ISSN 2077-8708

Проблемы физики, математики и техники

№2 (63) 2025

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ»

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:
С.А. Хахомов (Беларусь)

ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА:
А.В. Рогачёв (Беларусь)
Д.Л. Коваленко (Беларусь)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)
М.А. Ярмоленко (Беларусь)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины
ул. Советская, 104,
246028, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: http://pfmt.gsu.by

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS»

EDITOR-IN-CHIEF:
S.A. Khakhomov (Belarus)

DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:
A.V. Rogachev (Belarus)
D.L. Kovalenko (Belarus)

EDITORIAL BOARD:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)
M.A. Yarmolenko (Belarus)

EXECUTIVE SECRETARY:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

EDITION ADDRESS:
Francisk Skorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246028, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: http://pfmt.gsu.by

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 2 (63) 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

Ахраменко Н.А., Буй М.В. Некоторые особенности решения физических задач с бесконечными величинами …… 7

Будникова Д.А. Собственные частоты колебаний пятислойного стержня …… 11

Гавриш В.Ю., Андреев В.В. Форм-факторы нейтральных псевдоскалярных $P^0(q\overline{q})$ -мезонов в составной релятивистской кварковой модели ……. 16

Гиргель С.С. Вращающиеся скалярные гауссовы пучки Арно со сложным астигматизмом .. 22

Гришечкин Ю.А., **Капшай В.Н.** Точное решение квазипотенциального уравнения с потенциалом Кулона в импульсном представлении для связанных *s*-состояний с нулевой энергией . 27

Новикова О.В., Тюменков Г.Ю. Джоуль – Томсоновское расширение: жидкость Редлиха – Квонга и заряженная АдС чёрная дыра …….. 30

Руденков А.С., Рогачёв А.В., Ярмоленко М.А., Пилипцов Д.Г. Влияние условий и режима формирования подслоя на основе этилцеллюлозы и серной кислоты на структуру углеродных покрытий ……. 35

МАТЕМАТИКА

Гальмак А.М. Смежные классы, являющиеся полиадическими подгруппами ……. 44

Дергачёва И.М., Задорожнюк Е.А., Шабалина И.П. Конечные группы с частично *p*-субнормальными подгруппами Шмидта …….. 51

Старовойтов А.П., Кухлич М.А., Рябченко Н.В. Об асимптотике сходимости тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Якоби и нелинейных аппроксимаций Эрмита – Чебышёва 56

ТЕХНИКА

Купо А.Н., Никитюк Ю.В., Шершнев Е.Б., Емельянов В.А. Нейросетевое моделирование параметров лазерной обработки алмазов в технологиях электроники ……. 62

Латушкина С.Д., Романов И.М., Посылкина О.И., Сечко И.А., Комаровская В.М. Применение сепарирующих устройств для формирования многокомпонентных покрытий из плазменных потоков вакуумно-дугового разряда …….. 67

Осипов А.Н., Хазановский И.О., Пацеев А.В. Электростимуляция нервно-мышечного аппарата многоэлементным электродом ……. 74

Преображенский А.П., Аветисян Т.В., Преображенский Ю.П. Проектирование металло-диэлектрической антенны ……. 79

Шершнев Е.Б., Купо А.Н. Оптимизация процессов обработки хрупких неметаллических материалов в производстве изделий электронной техники ……... 84

ИНФОРМАТИКА

Прохоренко В.А., Смородин В.С. Технология адаптивного управления автоматизированными производственными системами на основе нейронных сетей …… 91

Чагочкин А.А. Дискретная оптимизация для задачи факторизации …….. 97

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки:
– технические;
– физико-математические.

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21. Приказы Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 31.12.2020 № 338, № 339.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е.А. Ружицкая*
Корректоры *И.А. Хорсун*, *Т.А. Фицнер*
Дизайн обложки *А.В. Ермаков*

Подписано в печать 11.06.25. Формат 60×84 ⅛. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 12,32. Уч.-изд. л. 10,73. Тираж 18 экз. Заказ № 340.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013 г.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий в качестве:
издателя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013 г.;
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017 г.
Ул. Советская, 104, 246028, Гомель.

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2025
© Проблемы физики, математики и техники, 2025
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2025

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December 2009

Released quarterly

№ 2 (63) 2025

CONTENTS

PHYSICS

Akhramenko N.A., Bui M.V. Some features of solving physical problems with infinite quantities 7

Budnikova D.A. Natural frequencies of vibration of a five-layer rod ……... 11

Haurysh V.Yu., Andreev V.V. Pseudoscalar $P^0(q\bar{q})$ -mesons form-factor in composite relativistic quark model ……. 16

Girgel S.S. Arnaud's rotating scalar Gaussian beams with complex astigmatism ……. 22

Grishechkin Yu.A., Kapshai V.N. Exact solution of the quasipotential equation with the Coulomb potential in the momentum representation for coupled *s*-states with energy equal to zero ……. 27

Novikava V.U., Tyumenkov G.Yu. Joule – Thomson expansion: Redlich – Kwong fluid and charged AdS black hole ……... 30

Rudenkov A.S., Rogachev A.V., Yarmolenko M.A., Piliptsou D.G. Influence of conditions and mode of formation of a sublayer based on ethyl cellulose and sulfuric acid on the structure of carbon coatings …… 35

MATHEMATICS

Gal'mak A.M. Cosets that are polyadic subgroups ……... 44

Dergacheva I.M., Zadorozhnyuk E.A., Shabalina I.P. Finite groups with partially *p*-subnormal Schmidt subgroups …….. 51

Starovoitov A.P., Kukhlich M.A., Ryabchenko N.V. On the asymptotics of convergence of trigonometric Hermite – Jacobi approximations and nonlinear Hermite – Chebyshev approximations . 56

TECHNICS

Kupo A.N., Nikityuk Yu.V., Shershnev E.B., Emelyanov V.A. Neural network modeling of laser processing parameters for diamonds in electronics technologies ……... 62

Latushkina S.D., Romanov I.M., Posylkina O.I., Sechko I.A., Komarovskaya V.M. Application of separating devices for forming multi-component coatings from plasma flow of vacuum arc discharge …… 67

Osipov A.N., Khazanovsky I.O., Patseev A.V. Electrostimulation of the neuromuscular apparatus by a multi-element electrode ……... 74

Preobrazhensky A.P., Avetisyan T.V., Preobrazhensky Yu.P. Design of a metal-dielectric antenna ……. 79

Shershnev E.B., Kupo A.N. Optimization of brittle non-metallic materials processing in the production of electronic products …….. 84

INFORMATION SCIENCE

Prokhorenko V.A., Smorodin V.S. Technology of adaptive control of automated production systems based on neural networks ……... 91

Chagochkin A.A. Discrete optimization for the factorization problem ……. 97

Founder – Francisk Skorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science:

– Technics;

– Physics and Mathematics.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 537.2 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_7
EDN: SLSGBO

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С БЕСКОНЕЧНЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ

Н.А. Ахраменко, М.В. Буй

Белорусский государственный университет транспорта, *Гомель*

SOME FEATURES OF SOLVING PHYSICAL PROBLEMS WITH INFINITE QUANTITIES

N.A. Akhramenko, M.V. Bui

Belarusian State University of Transport, *Gomel*

Аннотация. В разнообразных задачах по физике часто используются какие-либо величины, являющиеся бесконечными. Встречаются случаи, когда сразу несколько величин стремятся к бесконечности. Иногда встречаются ситуации, требующие более аккуратного подхода при решении. В данной работе на примере задачи из раздела «Электростатика» рассматриваются некоторые особенности решения при использовании бесконечных величин.

Ключевые слова: *электрическое поле*, *напряженность*, *полуплоскость*, *поверхностная плотность заряда.*

Для цитирования: *Ахраменко*, *Н.А*. Некоторые особенности решения физических задач с бесконечными величинами / Н.А. Ахраменко, М.В. Буй // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 7–10. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_7. – EDN: SLSGBO

Abstract. In various problems in physics, some quantities that are infinite are often used. There are cases when several quantities simultaneously tend to infinity. Sometimes there are situations that require a more careful approach to solving. In this paper, using the example of a problem from the section “Electrostatics”, some features of the solution when using infinite quantities are considered.

Keywords: *electric field*, *intensity*, *half-plane*, *surface charge density.*

For citation: *Akhramenko*, *N.A*. Some features of solving physical problems with infinite quantities / N.A. Akhramenko, M.V. Bui // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 2 (63). – P. 7–10. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_7. – EDN: SLSGBO

Introduction

When considering physical problems, we often encounter problems where one of the parameters (or several parameters) is infinite. Sometimes we encounter situations that require a more careful approach when solving problems with infinite quantities. As an example, let us consider the following problem (offered at the Moscow City Physics Olympiad) [1].

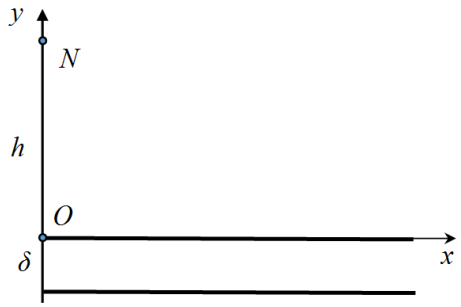


Figure 0.1 – Uniformly charged half-planes (thickened segments), perpendicular to the plane of the drawing

Two parallel half-planes are uniformly charged with charge density + σ on the upper half-plane and − σ on the lower half-plane. Find the magnitude and direction of the electric field strength E at point N, which is located at a height h above the edge of the half-planes (Figure 0.1). The distance between the half-planes δ is small compared to h.

In this problem, the geometric dimensions of the half-planes are infinite parameters. Let us consider possible options for analyzing and solving this problem.

1 Preliminary analysis using the formula for an infinite plane

Let us consider the possibility of using the formula for the electric field strength of an infinite plane $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ [2]–[6]. The field strength in this case is perpendicular to the plane (i.e. there is only a component perpendicular to the plane, and the component parallel to the plane is zero). Then for half-planes (upper and lower, respectively), for

© *Akhramenko N.A.*, *Bui M.V.*, 2025

reasons of symmetry, there will be components perpendicular to both planes and equal to

$$E_{1\perp} = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} \text{ and } E_{2\perp} = -\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}.$$

The resulting component perpendicular to both planes will be equal to zero due to the fact that the half-planes have different charge signs with the same absolute value. As for the component parallel to both half-planes (along the *OX* axis), the question remains open. Thus, the use of the formula for the field of an infinite plane as applied to this problem shows that the component perpendicular to the plane will be equal to zero ($E_\perp = 0$), which will be used further (we will find only the component of the vector $\vec{E}$ parallel to the half-planes).

2 Solution with consideration of mutually compensating strips

Let us draw two planes through point *N*, perpendicular to the plane of the drawing (Figure 2.1) so that they form a small angle *d*φ with each other and pass through both charged half-planes.

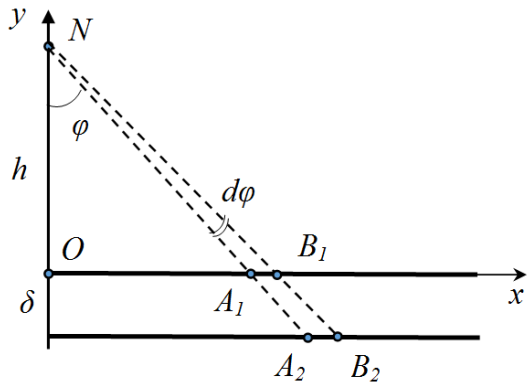


Figure 2.1 – Two planes (dashed lines) perpendicular to the plane of the drawing and intersecting both charged half-planes

These planes will cut out two narrow strips A_1B_1 and A_2B_2 in the charged half-planes, perpendicular to the plane of the drawing (Figure 2.1). It is known that an infinitely long uniformly charged thread creates an electric field of intensity [2]–[6]

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r},$$

where τ – is the linear charge density of the thread, r – is the distance from the thread to the point under consideration.

The strips A_1B_1 and A_2B_2 can be considered infinitely narrow, and then they create the same field at point *N* as a uniformly charged thread. That is, the strips A_1B_1 and A_2B_2 will create a field of intensity at point *N*

$$E_1 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau_1}{|NA_1|} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma|A_1B_1|}{|NA_1|}$$

и

$$E_2 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau_2}{|NA_2|} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma|A_2B_2|}{|NA_2|},$$

where $\tau_1 = \sigma|A_1B_1|$ and $\tau_2 = \sigma|A_2B_2|$.

In this case, the vector $\vec{E}_1$ is directed from the strip A_1B_1, and the vector $\vec{E}_2$ is directed toward the strip A_2B_2. From the similarity of the triangles A_1B_1N and A_2B_2N, we obtain that $\frac{|A_1B_1|}{|NA_1|} = \frac{|A_2B_2|}{|NA_2|}$, therefore, the fields created by both strips at point *N* compensate each other due to the different charges of the half-planes, and the resulting field is zero.

Such reasoning is valid for all pairs of strips cut from the upper and lower half-planes. If the segment A_1B_1 tends to infinity, then the segment A_2B_2 will also tend to infinity, i. e. both half-planes will be covered by these paired strips in this partition. Such partitions into paired strips can cover the upper and lower half-planes.

In this case it may seem that the resulting electric field strength at point *N* is zero. However, this approach is incorrect, since points B_1 and B_2 simultaneously tend to infinity according to different laws (point B_2 of the lower half-plane tends to infinity faster). The correct approach is one in which the points of both half-planes simultaneously tend to infinity according to the same law.

Let us consider the part of the upper and lower half-planes located at the same distance from the *OY* axis (same width $|OB_1| + \Delta l$)

When dividing the upper and lower half-planes into paired strips, it turns out that for the outermost strip of width Δl (Figure 2.2) from the upper half-plane, there is no paired strip on the lower half-plane. Therefore, the sought field strength *E* at point *N* will be equal to the strength created at this point by a strip of width Δl.

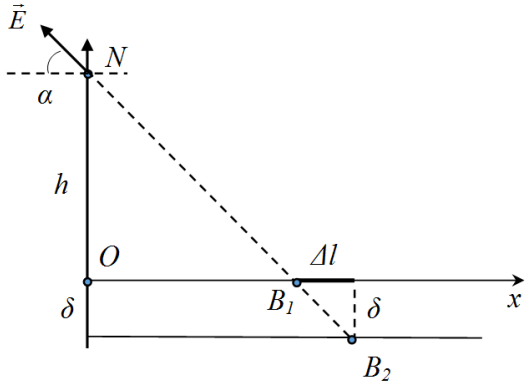


Figure 2.2 – Field strength $\vec{E}$ at point *N* created by a strip of width Δl from the upper half-plane.

The magnitude of the field strength *E* at point *N* will be equal to

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\Delta l}{|NB_1|}.$$

Projection of a vector $\vec{E}$ onto the *OX* axis

$$E_x = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\Delta l}{|NB_1|}\cos\alpha = \\ = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\Delta l}{|NB_1|}\frac{|OB_1|}{|NB_1|} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\Delta l|OB_1|}{|NB_1|^2}. \quad (2.1)$$

From the constructions in Figure 2.2 it follows

$$\frac{\delta}{\Delta l} = \frac{h}{|OB_1|} \text{ or } \Delta l = \frac{\delta}{h}|OB_1|.$$

Substituting Δl into expression (2.1) we obtain

$$E_x = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma|OB_1|}{|NB_1|^2}\frac{\delta}{h}|OB_1| = \\ = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma|OB_1|^2}{|NB_1|^2}\frac{\delta}{h}. \quad (2.2)$$

As point B_2 tends to infinity, we obtain that $|OB_1| \approx |NB_1|$ and then from expression (2.2) it follows that

$$E_x = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\delta}{h}. \quad (2.3)$$

Consequently, the vector of the electric field intensity created by the system under consideration at point *N* is directed parallel to the half-planes and opposite to the *OX* axis. In absolute value, it is equal to $\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\delta}{h}$. It is precisely this type of answer to the problem under consideration that is given in [1].

3 Solution with finding the sum of the intensities of both half-planes

We will find only the components of the vector $\vec{E}$ parallel to both half-planes along the *OX* axis (in point 1 it was determined that $E_\perp = 0$). Let us consider the upper half-plane (Figure 3.1).

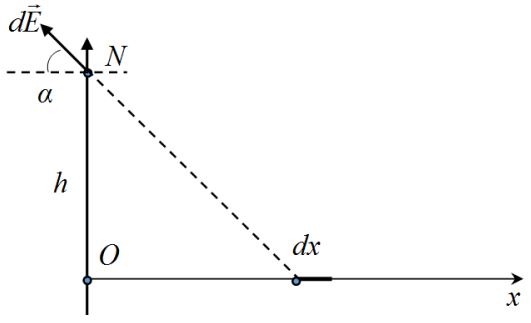


Figure 3.1 – A strip of the upper half-plane of width *dx*, perpendicular to the plane of the drawing.

A strip of width *dx* creates a field of intensity at point *N*

$$dE = \frac{\sigma dx}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{h^2 + x^2}}.$$

Component E_{1x} parallel to the half-plane along the *OX* axis (projection of the vector $\vec{E}$ onto the *OX* axis)

$$dE_{1x} = -\frac{\sigma dx}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{h^2 + x^2}}\cos\alpha = \\ = -\frac{\sigma x dx}{2\pi\varepsilon_0(h^2 + x^2)}. \quad (3.1)$$

Integrating expression (3.1) in the range from 0 to *x*, we obtain

$$E_{1x} = -\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^x \frac{xdx}{(h^2 + x^2)} = \\ = -\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\ln(h^2 + x^2)\Big|_0^x = -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h^2 + x^2}{h^2}. \quad (3.2)$$

Similarly, for the lower half-plane, replacing *h* with $h + \delta$ and σ with $-\sigma$, we obtain

$$E_{2x} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^x \frac{xdx}{(h+\delta)^2 + x^2} = \\ = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{(h+\delta)^2 + x^2}{(h+\delta)^2}. \quad (3.3)$$

If we set the *x* coordinate to infinity separately in expressions (3.2) and (3.3), we obtain that $E_{1x} \to -\infty$ and $E_{2x} \to \infty$. Therefore, it turns out that $E_x = E_{1x} + E_{2x}$ and the uncertainty is of the form $\infty - \infty$.

However, if we write the resulting tension in the form $E_x = E_{1x} + E_{2x}$, then using (3.2) and (3.3), we obtain

$$E_x = -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h^2 + x^2}{h^2} + \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{(h+\delta)^2 + x^2}{(h+\delta)^2}. \quad (3.4)$$

From (3.4) after transformations we obtain

$$E_x = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{(h+\delta)^2 + x^2}{(h+\delta)^2}\frac{h^2}{h^2 + x^2}\right]. \quad (3.5)$$

In expression (3.5) we can now let the *x* coordinate tend to infinity.

$$E_x = \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{(h+\delta)^2 + x^2}{(h+\delta)^2}\frac{h^2}{h^2 + x^2}\right]\right\} = \\ = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h^2}{(h+\delta)^2}. \quad (3.6)$$

Let us carry out transformations in expression (3.6)

$$E_x = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h^2}{(h+\delta)^2} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h}{h+\delta} = \\ = -\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h+\delta}{h} = -\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(1 + \frac{\delta}{h}\right). \quad (3.7)$$

Thus, the resulting electric field strength at point *N* is equal to

$$E_x = -\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(1 + \frac{\delta}{h}\right). \quad (3.8)$$

The minus sign indicates that the vector $\vec{E}$ is directed against the *OX* axis.

4 Discussion of solution options

In the solution to the problem in paragraph 2 (this solution is similar to that considered in [1]), the situation is not analyzed and it is not taken into account that the strip of width Δl, as it moves away from the boundary of the half-planes, also increases in width to infinity. It turns out that from the original problem with infinities we come to another problem with infinities (the field strength of an infinitely distant half-plane). And then the question arises about the possibility of using the formula

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r}$$

for calculations, since the strip can no longer be considered narrow.

From the constructions in Figure 4.1 we can write

$$\frac{h}{x_1} = \frac{\delta}{x_2 - x_1} \Rightarrow \; x_2 - x_1 = \frac{\delta x_1}{h} = \Delta l \Rightarrow$$

$$x_2 = x_1\left(1 + \frac{\delta}{h}\right). \qquad (4.1)$$

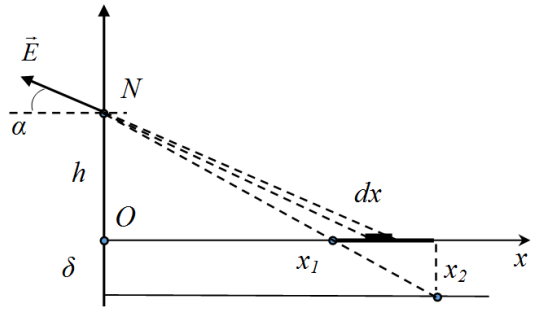


Figure 4.1 – A strip of the upper half-plane of width dx, located between points x_1 and x_2 ($x_2 - x_1 = \Delta l$)

Electric field strength E_x in point N

$$E_x = -\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\int_{x_1}^{x_2}\frac{x dx}{h^2 + x^2}. \qquad (4.2)$$

Substituting the coordinate x_2 from (4.1) into the upper limit of the integral (4.2), we obtain

$$E_x = -\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\int_{x_1}^{x_1(1+\delta/h)}\frac{x dx}{h^2 + x^2}. \qquad (4.3)$$

Let us calculate the integral (4.3)

$$E_x = -\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\int_{x_1}^{x_1(1+\delta/h)}\frac{x dx}{h^2 + x^2} =$$

$$= -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\ln(h^2 + x^2)\Big|_{x_1}^{x_1(1+\delta/h)} =$$

$$= -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h^2 + x_1^2(1+\delta/h)^2}{h^2 + x_1^2}. \qquad (4.4)$$

Let us tend the coordinate x_1 to infinity in expression (4.4)

$$E_x = \lim_{x_1\to\infty}\left[-\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{h^2 + x_1^2(1+\delta/h)^2}{h^2 + x_1^2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_x = -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(1+\frac{\delta}{h}\right)^2 = -\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(1+\frac{\delta}{h}\right). \qquad (4.5)$$

Thus, taking into account that the strip Δl actually tends to infinity in width at $x \to \infty$, we obtain an answer corresponding to (3.8). This means that the answer (2.3) is inaccurate, although at $\delta << h$ the differences are insignificant.

From the above it follows that when considering problems with infinite quantities, it is advisable to consider the different possibilities of these quantities tending to infinity and to take into account the nuances that arise.

REFERENCES

1. *Задачи Московских городских олимпиад по физике* 1986–2005 / С.Д. Варламов, В.И. Зинковский, М.В. Семёнов [и др.]; под ред. М.В. Семёнова, А.А. Якуты. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: МЦНМО, 2006. – 621 с.

2. *Raymond*, *A. Serway. Physics for Scientists and Engineers* (*with PhysicsNOW and info Trac*) / A.S. Raymond, W.J. John: 6th ed., Thomson Brooks / Cole, 2004. – 1296 p.

3. *Детлаф*, *А.А*. Курс физики: учебное пособие для ВТУЗов / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – 4-е изд., испр. – Москва: Высшая школа, 2002. – 718 с.

4. *Савельев*, *И.В*. Курс общей физики. В 3-х томах. Т. 2: Электричество и магнетизм. Волны. Оптика / И.В. Савельев. – 2-е изд., перераб. – Москва: Наука, 1982. – 496 с.

5. *Трофимова*, *Т.И*. Курс физики: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова. – 17-е изд., стер. – Москва: Издательский центр «Академия», 2008. – 560 с.

6. *Шиляева*, *К.П*. Физика. Краткая теория и задачи: пособие / К.П. Шиляева, И.О. Деликатная, Н.А. Ахраменко. – Гомель: БелГУТ, 2021. – 211 с.

Поступила в редакцию 12.03.2025.

Информация об авторах

Ахраменко Николай Арсеньевич – к.т.н., доцент
Буй Михаил Владимирович – к.ф.-м.н., доцент

ФИЗИКА

УДК 539.3 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_11
EDN: AXVKJG

СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ПЯТИСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ

Д.А. Будникова

Белорусский государственный университет транспорта, *Гомель*

NATURAL FREQUENCIES OF VIBRATION OF A FIVE-LAYER ROD

D.A. Budnikova

Belarusian State University of Transport, *Gomel*

Аннотация. Рассмотрена задача о собственных колебаниях пятислойного симметричного по толщине стержня с двумя заполнителями. Несущие слои предполагаются тонкими, высокопрочными. Для них приняты гипотезы Бернулли о поперечных сечениях плоских и перпендикулярных деформированной осевой линии, после приложения нагрузки. В относительно толстых легких заполнителях выполняется гипотеза Тимошенко, согласно которой сечение остается плоским и несжимаемым, но поворачивается на некоторый дополнительный угол. Дифференциальные уравнения колебаний получены вариационным методом с учетом поперечных сил инерций. Выведено трансцендентное уравнение для собственных чисел стержня с жестко заделанными торцами, получены его численные решения. Исследована зависимость собственных частот колебаний от толщины внешних несущих слоев при различных материалах слоев стержня.

Ключевые слова: *симметричный пятислойный стержень*, *два заполнителя*, *собственные числа*, *частоты колебаний*, *численные результаты*.

Для цитирования: *Будникова*, *Д.А*. Собственные частоты колебаний пятислойного стержня / Д.А. Будникова // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 11–15. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_11. – EDN: AXVKJG

Abstract. The problem of natural vibrations of a five-layer symmetrical in thickness rod with two fillers is considered. The bearing layers are assumed to be thin, high-strength. The Bernoulli hypotheses on cross-sections of flat and perpendicular to the deformed axial line, after load application, are accepted for them. In relatively thick lightweight aggregates, the Timoshenko hypothesis is fulfilled, according to which the cross-section remains flat and incompressible, but is rotated by some additional angle. The differential equations of the vibrations are obtained with the variational method, taking into account transverse forces of inertia. A transcendental equation for the eigenvalues of a rod with rigidly sealed ends is is derived, and its numerical solutions are obtained. The dependence of the natural frequencies of vibrations on the thickness of external bearing layers for different materials of the rod layers is investigated.

Keywords: *symmetric five-layer rod*, *two fillers*, *eigenvalues*, *vibration frequencies*, *numerical results*.

For citation: *Budnikova*, *D.A*. Natural frequencies of vibration of a five-layer rod / D.A. Budnikova // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 2 (63). – P. 11–15. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_11 (in Russian). – EDN: AXVKJG

Введение

Подходы к разработке методик постановки и решения краевых задач для тонкостенных элементов конструкций, учитывающие воздействие внешней среды, предложены в монографиях [1]–[5]. Кинематические гипотезы, как правило, учитывают относительный сдвиг и работу касательных напряжений в заполнителе, тонкость и жесткость несущих слоев.

В статьях [6], [7] исследовано деформирование композитных круговых пластин со сжимаемым заполнителем и при неосесимметричном нагружении. Сжимаемость материала заполнителя описывает функция, линейная по толщине слоя. Изгиб пятислойной круговой пластины с двумя жесткими заполнителями рассмотрен в публикациях [8]–[9]. Работы [10], [11] посвящены исследованию изгиба трехслойных кольцевых пластин, связанных с упругим основанием Винклера. Влияние сдвиговых свойств материала основания на напряженно-деформированное состояние трехслойных пластин (НДС) анализировалось в [12]–[15]. Статья [16] посвящена исследованию влияния температуры на НДС трехслойного стержня с жестким заполнителем. Получены аналитические решения указанных краевых задач при локальных и непрерывных нагрузках. Проведена их численная адаптация.

Публикации [17]–[20] посвящены анализу динамического поведения трехслойных цилиндрических оболочек. Геометрические гипотезы соответствуют ломаной линии, заполнители приняты легкими, т. е. в них не учитывается работа касательных напряжений. Аналитические решения, описывающие собственные и вынужденные колебания, отклик на нестационарные нагружения, получены в виде разложения искомых перемещений в ряд по системам собственных

© *Будникова Д.А.*, 2025

функций. Колебания круговой пятислойной пластины с двумя легкими заполнителями исследованы в [21], [22].

Здесь приведена постановка и указана методика решения начально-краевой задачи о собственных колебаниях симметричного по толщине пятислойного стержня.

1 Постановка задачи

Декартова система координат в пятислойном стержне связана со срединной плоскостью внутреннего несущего слоя (рисунок 1.1). В тонких несущих слоях выполняются гипотезы Бернулли, в соответствии с которыми поперечные сечения слоев 1, 2, 4 остаются плоскими и нормальными деформированной осевой линии после воздействия нагрузки. В сравнительно толстых заполнителях 3, 5 справедливы гипотеза Тимошенко: поперечные сечения после приложения нагрузки остаются плоскими, несжимаемыми по толщине, но поворачиваются на дополнительный угол $\psi(x, t)$. Искомыми функциями являются прогиб стержня $w(x, t)$ и относительный сдвиг $\psi(x, t)$. Нагрузка $q(x,t)$ предполагается распределенной по верхней плоскости стержня.

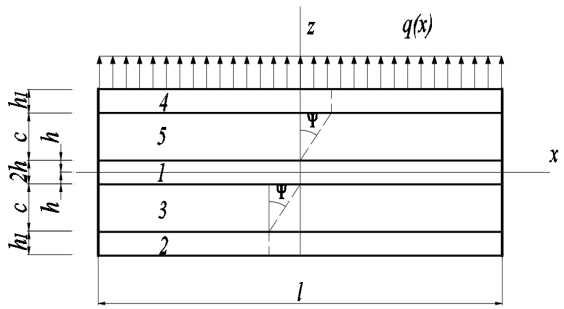


Рисунок 1.1 – Нумерация слоев и геометрия пятислойного стержня

Выражения для продольных перемещений $u_x^{(k)}$ (k = 1, 2, 3, 4, 5 – номер слоя) через искомые функции $w(x, t)$, $\psi(x, t)$ получим, исходя из принятых гипотез:

$$u_x^{(4)} = -zw_{,x} + c\psi, \quad (c + h \le z \le c + h + h_1),$$
$$u_x^{(5)} = -zw_{,x} + (z - h)\psi, \quad (h \le z \le c + h),$$
$$u_x^{(1)} = -zw_{,x}, \quad (-h \le z \le h),$$
$$u_x^{(3)} = -zw_{,x} + (z + h)\psi, \quad (-h - c \le z \le -h),$$
$$u_x^{(2)} = -zw_{,x} - c\psi, \quad (-h - h_1 - c \le z \le -h - c), \quad (1.1)$$

где z – координата рассматриваемой точки поперечного сечения; $c\psi$ – величины смещения внешних несущих слоев за счет сдвига в заполнителях; запятая в нижнем индексе обозначает производную по координате x.

Продольные деформации следуют из соотношений Коши [1] и перемещения в слоях стержня (1.1):

$$\varepsilon_x^{(4)} = -zw_{,xx} + c\psi_{,x}, \ \varepsilon_{xz}^{(4)} = 0,$$
$$\varepsilon_x^{(5)} = -zw_{,xx} + (z - h)\psi_{,x}, \ \varepsilon_{xz}^{(5)} = \frac{\psi}{2},$$
$$\varepsilon_x^{(1)} = -zw_{,xx}, \ \varepsilon_{xz}^{(1)} = 0,$$
$$\varepsilon_x^{(3)} = -zw_{,xx} + (z + h)\psi_{,x}, \ \varepsilon_{xz}^{(3)} = \frac{\psi}{2},$$
$$\varepsilon_x^{(2)} = -zw_{,xx} - c\psi_{,x}, \ \varepsilon_{xz}^{(2)} = 0. \quad (1.2)$$

После определения продольных перемещений и деформаций, напряжения в слоях определяются с помощью закона Гука:

$$s_{xx}^{(k)} = 2G_k \vartheta_{xx}^{(k)}, \ \sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)},$$
$$s_{xz}^{(3)} = 2G_3 \vartheta_{xz}^{(3)}, \ s_{xz}^{(5)} = 2G_5 \vartheta_{xz}^{(5)}, \quad (1.3)$$

где $s_{xx}^{(k)}$, $s_{xz}^{(3)}$, $s_{xz}^{(5)}$ – компоненты девиатора тензора напряжений, $\sigma^{(k)} = \frac{1}{3}\sigma_{xx}^{(k)}$; $\vartheta_{xx}^{(k)}$, $\vartheta_{xz}^{(3)}$, $\vartheta_{xz}^{(5)}$ – компоненты девиатора тензора деформаций, $\varepsilon^{(k)} = \frac{1}{3}\varepsilon_{xx}^{(k)}$; G_k, K_k – модули упругости материалов слоев (сдвига и объемного деформирования).

Для получения системы дифференциальных уравнений, описывающей поперечные колебания рассматриваемого стержня, используется вариационный принцип Лагранжа с добавлением сил инерции:

$$\delta A = \delta W, \quad (1.4)$$

где δA – виртуальная работа внешней нагрузки, включая силы инерции; δW – вариация работы внутренних усилий

$$\delta A = \iint_S (q - M_0 \ddot{w})\delta w dS = \int_0^l (b_0 q - M_0 \ddot{w})\delta w dx,$$
$$\delta W = \iint_S \sum_{k=1}^{5} \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} \delta \varepsilon_x^{(k)} dz dS. \quad (1.5)$$

$M_0 \ddot{w}$ – силы инерции в поперечном направлении, точка вверху обозначает производную по времени, $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3 + \rho_4 h_4 + \rho_5 h_5) b_0 l$, ρ_k – плотность материала, b_0 – ширина поперечного сечения; δ – оператор вариации.

Заметим, что работа касательных напряжений в легком заполнителе в (1.5) не учитывается в связи с их малостью.

Подставим работы (1.5) в уравнение (1.4) с учетом виртуальных деформаций, следующих из (1.2). Выполнение уравнения (1.4) возможно только при равенстве нулю коэффициентов при вариациях искомых функций. Из этого условия получаем уравнения движения:

$$H_{,x} = 0, \ M_{,xx} - M_0 \ddot{w} = -b_0 q, \quad (1.6)$$

где $H_{,x}$, $M_{,xx}$ – обобщенные (суммарные) внутренние усилия и моменты, определяемые формулами

$$M_x = \sum_{k=1}^{5} M_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} z dz,$$
$$N_x = \sum_{k=1}^{5} N_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} dz,$$

$$H = (M_x^{(3)} + M_x^{(5)}) + c(N_x^{(4)} - N_x^{(2)}) + h(N_x^{(3)} - N_x^{(5)}).$$

Для получения уравнений колебаний пятислойного стержня в искомых функциях необходимо выразить обобщенные внутренние усилия через $w(x, t)$, $\psi(x, t)$. С помощью закона Гука (1.3) имеем

$$M_x = -\left[\frac{2}{3}K_2^+ c(c^2 + 3hc + 3h^2) + K_1^+ \frac{2h^3}{3} + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{3}K_3^+ h_1\left(h_1^2 + 3(h_1 + h + c)(h + c)\right)\right]w_{,xx} -$$
$$-\left[K_3^+ h_1 c(h_1 + 2h + 2c) + \frac{1}{3}K_2^+ c^2(3h + 2c)\right]\psi_{,x},$$
$$H = \left[-\frac{1}{3}K_2^+ c^2(2c + 3h) + K_3^+ h_1 c(h_1 + 2h + 2c)\right]w_{,xx} +$$
$$+\left[c^2\left(\frac{2}{3}K_2^+ c + 2K_3^+ h_1\right)\right]\psi_{,x}. \qquad (1.7)$$

Подставив выражения (1.7) в уравнения (1.6), получим искомые уравнения движения в перемещениях:

$$a_1\psi_{,xx} - a_2 w_{,xxx} = 0,$$
$$a_2\psi_{,xxx} - a_4 w_{,xxxx} - M_0\ddot{w} = -q, \qquad (1.8)$$

где a_i – коэффициенты

$$a_1 = \left[c^2\left(\frac{2}{3}K_2^+ c + 2K_3^+ h_1\right)\right],$$
$$a_2 = \left[\frac{1}{3}K_2^+ c^2(2c + 3h) + K_3^+ h_1 c(h_1 + 2h + 2c)\right],$$
$$a_4 = \left[\frac{2}{3}K_2^+ c(c^2 + 3hc + 3h^2) + K_1^+ \frac{2h^3}{3} + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{3}K_3^+ h_1(h_1^2 + 3h^2 + 3c^2 + 3h_1 h + 3h_1 c + 6ch)\right],$$
$$K_k + \frac{4}{3}G_k \equiv K_k^+.$$

В начальный момент времени прогиб $w_0(x)$ стержня и его производная $\dot{w}_0(x)$ по времени (скорость) считаются заданными:

$$w(x,0) = w_0(x), \quad \dot{w}(x,0) = \dot{w}_0(x). \qquad (1.9)$$

В качестве граничных условий принимаем условия жесткой заделки торцов стержня $x = 0; l$.

$$\psi(x,t) = w(x,t) = w_{,x}(x,t) = 0. \qquad (1.10)$$

2 Уравнения собственных колебаний

Для описания собственных колебаний пятислойного стержня систему дифференциальных уравнений получим из (1.8), положив нагрузку $q = 0$. Проведя необходимые преобразования, получим:

$$\psi = \frac{a_2}{a_1}w_{,x} + C_1 x + C_2,$$
$$w_{,xxxx} - \frac{a_1 M_0}{a_2^2 - a_1 a_4}\ddot{w} = 0. \qquad (2.1)$$

Прогиб стержня принимаем в виде произведения неизвестной координатной функции $\upsilon(x)$ и гармонической функции времени:

$$w = \upsilon(x)[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)], \qquad (2.2)$$

где A, B – константы интегрирования.

Вторая производная от прогиба (2.1) будет

$$\ddot{w} = -\upsilon(x)\omega^2[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]. \qquad (2.3)$$

Дифференциальное уравнение для определения координатной функции $\upsilon(x)$ получим, подставив (2.2), (2.3) во второе уравнение системы (2.1) и приравняв коэффициенты перед функциями времени:

$$\upsilon_{,xxxx} - \beta^4\upsilon = 0, \qquad (2.4)$$

где введено обозначение $\beta^4 = \dfrac{a_1 M_0\omega^2}{a_4 a_1 - a_2^2}$.

Следовательно, параметр β будет собственным числом оператора четвертой производной, а $\upsilon(x)$ – его собственной функцией. В результате исследования было установлено, что знак параметра β всегда положительный [23]. В этом случае решение дифференциального уравнения (2.4) будет:

$$\upsilon(x) = C_1\,\mathrm{sh}(\beta x) + C_2\,\mathrm{ch}(\beta x) + C_3\sin(\beta x) + C_4\cos(\beta x), \qquad (2.5)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – искомые константы интегрирования.

Система уравнений для определения констант интегрирования в случае граничных условий заделки (1.9) сводится к системе двух алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2:

$$C_1(\mathrm{sh}(\beta l) - \sin(\beta l)) + C_2(\mathrm{ch}(\beta l) - \cos(\beta l)) = 0,$$
$$C_1(\mathrm{ch}(\beta l) - \cos(\beta l)) + C_2(\mathrm{sh}(\beta l) + \sin(\beta l)) = 0. \qquad (2.6)$$

Полученная однородная система (2.6) имеет ненулевое решение только при равенстве нулю ее определителя. Отсюда получаем трансцендентное уравнение для определения собственных чисел:

$$\mathrm{sh}^2(\beta l) - \sin^2(\beta l) - (\mathrm{ch}(\beta l) - \cos(\beta l))^2 = 0. \qquad (2.7)$$

Решением уравнения (2.7) будет бесконечное количество собственных чисел β_n ($n = 0,1,2,\ldots$), после нахождения которых частоты собственных колебаний рассматриваемого стержня можно определить по формуле, введенной в (2.4):

$$\omega_n^2 = \frac{\beta_n^4(a_4 a_1 - a_2^2)}{a_1 M_0}.$$

3 Численные результаты

Первые 15 собственных чисел β_n и частот собственных колебаний ω_n пятислойного стержня ($l = 1$, $b_0 = 0{,}1$), набранного из материалов Д16Т – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – Д16Т приведены в таблице 3.1. Упругие характеристики этих и других используемых материалов:

– Д16-Т – $K = 0{,}9214 \cdot 10^5$ МПа, $G = 0{,}2671 \cdot 10^5$ МПа;
– фторопласт-4 – $K = 4700$ МПа, $G = 90$ МПа;
– титановый сплав – $K = 1{,}04 \cdot 10^5$ МПа, $G = 0{,}41 \cdot 10^5$ МПа;
– кордиерит – $K = 5{,}58 \cdot 10^5$ МПа, $G = 2{,}58 \cdot 10^5$ МПа.

Толщины слоев, если другое не указано, следующие: $h = h_1 = 0{,}02$, $c = 0{,}1$.

Следует отметить, что приведенные собственные числа распределены по числовой оси достаточно равномерно.

Таблица 3.1 – Собственные числа и частоты пятислойного стержня

№ n	β_n	ω_n, c^{-1}	№ n	β_n	ω_n, c^{-1}
0	4,730	2971,682	8	29,8451	118309,477
1	7,853	8191,556	9	32,987	144527,644
2	10,995	16058,725	10	36,128	173367,627
3	14,137	26545,888	11	42,412	238913,044
4	17,279	39654,977	12	45,553	275618,477
5	20,420	55385,877	13	48,695	314945,727
6	23,562	73738,594	14	51,836	356894,793
7	26,704	94713,127			

На рисунке 3.1 показана зависимость первых трех частот собственных колебаний пятислойного стержня от толщины внутреннего несущего слоя h. Толщины и материалы слоев указанны ранее. С увеличением номера зависимость частоты от толщины внутреннего несущего слоя нелинейная.

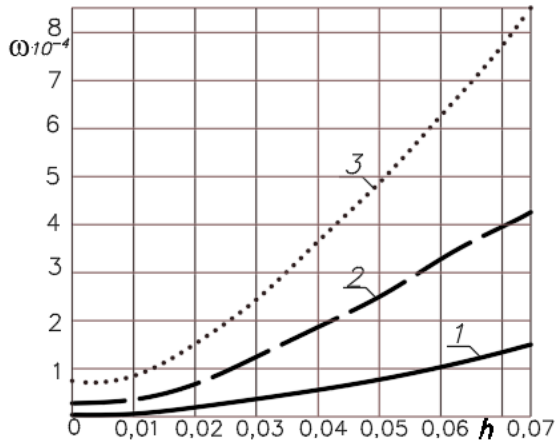


Рисунок 3.1 – Зависимость первых трех частот ω_n от толщины внутреннего несущего слоя h
1 – ω_0; 2 – ω_1; 3 – ω_2

На рисунке 3.2 представлена зависимость первой частоты основного тона ω_0 от толщины h центрального слоя при различных материалах внешних несущих слоев: Существенное различие наблюдается при достаточно тонких слоях. Далее кривые сближаются.

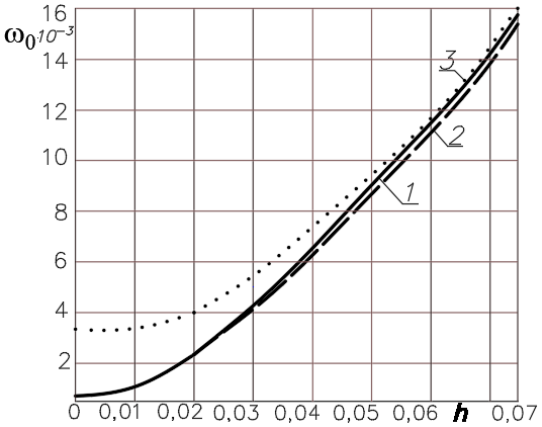


Рисунок 3.2 – Зависимость ω_0 от толщины центрального слоя h (различные несущие слои)
1 – Д16Т – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – Д16Т,
2 – титан – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – титан,
3 – кордиерит – фторопласт-4 – Д16-Т – фторопласт-4 – кордиерит

Рисунок 3.3 отражает зависимость первой частоты ω_0 от толщины центрального слоя h при различных материалах заполнителя. Несущие слои приняты из дюралюминия. Использование более легких полимерных материалов в качестве заполнителя приводит к увеличению собственной частоты колебаний стержня.

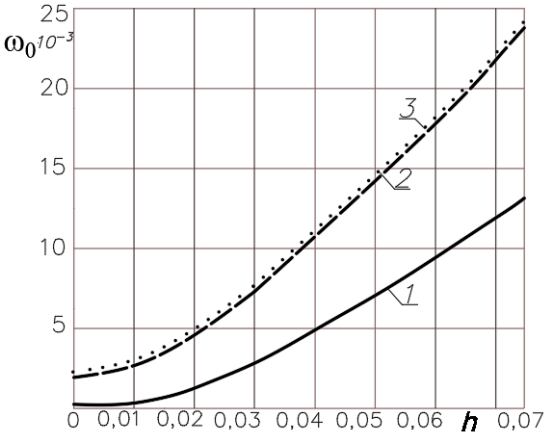


Рисунок 3.3 – Зависимость ω_0 от толщины центрального слоя h (различные несущие слои)
1 – фторопласт; 2 – пенопласт;
3 – пенополиуретан

Заключение

Предложенная в работе постановка начально-краевой задачи, полученные формулы и вычисленные значения собственных чисел позволяют проводить численный анализ зависимости частот собственных колебаний симметричного по толщине пятислойного стержня от материалов слоев.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горшков*, *А.Г.* Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Москва: Физматлит, 2005. – 576 с. – EDN: RXGSLJ.

2. *Журавков*, *М.А.* Математические модели механики твердого тела // М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. – Минск: БГУ, 2021. – 535 с.

3. *Zhuravkov*, *M.A.* Mechanics of Solid Deformable Body / M.A. Zhuravkov, Lyu Yongtao, E.I. Starovoitov. – Singapore: Springer, 2022. – 317 p.

4. *Абдусаттаров*, *А.* Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э.И. Старовойтов, Н.Б. Рузиева. – Ташкент: «IDEAL PRESS», 2023. – 381 с.

5. *Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках* / Э.И. Старовойтов, Ю.В. Шафиева, А.В. Нестерович, А.Г. Козел. – Гомель: БелГУТ, 2024. – 395 с.

6. *Захарчук*, *Ю.В.* Трехслойная круговая упругопластическая пластина со сжимаемым заполнителем / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 72–79.

7. *Нестерович*, *А.В.* Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой однослойной пластины / А.В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 54–61.

8. *Салицкий*, *В.С.* Изгиб локальной нагрузкой круглой пятислойной пластины / В.С. Салицкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 27–31. – EDN: APZZLI.

9. *Салицкий*, *В.С.* Изгиб защемлённой по контуру круговой пятислойной пластины / В.С. Салицкий // Механика. Исследования и инновации. – Гомель, 2022. – вып. 15 – С. 209–213.

10. *Старовойтов*, *Э.И.* Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2006. – Т. 3, № 4. – С. 55–62. – EDN: HZNSAB.

11. *Старовойтов*, *Э.И.* Деформирование локальными нагрузками композитной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Механика композитных материалов. – 2007. – Т. 43, № 1. – С. 109–120. – EDN: DIPPEO.

12. *Козел*, *А.Г.* Математическая модель деформирования круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 42–46.

13. *Старовойтов*, *Э.И.* Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / Э.И. Старовойтов, А.Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 392–406.

14. *Трацевская*, *Е.Ю.* Демпфирующие свойства слабосвязных трехфазных грунтов / Е.Ю. Трацевская // Литосфера. – 2019. – Т. 51, № 2. – С. 115–121.

15. *Трацевская*, *Е.Ю.* Экспериментальное исследование параметров автотранспортного вибродинамического воздействия на массивы грунтов / Е.Ю. Трацевская // Вестник Белорусского государственного университета транспорта: наука и транспорт. – 2020. – № 1 (40). – С. 58–61.

16. *Старовойтов*, *Э.И.* Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – Т. 22, № 1. – С. 31–35.

17. *Старовойтов*, *Э.И.* Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т. 21, № 2. – С. 162–169.

18. *Leonenko*, *D.V.* Vibrations of Cylindrical Sandwich Shells with Elastic Core Under Local Loads / D.V. Leonenko, E.I. Starovoitov // International Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 52, № 4. – P. 359–367. – DOI: 10.1007/s10778-016-0760-8.

19. *Tarlakovskii*, *D.V.* Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D.V. Tarlakovskii, G.V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, № 2. – P. 145–152.

20. *Fedotenkov*, *G.V.* Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam / G.V. Fedotenkov, D.V. Tarlakovsky, Y.A. Vahterova // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 40, № 4. – P. 439–447.

21. *Лачугина*, *Е.А.* Свободные колебания пятислойной круговой пластины с легкими заполнителями / Е.А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2023. – № 16. – С. 111–116. – EDN: RCCKPM.

22. *Лачугина*, *Е.А.* Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими заполнителями / Е.А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 212–219.

23. *Будникова*, *Д.А.* Уравнения собственных колебаний пятислойного упругого стержня / Д.А. Будникова // Проблемы безопасности на транспорте: материалы XIII Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. году качества (Гомель, 21–22 ноября 2024 г.): в 2 ч. – Гомель: БелГУТ, 2024. – Ч. 2. – С. 121–123.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-25».

Поступила в редакцию 26.02.2025.

Информация об авторах

Будникова Дарья Андреевна – магистрант

ФИЗИКА

УДК 539.12 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_16
EDN: YCVASK

ФОРМ-ФАКТОРЫ НЕЙТРАЛЬНЫХ ПСЕВДОСКАЛЯРНЫХ $P^0(q\overline{q})$-МЕЗОНОВ В СОСТАВНОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАРКОВОЙ МОДЕЛИ

В.Ю. Гавриш[1], **В.В. Андреев**[2]

[1]*Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого*
[2]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

PSEUDOSCALAR $P^0(q\overline{q})$-MESONS FORM-FACTOR IN COMPOSITE RELATIVISTIC QUARK MODEL

V.Yu. Haurysh[1], **V.V. Andreev**[2]

[1]*Sukhoi State Technical University of Gomel*
[2]*Francisk Skorina Gomel State University*

Аннотация. Представлен алгоритм расчета форм-факторов мезонов процесса $\gamma\gamma^* \to P(q\overline{q})$ в модели, основанной на составной кварковой модели и точечной форме пуанкаре-инвариантной квантовой механике. Показано, что использование структурных функций конституентных кварков легкого сектора приводит к согласующемуся с экспериментальными данными поведению величины $q^2F_{P^0}(q^2)$ процессов $\gamma\gamma^* \to \pi^0$, $\gamma\gamma^* \to \eta$ и $\gamma\gamma^* \to \eta'$ при больших переданных импульсах. По результатам работы предложена самосогласованная модель, удовлетворительно описывающая электрослабые распады псевдоскалярных мезонов легкого сектора.

Ключевые слова: *конституентная кварковая модель*, *аномальный магнитный момент*, *среднеквадратичный радиус*, *форм-фактор*, *асимптотическое поведение.*

Для цитирования: *Гавриш, В.Ю.* Форм-факторы нейтральных псевдоскалярных $P^0(q\overline{q})$-мезонов в составной релятивистской кварковой модели / В.Ю. Гавриш, В.В. Андреев // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 16–21. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_16. – EDN: YCVASK

Abstract. The paper presents an algorithm for calculating the meson form factors of the $\gamma\gamma^* \to P(q\overline{q})$ process in a model based on the composite quark model and the point form of Poincaré-invariant quantum mechanics. It is shown that the use of structure functions of constituent quarks for the light sector leads to a behavior of the $q^2F_{P^0}(q^2)$ value of the $\gamma\gamma^* \to \pi^0$, $\gamma\gamma^* \to \eta$ and $\gamma\gamma^* \to \eta'$ processes at large momentum transfers consistent with experimental data. A self-consistent model satisfactorily describing electroweak decays of pseudoscalar mesons of the light sector is proposed.

Keywords: *constituent quark model*, *anomalous magnetic moment*, *root-mean-square radius*, *form factor*, *asymptotic behavior.*

For citation: *Haurysh, V.Yu.* Pseudoscalar $P^0(q\overline{q})$-mesons form-factor in composite relativistic quark model / V.Yu. Haurysh, V.V. Andreev // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 2 (63). – P. 16–21. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_16 (in Russian). – EDN: YCVASK

Введение

Расчет наблюдаемых электрослабых характеристик связанных кварковых систем является нетривиальной задачей физики высоких энергий. В низкоэнергетической области поведение константы $\alpha_s(q^2)$ делает расчеты наблюдаемых характеристик связанных кварковых систем методами теории возмущений невозможными [1]. Указанная особенность привела к многообразию альтернативных методов расчета форм-факторов, спектров масс и других характеристик мезонов легкого и тяжелого сектора.

Отметим, что для мезонов с одним тяжелым кварком ($D-$, D_s-, $B-$ мезоны и др.) существуют апробированные методы [2], [3] (разложение по величине $1/m_Q$, симметрия HQS, использование нерелятивистских потенциалов с запирающей частью и др.). Для мезонов легкого сектора требуется привлечение чисто релятивистских моделей, поскольку массы $u-$, $d-$, $s-$ кварков значительно меньше [4].

В указанном направлении исследования особый интерес представляют легкие псевдоскалярные $\pi^{\pm}-, \pi^0-, K^{\pm}-, \eta-, \eta'-$ мезоны.

© *Гавриш В.Ю.*, *Андреев В.В.*, 2025

К настоящему моменту накоплен значительный объем прецизионных экспериментальных данных по лептонным и радиационным распадам. Обновление и дополнение экспериментальных данных коллаборациями *BaBar*, *Belle* и *Cleo* [4]–[7] дало возможность не только исследовать поведение величины $q^2F_{P^0}(q^2)$ при $q^2 \to \infty$ но и изучить структурные свойства конституентных кварков при больших переданных импульсах.

Исследование форм-факторов нейтральных $\pi^0-, \eta-, \eta'-$ мезонов также актуально при изучении схем смешивания кварковых $q\bar{q}$ -состояний. Известно [8], что расчеты с одним углом смешивания θ_P в различных подходах приводит к значениям $\theta_P \in [-20^\circ, -9^\circ]$. Разброс привел к появлению альтернативных схем смешивания, в том числе с тремя углами ϕ_P, α_G, ϕ_G и глюонной компонентой $|G\rangle$ [8]–[10]. Отметим, что исследования псевдоскалярных и векторных мезонов проводились не только с учетом $|G\rangle$, но и аномальными магнитными моментами конституентных кварков κ_q [11], [12].

Среди множества способов описания релятивистских составных кварковых систем можно выделить методы, которые основаны на использовании представлений группы Пуанкаре [13]. В этом подходе ключевым требованием является сохранение пуанкаре-инвариантности как для системы без взаимодействия, так и для взаимодействующих частиц [14]. Поэтому такой подход получил название «пуанкаре-инвариантная квантовая механика» (ПиКМ). В зависимости от того, как оператор взаимодействия включается в ПиКМ, выделяют три формы: мгновенную, точечную и динамику на световом фронте [14].

Представленная работа посвящена изучению форм-факторов псевдоскалярных мезонов процесса $\gamma\gamma^* \to P(q\bar{q})$ в точечной форме ПиКМ. Отметим, что указанная форма динамики естественным образом обобщается для исследования связанных систем, поскольку оператор 4-ре скорости $V^\mu = Q^\mu / M$ с взаимодействием и без него совпадают [13], [14].

Структура представленной работы следующая: в разделе 1 приведены базовые соотношения модели, основанной на составной кварковой модели и на точечной форме ПиКМ. Показано, что использование осцилляторной волновой функции и константы псевдоскалярной плотности приводит к разумным параметрам развиваемой модели. В разделе 2 изложена методика расчета форм-факторов процесса $\gamma\gamma^* \to P(q\bar{q})$. Отличительной особенностью предложенного подхода является использование аномальных магнитных моментов кварков и схемы смешивания псевдоскалярных мезонов с глюонной компонентой $|G\rangle$.

Как результат работы в разделе 3 проведено численное исследование форм-факторов псевдоскалярных $\pi^0-, \eta-, \eta'-$ мезонов. Показано, что использование параметров модели, полученных из лептонных распадов псевдоскалярных мезонов и аномальных магнитных моментов кварков удовлетворительно описывает современные экспериментальные данные коллабораций *BaBar*, *Belle* и *Cleo* в области малых переданных импульсов.

1 Описание модели

Ниже определим вектор состояния мезона массы M, спина J и 4-импульса

$$Q^\mu = V^\mu M = \{\omega_M(\mathbf{Q}), \mathbf{Q}\},$$

$Q^2 = M^2$ в точечной форме ПиКМ. В развиваемом формализме вектор состояния мезона определим с использованием базиса прямого произведения двухчастичного представления

$$|\mathbf{p}_1, \lambda_1, a, \mathbf{p}_2, \lambda_2, b\rangle$$

кварков с массами m_q, $m_{\bar{Q}}$, импульсами $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, проекциями спинов λ_1, λ_2 и цветовыми квантовыми числами a и b соответственно. В таком подходе вектор состояния мезона определяется интегралом по импульсу относительного движения кварков [13], [14] $\mathbf{k}$ как

$$|\mathbf{Q}, J\mu, M\rangle = \sum_{\lambda_1,\lambda_2}\sum_{\nu_1,\nu_2}\int \Phi^J_{\ell S}(\mathbf{k}, \beta_{q\bar{Q}})\Omega\begin{pmatrix}\ell & S & J\\ \nu_1 & \nu_2 & \mu\end{pmatrix}(\theta_k, \phi_k)\times$$
$$\times\sqrt{\frac{\omega_{m_q}(\mathbf{p}_1)\omega_{m_{\bar{Q}}}(\mathbf{p}_2)}{\omega_{m_q}(\mathbf{k})\omega_{m_{\bar{Q}}}(\mathbf{k})V_0}}\, D^{1/2}_{\lambda_1,\nu_1}(\mathbf{n}_{W_1})\, D^{1/2}_{\lambda_2,\nu_2}(\mathbf{n}_{W_2})\times \quad (1.1)$$
$$\times|\mathbf{p}_1, \lambda_1, a, \mathbf{p}_2, \lambda_2, b\rangle \mathrm{d}\mathbf{k}.$$

В (1.1) для краткости использованы обозначения $\omega_m(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ и

$$\Omega\begin{pmatrix}\ell & S & J\\ \nu_1 & \nu_2 & \mu\end{pmatrix}(\theta_k, \phi_k) = $$
$$= Y_{\ell m}(\theta_k, \phi_k)\, C\begin{pmatrix}s_1 & s_2 & S\\ \nu_1 & \nu_2 & \mu\end{pmatrix} C\begin{pmatrix}\ell & S & J\\ m & \lambda & \mu\end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

где $Y_{\ell m}(\theta_k, \phi_k)$ – сферические функции, определяемые углами вектора $\mathbf{k}$, $C\begin{pmatrix}s_1 & s_2 & S\\ \nu_1 & \nu_2 & \mu\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}\ell & S & J\\ m & \lambda & \mu\end{pmatrix}$ – коэффициенты Клебша – Гордана группы *SU(2)*, $D^{1/2}_{\lambda,\nu}(\mathbf{n}_W)$ – функции вращения Вигнера вектор параметра $\mathbf{n}_W$ [14].

Параметры развиваемой модели определим с использованием интегрального представления лептонной константы распада псевдоскалярного

$$P^{\pm}(q\bar{Q}) \to \ell^{\pm}\nu_{\ell}$$

и векторного мезонов $V^0(q\bar{Q}) \to \ell^+\ell^-$ [15], [16]

$$f_I(m_q, m_{\bar{Q}}, \beta^I_{q\bar{Q}}) =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\pi}\int \mathrm{k}^2 \;\; \Phi(\mathrm{k}, \beta^{\mathrm{I}}_{q\bar{Q}}) \sqrt{\frac{W^+_{m_q}(\mathbf{k}) W^+_{m_{\bar{Q}}}(\mathbf{k})}{M_0 \;\; \omega_{m_q}(\mathbf{k})\omega_{m_{\bar{Q}}}(\mathbf{k})}} \times$$

$$\times \left(1 + a_1 \frac{\mathrm{k}^2}{W^+_{m_q}(\mathbf{k}) W^+_{m_{\bar{Q}}}(\mathbf{k})}\right) \mathrm{dk}; \qquad (1.3)$$

$$a_P = -1, \; a_V = 1/3,$$

где

$$W^{\pm}_m(\mathbf{k}) = \omega_m(\mathbf{k}) \pm m, \;\; |\,\mathbf{k}\,| = \mathrm{k},$$
$$M_0 = \omega_{m_q}(\mathbf{k}) + \omega_{m_{\bar{Q}}}(\mathbf{k}). \qquad (1.4)$$

Использование константы псевдоскалярной плотности $g_{P^{\pm}}$ [17], [18]

$$g_{P^{\pm}}(m_q, m_{\bar{Q}}, \beta^P_{q\bar{Q}}) = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\pi}\int \mathrm{k}^2 \;\; \Phi(\mathrm{k}, \beta^{\mathrm{I}}_{q\bar{Q}}) \times$$

$$\times \sqrt{M_0}\left(W^+_{m_q}(\mathbf{k}) W^+_{m_{\bar{Q}}}(\mathbf{k}) + W^-_{m_q}(\mathbf{k}) W^-_{m_{\bar{Q}}}(\mathbf{k})\right) \mathrm{dk} \quad (1.5)$$

совместно с экспериментальными данными лептонных распадов псевдоскалярных $\pi^{\pm}-$ и $K^{\pm}-$ мезонов приводит к системе уравнений [17]

$$\begin{cases} 1/2\,(\hat{m}_u + \hat{m}_d) = (3,45 \pm 0,42) \text{ МэВ}, \\ f_P(m_u, m_d, \beta^P_{u\bar{d}}) = f^{(\text{экс.})}_{\pi^{\pm}}, \\ (\hat{m}_u + \hat{m}_d) g_P(m_u, m_d, \beta^P_{u\bar{d}}) = f^{(\text{экс.})}_{\pi^{\pm}} \left(M^{(\text{экс.})}_{\pi^{\pm}}\right)^2. \end{cases} \qquad (1.6)$$

Использование осцилляторной волновой функции

$$\Phi(\mathrm{k}, \beta^{\mathrm{I}}_{q\bar{Q}}) = \frac{2}{\sqrt{3}\;\pi^{1/4}\left(\beta^{\mathrm{I}}_{q\bar{Q}}\right)^{3/2}} \exp\left[-\frac{\mathrm{k}^2}{2\left(\beta^{\mathrm{I}}_{q\bar{Q}}\right)^2}\right] \qquad (1.7)$$

и значений токовых масс $u-$ и $d-$ кварков приводит к следующим параметрам модели, основанной на точечной форме ПиКМ:

$$m_u = \left(219,48 \pm 9,60\right) \text{ МэВ},$$
$$m_d = \left(221,98 \pm 9,60\right) \text{ МэВ},$$
$$\beta^P_{ud} = \left(367,93 \pm 2,51\right) \text{ МэВ}. \qquad (1.8)$$

Для $K^{\pm}-$ мезона с массой $M^{(\text{экс.})}_{K^{\pm}}$ аналогично получаем

$$\begin{cases} 1/2\,(\hat{m}_u + \hat{m}_s) = (47,58 \pm 5,74) \text{ МэВ}, \\ f_P(m_u, m_s, \beta^P_{u\bar{s}}) = f^{(\text{экс.})}_{K^{\pm}}, \\ (\hat{m}_u + \hat{m}_s) g_P(m_u, m_s, \beta^P_{u\bar{s}}) = f^{(\text{экс.})}_{K^{\pm}} \left(M^{(\text{экс.})}_{K^{\pm}}\right)^2, \end{cases} \qquad (1.9)$$

откуда

$$m_s = \left(416,95 \pm 6,12\right) \text{ МэВ},$$
$$\beta^P_{us} = \left(375,54 \pm 19,66\right) \text{ МэВ}. \qquad (1.10)$$

Полученные в разделе параметры будут использоваться для расчета форм-факторов псевдоскалярных $\pi^0-, \eta-, \eta'-$ мезонов.

2 Форм-факторы $\pi^0-, \eta-, \eta'-$ мезонов процесса $\gamma\gamma^* \to P(q\bar{q})$

Изучение форм-факторов псевдоскалярных мезонов будем проводить с использованием следующего механизма рождения кварк-антикварковой пары [19], [20] (рисунок 2.1). Соответствующие рисунку 2.1 матричные элементы процесса $\gamma\gamma^* \to P(q\bar{q})$ в системе покоя псевдоскалярного мезона (сравните с (1.1))

$$\left|0, M_P\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{\lambda_1,\lambda_2} \int \Phi^J_{\ell S}(\mathrm{k}, \beta^P_{q\bar{q}}) \frac{1}{\sqrt{V_0}} \left|\mathbf{k}, \lambda_1, -\mathbf{k}, \lambda_2\right\rangle \mathrm{d}\mathbf{k} \qquad (2.1)$$

примут следующий вид:

$$M^{1\mu}_{\lambda_1,\lambda_2} = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{\bar{u}_{\lambda_2}(\mathbf{k}, m_q)}{\sqrt{2\omega_{m_q}(\mathbf{k})}} \Gamma^{\mu}_{e_q}(q^{real}) \times$$

$$\times \frac{\hat{k} - \hat{q}^{real} + m_q}{\left(k - q^{real}\right)^2 - m_q^2}\left(\Gamma_{e_q}(q^{virt.}) \cdot \epsilon(\lambda^{virt.})\right) \frac{\upsilon_{\lambda_1}(-\mathbf{k}, m_{\bar{q}})}{\sqrt{2\omega_{m_{\bar{q}}}(\mathbf{k})}},$$

$$M^{2\mu}_{\lambda_1,\lambda_2} = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{\bar{u}_{\lambda_2}(\mathbf{k}, m_q)}{\sqrt{2\omega_{m_q}(\mathbf{k})}}\left(\Gamma_{e_q}(q^{virt.}) \cdot \epsilon(\lambda^{virt.})\right) \times \qquad (2.2)$$

$$\times \frac{\hat{k} - \hat{q}^{virt.} + m_q}{\left(k - q^{virt.}\right)^2 - m_q^2} \Gamma^{\mu}_{e_{\bar{q}}}(q^{real}) \frac{\upsilon_{\lambda_1}(-\mathbf{k}, m_{\bar{q}})}{\sqrt{2\omega_{m_{\bar{q}}}(\mathbf{k})}}.$$

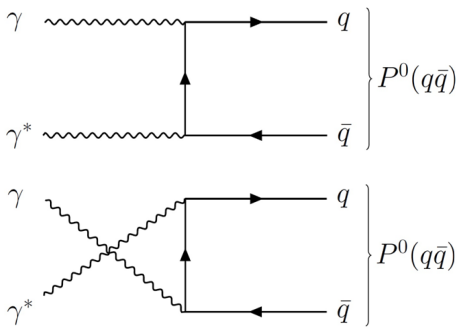


Рисунок 2.1 – Механизм процесса $\gamma\gamma^* \to P(q\bar{q})$ в развиваемом подходе

В выражениях (2.2) определена вершина электромагнитного взаимодействия $\Gamma^{\mu}(q)$ с учетом структуры кварка калибровочно-инвариантным образом

$$\Gamma^{\mu}_e(q) = e\left(F^q_1(q^2)\gamma^{\mu} + \kappa\, F^q_2(q^2)\frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m}q_{\nu}\right),$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right), \qquad (2.3)$$

где $F^q_1(q^2)$ и $F^q_2(q^2)$ – дираковские форм-факторы. Для упрощения в форм-факторах

вершины (2.3) в явном виде выделены электрический заряд e и аномальный магнитный момент кварка κ. В этом случае магнитный момент кварка определяется выражением [21], [22]

$$\mu = \frac{e}{2\, m_{q,\bar{Q}}}\left(1+\kappa\ \right). \qquad (2.4)$$

Расчет спинорной части выражения (2.2) с учетом параметризации процесса $\gamma\gamma^* \to P(q\bar{q})$ в точечной форме динамики

$$\left\langle \mathrm{Q}, M_P \middle| \hat{J}^{\mu} \middle| \gamma\gamma^* \right\rangle = $$

$$= I_{q\bar{q}}(t)\frac{i}{(2\pi)^{3/2}}\frac{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\ V_{\nu}\ \varepsilon_{\rho}(\lambda^{real})\ q_{\sigma}^{virt.}}{\sqrt{2\ V_0}}\sqrt{M_P}, \qquad (2.5)$$

где q^{real} – 4-импульс реального $\left(q^{real}\right)^2 = 0$ фотона с соответствующим вектором поляризации $\varepsilon(\lambda^{real.})$, а $q^{virt.}$ – 4-импульс виртуального $\left(q^{virt.}\right)^2 = t$ γ^*-кванта, приводит к следующему выражению

$$I_{q\bar{q}}(t) = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\int \mathrm{k}^2\ \ \Phi(\mathrm{k}, \beta_{q\bar{q}}^{P}) e_q^2\ \times \qquad (2.6)$$

$$\times\left(f_1(\mathrm{k}, m_q, t) + \frac{\kappa_q}{2m_q} f_2(\mathrm{k}, m_q, t) + \frac{\kappa_q^2}{4m_q^2} f_3(\mathrm{k}, m_q, t)\right)\mathrm{dk}.$$

В (2.6) определены следующие вспомогательные функции:

$$f_1(\mathrm{k}, m, t) = \frac{2mF_1^q(t)F_1^q(0)}{\mathrm{k}\ \omega_m^{1/2}(\mathbf{k})\ \left(4\omega_m^2(\mathbf{k})+t\right)}\ln\left(\frac{\omega_m(\mathbf{k})+\mathrm{k}}{\omega_m(\mathbf{k})-\mathrm{k}}\right),$$

$$f_2(\mathrm{k}, m, t) = \frac{2(F_1^q(t)F_2^q(0)+F_1^q(0)F_2^q(t))}{\mathrm{k}\ \omega_m^{1/2}(\mathbf{k})\ (4\omega_m^2(\mathbf{k})+t)}\times$$

$$\times\left(2\ \mathrm{k}\ \omega_m\ (\mathbf{k}) + m^2 \ln\left(\frac{\omega_m(\mathbf{k})+\mathrm{k}}{\omega_m(\mathbf{k})-\mathrm{k}}\right)\right),$$

$$f_3(\mathrm{k}, m, t) = \frac{2m\ (4\omega_m^2(\mathbf{k})-t)}{\omega^{3/2}(\mathbf{k})(4\omega_m^2(\mathbf{k})+t)}F_2^q(t)F_2^q(0). \qquad (2.7)$$

Использование (2.6) с учетом схемы смешивания псевдоскалярных мезонов [8]–[10] приводит к следующим выражениям форм-факторов π^0-, $\eta-$, $\eta'-$ мезонов

$$F_{\pi^0\gamma}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \left(\tilde{I}_{u\bar{u}}(t) - \tilde{I}_{d\bar{d}}(t)\right),$$

$$F_{\eta\gamma}(t) = \frac{X_{\eta}}{\sqrt{2}}\ \left(\tilde{I}_{u\bar{u}}(t) + \tilde{I}_{d\bar{d}}(t)\right) + Y_{\eta}\ \tilde{I}_{s\bar{s}}(t),$$

$$F_{\eta'\gamma}(t) = \frac{X_{\eta'}}{\sqrt{2}}\ \left(\tilde{I}_{u\bar{u}}(t) + \tilde{I}_{d\bar{d}}(t)\right) + Y_{\eta'}\ \tilde{I}_{s\bar{s}}(t), \qquad (2.8)$$

где

$$X_{\eta} = \cos\phi_P \cos\alpha_G,\ \ Y_{\eta} = -\sin\phi_P \cos\alpha_G,$$

$$Z_{\eta} = -\sin\alpha_G,$$

$$X_{\eta'} = \cos\phi_P \sin\alpha_G \sin\phi_G + \sin\phi_P \cos\alpha_G,$$

$$Y_{\eta'} = \cos\phi_P \cos\alpha_G - \sin\phi_P \sin\alpha_G \sin\phi_G,$$

$$Z_{\eta'} = \cos\alpha_G \sin\phi_G \qquad (2.9)$$

(детали изложены в [16]). Выражения (2.4)–(2.9) будут использоваться для изучения форм-факторов псевдоскалярных мезонов процесса $\gamma\gamma^* \to P(q\bar{q})$ в предложенном подходе.

3 Численные расчеты форм-факторов $\gamma\gamma^* \to \pi^0$, $\gamma\gamma^* \to \eta$ и $\gamma\gamma^* \to \eta'$

Ниже проведем численное моделирование поведения форм-факторов псевдоскалярных мезонов в точечной форме ПиКМ в сравнении с современными экспериментальными данными. Изучение будем проводить с использованием форм-факторов вида [11]

$$F_1^q(t) = \frac{b_q}{1+\left\langle r_q^2\right\rangle\frac{t}{6}},\ F_2^q(t) = \frac{b_q}{\left(1+\left\langle r_q^2\right\rangle\frac{t}{12}\right)^2}, \qquad (3.1)$$

где b_q – параметр виртуальности кварка [23], а $\left\langle r_q^2\right\rangle$ – его среднеквадратичный радиус [24], определяем выражением

$$\left\langle r_q^2\right\rangle = \frac{a}{m_q^2},\ a = 0{,}126. \qquad (3.2)$$

С использованием базовых параметров модели (1.8), а также выражений (2.6)–(2.9) получаем следующее поведение величины $q\ F_{\pi^0\gamma}(t)$ в сравнении с современными экспериментальными данными коллабораций *BaBar*, *Cleo* и *Belle* (рисунок 3.1).

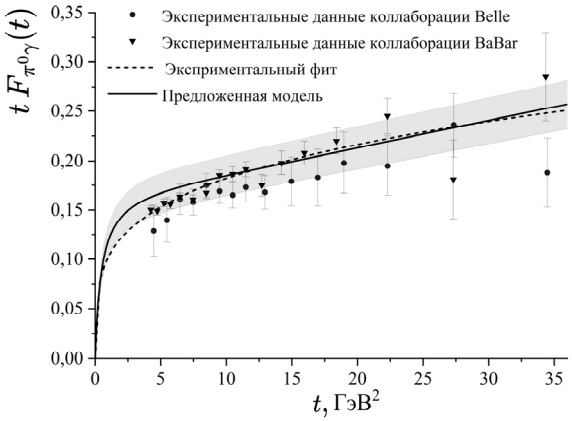


Рисунок 3.1 – Поведение величины $t\ F_{\pi^0\gamma}(t)$ в сравнении с экспериментальными данными

Для $\eta-, \eta'-$ мезонов аналогично получаем (рисунки 3.2, 3.3). Отметим, что при расчетах использованы значения параметров виртуальности кварков легкого сектора

$$b_u = 1{,}04,\ \ b_d = 1{,}10,\ \ b_s = 0{,}90 \qquad (3.3)$$

а также значения аномальных магнитных моментов кварков $\kappa_u = -0{,}124$, $\kappa_d = -0{,}058$ и $\kappa_s = 0{,}198$.

Оценку полученных результатов в сравнении с экспериментальными данными получим с использованием величины

$$\chi^2_{d.o.f} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\left|t_i\ F^{(экс.)}_{P^0\gamma}(t_i)\right| - \left|t_i\ F^{(экс.)}_{P^0\gamma}(t_i)\right|}{\delta\left|t_i F^{(экс.)}_{P^0\gamma}(t_i)\right|}\right)^2; \quad (3.4)$$

расчет с использованием параметров (3.2), а также значений аномальных магнитных моментов $u-,\ d-,\ s-$ кварков приводит к значению

$$\chi^2_{d.o.f} = 7,080. \quad (3.5)$$

Анализ рисунков показывает, что предложенная релятивистская кварковая модель, основанная на точечной форме ПиКМ, удовлетворительно описывает данные *BaBar*, *Cleo* и *Belle* в пределах экспериментальной ошибки.

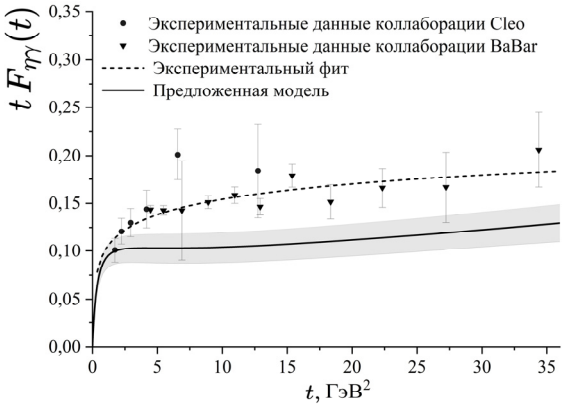


Рисунок 3.2 – Поведение величины $t\ F_{\eta\gamma}(t)$ в сравнении с экспериментальными данными

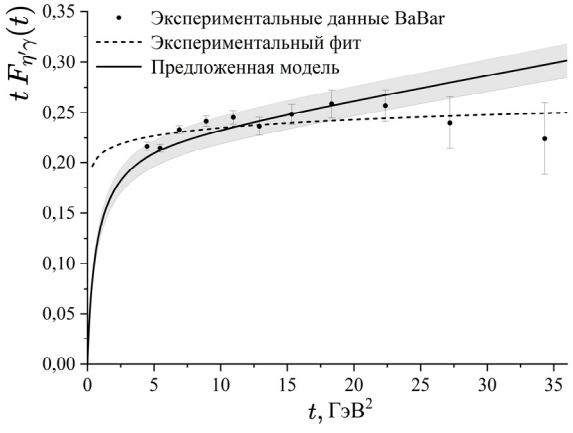


Рисунок 3.3 – Поведение величины $t\ F_{\eta'\gamma}(t)$ в сравнении с экспериментальными данными

Заключение

Работа посвящена изучению электромагнитных распадов легких $\pi^0-, \eta-, \eta'-$ мезонов в точечной форме ПиКМ. В работе авторами предложена оригинальная методика расчета параметров модели с использованием константы псевдоскалярной плотности и токовых масс кварков легкого сектора. Полученные параметры разрабатываемой модели использованы при исследовании поведения величины $q^2F_{P^0\gamma}(q^2)$ в зависимости от переданного импульса виртуального фотона $q^2 = t$. Из особенностей проведенных расчетов следует отметить использование среднеквадратичного радиуса кварков легкого сектора (3.2), совместно с дираковскими форм-факторами $F_1^q(t)$, $F_2^q(t)$ и параметрами виртуальности кварков. Расчеты с учетом перечисленных характеристик конституентных кварков в модели, основанной на составной кварковой модели и на точечной форме ПиКМ, проведены впервые.

Отметим, что предложенная модель дает более надежные предсказания в области малых переданных импульсов. Так расчет $\chi^2_{d.o.f}$ в области $0 < t \le 10$ ГэВ^2 приводит к значению $\chi^2_{d.o.f} = 11,154$, что сопоставимо с значением (3.5). Однако анализ рисунков 3.1, 3.2, 3.3 показывает, что наибольшее отклонение от экспериментальных данных имеется для η-мезона. Так расчет $\chi^2_{d.o.f}$ процессов $\gamma\gamma^* \to \pi$ приводит к $\chi^2_{d.o.f} = 9,708$ и $\chi^2_{d.o.f} = 1,552$ для экспериментальных данных *BaBar* [5] и *Belle* [6] ссоответственно; аналогичные расчеты для $\gamma\gamma^* \to \eta'$ приводят к значению $\chi^2_{d.o.f} = 2,723$ (сравните с $\chi^2_{d.o.f} = 26,815$ для процесса $\gamma\gamma^* \to \eta$). В области $t > 10$ ГэВ^2 эффекты перерассеяния будут значительны [25], и как следствие, требуется учет дополнительных диаграмм в сравнении с изучаемым в работе механизмом распада (рисунок 2.1).

Отметим также, что значения ϕ_P, α_G, ϕ_G в выражении (2.9) выбирались в из условия соответствия теоретических расчетов с экспериментальными данными процессов $V(P) \to P(V)\gamma$, значения которых согласуются с экспериментальными данными коллаборации *Kloe* [26]. Анализ форм-факторов $t\ F_{P^0\gamma}(t)$ с другими углами смешения в предложенной работе авторами не проводился.

В заключении также отметим, что предложенная модель, основанная на конституентной кварковой модели и точечной форме ПиКМ, удовлетворительно описывает радиационные распады псевдоскалярных и векторных мезонов $V(P) \to P(V)\gamma$, форм-факторы $\rho-$ мезона, а также аксиальный и векторный форм-факторы радиационного распада $\pi^\pm \to \ell^\pm \nu_\ell \gamma$ псевдоскалярного $\pi^\pm$-мезона. Предложенная модель также успешно использовалась для исследования адронного распада $\rho \to \pi\pi$ с использованием теоремы о мягких пионах [27].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chetyrkin*, *K.G.* Strong coupling constant with flavor thresholds at four loops in the modified minimal-subtraction scheme / K.G. Chetyrkin, B.A. Kniehl, M. Steinhauser // Phys. Rev. Lett. – 1997. – Vol. 79, № 12. – P. 2184–2187.

2. *Georgi*, *H.* An effective field theory for heavy quarks at low energies / H. Georgi // Physics Letters B. – 1990. – Vol. 240. – P. 447–450.

3. *Thomas*, *M.* A Derivation of the heavy quark effective Lagrangian from QCD / M. Thomas, R. Winston, Zb. Ryzak // Nucl. Phys. B. – 1992. – Vol. 368. – P. 204–217.

4. *Review of Particle Physics* / S. Navas [et al.] (PDG group) // Phys. Rev. D. – 2024. – Vol. 110. – P. 030001

5. *Measurement of the* $\gamma\gamma^* \to \pi^0$ *transition form factor* / B. Aubert [et al.] (BaBar Collaboration) // Phys. Rev. D. – 2009. – Vol. 80. – P. 052002.

6. *Measurement of* $\gamma\gamma^* \to \pi^0$ *transition form factor at Belle* / S. Uehara [et al.] (Belle collaboration) // Phys. Rev. D. – 2012. – Vol. 86. – P. 092007.

7. *Measurement of the* $\gamma\gamma^* \to \eta$ *and* $\gamma\gamma^* \to \eta'$ *transition form factors* / P. del Amo Sanchez [et al.] (BaBar collaboration) // Phys. Rev. D. – 2011. – Vol. 84. – P. 052001.

8. *Escribano*, *R.* On the gluon content of the η and η' mesons / R. Escribano, J. Nadal // JHEP. – 2007. – Vol. 05. – P. 006.

9. *Feldmann*, *T.* Quark structure of pseudoscalar mesons / T. Feldmann // Int. J. Mod. Phys. A. – 2000. – Vol. 15. – P. 159–207.

10. *Feldmann*, *T.* Mixing and decay constants of pseudoscalar mesons / T. Feldmann, P. Kroll, B. Stech // Phys. Rev. D. – 1998. – Vol. 58. – P. 114006.

11. *Petronzio*, *R.* Possible evidence of extended objects inside the proton / R. Petronzio, S. Simula, G. Ricco // Phys. Rev. D. – 2003. – Vol. 67. – P. 094994.

12. *Fayazbakhsh*, *Sh.* Anomalous magnetic moment of hot quarks, inverse magnetic catalysis, and reentrance of the chiral symmetry broken phase / Sh. Fayazbakhsh, N. Sadooghi // Phys. Rev. D. – 2003. – Vol. 90. – P. 105030.

13. *Keister*, *B.D.* Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics / B.D. Keister, W.N. Polyzou // Adv. Nucl. Phys. – 1991. – Vol. 20. – P. 225–279.

14. *Mini review of Poincaré invariant quantum theory* / W.N. Polyzou, Y. Huang, Ch. Elster [et al.] // Few Body Syst. – 2011. – Vol. 49. – P. 129–147.

15. *Andreev*, *V.V.* Constituent quark masses in Poincaré-invariant quantum mechanics / V.V. Andreev, V.Yu. Haurysh // J. Phys. Conf. Ser. – 2017. – Vol. 938. – P. 012030.

16. *Гавриш*, *В.Ю.* Двухфотонный распад псевдоскалярного мезона в релятивистской кварковой модели / В.Ю. Гавриш, В.В. Андреев // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 2023. – Т. 4. – С. 315–327.

17. *Haurysh*, *V.Yu.* $\rho-$ meson form-factors in point form of Poincaré-invariant quantum mechanics // V.Yu. Haurysh, V.V. Andreev // Few Body Syst. – 2021. – Vol. 62. – 9 p.

18. *Jaus*, *W.* Consistent treatment of spin-1 mesons in the light-front quark model / W. Jaus. // Phys. Rev. D. – 2003. – Vol. 67. – P. 094010.

19. *Choi*, *H.-M.* Spacelike and timelike form factors for the $\pi^0, \eta, \eta' \to \gamma\gamma^*$ transitions in the light-front quark model / H.-M. Choi, Y.Y. Ryu, Ch.-R. Ji // Phys. Rev. D. – 2017. – Vol. 96. – P. 056008.

20. *Choi*, *H.-M.* Doubly virtual $\left(\pi^0, \eta, \eta'\right) \to \gamma\gamma^*$ transition form factors in the light-front quark model / H.-M. Choi, Y.Y. Ryu, Ch.-R. Ji // Phys. Rev. D. – 2019. – Vol. 99. – P. 076012.

21. *He*, *R.* Effect of anomalous magnetic moment on the chiral transition at zero temperature in a strong magnetic field / R. He, X. J. Wen // Phys. Rev. D. – 2022. – Vol. 107. – P. 116023.

22. *Juliá-Díaz*, *B.* Baryon magnetic moments in relativistic quark models / B. Juliá-Díaz, D.O. Riska // Nuclear Physics A. – 2004. – Vol. 739. – P. 69–88.

23. From the $\gamma\gamma \to p\bar{p}$ reaction to the production of $p\bar{p}$ pairs in ultraperipheral ultrarelativistic heavy-ion collisions at the LHC / M. Kłusek-Gawenda, P. Lebiedowicz, O. Nachtmann, A. Szczurek // Physical Review D. – 2017. – Vol. 96. – P. 094029.

24. *Charge form-factor of* $\pi^{\pm}-$ *and* $K^{\pm}-$ *mesons* / F. Cardarelli, I.L. Grach, I.M. Narodetsky, E. Pace, G. Salme, S. Simula // Phys. Rev. D. – 1996. – Vol. 53. – P. 6682–6685.

25. *Caprini*, *I.* Testing the consistency of the $\omega-\pi$ transition form factor with unitarity and analyticity / I. Caprini // Phys. Rev. D. – 2015. – Vol. 92. – P. 014014.

26. *A Global fit to determine the pseudoscalar mixing angle and the gluonium content of the eta-prime meson* / F. Ambrosino [et al.] (Kloe Collaboration) // JHEP. – 2009. – Vol. 7. – 105 p.

27. *Haurysh*, *V.Yu.* Pionic decay of $\rho-$ meson in relativistic quantum mechanics // V.Yu. Haurysh, V.V. Andreev // Nonlinear Phenomena in Complex System. – 2024. – Vol. 27 (4). – P. 372–379.

Поступила в редакцию 26.03.2025.

Информация об авторах

Андреев Виктор Васильевич – д.ф.-м.н., профессор
Гавриш Вадим Юрьевич – к.ф.-м.н., доцент

ФИЗИКА

УДК 535.42 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_22
EDN: YHUDZG

ВРАЩАЮЩИЕСЯ СКАЛЯРНЫЕ ГАУССОВЫ ПУЧКИ АРНО СО СЛОЖНЫМ АСТИГМАТИЗМОМ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ARNAUD'S ROTATING SCALAR GAUSSIAN BEAMS WITH COMPLEX ASTIGMATISM

S.S. Girgel

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Исследованы решения параболического уравнения, описывающие скалярные параксиальные световые гауссовы пучки Арно со сложным астигматизмом. Уточнены допустимые значения свободных параметров, при которых такие пучки переносят конечную мощность и являются физически реализуемыми. Предложены явные выражения, описывающие свойства эллиптического светового пятна, его деформацию и вращение по мере распространения. Выполнено графическое моделирование и проведен соответствующий анализ эллипсов интенсивности.

Ключевые слова: *векторные пучки*, *гауссовы пучки*, *сложный астигматизм*, *квадратичная интегрируемость*, *вращающиеся пучки.*

Для цитирования: *Гиргель*, *С.С.* Вращающиеся скалярные гауссовы пучки Арно со сложным астигматизмом / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 22–26. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_22. – EDN: YHUDZG

Abstract. The solutions of the parabolic equation describing Arnaud's scalar paraxial light Gaussian beams with complex astigmatism are investigated. The admissible values of free parameters at which such beams carry finite power and are physically realizable have been specified. The explicit expressions describing the properties of an elliptical light spot, its deformation and rotation as it propagates are proposed. The graphical modeling and the corresponding analysis of intensity ellipses are performed.

Keywords: *vector beams*, *Gaussian beams*, *complex astigmatism*, *quadratic integrability*, *rotating beams*.

For citation: *Girgel*, *S.S.* Arnaud's rotating scalar Gaussian beams with complex astigmatism / S.S. Girgel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 2 (63). – P. 22–26. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_22 (in Russian). – EDN: YHUDZG

Введение

Обычно применяются лазерные гауссовы световые пучки с простейшей геометрией, которые обладают круговой симметрией относительно оси пучка z [1]. Пучки с общим астигматизмом изучены значительно меньше [2]–[6]. Данная работа представляет собой развитие предыдущих работ автора [7]–[13], где исследовались энергетические и поляризационные свойства различных типов световых пучков. В настоящей работе разработанный математический формализм распространяется на вращающиеся скалярные гауссовы световые пучки Арно со сложным астигматизмом.

Сначала описывается общий формализм для описания вращающихся скалярных гауссовых световых пучков со сложным астигматизмом (пучков Арно). Предложен упрощенный формализм для описания геометрических характеристик светового пятна скалярного пучка Арно в его поперечном сечении.

Уточнены ограничения, налагаемые на свободные параметры гауссова пучка Арно, чтобы гауссиан пучка был квадратично интегрируем (КИ). Тогда пучок переносит конечную мощность и, тем самым, является физически реализуемым. Установлены закономерности изменения эллиптичности светового пятна и его вращения по мере распространения пучка в пространстве. В разделе 2 проводится графическое моделирование геометрических характеристик эллипсов интенсивности скалярных гауссовых пучков Арно и формулируются некоторые закономерности. В заключении кратко сформулированы основные полученные результаты.

1 Скалярные гауссовы световые пучки Арно со сложным астигматизмом и свойства эллиптического светового пятна

Скалярное параболическое уравнение

$$(\partial_{xx} + \partial_{yy} + 2ik\partial_z) f = 0$$

имеет решение в виде [2], [5] $f = G_0$, где

© *Гиргель С.С.*, 2025

$$G_0 = \sqrt{\frac{q_{ox}q_{oy}}{q_x q_y}}\exp\left(\frac{ik}{2}\left(\frac{x^2}{q_x}+\frac{y^2}{q_y}\right)\right) \qquad (1.1)$$

– гауссиан с простым астигматизмом, включающий два комплексных параметра пучка q_x и q_y. Здесь $q_{x,y} = z - q_{ox,oy}$, $q_{ox,oy} = q'_{ox,oy} + iq''_{ox,oy}$, $i = \sqrt{-1}$. Таким образом, скалярный обобщенный пучок Гаусса с простым астигматизмом в общем случае зависит от переменных (x, y, z) и двух комплексных свободных параметров q_{0x}, q_{0y}.

Для физически реализуемых пучков конечной мощности должна выполняться квадратичная интегрируемость (КИ) функции f. Необходимые и достаточные условия КИ мод Гаусса – $\{q''_{0x} > 0, q''_{,0y} > 0\}$. При этом во всех случаях комплексные параметры $\{q'_{0x},\ q'_{0y}\}$ не влияют на КИ.

Используем обозначения Арно [2]:

$$q_{x,y}^{-1} = \rho_{1,2} + i\omega_{1,2},$$

где

$$\rho_{1,2} = \frac{z - q'_{0x,0y}}{\left|q_{x,y}\right|^2} = \frac{z - q'_{0x,0y}}{(z - q'_{0x,0y})^2 + (q''_{0x,0y})^2};$$

$$\omega_{1,2} = \frac{q''_{0x,0y}}{\left|q_{x,y}\right|^2}.$$

Матрица гауссиана G_0 с простым астигматизмом является диагональной:

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} \rho_1 + i\omega_1; & 0 \\ 0; & \rho_2 + i\omega_2 \end{pmatrix}.$$

Теперь условия КИ мод Гаусса (1.1) можно представить также в виде – $\{\omega_1 > 0, \omega_2 > 0\}$.

Чтобы получить гауссиан со сложным астигматизмом из гауссиана G_0 с простым астигматизмом, следуя подходу Арно [2], повернем систему координат вокруг оси oz на некоторый мнимый угол $\psi = i\alpha$. После этого гауссиан приобретает сложный астигматизм и принимает вид:

$$G_A = \sqrt{\frac{q_{ox}q_{oy}}{q_x q_y}}\exp\left(\frac{ik}{2}\left(\mathbf{r}_\perp \Gamma \mathbf{r}_\perp\right)\right), \qquad (1.2)$$

где поперечный радиус-вектор $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$. После этого матрица $\Gamma = \Gamma' + i\Gamma''$ гауссиана G_A со сложным астигматизмом по сравнению с первоначальной матрицей Γ_0 существенно усложняется. Вещественная часть матрицы Γ:

$$\Gamma' = \begin{pmatrix} \Gamma'_{11}; \Gamma'_{12} \\ \Gamma'_{12}; \Gamma'_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$\Gamma'_{11,22} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \pm ch2\alpha\frac{\rho_1 - \rho_2}{2};$$

$$A'_{12} = -sh2\alpha\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}.$$

Мнимая часть матрицы Γ:

$$\Gamma'' = \begin{pmatrix} \Gamma''_{11}; \Gamma''_{12} \\ \Gamma''_{12}; \Gamma''_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$\Gamma''_{11,22} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \pm ch2\alpha\frac{\omega_1 - \omega_2}{2};$$

$$\Gamma''_{12} = sh2\alpha\frac{\rho_2 - \rho_1}{2}.$$

Пучки, характеризуемые таким гауссианом G_A со сложным астигматизмом, будем называть пучками Арно [2]. Заметим, что гауссовы пучки Арно (1.2) со сложным астигматизмом, описываемые гауссианом G_A, не эквивалентны гауссовым пучкам со сложным астигматизмом, которые обсуждались нами ранее в [13], так как гауссиан Арно (1.2) отличен от гауссиана со сложным астигматизмом в [13].

Интенсивность скалярного светового пучка Арно со сложным астигматизмом пропорциональна плотности энергии светового поля пучка

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi}\left|G\right|^2 = \frac{\varepsilon}{8\pi}\left|\frac{q_x(0)}{q_x(z)}\frac{q_y(0)}{q_y(z)}\right|\exp\left(-2k\,\mathbf{r}_\perp\Gamma''\,\mathbf{r}_\perp\right),$$

где

$$\exp\left(-2k\mathbf{r}_\perp\Gamma''\,\mathbf{r}_\perp\right) = \exp\left(-k\left(\frac{(x^2+y^2)(\omega_1+\omega_2)}{2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{(x^2-y^2)(\omega_1-\omega_2)}{2}ch2\alpha + 2xy\,sh(2\alpha)\cdot(\rho_2-\rho_1)\right)\right).$$

Чтобы пучок был достаточно ограниченным в поперечных направлениях, гауссиан G_A со сложным астигматизмом должен быть КИ. Это означает, что матрица Γ'' должна быть положительно определенной. Отсюда следует, что на угол α, содержащийся в компонентах матрицы Γ'', накладываются ограничения

$$sh^2 2\alpha < \frac{4\omega_1\omega_2}{(\omega_1-\omega_2)^2 + (\rho_1-\rho_2)^2}$$

или

$$ch^2 2\alpha < \frac{(\omega_1+\omega_2)^2 + (\rho_1-\rho_2)^2}{(\omega_1-\omega_2)^2 + (\rho_1-\rho_2)^2},$$

откуда

$$ch2\alpha < \left|\frac{q_x - q_y^*}{q_x - q_y}\right|. \qquad (1.3)$$

Заметим, что в статье Арно [2] и последующей работе [6] сформулированы более мягкие условия $ch2\alpha \le \left|\frac{q_x - q_y^*}{q_x - q_y}\right|$, чтобы оси эллипса интенсивности были вещественными. Однако знак равенства здесь означает, что меньшая ось полуось эллипса интенсивности может обращаться в нуль. Но тогда в направлении этой полуоси

интенсивность пучка не будет убывать с удалением от оси пучка z. Общая интенсивность такого пучка будет тогда бесконечной, что физически неприемлемо.

Итак, условия КИ и, тем самым, физической реализуемости скалярных вращающихся гауссовых пучков Арно должны описываться строгим неравенством (1.3).

После некоторых преобразований можно получить, что $sh2\alpha < sh2\alpha_{\max}$, где

$$sh2\alpha_{\max} = \frac{2\sqrt{q''_{0x}q''_{0y}}}{\left|q_x - q_y\right|}. \qquad (1.4)$$

Теперь полные условия КИ гауссиана G_A и, тем самым, физической реализуемости скалярного гауссового пучка Арно со сложным астигматизмом можно представить в следующей простой форме:

$$\left\{ q''_{0x} > 0, q''_{,0y} > 0, sh2\alpha = c \cdot \frac{2\sqrt{q''_{0x}q''_{0y}}}{\left|q_x - q_y\right|}, 0 \le c < 1 \right\}. \qquad (1.5)$$

Существенно, что условия КИ не зависят от расстояния z вдоль оси oz и $\rho_{1,2}$.

В поперечном сечении общеастигматического гауссового пучка в общем случае будет наблюдаться световое пятно эллиптической формы. При распространении в свободном пространстве это световое пятно будет деформироваться и вращаться [2].

Перейдем к анализу эллиптичности и азимута эллипса интенсивности. Собственные значения матрицы Γ'' равны

$$\Gamma''_{1,2} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \pm$$
$$\pm\sqrt{\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)^2 + sh^2 2\alpha\left(\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{2}\right)^2\right)}.$$

С учетом (1.3) и (1.4) последнее выражение можно представить в более простом виде

$$\Gamma''_{1,2} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)^2 + c^2\omega_1\omega_2}.$$

Таким образом, собственные значения матрицы Γ'' не зависят от (ρ_1, ρ_1)!

Поскольку $\Gamma''_{1,2} = \dfrac{\lambda}{\pi w^2_{1,2}}$, где $w_{1,2}$ – главные полуоси эллипсов интенсивности, то отношение полуосей эллипса интенсивности

$$\gamma = tg\chi = \frac{w_2}{w_1} = \sqrt{\frac{\Gamma''_1}{\Gamma''_2}}.$$

Удобно вместо $tg\chi$ использовать параметр эллиптичности

$$\sin(2\chi) = \frac{\sqrt{4\omega_1\omega_2(1-c^2)}}{\omega_1 + \omega_2}.$$

При $c = 0$ имеем гауссов пучок с простым астигматизмом. При этом $\sin(2\chi_0) = \dfrac{2\sqrt{\omega_1\omega_2}}{\omega_1 + \omega_2}$.

Поэтому

$$\sin(2\chi) = \sin(2\chi_0)\sqrt{1-c^2}. \qquad (1.6)$$

Параметры χ и χ_0 не зависят от ρ_1 и ρ_2.

Когда эллипс интенсивности вырождается в линию? Лишь при $c = 1$. Но тогда нет КИ и пучок физически не реализуем! Когда эллипс превращается в окружность? Лишь при $c = 0$ и расстояниях

$$z_{круг} = \frac{q'_{0x}\sqrt{q''_{0y}} \pm q'_{0y}\sqrt{q''_{0x}}}{\sqrt{q''_{0y}} \pm \sqrt{q''_{0x}}}.$$

Перейдем к анализу ориентации эллиптического светового пятна относительно оси ox. При повороте системы координат на мнимый угол $(i\alpha)$ происходит деформация эллипса интенсивности и новый азимут главной полуоси эллипса интенсивности определяется выражением

$$tg2\psi = \frac{2A''_{12}}{A''_{11} - A''_{22}}, \text{ т. е. } tg2\psi = th2\alpha \cdot \frac{\rho_2 - \rho_1}{\omega_1 - \omega_2}.$$

Расчеты удобно производить в следующей последовательности:

$$q_{ox,oy} = q'_{ox,oy} + iq''_{ox,oy}; \quad \rho_{1,2} = \frac{z - q'_{0x,0y}}{\left|q_{x,y}\right|^2};$$

$$\omega_{1,2} = \frac{q''_{0x,0y}}{\left|q_{x,y}\right|^2}; \quad sh2\alpha = c \cdot sh2\alpha_{\max};$$

$$sh2\alpha_{\max} = 2\sqrt{\frac{q''_{0x}q''_{0y}}{(q'_{0y} - q'_{0x})^2 + (q''_{0y} - q''_{0x})^2}};$$

$$\sin(2\chi) = \frac{2\sqrt{\omega_1\omega_2}}{\omega_1 + \omega_2}\sqrt{1-c^2}.$$

Ориентацию (азимут) главной оси эллипса интенсивности светового пятна целесообразно считать по формуле

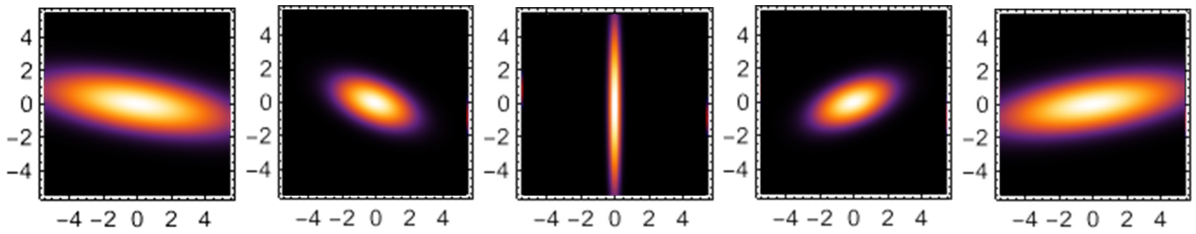
$$\psi = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left((\omega_1 - \omega_2)\, ch\alpha, (\rho_1 - \rho_2)\, sh\alpha\right). \qquad (1.7)$$

2 Графическое моделирование характеристик эллипсов интенсивности скалярных гауссовых пучков Арно

Для графического моделирования полученных результатов для наглядности был выполнен переход к безразмерным переменным

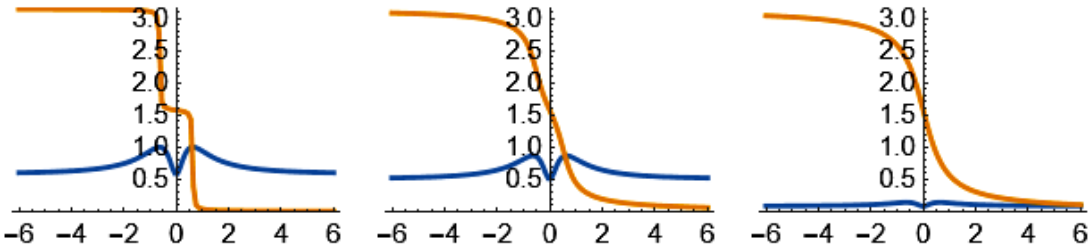
$$X = x / x_0, \quad Y = y / x_0, Z = z / z_0,$$

где $x_0 > 0, \quad z_0 = k x_0^2 / 2$ – характерные линейные размеры пучка в поперечном и продольном направлениях соответственно. Чтобы обеспечить КИ функций векторной амплитуды пучков Арно и, тем самым, переносимую конечную мощность через поперечное сечение пучка, выбирались



а) $Z=-2$; *б*) $Z=-1$; *в*) $Z=0$; *г*) $Z=1$; *д*) $Z=2$

Рисунок 2.1 – Деформация и вращение эллипсов интенсивности скалярных гауссовых пучков Арно со сложным астигматизмом. Свободные параметры: $q'_{0x}=0$; $q'_{0y}=0$; $q''_{ox}=0,2$; $q''_{oy}=2$; $c=0,5$



а) $c=0,03$; *б*) $c=0,5$; *в*) $c=0,99$

Рисунок 2.2 – Азимут ориентации главной оси эллипса интенсивности относительно оси ox и параметр эллиптичности светового пятна пучков Арно в зависимости от расстояния *z*.
Свободные параметры: $q'_{0x}=0$; $q'_{0y}=0$; $q''_{ox}=0,2$; $q''_{oy}=2$

параметры, удовлетворяющие условиям (1.5). Некоторые результаты графического моделирования поперечных потоков энергии и интенсивности однородно поляризованного параксиального светового гауссова пучка с общим астигматизмом изображены в относительных единицах на рисунках 2.1, 2.2 при различных значениях свободных параметров.

На рисунках 2.1 и 2.2 изображены параметр эллиптичности пятна интенсивности $\sin(2\chi)$ (нижний график) и его азимут ориентации ψ относительно оси *ox* в зависимости от расстояния *Z*. При распространении гауссового пучка Арно со сложным астигматизмом световое пятно пучка непрерывно деформируется и вращается. В интервале $(-\infty > Z > \infty)$ главные оси эллипса интенсивности вращаются на π радиан (см. также [2]). Вращение происходит неравномерно. Практически основной поворот происходит в интервале $(-2 > Z > 2)$ (рисунки 2.1, 2.2). Скорость поворота эллипса интенсивности зависит от свободного параметра *c*. При $c=0$ (гауссиан с простым астигматизмом) азимут главной оси эллипса интенсивности не зависит от *Z*. Эллипс лишь скачком поворачивается на $\pi/2$ при строго круговой форме светового пятна при двух значениях *Z*. При $c>0$ поворот эллипса светового пятна становится непрерывным, но неравномерным. С возрастанием *Z* поворот становится все более плавным. При $c=0,99$ мы видим наиболее плавное вращение эллипса с возрастанием *Z*. При этом эллиптичность падает до минимальных значений.

Графики параметра эллиптичности $\sin(2\chi)$, независимо от значений свободных параметров, имеют характерный вид. Они содержат один минимум и два максимума. Минимальный параметр эллиптичности $\sin(2\chi)$ (наиболее сплюснутое пятно интенсивности) наблюдается при азимуте эллипса интенсивности $\psi=\pi/2$. Затем, с изменением расстояния *Z*, эллиптичность быстро возрастает до максимума, а потом медленно уменьшается. Естественно, что при удалении от начала координат $(Z=0)$ размеры пятна интенсивности увеличиваются.

Коснемся теперь влияния других свободных параметров на форму и ориентацию эллипса интенсивности. Изменение $\Delta q'_{0x}$ параметра q'_{0x} приводит просто к соответствующему смещению $\Delta q'_{0x}$ светового пятна вдоль оси *OZ*. При возрастании q''_{oy} пятно расширяется вдоль оси абсцисс и деформируется вдоль оси ординат.

Заключение

В настоящей работе исследованы свойства эллиптического пятна интенсивности скалярных гауссовых световых пучков Арно со сложным астигматизмом. Предложены упрощенные явные

выражения для геометрических характеристик эллипса интенсивности (его эллиптичности и азимута ориентации относительно оси *OZ*). Уточнены ограничения, налагаемые на свободные параметры пучка Арно, чтобы он переносил конечную мощность и, тем самым, был физически реализуем.

Выполнено графическое моделирование характеристик эллипсов интенсивности скалярных гауссовых пучков Арно. Установлено полное соответствие аналитических выражений для деформации светового пятна и вращения его главных осей при распространении исследуемого светового пучка в свободном пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ананьев*, *Ю.А*. Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев. – Москва: Наука, 1990. – 264 с.

2. *Arnaud*, *J.* Gaussian beams with general astigmatism / J. Arnaud, H. Kogelnik // Applied Optics. – 1969. – Vol. 25. – P. 2908–2911.

3. *Гончаренко*, *А.М*. Гауссовы пучки света / А.М. Гончаренко. – Минск: Наука и техника, 1977. – 142 с.

4. *Heyman*, *H*. Gaussian beam and pulsed beam dynamics: complex-source and complex-spectrum formulations within and beyond paraxial asymptotics / E. Heyman, L.B. Felsen // J. Opt. Soc. Am. A. – 2001. – Vol. 18. – P. 1588–1611.

5. *Абрамочкин*, *Е.Г*. Современная оптика гауссовых пучков / Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 184 с.

6. *Modeling of the general astigmatic Gaussian beam and its propagation through* 3*D optical systems* / E. Kochkina E. [et al.] // Applied Optics. – 2013. – Vol. 42, № 24. – P. 6030–6040.

7. *Гиргель*, *С.С*. Скалярные параксиальные двумерные гауссовоподобные пучки / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2010. – № 1 (2). – С. 7–11.

8. *Гиргель*, *С.С*. Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 1 (26). – С. 17–21.

9. *Гиргель*, *С.С*. Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. II. Неоднородная поляризация // С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4 (33). – С. 7–10.

10. *Гиргель*, *С.С.* Энергетические характеристики векторных циркулярных пучков Куммера конечной мощности. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 20–24.

11. *Гиргель*, *С.С*. Поляризационные свойства и поперечные потоки энергии векторных бессель-гауссовых TM световых пучков / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 15–19.

12. *Гиргель*, *С.С*. Энергетические и поляризационные свойства векторных гауссовых световых пучков с простым астигматизмом / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 19–24.

13. *Гиргель*, *С.С*. Энергетические и поляризационные свойства векторных гауссовых световых пучков со сложным астигматизмом / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 14–19.

Поступила в редакцию 10.12.2024.

Информация об авторах

Гиргель Сергей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор

ФИЗИКА

УДК 539.12.01 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_27
EDN: VANBVZ

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОТЕНЦИАЛОМ КУЛОНА В ИМПУЛЬСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ДЛЯ СВЯЗАННЫХ *S*-СОСТОЯНИЙ С НУЛЕВОЙ ЭНЕРГИЕЙ

Ю.А. Гришечкин, В.Н. Капшай

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

EXACT SOLUTION OF THE QUASIPOTENTIAL EQUATION WITH THE COULOMB POTENTIAL IN THE MOMENTUM REPRESENTATION FOR COUPLED *S*-STATES WITH ENERGY EQUAL TO ZERO

Yu.A. Grishechkin, V.N. Kapshai

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Найдены точные решения трёхмерного модифицированного уравнения Кадышевского в импульсном представлении, описывающего связанные *s*-состояния системы двух скалярных частиц в случае потенциала Кулона в пределе равной нулю энергии. Решение задачи получено путём её преобразования к аналогу уравнения Шрёдингера с потенциалом Кулона в импульсном представлении, дополненного граничными условиями специального вида. Получены волновые функции и условия квантования, налагаемые на константу связи.

Ключевые слова: *модифицированное уравнение Кадышевского*, *потенциал Кулона*, *импульсное представление*, *уравнение Шрёдингера.*

Для цитирования: *Гришечкин*, *Ю.А*. Точное решение квазипотенциального уравнения с потенциалом Кулона в импульсном представлении для связанных *s*-состояний с нулевой энергией / Ю.А. Гришечкин, В.Н. Капшай // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 27–29. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_27. – EDN: VANBVZ

Abstract. Exact solutions of the three-dimensional modified Kadyshevsky equation in the momentum representation, describing the bound *s*-states of a system of two scalar particles in the case of the Coulomb potential in the limit of zero energy, are found. The solution of the problem is obtained by transforming it to an analogue of the Schrödinger equation with the Coulomb potential in the momentum representation, supplemented by boundary conditions of the special type. The wave functions and quantization conditions imposed on the coupling constant are obtained.

Keywords: *modified Kadyshevsky equation*, *Coulomb potential, momentum representation*, *Schrödinger equation.*

For citation: *Grishechkin*, *Yu.A*. Exact solution of the quasipotential equation with the Coulomb potential in the momentum representation for coupled *s*-states with energy equal to zero / Yu.A. Grishechkin, V.N. Kapshai // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 2 (63). – P. 27–29. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_27 (in Russian). – EDN: VANBVZ

Введение

Модифицированное уравнение Кадышевского для волновой функции $\psi(2E,\chi_p)$ в импульсном представлении, описывающей связанные состояния системы двух скалярных частиц одинаковой массы m в сферически-симметричном случае, имеет вид [1], [2]

$$\left(2m\,\mathrm{ch}\,\chi_p - 2E\right)\psi(2E,\chi_p) = -\frac{2m}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} V(\chi_p,\chi_k)\psi(2E,\chi_k)d\chi_k,\ \ \chi_p \geq 0, \tag{0.1}$$

где величина $2E$ – энергия системы двух частиц в системе центра масс $(0 < 2E < 2m)$, χ_p – быстрота, связанная с относительным импульсом p в системе центра масс по формуле $p = m\,\mathrm{sh}\,\chi_p$, $V(\chi_p,\chi_k)$ – потенциал.

В данной работе мы рассматриваем нахождение точных решений уравнения (0.1) в случае, когда энергия системы равна нулю (предел сильно связанных частиц), а взаимодействие между частицами осуществляется посредством потенциала Кулона [3]

$$V(\chi_p,\chi_k) = \frac{\lambda}{2}\ln\left|\frac{\mathrm{sh}\,\chi_p - \mathrm{sh}\,\chi_k}{\mathrm{sh}\,\chi_p + \mathrm{sh}\,\chi_k}\right| = -\frac{\lambda}{4}\ln\left|\frac{\mathrm{cth}^2\left((\chi_p-\chi_k)/2\right)}{\mathrm{cth}^2\left((\chi_p+\chi_k)/2\right)}\right|, \tag{0.2}$$

где $\lambda > 0$ – константа связи. Для решения поставленной задачи нам понадобится свойство нечётности волновой функции

$$\psi(2E,-\chi_p) = -\psi(2E,\chi_p), \tag{0.3}$$

а также граничные условия

© *Гришечкин Ю.А.*, *Капшай В.Н.*, 2025

$$\psi(2E,0)=0;$$

$$\left(2\operatorname{ch}\chi_p-2E/m\right)\psi(2E,\chi_p)\Big|_{\chi_p\to\infty}\cong 0. \quad (0.4)$$

Выражения (0.3), (0.4) следуют из уравнения (0.1), при этом (0.3) получено в предположении, что область определения переменной χ_p распространена на отрицательную полуось.

1 Преобразование уравнения

Воспользовавшись свойством (0.3) волновой функции, преобразуем уравнение (0.1) с потенциалом (0.2) к виду

$$\left(2\operatorname{ch}\chi_p-2E/m\right)\psi(2E,\chi_p)=$$
$$=-\frac{\lambda}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ln\left|\frac{\operatorname{sh}\chi_p-\operatorname{sh}\chi_k}{\operatorname{sh}\chi_p+\operatorname{sh}\chi_k}\right|\psi(2E,\chi_k)d\chi_k,$$
$$-\infty<\chi_p<\infty$$

и выполним в нём замену переменных

$$z=\exp(\chi_p),\quad z'=\exp(\chi_k).$$

В результате получим следующее интегральное уравнение

$$\left(z+1/z-2E/m\right)\tilde\psi(2E,z)=$$
$$=-\frac{\lambda}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\ln\left|\frac{z-z'}{z+z'}\right|\tilde\psi(2E,z')\frac{dz'}{z'}-$$
$$-\frac{\lambda}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\ln\left|\frac{z+1/z'}{z-1/z'}\right|\tilde\psi(2E,z')\frac{dz'}{z'},\quad z\ge 0, \quad (1.1)$$

где выполнено переобозначение для волновой функции

$$\psi(2E,\chi_p)=\psi(2E,\ln z)=\tilde\psi(2E,z). \quad (1.2)$$

Выполним теперь во втором интеграле уравнения (1.1) замену переменной $z''=1/z'$ и, используя формулы (0.3), (1.2), преобразуем функцию под интегралом

$$\tilde\psi(2E,z')=\tilde\psi(2E,1/z'')=\psi\left(2E,\ln\left(1/z''\right)\right)=$$
$$=\psi(2E,-\ln z'')=-\psi(2E,\ln z'')=-\tilde\psi(2E,z''),$$

После указанных действий уравнение (1.1) принимает вид

$$\left(z+1/z-2E/m\right)\tilde\psi(2E,z)=$$
$$=-\frac{\lambda}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\ln\left|\frac{z-z'}{z+z'}\right|\tilde\psi(2E,z')\frac{dz'}{z'}-$$
$$-\frac{\lambda}{2\pi}\int\limits_{+\infty}^{0}\ln\left|\frac{z+z''}{z-z''}\right|\tilde\psi(2E,z'')\frac{dz''}{z''}. \quad (1.3)$$

Выполним в (1.3) переобозначение переменной $z''\to z'$ и представим уравнение в следующей форме

$$\left(z+1/z-2E/m\right)\tilde\psi(2E,z)=$$
$$=-\frac{\lambda}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\ln\left|\frac{z-z'}{z+z'}\right|\tilde\psi(2E,z')\frac{dz'}{z'}. \quad (1.4)$$

Введём обозначение $\varphi(2E,z)=\tilde\psi(2E,z)/z$. В результате уравнение (1.4) принимает вид

$$\left(z^2+1-2E/m\,z\right)\varphi(2E,z)=$$
$$=-\frac{\lambda}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\ln\left|\frac{z-z'}{z+z'}\right|\varphi(2E,z')dz'. \quad (1.5)$$

Точное решение интегрального уравнения (1.5) для произвольного значения энергии $2E$ нам неизвестно. Рассмотрим (1.5) в частном случае, когда $2E=0$.

2 Точное решение интегрального уравнения

При нулевом значении энергии уравнение (1.5) принимает форму

$$\left(z^2+1\right)\varphi(0,z)=-\frac{\lambda}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\ln\left|\frac{z-z'}{z+z'}\right|\varphi(0,z')dz', \quad (2.1)$$
$$z\ge 0,$$

аналогичную уравнению Шрёдингера для связанных состояний с потенциалом Кулона в импульсном представлении [4]. Граничные условия (0.4) для функции $\varphi(0,z)$ принимают вид

$$\varphi(0,1)=0;$$

$$\left(z^2+1\right)\varphi(0,z)\Big|_{z\to\infty}\cong 0. \quad (2.2)$$

Решение уравнения (2.1) представим в форме [5]

$$\varphi(0,z)=\frac{C}{z^2+1}\left[\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\lambda/2}-\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{\lambda/2}\right], \quad (2.3)$$
$$\lambda=2s,\quad s=1,2,...,$$

где константа C – всё ещё не определена. Функция (2.3) удовлетворяет второму из условий (2.2) для всех указанных значений s. Подставив (2.3) в первое из условий (2.2) и выполнив несложные преобразования, получим равенство

$$\sin\left(\pi s/2\right)=0,$$

которое выполняется лишь для чётных значений s. Таким образом, решение уравнения (2.1) с учётом граничных условий (2.2) имеет следующий вид:

$$\varphi_n(0,z)=\frac{C_n}{z^2+1}\left[\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{2n}-\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{2n}\right],$$
$$\lambda_n=4n,\quad n=1,2,....$$

Возвращаясь к первоначальному обозначению для волновой функции и переменной χ_p, представим решение уравнения (0.1) с потенциалом (0.2) для нулевой энергии связанного состояния в форме

$$\psi_n(0,\chi_p)=\frac{C_n\exp(i\pi n)}{2\operatorname{ch}\chi_p}\times \quad (2.4)$$
$$\times\left[\left(\frac{\operatorname{sh}\left(\chi_p/2-i\,\pi/4\right)}{\operatorname{sh}\left(\chi_p/2+i\,\pi/4\right)}\right)^{2n}-\left(\frac{\operatorname{sh}\left(\chi_p/2+i\,\pi/4\right)}{\operatorname{sh}\left(\chi_p/2-i\,\pi/4\right)}\right)^{2n}\right],$$
$$\lambda_n=4n,\quad n=1,2,....$$

Заключение

В данной работе получены точные решения модифицированного уравнения Кадышевского с потенциалом Кулона в импульсном представлении в случае связанных *s*-состояний системы двух скалярных частиц с энергией, равной нулю. Рассмотренный метод мы планируем использовать в дальнейшем для получения аналитических решений релятивистских двухчастичных уравнений в случае ненулевых значений энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kapshai*, *V.N.* Relativistic two-particle one-dimensional scattering problem for superposition of δ-potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // J. Phys. A. – 1999. – Vol. 32. – P. 5329–5342.

2. *Kapshai, V.N.* One-dimensional relativistic problems on bound states and scattering for a superposition of two δ-potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // Russian Physics Journal. – 2002. – Vol. 45. – P. 1–9.

3. *Капшай*, *В.Н.* Точное решение ковариантного двухчастичного одновременного уравнения с суперпозицией квазипотенциалов однобозонного обмена / В.Н. Капшай, Н.Б. Скачков // ТМФ. – 1982. – Т. 53, № 1. – С. 32–42.

4. *Флюгге*, *З.* Задачи по квантовой механике: в 2 т. / З. Флюгге. – 3-е изд. – Москва: ЛКИ, 2010. – Т. 1. – 344 с.

5. *Palma*, *G.* The one-dimensional hydrogen atom revisited / G. Palma, U. Raff // Canadian Journal of Physics. – 2006. – Vol. 84, № 9. – P. 787–800.

Поступила в редакцию 27.02.2025.

Информация об авторах

Гришечкин Юрий Алексеевич – к.ф.-м.н., доцент

Капшай Валерий Николаевич – к.ф.-м.н., доцент

УДК 536.782:524.882 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_30
EDN: VYPBIO

ДЖОУЛЬ – ТОМСОНОВСКОЕ РАСШИРЕНИЕ: ЖИДКОСТЬ РЕДЛИХА – КВОНГА И ЗАРЯЖЕННАЯ АдС ЧЁРНАЯ ДЫРА

О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

JOULE – THOMSON EXPANSION: REDLICH – KWONG FLUID AND CHARGED AdS BLACK HOLE

V.U. Novikava, G.Yu. Tyumenkov

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. В работе рассмотрено джоуль-томсоновское расширение жидкости Редлиха – Квонга и заряженной АдС черной дыры. На основе уравнений состояния получены аналитические выражения для температур инверсии, построены инверсионные кривые в *TP*-плоскости и определены области охлаждения и нагрева. Проанализированы сходства и различия поведения заряженной АдС черной дыры и жидкости Редлиха – Квонга в данном процессе.

Ключевые слова: *жидкость Редлиха – Квонга*, *заряженная АдС чёрная дыра*, *расширение Джоуля – Томсона*, *изоэнтальпический процесс*, *кривая инверсии*, *области охлаждения и нагревания*.

Для цитирования: *Новикова*, *О.В.* Джоуль – Томсоновское расширение: жидкость Редлиха – Квонга и заряженная АдС чёрная дыра / О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 30–34. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_30. – EDN: VYPBIO

Abstract. In the paper we consider the Joule – Thomson expansion of the Redlich – Kwong fluid and a charged AdS black hole. Based on the equations of state, the analytical expressions for inversion temperatures are obtained, the inversion curves in the *TP*-plane are constructed, and the cooling and heating regions are determined. Similarities and differences in the behavior of a charged AdS black hole and the Redlich – Kwong fluid in this process are analyzed.

Keywords: *Redlich – Kwong fluid*, *charged AdS black hole*, *Joule – Thomson expansion*, *isenthalpic process*, *inversion curve*, *cooling and heating regions*.

For citation: *Novikava*, *V.U.* Joule – Thomson expansion: Redlich – kwong fluid and charged AdS black hole / V.U. Novikava, G.Yu. Tyumenkov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 2 (63). – P. 30–34. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_30 (in Russian). – EDN: VYPBIO

Введение

Начало термодинамике чёрных дыр было положено в классических работах Бекенстайна и Хокинга [1], [2]. Термодинамическое изучение чёрных дыр в пространстве анти-де-Ситтера (АдС), начатое в пионерской работе Хокинга и Пэйджа [3], было обобщено на случай наличия электрического заряда в работе [4], где авторы обнаружили аналогию между фазовыми диаграммами чёрных дыр и ван-дер-ваальсовской жидкости. Поэтому в последнее десятилетие делается акцент на возможность проведения сравнительного анализа поведения чёрных дыр и реальных жидкостей [5] в рамках процесса Джоуля – Томсона [6]. В данной работе мы изучим и сравним джоуль-томсоновское расширение заряженной АдС чёрной дыры и жидкости Редлиха – Квонга, причём, начнём с последней.

Следует заметить, что сравнительный анализ поведения инверсионных кривых эффекта Джоуля – Томсона для полуэмпирических двухпараметрических уравнений состояния, проделанный в работе [7], говорит о том, что именно редлих-квонговская кривая ближе всех к эмпирической кривой, которая следует из классического эксперимента [8].

© *Новикова О.В.*, *Тюменков Г.Ю.*, 2025

1 Жидкость Редлиха – Квонга

Стандартное уравнение состояния Редлиха – Квонга, например [7], может быть записано в виде

$$P = \frac{k_B T}{\vartheta - b} - \frac{a}{\sqrt{T}\vartheta\left(\vartheta + b\right)} \qquad (1.1)$$

при условии введения параметра $\vartheta = V / N$, где V – объём, N – постоянное число частиц, P – давление, T – температура, k_B – постоянная Больцмана, а параметры сил парного межмолекулярного отталкивания и притяжения заданы заменами $b \Rightarrow b / N$, $a \Rightarrow a / N^2$.

В процессе Джоуля – Томсона жидкость изоэнтальпически, то есть при энтальпии $H = Const$, из области высокого давления

переходит в область более низкого давления, что сопровождается изменением её температуры. При понижении температуры (охлаждении) эффект Джоуля – Томсона считается положительным, при повышении температуры (нагревании) – отрицательным. Производная, характеризующая процесс, представима в виде

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = -\frac{\lambda}{c_P}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial P}\right)_T,$$

$$\lambda = \vartheta\left(\frac{\partial P}{\partial \vartheta}\right)_T + T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\vartheta, \qquad (1.2)$$

где параметр процесса λ имеет знак, совпадающий со знаком эффекта в данном случае дифференциального. Уравнение (1.1) и определение (1.2) дают явный вид параметра λ

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \vartheta}\right)_T = -\frac{k_B T}{(\vartheta - b)^2} + \frac{a}{\sqrt{T}}\frac{(2\vartheta + b)}{\vartheta^2(\vartheta + b)^2},$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\vartheta = \frac{k_B}{\vartheta - b} + \frac{a}{2T^{3/2}\vartheta(\vartheta + b)},$$

$$\lambda = -\frac{k_B T b}{(\vartheta - b)^2} + \frac{5a\vartheta + 3ab}{2\sqrt{T}\vartheta(\vartheta + b)^2}. \qquad (1.3)$$

Области положительного и отрицательного эффекта Джоуля - Томсона разделяются инверсионной кривой, удовлетворяющей условию $\lambda = 0$, при этом полагается, что $T = T_i$. Тогда из (1.3) следуют выражение для T_i, которое совместно с (1.1) определяет систему уравнений для построения кривой инверсии

$$\begin{cases} T_i = \left[\left(\dfrac{5a\vartheta + 3ab}{2k_B b\vartheta}\right)\left(\dfrac{\vartheta - b}{\vartheta + b}\right)^2\right]^{\frac{2}{3}}; \\ P = \dfrac{k_B T_i}{\vartheta - b} - \dfrac{a}{\sqrt{T_i}\vartheta(\vartheta + b)}. \end{cases} \qquad (1.4)$$

В свою очередь, формула (1.3) по очевидному асимптотическому поведению $\lambda_{T\to\infty} < 0$ позволяет выделить области положительного и отрицательного эффекта – охлаждения и нагревания соответственно, что позволяет не использовать явный вид графического поведения изоэнтальпических кривых. Уравнения (1.4) также определяют физическую область некомплексных и неотрицательных температур в *TP*-плоскости. Вышесказанное, в случае фиксации параметров $a = b = k_B = 1$ по аналогии с [5], проиллюстрировано на рисунке 1.1.

Приведенная форма уравнения Редлиха – Квонга, учитывающая значения критических параметров

$$P_{cr} = \left(\frac{a^2 k_B \xi^7}{3b^5}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad T_{cr} = \left(\frac{3a\xi^2}{k_B b}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad V_{cr} = \frac{b}{\xi},$$

где $\xi = \sqrt[3]{2} - 1 \cong 0,259921 \cong 0,260$, ранее изучалась в рамках процесса Джоуля – Томсона в вышеупомянутой работе [7]. В этом случае система уравнений для инверсионной кривой имеет вид:

$$\begin{cases} T_{i,r} = \left[\dfrac{(5V_r + 3\xi)}{6\xi^2 V_r}\left(\dfrac{V_r - \xi}{V_r + \xi}\right)^2\right]^{\frac{2}{3}}; \\ P_r = \dfrac{3T_{i,r}}{V_r - \xi} - \dfrac{1}{\xi\sqrt{T_{i,r}}V_r(V_r + \xi)}. \end{cases} \qquad (1.5)$$

Приведенная кривая инверсии, следующая из (1.5), изображена на рисунке 1.2.

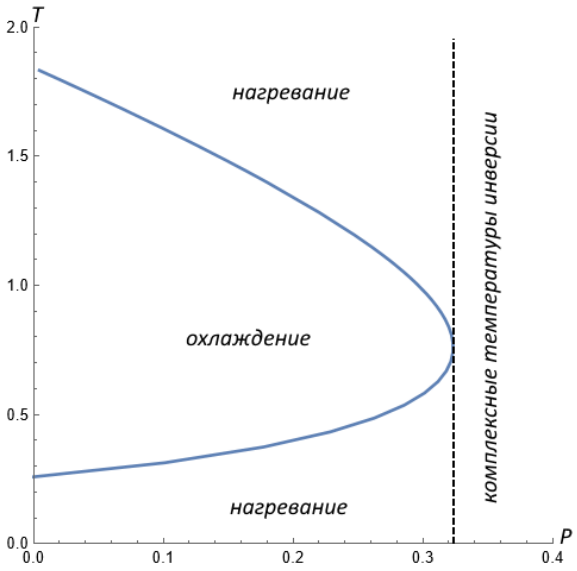


Рисунок 1.1 – Кривая инверсии знака эффекта Джоуля – Томсона, следующая из уравнения состояния Редлиха – Квонга $(a = b = k_B = 1)$

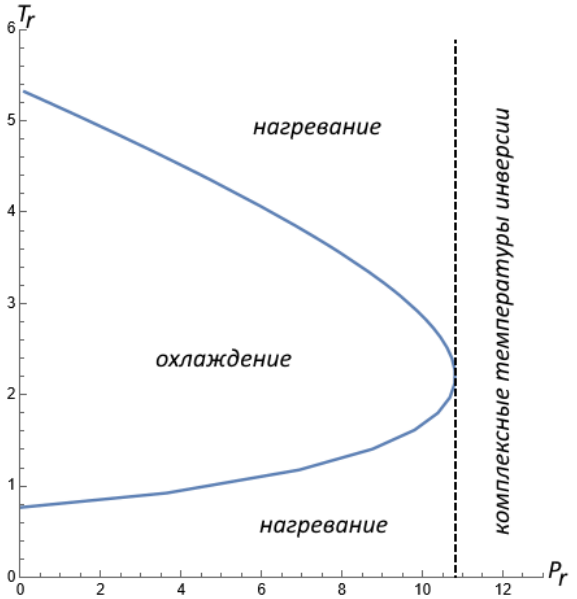


Рисунок 1.2 – Кривая инверсии знака эффекта Джоуля – Томсона для приведенного уравнения состояния Редлиха – Квонга

Критерий выделения областей нагревания и охлаждения и в этом случае тот же $\lambda_{r,T\to\infty}<0$ и также не требует явного вида изоэнтальпических кривых.

2 Заряженная АдС чёрная дыра

Обратимся к заряженной АдС (анти-де-ситтеровской) чёрной дыре и коснёмся её основных физических и, в особенности, термодинамических свойств, а также определим характеристики джоуль-томсоновского расширения. При этом далее, что является общепринятым, будем использовать рациональную систему единиц, в которой $G=\hbar=k_B=c=1$.

В рассматриваемом случае геометрия пространства-времени заключена в интервале

$$ds^2=-f(r)dt^2+f^{-1}(r)dr^2+r^2d\Omega^2,$$

где $d\Omega^2=d\theta^2+\sin^2(\theta)d\varphi^2$, а функция $f(r)$ представима как

$$f(r)=1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}+\frac{r^2}{l^2}. \qquad (2.1)$$

В формуле (2.1) l, M и Q – это анти-де-ситтеровские радиус, масса и заряд чёрной дыры. В свою очередь, радиус горизонта событий r_+ находится, как наибольший корень уравнения $f(r_+)=0$.

При этом масса чёрной дыры оказывается равной

$$M=\frac{r_+}{2}\left(1+\frac{Q^2}{r_+^2}+\frac{r_+^2}{l^2}\right) \qquad (2.2)$$

и в нашем случае, в соответствии с работой [9], сопоставляется с энтальпией, дифференциал которой

$$dM=TdS+VdP+\Phi dQ,\quad \Phi=Q/r_+. \qquad (2.3)$$

Космологическая константа Λ непосредственно связана с давлением P и в АдС случае она отрицательна [1], [3]

$$P=-\frac{\Lambda}{8\pi}=\frac{3}{8\pi l^2}. \qquad (2.4)$$

Энтропия чёрной дыры [1] задаётся соотношением $S=\pi r_+^2$, а температура T, согласно (2.3), приобретает вид

$$T=\left(\frac{\partial M}{\partial S}\right)_{P,Q}=\frac{l^2\left(r_+^2-Q^2\right)+3r_+^4}{4\pi l^2 r_+^3}. \qquad (2.5)$$

И, наконец, уравнение состояния вида $P=P(V,T)$ для заряженной АдС чёрной дыры на основании (2.4) и (2.5) может быть записано как

$$P=\frac{T}{2r_+}-\frac{1}{8\pi r_+^2}+\frac{Q^2}{8\pi r_+^4},\quad r_+=\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}. \qquad (2.6)$$

Теперь обратимся непосредственно к джоуль-томсоновскому расширению заряженной АдС чёрной дыры. При этом определение параметра процесса λ используем в его стандартном виде [6].

Применение уравнения состояния (2.6) в определении (1.2) при условии инверсии $\lambda=0$ даёт выражение для инверсионной температуры

$$T_i=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}V^{\frac{1}{3}}\left[8\pi\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}P_i+\frac{1}{V^{\frac{2}{3}}}-\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{Q^2}{V^{\frac{4}{3}}}\right]=$$

$$=-\frac{Q^2}{4\pi r_+^3}+\frac{1}{4\pi r_+}+2P_i r_+. \qquad (2.7)$$

Дальнейшее совместное использование (2.6) и (2.7) приводит к условию в виде уравнения

$$8\pi P_i r_+^4+2r_+^2-3Q^2=0,$$

имеющему только один положительный некомплексный корень из четырёх

$$r_+=\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{1+24P_i\pi Q^2}}{P_i\pi}-\frac{1}{P_i\pi}}. \qquad (2.8)$$

Используя корень (2.8) в выражении (2.7), получаем окончательный вид кривой инверсии в TP-плоскости

$$T_i=\frac{\sqrt{P_i}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\left(1+16\pi P_i Q^2-\sqrt{1+24\pi P_i Q^2}\right)}{\left(-1+\sqrt{1+24\pi P_i Q^2}\right)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (2.9)$$

Соответствующее (2.9) семейство кривых инверсии изображено на рисунке 2.1

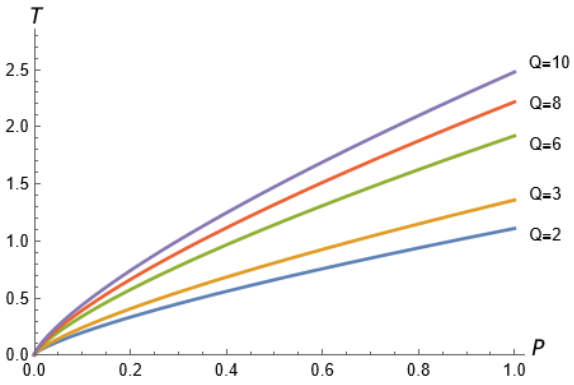


Рисунок 2.1 – Семейство кривых инверсии для заряженной АдС чёрной дыры, параметризованное зарядом Q

На рисунке 2.2. показаны области положительного и отрицательного эффекта для заряженной АдС чёрной дыры с фиксированным зарядом, в частном случае $Q=2$. В качестве критерия выделения областей охлаждения и нагревания при этом было выбрано поведение изоэнтальпических кривых, следующее из формул (2.2), (2.4) и (2.5). Не трудно заметить, что с уменьшением P под кривой инверсии на изоэнтальпе температура T растёт, а над кривой инверсии – убывает.

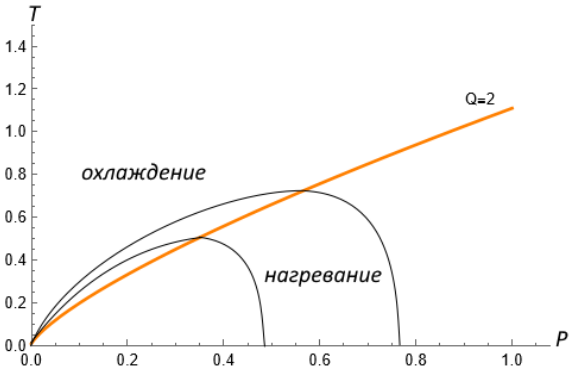


Рисунок 2.2 – Кривая инверсии для заряженной АдС чёрной дыры с зарядом $Q = 2$; области охлаждения и нагревания; явный вид изоэнтальп

3 Сравнение областей положительного эффекта

Понимая определённое фиксированное положение редлих-квонговской кривой инверсии в случае нормировки $a = b = k_B = 1$ и влияние параметризации зарядом на поведение кривых инверсии АдС чёрной дыры можно сделать вывод о наличии некоторого заряда, при котором кривые инверсии имеют точку касания A. Расчёты показывают, что данной ситуации соответствует заряд $Q = 2{,}75$. Координаты точки касания: $P_A = 0{,}28$; $T_A = 0{,}43$. Касающиеся кривые инверсии показаны на рисунке 3.1.

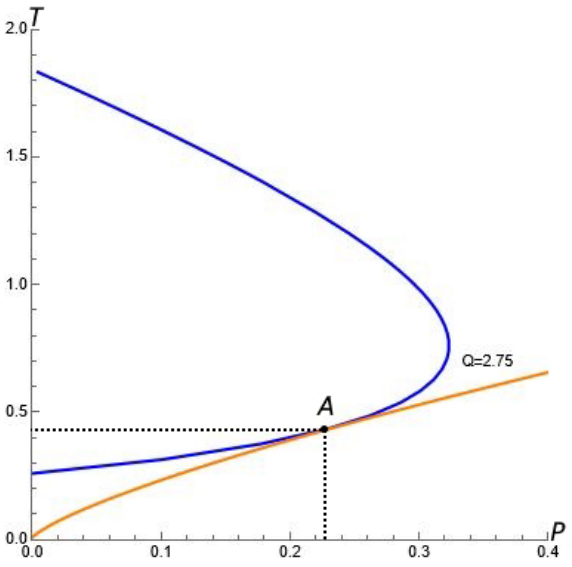


Рисунок 3.1 – Кривые инверсии для заряженной АдС чёрной дыры с зарядом $Q = 2{,}75$ и кривая инверсии Редлиха – Квонга

Поэтому в рамках выше оговоренной физической ситуации можно прийти к выводам:

– область положительного эффекта Джоуля – Томсона для заряженных АдС чёрных дыр с $Q < 2{,}75$ полностью содержит в себе такую же область для жидкости Редлиха – Квонга, что может говорить о возможной физической общности состояния и поведения рассматриваемых систем в обозначенных инверсионными кривыми областях PT – плоскости;

– для заряженных АдС чёрных дыр с $Q \geq 2{,}75$ характерно смешивание областей с различными знаками эффекта Джоуля – Томсона, что уменьшает степень общности систем и возможность физических интерпретаций;

– наличие точки касания с нижней стороны редлих-квонговской кривой инверсии говорит о правомерности использование термина «жидкость Редлиха – Квонга», так как именно нижняя часть соответствует жидкой фазе.

Заключение

Изучено расширение Джоуля – Томсона, или же одноименный эффект, для жидкости Редлиха – Квонга и заряженной АдС черной дыры. Масса черной дыры в АдС пространстве отождествлялась с энтальпией и считалась постоянной. В обоих случаях получены кривые инверсии знака эффекта Джоуля – Томсона и определены области охлаждения и нагревания. Чёрные дыры всегда остывают выше кривой инверсии, что было показано для различных значений заряда Q и массы (энтальпии) M (рисунки 2.1, 2.2). Видно, что при низких температурах обе системы имеют различное поведение: у заряженной АдС чёрной дыры область охлаждения увеличивается с уменьшением заряда, а у жидкости Редлиха – Квонга уменьшается, аналогично с жидкостью ван-дер-Ваальса [5], и при определённой температуре исчезает. В свою очередь, наличие граничной температуры $T_A = 0{,}43$ даёт возможность говорить о физической общности состояний и поведения рассматриваемых систем в обозначенных инверсионными кривыми областях PT – плоскости.

Следует также в дальнейшем обратить внимание на физическое осмысление нормировки $a = b = 1$, то есть фиксацию параметров уравнения состояния, не относящихся к фундаментальным константам. В этом случае строгий анализ областей положительного эффекта сложно реализовать из-за возникновения различного масштабирования шкал.

Следующим шагом в исследовании джоуль-томсоновского расширения АдС чёрных дыр, очевидно, является обращение к керровским чёрным дырам [10], то есть незаряженным вращающимся, и проведение сравнительного анализа с соответствующим поведением двухпараметрических реальных жидкостей, в особенности, жидкости Редлиха – Квонга.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bekenstein, J.D.* Black holes and the second law / J.D. Bekenstein // Lett. Nuovo Cimento. – 1972. – Vol. 4. – P. 737–740.

2. *Hawking*, *S.W*. Black hole explosions? / S.W. Hawking // Nature. – 1974. – Vol. 248. – P. 30–31.

3. *Hawking*, *S.W*. Thermodynamics of black holes in anti-de Sitter space / S.W. Hawking, D.N. Page // Commun. Math. Phys. – 1983. – Vol. 87. – P. 577–588.

4. *Charged AdS Black Holes and Catastrophic Holography* / A. Chamblin, R. Emparan, C.V. Johnson, R.C. Myers // Phys. Rev. D. – 1999. – Vol. 60. – P. 064018.

5. *Ökcü*, *Ö*. Joule – Thomson expansion of the charged AdS black holes / Ö. Ökcü, E. Aydıner // Eur. Phys. J. C. – 2017. – Vol. 77. – Art. № 24.

6. *Румер*, *Ю.Б.* Термодинамика, статистическая физика и кинетика / Ю.Б. Румер, М.Ш. Рывкин. – Новосибирск: НГУ, 2000. – 608 с.

7. *Дей*, *Е.А*. Расчет параметров изоэнтальпического охлаждения газов Редлиха – Квонга / Е.А. Дей, О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2012. – № 6 (75). – С. 38–42.

8. *Hendricks*, *R.C*. Joule – Thomson Inversion Curves and Related Coefficients for Several Simple Fluids / R.C. Hendricks, I.C. Peller, A.K. Baron // NASA Technical Note TN D-6807. – NASA, 1972. – 59 p.

9. *Kastor*, *D*. Enthalpy and the Mechanics of AdS Black Holes / D. Kastor, S. Ray, J. Traschen // Class. Quantum Gravity. – 2009. – Vol. 26. – P. 195011.

10. *Ökcü*, *Ö*. Joule – Thomson expansion of Kerr-AdS black holes / Ö. Ökcü, E. Aydıner // Eur. Phys. J. C. – 2018. – Vol. 78. – Art. № 123.

Поступила в редакцию 26.02.2025.

Информация об авторах

Новикова Ольга Владимировна – магистр ф.-м.н.
Тюменков Геннадий Юрьевич – к.ф.-м.н., доцент

ФИЗИКА

УДК 546.26:539.234 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_35
EDN: WCOOVW

ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ И РЕЖИМА ФОРМИРОВАНИЯ ПОДСЛОЯ НА ОСНОВЕ ЭТИЛЦЕЛЛЮЛОЗЫ И СЕРНОЙ КИСЛОТЫ НА СТРУКТУРУ УГЛЕРОДНЫХ ПОКРЫТИЙ

А.С. Руденков, А.В. Рогачёв, М.А. Ярмоленко, Д.Г. Пилипцов

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

INFLUENCE OF CONDITIONS AND MODE OF FORMATION OF A SUBLAYER BASED ON ETHYL CELLULOSE AND SULFURIC ACID ON THE STRUCTURE OF CARBON COATINGS

A.S. Rudenkov, A.V. Rogachev, M.A. Yarmolenko, D.G. Piliptsou

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Определено влияние метода формирования слоя этилцеллюлозы, архитектуры двухслойных систем на основе этилцеллюлозы и серной кислоты на морфологию и фазовый состав углеродных покрытий, сформированных на их поверхности. Установлено, что в случае лазерного нанесения этилцеллюлозы углеродные слои, осажденные на поверхности H_2SO_4 / ЭЦ, характеризуются более высоким соотношением Csp^3 / Csp^2 по сравнению с покрытиями, сформированными на поверхности ЭЦ / H_2SO_4. При этом в случае электронно-лучевого нанесения этилцеллюлозы наблюдается обратный эффект: в углеродном слое, осажденном на поверхности H_2SO_4 / ЭЦ, регистрируется более низкое соотношение Csp^3 / Csp^2 по сравнению со слоями на поверхности ЭЦ / H_2SO_4, что обусловлено наличием капельной фазы при лазерном диспергировании этилцеллюлозы и, как следствие, различными процессами структурообразования слоя ЭЦ и его каталитического влияния на углеродное покрытие.

Ключевые слова: *углерод*, *серная кислота*, *этилцеллюлоза*, *морфология*, *фазовый состав.*

Для цитирования: *Влияние условий и режима формирования подслоя на основе этилцеллюлозы и серной кислоты на структуру углеродных покрытий* / А.С. Руденков, А.В. Рогачёв, М.А. Ярмоленко, Д.Г. Пилипцов // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 35–43. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_35. – EDN: WCOOVW

Abstract. The influence of the method for forming the ethyl cellulose layer, the architecture of the two-layer systems based on ethyl cellulose and sulfuric acid on the morphology and phase composition of the carbon coatings formed on their surface is determined. It is established that in the case of laser deposition of ethyl cellulose, the carbon layers deposited on the H_2SO_4 / EC surface are characterized by a higher Csp^3 / Csp^2 ratio, compared to the coatings formed on the EC / H_2SO_4 surface. At the same time, in the case of electron beam deposition of ethyl cellulose, the opposite effect is observed: in the carbon layer deposited on the H_2SO_4 / EC surface, a lower Csp^3 / Csp^2 ratio is recorded, compared to the layers on the EC / H_2SO_4 surface, which is due to the presence of a droplet phase during laser dispersion of ethyl cellulose and, as a consequence, various processes of EC layer structure formation and its catalytic effect on the carbon coating.

Keywords: *carbon*, *sulfuric acid*, *ethylcellulose*, *morphology*, *phase composition*.

For citation: *Influence of conditions and mode of formation of a sublayer based on ethyl cellulose and sulfuric acid on the structure of carbon coatings* / A.S. Rudenkov, A.V. Rogachev, M.A. Yarmolenko, D.G. Piliptsou // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 2 (63). – P. 35–43. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_35 (in Russian). – EDN: WCOOVW

Введение

Благодаря уникальному сочетанию физико-химических свойств углеродные покрытия широко используются для повышения твердости, антифрикционных свойств контактных поверхностей [1], [2]. Однако, из-за высокого уровня внутреннего напряжения и относительно низкой термостойкости (до 350° С), сфера их применения ограничена [3], [4]. В настоящее время с целью повышения их свойств интенсивно развиваются технологии формирования композиционных покрытий различного функционального назначения, армированных углеродными наноструктурами (фуллерены, углеродные волокна, графен, углеродные нанотрубки, наночастицы алмаза) [5]–[8] и наночастицами металлов (никель, серебро, золото и т. д.) [9]–[11]. При этом необходимо отметить, что для синтеза наноразмерных углеродных структур успешно используются процессы карбонизации полимерных материалов [12], в том числе с использованием в качестве катализатора серосодержащих соединений [13]. Инкорпорирование наноразмерных объектов в структуру покрытий на основе углерода позволяет повысить их износостойкость, снизить коэффициент трения и уровень внутренних

© *Руденков А.С.*, *Рогачёв А.В.*, *Ярмоленко М.А.*, *Пилипцов Д.Г.*, 2025

напряжений, улучшить адгезионную прочность и термостойкость [5]–[11]. В частности, путем внедрения фуллеренов в состав углеродных покрытий, удалось повысить их микротвердость от 21 ГПа до 27 ГПа и обеспечить термостойкость при температуре до 500° С [5]. В [6] показано, что при инкорпарировании углеродными нанотрубками (концентрация 0,13 масс. %) микротвердость углеродных покрытий возрастает от 10,6 до 13,3 ГПа, модуль Юнга – от 110 ГПа до 128 ГПа, а уровень внутренних напряжений снижается с 2,35 ГПа до 2,17 ГПа, значения коэффициента трения – с 0,11 до 0,02. Отметим, что вышеуказанные покрытия были получены плазмохимическими методами с использованием в качестве прекурсора углерода водородсодержащих газов. При этом в литературных источниках практически отсутствуют данные о структуре и свойствах углеродных покрытий, инкорпорированных нанообъектами и сформированных из твердых прекурсоров, осажденных, в частности, из совмещенных или последовательно генерируемых потоков импульсной углеродной плазмы и испаренных функциональных ингредиентов. Использование таких режимов и условий характеризуется более широкими технологическими возможности, позволяет реализовать комбинированный синтез инкорпорированных наноструктурами углеродных покрытий с заданным распределением наноразмерных компонентов по поверхности и толщине слоя.

Так, в работе [14] при изучении углеродных покрытий, сформированных на двухкомпонентные подслои на основе этилцеллюлозы и серной кислоты, показано, что они характеризуются более высоким соотношением фаз Csp^3 / Csp^2, зависящим от структуры подслоя. Данный эффект представляет научный и практический интерес и дальнейшее изучение закономерностей осаждения, фазового и химического состава, морфологии таких покрытия при различных условиях и режимах формирования промежуточного слоя составляет основную цель настоящей работы.

1 Методика эксперимента

Покрытия были сформированы вакуумными методами в два этапа. На первом этапе, в отличие от методики, используемой в [14], слои на основе этилцеллюлозы (ЭЦ, N-100, CAS 9004-57-3, Sigma-Aldrich) и серной кислоты H_2SO_4 осаждались лазерным (длина волны 532 нм, энергия в импульсе 430 мДж, длительность импульса 6 нс) или электронно-лучевым (энергия электронов 0,8–1,6 кэВ, плотность тока 10–30 мА/см^2) диспергированием исходных компонентов. Полученные слои подвергались термообработке при температуре 120° С на воздухе в течение 30 минут. На втором этапе на поверхность полученного двухслойного покрытия из плазмы импульсного катодно-дугового разряда (3000 импульсов, частота 5 Гц, напряжение 350 В) осаждались углеродные слои. Остаточное давление в вакуумной камере – 10^{-3} Па, толщина покрытий – не более 300 нм.

Морфологические особенности полученных покрытий были изучены с использованием атомно-силовой микроскопии (АСМ) средствами микроскопа Solver Pro (NT-MDT, Россия) в полуконтактном режиме. Область сканирования составляла 4×4 мкм. В качестве параметров для анализа рельефа поверхности покрытий были выбраны: среднеквадратичная субшероховатость (Rms) – среднеквадратичное значение отклонений высоты профиля поверхности относительно базовой линии; количество, высота и диаметр отдельных структурных образований (зерен).

Для определения молекулярной структуры подслоев на основе этилцеллюлозы и серной кислоты применялся инфракрасный Фурье-спектрофотометр Vertex-70 (Bruker), работающий в диапазоне 300–4000 см$^{-1}$ с разрешением 4 см$^{-1}$.

Химический состав и тип связей в покрытиях был определен методом рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии (РФЭС) с использованием спектрометра PHI Quantera (Япония). Возбуждение образцов осуществлялось Kα-излучением с энергией квантов 1486,6 эВ и мощностью 250 Вт.

Фазовый состав углеродных слоев был изучен методами рамановской спектроскопии (спектроскопии комбинационного рассеяния) при помощи спектрометра Senterra (Bruker, Германия) с длиной волны и мощностью возбуждающего излучения – 532 нм и 5 мВт соответсвенно.

2 Результаты и их обсуждение

В ИК-спектрах покрытий этилцеллюлозы, сформированных потоком низкоэнергетических электронов и лазерным излучением ($\lambda = 532$ нм), присутствуют одни и те же полосы поглощения. ИК-спектры отличаются только величинами соотношений оптической плотности отдельных полос поглощения. В ИК-спектрах покрытий присутствуют все полосы поглощения, характерные для исходного порошка ЭЦ. В области волновых чисел 3000–2800 см$^{-1}$ проявляются валентные колебания С – Н связей: полоса при 2975 ($-OC_2H_5$), 2898, 2800 см$^{-1}$ – CH_3, при 2930 см$^{-1}$ – CH_2, при 2873 см$^{-1}$ – СН (третичный). В интервале 1200–900 см$^{-1}$ проявляются валентные колебания С – О, С – О – С, С – С, С – ОН связей. Наибольшее значение оптической плотности в интервале 1200–900 см$^{-1}$ характерно для валентных колебаний С – О – С связей (1111 и 1070 см$^{-1}$). При 1720 см$^{-1}$ проявляются валентные колебания С = О связей. Результаты ИК-спектроскопических исследований покрытий представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Параметры ИК-спектров материалов на основе ЭЦ

Образец	Соотношение			
	D_{2975} / D_{2875} OC_2H_5 / CH	D_{1111} / D_{2875} COC / CH	D_{1070} / D_{2875} COC / CH	D_{1720} / D_{2875} C = O / CH
Порошок ЭЦ	1,26 / 0,58	5,73 / 2,02	4,49 / 2,64	0,88 / 0,41
Электронно-лучевое диспергирование	1,88 / 1,54	3,48 / 3,39	4,15 / 2,85	0,75 / 0,61
Лазерное диспергирование	1,62 / 1,27	5,13 / 3,78	4,82 / 4,02	0,45 / 0,35
/ – соотнесение с полосой при 2930 $см^{-1}$				

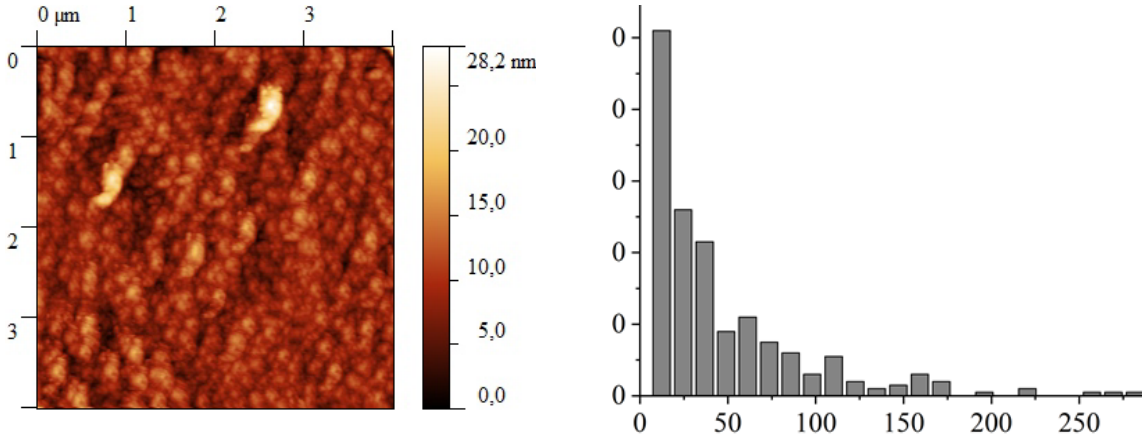


Рисунок 2.1 – АСМ изображения и распределение зерен углеродных покрытий, осажденных на подслое этилцеллюлозы, сформированном путем лазерного диспергирования

При проведении анализа значения оптической плотности полос соотносили с оптической плотностью полосы CH и CH_2 групп. Метиленовые группы входят в состав заместителей, а также могут образовываться в результате деструкции пиранозных циклов. Согласно данным ИК-спектроскопического анализа влияние лазерного воздействия в наибольшей степени проявляется в отщеплении от пиранозных циклов заместителей. При этом деструкция пиранозных циклов в наибольшей степени проявляется при электронно-лучевом воздействии.

ИК-спектроскопический анализ двухслойных систем ЭЦ + H_2SO_4 затруднен наложением на ИК-спектр ЭЦ полос поглощения при 1135 $см^{-1}$ – колебания R – SO – OR, и при 1100 $см^{-1}$ – R – SO – OH. Низкотемпературная обработка двухслойных систем (120° C) не приводит к заметному изменению ИК-спектра.

Таким образом, влияние лазерного воздействия на порошок ЭЦ в наибольшей степени проявляется в отщеплении от пиранозных циклов заместителей, а электронно-лучевого – в деструкции пиранозных циклов.

Средствами АСМ показано (рисунок 2.1, таблица 2.2), что углеродные покрытия, осажденные на подслое этилцеллюлозы, сформированном путем лазерного диспергирования, характеризуются низкой субшероховатостью (Rms – 2,9 нм) и высокодисперсной структурой, около 30% отмаркированных зерен обладают диаметром менее 30 нм.

АСМ изображения, характер влияния архитектуры подслоя на основе этилцеллюлозы и серной кислоты, сформированных путем электронно-лучевого диспергирования исходных компонентов, на морфологию углеродных покрытий, рассмотрены нами ранее в работе [14].

Углеродные покрытия на подслое этилцеллюлозы и серной кислоты, сформированном с использованием лазерного диспергирования, характеризуются более высокими значениями субшероховатости, чем в случае электронно-лучевого нанесения подслоя, что обусловлено наличием капельной фазы в осаждаемом потоке при лазерном воздействии на этилцеллюлозу (таблица 2.2).

При этом углеродные покрытия, сформированные на подслое H_2SO_4 / ЭЦ, отличаются более высокодисперсной структурой (рисунки 2.2 и 2.3), в 2 раза меньшими значениями субшероховатости Rms, чем покрытия, сформированные на подслое ЭЦ / H_2SO_4.

Необходимо отметить, что характер влияния архитектуры подслоя на основе этилцеллюлозы и серной кислоты при электронно-лучевом и лазерном нанесении этилцеллюлозы различен (таблица 2.2, рисунок 2.3). При осаждении слоя целлюлозы электронно-лучевым методом дисперсность углеродных покрытий, сформированных на ЭЦ / H_2SO_4, выше, чем у покрытий, осажденных на H_2SO_4 / ЭЦ (рисунок 2.4, *а*). В случае же лазерного нанесения целлюлозы, наоборот, углеродные покрытия, сформированные

на подслое состава H_2SO_4 / ЭЦ, характеризуются более высокодисперсной структурой; более 50% отмаркированных зерен обладают диаметром менее 30 нм по сравнению с покрытиями, сформированными на ЭЦ / H_2SO_4 (рисунок 2.3, *б*).

Общей особенностью является тот факт, что субшероховатость и средняя высота отдельных структурных образований углеродных покрытий, нанесенных на подслой H_2SO_4 / ЭЦ, независимо от метода диспергирования этилцеллюлозы, ниже, чем в случае ЭЦ / H_2SO_4.

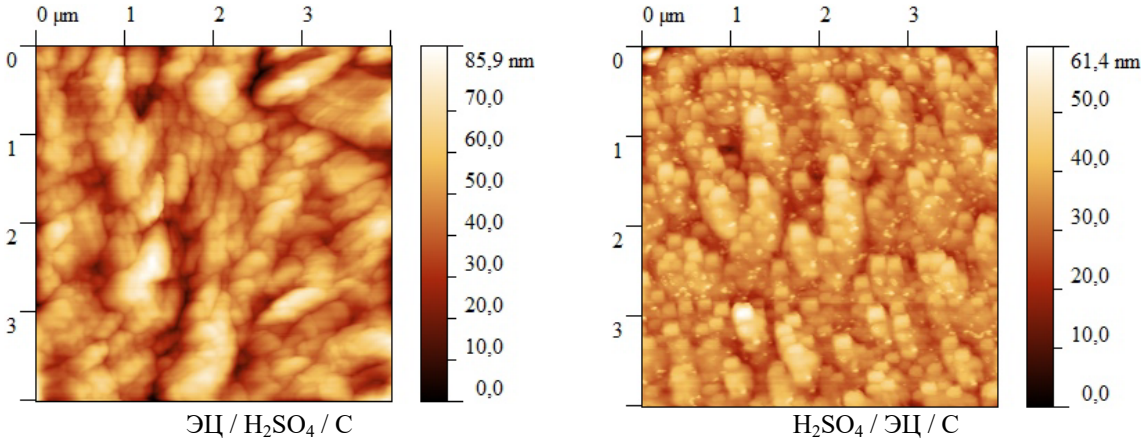
Вышеуказанные различия рельефа поверхности углеродных покрытий могут быть обусловлены наличием капельной фазы и менее аморфной структурой в случае лазерного диспергирования этилцеллюлозы при нанесении подслоя, что, в свою очередь, может влиять на процессы карбонизации этилцеллюлозы при взаимодействии с серной кислотой, а также на процессы графитизации карбонизированных слоев при последующем отжиге.

В большинстве случаев спектр комбинационного рассеяния углеродных покрытий раскладывается на две гауссианы: D-пик в диапазоне между 1300 $см^{-1}$ и 1500 $см^{-1}$, соответствующий матрице на основе sp^2-гибридизированных атомов углерода, включающей в себя sp^3-гибридизированные атомы углерода; обусловленный наличием sp^2-кластеров G-пика около 1580 $см^{-1}$ [15], [16]. Отметим, что спектры комбинационного рассеяния углеродных наноструктур могут характеризоваться несколькими дополнительными пиками [17], [18].

В настоящей работе спектр комбинационного рассеяния углеродных покрытий, осажденных на подслое целлюлозы, сформированном путём лазерного диспергирования, был разложен согласно стандартной двухфазной модели [15]. Для более достоверного анализа спектров комбинационного рассеяния углеродных покрытий на подслоях ЭЦ / H_2SO_4 и H_2SO_4 / ЭЦ потребовалось выделить из исходного спектра, помимо D- и G-пиков, два дополнительных пика (рисунок 2.4): T-пик около 1160–1250 $см^{-1}$, обусловленный наличием большого количества наноразмерных кластеров sp^3-гибридизированного углерода с размерами менее 100 нм (нанокристаллический алмаз) [18] и D'-пик вблизи 1600–1620 $см^{-1}$, обусловленный наличием мелких фрагментов искривленных базисных графеновых плоскостей [19]. При этом, по мнению авторов [19], оба этих пика указывают на высокое содержание sp^3-гибридизированных атомов углерода. Дело в том, что графен в чистом виде состоит из sp^2-гибридизированных атомов углерода, однако, в случае большого числа дефектов, деформации либо при гидрировании графена атомы углерода могут находится в состоянии sp^3-гибридизации [19].

Таблица 2.2 – Влияние метода формирования и архитектуры подслоя на основе ЭЦ и H_2SO_4 на морфологию углеродных покрытий

Покрытие	Метод формирования слоя ЭЦ*	Средняя высота, нм	Rms, нм	Плотность зерен, шт.	Средний диаметр зерен, нм
ЭЦ / С	ЛД	9,0	2,9	345	85
ЭЦ / H_2SO_4 / С	ЭЛД	20,6	4,8	80	59
	ЛД	47,2	12,4	56	254
H_2SO_4 / ЭЦ / С	ЭЛД	16,1	4,4	55	119
	ЛД	35,5	6,2	262	94
*ЛД – лазерное диспергирование; ЭЛД – электронно-лучевое диспергирование					



ЭЦ / H_2SO_4 / С H_2SO_4 / ЭЦ / С

Рисунок 2.2 – АСМ изображения углеродных покрытий, осажденных на подслоях различной архитектуры методом лазерного диспергирования

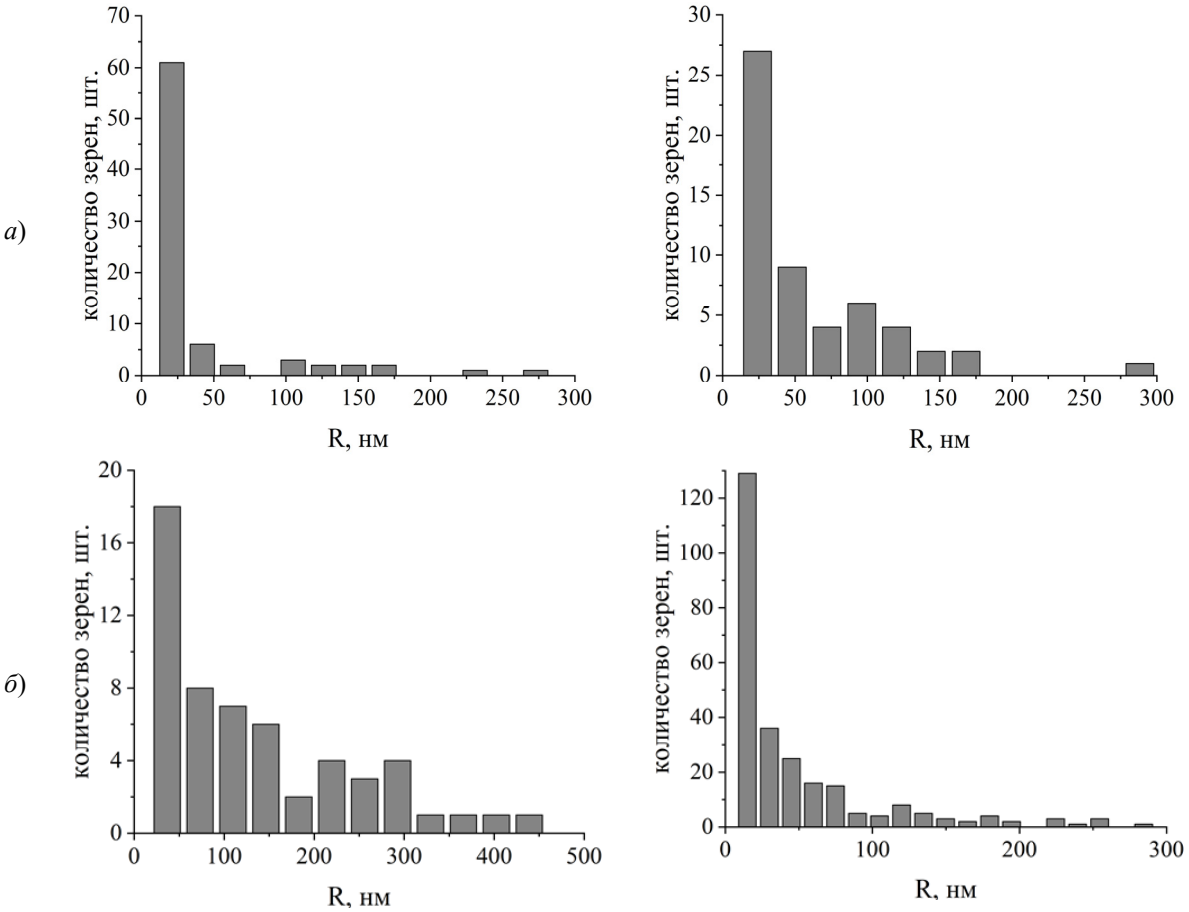


Рисунок 2.3 – Распределение зерен углеродных покрытий, осажденных на подслоях различной архитектуры и сформированных методом:
а) электронно-лучевого диспергирования ЭЦ, *б*) лазерного диспергирования ЭЦ

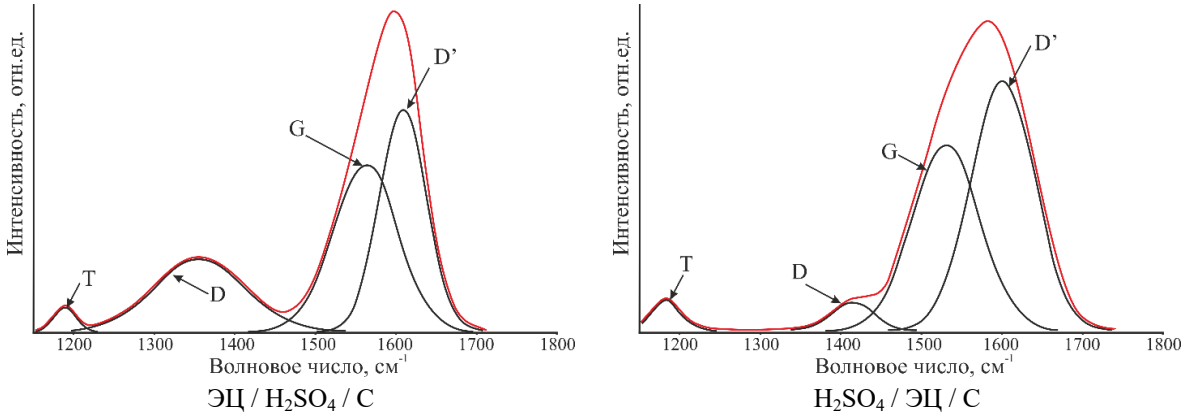


Рисунок 2.4 – Анализ КР-спектров углеродных покрытий, осажденных на подслоях различной архитектуры методом лазерного диспергирования

Необходимо отметить, что, ранее [14] в КР-спектрах углеродных покрытий на подслоях ЭЦ / H_2SO_4 и H_2SO_4 / ЭЦ, сформированных путем электронно-лучевого диспергирования, выделить T- и D'-пик не удалось. Таким образом, можно предположить, что сочетание лазерного нанесения ЭЦ и электронно-лучевое нанесение серной кислоты создает необходимые условия для синтеза углеродных наноструктур вследствие меньшей структурированности и упорядоченности слоя ЭЦ в сравнении с подобным слоем, сформированным электронно-лучевым методом.

Средствами спектроскопии комбинационного рассеяния показано (таблица 2.3), что архитектура подслоя на основе целлюлозы и серной кислоты в зависимости от метода формирования слоя целлюлозы различным образом влияет на соотношение интенсивностей D- и G-пиков.

Таблица 2.3 – Влияние метода формирования и архитектуры подслоя на основе ЭЦ и H_2SO_4 на параметры КР-спектров углеродных покрытий

Покрытие	Метод формирования слоя ЭЦ*	D-пик		G-пик		I_D / I_G
		Положение, $см^{-1}$	Ширина, $см^{-1}$	Положение, $см^{-1}$	Ширина, $см^{-1}$	
ЭЦ / С	ЛД	1469	222	1568	175	0,53
ЭЦ / H_2SO_4 / С	ЭЛД	1438	269	1577	110	0,37
	ЛД	1357	134	1563	94	0,44
H_2SO_4 / ЭЦ / С	ЭЛД	1461	275	1580	110	0,42
	ЛД	1414	62	1530	99	0,16
*ЛД – лазерное диспергирование; ЭЛД – электронно-лучевое диспергирование						

Таблица 2.4 – Влияние метода формирования и архитектуры подслоя на основе ЭЦ и H_2SO_4 на C1s пик РФЭС углеродных покрытий

Покрытие	Метод формирования слоя ЭЦ*	Тип связи	Пик, эВ ± 0,3 эВ	Ширина, эВ	Доля площади, %	Csp^3 / Csp^2
ЭЦ / С	ЛД	Csp^2	284,6	1,2	55,7	0,77
		Csp^3	285,3	0,9	42,5	
		C – O	286,4	0,7	1,8	
ЭЦ / H_2SO_4 / С	ЭЛД	Csp^2	284,7	1,0	39,7	1,44
		Csp^3	285,4	1,6	57,3	
		C = O	287,4	1,1	3,1	
	ЛД	Csp^2	284,4	1,4	43,9	1,09
		Csp^3	285,2	1,6	47,7	
		C = O	287,7	0,9	1,0	
H_2SO_4 / ЭЦ / С	ЭЛД	Csp^2	284,7	1,2	55,9	0,72
		Csp^3	285,6	1,5	40,1	
		C = O	287,3	1,5	4,0	
	ЛД	Csp^2	284,4	1,1	39,9	1,44
		Csp^3	285,1	1,1	57,5	
		C – O	286,3	0,7	2,6	
*ЛД – лазерное диспергирование; ЭЛД – электронно-лучевое диспергирование						

В случае электронно-лучевого диспергирования этилцеллюлозы соотношение I_D / I_G для углеродных покрытий, сформированных на ЭЦ / H_2SO_4, меньше, чем в случае покрытий, осажденных на H_2SO_4 / ЭЦ. При этом для углеродных покрытий, осажденных на двухслойных системах, в которых слой этилцеллюлозы был получен методом лазерного диспергирования, наоборот, соотношение I_D / I_G для покрытий на подслое H_2SO_4 / ЭЦ существенно ниже, чем для покрытий на ЭЦ / H_2SO_4.

Низкие значения соотношения I_D / I_G могут быть обусловлены изменением размеров sp^2-кластеров. Согласно [16] соотношение I_D / I_G обратно пропорционально размерам sp^2-кластеров, если их значение более 2 нм, и прямо пропорционально, если их размеры менее 2 нм. Для обоих случаев, рассматриваемых в настоящей работе, с учетом данных атомно-силовой микроскопии, соотношение I_D / I_G снижается с уменьшением размеров отдельных структурных образований, что может свидетельствовать как о высоком содержании sp^3-гибридизированных атомов углерода, так и о присутствии кластеров менее 2 нм.

Снижение интенсивности D-пика может быть обусловлено более высоким содержанием sp^3-гибридизированных атомов углерода, о чем также свидетельствует появление T-пика и D'-пика, который, по мнению авторов [20], появляется при наличии дефектов и увеличении степени разупорядоченности sp^2-матрицы.

Результаты рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии (таблица 2.4) подтверждают результаты КР-спектроскопии и свидетельствуют о более высоком содержании sp^3-гибридизированных атомов углерода в углеродных покрытиях, осажденных на подслое H_2SO_4 / ЭЦ, по сравнению с покрытиями, нанесенными на подслое ЭЦ / H_2SO_4, в случае лазерного диспергирования этилцеллюлозы.

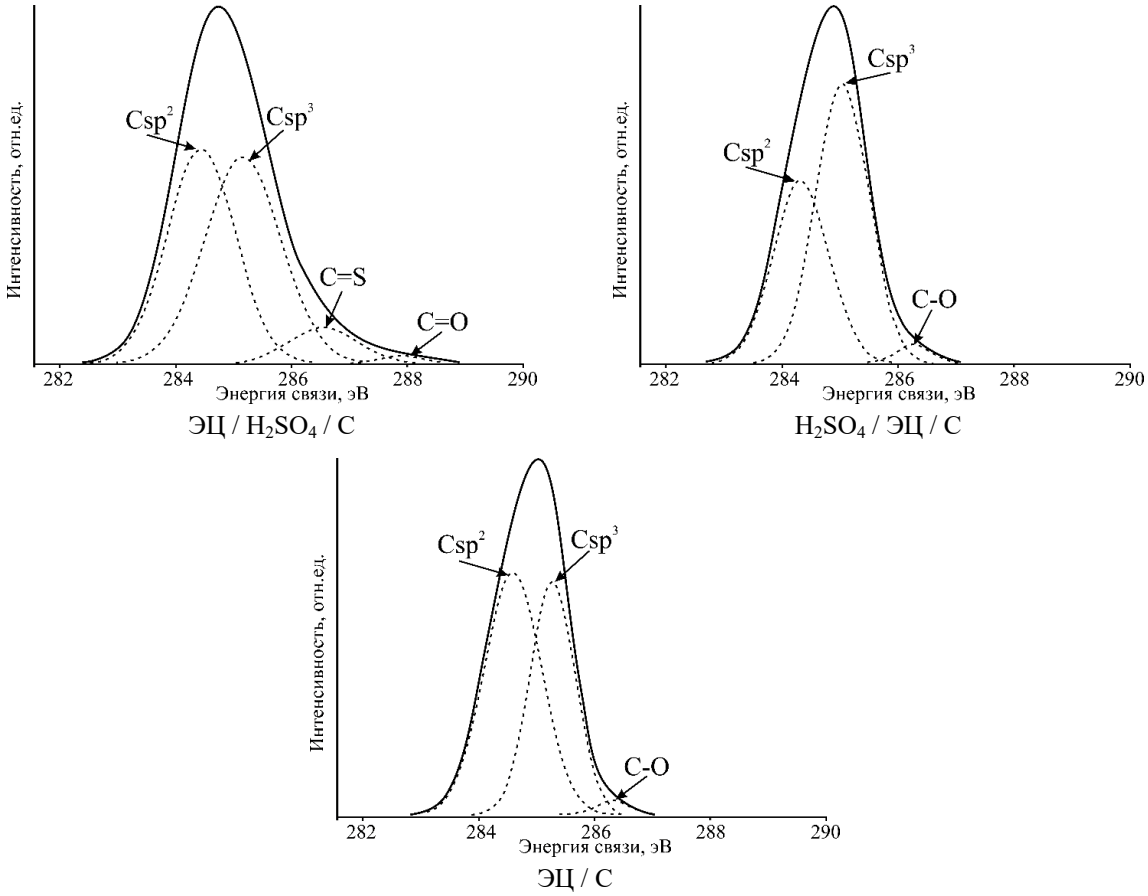


Рисунок 2.5 – C1s пик РФЭС углеродных покрытий, осажденных на подслоях различной архитектуры, сформированных путем лазерного диспергирования

C1s пик РФЭС спектра, находящийся в диапазоне 280÷290 эВ, был разложен при помощи функции Лоренца – Гаусса на следующие компоненты (рисунок 2.5): Csp^2 – пик с энергией связи ~ 284,6 эВ; Csp^3 – пик с энергией связи ~ 285,4 эВ [21]. Необходимо отметить, что для покрытий ЭЦ / H_2SO_4 / C был детектирован C = S пик с энергией связи ~ 287 эВ, существование которого подтверждается наличием четко выраженного S2p в спектре РФЭС и относительно высокой концентрацией серы – 3 ат. % (по сравнению с H_2SO_4 / ЭЦ / C, где содержание серы – 0,2 ат. %). В спектре РФЭС покрытий H_2SO_4 / ЭЦ / C из-за малого содержания серы в приповерхностных слоях пик S2p детектирован не был. Также данный пик не был детектирован для углеродных покрытий, сформированных на подслое этилцеллюлозы и серной кислоты при электронно-лучевом нанесении этилцеллюлозы. Детальный анализ РФЭС вышеуказанных покрытий рассмотрен нами ранее в работе [14].

В случае электронно-лучевого нанесения этилцеллюлозы, наоборот, содержание sp^3-гибридизированных атомов углерода в углеродных покрытиях, осажденных на подслое H_2SO_4 / ЭЦ, ниже, по сравнению с покрытиями, нанесенными на подслое ЭЦ / H_2SO_4.

Различия в морфологии и фазовом составе углеродных покрытий, сформированных на подслоях на основе этилцеллюлозы и серной кислоты, обусловлены особенностями процессов структурообразования слоя этилцеллюлозы при электронно-лучевом и лазерном нанесении. В случае электронно-лучевого нанесения слой этилцеллюлозы является более упорядоченным и менее пористым. При лазерном диспергировании вследствие наличия капельной фазы слой этилцеллюлозы характеризуется менее гладким рельефом и взаимодействие с серной кислотой происходит на границе капельной фазы, что подтверждается данными атомно-силовой микроскопии (таблица 2.2). Наличие пор и меньшая структурная упорядоченность подтверждается наличием S2p пика РФЭС, наличием серы в углеродных покрытиях, нанесенных на подслой ЭЦ / H_2SO_4. Дефектность структуры слоя этилцеллюлозы при его лазерном нанесении приводит к более высокой степени разупорядоченности углеродных покрытий, нанесенных на его поверхность из плазмы импульсного катодно-дугового разряда. При этом взаимодействие атомов углерода с серной кислотой на границе капельной фазы этилцеллюлозы может приводить к механической деформации sp^2-связей

с последующей трансформацией атомов углерода в sp^3-гибридизированное состояние при последующем нанесении углеродных слоев из плазмы импульсного катодно-дугового разряда, о чем свидетельствует появление D'- и T-пиков в КР спектре и значения соотношения доли интегральной площади Csp^3 / Csp^2 компонентов пика C1s РФЭС. Кроме того, процессы карбонизации этилцеллюлозы под действием серной кислоты и последующего отжига, по всей видимости, протекают на границе капельной фазы, что также может приводить к появлению деформированных графеновых плоскостей, к которым могут прикрепляться свободные радикалы, образующиеся при лазерном диспергировании мишени.

Выводы

Углеродные покрытия, сформированные на подслое H_2SO_4 / ЭЦ при лазерном нанесении целлюлозы, содержат большее количество отдельных структурных образований, на границе которых протекают процессы карбонизации и последующей графитизации целлюлозы, что приводит к более высоким значениям соотношения Csp^3 / Csp^2 и большей структурной разупорядоченности по сравнению с углеродными покрытиями, нанесенными на подслой ЭЦ / H_2SO_4. Показано, что углеродные покрытия, сформированные на подслоях на основе серной кислоты и этилцеллюлозы одинаковой архитектуры, но при различном методе нанесения полимерного слоя, характеризуются различными соотношениями Csp^3 / Csp^2 и особенностями топографии. Данный факт, по всей видимости, обусловлен наличием капельной фазы, присутствующей в осаждаемом потоке при лазерном диспергировании целлюлозы, и, как следствие, различными процессами структурообразования, протекающими на подложке. Отличия в структуре подслоев этилцеллюозы, сформированных при лазерном и электронно-лучевом нанесении, приводят к различиям в морфологии и фазовом составе углеродных покрытий, осаждаемых на их поверхности.

Таким образом, осаждение карбонизированных подслоев на основе целлюлозы и серной кислоты различной архитектуры и принципиально иными методами нанесения могут стать эффективным технологическим приемом формирования углеродных покрытий с заданным фазовым составом и механическими свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рогачев*, *А.В.* Триботехнические свойства композиционных покрытий, осаждаемых вакуумно-плазменными методами / А.В. Рогачев // Трение и износ. – 2008. – Т. 29, № 3. – С. 285–592.

2. *Композиционные углеродные покрытия, осажденные из импульсной катодной плазмы* / Д.Г. Пилипцов, А.С. Руденков, П.А. Лучников, А.В. Рогачев, Цзян Сяо Хун, Чжоу Бин. – 2020. – Москва: Радиотехника. – 283 с.

3. *Robertson*, *J.* Diamond-like amorphous carbon / J. Robertson // Materials Science and Engineering: R: Reports. – 2002. – Vol. 37. – P. 129–281.

4. *Donnet*, *C.* Tribology of Diamond-like Carbon Films: Fundamentals and Applications / C. Donnet, A. Erdemir. – Springer Science & Business Media, 2007. – 680 p.

5. *Heating induced nanostructure and superlubricity evolution of fullerene-like hydrogenated carbon films* / Zh. Wang [et al.] // Solid State Sciences. – 2019. – Vol. 90. – P. 29–33.

6. *The effect of CNT content on the surface and mechanical properties of CNTs doped diamond like carbon films* / Ch. Wei [et al.] // Diamond and Related Materials. – 2010. – Vol. 19. – P. 562–566.

7. *Diamond-like carbon graphene nanoplatelet nanocomposites for lubricated environments* / R. Brittain [et al.] // Carbon. – 2023. – Vol. 205. – P. 485–498.

8. *CVD-diamond nanoparticle synthesis for DLC film application* / R. Correia [et al.] // Journal of Nanoparticle Research. – 2020. – Vol. 22. – Article 293.

9. *Hussain*, *S.* Incorporation of silver nanoparticles in DLC matrixand surface plasmon resonance effect / S. Hussain, R.K. Roy, A.K. Pal // Materials Chemistry and Physics. – 2006. – Vol. 99. – P. 375–381.

10. *Modulation of residual stress in diamond like carbon films with incorporation of nanocrystalline gold* / R. Paul [et al.] // Applied Surface Science. – 2011. – Vol. 257. – P. 10451–10458.

11. *Nanostructured coatings of metal containing diamond-like carbon films deposited by femtosecond pulsed laser ablation* / N. Benchikh [et al.] // Surface and Coatings Technology. – 2006. – Vol. 200. – P. 6272–6278.

12. *Le*, *T.* Strategies for fabricating versatile carbon nanomaterials from polymer precursors / T. Le, H. Yoon // Carbon. – 2019. – Vol. 152. – P. 796–817.

13. *Fullerene-like CSx*: *A first-principles study of synthetic growth* / C. Goyenola [et al.] // Chemical Physics Letters. – 2011. – Vol. 506. – P. 86–91.

14. *Морфология и фазовый состав углеродных покрытий, сформированных на поверхности двухслойных систем на основе этилцеллюлозы и серной кислоты* / А.С. Руденков [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 30–39.

15. *Resonant Raman scattering of amorphous carbon and polycrystalline diamond films* / J. Wagner [et al.] // Physical Review B. – 1989. – Vol. 40. – P. 1817–4107.

16. *Ferrari*, *A.C.* Interpretation of Raman spectra of disordered and amorphous carbon / A.C. Ferrari, J. Robertson // Physical Review B. – 2000. – Vol. 61. – P. 4095–4107.

17. *A concise review of the Raman spectra of carbon allotropes* / V. Thapliyal [et al.] // Diamond and Related Materials. – 2022. – Vol. 127. – Article 109180.

18. *The Raman spectrum of nanocrystalline diamond* / S. Prawer [et al.] // Chemical Physics Letters. – 2000. – Vol. 332. – P. 93–97.

19. *Studying disorder in graphite-based systems by Raman spectroscopy* / M.A. Pimenta [et al.] // Physical Chemistry Chemical Physics. – 2007. – Vol. 9. – P. 1276–1290.

20. *The influence of oxygen on the Raman spectrum of C*60 *films* / S. Duclos [et al.] // Solid State Commun. – 1991. – Vol. 80. – P. 481–484.

21. *Chen*, *X.* A review on C1s XPS-spectra for some kinds of carbon materials / X. Chen, X. Wang, D. Fang // Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures. – 2020. – Vol. 28. – P. 1048–1058.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках НИР «*Разработка основ комбинированной технологии формирования планарно-структурированных углеродных покрытий из импульсной катодной углеродной плазмы и продуктов лазерного диспергирования полимерных материалов*», *комплексное* 1.12 *задание* «*Синтез нанокомпозиционных пленочных структур*, *формирование материалов с высокими функциональными свойствами с использованием электронно-лучевых*, *ионных*, *лазерных методов обработки*» *ГПНИ* «*Фотоника и электроника для инноваций*», *подпрограмма* «*Фотоника и ее применения*».

Поступила в редакцию 07.03.2025.

Информация об авторах

Руденков Александр Сергеевич – к.т.н., доцент
Рогачёв Александр Владимирович – чл.-корр. НАН Беларуси, д.х.н., профессор
Ярмоленко Максим Анатольевич – д.т.н., профессор
Пилипцов Дмитрий Геннадьевич – д.т.н., доцент

МАТЕМАТИКА

УДК 512.548 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_44
EDN: PHKJNB

СМЕЖНЫЕ КЛАССЫ, ЯВЛЯЮЩИЕСЯ ПОЛИАДИЧЕСКИМИ ПОДГРУППАМИ

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, *Могилёв*

COSETS THAT ARE POLYADIC SUBGROUPS

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, *Mogilev*

Аннотация. В статье изучаются полиадические группы, в которых смежные классы по полуинвариантной n-арной подгруппе могут быть n-арными подгруппами.

Ключевые слова: *l-арная группа*, *полуинвариантная l-арная подгруппа*, *смежный класс*, *конгруэнция.*

Для цитирования: *Гальмак*, *А.М.* Смежные классы, являющиеся полиадическими подгруппами / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 44–50. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_44. – EDN: PHKJNB

Abstract. The article studies polyadic groups in which cosets of a semi-invariant n-ary subgroup can be n-ary subgroups.

Keywords: *l-ary group*, *semi-invariant l-ary subgroup*, *coset*, *congruence.*

For citation: *Gal'mak*, *A.M.* Cosets that are poplyadic subgroups / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 2 (63). – P. 44–50. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_44 (in Russian). – EDN: PHKJNB

Введение

Известно, что в n-арных группах при $n \geq 3$, в отличие от групп, смежный класс n-арной факторгруппы, отличный от определяющей её полуинвариантной n-арной подгруппы, может быть n-арной подгруппой. В качестве тривиального примера можно указать n-арную факторгруппу идемпотентой n-арной группы по полуинвариантной n-арной подгруппе с единственным элементом. В этом случае множество всех смежных классов указанной n-арной факторгруппы совпадает с множеством всех одноэлементных подмножеств n-арной группы, то есть совпадает с множеством всех классов тривиальной конгруэнции. Ещё одним примером может служить n-арная группа нечётной арности, производная от симметрической группы, в которой множество всех нечётных подстановок, рассматриваемое как смежный класс n-арной факторгруппы n-арной симметрической группы по полуинвариантной n-арной знакопеременной группе, является n-арной подгруппой. Именно изучению смежных классов, являющихся n-арными подгруппами, посвящена настоящая статья.

1 Предварительные сведения

Напомним, что l-арную подгруппу $< B, \eta >$ l-арной группы $< A, \eta >$ называют [1, с. 52] *инвариантной* в ней, если

$$\eta(x\underbrace{B \dots B}_{l-1}) = \eta(Bx\underbrace{B \dots B}_{l-2}) = \dots$$
$$\dots = \eta(\underbrace{B \dots B}_{l-1}xB) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{l-1}x)$$

для любого $x \in A$. Если же

$$\eta(x\underbrace{B \dots B}_{l-1}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{l-1}x)$$

для любого $x \in A$, то $< B, \eta >$ называют [1, с. 55] *полуинвариантной* в $< A, \eta >$.

Полуинвариантные и инвариантные полиадические подгруппы впервые появились у В. Дёрнте в [2].

При $l = 2$ понятия полуинвариантности и инвариантности совпадают, так как определяющие их равенства принимают вид $xB = Bx$.

Понятия полуинвариантной l-арной подгруппы и инвариантной l-арной подгруппы являются частными случаями более общего понятия из следующего определения.

***Определение* 1.1** [3, 4] l-Арная подгруппа $< B, \eta >$ l-арной группы $< A, \eta >$, где $l = s(n-1)+1$, $s \geq 1$, называется *n-полуинвариантной* в ней, если

$$\eta(x\underbrace{B \dots B}_{l-1}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{i(n-1)}x\underbrace{B \dots B}_{(s-i)(n-1)})$$

для любого $x \in A$ и любого $i = 1, \dots, s$.

В развёрнутом виде последнее равенство переписывается следующим образом

© *Гальмак А.М.*, 2025

$$\eta(x\underbrace{B\dots B}_{l-1}) = \eta(\underbrace{B\dots B}_{n-1}x\underbrace{B\dots B}_{(s-1)(n-1)}) = \dots$$
$$\dots = \eta(\underbrace{B\dots B}_{(s-1)(n-1)}x\underbrace{B\dots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{B\dots B}_{l-1}x).$$

Ясно, что l-полуинвариантные l-арные подгруппы l-арной группы – это в точности её полуинвариантные l-арные подгруппы, а 2-полуинвариантные l-арные подгруппы l-арной группы – это в точности её инвариантные l-арные подгруппы.

Из определения 1.1 также следует, что всякая n-полуинвариантная l-арная подгруппа l-арной группы является и полуинвариантной в ней. В частности, полуинвариантными являются инвариантные l-арные подгруппы.

Ясно, что если $< B, \eta >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, \eta >$, $< A, \mu >$ – l-арная группа, производная от n-арной группы $< A, \eta >$, то $< B, \mu >$ – l-арная подгруппа l-арной группы $< A, \mu >$.

Примеры n-полуинвариантных l-арных подгрупп можно строить с помощью следующей леммы, справедливость которой устанавливается простой проверкой.

***Лемма* 1.1**. *Если $< B, \eta >$ – полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы $< A, \eta >$, $< A, \mu >$ – l-арная группа, производная от n-арной группы $< A, \eta >$, то $< B, \mu >$ – n-полуинвариантная l-арная подгруппа l-арной группы $< A, \mu >$.*

Для всякой полуинвариантной n-арной подгруппы $< B, \eta >$ n-арной группы $< A, \eta >$ множество

$$A/B = \{\eta(a\underbrace{B\dots B}_{n-1}) \mid a \in A\} = \{\eta(\underbrace{B\dots B}_{n-1}a) \mid a \in A\}$$

всех смежных классов $< A, \eta >$ по $< B, \eta >$ является n-арной группой относительно n-арной операции η. Эту n-арную группу называют [1, с. 59] *n-арной факторгруппой* и обозначают символом $< A/B, \eta >$.

Согласно предложению 7.4 [4], всякая полуинвариантная n-арная подгруппа $< B, \eta >$ n-арной группы $< A, \eta >$ определяет на ней конгруэнцию ρ_B, классы которой совпадают со смежными классами $< A, \eta >$ по $< B, \eta >$, что означает совпадение n-арных факторгрупп $< A/\rho_B, \eta >$ и $< A/B, \eta >$.

***Замечание* 1.1**. В теории n-арных групп, также как и в теории групп, n-арную операцию в n-арной группе $< A, \eta >$ и n-арную операцию в её n-арной факторгруппе по полуинвариантной n-арной подгруппе $< B, \eta >$ обозначают одним и тем же символом η, то есть для обозначения указанной n-арной факторгруппы используют запись $< A/B, \eta >$. На самом деле речь идёт о разных n-арных операциях.

Если n-арную операцию в n-арной факторгруппе n-арной группы $< A, \eta >$ по её полуинвариантной n-арной подгруппе $< B, \eta >$ обозначить символом $\eta_{A/B}$, то согласно определению этой операции,

$$\eta_{A/B}(\eta(a_1\underbrace{B\dots B}_{n-1})\eta(a_2\underbrace{B\dots B}_{n-1})\dots\eta(a_n\underbrace{B\dots B}_{n-1})) = \eta(\eta(a_1a_2\dots a_n)\underbrace{B\dots B}_{n-1}).$$

С другой стороны, для любых подмножеств $B_1, B_2, \dots, B_n$ множества A полагают

$$\eta(B_1\dots B_n) = \{\eta(b_1\dots b_n) \mid b_1 \in B_1, \dots, b_n \in B_n\}.$$

Используя это равенство, ассоциативность n-арной операции η, полуинвариантность $< B, \eta >$ в $< A, \eta >$ и равенство

$$B = \eta(\underbrace{B\dots B}_{n}),$$

можно убедиться в справедливости следующего равенства

$$\eta(\eta(a_1\underbrace{B\dots B}_{n-1})\eta(a_2\underbrace{B\dots B}_{n-1})\dots\eta(a_n\underbrace{B\dots B}_{n-1})) = \eta(\eta(a_1a_2\dots a_n)\underbrace{B\dots B}_{n-1}).$$

Таким образом, верно равенство

$$\eta_{A/B}(\eta(a_1\underbrace{B\dots B}_{n-1})\eta(a_2\underbrace{B\dots B}_{n-1})\dots\eta(a_n\underbrace{B\dots B}_{n-1})) = \eta(\eta(a_1\underbrace{B\dots B}_{n-1})\eta(a_2\underbrace{B\dots B}_{n-1})\dots\eta(a_n\underbrace{B\dots B}_{n-1})).$$

Именно это равенство позволяет не различать n-арные операции η и $\eta_{A/B}$ и использовать для их обозначения один и тот же символ η. Указанное равенство используется при работе со смежными классами n-арной факторгруппы $< A/B, \eta_{A/B} >$. При этом, не смотря на отождествление символов η и $\eta_{A/B}$, из контекста всегда понятно о какой из операций, η или $\eta_{A/B}$, в каждом конкретном случае идёт речь.

Согласно Посту [5], последовательности α и β элементов n-арной группы $< A, \eta >$ называются *эквивалентными* в ней, если существуют последовательности γ и δ элементов этой же n-арной группы такие, что сумма длин последовательностей γ, α и δ сравнима с 1 по модулю $n - 1$, и

$$\eta(\gamma\alpha\delta) = \eta(\gamma\beta\delta).$$

Пост доказал [5], что если последовательности α и β элементов n-арной группы $< A, \eta >$ эквивалентны в ней, то

$$\eta(\rho\alpha\tau) = \eta(\rho\beta\tau)$$

для любых последовательностей ρ и τ элементов из A таких, что сумма длин последовательностей ρ, α и τ сравнима с 1 по модулю $n - 1$.

2 Основной результат

В дальнейшем, если $< B, \eta >$ – полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы $< A, \eta >$, то для сокращения записей будем использовать символ B_d для обозначения смежного класса

$$\eta(d\underbrace{B\dots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{B\dots B}_{n-1}d),$$

то есть

$$B_d = \eta(d\underbrace{B\dots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{B\dots B}_{n-1}d).$$

***Замечание* 2.1**. *Если* $d \notin B$, *то* $B_d \neq B$, *точнее*, $B \cap B_d = \varnothing$.

***Теорема* 2.1**. *Пусть* $s \geq 1$, $l = s(n-1)+1$, $< B, \eta >$ *– полуинвариантная* n*-арная подгруппа* n*-арной группы* $< A, \eta >$, $< A, \mu >$ *– l-арная группа, производная от* n*-арной группы* $< A, \eta >$; *существуют элементы* $d \in A$, $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ *такие, что последовательности* $\underbrace{d\dots d}_{l-1}$ *и* $b_1 \dots b_{n-1}$ *эквивалентны в* $< A, \eta >$ *в смысле Поста. Тогда*:

1) *смежный класс* B_d n*-арной факторгруппы* $< A/B, \eta >$ *замкнут относительно l-арной операции* μ, *а универсальная алгебра* $< B_d, \mu >$ *является полуинвариантной l-арной подгруппой l-арной группы* $< A, \mu >$;

2) *для полуинвариантных в* $< A, \mu >$ *l-арных подгрупп* $< B_d, \mu >$ *и* $< B, \mu >$ *l-арные факторгруппы* $< A/B_d, \mu >$ и $< A/B, \mu >$ *совпвдают*: $< A/B_d, \mu > = < A/B, \mu >$;

3) *конгруэнции* ρ_{B_d} *и* ρ_B *l-арной группы* $< A, \mu >$, *определяемые полуинвариантными l-арными подгруппами* $< B_d, \mu >$ *и* $< B, \mu >$ *совпадают*: $\rho_{B_d} = \rho_B$.

Доказательство. 1) Пусть

$$h_1 = \eta(db_{11}\dots b_{1(n-1)}), \dots, h_l = \eta(db_{l1}\dots b_{l(n-1)}),$$

где $b_{11}, \dots, b_{1(n-1)}, \dots, b_{l1}, \dots, b_{l(n-1)} \in B$, произвольные элементы из B_d. Используя полуинвариантность $< B, \eta >$ в $< A, \eta >$, будем иметь

$$\mu(h_1 \dots h_l) = \eta(\eta(db_{11}\dots b_{1(n-1)})$$
$$\eta(db_{21}\dots b_{2(n-1)})\dots \eta(db_{l1}\dots b_{l(n-1)})) \in$$
$$\in \underbrace{\eta(\eta(d\underbrace{B\dots B}_{n-1})\dots\eta(d\underbrace{B\dots B}_{n-1}))}_{l} =$$
$$= \eta(\underbrace{d\dots d}_{l}\underbrace{B\dots B}_{l(n-1)}) =$$
$$= \eta(\underbrace{d\dots d}_{l}\eta(\underbrace{B\dots B}_{(l-1)(n-1)+1})\underbrace{B\dots B}_{n-2}) =$$
$$= \eta(d\underbrace{d\dots d}_{l-1}\underbrace{B\dots B}_{n-1}),$$

то есть

$$\mu(h_1 \dots h_l) \in \eta(d\underbrace{d\dots d}_{l-1}\underbrace{B\dots B}_{n-1}).$$

А так как последовательность $\underbrace{d\dots d}_{l-1}$ эквивалентна в $< A, \eta >$ последовательности $b_1 \dots b_{n-1}$, где $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$, то

$$\eta(d\underbrace{d\dots d}_{l-1}\underbrace{B\dots B}_{n-1}) = \eta(d\underbrace{B\dots B}_{n-1}).$$

Из двух последних соотношений следует

$$\mu(h_1 \dots h_l) \in \eta(d\underbrace{B\dots B}_{n-1}) = B_d,$$

что означает замкнутость множества B_d относительно l-арной операции μ.

Рассмотрим теперь в $< B_d, \mu >$ уравнение

$$\mu(xh_2 \dots h_l) = g, \qquad (2.1)$$

где

$$g = \eta(dc_1 \dots c_{n-1}) \in B_d, c_1, \dots, c_{n-1} \in B. \qquad (2.2)$$

Элементы $h_2, \dots, h_l$ были определены выше и также принадлежат множеству B_d.

Так как $< A, \mu >$ – l-арная группа, то уравнение (2.1) имеет в ней решение $x = a \in A$.

Подставив это решение в (2.1), получим равенство

$$\mu(ah_2 \dots h_l) = g.$$

откуда и из (2.2) следует

$$\mu(ah_2 \dots h_l) = \eta(dc_1 \dots c_{n-1}). \qquad (2.3)$$

Проведя в левой части равенства (2.3) вычисления, аналогичные тем, что проводились при установлении замкнутости множества B_d относительно l-арной операции μ, получим

$$\mu(ah_2 \dots h_l) \in \eta(a\underbrace{B\dots B}_{n-1}).$$

Следовательно,

$$\mu(ah_2 \dots h_l) = \eta(ad_2 \dots d_n)$$

для некоторых $d_2, \dots, d_n \in B$, откуда и из (2.3) следует

$$\eta(ad_2 \dots d_n) = \eta(dc_1 \dots c_{n-1}). \qquad (2.4)$$

Пусть β – обратная последовательность в $< B, \eta >$ для последовательности $d_2 \dots d_n$. Так как $< B, \eta >$ – n-арная подгруппа, $d_2, \dots, d_n \in B$, то последовательность β эквивалентна в смысле Поста в $< B, \eta >$, а значит и в $< A, \eta >$ некоторой последовательности $u_2 \dots u_n$, где $u_2, \dots, u_n \in B$. Так как следствием равенства (2.4) является равенство

$$\eta(\eta(ad_2 \dots d_n)u_2 \dots u_n)) =$$
$$\eta(\eta(dc_1 \dots c_{n-1})u_2 \dots u_n)),$$

то, учитывая нейтральность последовательности $d_2 \dots d_n u_2 \dots u_n$, а также то, что $c_1, \dots, c_{n-1}$, $u_2, \dots, u_n \in B$, получим

$$a \in \eta(d\underbrace{B\dots B}_{n-1}) = B_d.$$

Следовательно, уравнение (2.1) разрешимо в $< B_d, \mu >$.

Аналогично доказывается разрешимость в $< B_d, \mu >$ уравнения

$$\mu(h_1 \dots h_{l-1}y) = g$$

для любых $h_1, \dots, h_{n-1}$, $g \in B_d$. Таким образом, согласно аксиоматике Поста для n-арных групп, $< B_d, \eta >$ – n-арная подгруппа в $< A, \eta >$.

Применяя полуинвариантность $< B, \eta >$ в $< A, \eta >$ и снова используя эквивалентность в $< A, \eta >$ последовательностей $\underbrace{d\dots d}_{l-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$, где $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$, получим

$$\mu(x\underbrace{B_d\dots B_d}_{l-1}) = \underbrace{\eta(x\eta(d\underbrace{B\dots B}_{n-1})\dots\eta(d\underbrace{B\dots B}_{n-1}))}_{l-1} =$$
$$= \eta(x\underbrace{B\dots B}_{(l-1)(n-1)}\underbrace{B\dots B}_{(l-1)(n-1)}) = \eta(x\underbrace{B\dots B}_{n-1}),$$

$$\mu(\underbrace{B_d \dots B_d}_{l-1} x) = \eta(\underbrace{\eta(d \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \dots \eta(d \underbrace{B \dots B}_{n-1})}_{l-1} x) =$$

$$= \eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} \underbrace{B \dots B}_{(l-1)(n-1)} x) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x)$$

для любого $x \in A$, то есть

$$\mu(x \underbrace{B_d \dots B_d}_{l-1}) = \eta(x \underbrace{B \dots B}_{n-1}), \qquad (2.5)$$

$$\mu(\underbrace{B_d \dots B_d}_{l-1} x) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x). \qquad (2.6)$$

В силу полуинвариантности $< B, \eta >$ в $< A, \eta >$, правые части последних двух равенств равны. Поэтому равны и их левые части:

$$\mu(x \underbrace{B_d \dots B_d}_{l-1}) = \mu(\underbrace{B_d \dots B_d}_{l-1} x).$$

Следовательно, $< B_d, \mu >$ полуинвариантна в $< A, \mu >$.

2) Так как

$$\eta(x \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{xB \dots B}_{s(n-1)}) = \mu(x \underbrace{B \dots B}_{l-1}),$$

$$\eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{s(n-1)} x) = \mu(\underbrace{B \dots B}_{l-1} x),$$

то из (2.5) и (2.6) вытекает

$$\mu(x \underbrace{B_d \dots B_d}_{l-1}) = \mu(x \underbrace{B \dots B}_{l-1}),$$

$$\mu(\underbrace{B_d \dots B_d}_{l-1} x) = \mu(\underbrace{B \dots B}_{l-1} x),$$

откуда следует совпадение l-арных факторгрупп $< A/B_d, \mu >$ и $< A/B, \mu >$.

3) Так как конгруэнция ρ_B и полуинвариантная l-арная подгруппа $< B, \mu >$ определяют одну и ту же факторгруппу; аналогично конгруэнция ρ_{B_d} и полуинвариантная l-арная подгруппа $< B_d, \mu >$ определяют одну и ту же l-арную факторгруппу:

$$< A/\rho_B, \mu > = < A/B, \mu >,$$

$$< A/\rho_{B_d}, \mu > = < A/B_d, \mu >,$$

то, согласно 2),

$$< A/\rho_{B_d}, \mu > = < A/\rho_B, \mu >,$$

что означает совпадение конгруэнций ρ_{B_d} и ρ_B. □

***Лемма* 2.1**. *Пусть $< B, \eta >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, \eta >$, существуют элементы $d \in A$, $c_1, \dots, c_{n-1} \in B$ такие, что последовательности $\underbrace{d \dots d}_{n-1}$ и $c_1 \dots c_{n-1}$ эквивалентны в $< A, \eta >$. Тогда для любого $t \geq 1$ существуют элементы $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ такие, что эквивалентны последовательности $\underbrace{d \dots d}_{t(n-1)}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$.*

Доказательство. Из эквивалентности в $< A, \eta >$ последовательностей $\underbrace{d \dots d}_{n-1}$ и $c_1 \dots c_{n-1}$ следует эквивалентность в $< A, \eta >$ последовательностей

$$\underbrace{d \dots d}_{t(n-1)} \text{ и } \underbrace{c_1 \dots c_{n-1} \dots c_1 \dots c_{n-1}}_{t},$$

а значит и последовательностей

$$\underbrace{d \dots d}_{t(n-1)} \text{ и } c_1 \dots c_{n-2} \eta(c_{n-1} \underbrace{c_1 \dots c_{n-1} \dots c_1 \dots c_{n-1}}_{t-1}),$$

то есть последовательностей

$$\underbrace{d \dots d}_{t(n-1)} \text{ и } b_1 \dots b_{n-1},$$

где

$$b_1 = c_1, \dots, b_{n-2} = c_{n-2} \in B,$$

$$b_{n-1} = \eta(c_{n-1} \underbrace{c_1 \dots c_{n-1} \dots c_1 \dots c_{n-1}}_{t-1}) \in B. \qquad \square$$

Покажем, что замена в теореме 2.1 последовательности $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ последовательностью $\underbrace{d \dots d}_{n-1}$ делает полуинвариантную в $< A, \mu >$ l-арную подгруппу $< B_d, \mu >$ n-полуинвариантной в $< A, \mu >$.

***Теорема* 2.2**. *Пусть $s \geq 1$, $l = s(n-1)+1$, $< B, \eta >$ – полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы $< A, \eta >$, $< A, \mu >$ – l-арная группа, производная от n-арной группы $< A, \eta >$; существуют элементы $d \in A$, $c_1, \dots, c_{n-1} \in B$ такие, что последовательности $\underbrace{d \dots d}_{n-1}$ и $c_1 \dots c_{n-1}$ эквивалентны в $< A, \eta >$ в смысле Поста. Тогда справедливы утверждения* 1) – 3) *теоремы* 2.1 *и, кроме того, полуинвариантная в $< A, \mu >$ l-арная подгруппа $< B, \mu >$ – n-полуинвариантна в ней.*

Доказательство. По лемме 2.1 существуют элементы $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ такие, что эквивалентны последовательности

$$\underbrace{d \dots d}_{s(n-1)} = \underbrace{d \dots d}_{l-1} \text{ и } b_1 \dots b_{n-1}.$$

Таким образом, выполняются все условия теоремы 2.1 и справедливы утверждения 1) – 3) этой теоремы.

Если x – произвольный элемент из A, то, применяя полуинвариантность $< B, \eta >$ в $< A, \eta >$, получим

$$\mu(\underbrace{B_d \dots B_d}_{(i-1)(n-1)} x \underbrace{B_d \dots B_d}_{(s+1-i)(n-1)}) =$$

$$= \underbrace{\eta(\eta(d \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \dots \eta(d \underbrace{B \dots B}_{n-1}) x}_{(i-1)(n-1)}$$

$$\underbrace{\eta(d \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \dots \eta(d \underbrace{B \dots B}_{n-1}))}_{(s+1-i)(n-1)} =$$

$$= \eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} \underbrace{B \dots B}_{(i-1)(n-1)^2} x \underbrace{d \dots d}_{(s+1-i)(n-1)} \underbrace{B \dots B}_{(s+1-i)(n-1)^2}) =$$

$$= \eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} \underbrace{B \dots B}_{n-1} x \underbrace{d \dots d}_{(s+1-i)(n-1)} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) =$$

$$= \eta(\eta(\underbrace{d \dots d B}_{(i-1)(n-1)}) \underbrace{B \dots B}_{n-2} x \eta(\underbrace{d \dots d B}_{(s+1-i)(n-1)}) \underbrace{B \dots B}_{n-2}),$$

то есть

$$\mu(\underbrace{B_d \dots B_d}_{(i-1)(n-1)}\ x\ \underbrace{B_d \dots B_d}_{(s+1-i)(n-1)}) =$$

$$= \eta(\eta(\underbrace{d\ \dots\ d}_{(i-1)(n-1)}\ B)\ \underbrace{B \dots B}_{n-2}\ x\eta(\underbrace{d\ \dots\ d}_{(s+1-i)(n-1)}\ B)\ \underbrace{B \dots B}_{n-2}).$$

Так как по лемме 2.1 каждая из последовательностей

$$\underbrace{d\ \dots\ d}_{(i-1)(n-1)} \text{ и } \underbrace{d\ \dots\ d}_{(s+1-i)(n-1)}$$

эквивалентны в $< A, \eta >$ некоторым последовательностям, составленным из элементов множества B, то последнее равенство принимает вид

$$\mu(\underbrace{B_d \dots B_d}_{(i-1)(n-1)}\ x\ \underbrace{B_d \dots B_d}_{(s+1-i)(n-1)}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1}\ x\ \underbrace{B \dots B}_{n-1}),$$

откуда и из полуинвариантности $< B, \eta >$ в $< A, \eta >$ следует

$$\mu(\underbrace{B_d \dots B_d}_{(i-1)(n-1)}\ x\ \underbrace{B_d \dots B_d}_{(s+1-i)(n-1)}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1}\ x) \quad (2.7)$$

для любого $i = 1, \dots, s+1$. Таким образом,

$$\mu(x\ \underbrace{B_d \dots B_d}_{l-1}) = \mu(\underbrace{B_d \dots B_d}_{n-1}\ x\ \underbrace{B_d \dots B_d}_{(s-1)(n-1)}) = \dots$$

$$\dots = \mu(\underbrace{B_d \dots B_d}_{(s-1)(n-1)}\ x\ \underbrace{B_d \dots B_d}_{n-1}) = \mu(\underbrace{B_d \dots B_d}_{l-1}\ x).$$

Следовательно, $< B_d, \mu >$ является n-полуинвариантной в $< A, \mu >$. □

***Лемма* 2.2**. *Пусть* $< B, \eta >$ *– n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$,

$$s \geq 1,\ l = s(n-1)+1.$$

Тогда:

1) *если существуют элементы* $d \in A$, $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ *такие, что последовательности* $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ *и* $b_1 \dots b_{n-1}$ *эквивалентны в* $< A, \eta >$, *то*

$$\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1}\ B) = B; \quad (2.8)$$

2) *если существует элемент* $d \in A$ *такой, что верно* (2.8), *то существует последовательность* $b_1 \dots b_{n-1}$ *такая, что последовательности* $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ *и* $b_1 \dots b_{n-1}$ *эквивалентны в* $< A, \eta >$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Так как последовательности $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$ эквивалентны в $< A, \eta >$, то

$$\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1}\ b) = \eta(b_1 \dots b_{n-1} b)$$

для любого $b \in B$, откуда и из условия $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ следует

$$\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1}\ B) = \{\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1}\ b) \mid b \in B\} =$$

$$= \{\eta(b_1 \dots b_{n-1} b) \mid b \in B\} = B.$$

Следовательно, верно (2.8).

2) $\Rightarrow$ 1) Так как верно (2.8), то для любого $b \in B$ существует $c \in B$ такой, что

$$\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1}\ b) = c.$$

А так как $b \in B$, $c \in B$, то существуют элементы $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ такие, что

$$\eta(b_1 \dots b_{n-1} b) = c.$$

Из последних двух равенств следует

$$\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1}\ b) = \eta(b_1 \dots b_{n-1} b).$$

Следовательно, последовательности $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$ эквивалентны в $< A, \eta >$. □

Лемма 3.1 позволяет в формулировке теоремы 2.1 заменить условие *существуют элементы* $d \in A$, $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ *такие, что последовательности* $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ *и* $b_1 \dots b_{n-1}$ *эквивалентны в* $< A, \eta >$ равносильным ему условием *существует элемент* $d \in A$ *такой, что верно* (2.8). В этом случае формулировка теоремы 2.1 примет следующий вид.

***Теорема* 2.3.** *Пусть* $s \geq 1$, $l = s(n-1)+1$, $< B, \eta >$ *– полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, $< A, \mu >$ *– l-арная группа, производная от n-арной группы* $< A, \eta >$; *существует элемент* $d \in A$ *такой, что* $\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1}\ B) = B$. *Тогда справедливы утверждения* 1) – 3) *теоремы* 2.1.

***Замечание* 2.2**. Из леммы 2.2 при $s = 1$ следует, что условие *существуют элементы* $d \in A$, $c_1, \dots, c_{n-1} \in B$ *такие, что последовательности* $\underbrace{d \dots d}_{n-1}$ *и* $c_1 \dots c_{n-1}$ *эквивалентны в* $< A, \eta >$ равносильно условию *существует элемент* $d \in A$ *такой, что* $\eta(\underbrace{d \dots d}_{n-1}\ B) = B$. Поэтому теорему 2.2 можно сформулировать в следующем виде.

***Теорема* 2.4**. *Пусть* $s \geq 1$, $l = s(n-1)+1$, $< B, \eta >$ *– полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, $< A, \mu >$ *– l-арная группа, производная от n-арной группы* $< A, \eta >$; *существует элемент* $d \in A$ *такой, что* $\eta(\underbrace{d \dots d}_{n-1}\ B) = B$. *Тогда справедливы утверждения* 1) – 3) *теоремы* 2.1 *и, кроме того, полуинвариантная в* $< A, \mu >$ *l-арная подгруппа* $< B, \mu >$ *– n-полуинвариантна в ней.*

3 Следствия

Согласно Посту [5], *ν-ой n-адической степенью* элемента a n-арной группы $< A, \eta >$ называется элемент этой же n-арной группы, обозначаемый символом $a^{[\nu]}$ и определяемый следующим образом:

$$a^{[\nu]} = a, \text{ если } \nu = 0;$$

$$a^{[\nu]} = \eta(\underbrace{a\ \dots\ a}_{\nu(n-1)+1}), \text{ если } \nu > 0;$$

$a^{[\nu]}$ – решение уравнения $\eta(\underbrace{x\, a\ \dots\ a}_{-\nu(n-1)}) = a$, если $\nu < 0$.

***Замечание* 3.1.** В группе полиадическая степень и обычная степень одного и того же элемента связаны равенством $a^{[\nu]} = a^{\nu+1}$ для любого целого ν. В частности, $a^{[0]} = a^1 = a$.

Напомним, что *конечным n-адическим порядком элемента a n*-арной группы $< A, \eta >$ называется [1], [5] наименьшее целое положительное число m, для которого выполняется равенство $a^{[m]} = a$.

Пост доказал [5], что *если элемент a n-арной группы* $< A, \eta >$ *имеет конечный n-адический порядок m, то* $a^{[s]} = a$ *тогда и только тогда, когда s кратно m*.

***Теорема* 3.1**. *Пусть* $s \geq 1$, $l = s(n-1)+1$, $< B, \eta >$ *– полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, $< A, \mu >$ *– l-арная группа, производная от n-арной группы* $< A, \eta >$; *элемент* $d \in A$ *имеет n-адический порядок, делящий s. Тогда справедливы утверждения* 1) – 3) *теоремы* 2.1.

Доказательство. Так как элемент $d \in A$ имеет n-адический порядок, делящий s, то $d^{[s]} = d$, откуда согласно определению n-адической степени, следует

$$\eta(\underbrace{d \ \dots \ d}_{s(n-1)+1}) = d,$$

что означает нейтральность в $< A, \eta >$ последовательности

$$\underbrace{d \ \dots \ d}_{s(n-1)} = \underbrace{d \dots d}_{l-1}.$$

Понятно, что эта последовательность будет нейтральной и в $< B, \eta >$. А так как в $< B, \eta >$ существуют нейтральные последовательности, составленные из элементов множества B, и при этом все нейтральные последовательности любой n-арной группы эквивалентны в смысле Поста, то последовательность $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ эквивалентна некоторой последовательност $b_1 \dots b_{n-1}$, где $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$. Так как выполняются все условия теоремы 2.1, то справедливы утверждения 1) – 3) теоремы 2.1. □

Так как для идемпотента d n-арной группы выполняются условия теорем 2.2 и 2.4, то имеет место следующий результат.

***Теорема* 3.2**. *Пусть* $s \geq 1$, $l = s(n-1)+1$, $< B, \eta >$ *– полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, $< A, \mu >$ *– l-арная группа, производная от n-арной группы* $< A, \eta >$; d *– идемпотент в* $< A, \eta >$. *Тогда справедливы утверждения* 1) – 3) *теоремы* 2.1, *и, кроме того, полуинвариантная в* $< A, \mu >$ *l-арная подгруппа* $< B, \mu >$ *– n-полуинвариантна в ней*.

Полагая в теоремах 2.1 и 2.2 $s = 1$, получим одно и то же

***Следствие* 3.1**. *Пусть* $< B, \eta >$ *– полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, *существуют элементы* $d \in A$, $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ *такие, что последовательности* $\underbrace{d \dots d}_{n-1}$ *и* $b_1 \dots b_{n-1}$ *эквивалентны в смысле Поста. Тогда*:

1) *смежный класс* B_d *n-арной факторгруппы* $< A/B, \eta >$ *замкнут относительно n-арной операции* η, *а универсальная алгебра* $< B_d, \eta >$ *является полуинвариантной n-арной подгруппой n-арной группы* $< A, \eta >$;

2) $< A/B_d, \eta > = < A/B, \eta >$;

3) $\rho_{B_d} = \rho_B$.

Полагая в теоремах 3.1 и 3.2 $s = 1$, получим одно и то же

***Следствие* 3.2**. *Пусть* $< B, \eta >$ *– полуинвариантная n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, d *– идемпотент в* $< A, \eta >$. *Тогда справедливы утверждения* 1) – 3) *следствия* 3.1.

***Замечание* 3.2.** Утверждения 1) и 2) следствия 3.2 доказаны в [4, предложение 7.6].

Полагая в теореме 2.1 $n = 2$, получим

***Следствие* 3.3**. *Пусть* $< B, \eta >$ *– нормальная подгруппа группы* A, $< A, \mu >$ *– l-арная группа, производная от группы A*; *существует элемент* $d \in A$ *такой, что* $d^{l-1} \in B$. *Тогда*:

1) *смежный класс* $B_d = dB = Bd$ *факторгруппы A/B замкнут относительно l-арной операции* μ, *а универсальная алгебра* $< B_d, \mu >$ *является полуинвариантной l-арной подгруппой l-арной группы* $< A, \mu >$;

2) *для полуинвариантных в* $< A, \mu >$ *l-арных подгрупп* $< B_d, \mu >$ *и* $< B, \mu >$ *l-арные факторгруппы* $< A / B_d, \mu >$ и $< A / B, \mu >$ *совпадают*: $< A / B_d, \mu > = < A / B, \mu >$;

3) *конгруэнции* ρ_{B_d} *и* ρ_B *l-арной группы* $< A, \eta >$, *определяемые полуинвариантными l-арными подгруппами* $< B_d, \mu >$ *и* $< B, \mu >$ *совпадают*: $\rho_{B_d} = \rho_B$.

Если элемент $d \in A$ имеет в группе A порядок, делящий $l - 1$, то $d^{l-1} = e$, где e – единица группы A. Поэтому из следствия 3.3 вытекает

***Следствие* 3.4**. *Пусть* $< B, \eta >$ *– нормальная подгруппа группы* A, $< A, \mu >$ *– l-арная группа, производная от группы A*; *элемент* $d \in A$ *имеет в группе A порядок, делящий* $l - 1$. *Тогда справедливы утверждения* 1) – 3) *следствия* 3.3.

Полагая в теореме 3.2 $n = 3$, получим

***Следствие* 3.5**. *Пусть* $s \geq 1$, $< B, \eta >$ *– полуинвариантная тернарная подгруппа тернарной группы* $< A, \eta >$, $< A, \mu >$ *–* $(2s+1)$*-арная группа, производная от тернарной группы* $< A, \eta >$; d *– идемпотент из A*, $B_d = \eta(dBB)$. *Тогда справедливы утверждения* 1) – 3) *теоремы* 2.1 *для* $l = s + 1$, *и, кроме того, полуинвариантная в* $< A, \mu >$ $(2s+1)$*-арная подгруппа* $< B, \mu >$ *–* 3*-полуинвариантна в ней*.

***Пример* 3.1**. В [4, теорема 1.20, предложение 5.9] установлено, что в тернарной группе отражений правильного n-угольника $< \mathbf{B}_n, \eta >$

все элементы являются идемпотентами и для всякого делителя k её порядка n существует точно $m = n/k$ полуинвариантных тернарных подгрупп

$$< H_1, \eta >, \ldots, < H_m, \eta >$$

порядка k. Тогда по следствию 3.5 для $(2s+1)$-арной группы $< \mathbf{B}_n, \mu >$, производной от тернарной группы $< \mathbf{B}_n, \eta >$, справедливы следующие утверждения:

1) *для любого* $i = \{1, \ldots, m\}$*смежный класс* $(H_i)_d = \eta(dH_iH_i)$ *тернарной факторгруппы* $< \mathbf{B}_n / H_i, \eta >$ *замкнут относительно* $(2s+1)$-*арной операции* μ, *а универсальная алгебра* $< (H_i)_d, \mu >$ *является* 3-*полуинвариантной* $(2s+1)$-*арной подгруппой* $(2s+1)$-*арной группы* $< A, \mu >$;

2) $< \mathbf{B}_n/(H_i)_d, \mu > = < \mathbf{B}_n/H_i, \mu >$;

3) $\rho_{(H_i)_d} = \rho_{H_i}$.

В теоремах 2.1 и 2.2 доказано, что l-арная подгруппа $< B_d, \mu >$ полуинвариантна в $< A, \mu >$, а в теоремах 2.3 и 2.4 установлено, что она может быть даже n-полуинвариантной. Покажем, что l-арная подгруппа $< B_d, \mu >$ из теорем 2.1 – 2.2 не обязана быть инвариантной в $< A, \mu >$.

***Пример* 3.2**. Пусть $\mathbf{T}_k$ – множество всех нечётных подстановок степени k. $< \mathbf{T}_k, \mu >$ – полиадическая группа нечётной арности $2s+1$, производная от тернарной группы $< \mathbf{T}_k, \eta >$ с тернарной операцией $\eta(\alpha\beta\gamma) = \alpha\beta\gamma$.

Рассмотрим одноэлементное множество $B = \{b\}$, где b – любая транспозиция из $\mathbf{T}_k$. Ясно, что $< B, \eta >$ – полуинвариантная тернарная подгруппа тернарной группы $< \mathbf{T}_k, \eta >$.

Если d – ещё одна транспозиция из $\mathbf{T}_k$, то

$$B_d = \eta(dBB) = \{dbb\} = \{d\}.$$

Так как d – идемпотент в $< \mathbf{T}_k, \mu >$, то по теореме 3.2 $(2s+1)$-арная подгруппа $< B_d = \{d\}, \mu >$ является 3-полуинвариантной в $(2s+1)$-арной группе $< \mathbf{T}_k, \mu >$. Это можно доказать и без использования теоремы 3.2, проведя соответствующие вычисления.

Если теперь $d = (i\,j)$ и $b = (i\,k)$ – различные транспозиции из $\mathbf{T}_k$, то, полагая $B = \{(i\,k)\}$, получим $B_d = \{(i\,j)\}$. Так как

$$\mu((i\,k)\underbrace{B_d \ldots B_d}_{2s}) = \{(i\,k)\underbrace{(i\,j)\ldots(i\,j)}_{2s})\} = \{(i\,k)\},$$

$$\mu(B_d(i\,k)\underbrace{B_d \ldots B_d}_{2s-1}) = \eta(B_d(i\,k)B_d) =$$

$$= \{(i\,j)(i\,k)(i\,j)\} = \{(j\,k)\},$$

то

$$\mu((i\,k)\underbrace{B_d \ldots B_d}_{2s}) \neq \mu(B_d(i\,k)\underbrace{B_d \ldots B_d}_{2s-1}).$$

Следовательно, $(2s+1)$-арная подгруппа $< B_d = \{d\}, \mu >$, где $B = \{(i\,k)\}$, $d = (i\,j)$, $j \neq k$, не является инвариантной в $(2s+1)$-арной группе $< \mathbf{T}_k, \mu >$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Русаков*, *С.А.* Алгебраические *n*-арные системы / С.А. Русаков. – Мінск: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

2. *Dörnte*, *W.* Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.

3. *Гальмак*, *А.М.* Инвариантные подгруппы *n*-арных групп / А.М. Гальмак // Вопросы алгебры. – Минск: Университетское. – 1990. – Вып. 5. – С. 91–94.

4. *Гальмак*, *А.М.* Конгруэнции полиадических групп / А.М. Гальмак. – Минск: Беларуская навука, 1999. – 182 с.

5. *Post*, *E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

Поступила в редакцию 05.03.2025.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_51
EDN: PXPTVX

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЧАСТИЧНО *p*-СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ ШМИДТА

И.М. Дергачева, Е.А. Задорожнюк, И.П. Шабалина

Белорусский государственный университет транспорта, *Гомель*

FINITE GROUPS WITH PARTIALLY *p*-SUBNORMAL SCHMIDT SUBGROUPS

I.M. Dergacheva, E.A. Zadorozhnyuk, I.P. Shabalina

Belarusian State University of Transport, *Gomel*

Аннотация. На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу; G называется группой Шмидта, если G не нильпотентна, но каждая собственная подгруппа группы G нильпотентна. Подгруппа A группы G называется $\mathfrak{U}p$ -нормальной в G, если каждый главный pd-фактор G между A_G и A^G является циклическим. Мы говорим, что подгруппа A группы G частично p-субнормальна в G, если $A=\langle L,T\rangle$ для некоторых субнормальной подгруппы L и $\mathfrak{U}p$ -нормальной подгруппы T группы G. В данной статье мы доказываем следующую теорему.

Теорема. *Если каждая подгруппа Шмидта группы G частично p-субнормальна в G, то ее производная подгруппа G' p-нильпотентна.*

Ключевые слова: *конечная группа*, *группа Шмидта*, *p-нильпотентная группа*, *$\mathfrak{U}p$ -нормальная подгруппа*, *частично p-субнормальная подгруппа*.

Для цитирования: *Дергачева*, *И.М.* Конечные группы с частично p-субнормальными подгруппами Шмидта / И.М. Дергачева, Е.А. Задорожнюк, И.П. Шабалина // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 51–55. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_51. – EDN: PXPTVX

Abstract. Throughout the paper, all groups are finite and G always denotes a finite group; G is called a Schmidt group if G is not nilpotent, but every proper subgroup of G is nilpotent. A subgroup A of G is called $\mathfrak{U}p$ -normal in G if every principal pd-factor of G between A_G and A^G is cyclic. We say that a subgroup A of G is partially p-subnormal in G if $A=\langle L,T\rangle$ for some subnormal subgroup L and $\mathfrak{U}p$ -normal subgroup T of G. In this paper, we prove the following theorem.

Theorem. *If every Schmidt subgroup of a group G is partially p-subnormal in G, then the derived subgroup G' of G is p-nilpotent.*

Keywords: *finite group*, *Schmidt group*, *p-nilpotent group*, *$\mathfrak{U}p$ -normal subgroup*, *partially p-subnormal subgroup*.

For citation: *Dergacheva*, *I.M.* Finite groups with partially p-subnormal Schmidt subgroups / I.M. Dergacheva, E.A. Zadorozhnyuk, I.P. Shabalina // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 2 (63). – P. 51–55. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_51 (in Russian). – EDN: PXPTVX

Введение

На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу. Символ $\pi(n)$ обозначает множество всех простых чисел, делящих число n, и $\pi(G)=\pi(|G|)$. В дальнейшем, p, q – простые числа. Группа G называется: *πd -группой*, если $\pi\cap\pi(G)\neq\varnothing$; *$pd$-группой*, если $p\in\pi(G)$.

Подгруппа A группы G называется *модулярной* в G, если A – модулярный элемент (в смысле Куроша [1]) решетки всех подгрупп группы G, то есть, выполняются следующие условия:

(i) $\langle X, A\cap Z\rangle=\langle X, A\rangle\cap Z$ для всех $X\leq G$, $Z\leq G$ таких, что $X\leq Z$ и

(ii) $\langle A, Y\cap Z\rangle=\langle A, Y\rangle\cap Z$ для всех $Y\leq G$, $Z\leq G$ таких, что $A\leq Z$.

Напомним, что подгруппа A группы G называется [2]:

(i) *$\mathfrak{U}p$ -нормальной в G*, если каждый главный pd-фактор G между A_G и A^G является циклическим;

(ii) *$\mathfrak{U}$ -нормальной в G*, если каждый главный фактор G между A_G и A^G является циклическим.

Мы говорим, что подгруппа A группы G *частично p-субнормальна* в G, если $A=\langle L,T\rangle$ для некоторых субнормальной подгруппы L и $\mathfrak{U}p$ -нормальной подгруппы T группы G.

Группа G называется группой Шмидта, если G не нильпотентна, но каждая собственная подгруппа группы G нильпотентна.

В работе [3] В.Н. Семенчук доказал, что если каждая подгруппа Шмидта группы G

© *Дергачева И.М.*, *Задорожнюк Е.А.*, *Шабалина И.П.*, 2025

субнормальна в G, то фактор группа $G/F(G)$ является нильпотентной. Это интересное наблюдение послужило мотивировкой для многих других исследований, связанных с изучением влияния подгрупп Шмидта на строение основной группы и, в частности, с изучением условий, при которых производная подгруппа группы нильпотентна или p-нильпотентна.

В этой связи В.С. Монахов и В.Н. Княгина доказали [4], что если каждая подгруппа Шмидта группы G субномальна в G, то ее производная подгруппа нильпотентна, а в работе [5] И.В. Близнец и В.М. Селькин установили, что производная подгруппа G' группы G нильпотентна и в случае, когда каждая подгруппа Шмидта группы G модулярна в G. Развивая эти результаты, В.М. Селькин, Н.С. Косенок и В.С. Закревская доказали в работе [6], что если каждая подгруппа Шмидта группы G либо субнормальна, либо $\mathfrak{U}_p$-нормальна в G, то производная подгруппа группы G является p-нильпотентной.

В данной работе, обобщая все упомянутые выше результаты, мы докажем следующий результат в данном направлении.

***Теорема* 0.1.** *Если каждая подгруппа Шмидта группы G частично p-субнормальна в G, то производная подгруппа G' группы G является p-нильпотентной.*

***Следствие* 0.2** (В.Н. Семенчук [3]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G субнормальна в G, то $G/F(G)$ нильпотентна.*

***Следствие* 0.3** (В.С. Монахов, В.Н. Княгина [4]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G субнормальна в G, то производная подгруппа G' группы G является нильпотентной.*

***Следствие* 0.4** (Дж. Хуанг, Б. Ху, А.Н. Скиба [7]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G либо $\mathfrak{U}$-нормальна, либо субнормальна в G, то производная подгруппа G' группы G является нильпотентной.*

***Следствие* 0.5** (В.М. Селькин, Н.С. Косенок, В.С. Закревская [6]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G либо субнормальна, либо $\mathfrak{U}_p$-нормальна в G, то производная подгруппа G' группы G является p-нильпотентной.*

Ввиду [1, теорема 5.2.5], каждая модулярная подгруппа является $\mathfrak{U}$-нормальной в группе. Таким образом, из теоремы 0.1 вытекает также следующий известный результат.

***Следствие* 0.6** (И.В. Близнец, В.М. Селькин [5]). *Если каждая подгруппа Шмидта группы G модулярна в G, то производная подгруппа G' группы G нильпотентна.*

1 Доказательство основного результата

В доказательстве теоремы 0.1 мы используем следующие леммы.

***Лемма* 1.1** (см. предложение 1.8 и лемму 3.3 в [2]). *Пусть A и $N \le E$ – подгруппы в G, где N является нормальной и A является $\mathfrak{U}p$-нормальной в G. Тогда*:

(1) *AN/N является $\mathfrak{U}p$-нормальной в G/N.*

(2) *Если E/N является $\mathfrak{U}p$-нормальной в G/N, то E является $\mathfrak{U}p$-нормальной в G.*

(3) *$A \cap E$ является $\mathfrak{U}p$-нормальной в E.*

(4) *Если E является $\mathfrak{U}p$-нормальной в G, то $\langle A, E\rangle$ является $\mathfrak{U}p$-нормальной в G.*

***Лемма* 1.2** [10, глава А, леммы 14.1, 14.2, 14.3 и теорема 14.4]. *Пусть A и $N \le E$ – подгруппы в G, где N нормальна и A субнормальна в G. Тогда*:

(1) *AN/N является субнормальной в G/N.*

(2) *Если $A \le E$, то A субнормальна в E.*

(3) *Если E/N субнормальна в G/N, то E субнормальна в G.*

(4) *Если E субнормальна в G, то $\langle A, E\rangle$ является субнормальной в G.*

***Лемма* 1.3** (см. [8, III, теорема 5.2] или [9, VI, теорема 24.2]). *Если G является группой Шмидта, то $G = P \rtimes Q$, где $P = G^{\mathfrak{N}}$ – силовская p-подгруппа группы G и $Q = \langle x\rangle$ является циклической силовской q-подгруппой в G, $p \ne q$. Кроме того, $\langle x^q\rangle \le \Phi(G)$ и $Q^G = G$.*

***Лемма* 1.4.** *Если A – субнормальная подгруппа в G, то $O_\pi(A) \le O_\pi(G)$.*

Доказательство. По условию существует цепь подгрупп

$$A = A_0 \le A_1 \le \cdots \le A_{t-1} \le A_t = G$$

такая, что A_i является нормальной в A_{i+1} для всех $i = 1, \ldots, t-1$. Тогда по индукции имеет место

$$O_\pi(A) \le O_\pi(A_{t-1}).$$

С другой стороны, $O_\pi(A_{t-1})$ характеристична в A_{t-1} и поэтому нормальна в $A_t = G$. Следовательно, $O_\pi(A_{t-}) \le O_\pi(G)$. Таким образом,

$$O_\pi(A) \le O_\pi(G). \qquad \square$$

***Лемма* 1.5.** *Пусть A и $N \le E$ – подгруппы в G, где N нормальна и A частично p-субнормальна в G. Тогда*:

(1) *AN/N является частично p-субнормальной в G/N.*

(2) *Если $A \le E$, то A частично p-субнормальна в E.*

(3) *Если E/N частично p-субнормальна в G/N, то E частично p-субнормальна в G.*

(4) *Если E частично p-субнормальна в G, то $\langle A, E\rangle$ является частично p-субнормальной в G.*

Доказательство. Пусть $A = \langle L, T\rangle$, где L – субнормальная подгруппа и T является $\mathfrak{U}p$-нормальной подгруппой в G.

(1) Имеет место $AN/N = \langle LN/N, TN/N\rangle$, где LN/N субнормальна в G/N согласно лемме 1.2 (1) и TN/N является $\mathfrak{U}p$-нормальной в G/N по лемме 1.1 (1). Следовательно, AN/N частично p-субнормальна в G/N.

(2) Утверждение следует из леммы 1.2 (2) и леммы 1.1 (3).

(3) Пусть $E/N = \langle V/N, W/N\rangle$, где V/N субнормальна в G/N и W/N является $\mathfrak{U}p$-нормальной в G/N. Тогда $E = \langle V, W\rangle$, где V субнормальна в G и W является $\mathfrak{U}p$-нормальной в G по лемме 1.1(2), поэтому E частично p-субнормальна в G.

(4) Пусть $E = \langle V, W\rangle$, где V является субнормальной и W является $\mathfrak{U}p$-нормальной подгруппой в G. Тогда

$$\langle A, E\rangle = \langle\langle L, T\rangle, \langle V, W\rangle\rangle = \langle\langle L, V\rangle, \langle T, W\rangle\rangle,$$

где $\langle L, V\rangle$ является субнормальной в G согласно 1.2(4) и $\langle T, W\rangle$ является $\mathfrak{U}p$-нормальной в G по лемме 1.1 (4). Следовательно, $\langle A, E\rangle$ частично p-субнормальна в G. □

Доказательство теоремы 0.1. Предположим, что эта теорема неверна, и пусть G является контрпримером минимального порядка. Тогда $G' \not\leq O_{p',p}(G)$.

(1) *Если E – собственная подгруппа в G, то производная подгруппа E' группы E p-нильпотентна*.

Предположим, что подгруппа E' не является p-нильпотентной. Тогда E не является нильпотентной группой и поэтому в E имеется подгруппа Шмидта. Более того, ввиду условия теоремы, каждая подгруппа Шмидта H группы E частично p-субнормальна в G и поэтому H частично p-субнормальна в E ввиду леммы 1.5 (2). Таким образом, условие теоремы выполнено для E и поэтому производная подгруппа E' группы G p-нильпотентна ввиду выбора группы G.

(2) *Если N – минимальная нормальная подгруппа в G, то производная подгруппа $(G/N)'$ группы G/N p-нильпотентна.*

Если G/N нильпотентна, то это очевидно. Теперь предположим, что группа G/N не является нильпотентной, и пусть E/N – произвольная подгруппа Шмидта в G/N. Пусть H – минимальное добавление к N в E. Тогда

$$H/(H\cap N) \simeq HN/N = E/N$$

– группа Шмидта и $H \cap N \leq \Phi(H)$. Пусть $\Phi = \Phi(H)$ и A – подгруппа Шмидта в H.

Из леммы 1.3 вытекает, что

$$(H/(H\cap N))/\Phi(H/(H\cap N)) =$$
$$= (H/(H\cap N))/(\Phi/(H\cap N)) \simeq H/\Phi = R \rtimes Q,$$

где R – силовская r-подгруппа, Q – силовская q-подгруппа в H/Φ и $|Q| = q$ для некоторых простых чисел $r \neq q$. Отсюда, снова по лемме 1.3, следует, что $A = A_r \rtimes A_q$, где $A = (A_q)^A$. Тогда $A_q \not\leq \Phi$, так как Φ нильпотентна. Следовательно, $\Phi A_q/\Phi$ является силовской q-подгруппой в H/Φ, и поэтому

$$(\Phi A_q/\Phi)^{H/\Phi} = (A_q)^H \Phi/\Phi = H/\Phi.$$

Следовательно, $(A_q)^H = H$, поэтому

$$E = HN = (A_q)^H N.$$

Согласно лемме 1.5(4), $(A_q)^H = A^H$ является частично p-субнормальной подгруппой в G и, следовательно,

$$E/N = (A_q)^H N/N$$

частично p-субнормальна в G/N по лемме 1.5(1). Следовательно, гипотеза верна для G/N, поэтому выбор группы G подразумевает, что мы имеем (2).

(3) $O_{p'}(G) = 1$.

Предположим, что $O_{p'}(G) \neq 1$ и пусть R – минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в $O_{p'}(G)$. Тогда

$$O_{p'}(G)/R = O_{p'}(G/R)$$

и поэтому

$$(G/R)/O_{p'}(G/R) =$$
$$= (G/N)/(O_{p'}(G)/R) \simeq G/O_{p'}(G).$$

Пусть $R \leq O_{p'}(G) \leq O$, где

$$O/O_{p'}(G) = O_p(O_{p'}(G)).$$

Тогда $O = O_{p',p}(G)$ и $O_{p',p}(G)/R \leq O_{p',p}(G/R)$.

Пусть теперь $R \leq L \leq T$, где

$$L/R = O_{p'}(G/R) = O_{p'}(G)/R$$

и

$$T/L \simeq (T/N)/(L/R) = O_p((G/R)/O_{p'}(G/R)) =$$
$$= O_p((G/R)/(O/O_{p'}(G))).$$

Таким образом, $T/R = O_{p',p}(G/R)$. Тогда T/L – p-группа и L – p'-группа, поэтому T p-нильпотентна и это влечет вложения $T \leq O \leq T$. Следовательно, $O = T$.

Из утверждения (2) вытекает, что

$$(G/R)' = G'R/R \leq O_{p',p}(G/R) = O_{p',p}(G)/R$$

и поэтому $G' \leq O_{p',p}(G)$, т. е. G' p-нильпотентна, что противоречит выбору группы G. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения (3).

(4) *G p-разрешима*.

Из утверждений (1) и (2) вытекает, что каждая собственная подгруппа и каждая фактор группа $G/R \neq G/1$ являются p-разрешимыми группами. Таким образом, для доказательства утверждения (4) достаточно лишь показать, что G не является неабелевой простой группой.

Предположим, что G – неабелева простая группа. Тогда G не является нильпотентной группой. Пусть H – подгруппа Шмидта в G. Тогда $H < G$ и H является частично p-субнормальной в G подгруппой по условию. Более того, $G \simeq G/1 = H^G/1$ – единственный главный фактор группы G и такой фактор не является p'-группой ввиду утверждения (3). Следовательно, G является группой простого порядка, что противоречит выбору группы G. Это противоречие завершает доказательство утверждения (4).

(5) $G = R \rtimes M$, *где*

$$R = C_G(R) = O_p(G) = O_{p',p}(G)$$

– единственная минимальная нормальная подгруппа в G и M – максимальная подгруппа в G с $M_G = 1$.

Пусть R – произвольная минимальная нормальная подгруппа в G. Тогда, ввиду утверждений (2) и (4), производная подгруппа

$$(G/R)' = G'R/R \simeq G'/(G' \cap R)$$

группы G/R p-нильпотентна и R является либо p'-группой, либо p-группой. Но первый случай невозможен ввиду утверждения (3). Таким образом, R является p-группой. Выбор группы G подразумевает, что $R \le G'$, так как в противном случае $G' \simeq G'/1 = G'/(G' \cap R)$ p-нильпотентна.

Предположим, что G имеет минимальную нормальную подгруппу $N \ne R$. Тогда $G'/(G' \cap N)$ p-нильпотентна, поэтому группа

$$G' \simeq G'/1 = G'/(R \cap N) =$$
$$= G'/((G' \cap R) \cap (G' \cap N))$$

p-нильпотентна, что противоречит выбору группы G. Поэтому R является единственной минимальной нормальной подгруппой в G, $R \le G'$ и G'/R p-нильпотентна. Если $R \le \Phi(G)$, то G' p-нильпотентна по [9, I, теорема 4.2]{26}.Таким образом, $R \not\leq \Phi(G)$.

Пусть теперь M – такая максимальная в G подгруппа, что $G = RM$. Поскольку $R \le O_p(G)$, R – абелева группа и поэтому $R \cap M = 1$ нормальна в G. Тогда $M_G = 1$, поскольку R является единственной минимальной нормальной подгруппой в G. Более того, $G = O_p(G)M$, где $O_p(G) \le C_G(R)$ ввиду [10, глава A, теорема 10.6 (b)], что влечет

$$C_G(R) = C_G(R) \cap O_p(G)M = O_p(G)(C_G(R) \cap M),$$

где $C_G(R) \cap M$ – нормальная в G подгруппа. Но $M_G = 1$ и поэтому $C_G(R) \cap M = 1$. Следовательно, $R = C_G(R) = O_p(G) = F(G) = O_{p',p}(G)$ поскольку $O_{p'}(G) = 1$ согласно утверждению (3).

(6) $|R| > p$.

Действительно, если $|R| = p$, то поскольку

$$G/C_G(R) = G/R = G/O_{p',p}(G),$$

где

$G/C_G(R) \le Aut(R)$, то G/R – циклическая группа и поэтому $G' = R$ p-нильпотентна. Полученное противоречие показывает, что $|R| > p$.

(7) $M \simeq G/R$ *нильпотентна.*

Предположим, что M не является нильпотентной группой и пусть H – подгруппа Шмидта в M. Тогда $H = \langle A, B \rangle$ для некоторой субнормальной подгруппы A и $\mathfrak{U}p$-нормальной подгруппы B группы G.

Предположим, что $A \ne 1$. Поскольку A p-разрешима по утверждению (4), то либо $O_{p'}(A) \ne 1$, либо $O_p(A) \ne 1$. Но $O_{p'}(A) \le O_{p'}(G)$ по лемме 1.4 и поэтому в первом случае мы имеем $O_{p'}(G) \ne 1$, что невозможно ввиду утверждения (3). Значит, $O_p(A) \ne 1$ и $O_p(A) \le O_p(G) = R$ по лемме 1.4 и утверждению (5), что влечет $R \cap M \ne 1$. Но это противоречит утверждению (5), поэтому утверждение (7) выполнено для G.

(8) R *является силовской* p*-подгруппой* G.

Предположим, что R не является силовской p-подгруппой G. Тогда p делит

$$|M| = |G/R| = G/C_G(R)$$

ввиду утверждения (5), что противоречит [9, II, лемма 3.9]. Следовательно, мы имеем (8).

(9) *Для любой собственной субнормальной подгруппы E группы G имеет место* $E' \le R$.

Действительно, ввиду утверждения (1) мы имеем $E' \le O_{p',p}(E)$. С другой стороны,

$$O_{p'}(E) \le O_{p'}(G)$$

по лемме 1.4, где $O_{p'}(G) = 1$ ввиду утверждения (3). Значит, $O_{p'}(E) = 1$ и поэтому

$$O_{p',p}(E) = O_p(E) \le O_p(G) = R$$

ввиду утверждения (5) и леммы 1.4. Следовательно, $E' \le R$.

(10) M *– группа Миллера – Морено* (*т. е. группа M не является абелевой*, *но каждая собственная подгруппа в M является абелевой*). *Более того*, *M является q-группой для некоторого простого числа* $q \ne p$.

Теперь V – произвольная максимальная подгруппа в M. Тогда V нормальна в M ввиду утверждения (7) и поэтому $E = R \rtimes V$ – собственная субнормальная подгруппа группы G. Следовательно, $E' \le R$ ввиду утверждения (9). Но тогда, ввиду утверждения (5),

$$V \simeq V/1 = V/(V \cap R) \simeq RV/R$$

– абелева группа. Таким образом, каждая максимальная подгруппа группы M является абелевой. Кроме того, $R \ne G'$ ввиду выбора группы G и поэтому $M \simeq G/R$ – неабелева нильпотентная группа. Таким образом, M – группа Миллера –

Морено и M является q-группой для некоторого простого числа $q \neq p$.

Заключительное противоречие. Поскольку, ввиду утверждения (10), M является q-группой Миллера – Морено для некоторого простого числа $q \neq p$, $\Phi(M) \neq 1$ и поэтому для некоторой подгруппы C_q порядка q имеет место

$$C_q \leq Z(M) \cap \Phi(M).$$

Пусть теперь $V = RC_q$. Тогда

$$R = R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n,$$

где R_i – минимальная нормальная подгруппа в V для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ по теореме Машке. С другой стороны, группа V не является нильпотентной, так как в противном случае $V = R \times C_q$ и поэтому $C_q \leq C_G(R)$, что противоречит утверждению (5).

Следовательно, для некоторого i подгруппа $F = R_i \rtimes C_q$ не является q-замкнутой и поэтому группа F содержит подгруппу Шмидта H вида $H = H_p \rtimes C_q$. Согласно условию, $H = \langle L, T \rangle$ для некоторой субнормальной подгруппы L и некоторой $\mathfrak{U}p$-нормальной подгруппы T группы G.

Сначала предположим, что H субнормальна в G. Тогда в V имеется такая собственная подгруппа W, что $H \leq W$ и W нормальна в V. Поскольку $C_q \leq W < V$, то для некоторого k имеем $R_k \not\leq W$. Тогда $R_k \cap W = 1$, следовательно, $R_k \leq C_V(W)$, поэтому $R_k \leq N_G(C_q) = M$, где M максимальна в G, противоречие.

Следовательно, H не является субнормальной в G. Значит, $L \neq H$ и поэтому $T \neq 1$. Но тогда $R \leq T^G$ ввиду утвеждения (5). Кроме того, $T_G = 1$, поскольку $H_G = 1$. Таким образом, R является циклической группой, что противоречит утверждению (6).

Следовательно, $n = 1$, поэтому $R = R_1$ и C_q действует неприводимо на R. Но $C_q \leq \Phi(M)$, поэтому каждая собственная подгруппа группы M действует неприводимо на R, из чего следует, что каждая максимальная подгруппа из M является циклической ввиду [9, I, лемма 4.1]. Следовательно, $q = 2$ ввиду [11, гл. 5, теорема 4.4] и поэтому $|R| = p$, что противоречит утверждению (6). □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schmidt*, *R*. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin: Walter de ruyter, 1994.

2. *Hu*, *B*. Finite groups with only $\mathfrak{F}$-normal and $\mathfrak{F}$-abnormal subgroups / B. Hu, J. Huang, A.N. Skiba // J. Group Theory. – 2019. – Vol. 22, № 5. – P. 915–926.

3. *Семенчук*, *В.Н.* Конечные группы с системами минимальных не $\mathfrak{F}$-подгрупп, в книге: Подгрупповое строение конечных групп / В.Н. Семенчук. – Минск: Наука и Техника, 1981. – С. 138–149.

4. *Монахов*, *В.С.* О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта / В.С. Монахов, В.Н. Княгина // Сибирский математический журнал. – 2004. – Т. 45, № 6. – С. 1316–1322.

5. *Близнец*, *И.В.* Конечные группы с модулярной подгруппой Шмидта / И.В. Близнец, В.М. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 4 (41). – С. 36–38.

6. *Селькин*, *В.М.* Конечные группы с ограничениями на подгруппы Шмидта / В.М. Селькин, Н.С. Косенок, В.С. Закревская // Проблемы физики, математики и техники. – 2002. – № 1 (50). – С. 84–88.

7. *Хуанг*, *Дж.* Конечные группы со слабо субнормальными и частично субнормальными подгруппами / Дж. Хуанг, Б. Ху, А.Н. Скиба // Сибирский математический журнал. – 2021. – Т. 1, № 62. – С. 201–220.

8. *Huppert*, *B*. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag, 1967.

9. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978.

10. *Doerk*, *K*. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992.

11. *Gorenstein*, *D*. Finite Groups / D. Gorenstein. – New York – Evanston – London: Harper & Row Publishers, 1968.

Поступила в редакцию 04.03.2025.

Информация об авторах

Дергачева Ирина Михайловна – к.ф.-м.н., доцент
Задорожнюк Елена Андреевна – к.ф.-м.н., доцент
Шабалина Ирина Петровна – к.ф.-м.н., доцент

МАТЕМАТИКА

УДК 517.538.52+517.538.53 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_56
EDN: MPCXET

ОБ АСИМПТОТИКЕ СХОДИМОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ЯКОБИ И НЕЛИНЕЙНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ЧЕБЫШЁВА

А.П. Старовойтов, М.А. Кухлич, Н.В. Рябченко

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ON THE ASYMPTOTICS OF CONVERGENCE OF TRIGONOMETRIC HERMITE – JACOBI APPROXIMATIONS AND NONLINEAR HERMITE – CHEBYSHEV APPROXIMATIONS

A.P. Starovoitov, M.A. Kukhlich, N.V. Ryabchenko

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Описана асимптотика поведения тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Якоби и нелинейных аппроксимаций Эрмита – Чебышёва для систем специальных функций, ассоциированных с функциями Миттаг – Леффлера. Найдены точные порядковые оценки равномерных уклонений указанных аппроксимаций от соответствующих специальных функций. В некоторых случаях полученные порядковые оценки являются асимптотически точными.

Ключевые слова: *функции Миттаг – Леффлера*, *аппроксимации Эрмита – Паде*, *аппроксимации Паде – Чебышёва*, *тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби*, *нелинейные аппроксимации Эрмита – Чебышёва*.

Для цитирования: *Старовойтов, А.П.* Об асимптотике сходимости тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Якоби и нелинейных аппроксимаций Эрмита – Чебышёва / А.П. Старовойтов, М.А. Кухлич, Н.В. Рябченко // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 56–61. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_56. – EDN: MPCXET

Abstract. The paper describes the asymptotic behavior of trigonometric Hermite – Jacobi approximations and nonlinear Hermite – Chebyshev approximations for the systems of special functions associated with Mittag – Leffler functions. The exact ordinal estimates of uniform deviations of the indicated approximations from the corresponding special functions are found. In some cases, the obtained ordinal estimates are asymptotically exact.

Keywords: *Mittag – Leffler functions*, *Hermite – Padé approximations*, *Padé – Chebyshev approximations*, *trigonometric Hermite – Jacobi approximations*, *nonlinear Hermite – Chebyshev approximations*.

For citation: *Starovoitov, A.P.* On the asymptotics of convergence of trigonometric Hermite – Jacobi approximations and nonlinear Hermite – Chebyshev approximations / A.P. Starovoitov, M.A. Kukhlich, N.V. Ryabchenko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 2 (63). – P. 56–61. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_56 (in Russian). – EDN: MPCXET

Введение

0.1. *Аппроксимации Эрмита – Паде*

Рассмотрим систему

$$\mathbf{F}_\gamma = \mathbf{F}_\gamma(\vec{\lambda}) = \{F_\gamma(z;\lambda_j)\}_{j=1}^k,$$

состоящую из вырожденных гипергеометрических функций (функций Миттаг – Леффлера; подробнее см. [1], [2])

$$F_\gamma(z;\lambda_j) = {}_1F_1(1,\gamma;\lambda_j z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda_j^p}{(\gamma)_p} z^p,\ j=1,\ldots,k, \quad (0.1)$$

где параметр $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Z}_- = \{0,-1,-2,\ldots\}$, $(\gamma)_0 = 1$, $(\gamma)_p = \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+p-1)$ – символ Похгаммера, а $\vec{\lambda} = \{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – набор не равных нулю различных комплексных чисел (при $k=1$ считаем, что $\lambda_1 = 1$).

Если $\gamma = 1$, то $\mathbf{F}_1(\vec{\lambda})$ является упорядоченным набором экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$.

Для системы $\mathbf{F}_\gamma(\vec{\lambda})$ при $n \geq m_j - 1$, $j = 1,\ldots,k$, существуют (см. [3], [4]) тождественно не равный нулю многочлен

$$Q_m(z;\mathbf{F}_\gamma) = Q_{n,\vec{m}}(z;\mathbf{F}_\gamma(\vec{\lambda})),$$

$\deg Q_m \leq m$, и многочлены

$$P_j(z;\mathbf{F}_\gamma) = P_{n_j,n,\vec{m}}(z;\mathbf{F}_\gamma(\vec{\lambda})),$$

$\deg P_j \leq n_j$, для которых в некоторой окрестности нуля

$$F_\gamma(z;\lambda_j) - \frac{P_j(z;\mathbf{F}_\gamma)}{Q_m(z;\mathbf{F}_\gamma)} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} d_l^j z_l,\ j=1,\ldots,k. \quad (0.2)$$

© *Старовойтов А.П., Кухлич М.А., Рябченко Н.В.*, 2025

Здесь и далее $n, m_1, \ldots, m_k$ – целые неотрицательные числа, $\vec{m} = (m_1, \ldots, m_k)$,

$$m = \sum_{p=1}^{k} m_p, \;\; n_j = n + m - m_j, \;\; j = 1, \ldots, k.$$

В частности, если $k = 1$, то $F_\gamma(\vec{\lambda})$ состоит из одной функции $f(z) := F_\gamma(z;1)$, соответственно многочлены

$$Q_{n,m}(z;f) := Q_{n,\vec{m}}(z;f),$$
$$P_{n,m}(z;f) := P_{n,n,\vec{m}}(z;f)$$

условиями (0.2) определяются с точностью до мультипликативной константы, а их отношение задает единственную рациональную дробь $\pi_{n,m(z;f)} = P_{n,m}(z;f) / Q_{n,m}(z;f)$, которую будем называть *аппроксимацией Паде – Якоби* функции f (*аппроксимацией Паде – Бейкера*; по поводу терминологии см. [5], [6]).

При $k \geq 2$ и $n \geq m_j - 1$, $j = 1, \ldots, k$, дроби

$$\pi_j(z;\mathbf{F}_\gamma) = \pi_j(z;\mathbf{F}_\gamma(\vec{\lambda}) = \pi_{n_j,n,m}(z;\mathbf{F}_\gamma(\vec{\lambda}) = \frac{P_j(z;\mathbf{F}_\gamma)}{Q_m(z;\mathbf{F}_\gamma)}$$

существуют и условиями (0.2) определяются однозначно. Тем самым однозначно определен вектор $\vec{\pi}_{n,\vec{m}}(z;\mathbf{F}_\gamma) = \{\pi_j(z;\mathbf{F}_\gamma(\vec{\lambda}))\}_{j=1}^{k}$. Координатные функции вектора $\vec{\pi}_{n,\vec{m}}(z;\mathbf{F}_\gamma)$ будем называть *аппроксимациями Эрмита – Якоби*, а многочлены $Q_m(z;\mathbf{F}_\gamma)$, $P_j(z;\mathbf{F}_\gamma)$ *– многочленами Эрмита – Якоби* для мультииндекса $(n,\vec{m})$ и системы $\mathbf{F}_\gamma(\vec{\lambda})$.

0.2. *Тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби*

Рассмотрим теперь набор тригонометрических рядов

$$G_\gamma(z;\lambda_j) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda_j^p}{(\gamma)_p} \cos px, \;\; j = 1, \ldots, k,$$

ассоциированных с рядами (0.1), и соответствующую ассоциированную систему тригонометрических функций $\mathbf{G}_\gamma(\vec{\lambda}) = \{G_\gamma(z;\lambda_j)\}_{j=1}^{k}$. В [7] при $k \geq 1$ и $n \geq m_j - 1$, $j = 1, \ldots, k$ доказано существование таких тригонометрических рациональных функций

$$\pi_j^t(z;\mathbf{G}_\gamma) = \pi_j^t(z;\mathbf{G}_\gamma(\vec{\lambda})) =$$
$$= \pi_{n_j,n,m}^t(z;\mathbf{G}_\gamma(\vec{\lambda}) = \frac{P_j^t(z;\mathbf{G}_\gamma)}{Q_m^t(z;\mathbf{G}_\gamma)},$$

что

$$G_\gamma(x;\lambda_j) - \pi_j^t(x;\mathbf{G}_\gamma) =$$
$$= \sum_{l=n+m+1}^{\infty} (a_k^j \cos lx + b_k^j \sin lx), \;\; j = 1, \ldots, k, \qquad (0.3)$$

где

$$Q_m^t(x;\mathbf{G}_\gamma) = Q_{n,\vec{m}}^t(x;\mathbf{G}_\gamma(\vec{\lambda})),$$
$$P_j^t(x;\mathbf{G}_\gamma) = P_{n_j,n,\vec{m}}^t(x;\mathbf{G}_\gamma(\vec{\lambda}))$$

– тригонометрические многочлены, степени которых соответственно не выше m и n_j. Координатные функции вектора

$$\vec{\pi}_{n,\vec{m}}^t(\mathbf{G}_\gamma) = \{\pi_j^t(z;\mathbf{G}_\gamma(\vec{\lambda}))\}_{j=1}^{k}$$

будем называть (см. [7], [8]) *тригонометрическими аппроксимациями Эрмита – Якоби* для мультииндекса $(n,\vec{m})$ и системы $\mathbf{G}_\gamma(\vec{\lambda})$.

При $k = 1$ полагаем

$$\pi_{n,m}^t(x;\mathbf{G}_\gamma) := \pi_{n,n,\vec{m}}^t(x;\mathbf{G}_\gamma(\vec{\lambda})).$$

Дроби $\pi_{n,m}^t(x;\mathbf{G}_\gamma)$ называют *тригонометрическими аппроксимациями Паде* для пары индексов (n,m) и функции $G_\gamma(x,1)$.

0.3. *Нелинейные аппроксимации Эрмита – Чебышёва*

Рассмотрим также систему

$$\mathbf{Ch}_\gamma = \mathbf{Ch}_\gamma(\vec{\lambda}) = \{Ch_\gamma(x;\lambda_j)\}_{j=1}^{k},$$

состоящую из функций, представленных рядами Фурье по многочленам Чебышёва

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

$$Ch_\gamma(x;\lambda_j) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda_j^p}{(\gamma)_p} T_p(x), \; j = 1, \ldots, k.$$

При $k \geq 1$ и $n \geq m_j - 1$, $j = 1, \ldots, k$, существуют [7], [8] рациональные дроби

$$\pi_j^{ch}(z;\mathbf{Ch}_\gamma) = \pi_j^{ch}(z;\mathbf{Ch}_\gamma(\vec{\lambda})) =$$
$$= \pi_{n_j,n,m}^{ch}(z;\mathbf{Ch}_\gamma(\vec{\lambda})) = \frac{P_j^{ch}(z;\mathbf{Ch}_\gamma)}{Q_m^{ch}(z;\mathbf{Ch}_\gamma)},$$

где многочлены

$$Q_m^{ch}(x;\mathbf{Ch}_\gamma) = Q_{n,\vec{m}}^{ch}(x;\mathbf{Ch}_\gamma(\vec{\lambda})),$$
$$P_j^{ch}(x;\mathbf{Ch}_\gamma) = P_{n_j,n,\vec{m}}^{ch}(x;\mathbf{Ch}_\gamma(\vec{\lambda})),$$

степени которых не превышают соответственно m и n_j, подобраны так, что

$$Ch_\gamma(x;\lambda_j) - \pi_j^{ch}(x;\mathbf{Ch}_\gamma) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} c_l^j T_l(x), \; j = 1, \ldots, k.$$

Как и в [7], [8] координатные функции вектора $\vec{\pi}_{n,\vec{m}}^{ch}(\mathbf{Ch}_\gamma) = \{\pi_j^{ch}(z;\mathbf{Ch}_\gamma(\vec{\lambda}))\}_{j=1}^{k}$ будем называть *нелинейными аппроксимациями Эрмита – Чебышёва* для мультииндекса $(n,\vec{m})$ и системы $\mathbf{Ch}_\gamma(\vec{\lambda})$. При $k = 1$ дроби

$$\pi_{n,m}^{ch}(x;\mathbf{Ch}_\gamma) := \pi_{n,n,\vec{m}}^{ch}(x;\mathbf{Ch}_\gamma(\vec{\lambda}))$$

называют *нелинейными аппроксимациями Паде – Чебышёва* (см. [9]).

0.4. *Постановка задачи*

Пусть $\{\lambda_j\}_{j=1}^{k}$ – корни уравнения $\lambda^k = 1$, т. е.

$$\lambda_j = e^{i\frac{2\pi(j-1)}{k}}, \; j = 1, \ldots, k,$$

где i – мнимая единица. Полагаем

$$\varphi(x) := x(1 - x^k).$$

Через x_j обозначим нули $\varphi'(x)$:

$$x_j = \sqrt[k]{\frac{1}{k+1}} e^{i\frac{2\pi(j-1)}{k}}, \; j = 1,\ldots,k.$$

Рассмотрим функцию $S(x) := \ln \varphi(x), x \in (0,1)$. По определению полагаем, что $S(0) = S(1) = -\infty$. Справедливы равенства [4]

$$S(x_1) = \ln \frac{k}{\sqrt[k]{(k+1)^{k+1}}}, \; S'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

$$S''(x) = \frac{\varphi''(x)\varphi(x) - [\varphi'(x)]^2}{\varphi^2(x)},$$

из которых следует, что

$$S'(x_1) = 0, \; S''(x_1) = \frac{\varphi''(x_1)}{\varphi(x_1)} = -\sqrt[k]{(k+1)^{k+2}},$$

и

$$B_k(n) := \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_1)}} e^{nS(x_1)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{n\sqrt[k]{(k+1)^{k+2}}}} \left(\frac{k}{\sqrt[k]{(k+1)^{k+1}}} \right)^n.$$

Для произвольного вектора $\vec{\lambda} = \{\lambda_j\}_{j=1}^k$ равномерная сходимость $\pi_j(z; \mathbf{F}_\gamma(\vec{\lambda}))$ к $F_\gamma(z;\lambda_j)$ на компактах в $\mathbb{C}$ при $k=1$ доказана де Брюеном [10], а при $k \geq 2$ – А.И. Аптекаревым [3]. В работе [4] найдена асимптотика разностей $F_\gamma(z;\lambda_j) - \pi_j(z;\mathbf{F}_\gamma(\vec{\lambda}))$ при некоторых дополнительных ограничениях на вектор $\vec{\lambda}$ и мультииндекс $(n,\vec{m})$. В частности, если $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ являются корнями уравнения $\lambda^k = 1$ (везде в дальнейшем будем рассматривать только такие значения λ_j), то справедлива следующая

***Теорема* 0.1.** *Если* $k \geq 1$, *то при любом фиксированном* z, $n = m_1 = \ldots = m_k$ *и* $n \to +\infty$

$$F_\gamma(z;\lambda_j) - \pi_j(z;F_\gamma(\vec{\lambda})) = (-1)^n x_1^{\gamma-1} \lambda_j^{n+1} B_k(n) \times$$
$$\times \frac{z^{kn+n+1}}{(\gamma)_{kn+n}} e^{\lambda_j(1-x_1)z} e^{\frac{\sum_{p=1}^k \lambda_p}{k+1} z} \left(1 + O(1/n)\right), \quad (0.4)$$
$$j = 1,\ldots,k.$$

Так как при $k \geq 2$ сумма $\sum_{p=1}^k \lambda_p$ равна нулю, то в этом случае множитель в (0.4) $\exp\left\{\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\right) z/(k+1)\right\}$ равен единице. Величина $O(1/n)$ при $n \to +\infty$ является бесконечно малой, модуль которой на компактах в $\mathbb{C}$ не превышает L/n, где L – положительная постоянная.

Следующие утверждения непосредственно вытекают из теоремы 0.1.

***Следствие* 0.1.** *Если* $k=1$, *то при любом фиксированном* z, $n = m$ *и* $n \to +\infty$

$$F_\gamma(z;1) - \pi_{n,n}(z;F_\gamma) =$$
$$= (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{n}} \frac{1}{2^{2n+\gamma}} \frac{z^{2n+1}}{(\gamma)_{2n}} e^z (1 + O(1/n)).$$

***Следствие* 0.2.** *Пусть* $k=2$, $n = m_1 = m_2$. *Тогда* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ *и при* $n \to +\infty$

$$F_\gamma(z;1) - \pi_1(z;F_\gamma) =$$
$$= (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\gamma-1} \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n \frac{z^{3n+1}}{(\gamma)_{3n}} e^{(1-\frac{1}{\sqrt{3}})z} (1 + o(1)),$$
$$F_\gamma(z;-1) - \pi_2(z;F_\gamma) =$$
$$= -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\gamma-1} \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n \frac{z^{3n+1}}{\gamma)_{3n}} e^{-(1-\frac{1}{\sqrt{3}})z} (1 + o(1)),$$

где $o(1)$ *– бесконечно малая при* $n \to +\infty$.

Основной целью данной работы является нахождение асимптотик соответствующих разностей для тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Якоби и нелинейных аппроксимаций Эрмита – Чебышёва. В случае $k=1$ аналогичная задача подробно исследовалась в работах [11]–[18].

1 Асимптотика тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Якоби

В этом разделе будем исследовать асимптотику разностей $G_\gamma(x;\lambda_j) - \pi_j^t(x;G_\gamma(\vec{\lambda}))$ в диагональном случае, когда $n = m_1 = \ldots = m_k$, и $n \to +\infty$. Справедлива следующая

***Теорема* 1.1.** *Если* $k=1$, *то при любом фиксированном* x, $n = m$, *и* $n \to +\infty$

$$G_\gamma(x;1) - \pi_{n,n}^t(x;G_\gamma) = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{n}} \frac{1}{2^{2n+\gamma}} \frac{z^{2n+1}}{(\gamma)_{2n}} \times \quad (1.1)$$
$$\times \mathrm{Re}\left\{ e^{i(2n+1)x} e^{\cos x + i \sin x} (1 + O(1/n)) \right\}.$$

***Теорема* 1.2.** *Пусть* $k \geq 2$. *Тогда при любом фиксированном* x, $n = m_1 = \ldots = m_k$, $n \to +\infty$, *и* $j = 1,\ldots,k$

$$G_\gamma(x;\lambda_j) - \pi_j^t(x;G_\gamma) = (-1)^n x_1^{\gamma-1} \frac{B_k(n)}{(\gamma)_{kn+n}} \times \quad (1.2)$$
$$\times \mathrm{Re}\left\{ e^{i(kn+n+1)x} \lambda_j^{n+1} e^{\lambda_j(1-x_1)e^{ix}} (1 + O(1/n)) \right\}.$$

Доказательство теоремы 1.2. Очевидно, что $G_\gamma(x;\lambda_j) = \mathrm{Re}\left\{F_\gamma(e^{ix};\lambda_j)\right\}$. Полагая в (0.3) и (0.4) $z = e^{ix}$, а затем приравнивая действительные части от выражений, стоящих слева и справа от знака нового равенства, получим

$$G_\gamma(x;\lambda_j) - \mathrm{Re}\{\pi_j(e^{ix};F_\gamma)\} = (-1)^n x_1^{\gamma-1} \frac{B_k(n)}{(\gamma)_{kn+n}} \times$$
$$\mathrm{Re}\left\{ e^{i(kn+n+1)x} \lambda_j^{n+1} e^{\lambda_j(1-x_1)e^{ix}} (1 + O(1/n)) \right\} = \quad (1.3)$$
$$= \sum_{l=n+m+1}^{\infty} a_k^j \cos lx.$$

Из (1.3) следует, что для доказательства теоремы 1.2 достаточно обосновать справедливость равенств

$$\pi_j^t(x;G_\gamma)=\mathrm{Re}\{\pi_j(e^{ix};F_\gamma)\},\ j=1,\ldots,k. \quad (1.4)$$

Так как коэффициенты Тейлора рядов (0.1) – действительные числа, то многочлены стоящие в числителе и знаменателе дроби $\pi_j(z;F_\gamma)$ имеют действительные коэффициенты (см. [19]). Предположим, что они представляются в виде

$$Q_m(z;F_\gamma)=\sum_{l=0}^{m}q_l z^l,\ \ P_j(z;F_\gamma)=\sum_{l=0}^{n_j}p_l^j z^l.$$

Тогда при $z=e^x$

$$\mathrm{Re}\left\{\pi_j\left(e^{ix};F_\gamma\right)\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{P_j\left(e^{ix};F_\gamma\right)}{Q_m\left(e^{ix};F_\gamma\right)}+\overline{\frac{P_j\left(e^{ix};F_\gamma\right)}{Q_m\left(e^{ix};F_\gamma\right)}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sum\limits_{l=0}^{n_j}p_l^je^{ilx}\sum\limits_{s=0}^{m}q_se^{-isx}+\sum\limits_{l=0}^{n_j}p_l^je^{-ilx}\sum\limits_{s=0}^{m}q_se^{isx}}{\sum\limits_{s=0}^{m}\sum\limits_{l=0}^{m}q_sq_l\cos((s-l)x)}= \quad (1.5)$$

$$=\frac{\sum\limits_{l=0}^{n_j}\sum\limits_{s=0}^{m}p_l^jq_s\cos((s-l)x)}{\sum\limits_{s=0}^{m}\sum\limits_{l=0}^{m}q_sq_l\cos((s-l)x)}.$$

Поскольку $n=m_1=\ldots=m_k$, то $n_j=m$. Значит числитель и знаменатель в (1.5) являются тригонометрическими многочленами степени не выше m. Отсюда и (1.3) делаем вывод о том, что справедливы равенства (1.4). Тогда из (1.3) следует справедливость равенств (1.2). □

Равенство (1.1) и теорема 1.1 доказываются аналогично.

***Следствие* 1.1.** *Если* $k=1$, *то при* $n=m$ *и* $n\to\infty$

$$\left\|G_\gamma(x;1)-\pi_{n,n}^t(x;G_\gamma)\right\|\sim\sqrt{\frac{\pi}{n}}\frac{1}{2^{2n+\gamma}}\frac{1}{|(\gamma)_{2n}|}. \quad (1.6)$$

Здесь и далее $\|f(x)\|=\max\{|f(x)|:x\in\mathbb{R}\}$; обозначение $\alpha_n\sim\beta_n$ означает, что бесконечно малые α_n, β_n при $n\to\infty$ эквивалентны, т. е. $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n/\beta_n=1$.

***Следствие* 1.2.** *Если* $k\ge 2$, *то при* $n=m_1=\ldots=m_k$ *и* $n\to\infty$

$$\left\|G_\gamma(x;\lambda_j)-\pi_j^t(x;G_\gamma)\right\|\sim x_1^{\gamma-1}\frac{B_k(n)}{|(\gamma)_{kn+n}|}e^{1-x_1},$$

$$j=1,\ldots,k.$$

В частности, если $k=2$, *то* $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$ *и при* $n\to\infty$, $j=1,2$

$$\left\|G_\gamma(x;\pm1)-\pi_j(x,G_\gamma)\right\|\sim$$

$$\sim\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\gamma-1}\sqrt{\frac{2\pi}{9n}}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n\frac{e^{1-1/\sqrt{3}}}{|(\gamma)_{3n}|}.$$

Доказательство следствия 1.2. Из теоремы 1.2 следует, что

$$G_\gamma(x;\lambda_j)-\pi_j^t(x;G_\gamma)=(-1)^nx_1^{\gamma-1}\frac{B_k(n)}{(\gamma)_{kn+n}}\times$$

$$\mathrm{Re}\left\{e^{(1-x_1)\cos(x+\lambda_j)}\times\right.$$

$$\left.\times e^{i\left[(kn+n+1)x+(1-x_1)\sin(x+\alpha_j)+(n+1)\alpha_j\right]}(1+O(1/n))\right\}, \quad (1.7)$$

где $\alpha_j=2\pi(j-1)/k$. Учитывая, что $|\mathrm{Re}z|\le|z|$, отсюда получим

$$\left\|G_\gamma(x,\lambda_j)-\pi_j^t(x;G_\gamma)\right\|\le$$

$$\le x_1^{\gamma-1}\frac{B_k(n)}{|(\gamma)_{kn+n}|}e^{1-x_1}\left|1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right|. \quad (1.8)$$

Неравенство (1.8) является точным. Чтобы убедиться в этом достаточно в (1.7) положить $x=-\alpha_j$. □

***Замечание* 1.1.** При $k=1$ и при выполнении условий следствия 1.1 в работах [17], [18] установлено, что

$$\left\|G_\gamma(x;1)-\pi_{nm}^t(x;G_\gamma)\right\|\asymp\frac{n!\cdot|(\gamma)_n|}{|(\gamma)_{2n}\cdot(\gamma)_{2n+1}|}. \quad (1.9)$$

Здесь $\alpha_n\asymp\beta_n$ означает, что бесконечно малые α_n и β_n имеют одинаковый порядок при $n\to\infty$. Так как $\gamma\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_-$, то, принимая во внимание равенство $(\gamma)_p=\Gamma(p+\gamma)/\Gamma(\gamma)$, где $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера, с помощью Стирлинга нетрудно показать, что при $n\to+\infty$

$$\frac{n!\cdot\gamma_n}{(\gamma)_{2n+1}}\sim\sqrt{\frac{\pi}{n}}\frac{1}{2^{2n+\gamma}}.$$

Это означает, что равенства (1.6) и (1.9) полностью согласуются и, более того, следствие 1.1 уточняет соответствующий результат из [17], [18].

2 Асимптотика нелинейных аппроксимаций Эрмита – Чебышёва

В этом разделе докажем ряд утверждающий о скорости сходимости нелинейных аппроксимаций Эрмита – Чебышёва.

***Теорема* 2.1.** *Если* $k=1$, *то для любого* x, $n=m$ *при* $n\to\infty$

$$Ch_\gamma(x;1)-\pi_{n,n}^{\mathrm{ch}}(x;Ch_\gamma)=(-1)^n\sqrt{\frac{\pi}{n}}\frac{1}{2^{2n+\gamma}}\frac{1}{(\gamma)_{2n}}\times$$

$$\times\mathrm{Re}\left\{e^{i(2n+1)\arccos x}e^{x+i\sqrt{1-x^2}}\left(1+O(1/n)\right)\right\}. \quad (2.1)$$

***Теорема* 2.2.** *Если* $k\ge 2$, *то для любого* x, $n=m_1=\ldots=m_n$ *при* $n\to\infty$

$$Ch_\gamma(x;\lambda_j)-\pi_j^{\mathrm{ch}}(x;Ch_\gamma)=(-1)^nx_1^{\gamma-1}\frac{B_k(n)}{\gamma_{kn+n}}\times \quad (2.2)$$

$$\times\mathrm{Re}\left\{e^{i(kn+n+1)\arccos x}\lambda_j^{n+1}e^{\lambda_j(1-x_1)\left(x+i\sqrt{1-x^2}\right)}\left(1+O\left(1/n\right)\right)\right\},$$

$$j=1,\ldots,k.$$

Доказательство теоремы 2.2. В условиях теоремы 2.2 существуют тригонометрические аппроксимации Эрмита – Якоби $\{\pi_j^t(x;G_\gamma(\vec{\lambda}))\}_{j=1}^k$. Из теоремы 1.2 следует справедливость равенств (1.2), а из (1.3) следует, что при $j=1,\ldots,k$

$$G_\gamma(x;\lambda_j)-\pi_j^t(x;G_\gamma)=\sum_{l=n+m+1}^{\infty}a_l^j\cos lx. \quad (2.3)$$

Представляя в (2.3) $\arccos x$ вместо x, получим

$$Ch_\gamma(x;\lambda_j)-\pi_j^t(\arccos x;G_\gamma)=\sum_{l=n+m+1}^{\infty}a_l^jT_l(x) \quad (2.4)$$

Из равенств (2.4) и (1.5) следует, что

$$\pi_j^{ch}(x;Ch_\gamma)=\pi_j^t(\arccos x;G_\gamma),\ \ j=1,\ldots,k.$$

Отсюда и с учётом равенств (1.2) вытекает справедливость равенств (2.2). □

Равенство (2.1) и теорема 2.1 доказываются аналогично.

***Следствие* 2.1.** *Пусть* $k=1$. *Тогда при* $n=m$ *и* $n\to\infty$

$$\left\|Ch_\gamma(x;1)-\pi_{n,n}^{ch}(x;Ch_\gamma)\right\|_1\asymp\sqrt{\frac{\pi}{n}}\frac{1}{2^{2n+\gamma}}\frac{1}{|(\gamma)_{2n}|}.$$

Здесь и далее $\left\|f(x)\right\|_1=\max\{|f(x)|:x\in[-1,1]\}$.

***Следствие* 2.2.** *Пусть* $k\geq 2$. *Тогда при* $n=m_1=\ldots=m_k$ *и* $n\to\infty$

$$\left\|Ch_\gamma(x;\lambda_j)-\pi_{n,m}^{ch}(x;Ch_\gamma)\right\|_1\asymp x_1^{\gamma-1}\frac{B_k(n)}{|(\gamma)_{kn+n}|}e^{1-x_1},$$

$$j=1,\ldots,k.$$

Доказательства следствий 2.1 и 2.2 аналогично доказательствам следствий 1.1 и 1.2.

Заметим также, что следствие 2.1 с помощью другого метода доказано ранее в работе [18].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mittag-Leffler*, *M.G*. Sur la nouvelle fonction *E*(*x*) / M.G. Mittag-Leffler // C.R. Akad. Sci. Paris. – 1903. – Vol. 7137. – P. 554–558.

2. *Джрбашян*, *М.М*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М.М. Джрбашян. – Москва: Наука, 1966.

3. *Аптекарев*, *А.И*. Об аппроксимациях Паде к набору $\{{}_1F_1(1,c;\lambda_i z)\}_{i=1}^k$ / А.И. Аптекарев // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. – 1981. – № 2. – С. 58–62.

4. *Старовойтов*, *А.П*. Аппроксимации Эрмита – Паде функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов // Труды Математического института имени В.А. Стеклова РАН. – 2018. – Т. 301. – С. 241–258.

5. *Бейкер мл*. *Дж*. Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – Москва: Мир, 1986.

6. *Аппроксимации Паде*, *непрерывные дроби и ортогональные многочлены* / А.И. Аптекарев, В.И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С.П. Суетин // Успехи математических наук. – 2011. – Т. 66, № 6 (402). – С. 37–122.

7. *Старовойтов*, *А.П*. О существовании тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Якоби и нелинейных аппроксимаций Эрмита – Чебышёва / А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко, Т.М. Оснач // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2023. – № 2. – С. 6–17.

8. *Старовойтов*, *А.П*. О существовании тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Якоби и нелинейных аппроксимаций Эрмита – Чебышёва / А.П. Старовойтов, И.В. Кругликов, Т.М. Оснач // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2024. – № 3. – С. 6–21.

9. *Суетин*, *С.П*. О существовании нелинейных аппроксимаций Паде – Чебышёва для аналитических функций / С.П. Суетин // Математические заметки. – 2009. – Т. 86, № 2. – С. 290–303.

10. *De Bruin*, *M.G*. Convergence of the Padé table for ${}_1F_1(1;c;x)$ / M.G. De Bruin J. // K. Nederl. Akad. Wetensch., Ser. A. – 1976. – Vol. 79. – P. 408–418.

11. *Гончар*, *А.А*. Аппроксимации Паде –Чебышёва для многозначных аналитических функций, вариация равновесной энергии и *S*-свойство стационарных компактов / А.А. Гончар, Е.А. Рахманов, С.П. Суетин // Успехи математических наук. – 2011. – Т. 66, № 6. – С. 3–36.

12. *Лабыч*, *Ю.А*. Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье / Ю.А. Лабыч, А.П. Старовойтов // Математический сборник. – 2009. – Т. 200, № 7. – С. 107–130.

13. *Адуков*, *В.М*. Асимптотическое поведение знаменателей аппроксимаций Паде –Чебышёва для последней промежуточной строки. Рациональный случай / В.М. Адуков, О.Л. Ибряева // Вестник ЮУрГУ. Серия математика, физика, химия. – 2005. – Т. 6, № 6. – С. 11–18.

14. *Ибраева*, *О.Л*. Асимптотическое поведение знаменателей аппроксимаций Паде – Чебышёва для последней промежуточной строки. Рациональный случай / О.Л. Ибряева // Известия Челябинского научного центра – 2002. – № 4. – С. 1–5.

15. *Березкина*, *Л.Л*. Тригонометрические аппроксимации Паде и наилучшие рациональные приближения. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук / Л.Л. Березкина. – Минск: БГУ, 1988. – 112 с.

16. *Лабыч*, *Ю.А*. Асимптотическое поведение знаменателей аппроксимаций Паде – Чебышёва для последней промежуточной строки. Рациональный случай / Ю.А. Лабыч // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия. С. Фундаментальные науки. – 2009. – № 3. – С. 77–86.

17. *Старовойтов*, *А.П.* Аппроксимации Паде специальных функций / А.П. Старовойтов, Н.А. Старовойтова, Н.В. Рябченко // Український математичний вісник. – 2012. – Т. 9, № 2. – С. 246–258.

18. *Рябченко*, *Н.В.* Тригонометрические аппроксимации Паде специальных функций / Н.В. Рябченко // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 2 (47). – С. 81–83.

19. *Старовойтов*, *А.П.* О детерминантных представлениях многочленов Эрмита – Паде / А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко // Труды Московского математического общества. – 2022. – Т. 83, № 1. – С. 17–35.

Поступила в редакцию 05.03.2025.

Информация об авторах

Старовойтов Александр Павлович – д.ф.-м.н., профессор
Кухлич Мария Андреевна – студентка
Рябченко Наталия Валерьевна – к.ф.-м.н., доцент

ТЕХНИКА

УДК 621.373.826 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_62
EDN: ONFMXU

НЕЙРОСЕТЕВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЛАЗЕРНОЙ ОБРАБОТКИ АЛМАЗОВ В ТЕХНОЛОГИЯХ ЭЛЕКТРОНИКИ

А.Н. Купо[1], Ю.В. Никитюк[1], Е.Б. Шершнев[1], В.А. Емельянов[2]

[1]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*
[2]*ОАО «Интеграл», Минск*

NEURAL NETWORK MODELING OF LASER PROCESSING PARAMETERS FOR DIAMONDS IN ELECTRONICS TECHNOLOGIES

A.N. Kupo[1], Yu.V. Nikityuk[1], E.B. Shershnev[1], V.A. Emelyanov[2]

[1]*Francisk Skorina Gomel State University*
[2]*JSC "INTEGRAL", Minsk*

Аннотация. С помощью сочетания искусственных нейронных сетей и аналитической модели движущегося теплового источника выполнено моделирование процесса лазерной обработки алмазов. Обучающая выборка и массив данных для тестирования нейронных сетей были сформированы с использованием математического пакета Mathcad. Расчеты были выполнены для 1152 вариантов входных параметров, 50 из которых были использованы для тестирования искусственных нейронных сетей. Установлены параметры искусственных нейронных сетей, обеспечивающие лучшие результаты при прогнозировании температур, формируемых лазерным излучением в алмазах. Полученные результаты могут быть использованы при определении технологических параметров процессов лазерной обработки алмазов.

Ключевые слова: *лазерная резка*, *алмаз*, *искусственная нейронная сеть*.

Для цитирования: *Нейросетевое моделирование параметров лазерной обработки алмазов в технологиях электроники* / А.Н. Купо, Ю.В. Никитюк, Е.Б. Шершнев, В.А. Емельянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 62–66. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_62. – EDN: ONFMXU

Abstract. This study employs a combined approach of artificial neural networks (ANN) and an analytical moving heat source model to simulate the laser processing of diamonds. The training and testing datasets for the neural networks were generated using Mathcad, with calculations performed for 1,152 input parameter combinations, including 50 dedicated to ANN validation. Optimal ANN configurations were identified to achieve high-precision predictions of laser-induced temperature distributions in diamonds. The results provide a basis for optimizing technological parameters in diamond laser processing for electronic applications.

Keywords: *laser cutting, diamond, artificial neural network.*

For citation: *Neural network modeling of laser processing parameters for diamonds in electronics technologies* / A.N. Kupo, Yu.V. Nikityuk, E.B. Shershnev, V.A. Emelyanov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 2 (63). – P. 62–66. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_62. – EDN: ONFMXU

Introduction

The unique properties of diamonds ensure stable operation of diamond-based electronic components and devices under extreme conditions. This makes diamonds a promising material for developing next-generation electronic systems [1].

Laser processing of diamonds offers several distinct advantages, such as the potential for full process automation, ease of adjusting key laser parameters, and the capacity to achieve narrow cut widths while maintaining high processing speeds during laser separation [2].

Artificial neural networks (ANNs) have found successful applications across various scientific and engineering domains, including laser processing research [3]–[6]. A defining characteristic of ANNs is their data-driven learning capability, i. e., rather than being explicitly programmed, they are trained on specific datasets. Once trained, the neural network can efficiently determine optimal laser processing parameters when analyzing new data. Moreover, in certain cases, neural network models demonstrate superior computational efficiency compared to the original physical models used for generating the training data set [7].

The authors' earlier research has explored the laser processing of diamonds, using methods that integrate finite element modeling with artificial neural network simulations [8]–[14]. The combination of neural network modeling with appropriate analytical models appears particularly relevant for predicting optimal laser processing parameters of diamonds.

© *Kupo A.N., Nikityuk Yu.V., Shershnev E.B., Emelyanov V.A.*, 2025

1 A mathematical model of the diamond laser processing process and the formation of a training set

The distribution of the temperature field in diamond when subjected to laser radiation provides insights into the necessary laser exposure parameters required to achieve critical temperatures in the processing zone within specified timeframes. Specifically, one can identify the parameters sufficient to induce either diamond fracture or phase transformations (e. g., graphitization).

To calculate the temperature field, it is necessary to solve the heat conduction boundary value problem in a moving coordinate system (see Figure 1.1) for a laser beam with Gaussian spatial energy distribution [10]:

$$\frac{c\rho}{\lambda}\cdot\frac{\partial T}{\partial \tau}-\frac{v_x c\rho}{\lambda}\cdot\frac{\partial T}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (1.1)$$

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=0}=I_0 e^{-k\cdot\left(x_0^2+y_0^2\right)}, \quad (1.2)$$

$$T(\infty,y,z,t)=T(x,\infty,z,t)= \\ =T(x,y,\infty,t)=T(x,y,z,0)=T_0. \quad (1.3)$$

Equations (1.1)–(1.3) incorporate the following physical parameters: T is the target temperature, λ is the thermal conductivity coefficient, c is the heat capacity, ρ is the material density, I_0 is the power density of the surface, k is the Gaussian beam concentration coefficient (exponential term coefficient). The laser beam velocity vector is directed along the x-axis.

Subsequently, using the coordinate transformation method from a moving to a stationary reference frame, we express the solution of the system (1.1)–(1.3) in the following form:

$$T=T_0+\frac{I_0\sqrt{a}}{4\sqrt{\pi}k\lambda}\sum_{n=0}^{N}F\left(x_n-v_x t,y_n,z,t\right), \quad (1.4)$$

where

$$F_N=\sum_{n=0}^{N}F\left(x_n-v_x t,y_n,z,t\right)= \\ =\int_0^t\sum_{n=0}^{N}\exp\left\{\left[-\frac{y_n^2+\left(x_n-\omega v_x\right)}{4\left[a\left(t-\omega\right)+1/\left(4k\right)\right]}-\frac{z^2}{4a\left(t-\omega\right)}\right]\times \right. \\ \left.\times\frac{d\omega}{\left[a\left(t-\omega\right)+1/\left(4k\right)\right]\sqrt{t-\omega}}\right\}. \quad (1.5)$$

In expressions (1.4)–(1.5): a is the thermal diffusivity coefficient, ω is the integration variable.

Computations using expressions (1.4)–(1.5) were performed for 1,152 input parameter combinations, including 50 cases reserved for neural network training. The parameters employed in modeling diamond laser processing are provided in Table 1.1.

The presented example outlines the application of equations (1.4)–(1.5) to determine six temperature values at varying distances from the laser beam center along its propagation axis, evaluated at depths up to 0.1 mm. For artificial neural network validation, 50 parameter combinations from Table 1.2 were employed in the computational testing protocol.

Table 1.1 – Parameters of diamond laser processing

Parameters	Value range
Cutting speed V, mm/s	3–8
Laser power density P_0, 10^{11} W/m^2	0.5–1.2
Laser beam radius R, mm	2–7

Table 1.2 – Input parameters of the model and calculated temperature values in the diamond laser processing zone for the test dataset

N	V, m/s	R, mm	P_0, 10^{11} W/m^2	z, mm	T_1, K	T_2, K	T_3, K	T_4, K	T_5, K	T_6, K
1	5	3	0.4	1.1	459	618	777	935	1092	1249
2	4	3	0.3	1.0	445	590	735	879	1023	1165
3	3	6	0.2	1.0	446	591	735	876	1015	1150
4	6	5	0.4	0.5	372	445	516	587	657	726
5	3	4	0.4	1.0	445	589	733	876	1018	1158
6	6	2	0.2	0.9	431	562	693	823	954	1084
7	8	3	0.1	0.9	431	563	693	824	954	1082
8	3	2	0.2	0.5	373	446	518	591	663	735
9	8	7	0.1	0.9	431	562	691	818	941	1060
10	5	7	0.2	0.9	431	562	690	817	940	1058
11	4	2	0.3	0.7	402	503	605	706	807	908
12	4	4	0.3	1.0	445	590	735	878	1020	1161
13	3	6	0.1	0.7	402	504	605	704	802	896
14	6	6	0.2	0.5	373	445	517	588	658	725
15	8	2	0.2	0.5	373	446	518	591	663	735
16	5	2	0.3	0.6	387	474	561	648	735	821

N	V, m/s	R, mm	P_0, 10^{11} W/m^2	z, mm	T_1, K	T_2, K	T_3, K	T_4, K	T_5, K	T_6, K
17	4	6	0.1	0.5	373	446	518	589	658	726
18	3	4	0.1	0.6	388	475	562	649	734	819
19	3	2	0.1	0.9	431	563	694	825	955	1085
20	8	4	0.1	1.2	475	650	824	997	1168	1338
21	8	2	0.3	0.7	402	503	605	706	807	908
22	5	2	0.2	1.1	460	620	780	940	1099	1258
23	8	3	0.1	0.7	402	504	606	707	808	909
24	3	6	0.3	1.0	445	590	733	875	1013	1148
25	4	4	0.1	1.2	475	650	824	997	1168	1338
26	6	7	0.1	1.1	461	620	778	933	1083	1228
27	5	3	0.1	1.1	461	621	781	940	1099	1256
28	8	5	0.1	0.6	388	475	562	648	732	815
29	3	3	0.1	0.5	373	446	519	591	663	735
30	5	2	0.2	1.0	446	591	736	882	1026	1171
31	5	3	0.4	0.8	416	531	647	762	876	990
32	4	7	0.4	0.9	430	560	688	814	936	1054
33	5	2	0.1	0.6	388	475	563	650	737	824
34	4	3	0.3	1.2	474	648	822	995	1167	1338
35	7	6	0.2	1.2	475	649	821	991	1158	1320
36	4	2	0.1	1.1	461	621	781	941	1101	1260
37	8	5	0.4	1.2	474	647	819	990	1158	1323
38	5	2	0.3	0.5	373	445	518	590	662	734
39	8	3	0.3	0.5	373	445	517	590	661	733
40	3	6	0.4	1.2	474	647	818	988	1153	1315
41	7	7	0.3	0.9	431	561	689	815	938	1056
42	4	6	0.3	1.1	460	619	777	932	1085	1233
43	4	6	0.1	1.1	461	621	779	935	1088	1237
44	8	4	0.2	0.7	402	504	605	706	805	904
45	8	4	0.2	1.0	446	591	736	880	1022	1163
46	4	7	0.1	1.0	446	591	735	875	1012	1144
47	7	3	0.1	0.9	431	563	693	824	954	1082
48	5	5	0.1	0.6	388	475	562	648	732	815
49	6	7	0.1	0.5	373	446	517	588	656	722
50	6	3	0.4	0.8	416	531	647	762	876	990

2 Building an artificial neural network to solve an optimization problem

To determine temperature values during diamond laser processing, the neural networks with the architecture shown in Figure 2.1 were employed.

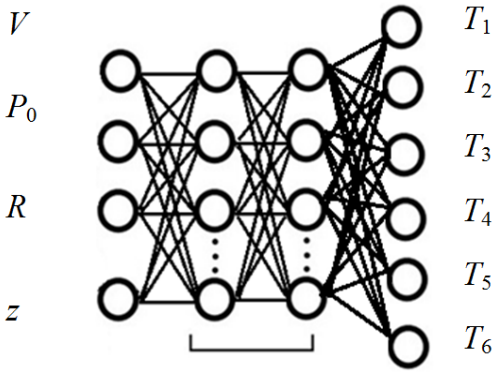


Figure 2.1 – Neural network architecture

The optimal laser processing parameters for diamonds were determined through the implementation of neural networks with various architectures, utilizing TensorFlow, an open-source machine learning library. The networks employed ReLU (Rectified Linear Unit) activation functions, and Adam optimizer (an adaptive stochastic gradient descent extension). The neural networks were generated using mean squared error (MSE) as the loss function, which computes the squared difference between predicted and target values. The networks underwent training for 100 epochs.

The developed regression and neural network models were evaluated using the following performance metrics:

$$MAE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|d_i - y_i|$$

is the Mean Absolute Error (*MAE*);

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|d_i - y_i|}$$

is the Root Mean Square Error (*RMSE*);

$$MAPE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{d_i - y_i}{d_i}\right| \cdot 100$$

is the Mean Absolute Percentage Error (*MAPE*);

$$R^2 = 1 - \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - y_i\right)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2}$$

is the determination coefficient;
where d_i indicates values calculated using analytical expressions (1.4)–(1.5), y_i stands for values predicted by neural network models.

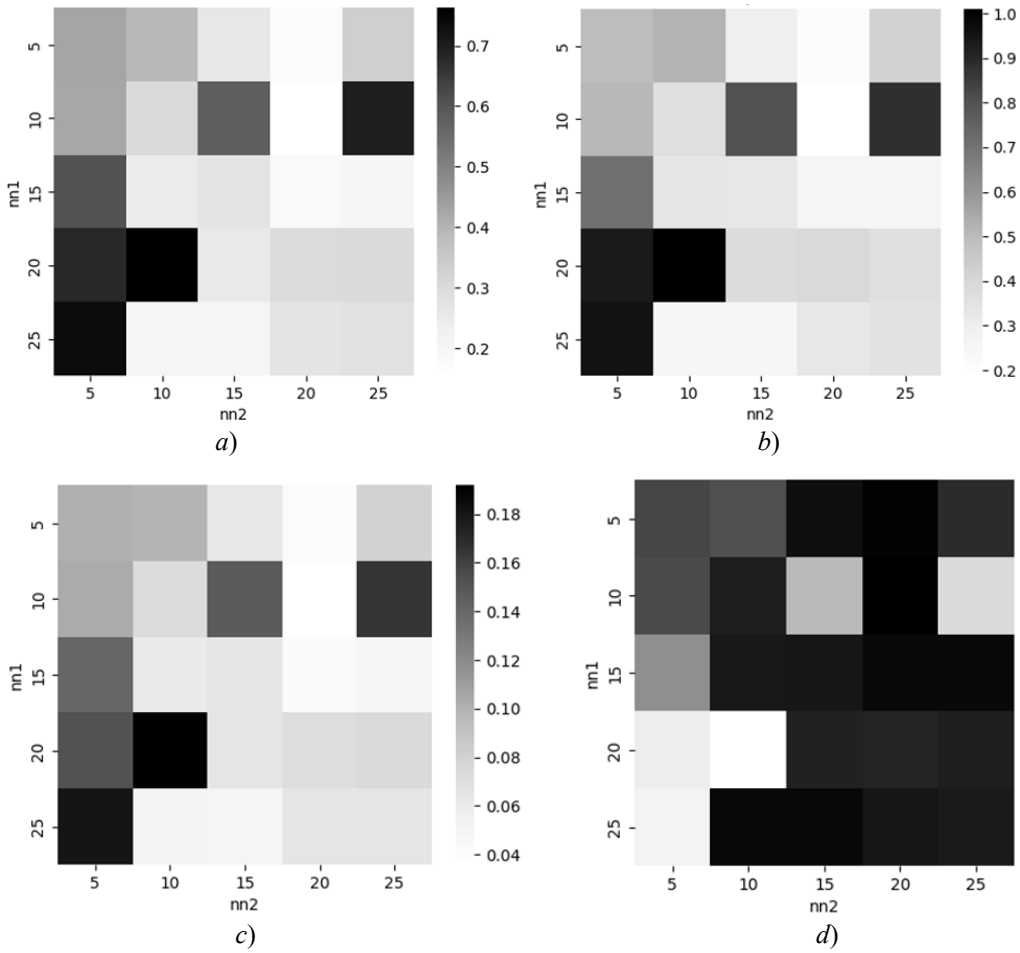
As a result, 25 artificial neural networks were trained with the number of neurons in two hidden layers ranging from 5 to 25, with an interval of 5.

Figure 2.2 illustrates heatmaps visualizing the distribution of validation errors in output parameter prediction. The vertical and horizontal axes represent the number of neurons in the first and second hidden layers of the artificial neural networks, respectively. The intensity of color coding represents the extent of error: the error increases from light to dark.

The neural network with the architecture [4-10-20-6] demonstrated superior performance in predicting the temperature values.

Table 2.1 presents evaluation results of the corresponding neural network model.

The mean absolute percentage error (*MAPE*) observed during the testing of this network remained below 0.2%, while the mean absolute error (*MAE*) and root mean square error (*RMSE*) were both kept under 1.5 K. The coefficients of determination for the output parameters T and σ_1 exhibit values no less than 0.99995, indicating a strong alignment of the neural network model with the modelling data as described in expressions (1.4)–(1.5).



a) *b*) *c*) *d*)

Figure 2.2 – Heatmaps displaying the distribution of *MAE* (*a*), *RMSE* (*b*), *MAPE* (*c*), R^2(*d*) when determining T_1

Table 2.1 – Evaluation results of neural network models

Criterion	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
MAE	0.16 K	0.26 K	0.36 K	0.65 K	0.83 K	1.19 K
RMSE	0.19 K	0.34 K	0.46 K	0.77 K	1.02K	1.49 K
MAPE	0.04%	0.05%	0.05%	0.08%	0.09%	0.12%
R^2	0.99997	0.99998	0.99998	0.99997	0.99997	0.99995

Conclusion

This study demonstrates the feasibility of predicting diamond laser processing parameters for electronic applications through a combined analytical and artificial neural network (ANN) approach. Numerical experiments identified an optimal neural network architecture that achieves superior accuracy in determining temperature distributions within laser-affected zones. A critical challenge lies in enhancing the efficiency of precision laser machining for diamonds, which can be addressed by optimizing processing parameters to induce controlled graphitization not only in the direct laser interaction zone but also in adjacent treatment areas. This approach eliminates the need for additional processing passes, significantly improving manufacturing productivity [2], [10]. The developed methodology enables determination of optimal laser parameters not only for diamond processing but also for other electronic materials through artificial neural network modeling [15]–[16].

REFERENCES

1. *Mityagin*, *A.Yu.*. Technology and equipment for processing diamond materials of modern technology / A.Yu. Mityagin, A.A. Altukhov, A.B. Mityagina // Technology and design in electronic equipment. – 2009. – № 1. – P. 53–58.

2. *Shkadov*, *A.I*. Physical Foundations of Laser Processing of Diamonds: A Textbook for Universities / A.I. Shkadov; edited by A.M. Bocharov. – Smolensk, 1997. Book 3. – 288 p.

3. *Nikityuk*, *Y.V*. Optimization of two-beam laser cleavage of silicate glass / Y.V. Nikityuk, A.N. Serdyukov, I.Y. Aushev // Journal of Optical Technology. – 2022. – Vol. 89, № 2. – P. 121–125.

4. *Characterization of Laser Welding of Steel 30ХГСН2А by Combining Artificial Neural Networks and Finite Element Method* / Y. Nikitjuk, G. Bayevich, V. Myshkovets [et al.] // Lecture Notes in Networks and Systems. – 2022. – Vol. 422. – P. 273–279. – DOI: 10.1007/978-981-19-0379-3_28.

5. *Nikitjuk*, *Yu.V*. Determination of the parameters of two-beam laser splitting of silicate glasses using regression and neural network models / Yu.V. Nikitjuk, A.N. Serdyukov, I.Yu. Aushev // Journal of the Belarusian State University. Physics. – 2022. – № 1. – P. 35–43.

6. *Nikitjuk*, *Yu.V*. Determination of the Parameters of Controlled Laser Thermal Cleavage of Crystalline Silicon Using Regression and Neural Network Models / Yu.V. Nikitjuk, A.N. Serdyukov // Crystallography Reports. – 2023. – Vol. 68, № 7. – P. 1199–1204. – DOI: https://doi.org/10.1134/S1063774523600679.

7. *Golovko*, *V.A*. Neural network data processing technologies: textbook / V.A. Golovko, V.V. Krasnoproshin. – Minsk: BSU, 2017. – 263 p.

8. *Dependence of the diamond laser processing efficiency on crystallographic directions* / S.V. Shalupaev, E.B. Shershnev, Yu.V. Nikitjuk, V.V. Sviridova // SPIE. – 2001. – Vol. 4358. – P. 329–333.

9. *Shershnev*, *E.B*. Process Simulation of Laser-Based Diamond Crystal Machining / E.B. Shershnev, Yu.V. Nikityuk, A.E. Shershnev // Proceedings of F. Skorina Gomel State University. – 2011. – № 6 (69). – P. 164–168.

10. *Optimization of diamond laser cutting processes through mathematical modeling* / A.A. Khmyl, A.N. Kupo, A.E. Shershnev // Proceedings of F. Skorina Gomel State University. – 2011. – № 6 (69). – P. 153–157.

11. *Thermoelastic field formation during laser processing of diamond crystals* / E.B. Shershnev, Yu.V. Nikityuk, A.E. Shershnev, S.I. Sokolov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2015. – № 1 (22). – P. 38–40.

12. *Wavelength-specific considerations in laser processing of diamond crystals*: 1064 *nm*, 532 *nm*, *and* 266 *nm Radiation* / E.B. Shershnev, Yu.V. Nikityuk, A.E. Shershnev, S.I. Sokolov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2017. – № 1 (30). – P. 22–24.

13. Optimization of laser processing of diamonds / V.A. Emelyanov, E.B. Shershnev, Yu.V. Nikityuk, S.I. Sokolov, I.Y. Aushev // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 4 (53). – P. 30–36. – DOI: 10.54341/20778708_2022_4_53_3.

14. *Estimating the Parameters of Laser Processing of Diamonds Using the Finite Element Method and Artificial Neural Networks* / V.A. Emelyanov, E.B. Shershnev, Yu.V. Nikitjuk [et al.] // Doklady BGUIR. – 2023. – Vol. 21, № 4. – P. 40–45.

15. *Nisar*, *S*. Optimization of Laser Beam Geometry for Controlling Thermal Stresses in CO_2 Laser Glass Cutting / S. Nisar // Lasers Manuf. Mater. Process. – 2025. – Vol. 12. – P. 298–317. – DOI: https://doi.org/10.1007/s40516-025-00289-6.

16. *Kharche*, *P.P*. Systematic review of optimization techniques for laser beam machining / P.P. Kharche, V.H. Patil // Engineering Research Express. – 2024. – Vol. 6 (2). – P. 213–219. – DOI: 10.1088/2631-8695/ad594b.

The article was submitted 06.03.2025.

Информация об авторах

Купо Александр Николаевич – к.т.н., доцент
Никитюк Юрий Валерьевич – к.ф.-м.н., доцент
Шершнев Евгений Борисович – д.т.н., доцент
Емельянов Виктор Андреевич – чл.-корр. НАН Беларуси, д.т.н., профессор

ТЕХНИКА

УДК 621.793 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_67
EDN: LRECBR

ПРИМЕНЕНИЕ СЕПАРИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ПОКРЫТИЙ ИЗ ПЛАЗМЕННЫХ ПОТОКОВ ВАКУУМНО-ДУГОВОГО РАЗРЯДА

С.Д. Латушкина, И.М. Романов, О.И. Посылкина, И.А. Сечко, В.М. Комаровская

Физико-технический институт НАН Беларуси, *Минск*

APPLICATION OF SEPARATING DEVICES FOR FORMING MULTI-COMPONENT COATINGS FROM PLASMA FLOW OF VACUUM ARC DISCHARGE

S.D. Latushkina, I.M. Romanov, O.I. Posylkina, I.A. Sechko, V.M. Komarovskaya

Institute of Physics and Technology of the National Academy of Sciences of Belarus, *Minsk*

Аннотация. Предложена конструкция двухкатодного магнитоэлектрического фильтра для снижения гетерофазности плазменного потока при формировании многокомпонентных покрытий. Экспериментально исследовано влияние конфигурации магнитных полей сепаратора на пространственное распределение концентрации элементов в многокомпонентном плазменном потоке в вакуумной камере. Показано, что при использовании сепарирующей системы с Y-образным плазмоводом управление соотношением элементов в осаждаемых покрытиях возможно в результате изменения расположения деталей в вакуумной камере и за счет ассиметрии токов дугового разряда на испарителях.

Ключевые слова: *вакуумно-дуговая плазма*, *гетерофазность плазменного потока*, *многокомпонентные покрытия*, *системы сепарации.*

Для цитирования: *Применение сепарирующих устройств для формирования многокомпонентных покрытий из плазменных потоков вакуумно-дугового разряда* / С.Д. Латушкина, И.М. Романов, О.И. Посылкина, И.А. Сечко, В.М. Комаровская // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 67–73. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_67. – EDN: LRECBR

Abstract. A design of a two-cathode magnetoelectric filter has been proposed to reduce the heterophase of the plasma flow during the formation of multicomponent coatings. The effect of the configuration of the magnetic fields of the separator on the spatial distribution of the concentration of elements in a multicomponent plasma flow in a vacuum chamber was experimentally studied. It is shown that when using a separating system with a Y-shaped plasma guide, the control of the ratio of elements in deposited coatings is possible as a result of changing the arrangement of the parts in the vacuum chamber and due to the asymmetry of arc discharge currents on the evaporators.

Keywords: *vacuum arc plasma*, *heterophase of plasma flow*, *multi-component coatings*, *separation systems.*

For citation: *Application of separating devices for forming multi-component coatings from plasma flow of vacuum arc discharge* / S.D. Latushkina, I.M. Romanov, O.I. Posylkina, I.A. Sechko, V.M. Komarovskaya // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 2 (63). – P. 67–73. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_67 (in Russian). – EDN: LRECBR

Введение

В последние годы многокомпонентные покрытия, формируемые вакуумно-плазменными методами, получили широкое распространение в качестве слоёв, обладающих высокими эксплуатационными свойствами, такими как износо- и коррозионная стойкость, сопротивление термическому окислению и другими [1]–[3]. В тоже время при осаждении покрытий сложного элементного состава возникают технологические вопросы, связанные с необходимостью получения однородной многокомпонентной плазмы. Можно выделить несколько направлений для создания многокомпонентной плазмы при вакуумно-плазменном осаждении [4]–[8]:

– применение мозаичных катодов (мишеней), состоящих из нескольких однокомпонентных частей;

– применение композиционных сплавных катодов (мишеней);

– одновременное испарение нескольких катодов (мишеней) различного элементного состава.

Применение мозаичных катодов (мишеней) часто приводит к технологическим проблемам при управлении составом формируемых покрытий из-за различных скоростей эрозии составных частей катода. В случае получения композиционных катодов (мишеней) сложно варьировать их элементный состав в широком интервале, так как традиционные методы получения (литье, СВС-синтез, порошковая металлургия) могут

© *Латушкина С.Д.*, *Романов И.М.*, *Посылкина О.И.*, *Сечко И.А.*, *Комаровская В.М.*, 2025

быть реализованы в ограниченном диапазоне концентраций компонентов. Поэтому представляет интерес способ одновременного испарения нескольких катодов (мишеней) из чистых металлов, при котором конденсация покрытия происходит из потоков от нескольких источников, что существенно расширяет технологические возможности формирования покрытий различного состава.

Наличие микрокапельной фракции в плазменном потоке нарушает однородность наносимых покрытий и ухудшает их эксплуатационные характеристики. Известны различные подходы для решения проблемы снижения количества макрочастиц в плазменных потоках:

1) повышение скорости перемещения катодных пятен по рабочей поверхности катода [9];

2) использование кратковременного импульсного вакуумно-дугового разряда, приводящего к распаду катодного пятна на множество мелких катодных пятен, быстро перемещающихся по поверхности катода [10];

3) применение магнитной фокусировки плазменного потока [11];

4) использование магнитоэлектрических фильтров [12]–[14].

Применение магнитоэлектрических фильтров плазмы в процессах электродугового осаждения покрытий позволяет расширить технологические возможности метода для улучшения функциональных свойств покрытий за счёт снижения шероховатости их поверхности и дефектности. Однако применение таких систем при формировании многокомпонентных плазменных потоков остается малоизученным.

Цель работы – изучение особенностей транспортировки многокомпонентных плазменных потоков вакуумно-дугового разряда вдоль криволинейных магнитных полей сепарирующей магнитоэлектрической системы и разработка способов управления такими потоками плазмы с помощью магнитных полей и технологических параметров осаждения.

1 Методика эксперимента

В настоящей работе эксперименты проводились на установке УРМ 3.279.048 для вакуумно-дугового осаждения покрытий, оснащённой двухканальным Y-образным плазменным сепаратором, изготовленным из немагнитной стали 12Х18Н10Т. Эксперименты проводились при остаточном давлении в камере 10^{-3} Па.

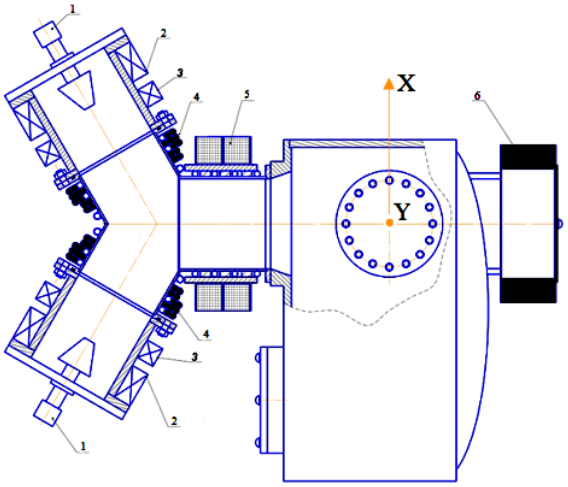
Пространственное распределение элементов в плазменных потоках оценивали по относительной концентрации элементов в покрытиях на подложках из кремния, размещаемых в различных точках камеры.

Элементный состав покрытий определяли электронным микрозондом JEOL JXA 8500-F. Анализ дефектности поверхности формируемых многокомпонентных покрытий проводился с помощью металлографического комплекса на основе микроскопа Микро 200.

2 Результаты

Основной задачей сепарирующей системы является создание пространственного разделения движения компонентов плазмы (ионов, макрочастиц). Выбирая конструкцию сепарирующей магнитоэлектрической системы и конфигурацию магнитных полей в ней, необходимо добиться, чтобы на выход системы проходили только заряженные частицы плазменного потока, а нейтралы и макрочастицы двигались прямолинейно и оседали на внутренней поверхности плазмовода.

Учитывая технологические возможности установки для вакуумно-дугового осаждения покрытий, был разработан и изготовлен двухканальный Y-образный плазменный фильтр (рисунок 2.1).



1 – дуговые испарители,
2 – стабилизирующие соленоиды,
3 – фокусирующие соленоиды,
4 – отклоняющий соленоид,
5 – транспортирующий соленоид,
6 – дополнительный соленоид

Рисунок 2.1 – Система для осаждения многокомпонентных покрытий с сепарацией плазменных потоков

В разработанном сепараторе два дуговых испарителя (1) расположены симметрично под углами 60° к оси общего плазменного потока для минимизации неоднородности азимутального распределения плотности плазменного потока при сохранении функции удаления макрочастиц.

Конфигурация магнитного поля в сепараторе задавалась системой катушек (2–6). Катушки (2) обеспечивали стабилизацию горения дуги, фокусировку плазменного потока, вылетающего с катода, задавали катушки (3), увеличивая его плотность по оси, не снижая при этом стабильность дугового разряда.

При помощи катушки (4) происходило разделение траекторий движения нейтральных частиц и металлической плазмы, что приводило к удалению из плазменного потока значительной части нейтральных макрочастиц. Катушки (5) должны были обеспечивать транспортировку плазменного потока к выходу из фильтра, в то же время позволяя потокам плазмы частично перемешиваться вследствие взаимной диффузии поперек слабого магнитного поля.

Анализ исследований по эффективности транспортировки плазмы вдоль криволинейных магнитных полей показал, что можно выделить несколько основных положений для обеспечения эффективной работы магнитоэлектрического фильтра [16]:

– магнитное поле со стороны электрода для удержания катодного пятна на торце катода и предотвращения его перемещения на боковую поверхность должно быть сильнее, чем со стороны анода;

– фокусировка плазмы не должна снижать уровень стабильности дугового разряда;

– создание магнитных полей внутри фильтра с минимальным перепадом интенсивностей;

– создаваемое магнитное поле в транспортирующем канале должно иметь высокую напряжённость возле стенок плазмовода и практически нулевую в его центре, что обеспечит беспрепятственное перемещение частиц плазмы поперек оси плазмовода, способствуя их эффективному перемешиванию.

Исходя из выше приведённых положений, разрабатывалась конфигурация электромагнитных полей в плазменном фильтре за счёт использования соленоидов (2)–(5), размещённых по ходу движения плазмы.

В настоящей работе при изучении работы двухкатодного магнитоэлектрического фильтра при вакуумно-дуговом осаждении в качестве плазмообразующих были использованы металлы с различными физико-химическими свойствами (таблица 2.1).

Таблица 2.1 – Физико-химические свойства плазмообразующих металлов

Металл	Масса атома, а.е.м.	Температура плавления, °С	Температура кипения, °С	Энергия ионизации, эВ
Титан	47,867	1943	3287	6,82
Цирконий	91,224	1855	4377	6,84
Хром	51,996	1907	2671	6,76
Алюминий	26,9815	660	2518	5,98
Медь	63,546	1083	2567	7,72

Значения силы тока на стабилизирующих (2) и фокусирующих соленоидах (3) были выбраны эмпирически, исходя из условий обеспечения надёжного поджига дугового разряда в источниках, стабильного горения катодного пятна на рабочем торце катода и равномерной эрозии последнего. Как показали эксперименты, данные величины существенным образом зависят от материала катода (таблица 2.2).

Таблица 2.2 – Технологические параметры магнитной системы для плазмообразующих металлов

Материал испарителя	Сила тока на соленоиде (2), А	Сила тока на соленоиде (3), А
Ti	0,9–1,1	0,7–0,8
Zr	1–1,2	0,9–1,0
Cr	0,8–0,9	0,8–0,9
Al	0,6–0,7	1–1,1
Cu	0,9–1	1,3–1,5

Выбранные параметры обеспечивали фокусировку плазменного потока каждого из двух дуговых испарителей, уменьшая потерю ионной составляющей на стенках камеры (анода).

Было изучено влияние силы тока на транспортирующем соленоиде (5) на пропускную способность магнитоэлектрического фильтра при использовании различных систем металлов (рисунок 2.2). Данная характеристика в работе оценивалась по отношению массы покрытия к изменению массы использованных катодов. Анализ результатов экспериментов показал, что оптимальные значения силы тока на транспортирующем соленоиде (5), обеспечивающие минимальные потери многокомпонентного плазменного потока, находятся в интервале 0,5–0,9 А (рисунок 2.2).

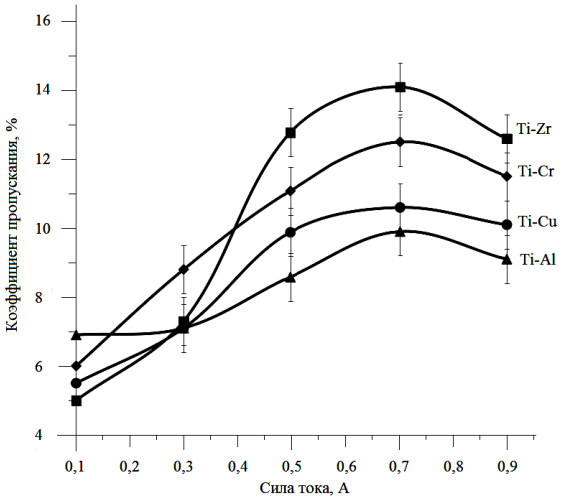
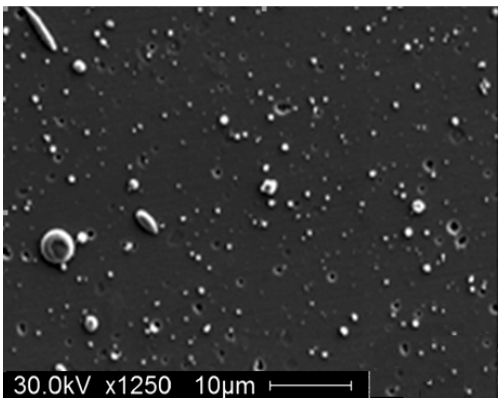
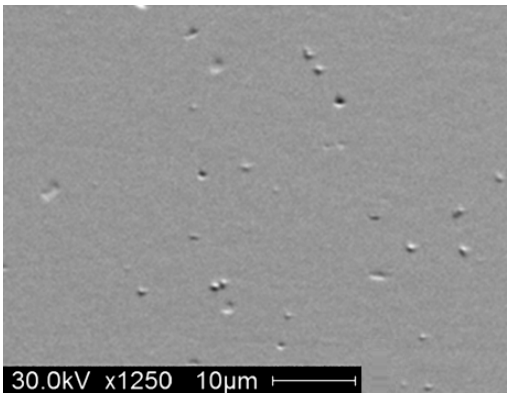


Рисунок 2.2 – Зависимость коэффициента пропускания сепарирующей системы от силы тока на транспортирующем соленоиде (I_{Ti} = 60 А, I_{Al} = 60 А, I_{Zr} = 60 А, I_{Cu} = 60 А, I_{Cr} = 60 А)



а) покрытие (Ti, Al) N без использования сепарирующей системы



б) покрытие (Ti, Al) N с использованием сепарирующей системы

Рисунок 2.3 – Морфология поверхности осаждаемых покрытий

В результате проведённых экспериментов установлено, что применение разработанного магнитоэлектрического фильтра позволяет значительно снизить шероховатость поверхности осаждаемых покрытий, в частности, для покрытий (Ti, Al) N зарегистрировано уменьшение показателя Ra в 3 раза (рисунок 2.3).

Основными задачами оптимизации магнитных полей в сепарирующей системе, кроме снижения гетерофазности плазменного потока, является обеспечение производительности процесса, повышение эффективной площади осаждения, обеспечение однородности распределения толщины и элементного состава по поверхности конденсации, также к этому относят центрирование плазменного потока относительно выхода сепаратора [13]–[15].

Известно, что при использовании криволинейных магнитоэлектрических фильтров за счёт движения ионов плазмы по искривлённым траекториям вследствие неоднородности магнитного поля может наблюдаться как центробежный, так и градиентный дрейф плазмы [13]. Результатом данных явлений может быть смещение плазменного потока относительно выхода сепаратора, а в случае формирования многокомпонентной металлической плазмы и различие элементного состава осаждаемых покрытий в зависимости от местоположения покрываемых деталей в вакуумной камере.

В настоящей работе для разработанной конструкции сепарирующей системы было изучено распределение элементов в плазменных потоках в зоне осаждения для систем плазмообразующих металлов Ti – Zr, Ti – Cr, Ti – Al, Ti – Cu.

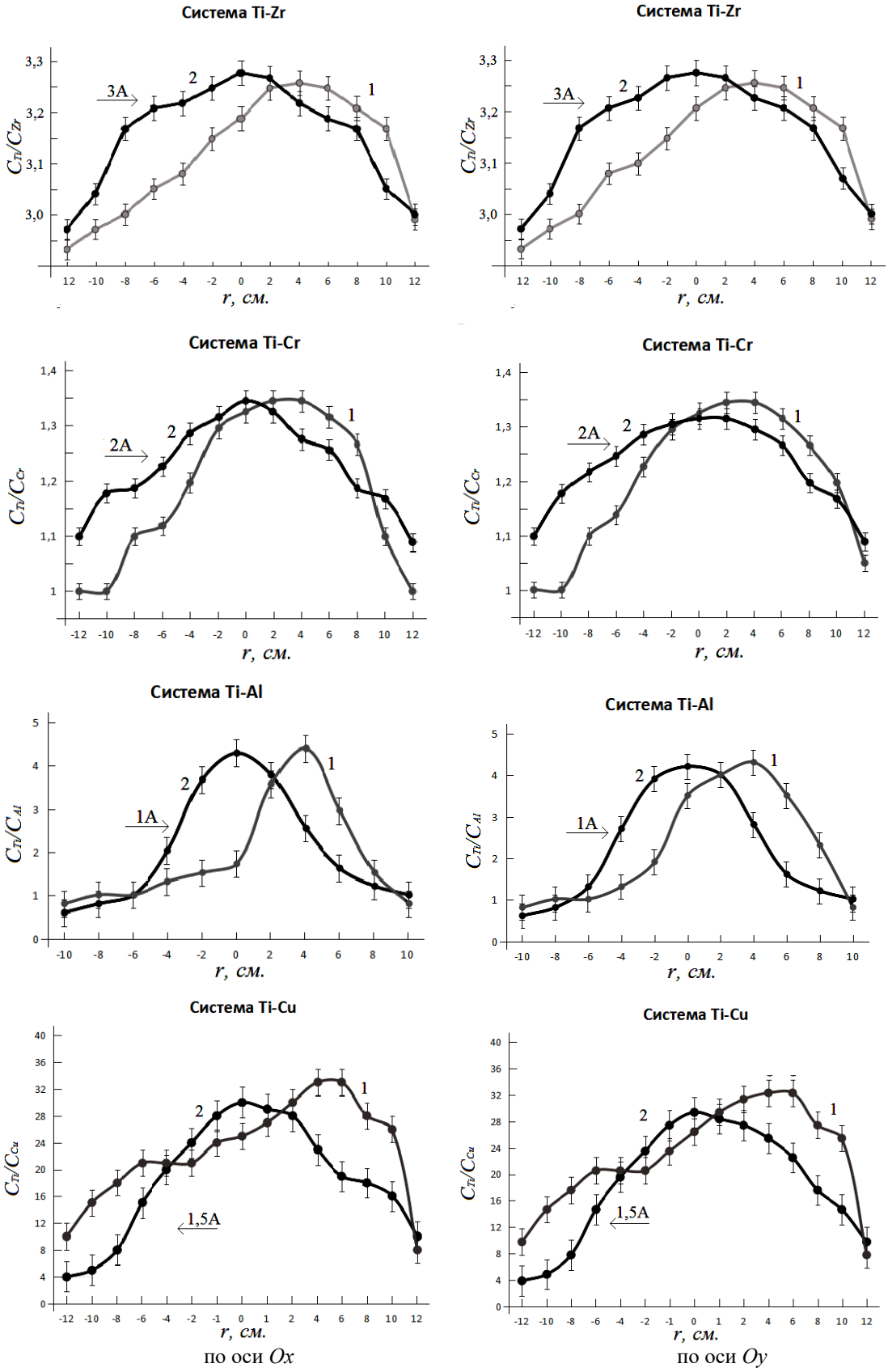
Эксперименты по определению относительной концентрации металлов в составе покрытий проводились без подачи реакционного газа в вакуумную камеру, так как рассеяние на атомах и молекулах газа может приводить к изменению параметров металлической плазмы.

Анализ полученных результатов показал, что предложенная конструкция двухканального магнитоэлектрического фильтра обеспечивает перемешивание потоков металлической плазмы из разных источников в плазмоводе, в отличие, например, от систем с Т-образным фильтром [16]. Ширина распределения относительной концентрации титана к легирующему элементу в плазменном потоке зависит от материала легирующего элемента, причём наблюдается тенденция к более широкому распределению для материалов с большей массой (рисунок 2.4).

Однако для всех рассмотренных систем наблюдаются неоднородность многокомпонентного плазменного потока в пределах угла разлёта и смещение максимума распределения относительной концентрации от центральной оси плазмовода, причём величина смещения зависит от материала используемых катодов. При заданных технологических параметрах процесса наблюдается превышение концентрации титана над концентрацией легирующего элемента, причём, в случае использования в качестве второй составляющей в плазменном потоке меди, это отношение может достигать 30 раз. По-видимому, в этом случае важную роль играет значительное различие в энергии ионизации титана и меди, что при использовании магнитоэлектрического фильтра приводит к оседанию нейтральных частиц и молекул меди на стенках плазмовода.

Установленная неоднородность элементного состава многокомпонентного плазменного потока по его сечению может существенным образом влиять на элементный состав осаждаемых покрытий, что в свою очередь приводит к изменению эксплуатационных свойств многокомпонентных покрытий [17].

Исходя из полученных результатов, на первоначальном этапе для обеспечения стабильности состава формируемых покрытий необходимо было решить задачу центрирования плазменного потока относительно выхода сепаратора.



по оси *Ox* по оси *Oy*

Рисунок 2.4 – Распределение относительной концентрации титана к легирующему элементу в многокомпонентных покрытиях в вакуумной камере:
1 – без подачи тока на дополнительный соленоид;
2 – при подаче тока на дополнительный соленоид

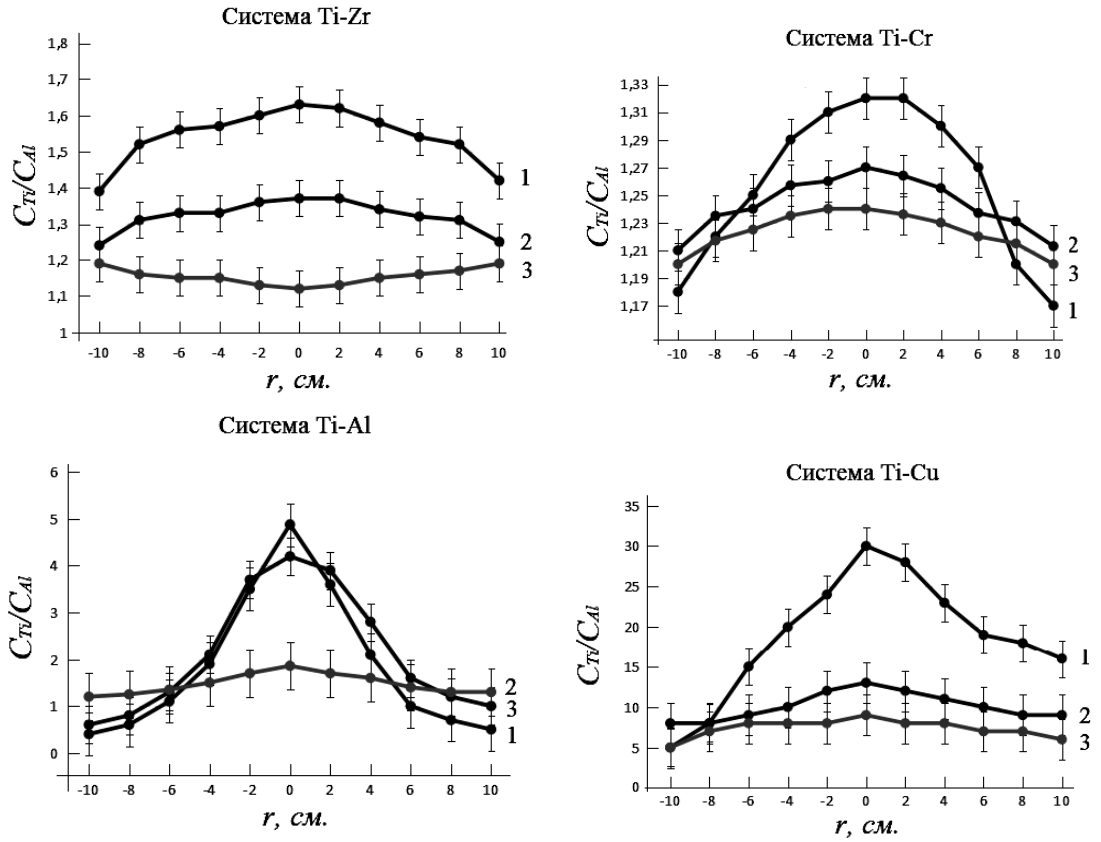


Рисунок 2.5 – Распределение относительной концентрации титана к легирующему элементу в многокомпонентных покрытиях в вакуумной камере при различных токах дугового разряда на катоде из легирующего элемента: 1 – 60А, 2 – 70А, 3 – 80А

Управление транспортировкой многокомпонентного плазменного потока в настоящей работе было предложено путём изменения топографии магнитного и, соответственно, электрического полей за счёт подключения дополнительного соленоида (6), размещённого на внешней стороне вакуумной камеры (рисунок 2.1).

Исследования показали, что различие в атомной массе легирующего элемента и титана оказывает влияние на величину силы тока на дополнительном соленоиде для смещения максимума функции распределения концентрации элементов в плазменном потоке относительно центральной оси плазмовода (рисунок 2.4). Так, в результате экспериментов было установлено, что для центрирования многокомпонентного плазменного потока для системы Ti – Zr на дополнительном соленоиде необходимо максимальное для всех рассмотренных систем значение силы тока, равное 3,0 А, минимальное – 1,0 А для системы Ti – Al.

Важной задачей применения технологии вакуумно-дугового осаждения является стабильность элементного состава покрытий в пределах одного технологического цикла.

Как показали эксперименты, управление элементным составом многокомпонентных покрытий может осуществляться за счёт ассиметрии токов на испарителях при постоянстве магнитных полей внутри двухкатодного магнитоэлектрического фильтра (рисунок 2.5).

Варьирование значениями силы тока на испарителях позволяет увеличить ширину поперечного сечения плазменного потока с минимальным различием в элементном составе для всех используемых материалов.

Необходимо отметить, что данный эффект достигается при разных значениях токов для исследуемых материалов. Так, для систем титан – цирконий, титан – медь увеличение тока дуги уже до 70 А на втором катоде (цирконий / медь) приводит к положительному результату, в тоже время для системы титан-хром необходимо увеличение тока дуги для испарителя с хромовым катодом до 80 А.

Установлено, что для системы титан – алюминий равномерное концентрационное распределение достигается только при токе дуги на алюминиевом катоде равном 70 А, дальнейшее повышение тока приводит к резкому уменьшению содержания алюминия в покрытии. Это, в первую очередь, является результатом работы магнитоэлектрического фильтра, так как с увеличением тока дуги на испарителе с алюминиевым катодом в плазменном потоке увеличивается объёмное содержание микрокапельной фазы

алюминия, которая при прохождении через фильтр оседает на стенках плазмовода.

Таким образом, процесс вакуумно-плазменного осаждения многокомпонентных покрытий с использованием сепарированных плазменных потоков позволяет формировать покрытия с высокой плотностью, низкой шероховатостью и однородным распределением элементов в объеме покрытия.

Заключение

Разработан двухкатодный магнитоэлектрический фильтр для снижения гетерофазности плазменного потока, генерируемого электрической дугой, при формировании многокомпонентных покрытий. Изучено влияние конфигурации магнитных полей в сепарирующей системе на пространственное распределение концентрации элементов плазменного потока в вакуумной камере. Определены технологические условия для управления максимумом распределения элементов в многокомпонентном плазменном потоке относительно центральной оси плазмовода.

Проведённые эксперименты показали, что при использовании сепарирующей системы с Y-образным плазмоводом управление соотношением элементов в осаждаемых покрытиях возможно при изменении расположения деталей в вакуумной камере и за счёт ассиметрии токов дугового разряда на испарителях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белый*, *А.В.* Инженерия поверхностей металлов и сплавов с использованием многокомпонентных плазменных потоков и ионно-ассистированного осаждения / А.В. Белый, С.Д. Латушкина. – Минск: Беларуская навука, 2024. – 151 с.

2. *Тополянский*, *П.А*. Выбор тонкопленочных покрытий для упрочнения изделий / П.А. Тополянский, С.А. Ермаков, А.П. Тополянский // Технологии упрочнения, нанесения покрытий и ремонта: теория и практика: Материалы Международной научно-практической конференции. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2016. – С. 194–205.

3. *Александров*, *Д.А*. Исследование износостойких покрытий на основе многокомпонентных нитридов титана / Д.А. Александров // Труды ВИАМ. – 2020. – № 4–5 (88). – С. 62–69.

4. *Табаков*, *В.П.* Формирование износостойких ионно-плазменных покрытий режущего инструмента / В.П. Табаков. – Москва: Машиностроение, 2008. – 311 с.

5. *Плазменно-вакуумные покрытия* / Ж.А. Мрочек [и др.]. – Минск: Технопринт, 2004. – 368 с.

6. *PalDey*, *S.* Single layer and multilayer wear resistant coatings of (Ti, Al) N: a review / S. PalDey, S.C. Deevi // Materials Science and Engineering. – 2003. – Vol. 342. – P. 58–79.

7. *Инженерия вакуумно-плазменных покрытий* / Н.А. Азаренков [и др.]. – Харьков: ХНУ имени В.Н. Каразина, 2011. – 343 с.

8. *Filtered cathodic vacuum arc deposition* (*FCVAD*) *technology as method for creation of nanostructured multicomponent modifying coatings for wide application range* / A. Vereschaka [et al.] // Procedia CIRP. – 2020. – Vol. 95. – P. 999–1003.

9. *Bernard*, *F.* Design of vacuum arc-based plasma sources / F. Bernard, B.F. Coll, D.M. Sanders // Surf. Coat. Technol. – 1996. – Vol. 81. – P. 42–51.

10. *Anders*, *A*. Approaches to rid cathodic arc plasmas of macro- and nanoparticles: a review / A. Anders // Surf. Coat. Technol. – 1999. – Vol. 120. – P. 319–330.

11. *Transport of macroparticles in magnetized plasma ducts* / M. Keidar, I. Beilis, R.L. Boxman, S. Goldsmith. – Proc. 12th Int. Symp. on Plasma Chem., Aug. 1995, Minneapolis, Minnesota, USA. – Vol. 3. – P. 1367–1370.

12. *Boxman*, *R.L.* Macroparticles contamination in cathodic arc coatings: generation, transport and control / R.L. Boxman, S. Goldsmith // Surf. Coat. Technol. – 1992. – Vol. 52. – P. 39–50.

13. *Аксенов*, *И.И.* Вакуумная дуга в эрозионных источниках плазмы / И.И Аксенов. – Харьков: ННЦ ХФТИ, 2005. – 212 с.

14. *Транспортировка вакуумно-дуговой плазмы в неоднородном магнитном поле* / И.И. Аксенов, В.В. Васильев, А.А. Лучанинов, В.Е. Стрельницкий // Вопросы атомной науки и техники. – 2005. – № 5. – С. 142–146.

15. *Modelling of cathodic arc PVD plasma flow in separator with non-uniform magnetic field* / A.V. Chernogor [et al.] // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – P. 1313, 012011.

16. *Формирование потоков вакуумно-дуговой источниками с широкоапертурным фильтром* / И.И. Аксенов [и др.] // Вестник Харьковского университета. – 2008. – № 794. – С. 3–20.

17. *Латушкина*, *С.Д.* Особенности структурообразования и защитных свойств многокомпонентных покрытий, осаждаемых из плазмы вакуумно-дугового разряда / С.Д. Латушкина, О.И. Посылкина // Актуальные проблемы прочности. – Витебск, 2018. – Гл. 4. – С. 63–85.

Поступила в редакцию 28.02.2025.

Информация об авторах

Латушкина Светлана Дмитриевна – к.т.н., доцент
Романов Игорь Михайлович – к.ф.-м.н.
Посылкина Ольга Ивановна – к.т.н.
Сечко Иван Андреевич – аспирант
Комаровская Виктория Маратовна – к.т.н., доцент

ТЕХНИКА

УДК 621.38 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_74
EDN: HDUNGI

ЭЛЕКТРОСТИМУЛЯЦИЯ НЕРВНО-МЫШЕЧНОГО АППАРАТА МНОГОЭЛЕМЕНТНЫМ ЭЛЕКТРОДОМ

А.Н. Осипов[1], И.О. Хазановский[1], А.В. Пацеев[2]

[1]*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники*, *Минск*
[2]*Республиканский центр медицинской реабилитации и бальнеолечения*, *Минск*

ELECTROSTIMULATION OF THE NEUROMUSCULAR APPARATUS BY A MULTI-ELEMENT ELECTRODE

A.N. Osipov[1], I.O. Khazanovsky[1], A.V. Patseev[2]

[1]*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk*
[2]*Republican Center for Medical Rehabilitation and Balneotherapy*, *Minsk*

Аннотация. Представлены результаты исследования электростимуляции нервно-мышечного аппарата многоэлементным электродом в сравнении со стандартным электродом. Исследованы зависимости порогового тока электростимуляции от временных параметров импульса для стандартного и многоэлементного электродов. Определена эффективность использования электродных матриц, при которых осуществляется задержка сигнала электростимуляции на заданное время по каждому каналу.

Ключевые слова: *многоэлементный электрод*, *многоканальная электростимуляция*, *парциальный электрод*, *длительность импульса*, *ток стимуляции.*

Для цитирования: *Осипов*, *А.Н.* Электростимуляция нервно-мышечного аппарата многоэлементным электродом / А.Н. Осипов, И.О. Хазановский, А.В. Пацеев // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 74–78. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_74. – EDN: HDUNGI

Abstract. The paper presents the results of a study of electrical stimulation of the neuromuscular system using a multi-element electrode in comparison with a standard electrode. The dependences of the threshold current of electrical stimulation on the time parameters of the pulse for standard and multi-element electrodes are studied. The efficiency of using electrode matrices, in which the electrical stimulation signal is delayed for a specified time for each channel, is determined.

Keywords: *multi-element electrode*, *multi-channel electrical stimulation*, *partial electrode*, *pulse duration*, *stimulation current.*

For citation: *Osipov*, *A.N.* Electrostimulation of the neuromuscular apparatus by a multi-element electrode / A.N. Osipov, I.O. Khazanovsky, A.V. Patseev // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 2 (63). – P. 74–78. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_74 (in Russian). – EDN: HDUNGI

Введение

Одним из перспективных направлений электростимуляции является многоканальная электростимуляция (МЭ). Это обусловлено тем, что специфические функциональные свойства нервной и управляемой ей мышечной системы теснейшим и детерминированным образом связаны с генерацией и передачей естественных электрических потенциалов [1]. Многоканальная электростимуляция находит широкое применение для лечения органических и функциональных поражений нервно-мышечной системы и, в первую очередь, для реабилитации пациентов с нарушением опорно-двигательного аппарата. Опубликованы результаты о применении МЭ для лечения различных заболеваний в неврологии, офтальмологии, кардиологии, эндокринных заболеваний [2]–[5]. В настоящее время получило развитие многоканальная электростимуляция многоэлементными электродами [6]. Однако остаётся неисследованным вопрос оптимизации параметров стимулирующих сигналов при использовании многоэлементных электродов. В связи с этим в данной работе приведены результаты исследований электростимуляции многоэлементным электродом в сравнении со стандартным.

1 Материалы и методика проведения исследований

Для проведения исследований использован специальный стенд (рисунок 1.1). Стенд включает генератор стимулирующих сигналов, программируемый коммутатор, выходные каскады стандартного, многоэлементного и индифферентного электродов.

Комплект электродов включает: стандартный электрод (выходной каскад 0), многоэлементный электрод, содержащий 4 парциальных электрода (выходной каскад 1–4) и индифферентный электрод.

© *Осипов А.Н.*, *Хазановский И.О.*, *Пацеев А.В.*, 2025

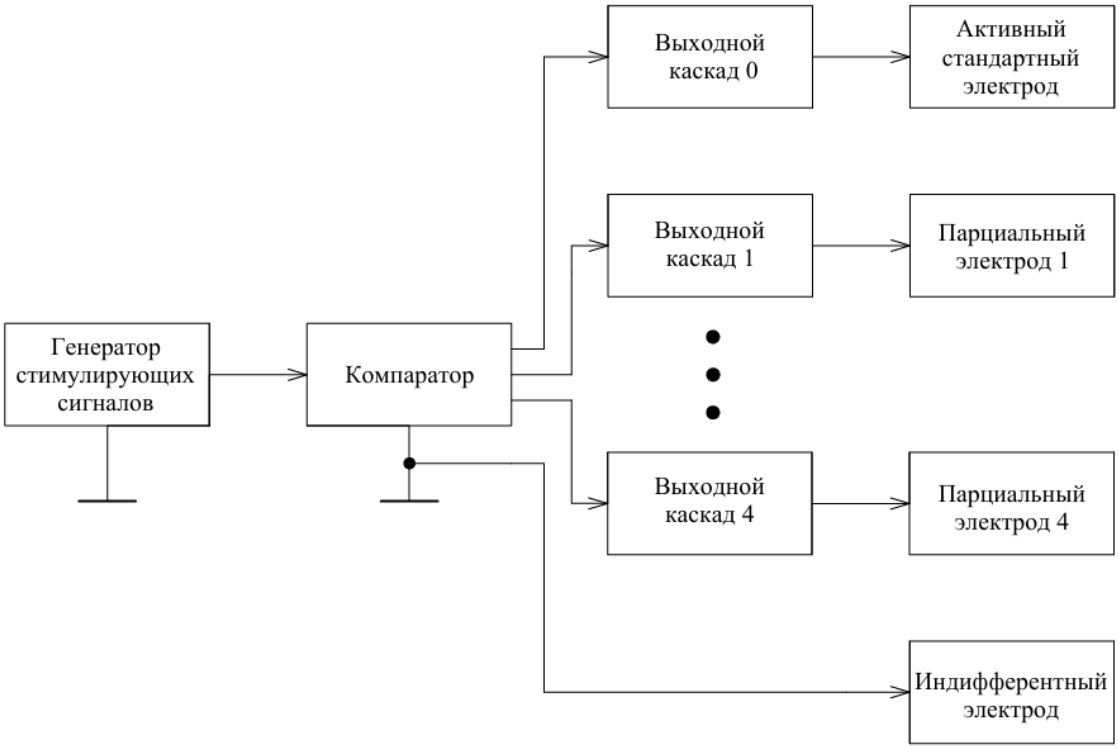
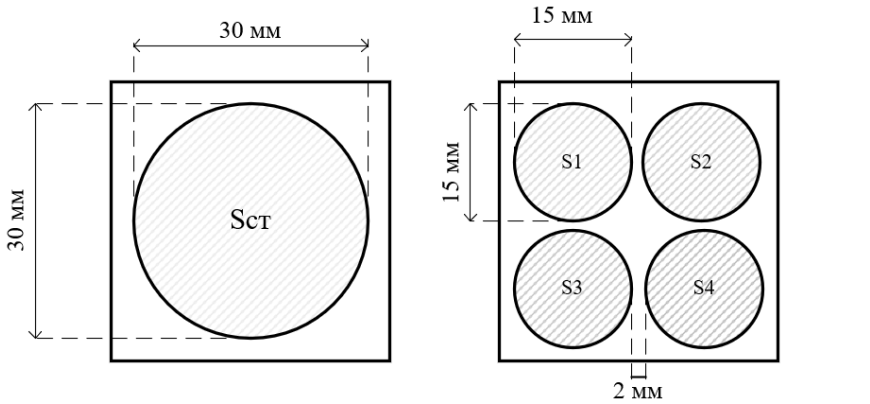


Рисунок 1.1 – Схема стенда для проведения исследований



а) стандартный *б*) электродная матрица (4 сегмента)

Рисунок 1.2 – Конструкции электродов

Парциальные электроды выполнены из токопроводящей резины. Для обеспечения постоянства межэлектродного расстояния они монтируются на фиксирующую резиновую площадку размерами 40×40 мм, что обеспечивает необходимую гибкость электрода для хорошего прилегания к телу человека. Конструкции электродов приведены на рисунке 1.2.

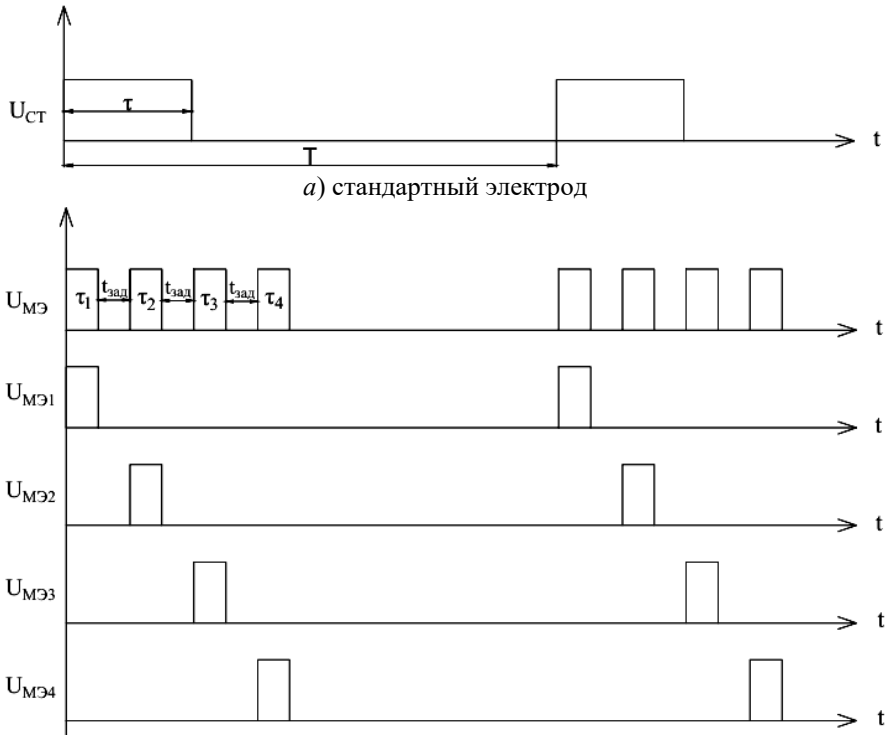
Суммарная площадь сегментов электродной матрицы равна площади стандартного электрода: $S_{ст} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_{эм,}$ а площади сегментов в электродной матрице равны между собой: $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$.

При проведении исследования выбрана группа испытуемых, которая не имеет патологий. Миостимуляция проводилась на двуглавой мышце плеча. Для электростимуляции активный электрод помещают на точке, располагающейся примерно на середине мышечного брюшка. Стимуляция стандартным электродом и электродной матрицей на заданной частоте и установленной длительности импульса проводилась в один подход, где фиксировалось одно значение тока стимуляции при использовании стандартного электрода и несколько значений при использовании электродной матрицы. После стимуляции проходило время (15–20 мин.), в течении которого испытуемый отдыхал, после чего начинался второй подход, при следующей длительности импульса и заданной частоте. Перерывы проводились

с целью предотвращения аккомодации ткани человека к электрическому току. При проведении стимуляции фиксировалось значение тока ($I_{ст}$), которое вызывало пороговое сокращение мышцы.

Для определения эффективности использования электродной матрицы, применяемой для синтеза сигналов электростимуляции, проведены исследования зависимости изменения тока стимуляции $I_{ст}$, вызывающего пороговое сокращения мышцы, от длительности импульса стимулирующего сигнала τ ($\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4$). Длительность импульса при использовании стандартного электрода была равна суммарной длительности импульсов, подаваемых на каналы стимуляции при использовании электродной матрицы. Последовательность подачи стимулирующих сигналов на парциальные электроды соответствовала номеру парциального электрода матрицы. Также проведено исследование зависимости тока стимуляции ($I_{ст}$) от задержки подачи импульса на парциальные электроды ($t_{зад}$).

На рисунке 1.3 представлены сигналы, подаваемые на парциальные электроды.



а) стандартный электрод

б) многоэлементный электрод

Рисунок 1.3 – Диаграммы стимулирующих сигналов, подаваемых на стандартный и многоэлементный электроды

В процессе проведения исследования диапазон частот, используемых при стимуляции двуглавой мышцы плеча, находился в пределах 50–200 Гц. Длительность импульса изменялась в диапазоне от 0,2 до 1,8 мс, а задержка подачи сигнала на парциальный электрод – от 0.1 до 1.5 мс.

2 Обработка результатов исследований

На рисунке 2.1 представлены зависимости изменения порогового значения тока от длительности импульса для стандартного и многоэлементного электрода для различных частот стимуляции (50, 100, 150 и 200 Гц).

Зависимость тока стимуляции от длительности импульса $I_{ст}(d)$, построенная для частот 50 Гц, 100 Гц, 150 Гц и 200 Гц показывает, что с увеличением длительности импульса ток стимуляции уменьшается по экспоненциальному закону как в случае использования стандартного электрода, так и в случае использования электродной матрицы. Характер данных зависимостей соответствует классическому закону «сила-длительность», то есть зависимости потенциала действия от длительности и силы тока, который утверждает, что пороговая сила деполяризующего импульса тока прямоугольной формы зависит как от амплитуды, так и от продолжительности электрического импульса [7].

Как следует из представленных на рисунке 2.1 графиков, применение четырех парциальных электродов привело к существенному снижение порогового значения тока.

При длительности импульса 0.2 мс уменьшение тока на частоте 50 Гц составило 3,5 раза, на частоте 100 Гц – 3,2 раза, на частоте 150 Гц – 2,9 раза и на частоте 200 Гц – 2,8 раза. Следует также отметить, что увеличение длительности импульса, подаваемого на парциальный электрод,

свыше 2 мс не вызывало порогового сокращения мышц. Это свидетельствует о том, что значение хронаксии для многоэлементного электрода уменьшается пропорционально количеству парциальных электродов. Увеличение частоты от 50 до 200 Гц для многоэлементного электрода не приводило также к существенному изменению порогового значения тока.

На основании субъективных ощущений, которые были одинаковыми у всех испытуемых, можно сказать, что надпороговое сокращение мышцы при использовании электродной матрицы происходит с более комфортными ощущениями в сравнении со стимуляцией стандартным электродом.

На рисунке 2.2 представлены зависимости значений тока стимуляции от времени задержки импульсов $I_{cm}(t_{зад})$, подаваемых на парциальные электроды при различных длительностях импульсов.

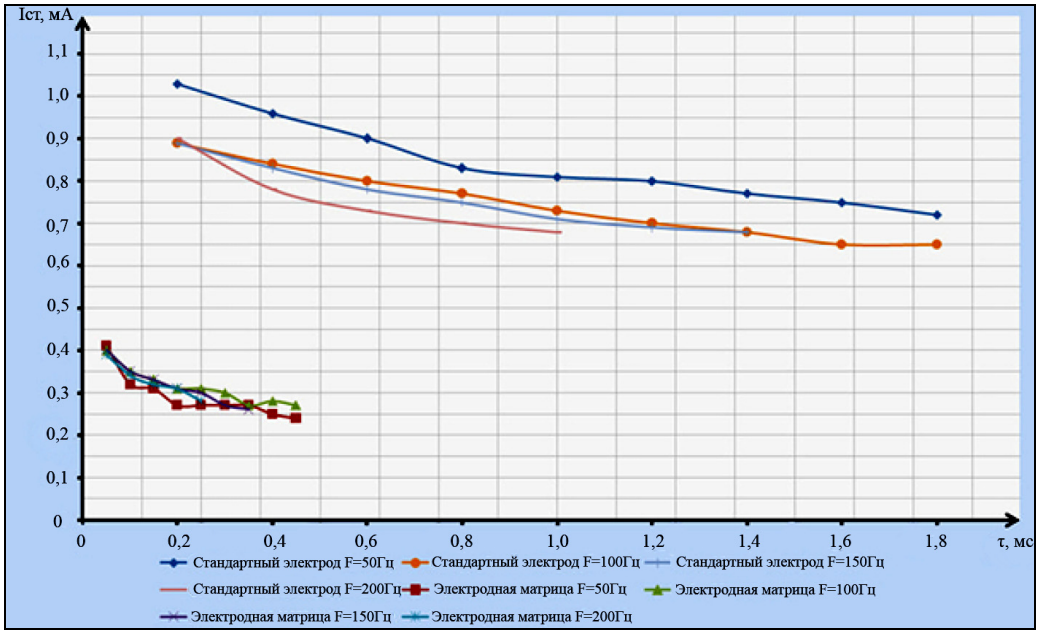


Рисунок 2.1 – Зависимость порогового значения тока стимуляции от длительности импульса $I_{cm}(\tau)$

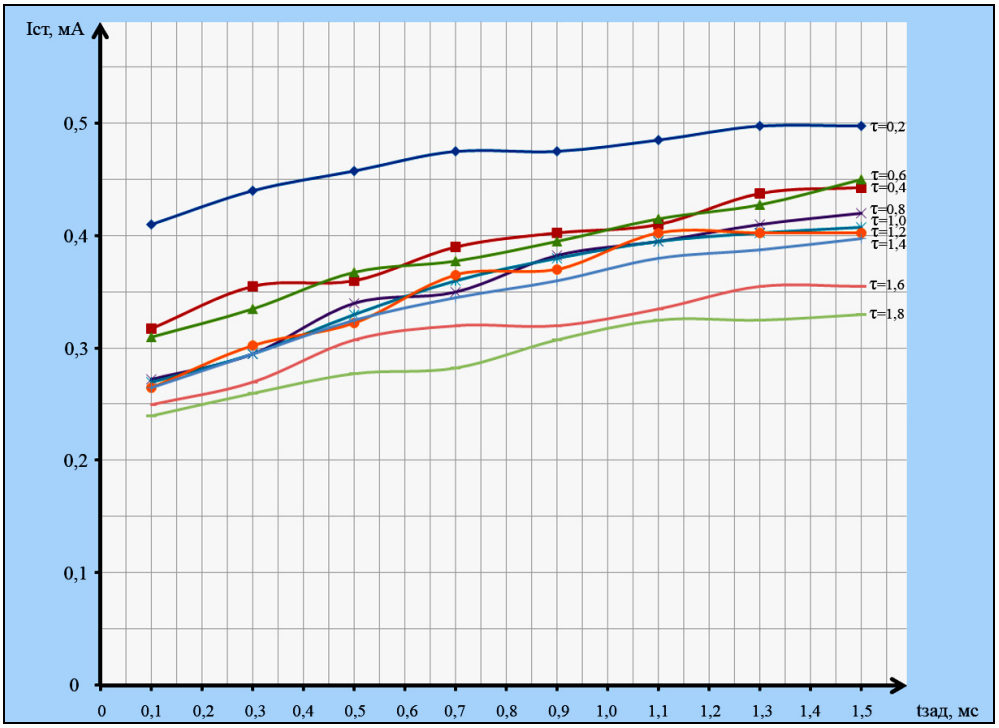


Рисунок 2.2 – Зависимость тока стимуляции от времени задержки импульсов $I_{cm}(t_{зад})$ для частоты стимуляции 50 Гц

Как следует из представленных на рисунке 2.2 графиков все зависимости носят линейных характер. Уменьшение времени задержки подачи сигнала на парциальный электрод приводило к уменьшению порогового значения тока и составило от 22% до 37% при длительности импульса от 0,2 мс до 1,8 мс, соответственно. Характер данной зависимости сохраняется при различных длительностях импульса стимулирующего сигнала. Увеличение длительности импульса τ приводило к изменениям I_{cm} в соответствии с классическим законом «сила-длительность».

Заключение

В результате исследования, установлено следующее:

1. Использование электродной матрицы (4 парциальных электрода), по сравнению со стандартным электродом, на частотах 50–200 Гц позволяет уменьшить силу тока, вызывающую надпороговое сокращение мышцы одинаковой степени выраженности, в 2,8–3,5 раза.

2. При использовании многоэлементного электрода наблюдается уменьшение значения хронаксии. Причем это уменьшение пропорционально количеству парциальных электродов.

3. Уменьшение времени задержки подачи сигнала на парциальный электрод приводит к уменьшению порогового значения тока. Таким образом, при проектировании электростимуляторов с многоэлементными электродами необходимо обеспечить минимальную задержку при переключении каналов электростимуляции.

4. Надпороговое сокращение мышцы при использовании электродной матрицы происходит с более комфортными и приятными ощущениями в сравнении со стимуляцией стандартным электродом.

Результаты исследований могут быть использованы в здравоохранении при проектировании аппаратов электронейростимуляции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Севастьянов*, *В.В.* Аппарат многоканального электростимуляционного воздействия на нервно-мышечную систему человека / В.В. Севастьянов // Медицинская техника. – 2020. – № 4. – С. 11–13.

2. *Скляров*, *С.С.* Многоканальный электростимулятор опорно-двигательного аппарата: пат. RU 211118 U1 / С.С. Скляров; дата публ.: 28.01.2022.

3. *Волкова*, *С.В.* Многоканальная электромиостимуляция и гипербарическая оксигенация в комплексном лечении больных с диабетической ангиопатией: автореф. дис. … кандидата медицинских наук / С.В. Волкова. – Москва – 2009.

4. *Сидорова*, *С.А.* Многоканальная сопряженная программная нервно-мышечная электростимуляция в лечении больных с постинсультными двигательными нарушениями / С.А. Сидорова // Успехи современного естествознания. – 2007. – № 12, часть 3. – С. 174–176.

5. *Метод и технические средства управляемого изменения двигательного навыка человека на основе многоканальной электростимуляции* / Н.С. Давыдова, А.Н. Осипов, М.В. Давыдов, М.М. Меженная // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2012. – № 4. – С. 10–15.

6. Способ нейроэлектростимуляции и устройство для его реализации: пат. RU RU2580972C2 / В.С. Кубланов, М.В. Бабич, К.С. Пуртов, Т.С. Петренко; дата публ.: 03.06.2024.

7. *Боголюбов*, *В.М.* Общая физиотерапия: учебник для студентов медицинских вузов / В.М. Боголюбов, Г.Н. Пономаренко. – Санкт-Петербург, 1996.

Поступила в редакцию 22.01.2025.

Информация об авторах

Осипов Анатолий Николаевич – к.т.н., доцент
Хазановский Игорь Олегович
Пацеев Александр Владимирович – главный врач

ТЕХНИКА

УДК 621.396.6 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_79
EDN: HPOQHO

ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛО-ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ

А.П. Преображенский, Т.В. Аветисян, Ю.П. Преображенский

Воронежский институт высоких технологий

DESIGN OF A METAL-DIELECTRIC ANTENNA

A.P. Preobrazhensky, T.V. Avetisyan, Yu.P. Preobrazhensky

Voronezh Institute of High Technologies

Аннотация. Исследование посвящено разработке металло-диэлектрической антенны. В работе применены различные методы для расчетов, включая строгие электродинамические подходы для описания характеристик антенны, численный анализ для структурного и параметрического синтеза, метод интегральных уравнений для определения токов вдоль металлических компонентов, метод коллокаций для решения интегрального уравнения, а также метод конечных разностей для численных расчетов. В результате исследования был разработан алгоритм, который позволяет проектировать металло-диэлектрические антенны с учетом различных длин радиоволн и определять рабочую частоту для антенны.

Ключевые слова: *метод интегральных уравнений*, *рассеяние радиоволн*, *моделирование*, *металло-диэлектрическая антенна.*

Для цитирования: *Преображенский*, *А.П.* Проектирование металло-диэлектрической антенны / А.П. Преображенский, Т.В. Аветисян, Ю.П. Преображенский // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 79–83. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_79. – EDN: HPOQHO

Abstract. The study is devoted to the development of a metal-dielectric antenna. The work uses various methods for calculations, including rigorous electrodynamic approaches to describe the antenna characteristics, numerical analysis for structural and parametric synthesis, the integral equation method for determining currents along metal components, the collocation method for solving the integral equation, and the finite difference method for numerical calculations. As a result of the study, an algorithm was developed that allows designing metal-dielectric antennas taking into account various radio wave lengths and determining the operating frequency for the antenna.

Keywords: *method of integral equations*, *radio wave scattering*, *modeling*, *metal-dielectric antenna.*

For citation: *Preobrazhensky*, *A.P.* Design of a metal-dielectric antenna / A.P. Preobrazhensky, T.V. Avetisyan, Yu.P. Preobrazhensky // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 2 (63). – P. 79–83. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_79 (in Russian). – EDN: HPOQHO

Введение

В составе различных технических объектов можно наблюдать применение металло-диэлектрических антенн [1]. Их структура является достаточно сложной. В этой связи для описания их характеристик следует применять соответствующие строгие электродинамические методы. Тогда можно обеспечивать процессы проектирования при высокой точности.

Для того чтобы осуществлять структурный, а также параметрический синтез металло-диэлектрических антенн во многих случаях необходимо проводить их численный анализ. При этом требуется по комплексу параметров, а также структурному построению реализовывать процессы варьирования. Это требует в ходе осуществления процессов автоматизированного проектирования проводить соответствующий выбор иерархии моделей и алгоритмов.

В ряде работ решались определенные частные задачи, связанные с анализом рассеяния как на металлических, так и на диэлектрических дифракционных структурах [2]–[4]. В представленной статье проведено обобщение таких подходов.

Целью работы является исследование возможностей проектирования металло-диэлектрических антенн на основе комбинации нескольких подходов.

1 Описание моделей

На рисунке 1.1 показана иллюстрация структуры анализируемой антенны. В качестве основы применяется диэлектрический волновод [5]. Вокруг него размещается металлический кожух. На поверхности диэлектрика располагаются металлические полоски. Диэлектрический волновод рассматривается в виде прямоугольного поперечного сечения. Плоская волна обеспечивает процесс возбуждения такого волновода с торца. По металлическим компонентам анализируемой гребенки протекали токи. Для того, чтобы их определить, мы использовали метод

© *Преображенский А.П.*, *Аветисян Т.В.*, *Преображенский Ю.П.*, 2025

интегральных уравнений. Его удобно использовать, когда дифракционные объекты относятся к резонансной области. Структура рассматривается как периодическая. Это определяет соответствующие особенности в ходе ее проектирования. Если анализировать один период, тогда для него справедливо интегральное уравнение [6]

$$\vec{n}\times\vec{E} = -\frac{i}{4\pi\omega\varepsilon}\vec{n}\times \times\int_S\left(-\omega^2\mu\vec{J}G + Z\vec{n}\times\vec{J}\times\overrightarrow{grad'}(G) - \frac{i}{\omega\varepsilon}Div(\vec{J})\cdot\overrightarrow{grad'}(G)\right)ds'\Big). \quad (1.1)$$

В указанном выражении $\vec{n}$ – показывает нормаль, которая соответствует точке расположения приемника; $\vec{E}$ – вектор напряженности радиоволны; ω – циклическая частота; ε и μ – значения диэлектрических и магнитных проницаемостей воздуха; $\vec{J}$ – на поверхности анализируемой антенны значение тока, которое соответствует точке q; G – обозначение функции Грина, которая будет соответствовать свободному пространству; Z – значение поверхностного импеданса, который соответствует диэлектрическому волноводу; S – в интегральном уравнении поверхность, которая соответствует анализируемому объекту.

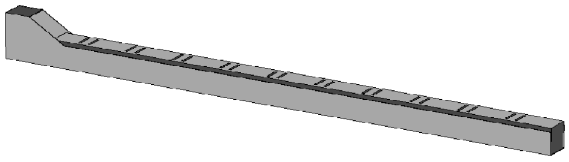


Рисунок 1.1 – Иллюстрация структуры металло-диэлектрической антенны

В ходе математического моделирования может быть использован подход, в котором рассматриваемая гребенка рассматривается как бесконечная. Если будет анализироваться преимущественно только одно направление, тогда задача будет одномерная. Используя технологию дискретизации, мы перейдем от (1.1) к бесконечной системе интегральных уравнений. Для того, чтобы обеспечить формализацию в ходе решения задачи, выделим нулевой элемент для решетки, остальные будут пронумерованы в обе стороны (рисунок 2.1). Осуществляется процесс перехода от (1.1) к (1.2)

$$\vec{n}\times\vec{E} = \ldots - \frac{i}{4\pi\omega\varepsilon}\vec{n}\times\int_S\left(-\omega^2\mu\vec{J}_{-1}G + Z\vec{n}\times\vec{J}_{-1}\times\overrightarrow{grad'}(G) - \frac{i}{\omega\varepsilon}Div(\vec{J}_{-1})\overrightarrow{grad'}(G)\right)ds'\Big) - \quad (1.2)$$

$$-\frac{i}{4\pi\omega\varepsilon}\vec{n}\times\int_S\left(-\omega^2\mu\vec{J}_0G + Z\vec{n}\times\vec{J}_0\times\overrightarrow{grad'}(G) - \frac{i}{\omega\varepsilon}Div(\vec{J}_0)\overrightarrow{grad'}(G)\right)ds'\Big) -$$

$$-\frac{i}{4\pi\omega\varepsilon}\vec{n}\times\int_S\left(-\omega^2\mu\vec{J}_1G + Z\vec{n}\times\vec{J}_1\times\overrightarrow{grad'}(G) - + \frac{i}{\omega\varepsilon}Div(\vec{J}_1)\overrightarrow{grad'}(G)\right)ds'\Big) - \ldots$$

При решении задачи вследствие того, чтобы сдвиг между металлическими компонентами является постоянной величиной, тогда разность фаз между компонентами $\psi = kd\cos\theta$. Основываясь на этом в ходе моделирования справедлива теория периодических структур.

Интегрального уравнение решается с использованием метода коллокаций. В результате получается система уравнений, в которой матрица имеет размеры $N\times N$, строки и столбцы нумеруются, соответственно i, $j = 1, \ldots, N$; N – соответствует количеству точек на поверхности анализируемой антенны.

Если мы применяем конечно-разностный метод [7], тогда для того, чтобы численным образом рассчитывать $Div(\vec{J})$, применим двойной индекс $j \to (m, p)$. Тогда получим

$$Div(\vec{J}_{m,p}) = \frac{\partial Jx}{\partial x} + \frac{\partial Jy}{\partial y} + \frac{\partial Jz}{\partial z} \approx \approx \frac{Jx_{m+1,p} - Jx_{m-1,p}}{2\cdot\Delta x} + \frac{Jy_{m,p+1} - Jy_{m,p-1}}{2\cdot\Delta y} + \frac{Jz_{m,p+1} - Jz_{m,p-1}}{2\cdot\Delta z}. \quad (1.3)$$

В выражении (1.3) Δx, Δy, Δz рассматриваются в виде элементарных размеров на поверхности антенны.

С учетом того, что на поверхности антенны выделяется множество точек, можно записать функцию Грина таким образом

$$G_{ij} = \frac{\exp(-ik_\ell r_{ij})}{r_{ij}}. \quad (1.4)$$

В выражении (1.4) $k_\ell = 2\pi/\lambda$ – соответствует металлической поверхности; $k_\ell = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ – соответствует диэлектрической поверхности; λ – длина радиоволны. Для трехмерной функции Грина определяем компоненты для декартовой системы координат:

$$\frac{\partial G}{\partial x'_{ij}} = -(x_i - x_j)\frac{1+ik_\ell r_{ij}}{r_{ij}^3}\exp(-ik_\ell r_{ij}),$$

$$\frac{\partial G}{\partial y'_{ij}} = -(y_i - y_j)\frac{1+ik_\ell r_{ij}}{r_{ij}^3}\exp(-ik_\ell r_{ij}),$$

$$\frac{\partial G}{\partial z'_{ij}} = -(z_i - z_j)\frac{1+ik_\ell r_{ij}}{r_{ij}^3}\exp(-ik_\ell r_{ij}).$$

В методе коллокаций применяются кусочно-постоянные функции. Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{bmatrix} Uxx & Uxy & Uxz \\ Uyx & Uyy & Uyz \\ Uzx & Uzy & Uzz \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Jx \\ Jy \\ Jz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Rx \\ Ry \\ Rz \end{bmatrix}.$$

Для трехмерного случая нормаль к поверхности имеет вид:

$$\vec{n} = \overrightarrow{x_0} \cdot nx + \overrightarrow{y_0} \cdot ny + \overrightarrow{z_0} \cdot nz.$$

В системе уравнений правая часть представляется следующим образом:

$$R = \begin{bmatrix} Rx \\ Ry \\ Rz \end{bmatrix}, \quad Rx_i = ny_i Ez_i - nz_i Ey_i,$$

$$Ry_i = -(nx_i Ez_i - nz_i Ex_i), \quad Rz_i = nx_i Ey_i - ny_i Ex_i.$$

Элементы в матрице записываются следующим образом:

$$Uxx_{ij} = Umxx_{ij} + Udxx_{ij}, \quad Uxy_{ij} = Umxy_{ij} + Udxy_{ij},$$
$$Uxz_{ij} = Umxz_{ij} + Udxz_{ij}, \quad Uyx_{ij} = Umyx_{ij} + Udyx_{ij},$$
$$Uyy_{ij} = Umyy_{ij} + Udyy_{ij}, \quad Uyz_{ij} = Umyz_{ij} + Udyz_{ij},$$
$$Uzx_{ij} = Umzx_{ij} + Udzx_{ij}, \quad Uzy_{ij} = Umzy_{ij} + Udzy_{ij},$$
$$Uzz_{ij} = Umzz_{ij} + Udzz_{ij}.$$

В указанных выражениях, где члены начинаются с «*Um*», будет осуществляться рассмотрение точек на металлической поверхности. Где члены начинаются с «*Ud*», будет осуществляться рассмотрение точек на диэлектрической поверхности. Необходимо в ходе расчетов учесть соответствие между индексами, согласно тому, как мы это указали выше $j \to (m, p)$. В рассмотренных уравнениях для тех компонент, которые соответствуют металлическим поверхностям [8], запишем:

$$Umxx_{ij} = -Z\frac{i}{4\pi\omega\varepsilon}\iint_S \left(ny_i \left(ny_i \frac{\partial G}{\partial y_{ij}} - nz_i \frac{\partial G}{\partial x_{ij}} \right) + \right.$$
$$\left. + nz_i \left(ny_i \frac{\partial G}{\partial z_{ij}} - ny_i \frac{\partial G}{\partial x_{ij}} \right) + + \frac{i}{\omega\varepsilon Z} nz_i \frac{\partial G}{\partial y_{ij}} \frac{1}{2\Delta x} \right) ds,$$

$$Umxy_{ij} = -\frac{i}{4\pi\omega\varepsilon}\iint_S \left(-nz_i i\omega^2 \mu G_{ij} + \right.$$
$$+ Z\left(ny_i \left(ny_i \frac{\partial G}{\partial y_{ij}} - nz_i \frac{\partial G}{\partial x_{ij}} \right) + \right.$$
$$\left. \left. + nz_i \left(ny_i \frac{\partial G}{\partial z_{ij}} - ny_i \frac{\partial G}{\partial x_{ij}} \right) \right) + \frac{i}{\omega\varepsilon} nz_i \frac{\partial G}{\partial y_{ij}} \frac{1}{2\Delta y} \right) ds,$$

$$Umxz_{ij} = -\frac{i}{4\pi\omega\varepsilon}\iint_S \left(-ny_i i\omega^2 \mu G_{ij} + Zny_i nx_i \frac{\partial G}{\partial x_{ij}} \right) ds,$$

$$Umyx_{ij} = -\frac{i}{4\pi\omega\varepsilon}\iint_S \left(nz_i i\omega^2 \mu G_{ij} + \right.$$
$$+ Z\left(nx_i \left(ny_i \frac{\partial G}{\partial y_{ij}} - nz_i \frac{\partial G}{\partial x_{ij}} \right) + \right.$$
$$\left. + nz_i \left(-nz_i \frac{\partial G}{\partial z_{ij}} - ny_i \frac{\partial G}{\partial y_{ij}} \right) \right) - \frac{i}{\omega\varepsilon} nz_i \frac{\partial G}{\partial x_{ij}} \frac{1}{2\Delta x} \right) ds,$$

$$Umyy_{ij} = -Z\frac{i}{4\pi\omega\varepsilon}\iint_S \left(-nx_i ny_i \frac{\partial G}{\partial y_{ij}} + \right.$$
$$\left. + nz_i nx_i \frac{\partial G}{\partial y_{ij}} - \frac{i}{\omega\varepsilon Z} nz_i \frac{\partial G}{\partial x_{ij}} \frac{1}{2\Delta y} \right) ds,$$

$$Umyz_{ij} = -\frac{i}{4\pi\omega\varepsilon}\iint_S \left(-nx_i i\omega^2 \mu G_{ij} + \right.$$
$$\left. + Z\left(nx_i nx_i \frac{\partial G}{\partial x_{ij}} + nz_i nx_i \frac{\partial G}{\partial z_{ij}} \right) \right) ds,$$

$$Umzx_{ij} = -\frac{i}{4\pi\omega\varepsilon}\iint_S \left(-ny_i i\omega^2 \mu G_{ij} + \right.$$
$$+ Z\left(-nx_i \left(ny_i \frac{\partial G}{\partial z_{ij}} - ny_i \frac{\partial G}{\partial x_{ij}} \right) + \right.$$
$$\left. \left. + ny_i \left(-nz_i \frac{\partial G}{\partial z_{ij}} - ny_i \frac{\partial G}{\partial y_{ij}} \right) \right) \right) ds,$$

$$Umzy_{ij} = -\frac{i}{4\pi\omega\varepsilon}\iint_S \left(nx_i i\omega^2 \mu G_{ij} + \right.$$
$$\left. + Z\left(-nx_i \left(-nz_i \frac{\partial G}{\partial z_{ij}} - nx_i \frac{\partial G}{\partial x_{ij}} \right) + ny_i nx_i \frac{\partial G}{\partial y_{ij}} \right) \right) ds,$$

$$Umzz_{ij} = -\frac{i}{4\pi\omega\varepsilon}\iint_S Zny_i nx_i \frac{\partial G}{\partial z_{ij}} ds.$$

Подобным образом мы можем представить компоненты в уравнениях, которые соответствуют диэлектрическим поверхностям [9]. Постоянная распространения электромагнитной волны k_ℓ определяется характеристиками диэлектрика.

После определения токов на поверхности антенны можно определить рассеянное электромагнитное поле [10]

$$E^S(\vec{r}) = \frac{i\omega\mu \exp(-ikr)}{r} \times$$
$$\times \iint_S \left((\hat{r}\vec{J})\hat{r} - \vec{J} - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} Z\vec{n} \times \vec{J} \times \hat{r} \right) \exp(ik\hat{r}\vec{r}')dS'. \quad (1.5)$$

В указанном выражении $\hat{r}$ – вектор, который связывает точку интегрирования и наблюдения, при этом он имеет единичную длину

$$\vec{r}' = \overrightarrow{x_0}x' + \overrightarrow{y_0}y' + \overrightarrow{z_0}z'.$$

Каким образом можно осуществить расчет по характеристикам анализируемой антенны? Шаги алгоритма:

1. Описываются размеры антенны.

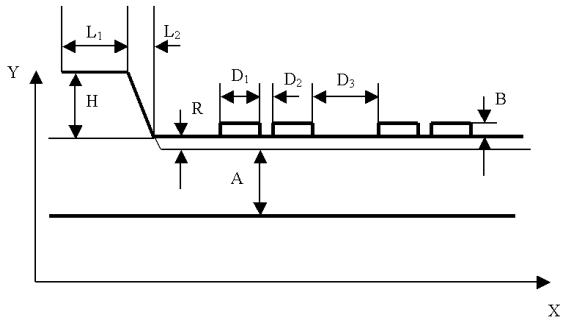
2. Расчет токов для одной металлической компоненты.

3. Расчет токов для всех металлических компонент на базе подхода, в котором применяются периодические структуры.

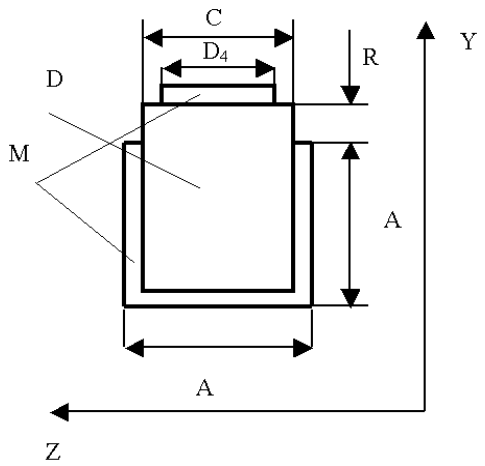
4. На основе выражения (1.5) будет рассчитываться рассеянное поле.

2 Результаты

На рисунке 2.1 показана иллюстрация поперечного сечения анализируемой антенны. При помощи обозначения *D* показан диэлектрический слой. При моделировании рассматривался полистирол: $\varepsilon = 2{,}55$, $\mathrm{tg}\delta = 2 \cdot 10^{-4}$. При помощи обозначения *M* показана металлическая составляющая в проектируемом объекте.



а) соответствует плоскости *X0Y*



б) соответствует плоскости Y0Z

Рисунок 2.1 – Поперечное сечения анализируемой антенны

Оценки рассеивающих свойств антенны осуществлялись при таких размерах: $A = 11$ мм, $B = 0{,}052$ мм, $D_1 = 1{,}05$ мм, $D_2 = 3{,}08$ мм, $D_3 = 15{,}1$ мм, $L_1 = 10{,}2$ мм, $L_2 = 4{,}95$ мм, $H = 4{,}96$ мм, $R = 1{,}77$ мм, $D_4 = 6{,}35$ мм, значение C предполагалось между 9 мм и 10 мм.

Проводилась оценка сходимости решения. В ходе рассмотрения расчета рассеянных полей поверхность анализируемой антенны в рамках одного периода разбивалась на некоторое число точек *N*. Невязка решения приведена в зависимости от *N* в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Невязка решения в зависимости от числа точек разбиения

	Число точек разбиения поверхности, N		
	2030	3040	3800
Невязка решения, %	0,137	0,088	0,065

Таким образом, видна сходимость решения, а также существует возможность контроля решения в зависимости от числа точек разбиения поверхности.

В ходе моделирования анализировался диапазон частот $10 \div 11{,}7$ ГГц. Для определения значения C использовался генетический алгоритм. Было установлено, что $C = 9{,}4$ мм, при этом в ходе процессов проектирования было показано, что для антенны рабочая частота равна 11,5 ГГц.

Расчет рабочей частоты антенны осуществлялся в ходе варьирования ее параметров и обеспечения максимального значения коэффициента усиления, который оказался равным 35,6 дБ, а коэффициент использования поверхности составил 51%.

Особенности разработанного алгоритма:

1. Можно проводить моделирование характеристик металло-диэлектрических антенн с учетом разных длин радиоволн.

2. Можно определить для антенны рабочую частоту.

Заключение

В работе даны предложения по основным этапам алгоритма, дающего возможности для проектирования использования модели полой структуры с простой формой при оценках характеристик рассеяния полых структур со сложной формой. Осуществлены оценки возможности применения таких моделей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пелевин*, *А*. Исследование антенных решеток на основе волноводно-щелевых антенн с диэлектрическим заполнением / А. Пелевин, А. Лерер, Г.Ф. Заргано // СВЧ-электроника. – 2022. – № 1 (20). – С. 33–35.

2. *Pelevin*, *A.O.* Planar slotted ridged waveguide arrays with dielectric filling / A.O. Pelevin, G.F. Zargano, O.Y. Pelevin // Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves. IEEE. – 2021. – С. 199–202.

3. *Boysunov*, *B.P.O.* Integrated antenna on a substrate made of metamaterial based on dielectric and magnetic resonators / B.P.O. Boysunov // Current scientific research in the modern world. – 2021. – № 4-2 (72). – С. 11–16.

4. *Павлов*, *И.Д.* Сверхширокополосная диэлектрическая стержневая антенна / И.Д. Павлов, Я.В. Караев, М.А. Кот // Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника. – 2020. – Т. 23, № 2. – С. 38–45.

5. *Милошенко*, *О.В.* О проектировании антенн на основе планарных диэлектрических волноводов / О.В. Милошенко, А.А. Головин // Вестник Воронежского института высоких технологий. – 2014. – № 13. – С. 42–44.

6. *Преображенский*, *А.П.* Моделирование и алгоритмизация анализа дифракционных структур в САПР радиолокационных антенн / А.П. Преображенский. – Воронеж, 2007. – 248 с.

7. *Бештокова*, *З.В*. Конечно-разностные методы решения нелокальной краевой задачи для многомерного параболического уравнения с граничными условиями интегрального вида / З.В. Бештокова // Дальневосточный математический журнал. – 2022. – Т. 22, № 1. – С. 3–27.

8. *Петров*, *Б.М.* Граничные условия на плоском слое нелинейного диэлектрика, расположенного на металле / Б.М. Петров // В сборнике: Рассеяние электромагнитных волн. Межведомственный сборник научно-технических статей. – Таганрог. – 2004. – С. 146–157.

9. *Гульельми*, *А.В.* К 70-летию формулировки граничного условия Леонтовича (отклик на статью В.И. Альшица и В.Н. Любимова «Обобщение приближения Леонтовича для электромагнитных полей на границе диэлектрик – металл») / А.В. Гульельми // Успехи физических наук. – 2010. – Т. 180, № 1. – С. 105.

10. *Electromagnetic scattering from a cavity embedded in an impedance ground plane* / K. Du, B. Li, W. Sun, H. Yang // Math. Methods Appl. Sci. – 2018. – № 23.

Поступила в редакцию 25.10.2024.

Информация об авторах
Преображенский Андрей Петрович – д.т.н., профессор
Аветисян Татьяна Владимировна – преподаватель
Преображенский Юрий Петирович – к.т.н., доцент

ТЕХНИКА

УДК 621.382 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_84
EDN: KTINLJ

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ ХРУПКИХ НЕМЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ В ПРОИЗВОДСТВЕ ИЗДЕЛИЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ

Е.Б. Шершнев, А.Н. Купо

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

OPTIMIZATION OF BRITTLE NON-METALLIC MATERIALS PROCESSING IN THE PRODUCTION OF ELECTRONIC PRODUCTS

E.B. Shershnev, A.N. Kupo

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Предложена методика расчёта и определены оптимальные параметры обработки твёрдых неметаллических материалов, которые нашли своё применение в электронной технике. Показано, что предложенная методика позволяет оптимизировать обработку таких материалов, как кремний, германий, арсенид галия, кварцевое стекло, природный и синтетический алмаз. При расчёте оптимальных параметров обработки используются значения физико-механических свойств указанных материалов. Полученные результаты могут быть использованы при определении технологических параметров процессов обработки твёрдых хрупких неметаллических материалов в электронике.

Ключевые слова: *оптимизация процессов*, *твёрдые хрупкие материалы*, *изделия и компоненты электроники*.

Для цитирования: *Шершнев*, *Е.Б.* Оптимизация процессов обработки хрупких неметаллических материалов в производстве изделий электронной техники / Е.Б. Шершнев, А.Н. Купо // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 84–90. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_84. – EDN: KTINLJ

Abstract. The paper proposes a calculation method and determines the optimal parameters for processing hard non-metallic materials, which have found their application in electronic engineering. It is shown that the proposed method makes it possible to optimize the processing of such materials as silicon, germanium, gallium arsenide, quartz glass, natural and synthetic diamond. When calculating the optimal processing parameters, the values of the physical and mechanical properties of these materials are used. The results obtained can be used to determine the technological parameters of hard brittle non-metallic materials processing in electronics.

Keywords: *process optimization*, *hard brittle materials*, *electronic products and components.*

For citation: *Shershnev*, *E.B.* Optimization of brittle non-metallic materials processing in the production of electronic products / E.B. Shershnev, A.N. Kupo // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 2 (63). – P. 84–90. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_84 (in Russian). – EDN: KTINLJ

Введение

В настоящее время одним из материалов, применяемых в резонаторах и фотошаблонах для субмикронных интегральных микросхем, является кристаллический и аморфный кварц. Это обусловлено тем, что кварц обладает широкой спектральной областью прозрачности, низким коэффициентом линейного температурного расширения $0{,}54 \cdot 10^{-6}$ $К^{-1}$ и высокой теплопроводностью 1,38 Вт/(м·К). При производстве интегральных микросхем по нормам проектирования меньше 10^{-6} м чистота кварцевых фотошаблонов определяет качество полученных изделий микроэлетроники [1].

Алмаз используется в качестве теплоотводящих оснований для изделий высокотемпературной электронной техники, преобразователей УФ-излучения, подложки для эпитаксиального наращивания полупроводниковых монокристаллических алмазных слоёв для СВЧ-транзисторов, оптических окон для источников мощного излучения, акустоэлектронных устройств [2].

В устройствах отображения информации на основе жидкокристаллических экранов и электронно-оптических систем, формирования прецизионного зазора и изготовление компонент электронной техники из сверхтвёрдых неметаллических материалов, таких как аморфный и кристаллический кварц, природный и синтетический алмаз с высокой производительностью и точностью является актуальной задачей [3]–[5].

1 Расчет оптимального технологического процесса

Технологический процесс обработки сверхтвердых хрупких неметаллических материалов строится на основе эмпирических данных, при этом на разных производствах при одних и тех же требованиях к изделию технологические операции значительно отличаются между собой по

© *Шершнев Е.Б.*, *Купо А.Н.*, 2025

числу необходимых действий и длительности обработки.

Предлагается методика для расчёта зависимостей оптимального числа операций n, минимального основного времени обработки T_{min} и времени обработки T_n для числа операций:

$$n = 2,3\lg\frac{R_{z_0}}{R_{z_n}}, \quad (1.1)$$

$$T_{min} = 2,72n\gamma, \quad (1.2)$$

$$T_n = n\gamma\left(\frac{R_{z_0}}{R_{z_n}}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad (1.3)$$

где R_{z_0}, R_{z_n} – шероховатость поверхности до и после обработки, мкм; $\gamma = \frac{k\beta}{\alpha}$, при этом коэффициенты k, β и α взяты из следующих зависимостей: $F = kR_2$, $v = \alpha D$ и $R_z = \beta D$ (F – глубина нарушенного слоя, мкм; v – скорость съёма материала, мкм/мин; D – зернистость абразивного материала, мкм).

Однако формулы (1.1)–(1.3) не учитывают влияния свойств обрабатываемого материала на процесс обработки.

Можно полагать, что производительность обработки Q и шероховатость поверхности R зависят от физико-механических свойств обрабатываемого материала, таких как микротвердость, микропрочность на отрыв и модуль упругости или модуль сдвига в зависимости от направления обработки:

$$Q = k_2 H^{-2}, \quad (1.4)$$

$$Q = k_3 R^{-\frac{3}{2}}, \quad (1.5)$$

$$R_z = k_2' H^{-\frac{2}{3}}, \quad (1.6)$$

$$R_z = k_3' H^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.7)$$

$$Q = k_5\frac{\mu\rho(1+\mu)}{E} = k_5\frac{\mu\rho}{2G}, \quad (1.8)$$

$$R_z = k_S'\left[\frac{\mu\rho(1+\mu)}{E}\right]^{\frac{1}{3}} = k_S'\left(\frac{\mu\rho}{2G}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad (1.9)$$

где H – микротвердость, R – микропрочность на отрыв, μ – коэффициент Пуассона, ρ – плотность, E – модуль упругости, G – модуль сдвига, k_2, k_2', k_S' – эмпирические коэффициенты.

С увеличением микротвердости, микропрочности на отрыв и модуля упругости (модуля сдвига) производительность процесса снижается и снижается шероховатость обработанной поверхности. Следовательно, технологический процесс обработки материала, имеющего максимальные значения H, R и E (G) (таким материалом является алмаз), обеспечивает минимальный съём материала и получение минимальной шероховатости поверхности. При расчете технологического процесса обработки других твердых хрупких материалов в формулы (1.1) и (1.3) необходимо ввести коэффициент λ, учитывающий влияние физико-механических свойств обрабатываемого материала (по отношению к алмазу).

Значение коэффициента λ можно определить из зависимости:

$$\lambda = \frac{R_{Z(\text{ал})}}{R_{Z(\text{м})}}, \quad (1.10)$$

где $R_{Z(\text{ал})}$ и $R_{Z(\text{м})}$ – шероховатости поверхности алмаза и сопоставляемого материала при одинаковых условиях обработки.

На основании формул (1.4)–(1.9) зависимость (1.10) можно записать в следующем виде:

$$\lambda_H = \left(\frac{H_{\text{м}}}{H_{\text{ал}}}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad (1.11)$$

$$\lambda_R = \left(\frac{R_{\text{м}}}{R_{\text{ал}}}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.12)$$

$$\lambda_{E(G)} = \left[\frac{\mu_{\text{ал}}\rho_{\text{ал}}(1+\mu_{\text{ал}})E_{\text{м}}}{\mu_{\text{м}}\rho_{\text{м}}(1+\mu_{\text{ал}})E_{\text{ал}}}\right]^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{\mu_{\text{ал}}\rho_{\text{ал}}G_{\text{м}}}{\mu_{\text{м}}\rho_{\text{м}}G_{\text{ал}}}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad (1.13)$$

где λ_H, λ_R, $\lambda_{E(G)}$ – коэффициенты, учитывающие влияние на шероховатость обработанной поверхности её физико-механических свойств.

На основании сопоставления предварительных расчетов с экспериментальными данными по обработке некоторых твердых хрупких материалов коэффициент λ, в комплексе учитывающий влияние основных физико-механических свойств на шероховатость, был определен в следующем виде:

$$\lambda = \left(\lambda_H\lambda_R\lambda_{E(G)}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (1.14)$$

В этом случае формулы (1.1) и (1.3) примут вид:

$$n = 2,3\lg\left(\lambda\frac{R_{z_0}}{R_{z_n}}\right), \quad (1.15)$$

$$T_n = n\gamma\left(\lambda\frac{R_{z_0}}{R_{z_n}}\right)^{\frac{1}{n}}. \quad (1.16)$$

Значения коэффициентов λ_H, λ_R, $\lambda_{E(G)}$ и комплексного коэффициента λ для некоторых твердых хрупких материалов приведены в таблице 1.1.

С помощью полученных зависимостей можно рассчитать параметры и результаты выполнения технологических процессов обработки твердых хрупких неметаллических материалов. Исходные данные для определения числа операций и времени обработки приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.1 – Значения физико-механических свойств неметаллических материалов, используемых в микроэлектронике

Материал	H, кгс/мм^2	λ_H	R, кгс/мм^2	λ_R	E, кгс/мм^2	μ	ρ, г/см^3	$\lambda_{E(G)}$	λ
Алмаз	10000	1,00	1800*	1,00	90000	0,25	3,5	1,00	1,00
Монокорунд	2300	0,38	1040	0,76	45000	0,20	3,9	0,83	0,62
Кремний	1050	0,21	400	0,47	15000	0,27	2,4	0,60	0,39
Германий	900	0,20	170	0,31	16000	0,25	5,4	0,49	0,31
Кварцевое стекло	800	0,19	350	0,44	7100	0,14	2,2	0,64	0,38
Арсенид галлия	715	0,17	189	0,32	9100	0,29	5,4	0,38	0,27

Таблица 1.2 – Оптимальные параметры технологических процессов обработки твердых хрупких материалов, используемых в микроэлектронике

Материал	R_{z_0}, мкм	R_{z_n}, мкм	$n_{\text{расч}}$	$n_{\text{оптимальное}}$	$T_{min}\gamma$	$T_2\gamma$	$T_3\gamma$	$\frac{T_2}{T_{min}}$, %	$\frac{T_3}{T_{min}}$, %
Монокорунд	3,2	0,05	3,68	4	10,88	12,60	10,23	116	94
	2,5	0,05	3,43			11,14	9,42	102	87
	2,5	0,04	3,66			12,45	10,15	114	93
Кремний	2,5	0,032	3,42	3	8,16	11,04	–	135	–
	2,0	0,032	3,19			9,87		121	
	2,5	0,05	2,97			8,83		108	
	2,0	0,05	2,74			7,90		97	
Германий	2,0*	0,05	2,51	3	8,16	7,04	–	86	–
	2,0	0,032	2,96			8,80		107	
	2,5*	0,05	2,74			7,87		96	
	2,5	0,032	3,18			9,84		121	
Кварцевое стекло	3,2	0,05	3,19	3	8,16	9,86	–	121	–
	2,5	0,032	3,39			10,90		134	
	2,5	0,05	2,94			8,71		106	
Арсенид галлия	1,6	0,05	2,15	2	5,44	–	–	–	–
	2,0	0,05	2,37						
	1,6	0,032	2,60	3	8,16	8,21	–	101	–
	2,0	0,032	2,83						

Число операций для приведенных в таблице 1.2 значений R_{z_0} и R_{z_n} можно определить по формуле (1.15) и, округлив расчетные значения $n_{\text{расч}}$, получить оптимальное число операций $n_{\text{оптимальное}}$.

Поверхность, отвечающую заданным требованиям, можно получить при большем или меньшем числе операций. Время обработки при таком технологическом процессе, рассчитанное по формуле (1.16), приведено в столбце для $T_2\gamma$ и $T_3\gamma$ (см. таблицу 1.2).

Из полученных данных можно заключить, что при обработке, например, монокорунда оптимальным следует считать трехоперационный ($n = 3$) процесс. Оптимальным для случая обработки арсенида галлия является технологический процесс в две операции; для кремния, германия и кварцевого стекла – трехоперационный. Однако при некоторых исходных значениях шероховатости для кремния и германия оптимальным будет двухоперационный процесс. На ряде предприятий электронной промышленности при изготовлении кремниевых пластин успешно применяют трехоперационный технологический процесс вместо процесса в пять-шесть операций, использовавшегося ранее, причем для обработки нерабочей стороны, шероховатость которой должна соответствовать $R_z = 0{,}1$, применяют процесс в две операции.

Следует отметить, что при выбранном оптимальном числе операций иногда бывает целесообразным переход к технологическому процессу с меньшим числом операций, так как, несмотря на некоторое увеличение основного (машинного) времени, оперативное время обработки снижается за счет сокращения вспомогательного времени, затрачиваемого при переходе от одной операции к другой. Например, на финишных операциях вспомогательное время при подготовке смоляных полировальников или доведении полировальника по плоскостности значительно

превосходит время обработки на предварительных операциях. Поэтому в каждом конкретном случае при выборе числа операций, отличающихся от оптимального технологического процесса, необходимо проведение технико-экономического анализа.

Рассчитаны и внедрены в производство процессы обработки кварцевого стекла. Предложенная методика расчета оптимального числа операций дает возможность значительно снизить себестоимость обработки хрупких материалов [6], [7].

2 Технологические процессы изнашивания синтетического алмаза

В процессе исследования зависимости изнашивания поверхности синтетических алмазов от шероховатости поверхности алмазного инструмента установлена динамика изменения режущего рельефа органичного диска путем периодического профилографирования в процессе обработки. В качестве исследуемого алмазного инструмента использовали гальванические ограночные диски с алмазосодержащими слоями.

Процессы контактного взаимодействия шлифуемого искусственного алмаза и ограночного инструмента зависят от характера распределения неровностей рабочей поверхности последнего [8], [9]. Это распределение можно описать рядом параметров (R_a, R_q, γ и др.).

Наиболее функциональным является геометрическая характеристика шероховатости поверхности среднеарифметическое отклонение R_a. Экспериментально установлено, что наибольшая интенсивность изнашивания искусственного алмаза соответствует такой стадии подготовки абразивной поверхности алмазного инструмента, когда контактирующее алмазосодержащее покрытие рабочего полотна диска после укатки характеризуется R_a = 0,158 мкм.

Для реализации высокой интенсивности изнашивания монокристаллов искусственного алмаза, обрабатываемых ограночными дисками с различными алмазосодержащими покрытиями, необходима технологическая операция их укатки. Для укатки применялся поликристалл на металлической связке. Исследовали зависимость характеристик изнашивания искусственного алмаза от марки алмазного порошка и усилия в контакте монокристалл-инструмент. Механизм изнашивания искусственного алмаза базируется на сочетании взаимосвязанных физико-химических и термических процессов [10], протекающих в тонком поверхностном слое обрабатываемого монокристалла под действием температурно-силового фактора. О преобладании влияния того или иного процесса на изнашивание искусственного алмаза можно судить только в реальных технологических условиях его обработки.

В процессе экспериментальных исследований зависимости характеристик изнашивания искусственного алмаза от марки алмазного порошка при разных удельных давлениях на кристалл применяли алмазные синтетические порошки АСН 7 / 5, АСН 10 / 7, АСН 20 / 14, АСН 28 / 20. Их концентрация в покрытии на диске составляла 0,0028 кар/см² для каждой исследуемой марки. Образцы монокристаллов ориентировали в плоскости октаэдра. Усилие на заготовку искусственного алмаза равнялось 0,98–3,43 МПа, частота вращения ограночного диска – 3500–4000 об/мин.

В результате исследований установлено, что для обработки плоских поверхностей искусственного алмаза оптимальным для применения является чугунный ограночный диск, укатанный с двойным алмазосодержащим слоем: первый слой – порошок АСН 14 / 10, зарощенный Ni, второй алмазосодержащий слой с порошком АСН 10 / 7, зарощенный Fe. Для повышения работоспособности алмазного инструмента в режиме полирования плоских поверхностей искусственного алмаза предложен способ подготовки рабочей поверхности ограночного диска, заключающийся в повторном нанесении на алмазосодержащее покрытие равномерного слоя пасты алмазной металлизированной марки ПОМ АСМ 7 / 5 или АСМ 5 / 3. Полирующая способность ограночного алмазного инструмента возникает в результате образования на алмазных зернах площадок износа и сохраняется до тех пор, пока размер их не превышает 3 мкм в поперечнике. При отсутствии повторно нанесенных алмазных субмикропорошков площадка износа на микропорошках значительно увеличивается, соответственно этому возрастает глубина рисок обрабатываемой поверхности. Наличие алмазной пасты способствует более длительному сохранению полирующей способности ограночного алмазного инструмента.

Методом плоского шлифования и полирования поверхности изготавливаются следующие виды инструмента: иглы из алмазота в виде четырехгранной пирамиды для правки абразивных кругов; резцы для скрайбирования; наконечник пирамидальный для определения твердости по методу Виккерса.

Процесс изнашивания цилиндрических и конических поверхностей на монокристаллах искусственного алмаза имеет отличительные особенности по сравнению с процессом изнашивания его плоских поверхностей. Это прежде всего наличие на обрабатываемой поверхности кристаллографических плоскостей с различными физико-механическими свойствами. Кроме того, если при изнашивании плоских поверхностей искусственного алмаза необходимо получение шероховатости высокого класса, то для цилиндрических достаточно обеспечить шероховатость поверхности R_a = 0,6–1,25 мкм.

Теоретические исследования взаимодействия алмазного инструмента с монокристаллом синтетического алмаза показали, что на контролируемых поверхностях обрабатываемого кристалла и алмазного инструмента под действием приложенной нагрузки возникают контактные напряжения и, если их значения превышают прочность алмаза, происходит его разрушение, т. е. изнашивание.

При этом следует учитывать, что вероятность разрушения хрупких кристаллических тел в том или ином направлении определяется наиболее благоприятным сочетанием плотности их кристаллографических сеток, межплоскостного расстояния и количества разрываемых межатомных связей на единицу поперечного сечения.

Исследовался механизм износа искусственного алмаза при шлифовании различным алмазным инструментом.

Объектами исследования служили монокристаллы искусственного алмаза. В качестве инструмента применяли алмазные круги формы А1 диаметром 250 мм на металлической (система Cu-Sn) и органической связках. Размер зерен алмазного синтетического порошка составлял 63–40, 80–63 мкм. Режимы обработки – линейная скорость шлифования 1–2 м/с, ток травления для кругов на металлической связке 2,0–3,0 А для заготовок диаметром 3–4,5 мм. Для сравнения морфологии обрабатываемых поверхностей осуществляли шлифование инструментом на металлической связке (Cu – Sn) с электрохимическим восстановлением (растворением) профиля. После обработок исследовали морфологии поверхности монокристалла искусственнного алмаза инструментом на металлической связке (максимальная скорость растворения 160–170 мкм/час, зерно АС-6, 80–63 мкм). Морфология поверхности представляет собой рельеф из параллельно расположенных углублений (царапин) длиной 1–3 мм, глубиной 15–30 мкм, шириной 7–40 мкм. Микрорельеф такой поверхности представлен кратерами размерами 8–2 мкм, глубиной 1–4 мкм. При снижении интенсивности растворения металлической связки происходит изменение морфологии поверхности кристалла – грубый, глубокий рельеф сглаживается. На фоне сглаженного рельефа появляются острые царапины, узкие в начале и расширяющиеся затем с образованием углубления (кратера).

Анализ морфологии поверхности инструмента показывает, что при скоростях растворения металлической связки 120–140 мкм/час поверхность приобретает грубый рельеф. Глубина впадин достигает 100–200 мкм. Растворение поверхности сплава неравномерное. Алмазные зерна имеют площадки износа, на поверхности связки имеются углубления (отпечатки) от выкрошившихся зерен. При снижении скорости растворения (30–50 мкм/час) рельеф поверхности связки не меняется. Отпечатков выкрошившихся зерен больше. На зернах выступающих из связки имеются площадки износа.

Анализ морфологии поверхности кристалла обработанного инструментом на органической связке с тем же размером зерен алмазного синтетического порошка показывает, что рельеф поверхности выражен в меньшей степени. Углубления (царапины) на поверхности кристалла менее глубокие, можно идентифицировать отдельные из них. При повышенных скоростях растворения связки отдельные царапины имеют узкое начало, а заканчиваются углублением. Микрорельеф представлен углублениями размером 102 мкм с четко выраженным рельефом. Морфология поверхности алмазоабразивной композиции гладкая, однородная, глубина микрорельефа составляет 3–10 мкм. Зерна алмаза имеют, как правило, острые вершины. Наряду с зернами в связке имеются углубления, заполненные несколькими кристаллами (алмаза). Продукты износа состоят из 5–10% мас. частиц фракции 40–20 мкм, 20–30% мас. частиц фракции 20–13 мкм, 10–15% мас. частиц фракции 14–10 мкм. Остальные частицы имеют размеры менее 10 мкм, причем значительная доля частиц фракции 0,1–1 мкм.

Таким образом, анализ морфологии поверхностей алмазоабразивных композиций на металлической, органической связке, изменения характера морфологии кристалла искусственного алмаза в зависимости от скорости износа связки показал, что износ поверхности кристалла искусственного алмаза происходит следующим образом.

При растворении связки зерно выступает над ее поверхностью и перемещается по кристаллу искусственного алмаза. При достижении определенного давления вершина разрушается (крошится) с образованием площадки износа. Зерно контактирует с поверхностью плоской вершиной.

По мере растворения связки давление на вершину возрастает. Зерно разрушается на несколько осколков размерами 20–1 мкм. Одновременно перемещаясь и соударяясь с поверхностью, зерно с плоской вершиной деформирует поверхность кристалла. Накопление дефектов приводит к выкрошиванию фрагментов размерами 0,1–1 мкм. Об этом свидетельствует микрорельеф поверхности кристалла (выступы и впадины с характерным масштабом 0,1–1 мкм).

Одновременно наблюдается и иной механизм разрушения поверхности кристалла. Зерно при соударении с кристаллом вдавливается в дефектный слой кристалла, постепенно разрушается, формируя расширяющуюся царапину. Затем зерно с плоской вершиной разрушается на несколько частиц, которые сохраняются в связке. Осколки, удерживаемые связкой, также участвуют в износе поверхности кристалла и далее

разрушаются. Совокупность таких царапин формирует морфологию поверхности. Чем больше размер зерна (и больше его прочность) тем глубже рельеф, формируемый на поверхности кристалла. Существование на поверхности кристалла царапин с различной морфологией микрорельефа и характерным масштабом элементов 0,1–1 мкм небольшое (5–10% мас.). Содержание в продуктах износа крупных осколков искусственного алмаза показывает, что износ поверхности кристалла при алмазоабразивной обработке протекает как за счет разрушения (резания) поверхности острой вершиной, так и путем микросколов при соударении плоской вершины с поверхностью кристалла. Варьирование характеристик связки позволяет изменять и морфологию поверхности кристалла.

Различия в механизмах износа алмазоабразивных композиций на органической и металлической связках определяют и эксплуатационные характеристики инструмента. Композиции на органической связке способны адаптироваться к изменению условий в обработке (давления шлифования, вибрация), формируют менее глубокий рельеф с менее выраженным дефектным слоем – микротрещины под цилиндрической или конической поверхностью. Удельный расход алмазного порошка несколько больше, чем в композициях на металлической связке (до 20%) при более высокой (на 20–40%) скорости шлифования однородных матовых обрабатываемых поверхностей.

Экспериментально установлено, что для получения цилиндрической и конической поверхности при черновой обточке лучше всего использовать круги на органической связке с размером зерна алмазного порошка 63 / 40 , при этом шероховатость поверхности после обработки R_a = 2,5–5 мкм. Для получистовой обточки необходимо использовать круги на органической связке с размером зерна 20 / 14, при этом шероховатость обработанной поверхности – R_a = 0,08–0,16 мкм.

Заготовка иглы для правки фильер закрепляется в специальное приспособление для полировки конусов, которое размещено над рабочей поверхностью ограночного диска. Приспособление дает возможность перемещения зажимного устройства относительно заданной оси наклона от 0 до 60 мм; вращения обрабатываемой иглы со скоростью от 0 до 400 об/мин.

Возможность разворота зажимного устройства в вертикальной плоскости от нулевого горизонтального положения до 80 градусов угла наклона.

При изготовлении наконечников типа НК необходимо задать сферическую рабочую поверхность наконечника. Эта поверхность также задается на станке ОАБ-4 «М» на специальном ограночном диске с использованием установки для полировки сфер. Специальный ограночный диск изготавливается из стали 40 или стали 45. Рабочее полотно специального ограночного диска состоит из двух рабочих зон. Периферийная зона футерована текстолитовым материалом шириной до 60 мм в рабочей зоне ограночного диска; вторая зона, расположенная ближе к центру – из стали корпуса. Специальный ограночный диск притираетя карбидом кремния N 8 и шаржируется алмазным порошком АСН 7 / 5 на клеевой связке БФ-6.

Проводилась опытная работа по определению оптимальных параметров нагрузки при обработке цилиндрических и конических поверхностей искусственного алмаза в процессе изготовления алмазного инструмента. Обработка кристаллов проводилась на полуавтомате круглошлифовальном модели ЛЗ-270, оснащенном ваттметром для замера нагрузок задаваемых обдирочным кругом на обрабатываемый кристалл. Использовался круг алмазный 1А1 250х10х5х76 АСБ 63 / 40 СО АЛН 03-358.000-05. Задавалась нагрузка от 6,88Н до 10,2Н.

Заключение

В работе показана методика расчёта оптимальных параметров и прогнозирования режимов обработки хрупких сверхтвёрдых неметаллических материалов в технологиях электроники с использованием эмпирических коэффициентов и с учётом физико-механических свойств основных материалов электронной техники. В результате экспериментальных и теоретических исследований установлены некоторые оптимальные режимы обработки указанных материалов электронной промышленности. Предложенные методики нашли своё применение и проходят апробацию на ведущих предприятиях отрасли.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Емельянов*, *В.А.* Двухлучевая лазерная очистка кварцевого сырья / В.А. Емельянов, Е.Б. Шершнёв, С.И. Соколов // Доклады БГУИР. – 2021. – Т. 19, № 3. – С. 40–48.

2. *Шершнев*, *Е.Б.* Лазерные технологии и оборудование в электронике / Е.Б. Шершнев, С.И. Соколов, В.А. Емельянов. – Минск: Интеграл Полиграф, 2023. – 204 с.

3. *Изучение влияния примесей на процессы формообразования синтетического алмаза в зоне термического влияния лазерного излучения* / В.А. Емельянов, Е.Б. Шершнев, А.Н. Купо, С.И. Соколов // Известия Гомельского государственного университета имени. Ф. Скорины. – 2022. – № 3 (132). – С. 117–120.

4. *Оптимизация лазерной полировки аморфного кварца с использованием метода планирования вычислительных экспериментов* / В.А. Емельянов, Е.Б. Шершнев, Ю.В. Никитюк, С.И. Соколов, И.Ю. Аушев // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 26–30.

5. *Оптимизация параметров лазерной обработки алмазов* / В.А. Емельянов, Е.Б. Шершнев, Ю.В. Никитюк, С.И. Соколов, И.Ю. Аушев // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 4 (53). – С. 30–36.

6. *Инновационные технологии и оборудование субмикронной электроники* / А.П. Достанко, С.М. Аваков, Д.А. Голосов, В.В. Емельянов, С.М. Завадский, В.В. Колос, В.Л. Ланин, С.И. Мадвейко, С.Н. Мельников, Ю.В. Никитюк, А.Н. Петлицкий, И.Б. Петухов, В.А. Пилипенко, В.И. Плебанович, В.А. Солодуха, С.И. Соколов, Е.В. Телеш, Е.Б. Шершнев; под ред. А.П. Достанко. – Минск: Беларус. навука, 2020. – 260 с.

7. *Шершнев*, *Е.Б.* Лазерные технологии и оборудование в электронике / Е.Б. Шершнев, С.И. Соколов, В.А. Емельянов. – Минск: Интеграл Полиграф, 2023. – 204 с.

8. *Кондратенко*, *В.С.* Высокоэффективные технологии обработки материалов на базе новых типов алмазного инструмента // Стекло и керамика. – 2018. – Т. 91, № 5. – С. 39–43.

9. *Новый алмазный инструмент для обработки оптических материалов* / В.С. Кондратенко [и др.] // Оптический журнал. – 2017. – Т. 84, № 6. – С. 54–57.

10. *Контактные процессы при алмазной обработке инструментальных материалов* / В.Ю. Попов, А.С. Янюшкин, О.И. Медведева, В.Ю. Скиба // Системы. Методы. Технологии. – 2014. – № 3 (23). – С. 68–74.

Поступила в редакцию 14.02.2025.

Информация об авторах

Шершнев Евгений Борисович – д.т.н., доцент
Купо Александр Николаевич – к.т.н., доцент

ИНФОРМАТИКА

УДК 512.548 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_91
EDN: FUQEQA

ТЕХНОЛОГИЯ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ АВТОМАТИЗИРОВАННЫМИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМИ СИСТЕМАМИ НА ОСНОВЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

В.А. Прохоренко, В.С. Смородин

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

TECHNOLOGY OF ADAPTIVE CONTROL OF AUTOMATED PRODUCTION SYSTEMS BASED ON NEURAL NETWORKS

V.A. Prokhorenko, V.S. Smorodin

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Представлена технология адаптации управления, основанная на синтезе нейрорегуляторов с использованием нейросетевых алгоритмов. Технология включает процедуру синтеза нейрорегулятора, которая использует алгоритмы оптимизации архитектуры нейронной сети. Предложенный подход к разработке предусматривает возможность задания численных критериев оценки качества адаптации и применения имитационной модели системы управления технологическим процессом. При наличии регулятора-прототипа осуществляется моделирование динамики его функционирования для улучшения адаптационных характеристик системы.

Ключевые слова: *нейронная сеть*, *адаптивное управление*, *нейрорегуляторы*, *эволюционные алгоритмы*, *технологическая операция*, *технология адаптивного управления.*

Для цитирования: *Прохоренко*, *В.А*. Технология адаптивного управления автоматизированными производственными системами на основе нейронных сетей / В.А. Прохоренко, В.С. Смородин // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 91–96. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_91. – EDN: FUQEQA

Abstract. The paper presents a control adaptation technology based on the synthesis of neuroregulators using neural network algorithms. The technology includes a procedure for synthesizing a neuroregulator, which uses algorithms for optimizing the neural network architecture. The proposed approach to development provides for the possibility of setting numerical criteria for assessing the quality of adaptation and using a simulation model of the process control system. In the presence of a prototype regulator, the dynamics of its functioning are simulated to improve the adaptive characteristics of the system.

Keywords: *neural network*, *adaptive control*, *neuroregulators*, *evolutionary algorithms*, *technological operation*, *adaptive control technology.*

For citation: *Prokhorenko*, *V.A*. Technology of adaptive control of automated production systems based on neural networks / V.A. Prokhorenko, V.S. Smorodin // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 2 (63). – P. 91–96. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_91 (in Russian). – EDN: FUQEQA

Введение

В процессе реального функционирования сложных технических систем, в частности, технологического цикла производства [1], возникает потребность учета внешних дестабилизирующих факторов в режиме реального времени. Поэтому заслуживает внимания вопрос разработки методов, алгоритмов и средств, способных обеспечить существенное снижение чувствительности параметров технологического цикла к воздействию дестабилизирующих факторов, в том числе случайных внешних возмущений и управляющих воздействий.

Разработка новых технологий адаптации управления, базирующихся на современных методах искусственного интеллекта, позволит выстроить экосистему решений по автоматизации современных производственных систем, повышая качество продукции и экономическую эффективность.

В статье описана технология адаптации управления технологическим процессом на уровне технологических операций, которая обеспечивает использование интеллектуальных компьютерных систем адаптивного управления [2] в режиме реального времени. Описывается процесс синтеза нейрорегулятора, включающий в себя применение алгоритмов автоматизированного поиска оптимальной архитектуры нейронной сети.

1 Алгоритмы синтеза нейрорегуляторов

Нейронные сети представляют собой параметризованные модели, которые могут быть использованы в качестве универсальных аппроксиматоров [3], обладают устойчивостью к шуму и имеют приложения в сложных прикладных задачах. В рамках разработанной системы адаптации управления используется процедура синтеза нейрорегулятора с применением нейросетевых

© *Прохоренко В.А.*, *Смородин В.С.*, 2025

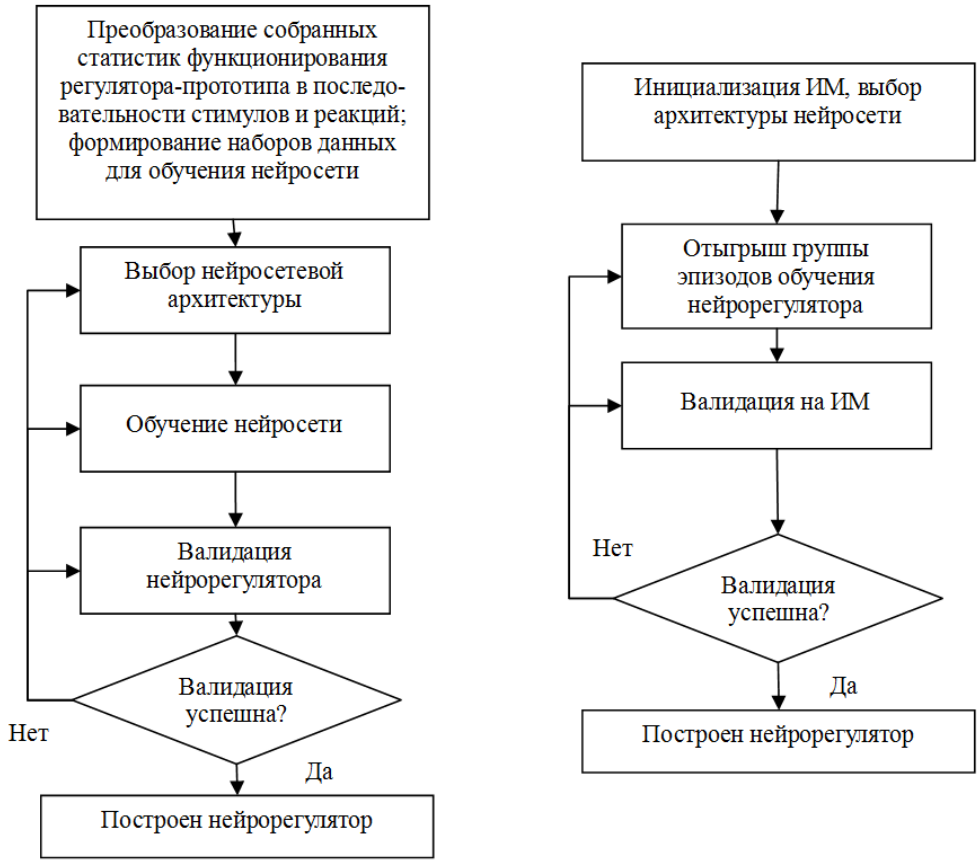


Рисунок 1.1 – Общие схемы синтеза нейрорегуляторов при наличии существующего прототипа (слева) и при осуществлении поиска оптимальной политики выбора действий с применением методов обучения с подкреплением (справа)

алгоритмов. Процедура синтеза нейрорегулятора может также включать в себя использование алгоритмов поиска оптимальной архитектуры нейронной сети. Общий подход предполагает, что пользователь системы может задать численные критерии оценки качества адаптации (функционал оценки качества адаптации) и имеет имитационную модель [4] системы управления технологическим процессом. Альтернативно возможно осуществить моделирование известной динамики регулятора-прототипа при его наличии (рисунок 1.1).

2 Моделирование динамики существующего регулятора

При наличии существующего регулятора-прототипа системы можно осуществить моделирование его динамики с помощью обучения с учителем [5], [6].

Процесс обучения нейронных сетей (рисунок 2.1) состоит в поиске оптимальных в контексте решаемой задачи значений настраиваемых параметров модели (весовых коэффициентов), что достигается путем решения некоторой оптимизационной задачи, обычно градиентными методами (рисунок 2.2) [3]. Следует отметить, что на этапе сбора данных необходимо обеспечить хранение полной и репрезентативной статистики функционирования регулятора-прототипа, адекватно отражающей существующее пространство наблюдений и управляющих воздействий.

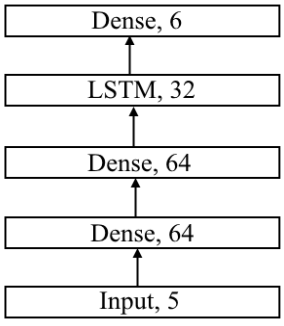


Рисунок 2.1 – Пример рекуррентной архитектуры нейронной сети для моделирования динамики существующего регулятора

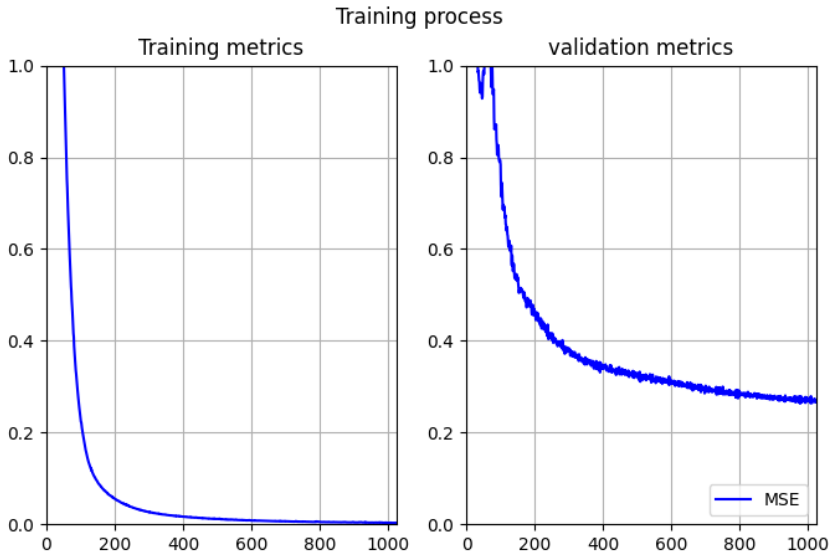


Рисунок 2.2 – Динамика изменения функции потерь (обучения и валидации) в процессе построения нейрорегулятора на базе регулятора-прототипа

3 Поиск оптимальной архитектуры нейронной сети

Поскольку задача выбора структуры нейронной сети в каждом из случаев является сложной и трудно формализуемой, предложены методы частичной автоматизации ее решения. В рамках разработанной технологии реализовано 2 подхода поиска оптимальной архитектуры нейрорегулятора: на основе схемы перебора архитектур-кандидатов и на основе эволюционного алгоритма (рисунок 3.1). В случае структуры пространства наблюдений нейрорегулятора, которая допускает использование нейросетевых архитектур, не являющихся глубокими, схемы перебора позволяют получить и наглядно отобразить эффективность рассматриваемых архитектур-кандидатов (рисунок 3.1).

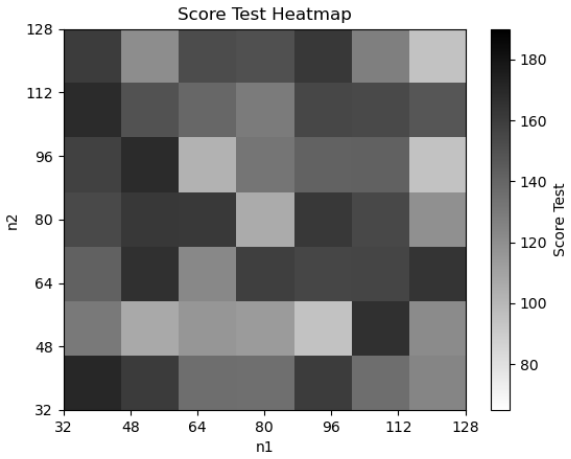


Рисунок 3.1 – Пример тепловой карты средних значений функционала оценки качества адаптации управления при автоматизированном подборе архитектуры нейрорегулятора [8]

При решении задачи поиска глубокой архитектуры для нейрорегулятора неочевидны критерии перебора. Генетические алгоритмы потенциально универсальны [9], они позволяют найти решение в ситуации, когда неизвестно как его искать. Существуют примеры, когда генетические алгоритмы поиска нейросетевых архитектур позволили значительно улучшить качество моделей [10]. Поиск оптимальной архитектуры нейрорегулятора в рамках описываемого подхода осуществляется с помощью модифицированного алгоритма нейроэволюции NEAT, в котором осуществляется последовательное движение от простых структур к более сложным (рисунок 3.2) [11], [12]. Применение эволюционного алгоритма позволяет построить архитектуру нейронной сети, соответствующую решаемой задаче (рисунок 3.3).

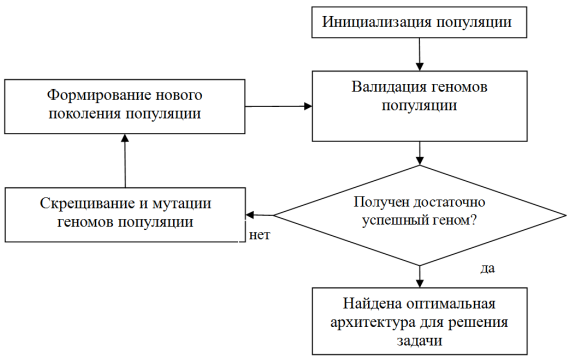


Рисунок 3.2 – Схема эволюционного алгоритма подбора архитектуры нейрорегулятора

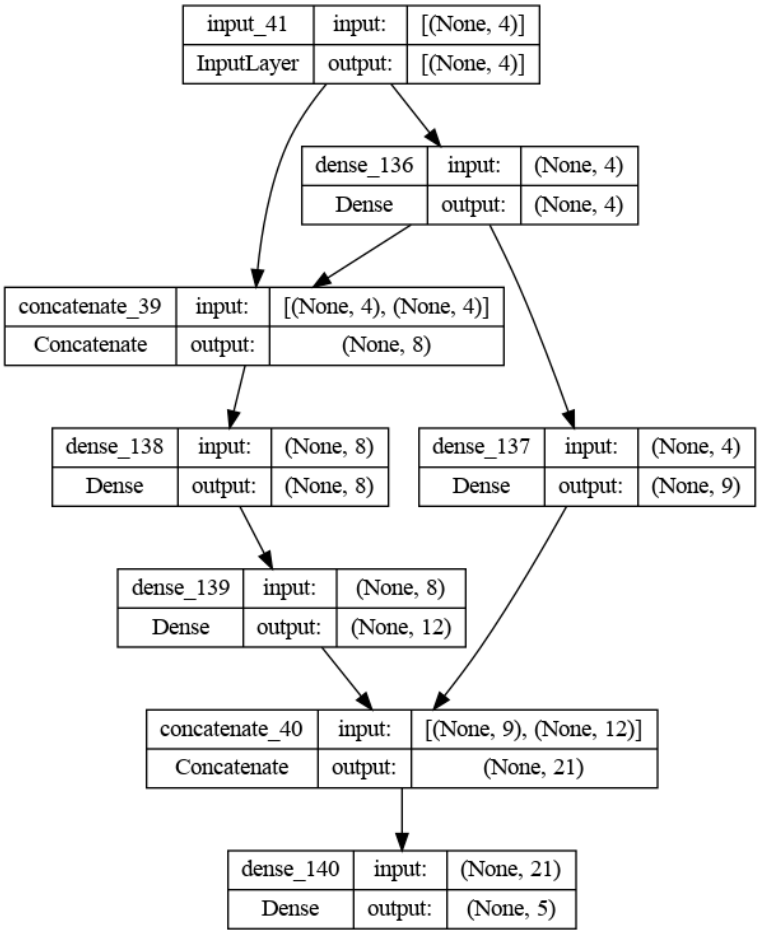


Рисунок 3.3 – Пример архитектуры нейрорегулятора, полученной в результате применения эволюционного алгоритма

4 Синтез нейрорегулятора для оптимальной адаптации управления

В реальных условиях могут быть неочевидны принципы построения оптимальной адаптации управления. В этой ситуации для решения задачи синтеза нейрорегулятора могут быть применены методы обучения с подкреплением [4].

Такой подход позволяет принять во внимание определенные технологическим регламентом требования, предъявляемые к реализации технологической операции в составе процесса производства, и осуществить синтез адаптации управления для обеспечения функционирования процесса согласно этим требованиям. Формализация требований пользователя к политике выбора адаптации управления осуществляется путем определения функционала оценки качества адаптации управления.

При решении задачи поиска оптимальной стратегии обслуживания устройств оборудования ТП функционал оценки качества адаптации управления включает в себя компоненты, отвечающие за оценку стабилизации параметров функционирования ТП, таких как время непрерывной работы цикла ($R_{пор}$), суммарный объём затрат на обслуживание и ликвидацию отказов и аварий оборудования (R_{cost}), суммарное число отказов оборудования (R_f), в том числе, приведшее к аварии (R_{fe}), суммарное число профилактик за цикл (R_{rep}). В соответствии с требованиями, предъявляемыми к процессу адаптации управления ТП, строится целевая функция на базе этих компонентов:

$$R = \alpha_1 R_{пор} + \alpha_2 R_{cost} + \alpha_3 R_f + \alpha_4 R_{fe} + \alpha_5 R_{rep}.$$

Обучение нейрорегулятора производится с использованием policy gradient (алгоритма REINFORCE [13]). В результате обучения система с построенным регулятором показывает более высокую эффективность в минимизации затрат на обслуживание, чем система со штатным регулятором (рисунок 4.1). При этом время простоя цикла, связанное с отказами, не увеличивается (рисунок 4.2).

Аналогичный подход можно рассматривать также при решении задачи стабилизации параметров технологической операции лазерной обработки материалов [4]. Например, в задаче однолучевого лазерного термораскалывания

хрупких неметаллических материалов (рисунок 4.3) [8] важным вопросом является соблюдение температурного режима с целью недопущения перегрева и расплавления заготовки. В данной задаче функционал оценки качества адаптации имеет вид:

$$R = \alpha_1 R_T + \alpha_2 R_V + \alpha_1 R_\sigma,$$

где R_T – компонент оценки удержания температуры в допустимом диапазоне; R_V – компонент оценки скорости резки; R_σ – компонент оценки максимального напряжения растяжения.

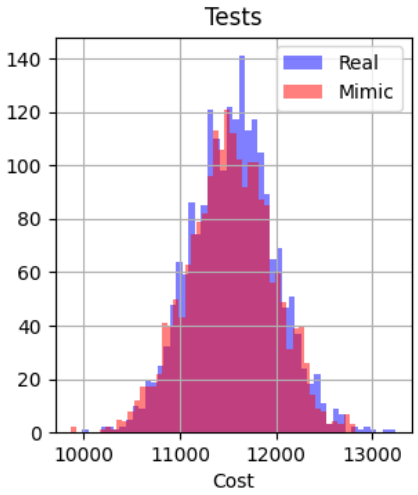


Рисунок 4.1 – Гистограммы распределений суммарных затрат при тестировании штатного регулятора системы и обученного нейрорегулятора

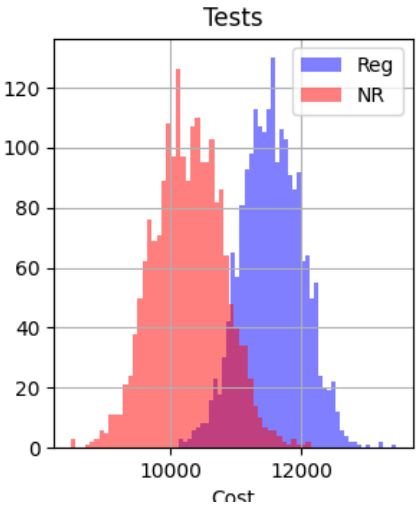


Рисунок 4.2 – Гистограммы распределений времени простоя при тестировании штатного регулятора системы (Reg) и обученного нейрорегулятора (NR)

На рисунке 4.4 показана динамика изменения усредненных значений функционала оценки качества адаптации управления при обучении нейрорегулятора системы управления технологической операцией с помощью алгоритма REINFORCE.

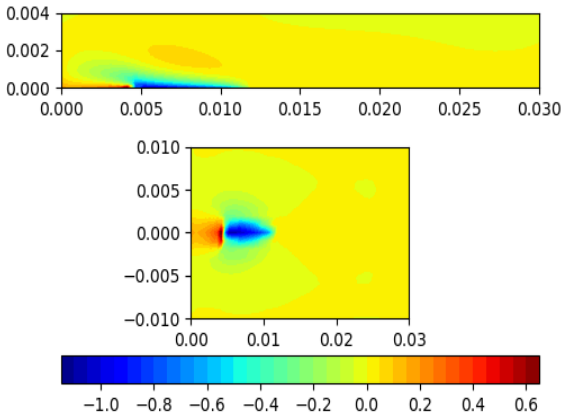


Рисунок 4.3 – Визуализация полей напряжения растяжения на поверхности заготовки из кварцевого стекла

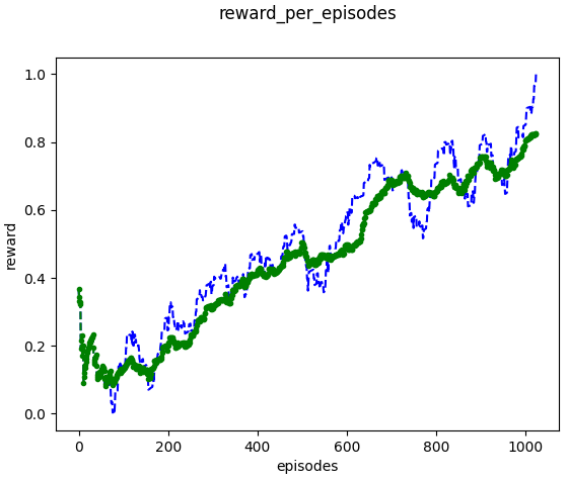


Рисунок 4.4 – Динамика изменения функционала оценки качества адаптации в процессе обучения

В таблице 4.1 показаны результаты использования нейрорегулятора технологической операции лазерной обработки материалов. Приведены значения параметров скорости (V), мощности лазерного излучения (P), наблюдаемой температуры (T) и аппроксимированного значения максимального напряжения растяжения (σ_{yy}).

Таблица 4.1 – Сравнение значений параметров технологической операции лазерной обработки материалов без применения нейрорегулятора (первая строка) и с применением нейрорегулятора (вторая строка)

V, м/с	P, Вт	T, К	σ_{yy}, МПа
0,011	24,0	1390	7,04
0,0133	26,5	1395	7,2

Заключение

Нейронные сети, обладая свойствами универсальной аппроксимации и устойчивости к шуму, позволяют эффективно решать задачи управления в условиях неопределенности. В статье представлена технология адаптивного управления автоматизированными производственными системами на основе нейронных сетей, которая обеспечивает использование интеллектуальной компьютерной системы адаптации управления технологическим циклом в режиме реального времени.

Применение алгоритмов нейросетевого моделирования при реализации адаптации управления технологической операции лазерной обработки материалов позволило увеличить скорость обработки на 21% и сократить расходы на обслуживание оборудования технологического цикла производства на 20–25%.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Максимей*, *И.В*. Проблемы теории и практики моделирования сложных систем / И.В. Максимей, В.С. Смородин, О.М. Демиденко. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2015. – 263 с.

2. *Прохоренко*, *В.А*. Система адаптивного управления технологическим циклом автоматизированного производства / В.А. Прохоренко // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2023. – № 3 (138). – С. 69–73.

3. *Осовский*, *С*. Нейронные сети для обработки информации: учебно-справочное издание / С. Осовский. – Москва: Финансы и статистика, 2002. – 343 с.

4. *Smorodin*, *V*. Software-Technological Complex for Adaptive Control of a Production Cycle of Robotic Manufacturing / V. Smorodin, V. Prokhorenko // Open semantic technologies for intelligent systems. – 2022. – № 6. – P. 401–404.

5. *Hagan*, *M.T*. Neural networks for control / M.T. Hagan, H.B. Demuth // Proceedings of the 1999 American Control Conference / IEEE. – New York, 1999. – P. 1642–1656.

6. *Widrow*, *B*. Pattern-recognizing control systems / B. Widrow, F.W. Smith // Proceedings of Computer and Information Sciences. – Washington, USA. – 1964. – Vol. 12. – P. 288–317.

7. *Прохоренко*, *В.А*. Система адаптивного управления технологической операцией лазерной обработки хрупких неметаллических материалов / В.А. Прохоренко, Ю.В. Никитюк, В.С. Смородин // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 78–81.

8. *Прохоренко*, *В.А*. Система адаптивного управления технологической операцией лазерной обработки хрупких неметаллических материалов / В.А. Прохоренко, Ю.В. Никитюк, В.С. Смородин // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 78–81.

9. *Melanie*, *M*. An Introduction to Genetic Algorithms / M. Melanie. – London: Fifth Printing, 1999. – 158 p.

10. *Angeline*, *P*. An evolutionary algorithm that constructs recurrent neural networks / P. Angeline, G.M. Saunders, J.B. Pollack // IEEE Transactions on Neural Networks. – 1994. – Vol. 5. – P. 54–65.

11. *Stanley*, *K.O*. Evolving Neural Networks through Augmenting Topologies / K.O. Stanley, R. Miikkulainen // Evolutionary computation. – 2002. – Vol. 10. – P. 99–127.

12. *Никитюк*, *Ю.В*. Многокритериальная оптимизация параметров лазерной резки кварцевого стекла с применением нейросетевого моделирования и генетического алгоритма / Ю.В. Никитюк, В.А. Прохоренко, А.И. Кулыба // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 26–31.

13. *Williams*, *R.J*. Simple statistical gradient-following algorithms for connectionist reinforcement learning / R.J. Williams // Machine Learning. – 1992. – № 8. – P. 229–256.

Поступила в редакцию 27.03.2025.

Информация об авторах

Прохоренко Владислав Александрович – ст. преподаватель
Смородин Виктор Сергеевич – д.т.н., профессор

ИНФОРМАТИКА

УДК 004.89 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_97
EDN: FGHDOK

ДИСКРЕТНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ ФАКТОРИЗАЦИИ

А.А. Чагочкин

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

DISCRETE OPTIMIZATION FOR THE FACTORIZATION PROBLEM

A.A. Chagochkin

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Рассмотрена задача факторизации натуральных чисел на простые множители в контексте дискретной оптимизации и машинного обучения. Предложен подход с разложением на слагаемые и связанная функция для использования с генетическими алгоритмами (в качестве фитнес функции) и нейронными сетями (в качестве функции ошибки). Проведен статистический анализ изменений функции дискретного преобразования оптимального делителя с целью аппроксимации области оптимальных дискретных преобразований для пробного делителя.

Ключевые слова: *факторизация больших чисел*, *дискретная оптимизация*, *машинное обучение*, *нейронные сети*, *генетические алгоритмы.*

Для цитирования: *Чагочкин*, *А.А*. Дискретная оптимизация для задачи факторизации / А.А. Чагочкин // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 97–100. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_97. – EDN: FGHDOK

Abstract. The paper addresses the factorization of natural numbers into prime factors task in the context of discrete optimization and machine learning. The approach with decomposition into summands and the associated function for using with genetic algorithms (as fitness function) and neural networks (as error function) is proposed. The statistical analysis of changes in the discrete transformation function of the optimal divisor is performed in order to approximate the scope of optimal discrete transformations for a trial divisor.

Keywords: *large numbers factoring*, *discrete optimization*, *machine learning*, *neural networks*, *genetic algorithms.*

For citation: *Chagochkin*, *A.A*. Discrete optimization for the factorization problem / A.A. Chagochkin // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 2 (63). – P. 97–100. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_97 (in Russian). – EDN: FGHDOK

Введение

Задача факторизации больших чисел имеет критическую значимость для современной цифровой инфраструктуры, особенно в вычислительной математике и криптографии.

Общий (General Number Field Sieve, GNFS) и специальный (Special Number Field Sieve, SNFS) методы решета числового поля признаны самыми быстрыми методами факторизации натуральных чисел [1], если не считать теоретические оценки квантового алгоритма Шора [2]. Время факторизации десятичного числа, состоящего из 512 знаков с использованием GNFS исчисляется годами и десятками лет для современных вычислительных кластеров, что представляет собой одну из фундаментальных проблем теории чисел на сегодняшний день [3]. Факторизация больших натуральных чисел с использованием GNFS имеет экспоненциальную алгоритмическую сложность [4]

$$O\left(\exp\left(\frac{64}{9}\ln N\right)^{\frac{1}{3}}\left(\ln\ln N\right)^{\frac{2}{3}}\right)$$

и не выполнима в приемлемое время – часы или дни для больших чисел. Поиск альтернативных подходов, позволяющих существенно снизить сложность вычислений, является важной практической задачей.

В данной работе факторизация рассматривается как задача дискретной оптимизации: приведение делителей факторизуемого числа к дискретному виду, то есть к натуральным целым числам, с использованием средств машинного обучения. При делении факторизуемого числа на оптимальный делитель дробный остаток отсутствует.

Задачу целочисленной факторизации числа в контексте дискретной оптимизации в простейшем виде можно интерпретировать как размещение прямоугольника на дискретной сетке, где площадь прямоугольника соответствует факторизуемому числу, а стороны – целочисленным факторам или делителям. В начале процесса оптимизации мы имеем первый пробный не оптимальный натуральный делитель, из которого вычисляется второй действительный путем деления факторизуемого числа на первый. В действительном

© *Чагочкин А.А.*, 2025

делителе выделяется целая и дробная части. Цель оптимизации: минимизировать дробную часть при соблюдении исходного ограничения: отличие делителей от 1 и самого факторизуемого числа. При таком наборе ограничений детерминированные методы оптимизации не могут предоставить значимые результаты для решения проблемы.

Для уменьшения неопределенности процесса оптимизации предлагается разложение факторизуемого числа на слагаемые. При делении слагаемых факторизуемого числа на оптимальный делитель сумма дробных частей остатков от деления также дискретна, то есть является целым числом.

Разложение на слагаемые изменяет интерпретацию задачи. При делении каждого из слагаемых на первый делитель (фактор) мы имеем целую и дробную части. В этом случае на дискретной сетке необходимо расположить прямоугольники, площадь которых соответствует произведению целых частей и первого фактора, и объединить в один прямоугольники, площадь которых соответствует произведению дробных частей и первого фактора. Пример оптимального решения с разложением на 3 слагаемых представлен в таблице 0.1.

Таблица 0.1 – Оптимальное решение задачи факторизации через слагаемые для дискретной сетки

Выражение	Описание
$S = ab$	S – факторизуемое число; a, b – натуральные факторы
$S = S_1 + S_2 + S_3$	раскладываем S на слагаемые S_1, S_2 и S_3
$\frac{S_1}{a} = n_1 + r_1$	находим целую n_1 и дробную r_1 части от деления S_1 на a
$\frac{S_2}{a} = n_2 + r_2$	находим целую n_2 и дробную r_2 части от деления S_2 на a
$\frac{S_3}{a} = n_3 + r_3$	находим целую n_3 и дробную r_3 части от деления S_3 на a
$P_1 = an_1$	первый дискретный прямоугольник
$P_2 = an_2$	второй дискретный прямоугольник
$P_3 = an_3$	третий дискретный прямоугольник
$P_4 = a(r_1 + r_2 + r_3)$	четвертый составной дискретный прямоугольник

Разложение на слагаемые увеличивает контроль над оптимизируемой функцией дискретного преобразования делителя за счет возможности оценки ошибки на шаге оптимизации для каждого r. В этом случае не детерминированные методы способны быстрее аппроксимировать выигрышные преобразования.

При сборе эмпирических данных использован генетический алгоритм eaSimple [6] для факторизации числа. Использование генетического алгоритма обусловлено его универсальностью и способностью к решению задач на ограниченных данных, в частности, на одном экземпляре.

Недостаток этого подхода – в высокой требовательности к ресурсам при увеличении популяций, в «наивной» реализации он не сопоставим с GNFS по производительности. Для его применения на практике требуется сбор эмпирических данных, аналитические расчеты алгоритмической сложности для разных значений вероятностных и количественных параметров генетического алгоритма, разрядности числа и количества слагаемых, адаптация архитектуры и параметров генетического алгоритма.

Искусственные нейронные сети демонстрируют более высокую производительность обученных моделей для отдельных задач по сравнению с генетическими алгоритмами. Декодерные архитектуры, такие как Generative Pre-trained Transformer (GPT) с авторегрессионным процессом обучения и Generative Adversarial Network (GAN), могут представлять интерес для решения оптимизационной задачи факторизации, они хорошо документированы и соответствуют специфике задачи. Одним из важных аспектов, определяющих успех популярных декодерных моделей, является этап предобучения [5]. Декодерные архитектуры нуждаются в достаточном количестве данных для корректной аппроксимации. Для этапа предобучения нейронной сети, выполняющей целочисленную факторизацию на размеченных и неразмеченных данных, доступны большие массивы производных данных из простых чисел. Генерация больших простых чисел и арифметические операции с ними не являются актуальной проблемой с точки зрения вычислительной сложности.

В работе предложена функция ошибки (1.1) с использованием разложения на слагаемые для нейронных сетей и генетических алгоритмов.

Специфика проблемы больших чисел состоит в колоссальных объемах возможных комбинаций. Для сужения пространства решений проведен анализ зависимости дискретных преобразований делителя с его оптимальностью. Изучение таких связей на известных данных позволяет вводить дополнительные условия и ограничения для процесса оптимизации с использованием нейронных сетей и генетических алгоритмов.

1 Факторизация с использованием генетического алгоритма

При сравнительном тестировании использованы следующие настройки генетического алгоритма: исходная популяция 10000, вероятность образования пары 0.6, вероятность мутации индивида 0.3 и разрядность факторов до 6 знаков. Результаты приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Результаты сравнительного тестирования фитнес функций генетического алгоритма с разложением на множители и без для задачи факторизации

№	S	Шаг успеха оптимизатора без разложения (множитель)	Шаг успеха оптимизатора с разложением (множитель)
1	49118670253	NA	3504 (897817)
2	51933092507	9418 (673747)	NA
3	850266266951	5136 (864757)	446 (864757)
4	261100975771	NA	3980 (755057)
5	375343367551	NA	7459 (593071)
6	72714690589	6164 (138637)	NA
7	13587085747	8612 (61331)	NA
8	828847571509	2279 (230819)	NA
9	828885787931	NA	2146 (841793)
10	69922171051	NA	6959 (83339)
11	96301017707	9058 (869543)	NA
12	320253630097	NA	429 (323077)
13	347866742453	9930 (576881)	5341 (576881)
14	313151820431	6316 (743689)	NA
15	334591178759	NA	5108 (463363)
16	635309551183	5282 (881729)	NA
17	203988146111	137 (721783)	NA
18	608722442407	NA	7067 (719633)
19	238632650083	3168 (429329)	46 (429329)
20	576891026099	NA	1775 (646147)

В общем случае, без разложения, фитнес функция возвращает дробную часть результата деления для минимизации $\frac{S}{a} - \left[\frac{S}{a}\right]$.

В задаче со слагаемыми добавляется штраф, если не происходит уменьшения ошибки по конкретному слагаемому. Для этого вычисляются общая ошибка R как сумма дробных частей r по каждому слагаемому $R = \sum_{r=1}^{i} r$, минимизируемая ошибка дискретизации $D = [R] - R$, и непосредственно штраф:

$$z = pR. \qquad (1.1)$$

Если штраф меньше ранее наложенных на это слагаемое, то его не применяем, если больше – добавляем к D. В зависимости от среды исполнения показатели могут варьироваться, но общая тенденция сохраняется: при увеличении разрядности чисел алгоритм с разложением стабильно демонстрирует более высокую эффективность при сохранении параметров оптимизатора: + 33%. Итерации, в которых оба подхода не возвратили корректный фактор за выделенное количество поколений, в таблице 0.1 не приводятся.

2 Связь дискретных преобразований делителя с его оптимальностью

Полиномиальное представление используется в машинном обучении и многих аналитических методах, в том числе GNFS. В задаче дискретной оптимизации для факторизации в общем случае также подразумевается полиномиальное представление делителя A:

$$A = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i, \text{ где } a_i \in 0,...,9.$$

Оптимизируемое дискретное преобразование для делителей: $A_i = T(A_{i-1})$.

Для анализа связи между дискретным преобразованием делителя и его оптимальностью был подготовлен источник данных из 2000 произведений 2 простых чисел. Разрядность произведений от 5 до 10 знаков. К источнику данных добавлено разложение на 3 слагаемых S_1, S_2, S_3 по старшим разрядам, где n соответствует порядку самого старшего разряда:

$S_1 = a_n \cdot 10^{n-1}$, $S_2 = a_{n-1} \cdot 10^{n-2}$, $S_3 = S - (S_1 + S_2)$.

Аналогичный подход использовался в примере с генетическим алгоритмом, но с 4 слагаемыми.

К источнику данных добавлены 4 преобразованных делителя через дискретные преобразования T_1, T_2, T_3, T_4 над оптимальным делителем:

T_1 соответствует смещению цифры среднего разряда вверх на единицу: 1 → 2, 2 → 3, …, 9 → 0;

T_2 – смещению цифр среднего и соседних разрядов вверх на единицу, то есть происходит равномерное смещение трёх разрядов в середине;

T_3 – смещению цифр среднего разряда на 2 единицы, а соседних разрядов на единицу вверх, то есть как и в T_2 происходит смещение трёх разрядов, но неравномерное;

T_4 – целой части результата деления на 2:

$$T(a) = \left[\frac{a}{2}\right],$$

где a оптимальный делитель.

Первые три преобразования позиционированы, незначительны, с плавным увеличением отличия от оптимального делителя. Четвертое значительное, с существенным отличием от оптимального делителя.

Для каждого преобразованного делителя рассчитан коэффициент смещения l как отношение суммы поразрядных смещений к общему числу разрядов n:

$$l(T_j) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\left|b_j - a_j\right|, \qquad (2.1)$$

где T_j – текущее преобразование, a_j знак оптимального делителя в разряде i, b_j – знак преобразованного делителя в разряде i.

Для каждого преобразованного делителя b_t рассчитаны: дробная часть r результата деления общего произведения S на b_t, дробные части r_1, r_2, r_3 результатов деления слагаемых S_1, S_2, S_3 на b_t, сумма дробных частей: $\sum_{i=1}^{3} r_i$.

Анализ зависимости преобразований оптимального делителя через коэффициент смещения (2.1) с остатками от деления выполнен с использованием коэффициента Пирсона [7] и представлен в таблице 2.1:

$$K = P(L, R), \qquad (2.2)$$

где $L = \{l(T_1), l(T_2), l(T_3), l(T_4)\}$, $R = \{r, r_1, r_2, r_3, r_1 + r_2 + r_3\}$, P – функция расчёта коэффициента Пирсона, $K = \{k_1, k_2, k_{03}, k_4\}$ – коэффициенты корреляции.

Таблица 2.1 – Коэффициенты корреляции для смещений делителя (k)

	k_1	k_2	k_3	k_4
r	0,0050973	0,0390797	0,0060046	–0,05226
r_1	0,1121576	–0,2394642	–0,0110255	–0,0404442
r_2	0,0262286	–0,2239337	–0,0251826	–0,0091951
r_3	0,0206891	0,0301176	0,0061416	–0,0238543
$\sum_{i=1}^{3} r_i$	0,0906496	–0,2417458	–0,0179779	–0,0390467

Статистическая интерпретация говорит об отсутствии значимых линейных связей между выбранными показателями, но выделяются общие закономерности:

1) усиление корреляционных связей при добавлении расчетов со слагаемыми, что косвенно объясняет результаты тестирования генетического алгоритма из таблицы 1.1;

2) строго положительные коэффициенты при минимальном преобразовании T_1;

3) строго отрицательные коэффициенты для максимального преобразования T_4;

4) усиление отрицательной корреляции для преобразования T_2 близкое к значимому.

Заключение

В работе задача факторизации натуральных чисел на простые множители рассматривается в контексте дискретной оптимизации и машинного обучения. Для генетических алгоритмов и нейронных сетей предложен подход с разложением на слагаемые, который вместе со связанной функцией для генетических алгоритмов (фитнес функция) и нейронных сетей (функция ошибки) (1.1) на примере с генетическим алгоритмом показал 33% прирост эффективности.

Рассчитан коэффициент Пирсона для изменений функции дискретного преобразования оптимального делителя и минимизируемых дробных частей (2.2) через коэффициент смещения (2.1). Это позволяет аппроксимировать область оптимальных дискретных преобразований через вычисление коэффициента корреляции Пирсона для случайного коэффициента смещения (2.1) и дробных частей от пробного делителя вместо оптимального как в (2.2). В этом случае увеличение количества и уточнение анализируемых показателей, усиление их статистической значимости повышает качество аппроксимации и эффективность выбранных средств.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lenstra*, *A*. The Development of the Number Field Sieve / A. Lenstra and H. Lenstra (eds.). – Lect. Not. in Math. 1554. – Springer – Verlag, Berlin, 1993. – 139 p

2. *Sun*, *D*. Optimization and Performance Analysis of Shor's Algorithm in Qiskit / D. Sun, N. Zhang, F. Franchetti. – Carnegie Mellon University, Pittsburgh, USA, 2023. – Mode of access: https://users.ece.cmu.edu/~franzf/papers/hpec_2023_Quantum_final.pdf.

3. *Zimmermann*, *P*. Cado NFS report Factorization of RSA-250 / P. Zimmermann. – Mode of access: https://gitlab.inria.fr/cado-nfs/cado-nfs.

4. *Pomerance*, *C.A*. Tale of Two Sieves / C.A. Pomerance // Notices of the AMS. – 1996. – Vol. 43, № 12. – P. 1473–1485.

5. *Improving Language Understanding by Generative Pre-Training* / A. Radford, K. Narasimhan, T. Salimans, I. Sutskever // OpenAI, 2018. – 12 p.

6. Документация DEAP library 1.4.1 – Режим доступа: https://deap.readthedocs.io/en/stable/api/algo.html

7. *Sammut*, *C*. Encyclopedia of Machine Learning / C. Sammut, G.I. Webb. – Springer Science + Business Media LLC, 2011. – 831 p.

Поступила в редакцию 07.02.2025.

Информация об авторах

Чагочкин Александр Александрович – магистрант

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

– соответствовать профилю журнала;

– являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;

– содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

– сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;

– сведения об авторах;

– экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;

– договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу http://pfmt.gsu.by.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal “Problems of Physics, Mathematics and Technics” the following rules should be taken into account:

– the paper should be in agreement with the type of the journal;

– the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

– the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author’s commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e. g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

– covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;

– information about the authors;

– expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;

– treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charters top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site http://pfmt.gsu.by.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).

ПОПРАВКИ
к статьям, опубликованным в журнале
«Проблемы физики, математики и техники»

В статье «Особенности кинетики электронно-лучевого диспергирования полимеров в условиях лазерного ассистирования», опубликованной в журнале «Проблемы физики, математики и техники», № 3 (52) 2022, страницы 61–66, список фамилий авторов необходимо читать в следующей редакции: на русском языке – «М.А. Ярмоленко, Д.Л. Горбачёв, А.В. Рогачёв, А.С. Руденков, А.М. Михалко», на английском языке – «M.A. Yarmolenko, D.L. Gorbachev, A.V. Rogachev, A.S. Rudenkov, A.M. Mikhalko».

В статье «Кинетические закономерности осаждения и молекулярная структура покрытий полиоксиметилена, сформированных из активной газовой фазы», опубликованной в журнале «Проблемы физики, математики и техники», № 2 (59) 2024, страницы 57–63, список фамилий авторов необходимо читать в следующей редакции: на русском языке – «М.А. Ярмоленко, Д.Л. Горбачёв, А.В. Рогачёв, Джанг Сянь Хун, С.А. Фролов», на английском языке – «M.A. Yarmolenko, D.L. Gorbachev, A.V. Rogachev, Jiang Xiao Hong, S.A. Frolov».

Поправки были внесены в электронные версии журналов, которые находится на сайте журнала «Проблемы физики, математики и техники».