equations in two pairs we have

$$\begin{aligned} & -a_{m+1/2} A f_2 \left(\frac{B\sigma}{2M^2} + i \right) + \\ & + f_1 \left[A(k + \varepsilon) \left(1 - \frac{iB\sigma}{2M^2} \right) - \left(\frac{iB\mu}{2M} + M \right) \right] = 0, \\ & a_{m+1/2} f_2 \left(\frac{B\sigma}{2M^2} + i \right) + \\ & + f_1 \left[(\varepsilon - k) \left(1 - \frac{iB\sigma}{2M^2} \right) - A \left(\frac{iB\mu}{2M} + M \right) \right] = 0, \\ & b_{m-1/2} A f_1 \left(\frac{B\sigma}{2M^2} - i \right) + \\ & + f_2 \left[A(\varepsilon - k) \left(1 + \frac{iB\sigma}{2M^2} \right) + f_2 \left(\frac{iB\mu}{2M} - M \right) \right] = 0, \\ & -b_{m-1/2} f_1 \left(\frac{B\sigma}{2M^2} - i \right) + \\ & + f_2 \left[(\varepsilon + k) \left(1 + \frac{iB\sigma}{2M^2} \right) + A \left(\frac{iB\mu}{2M} - M \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

For consistency, we should expect that both equations are valid:

$$\begin{aligned} & A(k + \varepsilon) \left(1 - \frac{iB\sigma}{2M^2} \right) - \left(\frac{iB\mu}{2M} + M \right) = \\ & = -A \left[(\varepsilon - k) \left(1 - \frac{iB\sigma}{2M^2} \right) - A \left(\frac{iB\mu}{2M} + M \right) \right], \\ & A(\varepsilon - k) \left(1 + \frac{iB\sigma}{2M^2} \right) + \left(\frac{iB\mu}{2M} - M \right) = \\ & = -A \left[(\varepsilon + k) \left(1 + \frac{iB\sigma}{2M^2} \right) + A \left(\frac{iB\mu}{2M} - M \right) \right]. \end{aligned}$$

However, we immediately see that these equations are different; this means that the above linear conditions do not agree with the system of four equations. Therefore, the helicity operator cannot be diagonalized for this generalized Dirac-like equation.

5 Solving the algebraic system, the energy spectra

Let us turn again to the above algebraic system (2.3). It is convenient to introduce dimensionless quantities:

$$\frac{\varepsilon}{M} = E, \quad \frac{k}{M} = K, \quad \frac{C}{M} = c, \quad b = \frac{B}{2M^2},$$

$$\frac{iB\sigma}{2M^2} = i b \sigma, \quad \frac{iB\mu}{2M^2} = i b \mu;$$

then the system transforms to

$$\begin{aligned} & -(i b \mu + 1) f_1 + 0 \cdot f_2 + \\ & + (E + K)(1 - i b \sigma) f_3 - c(b \sigma + i) f_4 = 0, \\ & 0 \cdot f_1 + (i b \mu - 1) f_2 + c(b \sigma - i) f_3 + \\ & + (E - K)(1 + i b \sigma) f_4 = 0, \\ & (E - K)(1 - i b \sigma) f_1 + c(b \sigma + i) f_2 - \\ & - (i b \mu + 1) f_3 + 0 \cdot f_4 = 0, \\ & -c(b \sigma - i) f_1 + (E + K)(1 + i b \sigma) f_2 + \\ & + 0 \cdot f_3 + (i b \mu - 1) f_4 = 0, \end{aligned}$$

or in matrix form

$$\begin{vmatrix} -(i b \mu + 1) & 0 & (E + K) \times \\ & & \times (1 - i b \sigma) & -c(b \sigma + i) \\ 0 & i b \mu - 1 & c(b \sigma - i) & (E - K) \\ (E - K) \times & c(b \sigma + i) & -(i b \mu + 1) & 0 \\ \times (1 - i b \sigma) & & & \times (1 + i b \sigma) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.1)$$

From vanishing its determinant, we derive a bi-quadratic equation

$$\begin{aligned} \det A &= b^4 \left[(E^2 - K^2 + c^2) \sigma^2 - \mu^2 \right]^2 + \\ & + (E^2 - K^2 + c^2 - 1)^2 + b^2 \left\{ 2(E^2 - K^2 - c^2 + 1) \mu^2 + \right. \\ & + 2 \left[(E^2 - K^2 + c^2)^2 + E^2 - K^2 - c^2 \right] \sigma^2 + \\ & \left. + 8(E^2 - K^2) \sigma \mu \right\} = 0. \end{aligned}$$

To separate the contribution of the additional characteristics μ and σ , let us introduce a new variable $x = E^2 - K^2 - 1 + c^2$; when $\mu = 0, \sigma = 0$, the energy values are given by equation

$$x = E^2 - K^2 - 1 + c^2 = 0 \Rightarrow E^2 = 1 + K^2 - c^2 > 0.$$

In general case ($\mu \neq 0, \sigma \neq 0$), we get the quadratic equation with respect to x :

$$\begin{aligned} & x^2 - 2 \frac{b^2 (\sigma + \mu) (-b^2 \sigma^3 + b^2 \mu \sigma^2 - 3 \sigma - \mu)}{(1 + b^2 \sigma^2)^2} x + \\ & + \frac{b^2 (\sigma + \mu)^2 (b^2 \mu^2 - 2 b^2 \mu \sigma + b^2 \sigma^2 - 4 c^2 + 4)}{(1 + b^2 \sigma^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

We readily find its roots

$$x = E^2 - K^2 - 1 + c^2 = \\ = \frac{b(\sigma + \mu)}{(1 + b^2\sigma^2)^2} \left[(\sigma^2(\mu - \sigma)b^2 - \mu - 3\sigma)b \pm \right. \\ \left. \pm 2\sqrt{(\sigma(c\sigma + \mu)b^2 + c - 1)(\sigma(c\sigma - \mu)b^2 + c + 1)} \right] > 0.$$

Taking into account for E :

$$E_{1,2} = E_{\pm} = \\ = \frac{1}{1 + b^2\sigma^2} \left[\pm 2b(\sigma + \mu)\sqrt{c^2(1 + b^2\sigma^2)^2 - (b^2\mu\sigma - 1)^2} + \right. \\ \left. + ((-c^2 + K^2)\sigma^4 + \sigma^2\mu^2)b^4 + \right. \\ \left. + ((-1 - 2c^2 + 2K^2)\sigma^2 - 4\sigma\mu - \mu^2)b^2 - c^2 + 1 + K^2 \right]^{1/2}$$

in the system (5.1), we can find two types of the wave functions.

6 Numerical study of the spectra

The energy spectra depend in a complicated way on additional characteristics; for this reason these spectra should be studied numerically. Let us write down the values of energies for three sets of parameters.

In numerical calculations we must make the changes $\sigma \rightarrow i\sigma$, $\mu \rightarrow i\mu$, they lead to physically interpretable results. The new parameters σ , μ are real. In the paper, complex factors were not added at the beginning for the reasons of brevity.

Let us calculate the energy values for fixed values of parameter N , which is determined by the relation

$$N = n + \frac{|m - 1/2| + m + 1/2}{2} + \frac{1}{2},$$

where m is the value of the third projection of the total angular momentum. The parameter N enters into expression (3.1) for the parameter C , which is quantized due to the presence of the external magnetic field.

Table 6.1 – Calculation of energies E_+ , E_- for parameters $\sigma = 0, 02i$, $\mu = 0, 02i$, $K = 0, 01$, $b = 0, 2$, $\sigma, \mu \ll b$

N	E_+	E_-
0	0,992082273	1,008081729
1	1,175285418	1,191285103
2	1,333702000	1,349701812
3	1,475295037	1,491294929
4	1,604502430	1,620502379
5	1,724098156	1,740098146
6	1,835953352	1,851953373
7	1,941400911	1,957400957
8	2,041430133	2,057430199
9	2,136799251	2,152799333
10	2,228104602	2,244104698

Table 6.2 – Calculation of energies E_+ , E_- for parameters $\sigma = 0$, $\mu = 0, 02i$, $K = 0, 01$, $b = 0, 2$, $\sigma, \mu \ll b$

N	E_+	E_-
0	0,996050200	1,004049800
1	1,179258357	1,187258071
2	1,337678165	1,345677943
3	1,479273498	1,487273317
4	1,608482635	1,616482481
5	1,728079742	1,736079608
6	1,839936067	1,847935949
7	1,945384571	1,953384466
8	2,045414598	2,053414503
9	2,140784415	2,148784328
10	2,232090378	2,240090298

For comparing, it has a sense to get similar table 6.3 for the energies at vanishing additional parameters:

Table 6.3 – Calculation of energies E_+ , E_- for parameters $\sigma = 0$, $\mu = 0$, $K = 0, 01$, $b = 0, 2$, $\sigma, \mu \ll b$

N	E_+	E_-
0	1,000049999	1,000049999
1	1,183258214	1,183258214
2	1,341678054	1,341678054
3	1,483273407	1,483273407
4	1,612482558	1,612482558
5	1,732079675	1,732079675
6	1,843936008	1,843936008
7	1,949384518	1,949384518
8	2,049414551	2,049414551
9	2,144784371	2,144784371
10	2,236090338	2,236090338

Conclusion

In the present paper, we have examined the Dirac-like equation for a spin 1/2 particle with two additional characteristics, anomalous magnetic moment μ and polarizability σ in presence of external uniform magnetic field. After separating the variables, we derived the system of four differential equations in the polar coordinate. It was shown that the known helicity operator cannot be diagonalized in the system under consideration. To resolve the system of equations, we have applied the method by Fedorov – Gronskey, which is based on the use of projective operators related to the third spin matrix S_3 . We have constructed two types of the wave

functions, the corresponding energy spectra are found in analytical form, these spectra are studied numerically as well.

REFERENCES

1. *Spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment and polarizability* / V.V. Kisel, A.V. Bury, P.O. Sachenok, E.M. Ovsiyuk // *Vesnik of Brest University. Series 4. Physics, Mathematics.* – 2024. – № 2. – P. 7–27 (in Russian).
2. *Gel'fand, I.M.* General relativistically invariant equations and infinite dimensional representations of the Lorentz group / I.M. Gel'fand, A.M. Yaglom // *J. Experimental and Theoretical Physics.* – 1948. – Vol. 18. – P. 703–733 (in Russian).
3. *Pletukhov, V.A.* Relativistic wave equations and intrinsic degrees of freedom / V.A. Pletukhov, V.M. Red'kov, V.I. Strazhev. – Minsk: Belarusian Science, 2015. – 327 p. (in Russian).
4. *Elementary particles with internal structure in external field* / V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, V. Balan, O.V. Veko, V.M. Red'kov. – Vol. I. General formalism // Nova Science Publishers, Inc. USA, 2018. – 404 p. Vol. II. Physical problems. – Nova Science Publishers, Inc. USA, 2018. – 402 p.
5. *Chichurin, A.V.* problems in quantum mechanics and field theory with mathematical modelling / A.V. Chichurin, E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov. – Boca Raton: CRC Press, 2025. – 374 p.
6. *Spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment in a uniform magnetic field, exact solutions* / E.M. Ovsiyuk, V.V. Kisel, Y.A. Voynova, O.V. Veko, V.M. Red'kov // *Nonlinear Phenomena*

in Complex Systems. – 2016. – Vol. 19, iss. 2. – P. 153–165.

7. *Quantum mechanics of particles with spin in an external magnetic field* / E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, Ya.A. Voynova, V.V. Kisel, V.M. Red'kov. – Minsk: Belarusian Science, 2017. – 517 p. (in Russian).

8. *Ovsiyuk, E.M.* Spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment in presence of external magnetic field, exact solutions / E.M. Ovsiyuk, V.V. Kisel, V.M. Red'kov // Chapter 5 in the book «Relativity, gravitation, cosmology: beyond foundations». – Ed. V.V. Dvoeglazov. – New York: Nova Science Publishers, 2018. – P. 65–80.

9. *On P-noninvariant wave equation for a spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment* / V.V. Kisel, V.A. Pletukhov, E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* – 2019. – Vol. 22, iss. 1. – P. 18–40.

10. *Gronskiy, V.K.* Magnetic properties of a particle with spin 3/2 / V.K. Gronskiy, F.I. Fedorov // *Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus.* – 1960. – Vol. 4, iss. 7. – P. 278–283 (in Russian).

The article was submitted 22.04.2025.

Информация об авторах

Ивашкевич Алина Валентиновна – науч. сотр.

Саченок Полина Олеговна – студентка

Овсиюк Елена Михайловна – д.ф.-м.н., доцент

Кисель Василий Васильевич – к.ф.-м.н., доцент

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛОГУНОВА – ТАВХЕЛИДЗЕ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА ГАУССА, ЗАДАННОГО В РЕЛЯТИВИСТСКОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

В.Н. Капшай, А.В. Павленко, Ю.А. Гришечкин

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

NUMERICAL SOLUTION OF THE TWO-DIMENSIONAL LOGUNOV – TAVKHELIDZE EQUATION FOR GAUSSIAN POTENTIAL IN THE RELATIVISTIC CONFIGURATION REPRESENTATION

V.N. Kapshai, A.V. Paulenka, Yu.A. Grishechkin

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Численно решены в релятивистском конфигурационном представлении двумерные парциальные интегральные квазипотенциальные уравнения, описывающие связанные состояния системы двух скалярных частиц равной массы при моделировании взаимодействия потенциалом Гаусса. Установлено, что – в зависимости от значений параметров потенциала – парциальные волновые функции основного состояния могут обладать одним нулём, двумя нулями или большим количеством нулей. Показано, что в предельном переходе гауссова потенциала в сингулярный потенциал «дельта-окружность» численные решения асимптотически сходятся к точным аналитическим решениям, соответствующим этому предельному случаю.

Ключевые слова: двумерное уравнение Логунова – Тавхелидзе, релятивистское конфигурационное представление, импульсное представление, двумерная функция Грина, волновая функция, двухчастичная система, связанные состояния, потенциал Гаусса, дельта-окружность.

Для цитирования: Капшай, В.Н. Численное решение двумерного уравнения Логунова – Тавхелидзе для потенциала Гаусса, заданного в релятивистском конфигурационном представлении / В.Н. Капшай, А.В. Павленко, Ю.А. Гришечкин // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 56–61. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_56. – EDN: NGSETJ

Abstract. Numerical solutions are obtained for the two-dimensional partial-wave integral quasipotential equations in the relativistic configuration space representation, describing the bound states of a system of two scalar particles of equal mass interacting via a Gaussian potential. A non-trivial spectral property is established: within certain ranges of the potential parameters, the ground state possesses a wave function with one, two or more nodes. The limiting transition is demonstrated as the Gaussian potential degenerates into the singular “delta-circle” potential: the numerical solutions asymptotically approach those for this limiting case.

Keywords: two-dimensional Logunov – Tavkhelidze equation, relativistic configurational representation, momentum representation, two-dimensional Green’s function, wave function, two-particle system, bound states, Gaussian potential, delta-circle potential.

For citation: Kapshai, V.N. Numerical solution of the two-dimensional Logunov – Tavkhelidze equation for Gaussian potential in the relativistic configuration representation / V.N. Kapshai, A.V. Paulenka, Yu.A. Grishechkin // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 3 (64). – P. 56–61. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_56 (in Russian). – EDN: NGSETJ

Введение

В работе [1] для описания низкоэнергетического рассеяния нуклонов было предложено использовать потенциал Гаусса. Потенциалы этого типа активно использовались также для описания нерелятивистских связанных состояний [2]–[11]. Авторами этих работ решались трёхмерное [2]–[9], двумерное [10] и одномерное [1] уравнения Шрёдингера. Однако решение релятивистской задачи об определении связанных состояний системы двух скалярных частиц с учетом потенциала Гаусса, заданного в двумерном релятивистском конфигурационном представлении

(РКП), ранее не рассматривалось. В настоящей работе мы рассмотрим эту задачу.

1 Двумерные парциальные квазипотенциальные уравнения

Двумерные интегральные уравнения квазипотенциального типа, сформулированные в импульсном представлении (ИП) для описания связанных состояний системы двух скалярных частиц одинаковой массы m в системе их центра масс, аналогичны трехмерным и имеют вид ($\hbar = c = 1$):

$$\begin{aligned} \psi(E_q, \mathbf{p}) = & \frac{1}{(2\pi)^2} G_0(E_q; E_p) \times \\ & \times \int V(E_q; \mathbf{p}, \mathbf{k}) \psi(E_q, \mathbf{k}) \frac{m}{E_k} d^2k, \\ E_p = & \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}; \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\psi(E_q, \mathbf{p})$ – волновая функция; $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$ – двумерные импульсы; $V(E_q; \mathbf{p}, \mathbf{k})$ – квазипотенциал; $2E_q = 2\sqrt{q^2 + m^2}$ – энергия двухчастичной системы ($0 \leq E_q < 2m$); $G_0(E_q; E_p)$ – свободная функция Грина. Для связанных состояний используются обозначения

$$\begin{aligned} q = m \operatorname{sh}(i w_q) = i m \sin w_q; \\ E_q = m \operatorname{ch}(i w_q) = m \cos w_q, \end{aligned}$$

а w_q – параметр, принадлежащий интервалу $(0; \pi/2]$. В настоящей работе рассмотрим уравнение Логанова – Тавхелидзе, функция Грина которого имеет вид

$$G_0(E_q; E_p) = \frac{1}{E_q^2 - E_p^2}. \quad (1.2)$$

В рамках квантовой теории поля переход от двумерного ИП к двумерному РКП осуществляется посредством разложения всех величин, содержащихся в интегральном уравнении (1.1), по функциям вида [11], [12]

$$\xi(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = \left(\frac{E_p - \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}_p}{m} \right)^{-\frac{1}{2} - i m p},$$

где $\mathbf{p} = \rho \mathbf{n}_p$ радиус-вектор в РКП, ρ – его модуль. Преобразование волновой функции из ИП в РКП и обратное ему соответственно имеют вид

$$\psi(E_q, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \xi(\mathbf{p}, \mathbf{p}) \psi(E_q, \mathbf{p}) \frac{m}{E_p} d\mathbf{p}, \quad (1.3)$$

$$\psi(E_q, \mathbf{p}) = \int \xi^*(\mathbf{p}, \mathbf{p}) \psi(E_q, \mathbf{p}) d\mathbf{p}, \quad (1.4)$$

где $\psi(E_q, \mathbf{p})$ – двумерная волновая функция в РКП.

Используя интегральные преобразования (1.3), (1.4) и уравнение (1.1) для волновой функции в ИП, нетрудно получить двумерное интегральное уравнение в РКП:

$$\begin{aligned} \psi(E_q, \mathbf{p}) = \\ = \int G(E_q; \mathbf{p}, \mathbf{p}') V(E_q; \mathbf{p}', \mathbf{p}'') \psi(E_q, \mathbf{p}'') d\mathbf{p}' d\mathbf{p}'', \end{aligned} \quad (1.5)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} V(E_q; \mathbf{p}, \mathbf{k}) = \int \xi^*(\mathbf{p}, \mathbf{p}) V(E_q; \mathbf{p}, \mathbf{p}') \xi(\mathbf{k}, \mathbf{p}') d\mathbf{p} d\mathbf{p}', \\ G(E_q; \mathbf{p}, \mathbf{p}') = \\ = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \xi(\mathbf{p}, \mathbf{p}) G_0(E_q; E_p) \xi^*(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{m}{E_p} d\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Интегральное уравнение (1.5) в случае локальных в РКП квазипотенциалов

$$V(E_q; \mathbf{p}, \mathbf{p}') = V(E_q; \rho) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'),$$

упрощается до

$$\psi(E_q, \mathbf{p}) = \int G(E_q; \mathbf{p}, \mathbf{p}') V(E_q; \rho') \psi(E_q, \mathbf{p}') d\mathbf{p}'. \quad (1.7)$$

Разложение релятивистской плоской волны $\xi(\mathbf{p}, \mathbf{p})$ на парциальные составляющие имеет следующий вид:

$$\xi(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} i^{\mu} s_{\mu}(\chi_p, \rho) \exp(i\mu\alpha), \quad (1.8)$$

где χ_p – быстрота, связанная с модулем импульса p выражением $p = m \operatorname{sh} \chi_p$; μ – азимутальное квантовое число; α – угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}$; $s_{\mu}(\chi_p, \rho)$ – парциальные волны, задаваемые выражениями [12]:

$$s_{\mu}(\chi_p, \rho) = i^{\mu} \frac{\Gamma(1/2 - i m \rho)}{\Gamma(1/2 + \mu - i m \rho)} P_{-i m \rho - 1/2}^{\mu}(\operatorname{ch} \chi_p),$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера; $P_a^b(z)$ – функция Лежандра первого рода.

Парциальные волны $s_{\mu}(\chi_p, \rho)$ можно записать в виде

$$s_{\mu}(\chi_p, \rho) = \frac{e_{\mu}^{+}(\chi_p, \rho) - e_{\mu}^{-}(\chi_p, \rho)}{2i},$$

$$\begin{aligned} e_{\mu}^{\pm}(\chi_p, \rho) = \\ = i^{\mu} \frac{2}{\pi} \operatorname{cth}(\pi m \rho) \frac{\Gamma(1/2 - i m \rho)}{\Gamma(1/2 + \mu - i m \rho)} Q_{-1/2 \mp i m \rho}^{\mu}(\operatorname{ch} \chi_p), \end{aligned}$$

где $Q_a^b(z)$ – функция Лежандра второго рода.

Парциальное разложение волновых функций и функции Грина представим выражениями:

$$\begin{aligned} \psi(E_q, \mathbf{p}) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{i^{\mu}}{\sqrt{\rho}} \psi_{\mu}(i w_q, \rho) e^{i\mu\alpha'}; \\ \psi(E_q, \mathbf{p}) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m \operatorname{sh} \chi_p}} \psi_{\mu}(i w_q, \chi_p) e^{i\mu\beta}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$G(E_q; \mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{1}{\sqrt{\rho \rho'}} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} G_{\mu}(i w_q; \rho, \rho') e^{i\mu\gamma}, \quad (1.10)$$

где $\psi_{\mu}(i w_q, \rho)$ и $\psi_{\mu}(i w_q, \chi_p)$ – парциальные волновые функции в РКП и ИП соответственно; $\alpha'(\beta)$ – угол между $\mathbf{p}(\mathbf{p})$ и осью абсцисс; $G_{\mu}(i w_q; \rho, \rho')$ – парциальная функция Грина в РКП; γ – угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$. С учетом выражений (1.8)–(1.10) получим парциальные аналоги (1.4), (1.6) и (1.7):

$$\begin{aligned} \psi_{\mu}(i w_q, \chi_p) = \\ = 2\pi \sqrt{m \operatorname{sh} \chi_p} \int_0^{\infty} \sqrt{\rho} s_{\mu}^*(\chi_p, \rho) \psi_{\mu}(i w_q, \rho) d\rho, \\ G_{\mu}(i w_q; \rho, \rho') = \frac{m^2 \sqrt{\rho \rho'}}{2\pi} \times \\ \times \int_0^{\infty} \operatorname{sh} \chi_p s_{\mu}(\chi_p, \rho) G_0(m \operatorname{ch} i w_q; m \operatorname{ch} \chi_p) \times \\ \times s_{\mu}^*(\chi_p, \rho') d\chi_p, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \psi_\mu(iw_q, \rho) = \\ = 2\pi \int_0^\infty G_\mu(iw_q; \rho, \rho') V(iw_q; \rho') \psi_\mu(iw_q, \rho') d\rho'. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Интегралы (1.11) для функции Грина (1.2) можно вычислить с использованием теоремы Коши о вычетах. Приведем конечный результат:

$$\begin{aligned} G_\mu(iw_q; \rho, \rho') = \frac{-i\sqrt{\rho\rho'} \operatorname{sh}(iw_q)}{4\operatorname{sh}(2iw_q)} \times \\ \times \left[\frac{e_\mu^+(iw_q, \rho) e_\mu^{+*}(iw_q, \rho')}{1 - \exp[-\pi m(\rho - \rho')]} + \frac{e_\mu^-(iw_q, \rho) e_\mu^{-*}(iw_q, \rho')}{1 - \exp[\pi m(\rho - \rho')]} - \right. \\ \left. - \frac{e_\mu^+(iw_q, \rho) e_\mu^{-*}(iw_q, \rho')}{1 - \exp[-\pi m(\rho + \rho')]} - \frac{e_\mu^-(iw_q, \rho) e_\mu^{+*}(iw_q, \rho')}{1 - \exp[\pi m(\rho + \rho')]} \right]. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Отметим, что сумме первых двух слагаемых, заключённых в квадратные скобки в выражениях (1.13), при $\rho = \rho'$ свойственна неопределенность вида $0/0$, раскрывая которую, получим:

$$\begin{aligned} G_\mu(iw_q; \rho', \rho') = \\ = \frac{-i\rho' \operatorname{sh}(iw_q)}{4\operatorname{sh}(2iw_q)} \left[e_\mu^-(iw_q, \rho') e_\mu^{-*}(iw_q, \rho') + \right. \\ \left. + \frac{e_\mu^+(iw_q, \rho')}{\pi m} \frac{\partial e_\mu^+(iw_q, \rho')}{\partial \rho'} - \frac{e_\mu^{-*}(iw_q, \rho')}{\pi m} \frac{\partial e_\mu^{-*}(iw_q, \rho')}{\partial \rho'} - \right. \\ \left. - \frac{e_\mu^+(iw_q, \rho') e_\mu^{-*}(iw_q, \rho')}{1 - \exp[-2\pi m\rho']} - \frac{e_\mu^-(iw_q, \rho') e_\mu^{+*}(iw_q, \rho')}{1 - \exp[2\pi m\rho']} \right]. \end{aligned}$$

Условия нормировки волновых функций уравнения Логунова – Тавхелидзе в РКП и ИП имеют вид

$$\int |\psi(E_q, \mathbf{p})|^2 d\mathbf{p} = 1, \quad \int |\psi(E_q, \mathbf{p})|^2 \frac{m}{E_p} d\mathbf{p} = 1.$$

Из них следуют условия нормировки для парциальных волновых функций:

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^\infty |\psi_\mu(iw_q, \rho)|^2 d\rho = 1, \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |\psi_\mu(iw_q, \chi_p)|^2 d\chi_p = 1. \end{aligned} \quad (1.14)$$

2 Потенциал Гаусса

В настоящей работе исследуются связанные состояния системы двух скалярных частиц, взаимодействие между которыми описывается гауссовым потенциалом:

$$V_\alpha(\rho) = -\lambda \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\rho - \rho_0)^2}{2\alpha^2}\right), \quad (2.1)$$

где λ , α и ρ_0 – положительные константы.

В пределе $\alpha \rightarrow 0$ потенциал (2.1) становится бесконечно узким и бесконечно глубоким в окрестности точки $\rho = \rho_0$ без изменения площади

под кривой, т. е. в данном пределе (2.1) соответствует дельта-функциональному взаимодействию и имеет вид

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} V_\alpha(\rho) = -\lambda \delta(\rho - \rho_0), \quad (2.2)$$

где $\delta(\rho - \rho_0)$ – дельта-функция. Известно, что система с «дельта-окружностью» (2.2) при каждом значении азимутального числа μ имеет одно связанное состояние или не имеет их вовсе – в зависимости от значений параметров λ и ρ_0 .

3 Численное решение задачи

Для численного решения интегрального уравнения (1.12) с функцией Грина (1.13) и квазипотенциалом (2.1) выберем такое достаточно большое $\rho = \rho_N$, чтобы в интервале $[\rho_N; \infty)$ квазипотенциал имел пренебрежимо малое значение. Разобьём интервал интегрирования $[0; \rho_N]$ на N равных отрезков длиной $h = \rho_N/N$ и применим квадратурную формулу прямоугольников:

$$\int_0^{\rho_N} f(\rho) d\rho \cong \sum_{j=1}^N h f(\rho_j). \quad (3.1)$$

Подставляя квазипотенциал (2.1) и дискретное представление (3.1) в исходные интегральные уравнения (1.12), а также фиксируя $\rho = \rho_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$), сформулируем задачу на собственные значения в матричном виде:

$$\frac{1}{\lambda} \psi_\mu(iw_q, \rho_i) = \sum_{j=1}^N M_{i,j} \psi_\mu(iw_q, \rho_j), \quad (3.2)$$

где

$$M_{i,j} = -2\pi h \frac{G_\mu(iw_q; \rho_i, \rho_j)}{\alpha\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\rho_j - \rho_0)^2}{2\alpha^2}\right).$$

Решение этой задачи при каждом λ существует не при всех значениях w_q , а только при некоторых. Технически для нахождения взаимозависимости величин w_q и λ удобно фиксировать w_q и находить соответствующие значения λ . Полученные таким образом графики зависимости λ от w_q при $\mu = 0$ и $\mu = 1$ иллюстрированы на рисунке 3.1. Анализируя их, видим, что график функции $w_q(\lambda)$ состоит из нескольких дискретных элементов, пронумерованных числом n в порядке возрастания λ . Таким образом, в результате решения уравнения (3.2) получены условия квантования величины w_q .

Как видно на рисунке 3.1, при определенном минимальном значении параметра λ в системе двух частиц возникает связанное состояние с энергией $2E_q = 2m \cos w_q$, меньшей $2m$. С ростом λ энергия состояния, которому соответствует фрагмент, обозначенный $n=1$, уменьшается до нуля, после чего само состояние исчезает. При дальнейшем увеличении λ возникает новое

связанное состояние (ему соответствует фрагмент, обозначенный как $n = 2$) и становится новым основным состоянием системы (с наименьшим возможным значением энергии). При последующем росте λ энергия уровня $n = 2$ также убывает до нуля, после чего и это состояние исчезает. Таким образом, при заданных параметрах системы, существует один энергетический уро-

вень или его нет вовсе. Сравнивая графики 3.1 а) и 3.1 б), видим, что с ростом азимутального квантового числа связанное состояние существует при больших значениях λ/m .

На рисунке 3.2 изображены зависимости квадрата модуля парциальных волновых функций основного состояния системы от параметра ρt .

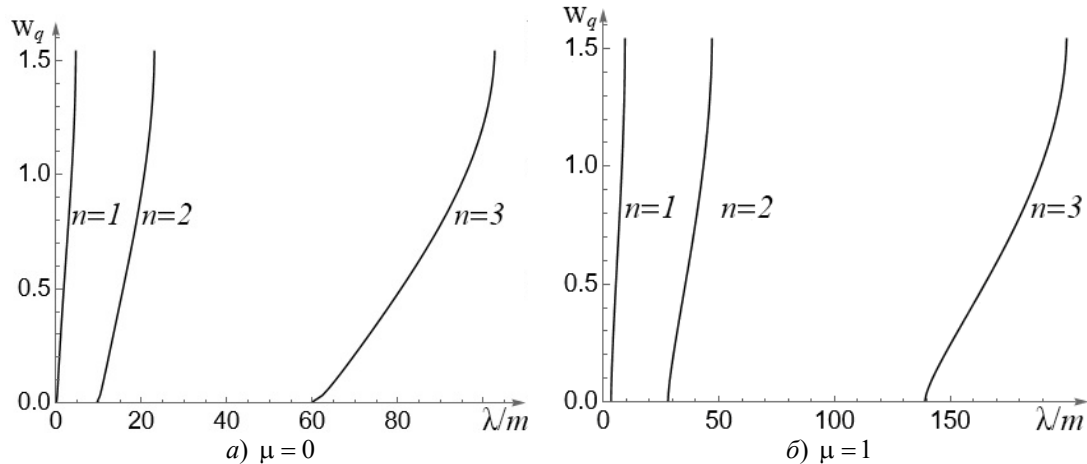


Рисунок 3.1 – Условие квантования энергии двухчастичной системы при $\alpha/m = 1$, $\rho_0 m = 1$

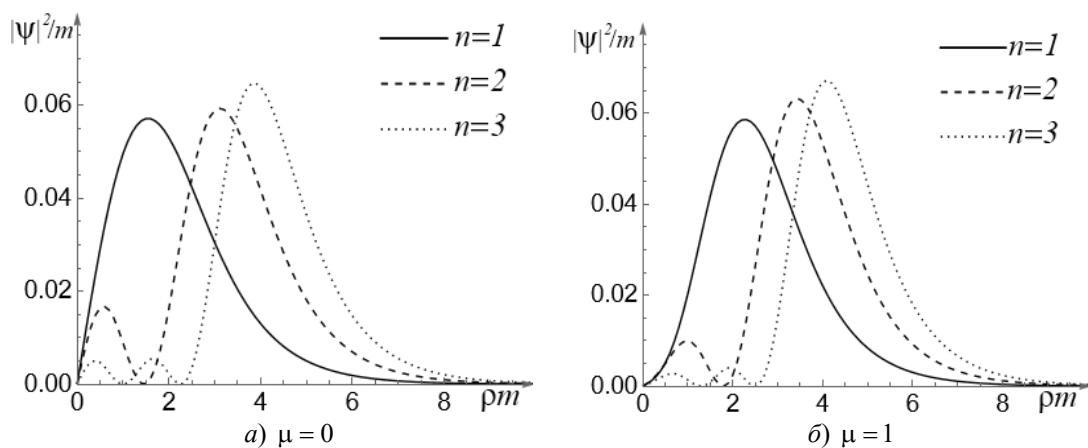


Рисунок 3.2 – Зависимость квадрата модуля парциальных волновых функций в РКП от параметра ρt при $\alpha/m = 1$, $\rho_0 m = 1$, $w_q = 0,5$

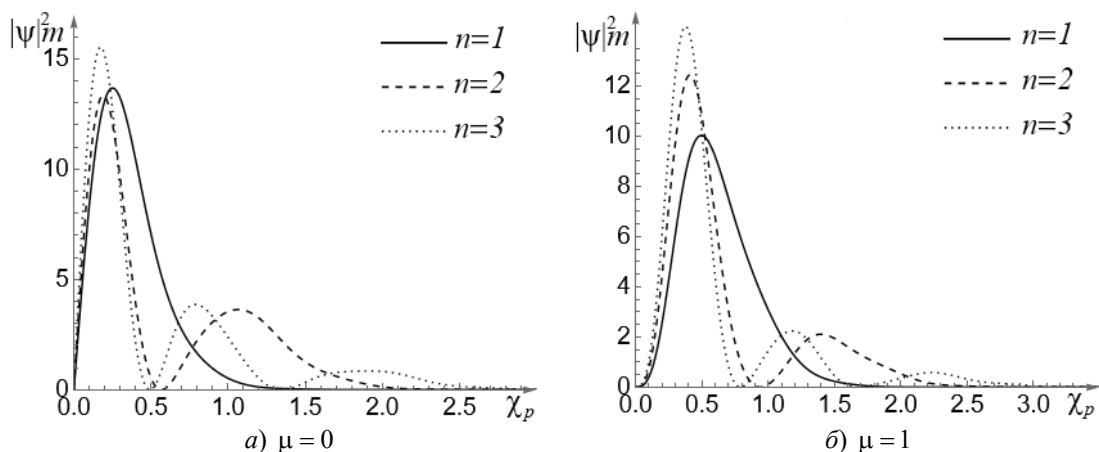


Рисунок 3.3 – Зависимость квадрата модуля парциальных волновых функций в ИП от быстроты χ_p при $\rho_0 m = 1$, $w_q = 0,5$

На рисунке 3.2 видно, что с ростом азимутального квантового числа экстремумы изображенных функций смещаются в направлении увеличения координаты ρm , а число их нулей равно n .

На рисунке 3.3 иллюстрирована зависимость квадрата модуля парциальных волновых функций в ИП, полученных с учетом (1.14) из парциальных волновых функций в РКП, изображенных на рисунке 3.2.

Анализируя рисунок 3.3, заметим, что при увеличении азимутального квантового числа μ положения экстремумов иллюстрированных функций смещаются в область больших значений частоты χ_p . Количество нулей у изображенных функций равно n .

4 Предельный случай

Подставляя потенциал (2.2) в уравнение (1.12) и вычисляя интеграл в его правой части с учетом свойств дельта-функции, получим

$$\psi_\mu(iw_q, \rho) = -\lambda 2\pi G_\mu(iw_q; \rho, \rho_0) \psi_\mu(iw_q, \rho_0). \quad (4.1)$$

Для нахождения условия квантования энергии положим в (4.1) $\rho = \rho_0$, тогда

$$1 = -\lambda 2\pi G_\mu(iw_q; \rho_0, \rho_0). \quad (4.2)$$

В целях сравнения условий квантования, полученных для первого состояния (соответствующего $n=1$) посредством решения системы уравнений (3.2) и на основании уравнения (4.2), изобразим зависимости w_q от λ на рисунке 4.1 соответственно штриховой линией и сплошной.

На рисунке 4.2 сплошной линией изображены зависимости квадрата модуля парциальных волновых функций (4.1), штриховой линией – парциальных волновых функций, полученных на основе (3.2) при $\alpha/m = 0,5$, а точками – этих же функций, но при $\alpha/m = 0,2$ от параметра ρm .

На рисунках 4.1 и 4.2 видно, что с уменьшением параметра α результаты численного решения квазипотенциального уравнения для основного состояния (соответствующего $n=1$), полученные для потенциала Гаусса, сближаются с результатами точного решения, соответствующими потенциалу «дельта-окружность».

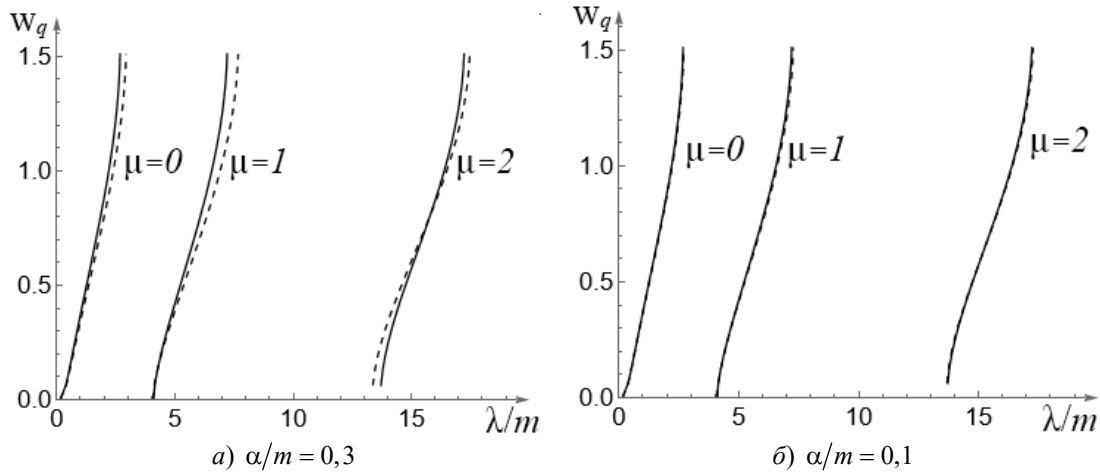


Рисунок 4.1 – Сравнение условий квантования энергии при моделировании взаимодействия потенциалом Гаусса и «дельта-окружностью» (при $\rho_0 m = 1$)

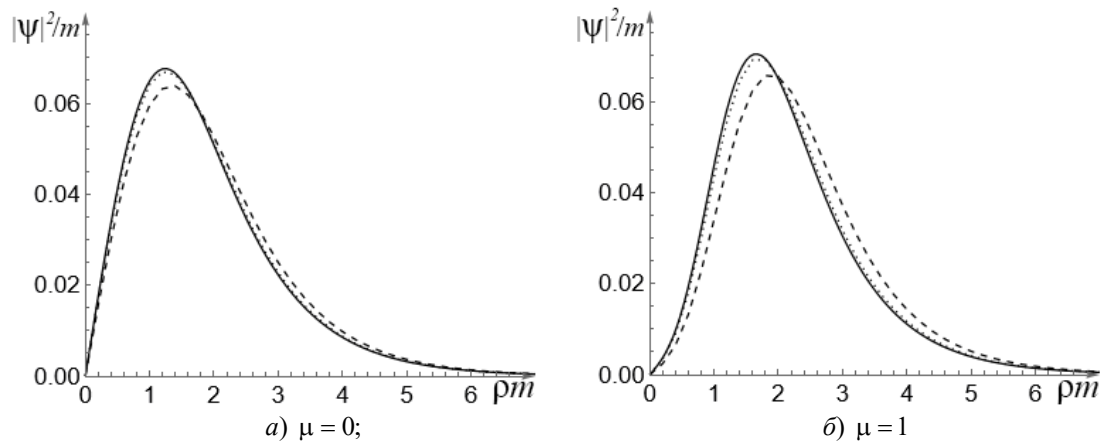


Рисунок 4.2 – Зависимость квадрата модуля парциальных волновых функций состояния с $n=1$ от параметра ρm при $\alpha/m = 1$, $\rho_0 m = 1$, $w_q = 0,5$

Заключение

В настоящей работе при выборе взаимодействий в виде потенциала Гаусса получены численные решения двумерных парциальных интегральных квазипотенциальных уравнений в релятивистском конфигурационном представлении, которые описывают связанные состояния системы двух скалярных частиц одинаковой массы. Получены условия квантования энергии, а также парциальные волновые функции в релятивистском конфигурационном представлении и импульсном представлении. При анализе результатов выявлено, что в определенных диапазонах параметров потенциала основному состоянию может соответствовать волновая функция с одним нулем, двумя нулями, тремя и более нулями.

Показано, что при стремлении параметра ширины гауссова потенциала к нулю (а глубины потенциала к бесконечности) он вырождается в бесконечно глубокую и бесконечно узкую потенциальную яму, и при $\alpha \rightarrow 0$ переходит в потенциал «дельта-окружность». Продемонстрировано, что с уменьшением параметра ширины гауссова потенциала численно полученные результаты асимптотически стремятся к точным аналитическим решениям, соответствующим предельному варианту потенциала «дельта-окружность».

ЛИТЕРАТУРА

1. Buck, B. Local potential models for the scattering of complex nuclei / B. Buck, H. Friedrich, C. Wheatley // Nuclear Physics A. – 1977. – Т. 275, № 1. – С. 246–268.
2. Gomez, S.S. Few-electron semiconductor quantum dots with Gaussian confinement / S.S. Gomez, R.H. Romero // Central Eur. J. Phys. – 2009. – Vol. 7. – P. 12–21.
3. Koksai, K. A simple analytical expression for bound state energies for an attractive Gaussian confining potential / K. Koksai // Phys. Scr. – 2012. – Vol. 86. – P. 035006.
4. Fernández, F. M. Quantum Gaussian wells and barriers / F.M. Fernández // American Journal of Physics. – 2011. – Т. 79, № 7. – С. 752–754.
5. Bound Magneto-Acoustic Polaron in an Asymmetric Gaussian Confinement Potential Quantum Well / F. Manfouo [et al.] // International Journal of Theoretical Physics. – 2024. – Т. 63, № 3. – С. 70.
6. Кудряшов, В.В. Решение радиального уравнения Шрёдингера для потенциала Гаусса в модифицированном ВКБ-приближении / В.В. Кудряшов, А.В. Баран // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 5. – С. 43–48.
7. Mutuk, H. Asymptotic iteration and variational methods for Gaussian potential / H. Mutuk // Pramana – J. Phys. – 2019. – P. 66.
8. Гришечкин, Ю.А. Об одном приближенном аналитическом методе решения уравнения Шрёдингера с гауссовым потенциалом / Ю.А. Гришечкин, А.В. Павленко, В.Н. Капшай // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 4 (41). – С. 7–10.
9. Гришечкин, Ю.А. Приближенный аналитический метод решения уравнения Шрёдингера с гауссовым потенциалом в импульсном представлении / Ю.А. Гришечкин, А.В. Павленко // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 3 (44). – С. 18–21.
10. The Energy of the Ground State of the Two-Dimensional Hamiltonian of a Parabolic Quantum Well in the Presence of an Attractive Gaussian Impurity / S.Fassari, M. Gadella, L.M. Nieto, F. Rinaldi // Symmetry. – 2021. – Т. 13, № 9. – С. 1561.
11. On the spectrum of the one-dimensional Schrödinger Hamiltonian perturbed by an attractive Gaussian potential / S. Fassari, M. Gadella, L.M. Nieto, F. Rinaldi // Acta Polytechnica. – 2017. – Vol. 57, № 6. – С. 358–390.
12. Nagiyev, S.M. The relativistic two-dimensional harmonic oscillator / S.M. Nagiyev, E.A. Jafarov, M.Y. Efendiyev // IL Nuovo Cimento. – 2009. – Vol. 124B. – P. 182–185.
13. Мир-Касимов, Р.М. Релятивистские операторы кинематического импульса / Р.М. Мир-Касимов // Физика элементарных частиц и атомного ядра теория Письма в ЭЧАЯ. – 2010. – Т. 7, № 5 (161). – С. 505–515.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант по проекту Ф25М-004).

Поступила в редакцию 11.06.2025.

Информация об авторах

Капшай Валерий Николаевич – к.ф.-м.н., доцент
Павленко Андрей Васильевич – аспирант
Гришечкин Юрий Алексеевич – к.ф.-м.н., доцент

ПЕРЕСТРАИВАЕМЫЙ РЕЗОНАТОР ФАБРИ – ПЕРО

В.М. Кравченко, А.С. Кузьмицкая, В.В. Малютин-Бронская, А.И. Конойко

ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника», Минск

TUNABLE FABRY – PEROT RESONATOR

V.M. Kravchenko, H.S. Kuzmitskaya, V.V. Malyutina-Bronskaya, A.I. Konoiko

SSPA “Optics, Optoelectronics and Laser Technology”, Minsk

Аннотация. Представлены структура и параметры экспериментального образца перестраиваемого резонатора Фабри – Перо, работающего на принципе термооптического эффекта для его применения в качестве узкополосного светофильтра с перестраиваемой полосой пропускания. Особенность данного устройства заключается в интеграции нагревательного элемента и резонатора Фабри – Перо в единую конструкцию. Экспериментально установлено, что с ростом тока, проходящего через управляющий нагревательный элемент, происходит нагрев структуры резонатора, приводящий к смещению максимума коэффициента пропускания в более коротковолновую область светового спектра.

Ключевые слова: перестраиваемый резонатор, Фабри – Перо, термооптический эффект, база резонатора.

Для цитирования: Перестраиваемый резонатор Фабри – Перо / В.М. Кравченко, А.С. Кузьмицкая, В.В. Малютин-Бронская, А.И. Конойко // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 62–66. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_62. – EDN: KUAOZX

Abstract. The structure and parameters of an experimental sample of a tunable Fabry – Perot resonator operating on the principle of the thermo-optical effect are presented for its use as a narrow-band light filter with a tunable bandwidth. The peculiarity of this device is the integration of a heating element and a Fabry – Perot resonator into a single structure. It has been experimentally established that with an increase in the current passing through the control heating element, the resonator structure heats up, leading to a shift in the maximum transmission coefficient to a shorter-wave region of the light spectrum.

Keywords: tunable resonator, Fabry – Perot, thermo-optic effect, resonator base.

For citation: Tunable Fabry – Perot resonator / V.M. Kravchenko, H.S. Kuzmitskaya, V.V. Malyutina-Bronskaya, A.I. Konoiko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 3 (64). – P. 62–66. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_62 (in Russian). – EDN: KUAOZX

Введение

Интерференционные светофильтры обладают высоким спектральным разрешением, благодаря чему активно применяются в различных научных исследованиях, измерительной технике, промышленности и многих других областях [1]. К преимуществам тонкопленочных оптических фильтров относятся их компактность, простота и возможность конструирования под определенные задачи. Тонкопленочные оптические фильтры выполняются в виде одно- или многослойных структур. Достоинством последних являются более резкие границы спектральной характеристики.

В светофильтрах на основе резонатора Фабри – Перо перестройка по спектру осуществляется за счет изменения оптической базы (зазора) между зеркалами резонатора Фабри – Перо, которое соответствует первому порядку интерференции в видимом диапазоне спектра [2]. Изменение базы резонатора может осуществляться как за счет электромеханического (изменение размера базы резонатора под действием управляющего напряжения), так и термооптического эффекта (изменение оптических характеристик материалов под действием температуры) [3], [4].

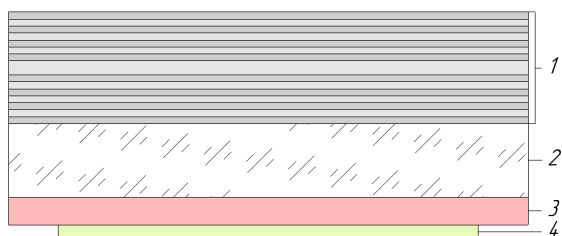
Цель работы заключается в разработке перестраиваемого резонатора Фабри – Перо на базе термооптического эффекта, где перестройка резонатора осуществляется за счет изменения силы тока, протекающего через нагревательный элемент [3].

1 Методы исследования

Структура перестраиваемого резонатора Фабри – Перо представлена на рисунке 1.1. Она представляет собой конструкцию, в которую входит как резонатор Фабри – Перо, так и управляющий нагревательный элемент. Для предотвращения влияния оптических свойств нагревательного элемента на интерференционную картину резонатора, данные элементы должны быть нанесены на разные стороны стеклянной подложки. Кроме того, для увеличения коэффициента пропускания нагревательного элемента на него наносится просветляющий слой.

Резонатор Фабри – Перо представляет собой многослойную интерференционную $H-L$ структуру из двух оптических материалов с различным показателем преломления, где H – материал с высоким показателем преломления, а L – материал

с низким показателем преломления. Для получения эффекта интерференции с низкими потерями должно выполняться условие фазового согласования слоев H и L в виде $H = L^2$. Согласно литературным источникам [5]–[8] оптимальной является комбинация материалов ниобий (V) оксид для слоя H и кремний (IV) оксид для слоя L (показатели преломления от 2,2 до 2,4 и 1,46 соответственно). В качестве материала подложки могут быть использованы промышленно выпускаемые оптические стекла с коэффициентом преломления от 1,51 до 1,52 [5]. Для нагревательного элемента нами предложена прозрачная пленка ИТО (смесь In_2O_3 и SnO_2 в соотношении 9 : 1) [10]–[13], которая обладает высокой электропроводностью и оптической прозрачностью в видимом диапазоне спектра. Для просветляющего слоя требуется материал с коэффициентом преломления не более чем 1,38, чему соответствует фтористый магний MgF_2 [5]–[6].



1 – интерферометр Фабри – Перо, 2 – подложка;
3 – оптический прозрачный нагревательный элемент, 4 – просветляющий слой

Рисунок 1.1 – Структура перестраиваемого резонатора Фабри – Перо

Процесс изготовления экспериментального образца перестраиваемого резонатора Фабри – Перо можно разделить на два этапа: формирование самой структуры перестраиваемого резонатора и процесс герметизации. В виду того, что температура испарения оксидов металлов составляет от 1500 до 2600 °С, то для получения тонких пленок может быть применен метод электронно-лучевого напыления [13]–[15]. Для процесса напыления были использованы промышленно выпускаемые таблетки индий (III) – олово (IV) оксид, ниобий (V) оксид и кремний (IV) оксид размером $d = 22$ мм, $h = 9$ мм [8]. Контроль процесса осаждения тонких пленок осуществлялся с помощью оптического метода контроля, что дает возможность формировать высококачественные тонкие пленки толщиной от 40 нм различных материалов с высокой точностью в 1 нм, что повышает воспроизводимость результатов. Также для контроля скорости осаждения были применены кварцевые микровесы. Толщина нагревательного элемента на базе пленки ИТО составила 82,40 нм. Толщины слоев резонатора Фабри – Перо определяются как $\lambda / 4$, где λ –

центральная длина волны полосы пропускания, и составляют 130 нм.

Внешний вид экспериментальных образцов перестраиваемых резонаторов Фабри – Перо в оснастке внутри вакуумной камеры установки напыления, сформированных на пластине из стекла К8 диаметром 76 мм, показаны на рисунке 1.2.

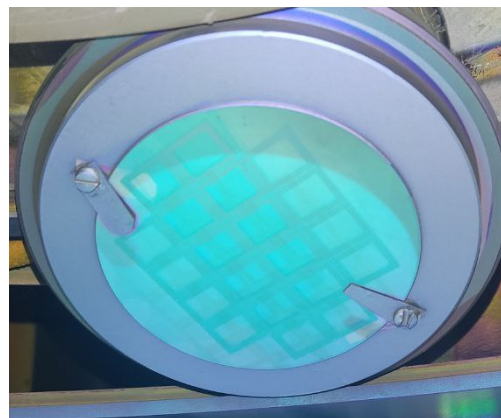


Рисунок 1.2 – Внешний вид экспериментальных образцов перестраиваемых резонаторов Фабри – Перо в оснастке внутри вакуумной камеры

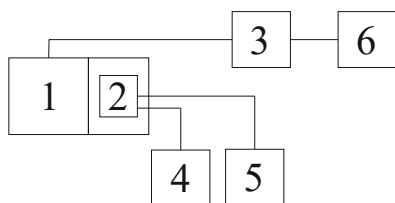
Для проведения дальнейших измерений подложка с экспериментальными образцами перестраиваемых резонаторов Фабри – Перо была разделена на отдельные элементы размером 25×75 мм на установке монтажа пластин ЭМ-2048А и установке разделения сверхтонких пластин ЭМ-2085В.

Для определения характеристик перестраиваемого резонатора Фабри – Перо исследовались его оптические характеристики при изменении температуры. Изменение температуры резонатора Фабри – Перо осуществлялось за счет протекания постоянного электрического тока через оптически прозрачный тонкопленочный нагревательный элемент (тонкая пленка ИТО), находящийся на той же подложке, что и сам резонатор. Для предотвращения влияния оптических свойств нагревательного элемента на интерференционную картину резонатора данные элементы должны быть нанесены на разные стороны стеклянной подложки.

Для проведения измерений влияния электрического тока на температуру и оптические характеристики экспериментального образца перестраиваемого резонатора Фабри – Перо был собран измерительный стенд, структура которого показана на рисунке 1.3.

Экспериментальный образец перестраиваемого резонатора Фабри – Перо с подключенными к нему контактами источника постоянного тока помещается в камеру спектрофотометра PHOTON RT [16]. Также в камеру помещается оптический пирометр для отслеживания изменения

температуры под действием тока. В качестве источника электрического тока применялся калибратор-измеритель напряжения и тока Keithley 2450, для контроля тока был использован мультиметр универсальный GW Instek GDM-8245. Значение силы тока изменялось с шагом 0,01 А до увеличения температуры экспериментального образца на 10 °С.



- 1 – multifunctional two-beam scanning spectrophotometer PHOTON RT,
 2 – cell with experimental sample of reconfigurable Fabry – Perot resonator,
 3 – personal computer (PC) with installed software,
 4 – power source of the heating element of the thermocell,
 5 – optical pyrometer OPTRIS CT (8 μm),
 6 – printer

Рисунок 1.3 – Структурная схема стенда для измерения параметров спектров пропускания термооптических преобразователей на базе микрорезонаторов Фабри – Перо

2 Результаты и их обсуждение

Изготовленные пленки нагревательного элемента на базе ИТО обладают прозрачностью в видимом диапазоне длин волн (рисунок 2.1) и сопротивлением 40 Ом.

Измерены спектры пропускания тонкой пленки ИТО на стеклянной подложке К8 в диапазоне длин волн от 400 нм до 700 нм. Установлено,

что экстремум функции пропускания пленки ИТО соответствует длине волны $\lambda = 592$ нм. Результаты измерения спектра пропускания пленки ИТО под воздействием электрического тока в диапазоне от 0 до 700 мА представлены в таблице 2.1. Экспериментально установлено, что с ростом тока от 0 до 700 мА, протекающего в тонкой пленке ИТО, произошло смещение минимума функции спектра пропускания в более коротковолновую область от 592 нм до 579 нм ($\Delta\lambda = 13$ нм), при этом коэффициент пропускания уменьшился на 0,92%.

Таблица 2.1 – Экстремум (минимум) спектра пропускания под воздействием тока

№ измерения	Значение тока, мА	Плотность тока, А/см ²	Коэффициент пропускания, %	Длина волны, нм
1	0	0,00	54,59	592
2	50	2427,18	54,56	592
3	100	4854,37	54,56	592
4	120	5825,24	54,55	592
5	190	9223,30	54,53	591
6	300	14563,11	54,41	589
7	400	19417,48	54,28	588
8	500	24271,84	54,12	587
9	600	29126,21	53,92	583
10	700	33980,58	53,67	579

С помощью оптического пирометра OPTRIS CT была установлена зависимость температуры экспериментального образца перестраиваемого резонатора Фабри – Перо от значения тока, подаваемого на нагревательный элемент ИТО (рисунок 2.2). На рисунке 2.3 представлены спектры пропускания перестраиваемого резонатора Фабри – Перо под воздействием электрического тока и температуры.

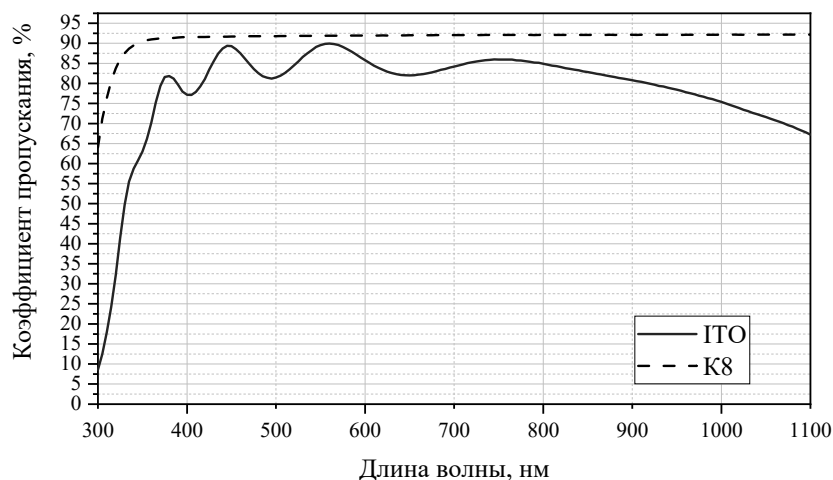


Рисунок 2.1 – Спектр пропускания стеклянной подложки К8 и тонкой пленки ИТО на стеклянной подложке К8

Таблица 2.2 – Результаты измерений

Ток, А	Плотность тока, А/см ²	Температура, °С	Коэффициент пропускания, %	Длина волны, нм	$\Delta\lambda$, нм	ΔT , %
0,00	0,00	28,3	59,71	532,00	—	0
0,24	11650,49	38,3	53,76	513,00	19,00	5,95
0,32	15533,98	48,3	52,19	509,00	4,00	1,57
0,39	18932,04	58,3	50,71	507,50	1,50	1,48
0,44	21359,22	68,3	47,57	506,50	1,00	3,14

В таблице 2.2 представлены результаты измерений максимального значения коэффициента пропускания перестраиваемого резонатора Фабри – Перо и соответствующей ему длины волны в зависимости от величины подаваемого тока на нагревательный элемент и соответственно его температуры.

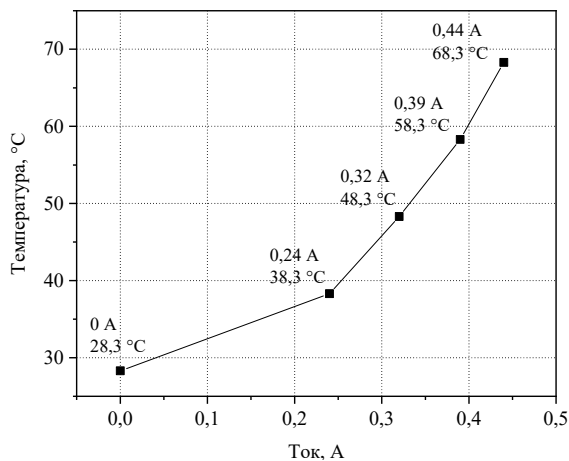


Рисунок 2.2 – Зависимость температуры измеряемого образца от протекаемого электрического тока

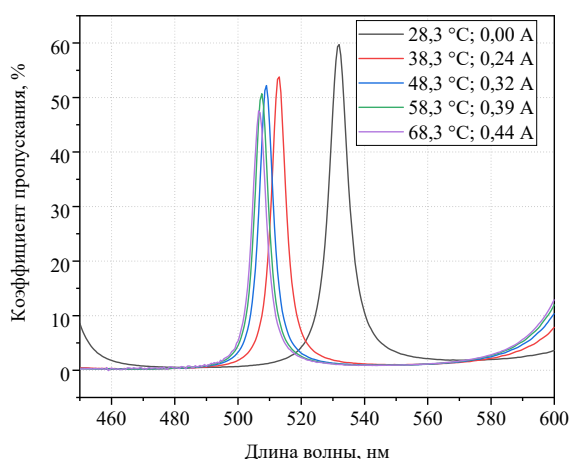


Рисунок 2.3 – Спектры пропускания перестраиваемого резонатора Фабри – Перо под воздействием электрического тока и температуры

Из рисунков 2.2 и 2.3 и таблицы 2.2 установлено, что с ростом силы тока от 0 до 0,44 А, протекающего в тонкой пленке ИТО, произошел нагрев экспериментального образца от 28,3 °С до 68,3 °С, что привело к смещению максимума коэффициента пропускания в более коротковолновую область светового спектра от 532,00 нм до 506,50 нм (смещение 25,5 нм), при этом максимум коэффициента пропускания уменьшился с 59,71% до 47,57% (смещение 12,14%). Также из рисунка 2.3 видно, что на выходе перестраиваемого резонатора Фабри – Перо наблюдается узкополосное излучение, полуширина которого составляет около 7 нм, при нагреве полуширина становится около 5,5 нм.

Для исследования временной стабильности характеристик перестраиваемого образца Фабри – Перо его помещали на хранение в вакуумную камеру на срок 268 дней. Для проверки работоспособности образца после хранения в вакууме были сняты спектры пропускания при комнатной температуре и после нагрева на 20 °С. Установлено, что при нагреве происходит сдвиг функции пропускания в более коротковолновую область спектра, что свидетельствует о работоспособности экспериментального образца.

Таким образом, перестраиваемый резонатор Фабри – Перо, работающий на принципе термооптического эффекта, может применяться в качестве узкополосного светофильтра с перестраиваемой полосой пропускания.

Заключение

Разработана структура и изготовлены методом электронно-лучевого напыления экспериментальные образцы перестраиваемого резонатора Фабри – Перо со встроенным нагревательным элементом на базе пленки ИТО.

Исследование оптических, термо- и электрооптических характеристик экспериментального образца перестраиваемого резонатора Фабри – Перо показали, что с ростом силы тока от 0 до 0,44 А, протекающего в тонкой пленке ИТО, происходит нагрев экспериментального образца от 28,3 °С до 68,3 °С, что приводит к смещению максимума коэффициента пропускания в более коротковолновую область светового спектра на 25,5 нм. Исследование временной стабильности характеристик экспериментального образца

показали, что спустя 268 дней хранения в вакууме работоспособность устройства сохраняется.

Данное устройство можно использовать в качестве узкополосного светофильтра с перестраиваемой полосой пропускания для монохроматизации оптического излучения видимого диапазона длин волн, полуширина которого составляет порядка 7 нм.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алмазбеков, К.А. Перестраиваемые оптические фильтры на тонких пленках / К.А. Алмазбеков, А.Г. Козырев // *Аллея науки*. – 2018. – Т. 4, № 6 (22). – С. 592–596.
2. Чесноков, В.В. Интерференционные светофильтры с перестраиваемой полосой пропускания / В.В. Чесноков, Д.В. Чесноков, Д.М. Никулин // *Известия высших учебных заведений. Приборостроение*. – 2009. – Т. 52, № 6. – С. 63–68.
3. Чесноков, А.Е. Исследование оптических характеристик многослойных структур управляемого резонатора Фабри – Перо / А.Е. Чесноков // *ГЕО-СИБИРЬ*. – 2010. – Т. 5, № 2. – С. 27–31.
4. Никулин, Д.М. Термостабильность перестраиваемых светофильтров на основе резонатора Фабри – Перо / Д.М. Никулин // *ГЕО-СИБИРЬ*. – 2007. – Т. 3. – Ч. 1. – С. 167–170.
5. Weber, M.J. Handbook of Optical Materials / M.J. Weber // Boca Raton: CRC Press LLC, 2003. – 499 p.
6. *Оптические материалы для инфракрасной техники*. Справочное пособие / Е.М. Воронкова [и др.]. – Москва: Наука, 1965. – 337 с.
7. *Composite Materials Handbook*. Volume 3: Materials Usage, Design, and Analysis. – Warrendale: SAE International, 2002. – 693 p.
8. ЗАО «НПФ „Люминофор“». Сайт производителя [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://luminophor.ru/>. – Дата доступа: 09.06.2023.
9. Немилов, С.В. Оптическое материаловедение: Оптические стекла: учебное пособие, курс лекций / С.В. Немилов. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2011. – 175 с.
10. Прозрачные проводящие покрытия на основе алюминиевой решетки, встроенной в анодный оксид алюминия / А.В. Долбик [и др.] // *Современные методы и технологии создания и обработки материалов: сборник научных трудов*.

В 2 кн. Кн. 1: *Материаловедение / Физико-технический институт Национальной академии наук Беларуси*; редкол.: В.Г. Залесский [и др.]. – Минск, 2022. – С. 83–90.

11. Патрушева, Т.Н. Технологии изготовления компонентов оксидных солнечных батарей: монография / Т.Н. Патрушева. – Красноярск: СФУ, 2015. – 328 с.

12. Мельников, А.А. Прозрачные электропроводящие антиотражающие покрытия на основе ИТО, SiO₂, TiO₂ / А.А. Мельников, П.А. Щур // *Труды ВИАМ*. – 2019. – Т. 80, № 8. – С. 56–66.

13. Троян, П.Е. Прозрачные электропроводящие покрытия с чувствительными значениями коэффициента пропускания и возбуждения сопротивления / П.Е. Троян, Ю.В. Сахаров, Ю.С. Жидик // *Труды ТУРСа*. – 2014. – Т. 31, № 1. – С. 99–120.

14. *Справочник технолога-оптика*. 2-е изд. / М.А. Окатов, Э.А. Антонов. – Санкт-Петербург: Политехника, 2004. – 679 с.

15. Ершов, А.В. Многослойные оптические покрытия. Проектирование, материалы, особенности технологии получения методом электронно-лучевого испарения: Учебно-методические материалы по программе повышения квалификации «Новые материалы электроники и оптоэлектроники для информационно-телекоммуникационных систем» / А.В. Ершов, А.И. Машин. – Нижний Новгород: ННГУ, 2006. – 105 с.

17. *ЭссентОптикс*. Сайт производителя [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.essentoptics.com/>. – Дата доступа: 08.12.2023.

Авторы выражают благодарность Белорусскому республиканскому фонду фундаментальных исследований за финансирование данной работы (проект Ф23МЭ-011).

Поступила в редакцию 03.04.2025.

Информация об авторах

Кравченко Владимир Михайлович – к.т.н.
Кузьмицкая Анна Сергеевна – научный сотрудник
Малютина-Бронская Виктория Владимировна – зав. лабораторией
Конайко Алексей Иванович – к.ф.-м.н., доцент

**ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ
ЛОГУНОВА – ТАВХЕЛИДЗЕ С ПОТЕНЦИАЛОМ «ДЕЛЬТА-ОКРУЖНОСТЬ»
ДЛЯ СОСТОЯНИЙ РАССЕЯНИЯ****А.В. Павленко, В.Н. Капшай, Ю.А. Гришечкин***Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины***EXACT SOLUTIONS OF THE TWO-DIMENSIONAL
LOGUNOV – TAVKHELIDZE EQUATION WITH THE “DELTA-CIRCLE”
POTENTIAL FOR SCATTERING STATES****A.V. Paulenka, V.N. Kapshai, Yu.A. Grishechkin***Francisk Skorina Gomel State University*

Аннотация. Получены точные решения двумерных парциальных интегральных уравнений Логунова – Тавхелидзе для состояний рассеяния системы двух скалярных частиц одинаковой массы. Взаимодействие частиц моделировано квазипотенциалом «дельта-окружность», заданным в релятивистском конфигурационном представлении и суперпозицией двух таких квазипотенциалов. В результате анализа парциальных сечений рассеяния и полной двумерной амплитуды рассеяния выявлено резонансное поведение этих величин. Установлено, что особенностью двумерного рассеяния, в отличие от его трехмерного варианта, является неограниченный рост сечения рассеяния, соответствующего состояниям с равным нулю азимутальным квантовым числом при стремлении быстроты к нулю (энергии к массе покоя). Эта особенность обусловлена логарифмическим поведением парциальной функции Грина при малых значениях быстроты. На примере найденных точных решений продемонстрировано выполнение условия унитарности двумерных парциальных амплитуд рассеяния.

Ключевые слова: двумерное уравнение Логунова – Тавхелидзе, двумерная функция Грина, волновая функция, двухчастичная система, потенциал «дельта-окружность», парциальное интегральное уравнение, точное решение, условие унитарности, двумерная амплитуда рассеяния, двумерное сечение рассеяния.

Для цитирования: Павленко, А.В. Точные решения двумерного уравнения Логунова – Тавхелидзе с потенциалом «дельта-окружность» для состояний рассеяния / А.В. Павленко, В.Н. Капшай, Ю.А. Гришечкин // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 67–72. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_67. – EDN: HZYUGC

Abstract. The exact solutions of the two-dimensional partial integral equations of Logunov-Tavkhelidze for the scattering states of a system of two scalar particles of equal mass were obtained. The particle interaction was modeled by a “delta-circle” quasipotential defined in the relativistic configurational representation and by a superposition of two such quasipotentials. The analysis of the partial scattering cross-sections and the full two-dimensional scattering amplitude revealed their resonant behavior. It was established that a peculiarity of two-dimensional scattering, unlike its three-dimensional counterpart, is the unlimited growth of the scattering cross-section corresponding to states with a zero azimuthal quantum number as the rapidity tends to zero (energy tends to the rest mass). This feature is caused by the logarithmic behavior of the partial Green’s function at small rapidity values. Using the found exact solutions as an example, the fulfillment of the unitarity condition for the two-dimensional partial scattering amplitudes is demonstrated.

Keywords: two-dimensional Logunov-Tavkhelidze equation, two-dimensional Green’s function, wave function, two-particle system, “delta-circle” potential, partial integral equation, exact solution, unitarity condition, two-dimensional scattering amplitude, two-dimensional scattering cross-section.

For citation: Paulenka, A.V. Exact solutions of the two-dimensional Logunov – Tavkhelidze equation with the “delta-circle” potential for scattering states / A.V. Paulenka, V.N. Kapshai, Yu.A. Grishechkin // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 3 (64). – P. 67–72. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_67 (in Russian). – EDN: HZYUGC

Введение

Моделирование короткодействующих взаимодействий посредством потенциалов, содержащих дельта-функции, широко применяется в задачах квантовой механики и квантовой теории поля, так как при этом возможно получение точных решений уравнений, описывающих состояния систем частиц. Например, точные решения

уравнения Шрёдингера рассматривались в работах [1], [2], а решения уравнения Дирака – в работах [3]–[7]. Однако, решения интегральных квазипотенциальных уравнений относительно состояний рассеяния исследовались только в одномерном [8], [9] и трехмерном [10]–[12] случаях. В настоящей работе в релятивистском конфигурационном представлении (РКП)

применительно к состояниям рассеяния рассматривается двумерная задача для квазипотенциала «дельта-окружность» и суперпозиции двух таких квазипотенциалов.

1 Парциальные интегральные уравнения

Двумерные интегральные уравнения квазипотенциального типа, сформулированные в РКП для описания состояний упругого рассеяния системы двух скалярных частиц одинаковой массы m , имеют вид ($\hbar = c = 1$):

$$\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \xi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \int G(E_q; \mathbf{p}, \mathbf{p}') V(\rho') \psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}') d\rho', \quad (1.1)$$

где $\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ – двумерная волновая функция; $\mathbf{q}$ – относительный начальный импульс двухчастичной системы; $\mathbf{p} = \rho \mathbf{n}_p$ – двумерный радиус-вектор в РКП; ρ – модуль радиус-вектора; $V(\rho')$ – локальный в РКП квазипотенциал; $G(E_q; \mathbf{p}, \mathbf{p}')$ – функция Грина; $2E_q = 2\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}$ – энергия двухчастичной системы; $\xi(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ – релятивистская плоская волна, которая в двумерном пространстве имеет вид

$$\xi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \left(\frac{E_q - \mathbf{q} \mathbf{n}_p}{m} \right)^{-\frac{1}{2} - i\mu p}. \quad (1.2)$$

Разложение релятивистской плоской волны (1.2), функции Грина и волновой функции на парциальные составляющие соответственно представим в следующей форме:

$$\begin{aligned} \xi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} i^{\mu} s_{\mu}(\chi_q, \rho) \exp(i\mu\alpha); \\ \psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{i^{\mu}}{\sqrt{m\rho \operatorname{sh} \chi_q}} \psi_{\mu}(\chi_q, \rho) \exp(i\mu\alpha); \quad (1.3) \\ G(E_q; \mathbf{p}, \mathbf{p}') &= \frac{1}{\sqrt{\rho\rho'}} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} G_{\mu}(\chi_q; \rho, \rho') \exp(i\mu\gamma), \end{aligned}$$

где в целях упрощения последующих вычислений введена быстрота χ_q , связанная с энергией системы выражением $2E_q = 2m \operatorname{ch} \chi_q$; $\psi_{\mu}(\chi_q, \rho)$ – парциальные волновые функции в РКП; μ – азимутальное квантовое число; α – угол между векторами $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$; $G_{\mu}(\chi_q; \rho, \rho')$ – парциальные функции Грина в РКП; γ – угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$; $s_{\mu}(\chi_q, \rho)$ – парциальные волны, представимые выражениями [13]

$$s_{\mu}(\chi_q, \rho) = i^{\mu} \frac{\Gamma(1/2 - i\mu\rho)}{\Gamma(1/2 + \mu - i\mu\rho)} P_{-i\mu\rho - 1/2}^{\mu}(\operatorname{ch} \chi_q), \quad (1.4)$$

здесь $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера; $P_a^b(z)$ – функция Лежандра первого рода.

Подставляя (1.3) в (1.1), получим двумерные интегральные уравнения для парциальных волновых функций:

$$\begin{aligned} \psi_{\mu}(\chi_q, \rho) &= \sqrt{m\rho \operatorname{sh} \chi_q} s_{\mu}(\chi_q, \rho) + \\ &+ 2\pi \int_0^{\infty} G_{\mu}(\chi_q; \rho, \rho') V(\rho') \psi_{\mu}(\chi_q, \rho') d\rho'. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Парциальные функции Грина двумерного уравнения Логунова – Тавхелидзе имеют вид:

$$\begin{aligned} G_{\mu}(\chi_q; \rho, \rho') &= \frac{-i\sqrt{\rho\rho'} \operatorname{sh}(\chi_q)}{4\operatorname{sh}(2\chi_q)} \times \\ &\times \left[\frac{e_{\mu}^{+}(\chi_q, \rho) e_{\mu}^{+*}(\chi_q, \rho')}{1 - \exp[-\pi m(\rho - \rho')]} + \right. \\ &+ \frac{e_{\mu}^{-}(\chi_q, \rho) e_{\mu}^{-*}(\chi_q, \rho')}{1 - \exp[\pi m(\rho - \rho')]} - \frac{e_{\mu}^{+}(\chi_q, \rho) e_{\mu}^{-*}(\chi_q, \rho')}{1 - \exp[-\pi m(\rho + \rho')]} - \\ &\left. - \frac{e_{\mu}^{-}(\chi_q, \rho) e_{\mu}^{+*}(\chi_q, \rho')}{1 - \exp[\pi m(\rho + \rho')]} \right]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

В (1.6) введены обозначения

$$\begin{aligned} e_{\mu}^{\pm}(\chi_q, \rho) &= i^{\mu} \frac{2}{\pi} \operatorname{cth}(\pi m\rho) \frac{\Gamma(1/2 - i\mu\rho)}{\Gamma(1/2 + \mu - i\mu\rho)} \times \\ &\times Q_{-1/2 \mp i\mu\rho}^{\mu}(\operatorname{ch} \chi_q), \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $Q_a^b(z)$ – функция Лежандра второго рода.

Отметим, что сумма первых двух слагаемых, заключённых в квадратные скобки в выражении (1.6), при $\rho = \rho'$ имеет неопределённость вида $0/0$. Раскрывая ее по правилу Лопиталя, получим:

$$\begin{aligned} G_{\mu}(\chi_q; \rho', \rho') &= \\ &= \frac{-i\rho' \operatorname{sh}(\chi_q)}{4\operatorname{sh}(2\chi_q)} \left[e_{\mu}^{-}(\chi_q, \rho') e_{\mu}^{-*}(\chi_q, \rho') + \right. \\ &+ \frac{e_{\mu}^{+*}(\chi_q, \rho')}{\pi m} \frac{\partial e_{\mu}^{+}(\chi_q, \rho')}{\partial \rho'} - \\ &- \frac{e_{\mu}^{-*}(\chi_q, \rho')}{\pi m} \frac{\partial e_{\mu}^{-}(\chi_q, \rho')}{\partial \rho'} - \frac{e_{\mu}^{+}(\chi_q, \rho') e_{\mu}^{-*}(\chi_q, \rho')}{1 - \exp[-2\pi m\rho']} - \\ &\left. - \frac{e_{\mu}^{-}(\chi_q, \rho') e_{\mu}^{+*}(\chi_q, \rho')}{1 - \exp[2\pi m\rho']} \right]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Асимптотическое поведение при $\rho \rightarrow \infty$ функций (1.4), (1.7) и парциальных функций Грина (1.6) описывается формулами

$$s_{\mu}(\chi_q, \rho) \Big|_{\rho \rightarrow \infty} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi m \operatorname{sh} \chi_q}} \cos\left(\rho m \chi_q - \mu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} e_{\mu}^{\pm}(\chi_q, \rho) \Big|_{\rho \rightarrow \infty} &\approx \\ &\approx \pm i \sqrt{\frac{2}{\pi m \operatorname{sh} \chi_q}} \exp\left[\pm i\left(\rho m \chi_q - \mu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right], \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} G_{\mu}(\chi_q; \rho, \rho') \Big|_{\rho \rightarrow \infty} &\equiv \frac{-i}{\operatorname{sh}(2\chi_q)} s_{\mu}^{*}(\chi_q, \rho') \times \\ &\times \sqrt{\frac{\rho' \operatorname{sh} \chi_q}{2\pi m}} \exp\left[i\left(\rho m \chi_q - \mu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]. \end{aligned} \quad (1.11)$$

2 Определение двумерной амплитуды рассеяния

С учетом (1.9)–(1.11) получим из уравнения (1.5) асимптотическое поведение парциальных волновых функций:

$$\Psi_{\mu}(\chi_q, \rho) \Big|_{\rho \rightarrow \infty} \cong \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \left(\rho m \chi_q - \mu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sqrt{m \operatorname{sh} \chi_q} f_{\mu}(\chi_q) \exp \left[i \left(\rho m \chi_q - \mu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (2.1)$$

Здесь $f_{\mu}(\chi_q)$ – двумерные парциальные амплитуды рассеяния:

$$f_{\mu}(\chi_q) = \frac{-\sqrt{2\pi}}{m \operatorname{sh}(2\chi_q)} \times \int_0^{\infty} \sqrt{\rho'} V(\rho') s_{\mu}^*(\chi_q, \rho') \Psi_{\mu}(\chi_q, \rho') d\rho'. \quad (2.2)$$

После нахождения парциальных амплитуд двумерных парциальных сечений $\sigma_{\mu}(\chi_q)$ и двумерное полное сечение рассеяния $\sigma(\chi_q)$ определяются по формулам

$$\sigma_{\mu}(\chi_q) = 2\pi |f_{\mu}(\chi_q)|^2; \quad \sigma(\chi_q) = \sigma_0(\chi_q) + 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \sigma_{\mu}(\chi_q). \quad (2.3)$$

Для вывода условия унитарности парциальных амплитуд рассеяния сгруппируем слагаемые, соответствующие расходящейся и сходящейся волнам, и получим

$$\begin{aligned} \Psi_{\mu}(\chi_q, \rho) \Big|_{\rho \rightarrow \infty} &\cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-i \left(\rho m \chi_q - \mu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] + \\ &+ \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + i \sqrt{m \operatorname{sh} \chi_q} f_{\mu}(\chi_q) \right] \times \\ &\times \exp \left[i \left(\rho m \chi_q - \mu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Теперь из (2.4) определим отношение коэффициента, стоящего перед экспонентой в слагаемом, содержащем расходящуюся волну, к коэффициенту, записанному на такой же позиции в слагаемом, содержащем сходящуюся волну, и обозначим эту величину как $S_{\mu}(\chi_q)$. Данное отношение, вычисляемое с использованием асимптотических решений, принимает вид:

$$\begin{aligned} S_{\mu}(\chi_q) &= \frac{(2\pi)^{-1/2} + i \sqrt{m \operatorname{sh} \chi_q} f_{\mu}(\chi_q)}{(2\pi)^{-1/2}} = \\ &= 1 + i \sqrt{2\pi m \operatorname{sh} \chi_q} f_{\mu}(\chi_q). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Если функция (2.5) удовлетворяет условию

$$S_{\mu}(\chi_q) S_{\mu}^*(\chi_q) = 1, \quad (2.6)$$

то функции (2.5) могут быть представлены в следующей форме

$$S_{\mu}(\chi_q) = \exp(2i\varphi(\chi_q)), \quad (2.7)$$

где $\varphi(\chi_q)$ – фазовый сдвиг. Пользуясь (2.5)–(2.7), нетрудно получить выражение

$$\operatorname{Im} f_{\mu}(\chi_q) = \sqrt{\frac{\pi m \operatorname{sh} \chi_q}{2}} |f_{\mu}(\chi_q)|^2, \quad (2.8)$$

которое является условием унитарности для парциальных амплитуд рассеяния и аналогично нерелятивистскому [14].

3 Решения интегральных парциальных уравнений для квазипотенциала «дельта-окружность»

Рассмотрим квазипотенциал вида:

$$V(\rho) = \lambda_1 \delta(\rho - a_1), \quad (3.1)$$

где $\delta(\rho - a_1)$ – дельта-функция; a_1 – радиус «дельта-окружности»; λ_1 – константа. Подставляя (3.1) в (2.2) и вычисляя интегралы с учетом свойств дельта-функции, получим парциальные амплитуды рассеяния

$$f_{\mu}(\chi_q) = -\lambda_1 \frac{\sqrt{2\pi a_1}}{m \operatorname{sh}(2\chi_q)} s_{\mu}^*(\chi_q, a_1) \Psi_{\mu}(\chi_q, a_1), \quad (3.2)$$

где $\Psi_{\mu}(\chi_q, a_1)$ – неизвестный коэффициент. Для его определения подставим (3.1) в (1.5) и после вычисления интегралов получим

$$\begin{aligned} \Psi_{\mu}(\chi_q, \rho) &= \sqrt{m \rho \operatorname{sh} \chi_q} s_{\mu}(\chi_q, \rho) + \\ &+ 2\pi \lambda_1 G_{\mu}(\chi_q; \rho, a_1) \Psi_{\mu}(\chi_q, a_1). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из (3.3) нетрудно получить формулу для вычисления искомого коэффициента:

$$\Psi_{\mu}(\chi_q, a_1) = \frac{s_{\mu}(\chi_q, a_1) \sqrt{m a_1 \operatorname{sh} \chi_q}}{1 - 2\pi \lambda_1 G_{\mu}(\chi_q; a_1, a_1)}. \quad (3.4)$$

После подстановки (3.4) в (3.2) получим окончательное выражение для парциальных амплитуд рассеяния:

$$f_{\mu}(\chi_q) = \frac{\sqrt{2\pi} \lambda_1 a_1}{\sqrt{m \operatorname{sh}(2\chi_q)}} \frac{\sqrt{\operatorname{sh} \chi_q} s_{\mu}(\chi_q, a_1) s_{\mu}^*(\chi_q, a_1)}{2\pi \lambda_1 G_{\mu}(\chi_q; a_1, a_1) - 1}. \quad (3.5)$$

Нетрудно убедиться, что эти амплитуды удовлетворяют условию унитарности (2.8). Используя (3.5), получим парциальные сечения рассеяния

$$\sigma_{\mu}(\chi_q) = \frac{4\pi^2 \lambda_1^2 a_1^2}{m \operatorname{sh}^2(2\chi_q)} \frac{\operatorname{sh} \chi_q |s_{\mu}(\chi_q, a_1)|^4}{|2\pi \lambda_1 G_{\mu}(\chi_q; a_1, a_1) - 1|^2}. \quad (3.6)$$

На рисунке 3.1 проиллюстрированы зависимости парциальных сечений рассеяния (3.6) от быстроты χ_q для первых трех значений азимутального квантового числа μ .

Численный расчет показывает, что парциальное сечение рассматриваемой системы частиц, находящейся в состоянии с равным нулю азимутальным квантовым числом, при малых значениях быстроты (при энергии близкой к массе покоя) неограниченно возрастает. Это связано с тем, что соответствующая функция Грина в этой области имеет логарифмическую особенность.

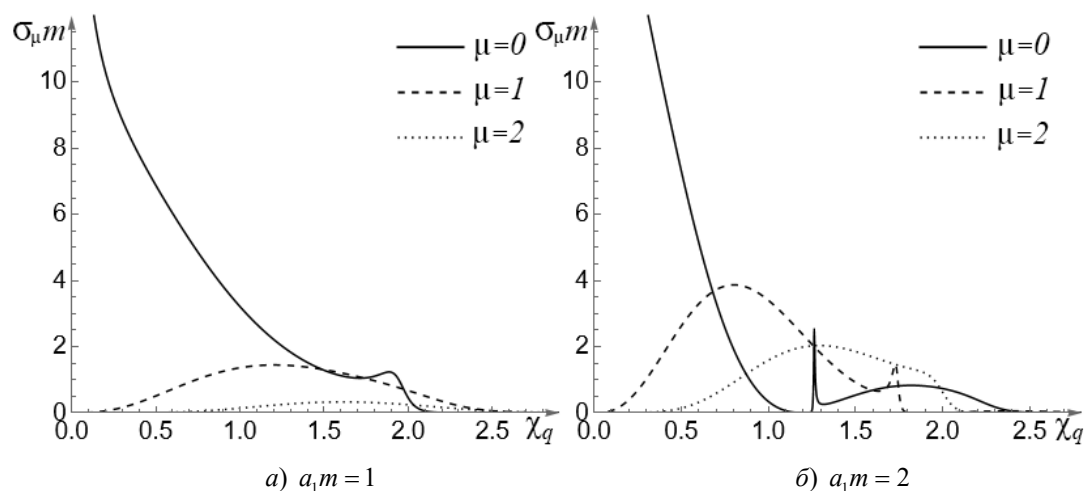


Рисунок 3.1 – Зависимость парциальных сечений от быстроты при $\lambda_1/m = 10$

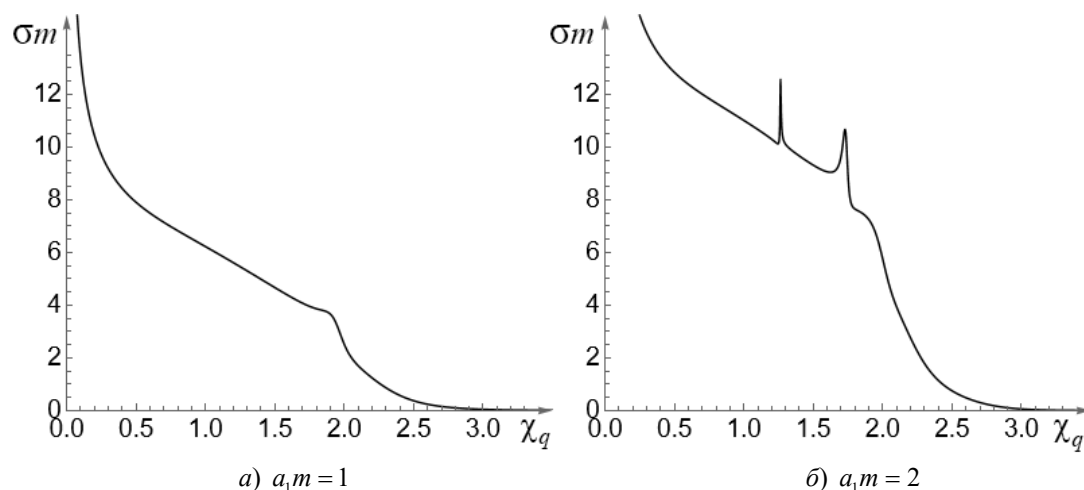


Рисунок 3.2 – Зависимость полного сечения от быстроты при $\lambda_1/m = 10$

На рисунке видно, что при $\mu = 0$ и $a_1 m = 1$ в зависимости $\sigma_0(\chi_q)$ при некотором значении быстроты наблюдается резкое увеличение этого парциального сечения рассеяния. Для системы частиц, находящейся в состояниях с $\mu = 1$ и $\mu = 2$, подобное поведение не наблюдается (рисунок 3.1, а), однако, с увеличением радиуса «дельта-окружности», как видно на рисунке 3.1, б, резкое увеличение зависимостей σ_μ от χ_q наблюдается и в этих состояниях.

На рисунке 3.2 приведена зависимость полного сечения рассеяния от быстроты, рассчитанная по формуле (2.3). При этом ряд был усечен до суммы первых двенадцати членов, так как последующие слагаемые вносят пренебрежимо малый вклад, что проверено дополнительными вычислениями.

Сравнивая рисунки 3.1 и 3.2, видим, что основной вклад в полное сечение рассеяния при малых значениях быстроты вносит парциальная составляющая, соответствующая состоянию

с $\mu = 0$. Это обусловлено неограниченным ростом данного парциального сечения в низкоэнергетической области. На рисунке 3.2 наблюдаются резкие изменения полного сечения при тех же значениях быстроты, что и парциальных сечений (рисунок 3.1).

4 Решение интегральных парциальных уравнений для суперпозиции двух квазипотенциалов «дельта-окружность»

Рассмотрим теперь решение уравнений (1.5) при выборе взаимодействия вида

$$V(\rho) = \lambda_1 \delta(\rho - a_1) + \lambda_2 \delta(\rho - a_2), \quad (4.1)$$

где λ_1 и λ_2 – действительные константы; a_1 и a_2 – радиусы «дельта-окружностей» ($a_1 \leq a_2$). Подставляя квазипотенциал (4.1) в интегральные уравнения (1.5) получим

$$\begin{aligned} \Psi_\mu(\chi_q, \rho) = & \sqrt{m\rho \sinh \chi_q} s_\mu(\chi_q, \rho) + \\ & + 2\pi\lambda_1 G_\mu(\chi_q; \rho, a_1) \Psi_\mu(\chi_q, a_1) + \\ & + 2\pi\lambda_2 G_\mu(\chi_q; \rho, a_2) \Psi_\mu(\chi_q, a_2). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для нахождения неизвестных констант $\Psi_\mu(\chi_q, a_1)$ и $\Psi_\mu(\chi_q, a_2)$ положим в (4.2) $\rho = a_1$ и $\rho = a_2$ и, тем самым, сведем это уравнение к системе двух линейных алгебраических уравнений относительно этих констант:

$$\begin{bmatrix} 1 - 2\pi\lambda_1 G_\mu(\chi_q; a_1, a_1) & -2\pi\lambda_2 G_\mu(\chi_q; a_1, a_2) \\ -2\pi\lambda_1 G_\mu(\chi_q; a_2, a_1) & 1 - 2\pi\lambda_2 G_\mu(\chi_q; a_2, a_2) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Psi_\mu(\chi_q, a_1) \\ \Psi_\mu(\chi_q, a_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{ma_1 \operatorname{sh} \chi_q s_\mu(\chi_q, a_1)} \\ \sqrt{ma_2 \operatorname{sh} \chi_q s_\mu(\chi_q, a_2)} \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Решение системы (4.3) имеет вид

$$\Psi_\mu(\chi_q, a_1) = \frac{\Delta_1(\chi_q)}{\Delta(\chi_q)}, \quad \Psi_\mu(\chi_q, a_2) = \frac{\Delta_2(\chi_q)}{\Delta(\chi_q)}, \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(\chi_q) &= (1 - 2\pi\lambda_1 G_\mu(\chi_q; a_1, a_1))(1 - 2\pi\lambda_2 G_\mu(\chi_q; a_2, a_2)) - \\ &\quad - (2\pi)^2 \lambda_2 \lambda_1 G_\mu(\chi_q; a_1, a_2) G_\mu(\chi_q; a_2, a_1), \\ \Delta_1(\chi_q) &= \sqrt{ma_1 \operatorname{sh} \chi_q s_\mu(\chi_q, a_1)}(1 - 2\pi\lambda_2 G_\mu(\chi_q; a_2, a_2)) + \end{aligned}$$

$$+ \sqrt{ma_2 \operatorname{sh} \chi_q s_\mu(\chi_q, a_2)} 2\pi\lambda_2 G_\mu(\chi_q; a_1, a_2),$$

$$\Delta_2(\chi_q) =$$

$$= (1 - 2\pi\lambda_1 G_\mu(\chi_q; a_1, a_1)) \sqrt{ma_2 \operatorname{sh} \chi_q s_\mu(\chi_q, a_2)} + 2\pi\lambda_1 \sqrt{ma_1 \operatorname{sh} \chi_q s_\mu(\chi_q, a_1)} G_\mu(\chi_q; a_2, a_1).$$

Двумерным парциальным амплитудам рассеяния (2.2) двухчастичной системы в случае взаимодействия, описываемого квазипотенциалом (4.1), соответствуют выражения

$$f_\mu(\chi_q) = \frac{\sqrt{2\pi}}{m \operatorname{sh}(2\chi_q)} \left[-\lambda_1 \sqrt{a_1 s_\mu^*(\chi_q, a_1)} \Psi_\mu(\chi_q, a_1) - \lambda_2 \sqrt{a_2 s_\mu^*(\chi_q, a_2)} \Psi_\mu(\chi_q, a_2) \right]. \quad (4.5)$$

Амплитуды (4.5), как нетрудно убедиться, удовлетворяют условию унитарности (2.8). Используя (4.4) и (4.5) получим выражения для парциальных сечений рассеяния

$$\sigma_\mu(\chi_q) = \frac{4\pi^2}{m^2 \operatorname{sh}^2(2\chi_q) |\Delta(\chi_q)|^2} \times \quad (4.6)$$

$$\times \left| \lambda_1 \sqrt{a_1 s_\mu^*(\chi_q, a_1)} \Delta_1(\chi_q) + \lambda_2 \sqrt{a_2 s_\mu^*(\chi_q, a_2)} \Delta_2(\chi_q) \right|^2.$$

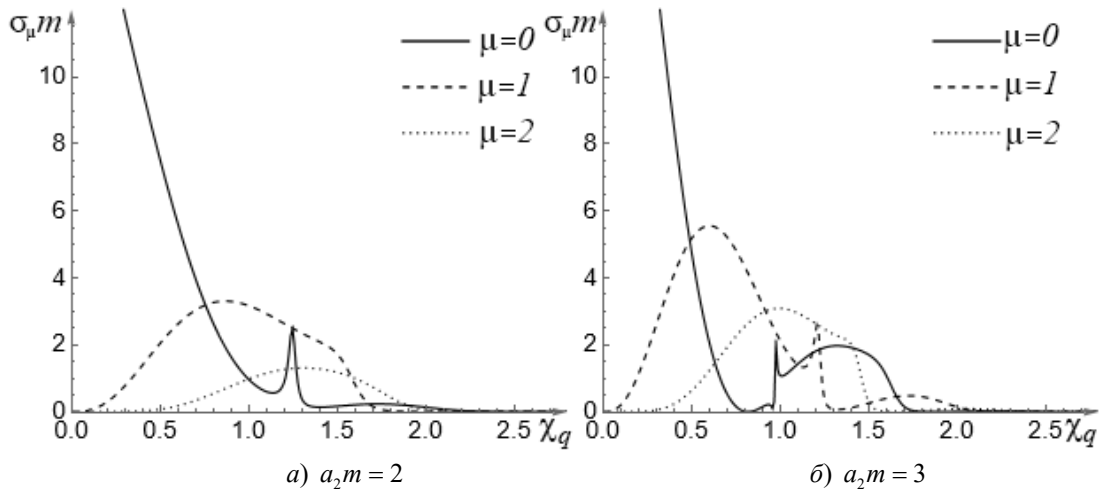


Рисунок 4.1 – Зависимость парциальных сечений от быстроты при $\lambda_1/m = 1$, $\lambda_2/m = 4$ и $a_1 m = 1$

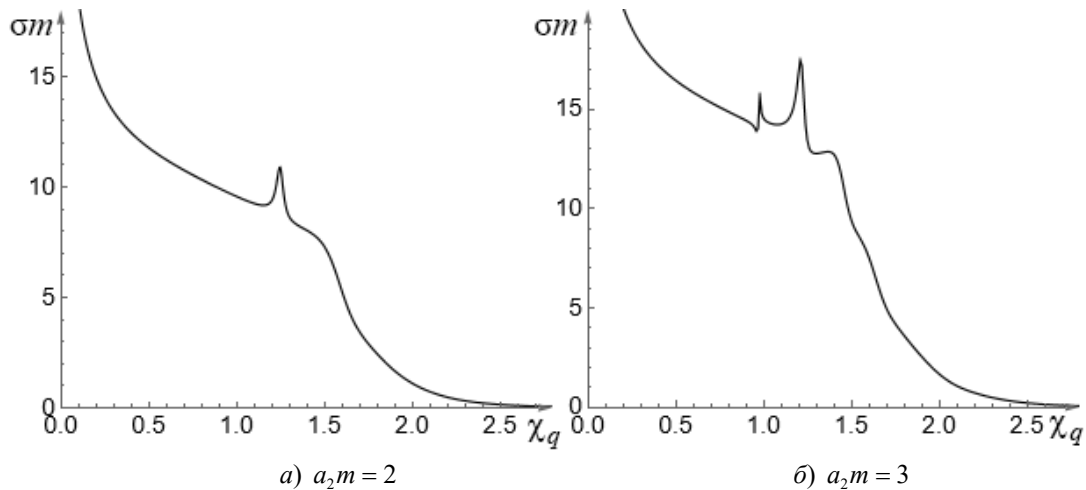


Рисунок 4.2 – Зависимость полного сечения от быстроты при $\lambda_1/m = 1$, $\lambda_2/m = 4$ и $a_1 m = 1$

На рисунке 4.1 проиллюстрированы зависимости парциальных сечений рассеяния для первых трёх значений азимутального квантового числа от быстроты, а на рисунке 4.2 представлена зависимость полного двумерного сечения рассеяния от быстроты, вычисленного как сумма первых двадцати парциальных сечений (4.6). Выбор верхнего предела суммирования ($\mu_{\max} = 19$) обусловлен сходимостью ряда – учет следующих членов вплоть до $\mu_{\max} = 30$ не вносит значимого изменения в результат.

Анализируя графики, изображенные на рисунках 4.1 и 4.2, видим, что для парциальных и для полных двумерных сечений рассеяния характерно резкое изменения поведения. Как и в случае взаимодействия, описываемого квазипотенциалом «дельта-окружность», при увеличении радиуса a_2 внешней «дельта-окружности» количество таких резких изменений возрастает.

Заключение

В настоящей работе получены точные аналитические выражения для парциальных двумерных амплитуд рассеяния и двумерных парциальных сечений рассеяния системы двух скалярных частиц одинаковой массы при выборе взаимодействия в виде квазипотенциала «дельта-окружность» и суперпозиции двух таких квазипотенциалов. Сформулировано условие унитарности парциальных амплитуд рассеяния в двумерном случае. В зависимости двумерных парциальных и полного сечения рассеяния от быстроты выявлены их резкие изменения, проявляющиеся характерными пиками на соответствующих графиках. Установлено, что при моделировании взаимодействия суперпозицией двух потенциалов «дельта-окружность» с увеличением радиуса внешней «дельта-окружности» количество пиков в полном сечении рассеяния возрастает вследствие проявления их для состояний со всё большим азимутальным квантовым числом, что согласуется с поведением системы с одиночным квазипотенциалом «дельта-окружность».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Blinder, S.M.* Schrödinger equation for a Dirac bubble potential / S.M. Blinder // Chem. Phys. Lett. – 1979. – Vol. 64, № 3. – P. 485–486.
2. *Lassaut, M.* The rotational spectrum and the attractive delta-shell potential / M. Lassaut, R.J. Lombard, R. Yekken // Phys. Scr. – 2008. – Vol. 78, № 3. – P. 035008–1–5.
3. *Roy, C.L.* Some typical features of relativistic tunnelling through a double barrier system with delta-function potentials / C.L. Roy // Physica Status Solidi (B). – 1993. – Vol. 176, № 1. – P. 109–115.
4. *Roy, C.L.* Some special features of relativistic tunnelling through multi-barrier systems with

delta-function barriers / C.L. Roy // Phys. Lett. A. – 1994. – Vol. 189, № 1. – P. 345–350.

5. *Dittrich, J.* Dirac operators with a spherically symmetric δ -shell interaction / J. Dittrich, P. Exner, P. Šeba // J. Math. Phys. – 1989. – Vol. 30, № 12. – P. 2875–2882.

6. *Domingyes-Adame, F.* Exact solutions of the Dirac equation with surface delta interactions / F. Domingyes-Adame // Am. J. Phys. A. – 1990. – Vol. 23, № 11. – P. 1993–1999.

7. *Shabani, J.* Exactly solvable models of relativistic δ -sphere interactions in quantum mechanics / J. Shabani // J. Math. Phys. – 2002. – Vol. 43, № 12. – P. 6064–6084.

8. *Kapshai, V.N.* Relativistic two-particle one-dimensional scattering problem for superposition of δ -potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // J. Phys. A. – 1999. – Vol. 32. – P. 5329–5342.

9. *Kapshai, V.N.* One-dimensional relativistic problems on bound states and scattering for a superposition of two δ potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // Russian Physics Journal. – 2002. – Vol. 45, № 1. – P. 1–9.

10. *Kapshai, V.N.* Relativistic two-particle equations with superposition of delta-shell potentials: scattering and bound states / V.N. Kapshai, Y.A. Grishechkin // arXiv preprint arXiv: 1312.1902. – 2013.

11. *Гришечкин, Ю.А.* Релятивистская задача о s -состояниях рассеяния для суперпозиции двух потенциалов « δ -сфера» / Ю.А. Гришечкин, В.Н. Капшай // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2 (23). – С. 7–12.

12. *Капшай, В.Н.* Решение релятивистских парциальных уравнений для d -состояний рассеяния / В.Н. Капшай, А.А. Гришечкина // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 25–30.

13. *Мир-Касимов, Р.М.* Релятивистские операторы кинематического импульса / Р.М. Мир-Касимов // Письма в ЭЧАЯ. – 2010. – Т. 7, № 5 (161). – С. 505–515.

14. *Friedrich, H.* Scattering theory / H. Friedrich // Lecture Notes in Physics. – Berlin: Springer, 2013. – Vol. 872. – 287 p.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант по проекту Ф25М–004).

Поступила в редакцию 12.06.2025.

Информация об авторах

Павленко Андрей Васильевич – аспирант
Капшай Валерий Николаевич – к.ф.-м.н., доцент
Гришечкин Юрий Алексеевич – к.ф.-м.н., доцент

УДК 539.234:546.26

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_73
EDN: IBPEYG

ВЛИЯНИЕ ТЕРМООБРАБОТКИ НА СТРУКТУРУ И МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АЗОТИРОВАННЫХ УГЛЕРОДНЫХ ПОКРЫТИЙ, ЛЕГИРОВАННЫХ ЦИРКОНИЕМ И КРЕМНИЕМ

А.С. Руденков¹, Сяохун Цзян², Д.Г. Пилипцов¹¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины²Нанкинский университет науки и технологии

INFLUENCE OF HEAT TREATMENT ON THE STRUCTURE AND MECHANICAL PROPERTIES OF CARBON COATINGS DOPED WITH ZIRCONIUM AND SILICON

A.S. Rudenkov¹, Xiahong Jiang², D.G. Pilipstov¹¹Francisk Skorina Gomel State University²Nanjing University of Science and Technology

Аннотация. Установлено, что при азотировании углеродных покрытий, легированных кремнием и цирконием, имеет место образование соединений типа CN_x , $C-Zr$, $Zr-N$, $Si-C$, SiO_x , $Zr-O$, увеличение степени структурной упорядоченности sp^2 -кластеров. При температуре нагрева до 350 °C протекают процессы графитизации покрытия за счет десорбции азота с одновременным разрывом $C=N$ связей, что обеспечивает лучшую, по сравнению с неазотированными покрытиями, термостабильность твердости и модуля упругости. При этом значения коэффициентов трения и коэффициентов объемного изнашивания контртела при термообработке до 350 °C увеличиваются за счет абразивного воздействия твердых карбидных фаз, дальнейшее увеличение температуры термообработки до 500 °C приводит к улучшению триботехнических характеристик покрытий вследствие более интенсивного образования кластеров графита, выступающего в роли твердой смазки.

Ключевые слова: термообработка, углеродные покрытия, азот, кремний, цирконий, твердость, модуль упругости, коэффициент трения.

Для цитирования: Руденков, А.С. Влияние термообработки на структуру и механические свойства азотированных углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием / А.С. Руденков, Сяохун Цзян, Д.Г. Пилипцов // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 73–83. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_73. – EDN: IBPEYG

Abstract. It has been established that during nitriding of carbon coatings alloyed with silicon and zirconium, the formation of compounds of the CN_x , $C-Zr$, $Zr-N$, $Si-C$, SiO_x , $Zr-O$ type takes place, and the degree of structural ordering of sp^2 -clusters increases. At a heating temperature of up to 350 °C, the processes of coating graphitization occur due to nitrogen desorption with simultaneous rupture of $C=N$ bonds, which ensures better thermal stability of hardness and elastic modulus compared to non-nitrided coatings. At the same time, the values of friction coefficients and volumetric wear coefficients of the counterbody during heat treatment up to 350 °C increase due to the abrasive effect of solid carbide phases, a further increase in the heat treatment temperature up to 500 °C leads to an improvement in the tribotechnical characteristics of the coatings due to a more intensive formation of graphite clusters, which act as a solid lubricant.

Keywords: heat treatment, carbon coatings, nitrogen, silicon, zirconium, hardness, elastic modulus, friction coefficient.

For citation: Rudenkov, A.S. Influence of heat treatment on the structure and mechanical properties of carbon coatings doped with zirconium and silicon / A.S. Rudenkov, Xiahong Jiang, D.G. Pilipstov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 3 (64). – P. 73–83. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_73 (in Russian). – EDN: IBPEYG

Введение

Уникальное сочетание физико-химических свойств (высокая износостойкость и микротвердость, биосовместимость, химическая инертность, прозрачность в ИК-диапазоне и др.) покрытий на основе углерода объясняются их специфической структурой и изменением соотношения sp^2 - и sp^3 -гибридизированных атомов углерода [1]–[3]. Варьируя режимы и условия формирования, параметры последующей обработки (азотирование, термообработка), природу

и концентрацию легирующих элементов можно управлять фазовым составом, а значит и свойствами углеродных покрытий [4], [5]. Низкая термостойкость (менее 350 °C) и высокий уровень внутренних напряжений являются основными недостатками указанного типа покрытий [1], [6].

Легирование кремнием углеродных покрытий, вне зависимости от выбора метода формирования, позволяет воздействовать на фазовый состав углеродных покрытий, в большинстве случаев путем увеличения содержания

sp^3 -гибридизированных атомов углерода и образования sp^3 C – Si, Si – O и Si – C связей [7], [8], что приводит к повышению их термостойкости до 500–700 °C [7], [9], но в большинстве случаев сопровождается увеличением коэффициента трения и снижением микротвердости [10], [11].

В свою очередь, легирование углеродных покрытий металлами, в частности карбидообразующими, и/или азотом способствует увеличению концентрации sp^2 -гибридизированных атомов [12]–[14]. Помимо этого, бинарное легирование углеродных покрытий тугоплавкими металлами и кремнием способствует улучшению их термостойкости до 800 °C [15]. Азотирование же легированных кремнием углеродных покрытий способствует стабилизации Si – C связей за счет снижения содержания кислорода в покрытии, а также может способствовать увеличению термостойкости углеродных покрытий до 500 °C [16].

Поскольку структура углеродных покрытий существенным образом зависит от метода осаждения и прекурсора углерода, режимов азотирования и последующей термообработки эффективную концентрацию и соотношение легирующих элементов для активации фазовых трансформаций необходимо определять для каждого конкретного случая в разрезе не только выбранного метода, но даже технологических режимов и условий формирования подобных композиционных систем. В связи с этим работы, направленные на установление закономерностей структурообразования, процессов фазовых трансформаций вследствие термообработки и определение механических свойств полифазных систем на основе углерода, кремния, металла, азота и их соединений, являются актуальными.

Целью настоящей работы является определение влияния термообработки на морфологию, фазовый состав и механические свойства азотированных углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием.

1 Методика эксперимента

Композиционные углеродные покрытия, легированные цирконием, кремнием и азотом, толщиной 200–230 нм были сформированы на кремниевых подложках в присутствии молекулярного азота в течение 3500 импульсов (частота следования 10 Гц) путем одновременного испарения графитового катода с кремниевыми вставками с помощью импульсного катодно-дугового источника при напряжении 350 В и электродугового испарения циркония с током дуги равным 90 А. Парциальное давление азота в остаточной атмосфере вакуумной камеры равнялось 0,08 Па. Термообработка покрытий осуществлялась при пониженном давлении равном 5 Па в течение 30 минут при температурах 200 °C, 350 °C, 500 °C. Исходная концентрация элементов в покрытии: углерод – 81,9 ат. %, азот – 8,0 ат. %, цирконий –

1,2 ат. %, кремний – 1,7 ат. %, кислород – 7,2 ат. %.

Анализ изображений поверхности композиционных покрытий размером 4×4 мкм, полученных в полуконтактном режиме при помощи атомно-силового микроскопа Solver Pro (NT-MDT, Россия), был выполнен средствами программного комплекса Gwyddion. В качестве основных параметров использовались: количество, средняя высота и диаметр отдельных структурных образований (зерен), среднеквадратичная шероховатость R_{ms} , определяемая как корень квадратный из среднего квадрата расстояний вершин неровностей профиля до его средней линии.

Структура химических связей и состав композиционных покрытий определялся методами рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии (РФЭС) средствами спектрометра PHI Quantera (Япония). Возбуждение вещества осуществлялось $K\alpha$ -излучением алюминия мощностью 250 Вт и энергией кванта 1486,6 эВ. Калибровка спектрометра была выполнена по пику углерода C1s около 284,8 эВ.

Фазовый состав и степень структурной упорядоченности композиционных покрытий определялся методами спектроскопии комбинационного рассеяния средствами помощи спектрометра Senterra (Bruker, Германия) путем возбуждения вещества излучением с длиной волны 532 нм и мощностью 5 мВт.

Значения нанотвердости H и модуля упругости E композиционных покрытий определялись при помощи нанотвердомера НаноСкан 4D (ТИСНУМ, Россия) с индентором Берковича.

Триботехнические испытания были выполнены по схеме «сфера – плоскость» при нагрузке равной 0,392 Н и средней скорости перемещения 0,0135 м/с. В качестве индентора использовался шарик радиусом 5 мм (сталь ШХ15).

2 Результаты и их обсуждение

Средствами атомно-силовой микроскопии (АСМ) установлено, что термообработка неоднзначно влияет на параметры морфологии азотированных углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием (рисунок 2.1). Показано, что средняя высота отдельных структурных образований и плотность зерен на площади сканирования с увеличением температуры термообработки до 350 °C незначительно уменьшаются. При дальнейшем увеличении температуры до 500 °C значения указанных характеристик морфологии поверхности покрытий, наоборот, увеличиваются по сравнению со значениями до термообработки (таблица 2.1).

При этом средний диаметр отдельных структурных образований и субшероховатость R_{ms} при температурах отжига свыше 350 °C уменьшаются.

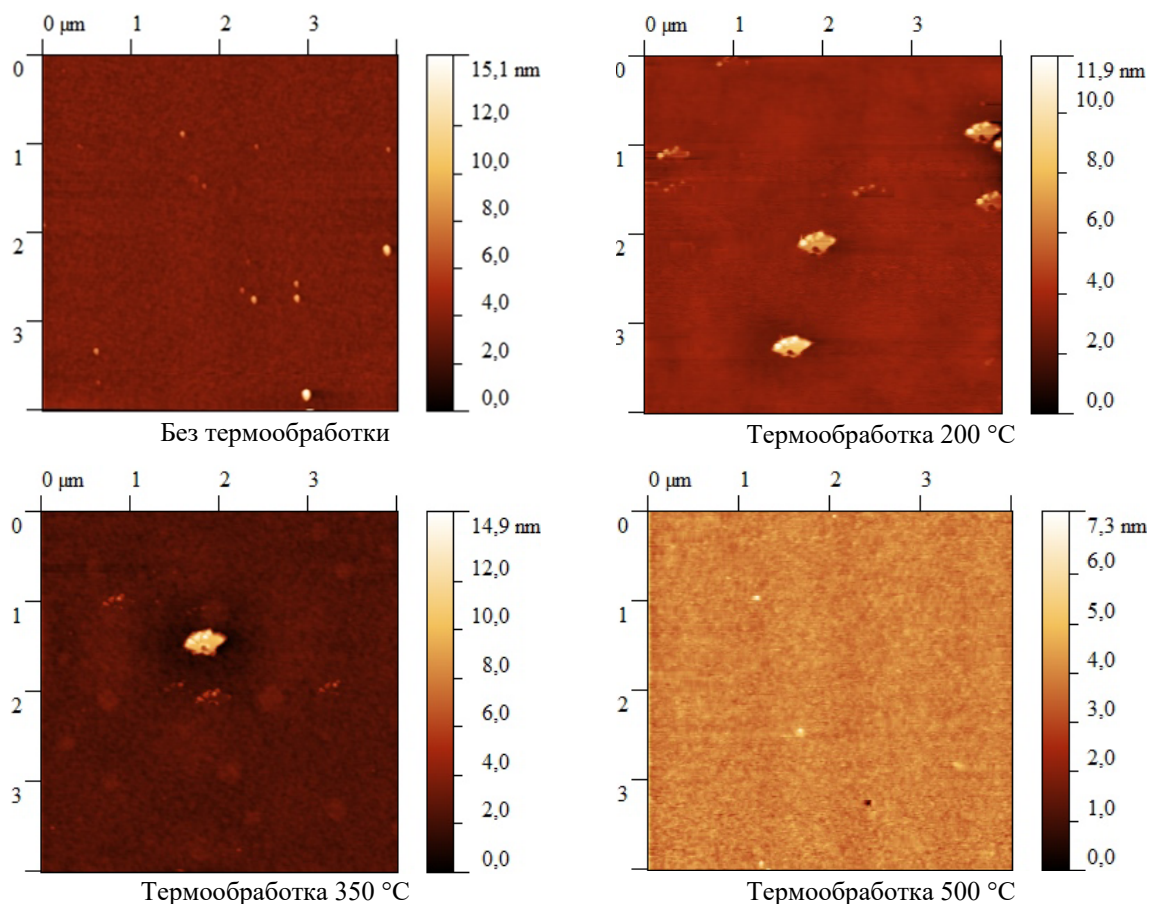


Рисунок 2.1 – Влияние термообработки на морфологию поверхности азотированных углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием

Таблица 2.1 – Влияние термообработки на морфологию азотированных углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием

Покрытие	Термообработка, °C	Средняя высота, нм	R_{ms} , нм	Плотность зерен, шт., 4×4 мкм	Средний диаметр зерен, нм
$C_{81,9\%} + Zr_{1,2\%} + Si_{1,7\%} + N_{8,0\%}$	–	3,7	0,4	53	41
	200	3,5	0,6	47	53
	350	2,5	0,6	51	38
	500	4,0	0,3	60	31

Такие неоднозначные изменения морфологии азотированных углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием, при увеличении температуры термообработки, вероятно, обусловлены десорбцией азота, сорбцией кислорода с образованием оксидов кремния и циркония, а также различными фазовыми трансформациями [1], [2] с последующим выгоранием графита и проявлением на поверхности фаз внедрения на основе карбидов, нитридов и оксидов легирующих элементов.

Изменения соотношения химических связей в азотированных углеродных покрытиях, легированных цирконием и кремнием, при термообработке подтверждаются результатами РФЭС (рисунки 2.2–2.5).

Пик $C1s$ РФЭ спектра азотированных композиционных углеродных покрытий был разложен на следующие компоненты (рисунок 2.2): $C - Zr / C - Si$ пик, обусловленный наличием карбидов циркония и кремния, около 283,3 эВ (объединение в одну составляющую вызвано их близким взаимным расположением) [12], [17]; компонента Csp^2 вблизи 284,4 эВ, соответствующая sp^2 -гибридизованным атомам углерода [2]; компонента Csp^3 около 285,2 эВ соответствует sp^3 -гибридизованным атомам углерода [3]; пик $Csp^2 - N$ около 285,9÷286,1 эВ обусловлен $C = N$ связями [16]; компонента $C - O$ вблизи 286,5 эВ [12], [16]. Пик, обусловленный наличием $C - N$ связей (энергия 287÷287,3 эВ [12], [13]) выделить не удалось.

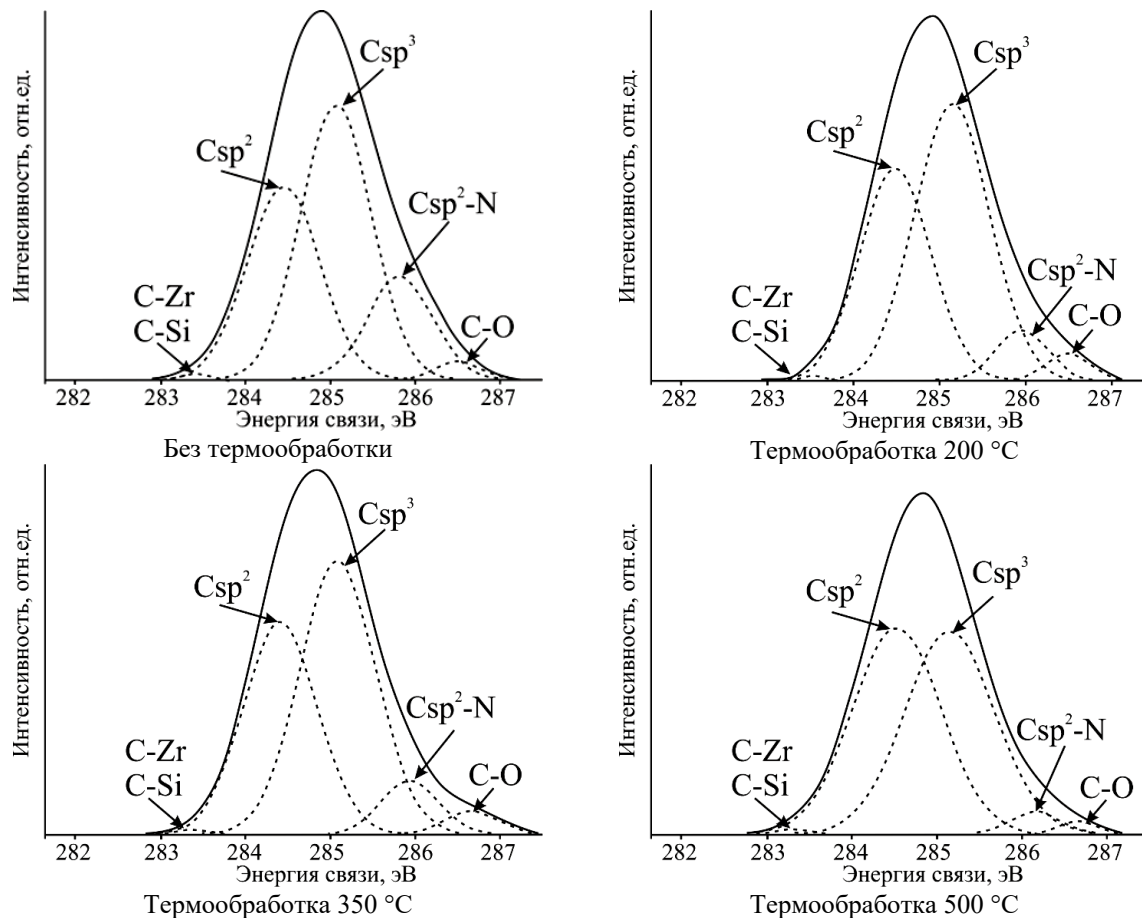


Рисунок 2.2 – Анализ C1s пика РФЭС азотированных углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием до и после термообработки

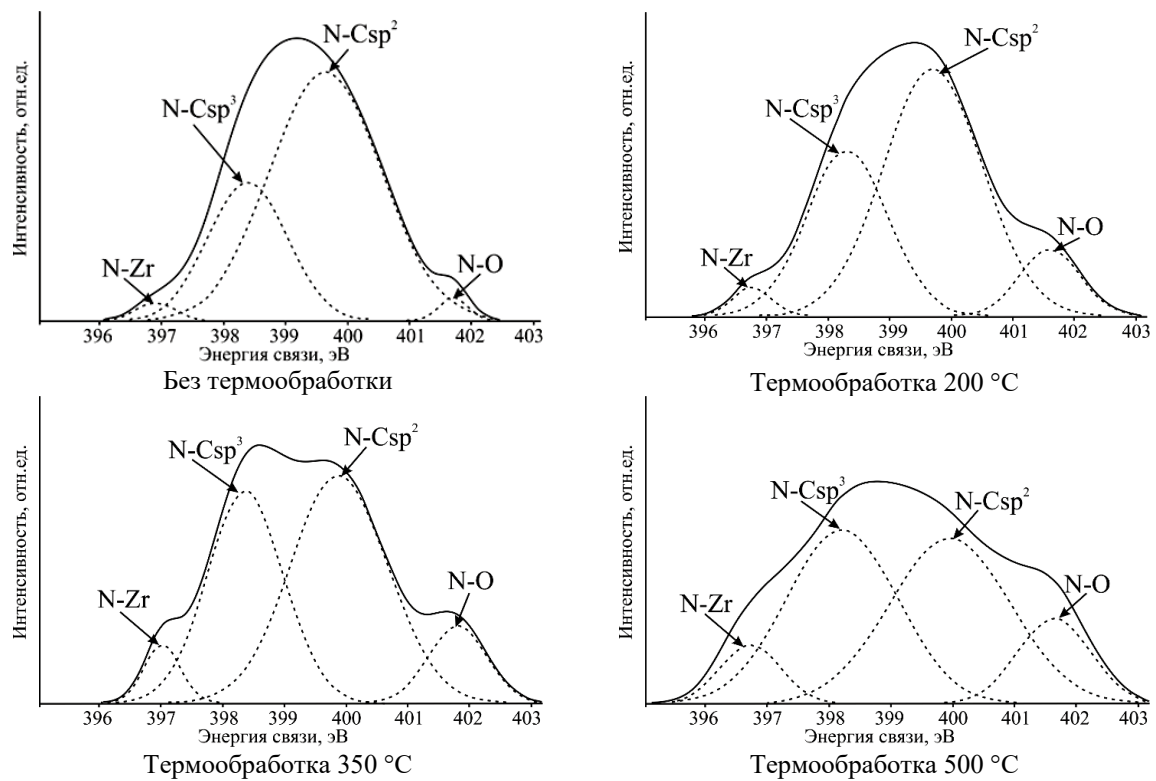


Рисунок 2.3 – Анализ N1s пика РФЭС азотированных углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием до и после термообработки

Пик N1s, расположенный в диапазоне 395÷403 эВ РФЭ спектра азотированных углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием, имеет следующие составляющие (рисунок 2.3): пик N-Zr расположен вблизи 397,2 эВ обусловлен наличием нитрида циркония [18]; компонента N – Csp³ около 398,2 эВ соответствует C – N связям [13]; пик N – Csp² обусловлен C = N связями с энергией ~399,8 эВ [12]; пик N – O размещается около 401,7÷402 эВ [16].

Пик Zr3d РФЭС композиционных углеродных покрытий, рассматриваемых в настоящей работе, находится на интервале 180÷188 эВ и характеризуется наличием двух максимумов, обусловленных спин-орбитальными компонентами 3d-уровней 3d^{5/2} и 3d^{3/2} [18]. С учетом этого данный пик был разложен на следующие составляющие (рисунок 2.4): две компоненты Zr – C вблизи 180,6÷181 эВ и 181,6÷182,1 эВ обусловлены наличием в покрытии карбида циркония [17]; две компоненты Zr – O около 182,6÷182,8 эВ и 184,4÷184,8 эВ [19]; два пика Zr – N около 180 эВ и 182,3 эВ соответствуют нитриду циркония [20]; два пика вблизи 181,5 эВ и 183,5 эВ обусловлены наличием соединений типа ZrO_xN_y [21]; еще два пика вблизи 184,9 эВ и 186,5 эВ обусловлены присутствием соединений типа ZrO_xC_y [22].

При разложении Zr3d пика вследствие низкой интенсивности и близкого взаиморасположения некоторые компоненты были объединены.

Si2p пик, расположенный на интервале 99÷105 эВ, был разложен на следующие компоненты (рисунок 2.5): компонента Si – C около 100,7 эВ соответствует карбиду кремния [23]; пик C – Si – O вблизи 101,7 эВ обусловлен наличием соединений SiO_xC_y [16]; вследствие близкого взаимного расположения пик в диапазоне 120,4÷102,7 эВ одновременно соотносится с Si – N связями и с соединениями типа Si_xO_y, где $y < 2$ [13], [16]; пик Si – O, находящийся в интервале 103÷104 эВ, соответствует SiO₂.

Из анализа результатов РФЭС (таблица 2.2) следует, что термообработка азотированных углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием, приводит к разрушению связей Csp² – N и образованию оксидов легирующих элементов.

Показано (таблица 2.3), что соотношение долей интегральной площади Csp³/Csp² пика C1s существенно уменьшается только при температуре термообработки 500 °С.

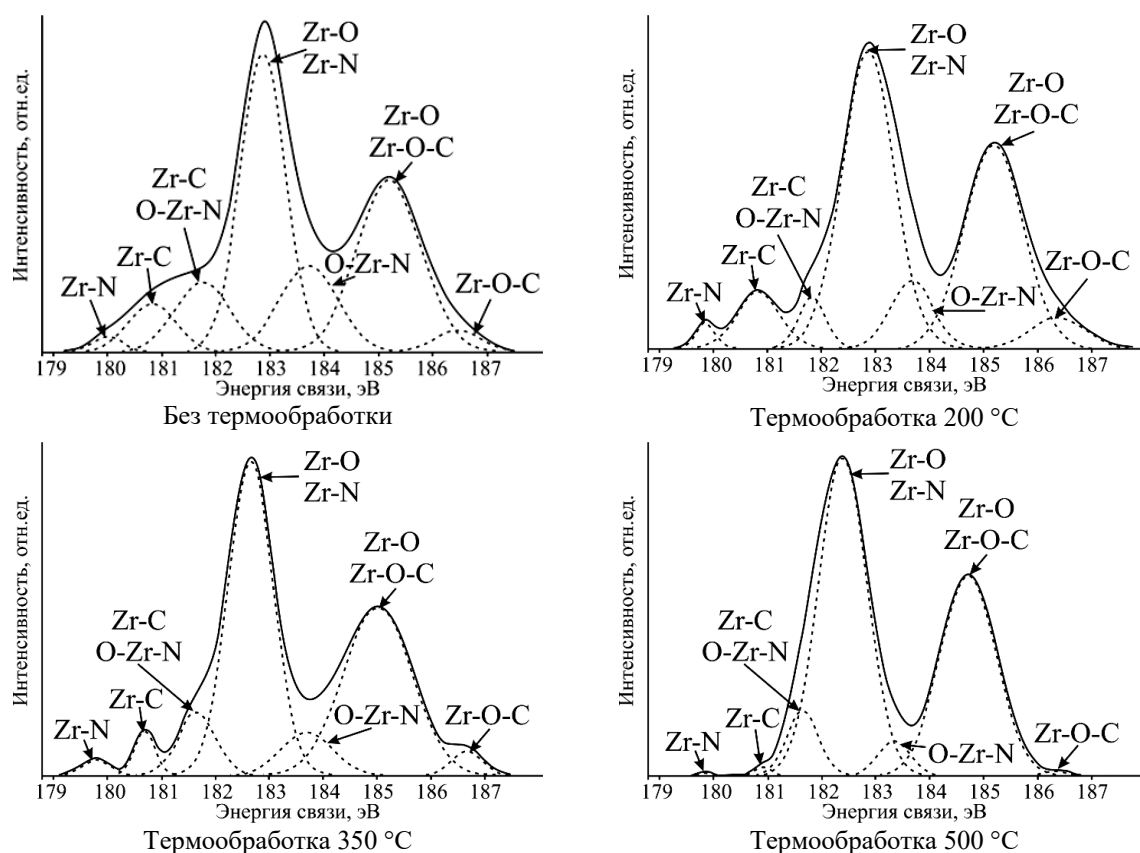


Рисунок 2.4 – Анализ Zr3d пика РФЭС азотированных углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием до и после термообработки

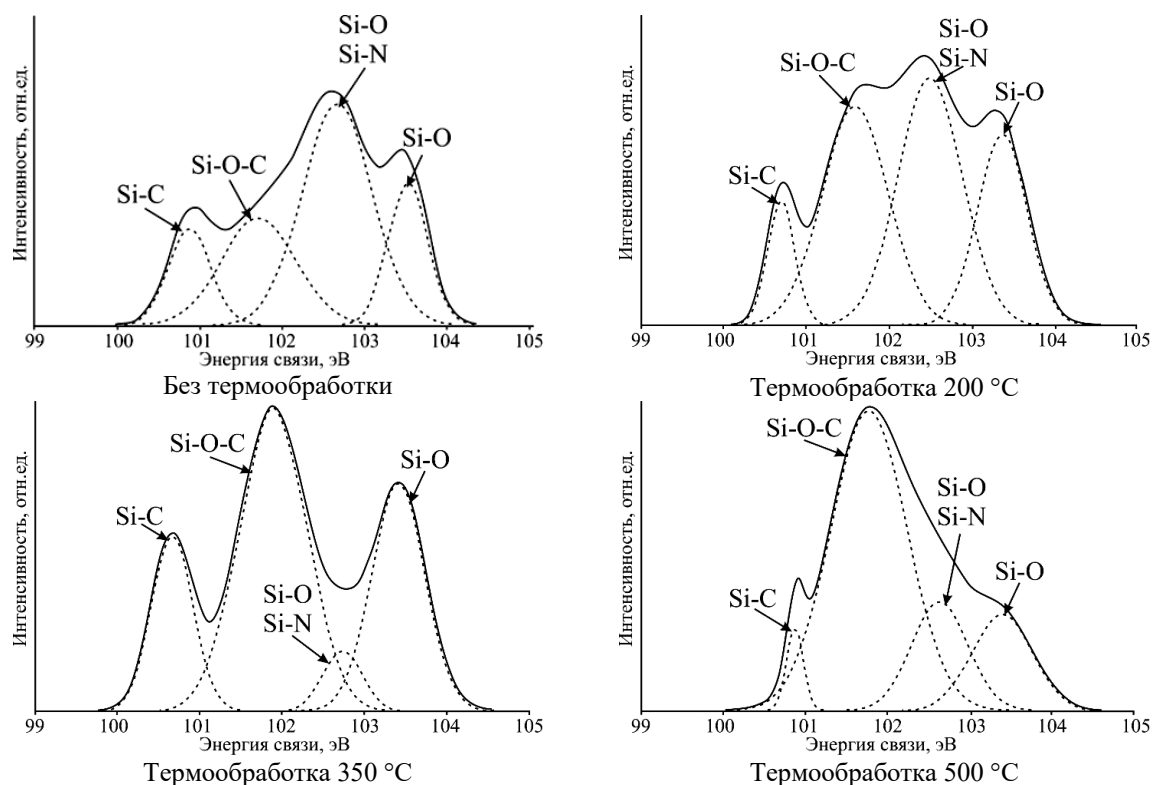


Рисунок 2.5 – Анализ Si2p пика РФЭС азотированных углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием, до и после термообработки

Таблица 2.2 – Фазовый состав азотированных углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием, до и после термообработки

Температура, °C	Пики РФЭС	Тип связи	Пик, эВ, $\pm 0,3$ эВ	Ширина, эВ	Доля площади, %
Без термообработки	C1s	C – Zr	283,4	0,4	0,3
		Csp ²	284,5	1,0	34,0
		Csp ³	285,1	1,0	47,3
		Csp ² – N	285,8	0,9	16,4
		C – O	286,5	0,6	1,9
	Zr3d	*Zr – N ^{5/2}	180,0	0,7	1,3
		*Zr – C ^{5/2}	180,8	1,1	6,3
		*Zr – C ^{3/2}	181,7	1,2	10,3
		*Zr – O ^{5/2}	182,9	1,0	35,9
		*Zr – O ^{3/2}	185,2	1,4	29,9
		*O – Zr – N ^{3/2}	183,7	1,3	13,5
		*O – Zr – C ^{3/2}	186,5	1,0	2,8
	N1s	N – Zr	396,9	0,8	1,9
		N – Csp ³	398,4	1,5	28,5
		N – Csp ²	399,7	2,2	67,8
		N – O	401,7	0,6	1,7
	Si2p	Si – C	100,9	0,6	12,2
		Si – O – C	101,7	1,1	24,0
		Si – O	102,7	1,0	46,7
		SiO ₂	103,5	0,6	17,2
При термообработке 200 °C / 350 °C / 500 °C	C1s	C – Zr	283,5 / 283,4 / 283,3	0,3 / 0,4 / 0,4	0,3 / 0,3 / 0,3
		Csp ²	284,5 / 284,4 / 284,5	1,0 / 1,0 / 1,2	37,8 / 38,5 / 48,0
		Csp ³	285,1 / 285,1 / 285,1	1,0 / 1,1 / 1,2	51,2 / 50,5 / 47,9
		Csp ² – N	285,9 / 285,9 / 286,1	0,7 / 0,8 / 0,6	7,5 / 7,5 / 2,7
		C – O	286,5 / 286,7 / 286,6	0,6 / 0,8 / 0,5	3,2 / 3,1 / 1,1

Температура, °C	Пики РФЭС	Тип связи	Пик, эВ, $\pm 0,3$ эВ	Ширина, эВ	Доля площади, %
При термообработке 200 °C / 350 °C / 500 °C	Zr3d	*Zr – N ^{5/2}	179,9 / 179,8 / 179,8	0,4 / 0,6 / 0,3	1,4 / 1,3 / 0,1
		*Zr – C ^{5/2}	180,8 / 180,7 / 180,9	0,9 / 0,5 / 0,4	6,7 / 2,8 / 0,5
		*Zr – C ^{3/2}	181,8 / 181,6 / 181,6	0,6 / 0,8 / 0,7	3,8 / 7,4 / 6,9
		*Zr – O ^{5/2}	182,9 / 182,6 / 182,4	1,1 / 1,0 / 1,1	42,8 / 43,7 / 51,3
		*Zr – O ^{3/2}	185,2 / 185,0 / 184,7	1,3 / 1,5 / 1,2	32,9 / 35,7 / 37,0
		*O – Zr – N ^{3/2}	183,7 / 183,7 / 183,3	0,9 / 1,1 / 0,7	7,8 / 6,8 / 3,8
		*O – Zr – C ^{3/2}	186,4 / 186,7 / 186,3	1,2 / 0,7 / 0,5	4,6 / 2,2 / 0,4
	N1s	N – Zr	396,8 / 397,0 / 396,7	0,8 / 0,7 / 1,2	2,6 / 4,6 / 7,3
		N – Csp ³	398,3 / 398,4 / 398,2	1,6 / 1,5 / 2,1	31,4 / 36,1 / 39,4
		N – Csp ²	399,7 / 399,9 / 399,9	1,9 / 1,9 / 2,3	56,8 / 49,2 / 40,5
		N – O	401,6 / 401,8 / 401,6	1,2 / 1,1 / 1,4	9,3 / 10,0 / 12,8
	Si2p	Si – C	100,7 / 100,7 / 100,9	0,4 / 0,6 / 0,2	7,9 / 17,1 / 3,8
		Si – O – C	101,6 / 101,9 / 101,8	0,9 / 1,0 / 1,1	33,4 / 9,1 / 63,5
		Si – O	102,5 / 102,7 / 102,6	0,9 / 0,6 / 0,8	36,6 / 5,5 / 16,8
		SiO ₂	103,4 / 103,4 / 103,4	0,7 / 0,8 / 0,9	22,1 / 28,2 / 16,0

Таблица 2.3 – Влияние термообработки на фазовый состав азотированных углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием

Температура, °C	Csp ³ / Csp ²	Csp ³ / (Csp ² + Csp ² – N)	N – Csp ³ / N – Csp ²	Si – C / Si _x O _y	Zr – C / Zr – O
без термообработки	1,39	0,96	0,42	0,19	0,21
200	1,36	1,13	0,55	0,14	0,12
350	1,31	1,10	0,73	0,51	0,12
500	1,00	0,95	0,97	0,12	0,08

При этом с увеличением температуры термообработки доля интегральной площади Csp³ незначительно снижается, но остается выше, чем у покрытий без термообработки. Снижение соотношения Csp³ / Csp² при термообработке, главным образом, обусловлено ростом доли Csp² и существенным снижением доли Csp² – N, что подтверждается увеличением соотношения N – Csp³ / N – Csp² (таблица 2.3) и объясняется разрушением C = N связей.

Таким образом, можно предположить, что графитизация азотированных композиционных покрытий при термообработке при температурах до 350 °C происходит за счет разрушения соединений типа CN_x, (главным образом C = N связей), а при увеличении температуры до 500 °C за счет фазовой трансформации sp³ → sp².

Показано, что соотношение Zr – C / Zr – O для покрытий без термообработки существенно выше, чем у покрытий после термообработки. С увеличением температуры термообработки до 500 °C указанное соотношение снижается до 0,08, что объясняется преимущественным окислением свободных атомов циркония.

Из анализа спектров Si2p следует, что соотношение Si – C / Si_xO_y после термообработки при температурах 200 °C и 500 °C ниже (0,14 и 0,12 соответственно), чем у покрытий без термообработки (0,19). При этом для покрытий, прошедших термообработку при температуре 350 °C, указанное соотношение равняется 0,51, что может быть обусловлено уменьшением доли

оксидов кремния. Необходимо отметить, что доля интегральной площади Si – O – C компоненты с увеличением температуры термообработки возрастает от 24% до 63,5%. Механизм фазовых трансформаций покрытий на основе кремния и его оксидов является достаточно сложным и требует детального изучения. Согласно [24] в процессе отжига покрытия на основе Si_xO_y претерпевают существенные структурные изменения, заключающиеся в «залечивании» оборванных связей кремния и кислорода, образованных при нанесении покрытия и в процессе термообработки. Помимо этого, в ходе термообработки происходит разложение слабо окисленного кремния с последующим образованием фаз сильно окисленного кремния и нанокластеров аморфного кремния, что может приводить к увеличению плотности таких покрытий [24].

Таким образом, неоднозначное изменение соотношения Si – C / Si_xO_y при температуре 350 °C в настоящей работе можно объяснить снижением доли Si – O связей вследствие распада слабо окисленного кремния.

Согласно общепринятой методике [25], [26] углеродный пик спектров комбинационного рассеяния покрытий на основе углерода, расположенный в диапазоне 1000–1800 см⁻¹, был разложен при помощи функции Гаусса на две составляющих: G-пик вблизи 1550–1580 см⁻¹ характерен для всех углеродных материалов с sp²-связями и обусловлен их продольными колебаниями в ароматических и цепочечных молекулах [25];

Д-пик, связанный с радиальными колебаниями шестиатомных колец с сопряженными sp^2 -связями и расположенный в интервале $1350\div 1450\text{ см}^{-1}$, возникает вблизи границ зерен/дефектов и обычно отсутствует в высокоупорядоченных структурах графена и графита [25], [26].

Данные КР спектроскопии свидетельствуют об увеличении соотношения I_D/I_G интенсивностей D- и G-пиков с увеличением температуры термообработки (рисунок 2.6), что обусловлено уменьшением соотношения sp^3/sp^2 -гибридизированных атомов углерода [27]. Кроме того, согласно [28] в случае азотсодержащих покрытий на основе углерода увеличение соотношения I_D/I_G может быть вызвано увеличением соотношения $C-N/C=N$, что согласуется сделанными ранее с выводами об увеличении соотношения $N-Csp^3/N-Csp^2$ компонент пика N1s РФЭ спектра.

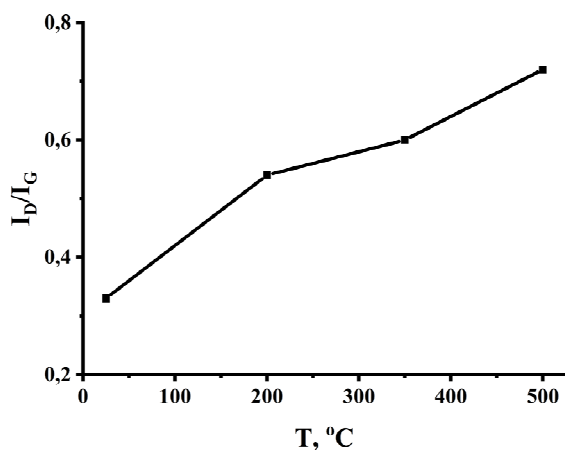


Рисунок 2.6 – Влияние термообработки на соотношение I_D/I_G КР-спектра азотированных углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием

При этом значение ширины G-пика покрытий без термообработки меньше, чем после термообработки, а его положение вследствие отжига смещается в область более высоких волновых чисел (таблица 2.4). Данный факт может указывать на более высокое относительное содержание sp^3 -связей у покрытий после термообработки, что коррелирует с результатами анализа РФЭС, согласно которым доля интегральной площади Csp^3 составляющей пика C1s у покрытий без термообработки ниже.

Таблица 2.4 – Параметры КР спектров азотированных углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием, до и после термообработки

Температура, °C	Д-пик		G-пик		I_D/I_G
	Положение, см^{-1}	Ширина, см^{-1}	Положение, см^{-1}	Ширина, см^{-1}	
без термообработки	1457	130	1554	131	0,33
200	1421	262	1555	176	0,54
350	1408	253	1560	165	0,60
500	1393	247	1569	159	0,72

С увеличением температуры термообработки положение G-пика смещается в область более высоких волновых чисел, а D-пик, наоборот, смещается в область более низких волновых чисел, что согласуется с выводами авторов [25] и свидетельствует об увеличении размеров и степени структурной упорядоченности sp^2 -кластеров, а также образовании нанокристаллического графита. Кроме того, увеличение ширины и смещение D-пика в область более низких волновых чисел после термообработки, согласно [26], может быть вызвано уменьшением размеров кластеров на основе sp^3 -гибридизированных атомов углерода.

Таким образом, результаты КР спектроскопии подтверждают предположения об уменьшении соотношения sp^3/sp^2 -гибридизированных атомов и графитизации покрытия, в первую очередь, за счет десорбции азота и разрушения $N-Csp^2$ связей вследствие термообработки. При этом относительное содержание sp^3 -гибридизированных атомов в случае азотированных покрытий, легированных цирконием и кремнием, с увеличением температуры термообработки уменьшается, но остается выше, чем у покрытий без термообработки. Кроме того, вследствие термообработки происходит уменьшение размеров sp^3 -кластеров с одновременным увеличением размеров и степени структурной упорядоченности sp^2 -кластеров, что объясняет несколько неоднозначные результаты АСМ.

Установлено, что твердость H азотированных композиционных покрытий на основе углерода существенно снижается (до 13,7 ГПа) только после термообработки при температуре 500 °C. Модуль Юнга E покрытий после отжига при температурах 200 °C и 350 °C ниже, а при температуре 500 °C, наоборот, выше, чем до термообработки.

Данный факт обусловлен фазовыми трансформациями, происходящими в покрытии при термообработке. Твердость H практически не изменяется при температурах 200 °C и 350 °C (рисунок 2.7) за счет неизменности относительного содержания sp^3 -кластеров в покрытии и уменьшения их размера, что подтверждается результатами КР и РФЭ спектроскопии. Модуль Юнга E (рисунок 2.7) при данных температурах несколько уменьшается (а значит уменьшается

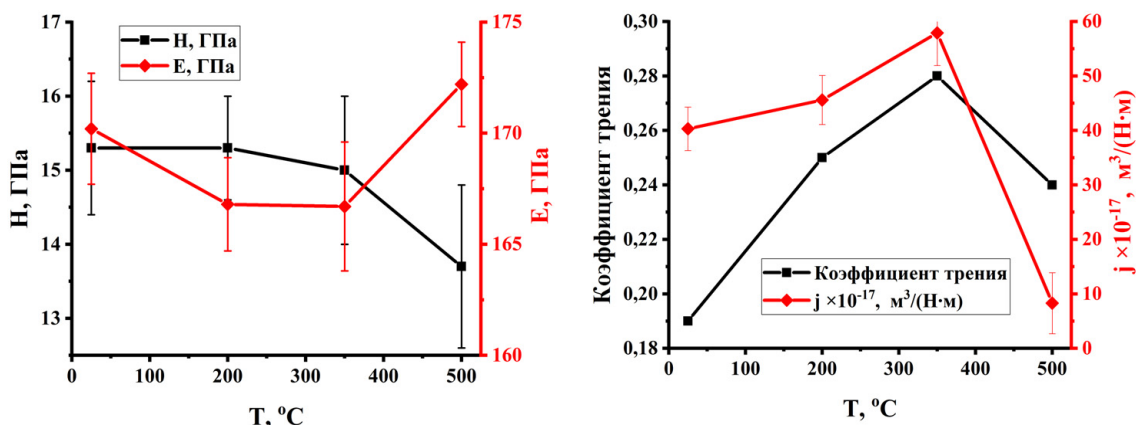


Рисунок 2.7 – Влияние термообработки на механические свойства азотированных углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием

жесткость покрытия) за счет разрушения твердых фаз внедрения на основе CN_x с $C=N$ связями, сопровождающегося незначительным увеличением содержания sp^2 -фазы. Термообработка при температуре 500 °C приводит к более интенсивным фазовым превращениям $sp^3 \rightarrow sp^2$ и росту содержания sp^2 -фазы, что вызывает более существенное уменьшение твердости. Уменьшение твердости, согласно закону Холла – Петча, также может быть обусловлено увеличением размеров sp^2 -кластеров [29].

Увеличение модуля Юнга азотированных покрытий при температуре 500 °C соответствует поведению модуля Юнга при термообработке неазотированных композиционных углеродных покрытий, описанных нами в [31], и объясняется образованием нанокристаллического графита и оксидов легирующих элементов, а также ростом содержания соединений типа SiO_xC_y , что подтверждается результатами РФЭС.

Существенное уменьшение соотношения sp^3/sp^2 -гибридизированных атомов углерода после термообработки при температуре 500 °C приводит к уменьшению значений сопротивления упругой деформации H/E и сопротивления пластической деформации H^3/E^2 покрытий, что косвенно может свидетельствовать об ухудшении их износостойкости.

Необходимо отметить, что азотированные покрытия, легированные цирконием и кремнием, характеризуются лучшей термостабильностью твердости H и модуля Юнга по сравнению с аналогичными по составу, но неазотированными покрытиями, изменение механических характеристик которых описано нами ранее в работе [31].

Установлено, что коэффициент трения покрытий после отжига выше, чем покрытий, не подвергнутых термообработке (рисунок 2.8). При этом с увеличением температуры термообработки до 350 °C коэффициент трения возрастает до 0,28, а коэффициент объемного изнашивания контртела j до $57,9 \cdot 10^{-17}$ м³/(Н·м). При дальнейшем

увеличении температуры до 500 °C значения указанных коэффициентов снижаются до 0,24 и до $8,3 \cdot 10^{-17}$ м³/(Н·м) соответственно.

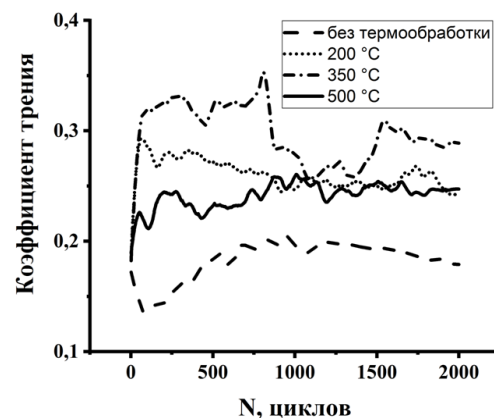


Рисунок 2.8 – Кинетические зависимости коэффициента трения азотированных углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием до и после термообработки

Такое изменение триботехнических характеристик, по всей видимости, обусловлено графитизацией покрытия при температурах до 350 °C вследствие разрушения $C=N$ связей и более интенсивными фазовыми превращениями $sp^3 \rightarrow sp^2$ при температуре термообработки 500 °C, последующим выгоранием графита, а также абразивным действием твердых фаз внедрения на основе sp^3 -кластеров, нитридов и карбидов легирующих элементов, в первую очередь SiC (особенно для покрытий, подвергнутых термообработке при температуре 350 °C). Низкое значение коэффициента объемного изнашивания контртела j в случае отжига покрытий при 500 °C обусловлено снижением их твердости до 13,7 ГПа, а также высоким содержанием графита, заполняющего при трении возникающие вследствие термообработки дефекты поверхности и выступающего в роли твердой смазки.

Выводы

Установлено, что термообработка азотированных углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием, неоднозначно влияет на их морфологические параметры вследствие десорбции азота, окисления легирующих элементов, графитизации покрытия и последующего проявления на поверхности фаз на основе карбидов, нитридов и оксидов легирующих элементов.

Согласно данным РФЭ и КР спектроскопии установлено, что термообработка азотированных углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием, при температуре до 350 °С способствует графитизации покрытия за счет десорбции азота с одновременным разрывом C = N связей, а при температуре 500 °С за счет фазовых превращений $sp^3 \rightarrow sp^2$, сопровождающихся уменьшением размеров sp^3 -кластеров, увеличением размеров и степени структурной упорядоченности sp^2 -кластеров. При этом с увеличением температуры происходит окисление несвязанных атомов циркония (соотношение Zr – C / Zr – O уменьшается до 0,08), а относительная доля sp^3 -связей термообработки незначительно снижается, но остается выше, чем в случае покрытий, не подвергнутых отжигу. Соотношение Si – C / Si_xO_y изменяется неоднозначно вследствие распада слабо окисленного кремния, последующего образования сильно окисленного кремния и соединений SiO_xC_y.

Указанные фазовые превращения обеспечивают лучшую, по сравнению с неазотированными покрытиями, термостабильность значений твердости и модуля упругости азотированных углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием, при температурах до 350 °С включительно, но приводят к увеличению значений коэффициента трения и коэффициента объемного изнашивания контртела вследствие абразивного воздействия твердых фаз внедрения на основе карбидов и, вероятно, нитридов легирующих элементов. Увеличение модуля Юнга и снижение твердости, коэффициентов трения и объемного изнашивания контртела при дальнейшем увеличении температуры термообработки до 500 °С вызваны интенсификацией процессов фазовых превращений $sp^3 \rightarrow sp^2$, увеличением размеров и степени структурной упорядоченности кластеров графита, выступающего при трении в роли твердой смазки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Композиционные углеродные покрытия, осажденные из импульсной катодной плазмы / Д.Г. Пилипцов, А.С. Руденков, П.А. Лучников, А.В. Рогачев, Цзян Сяо Хун, Чжоу Бин. – 2020. – Москва: Радиотехника. – 283 с.
2. Robertson, J. Diamond-like amorphous carbon / J. Robertson // Materials Science and Engineering: R: Reports. – 2002. – Vol. 37. – P. 129–281.

3. Mabuchi, Y. Effects of sp^2/sp^3 bonding ratio and nitrogen content on friction properties of hydrogen-free DLC coatings / Y. Mabuchi, T. Higuchi, V. Weihnacht // Tribology International. – 2013. – Vol. 62. – P. 130–140.

4. Руденков, А.С. Влияние концентрации металла на фазовый состав, структуру и свойства углерод-металлических покрытий / А.С. Руденков // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 26–32.

5. Рогачев, А.В. Триботехнические свойства композиционных покрытий, осаждаемых вакуумно-плазменными методами / А.В. Рогачев // Трение и износ. – 2008. – Т. 29, № 3. – С. 285–292.

6. Donnet, C. Tribology of Diamond-like Carbon Films: Fundamentals and Applications / C. Donnet, A. Erdemir. – Springer Science & Business Media, 2007. – 680 p.

7. Bonding structure and haemocompatibility of silicon-incorporated amorphous carbon / S. Zhang [et al.] // Thin Solid Films. – 2006. – Vol. 515. – P. 66–72.

8. Long-term thermal stability of Si-containing diamond prepared by plasma source ion implantation / R. Hatada, K. Baba, S. Flege, W. Ensinger // Surface and Coatings Technology. – 2016. – Vol. 305. – P. 93–98.

9. In-situ thermal stability analysis of amorphous Si-doped carbon films / M. Rouhani [et al.] // Carbon. – 2021. – Vol. 184. – P. 772–785.

10. Incorporation of Si and SiO_x into diamond-like carbon films: Impact on surface properties and osteoblast adhesion / L.K. Randeniya [et al.] // Acta Biomaterialia. – 2009. – Vol. 5. – P. 1791–1797.

11. Structure and properties of Si incorporated tetrahedral amorphous carbon films prepared by hybrid filtered vacuum arc process / C.S. Lee [et al.] // Diamond and Related Materials. – 2002. – Vol. 11. – P. 198–203.

12. Ray, S.C. Iron, nitrogen and silicon doped diamond like carbon (DLC) thin films: A comparative study / S.C. Ray, W.F. Pong, P. Papakonstantinou // Thin Solid Films. – 2016. – Vol. 610. – P. 42–47.

13. Effects of silicon doping on the chemical bonding states and properties of nitrogen-doped diamond-like carbon films by plasma-enhanced chemical vapor deposition / K. Nakamura [et al.] // Thin Solid Films. – 2021. – Vol. 736. – Article 138923.

14. Effects of source gases on the properties of silicon / nitrogen-incorporated diamond-like carbon films prepared by plasma-enhanced chemical vapor deposition / H. Nakazawa [et al.] // Thin Solid films. – 2017. – Vol. 636. – P. 177–182.

15. Thermostable resistors based on diamond-like carbon films deposited by CVD method / V.K. Dmitriev [et al.] // Diamond and Related Materials. – 2001. – Vol. 10. – P. 1007–1010.

16. Effect of nitrogen doping on the microstructure and thermal stability of diamond-like

- carbon coatings containing silicon and oxygen / J. Peng, Y. Xiao, M. Yang, J. Liao // Surface and Coatings Technology. – 2021. – Vol. 421. – Article 127479.
17. *Evolution of Phase Composition and Antibacterial Activity of Zr–C Thin Films* / K. Mydlowska [et al.] // Processes. – 2020. – Vol. 8. – Article 260.
18. *Zirconium Nitride by XPS* / I. Miloszew, H.-H. Strehblow, B. Navinsek, P. Panjan // Surface Science spectra. – 1998. – Vol. 5. – P. 152–158.
19. *Wong, P.C.* XPS studies of the stability of a zirconium carbide film in the presence of zirconium oxide and hydrogen / P.C. Wong, Y.S. Li, K.A.R. Mitchell // Surface Review and Letters. – 1995. – Vol. 2. – P. 297–303.
20. *Prieto, P.* Interaction of Oxygen with ZrN at Room Temperature: an XPS Study / P. Prieto, L. Galan, J.M. Sanz // Surface and interface analysis. – 1994. – Vol. 21. – P. 395–399.
21. *Cubillos, G.* ZrN–ZrOxNy vs ZrO2–ZrOxNy coatings deposited via unbalanced DC magnetron sputtering / G. Cubillos, E. Romero, A. Umana-Perez // Scientific Reports. – 2021. – Vol. 11 – Article 18926.
22. *X ray photoelectron spectroscopy (XPS) analysis of Photosensitive ZrO₂ array* / Y. Li, G. Zhao, R. Zhu, Z. Kou // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2018. – Vol. 322. – Article 022043.
23. *Origin of temperature-induced low friction of sputtered Si-containing amorphous carbon coatings* / O. Jantschner [et al.] // Acta Materialia. – 2015. – Vol. 82. – P. 437–446.
24. *Фазово-структурные превращения в пленках SiOx в процессе вакуумных термообработок* / И.П. Лисовский [и др.] // Физика и техника полупроводников. – 2003. – Т. 37. – С. 98–103.
25. *Однофоновые рамановские спектры углерода в композитных пленках, полученных модифицированием аморфного гидрированного углерода медью и кобальтом* / Э.А. Сморгонская [и др.] // Физика твердого тела. – 2003. – Т. 45. – С. 1579–1589.
26. *A concise review of the Raman spectra of carbon allotropes* / V. Thapliyal [et al.] // Diamond and Related Materials. – 2022. – Vol. 127. – Article 109180.
27. *A phenomenological approach for the I_d / I_g ratio and sp^3 fraction of magnetron sputtered a-C films* / S. Zhang, X.T. Zeng, H. Xie, P. Hing // Surface and Coatings Technology. – 2000. – Vol. 123. – P. 256–260.
28. *Bhattacharyya, S.* Determination of the structure of amorphous nitrogenated carbon films by combined Raman and x-ray photoemission spectroscopy / S. Bhattacharyya, J. Hong, G. Turban // Journal of Applied Physics. – 1998. – Vol. 83. – P. 3917–3919.
29. *Зайченко, С.Г.* Дислокационный механизм пластической деформации нанокристаллических материалов / С.Г. Зайченко, А.М. Глезер // Физика твердого тела. – 1997. – № 11. – С. 2023–2028.
30. *Leyland, A.* On the significance of the H / E ratio in wearcontrol: a nanocomposite coating approach to optimised tribological behavior / A. Leyland, A. Matthews // Wear. – 2000. – Vol. 246. – P. 1–11.
31. *Руденков, А.С.* Влияние термообработки на структуру и механические свойства углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием / А.С. Руденков, Д.Г. Пилипцов // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (59). – С. 48–56.
- Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках НИР «Разработка реакционных ионно-плазменных методов формирования и параметризация покрытий на основе силицированного углерода и карбидообразующих металлов с высокими механическими свойствами и повышенной термостойкостью», комплексное задание 3.1.02 «Разработка устройств и процессов комбинированного электронно-ионного нанесения слоев и модифицирования поверхности для формирования функциональных покрытий» ГПНИ «Материаловедение, новые материалы и технологии», подпрограмма «Электромагнитные, пучково-плазменные и литейно-деформационные технологии обработки и создания материалов».*

Поступила в редакцию 05.06.2025.

Информация об авторах

Руденков Александр Сергеевич – к.т.н., доцент
Цзян Сяохун – доктор наук, профессор
Пилипцов Дмитрий Геннадьевич – д.т.н., доцент

УДК 512.548

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_84

EDN: IJQIOV

ПОЛИАДИЧЕСКИЕ ФАКТОРГРУППЫ ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУПП СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. I

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв

POLYADIC QUOTIENT GROUPS OF POLYADIC GROUPS OF SPECIAL FORM. I

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev

Аннотация. В статье изучаются l -арные факторгруппы полиадических групп специального вида, то есть полиадических групп с l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, которая называется полиадической операцией специального вида и определяется на декартовой степени A^k n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки $\sigma \in S_k$, порядка, делящего $l - 1$, и n -арной операции η .

Ключевые слова: полиадическая операция, полуинвариантная l -арная подгруппа, n -полуинвариантная l -арная подгруппа, факторгруппа, конгруэнция, смежный класс.

Для цитирования: Гальмак, А.М. Полиадические факторгруппы полиадических групп специального вида. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 84–89. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_84. – EDN: IJQIOV

Abstract. The article studies of l -ary quotient groups of polyadic groups of special form, that is polyadic groups with l -ary operation $\eta_{s, \sigma, k}$ that is called polyadic operation of special form and is defined on Cartesian power A^k of n -ary group $\langle A, \eta \rangle$ by substitution $\sigma \in S_k$ which order divides $l - 1$ and n -ary operation η .

Keywords: polyadic operation, semiinvariant l -ary subgroup, n -semiinvariant l -ary subgroup, quotient group, congruence, coset.

For citation: Gal'mak, A.M. Polyadic quotient groups of polyadic groups of special form. I / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 3 (64). – P. 84–89. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_84 (in Russian). – EDN: IJQIOV

Введение

Данная статья посвящена изучению l -арных факторгрупп l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ специального вида по её полуинвариантным l -арным подгруппам. Определение l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$, которая определяется с помощью подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ и n -арной операции η на декартовой степени A^k n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$, можно найти в [1]. Для бинарной операции η l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$, где $l = s + 1$, совпадает с $(s + 1)$ -арной операцией $[\]_{s+1, \sigma, k}$, обозначаемой также символом $[\]_{l, \sigma, k}$. Изучению этой операции посвящена книга [2]. Частными случаями l -арной операции $[\]_{l, \sigma, k}$, соответствующими циклу $\sigma = (12 \dots k)$, являются две полиадические операции Э. Поста [3]. Одну из них он определил на декартовой степени симметрической группы, вторую – на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. Если $k = 1$, то подстановка σ является тождественной, а l -арная операция $\eta_{s, \sigma, 1}$ в этом

случае является производной от n -арной операции η . В частности, если $n = 2$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, 1}$ является производной от бинарной операции η .

В [4, теорема 3.1] доказано, что если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, то универсальная алгебра $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ является полуинвариантной l -арной подгруппой l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. В связи с этим результатом возникает вопрос: *А может ли k -ая декартова степень H^k некоторого смежного класса H n -арной факторгруппы $\langle A/B, \eta \rangle$, отличного от B , быть замкнутой относительно l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ и, более того, быть l -арной подгруппой в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$?*

Для $k = 1$ положительный ответ на поставленный вопрос получен в [5]. Положительный ответ на этот же вопрос для $k \geq 1$ даёт теорема 2.1, которая является основным результатом данной статьи.

1 Используемые результаты

Следующая теорема используется при получении основного результата данной статьи.

Теорема 1.1 [1]. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа.

Напомним, что для всякой полуинвариантной n -арной подгруппы $\langle B, \eta \rangle$ n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ множество

$$A/B = \{ \eta(\underbrace{a B \dots B}_{n-1}) \mid a \in A \} = \\ = \{ \eta(\underbrace{B \dots B a}_{n-1}) \mid a \in A \}$$

всех смежных классов $\langle A, \eta \rangle$ по $\langle B, \eta \rangle$ является n -арной группой относительно n -арной операции η . Эту n -арную группу называют [6, с. 59] n -арной факторгруппой и обозначают символом $\langle A/B, \eta \rangle$.

Определение n -полуинвариантных l -арных подгрупп l -арной группы, которые используются в данной статье, имеются в [5]. Там же в [5] можно найти и определение Поста [3] эквивалентных последовательностей, составленных из элементов n -арной группы.

При получении основного результата данной статьи существенно используется следующая лемма.

Лемма 1.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, $\langle B, \eta \rangle$ – её полуинвариантная n -арная подгруппа, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$, $d \in A$, $H = \eta(\underbrace{d B \dots B}_{n-1})$.

Тогда:

$$1) \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{l-1} \mathbf{x} \underbrace{H^k \dots H^k}_{l-t}) = \\ = \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} x_{\sigma^{l-1}(1)} \underbrace{d \dots d}_{l-t} B \dots B) \times \dots \\ \dots \times \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} x_{\sigma^{l-1}(k)} \underbrace{d \dots d}_{l-t} B \dots B))$$

для любого $t = 1, \dots, l$;

$$2) \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{(i-1)(n-1)} \mathbf{x} \underbrace{H^k \dots H^k}_{(s+1-i)(n-1)}) = \\ = \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(1)} \underbrace{d \dots d}_{(s+1-i)(n-1)} B \dots B) \times \dots \\ \dots \times \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(k)} \underbrace{d \dots d}_{(s+1-i)(n-1)} B \dots B))$$

для любого $i = 1, \dots, s+1$;

$$3) \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} H^k \dots H^k}_{l-1}) = \\ = \eta(\eta(\underbrace{x_1 d \dots d}_{l-1} B \dots B) \times \dots \\ \dots \times \eta(\eta(\underbrace{x_k d \dots d}_{l-1} B \dots B));$$

$$4) \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{l-1} \mathbf{x}) = \\ = \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} x_{\sigma^{l-1}(1)} \underbrace{d \dots d}_{n-1}) \times \dots$$

$$\dots \times \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} x_{\sigma^{l-1}(k)} \underbrace{d \dots d}_{n-1} B \dots B));$$

5) если подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{l-1} \mathbf{x}) = \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} x_1 \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \\ \dots \times \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} x_k \underbrace{B \dots B}_{n-1})).$$

Доказательство. 1) Так как $\langle B, \eta \rangle$ полуинвариантная парная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, то

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{l-1} \mathbf{x} \underbrace{H^k \dots H^k}_{l-t}) = \\ = \{ \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_{t-1} \mathbf{x} \mathbf{h}_{t+1} \dots \mathbf{h}_{s(n-1)+1}) \mid \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{t-1}, \\ \mathbf{h}_{t+1}, \dots, \mathbf{h}_{s(n-1)+1} \in \eta(\underbrace{d B \dots B}_{n-1})^k \} =$$

$$= \{ \eta_{s, \sigma, k}((\eta(db_{111} \dots b_{11(n-1)}), \dots \\ \dots, \eta(db_{1k1} \dots b_{1k(n-1)})) \dots \\ \dots (\eta(db_{(t-1)11} \dots b_{(t-1)1(n-1)}), \dots \\ \dots, \eta(db_{(t-1)k1} \dots b_{(t-1)k(n-1)})) (x_1, \dots, x_k) \\ (\eta(db_{(t+1)11} \dots b_{(t+1)1(n-1)}), \dots \\ \dots, \eta(db_{(t+1)k1} \dots b_{(t+1)k(n-1)})) \dots \\ \dots (\eta(db_{(l-1)11} \dots b_{(l-1)1(n-1)}), \dots \\ \dots, \eta(db_{(l-1)k1} \dots b_{(l-1)k(n-1)})) \\ (\eta(db_{l11} \dots b_{l1(n-1)}), \dots \\ \dots, \eta(db_{lk1} \dots b_{lk(n-1)})) \mid b_{\alpha\beta\gamma} \in B \} = \\ = \{ \eta(\eta(db_{111} \dots b_{11(n-1)}) \eta(db_{2\sigma(1)1} \dots b_{2\sigma(1)(n-1)}) \dots \\ \dots \eta(db_{(t-1)\sigma^{l-2}(1)1} \dots b_{(t-1)\sigma^{l-2}(1)(n-1)}) x_{\sigma^{l-1}(1)} \\ \dots \eta(db_{(t+1)\sigma^l(1)1} \dots b_{(t+1)\sigma^l(1)(n-1)}) \\ \dots \eta(db_{(l-1)\sigma^{l-2}(1)1} \dots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(1)(n-1)}) \\ \eta(db_{l\sigma^{l-1}(1)1} \dots b_{l\sigma^{l-1}(1)(n-1)}), \dots \\ \dots, \eta(\eta(db_{1k1} \dots b_{1k(n-1)}) \eta(db_{2\sigma(k)1} \dots b_{2\sigma(k)(n-1)}) \dots \\ \dots \eta(db_{(t-1)\sigma^{l-2}(k)1} \dots b_{(t-1)\sigma^{l-2}(k)(n-1)}) x_{\sigma^{l-1}(k)} \\ \eta(db_{(t+1)\sigma^l(k)1} \dots b_{(t+1)\sigma^l(k)(n-1)}) \dots \\ \dots \eta(db_{(l-1)\sigma^{l-2}(k)1} \dots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(k)(n-1)}) \\ \eta(db_{l\sigma^{l-1}(k)1} \dots b_{l\sigma^{l-1}(k)(n-1)})) \mid b_{\alpha\beta\gamma} \in B \} =$$

{далее применяется полуинвариантность $\langle B, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$ }

$$= \{ (\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} x_{\sigma^{l-1}(1)} \underbrace{d \dots d}_{l-t} b_{11} \dots b_{1(n-1)}), \dots \\ \dots, \eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} x_{\sigma^{l-1}(k)} \underbrace{d \dots d}_{l-t} b_{k1} \dots b_{k(n-1)}) \mid b_{\alpha\beta} \in B \} = \\ = \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} x_{\sigma^{l-1}(1)} \underbrace{d \dots d}_{l-t} B \dots B) \times \dots \\ \dots \times \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} x_{\sigma^{l-1}(k)} \underbrace{d \dots d}_{l-t} B \dots B)).$$

Следовательно, верно доказываемое равенство.

2) Полагаем в 1) $t = (i-1)(n-1) + 1$.

3) Полагаем в 1) $t = l$.

4) Полагаем в 1) $t = l$.

5) Следует из 4), так как подстановка σ^{l-1} является тождественной. $\square$

Замечание 1.1. Утверждения 2) и 3) леммы 1.1 можно доказать непосредственно, проводя вычисления, аналогичные тем, которые использовались при доказательстве утверждения 1).

2 Основные результаты

Теорема 2.1. Пусть $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, существуют элементы $d \in A$, $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ такие, что последовательности $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$ эквивалентны в смысле Поста; подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда:

1) для смежного класса $H = \eta(\underbrace{d B \dots B}_{n-1})$

n -арной факторгруппы $\langle A/B, \eta \rangle$ декартова степень H^k замкнута относительно l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$, а универсальная алгебра $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ является полуинвариантной l -арной подгруппой l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$;

2) для полуинвариантных в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ l -арных подгрупп $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ и $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ соответствующие l -арные факторгруппы совпадают:

$$\langle A^k/H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle = \langle A^k/B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle;$$

3) конгруэнции ρ_{H^k} и ρ_{B^k} l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, определяемые полуинвариантными l -арными подгруппами $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ и $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ совпадают: $\rho_{H^k} = \rho_{B^k}$;

4) если $B \neq A$, для некоторого $i = 2, \dots, s$ подстановка $\sigma^{(i-1)(n-1)}$ не является тождественной, то l -арная подгруппа $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуинвариантной в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Доказательство. 1) Если

$$\mathbf{h}_i = (h_{i1}, \dots, h_{ik}) = (\eta(db_{i1} \dots b_{i(n-1)}), \dots, \eta(db_{ik1} \dots b_{ik(n-1)})), i = 1, \dots, l$$

произвольные элементы из H^k , то, положив

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_l) = (y_1, \dots, y_k),$$

и, используя определение операции $\eta_{s, \sigma, k}$, тождественность подстановки σ^{l-1} , и полуинвариантность $\langle B, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$, будем иметь

$$\begin{aligned} y_j &= \eta(\eta(db_{1j} \dots b_{1j(n-1)}) \eta(db_{2j} \dots b_{2j(n-1)}) \dots \\ &\dots \eta(db_{(l-1)j} \dots b_{(l-1)j(n-1)}) \eta(db_{lj} \dots b_{lj(n-1)})) \in \\ &\eta(db_{1j} \dots b_{lj(n-1)}) \in \\ &\in \eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} \underbrace{B \dots B}_{n-1}). \end{aligned}$$

$$\text{Таким образом, } y_j \in \eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} \underbrace{B \dots B}_{n-1}).$$

А так как последовательность $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ эквивалентна последовательности $b_1 \dots b_{n-1}$, где $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$, то

$$y_j \in \eta(\underbrace{d B \dots B}_{n-1}) = H$$

для любого $j = 1, \dots, k$, откуда

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_l) \in H^k,$$

что означает замкнутость множества H^k относительно l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$.

Рассмотрим теперь в $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ уравнение

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x} \mathbf{h}_2 \dots \mathbf{h}_l) = \mathbf{g}, \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= (g_1, \dots, g_k) = \\ &(\eta(dc_{11} \dots c_{1(n-1)}), \dots, \eta(dc_{k1} \dots c_{k(n-1)})) \in H^k, \\ &c_{11}, \dots, c_{1(n-1)}, \dots, c_{k1}, \dots, c_{k(n-1)} \in B. \end{aligned}$$

Элементы $\mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_l$ были определены выше и также принадлежат множеству H^k .

Так как подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа. Поэтому уравнение (2.1) имеет в ней решение

$$\mathbf{x} = (a_1, \dots, a_k) \in A^k.$$

Подставив это решение в (2.1), получим равенство

$$\eta_{s, \sigma, k}((a_1, \dots, a_k) \mathbf{h}_2 \dots \mathbf{h}_l) = \mathbf{g}. \quad (2.2)$$

Обозначим j -ю компоненту в левой части полученного равенства через f_j . Рассуждая также как при вычислении y_j , получим

$$\begin{aligned} f_j &= \eta(a_j \eta(db_{2\sigma(j)1} \dots b_{2\sigma(j)(n-1)}) \dots \\ &\dots \eta(db_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)1} \dots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)(n-1)}) \\ &\eta(db_{lj1} \dots b_{lj(n-1)}) \in \\ &\in \eta(a_j \underbrace{d \dots d}_{l-1} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \eta(a_j \underbrace{B \dots B}_{n-1}), \end{aligned}$$

то есть

$$f_j = \eta(a_j v_1 \dots v_{n-1})$$

для некоторых $v_1, \dots, v_{n-1} \in B$. А так как согласно (2.2), $f_j = g_j$, то

$$\eta(a_j v_1 \dots v_{n-1}) = \eta(dc_{j1} \dots c_{j(n-1)}).$$

Следовательно,

$$\eta(a_j v_1 \dots v_{n-1}) \in \eta(\underbrace{d B \dots B}_{n-1}),$$

откуда учитывая, что, $v_1, \dots, v_{n-1} \in B$, а также то, что $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа в $\langle A, \eta \rangle$, получаем

$$a_j \in \eta(\underbrace{d B \dots B}_{n-1}) = H, j = 1, \dots, k.$$

Поэтому

$$\mathbf{x} = (a_1, \dots, a_k) \in H^k,$$

и значит уравнение (2.1) разрешимо в $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Аналогично доказывается разрешимость в $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ уравнения

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_{l-1} \mathbf{y}) = \mathbf{g}$$

для любых $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{l-1}, \mathbf{g} \in H^k$. Таким образом, согласно аксиоматике Поста для n -арных групп, $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная подгруппа в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Если $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ – произвольный элемент из A^k , то по лемме 1.1 (утверждения 3) и 5))

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x} \underbrace{H^k \dots H^k}_{l-1}) &= \\ &= \eta(\eta(x_1 \underbrace{d \dots d}_{l-1}) \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \\ &\dots \times \eta(\eta(x_k \underbrace{d \dots d}_{l-1}) \underbrace{B \dots B}_{n-1}), \end{aligned}$$

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{l-1} \mathbf{x}) = \\ = \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} x_1) \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} x_k) \underbrace{B \dots B}_{n-1}).$$

Если в правой части первого из полученных равенств учесть эквивалентность последовательностей

$$\underbrace{d \dots d}_{l-1} \text{ и } b_1 \dots b_{n-1}, \\ \text{где } b_1, \dots, b_{n-1} \in B, \text{ то получим} \\ \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} H^k \dots H^k}_{l-1}) = \\ = \eta(\underbrace{x_1 B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(\underbrace{x_k B \dots B}_{n-1}), \quad (2.3)$$

Если в правой части второго из полученных равенств воспользоваться полуинвариантностью $\langle B, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$, а также учесть эквивалентность указанных выше последовательностей, то получим

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{l-1} \mathbf{x}) = \\ = \eta(\underbrace{B \dots B x_1}_{n-1}) \times \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B x_k}_{n-1}). \quad (2.4)$$

Из (2.4) и полуинвариантности $\langle B, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$ следует

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{l-1} \mathbf{x}) = \\ = \eta(x_1 \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(x_k \underbrace{B \dots B}_{n-1}). \quad (2.5)$$

Тогда из (2.3) и (2.5) следует равенство

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} H^k \dots H^k}_{l-1}) = \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{l-1} \mathbf{x}).$$

Следовательно, l -арная подгруппа $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ полуинвариантна в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

2) Если в лемме 1.1 $d \in B$, то $H = B$, при этом утверждение 3) принимает вид

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}) = \\ = \eta(x_1 \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(x_k \underbrace{B \dots B}_{n-1}),$$

откуда и из (2.3) следует

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} H^k \dots H^k}_{l-1}) = \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}).$$

Следовательно, l -арные факторгруппы

$$\langle A^k/H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle \text{ и } \langle A^k/B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$$

совпадают.

3) Так как конгруэнция ρ_{B^k} и полуинвариантная l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ определяют одну и ту же факторгруппу; аналогично конгруэнция ρ_{H^k} и полуинвариантная l -арная подгруппа $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ определяют одну и ту же факторгруппу:

$$\langle A^k/\rho_{B^k}, \eta_{s, \sigma, k} \rangle = \langle A^k/B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle,$$

$$\langle A^k/\rho_{H^k}, \eta_{s, \sigma, k} \rangle = \langle A^k/H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle,$$

то, согласно 2),

$$\langle A^k/\rho_{H^k}, \eta_{s, \sigma, k} \rangle = \langle A^k/\rho_{B^k}, \eta_{s, \sigma, k} \rangle,$$

что означает совпадение конгруэнций ρ_{H^k} и ρ_{B^k} .

4) Если $d \in B$, то $H = B$ и применяется утверждение 2) теоремы 4.1 из [7]. Поэтому считаем $d \notin B$, откуда

$$H = \eta(\underbrace{d B \dots B}_{n-1}) \neq B. \quad (2.6)$$

Так как подстановка $\sigma^{(i-1)(n-1)}$ не является тождественной, то $\sigma^{(i-1)(n-1)}(j) \neq j$ для некоторого $j \in \{1, \dots, k\}$. Зафиксируем элемент $b \in B$ и выберем в A^k элемент $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ так, что $x_j = d$, а элемент $x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(j)}$ является решением уравнения

$$\eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} \underbrace{d z d \dots d}_{(s+1-i)(n-1)}) = b, \text{ то есть} \\ \eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(j)} \underbrace{d \dots d}_{(s+1-i)(n-1)}) = b. \quad (2.7)$$

Все остальные компоненты в $(x_1, \dots, x_k)$ могут быть любыми из множества A .

Если предположить n -полуинвариантность $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, то

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} H^k \dots H^k}_{l-1}) = \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{(i-1)(n-1)} \mathbf{x} \underbrace{H^k \dots H^k}_{(s+1-i)(n-1)})$$

для выбранного $\mathbf{x}$. Перепишем последнее равенство, применив к его левой части утверждение 3) леммы 1.1, а к правой – утверждение 2) этой же леммы:

$$\eta(\eta(x_1 \underbrace{d \dots d}_{l-1}) \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \\ \dots \times \eta(\eta(x_k \underbrace{d \dots d}_{l-1}) \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \\ = \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(1)} \underbrace{d \dots d}_{(s+1-i)(n-1)}) \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \\ \dots \times \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(k)} \underbrace{d \dots d}_{(s+1-i)(n-1)}) \underbrace{B \dots B}_{n-1}),$$

откуда

$$\eta(\eta(x_j \underbrace{d \dots d}_{l-1}) \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \\ = \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(j)} \underbrace{d \dots d}_{(s+1-i)(n-1)}) \underbrace{B \dots B}_{n-1}).$$

Используя в левой части полученного равенства эквивалентность последовательностей

$$\underbrace{d \dots d}_{l-1} \text{ и } b_1 \dots b_{n-1},$$

а также равенство $x_j = d$, а в правой части равенство (2.7), получим $\eta(\underbrace{d B \dots B}_{n-1}) = B$, что противоре-

чит (2.6). Таким образом, $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуинвариантной в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. $\square$

Так как при $k=1$ l -арная группа $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ является производной от n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, то, полагая в теореме 2.1 $k=1$, получим теорему 2.1 из [5].

Замечание 2.1. В доказательстве утверждения 2) теоремы 2.1 вместо леммы 1.1 можно было воспользоваться утверждением 3) леммы 2.1 из [4].

Замечание 2.2. Предположим, что элемент $x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(j)}$ в равенстве (2.7) совпадает с d . Тогда эквивалентность последовательностей $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$, где $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$, влечёт

$$b = \eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(j)} \underbrace{d \dots d}_{(s+1-i)(n-1)}) = (\underbrace{d \dots d}_{l-1}) \in \eta(\underbrace{d B \dots B}_{n-1}),$$

то есть $b \in \eta(\underbrace{d B \dots B}_{n-1})$. Это невозможно, так как

$$\text{для } d \notin B \text{ верно равенство } B \cap \eta(\underbrace{d B \dots B}_{n-1}) = \emptyset.$$

Таким образом, элемент $x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(j)}$ в (2.7) отличен от $d = x_j$. Если $\sigma^{(i-1)(n-1)}(j) = j$, то такое невозможно.

Теорема 2.2. Пусть $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, существуют элементы $d \in A$, $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ такие, что последовательности $\underbrace{d \dots d}_{n-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$ эквивалентны в смысле Поста; подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда:

1) для смежного класса $H = \eta(\underbrace{d B \dots B}_{n-1})$

n -арной факторгруппы $\langle A/B, \eta \rangle$ декартова степень H^k замкнута относительно l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$, а универсальная алгебра $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ является полуинвариантной l -арной подгруппой l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$;

2) для полуинвариантных в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ l -арных подгрупп $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ и $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ соответствующие l -арные факторгруппы совпадают:

$$\langle A^k/H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle = \langle A^k/B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle;$$

3) конгруэнции ρ_{H^k} и ρ_{B^k} l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, определяемые полуинвариантными l -арными подгруппами $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ и $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ совпадают: $\rho_{H^k} = \rho_{B^k}$;

4) если $B \neq A$, для некоторого $i = 2, \dots, s$ подстановка $\sigma^{(i-1)(n-1)}$ не является тождественной, то l -арная подгруппа $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуинвариантной в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

5) если подстановка σ^{n-1} является тождественной, то $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – n -полуинвариантная l -арная подгруппа l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$;

Доказательство. 1)–4). Так как последовательности $\underbrace{d \dots d}_{n-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$ эквивалентны в

смысле Поста в $\langle A, \eta \rangle$, где $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$, то существуют $c_1, \dots, c_{n-1} \in B$ такие, что последовательности $\underbrace{d \dots d}_{l-1} = \underbrace{d \dots d}_{s(n-1)}$ и $c_1 \dots c_{n-1}$ эквива-

лентны в смысле Поста. Таким образом, выпол-

няются все условия теоремы 2.1, что означает справедливость утверждений 1)–4) этой теоремы.

5) Если $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ – произвольный элемент из A^k , то, применяя утверждение 2) леммы 1.1, тождественность подстановки σ^{n-1} , полуинвариантность $\langle B, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$ и эквивалентность последовательностей

$$\underbrace{d \dots d}_{n-1} \text{ и } b_1 \dots b_{n-1},$$

получим

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{(i-1)(n-1)} \mathbf{x} \underbrace{H^k \dots H^k}_{(s+1-i)(n-1)}) &= \\ = \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(1)} \underbrace{d \dots d}_{(s+1-i)(n-1)}) \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \\ \dots \times \eta(\eta(x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(k)} \underbrace{d \dots d}_{(s+1-i)(n-1)}) \underbrace{B \dots B}_{n-1}) &= \\ = \eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} x_1 \underbrace{d \dots d}_{(s+1-i)(n-1)} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \\ \dots \times \eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} x_k \underbrace{d \dots d}_{(s+1-i)(n-1)} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) &= \\ = \eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} x_1 \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} x_k \underbrace{B \dots B}_{n-1}) &= \\ = \eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} \underbrace{B \dots B}_{n-1} x_1) \times \dots \times \eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} \underbrace{B \dots B}_{n-1} x_k) &= \\ = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_1) \times \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_k), \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{(i-1)(n-1)} \mathbf{x} \underbrace{H^k \dots H^k}_{(s+1-i)(n-1)}) &= \\ = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_1) \times \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_k) \end{aligned}$$

для любого $i = 1, \dots, s+1$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} H^k \dots H^k}_{l-1}) &= \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{n-1} \mathbf{x} \underbrace{H^k \dots H^k}_{(s-1)(n-1)}) = \\ &= \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{(s-1)(n-1)} \mathbf{x} \underbrace{H^k \dots H^k}_{n-1}) = \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{l-1} \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Следовательно, $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ является n -полуинвариантной в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. $\square$

Согласно Посту [3], v -ой n -адической степени элемента a n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ называется элемент этой же n -арной группы, обозначаемый символом $a^{[v]}$ и определяемый следующим образом:

$$\begin{aligned} a^{[v]} &= a, \text{ если } v = 0; \\ a^{[v]} &= \eta(\underbrace{a \dots a}_{v(n-1)+1}), \text{ если } v > 0; \end{aligned}$$

$$a^{[v]} - \text{решение уравнения } \eta(\underbrace{x a \dots a}_{-v(n-1)}) = a, \text{ если } v < 0.$$

Замечание 2.3. В группе полиадическая степень и обычная степень одного и того же элемента связаны равенством

$$a^{[v]} = a^{v+1}$$

для любого целого v . В частности, $a^{[0]} = a^1 = a$.

Напомним, что конечным n -адическим порядком элемента a n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ называется [3], [6] наименьшее целое положительное число m , для которого выполняется равенство $a^{[m]} = a$.

Пост доказал [3], что если элемент a n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ имеет конечный n -адический порядок m , то $a^{[s]} = a$ тогда и только тогда, когда s кратно m .

Теорема 2.3. Пусть $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, элемент $d \in A$ имеет n -адический порядок, делящий s ; подстановка $\sigma \in S_k$ имеет порядок, делящий $l-1$. Тогда справедливы утверждения 1)–4) теоремы 2.1.

Доказательство. Так как элемент $d \in A$ имеет n -адический порядок, делящий s , то $d^{[s]} = d$, откуда согласно определению n -адической степени, следует

$$\eta(\underbrace{d \dots d}_{s(n-1)+1}) = d,$$

что означает нейтральность в $\langle A, \eta \rangle$ последовательности $\underbrace{d \dots d}_{s(n-1)} = \underbrace{d \dots d}_{l-1}$. В n -арной подгруппе $\langle B, \eta \rangle$ существуют нейтральные последовательности, составленные из элементов множества B , при этом эти последовательности являются нейтральными и в $\langle A, \eta \rangle$. А так как все нейтральные последовательности любой n -арной группы эквивалентны в смысле Поста, то последовательность $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ эквивалентна некоторой

последовательности $b_1 \dots b_{n-1}$, где $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$. Так как выполняются все условия теоремы 2.1, то справедливы утверждения 1)–4) теоремы 2.1. □

Для идемпотента d n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ последовательность $\underbrace{d \dots d}_{n-1}$ является нейтральной

и поэтому она эквивалентна любой нейтральной последовательности $b_1 \dots b_{n-1}$, составленной из элементов n -арной подгруппы $\langle B, \eta \rangle$. Таким образом, считая в теореме 2.2 d идемпотентом, получим следующий результат.

Теорема 2.4. Пусть $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, d – идемпотент в $\langle A, \eta \rangle$, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда справедливы утверждения 1)–5) теоремы 2.2.

Если в теореме 2.1. положить $n = 2$, то получим следующий результат.

Теорема 2.5. Пусть B – нормальная подгруппа группы A , в A существует такой элемент d , что $d^{l-1} \in B$; подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда:

1) для смежного класса $H = dB$ факторгруппы A/B декартова степень H^k замкнута относительно l -арной операции $[\]_{l, \sigma, k}$, а универсальная алгебра $\langle H^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ является

полуинвариантной l -арной подгруппой l -арной группы $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$;

2) для полуинвариантных в $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ l -арных подгрупп $\langle H^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ и $\langle B^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ соответствующие l -арные факторгруппы совпадают:

$$\langle A^k/H^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle = \langle A^k/B^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle;$$

3) конгруэнции ρ_{H^k} и ρ_{B^k} l -арной группы $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$, определяемые полуинвариантными l -арными подгруппами $\langle H^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ и $\langle B^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ совпадают: $\rho_{H^k} = \rho_{B^k}$;

4) если $B \neq A$, для некоторого $i = 2, \dots, l-1$ подстановка σ^{i-1} не является тождественной, то l -арная подгруппа $\langle H^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ не является инвариантной в $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$;

5) если подстановка σ является тождественной, то l -арная подгруппа $\langle H^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ является инвариантной в $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$.

Из теоремы 2.5. вытекает

Следствие 2.1. Пусть B – нормальная подгруппа группы A , в A существует такой элемент d , что d^{l-1} – единица группы A ; подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда справедливы утверждения 1)–5) теоремы 2.5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А.М. О разрешимости уравнений в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2018. – № 1 (51). – С. 4–10.
2. Гальмак, А.М. Многочестные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
3. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
4. Гальмак, А.М. Полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 54–58.
5. Гальмак, А.М. Смежные классы, являющиеся полиадическими подгруппами / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 44–50.
6. Русаков, С.А. Алгебраические n -арные системы / С.А. Русаков. – Минск: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
7. Гальмак, А.М. Полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида. II / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 45–47.

Поступила в редакцию 04.08.2025.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор

**КЛАССЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С ФОРМАЦИОННО ГИПЕРЦЕНТРАЛЬНЫМ
ВЛОЖЕНИЕМ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП В СВОИ НОРМАЛИЗАТОРЫ****А.Г. Коранчук***Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины***CLASSES OF FINITE GROUPS WITH FORMATIONALLY HYPERCENTRAL
EMBEDDING OF SYLOW SUBGROUPS INTO THEIR NORMALIZERS****A.G. Koranchuk***Francisk Skorina Gomel State University*

Аннотация. Установлено, что значения операции, ставящей каждому классу конечных групп $\mathfrak{X}$ класс конечных групп $NZ\mathfrak{X}$, силовские подгруппы которых лежат в $\mathfrak{X}$ -гиперцентрах их нормализаторов, являются формациями. Изучены неподвижные точки данной операции. Улучшен признак сверхразрешимости Р. Бэра.

Ключевые слова: конечная группа, силовская подгруппа, формация, $\mathfrak{F}$ -гиперцентр, $\mathfrak{F}$ -корадикал.

Для цитирования: Коранчук, А.Г. Классы конечных групп с формационно гиперцентральным вложением силовских подгрупп в свои нормализаторы / А.Г. Коранчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 90–95. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_90. – EDN: HEUGQT

Abstract. The values of the operation that assigns to each class of finite groups $\mathfrak{X}$ the class of finite groups $NZ\mathfrak{X}$ whose Sylow subgroups lie in the $\mathfrak{X}$ -hypercenters of their normalizers are formations. Fixed points of this operation are studied. R. Baer's supersolvability criterion is improved.

Keywords: finite group, Sylow subgroup, formation, $\mathfrak{F}$ -hypercenter, $\mathfrak{F}$ -residual.

For citation: Koranchuk, A.G. Classes of finite groups with formationally hypercentral embedding of Sylow subgroups into their normalizers / A.G. Koranchuk // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 3 (64). – P. 90–95. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_90 (in Russian). – EDN: HEUGQT

Введение

Рассматриваются только конечные группы. При изучении строения группы ее примарные подгруппы и их нормализаторы, в частности, силовские p -подгруппы и их нормализаторы играют ключевую роль. Такие подгруппы Альперин [1] назвал локальными подгруппами. Их свойства составили основу локального анализа, который широко использовался при получении классификации конечных непростых групп. Начало исследования проблемы распознавания принадлежности непростой группы заданному классу групп на основе свойств её локальных подгрупп положила теорема Фробениуса [2, 10.3.2], согласно которой конечная группа является p -нильпотентной тогда и только тогда, когда каждая p -подгруппа централизуется p' -элементами в своем нормализаторе. В 1986 году Бьянки, Джиллио, Майри, Хаук [3] установили, что группа нильпотентна тогда и только тогда, когда нормализаторы ее силовских подгрупп (кратко, силовские нормализаторы) нильпотентны. Известно, что существуют несверхразрешимые группы, у которых силовские нормализаторы

являются сверхразрешимыми. Например, такими являются проективная специальная линейная группа $PSL(2, 7)$ и симметрическая группа S_4 . В работах [4] и [5] исследовались свойства разрешимых групп, все силовские нормализаторы которых сверхразрешимы.

В связи с вышеизложенным Л.А. Шеметков на Гомельском алгебраическом семинаре в 1992 году предложил следующую проблему: в классе всех групп найти все локальные наследственные формации $\mathfrak{F}$ такие, что класс $N\mathfrak{F}$ всех групп, у которых силовские нормализаторы принадлежат $\mathfrak{F}$, совпадает с $\mathfrak{F}$. Д'Аниелло, Де Виво, Джордано и Перес-Рамос [7] решили проблему Шеметкова для наследственных насыщенных формаций в классе всех разрешимых групп [7]. Л.С. Казарин, Мартинес-Пастор и Перес-Рамос [8] исследовали проблему Шеметкова для произвольных групп в контексте наследственных насыщенных формаций. Отметим также недавние работы [9] и [10] по данной тематике.

Отметим [7], что в общем случае для наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$, класс

групп, силовские нормализаторы которых принадлежат $\mathfrak{F}$, не является формацией.

В данной работе предложена модификация конструкции класса $\text{NZ}\mathfrak{F}$, устраняющая указанный недостаток. Для ее описания нам понадобятся следующие определения. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп. Напомним [11, с. 127–128], что главный фактор H/K группы G называется $\mathfrak{F}$ -центральным в G , если полупрямое произведение $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ принадлежит $\mathfrak{F}$. Наибольшая нормальная подгруппа $Z_{\mathfrak{F}}(G)$ группы G , все G -главные факторы ниже которой $\mathfrak{F}$ -центральны в G , называется $\mathfrak{F}$ -гиперцентром.

Определение 0.1. Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп. Обозначим через $\text{NZ}\mathfrak{X}$ следующий класс групп:

$$(G \mid P \leq Z_{\mathfrak{X}}(N_G(P)) \text{ для любой } P \in \text{Syl}(G)).$$

Отметим, что по теореме Барнса-Кегеля [12, следствие 2.2.5] $\mathfrak{F}$ -группа совпадает со своим $\mathfrak{F}$ -гиперцентром для любой формации $\mathfrak{F}$.

Теорема 0.1. Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп. Тогда $\text{NZ}\mathfrak{X}$ является формацией. Операция $\text{NZ}:\mathfrak{X} \rightarrow \text{NZ}\mathfrak{X}$ является идемпотентной и монотонной, а на множестве наследственных формаций и операцией замыкания. Причем, $\text{NZ}\mathfrak{F} \subseteq \text{NZ}\mathfrak{F}$ для любой формации $\mathfrak{F}$.

В 1997 году Л.А. Шеметковым [13] была поставлена задача описания формаций $\mathfrak{F}$, содержащих всякую группу, совпадающую со своим $\mathfrak{F}$ -гиперцентром. Такие формации называются Z -насыщенными [14]. Связь операции NZ с такими формациями устанавливает:

Теорема 0.2. Пусть $\mathfrak{F} = \text{NZ}\mathfrak{F}$ – наследственная формация. Тогда $\mathfrak{F}$ – Z -насыщенная формация.

Естественным является аналог проблемы Шеметкова для оператора NZ : если группа G принадлежит $\text{NZ}\mathfrak{F}$, верно ли что G принадлежит $\mathfrak{F}$? В начале опишем наследственные формации, в которых данная проблема имеет положительное решение для любой наследственной Z -насыщенной подформации. Напомним, что p -длина группы G не превосходит 1, если она имеет нормальный ряд $1 \trianglelefteq A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$, где B/A – p -группа, а $A/1, G/B$ – p' -группы. Указанные группы могут быть изоморфны 1.

Теорема 0.3. Тогда и только тогда $\mathfrak{F} = \text{NZ}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}$ для любой наследственной Z -насыщенной подформации $\mathfrak{F}$ наследственной Z -насыщенной формации $\mathfrak{X}$, когда p -длина всякой $\mathfrak{X}$ -группы не превосходит 1 для любого простого p .

Класс групп, p -длина которых не превосходит 1 для любого простого p , изучался и применялся в работах [9] и [15]. Он обозначается через

$\mathfrak{L}_a(1)$ и является наследственной насыщенной формацией разрешимых групп. Напомним [16], что группа называется строго p -замкнутой, если она имеет нормальную p -подгруппу, фактор группа по которой абелева, экспоненты делящей $p-1$.

Следствие 0.1. Пусть $G \in \mathfrak{L}_a(1)$. Тогда и только тогда группа G сверхразрешима, когда $N_G(P)/C_G(P)$ – строго p -замкнутая группа для любых $P \in \text{Syl}_p G$ и $p \in \pi(G)$.

Напомним, что группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа, если $\pi(G) = \{p_1, \dots, p_n\}$, где $p_i < p_j$ при $i < j$, и в G имеется нормальная холлова $\{p_i, \dots, p_n\}$ подгруппа для любого i .

Следствие 0.2 (Р. Бэр [16, теорема 2.1]). Пусть группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа. Тогда и только тогда группа G сверхразрешима, когда $N_G(P)/C_G(P)$ – строго p -замкнутая группа для любых $P \in \text{Syl}_p G$ и $p \in \pi(G)$.

В работе [7] конструктивно описаны все разрешимые наследственные насыщенные формации $\mathfrak{F} = \text{NZ}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$. Они в точности совпадают с покрывающими формациями. Напомним [7], что покрывающей формацией называется локальная формация $\mathfrak{F}$, определяемая локальной функцией f такой, что $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$, где $p \in \pi(f(p))$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и из $q \in \pi(f(p))$ всегда следует, что $p \in \pi(f(q))$, и $f(p) = \emptyset$ в противном случае. В работе доказаны следующие две теоремы:

Теорема 0.4. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{F} = \text{NZ}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$, когда $\mathfrak{F}$ – покрывающая формация.

Напомним [17], что для разбиения $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ множества всех простых чисел $\mathbb{P}$ на попарно непересекающиеся подмножества σ_i ($i \in I$) группа называется σ -нильпотентной, если она имеет нормальную холлову σ_i -подгруппу для любого $\sigma_i \in \sigma$. В работе [8] было установлено, что класс всех σ -нильпотентных групп N -замкнут. Аналогичное утверждение верно и для оператора NZ .

Теорема 0.5. Пусть σ – разбиение множества всех простых чисел. Тогда формация всех σ -нильпотентных групп NZ -замкнута.

1 Предварительные сведения

Используются стандартные обозначения и терминология, описанные в работах [11], [18]. Напомним некоторые из них, которые существенны в данной работе. Через $\pi(G)$ обозначается

множество различных простых делителей $|G|$; $\text{Syl}G$ и $\text{Syl}_p G$ – множество всех силовских подгрупп и p -подгрупп группы G соответственно.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G ; формацией называется $\mathcal{Q}$ -замкнутый (т. е. из $G \in \mathcal{F}$ и $N \trianglelefteq G$ следует, что $G/N \in \mathcal{F}$) и R_0 -замкнутый (т. е. из $G/N_1 \in \mathcal{F}$ и $G/N_2 \in \mathcal{F}$ следует, что $G/(N_1 \cap N_2) \in \mathcal{F}$) класс групп $\mathcal{F}$. Формация $\mathcal{F}$ называется: наследственной, если всякая подгруппа $\mathcal{F}$ -группы принадлежит $\mathcal{F}$; насыщенной, если $G \in \mathcal{F}$, всякий раз, когда $G/\Phi(G) \in \mathcal{F}$. Напомним, что $\mathcal{F}$ -корадикалом для формации $\mathcal{F}$ называется наименьшая нормальная подгруппа группы, фактор группа по которой принадлежит $\mathcal{F}$.

Напомним [18, II, определение 1.4], что отображение f , определенное на классах групп, значениями которого также являются классы групп, называется операцией замыкания, если для любых классов групп $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{X}$ выполняются условия: расширяемости $\mathcal{X} \subseteq f(\mathcal{X})$, идемпотентности $f(f(\mathcal{X})) = f(\mathcal{X})$ и монотонности $f(\mathcal{H}) \subseteq f(\mathcal{X})$.

Следующая лемма хорошо известна (см., например, [18, А, теорема 6.4 (а)]).

Лемма 1.1. Пусть G – группа, $N \trianglelefteq G$ и $P \in \text{Syl}G$. Тогда $PN/N \in \text{Syl}(G/N)$ и

$$N_{G/N}(PN/N) = N_G(P)N/N.$$

Теорема 1.1 (Барнс и Кегель [12, следствие 2.2.5]). Пусть $\mathcal{F}$ – формация, M и N – нормальные подгруппы $G \in \mathcal{F}$. Предположим, что $M \leq C_G(N)$ и пусть $H = N \rtimes G/M$, где G/M действует на N сопряжением. Тогда $H \in \mathcal{F}$.

2 Доказательство основных результатов

2.1 Доказательство теоремы 0.1. Доказательство теоремы будем осуществлять по шагам с помощью ряда лемм, которые представляют определенный самостоятельный интерес.

Лемма 2.1. Пусть $\mathcal{F}$ – формация и p – простое число. Через $N_p^* \mathcal{F}$ обозначим класс групп, нормализаторы силовских p -подгрупп которых принадлежат $\mathcal{F}$. Тогда $N_p^* \mathcal{F}$ – формация.

Доказательство. Если $G \in N_p^* \mathcal{F}$ и R/N – силовская p -подгруппа в G/N , то найдется силовская p -подгруппа $P \in G$ такая, что $PN/N = R/N$. Из леммы 1.1 следует, что

$$\begin{aligned} N_{G/N}(R/N) &= N_{G/N}(PN/N) = \\ &= N_G(P)N/N \simeq N_G(P)/(N_G(P) \cap N) \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Итак, $N_p^* \mathcal{F}$ – $\mathcal{Q}$ -замкнутый класс групп.

Пусть $G/N_i \in N_p^* \mathcal{F}$, где $i = 1, 2$. Если p – силовская p -подгруппа в G , то PN_i/N_i – силовские подгруппы в G/N_i по лемме 1.1, где $i = 1, 2$. Тогда

$$\begin{aligned} N_{G/N_i}(PN_i/N_i) &= N_G(P)N_i/N_i \simeq \\ &\simeq N_G(P)/N_G(P) \cap N_i \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

по лемме 1.1, где $i = 1, 2$. Значит,

$$\begin{aligned} N_G(P)/((N_G(P) \cap N_1) \cap (N_G(P) \cap N_2)) &= \\ = N_G(P)/1 \simeq N_G(P). \end{aligned}$$

Следовательно, $N_p^* \mathcal{F}$ – R_0 -замкнутый класс групп. Итак, $N_p^* \mathcal{F}$ – формация.

Замечание 2.1. Мы считаем 1 силовской p -подгруппой в p' -группе.

Замечание 2.2. Пусть $\mathcal{F}$ – произвольная наследственная формация. Определим класс групп, нормализаторы всех силовских подгрупп которых (включая 1) принадлежат $\mathcal{F}$:

$$N^* \mathcal{F} = \bigcap_{p \in \mathbb{P}} N_p^* \mathcal{F}.$$

Отличие операции N^* от N заключается в том, что $N^* \mathcal{F} = \mathcal{F}$ для любой наследственной формации $\mathcal{F}$. Действительно, пусть $G \in N^* \mathcal{F}$. Выберем $p \in \pi(G)'$, тогда $1 \in \text{Syl}_p G$ и $N_G(1) = G \in \mathcal{F}$. Если $G \in \mathcal{F}$, то и $N_G(P) \in \mathcal{F}$ для любой $P \in \text{Syl}G$ в силу наследственности $\mathcal{F}$. Итак, $N^* \mathcal{F} = \mathcal{F}$.

Напомним [14], что для класса групп $\mathcal{X}$ через $Z\mathcal{X}$ обозначается класс групп, все главные факторы которых $\mathcal{X}$ -центральны.

Лемма 2.2. Пусть $\mathcal{X}$ – класс групп и $Z_p \mathcal{X}$ – класс всех групп, у которых абелевы главные p -факторы $\mathcal{X}$ -центральны. Тогда $Z_p \mathcal{X}$ – формация.

Доказательство. Пусть $\mathcal{H} = (G|G$ – примитивная $\mathcal{X}$ -группа, цоколь которой – абелева p -группа) $\cup (G|G$ – примитивная группа, цоколь которой не является абелевой p -группой). Тогда $Z\mathcal{H} = Z_p \mathcal{X}$ формация по [14, теорема 1].

Лемма 2.3. Пусть $\mathcal{X}$ – класс групп. Тогда $N_p^* Z_p \mathcal{X} = (G|P \leq Z_{\mathcal{X}}(N_G(P)), \forall P \in \text{Syl}_p G)$ – формация.

Доказательство. Пусть $G \in N_p^* Z_p \mathcal{X}$. Тогда $N_G(P) \in Z_p \mathcal{X}$ для любой $P \in \text{Syl}_p G$. Значит, всякий главный p -фактор $N_G(P)$ является $\mathcal{X}$ -центральным. Из $P \trianglelefteq N_G(P)$ следует, что $P \leq Z_{\mathcal{X}}(N_G(P))$ для любой $P \in \text{Syl}_p G$.

Предположим теперь, что $P \leq Z_{\mathcal{X}}(N_G(P))$ для любой $P \in \text{Syl}_p G$. Тогда всякий главный фактор $N_G(P)$ ниже P является $\mathcal{X}$ -центральным,

а всякий главный фактор $N_G(P)$ выше P – p' -группой. Итак, все абелевы главные p -факторы $N_G(P)$ являются $\mathfrak{X}$ -центральными. Тогда $N_G(P) \in Z_p \mathfrak{X}$ для любой $P \in \text{Syl}_p G$. Следовательно, $G \in N_p^* Z_p \mathfrak{X}$.

Значит,

$$N_p^* Z_p \mathfrak{X} = (G \mid P \leq Z_{\mathfrak{X}}(N_G(P)), \forall P \in \text{Syl}_p G).$$

Согласно лемме 2.2 класс групп $Z_p \mathfrak{X}$ является формацией. Тогда $N_p^* Z_p \mathfrak{X}$ является формацией по лемме 2.1.

Доказательство теоремы 0.1. Заметим, что если G – p' -группа, то она принадлежит $N_p^* Z_p \mathfrak{X}$ для любого класса групп $\mathfrak{X}$. Тогда ввиду леммы 2.3

$$\begin{aligned} \text{NZ}\mathfrak{X} &= (G \mid P \leq Z_{\mathfrak{X}}(N_G(P)) \text{ для любой} \\ &P \in \text{Syl} G) = \bigcap_{p \in \mathbb{P}} N_p^* Z_p \mathfrak{X} \end{aligned}$$

является формацией, как пересечение формаций.

Предположим, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$. Из доказательства леммы 2.2 следует, что $Z_p \mathfrak{H} \subseteq Z_p \mathfrak{X}$ для любого простого p . Тогда очевидно, что $N_p^* Z_p \mathfrak{H} \subseteq N_p^* Z_p \mathfrak{X}$ для любого простого p . Согласно предыдущему абзацу:

$$\text{NZ}\mathfrak{H} = \bigcap_{p \in \mathbb{P}} N_p^* Z_p \mathfrak{H} \subseteq \bigcap_{p \in \mathbb{P}} N_p^* Z_p \mathfrak{X} = \text{NZ}\mathfrak{X}.$$

Итак, операция NZ монотонна.

Докажем, что операция NZ идемпотентна. В силу монотонности $\text{NZ}\mathfrak{X} \subseteq \text{NZ}(\text{NZ}\mathfrak{X})$. Пусть $G \in \text{NZ}(\text{NZ}\mathfrak{X})$ и $P \in \text{Syl} G$. Тогда $P \leq Z_{\text{NZ}\mathfrak{X}}(N_G(P))$. Пусть H/K – главный фактор $N_G(P)$, лежащий ниже P . Тогда

$$\bar{T} = (H/K) \rtimes (N_G(P)/C_{N_G(P)}(H/K)) \in \text{NZ}\mathfrak{X}.$$

Заметим, что H/K – p -группа для некоторого простого p , а $N_G(P)/C_{N_G(P)}(H/K)$ – p' -группа в силу $P \in \text{Syl}_p G$ и [18, А, лемма 13.6]. Значит, главный фактор H/K группы $\bar{T} \in \text{NZ}\mathfrak{X}$ является ее силовой подгруппой. Поэтому

$$\begin{aligned} (H/K) \rtimes (N_{\bar{T}}(H/K)/C_{N_{\bar{T}}(H/K)}(H/K)) &= \\ &= (H/K) \rtimes (\bar{T}/C_{\bar{T}}(H/K)) \simeq \bar{T} \in \mathfrak{X}. \end{aligned}$$

Следовательно, H/K – $\mathfrak{X}$ -центральный главный фактор $N_G(P)$. Значит, $P \leq Z_{\mathfrak{X}}(N_G(P))$. Тогда $\text{NZ}(\text{NZ}\mathfrak{X}) \subseteq \text{NZ}\mathfrak{X}$. Итак, $\text{NZ}(\text{NZ}\mathfrak{X}) = \text{NZ}\mathfrak{X}$, т. е. операция NZ идемпотентна.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация и $G \in \text{N}\mathfrak{F}$. Тогда $N_G(P) \in \mathfrak{F}$ для любой $P \in \text{Syl} G$. В силу теоремы Барнса-Кегеля $N_G(P) = Z_{\mathfrak{F}}(N_G(P))$. В частности, $P \leq Z_{\mathfrak{F}}(N_G(P))$ для любой $P \in \text{Syl} G$. Тогда $G \in \text{NZ}\mathfrak{F}$. Итак, $\text{N}\mathfrak{F} \subseteq \text{NZ}\mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то $\mathfrak{F} \subseteq \text{N}\mathfrak{F} \subseteq \text{NZ}\mathfrak{F}$. Из вышеизложенного следует, что операция NZ является операцией замыкания на множестве наследственных формаций. $\square$

2.2 Доказательство теоремы 0.2. Предположим, что наследственная формация $\mathfrak{F} = \text{NZ}\mathfrak{F}$ не является Z -насыщенной. Тогда в силу [19, лемма 2.4] $Z\mathfrak{F}$ – наследственная Z -насыщенная формация и $\mathfrak{F} \subset Z\mathfrak{F}$. Выберем группу G минимального порядка из $Z\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}$. В силу наследственности $Z\mathfrak{F}$, G является минимальной не $\mathfrak{F}$ -группой. Тогда, если $N_G(P) < G$ для любой $P \in \text{Syl} G$, то $G \in \mathfrak{F} = \text{NZ}\mathfrak{F}$ в силу определения $\text{NZ}\mathfrak{F}$, противоречие. Итак, $G = N_G(P)$ для некоторой $P \in \text{Syl} G$.

Заметим, что $G/N \in \mathfrak{F}$ для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G ввиду нашего предположения и того, что $Z\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ – формации. Поэтому в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N . Значит, $N \leq P$. Тогда N – $\mathfrak{F}$ -центральный фактор $G = N_G(P)$. Из $G/N \in \mathfrak{F}$ следует, что $P/N \leq Z_{\mathfrak{F}}(N_{G/N}(P/N)) = Z_{\mathfrak{F}}(N_G(P)/N)$. Итак, $P \leq Z_{\mathfrak{F}}(N_G(P))$. Следовательно, $G \in \text{NZ}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, противоречие. Итак, наследственная формация $\mathfrak{F} = \text{NZ}\mathfrak{F}$ является Z -насыщенной. $\square$

2.3 Доказательство теоремы 0.3. Заметим, что $\mathfrak{L}_a(1)$ является формацией разрешимых групп. Тогда $\mathfrak{H} = \mathfrak{L}_a(1) \cap \text{NZ}\mathfrak{F}$ также является формацией разрешимых групп. Тогда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ по условию и теореме 0.2.

Предположим $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F} \neq \emptyset$. Пусть G – группа минимального порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда $G/N \in \mathfrak{F}$ для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G . В силу нашего предположения в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N и $G/N \in \mathfrak{F}$. Заметим, что N не является $\mathfrak{F}$ -центральным главным фактором G в силу Z -насыщенности $\mathfrak{F}$. Поэтому $\bar{T} = N \rtimes (G/C_G(N)) \notin \mathfrak{F}$. Заметим, что по теореме Барнса-Кегеля $\bar{T} \in \mathfrak{H}$. Т. к. G – разрешимая группа, N – p -группа для некоторого простого p . Заметим, что $\bar{T}$ является примитивной группой 1 типа. Следовательно, $O_p(\bar{T}) = 1$ и $N = F(\bar{T}) = O_p(\bar{T})$. Итак, N – нормальная силовая подгруппа $\bar{T} \in \mathfrak{H}$. Значит, $N \leq Z_{\mathfrak{F}}(N_{\bar{T}}(N)) = Z_{\mathfrak{F}}(\bar{T})$. Т. е. $\bar{T} \simeq N \rtimes (\bar{T}/C_{\bar{T}}(N)) \in \mathfrak{F}$. Следовательно, N – $\mathfrak{F}$ -центральный главный фактор G , противоречие. Значит, $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F} = \emptyset$. Итак, $\mathfrak{H} = \mathfrak{L}_a(1) \cap \text{NZ}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Докажем теперь, что если $\mathfrak{F} = \text{NZ}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}$ для любой наследственной Z -насыщенной подформации $\mathfrak{F}$ наследственной Z -насыщенной формации $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{L}_a(1)$. Предположим теперь, что $\mathfrak{X} \setminus \mathcal{L}_a(1) \neq \emptyset$. Тогда в $\mathfrak{X}$ найдется минимальная не $\mathcal{L}_a(1)$ -группа G . Согласно [15, лемма 3.2] $|\pi(G)| = 2$. Следовательно, G не имеет нормальных силовских подгрупп. Заметим, что $\mathfrak{H} = \mathcal{L}_a(1) \cap \mathfrak{X}$ – наследственная Z -насыщенная подформация формации $\mathfrak{X}$. Тогда все собственные подгруппы G принадлежат $\mathfrak{H}$, в частности, совпадают со своим $\mathfrak{H}$ -гиперцентром по теореме Барнса-Кегеля. Итак, $G \in (\text{NZ}\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{X}$, противоречие. Значит, $\mathfrak{X} \setminus \mathcal{L}_a(1) = \emptyset$. $\square$

2.4 Доказательство следствий 0.1 и 0.2. Известно, что если F – максимальный внутренний локальный экран формации всех сверхразрешимых групп $\mathcal{U}$, то $F(p)$ – класс всех строго p -замкнутых групп. Пусть $P \in \text{Syl}_p G$. Тогда из $P \leq Z_{\mathcal{U}}(N_G(P))$ и [20, лемма 2.5] следует, что $N_G(P)/C_{N_G(P)}(P) = N_G(P)/C_G(P) \in F(p)$ для любого простого p . Значит, следствие 0.1 напрямую вытекает из теоремы 0.3.

Заметим, что всякая группа с силовой башней сверхразрешимого типа принадлежит $\mathcal{L}_a(1)$. Итак, следствие 0.2 напрямую вытекает из следствия 0.1. $\square$

2.5 Доказательство теоремы 0.4. Предположим, что $\mathfrak{F} = \text{NZ}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$. Заметим, что $\mathfrak{F} \subseteq \text{N}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S} \subseteq \text{NZ}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{F}$ по теореме 0.1. Итак, для наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F} = \text{N}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ – покрывающая формация по [7, теорема].

Предположим теперь, что $\mathfrak{F}$ – покрывающая формация и $G \in \text{NZ}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$. Пусть $\pi = \{p, q\} \subseteq \pi(G)$ и $p \notin F(q)$. Тогда по определению $q \notin F(p)$. Пусть H – холлова π -подгруппа G . Тогда найдутся силовые p -подгруппа P и q -подгруппа Q группы G , содержащиеся в H . Заметим, что $P \leq N_H(P) \leq N_G(P)$ и $Q \leq N_H(Q) \leq N_G(Q)$. Из $G \in \text{NZ}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ и [19, лемма 2.4] следует, что $P \leq Z_{\mathfrak{F}}(N_H(P))$ и $Q \leq Z_{\mathfrak{F}}(N_H(Q))$. Тогда

$$N_H(P)/C_H(P) \in F(p) \cap \mathfrak{S}_{\pi} \subseteq \mathfrak{N}_p$$

по [20, лемма 2.5]. Аналогично

$$N_H(Q)/C_H(Q) \in F(q) \cap \mathfrak{S}_{\pi} \subseteq \mathfrak{N}_q.$$

Итак, H нильпотентна по [21, теорема 1]. Значит, $G \in \mathfrak{F}$ по [7, предложение 2]. $\square$

2.6 Доказательство теоремы 0.5. Напомним, что через $\mathfrak{N}_{\sigma}$ обозначается класс всех σ -нильпотентных групп. Согласно [17] главный фактор H/K группы G является $\mathfrak{N}_{\sigma}$ -центральным, если $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K))$ является σ_i -группой для некоторого $\sigma_i \in \sigma$.

Пусть P – силовая p -подгруппа группы $G \in \text{NZ}\mathfrak{N}_{\sigma}$ и $p \in \sigma_i \in \sigma$. Тогда

$$(H/K) \rtimes (N_G(P)/C_{N_G(P)}(H/K))$$

является σ_i -группой для любого главного фактора H/K группы $N_G(P)$, лежащего ниже P . Тогда $N_G(P)/C_G(P)$ является σ_i -группой. Значит, холлова σ_i -подгруппа нормальна в G для любого $\sigma_i \in \sigma$ по [21, теорема 1], т. е. $G \in \mathfrak{N}_{\sigma}$. $\square$

Заключение

В работе введена и изучена операция NZ на классах конечных групп, сопоставляющая каждому классу групп $\mathfrak{X}$ класс $\text{NZ}\mathfrak{X}$ групп, силовые подгруппы которых лежат в $\mathfrak{X}$ -гиперцентрах их нормализаторов. Описаны неподвижные точки данной операции. Усилен известный признак сверхразрешимости Р. Бэра. Установлена NZ -замкнутость формации всех σ -нильпотентных групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alperin, J.L. Groups and Representations / J.L. Alperin, Rowen B. Bell // Springer Science and Business Media. – 2012. – Vol. 162. – 196 p.
2. Robinson, D.J.S. A Course in the Theory of Groups / D.J.S. Robinson. – New York – Heidelberg – Berlin: Springer-Verlag, 1980. – 286 p.
3. On finite soluble groups with nilpotent Sylow normalizers / M.G. Bianci, A. Gillio, B. Mayri, P. Hauck // Archiv der Mathematik. – 1986. – Vol. 47. – P. 193–197.
4. Fedri, V. Finite soluble groups with supersoluble Sylow normalizers / V. Fedri, L. Serena // Arch. Math. – 1988. – Vol. 50. – P. 11–18.
5. Bryce, R. Bounds on the Fitting length of finite soluble groups with supersoluble Sylow normalizers / R. Bryce, V. Fedri, L. Serena // Bull. Austral. Math. Soc. – 1991. – Vol. 44. – P. 19–31.
6. D’Aniello, A. Finite groups with primitive Sylow normalizers / A. D’Aniello, C. De Vivo, G. Giordano // Bollettino U.M.I. – 2002. – Vol. 8. – P. 235–245.
7. Saturated formations closed under Sylow normalizers / A. D’Aniello, C. De Vivo, G. Giordano, M.D. Pérez-Ramos // Comm. Algebra. – 2005. – Vol. 33. – P. 2801–2808.
8. Kazarin, L. On the Sylow graph of a group and Sylow normalizers / L. Kazarin, A. Martínez-Pastor, M. D. Pérez-Ramos // Israel J. Math. – 2011. – Vol. 186. – P. 251–271.

9. Васильев, А.Ф. О конечных группах с формационно субнормальными нормализаторами силовских подгрупп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, А.Г. Коранчук // Математические заметки. – 2020. – Т. 5, № 108. – С. 679–691.
 10. Васильева, Т.И. Конечные группы с субнормальными корадикалами силовских нормализаторов / Т.И. Васильева, А.Г. Коранчук // Сибирский математический журнал. – 2022. – Т. 4, № 63. – С. 805–813.
 11. Шеметков, Л.А. Формации алгебраического систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – Москва: Наука, 1989.
 12. Ballester-Bolínches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolínches, L.M. Ezquerro. – Mathematics and Its Applications. – Dordrecht: Springer, 2006. – 584 p.
 13. Shemetkov, L.A. Frattini extensions of finite groups and formations / L.A. Shemetkov // Comm. Algebra. – 1997. – Vol. 23, № 3. – P. 955–964.
 14. Murashka, V.I. On Questions Posed by Shemetkov, Ballester-Bolínches, and Perez-Ramos in Finite Group Theory / V.I. Murashka // Math. Notes. – 2022. – Vol. 122, № 6. – P. 932–939.
 15. Семенчук, В.Н. Минимальные не-F-группы / В.Н. Семенчук // Алгебра и логика. – 1979. – Vol. 18, № 3. – С. 348–382.
 16. Baer, R. Supersoluble immersion / R. Baer // Can. J. Math. – 1959. – Vol. 11. – P. 353–369.
 17. Skiba, A.N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
 18. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992.
 19. Aivazidis, S. Subnormality and residuals for saturated formations: A generalization of Schenkman's theorem / S. Aivazidis, I.N. Safonova, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2021. – Vol. 24, № 4. – P. 807–818.
 20. Skiba, A.N. On the F-hypercenter and the intersection of all F-maximal subgroups of a finite group / A.N. Skiba // J. Pure Appl. Algebra. – 2012. – Vol. 216. – P. 789–799.
 21. Murashka, V.I. On the connected components of the prime and Sylow graphs of a finite group / V.I. Murashka // Arch. Math. – 2022. – Vol. 118. – P. 225–229.
- Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ-РНФ (проект Ф23РНФМ-63).*
- Поступила в редакцию 09.08.2025.*

Информация об авторах

Коранчук Анастасия Геннадьевна – соискатель

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЦЕНТРА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙС.В. Майоровская¹, В.В. Мироненко²¹Белорусский государственный экономический университет, Минск²Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

SUFFICIENT CENTER CONDITIONS FOR SOME DIFFERENTIAL EQUATIONS

S.V. Mayorovskaia¹, V.V. Mironenko²¹Belarusian State Economic University, Minsk²Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Установлены достаточные условия наличия центра для дифференциального уравнения, правая часть которого представляет собой отношение двух степенных рядов по полярной координате ρ с 2π -периодическими коэффициентами по полярному углу φ .

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, центр, фокус, проблема центра-фокуса, отражающая функция.

Для цитирования: Майоровская, С.В. Достаточные условия центра для некоторых дифференциальных уравнений / С.В. Майоровская, В.В. Мироненко // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 96–98. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_96. – EDN: ARETIN

Abstract. Sufficient conditions are established for the presence of a center for the differential equation, the right-hand side of which is the ratio of two power series in the polar coordinate ρ with 2π -periodic coefficients by polar angle φ .

Keywords: differential equation, center, focus, center-focus problem, reflecting function.

For citation: Mayorovskaia, S.V. Sufficient center conditions for some differential equations / S.V. Mayorovskaia, V.V. Mironenko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 3 (64). – P. 96–98. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_96 (in Russian). – EDN: ARETIN

1 Проблема центра-фокуса

Проблема центра-фокуса, поставленная А. Пуанкаре [1], является одной из основных проблем качественной теории дифференциальных уравнений. А.М. Ляпунов в своих классических работах связал её с общей задачей об устойчивости движения [2, с. 120–189] и свёл решение проблемы различения центра и фокуса к вычислению так называемых фокусных величин. Открытый им метод побудил многих исследователей, в том числе и в нашей стране, заняться решением этой проблемы в конкретных случаях [3]–[4].

После введения понятия отражающей функции [5] появились новые возможности решения проблемы центра-фокуса с использованием того факта, что особая точка является центром тогда и только тогда, когда отражающая функция периодична в окрестности этой точки [6, с. 12–13].

Не приводя многочисленный список соответствующих трудов по теории отражающей функции, ограничимся упоминанием работ монографического характера [6]–[10].

В данной работе мы используем понятие обобщённого первого интеграла [11], тесно связанное с понятием отражающей функции и решением проблемы центра-фокуса.

2 Теоремы о нахождении центра-фокуса

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = R(\varphi, \rho), \quad (2.1)$$

где

$$R(\varphi, \rho) = \frac{b_1(\varphi)\rho + b_2(\varphi)\rho^2 + \dots + b_m(\varphi)\rho^m}{a_1(\varphi) + 2a_2(\varphi)\rho + \dots + na_n(\varphi)\rho^n},$$

φ и ρ – полярные координаты, функции $a_i(\varphi)$ и $b_i(\varphi)$ – 2π -периодичны. Начало координат $\rho = 0$ для этого уравнения является особой точкой, для которой возникает проблема центра-фокуса.

Теорема 2.1. Пусть функции

$$a_1(\varphi), a_2(\varphi), \dots, a_n(\varphi)$$

дифференцируемы и чётны, а функции

$$s_1(\varphi), s_2(\varphi), \dots, s_r(\varphi)$$

непрерывны, нечётны и 2π -периодичны. Пусть также имеет место тождество

$$\begin{aligned} & a'_1(\varphi) + a'_2(\varphi)\rho^2 + \dots + a'_n(\varphi)\rho^n + \\ & + b_1(\varphi)\rho + b_2(\varphi)\rho^2 + \dots + b_{2n}(\varphi)\rho^{2n} \equiv \\ & \equiv \sum_{i=1}^r (a_1(\varphi)\rho + a_2(\varphi)\rho^2 + \dots + a_n(\varphi)\rho^n)^i s_i(\varphi). \end{aligned}$$

Пусть далее существует постоянная $a_0 > 0$, для которой $|a_1(\varphi)| \geq a_0$.

Тогда особая точка $\rho = 0$ является центром для дифференциального уравнения (2.1).

Доказательство. В рассматриваемом случае для функции

$$U(\rho, \varphi) = a_1(\varphi)\rho + a_2(\varphi)\rho^2 + \dots + a_n(\varphi)\rho^n$$

в силу условий теоремы имеет место тождество

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial \rho} R(\rho, \varphi) \equiv \sum_{i=1}^r s_i(\varphi) U^i,$$

где $\sum_{i=1}^r s_i(\varphi) U^i$ – нечётная по переменной φ функция. Поэтому согласно теореме 1 из [5] функция $U(\rho, \varphi)$ является обобщённым первым интегралом дифференциального уравнения (2.1) и для неё выполнено тождество $U(\bar{\rho}, -\varphi) \equiv U(\rho, \varphi)$, где функция $\rho = \rho(\varphi)$ является решением дифференциального уравнения (2.1), таким, что $\rho(0) = \rho_0$, а $\bar{\rho} = \rho(-\varphi)$.

В силу теоремы об интегральной непрерывности [3, с. 22] для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всякого решения $\rho(\varphi, \rho_0)$ дифференциального уравнения (2.1) выполнено неравенство $|\rho(\varphi, \rho_0)| < \varepsilon$ при всех $|\rho_0| < \delta$, поскольку уравнение (2.1) имеет очевидное решение $\rho \equiv 0$. По доказанному выше для всех таких решений имеет место тождество

$$U(\rho(-\varphi, \rho_0), -\varphi) \equiv U(\rho(\varphi, \rho_0), \varphi).$$

Отсюда по теореме о неявно заданной функции [12, с. 445] мы делаем заключение о том, что $\rho(-\varphi, \rho_0) \equiv \rho(\varphi, \rho_0)$ и, в частности, $\rho(-\pi, \rho_0) \equiv \rho(\pi, \rho_0)$. Из этого заключения, в свою очередь, следует 2π -периодичность решения $\rho(\varphi, \rho_0)$ при всех достаточно малых ρ_0 . Это означает, что особая точка $\rho_0 = 0$ является центром для дифференциального уравнения (2.1). $\square$

Пусть $U(\rho, \varphi)$ – непрерывно дифференцируемая функция, причем $\frac{\partial U}{\partial \varphi}(\rho, \varphi) \neq 0$ при всех $\varphi \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $\rho \leq \rho_0$. Если ряды $\sum_{i=1}^{\infty} s_i(\varphi) U^i(\rho, \varphi)$ и $\sum_{i=1}^{\infty} m_i(\varphi) U^i(\rho, \varphi)$ сходятся равномерно при $\rho \leq \rho_0$, то согласно теореме 1 из [11] функция $U(\rho, \varphi)$ является обобщённым первым интегралом дифференциального уравнения

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{-\frac{\partial U}{\partial \varphi}(\rho, \varphi) + \frac{\partial U}{\partial \rho}(\rho, \varphi) \sum_{i=1}^{\infty} s_i(\varphi) U^i(\rho, \varphi)}{\frac{\partial U}{\partial \rho}(\rho, \varphi) \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} m_i(\varphi) U^i(\rho, \varphi) \right]}, \quad (2.2)$$

где $s_i(\varphi)$ – нечётные, а $m_i(\varphi)$ – чётные непрерывные 2π -периодические функции. При этом для отражающей функции $F(\rho, \varphi)$ уравнения (2.2) выполнено тождество

$$U(F(\rho, \varphi), -\varphi) = U(\rho, \varphi). \quad (2.3)$$

Используя его, приходим к следующей теореме.

Теорема 2.2. Пусть для дифференциального уравнения (2.2) выполнены следующие условия:

1) правая часть уравнения (2.2) 2π -периодична по φ ;

2) 2π -периодическая дифференцируемая функция $U(\rho, \varphi)$ такова, что ряды в правой части уравнения (2.2) сходятся равномерно при $|\rho| \leq \rho_0$;

3) при всех $|\rho| \leq \rho_0$ и всех $\varphi \in [-\pi; \pi]$ имеет место неравенство $\left| \frac{\partial U}{\partial \rho}(\rho, \varphi) \right| > 0$.

Тогда особая точка $\rho = 0$ дифференциального уравнения (2.2) представляет собой центр.

Доказательство. По свойству отражающей функции [7, с. 63] для каждого решения $\rho(\varphi)$ дифференциального уравнения (2.2) имеет место тождество $F(\rho(\varphi), \varphi) \equiv \rho(-\varphi)$.

Тогда в силу 2π -периодичности функции $U(\rho, \varphi)$ по переменной φ из тождества (2.3) получим соотношение

$$U(\rho(-\pi), \pi) = U(\rho(\pi), \pi).$$

Из последнего соотношения для любого продолжимого на отрезок $[-\pi; \pi]$ решения $\rho(\varphi)$, близкого к тривиальному решению $\rho \equiv 0$, следует равенство $\rho(-\pi) = \rho(\pi)$, откуда делаем вывод о замкнутости всех траекторий дифференциального уравнения (2.2), близких к особой точке $\rho = 0$. $\square$

Пусть теперь рассматривается дифференциальное уравнение, правая часть которого может быть представлена в виде отношения двух степенных рядов. Для того, чтобы мы имели возможность применить теорему 1.2 к этому уравнению, понадобится представить его в виде (2.2), если такое представление в принципе возможно.

Для этого должна быть найдена соответствующая функция $U(\rho, \varphi)$. Ограничимся тем случаем, когда она представляет собой многочлен по ρ заданной степени 2 с нулевым свободным членом, т. е. будем считать, что

$$U(\rho, \varphi) = a_1(\varphi)\rho + a_2(\varphi)\rho^2, \quad (2.4)$$

где $a_1(\varphi)$ и $a_2(\varphi)$ – непрерывно дифференцируемые 2π -периодические функции. Свободный член $a_0(\varphi)$ полагаем равным нулю с той целью, чтобы точка $\rho = 0$ плоскости (ρ, φ) являлась особой точкой (точкой покоя) дифференциального уравнения (2.2). Будем считать также, что имеет место тождество $m_1(\varphi) \equiv 1$, т. к. это не меняет характер чётности коэффициентов соответствующих рядов в правой части уравнения (2.2).

При описанных условиях знаменатель

$$Q(\rho, \varphi) = \frac{\partial U}{\partial \rho}(\rho, \varphi) \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} m_i(\varphi) U^i(\rho, \varphi) \right]$$

правой части дифференциального уравнения (2.2) имеет вид

$$\begin{aligned} Q(\rho, \varphi) &= b_0(\varphi) + b_1(\varphi)\rho + b_2(\varphi)\rho^2 + \dots = \\ &= (a_1 + 2a_2\rho) \left(1 + (a_1\rho + a_2\rho^2) + m_2(a_1\rho + a_2\rho^2)^2 + \dots \right) = \\ &= a_1 + (a_1^2 + 2a_2)\rho + \rho^2 Q_1(\rho, \varphi), \end{aligned}$$

где слагаемое $\rho^2 Q_1(\rho, \varphi)$ не содержит ρ в первой и в нулевой степени. Из получающихся таким образом соотношений

$$b_0(\varphi) = a_1(\varphi), \quad b_1(\varphi) = a_1^2(\varphi) + 2a_2(\varphi) \quad (2.5)$$

однозначно определим функцию (2.4) и затем установим, удовлетворяет ли заданное уравнение теореме 2.2 или нет.

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\varphi} &= \quad (2.6) \\ &= \frac{3\sin\varphi + \rho^2(\cos\varphi - \sin^2\varphi) + (3 - \rho\sin\varphi)^9 \rho^9 \sin 3\varphi}{3 + \rho(9 - 2\sin\varphi) + 3\rho^2 \sin\varphi + 2\rho^3 \sin^2\varphi}. \end{aligned}$$

Формулы (2.5) позволяют найти $a_1 = 3$, $a_2 = \sin\varphi$ и функцию $U(\rho, \varphi) = 3\rho - \rho^2 \sin\varphi$.

Далее легко проверяется, что числитель дифференциального уравнения (2.6) можно записать в виде, указанном в дифференциальном уравнении (2.2). Поэтому, согласно теореме 1.2, особая точка $\rho = 0$ дифференциального уравнения (2.6) является центром.

Аналогичные рассмотрения можно проводить и в том случае, когда функция $U(\rho, \varphi)$ представляет собой многочлен произвольного заданного порядка.

Заключение

В работе установлены достаточные условия наличия центра для дифференциального уравнения, правая часть которого представляет собой отношение двух рядов по полярной координате ρ

с 2π -периодическими коэффициентами по полярному углу φ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Пуанкаре, А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями / А. Пуанкаре. – М.–Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1947.
2. Ляпунов, А.М. Собрание сочинений. Т. 2 / А. М. Ляпунов. – Москва: Издательство АН СССР, 1956.
3. Немыцкий, В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений / В. В. Немыцкий, В.В. Степанов; изд. 4-е. – Москва: ЛЕНАНД, 2017. – 552 с.
4. Амелькин, В.В. Нелинейные колебания в динамических системах второго порядка / В.В. Амелькин, Н.А. Лукашевич, А.П. Садовский. – Минск: Высшая школа, 1982.
5. Мироненко, В.И. Отражающая функция и классификация периодических дифференциальных систем / В.И. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 1984. – Т. XVII, № 9. – С. 1603–1610.
6. Мироненко, В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И. Мироненко. – Минск: Университетское, 1986.
7. Мироненко, В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В.И. Мироненко. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2004.
8. Мусафиров, Э.И. Временные симметрии дифференциальных систем / Э. И. Мусафиров. – Пинск: ПолесГУ, 2009.
9. Мироненко, В.В. Преобразования дифференциальных систем, не меняющие симметрий времени / В.В. Мироненко. – Saarbrücken, Germany: LAP Lambert Academic Publishing GmbH & Co, 2012.
10. Zhengxin, Zhou. The Theory of Reflecting Function of Differential Equations and Applications / Zhou Zhengxin. – Beijing: China Machine Press, 2014.
11. Мироненко, В.И. Отражающая функция и обобщение понятия первого интеграла / В.И. Мироненко, В.В. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 2024. – Т. 60, № 1. – С. 12–22.
12. Зорич, В.А. Математический анализ. Часть I / В.А. Зорич. – Москва: МЦНМО, 2019.

Поступила в редакцию 24.03.2025.

Информация об авторах

Майоровская Светлана Владимировна – к.ф.-м.н., доцент
Мироненко Владимир Владимирович – к.ф.-м.н., доцент

О $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -КРИТИЧЕСКИХ ФОРМАЦИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

И.Н. Сафонова, В.В. Скрундь

Белорусский государственный университет, Минск

ON $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -CRITICAL FORMATIONS OF FINITE GROUPS

I.N. Safonova, V.V. Skrundz

Belarusian State University, Minsk

Аннотация. Изучаются $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -критические формации или, иначе, минимальные τ -замкнутые σ -локальные не $\mathfrak{H}$ -формации конечных групп, где $\mathfrak{H}$ – некоторый класс групп, σ – разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, τ – подгрупповой функтор. Получен критерий для минимальных τ -замкнутых σ -локальных формаций. Дано описание σ -локальных формаций такого типа для формаций всех Π -групп, всех σ -разрешимых и всех σ -нильпотентных Π -групп, где $\emptyset \neq \Pi \subseteq \sigma$. В частности, получено описание минимальных τ -замкнутых σ -локальных не σ -разрешимых и не σ -нильпотентных формаций конечных групп.

Ключевые слова: конечная группа, формационная σ -функция, σ -локальная формация, подгрупповой функтор, критическая функторно замкнутая σ -локальная формация, σ -разрешимая группа.

Для цитирования: Сафонова, И.Н. О $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -критических формациях конечных групп / И.Н. Сафонова, В.В. Скрундь // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 99–111. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_99. – EDN: BFOPLO

Abstract. We study $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -critical formations or, in other words, minimal τ -closed σ -local non- $\mathfrak{H}$ -formations of finite groups, where $\mathfrak{H}$ is some class of groups, σ is a partition of the set of all prime numbers $\mathbb{P}$, and τ is a subgroup functor. A criterion for minimal τ -closed σ -local formations is obtained. A description of σ -local formations of this type is given for the formations of all Π -groups, all σ -soluble and all σ -nilpotent Π -groups, where $\emptyset \neq \Pi \subseteq \sigma$. In particular, a description of minimal τ -closed σ -local non- σ -soluble and non- σ -nilpotent formations of finite groups is obtained.

Keywords: finite group, formation σ -function, σ -local formation, subgroup functor, critical functor-closed σ -local formation, σ -soluble group.

For citation: Safonova, I.N. On $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -critical formations of finite groups / I.N. Safonova, V.V. Skrundz // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 3 (64). – P. 99–111. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_99 (in Russian). – EDN: BFOPLO

Введение

В теории локальных формаций в вопросах изучения внутренней структуры и классификации формаций важную роль играют так называемые минимальные локальные не $\mathfrak{H}$ -формации [1] или $\mathfrak{H}_\tau$ -критические формации [2], т. е. такие локальные формации $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, все собственные локальные подформации которых содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$.

Общая проблема изучения критических формаций была поставлена Л.А. Шеметковым [1] на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп. Решению этой задачи для локальных формаций был посвящен цикл работ А.Н. Скибы 1980–1993 гг., который завершился построением теории критических локальных формаций, наиболее

общим результатом которой стало описание минимальных локальных не $\mathfrak{H}$ -формаций для случая, когда $\mathfrak{H}$ – произвольная формация классического типа [3], т. е. формация, имеющая такой локальный экран, все неабелевы значения которого локальны. Результаты теории минимальных локальных не $\mathfrak{H}$ -формаций широко использовались в вопросах изучения локальных формаций с заданными решетками подформаций, классификации локальных формаций, а также при изучении несократимых факторизаций локальных формаций [4], [5].

Развитие теории σ -локальных формаций привело к необходимости изучения и классификации критических σ -локальных формаций. При этом, следуя [1], [2], минимальной σ -локальной

не $\mathfrak{H}$ -формацией или $\mathfrak{H}_\sigma$ -критической формацией [6] мы называем σ -локальную формацию $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, все собственные σ -локальные подформации которой содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$. Необходимо отметить, что задача Л.А. Шеметкова о классификации критических формаций в классе σ -локальных формаций была решена в работах [6], [7] для произвольной σ -локальной формации $\mathfrak{H}$ классического типа.

Изучение $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -критических формаций начато авторами в [8]. В данной работе мы продолжаем изучение свойств формаций такого типа и первым, из основных результатов работы, является доказанный нами критерий для минимальных τ -замкнутых σ -локальных формаций. Кроме того, в работе дано описание σ -локальных формаций такого типа для формаций всех Π -групп, всех σ -разрешимых и всех σ -нильпотентных Π -групп, где $\emptyset \neq \Pi \subseteq \sigma$. В частности, получено описание минимальных τ -замкнутых σ -локальных не σ -разрешимых и не σ -нильпотентных формаций конечных групп.

В качестве следствий полученных результатов в классическом случае, т. е. когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$, получено описание минимальных локальных не $\mathfrak{H}$ -формаций, где $\mathfrak{H}$ – формация всех π -групп, формация всех разрешимых и nilпотентных π -групп, где $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, а также формации всех разрешимых и nilпотентных групп.

1 Обозначения и определения

Основные определения, обозначения и общие свойства σ -локальных формаций представлены в работах [9]–[17]. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$. Если n целое число, G – группа и $\mathfrak{F}$ – класс групп, то $\sigma(n)$ обозначает множество $\{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$; $\sigma(G) = \sigma(|G|)$; $\sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma(G)$.

Группа G называется [9, с. 2]: σ -примарной, если G является σ_i -группой для некоторого $i \in I$; σ -нильпотентной, если G – прямое произведение σ -примарных групп; σ -разрешимой, если каждый главный фактор G σ -примарен. Класс всех σ -разрешимых групп обозначают через $\mathfrak{S}_\sigma$, а через $\mathfrak{N}_\sigma$ обозначают класс всех σ -нильпотентных групп.

Пусть $\emptyset \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда $\Pi' = \sigma \setminus \Pi$. Группу G называют Π -группой, если $\sigma(G) \subseteq \Pi$. Через $\mathfrak{G}_\Pi$ обозначают класс всех Π -групп, а через $\mathfrak{S}_\Pi$ (соответственно, $\mathfrak{N}_\Pi$) обозначают класс всех σ -разрешимых (соответственно σ -нильпотентных)

Π -групп. В частности, если $\Pi = \{\sigma_i\}$, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – класс всех σ_i -групп, $\mathfrak{G}_{\sigma'_i}$ – класс всех σ'_i -групп, $\mathfrak{S}_{\sigma_i} = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – класс всех σ -разрешимых σ_i -групп, $\mathfrak{S}_{\sigma'_i}$ – класс всех σ -разрешимых σ'_i -групп и $\mathfrak{N}_{\sigma_i}$ – класс всех σ -нильпотентных σ_i -групп, $\mathfrak{N}_{\sigma'_i}$ – класс всех σ -нильпотентных σ'_i -групп.

Функция f вида $f: \sigma \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ называется *формационной σ -функцией* [10]. Для всякой формационной σ -функции f класс $LF_\sigma(f)$ определяется следующим образом:

$$LF_\sigma(f) = (G \mid G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и}$$

$$G / O_{\sigma'_i, \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G)).$$

Если для некоторой формационной σ -функции f имеет место $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, то говорят, что формация $\mathfrak{F}$ является σ -локальной [10], а f является σ -локальным определением $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп и каждой группе $G \in \mathfrak{X}$ сопоставлена некоторая система ее подгрупп $\tau(G)$. Тогда τ называется *подгрупповым функтором* (в смысле А.Н. Скибы [5, с. 16]) на $\mathfrak{X}$, если выполняются условия: (1) $G \in \tau(G)$ для каждой группы $G \in \mathfrak{X}$; (2) для любого эпиморфизма $\varphi: A \rightarrow B$, где $A, B \in \mathfrak{X}$, и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеем $H^\varphi \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$. В частности, если $\mathfrak{X}$ – класс всех групп, то подгрупповой функтор τ на $\mathfrak{X}$ называют просто подгрупповым функтором.

Подгрупповой функтор τ называют [5, с. 16]: *замкнутым*, если для любых двух групп G и $H \in \tau(G)$ имеет место $\tau(H) \subseteq \tau(G)$; *тривиальным*, если $\tau(G) = \{G\}$ для любой группы G ; *единичным*, если $\tau(G) = s(G)$ множество всех подгрупп группы G .

На множестве всех подгрупповых функторов частичный порядок $\leq$ вводят [5, с. 19] полагая, что $\tau_1 \leq \tau_2$, если $\tau_1(G) \subseteq \tau_2(G)$ для любой группы G . Для любой совокупности подгрупповых функторов $\{\tau_j \mid j \in J\}$ определяют их пересечение $\tau = \bigcap_{j \in J} \tau_j$ следующим образом: $\tau(G) = \bigcap_{j \in J} \tau_j(G)$ для любых групп G . Если τ – произвольный подгрупповой функтор, то $\bar{\tau}$ – пересечение всех замкнутых подгрупповых функторов τ_i , для которых $\tau \leq \tau_i$, называют [5, с. 20] *замыканием функтора τ* .

Напомним также [5, с. 17], что через s_n обозначают подгрупповой функтор, выделяющий в каждой группе G множество $s_n(G)$ всех нормальных подгрупп группы G .

Подгруппу $A \in \tau(G)$ называют τ -подгруппой группы G .

Пусть τ – подгрупповой функтор. Формация $\mathfrak{F}$ называется τ -замкнутой [5, с. 23], если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $G \in \mathfrak{F}$. В частности, формация $\mathfrak{F}$ называется: *наследственной*, если она s -замкнута; *нормально наследственной*, если она s_n -замкнута.

Совокупность всех τ -замкнутых σ -локальных формаций будем обозначать через I_σ^τ . Формации из I_σ^τ мы называем I_σ^τ -формациями. Для любого набора групп $\mathfrak{X}$ символ $I_\sigma^\tau \text{form} \mathfrak{X}$ обозначает I_σ^τ -формацию порожденную $\mathfrak{X}$, т. е. пересечение всех τ -замкнутых σ -локальных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X} = \{G\}$ для некоторой группы G , то $I_\sigma^\tau \text{form} G$ называют *однопорожденной τ -замкнутой σ -локальной формацией*. Напомним также, что в классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$, однопорожденную τ -замкнутую локальную формацию, порожденную группой G , обозначают через $\tau^1 \text{form} G$, а τ -замкнутую формацию, порожденную набором групп $\mathfrak{X}$ обозначают символом $\tau \text{form} \mathfrak{X}$.

Если f – формационная σ -функция, то символом $\text{Supp}(f)$ обозначают *носитель f* , т. е. множество всех σ_i таких, что $f(\sigma_i) \neq \emptyset$. Формационная σ -функция f называется: τ -значной, если $f(\sigma_i)$ – τ -замкнутая σ -локальная формация для каждого $\sigma_i \in \text{Supp}(f)$; *внутренней*, если $f(\sigma_i) \subseteq LF_\sigma(f)$ для всех i ; *полной*, если $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$ для всех i . Если F – полная внутренняя формационная σ -функция и $\mathfrak{F} = LF_\sigma(F)$, то F называют *каноническим σ -локальным определением $\mathfrak{F}$* .

Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ – некоторый набор τ -значных формационных σ -функций. Мы используем символ $\bigcap_{j \in J} f_j$ для обозначения *формационной σ -функции h* такой, что $h(\sigma_i) = \bigcap_{j \in J} f_j(\sigma_i)$, в частности, $h(\sigma_i) = (f_1 \cap f_2)(\sigma_i) = f_1(\sigma_i) \cap f_2(\sigma_i)$ для всех i .

Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ множество всех τ -значных σ -локальных определений формации $\mathfrak{F}$. Тогда мы говорим, что $f = \bigcap_{j \in J} f_j$ является *наименьшим τ -значным σ -локальным определением $\mathfrak{F}$* .

Для произвольного набора групп $\mathfrak{X}$ и любого $\sigma_i \in \sigma$ символом $\mathfrak{X}(\sigma_i)$ [12, с. 962] обозначают класс групп, определенный следующим образом: $\mathfrak{X}(\sigma_i) = (G / O_{\sigma_i'}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$, если $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{X}(\sigma_i) = \emptyset$, если $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{X})$.

Пусть $\mathfrak{H}$ – некоторый класс групп. Формацию $\mathfrak{F}$ называют *минимальной τ -замкнутой не $\mathfrak{H}$ -формацией* или $\mathfrak{H}^\tau$ -критической формацией, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные τ -замкнутые подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в $\mathfrak{H}$. Следуя [1], [2] τ -замкнутую σ -локальную формацию $\mathfrak{F}$ мы называем *минимальной τ -замкнутой σ -локальной не $\mathfrak{H}$ -формацией* или $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -критической формацией, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все ее собственные τ -замкнутые σ -локальные подформации содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – τ -замкнутая σ -локальная формация. Формацию $\mathfrak{F}$ мы называем *неприводимой τ -замкнутой σ -локальной формацией* (или I_σ^τ -неприводимой формацией), если $\mathfrak{F} \neq I_\sigma^\tau \text{form}(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{X}_i)$, где $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ – набор всех собственных τ -замкнутых σ -локальных подформаций из $\mathfrak{F}$. Если же найдутся такие собственные τ -замкнутые σ -локальные подформации $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{F} = I_\sigma^\tau \text{form}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{H})$, то формацию $\mathfrak{F}$ мы называем *приводимой τ -замкнутой σ -локальной* (или I_σ^τ -приводимой) *формацией*.

2 Вспомогательные результаты

Для доказательства основных результатов нам понадобятся некоторые известные факты теории σ -локальных формаций, которые мы сформулируем в виде следующих лемм.

Лемма 2.1 является частным случаем теоремы 1.1 работы [14].

Лемма 2.1 [14]. Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой набор групп, $\mathfrak{F} = I_\sigma^\tau \text{form} \mathfrak{X} = LF_\sigma(f)$, где f – наименьшее τ -значное σ -локальное определение $\mathfrak{F}$. Тогда верны следующие утверждения:

- (1) $\sigma(\mathfrak{X}) = \sigma(\mathfrak{F})$;
- (2) $f(\sigma_i) = \tau \text{form}(\mathfrak{X}(\sigma_i)) = \tau \text{form}(\mathfrak{F}(\sigma_i))$ для всех i ;
- (3) если h – произвольное τ -значное σ -локальное определение $\mathfrak{F}$, то для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X})$ имеем

$$f(\sigma_i) = \tau \text{form}(A \mid A \in \mathfrak{F} \cap h(\sigma_i), O_{\sigma_i'}(A) = 1).$$

Лемма 2.2 [12, лемма 2.1]. Пусть f и h – формационные σ -функции и пусть $\Pi = \text{Supp}(f)$. Допустим, что $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f) = LF_\sigma(h)$. Тогда:

- (1) $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$;
- (2) $\mathfrak{F} = (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i'} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{G}_{\Pi}$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ является насыщенной формацией.
- (3) Если каждая группа из $\mathfrak{F}$ является σ -разрешимой, то $\mathfrak{F} = (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i'} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{G}_{\Pi}$.

(4) Если $\sigma_i \in \Pi$, то

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}.$$

(5) $\mathfrak{F} = LF_{\sigma}(F)$, где F – единственная формационная σ -функция, такая что $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} F(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $F(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Более того, $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$ для всех i .

Лемма 2.3 [14, лемма 3.2]. Пусть $\sigma_i \in \sigma$, $1 \neq P$ – σ_i -группа, A – группа с $O_{\sigma_i}(A) = 1$ и $G = P \wr A = K \rtimes A$ – регулярное сплетение групп P и A , где K – база сплетения G . Тогда $O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G) = K$.

Лемма 2.4 [13, лемма 11]. Если $\mathfrak{F} = LF_{\sigma}(f)$ и $G / O_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ для некоторого $\sigma_i \in \sigma(G)$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Следуя [18], на множестве всех формационных σ -функций определяют частичный порядок $\leq$ следующим образом: пусть f_1 и f_2 – формационные σ -функции, тогда $f_1 \leq f_2$, если $f_1(\sigma_i) \subseteq f_2(\sigma_i)$ для любого $\sigma_i \in \sigma$.

Лемма 2.5 является частным случаем следствия 3.1 работы [14].

Лемма 2.5 [14]. Пусть $\mathfrak{F}_j = LF_{\sigma}(f_j)$, где f_j – наименьшее τ -значное σ -локальное определение формации $\mathfrak{F}_j$, $j = 1, 2$. Тогда в том и только в том случае $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $f_1 \leq f_2$.

Лемма 2.6 [7, лемма 2.1]. Пусть $\emptyset \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда класс $\mathfrak{G}_{\Pi}$ всех Π -групп и класс $\mathfrak{N}_{\Pi}$ всех σ -нильпотентных Π -групп являются σ -локальными формациями и справедливы следующие утверждения:

(1) $\mathfrak{G}_{\Pi} = LF_{\sigma}(g)$, где g – каноническое σ -локальное определение формации $\mathfrak{G}_{\Pi}$. При этом, $g(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\Pi}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $g(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$;

(2) $\mathfrak{N}_{\Pi} = LF_{\sigma}(n) = LF_{\sigma}(N)$, где n и N , соответственно, наименьшее и каноническое σ -локальное определения формации $\mathfrak{N}_{\Pi}$. При этом, $n(\sigma_i) = (1)$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $n(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$, $N(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $N(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$.

Лемма 2.7 [5, лемма 2.1.5]. Пусть A – монолитическая группа с монолитом $R \not\subseteq \Phi(A)$. Тогда формация $\mathfrak{F} = \tau \text{form } A$ τ -неприводима и в ней имеется единственная максимальная τ -замкнутая подформация $\mathfrak{M} = \tau \text{form}((A/R) \cup \mathfrak{X})$, где $\mathfrak{X}$ – множество всех собственных τ -подгрупп группы A .

3 Критерий для $\mathfrak{H}_{\sigma}^{\tau}$ -критических формаций

Основным результатом раздела 3 является следующая теорема, дающая критерий для $\mathfrak{H}_{\sigma}^{\tau}$ -критических формаций.

Теорема 3.1. Пусть $\mathfrak{H} = LF_{\sigma}(f)$, $\mathfrak{F} = LF_{\sigma}(f)$, где H – каноническое σ -локальное определение формации $\mathfrak{H}$, f – наименьшее τ -значное σ -локальное определение формации $\mathfrak{F}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной τ -замкнутой σ -локальной не $\mathfrak{H}$ -формацией, когда $\mathfrak{F} = l_{\sigma}^{\tau} \text{form } G$, где G – такая монолитическая $\bar{\tau}$ -минимальная не $\mathfrak{H}$ -группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что для всех $\sigma_i \in \sigma(P)$ формация $f(\sigma_i)$ является минимальной τ -замкнутой не $H(\sigma_i)$ -формацией.

Доказательство. Необходимость. Обозначим через G – группу минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G – монолитическая $\bar{\tau}$ -минимальная не $\mathfrak{H}$ -группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$. Поскольку при этом $l_{\sigma}^{\tau} \text{form } G \subseteq \mathfrak{F}$ и все собственные τ -замкнутые σ -локальные подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} = l_{\sigma}^{\tau} \text{form } G$.

Пусть $\sigma_i \in \sigma(P)$. Предположим, что $f(\sigma_i) = (1)$. Тогда в силу леммы 2.1 (2) имеем

$$f(\sigma_i) = \tau \text{form}(G / O_{\sigma_i, \sigma_i}(G)) = (1).$$

Поэтому $O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) = G$. Значит, $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Так как G – монолитическая группа и $\sigma_i \in \sigma(P)$, то $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}$, т. е. G является σ_i -группой. Поскольку при этом $G \notin \mathfrak{H}$, то $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$ и $H(\sigma_i) = \emptyset$ ввиду леммы 2.2(5). Но тогда $f(\sigma_i) = (1)$ – минимальная τ -замкнутая не $H(\sigma_i)$ -формация.

Пусть теперь $f(\sigma_i) \neq (1)$. По лемме 2.1 (2) имеет место равенство $f(\sigma_i) = \tau \text{form}(G / O_{\sigma_i, \sigma_i}(G))$.

Пусть $\mathfrak{L}$ – произвольная собственная τ -замкнутая подформация из $f(\sigma_i)$. Допустим, что $\mathfrak{L} \not\subseteq H(\sigma_i)$ и обозначим через K группу минимального порядка из $\mathfrak{L} \setminus H(\sigma_i)$. Тогда K – монолитическая $\bar{\tau}$ -минимальная не $H(\sigma_i)$ -группа с монолитом $K^{H(\sigma_i)}$. Поскольку по лемме 2.2 (5) имеет место $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} H(\sigma_i)$, то $O_{\sigma_i}(K) = 1$.

Пусть S – некоторая неединичная σ_i -группа, $M = S \wr K = T \rtimes K$ – регулярное сплетение групп S и K , где T – база сплетения M . Тогда $T = O_{\sigma_i}(M) = O_{\sigma_i, \sigma_i}(M)$ по лемме 2.3. Так как $K \in \mathfrak{L} \subseteq f(\sigma_i)$, то $M = T \rtimes K \in \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$. Но в силу леммы 2.2 (4) имеет место включение $\mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому $l_{\sigma}^{\tau} \text{form } M \subseteq \mathfrak{F}$.

Допустим теперь, что $l_\sigma^\tau \text{form} M = \mathfrak{F}$. Тогда, согласно лемме 2.1 (2), имеем

$$\begin{aligned} f(\sigma_i) &= \tau \text{form}(M / O_{\sigma_i, \sigma_i}(M)) = \\ &= \tau \text{form}(M / T) = \tau \text{form} K \subseteq \mathcal{L} \subset f(\sigma_i). \end{aligned}$$

Получили противоречие. Следовательно, $l_\sigma^\tau \text{form} M \subset \mathfrak{F}$. Значит, $l_\sigma^\tau \text{form} M \subseteq \mathfrak{H}$. Но тогда по лемме 2.1 (3) имеем $M / O_{\sigma_i, \sigma_i}(M) = M / T \simeq K \in H(\sigma_i)$. Снова получили противоречие. Поэтому $\mathcal{L} \subseteq H(\sigma_i)$. Таким образом, всякая собственная τ -замкнутая подформация из $f(\sigma_i)$ содержится в $H(\sigma_i)$.

Предположим, что $f(\sigma_i) \subseteq H(\sigma_i)$. Рассмотрим прежде случай, когда P является σ -примарной группой. Тогда поскольку $\sigma_i \in \sigma(P)$, то P – σ_i -группа. Значит, $O_{\sigma_i}(G) = 1$ и $O_{\sigma_i}(G) = O_{\sigma_i, \sigma_i}(G)$. По лемме 2.1 (2) имеем $G / O_{\sigma_i}(G) = G / O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i)$. Так как по предположению $f(\sigma_i) \subseteq H(\sigma_i)$, то $G / O_{\sigma_i}(G) \in H(\sigma_i)$. Но тогда $G \in \mathfrak{H}$ в силу леммы 2.4. Последнее противоречит выбору группы G .

Значит, P не является σ -примарной группой. Поскольку при этом P – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $\sigma_i \in \sigma(P)$, то $O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) = 1$. Применяя теперь лемму 2.1 (2) имеем

$$G \simeq G / O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \subseteq H(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{H}.$$

Полученное противоречие показывает, что $f(\sigma_i) \not\subseteq H(\sigma_i)$. Таким образом, $f(\sigma_i)$ является минимальной τ -замкнутой не $H(\sigma_i)$ -формацией.

Достаточность. Пусть выполняются условия теоремы. Понятно, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $\mathcal{L}$ – произвольная собственная τ -замкнутая σ -локальная подформация из $\mathfrak{F}$, l – наименьшее τ -значное σ -локальное определение $\mathcal{L}$. И пусть $\sigma_i \in \sigma(G) \setminus \sigma(P)$. Тогда $P \subseteq O_{\sigma_i, \sigma_i}(G)$ и $O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) / P = O_{\sigma_i, \sigma_i}(G / P)$. Поскольку $P = G^\mathfrak{H}$, то

$$\begin{aligned} G / O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) &\simeq (G / P) / (O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) / P) = \\ &= (G / P) / O_{\sigma_i, \sigma_i}(G / P) \in H(\sigma_i). \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} f(\sigma_i) &\subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i) = \\ &= \mathfrak{G}_{\sigma_i} \tau \text{form}(G / O_{\sigma_i, \sigma_i}(G)) \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} H(\sigma_i) = H(\sigma_i). \end{aligned}$$

Кроме того, ввиду леммы 2.5 имеет место включение $l(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i)$. Следовательно, $l(\sigma_i) \subseteq H(\sigma_i)$. Пусть $\sigma_i \in \sigma(P)$. Допустим, что $l(\sigma_i) = f(\sigma_i)$. Если при этом P – σ_i -группа, то $O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G)$ и поскольку

$$G / O_{\sigma_i}(G) = G / O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) = l(\sigma_i) \subseteq \mathcal{L},$$

то $G \in \mathcal{L}$ по лемме 2.4. Но тогда имеет место включение $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \text{form} G \subseteq \mathcal{L} \subset \mathfrak{F}$. Противоречие. Поэтому P не является σ -примарной группой. Так как P – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , то $O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) = 1$. Но тогда $G \simeq G / O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) = l(\sigma_i) \subseteq \mathcal{L}$. Снова получаем, что $G \in \mathcal{L}$, что невозможно. Таким образом, $l(\sigma_i) \subset f(\sigma_i)$. Поскольку по условию теоремы формация $f(\sigma_i)$ является $(H(\sigma_i))_\tau$ -критической, то $l(\sigma_i) \subseteq H(\sigma_i)$. В силу леммы 2.1 (1) имеет место равенство $\sigma(G) = \sigma(\mathfrak{F})$. Следовательно, $\mathcal{L} \subseteq \mathfrak{H}$. Но тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -критическая формация. $\square$

Если τ – тривиальный подгрупповой функтор, из теоремы 3.1 получаем

Следствие 3.2 [7, теорема 3.1]. Пусть $\mathfrak{H} = LF_\sigma(H)$, $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, где H – каноническое σ -локальное определение формации $\mathfrak{H}$, f – наименьшее σ -локальное определение формации $\mathfrak{F}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ -локальной не $\mathfrak{H}$ -формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \text{form} G$, где G – такая группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^\mathfrak{H}$, что для всех $\sigma_i \in \sigma(P)$ формация $f(\sigma_i)$ является $H(\sigma_i)$ -критической.

В случае, когда $\tau = s$ – единичный подгрупповой функтор, имеем

Следствие 3.3. Пусть $\mathfrak{H} = LF_\sigma(H)$, $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, где H – каноническое σ -локальное определение формации $\mathfrak{H}$, f – наименьшее наследственное σ -локальное определение формации $\mathfrak{F}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной наследственной σ -локальной не $\mathfrak{H}$ -формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma^s \text{form} G$, где G – такая монолитическая минимальная не $\mathfrak{H}$ -группа с монолитом $P = G^\mathfrak{H}$, что для всех $\sigma_i \in \sigma(P)$ формация $f(\sigma_i)$ является минимальной наследственной не $H(\sigma_i)$ -формацией.

Если $\tau = s_n$, то из теоремы 3.1 получаем

Следствие 3.4. Пусть $\mathfrak{H} = LF_\sigma(H)$, $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, где H – каноническое σ -локальное определение формации $\mathfrak{H}$, f – наименьшее нормально наследственное σ -локальное определение формации $\mathfrak{F}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной нормально наследственной σ -локальной не $\mathfrak{H}$ -формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma^{s_n} \text{form} G$, где G – такая монолитическая минимальная не $\mathfrak{H}$ -группа с монолитом $P = G^\mathfrak{H}$, что для всех $\sigma_i \in \sigma(P)$ формация $f(\sigma_i)$ является минимальной нормально наследственной не $H(\sigma_i)$ -формацией.

В классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$ из теоремы 3.1 получаем следующий известный результат.

Следствие 3.5 [5, следствие 2.1.2]. Пусть h – канонический экран формации $\mathfrak{H}$, f – минимальный τ -значный экран формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной τ -замкнутой локальной не $\mathfrak{H}$ -формацией в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F} = \tau^1 \text{form} G$, где G – такая монолитическая $\bar{\tau}$ -минимальная не $\mathfrak{H}$ -группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{H}}$, что $f(\sigma_i)$ – минимальная τ -замкнутая не $h(p)$ -формация для всех $p \in \pi(R)$.

Если при этом τ – тривиальный подгрупповой функтор, из теоремы 3.1 вытекает следующий известный результат.

Следствие 3.6 [4, следствие 18.5]. Пусть h – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{H}$, f – минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной локальной не $\mathfrak{H}$ -формацией в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F} = l \text{form} G$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $G^{\mathfrak{H}}$, что $f(p)$ – минимальная не $h(p)$ -формация для всякого $p \in \pi(G^{\mathfrak{H}})$.

Доказанный критерий позволяет получить описание минимальных τ -замкнутых σ -локальных не $\mathfrak{H}$ -формаций для ряда конкретных формаций $\mathfrak{H}$. В качестве приложения теоремы 3.1 приведем некоторые примеры описаний $\mathfrak{H}_\sigma^{\tau}$ -критических формаций для заданных формаций $\mathfrak{H}$.

Ввиду [5, замечание 2.2.12], если формация $\mathfrak{H}$ является τ -замкнутой, то в теореме 3.1 условие $\bar{\tau}$ -минимальности группы G , порождающей формацию $\mathfrak{F}$, может быть заменено на условие τ -минимальности группы G .

4 Минимальные τ -замкнутые σ -локальные не $\mathfrak{G}_\Pi$ -формации

Пусть $\emptyset \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда через $\mathfrak{G}_\Pi$ обозначают формацию всех Π -групп. Ввиду леммы 2.6 формация $\mathfrak{G}_\Pi$ σ -локальна. Понятно также, что формация $\mathfrak{G}_\Pi$ является наследственной, а значит τ -замкнутой для любого подгруппового функтора τ .

Теорема 4.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – τ -замкнутая σ -локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{G}_\Pi$, где $\emptyset \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной τ -замкнутой σ -локальной не $\mathfrak{G}_\Pi$ -формацией, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\sigma_i} = l_\sigma^{\tau} \text{form} G$, где G – такая простая σ_i -группа, что $\sigma_i \notin \Pi$ и $\tau(G) = \{1, G\}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ – минимальная τ -замкнутая σ -локальная не $\mathfrak{G}_\Pi$ -формация, f – наименьшее τ -значное σ -локальное определение формации $\mathfrak{F}$ и H – каноническое σ -локальное определение формации $\mathfrak{G}_\Pi$. Тогда ввиду теоремы 3.1 $\mathfrak{F} = l_\sigma^{\tau} \text{form} G$, где G – такая монолитическая τ -минимальная не $\mathfrak{G}_\Pi$ -группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{G}_\Pi}$, что формация $f(\sigma_i)$ является $(H(\sigma_i))_\tau$ -критической для всех $\sigma_i \in \sigma(R)$.

Покажем, что выполняются условия теоремы. По лемме 2.1 (2) имеем $f(\sigma_i) = \tau \text{form}(G / O_{\sigma_i, \sigma_i}(G))$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$ и $f(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \notin \sigma(G)$. Ввиду леммы 2.6(1) $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_\Pi$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $H(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$.

Допустим, что группа R является σ -примарной и пусть $\sigma_i \in \sigma(R)$. Тогда R – σ_i -группа. Рассмотрим прежде случай, когда $\sigma_i \notin \Pi$. Тогда поскольку R – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , то $O_{\sigma_i}(G) = 1$. Следовательно, $O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G)$. Ввиду того, что $f(\sigma_i) = \tau \text{form}(G / O_{\sigma_i, \sigma_i}(G))$ – минимальная τ -замкнутая не $H(\sigma_i)$ -формация и $H(\sigma_i) = \emptyset$, имеем $f(\sigma_i) = \tau \text{form}(G / O_{\sigma_i, \sigma_i}(G)) = (1)$. Значит, $G = O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G)$. Таким образом, G – σ_i -группа, $\sigma_i \notin \Pi$. Поскольку $G / R \in \mathfrak{G}_\Pi$ и при этом G – Π' -группа, то $G = R$. Но G – монолитическая группа. Следовательно, $G = R$ – простая σ_i -группа, где $\sigma_i \notin \Pi$. Поскольку $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – наследственная формация, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$. В силу леммы 2.2 (4) имеем $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Поэтому $\mathfrak{F} = l_\sigma^{\tau} \text{form} G = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Кроме того, поскольку G – $\bar{\tau}$ -минимальная не $\mathfrak{G}_\Pi$ -группа, то $\tau(G) = \{1, G\}$. Таким образом, условия теоремы выполняются.

Допустим теперь, что $\sigma_i \in \Pi$. Тогда $R \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ и $G / R \in \mathfrak{G}_\Pi$. Следовательно, $G^{\mathfrak{G}_\Pi} \subseteq R$ и $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_\Pi = \mathfrak{G}_\Pi$. Противоречие. Поэтому данный случай невозможен.

Пусть теперь R не является σ -примарной группой. Тогда ввиду монолитичности группы G для любого $\sigma_i \in \sigma(R)$ имеет место $O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) = 1$. Допустим, что найдется $\sigma_i \in \sigma(R) \setminus \Pi$. Тогда поскольку $f(\sigma_i) = \tau \text{form}(G / O_{\sigma_i, \sigma_i}(G)) = \tau \text{form} G$ – минимальная τ -замкнутая не $H(\sigma_i)$ -формация и $H(\sigma_i) = \emptyset$, имеем $\tau \text{form} G = (1)$. Последнее влечет

$G \simeq 1 \in \mathfrak{G}_\Pi$. Противоречие. Поэтому $\sigma(R) \subseteq \Pi$. Но тогда $R \in \mathfrak{G}_\Pi$ и, кроме того, $G/R \in \mathfrak{G}_\Pi$. Следовательно, $G \in \mathfrak{G}_\Pi \mathfrak{G}_\Pi = \mathfrak{G}_\Pi$. Противоречие. Поэтому данный случай также невозможен.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\sigma_i} = l_\sigma^s \text{form} G$, где группа G удовлетворяет условию теоремы. Тогда поскольку $\sigma_i \notin \Pi$, то $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{G}_\Pi$. Так как в силу [12, пример 1.2 (ii)] для формации всех единичных групп имеет место $(1) = LF_\sigma(f)$, где $f(\sigma_i) = \emptyset$ для всех i , а также ввиду [12, пример 1.2 (iii)] для формации всех σ_i -групп имеет место $\mathfrak{G}_{\sigma_i} = LF_\sigma(f)$, где $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ и $f(\sigma_j) = \emptyset$ для всех $j \neq i$, то формация $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ имеет единственную τ -замкнутую σ -локальную подформацию (1). Так как $(1) \subseteq \mathfrak{G}_\Pi$, то $\mathfrak{F}$ – минимальная τ -замкнутая σ -локальная не $\mathfrak{G}_\Pi$ -формация. $\square$

Если τ – тривиальный подгрупповой функтор, из теоремы 4.1 получаем

Следствие 4.2 [6, теорема 4.1]. Пусть $\mathfrak{F}$ – σ -локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{G}_\Pi$, где $\emptyset \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ -локальной не $\mathfrak{G}_\Pi$ -формацией, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\sigma_i} = l_\sigma^s \text{form} G$, где G – простая σ_i -группа для некоторого $\sigma_i \notin \Pi$.

В случае, когда $\tau = s$ – единичный подгрупповой функтор, имеем

Следствие 4.3. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная σ -локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{G}_\Pi$, где $\emptyset \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной наследственной σ -локальной не $\mathfrak{G}_\Pi$ -формацией, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\sigma_i} = l_\sigma^s \text{form} G$, где G – группа простого порядка $p \in \sigma_i \notin \Pi$.

Если $\tau = s_n$, то из теоремы 4.1 получаем

Следствие 4.4. Пусть $\mathfrak{F}$ – нормально наследственная σ -локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{G}_\Pi$, где $\emptyset \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является нормально наследственной минимальной σ -локальной не $\mathfrak{G}_\Pi$ -формацией, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\sigma_i} = l_\sigma^{s_n} \text{form} G$, где G – такая простая σ_i -группа, что $\sigma_i \notin \Pi$.

В классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$, из теоремы 4.1 вытекает следующий результат.

Следствие 4.5. Пусть $\mathfrak{F}$ – τ -замкнутая локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{G}_\pi$, где $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной локальной не $\mathfrak{G}_\pi$ -формацией, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p =$

$= \tau' \text{form} G$, где G – группа простого порядка $p \notin \pi$.

Если при этом τ – тривиальный подгрупповой функтор, из теоремы 4.1 имеем

Следствие 4.6. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{G}_\pi$, где $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной локальной не $\mathfrak{G}_\pi$ -формацией, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p = \tau' \text{form} G$, где G – группа простого порядка $p \notin \pi$.

5 Минимальные τ -замкнутые σ -локальные не $\mathfrak{G}_\Pi$ -формации

Пусть $\emptyset \neq \Pi \subseteq \sigma$. Формация всех σ -разрешимых Π -групп обозначается через $\mathfrak{S}_\Pi$. Ввиду [12, замечание 2.4] $\mathfrak{S}_\Pi$ является σ -локальной формацией. Кроме того, поскольку формация $\mathfrak{S}_\Pi$ наследственная, то она является τ -замкнутой формацией для любого подгруппового функтора τ .

Теорема 5.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – τ -замкнутая σ -локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{S}_\Pi$, где $\emptyset \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной τ -замкнутой σ -локальной не $\mathfrak{S}_\Pi$ -формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma^s \text{form} G$, где G – такая монолитическая τ -минимальная не $\mathfrak{S}_\Pi$ -группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{S}_\Pi}$, что выполняется одно из следующих условий:

- (1) $G = R$ – такая простая σ_i -группа, что $\sigma_i \notin \Pi$ и $\tau(G) = \{1, G\}$;
- (2) $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$, R – не σ -примарная Π -группа и G/R – σ -разрешимая Π -группа.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ – минимальная σ -локальная не $\mathfrak{S}_\Pi$ -формация, f – наименьшее τ -значное σ -локальное определение формации $\mathfrak{F}$ и H – каноническое σ -локальное определение формации $\mathfrak{S}_\Pi$. Тогда ввиду теоремы 3.1 $\mathfrak{F} = l_\sigma^s \text{form} G$, где G – такая монолитическая τ -минимальная не $\mathfrak{S}_\Pi$ -группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{S}_\Pi}$, что формация $f(\sigma_i)$ является $(H(\sigma_i))_\tau$ -критической для всех $\sigma_i \in \sigma(R)$.

Покажем, что выполняются условия теоремы. По лемме 2.1 (2) имеем $f(\sigma_i) = \tau \text{form}(G/O_{\sigma_i, \sigma_i}(G))$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$ и $f(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \notin \sigma(G)$. Ввиду [12, замечание 2.4] имеем $H(\sigma_i) = \mathfrak{S}_\Pi$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $H(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$.

Допустим, что R – σ -примарная группа и пусть $\sigma_i \in \sigma(R)$. Тогда R – σ_i -группа. Рассмотрим прежде случай, когда $\sigma_i \notin \Pi$. Тогда поскольку R –

единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , то $O_{\sigma_i}(G) = 1$. Следовательно, $O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G)$. Поскольку $f(\sigma_i) = \tau\text{form}(G / O_{\sigma_i, \sigma_i}(G))$ – минимальная τ -замкнутая не $H(\sigma_i)$ -формация и $H(\sigma_i) = \emptyset$, то $f(\sigma_i) = \tau\text{form}(G / O_{\sigma_i, \sigma_i}(G)) = (1)$. Значит, $G = O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G)$. Таким образом, G – σ_i -группа, $\sigma_i \notin \Pi$. Поскольку $G/R \in \mathfrak{S}_{\Pi}$, и при этом G – Π' -группа, то $G = R$. Но G – монолитическая группа. Следовательно, $G = R$ – простая σ_i -группа, где $\sigma_i \notin \Pi$. Кроме того, поскольку G – τ -минимальная не $\mathfrak{S}_{\Pi}$ -группа, то $\tau(G) = \{1, G\}$. Таким образом, группа G удовлетворяет условию (1) теоремы.

Допустим теперь, что $\sigma_i \in \Pi$. Тогда $R \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ и $G/R \in \mathfrak{S}_{\Pi}$. Следовательно, $G^{\mathfrak{S}_{\Pi}} \subseteq R$ и $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{S}_{\Pi} = \mathfrak{S}_{\Pi}$. Противоречие. Поэтому данный случай невозможен.

Пусть теперь R не является σ -примарной группой. Тогда ввиду монолитичности группы G для любого $\sigma_i \in \sigma(R)$ имеет место $O_{\sigma_i}(G) = O_{\sigma_i'}(G) = 1$. Поэтому $O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) = 1$.

Допустим, что найдется $\sigma_i \in \sigma(R) \setminus \Pi$. Тогда поскольку $f(\sigma_i) = \tau\text{form}(G / O_{\sigma_i', \sigma_i}(G)) = \tau\text{form} G$ – минимальная τ -замкнутая не $H(\sigma_i)$ -формация и $H(\sigma_i) = \emptyset$, то $\tau\text{form} G = (1)$. Последнее влечет $G = 1 \in \mathfrak{S}_{\Pi}$. Противоречие. Поэтому $\sigma(R) \subseteq \Pi$.

Покажем также, что данный случай возможен, только если $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$. Действительно, так как R монолит группы G , то R – прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп. Поэтому $|\pi(R)| \geq 3$. С другой стороны, поскольку R не является σ -примарной группой, то $|\sigma(R)| \geq 2$. Далее, если теперь $\sigma_i \in \sigma(R)$, то $\sigma_i \cap \pi(R) \neq \emptyset$. Следовательно, $\pi(R) \subseteq \cup_{\sigma_i \in \sigma(R)} \sigma_i$ и $|\cup_{\sigma_i \in \sigma(R)} \sigma_i| \geq 3$. Кроме того, поскольку R – Π -группа, то $\sigma(R) \subseteq \Pi$ и $\cup_{\sigma_i \in \sigma(R)} \sigma_i \subseteq \cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i$. Поэтому, $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$.

Таким образом, если R не является σ -примарной группой, то $R = G^{\mathfrak{S}_{\Pi}}$ – Π -группа, при этом $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$. Следовательно, группа G удовлетворяет условию (2) теоремы.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = I_{\sigma}^{\tau}\text{form} G$ и группа G удовлетворяет условию (1) теоремы. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – формация всех σ_i -групп и (1) – единственная τ -замкнутая σ -локальная подформация

$\mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Поскольку $\sigma_i \notin \Pi$ и $(1) \subseteq \mathfrak{S}_{\Pi}$, то $\mathfrak{F}$ – минимальная τ -замкнутая σ -локальная не $\mathfrak{S}_{\Pi}$ -формация.

Пусть теперь группа G удовлетворяет условию (2). Ясно, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{S}_{\Pi}$. Поскольку R единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , то для любого $\sigma_i \in \sigma(R)$ имеет место $O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) = 1$. В силу леммы 2.1(2) имеем $f(\sigma_i) = \tau\text{form}(G / O_{\sigma_i', \sigma_i}(G)) = \tau\text{form} G$ для любого $\sigma_i \in \sigma(R)$. С другой стороны, так как $R = G^{\mathfrak{S}_{\Pi}}$ и по лемме 2.2(2) $\mathfrak{S}_{\Pi}$ – насыщенная формация, то $R \not\subseteq \Phi(G)$. В силу леммы 2.7 формация $\tau\text{form} G = f(\sigma_i)$ имеет единственную максимальную τ -замкнутую подформацию $\tau\text{form}(\mathfrak{X} \cup \{G/R\})$, где $\mathfrak{X}$ – множество всех собственных τ -подгрупп группы G . Поскольку по условию G – τ -минимальная не $\mathfrak{S}_{\Pi}$ -группа и $G/R \in \mathfrak{S}_{\Pi}$, то $\mathfrak{X} \cup \{G/R\} \subseteq \mathfrak{S}_{\Pi} = H(\sigma_i)$ для любого $\sigma_i \in \sigma(R)$. Поэтому $f(\sigma_i)$ – минимальная τ -замкнутая не $H(\sigma_i)$ -формация. Значит, в силу теоремы 3.1 формация $\mathfrak{F}$ является минимальной τ -замкнутой σ -локальной не $\mathfrak{S}_{\Pi}$ -формацией. $\square$

В частности, если τ – тривиальный подгрупповой функтор из теоремы 5.1 получаем

Следствие 5.2 [6, теорема 5.1]. Пусть $\mathfrak{F}$ – σ -локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{S}_{\Pi}$, где $\emptyset \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ -локальной не $\mathfrak{S}_{\Pi}$ -формацией, когда $\mathfrak{F} = I_{\sigma}^{\tau}\text{form} G$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{S}_{\Pi}}$, что выполняется одно из следующих условий:

(1) $G = R$ – простая σ_i -группа для некоторого $\sigma_i \notin \Pi$;

(2) $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$, R – не σ -примарная Π -группа и G/R – σ -разрешимая Π -группа.

В случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$ из теоремы 5.1 получаем следующий результат.

Следствие 5.3 Пусть $\mathfrak{F}$ – τ -замкнутая локальная формация, $\mathfrak{S}_{\pi}$ – формация всех разрешимых π -групп, где $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной τ -замкнутой локальной не $\mathfrak{S}_{\pi}$ -формацией, когда $\mathfrak{F} = \tau^l\text{form} G$, где G – такая монолитическая τ -минимальная не $\mathfrak{S}_{\pi}$ -группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{S}_{\pi}}$, что выполняется одно из следующих условий:

(1) $G = R$ – группа простого порядка $p \notin \pi$;

(2) R – неабелева π -группа и G/R – разрешимая π -группа.

6 Минимальные τ -замкнутые σ -локальные не σ -разрешимые формации

Группа G называется σ -разрешимой, если каждый главный фактор группы G является σ -примарным. Класс всех σ -разрешимых групп $\mathfrak{S}_\sigma$ является σ -локальной формацией. При этом $\mathfrak{S}_\sigma = LF_\sigma(f)$, где $f(\sigma_i) = \mathfrak{S}_\sigma$ для всех i .

Важным частным случаем теоремы 5.1 является следующая теорема, дающая описание минимальных τ -замкнутых σ -локальных не $\mathfrak{S}_\sigma$ -формаций.

Теорема 6.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – τ -замкнутая σ -локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{S}_\sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной τ -замкнутой σ -локальной не $\mathfrak{S}_\sigma$ -формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \text{form} G$, где G – такая монолитическая τ -минимальная не σ -разрешимая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{S}_\sigma}$, что R – не σ -примарная группа и группа G/R – σ -разрешима.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – минимальная σ -локальная не $\mathfrak{S}_\sigma$ -формация. Тогда, применяя теорему 5.1 при $\Pi = \sigma$ получим, что $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \text{form} G$, где G – такая монолитическая τ -минимальная не $\mathfrak{S}_\sigma$ -группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{S}_\sigma}$, что выполняется одно из следующих условий:

- (1) $G = R$ – такая простая σ_i -группа, что $\sigma_i \notin \Pi$ и $\tau(G) = \{1, G\}$;
- (2) $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$, R – не σ -примарная Π -группа и G/R – σ -разрешимая Π -группа.

Поскольку $\Pi = \sigma$, то $R = G^{\mathfrak{S}_\sigma}$. Кроме того, понятно, что условие (1) не может иметь место, а в условии (2) требование $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$ выполняется для любого разбиения σ .

Таким образом, $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \text{form} G$, где G – такая монолитическая τ -минимальная не σ -разрешимая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{S}_\sigma}$, что R – не σ -примарная группа и группа G/R – σ -разрешима. $\square$

В случае, когда τ – тривиальный подгрупповой функтор из теоремы 6.1 получаем

Следствие 6.2. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ -локальной не σ -разрешимой формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form} G$, где G – такая монолитическая не σ -разрешимая группа с не σ -примарным монолитом P , что G/P – σ -разрешимая группа.

Следствие 6.3. Пусть $s_n \leq \tau$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной τ -замкнутой σ -локальной не σ -разрешимой формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \text{form} G$, где G – простая не σ -примарная

группа, у которой все ее собственные τ -подгруппы σ -разрешимы.

В классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$, получаем следующий известный результат.

Следствие 6.4 [5, следствие 2.4.23]. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной τ -замкнутой локальной неразрешимой формацией, когда $\mathfrak{F} = \tau^1 \text{form} G$, где G – такая монолитическая τ -минимальная неразрешимая группа с неабелевым монолитом P , что G/P – разрешимая группа.

Следствие 6.5. [5, следствие 2.4.24]. Пусть $s_n \leq \tau$. Тогда $\mathfrak{F}$ в том и только в том случае является минимальной τ -замкнутой локальной неразрешимой формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \text{form} G$, где G – простая неабелева группа, у которой все ее собственные τ -подгруппы разрешимы.

7 Минимальные τ -замкнутые σ -локальные не $\mathfrak{N}_\Pi$ -формации

Пусть $\emptyset \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда через $\mathfrak{N}_\Pi$ обозначают формацию всех Π -групп. Ввиду леммы 2.6(2) формация $\mathfrak{N}_\Pi$ является σ -локальной.

Теорема 7.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – τ -замкнутая σ -локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}_\Pi$, где $\emptyset \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной τ -замкнутой σ -локальной не $\mathfrak{N}_\Pi$ -формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \text{form} G$, где G – такая монолитическая τ -минимальная не $\mathfrak{N}_\Pi$ -группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{N}_\Pi}$, что выполняется одно из следующих условий:

- (1) $G = R$ – простая σ_i -группа для некоторого $\sigma_i \notin \Pi$ и $\tau(G) = \{1, G\}$;
- (2) $G = R \rtimes K$, где $R = C_G(G)$ – p -группа, $p \in \sigma_i \in \Pi$, а K – простая σ_j -группа, $j \neq i$ и $\tau(K) = \{1, K\}$;
- (3) $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$, $G = R$ – простая не σ -примарная τ -минимальная не $\mathfrak{S}_{\sigma_i}$ -группа для любого $\sigma_i \in \sigma(G)$, $\sigma(G) \subseteq \Pi$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ – минимальная τ -замкнутая σ -локальная не $\mathfrak{N}_\Pi$ -формация и пусть f – наименьшее τ -значное σ -локальное определение формации $\mathfrak{F}$, H – каноническое σ -локальное определение формации $\mathfrak{N}_\Pi$.

В силу теоремы 3.1 $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \text{form} G$, где G – такая монолитическая τ -минимальная не $\mathfrak{N}_\Pi$ -группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{N}_\Pi}$, что для всех $\sigma_i \in \sigma(R)$

формация $f(\sigma_i)$ является минимальной τ -замкнутой не $H(\sigma_i)$ -формацией. По лемме 2.1 (2) имеем $f(\sigma_i) = \tau\text{form}(G / O_{\sigma_i, \sigma_i}(G))$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$ и $f(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \notin \sigma(G)$. Ввиду леммы 2.6 (2) $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $H(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$.

Допустим, что группа R является σ -примарной и пусть $\sigma_i \in \sigma(R)$. Тогда $R - \sigma_i$ -группа. Так как R – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , то $O_{\sigma_i}(G) = 1$. Следовательно, $O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G)$.

Рассмотрим случай, когда $\sigma_i \notin \Pi$. Тогда $f(\sigma_i) = \tau\text{form}(G / O_{\sigma_i, \sigma_i}(G)) = \tau\text{form}(G / O_{\sigma_i}(G))$ – минимальная τ -замкнутая не $H(\sigma_i)$ -формация и $H(\sigma_i) = \emptyset$. Отсюда $f(\sigma_i) = \tau\text{form}(G / O_{\sigma_i}(G)) = (1)$. Значит, $G - \sigma_i$ -группа, $\sigma_i \notin \Pi$. Поскольку $G / R \in \mathfrak{N}_{\Pi}$ и при этом $G - \Pi'$ -группа, то $G = R$. Но G – монолитическая группа. Следовательно, $G = R$ – простая σ_i -группа, где $\sigma_i \notin \Pi$. Ввиду того, что $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – наследственная формация, имеем $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$. В силу леммы 2.2 (4) имеем $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Поэтому $\mathfrak{F} = l_{\sigma}^* \text{form} G = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Кроме того, поскольку $G - \tau$ -минимальная не $\mathfrak{N}_{\Pi}$ -группа, то $\tau(G) = \{1, G\}$. Таким образом, группа G удовлетворяет условию (1) теоремы.

Рассмотрим теперь случай, когда $\sigma_i \in \Pi$. Тогда $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Выберем в $f(\sigma_i) \setminus H(\sigma_i)$ группу K минимального порядка. Тогда K – монолитическая τ -минимальная не $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ -группа с монолитом $Q = K^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}}$. Поскольку $f(\sigma_i) = \tau\text{form}(G / O_{\sigma_i}(G)) \not\subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ и любая собственная τ -замкнутая подформация из $f(\sigma_i)$ содержится в $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$, то $f(\sigma_i) = \tau\text{form} K$. Так как $R \subseteq O_{\sigma_i}(G)$ и $G / R \in \mathfrak{N}_{\Pi}$, то $K \in f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{N}_{\Pi}$. Поэтому $Q = K$ – простая σ_j -группа для некоторого $j \neq i$ и $\tau(K) = \{1, K\}$.

Пусть $p \in \sigma_i$ и S – группа простого порядка p . По лемме 2.8 существует точный неприводимый $F_p K$ -модуль V . Обозначим через $D = V \rtimes K$. Тогда $V = C_D(V)$ – единственная минимальная нормальная p -подгруппа группы D и $V = O_{\sigma_i, \sigma_i}(D) = O_{\sigma_i}(D)$.

Покажем, что $\mathfrak{F} = l_{\sigma}^* \text{form} D$. Поскольку σ -локальное определение f является внутренним и

$O_{\sigma_i}(D) = V$, то по лемме 2.4 имеем $D \in \mathfrak{F}$. Обозначим через l минимальное σ -локальное определение формации $\mathfrak{L} = l_{\sigma}^* \text{form} D$. По лемме 2.1 (2) имеет место равенство $l(\sigma_i) = \tau\text{form}(D / O_{\sigma_i, \sigma_i}(D)) = \tau\text{form} K$. Если $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{F}$, то по условию $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{N}_{\Pi}$. Значит, с учетом леммы 2.5, имеет место $l \leq H$. Поэтому $l(\sigma_i) = \tau\text{form} K \subseteq H(\sigma_i)$. Последнее противоречит определению группы K . Таким образом, $\mathfrak{L} = \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{F} = l_{\sigma}^* \text{form} D$, где группа D удовлетворяет условию (2) теоремы.

Пусть теперь R не является σ -примарной группой. Тогда ввиду монолитичности группы G для любого $\sigma_i \in \sigma(R)$ имеет место $O_{\sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G) = 1$. Поэтому $O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) = 1$.

Допустим, что найдется $\sigma_i \in \sigma(R) \setminus \Pi$. Тогда $f(\sigma_i) = \tau\text{form}(G / O_{\sigma_i, \sigma_i}(G)) = \tau\text{form} G$ – минимальная τ -замкнутая не $H(\sigma_i)$ -формация по теореме 3.1. Так как по лемме 2.6 (2) и $H(\sigma_i) = \emptyset$, то $\tau\text{form} G = (1)$. Последнее влечет $G = 1 \in \mathfrak{N}_{\Pi}$. Противоречие. Поэтому $\sigma(R) \subseteq \Pi$.

Пусть $\sigma_i, \sigma_j \in \sigma(R)$, где $i \neq j$. Поскольку $f(\sigma_i) = \tau\text{form} G = f(\sigma_j)$ – минимальная τ -замкнутая не $H(\sigma_i)$ -формация по теореме 3.1, то $G / R \in f(\sigma_i) \cap f(\sigma_j) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \cap \mathfrak{G}_{\sigma_j} = (1)$, т. е. $G = R$ – простая группа. Так как при этом все собственные τ -подгруппы группы G принадлежат $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ для любого $\sigma_i \in \sigma(G)$, то $G = R$ – простая не σ -примарная τ -минимальная не $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ -группа для любого $\sigma_i \in \sigma(G)$.

Покажем теперь, что данный случай возможен, только если $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$. Действительно, так как G не σ -примарная группа, то G – простая неабелева группа. Поэтому $|\pi(G)| \geq 3$. С другой стороны, $|\sigma(G)| \geq 2$. Если теперь $\sigma_i \in \sigma(G)$, то $\sigma_i \cap \pi(G) \neq \emptyset$. Следовательно, $\pi(G) \subseteq \cup_{\sigma_i \in \sigma(G)} \sigma_i$ и $|\cup_{\sigma_i \in \sigma(G)} \sigma_i| \geq 3$. Кроме того, поскольку G – Π -группа, то $\sigma(G) \subseteq \Pi$ и $\cup_{\sigma_i \in \sigma(G)} \sigma_i \subseteq \cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i$. Поэтому, $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$.

Таким образом, если R не является σ -примарной группой, то $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$ и $G = R$ – простая не σ -примарная τ -минимальная не $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ -группа для любого $\sigma_i \in \sigma(G)$. Следовательно, группа G удовлетворяет условию (3) теоремы.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = l_{\sigma}^* \text{form} G$ и группа G удовлетворяет условию (1) теоремы. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – формация всех σ_i -групп и (1) – единственная τ -замкнутая σ -локальная

подформация $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Поскольку $\sigma_i \notin \Pi$ и $(1) \subseteq \mathfrak{N}_\Pi$, то $\mathfrak{F}$ – минимальная τ -замкнутая σ -локальная не $\mathfrak{N}_\Pi$ -формация.

Пусть теперь группа G удовлетворяет условию (2) теоремы. Ясно, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}_\Pi$. В силу леммы 2.1 (2) имеем $f(\sigma_i) = \tau\text{form}(G/O_{\sigma_i, \sigma_i}(G)) = \tau\text{form}K$. Согласно лемме 2.7 формация $\tau\text{form}K = f(\sigma_i)$ τ -неприводима и в ней имеется единственная максимальная τ -замкнутая подформация $\mathfrak{M} = \tau\text{form}(\mathfrak{X})$, где $\mathfrak{X}$ – множество всех собственных τ -подгрупп группы K . Так как при этом $\mathfrak{X} = \{1\}$, то $\mathfrak{X} \subseteq H(\sigma_i)$. Поэтому $f(\sigma_i)$ – минимальная τ -замкнутая не $H(\sigma_i)$ -формация. Значит, в силу теоремы 3.1 формация $\mathfrak{F}$ является минимальной τ -замкнутой σ -локальной не $\mathfrak{N}_\Pi$ -формацией.

Пусть, наконец, группа G удовлетворяет условию (3) теоремы. Поскольку R единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , то для любого $\sigma_i \in \sigma(R)$ имеет место $O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) = 1$. В силу леммы 2.1(2) имеем $f(\sigma_i) = \tau\text{form}(G/O_{\sigma_i, \sigma_i}(G)) = \tau\text{form}G$ для любого $\sigma_i \in \sigma(R)$. С другой стороны, так как $R = G^{\mathfrak{N}_\Pi}$ и по лемме 2.2(2) $\mathfrak{N}_\Pi$ – насыщенная формация, то $R \not\subseteq \Phi(G)$. В силу леммы 2.7 формация $\tau\text{form}G = f(\sigma_i)$ имеет единственную максимальную τ -замкнутую подформацию $\tau\text{form}(\mathfrak{X} \cup \{G/R\})$, где $\mathfrak{X}$ – множество всех собственных τ -подгрупп группы G . Поскольку по условию G – τ -минимальная не $\mathfrak{N}_\Pi$ -группа и $G/R \in \mathfrak{N}_\Pi$, то $\mathfrak{X} \cup \{G/R\} \subseteq \mathfrak{N}_\Pi = H(\sigma_i)$ для любого $\sigma_i \in \sigma(R)$. Поэтому $f(\sigma_i)$ – минимальная τ -замкнутая не $H(\sigma_i)$ -формация. Следовательно, в силу теоремы 3.1 формация $\mathfrak{F}$ является минимальной τ -замкнутой σ -локальной не $\mathfrak{N}_\Pi$ -формацией. $\square$

Если τ – тривиальный подгрупповой функтор, из теоремы 7.1 получаем

Следствие 7.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – σ -локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}_\Pi$, где $\emptyset \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ -локальной не $\mathfrak{N}_\Pi$ -формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form}G$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{N}_\Pi}$, что выполняется одно из следующих условий:

(1) $G = R$ – простая σ_i -группа для некоторого $\sigma_i \notin \Pi$;

(2) $G = R \rtimes K$, где $R = C_G(G)$ – p -группа, $p \in \sigma_i \in \Pi$, а K – простая σ_j -группа, $j \neq i$;

(3) $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$, $G = R$ – простая не σ -примарная минимальная не $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ -группа для любого $\sigma_i \in \sigma(G)$, $\sigma(G) \subseteq \Pi$.

В случае, когда $\tau = s$ – единичный подгрупповой функтор имеем

Следствие 7.3. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная σ -локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}_\Pi$, где $\emptyset \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной наследственной σ -локальной не $\mathfrak{N}_\Pi$ -формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma^s \text{form}G$, где G – такая монолитическая минимальная не $\mathfrak{N}_\Pi$ -группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{N}_\Pi}$, что выполняется одно из следующих условий:

(1) $G = R$ – простая σ_i -группа для некоторого $\sigma_i \notin \Pi$;

(2) G – не σ -нильпотентная Π -группа Шмидта;

(3) $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$, $G = R$ – простая не σ -примарная $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ -группа для любого $\sigma_i \in \sigma(G)$, $\sigma(G) \subseteq \Pi$.

Если $\tau = s_n$, то из теоремы 7.1 получаем

Следствие 7.4. Пусть $\mathfrak{F}$ – нормально наследственная σ -локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}_\Pi$, где $\emptyset \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной наследственной σ -локальной не $\mathfrak{N}_\Pi$ -формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma^{s_n} \text{form}G$, где G – такая монолитическая минимальная не $\mathfrak{N}_\Pi$ -группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{N}_\Pi}$, что выполняется одно из следующих условий:

(1) $G = R$ – группа простого порядка $p \in \sigma_i \notin \Pi$;

(2) G – не σ -нильпотентная Π -группа Шмидта;

(3) $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$, $G = R$ – простая не σ -примарная минимальная не $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ -группа для любого $\sigma_i \in \sigma(G)$, $\sigma(G) \subseteq \Pi$.

В классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$, из теоремы 7.1 получаем

Следствие 7.5. Пусть $\mathfrak{F}$ – τ -замкнутая локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}_\pi$, где $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной τ -замкнутой локальной не $\mathfrak{N}_\pi$ -формацией, когда $\mathfrak{F} = \tau^l \text{form}G$, где G одна из следующих групп:

(1) группа простого порядка $p \notin \pi$;

(2) π -группа Шмидта;

(3) простая неабелева τ -минимальная не $\mathfrak{N}_p$ -группа для любого $p \in \pi(G) \subseteq \pi$.

В частности, если при этом τ – тривиальный подгрупповой функтор имеет место

Следствие 7.6. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}_\pi$, где $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной локальной не $\mathfrak{N}_\pi$ -формацией, когда $\mathfrak{F} = l\text{form}G$, где G одна из следующих групп:

- (1) группа простого порядка $p \notin \pi$;
- (2) π -группа Шмидта;
- (3) простая неабелева не $\mathfrak{N}_p$ -группа для любого $p \in \pi(G) \subseteq \pi$.

8 Минимальные τ -замкнутые σ -локальные не σ -нильпотентные формации

Напомним, что группа G называется σ -нильпотентной, если она является прямым произведением σ -примарных групп. Класс всех σ -нильпотентных групп $\mathfrak{N}_\sigma$ является σ -локальной формацией. При этом $\mathfrak{N}_\sigma = LF_\sigma(f)$, где $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ для всех i .

Важным частным случаем теоремы 7.1 является следующая теорема, дающая описание минимальных τ -замкнутых σ -локальных не $\mathfrak{N}_\sigma$ -формаций.

Теорема 8.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – τ -замкнутая σ -локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}_\sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной τ -замкнутой σ -локальной не σ -нильпотентной формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma^* \text{form}G$, где G – такая монолитическая τ -минимальная не σ -нильпотентная группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$, что выполняется одно из следующих условий:

- (1) $G = R \rtimes K$, где $R = C_G(G)$ – p -группа, $p \in \sigma_i \in \Pi$, а K – простая σ_j -группа, $j \neq i$ и $\tau(K) = \{1, K\}$;
- (2) $G = R$ – простая не σ -примарная τ -минимальная не $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ -группа для любого $\sigma_i \in \sigma(G)$.

Если τ – тривиальный подгрупповой функтор, из теоремы 8.1 получаем

Следствие 8.2. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ -локальной не σ -нильпотентной формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma^* \text{form}G$, где G – либо простая не σ -примарная группа, либо не σ -нильпотентная группа Шмидта.

Если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$, из теоремы 8.1 вытекает

Следствие 8.3 [5, следствие 2.4.4]. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ – минимальная τ -замкнутая локальная неильпотентная формация, когда

$\mathfrak{F} = \tau^l \text{form}G$, где G – либо простая неабелева τ -минимальная не $\mathfrak{N}_p$ -группа для любого $p \in \pi(G)$, либо группа Шмидта.

Если при этом τ – тривиальный подгрупповой функтор, то имеем

Следствие 8.4 [2]. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ – минимальная локальная неильпотентная формация, когда $\mathfrak{F} = l\text{form}G$, где G – либо простая неабелева группа, либо группа Шмидта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Экраны ступенчатых формаций / Л.А. Шеметков // Труды VI Всесоюзного симпозиума по теории групп. – Киев: Наукова думка. – 1980. – С. 37–50.
2. Скиба, А.Н. О критических формациях / А.Н. Скиба // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1980. – № 4. – С. 27–33.
3. Скиба, А.Н. О критических формациях / А.Н. Скиба // В кн.: Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. Киев: Ин-т математики АН Украины. – 1993. – С. 258–268.
4. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – Москва: Наука, 1989.
5. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Бел. наука, 1997.
6. Сафонова, И.Н. О минимальных σ -локальных не- $\mathfrak{H}$ -формациях конечных групп / И.Н. Сафонова // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 4 (45). – С. 105–112.
7. Сафонова, И.Н. О критических σ -локальных формациях конечных групп / И.Н. Сафонова // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2023. – Т. 31, № 2. – С. 63–80.
8. Сафонова, И.Н. К теории $\mathfrak{H}_\sigma^*$ -критических формаций конечных групп / И.Н. Сафонова, В.В. Скрундь // Международная конференция «Алгебра и динамические системы», посвященная 90-летию со дня рождения В.А. Белоногова, Нальчик, 3–7 июня 2025 г. – Нальчик: Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, 2025. – С. 137–140.
9. Skiba, A.N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
10. Skiba, A.N. On one generalization of the local formations / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2018. – № 1 (34). – P. 79–82.
11. Chi, Z. On one application of the theory of n -multiply σ -local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2018. – № 2 (35). – P. 85–88.

12. Chi, Z. On n -multiply σ -local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Communications in Algebra. – 2019. – Vol. 47, № 3. – P. 957–968.

13. Safonova, I.N. On some properties of the lattice of totally σ -local formations of finite groups / I.N. Safonova, V.G. Safonov // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2020. – № 3. – С. 1–14.

14. Safonova, I.N. Some properties of n -multiply σ -local formations of finite groups / I.N. Safonova // Asian-European Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 15, № 7. – 2250138 (12 pages).

15. Safonova, I.N. A criterion for σ -locality of a non-empty formation / I.N. Safonova // Comm. Algebra. – 2022. – № 50 (6). – P. 2366–2376.

16. Safonova, I.N. On the τ -closedness of n -multiply σ -local formation / I.N. Safonova // Advances in Group Theory and Applications. – 2024. – № 18. – P. 123–136.

17. Сафонова, И.Н. О n -кратной σ -локальности непустой τ -замкнутой формации конечных групп / И.Н. Сафонова // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2024. – Т. 32, № 1. – С. 32–38.

18. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Минск: Наука, 1978. – 271 с.

Исследования выполнены в рамках задания Государственной программы научных исследований «Конвергенция – 2025» при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (проект 20211328).

Авторы благодарят рецензента за внимательное прочтение статьи и полезные предложения.

Поступила в редакцию 23.06.2025.

Информация об авторах

Сафонова Инна Николаевна – к.ф.-м.н., доцент
Скрундь Валентина Викторовна – аспирант

ФОРМИРОВАНИЕ КОРРОЗИОННОСТОЙКИХ МНОГОСЛОЙНЫХ ПОКРЫТИЙ НА ОСНОВЕ СИСТЕМЫ Ti – Cu МЕТОДОМ ВАКУУМНО-ДУГОВОГО ОСАЖДЕНИЯ

А.В. Белый, С.Д. Латушкина, О.И. Посылкина, И.А. Сечко, В.М. Комаровская

Физико-технический институт НАН Беларуси, Минск

FORMATION OF CORROSION-RESISTANT MULTILAYER COATINGS BASED ON THE Ti – Cu SYSTEM BY VACUUM-ARC DEPOSITION

A.V. Belyi, S.D. Latushkina, O.I. Posylkina, I.A. Sechko, V.M. Komarovskaya

Physical-Technical Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk

Аннотация. Методом вакуумно-дугового осаждения из сепарированных плазменных потоков получены многослойные покрытия TiN – TiCuN – TiN – TiCuN и TiN – TiCuN – TiCuCO. Испытания показали, что адгезионная прочность многослойных покрытий зависит как от их архитектуры, так и от различия в химическом составе. Использование в качестве дополнительного реакционного газа CO₂, также увеличение количества слоев при осаждении существенно снижает показатели нагрузки до появления первой трещины. Изучено электрохимическое поведение многослойных покрытий TiN – TiCuN – TiN – TiCuN и TiN – TiCuN – TiCuCO от их толщины и количества в них слоев. Установлено, что для всех покрытий наибольшее влияние на коррозионную стойкость покрытий оказывает толщина слоя TiCuN, увеличение которой приводит к улучшению коррозионной стойкости покрытий вне зависимости от соотношения в них слоев, что обусловлено снижением пористости покрытий из-за формирования в них микроструктурных барьеров, а также способностью элементов материала покрытия образовывать пассивные поверхностные слои в агрессивных средах.

Ключевые слова: вакуумно-дуговое осаждение, многослойные покрытия, коррозионная стойкость, электрохимические испытания, адгезионная стойкость.

Для цитирования: Формирование коррозионностойких многослойных покрытий на основе системы Ti – Cu методом вакуумно-дугового осаждения / А.В. Белый, С.Д. Латушкина, О.И. Посылкина, И.А. Сечко, В.М. Комаровская // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 112–118. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_112. – EDN: CAJESQ

Abstract. Multilayer TiN – TiCuN – TiN – TiCuN and TiN – TiCuN – TiCuCO coatings were obtained by vacuum-arc deposition from separated plasma flows. It has been established that the adhesive strength of the formed multilayer coatings depends both on their architecture and on the difference in chemical composition. The use of TiCuCO as a surface layer increases the corrosion resistance of the multilayer coating, but reduces the load indicators before the first crack appears. The electrochemical behavior of multilayer TiN – TiCuN – TiN – TiCuN and TiN – TiCuN – TiCuCO coatings was studied depending on their thickness and the number of layers in them. It is shown that for all coatings the greatest influence on the corrosion resistance of the coatings is exerted by the thickness of the TiCuN layer, an increase in which leads to an improvement in the corrosion resistance of the coatings regardless of the ratio of layers in them, which is due to a decrease in the porosity of the coatings due to the formation of microstructural barriers in them, as well as the ability of the elements of the coating material to form passive surface layers in aggressive environments.

Keywords: vacuum arc deposition, multilayer coatings, corrosion resistance, electrochemical testing, adhesion resistance.

For citation: Formation of corrosion-resistant multilayer coatings based on the Ti – Cu system by vacuum-arc deposition / A.V. Belyi, S.D. Latushkina, O.I. Posylkina, I.A. Sechko, V.M. Komarovskaya // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 3 (64). – P. 112–118. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_112 (in Russian). – EDN: CAJESQ

Введение

В настоящее время существенное значение для различных отраслей промышленности имеет защита от коррозии конструкционных материалов, работающих в агрессивных жидких и активных газовых средах. Экономическое и экологическое воздействие коррозии существенно, что приводит к значительным финансовым потерям и негативным последствиям для инфраструктуры, отраслей промышленности и экосистем [1]–[3].

Необходимость решения проблемы повышения экономической эффективности промышленного производства посредством снижения темпа роста коррозионных производственных потерь отмечается во всех промышленно развитых странах. Одной из концепций развития современного производства является разработка и использование покрытий, полученных вакуумно-плазменными методами, при защите поверхностей при коррозионно-абразивном изнашивании.

Известно, что вакуумно-дуговое осаждение является эффективным способом формирования на различных деталях из металлов и сплавов покрытий, которые характеризуются высокими механическими свойствами [4]–[6]. С точки зрения обеспечения противокоррозионной защиты основным недостатком вакуумно-плазменных покрытий является их столбчатая структура, обусловленная преимущественным ростом зерен в направлении нормали к поверхности. Для управления структурой покрытий, осаждаемых вакуумно-дуговым методом, перспективными являются два основных метода: введение в состав растущего конденсата легирующих элементов и формирование многослойных структур.

Введение легирующих элементов в состав конденсатов на основе нитридов металлов позволяет сформировать наноразмерную структуру материала покрытия [7]–[9]. Уменьшение размера зерна покрытий обеспечивает накопление на границах зерен повышенной энергии, что способствует торможению движения и генерации дислокаций, увеличивая стойкость к разрушению и деформированию покрытий. Также получены научные результаты, свидетельствующие об увеличении коррозионной стойкости наноструктурированных покрытий. Однако вследствие высоких остаточных напряжений, возникающих в таких покрытиях, существуют ограничения по увеличению их толщины из-за ухудшения адгезионной прочности последних. Кроме того, несоответствие механических свойств (микротвердость, модуль упругости) между подложками и покрытиями также снижает эксплуатационные характеристики однослойных покрытий.

Одним из перспективных направлений в области инженерии поверхности и современного материаловедения является разработка многослойных покрытий, которые могли бы быть использованы для повышения широкого спектра функциональных свойств различных деталей и механизмов [10]–[12]. Так, формирование наноструктурных многослойных структур позволяет обеспечить упрочнение материала покрытия за счет микроструктурных барьеров. Однако применение многослойных покрытий для повышения коррозионной стойкости остается малоизученным процессом.

Как показали проведенные ранее нами исследования, эффективность таких покрытий определяется наличием резкой границы между слоями, что не всегда является простой задачей вследствие диффузионных процессов высокоэнергетических частиц на поверхности конденсации. Задачу формирования границ между слоями в покрытии можно решить при использовании слоев с различной структурой, например, чередованием моонитридных слоев со столбчатой структурой и многокомпонентных нитридов с мелкодисперсной структурой. В этом случае

каждый слой представляет собой самостоятельное керамическое покрытие со своим набором положительных свойств, не присущих другим слоям. Общее количество слоев покрытия должно выбираться в зависимости от решаемых технологических задач.

В настоящей работе была предложена концепция чередования слоев со столбчатой структурой (TiN) и слоев с наноразмерной структурой (Ti – Cu – N) в составе многослойного покрытия, что должно привести к повышению коррозионной стойкости формируемого покрытия за счет увеличения протяженности межфазных границ как между слоями, так и в слое с наноразмерной структурой. Такая архитектура покрытия должна обеспечивать торможение движения дислокаций при деформации, уменьшать уровень остаточных напряжений и препятствовать формированию сквозной пористости в покрытии. Для разработки условий повышения коррозионной стойкости многослойной системы также были проведены эксперименты, когда в качестве верхнего слоя осаждалось соединение Ti – Cu – C – O.

1 Методы исследований

Получение покрытий осуществлялось на вакуумной установке нанесения упрочняющих покрытий 01ИН-6-008, оснащенной системой магнитной сепарации плазменного потока. Для осаждения многокомпонентных покрытий использовались катоды из титана марки ВТ1-0 (ГОСТ 19807-91), меди марки М1 (ГОСТ 859-2001). Осаждение слоев покрытий проводилось как в среде азота ($P = 0,04$ Па), так и углекислого газа ($P = 0,04$ Па). Толщина многослойного покрытия составляла $600 + 10,0$ без учета постоянной для всех экспериментов толщины подслоя титана 100 нм.

Для определения содержания химических элементов в составе покрытий использовался метод просвечивающей электронной микроскопии (TESCAN MIRA 3). Изучение фазового состава покрытий проводилось с помощью рентгеновского дифрактометра ДРОН-3М в Cu-K α излучении (длина волны $\lambda = 0,15418$ нм) в условиях фокусировки по Брегу – Брентано с последующей обработкой посредством пакета программ DIFFRACTOMETER.

Для определения адгезии осажденных покрытий применяли скретч-тестер REVETEST (CSM Instruments). В качестве индентора использовался алмаз конической формы с радиусом закругления при вершине 0,2 мм. Момент адгезионного и когезионного разрушения фиксировался после испытаний с помощью оптического микроскопа, а также по изменению акустической эмиссии: $Lc1$ – момент появления первой трещины; $Lc3$ – отслаивание участка покрытия (адгезионное разрушение).

Коррозионно-электрохимические исследования полученных покрытий осуществлялись в потенциодинамическом режиме со скоростью подачи потенциала 2 мВ/с в 3%-м растворе NaCl с использованием потенциостата Multi Autolab M 204. Электродом сравнения служил хлоридсеребряный электрод.

2 Результаты и их обсуждение

При осаждении покрытий вакуумно-дуговым методом фазовый состав, структурное состояние, следовательно, и свойства конденсатов изменяются в широких пределах в зависимости от давления активного газа и энергии ионов осаждаемого потока плазмы. Метастабильность свойств вакуумно-дуговых покрытий определяется неравновесными условиями процесса формирования их структуры (высокие степени переохлаждения при конденсации, радиационное воздействие высокоэнергетических частиц конденсируемого потока плазмы, сложные многокомпонентные виды межатомных связей в синтезируемых соединениях, влияние примесей и т. д.). Получение нитридных покрытий в присутствии химически активной азотной атмосферы позволяет широко варьировать микроструктуру материала путем изменения размера зерен, кристаллографической ориентации, дефектов решетки, текстуры, а также фазового состава [13].

Как показали проведенные нами ранее исследования, для формирования наноразмерной структуры и обеспечения коррозионной стойкости однослойных покрытий Ti – Cu – N оптимальная концентрация меди в составе покрытий не должна превышать 7% [14]. Данное содержание меди в составе слоев Ti – Cu – N обеспечивалась в экспериментах при осаждении многослойных покрытий варьированием токов дугового разряда на испарителях (таблица 2.1).

Результаты фазового состава многослойных покрытий TiN – TiCuN – TiN – TiCuN при изменении соотношения между толщинами слоев TiN – TiCuN приведены в таблице 2.2. Согласно результатам рентгеноструктурного анализа, для исследуемых покрытий характерно отсутствие дифракционных максимумов на рентгенограммах, соответствующих фазе Cu, что свидетельствует о рентгеноаморфности последней (рисунок 2.1).

Увеличение толщины слоя TiCuN в составе многослойного покрытия приводит к изменению фазового состава от тетрагонального Ti₂N с преимущественной кристаллографической ориентацией зерен в направлении (200) и размером ОКР = 17 нм к твердому раствору на основе кубического TiN (111) и размером ОКР = 14,2 нм. Данный результат согласуется с результатами элементного состава покрытий.

Таблица 2.1 – Элементный состав многослойных покрытий

Покрытие	Толщина слоев, нм	Ti, ат. %	Cu, ат. %	N, ат. %	C, ат. %	O, ат. %
1. TiN – TiCuN – TiN – TiCuN	150 – 150 – 150 – 150	49,13	4,66	46,21	–	–
2. TiN – TiCuN – TiN – TiCuN	100 – 200 – 100 – 200	42,3	8,65	49,05	–	–
3. TiN – TiCuN – TiCuCO	100 – 300 – 200	29,18	4,34	17,66	8,11	40,72
4. TiN – TiCuN – TiN – TiCuN – TiCuCO	50 – 150 – 50 – 150 – 200	28,68	4,55	16,32	7,53	42,92
5. TiN – TiCuN – TiN – TiCuN – TiN – TiCuN – TiCuCO	70 – 70 – 70 – 70 – 70 – 70 – 20	30,33	3,36	17,02	6,42	42,88

Таблица 2.2 – Фазовый состав, структурные характеристики и адгезионная прочность многослойных покрытий

Покрытие	Толщина слоев, нм	Фазовый состав	ОКР, нм	Параметр решетки, нм	Lc, H
1. TiN – TiCuN – TiN – TiCuN	150 – 150 – 150 – 150	TiN	17	$c = 0,2995$ ($c_{\text{табл}} = 0,3034$) $a = 0,4975$ ($a_{\text{табл}} = 0,4945$)	20,52
2. TiN – TiCuN – TiN – TiCuN	100 – 200 – 100 – 200	TiN	14,2	$a = 0,4258$ ($a_{\text{табл}} = 0,4242$)	26,08
3. TiN – TiCuN – TiCuCO	100 – 300 – 200	TiCN	13,2	0,4303	16,01
4. TiN – TiCuN – TiN – TiCuN – TiCuCO	50 – 150 – 50 – 150 – 200	TiCN	14,0	0,4309	7,01
5. TiN – TiCuN – TiN – TiCuN – TiN – TiCuN – TiCuCO	70 – 70 – 70 – 70 – 70 – 70 – 200	TiCN	14,4	0,4315	5,8

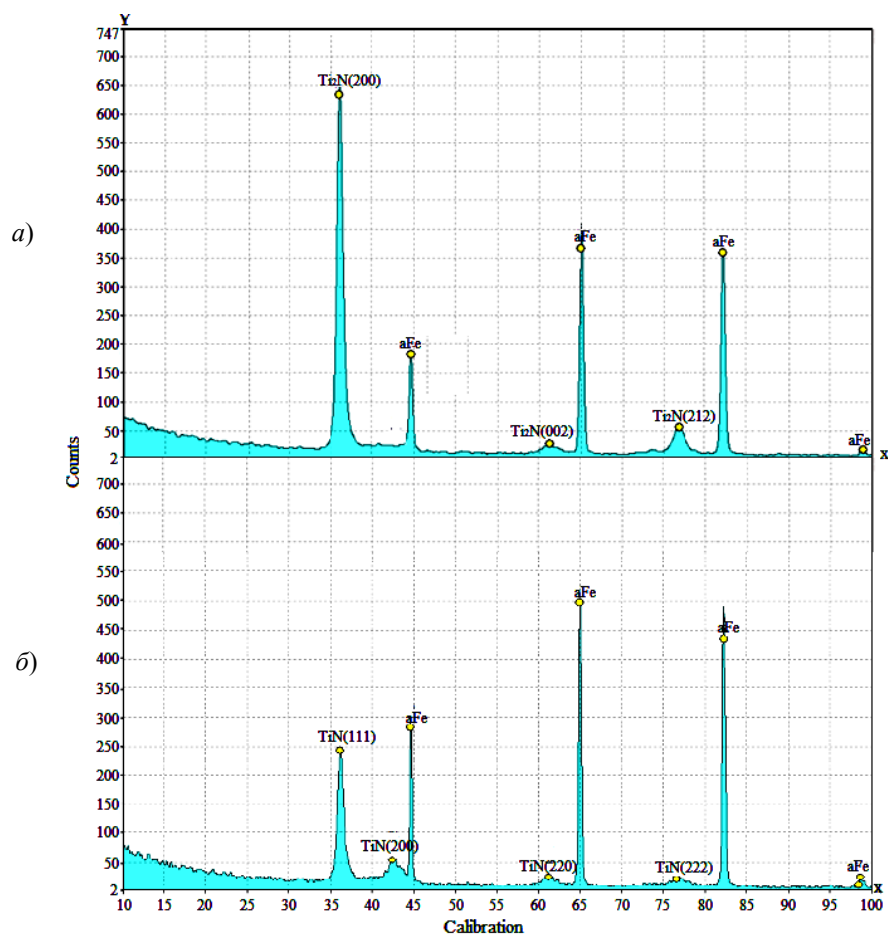


Рисунок 2.1 – Рентгеновская дифрактограмма покрытий TiN – TiCuN – TiN – TiCuN с различной толщиной слоев (таблица 2.1): а) образец 1, б) образец 2

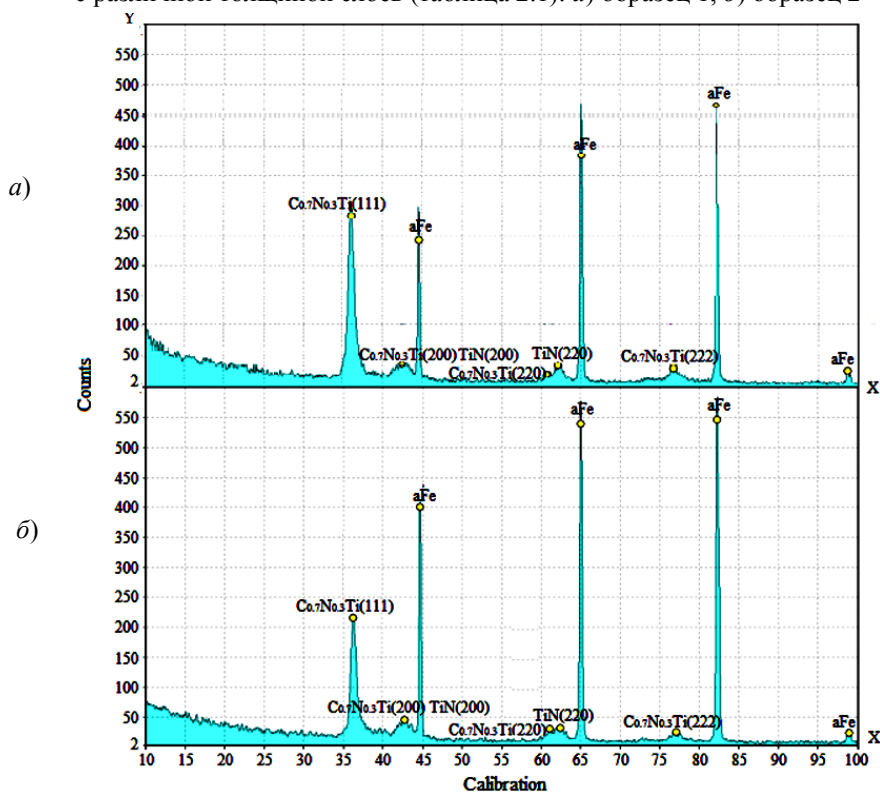


Рисунок 2.2 – Рентгеновская дифрактограмма покрытия системы TiN – TiCuN – TiCuCO с различной толщиной слоев (таблица 2.1): а) образец 3, б) образцы 4, 5

Как показали результаты рентгеноструктурного анализа многослойных покрытий системы TiN – TiCuN – TiCuCO, вне зависимости от количества слоев происходит формирование соединения TiCN, рефлексов, характерных для меди также не обнаружено (рисунок 2.2). Повидимому, медь, находясь в рентгеноаморфном состоянии, как и в предыдущих экспериментах, располагается по границам зерен TiN или TiCN.

Одним из определяющих условий долговременной эксплуатации деталей и инструмента является высокая адгезионная прочность покрытия к подложке. Основное влияние на величину адгезионной прочности оказывают физико-химические процессы, происходящие на границе раздела «покрытие – подложка». К ним относятся химическое взаимодействие и механическое зацепление, адсорбция молекул на границе раздела фаз, взаимная диффузия молекул контактирующих тел и другие.

Исследования показали, что все покрытия TiN – TiCuN – TiN – TiCuN и TiN – TiCuN – TiCuCO разрушаются по механизму изнашивания, связанному с пластической деформацией и образованием усталостных трещин в материале покрытия (рисунок 2.3).

Установлено, что для покрытий TiN – TiCuN – TiN – TiCuN характерны высокие значения адгезионной прочности ($L_c = 20,52 \text{ Н} - 26,08 \text{ Н}$). В тоже время различие в показателях для данных покрытий может вносить свой вклад в изменение их фазового состава от Ti_2N до TiN, соединения с другой кристаллической решеткой.

Так же стоит отметить, что покрытия, в которых присутствует слой, сформированный в среде углекислого газа TiCuCO, имеют меньшую адгезионную прочность, чем нитридные покрытия. Наблюдаемый эффект может говорить о более напряженном состоянии данных покрытий, на что также может указывать повышение их параметра решетки до 0,4298–0,4315 нм.

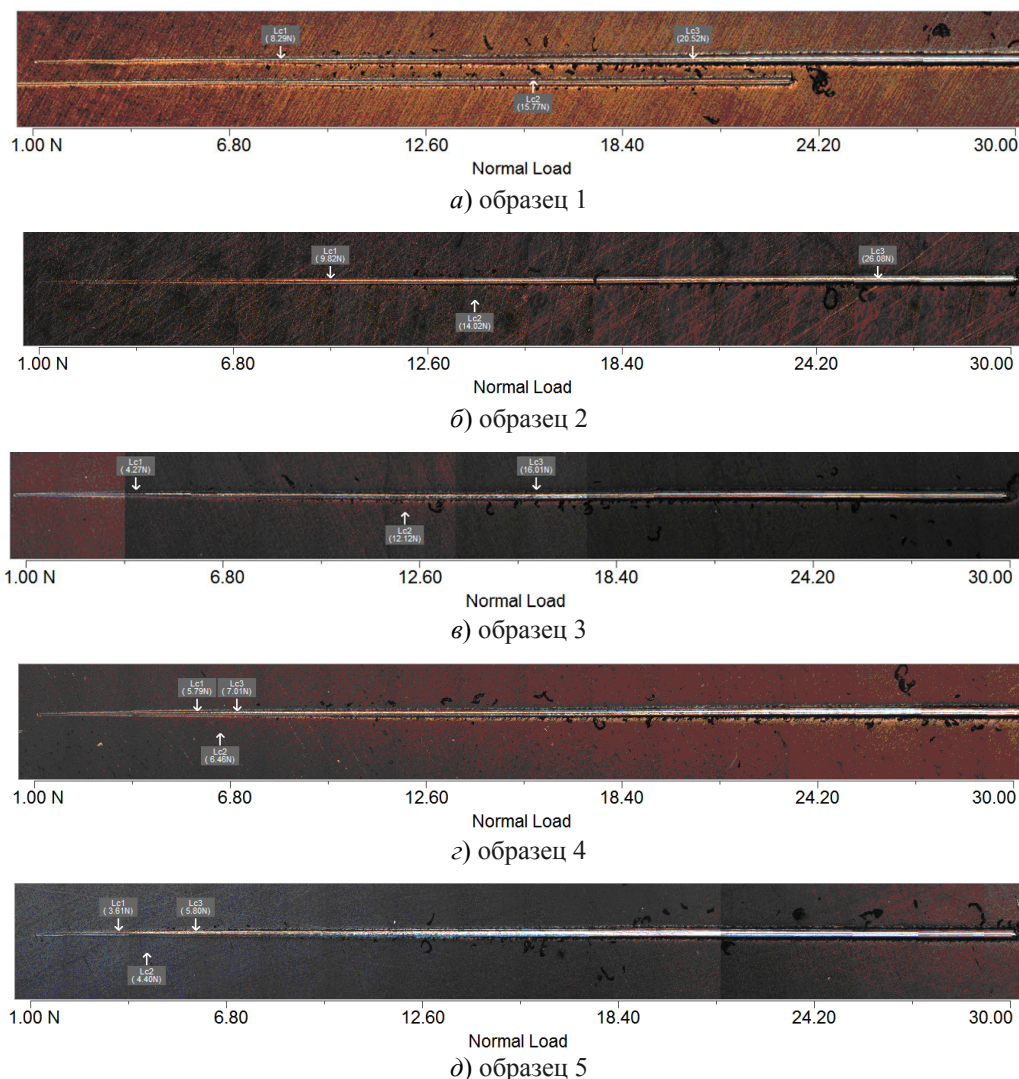


Рисунок 2.3 – Дорожки трения после испытаний на адгезионную прочность многослойных покрытий (таблица 2.1)

Таблица 2.3 – Электрохимические характеристики многослойных покрытий

Покрытие	Толщина слоев, нм	Электрохимические характеристики		
		$E_{см}$, мВ	E_k , мВ	$j_k \cdot 10^{-8}$, А/см ²
Сталь 12Х18Н10Т		–200	–230	13,2
1. TiN – TiCuN – TiN – TiCuN	150 – 150 – 150 – 150	–130	–95	3,42
2. TiN – TiCuN – TiN – TiCuN	100 – 200 – 100 – 200	–22	–64	1,7
3. TiN – TiCuN – TiCuCO	100 – 300 – 200	–69	–99	0,026
4. TiN – TiCuN – TiN – TiCuN – TiCuCO	50 – 150 – 50 – 150 – 200	–195	–65	0,29
5. TiN – TiCuN – TiN – TiCuN – TiN – TiCuN – TiCuCO	70 – 70 – 70 – 70 – 70 – 70 – 200	–72	–1	0,14

Увеличение количества слоев в архитектуру такого покрытия приводит к значительному ухудшению адгезионной прочности (с $L_c = 16,01$ Н до $L_c = 5,8$ Н) покрытий. По-видимому, уменьшение толщины слоев не приводит к формированию четких границ между ними, и причины наблюдаемого эффекта требуют дальнейшего изучения.

Определение электрохимических характеристик многослойных покрытий (стационарный электродный потенциал $E_{см}$, потенциал коррозии E_k , плотность анодного тока j_k) позволяет определить влияние покрытий на коррозионную стойкость системы покрытие-основа, провести сравнительный анализ защитной способности многослойных покрытий различной архитектуры и фазового состава (таблица 2.3).

Анализ электрохимических характеристик многослойных покрытий TiN – TiCuN – TiN – TiCuN показал, что данные покрытия повышают коррозионную стойкость стали 12Х18Н10Т, о чем говорят более низкие значения плотности тока для данных покрытий $(2,7–3,42) \cdot 10^{-8}$ А/см². Причем рост толщины наноразмерного слоя TiCuN в покрытиях приводит к снижению плотности тока и одновременному повышению значений потенциала коррозии, и, соответственно, к росту коррозионной стойкости.

Свой вклад в повышение коррозионной стойкости покрытий также может вносить и формирование четких границ раздела в их структуре, которые способствуют подавлению роста столбчатых зерен через всю толщину покрытия, снижая сквозную пористость, тем самым тормозя протекание коррозионных процессов (электрохимических процессов) (рисунок 2.4).

Изучение электрохимических характеристик покрытий TiN – TiCuN – TiCuCO показало, что увеличение толщины слоя TiCuN приводит к значительному снижению плотности тока анодного растворения (с $0,48 \cdot 10^{-8}$ А/см² до $0,026 \cdot 10^{-8}$ А/см²) и росту потенциала коррозии (с –139 мВ до –99 мВ), свидетельствуя об повышении коррозионной стойкости покрытий. Высокая стойкость покрытий обусловлена

снижением пористости за счет формирования в них микроструктурных барьеров и увеличения объемной доли TiCuN с наноразмерной структурой.

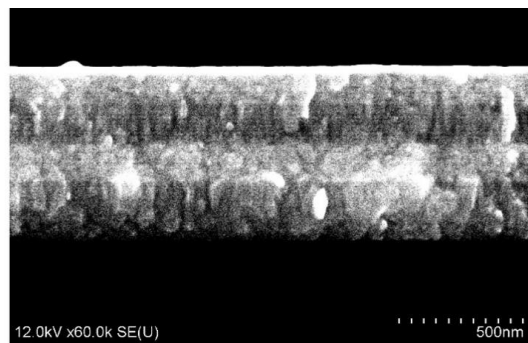


Рисунок 2.4 – Фрактограмма покрытий TiN – TiCuN – TiN – TiCuN

В то же время увеличение количества слоев в покрытиях TiN – TiCuN – TiCuCO обеспечивает снижение потенциала коррозии, но не приводит к значительному снижению плотности тока коррозии (с $0,48 \cdot 10^{-8}$ А/см² до $0,14 \cdot 10^{-8}$ А/см²). Это может быть обусловлено тем, что в покрытиях не успевают сформироваться четкие границы раздела между слоями по причине межслойной диффузии атомов при катодно-дуговом осаждении из-за недостаточного времени формирования слоев.

Заключение

Проведенные исследования фазового состава многослойных покрытий, осажденных методом вакуумно-дугового осаждения из сепарированных плазменных потоков, показали, что увеличение толщины слоя TiCuN в составе многослойного покрытия приводит к изменению его фазового состава от тетрагонального Ti₂N с преимущественной кристаллографической ориентацией (200) к твердому раствору на основе кубического TiN (111).

Установлено, что влияние на такие физико-химические свойства многослойных покрытий как адгезионная прочность и коррозионная

стойкость оказывают их архитектура и объемная доля слоев с многокомпонентной структурой. Использование в качестве дополнительного реакционного газа CO_2 при осаждении улучшает показатели коррозионной стойкости покрытий, но при этом существенно снижает показатели нагрузки до появления первой трещины.

Как показали эксперименты, увеличение количества слоев в составе многослойной композиции не приводит к улучшению ее физико-химических свойств, вследствие высокой диффузионной подвижности конденсируемых частиц, что не позволяет сформировать границы раздела между слоями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aljibori, H.S. Advances in corrosion protection coatings: A comprehensive review / H.S. Aljibori, A. Alamiery, A.A.H. Kadhum // *International Journal of Corrosion and Scale Inhibition*. – 2023. – Vol. 12, № 4. – 1476–1520.
2. Кулак, В.В. К вопросу о защите металлов от коррозии / В.В. Кулак, В.Д. Слабышева, С.В. Гиннэ // *Наука и молодежь: проблемы, поиски, решения: труды Всероссийской научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых*. – Новокузнецк: Издательский центр СибГИУ, 2016. – Вып. 20. – С. 19–22.
3. *Коррозия и защита металлических конструкций и оборудования: учебное пособие* / М.И. Жарский [и др.]. – Минск: Высшая школа, 2012. – 303 с.
4. *Плазменно-вакуумные покрытия* / Ж.А. Мрочек [и др.]. – Минск: Технопринт, 2004. – 368 с.
5. *Структурные аспекты износостойкости вакуумных ионно-плазменных покрытий* / В.И. Колесников [и др.] // *Физическая мезомеханика*. – 2020. – Т. 23, № 1. – С. 62–77.
6. Шулаев, В.М. Сверхтвердые наноструктурные покрытия в ННЦ ХФТИ / В.М. Шулаев, А.А. Андреев // *Физическая инженерия поверхности*. – 2008. – Т. 6, № 1–2. – С. 4–19.
7. Veprek, S. Industrial applications of superhard nanocomposite coatings / S. Veprek, M. Veprek-Heijman // *Surface and Coatings Technology*. – 2008. – Vol. 202. – P. 5063–5073.

8. *Nanostructured Coatings (Ti, Zr)N as a Barrier to Hydrogen Diffusion into Ti0.16Pd (wt.%) Alloy* / L. Aleksandr [et al.] // *Metals*. – 2021. – Vol. 11. – P. 1332.

9. Hasegawa, H. Effects of second metal contents on microstructure and micro-hardness of ternary nitride films synthesized by cathodic arc method / H. Hasegawa, T. Suzuki // *Surface and Coatings Technology*. – 2004. – Vol. 188–189. – P. 234–240.

10. Влияние толщины наноразмерного слоя на структуру и свойства многослойных покрытий TiN / MoN / А.Д. Погребняк [и др.] // *Письма в Журнал технической физики*. – 2014. – Т. 40, № 5. – С. 59–66.

11. Микроструктура и фазовый состав многослойных покрытий ZrN / SiNx, сформированных методом реактивного магнетронного осаждения / В.В. Углов [и др.] // *Журнал Белорусского государственного университета. Физика*. – 2019. – № 2. – С. 105–111.

12. Влияние потенциала смещения на фазовый состав, структуру и свойства вакуумно-дуговых многослойных покрытий CrAlN / CrAlY / А.А. Леонов [и др.] // *Materials. Technologies. Design*. – 2023. – Т. 5, № 2 (12). – С. 39–47.

13. Вакуумно-плазменные покрытия на основе многоэлементных нитридов / Н.А. Азаренков [и др.] // *Металлофизика и новейшие технологии*. – 2013. – Т. 35, № 8. – С. 1001–1024.

14. Formation of wear-resistant nanostructured TiN / Cu coatings / S.D. Latushkina [et al.] // *Journal of Friction and Wear*. – 2016. – Vol. 37, № 1. – P. 27–31.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Т23РНФМ-012.

Поступила в редакцию 17.07.2025.

Информация об авторах

Белый Алексей Владимирович – академик, главный научный сотрудник
Латушкина Светлана Дмитриевна – к.т.н., доцент
Посылкина Ольга Ивановна – к.т.н.
Сечко Иван Андреевич – аспирант
Комаровская Виктория Маратовна – к.т.н., доцент

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfint@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfint.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;
- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;
- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e. g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).