

ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№1 (62) 2025

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:
С.А. Хахомов (Беларусь)

**ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО
РЕДАКТОРА:**
А.В. Рогачёв (Беларусь)
Д.Л. Коваленко (Беларусь)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Мोजаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)
М.А. Ярмоленко (Беларусь)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины
ул. Советская, 104,
246028, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

EDITOR-IN-CHIEF:
S.A. Khakhomov (Belarus)

DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:
A.V. Rogachev (Belarus)
D.L. Kovalenko (Belarus)

EDITORIAL BOARD:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)
M.A. Yarmolenko (Belarus)

EXECUTIVE SECRETARY:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

EDITION ADDRESS:
Francisk Skorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246028, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 1 (62) 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

- Гасенкова И.В., Мухуров Н.И., Андрухович И.М.** Анализ стоп-зон фотонно-кристаллических структур анодного оксида алюминия 7
- Гиргель С.С.** Энергетические и поляризационные свойства векторных гауссовых световых пучков со сложным астигматизмом 14
- Кулак Г.В., Казаков В.И., Николаенко Т.В., Ропот П.И.** Дифракция игольчатых световых пучков на ультразвуке в кристаллах парателлурита 20
- Лачугина Е.А.** Собственные колебания пятислойной круговой пластины при различных закреплениях контура 25
- Мельникова А.С.** Деформирование упругопластической прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем в терморрадиационном поле 31
- Можаровский В.В., Кузьменков Д.С., Киргинцева С.В.** Асимптотические зависимости расчета параметров контакта и износа зубьев зубчатых колес с покрытием из композита при контактном взаимодействии 37
- Руденков А.С., Цзинце Ванг, Рогачев А.В., Джубо Лю, Пилипцов Д.Г., Кулеш Е.А., Купо А.Н.** Структура, механические свойства градиентных наноконпозиционных медь-углеродных покрытий 43
- Семченко И.В., Пискунова Е.Д., Самофалов А.Л., Сомов П.В.** Моделирование ДНК-подобной электрической цепи и вычисление усредненных активных сопротивлений и емкостей нуклеотидов и водородных связей 51
- Сомов П.В., Самофалов А.Л., Никитюк Ю.В., Хахомов С.А., Семченко И.В., Динг Даши.** Оптимизация параметров метаматериала-фазоманипулятора с применением нейросетевого моделирования и генетического алгоритма 58

МАТЕМАТИКА

- Гальмак А.М.** Полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида. III 64
- Казимиров Г.Н., Бураковский В.В.** Эквивалентная структурная характеристика функции из пространства Лебега 67
- Копать Д.Я.** G-сеть с ненадежными системами, контрольными и карантинными очередями и возможностью перемещения отрицательных заявок между системами 70
- Мегралиев Я.Т., Садыхзаде Р.Ш.** Обратная задача одновременного определения правой части и коэффициента в псевдо гиперболическом уравнении третьего порядка с периодическим и интегральными условиями 78
- Сафонова И.Н., Скрундь В.В.** О σ -локальных формациях конечных групп с ограниченным \mathfrak{H}_c -дефектом 87
- Старовойтов А.П., Кругликов И.В.** Единственность и явный вид линейных аппроксимаций Эрмита – Чебышёва 102

ИНФОРМАТИКА

- Аксенова Н.А.** Реализация системы компьютерного зрения для детекторов углов 108
- Тимощенко Е.В., Ражков А.Ф.** Web-приложение для исследования влияния гиперпараметров на эффективность алгоритмов машинного обучения в ранней диагностике заболеваний 113

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки:

- технические;
- физико-математические.

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21. Приказы Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 31.12.2020 № 338, № 339.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е.А. Ружицкая*
Корректоры *И.А. Хорсун, Т.А. Фицнер*
Дизайн обложки *А.В. Ермаков*

Подписано в печать 12.03.25. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 14,42. Уч.-изд. л. 12,56. Тираж 17 экз. Заказ № 133.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013 г.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий в качестве:
издателя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013 г.;
распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017 г.
Ул. Советская, 104, 246028, Гомель.

© Учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», 2025
© Проблемы физики, математики и техники, 2025
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2025

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December 2009

Released quarterly

№ 1 (62) 2025

CONTENTS

PHYSICS

Gasenkova I.V., Mukhurov N.I., Andrukhovich I.M. Analysis of stop zones of photonic-crystalline structures of anodic aluminum oxide	7
Girgel S.S. Energy and polarization properties of vector Gaussian light beams with complex astigmatism	14
Kulak G.V., Kazakov V.I., Nikolaenko T.V., Ropot P.I. Diffraction of needle light beams by ultrasonic waves in paratellurite crystals	20
Lachugina E.A. Free vibrations of a five-layer circular plate at different fixations of the contour	25
Melnikova A.S. Deformation of elastoplastic rectangular three-layer plate with compressible filler in thermoradiation field	31
Mozharovsky V.V., Kuzmenkov D.S., Kirhintsava S.V. Asymptotic dependences of calculation of contact parameters and wear of teeth of gears with composite coating during contact interaction	37
Rudenko A.S., Jingjie Wang, Rogachev A.V., Jubo Liu, Piliptsov D.G., Kulesh E.A., Kupo A.N. Structure, mechanical properties of gradient nanocomposite copper-carbon coatings	43
Semchenko I.V., Piskunova E.D., Samofalov A.L., Somov P.V. Modelling of DNA-like electrical circuit and calculation of the average active resistances and capacitances of nucleotides and hydrogen bonds	51
Somov P.V., Samofalov A.L., Nikityuk Yu.V., Khakhomov S.A., Semchenko I.V., Ding Dazhi. Optimization of metamaterial phase manipulator parameters using neural network modeling and genetic algorithm	58

MATHEMATICS

Gal'mak A.M. Polyadic analogues of normal subgroups in polyadic groups of special form. III	64
Kazimirov G.N., Burakovskiy V.V. Equivalent structural characteristic of a function from a Lebesgue space	67
Kopats D.Y. G-network with unreliable systems with control and quarantine queues and the option of moving negative orders between systems	70
Mehraliyev Y.T., Sadikhzada R.S. Inverse problem of simultaneous determination of the right-hand side and the coefficient in a third-order pseudo-hyperbolic equation with periodic and integral conditions	78
Safonova I.N., Skrundz V.V. On σ -local formations of finite groups with bounded \mathfrak{H}_σ -defect	87
Starovoitov A.P., Kruglikov I.V. Uniqueness and explicit form of Hermite – Chebyshev linear approximations	102

INFORMATION SCIENCE

Aksionova N.A. Implementation of a computer vision system for angle detectors	108
Timoschenko E.V., Razhkov A.F. Web application for research of the influence of hyperparameters on the performance of machine learning algorithms in early diagnosis of diseases	113

Founder – Francisk Skorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science:

- **Technics;**
- **Physics and Mathematics.**

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 535.361

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_7

EDN: QGYDDM

АНАЛИЗ СТОП-ЗОН ФОТОННО-КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СТРУКТУР АНОДНОГО ОКСИДА АЛЮМИНИЯ

И.В. Гасенкова, Н.И. Мухуров, И.М. Андрухович

ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника», Минск

ANALYSIS OF STOP ZONES OF PHOTONIC-CRYSTALLINE STRUCTURES OF ANODIC ALUMINUM OXIDE

I.V. Gasenkova, N.I. Mukhurov, I.M. Andrukhovich

SSPA "Optics, Optoelectronics and Laser Technology", Minsk

Аннотация. Изучено влияние температуры и состава электролита, количества и величины периодов фотонно-кристаллических (ФК) структур анодного оксида на алюминии и без алюминия на спектральное положение стоп-зон (СЗ). Установлены гипсохромный сдвиг максимума СЗ на 76 нм при увеличении температуры электролита от 7 до 12°С и на 103 нм при изменении количества периодов от 52 до 230, bathochромный сдвиг на 160 нм при увеличении периода структуры в 1,5 раза. Получены ФК структуры с коэффициентом пропускания 0,1% и коэффициентом отражения 83% в области СЗ. ФК структуры имеют окраску, колориметрические характеристики определены, представлены на диаграмме цветности и согласуются с положением СЗ.

Ключевые слова: фотонно-кристаллическая структура, анодный оксид алюминия, спектр зеркального отражения, стоп-зона.

Для цитирования: Гасенкова, И.В. Анализ стоп-зон фотонно-кристаллических структур анодного оксида алюминия / И.В. Гасенкова, Н.И. Мухуров, И.М. Андрухович // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 7–13. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_7. – EDN: QGYDDM

Abstract. The influence of the temperature and composition of the electrolyte, the number and value of the periods of photonic crystal (PC) structures of anodic oxide on aluminum and without aluminum on the spectral position of the stop zones (SZ) was studied. A hypsochromic shift of the SZ maximum by 76 nm was established with an increase in the electrolyte temperature from 7 to 12°С and by 103 nm with a change in the number of periods from 52 to 230, a bathochromic shift by 160 nm with an increase in the structure period by 1.5 times. PC structures with a transmittance of 0.1% and a reflectivity of 83% in the SZ region were obtained. The PC structures have a color, the colorimetric characteristics are determined, presented on the chromaticity diagram and are consistent with the SZ position.

Keywords: photonic crystal structure, anodic aluminum oxide, specular reflection spectrum, stop zone.

For citation: Gasenkova, I.V. Analysis of stop zones of photonic-crystalline structures of anodic aluminum oxide / I.V. Gasenkova, N.I. Mukhurov, I.M. Andrukhovich // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 7–13. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_7 (in Russian). – EDN: QGYDDM

Введение

Наличие в энергетическом спектре запрещенных зон является основным свойством для ФК структур, спектральное положение которых необходимо прогнозировать для управления оптическими свойствами при практических приложениях. Анодный оксид алюминия с чередующимися слоями различной пористости проявляет свойства фотонных кристаллов [1], [2]. В последнее время фотонно-кристаллические структуры на основе анодного оксида алюминия находят применение в качестве оптических микрорезонаторов [3], распределенных брэгговских отражателей [4]–[6], оптических фильтров [7]–[9] и оптических сенсоров [10]–[13] благодаря избирательности в различных областях спектра.

АОА является пористым материалом с высокой химической стабильностью, свойства

оксида варьируются с помощью условий анодирования (плотность тока и напряжения анодирования, состав и температура электролита и т. д.), что позволяет формировать ФК структуры с заданными функциями [14]–[17]. Период ФК структуры, показатель преломления, а также угол падения излучения на поверхность ФК структур определяют спектральное положение стоп-зон. Периодом структуры и показателем преломления слоев АОА можно управлять в процессе анодирования. Для описания оптических свойств используют термины эффективной среды, поскольку длина волны света существенно больше диаметра пор, который может варьироваться от 15 до 100 нм в зависимости от условий формирования.

Рассмотрены технологические аспекты и влияние условий формирования на оптические

свойства ФК структур, сформированных в электролитах на основе серной кислоты с добавкой этиленгликоля в различных соотношениях. Электролиты на основе серной кислоты широко используются в промышленности для формирования анодных оксидных пленок и, согласно литературным данным, наиболее распространены для формирования ФК.

1 Методика эксперимента

Формирование фотонных кристаллов на основе анодного оксида алюминия проводилось в двухэлектродной ячейке с принудительным перемешиванием, в качестве катода использовалась пластина алюминия А99, в качестве анода – образец. Образец представлял собой алюминиевую пластину толщиной 100 мкм, полированную в импульсном режиме в растворе ортофосфорной кислоты и шестивалентного оксида хрома [18]. В качестве электролита использовался водный раствор серной кислоты с добавлением этиленгликоля различной концентрации. Режимы анодирования при периодически изменяющейся плотности тока с прямоугольной формой импульса с составами электролитов и величинами плотности электрического заряда (Q) в течение периода формирования ФК структуры и суммарной плотности заряда (Q_c) представлены в таблице 1.1. Суммарная плотность заряда $Q_c = Q \cdot N$, где N количество периодов.

Спектры зеркального отражения в диапазоне длин волн 190–1100 нм были исследованы с помощью спектрофотометра MC 122 Proscan special instrument при угле падения излучения относительно вертикали к поверхности образцов 10° и на спектрофотометре РВ 2201 при углах падения излучения 25° – 55° .

Координаты цвета и цветности ФК определяли, исходя из диаграммы цветности с использованием стандартных данных колориметрического наблюдателя МКО 1931 г. (XYZ) и осветителя D65.

Изучение морфологии поверхности полученных фотонных кристаллов было проведено с использованием сканирующего электронного микроскопа MIRA 3 TESCAN с детекторами вторичных электронов SE при ускоряющем напряжении 20 кВ.

2 Результаты эксперимента и их обсуждение

Появление осцилляций Фабри – Перо на спектрах обусловлено интерференцией света, отраженного от поверхности АОА и границы АОА – алюминий (рисунок 2.1). По мере увеличения количества периодов интенсивность осцилляций убывает. В коротковолновой области осцилляции не разрешены. Различие спектров состоит в изменяющемся спектральном положении СЗ и их смещении в коротковолновую область с увеличением количества периодов структуры.

Исследовали спектральное положение СЗ в структурах с количеством периодов равным 52, 67, 111, 180, 230, сформированных в водном растворе 1,1 М H_2SO_4 , спектры зеркального отражения при угле падения излучения 10° которых представлены на рисунке 2.1. Качественно спектры имеют схожий вид: на спектрах присутствуют области, в которых коэффициент отражения имеет высокое значение, и области с малым значением коэффициента отражения. Коэффициент отражения в СЗ находится в диапазоне значений от 70 до 84%. Увеличение периода с 52 до 67 приводит к сдвигу с 478 нм до 476 нм (рисунки 2.1, а, б), при 111 периодах спектральное положение зоны равно 420 нм (рисунок 2.1, в) сдвиг составляет 58 нм. Дальнейшему увеличению количества периодов до 180 и 230 соответствует спектральное положение максимумов 411 и 375 нм (рисунки 2.1, г, д).

Спектральное положение определяется формулой [19]:

$$m\lambda = 2d\sqrt{n_{эф}^2 - \sin^2 \theta}, \quad (2.1)$$

где m – порядок отражения; λ – длина волны, соответствующая максимуму коэффициента отражения, нм; d – период структуры, нм; $n_{эф}$ – эффективный показатель преломления; θ – угол отражения, при котором снят спектр.

Поскольку период структуры оставался постоянным, то смещение максимума СЗ в коротковолновую область в соответствии с формулой (2.1) обусловлено изменением показателя преломления, который в свою очередь зависит от пористости оксида [20]:

$$n_{эф}^2 = n_{Al_2O_3}^2 (1 - P) + P, \quad (2.2)$$

где $n_{Al_2O_3}$ – показатель преломления стенок ячеек анодного оксида алюминия, P – пористость анодного оксида алюминия.

Таблица 1.1 – Режимы анодирования

Состав электролита	Плотность заряда за период Q , Кл/см ²	Плотность тока, j , мА/см ²	Температура, T , °С	Количество периодов, N , шт.	Суммарная плотность заряда, Q_c , Кл/см ²
1,1М H_2SO_4	0,44	0,4–2,27	5	52, 67, 111, 180, 230	22,3; 29,8; 47,5; 72; 90,0
1М H_2SO_4 , 50 об.% этиленгликоля	0,44	0,4–1,8	5	165	66,8
1М H_2SO_4 , 25 об.% этиленгликоля	0,44; 0,59; 0,66	0,4–1,8	9	85, 91, 84	35,7; 51,2; 51,0
	0,44	0,4–1,8	7,12,17	85	35,7

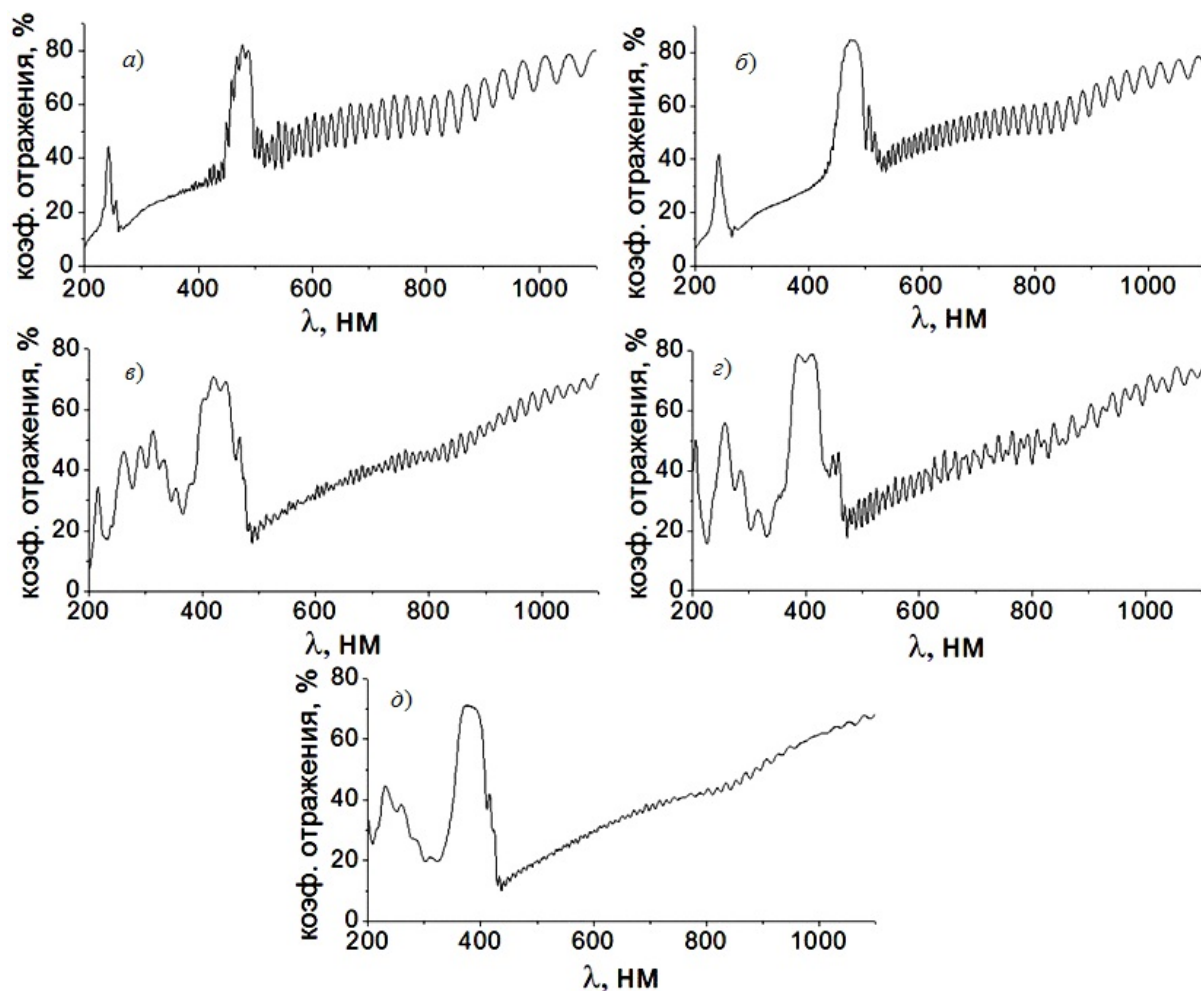


Рисунок 2.1 – Спектры зеркального отражения образцов ФК, сформированных в 1,1 М растворе серной кислоты при количестве периодов: а) 52, б) 67, в) 111, г) 180, д) 230

Следовательно, изменяется пористость оксида с увеличением количества периодов в процессе формирования анодного оксида алюминия. Это вызвано расширением пор вследствие химического травления. Чем длительнее процесс формирования ФК, тем больше изменения. Поэтому в верхних слоях фотонно-кристаллической структуры пористость всегда выше, чем в нижних. Это объясняет меньшее значение показателя преломления и, соответственно, сдвиг максимума стоп-зоны в коротковолновую область с увеличением количества периодов. Изменение пористости согласуется с данными, приведенными в работе [21].

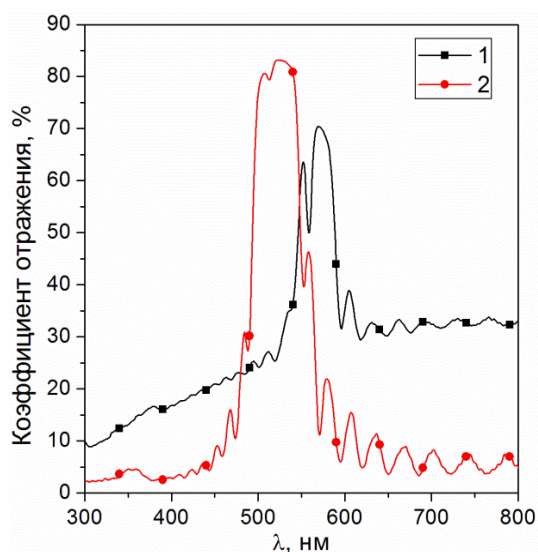
Фотонно-кристаллические структуры получены в 1,0 М серной кислоте в растворе воды и этиленгликоля в соотношениях 50:50 об.%. Сравнение спектров зеркального отражения ФК структур на алюминии и отделенных от алюминия (рисунок 2.2, а) показало отличие в различных спектральном положении СЗ и интенсивности фоновой составляющей спектров. Отделение ФК от алюминиевой основы проводилось в течение

15–20 минут в водном растворе соляной кислоты и хлорида меди (II) при температуре $22 \pm 1^\circ \text{C}$. Большая интенсивность фона структур на алюминии вызвана отражением от поверхности алюминия. Сдвиг максимума пика СЗ на 53 нм в область коротких волн связан с изменением оптической толщины в соответствии с формулой (2.1). Изменением геометрической толщины АОА можно пренебречь, так как общая толщина структуры намного больше диаметра пор. Следовательно, происходит преимущественное химическое растворение стенок пор, растет пористость, которая определяет уменьшение показателя преломления оксида. Это согласуется с кинетикой растворения оксида, приведенной в [22].

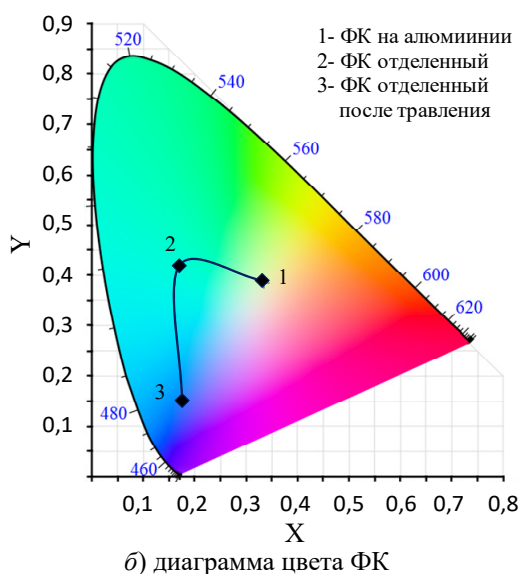
Дальнейшая выдержка в травителе свободных от алюминия структур в условиях, соответствующих отделению от алюминия, приводит к аналогичному результату (рисунок 2.3, а). Величины сдвигов максимумов стоп-зон близки по значению и составляют 53 и 56 нм. Подтверждается хорошая воспроизводимость изменения пористости ФК структур в данных условиях, что

позволяет управлять спектральным положением СЗ. Наблюдается согласие в положении СЗ в спектрах пропускания (рисунок 2.3, б) и отражения (рисунок 2.3, а). Коэффициент пропускания в СЗ достигает 0,1%, снижаясь с 58%, коэффициент отражения равен 83%.

На рисунке 2.2, б, представлены цветовые координаты в цветовой диаграмме СИЕ максимумов СЗ спектров зеркального отражения ФК структур на алюминии, свободных и дополнительно травленных, свободных от алюминия. Различные цвета и значения координат цвета подтверждают смещение стоп-зон при травлении фотонно-кристаллических структур, следовательно, возможно получать различные цвета, изменяя время травления.



а) спектры зеркального отражения образцов ФК при угле падения 10° на алюминии (1) и отделенного от алюминия (2);



б) диаграмма цвета ФК

Рисунок 2.2 – Сравнение спектров зеркального отражения ФК структур на алюминии и отделенных от алюминия

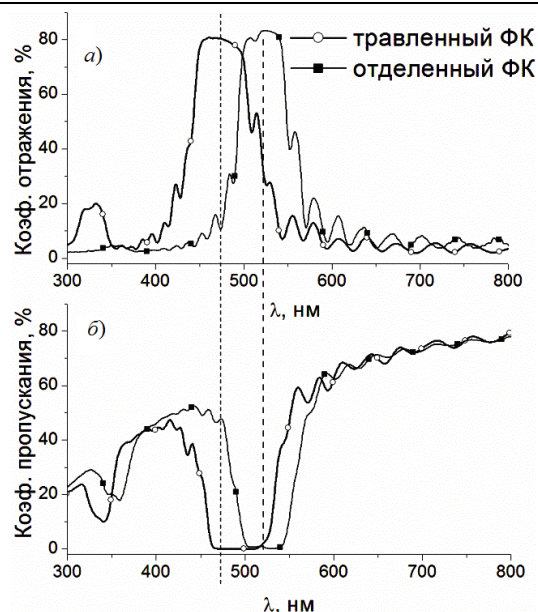


Рисунок 2.3 – Спектры зеркального отражения при угле падения 10° (а) и пропускания (б) образцов ФК

Особенностью ФК структур, полученных в электролите с 50% этиленгликоля, является не наблюдаемая и нехарактерная для структур, полученных в других электролитах, морфология поверхности (рисунок 2.4, а). Она имеет развитый рельеф в виде точечных выступов. Они становятся заметны после 75 периодов, затем сливаются друг с другом, образуя характерный рисунок в виде линий. Часть линий образует концентрические окружности, в центре которых располагается одиночный выступ. Наблюдается упорядочение в рисунке линий. При этом изменяются колориметрические характеристики, образуя дополнительный золотистый к основному зеленому цвет. Между линиями наблюдается, характерная для ФК структуры, морфология поверхности со стороны барьерного слоя (рисунок 2.4, б).

На рисунке 2.5 приведены спектры зеркального отражения в диапазоне длин волн от 350 до 1000 нм при угле падения излучения, равном 45° , структур с разной величиной периода ФК. В соответствие с формулой (2.1) при увеличении значения периода спектральные положения СЗ смещаются в длинноволновую область. При увеличении плотности заряда на период на $0,15 \text{ Кл/см}^2$ наблюдается смещение максимума СЗ на 138 нм, при угле излучения 45° , увеличение на $0,22 \text{ Кл/см}^2$ приводит к смещению на 160 нм. Сдвиг СЗ приводит к изменению визуально определяемого цвета. В таблице 2.2 приведены данные для фотонно-кристаллических структур с плотностью заряда на период $0,44 \text{ Кл/см}^2$, $0,59 \text{ Кл/см}^2$ и $0,66 \text{ Кл/см}^2$, общей плотностью заряда $35,8 \text{ Кл/см}^2$, $51,2 \text{ Кл/см}^2$, $51,0 \text{ Кл/см}^2$ и количеством периодов 85, 91 и 84 соответственно. Изменение цвета подтверждает смещение пика СЗ, приведенные колориметрические характеристики соответствуют положению СЗ.

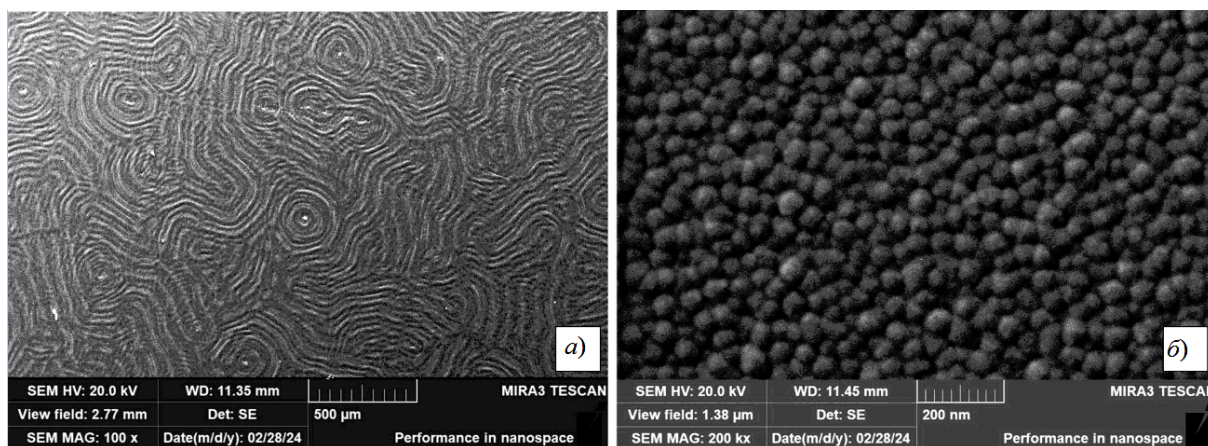


Рисунок 2.4 – Морфология поверхности образца ФК, полученного в электролите с добавлением 50% этиленгликоля (а); увеличенный масштаб (б)

Таблица 2.2 – Основные параметры цветности ФК структур при различных плотностях заряда и количествах периодов

Плотность заряда на период, Q , Кл/см ²	Угол, Θ , °	Положение СЗ, λ , нм	Координаты цвета			Цвет
			X	Y	Z	
0,44	25	504	1375.9188	1716.9317	1528.2883	
	45	450	1298.5556	1143.2592	2319.4635	
0,59	25	667	224.5916	213.1972	231.4438	
	45	588	2178.0591	2204.4718	1427.3478	
0,66	25	700	1778.6567	1842.3455	1746.1523	
	45	610	2564.7755	2405.8881	1906.2879	

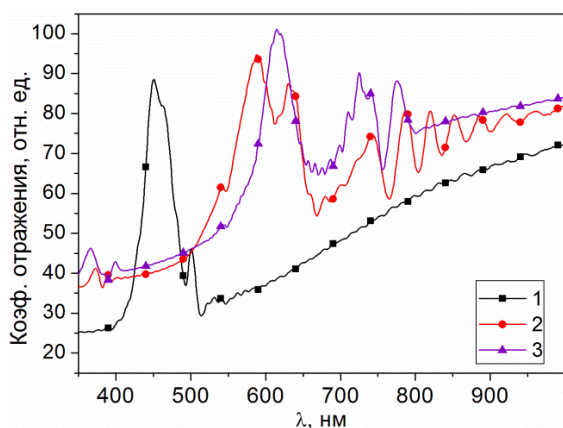


Рисунок 2.5 – Спектры зеркального отражения ФК структур с Q 0,44 Кл/см² (1), 0,59 Кл/см² (2), 0,66 Кл/см² (3)

На рисунке 2.6, а, представлены спектры зеркального отражения при угле 25° образцов ФК, полученных в диапазоне температуры от 7° С до 17° С. Увеличение температуры до 12° С приводит к смещению спектрального положения

максимума СЗ на 76 нм в коротковолновую область, при дальнейшем увеличении температуры до 17° С происходит размытие фотонной зоны. Поскольку анодирование проводили при периодическом изменении плотности тока, то напряжение также периодически изменялось с максимального до минимального значений. При этом максимальное напряжение формирования структур при заданных неизменных токовых значениях уменьшалось с ростом температуры электролита от 19,4 В при 7° С до 15,4 В при 12° С и 10,9 В при 17° С. Минимальные значения составляли 7,0 В, 5,6 В и 4,1 В при температурах 7° С, 12° С, 17° С, соответственно. Напряжение анодирования и межпоровое расстояние / диаметр ячейки связаны выражением [23]:

$$U \approx k \cdot D_{int}, \quad (2.3)$$

где k – коэффициент пропорциональности, равный 2,5 [23], [24].

Согласно (2.3), уменьшение напряжения анодирования приведет к уменьшению межпорового расстояния / диаметра ячейки анодного оксида алюминия. В свою очередь пористость определяется по формуле:

$$P = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{D_p}{D_{int}} \right)^2, \quad (2.4)$$

где D_p – диаметр поры; D_{int} – межпоровое расстояние/диаметр ячейки.

Поэтому уменьшение межпорового расстояния / диаметра ячейки приведет к увеличению пористости (2.4), тем самым, согласно (2.2), к уменьшению показателя преломления и, согласно (2.1), к сдвигу в коротковолновую область.

Изменения в положении максимумов СЗ проявляются изменением цвета структур и соответствующим изменением цветовых координат на диаграмме цветности (рисунок 2.6, б). Таким образом, изменяя температуру электролита, можно формировать ФК структуры различной цветовой гаммы при прочих одинаковых условиях анодирования.

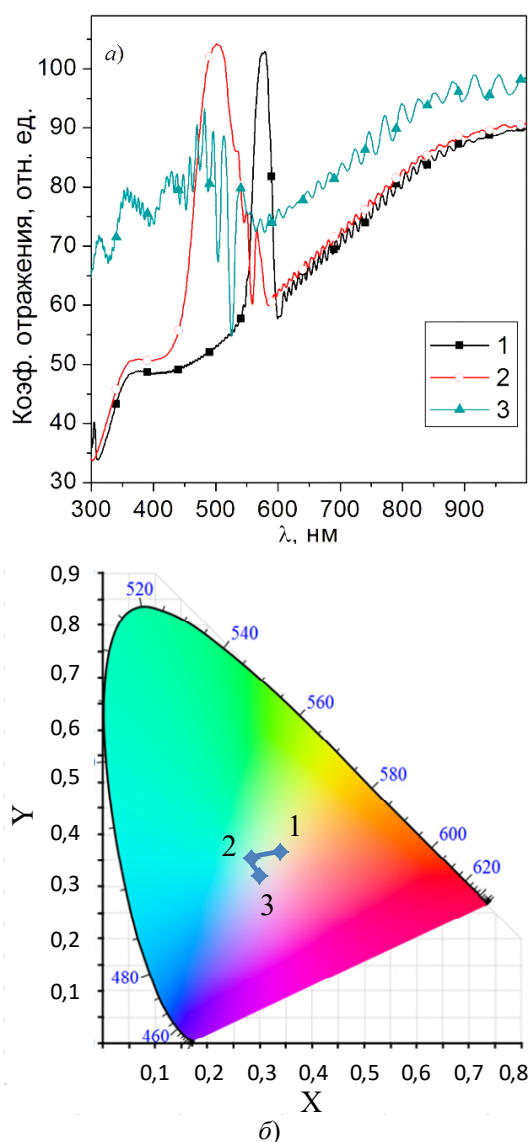


Рисунок 2.6 – Спектры зеркального отражения при угле 25° (а) и диаграмма цвета (б) образцов ФК, полученных при температуре: 1 – 7° С; 2 – 12° С; 3 – 17° С

Заключение

Определены спектральные положения стоп-зон фотонно-кристаллических структур анодного оксида алюминия, полученных в сернокислых электролитах с добавкой различного количества этиленгликоля при различных температуре и величине периода СЗ. Для ФК структур, полученных в растворе 1,0 М серной кислоты с 50% этиленгликоля, при плотности тока 0,4–1,8 мА/см² и количестве периодов 165, коэффициент пропускания равен 0,1%, коэффициент отражения 83% в области СЗ. Увеличение температуры электролита с 7 до 12° С приводит к гипсохромному сдвигу СЗ на 76 нм, при температуре 17° С наблюдается размытие фотонной зоны. Вследствие этого формирование ФК структур необходимо проводить при низких температурах электролита, не выше 12° С. К гипсохромному сдвигу СЗ на 103 нм приводит и рост количества периодов с 52 до 230. Увеличение периода ФК структуры с 0,44 Кл/см² до 0,66 Кл/см² приводит к bathochromному сдвигу на 160 нм в соответствии с законом Брэгга – Снелла. Существенное изменение морфологии поверхности ФК структур наблюдается при формировании в водном растворе серной кислоты с добавлением этиленгликоля в объёме 50%. Развитый рельеф не характерен для структур, сформированных в электролитах, как в водном растворе серной кислоты, так и с добавкой 25% этиленгликоля.

Для исследования колориметрических характеристик использованы диаграммы цветности цветового пространства МКО 1931г (XYZ). Фотонно-кристаллические структуры на алюминии и отделенные от алюминия существенно отличаются окраской. При прочих одинаковых условиях анодирования, изменяя температуру электролита и величину периода, можно формировать ФК структуры различного цвета.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Optical engineering of nanoporous photonic crystals by Gaussian-Like pulse anodization* / L. Liu [et al.] // *Microporous and Mesoporous Materials*. – 2021. – Vol. 312. – P. 110770.
2. *Structural coloring of aluminum* / L. Yisen [et al.] // *Electrochem. Commun.* – 2011. – Vol. 13. – P. 1336–1339.
3. *Facile synthesis of optical microcavities by a rationally designed anodization approach: Tailoring photonic signals by nanopore structure* / Y. Wang [et al.] // *ACS Appl. Mater. Interfaces*. – 2015. – Vol. 7. – P. 9879–9888.
4. *Sulka, G.D. Distributed Bragg reflector based on porous anodic alumina fabricated by pulse anodization* / G.D. Sulka, K. Hnida // *Nanotechnology*. – 2012. – Vol. 23. – P. 075303–7.
5. *Tuning the photonic stop bands of nanoporous anodic alumina-based distributed Bragg reflectors by pore widening* / M. Rahman [et al.] // *ACS*

- Appl. Mater. Interfaces. – 2013. – Vol. 5. – P. 13375–13381.
6. *Interferometric nanoporous anodic alumina photonic coatings for optical sensing* / Y. Chen [et al.] // *Nanoscale*. – 2015. – Vol. 7. – P. 7770–9.
7. *Sukarno, K.T.* Realization and optical engineering of linear variable bandpass filters in nanoporous anodic alumina photonic crystals / K.T. Sukarno, Ch. Law, A. Santos // *Nanoscale*. – 2017. – Vol. 9. – P. 7541–7550.
8. *Nanoporous anodic alumina rugate filters for sensing of ionic mercury: Toward environmental point-of-analysis systems* / T. Kumeria [et al.] // *ACS Appl. Mater. Interfaces*. – 2014. – Vol. 6. – P. 12971–12978.
9. *From gradient-index to step-index filters: A switch between the two types of photonic crystals induced by the amplitude and period of sinusoidal function applied during high-temperature anodization of aluminium* / G. Szwachta [et al.] // *Applied Surface Science*. – 2023. – Vol. 607. – P. 155031.
10. *Nemati, M.* Fabrication and Optimization of Bilayered Nanoporous Anodic Alumina Structures as Multi-Point Interferometric Sensing Platform / M. Nemati, A. Santos, D. Losic // *Sensors (Basel)*. – 2018. – Vol. 18. – P. 470.
11. *Anodic Alumina Photonic Crystals as Refractive Index Sensors for Controlling the Composition of Liquid Mixtures crystals* / C. S. Law [et al.] // *Nanomaterials*. – 2018. – Vol. 8. – P. 788–154.
12. *Nanoporous Anodic Alumina Photonic Crystals for Optical Chemo- and Biosensing: Fundamentals, Advances, and Perspectives* / M. Ashurov [et al.] // *Photonic Sensors*. – 2020. – Vol. 10. – P. 147–154.
13. *Stacked Nanoporous Anodic Alumina Gradient-Index Filters with Tunable Multispectral Photonic Stopbands as Sensing Platforms* / L.K. Acosta [et al.] // *ACS Applied Materials & Interfaces* – 2019. – Vol. 11, № 3. – P. 3360–3371.
14. *Anodic alumina photonic crystals: Structure engineering, optical properties and prospective applications* / G. Shang [et al.] // *Materials Today Communications*. – 2023. – Vol. 34. – P. 105052.
15. *One-dimensional photonic crystals based on porous anodic alumina: Optical and morphology changes under thermal and chemical treatments* / N.A. Shirin [et al.] // *Optical Materials*. – 2024. – Vol. 152. – P. 115518.
16. *Tuning the optical properties of nanoporous anodic alumina photonic crystals by control of allowed voltage range via mixed acid concentration* / S. Abbasimofrad [et al.] // *Journal of Physics and Chemistry of Solids*. – 2018. – Vol. 118. – P. 221–231.
17. *The effect of the voltage waveform on the microstructure and optical properties of porous anodic alumina photonic crystals* / S. Zhang [et al.] // *Optical Materials*. – 2019. – Vol. 98. – P. 109488.
18. *Гасенкова, И.В.* Угловые зависимости спектров зеркального отражения и цвета анодного оксида алюминия со свойствами фотонного кристалла / И.В. Гасенкова, Н.И. Мухуров, И.М. Андрухович // *Нано- и микросистемная техника*. – 2024. – Т. 26, № 1. – С. 18–24.
19. *Transmission spectra of one-dimensional porous alumina photonic crystals* / V.S. Gorelik [et al.] // *Photonics and Nanostructures – Fundamentals and Applications*. – 2018. – Vol. 32. – P. 6–10.
20. *Schwarz, J.A.* Dekker Encyclopedia of Nanoscience and Nanotechnology / J.A. Schwarz, C.I. Contescu, K. Putyera. – Vol. 4. Issues in Science and Technology Librarianship. M. Dekker: New York, 2004. – 34 p.
21. *Kushnir, S.E.* Thickness-dependent iridescence of one-dimensional photonic crystals based on anodic alumina / S.E. Kushnir, K.S. Napolskii // *Materials & Design*. – 2018. – Vol. 144. – P. 140–150.
22. *Кинетика формирования и растворения анодного оксида алюминия в электролитах на основе серной и селеновой кислот* / А.И. Садыков [и др.] // *Журнал неорганической химии*. – 2021. – Т. 66, № 2. – С. 265–273.
23. *Sulka, G.D.* Highly ordered anodic porous alumina formation by self-organized anodizing / G.D. Sulka // *Nanostructured Materials in Electrochemistry*. Edited by Ali Eftekhari. – Weinheim: WILEY-VCH, 2008. – P. 1–116.
24. *Lee, W.* Structural engineering of nanoporous anodic aluminium oxide by pulse anodization of aluminium / W. Lee, K. Steinhart, E. Pippel, R. Scholz // *Nature Nanotechnology*. – 2008. – Vol. 3. – P. 234–239.

Поступила в редакцию 09.12.2024.

Информация об авторах

Гасенкова Ирина Владимировна – д.ф.-м.н., доцент
 Мухуров Николай Иванович – д.т.н., профессор
 Андрухович Ирина Михайловна – к.т.н.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ И ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ВЕКТОРНЫХ ГАУССОВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ СО СЛОЖНЫМ АСТИГМАТИЗМОМ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ENERGY AND POLARIZATION PROPERTIES OF VECTOR GAUSSIAN LIGHT BEAMS WITH COMPLEX ASTIGMATISM

S.S. Girdel

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Исследованы новые решения параболического уравнения, описывающие векторные декартовы параксиальные ТМ световые пучки Гаусса со сложным астигматизмом. Установлены допустимые значения свободных параметров, при которых пучки Гаусса переносят конечную мощность. Предложены явные выражения, описывающие энергетические и поляризационные свойства векторных гауссовых световых пучков со сложным астигматизмом. Выполнено графическое моделирование и проведен соответствующий анализ эллипсов поляризации, интенсивности и поперечных потоков энергии векторных параксиальных световых пучков Гаусса с однородной и неоднородной (ТМ-моды) поляризацией.

Ключевые слова: поляризация, векторные пучки, пучки Гаусса, сложный астигматизм, ТМ-моды, поперечные потоки энергии.

Для цитирования: Гиргель, С.С. Энергетические и поляризационные свойства векторных гауссовых световых пучков со сложным астигматизмом / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 14–19. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_14. – EDN: VHVSNG

Abstract. The new solutions of the parabolic equation describing vectorial Cartesian paraxial TM Gaussian light beams with complex astigmatism are investigated. The admissible values of the free parameters at which Gaussian beams carry finite power are established. The explicit expressions describing energy and polarization properties of vector Gaussian light beams with complex astigmatism are proposed. The graphical modeling and corresponding analysis of polarization ellipses, intensity and transverse energy fluxes of vector Gaussian paraxial light beams with homogeneous and inhomogeneous (TM-modes) polarization are performed.

Keywords: polarization, vector beams, Gauss beams, complex astigmatism, TM-modes, transverse energy fluxes.

For citation: Girdel, S.S. Energy and polarization properties of vector Gaussian light beams with complex astigmatism / S.S. Girdel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 14–19. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_14 (in Russian). – EDN: VHVSNG

Введение

В настоящее время широко используются лазерные круговые гауссовы световые пучки, у которых пучки обладают круговой симметрией относительно оси пучка z [1]. Пучки с общим астигматизмом изучены значительно меньше [2]–[6]. Данная работа представляет собой развитие предыдущей работы автора [7]–[11], где исследовались энергетические и поляризационные свойства векторных астигматических световых пучков. Здесь используемый математический формализм распространяется на более общие векторные гауссовы световые пучки со сложным астигматизмом.

Сначала обсуждается общий формализм для описания скалярных гауссовых световых пучков со сложным астигматизмом. В следующих разделах сначала обсуждаются энергетические и поляризационные свойства векторных гауссовых

световых пучков со сложным астигматизмом и однородной поляризацией по сечению пучка, затем гауссовы ТМ-моды со сложным астигматизмом и неоднородно поляризованные по сечению пучка.

1 Общий скалярный астигматический гауссиан, характеризующий скалярные гауссовы световые пучки со сложным астигматизмом

Начнем с обсуждения свойств скалярных пучков Гаусса с общим астигматизмом. Предварительно обсудим необходимый математический формализм для описания пучков со сложным астигматизмом. Для 3D параболического уравнения

$$(\nabla_{\perp}^2 + 2ik\partial_z)f = 0 \quad (1.1)$$

общий скалярный астигматический гауссиан

$$G = \sqrt{\frac{\det Q(0)}{\det Q(z)}} \exp\left(\frac{ik\mathbf{r}_{\perp} Q^{-1}\mathbf{r}_{\perp}}{2}\right)$$

является его точным решением [4]. Здесь (2×2) -матрица пучка $Q = zI - Q_0$, Q – комплексный матричный параметр пучка, $Q_0 = Q'_0 + iQ''_0$. Поворотом системы координат вокруг оси Z матрицу Q'_0 можно привести к диагональному виду, а последующим сдвигом вдоль оси Z привести к простейшей форме:

$$Q'_0 = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}; \quad Q''_0 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{012} & \alpha_{22} \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$Q = \begin{bmatrix} z + a - i\alpha_{11}; & -i\alpha_{12} \\ -i\alpha_{12}; & z - a - i\alpha_{22} \end{bmatrix}.$$

(2×2) матрица Q''_0 для выполнения квадратичной интегрируемости гауссиана G должна быть положительно определенной, т. е. ее компоненты должны удовлетворять ограничениям

$$\{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 > 0, \alpha_{11} + \alpha_{22} > 0\}. \quad (1.2)$$

Обратная матрица

$$Q^{-1} \equiv \Gamma = \frac{1}{\det Q} \begin{bmatrix} z - a - i\alpha_{22}; & i\alpha_{12} \\ i\alpha_{12}; & z + a - i\alpha_{11} \end{bmatrix}.$$

Матрицу Q^{-1} можно представить также в инвариантной форме:

$$Q^{-1} = \frac{(z - Q_{oc})I - Q_0}{|Q_0| - Q_{oc}z + z^2}.$$

Заметим, что $\nabla_{\perp} G = ik \cdot \mathbf{b}_{\perp} \cdot G$. Здесь ввели, для краткости, вектор $\mathbf{b} = Q^{-1} \mathbf{r}_{\perp} \equiv \Gamma \mathbf{r}_{\perp}$. Его компоненты $(b_x, b_y) = (\Gamma_{11}x + \Gamma_{12}y, \Gamma_{12}x + \Gamma_{22}y)$. Теперь

$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_{\perp}} \mathbf{b}_{\perp} = \Gamma_c$ и здесь $\Gamma_c = Q_c / \det Q$ – след матрицы Γ . Детерминант $\det Q \equiv |Q| = |Q'| + i|Q''|$, где

$|Q'| = z^2 - a^2 - |Q''_0|$, где $|Q''_0| = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2$. Здесь и далее символ $||$ означает детерминант.

$|Q''| = -\alpha_{11}(z - a) - \alpha_{22}(z + a)$. Главные значения

матрицы Γ : $a_{1,2} = \frac{\Gamma_{11} + \Gamma_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Gamma_{11} - \Gamma_{22}}{2}\right)^2 + \Gamma_{12}^2}$.

После некоторых преобразований мнимую часть Γ'' матрицы $\Gamma = \Gamma' + i\Gamma''$ представим как

$$\Gamma'' = \begin{bmatrix} \Gamma''_{11} & \Gamma''_{12} \\ \Gamma''_{12} & \Gamma''_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\left(|Q'\right)^2 + \left(|Q''\right)^2} \times \\ \times \begin{bmatrix} (z - a)^2 \alpha_{11} + \alpha_{22} |Q''_0|; & \alpha_{12} (z^2 - a^2 - |Q''_0|) \\ \alpha_{12} (z^2 - a^2 - |Q''_0|); & (z + a)^2 \alpha_{22} + \alpha_{11} |Q''_0| \end{bmatrix}.$$

2 Однородно поляризованные гауссовы моды с общим астигматизмом

Для однородно поляризованных параксиальных векторных гауссовых пучков с общим

астигматизмом возьмем поперечную часть вектора электрического поля в форме: $\mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{e}_{\perp} f$; где нормированный $(|\mathbf{e}_{\perp}|^2 = 1)$ вектор поляризации $\mathbf{e}_{\perp} = \eta_x \mathbf{e}_x + \eta_y \mathbf{e}_y$. Как и в предыдущем разделе, в качестве решения возьмем $f = G$. Геометрические характеристики эллипса поляризации электрического вектора светового пучка задаются комплексным параметром [8]

$$\frac{\eta_y}{\eta_x} = \eta = \eta' + i\eta'' = \text{tg}(\psi' + i\psi'').$$

При этом азимут главной оси эллипса поляризации относительно оси OX равен ψ' , а эллиптичность $\gamma = \text{th}\psi''$. Полные векторы светового поля равны

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_{\perp} - \mathbf{r}_{\perp} \mathbf{b}_{\perp} \cdot \mathbf{e}_z\} G,$$

$$\mathbf{H}^{(1)} = \frac{\varepsilon}{n} ([\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_{\perp}] - [\mathbf{e}_{\perp}, \mathbf{b}_{\perp}]) G.$$

Плотность энергии электромагнитного поля параксиального светового пучка равна $w = \frac{\varepsilon |G|^2}{8\pi}$,

где $|G|^2 = \left| \frac{\det Q(0)}{\det Q(z)} \right| \exp(-kr_{\perp} \text{Im}(\mathbf{b}_{\perp}))$. Плотности

продольного S_z , поперечного орбитального S_o и спинового S_s потоков энергии параксиального пучка соответственно равны

$$S_z = \frac{c}{n} w, \quad S_o = S_z \cdot \text{Re}(b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y),$$

$$S_s = S_z \cdot \text{th} 2\psi'' \cdot \text{Im}(-b_y \mathbf{e}_x + b_x \mathbf{e}_y),$$

причем $S_{\perp} = S_o + S_s$.

Картина интенсивности гауссова светового пучка с общим астигматизмом представляет собой световое пятно эллиптической формы (рисунки 2.1–2.3). Азимуты главных осей эллипса интенсивности светового пятна определяются

формулой $\text{tg}(2\psi) = \frac{2\Gamma''_{12}}{\Gamma''_{11} - \Gamma''_{22}}$. Параметр эллиптичности светового пятна

$$\sin(2\chi) = \frac{2\sqrt{\Gamma''_{11}\Gamma''_{22} - \Gamma_{12}^2}}{\Gamma''_{11} + \Gamma''_{22}} = \frac{2\sqrt{|\Gamma''|}}{\Gamma''_c}.$$

Для графического моделирования полученных результатов для наглядности был выполнен переход к безразмерным переменным $X = x/x_0$, $Y = y/x_0$, $Z = z/z_0$, где $x_0 > 0$, $z_0 = kx_0^2/2$ – характерные линейные размеры пучка в поперечном и продольном направлениях соответственно. Некоторые результаты графического моделирования поперечных потоков энергии и интенсивности однородно поляризованного параксиального светового гауссова пучка с общим астигматизмом изображены в относительных единицах на рисунках 2.1–2.3 при различных

значениях свободных параметров. Чтобы обеспечить квадратичную интегрируемость (КИ) функций векторной амплитуды пучков Гаусса и, тем самым, переносимую конечную мощность через поперечное сечение пучка, выбирались параметры, удовлетворяющие условиям (1.2).

Световое пятно не может вырождаться в прямую линию, так как $|\Gamma''| > 0$. В круг тоже не может превращаться. В отличие от пучков Гаусса с простым астигматизмом азимуты главных осей эллипса интенсивности не фиксированные, $\psi \neq 0, \pi/2$ и зависят от расстояния Z . Размеры эллипса интенсивности возрастают с расстоянием Z . Компьютерное моделирование показывает, что линии спинового потока энергии эллиптической формы и полностью повторяют очертания

эллипса интенсивности. Линии полных поперечных потоков энергии S_{\perp} образуют спиральные вихри. Линии потоков S_0 и S_s при удалении от оси Z стремятся к радиальным направлениям. При выравнивании коэффициентов α_{11} и α_{22} пятно интенсивности стремится к круговому. Интенсивности поперечных потоков $|S_0| \gg |S_s|$, что иллюстрируют рисунки 2.1 и 2.2.

При распространении пучков Гаусса с общим астигматизмом и однородной поляризацией их световое пятно деформируется и вращается. В интервале $(-\infty > Z > \infty)$ главная ось эллипса интенсивности вращается на 180 градусов. Практически основное вращение происходит в интервале $(-1 > Z > 1)$ (рисунок 2.3).

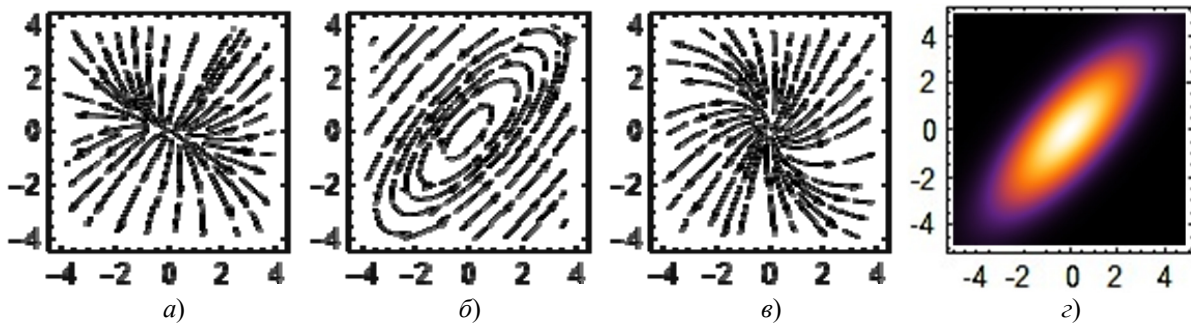


Рисунок 2.1 – Поперечные потоки энергии векторного однородно поляризованного светового гауссова пучка с общим астигматизмом: (а) орбитальный, (б) спиновый, (в) суммарный поперечный потоки энергии и (г) общая интенсивность пучка. Свободные параметры: $Z = 1,67$; $\alpha_{11} = 1$; $\alpha_{22} = 0,5$; $\alpha_{12} = 0,6$.

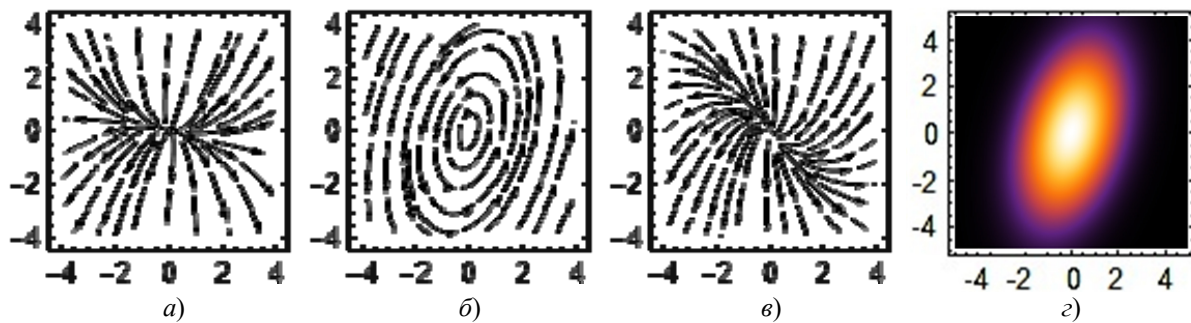


Рисунок 2.2 – Поперечные потоки энергии векторного однородно поляризованного светового гауссова пучка с общим астигматизмом: (а) орбитальный, (б) спиновый, (в) суммарный поперечный потоки энергии и (г) общая интенсивность пучка. Свободные параметры: $Z = 3,0$; $\alpha_{11} = 3$; $\alpha_{22} = 0,5$; $\alpha_{12} = 0,6$.

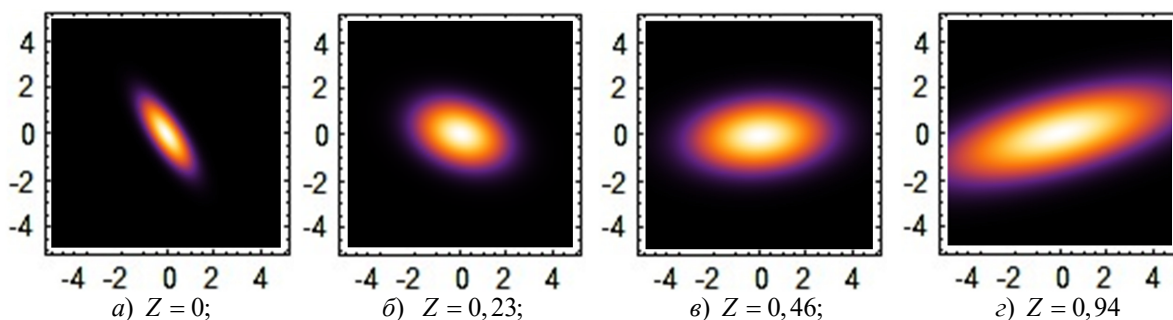


Рисунок 2.3 – Деформация и вращение эллипсов интенсивности пучков Гаусса с общим астигматизмом и однородной поляризацией. Свободные параметры: $\alpha_{11} = 0,6$; $\alpha_{22} = 3$; $\alpha_{12} = 1,3$; $a = 0,2$

3 Гауссовы ТМ-моды с общим астигматизмом

Перейдем к анализу свойств гауссовых световых пучков с общим астигматизмом и неоднородной по сечению поляризацией (ТМ-моды).

Возьмем в (1.1) $f = -\frac{1}{k}G$. Тогда для ТЕ мод поперечная часть вектора электрического поля гауссового пучка с общим астигматизмом

$$\mathbf{E}_{\perp}^{(1)} = \nabla_{\perp} \left(-\frac{i}{k}G \right) = \mathbf{b}_{\perp} \cdot G;$$

где по-прежнему $\mathbf{r}_{\perp} Q^{-1} \equiv \mathbf{b}_{\perp}$. Так как $\nabla_{\perp} \mathbf{b}_{\perp} = \Gamma_c$, то

$$\mathbf{E}_{TM}^{(1)} = \left(\mathbf{b}_{\perp} + \left(\frac{i}{k} \Gamma_c - \mathbf{b}_{\perp}^2 \right) \cdot \mathbf{e}_z \right) \cdot G; \quad \mathbf{H}_{TM}^{(1)} = \frac{\varepsilon}{n} [\mathbf{e}_z, \mathbf{b}_{\perp}] \cdot G.$$

Поляризация пучка определяется комплексным параметром

$$\eta = E_y^{(1)} / E_x^{(1)} = \frac{b_y}{b_x} = \frac{\mathbf{b}_{\perp} \mathbf{e}_y}{\mathbf{b}_{\perp} \mathbf{e}_x} = \frac{\mathbf{r}_{\perp} \Gamma \mathbf{e}_y}{\mathbf{r}_{\perp} \Gamma \mathbf{e}_x} = \text{tg}(\psi' + i\psi'').$$

Азимут эллипсов поляризации ψ' , эллиптичность $\gamma = \text{th} \psi''$. Общая плотность поперечного потока энергии для ТМ мод равна [10]

$\mathbf{S}_{\perp} = -\frac{c}{8\pi n} \text{Re}(\varepsilon \mathbf{E}_{\perp}^* \cdot \mathbf{E}_{\perp})$. Вычисляя в инвариантной форме, находим, что

$$\mathbf{S}_{\perp} = \frac{c\varepsilon |G|^2}{8\pi n} \text{Im}(\mathbf{b}_{\perp}^* \cdot (\Gamma_c / k + i\mathbf{b}_{\perp}^2)).$$

Согласно [12], плотности орбитального \mathbf{S}_0 и спинного \mathbf{S}_s потоков энергии параксиального пучка $\mathbf{S}_{\perp} = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_s$ выражаются, соответственно, как

$$\mathbf{S}_0 = \frac{c\varepsilon}{8\pi nk} \text{Im}(E_x^* \nabla_{\perp} E_x + E_y^* \nabla_{\perp} E_y)$$

$$\mathbf{S}_s = \frac{c\varepsilon}{16\pi nk} \text{Im}([\nabla_{\perp} \times [E_{\perp}^* \times E_{\perp}]]);$$

$$\mathbf{S}_s = \frac{c\varepsilon}{8\pi nk} \text{Im}([\nabla_{\perp}, \mathbf{e}_z](E_x^* E_y)).$$

После некоторых преобразований, учитывая, что $\text{Im}(b_x^* b_y) = \frac{1}{2} \text{Im}[\mathbf{b}_{\perp}^*, \mathbf{b}_{\perp}] \cdot \mathbf{e}_z$, представим эти выражения в инвариантных формах

$$\mathbf{S}_0 = \frac{c\varepsilon |G|^2}{8\pi n} \text{Im} \left\{ \mathbf{b}_{\perp}^* \Gamma / k + i\mathbf{b}_{\perp} \cdot |\mathbf{b}_{\perp}|^2 \right\},$$

$$\mathbf{S}_s = \frac{c\varepsilon |G|^2}{8\pi n} \text{Im} \left[\left(\frac{1}{k} \Gamma - \text{Im}(\mathbf{b}_{\perp}) \cdot \mathbf{b}_{\perp} \right) [\mathbf{e}_z, \mathbf{b}_{\perp}^*], \mathbf{e}_z \right],$$

$$\mathbf{S}_s = \frac{c\varepsilon |G|^2}{8\pi n} \text{Im} \left\{ \frac{(\Gamma_c - \Gamma) \mathbf{b}_{\perp}^*}{k} + i\mathbf{b}_{\perp} \cdot (\mathbf{b}^2 - |\mathbf{b}_{\perp}|^2) \right\}.$$

В декартовой системе координат

$$\mathbf{S}_s = \frac{c\varepsilon |G|^2}{8\pi n} \text{Im} \left\{ \left(\frac{\Gamma_{22}(2\Gamma_{12}^* y + \Gamma_{11}^* x)}{k} - 2b_x^* b_y \text{Im}(b_y) \right) \mathbf{e}_x, \right.$$

$$\left. \left(\frac{\Gamma_{11}(2\Gamma_{12}^* x + \Gamma_{22}^* y)}{k} - 2b_y^* b_x \text{Im}(b_x) \right) \mathbf{e}_y \right\},$$

$$\mathbf{S}_0 = \frac{c\varepsilon |G|^2}{8\pi n} \text{Im} \left\{ \frac{\Gamma_{12}^* (\Gamma_{11} - \Gamma_{22})}{k} (\mathbf{e}_x y - \mathbf{e}_y x) + i\mathbf{b}_{\perp} \cdot |\mathbf{b}_{\perp}|^2 \right\}.$$

На рисунках 3.1–3.6 показаны некоторые характерные картины поперечных потоков энергии и общих интенсивностей в относительных единицах для ТМ мод Гаусса с общим астигматизмом. Чтобы обеспечить КИ функций векторной амплитуды пучков Гаусса и, тем самым, переносимую конечную мощность через поперечное сечение пучка, выбирались параметры, удовлетворяющие условиям (1.2). На всех рисунках 3.1–3.6 взят одинаковый свободный параметр $k \rightarrow 2$. Видно, что линии орбитальных и спинных потоков энергии ориентированы самыми разнообразными способами. Картины общей интенсивности содержат одно или два пика интенсивности. Поляризация ТМ мод Гаусса с общим астигматизмом является сильно неоднородной по поперечному сечению пучка и, в общем случае, эллиптической. При изменениях расстояния Z от оси пучка поляризация периодически видоизменяется от линейной до круговой.

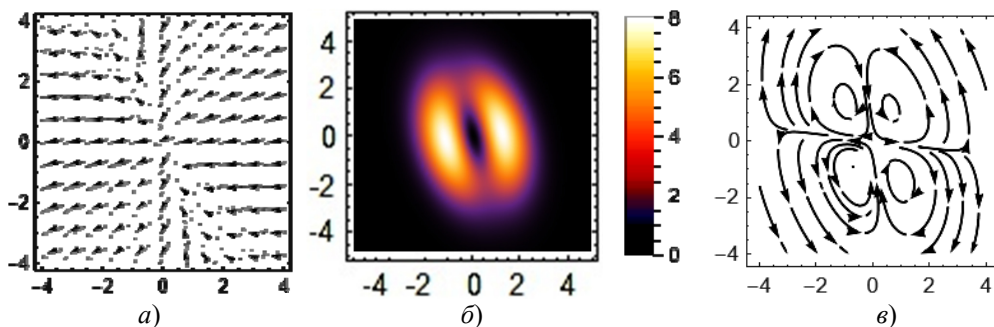


Рисунок 3.1 – Эллипсы поляризации (а), интенсивность (б) и линии поперечных спинных потоков энергии ТМ-моды гауссового пучка с общим астигматизмом.

Свободные параметры: $Z = 0$; $\alpha_{11} = 2$; $\alpha_{22} = 6$; $\alpha_{12} = 1$; $a = 1$

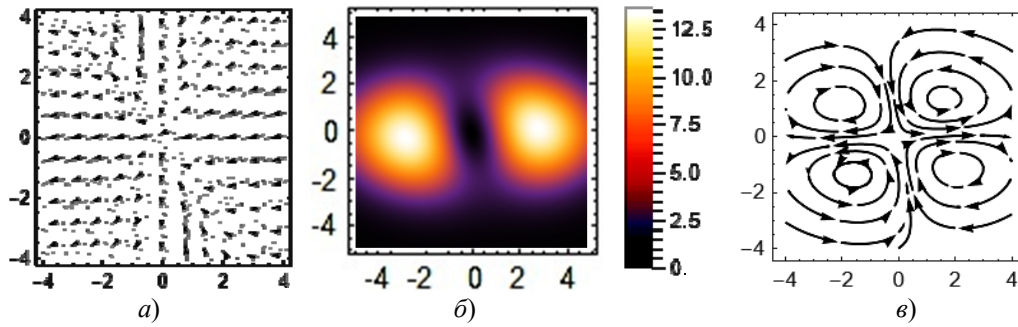


Рисунок 3.2 – Эллипсы поляризации (а), интенсивность (б) и линии поперечных спиновых потоков энергии ТМ- моды гауссового пучка с общим астигматизмом.
Свободные параметры: $Z = 2$; $\alpha_{11} = 0,9$; $\alpha_{22} = 6$; $\alpha_{12} = 1$; $a = 1$

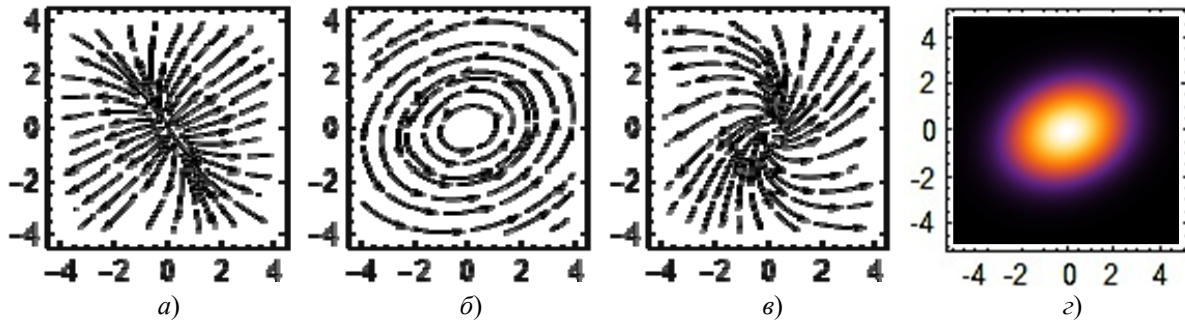


Рисунок 3.3 – Орбитальный (а), спиновый (б), общий поперечный потоки энергии векторных пучков Гаусса (ТМ моды) с общим астигматизмом (в), интенсивность пучка (г).
Свободные параметры: $Z = 3$; $\alpha_{11} = 1,7$; $\alpha_{22} = 3$; $\alpha_{12} = 1,1$; $a = 0,2$

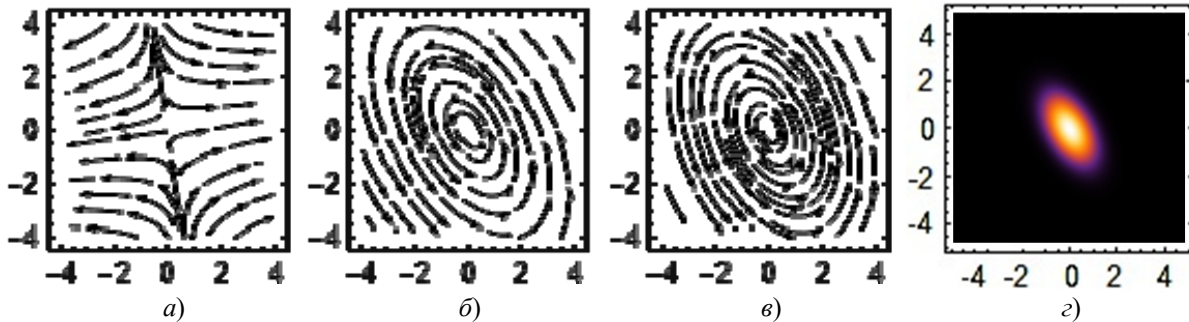


Рисунок 3.4 – Орбитальный (а), спиновый (б), общий поперечный потоки энергии векторных пучков Гаусса (ТМ моды) с общим астигматизмом (в), интенсивность пучка (г).
Свободные параметры: $Z = 0$; $\alpha_{11} = 1,7$; $\alpha_{22} = 3$; $\alpha_{12} = 1,1$; $a = 0,2$

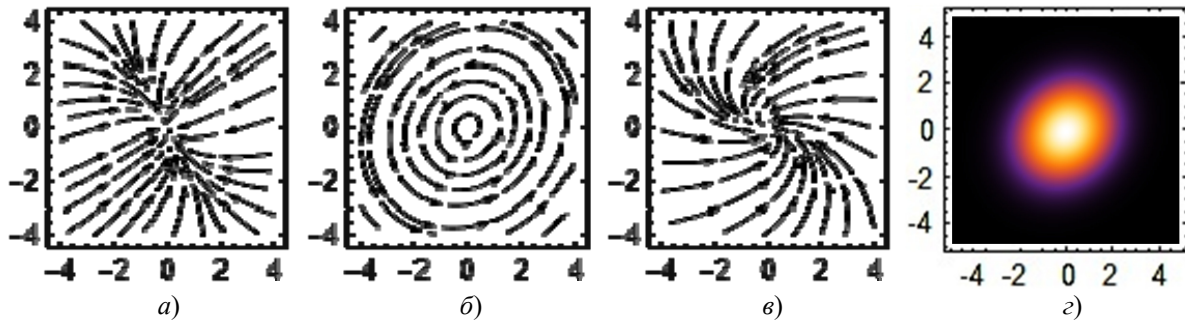


Рисунок 3.5 – Орбитальный (а), спиновый (б), общий поперечный потоки энергии векторных пучков Гаусса (ТМ моды) с общим астигматизмом (в), интенсивность пучка (г).
Свободные параметры: $Z = -2,72$; $\alpha_{11} = 1,7$; $\alpha_{22} = 3$; $\alpha_{12} = 1,1$; $a = 0,2$

Интересно, что линии спиновых потоков энергии ТМ пучков Гаусса образуют замкнутые кривые. Это соответствует общим спиралевидным энергетическим спиновым потокам. Как и для однородной поляризации, на рисунках 3.3–3.5 эллипсы поперечных спиновых потоков энергии по форме такие же, как эллипсы интенсивности. Однако на рисунках 3.1–3.2 формы замкнутых линий поперечных спиновых потоков энергии не соответствуют форме интенсивности пучка, хотя их симметрии совпадают.

Отметим также, что при распространении пучков Гаусса с общим астигматизмом и ТМ поляризацией их световое пятно деформируется и вращается, как и для однородно поляризованных пучков Гаусса. В интервале $(-\infty > Z > \infty)$ главная ось эллипса интенсивности снова вращается на 180 градусов.

Заключение

В данной работе представлены новые решения векторного параболического уравнения, описывающие параксиальные векторные световые пучки Гаусса с однородной и неоднородной поляризацией (ТМ-моды). Представлены явные выражения для векторов поля, интенсивности, орбитального, спинового и общего потоков энергии пучков Гаусса с однородной и неоднородной поляризацией.

Проведенное графическое моделирование эллипсов поляризации, интенсивности и поперечных потоков энергии (орбитального S_o , спинового S_s и общего $S_{\perp} = S_o + S_s$) потоков подтвердило и проиллюстрировало аналитические расчеты.

Наличие нескольких свободных параметров позволяет в определенных пределах изменять физические свойства рассматриваемых пучков Гаусса с общим астигматизмом. Дальнейшее их изучение может открыть новые перспективы использования таких пучков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ананьев, Ю.А. Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев. – Москва: Наука, 1990. – 264 с.
2. Arnaud, J. Gaussian beams with general astigmatism / J. Arnaud, H. Kogelnik // Applied Optics. – 1969. – Vol. 25. – P. 2908–2911.

3. Гончаренко, А.М. Гауссовы пучки света / А.М. Гончаренко. – Минск: Наука и техника, 1977. – 142 с.

4. Heyman, H. Gaussian beam and pulsed beam dynamics: complex-source and complex-spectrum formulations within and beyond paraxial asymptotics / E. Heyman, L.B. Felsen // J. Opt. Soc. Am. A. – 2001. – Vol. 18. – P. 1588–1611.

5. Абрамочкин, Е.Г. Современная оптика гауссовых пучков / Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 184 с.

6. Modeling of the general astigmatic Gaussian beam and its propagation through 3D optical systems / E. Kochkina [et al.] // Applied Optics. – 2013. – Vol. 42, № 24. – P. 6030–6040.

7. Гиргель, С.С. Скалярные параксиальные двумерные гауссовоподобные пучки / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2010. – № 1 (2). – С. 7–11.

8. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 1 (26). – С. 17–21.

9. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. II. Неоднородная поляризация // С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4 (33). – С. 7–10.

10. Гиргель, С.С. Энергетические характеристики векторных циркулярных пучков Куммера конечной мощности. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 20–24.

11. Гиргель, С.С. Поляризационные свойства и поперечные потоки энергии векторных бесель-гауссовых ТМ световых пучков / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 15–19.

12. Bekshaev, A. Internal flows and energy circulation in light beams / A. Bekshaev, K. Bliokh, M. Soskin // Journal of Optics. – 2011. – Vol. 13 (5). – P. 053001.

Поступила в редакцию 21.10.2024.

Информация об авторах

Гиргель Сергей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор

ДИФРАКЦИЯ ИГОЛЬЧАТЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ НА УЛЬТРАЗВУКЕ В КРИСТАЛЛАХ ПАРАТЕЛЛУРИТА

Г.В. Кулак¹, В.И. Казаков², Т.В. Николаенко¹, П.И. Ропот³

¹Мозырский государственный педагогический университет

²Государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург

³Институт физики НАН Беларуси, Минск

DIFFRACTION OF NEEDLE LIGHT BEAMS BY ULTRASONIC WAVES IN PARATELLURITE CRYSTALS

G.V. Kulak¹, V.I. Kazakov², T.V. Nikolaenko¹, P.I. Ropot³

¹Mozyr State Pedagogical University

²State University of Aerospace Instrumentation, St. Petersburg

³Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk

Аннотация. Исследована брэгговская дифракция циркулярно поляризованных игольчатых световых пучков на медленной сдвиговой ультразвуковой волне в кристаллах парателлурифта. Показано, что при изменении угла конусности падающего на диафрагму бесселевого светового пучка достигается высокая эффективность дифракции ~90% для сформированного и падающего на акустооптическую ячейку игольчатого пучка. Установлено, что при увеличении длины акустооптического взаимодействия эффективность дифракции игольчатых световых пучков достигает максимального значения при меньших мощностях ультразвука. Показано, что при малых углах конусности светового пучка эффективность дифракции игольчатого светового пучка сравнима с эффективностью дифракции гауссового.

Ключевые слова: игольчатый световой пучок, брэгговская дифракция света, дифракционная эффективность, одноосный гиротропный кристалл, кристалл парателлурифта.

Для цитирования: Дифракция игольчатых световых пучков на ультразвуке в кристаллах парателлурифта / Г.В. Кулак, В.И. Казаков, Т.В. Николаенко, П.И. Ропот // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 20–24. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_20. – EDN: VOFSNR

Abstract. Bragg diffraction of circularly polarized needle light beams by a slow shear ultrasound wave in paratellurite crystals is studied. It is shown that by changing the cone angle of the Bessel light beam incident on the diaphragm, a high diffraction efficiency of ~90% is achieved for the needle beam formed and incident on the acousto-optic cell. It is found that with an increase in the length of the acousto-optic interaction, the diffraction efficiency of the needle light beams reaches a maximum value at lower ultrasound powers. It is shown that at small cone angles of the light beam, the diffraction efficiency of the needle light beam is comparable to the diffraction efficiency of the Gaussian one.

Keywords: needle light beam, Bragg diffraction of light, diffraction efficiency, uniaxial gyrotropic crystal, paratellurite crystal.

For citation: Diffraction of needle light beams by ultrasonic waves in paratellurite crystals / G.V. Kulak, V.I. Kazakov, T.V. Nikolaenko, P.I. Ropot // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 20–24. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_20 (in Russian). – EDN: VOFSNR

Введение

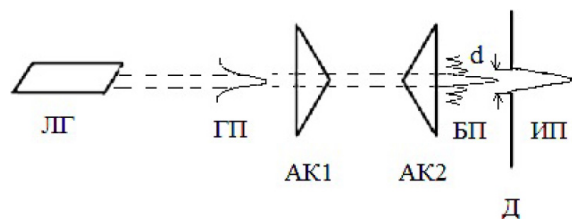
В работе [1] показано, что для кольцевой апертуры светового поля с равномерным освещением длина фокальной области увеличивается по сравнению с обычными пучками. Метод формирования кольцевого пучка посредством аподизации апертуры светового поля рассмотрен в [2]. Особенности преобразования кольцевой структуры светового поля с использованием двухаксионной схемы изучены в [3]. В работе [4] рассмотрены особенности формирования игольчатых световых пучков (ИП) с использованием аксионной схемы и аподизирующей диафрагмы. ИП отличаются высокой интенсивностью, высокой разрешающей способностью и увеличенной

глубиной фокусировки. Такие пучки, имеющие более удлиненную фокальную область по сравнению с гауссовыми, находят широкое применение в лазерных технологиях для резки, сварки, гравировки и др. В работе [5] исследованы особенности брэгговской дифракции ограниченных световых пучков различных амплитудных распределений (гауссового, прямоугольного и лорентцевого) на ультразвуке. Показано, что дифракционная эффективность уменьшается при переходе от пучка прямоугольного профиля, падающего на акустооптическую ячейку, далее переходя к гауссовому и, наконец, к лорентцевому профилю. Отметим, что при этом использовалась двумерная теория связанных волн, естественным

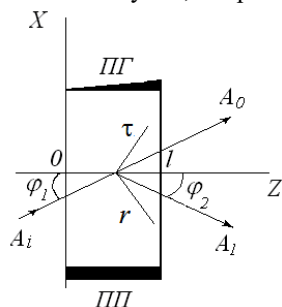
образом учитывающая сложное амплитудное распределение падающего светового пучка. В настоящей работе с использованием теории связанных волн впервые исследуются особенности брэгговской дифракции ИП на ультразвуке.

1 Геометрия анизотропной брэгговской дифракции

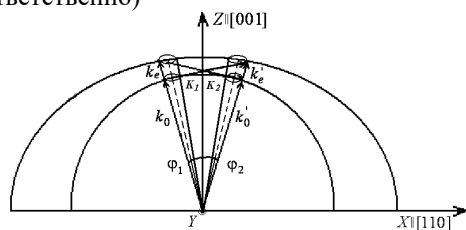
На рисунке 1.1 представлена схема формирования ИП и анизотропной брэгговской дифракции циркулярно поляризованных световых пучков.



а) Схема формирования ИП (ЛП – лазерный источник), АК1 – аксикон с углом конусности γ_1 , АК2 – аксикон с углом конусности γ_2 , Д – диафрагма, ГП – гауссов пучок, БП – бесселев пучок, ИП – игольчатый пучок, d – размер щели)



б) Схема АО взаимодействия БСП и УЗ волны (ПП – пьезопреобразователь, ПГ – поглотитель ультразвука, φ_1 и φ_2 – угол падения и дифракции соответственно)



в) геометрия расположения преломленной и дифрагированной плосковолновых компонент ИП в плоскости дифракции на медленной сдвиговой УЗ волне в кристалле TeO_2 ($\vec{K}_{1,2}$ – волновые векторы ультразвука, $\vec{k}_{o,e}$, $\vec{k}'_{o,e}$ – волновые векторы преломленной и дифрагированной волн, 2δ – угол между волновыми векторами \vec{K}_1 и \vec{K}_2)

Рисунок 1.1 – Схема формирования ИП и анизотропной брэгговской дифракции циркулярно поляризованных световых пучков

Здесь гауссов пучок от лазерного источника проходит через систему двух аксиконов с различными преломляющими углами γ_1 и γ_2 , причем $\gamma_2 > \gamma_1$. За вторым аксиконом в области квазибездифракционного распространения формируется бесселев световой пучок (БСП), который при малых $\Delta\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$ имеет широкий центральный максимум диаметром d по уровню нулевой интенсивности. На пути БСП расположен экран с круговой щелевой диафрагмой, причем край диафрагмы совпадает с первым нулем БСП. В результате за экраном формируется пучок в форме осевого максимума с нулевой интенсивностью по краю апертуры, который принято называть ИП [4].

Рассмотрим геометрию АО взаимодействия (рисунок 1.1), для которой УЗ волна распространяется в кристалле параллеллурита под малым углом δ к оси X и занимает пространство между плоскостями $z = 0$ и $z = l$. Ось падающего ИП расположена в плоскости XZ под углом φ_1 к фронту УЗ волны. Сечение поверхности волновых векторов плоскостью дифракции XZ и расположение плосковолновых компонент падающего (k_o и k_e) и плосковолновых компонент дифрагированного (k'_o и k'_e) ИП показано на рисунке 1.1, б. При этом, как показано на рисунке 1.1, б, реализуются два дифракционных процесса: $\vec{k}_o + \vec{K}_1 = \vec{k}'_e$, $\vec{k}_e + \vec{K}_2 = \vec{k}'_o$, где \vec{K}_1, \vec{K}_2 – плосковолновые компоненты акустического пучка. Для рассматриваемой геометрии АО взаимодействия следует положить:

$$\varphi_1 \approx \varphi_2 \approx \varphi = \arcsin(\lambda_0 v / 2nv),$$

где λ_0 – длина световой волны в вакууме, $n = (n_o + n_e) / 2$ – средний показатель преломления кристалла (n_o, n_e – обыкновенный и необыкновенный показатели преломления кристалла), v – фазовая скорость УЗ волны.

2 Расчет эффективности дифракции

В рамках двумерной теории связанных волн система связанных дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд дифрагированных волн $A_0(r), A_1(\tau)$ имеет вид [5]:

$$\frac{\partial A_0}{\partial \tau} + i\chi A_1 = 0, \quad \frac{\partial A_1}{\partial r} + i\chi A_0 = 0, \quad (2.1)$$

где коэффициент связи дифрагированных волн χ выражается через свертки тензора изменения диэлектрической проницаемости

$$\Delta \epsilon_{ij} = -\epsilon_{ik} \epsilon_{lj} P_{klmn} U_{mn}$$

(ϵ_{ij}, U_{mn} – компоненты тензора диэлектрической проницаемости и тензора УЗ деформации) с векторами поляризации \vec{e}_0, \vec{e}_1 дифрагированных волн нулевого «0» и первого «1» порядка, то есть $\chi = k^2 (\vec{e}_0 \Delta \vec{e}_1) / 2$; $\tau = z \sin \varphi - x \cos \varphi$,

$$r = z \sin \varphi + x \cos \varphi; \quad k = 2\pi n / \lambda_0.$$

Если искать решение системы уравнений (2.1) методом Римана с использованием граничных условий: $A_0(z=0) = A_{i0}$, $A_1(z=0) = 0$, то общее решение можно представить в виде:

$$A_0(r) = A_i(r) -$$

$$-\frac{1}{2} v \int_{-1}^{+1} A_i [r - l(1-q) \sin \varphi] \frac{J_1(v\sqrt{1-q^2})}{\sqrt{1-q^2}} dq, \quad (2.2)$$

$$A_1(\tau) =$$

$$= -i \frac{1}{2} v \int_{-1}^{+1} A_i [l(1-q) \sin \varphi - \tau] J_0(v\sqrt{1-q^2}) dq, \quad (2.3)$$

где $v = \chi l / kn^2 \cos \varphi$ – индекс модуляции УЗ волной; $J_0(x)$, $J_1(x)$ – функции Бесселя первого рода, соответственно нулевого и первого порядка. При этом индекс модуляции выражается через коэффициент акустооптического качества M_2 :

$v = \frac{2\pi}{\lambda_0 \cos \varphi} \sqrt{\frac{M_2 P_a l}{2h}}$, где P_a – мощность ультразвука, h – ширина пьезопреобразователя.

Выражения (2.2), (2.3) позволяют рассчитать амплитудное распределение дифрагированного ИП нулевого и первого порядка для любого уровня акустической мощности и широкого класса падающих световых пучков. Эффективность АО дифракции (η) определяется соотношением

$$\eta = \frac{\int_{-\tau_1}^{+\tau_1} |A_1(\tau)|^2 d\tau}{\int_{-r_1}^{+r_1} |A_0(r)|^2 dr + \int_{-\tau_1}^{+\tau_1} |A_1(\tau)|^2 d\tau}. \quad (2.4)$$

3 Численный анализ дифракционной эффективности

Численные расчеты проводились для АО дифракции излучения с длиной волны $\lambda_0 = 532$ нм на медленной сдвиговой УЗ волне, распространяющейся под малым углом $\delta \ll 1$ к оси [110] кристалла парателлуриата (TeO_2). Полагалось, что коэффициент АО качества для циркулярно-поляризованной падающего волнового пучка равен [6]: $M_2 = 793 \cdot 10^{-18} \text{ с}^3/\text{г}$. В соответствии со схемой, представленной на рисунке 1.1, а, бesselев световой пучок нулевого порядка на выходе второго аксикона имеет вид

$$A_i(r) = A_{ni} J_0(qr), \quad (3.1)$$

где $q = (2\pi/\lambda) \sin \Delta\gamma$, причем $\lambda = \lambda_0/n$; полагается, что относительное изменение угла конусности системы из двух аксиконов составляет $\Delta\gamma/\gamma = 10^{-2}$, где $\Delta\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$. Пределы интегрирования в выражении (2.4) находились из условия достижения первого нуля функции Бесселя (3.1), то есть $qr_1 = 2, 4$, тогда $r_1 = 1, 2\lambda / \pi \sin(\Delta\gamma)$.

При интегрировании в (2.4) полагалось, что $r_1 = \tau_1$. Как следует из рисунка 3.1, а, диаметр диафрагмы $d = 2r_1$, причем величина $r_1 \sim 1$ мм. Для эффективной АО дифракции ИП необходимо, чтобы выполнялось соотношение: $\Delta\gamma \leq \lambda f / 2v$ (f – центральная частота источника УЗ волны, v – фазовая скорость УЗ волны), то есть угловая расходимость светового пучка должна быть меньше, чем угловая ширина брегговского синхронизма [7].

Для гауссового светового пучка

$$A_i(r) = A_g \exp[-(r/w)^2], \quad (3.2)$$

где w – радиус гауссового светового пучка (по интенсивности).

Амплитуды световых пучков находились из условия равенства единице мощности светового пучка. В таком случае следует в выражениях (3.1), (3.2) полагать:

$$A_{ni} = 1/r_1 \sqrt{\pi} J_0(qr_1), \quad A_g = \sqrt{2}/w\sqrt{\pi}.$$

На рисунке 3.1 представлены амплитудные пространственные распределения бesselевого (а) и гауссового (б) светового пучка.

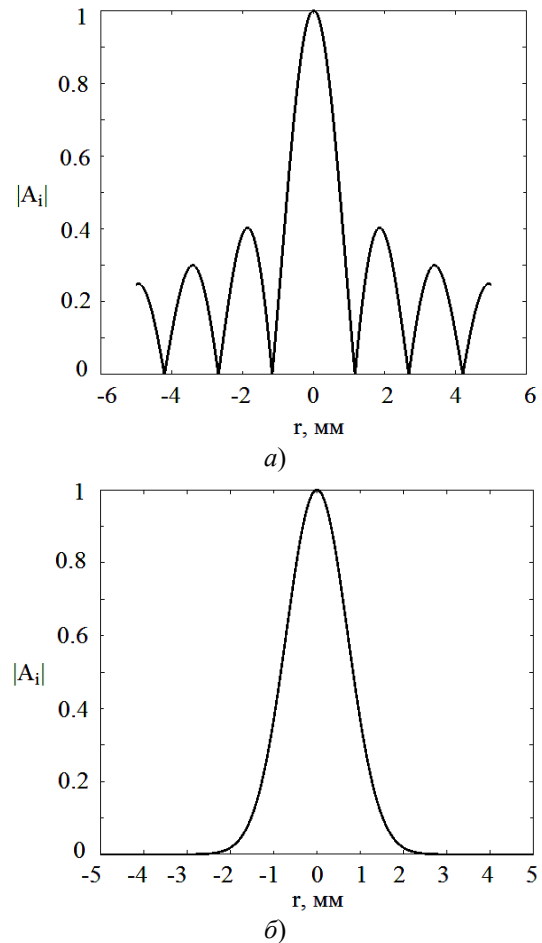


Рисунок 3.1 – Зависимость амплитуды (A_i) бesselевого светового пучка (а) и гауссового пучка (б) от поперечной координаты r ($\Delta\gamma = 0,01^\circ$, $\lambda_0 = 532$ нм (а); $w = 1$ мм (б))

На рисунке 3.2 для ИП представлена зависимость дифракционной эффективности η от мощности ультразвука P_a , рассчитанная по формуле (2.4), при различных значениях длины АО взаимодействия l .

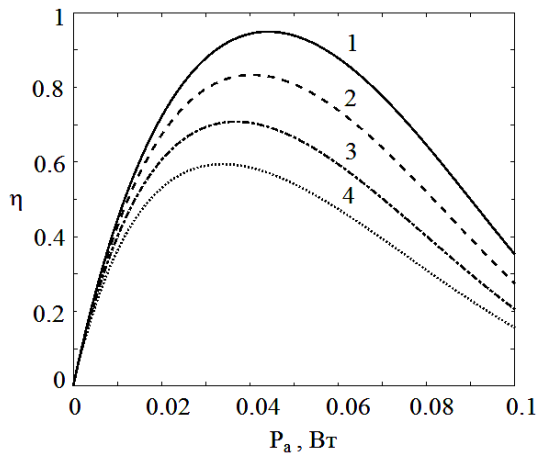


Рисунок 3.2 – Зависимость эффективности дифракции ИП η от мощности ультразвуковой волны P_a при различных длинах АО взаимодействия l : 1 – 5, 2 – 10, 3 – 15, 4 – 20 мм (кристалл TeO_2 , $\lambda_0 = 532$ нм, $M_2 = 793 \cdot 10^{-18}$ $\text{с}^3/\text{Г}$, $h = 4$ мм, $w = 1$ мм, $\varphi = 1^0$, $\Delta\gamma = 1^0$)

Максимальное значение дифракционная эффективность $\eta = 95\%$ достигает, например, при $l = 1$ мм для мощности УЗ $P_a = 0,043$ Вт. При увеличении длины АО взаимодействия величина мощности УЗ, при которой достигается максимальная эффективность дифракции, смещается в сторону меньших УЗ мощностей.

Зависимость эффективности дифракции ИП от мощности ультразвука P_a при различных $\Delta\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$ представлена на рисунке 3.3.

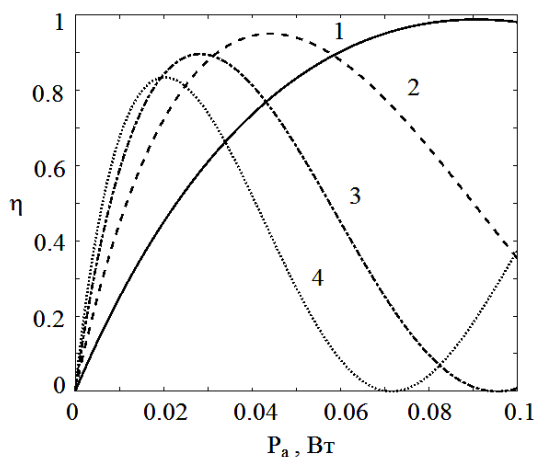


Рисунок 3.3 – Зависимость эффективности дифракции ИП η от мощности ультразвуковой волны P_a при различных углах $\Delta\gamma$: 1 – $0,01^0$, 2 – $0,02^0$, 3 – $0,03^0$, 4 – $0,04^0$ (кристалл TeO_2 , $\lambda_0 = 532$ нм, $M_2 = 793 \cdot 10^{-18}$ $\text{с}^3/\text{Г}$, $h = 4$ мм, $l = 10$ мм, $\varphi = 1^0$)

Максимальное значение дифракционная эффективность $\eta = 98\%$ достигает, например, при $\Delta\gamma = 0,01^0$ для мощности УЗ $P_a = 0,093$ Вт. При увеличении угла конусности γ величина мощности УЗ, при которой достигается максимальная эффективность дифракции, смещается в сторону меньших УЗ мощностей. При этом, однако, максимальное значение эффективности дифракции снижается до 82% при $\Delta\gamma = 0,04^0$.

На рисунке 3.4 для гауссового светового пучка представлена зависимость дифракционной эффективности η от мощности ультразвука P_a , рассчитанная по формуле (2.4), при различных значениях длины АО взаимодействия l . Пределы интегрирования соответствовали соотношению $r_1 = 1,2\lambda / \pi \sin(\Delta\gamma)$. Заметим, что при увеличении угла $\Delta\gamma$ от $0,01^0$ до $0,04^0$, то есть при изменении величины параметра r_1 , эффективность дифракции не изменялась.

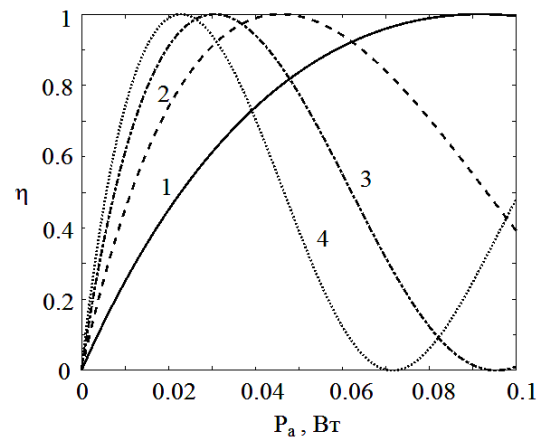


Рисунок 3.4 – Зависимость эффективности дифракции гауссового светового пучка η от мощности ультразвуковой волны P_a при различных длинах АО взаимодействия l : 1 – 5, 2 – 10, 3 – 15, 4 – 20 мм (кристалл TeO_2 , $\lambda_0 = 532$ нм, $M_2 = 793 \cdot 10^{-18}$ $\text{с}^3/\text{Г}$, $h = 4$ мм, $w = 1$ мм, $\varphi = 1^0$)

Эффективность дифракции гауссового светового пучка сравнима (однако, несколько выше) с эффективностью дифракции игольчатого. При увеличении длины АО взаимодействия максимум эффективности дифракции игольчатых и гауссовых пучков смещается в сторону меньших акустических мощностей.

Заключение

Таким образом, теоретически исследована брэгговская дифракция циркулярно поляризованных ИП на медленной сдвиговой ультразвуковой волне в кристаллах парателлуриата. Показано, что при изменении угла конусности, падающего на диафрагму бесселевого светового пучка, в условиях выделения центральной части

пучка, достигается высокая эффективность дифракции ~82–98% для сформированного падающего на акустооптическую ячейку ИП. Установлено, что при увеличении длины акустооптического взаимодействия эффективность дифракции игольчатых и гауссовых световых пучков достигает максимального значения при меньших мощностях ультразвука. Показано, что при малых углах конусности светового пучка эффективность дифракции ИП сравнима с эффективностью дифракции гауссового.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Linfoot, E.H.* Diffraction Images in Systems with an Annular Aperture / E.H. Linfoot, E. Wolf // *Proceedings of the Physical Society. Section B.* – 1953. – Vol. 66. – № 2. – P. 145.
2. *Wolford, W.T.* Use of Annular Aperture to Increase Focal Depth / W.T. Wolford // *Journal of the Optical Society of America.* – 1960. – Vol. 50. – № 8. – P. 749–753.
3. *Формирование бесселевых световых пучков на больших расстояниях из кольцевых полей* / Н.А. Хило, П.И. Ропот, П.К. Петров, В.Н. Белый // *Известия НАН Беларуси. Серия физ.-мат. наук.* – 2022. – Т. 58, № 1. – С. 90–100.
4. *Grunwald, R.* Needle beams: a review / R. Grunwald, M. Bock // *Advances in Physics: X.* –

2020. – Vol. 8, № 1. – P. 1736950. – DOI: <https://doi.org/10.1080/23746149.2020.1736950>.

5. *Белый, В.Н.* Дифракция световых пучков на затухающих ультразвуковых волнах в оптически изотропных средах / В.Н. Белый, И.Г. Войтенко, Г.В. Кулак // *Журнал прикладной спектроскопии.* – 1992. – Т. 56, № 5–6. – С. 831–836.

6. *Блистанов, А.А.* Кристаллы квантовой и нелинейной оптики. / А.А. Блистанов. – Москва: МИСИС, 2000. – 431 с.

7. *Балакший, В.И.* Физические основы акустооптики / В.И. Балакший, В.И. Парыгин, Л.Е. Чирков. – Москва: Радио и связь, 1985. – 279 с.

Результаты исследования (частично) получены при финансовой поддержке МО РБ по договору №1410/2021.

Поступила в редакцию 03.10.2024.

Информация об авторах

Кулак Геннадий Владимирович – д.ф.-м.н., профессор
Казаков Василий Иванович – к.т.н., доцент
Николаенко Татьяна Викторовна – к.ф.-м.н., доцент
Ропот Петр Иосифович – к.ф.-м.н., доцент

УДК 539.3

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_25

EDN: WGDTRR

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЯТИСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЗАКРЕПЛЕНИЯХ КОНТУРА

Е.А. Лачугина*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель*

FREE VIBRATIONS OF A FIVE-LAYER CIRCULAR PLATE AT DIFFERENT FIXATIONS OF THE CONTOUR

E.A. Lachugina*Belarusian State University of Transport, Gomel*

Аннотация. Разработана математическая модель исследования собственных колебаний пятислойной несимметричной по толщине круглой пластины при защемленном или шарнирном опертом контурах. Для нахождения собственных чисел выписаны трансцендентные уравнения в зависимости от граничных условий. Приведена формула, связывающая собственные числа и частоты колебаний. Проведено численное исследование влияния толщины внутреннего несущего слоя и упругих характеристик материалов слоев на собственные числа и частоты. Показано, что увеличение упругих модулей материалов или толщины несущего слоя приводит к росту собственных частот.

Ключевые слова: *пятислойная круговая пластина, несимметричность по толщине, собственные колебания, частоты.*

Для цитирования: *Лачугина, Е.А.* Собственные колебания пятислойной круговой пластины при различных закреплениях контура / *Е.А. Лачугина* // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 25–30. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_25. – EDN: WGDTRR

Abstract. A mathematical model for the study of the natural vibrations of a five-layer circular plate asymmetric in thickness with pinched or hinged contours is developed. Transcendental equations depending on boundary conditions are written out to find the eigenvalues. The formula linking the eigennumbers and frequencies of oscillations is given. A numerical study of the influence of the thickness of the inner non-substantial layer and the elastic characteristics of the layer materials on the eigen-numbers and frequencies is carried out. It is shown that an increase in the elastic moduli of the materials or in the thickness of the supporting layer leads to an increase in the natural frequencies.

Keywords: *five-layer circular plate, thickness asymmetry, natural oscillations, frequencies.*

For citation: *Lachugina, E.A.* Free vibrations of a five-layer circular plate at different fixations of the contour / *E.A. Lachugina* // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 25–30. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_25 (in Russian). – EDN: WGDTRR

Введение

Из-за повсеместного использования слоистых конструкций в технике и промышленности, возникает потребность в создании расчетных математических моделей для определения прочности конструкций.

В последние годы в различных отраслях народного хозяйства наблюдается повышенный интерес к применению композитных элементов конструкций. Это обуславливает необходимость разработки соответствующих математических моделей и методов расчета. Этой проблеме посвящены монографии [1]–[8]. Колебания неоднородных цилиндрических оболочек и стержней при резонансных и нестационарных нагрузках исследованы в статьях [9]–[13].

Изгиб трехслойных стержней в температурном поле рассмотрен в работах [14]–[16]. Публикации [17], [18] посвящены деформированию трехслойных пластин, связанных с упругим основанием Пастернака. Аналитическое исследование и

численная апробация полученных решений задач об изгибе трехслойных пластин различными нагрузками приведены в [19]–[22].

Работы [23]–[28] посвящены разработке математической модели и решению частных задач о собственных колебаниях симметричной по толщине круговой пятислойной пластины с легкими заполнителями. Здесь предложена постановка и приведено аналитическое решение задачи о собственных колебаниях *несимметричной* по толщине пятислойной круговой пластины.

1 Постановка начально-краевой задачи

Рассматриваются поперечные колебания несимметричной по толщине круглой пятислойной пластины (рисунок 1.1). Постановка начально-краевой задачи осуществляется в цилиндрической системе координат, связанной со срединной плоскостью внутреннего несущего слоя.

Три тонких несущих слоя, толщины которых h_1 , h_2 , h_4 (внешние (2, 4), внутренний (1)),

изготовлены из высокопрочного материала. Для них принимаются гипотезы Кирхгофа, т. е. нормали в этих слоях сохраняют свою длину и остаются прямолинейными и перпендикулярными к деформированной срединной поверхности. Менее прочные легкие заполнители (3, 5) имеют большую толщину, служат связующими для обеспечения совместной работы слоев. Их деформирование подчиняется гипотезе Тимошенко, согласно которой нормаль после приложения нагрузки не изменяет длины, остается прямолинейной, но не перпендикулярной срединной поверхности. Они поворачиваются на некоторые углы $\psi_i(r, t)$ ($i = 1, 2$) относительно новой нормали (относительный сдвиг). Касательные напряжения в легких заполнителях не велики и их работа не принимается во внимание. Деформации малые. Между слоями склейка, предотвращающая проскальзывание.

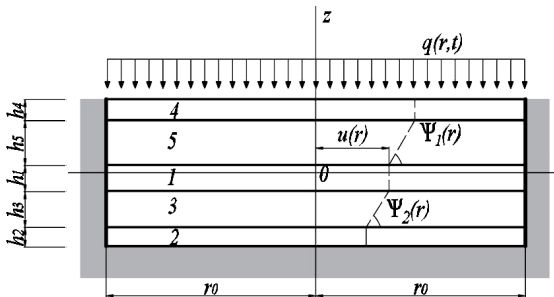


Рисунок 1.1 – Расчетная схема пятислойной пластины

Предполагается, что осесимметричная распределенная нагрузка $q(r, t)$ действует на внешнюю поверхность верхнего несущего слоя (2). На границе пластины ($r = r_0$) могут быть приложены погонные силы и моменты $T_r^0, H_{r1}^0, H_{r2}^0, M_r^0, Q^0$. На контуре пластины жесткая диафрагма, которая препятствует относительному сдвигу слоев ($\psi_i = 0$ при $r = r_0$).

Радиальные перемещения изменяются линейно по толщине каждого слоя, тангенциальные смещения в этих слоях отсутствуют ($u_\phi^{(k)} = 0, k = 1, 2, 3, 4, 5$ – номер слоя, здесь и далее) в силу осесимметричности нагрузки. Согласно принятым гипотезам слои несжимаемые по толщине, следовательно, перемещения вдоль оси z для любой точки пластины совпадают с прогибом в срединной плоскости заполнителя:

$$u_z^{(k)}(r, t) = w(r, t).$$

Прогиб пластины, относительные сдвиги в заполнителях и радиальное перемещение срединной плоскости не зависят от угловой координаты ϕ , т. е. $w(r, t), \psi_i(r, t), u(r, t)$. В дальнейшем эти функции являются искомыми.

Согласно предположению о прямолинейности нормалей в заполнителях, в них возникают сдвиговые деформации:

$$2\varepsilon_{rz}^{(5)} = u_r^{(5)}{}_{,z} + w_{,r} = \psi_1,$$

$$2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_r^{(3)}{}_{,z} + w_{,r} = \psi_2.$$

Используя интегралы от этих деформаций, и исходя из геометрических соображений, получим выражения для радиальных перемещений в слоях $u_r^{(k)}$ через искомые функции

$$\begin{aligned} u_r^{(4)} &= u - zw_{,r} + h_5\psi_1, \\ (0,5h_1 + h_5 \leq z \leq 0,5h_1 + h_4), \\ u_r^{(5)} &= u - zw_{,r} + (z - 0,5h_1)\psi_1, \\ (0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1 + h_5), \\ u_r^{(1)} &= u - zw_{,r}, \quad (-0,5h_1 \leq z \leq 0,5h_1), \\ u_r^{(3)} &= u - zw_{,r} + (z + 0,5h_1)\psi_2, \\ (-0,5h_1 - h_3 \leq z \leq -0,5h_1), \\ u_r^{(2)} &= u - zw_{,r} - h_3\psi_2, \\ (-0,5h_1 - h_3 - h_2 \leq z \leq -0,5h_1 - h_3), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $(u + h_5\psi_1)$ – смещение верхнего несущего слоя, вызванное деформацией заполнителя; $(u - h_3\psi_2)$ – смещение нижнего несущего слоя; запятой в нижнем индексе обозначена производная по радиальной координате.

Деформации в слоях получим из (1.1), используя соотношения Коши [2]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(4)} &= u_{,r} - zw_{,rr} + h_5\psi_{1,r}; \\ \varepsilon_\phi^{(4)} &= \frac{1}{r}(u - zw_{,r} + h_5\psi_1); \quad \varepsilon_{rz}^{(4)} = 0; \\ \varepsilon_r^{(5)} &= u_{,r} - zw_{,rr} + \left(z - \frac{h_1}{2}\right)\psi_{1,r}; \\ \varepsilon_\phi^{(5)} &= \frac{1}{r}\left(u - zw_{,r} + \left(z - \frac{h_1}{2}\right)\psi_1\right); \quad \varepsilon_{rz}^{(5)} = \frac{\psi_1}{2}; \\ \varepsilon_r^{(1)} &= u_{,r} - zw_{,rr}; \quad \varepsilon_\phi^{(1)} = \frac{1}{r}(u - zw_{,r}); \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0; \\ \varepsilon_r^{(3)} &= u_{,r} - zw_{,rr} + \left(z + \frac{h_1}{2}\right)\psi_{2,r}; \\ \varepsilon_\phi^{(3)} &= \frac{1}{r}\left(u - zw_{,r} + \left(z + \frac{h_1}{2}\right)\psi_2\right); \quad \varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{\psi_2}{2}; \\ \varepsilon_r^{(2)} &= u_{,r} - zw_{,rr} - h_3\psi_{2,r}; \\ \varepsilon_\phi^{(2)} &= \frac{1}{r}(u - zw_{,r} - h_3\psi_2); \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Физические уравнения состояния (1.2) соответствуют закону Гука:

$$\begin{aligned} s_\alpha^{(k)} &= 2G_k \varepsilon_\alpha^{(k)}, \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k \varepsilon^{(k)}, \\ (\alpha &= r, \phi; k = 1, 2, \dots, 5); \\ s_{rz}^{(k)} &= 2G_k \varepsilon_{rz}^{(k)}, \quad (k = 3, 5), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $s_\alpha^{(k)}, \varepsilon_\alpha^{(k)}$ – девиаторы тензоров напряжений и деформаций; $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ – гидростатическое напряжение и средняя деформация, G_k, K_k – модули сдвига и объемного деформирования.

Используя выражения (1.3), введем внутренние силы $T_\alpha^{(k)}$ и моменты $M_\alpha^{(k)}$, $H_{\alpha i}^{(k)}$ в слоях пластины:

$$\begin{aligned} T_\alpha &= \sum_{k=1}^5 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^5 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \\ M_\alpha &= \sum_{k=1}^5 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^5 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \\ H_{\alpha 1} &= h_5 T_\alpha^{(4)} - 0,5 h_1 T_\alpha^{(5)} + M_\alpha^{(5)}, \\ H_{\alpha 2} &= -h_3 T_\alpha^{(2)} + 0,5 h_1 T_\alpha^{(3)} + M_\alpha^{(3)}, \quad \alpha = r, \varphi. \end{aligned} \quad (1.4)$$

С помощью вариационного принципа Лагранжа и выражений (1.1), (1.4), получим систему дифференциальных уравнений, описывающих колебания рассматриваемой пластины в перемещениях:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u - a_2 w_{,r} + a_3 \psi_1 - a_4 \psi_2) &= 0, \\ L_2(a_3 u - a_5 w_{,r} + a_6 \psi_1) &= 0, \\ L_2(-a_4 u - a_7 w_{,r} + a_8 \psi_2) &= 0, \end{aligned}$$

$$L_3(a_2 u - a_9 w_{,r} + a_5 \psi_1 + a_7 \psi_2) - M_0 \ddot{w} = -q, \quad (1.5)$$

где $M_0 \ddot{w}$ – инерционные силы при поперечных колебаниях; точка сверху обозначает производную по времени; $M_0 = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3 + \rho_4 h_4 + \rho_5 h_5$; ρ_k – плотность материала; L_2, L_3 – дифференциальные операторы

$$L_2(g) \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2},$$

$$L_3(g) \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3};$$

a_i – коэффициенты

$$a_1 = \sum_{k=1}^5 h_k K_k^+,$$

$$a_2 = \left[K_4^+ h_4 (0,5 h_4 + 0,5 h_1 + h_5) + K_5^+ 0,5 h_5 (h_1 + h_5) - K_3^+ 0,5 h_3 (h_1 + h_3) - K_2^+ h_2 (0,5 h_2 + 0,5 h_1 + h_3) \right],$$

$$a_3 = \left[K_4^+ h_4 h_5 + K_5^+ 0,5 h_5^2 \right],$$

$$a_4 = \left[K_2^+ h_2 h_3 + K_3^+ 0,5 h_3^2 \right],$$

$$a_5 = \left[K_4^+ h_4 h_5 (0,5 h_1 + 0,5 h_4 + h_5) + K_5^+ h_5 \left(\frac{h_1 h_5}{4} + \frac{h_5^2}{3} \right) \right],$$

$$a_6 = \left[K_4^+ h_5^2 h_4 + K_5^+ \frac{h_5^3}{3} \right],$$

$$a_7 = \left[K_2^+ h_2 h_3 (0,5 h_1 + 0,5 h_2 + h_3) + K_3^+ h_3 \left(\frac{h_1 h_3}{4} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right],$$

$$a_8 = \left[K_2^+ h_3^2 h_2 + K_3^+ \frac{h_3^3}{3} \right],$$

$$a_9 = \left[K_4^+ h_4 \left(\frac{h_4^2}{3} + \frac{h_1^2}{4} + h_5^2 + \frac{h_1 h_4}{2} + h_4 h_5 + h_1 h_5 \right) + \right.$$

$$\left. + K_5^+ h_5 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_5}{2} + \frac{h_5^2}{3} \right) + K_3^+ h_3 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) + K_1^+ \frac{h_1^3}{12} + K_2^+ h_2 \left(\frac{h_2^2}{3} + \frac{h_1^2}{4} + h_3^2 + \frac{h_1 h_2}{2} + h_2 h_3 + h_1 h_3 \right) \right].$$

В качестве кинематических граничных условий в дальнейшем принимается защемление или шарнирное опирание контура. При защемлении должны выполняться требования

$$u = \psi_1 = \psi_2 = w = w_{,r} = 0, \quad \text{при } r = r_0. \quad (1.6)$$

При шарнирном опирании –

$$u = \psi_1 = \psi_2 = w = M_r = 0, \quad \text{при } r = r_0, \quad (1.7)$$

где M_r – радиальный момент, введенный в (1.4).

В начальный момент перемещения и скорость колебаний принимаются нулевыми:

$$u = \psi_1 = \psi_2 = w = \dot{w} = 0, \quad \text{при } t = 0. \quad (1.8)$$

2 Решение краевой задачи

Положив в (1.5) нагрузку $q = 0$, получим систему уравнений, описывающую собственные колебания пластины. С помощью простых преобразований и последующего двукратного интегрирования первых трех уравнений эта система приводится к виду

$$\begin{aligned} u &= b_1 w_{,r} + C_1 r + C_2 / r, \\ \psi_1 &= b_2 w_{,r} + C_3 r + C_4 / r, \\ \psi_2 &= b_3 w_{,r} + C_5 r + C_6 / r, \\ L_3(w_{,r}) + M^4 \ddot{w} &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$b_1 = \frac{a_8(a_6 a_2 - a_3 a_5) + a_4 a_6 a_7}{a_8(a_1 a_6 - a_3^2) - a_4^2 a_6},$$

$$b_2 = \frac{a_3(a_2 a_8 + a_4 a_7) - a_5(a_1 a_8 - a_4^2)}{a_3^2 a_8 - a_6(a_1 a_8 - a_4^2)},$$

$$b_3 = \frac{a_4(a_2 a_6 - a_3 a_5) + a_7(a_1 a_6 - a_3^2)}{a_8(a_1 a_6 - a_3^2) - a_4^2 a_6},$$

$$M^4 = M_0 D, \quad D = \frac{a_6 a_8 b_4}{b_4 b_7 - b_5 b_6},$$

$$b_4 = a_8(a_2 a_6 - a_3^2) - a_4^2 a_6,$$

$$b_5 = a_8(a_2 a_6 - a_3 a_5) + a_4 a_6 a_7,$$

$$b_6 = a_8(a_2 a_6 - a_3 a_5) + a_4 a_6 a_7,$$

$$b_7 = a_8(a_6 a_9 - a_5^2) - a_6 a_7^2.$$

В начале координат перемещения u, ψ_1, ψ_2 ограничены по величине, поэтому необходимо положить $C_2 = C_4 = C_6 = 0$.

Для удовлетворения четвертому уравнению системы (2.1) прогиб принимается в виде

$$w(r, t) = v(r)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)), \quad (2.2)$$

где $v(r)$ – неизвестная функция; ω – частота собственных колебаний; A и B – константы, следующие из начальных условий.

После подстановки прогиба (2.2) в (2.3) получим дифференциальное уравнение четвертого порядка для нахождения функции $v(r)$:

$$L_3(v,r) - \beta^4 v = 0, \quad (2.3)$$

или

$$v_{,rrrr} + \frac{2}{r} v_{,rrr} - \frac{1}{r^2} v_{,rr} + \frac{1}{r^3} v_{,r} - \beta^4 v = 0,$$

где $\beta^4 = M^4 \omega^2$.

Решение уравнения (2.4) следующее

$$v(\beta r) = C_7 J_0(\beta r) + C_8 I_0(\beta r) + C_9 Y_0(\beta r) + C_{10} K_0(\beta r), \quad (2.4)$$

где J_0, Y_0, I_0, K_0 – разновидности функций Бесселя; C_7, \dots, C_{10} – константы интегрирования.

Исходя из ограниченности радиального перемещения и относительных сдвигов в центре пластины, в (2.4) следует положить $C_9 = C_{10} = 0$, т. к. функции $Y_0(\beta r)$ и $K_0(\beta r)$ неограниченны в начале координат. Тогда решение системы (2.1) представляется в виде:

$$\begin{aligned} u(r,t) &= b_1 w_{,r} + C_1 r, \\ \psi_1(r,t) &= b_2 w_{,r} + C_3 r, \\ \psi_2(r,t) &= b_3 w_{,r} + C_5 r, \\ w(r,t) &= (C_7 J_0(\beta r) + C_8 I_0(\beta r)) \times \\ &\times (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)). \end{aligned} \quad (2.5)$$

При защемленном контуре пластины должны выполняться требования (1.6). Два последние из них приводят к однородной системе алгебраических уравнений для определения C_7, C_8 :

$$\begin{aligned} C_7 J_0(\beta r_0) + C_8 I_0(\beta r_0) &= 0, \\ -C_7 J_1(\beta r_0) + C_8 I_1(\beta r_0) &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где J_1, I_1 – функции Бесселя первого порядка.

Для существования ненулевых решений у системы (2.6) должен быть нулевой детерминант:

$$I_1(\beta r_0) J_0(\beta r_0) + I_0(\beta r_0) J_1(\beta r_0) = 0. \quad (2.7)$$

Это трансцендентное уравнение служит для определения собственных чисел пластины с защемленным контуром.

При шарнирном опирании пластины и наличии на контуре жесткой диафрагмы, при $r = r_0$, должны выполняться условия (1.7). Следовательно,

$$u = \psi_1 = \psi_2 = w = 0 \text{ при } r = r_0,$$

$$\begin{aligned} M_r &= \sum_{k=1}^5 \int_{h_k} \sigma_r^{(k)} z dz \Big|_{r=r_0} = \\ &= \left(a_2 u_{,r} + a_5 \psi_{1,r} + a_7 \psi_{2,r} - a_9 w_{,rr} - a_{90} \frac{w_{,r}}{r_0} \right) \Big|_{r=r_0} = 0, \\ a_{90} &= \left[K_4^- h_4 \left(\frac{h_4^2}{3} + \frac{h_4^2}{4} + h_5^2 + \frac{h_1 h_4}{2} + h_4 h_5 + h_1 h_5 \right) + \right. \\ &+ K_5^- h_5 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_5}{2} + \frac{h_5^2}{3} \right) + K_3^- h_3 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) + \\ &\left. + K_1^- \frac{h_1^3}{12} + K_2^- h_2 \left(\frac{h_2^2}{3} + \frac{h_1^2}{4} + h_3^2 + \frac{h_1 h_2}{2} + h_2 h_3 + h_1 h_3 \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Аналогичное уравнение для определения собственных чисел пластины с шарнирно опертым контуром следует из двух последних требований (2.8):

$$\begin{aligned} J_0(\beta r_0) \left[a_{10} \left(\beta I_0(\beta r_0) - \frac{I_1(\beta r_0)}{r_0} \right) + \frac{a_{11}}{r_0} I_1(\beta r_0) \right] + \\ + I_0(\beta r_0) \left[a_{10} \left(\beta J_0(\beta r_0) - \frac{J_1(\beta r_0)}{r_0} \right) + \frac{a_{11}}{r_0} J_1(\beta r_0) \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_9 - a_2 b_1 - a_5 b_2 - a_7 b_3, \\ a_{11} &= a_{90} + a_2 b_1 + a_5 b_2 + a_7 b_3. \end{aligned}$$

После вычисления собственных чисел β_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) из уравнений (2.7) и (2.9), частоты собственных колебаний следуют из соотношения, введенного в (2.3) $\omega^2 = \beta^4 / M^4$.

3 Численные результаты

Параметры собственных колебаний исследованы для пластины единичного радиуса, составленной из материалов ДТ16-Т-фторопласт-4-ДТ16-Т-фторопласт-4-Д16-Т. Геометрические размеры слоев, отнесенные к радиусу r_0 , следующие: $h_1 = 0,01, h_2 = h_4 = 0,015, h_3 = h_5 = 0,025$. В таблице 3.1 приведены отношения собственных чисел β_n при защемленном и при шарнирно опертом контурах пластины.

Таблица 3.1 – Собственные числа пяти-слойной пластины

Номер n	β_n заделка / шарнир	Номер n	β_n заделка / шарнир
0	3,196 / 3,165	8	28,279 / 28,063
1	6,306 / 6,248	9	31,378 / 31,186
2	9,439 / 9,354	10	34,561 / 34,311
3	12,577 / 12,466	11	37,702 / 37,436
4	15,716 / 15,582	12	40,844 / 40,562
5	18,857 / 18,700	13	43,985 / 43,690
6	21,997 / 21,819	14	47,126 / 46,817
7	25,138 / 24,940		

Собственные числа при шарнирном опирании несколько меньше. Они отличаются, как правило, по второй значащей цифре.

В таблице 3.2 приведены отношения собственных частот колебаний ω_n при защемленном и при шарнирно опертом контурах пластины.

Здесь, как и у собственных чисел, частоты колебаний при шарнирном опирании несколько ниже, что объясняется меньшей жесткостью конструкций.

На рисунке 3.1 показано изменение собственных чисел β_0 и соответствующих собственных частот ω_0 в зависимости от толщины внутреннего несущего слоя при шарнирном опирании (1, 2) и при защемлении контура (1', 2').

Интересно отметить, что у шарнирно опертой пластины жесткость увеличивается вместе с h_1 , что приводит к росту частот, в то время как собственные числа уменьшаются.

Таблица 3.2 – Собственные частоты пяти-слойной пластины

Номер n	ω_n заделка / шарнир	Номер n	ω_n заделка / шарнир
0	223,129 / 218,821	8	17469,090 / 17203,246
1	868,661 / 852,755	9	21507,638 / 21245,235
2	1946,230 / 1911,336	10	26092,446 / 25716,3284
3	3455,384 / 3394,661	11	31050,670 / 30614,070
4	5395,432 / 5303,818	12	36441,709 / 35940,236
5	7767,610 / 7638,805	13	42262,131 / 41697,142
6	10569,857 / 10399,486	14	48513,584 / 47879,473
7	13803,958 / 13587,361		

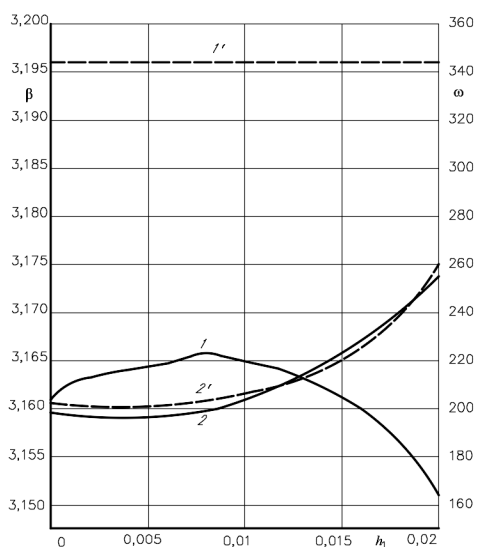


Рисунок 3.1. – Зависимость собственных чисел (частот) пятислойной пластины от толщины внутреннего несущего слоя:

1 – β_0 (шарнир), 2 – ω_0 (шарнир),
1' – β_0 (заделка), 2' – ω_0 (заделка)

На рисунке 3.2 показана аналогичная зависимость собственных чисел (частот) пятислойной пластины при других материалах пакета: для несущих слоев – титан, для заполнителей – пенополиуретан. Здесь наблюдается подобный эффект: с ростом h_1 растут частоты, собственные числа убывают.

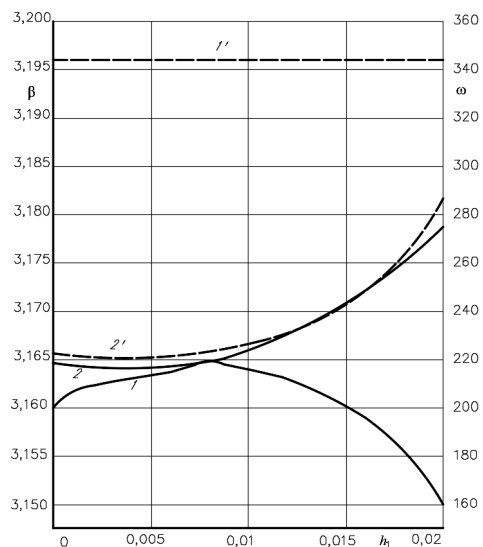


Рисунок 3.2. – Изменение собственных чисел и частот при росте толщины внутреннего несущего слоя: 1 – β_0 (шарнир), 2 – ω_0 (шарнир), 1' – β_0 (заделка), 2' – ω_0 (заделка)

Заключение

Предложенная постановка задачи и полученное общее решение уравнений свободных колебаний позволяют исследовать собственные числа и частоты круговой несимметричной по толщине пятислойной пластины в зависимости от материалов слоев и их размеров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков, А.Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Москва: Физматлит, 2005. – 576 с. – EDN: RXGSLJ.
2. Журавков, М.А. Математические модели механики твердых тел / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. – Минск: Белорусский государственный университет, 2021. – 535 с. – EDN: FICEUF.
3. Zhuravkov, M. Mechanics of Solid Deformable Body / M. Zhuravkov, Y. Lyu, E. Starovoitov. – Singapore: Springer Verlag, 2023. – 317 p. – DOI: 10.1007/978-981-19-8410-5. – EDN YECKNS.
4. Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагрузениях / А. Абдусаттаров, Э.И. Старовойтов, Н.Б. Рузиева. – Ташкент, «IDEAL PRESS», 2023. – 381 с.
5. Aghalovyan, L. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells / L. Aghalovyan. – Singapore – London, World Scientific Publishing, 2015. – 376 p.
6. Старовойтов, Э.И. Сопротивление материалов / Э.И. Старовойтов. – Гомель, БелГУТ, 2004. – 376 с.
7. Старовойтов, Э.И. Механика материалов / Э.И. Старовойтов. – Гомель, БелГУТ, 2011. – 380 с.
8. Деформирование трехслойных пластин при термосиловых нагрузках / Э.И. Старовойтов,

Ю.В. Шафиева, А.В. Нестерович, А.Г. Козел. – Гомель, БелГУТ, 2024. – 395 с.

9. Старовойтов, Э.И. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2015. – Т. 21, № 2. – P. 162–169.

10. Леоненко, Д.В. Собственные колебания трехслойного стержня на упругом основании / Д.В. Леоненко, Э.И. Старовойтов // *Прикладная механика*. – 2016. – Т. 52, № 4. – С. 37–46. – EDN: TUBEPP.

11. Bakulin, V.N. Parametric resonance of a three layered cylindrical composite rib-stiffened shell / V.N. Bakulin, D.A. Boitsova, A.Ya. Nedbai // *Mechanics of composite materials*. – 2021. – Vol. 57, № 5. – P. 623–634.

12. Tarlakovskii, D.V. Two-Dimensional Non-stationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D.V. Tarlakovskii, G.V. Fedotenkov // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2014. – Vol. 43, № 2. – P. 145–152. – DOI: 10.3103/S1052618814010178.

13. Suvorov, Ye.M. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium / Ye.M. Suvorov, D.V. Tarlakovskii, G.V. Fedotenkov // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 2012. – Vol. 76, № 5. – P. 511–518. – DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.015.

14. Pradhan, M. Static and dynamic stability analysis of an asymmetric sandwich beam resting on a variable Pasternak foundation subjected to thermal gradient / M. Pradhan, P.R. Dash, P.K. Pradhan // *Mechanics*. – 2016. – Vol. 51, № 3. – P. 725–739.

15. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // *Механика машин, механизмов и материалов*. – 2013. – № 1 (22). – С. 31–35.

16. Старовойтов, Э.И. Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / Э.И. Старовойтов, А.Г. Козел // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2018. – Т. 2, № 3. – С. 392–406.

17. Козел, А.Г. Влияние сдвиговой жёсткости основания на напряжённое состояние сэндвич пластины / А.Г. Козел // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. – 2018. – Т. 332, № 6. – С. 25–34.

18. Zadeh, H.V. Analytical bending analysis of a circular sandwich plate under distributed load / H.V. Zadeh, M. Tahani // *International Journal of Recent Advances in Mechanical Engineering*. – 2017. – Vol. 6, № 1. – P. 1–10.

19. A comparison of bending properties for cellular core sandwich panels / L. Yang, O. Harrysson, H. West, D. Cormier // *Materials Sciences and Applications*. – 2013. – Vol. 4, № 8. – P. 471–477. – DOI: 10.4236/msa.2013.48057.

20. Захарчук, Ю.В. Напряженно-деформированное состояние круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Ю.В. Захарчук // *Механика. Исследования и инновации*. – 2019. – Т. 12, № 12. – С. 66–75.

21. Нестерович, А.В. Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А.В. Нестерович // *Механика. Исследования и инновации*. – 2019. – Т. 12, № 12. – С. 152–157.

22. Салицкий, В.С. Изгиб защемлённой по контуру круговой пятислойной пластины / В.С. Салицкий // *Механика. Исследования и инновации*. – 2022. – Т. 15, № 15. – С. 209–213.

23. Лачугина, Е.А. Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими наполнителями / Е.А. Лачугина // *Механика. Исследования и инновации*. – 2022. – Вып. 15. – С. 212–219.

24. Лачугина, Е.А. Частоты собственных колебаний пятислойной круговой пластины / Е.А. Лачугина // *Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический сборник* – Минск: БНТУ, 2023. – Вып. 38. – С. 227–233.

25. Лачугина, Е.А. Свободные колебания пятислойной круговой пластины с легкими наполнителями / Е.А. Лачугина // *Механика. Исследования и инновации*. – 2023. – Вып. 16.

26. Лачугина, Е.А. Собственные колебания пятислойной круговой пластины / Е.А. Лачугина // *Инновационное развитие транспортного и строительного комплексов: Материалы Международной научно-практической конференции, посвященной 70-летию БелИИЖТа – БелГУТа, Гомель, 16-17 ноября 2023 года*. – Гомель: БелГУТ, 2023. – С. 111–113. – EDN: FGFSZY.

27. Лачугина, Е.А. Собственные колебания пятислойной несимметричной по толщине пластины / Е.А. Лачугина // *Механика, Сейсмостойкость, Машиностроение по проблемам «Обеспечения сейсмической безопасности и сейсмостойкости зданий и сооружений, решению прикладных задач механики»: сборник докладов международной научной конференции, посвященной 90-ю академика АН РУз Т.Р. Рашидова*. – Ташкент, 2024. – Том II. – С. 385–390.

28. Лачугина, Е.А. Частоты собственных колебаний пятислойной несимметричной по толщине пластины / Е.А. Лачугина // *III Республиканский форум молодых ученых учреждений высшего образования: сборник / редкол.: Н.Н. Шалобыта (гл. ред.) [и др.]*. – Брест: БрГТУ, 2024. – С. 42–43.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект №T24M-004).

Поступила в редакцию 14.11.2024.

Информация об авторах

Лачугина Екатерина Андреевна – аспирантка

УДК 539.3

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_31
EDN: RTQKOE

ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ В ТЕРМОРАДИАЦИОННОМ ПОЛЕ

А.С. Мельникова*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель*

DEFORMATION OF ELASTOPLASTIC RECTANGULAR THREE-LAYER PLATE WITH COMPRESSIBLE FILLER IN THERMORADIATION FIELD

A.S. Melnikova*Belarusian State University of Transport, Gomel*

Аннотация. Исследовано деформирование несимметричных по толщине упругопластических трехслойных пластин со сжимаемым наполнителем при действии терморadiационных нагрузок. Кинематические гипотезы основаны на гипотезе ломаной линии: для внешних слоев принимаются гипотезы Кирхгофа, в жестком сжимаемом наполнителе деформированная нормаль остается прямолинейной. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Получена система уравнений равновесия и ее аналитическое решение в перемещениях.

Ключевые слова: пластичность, трехслойная прямоугольная пластина, терморadiационная нагрузка, сжимаемый наполнитель.

Для цитирования: Мельникова, А.С. Деформирование упругопластической прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем в терморadiационном поле / А.С. Мельникова // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 31–36. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_31. – EDN: RTQKOE

Abstract. The deformation of asymmetrical in thickness elastioplastic three-layer plates with compressible filler under the action of thermoradiation loads is investigated. Kinematic hypotheses are based on the hypothesis of a broken line: for the outer layers, Kirchhof's hypotheses are accepted, in a rigid compressible filler the deformed normal remains rectilinear. At the contact boundaries, the conditions of continuity of displacements are used. A system of equilibrium equations and its analytical solution in displacements are obtained.

Keywords: plasticity, three-layer rectangular plate, thermal radiation load, compressible filler.

For citation: Melnikova, A.S. Deformation of elastioplastic rectangular three-layer plate with compressible filler in thermoradiation field / A.S. Melnikova // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 31–36. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_31 (in Russian). – EDN: RTQKOE

Введение

В современном мире сложно представить отрасли промышленности, где не нашлось бы применение трехслойных конструкций, так, например, в строительстве широкое распространение получили сэндвич панели, в авиастроении трехслойные конструкции используются в качестве покрытия самолетов и космических аппаратов, в судостроении – покрытия бортов. Трехслойные конструкции позволяют достичь существенного снижения массы и повышения жесткости. Постепенно повышаются и требования по прочности и весу, чтобы сделать использование таких конструкций ещё более эффективным. В связи с этим возникает необходимость разработки новых и уточнения уже существующих методов их расчета.

В монографиях [1]–[3] приведены различные кинематические и математические модели деформирования трехслойных инженерных

конструкций. В публикациях [4]–[8] рассмотрено поведение слоистых конструкций при воздействии на них температуры. Деформирование круглых пластин при воздействии на них нейтронного потока представлено в работах [9]–[10]. В [11] проведен анализ напряженного состояния в слоистом теле при взаимодействии цилиндрического индентора с упругим покрытием. В работах [12]–[14] исследовано динамическое воздействие на неоднородные элементы конструкций. Здесь выполнена постановка и решение задачи о деформировании упругопластической прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем в терморadiационном поле.

1 Постановка краевой задачи

Рассматривается несимметричная по толщине трехслойная прямоугольная пластина, состоящая из двух несущих слоев и сжимаемого наполнителя. Постановка задачи дается в прямоугольной

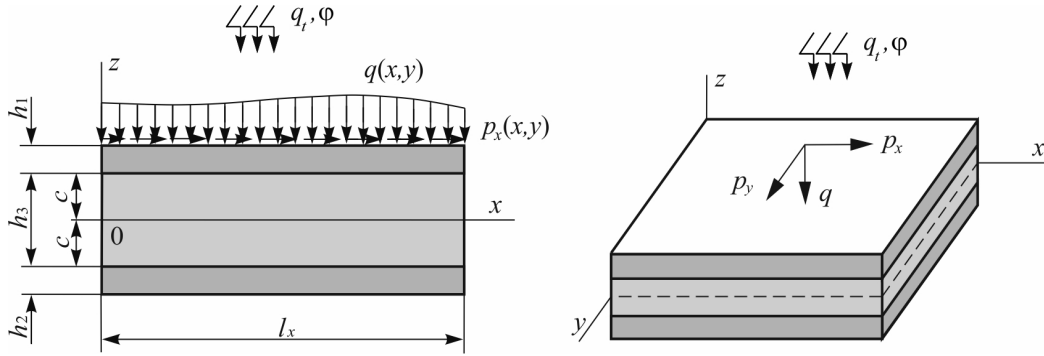


Рисунок 1.1 – Расчетная схема пластины

системе координат, где ось x проходит вдоль срединной плоскости заполнителя (рисунок 1.1).

Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. В жестком заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z . На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном и продольном направлении, в заполнителе учитывается обжатие. Деформации малые.

2 Решение краевой задачи

Упругопластическая пластина находится в температурном поле $T_k(z)$ (k – номер слоя) и облучается нейтронным потоком $I = \varphi t$ (φ – интенсивность потока в нейтрон/с, t – время). Допустим, что в начальный момент времени на трехслойную пластину со сжимаемым заполнителем, находящуюся в естественном состоянии, начинают действовать внешние распределенные нагрузки $q(x)$, $p_x(x)$.

В слоях используем физические уравнения состояния, соответствующие теории малых упругопластических деформаций:

$$s_{ij}^{(k)} = 2G_k(T_k) \left(1 - \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, T_k, I) \right) \varepsilon_{ij}^{(k)},$$

$$\sigma^{(k)} = 3K_k(T_k) (\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} \Delta T_k - BI)$$

$$(i, j = x, y, z, k = 1, 2, 3). \quad (2.1)$$

Уравнения равновесия термоупругопластической пластины были получены ранее в [7]. Отличием является то, что здесь функция пластичности зависит не только от интенсивности деформаций и температуры, но также и от величины нейтронного потока $\omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, T_k, I)$. Ее при $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_\tau^{(k)}(T_k, I)$ следует положить равной нулю. Интегральный нейтронный поток в пределах малых доз облучения приводит к увеличению радиационного упрочнения материала и росту предела текучести. Радиационное увеличение объемной деформации учитывается величиной BI , где B – константа.

Исходя из соотношений (2.1) выделим в тензоре напряжений упругие (с индексом «0») и нелинейные (с индексом « ω ») слагаемые, которые будут включать и терморadiационные добавки:

– в несущих слоях

$$\sigma_{xx}^{(k)} = \sigma_{xx}^{(k)0} - \sigma_{xx}^{(k)\omega},$$

$$\sigma_{xx}^{(k)0} = K_k^+(T_k) \varepsilon_{xx}^{(k)} + K_k^-(T_k) \varepsilon_{yy}^{(k)},$$

$$\sigma_{xx}^{(k)\omega} = \frac{2}{3} G_k(T_k) (2\varepsilon_{xx}^{(k)} - \varepsilon_{yy}^{(k)}) \omega^{(k)} +$$

$$+ 3K_k(T_k) \alpha_{0k} \Delta T_k + BI,$$

$$\sigma_{yy}^{(k)} = \sigma_{yy}^{(k)0} - \sigma_{yy}^{(k)\omega},$$

$$\sigma_{yy}^{(k)0} = K_k^+(T_k) \varepsilon_{yy}^{(k)} + K_k^-(T_k) \varepsilon_{xx}^{(k)},$$

$$\sigma_{yy}^{(k)\omega} = \frac{2}{3} G_k(T_k) (2\varepsilon_{yy}^{(k)} - \varepsilon_{xx}^{(k)}) \omega^{(k)} +$$

$$+ 3K_k(T_k) \alpha_{0k} \Delta T_k + BI,$$

$$\sigma_{xy}^{(k)} = \sigma_{xy}^{(k)0} - \sigma_{xy}^{(k)\omega},$$

$$\sigma_{xy}^{(k)0} = 2G_k(T_k) \varepsilon_{xy}^{(k)} = 2G_k(T_k) \varepsilon_{xy}^{(k)},$$

$$\sigma_{xy}^{(k)\omega} = 2G_k(T_k) \varepsilon_{xy}^{(k)} \omega^{(k)} = 2G_k(T_k) \varepsilon_{xy}^{(k)} \omega^{(k)};$$

– в заполнителе

$$\sigma_{xx}^{(3)} = \sigma_{xx}^{(3)0} - \sigma_{xx}^{(3)\omega},$$

$$\sigma_{xx}^{(3)0} = K_3^+(T_3) \varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^-(T_3) (\varepsilon_{yy}^{(3)} + \varepsilon_{zz}^{(3)}),$$

$$\sigma_{xx}^{(3)\omega} = \frac{2}{3} G_3(T_3) (2\varepsilon_{xx}^{(3)} - \varepsilon_{yy}^{(3)} - \varepsilon_{zz}^{(3)}) \omega^{(3)} +$$

$$+ 3K_3(T_3) \alpha_{03} \Delta T_3 + BI,$$

$$\sigma_{yy}^{(3)} = \sigma_{yy}^{(3)0} - \sigma_{yy}^{(3)\omega},$$

$$\sigma_{yy}^{(3)0} = K_3^+(T_3) \varepsilon_{yy}^{(3)} + K_3^-(T_3) \varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^-(T_3) \varepsilon_{zz}^{(3)},$$

$$\sigma_{yy}^{(3)\omega} = \frac{2}{3} G_3(T_3) (2\varepsilon_{yy}^{(3)} - \varepsilon_{xx}^{(3)} - \varepsilon_{zz}^{(3)}) \omega^{(3)} +$$

$$+ 3K_3(T_3) \alpha_{03} \Delta T_3 + BI,$$

$$\sigma_{zz}^{(3)} = \sigma_{zz}^{(3)0} - \sigma_{zz}^{(3)\omega},$$

$$\sigma_{zz}^{(3)0} = K_3^+(T_3) \varepsilon_{zz}^{(3)} + K_3^-(T_3) (\varepsilon_{xx}^{(3)} + \varepsilon_{yy}^{(3)}),$$

$$\sigma_{zz}^{(3)\omega} = \frac{2}{3} G_3(T_3) (2\varepsilon_{zz}^{(3)} - \varepsilon_{xx}^{(3)} - \varepsilon_{yy}^{(3)}) \omega^{(3)} +$$

$$+ 3K_3(T_3) \alpha_{03} \Delta T_3 + BI,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^{(3)} &= \sigma_{xy}^{(3)0} - \sigma_{xy}^{(3)\omega}, \\ \sigma_{xy}^{(3)0} &= 2G_3(T_3)\varepsilon_{xy}^{(3)}, \quad \sigma_{xy}^{(3)\omega} = 2G_3(T_3)\varepsilon_{xy}^{(3)}\omega^{(3)}, \\ \sigma_{xz}^{(3)} &= \sigma_{xz}^{(3)0} - \sigma_{xz}^{(3)\omega}, \quad \sigma_{xz}^{(3)0} = 2G_3(T_3)\varepsilon_{xz}^{(3)}, \\ \sigma_{xz}^{(3)\omega} &= 2G_3(T_3)\varepsilon_{xz}^{(3)}\omega^{(3)}, \quad \sigma_{yz}^{(3)} = \sigma_{yz}^{(3)0} - \sigma_{yz}^{(3)\omega}, \\ \sigma_{yz}^{(3)0} &= 2G_3(T_3)\varepsilon_{yz}^{(3)}, \quad \sigma_{yz}^{(3)\omega} = 2G_3(T_3)\varepsilon_{yz}^{(3)}\omega^{(3)}, \\ K_k^+(T_k) &= K_k(T_k) + \frac{4}{3}G_k(T_k), \\ K_k^-(T_k) &= K_k(T_k) - \frac{2}{3}G_k(T_k). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Проведем подобную (2.2) операцию с внутренними усилиями, получим

– в несущих слоях

$$\begin{aligned} N_{xx}^{(k)0} &= \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)0} dz = \int_{h_k} (K_k^+(T_k)\varepsilon_{xx}^{(k)} + K_k^-(T_k)\varepsilon_{yy}^{(k)}) dz, \\ N_{xx}^{(k)\omega} &= \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)\omega} dz = \frac{2}{3} \int_{h_k} G_k(T_k)(2\varepsilon_{xx}^{(k)} - \varepsilon_{yy}^{(k)})\omega^{(k)} dz + \\ &\quad + \int_{h_k} (3K_k(T_k)\alpha_{0k}\Delta T_k + BI) dz, \\ N_{yy}^{(k)0} &= \int_{h_k} \sigma_{yy}^{(k)0} dz = \int_{h_k} (K_k^+(T_k)\varepsilon_{yy}^{(k)} + K_k^-(T_k)\varepsilon_{xx}^{(k)}) dz, \\ N_{yy}^{(k)\omega} &= \int_{h_k} \sigma_{yy}^{(k)\omega} dz = \frac{2}{3} \int_{h_k} G_k(T_k)(2\varepsilon_{yy}^{(k)} - \varepsilon_{xx}^{(k)})\omega^{(k)} dz + \\ &\quad + \int_{h_k} (3K_k(T_k)\alpha_{0k}\Delta T_k + BI) dz, \\ M_{xx}^{(k)0} &= \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)0} z dz = \int_{h_k} (K_k^+(T_k)\varepsilon_{xx}^{(k)} + K_k^-(T_k)\varepsilon_{yy}^{(k)}) z dz, \\ M_{xx}^{(k)\omega} &= \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)\omega} z dz = \frac{2}{3} \int_{h_k} G_k(T_k)(2\varepsilon_{xx}^{(k)} - \varepsilon_{yy}^{(k)})\omega^{(k)} z dz + \\ &\quad + \int_{h_k} (3K_k(T_k)\alpha_{0k}\Delta T_k + BI) z dz, \\ M_{yy}^{(k)0} &= \int_{h_k} \sigma_{yy}^{(k)0} z dz = \int_{h_k} (K_k^+(T_k)\varepsilon_{yy}^{(k)} + K_k^-(T_k)\varepsilon_{xx}^{(k)}) z dz, \\ M_{yy}^{(k)\omega} &= \int_{h_k} \sigma_{yy}^{(k)\omega} z dz = \frac{2}{3} \int_{h_k} G_k(T_k)(2\varepsilon_{yy}^{(k)} - \varepsilon_{xx}^{(k)})\omega^{(k)} z dz + \\ &\quad + \int_{h_k} (3K_k(T_k)\alpha_{0k}\Delta T_k + BI) z dz, \\ M_{xy}^{(k)0} &= \int_{h_k} \sigma_{xy}^{(k)0} z dz = 2 \int_{h_k} G_k(T_k)\varepsilon_{xy}^{(k)} z dz, \\ M_{xy}^{(k)\omega} &= \int_{h_k} \sigma_{xy}^{(k)\omega} z dz = 2 \int_{h_k} G_k(T_k)\varepsilon_{xy}^{(k)}\omega^{(k)} z dz, \\ Q_{xy}^{(k)0} &= \int_{h_k} \sigma_{xy}^{(k)0} dz = 2 \int_{h_k} G_k(T_k)\varepsilon_{xy}^{(k)} dz, \\ Q_{xy}^{(k)\omega} &= \int_{h_k} \sigma_{xy}^{(k)\omega} dz = 2 \int_{h_k} G_k(T_k)\varepsilon_{xy}^{(k)}\omega^{(k)} dz; \end{aligned}$$

– в наполнителе

$$\begin{aligned} N_{xx}^{(3)0} &= \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)0} dz = \\ &= \int_{h_3} (K_3^+(T_3)\varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^-(T_3)(\varepsilon_{yy}^{(3)} + \varepsilon_{zz}^{(3)})) dz, \\ N_{xx}^{(3)\omega} &= \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)\omega} dz = \\ &= \frac{2}{3} \int_{h_3} G_3(T_3)(2\varepsilon_{xx}^{(3)} - \varepsilon_{yy}^{(3)} - \varepsilon_{zz}^{(3)})\omega^{(3)} dz + \\ &\quad + \int_{h_3} (3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3 + BI) dz, \\ N_{yy}^{(3)0} &= \int_{h_3} \sigma_{yy}^{(3)0} dz = \\ &= \int_{h_3} (K_3^+(T_3)\varepsilon_{yy}^{(3)} + K_3^-(T_3)(\varepsilon_{xx}^{(3)} + \varepsilon_{zz}^{(3)})) dz, \\ N_{yy}^{(3)\omega} &= \int_{h_3} \sigma_{yy}^{(3)\omega} dz = \\ &= \frac{2}{3} \int_{h_3} G_3(T_3)(2\varepsilon_{yy}^{(3)} - \varepsilon_{xx}^{(3)} - \varepsilon_{zz}^{(3)})\omega^{(3)} dz + \\ &\quad + \int_{h_3} (3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3 + BI) dz, \\ N_{zz}^{(3)0} &= \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)0} dz = \\ &= \int_{h_3} (K_3^+(T_3)\varepsilon_{zz}^{(3)} + K_3^-(T_3)(\varepsilon_{xx}^{(3)} + \varepsilon_{yy}^{(3)})) dz, \\ N_{zz}^{(3)\omega} &= \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)\omega} dz = \\ &= \frac{2}{3} \int_{h_3} G_3(T_3)(2\varepsilon_{zz}^{(3)} - \varepsilon_{xx}^{(3)} - \varepsilon_{yy}^{(3)})\omega^{(3)} dz + \\ &\quad + \int_{h_3} (3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3 + BI) dz, \\ M_{xx}^{(3)0} &= \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)0} z dz = \\ &= \int_{h_3} (K_3^+(T_3)\varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^-(T_3)(\varepsilon_{yy}^{(3)} + \varepsilon_{zz}^{(3)})) z dz, \\ M_{xx}^{(3)\omega} &= \int_{h_3} \sigma_{xx}^{(3)\omega} z dz = \\ &= \frac{2}{3} \int_{h_3} G_3(T_3)(2\varepsilon_{xx}^{(3)} - \varepsilon_{yy}^{(3)} - \varepsilon_{zz}^{(3)})\omega^{(3)} z dz + \\ &\quad + \int_{h_3} (3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3 + BI) z dz, \\ M_{yy}^{(3)0} &= \int_{h_3} \sigma_{yy}^{(3)0} z dz = \\ &= \int_{h_3} (K_3^+(T_3)\varepsilon_{yy}^{(3)} + K_3^-(T_3)(\varepsilon_{xx}^{(3)} + \varepsilon_{zz}^{(3)})) z dz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{yy}^{(3)\omega} &= \int_{h_3} \sigma_{yy}^{(3)\omega} dz = \\
 &= \frac{2}{3} \int_{h_3} G_3(T_3) (2\varepsilon_{yy}^{(3)} - \varepsilon_{xx}^{(3)} - \varepsilon_{zz}^{(3)}) \omega^{(3)} dz + \\
 &\quad + \int_{h_3} (3K_3(T_3) \alpha_{03} \Delta T_3 + BI) dz, \\
 M_{xy}^{(3)0} &= \int_{h_3} \sigma_{xy}^{(3)0} dz = 2 \int_{h_3} G_3(T_3) \varepsilon_{xy}^{(3)} dz, \\
 M_{xy}^{(3)\omega} &= \int_{h_3} \sigma_{xy}^{(3)\omega} dz = 2 \int_{h_3} G_3(T_3) \varepsilon_{xy}^{(3)} \omega^{(3)} dz, \\
 M_{xz}^{(3)0} &= \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)0} dz = 2 \int_{h_3} G_3(T_3) \varepsilon_{xz}^{(3)} dz, \\
 M_{xz}^{(3)\omega} &= \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)\omega} dz = 2 \int_{h_3} G_3(T_3) \varepsilon_{xz}^{(3)} \omega^{(3)} dz, \\
 M_{yz}^{(3)0} &= \int_{h_3} \sigma_{yz}^{(3)0} dz = 2 \int_{h_3} G_3(T_3) \varepsilon_{yz}^{(3)} dz, \\
 M_{yz}^{(3)\omega} &= \int_{h_3} \sigma_{yz}^{(3)\omega} dz = 2 \int_{h_3} G_3(T_3) \varepsilon_{yz}^{(3)} \omega^{(3)} dz, \\
 Q_{xy}^{(3)0} &= \int_{h_3} \sigma_{xy}^{(3)0} dz = 2 \int_{h_3} G_3(T_3) \varepsilon_{xy}^{(3)} dz, \\
 Q_{xy}^{(3)\omega} &= \int_{h_3} \sigma_{xy}^{(3)\omega} dz = 2 \int_{h_3} G_3(T_3) \varepsilon_{xy}^{(3)} \omega^{(3)} dz, \\
 Q_{xz}^{(3)0} &= \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)0} dz = 2 \int_{h_3} G_3(T_3) \varepsilon_{xz}^{(3)} dz, \\
 Q_{xz}^{(3)\omega} &= \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)\omega} dz = 2 \int_{h_3} G_3(T_3) \varepsilon_{xz}^{(3)} \omega^{(3)} dz, \\
 Q_{yz}^{(3)0} &= \int_{h_3} \sigma_{yz}^{(3)0} dz = 2 \int_{h_3} G_3(T_3) \varepsilon_{yz}^{(3)} dz, \\
 Q_{yz}^{(3)\omega} &= \int_{h_3} \sigma_{yz}^{(3)\omega} dz = 2 \int_{h_3} G_3(T_3) \varepsilon_{yz}^{(3)} \omega^{(3)} dz. \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

Обобщенные усилия также разбиваются на линейные и нелинейные слагаемые. Система уравнений равновесия в обобщенных усилиях и силовые граничные условия приводятся к виду, совпадающему с [7], только входящие в них дополнительные составляющие (с индексом « ω ») вычисляются через напряжения и деформации по формулам (2.3), учитывающими и нейтронный поток. Подставив в уравнения равновесия в обобщенных усилиях выражения линейных и нелинейных составляющих внутренних усилий через искомые функции u_{1x} , u_{1y} , u_{2x} , u_{2y} , w_1 , w_2 получим систему нелинейных дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях, описывающую изгиб упругопластической пластины в терморadiационном поле. Система

уравнений в итерационном виде выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}
 &a_1 u_{1x}^n - a_1 u_{2x}^n - a_4 u_{1x}^n{}_{,xx} - a_5 u_{2x}^n{}_{,xx} - a_{19} u_{1x}^n{}_{,yy} - \\
 &\quad - a_{18} u_{2x}^n{}_{,yy} - a_{21} u_{1y}^n{}_{,xy} - a_{23} u_{2y}^n{}_{,xy} + \\
 &\quad + a_2 w_1^n{}_{,x} + a_3 w_2^n{}_{,x} - 2a_{24} w_1^n{}_{,xyy} + \\
 &\quad + a_{25} w_2^n{}_{,xyy} - 2a_6 w_1^n{}_{,xxx} + a_7 w_2^n{}_{,xxx} = p_x + p_\omega^{n-1}, \\
 &- a_1 u_{1x}^n + a_1 u_{2x}^n - a_5 u_{1x}^n{}_{,xx} - a_9 u_{2x}^n{}_{,xx} - a_{18} u_{1x}^n{}_{,yy} - \\
 &\quad - a_{20} u_{2x}^n{}_{,yy} - a_{23} u_{1y}^n{}_{,xy} - a_{22} u_{2y}^n{}_{,xy} - a_{10} w_1^n{}_{,x} - \\
 &\quad - a_{17} w_2^n{}_{,x} - a_{24} w_1^n{}_{,xyy} + 2a_{25} w_2^n{}_{,xyy} - \\
 &\quad - a_6 w_1^n{}_{,xxx} + 2a_7 w_2^n{}_{,xxx} = s_\omega^{n-1}, \\
 &a_1 u_{1y}^n - a_1 u_{2y}^n - a_4 u_{1y}^n{}_{,yy} - a_5 u_{2y}^n{}_{,yy} - a_{19} u_{1y}^n{}_{,xx} - \\
 &\quad - a_{18} u_{2y}^n{}_{,xx} - a_{21} u_{1x}^n{}_{,xy} - a_{23} u_{2x}^n{}_{,xy} + a_2 w_1^n{}_{,y} + \\
 &\quad + a_3 w_2^n{}_{,y} - 2a_{24} w_1^n{}_{,xxy} + a_{25} w_2^n{}_{,xxy} - \\
 &\quad - 2a_6 w_1^n{}_{,yyy} + a_7 w_2^n{}_{,yyy} = p_y + h_\omega^{n-1}, \\
 &- a_1 u_{1y}^n + a_1 u_{2y}^n - a_5 u_{1y}^n{}_{,yy} - a_9 u_{2y}^n{}_{,yy} - a_{18} u_{1y}^n{}_{,xx} - \\
 &\quad - a_{20} u_{2y}^n{}_{,xx} - a_{23} u_{1x}^n{}_{,xy} - a_{22} u_{2x}^n{}_{,xy} - a_{10} w_1^n{}_{,y} - \\
 &\quad - a_{17} w_2^n{}_{,y} - a_{24} w_1^n{}_{,xxy} + 2a_{25} w_2^n{}_{,xxy} - \\
 &\quad - a_6 w_1^n{}_{,yyy} + 2a_7 w_2^n{}_{,yyy} = r_\omega^{n-1}, \\
 &- a_2 u_{1x}^n{}_{,x} - a_2 u_{1y}^n{}_{,y} + a_{10} u_{2x}^n{}_{,x} + a_{10} u_{2y}^n{}_{,y} + \\
 &\quad + 2a_6 u_{1x}^n{}_{,xxx} + a_6 u_{2x}^n{}_{,xxx} + 2a_6 u_{1y}^n{}_{,yyy} + a_6 u_{2y}^n{}_{,yyy} + \\
 &\quad + 2a_{24} u_{1x}^n{}_{,xyy} + a_{24} u_{2x}^n{}_{,xyy} + 2a_{24} u_{1y}^n{}_{,xxy} + \\
 &\quad + a_{24} u_{2y}^n{}_{,xxy} + a_{11} w_1^n{}_{,xx} + a_{11} w_1^n{}_{,yy} - a_{12} w_2^n{}_{,xx} - \\
 &\quad - a_{12} w_2^n{}_{,yy} + a_{15} w_1^n{}_{,xxx} + a_{15} w_1^n{}_{,yyy} - a_{16} w_2^n{}_{,xxx} - \\
 &\quad - a_{16} w_2^n{}_{,yyy} + a_{26} w_1^n{}_{,xxy} - a_{28} w_2^n{}_{,xxy} + \\
 &\quad + a_8 w_1^n - a_8 w_2^n = q + 0, 5 p_x{}_{,x} h_1 + 0, 5 p_y{}_{,y} h_1 + q_\omega^{n-1}, \\
 &\quad - a_3 u_{1y}^n{}_{,y} - a_3 u_{1x}^n{}_{,x} + a_{17} u_{2y}^n{}_{,y} + a_{17} u_{2x}^n{}_{,x} - \\
 &\quad - a_7 u_{1y}^n{}_{,yyy} - a_7 u_{1x}^n{}_{,xxx} - 2a_7 u_{2y}^n{}_{,yyy} - 2a_7 u_{2x}^n{}_{,xxx} - \\
 &\quad - 2a_{27} u_{2y}^n{}_{,xxy} - a_{25} u_{1y}^n{}_{,xxy} - 2a_{25} u_{2x}^n{}_{,xxy} - \\
 &\quad - a_{25} u_{1x}^n{}_{,xyy} - a_{12} w_1^n{}_{,xx} - a_{12} w_1^n{}_{,yy} + a_{14} w_2^n{}_{,xx} + \\
 &\quad + a_{14} w_2^n{}_{,yy} - a_{16} w_1^n{}_{,xxx} - a_{16} w_1^n{}_{,yyy} + a_{13} w_2^n{}_{,xxx} + \\
 &\quad + a_{13} w_2^n{}_{,yyy} - a_{28} w_1^n{}_{,xxy} + a_{27} w_2^n{}_{,xxy} - \\
 &\quad - a_8 w_1^n + a_8 w_2^n = g_\omega^{n-1}, \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

где n – номер приближения.

Дополнительные нагрузки с индексом « ω » включают все нелинейные и терморadiационные добавки

$$\begin{aligned}
 p_\omega^{n-1} &= H_{1x}^{\omega(n-1)} - V_1^{\omega(n-1)}{}_{,y} - P_{1x}^{\omega(n-1)}{}_{,x}, \\
 s_\omega^{n-1} &= H_{1x}^{\omega(n-1)} + V_2^{\omega(n-1)}{}_{,y} + P_{2x}^{\omega(n-1)}{}_{,x}, \\
 h_\omega^{n-1} &= H_{1y}^{\omega(n-1)} - V_1^{\omega(n-1)}{}_{,x} - P_{1y}^{\omega(n-1)}{}_{,y}, \\
 r_\omega^{n-1} &= H_{1y}^{\omega(n-1)} + V_2^{\omega(n-1)}{}_{,x} + P_{2y}^{\omega(n-1)}{}_{,y}, \\
 q_\omega^{n-1} &= S_{1x}^{\omega(n-1)}{}_{,xx} + H_2^{\omega(n-1)} - T_{1x}^{\omega(n-1)}{}_{,x} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -U_1^{\omega(n-1)} \cdot \epsilon_{xy} + S_{1y}^{\omega(n-1)} \cdot \epsilon_{yy} - T_{1y}^{\omega(n-1)} \cdot \epsilon_y, \\ \mathcal{E}_\omega^{n-1} = & S_{2x}^{\omega(n-1)} \cdot \epsilon_{xx} - H_2^{\omega(n-1)} - T_{2x}^{\omega(n-1)} \cdot \epsilon_x - \\ & -U_2^{\omega(n-1)} \cdot \epsilon_{xy} + S_{2y}^{\omega(n-1)} \cdot \epsilon_{yy} - T_{2y}^{\omega(n-1)} \cdot \epsilon_y. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Обобщенные усилия в (2.5) зависят от внутренних усилий и выражаются следующим образом

$$\begin{aligned} H_{1x}^{\omega(n-1)} &= \frac{Q_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c}, \quad H_{1y}^{\omega(n-1)} = \frac{Q_{yz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c}, \\ H_2^{\omega(n-1)} &= \frac{N_{zz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c}, \\ P_{1x}^{\omega(n-1)} &= \frac{N_{xx}^{(3)\omega(n-1)}}{2} + \frac{M_{xx}^{(3)\omega(n-1)}}{2c} + N_{xx}^{(1)\omega(n-1)}, \\ P_{2x}^{\omega(n-1)} &= \frac{N_{xx}^{(3)\omega(n-1)}}{2} - \frac{M_{xx}^{(3)\omega(n-1)}}{2c} + N_{xx}^{(2)\omega(n-1)}, \\ P_{1y}^{\omega(n-1)} &= \frac{N_{yy}^{(3)\omega(n-1)}}{2} + \frac{M_{yy}^{(3)\omega(n-1)}}{2c} + N_{yy}^{(1)\omega(n-1)}, \\ P_{2y}^{\omega(n-1)} &= \frac{N_{yy}^{(3)\omega(n-1)}}{2} - \frac{M_{yy}^{(3)\omega(n-1)}}{2c} + N_{yy}^{(2)\omega(n-1)}, \\ V_1^{\omega(n-1)} &= \frac{Q_{xy}^{(3)\omega(n-1)}}{2} + \frac{M_{xy}^{(3)\omega(n-1)}}{2c} + Q_{xy}^{(1)\omega(n-1)}, \\ V_2^{\omega(n-1)} &= \frac{Q_{xy}^{(3)\omega(n-1)}}{2} - \frac{M_{xy}^{(3)\omega(n-1)}}{2c} + Q_{xy}^{(2)\omega(n-1)}, \\ S_{1x}^{\omega(n-1)} &= \left(c + \frac{h_1}{2} \right) N_{xx}^{(1)\omega(n-1)} - M_{xx}^{(1)\omega(n-1)} + \\ & + \frac{h_1}{4} N_{xx}^{(3)\omega(n-1)} + \frac{h_1}{4c} M_{xx}^{(3)\omega(n-1)}, \\ S_{2x}^{\omega(n-1)} &= - \left(c + \frac{h_2}{2} \right) N_{xx}^{(2)\omega(n-1)} - M_{xx}^{(2)\omega(n-1)} - \\ & - \frac{h_2}{4} N_{xx}^{(3)\omega(n-1)} + \frac{h_2}{4c} M_{xx}^{(3)\omega(n-1)}, \\ S_{1y}^{\omega(n-1)} &= \left(c + \frac{h_1}{2} \right) N_{yy}^{(1)\omega(n-1)} - M_{yy}^{(1)\omega(n-1)} + \\ & + \frac{h_1}{4} N_{yy}^{(3)\omega(n-1)} + \frac{h_1}{4c} M_{yy}^{(3)\omega(n-1)}, \\ S_{2y}^{\omega(n-1)} &= - \left(c + \frac{h_2}{2} \right) N_{yy}^{(2)\omega(n-1)} - M_{yy}^{(2)\omega(n-1)} - \\ & - \frac{h_2}{4} N_{yy}^{(3)\omega(n-1)} + \frac{h_2}{4c} M_{yy}^{(3)\omega(n-1)}, \\ T_{1x}^{\omega(n-1)} &= \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right) \frac{Q_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2} + \frac{M_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c}, \\ T_{2x}^{\omega(n-1)} &= \left(1 + \frac{h_2}{2c} \right) \frac{Q_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2} - \frac{M_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c}, \\ T_{1y}^{\omega(n-1)} &= \left(1 + \frac{h_1}{2c} \right) \frac{Q_{yz}^{(3)\omega(n-1)}}{2} + \frac{M_{yz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c}, \\ T_{2y}^{\omega(n-1)} &= \left(1 + \frac{h_2}{2c} \right) \frac{Q_{yz}^{(3)\omega(n-1)}}{2} - \frac{M_{yz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c}, \\ U_1^{\omega(n-1)} &= (2c + h_1) Q_{xy}^{(1)\omega(n-1)} - 2M_{xy}^{(1)\omega(n-1)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{h_1}{4} Q_{xy}^{(3)\omega(n-1)} + \frac{h_1}{2c} M_{xy}^{(3)\omega(n-1)}, \\ U_2^{\omega(n-1)} &= (2c + h_2) Q_{xy}^{(2)\omega(n-1)} + 2M_{xy}^{(2)\omega(n-1)} + \\ & + \frac{h_2}{4} Q_{xy}^{(3)\omega(n-1)} - \frac{h_2}{2c} M_{xy}^{(3)\omega(n-1)}. \end{aligned}$$

В дополнительных нагрузках (2.5) на первом шаге приближения нелинейные слагаемые принимаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущей итерации. Первым приближением будет служить аналитическое решение задачи упругости.

Применение метода упругих решений позволяет на каждом шаге приближения сводить задачу об упругопластическом изгибе рассматриваемой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем в терморadiационном поле к соответствующей задаче теории упругости с дополнительными нагрузками.

В качестве граничных условий примем кинематические условия свободного опирания пластины на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Искомое решение можно представить в тригонометрических рядах. Также в тригонометрические ряды разлагается поперечная нагрузка и дополнительные усилия. Подставляя их в уравнения равновесия, получим для вычисления искомого амплитуд перемещений U_{1xpm}^n , U_{2xpm}^n , U_{1ypt}^n , U_{2ypt}^n , W_{1pm}^n , W_{2pm}^n систему линейных алгебраических уравнений. Отличие здесь в нелинейных добавках, которые и учитывают влияние нейтронного облучения:

$$\begin{aligned} & b_1 U_{1xpm}^n + b_2 U_{2xpm}^n + b_{11} U_{1ypt}^n + b_{12} U_{2ypt}^n + \\ & + b_3 W_{1pm}^n + b_4 W_{2pm}^n = p_{\omega pm}^{n-1}, \\ & b_2 U_{1xpm}^n + b_5 U_{2xpm}^n + b_{12} U_{1ypt}^n + b_{13} U_{2ypt}^n + \\ & + b_6 W_{1pm}^n + b_7 W_{2pm}^n = s_{\omega pm}^{n-1}, \\ & b_{11} U_{1xpm}^n + b_{12} U_{2xpm}^n + b_{14} U_{1ypt}^n + b_{15} U_{2ypt}^n + \\ & + b_{16} W_{1pm}^n + b_{17} W_{2pm}^n = h_{\omega pm}^{n-1}, \\ & b_{12} U_{1xpm}^n + b_{13} U_{2xpm}^n + b_{15} U_{1ypt}^n + b_{18} U_{2ypt}^n + \\ & + b_{19} W_{1pm}^n + b_{20} W_{2pm}^n = r_{\omega pm}^{n-1}, \\ & b_3 U_{1xpm}^n + b_6 U_{2xpm}^n + b_{16} U_{1ypt}^n + b_{19} U_{2ypt}^n + \\ & + b_8 W_{1pm}^n + b_9 W_{2pm}^n = q_{\omega pm} + q_{\omega pm}^{n-1}, \\ & b_4 U_{1xpm}^n + b_7 U_{2xpm}^n + b_{17} U_{1ypt}^n + b_{20} U_{2ypt}^n + \\ & + b_9 W_{1pm}^n + b_{10} W_{2pm}^n = g_{\omega pm}^{n-1}. \end{aligned}$$

Коэффициенты b_i выражаются через величины a_i и зависят от параметров p и m .

Заключение

Полученное в работе аналитическое решение позволяет исследовать деформирование физически нелинейных трехслойных прямоугольных пластин при действии терморadiационных нагрузок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Старовойтов, Э.И. Деформирование трёхслойных физически нелинейных стержней / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Л.Н. Рабинский. – Москва: МАИ, 2016. – 183 с.
2. Журавков, М.А. Математические модели механики твердых тел / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. – Минск: БГУ, 2021. – 535 с.
3. Старовойтов, Э.И. Трёхслойные стержни в терморadiационных полях / Э.И. Старовойтов, М.А. Журавков, Д.В. Леоненко. – Минск: Беларуская навука, 2017. – 275 с.
4. Старовойтов, Э.И. Деформирование трёхслойного стержня в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – № 1 (22). – С. 31–35.
5. Starovoitov, E.I. Elastic circular sandwich plate with compressible filler under axially symmetrical thermal force load / E.I. Starovoitov, Y.V. Zakharchuk, E.L. Kuznetsova // Journal of the Balkan Tribological Association. – 2021. – Vol. 27, № 2. – P. 175–188.
6. Козел, А. Г. Термоупругий изгиб круговой трёхслойной пластины, связанной с основанием Пастернака / А.Г. Козел // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 31–37.
7. Зеленая, А.С. Изгиб термоупругопластической трёхслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / А.С. Зеленая // Механика. Исследования и инновации: междунар. сб. науч. тр. / Белорус. гос. ун-т. транспорта. – Гомель, 2019. – Вып. 12. – С. 76–84.
8. Нестерович, А.В. Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой трёхслойной пластины / А.В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 54–60.
9. Starovoitov, E.I. Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2011. – Vol. 47. – № 5. – P. 580–589.
10. Плескачевский, Ю.М. Изгиб трехслойной круговой пластины кольцевой нагрузкой в нейтронном потоке / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Актуальные вопросы машиноведения. – 2023. – Т. 12. – С. 47–51.
11. Численный расчет и анализ напряженного состояния в слоистом теле при трении с учетом изменения модулей упругости покрытия и основания / В.В. Можаровский, В.А. Кукареко, С.А. Марьин, А.В. Кушнеров // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 1 (58). – С. 22–28.
12. Старовойтов, Э.И. Исследование спектра частот трёхслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т. 21, № 2. – С. 162–169.
13. Маркова, М.В. Напряжённо-деформированное состояние круговой трёхслойной ступенчатой пластины при вынужденных колебаниях / М.В. Маркова // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – № 15. – С. 134–146.
14. Grover, N. An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates / N. Grover, B.N. Singh, D.K. Maiti // Aerospace Science and Technology. – 2016. – Vol. 52. – P. 41–51.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № T24PM-004).

Поступила в редакцию 06.09.2024.

Информация об авторах

Мельникова Анастасия Сергеевна – к.ф.-м.н.

УДК 539.3

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_37

EDN: SKXJLW

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ КОНТАКТА И ИЗНОСА ЗУБЬЕВ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС С ПОКРЫТИЕМ ИЗ КОМПОЗИТА ПРИ КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков, С.В. Киргинцева

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ASYMPTOTIC DEPENDENCES OF CALCULATION OF CONTACT PARAMETERS AND WEAR OF TEETH OF GEARS WITH COMPOSITE COATING DURING CONTACT INTERACTION

V.V. Mozharovsky, D.S. Kuzmenkov, S.V. Kirhintsava

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Разработана методика построения теоретических и численных зависимостей и алгоритмов для определения параметров контакта и износа, в том числе для зубчатых колес с покрытиями. Предложены асимптотические зависимости расчета параметров контактного взаимодействия и износа упругих тел с покрытиями из композита. Создана компьютерная программа, позволяющая строить профиль зубьев зубчатых колес, определять зону контакта взаимодействующих зубьев зубчатых колес, вычислять толщину изношенного слоя, учитывать расположение волокон в матрице композиционного материала на параметры износа. Предлагаемые подходы могут быть использованы в производственных процессах для выбора материалов при создании конструктивных элементов деталей машин.

Ключевые слова: *параметры контакта, покрытия из композита, зубчатые колеса, асимптотические зависимости.*

Для цитирования: *Можаровский, В.В.* Асимптотические зависимости расчета параметров контакта и износа зубьев зубчатых колес с покрытием из композита при контактном взаимодействии / В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков, С.В. Киргинцева // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 37–42. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_37. – EDN: SKXJLW

Abstract. A methodology was developed for constructing theoretical and numerical dependencies and algorithms for determining contact and wear parameters, including for gears with coatings. The asymptotic dependences of calculating the parameters of contact interaction and wear of elastic bodies with composite coatings are proposed. A computer program has been created that makes it possible to build a profile of the teeth of gears, determine the contact zone of the interacting teeth of gears, calculate the thickness of the worn layer, and take into account the location of fibers in the matrix of the composite material for wear parameters. The proposed approaches can be used in production processes to select materials when creating structural elements of machine parts.

Keywords: *contact parameters, composite coatings, gears, asymptotic dependencies.*

For citation: *Mozharovsky, V.V.* Asymptotic dependences of calculation of contact parameters and wear of teeth of gears with composite coating during contact interaction / V.V. Mozharovsky, D.S. Kuzmenkov, S.V. Kirhintsava // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 37–42. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_37 (in Russian). – EDN: SKXJLW

Введение

Зубчатые колеса считаются очень важной частью взаимодействующих элементов деталей машин в машиностроении и на транспорте. Для зубчатых колес используются многочисленные покрытия, которые обеспечивают их защиту от износа. В настоящем исследовании ограничимся рассмотрением покрытий из композитов, в которых материал покрытия обладает анизотропными свойствами, а основание – изотропными.

В данной работе развиты математические и численные модели и теории о контактном взаимодействии изотропных и анизотропных цилиндрических тел (в том числе с покрытиями), которые применимы для построения методики по

расчету износа, напряженного состояния и деформативности зубьев зубчатых колес из композитов.

1 Постановка задачи

Принципиальная схема взаимодействия элементов зубчатых передач показана на рисунке 1.1.

Износ и напряжения в зубьях и в покрытиях из композита при взаимодействии зубьев определяется по разработанной методике [1]–[3].

Теоретической основой реализации поставленной задачи являются решения о контактном взаимодействии цилиндров с покрытием из ортотропного материала, которые моделируют контакт зубьев зубчатых колес. В работах [1], [2] дана

методика расчета параметров контакта и напряжений при взаимодействии жесткого цилиндра с ортотропным покрытием. Для определения линейного износа зубьев с покрытием необходимо знать размеры зоны контакта, которые легко можно определить исходя из графиков на рисунке 1.2. Отношение модулей упругости ортотропного покрытия к основанию E_2 / E соответственно будут: 1 – 24; 2 – 12; 3 – 2,5; 4 – 1; 5 – 0,05 (рисунок 1.2).

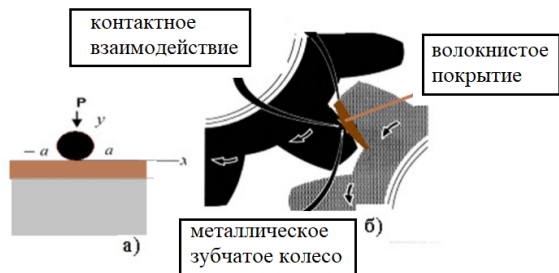


Рисунок 1.1 – Схема, моделирующая контакт зубьев с покрытием: а) математическая модель расчета контактного взаимодействия; б) схема контакта зубьев

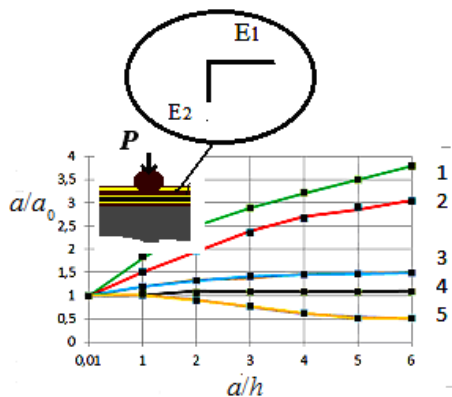


Рисунок 1.2 – Зависимость относительной полуширины площадки контакта a / a_0 от a / h

На рисунке 1.2 приведены зависимости изменения зоны контакта $\tilde{a} = a / a_0$ от $\alpha_0 = a / h$,

где $a_0 = \sqrt{\frac{2PR}{\pi t}}$ – полуширина площадки контак-

та при контакте с ортотропным цилиндром, основные обозначения используемых параметров представлены в [1], [2]. Полученные результаты являются оценочными, они показывают качественное влияние упругих свойств материалов и их упругих соотношений на параметры контакта и могут использоваться в инженерных расчетах. Здесь $E_y = E_2; \nu_{xy} = \nu_{12}; E_j, G_{12}, \nu_{ij}$ – технические постоянные материала (модули упругости и коэффициенты Пуассона).

Следует отметить, что расчет параметров контакта (размеров зон контакта, напряжений,

износа и т. д.) применительно к работе таких передач, как зубчатые колеса из композитов, является многопрофильным, включает расчеты, связанные с напряжениями зубьев и трибологическими отказами, такими как износ. Для автоматизации процесса расчета на износ зубьев написана компьютерная программа, по которой можно прогнозировать и определять ресурс работы такой передачи, делать визуализацию результатов расчета в виде графических зависимостей, таблиц и т. д.

Для расчета параметров контакта при взаимодействии зубьев зубчатых колес, в которых одно колесо имеет покрытие из композита, жестко скрепленного с упругим основанием, а другое – металлическое (изотропное), необходимо рассмотреть следующие математические модели контактного взаимодействия:

а) теоретическое описание контакта жесткого цилиндра с изотропным цилиндром, имеющим покрытие из композита;

б) теоретическое описание контакта упругого (изотропного) цилиндра с изотропным цилиндром, имеющим покрытие из композита.

Для дальнейшего исследования рассмотрим более подробно расчет параметров контакта, принимая модель а) (рисунок 1.1).

Например, рассмотрен расчет износа зубьев зубчатого колеса с покрытиями из волокнистого материала на упругом основании по созданной программе. Формула для определения линейного износа зубьев зубчатого колеса из композита при заданной интенсивности износа I будет [3, 4]

$$h_u = 2a\nu_{ck}nztI / \nu,$$

здесь размер зоны контакта a определяется по графикам на рисунке 1.2; z – количество пар зацепления ($z = 1$); t – время работы, мин; $N = nzt$ – количество циклов зацепления; ν – скорость качения (обозначения параметров, входящих в формулу даны в [3], [4]).

Далее исследовалась сходимость численных решений в зависимости от толщины покрытий и отношений свойств материала.

2 Методика расчета параметров контакта

Вначале представим асимптотические зависимости для определения зон контакта для покрытия на жестком основании. Рассматриваем следующие возможные случаи:

1. Толщина покрытия больше полуширины зоны контакта ($h > a$), тогда следуя работе [1], исходя из полученных решений для симметричной нормальной нагрузки $p(x)$ перемещение (осадка поверхности) будет

$$v = \frac{S_{22}}{\pi} (\beta_2 + \beta_1) \times \left[\int_{-a}^a p(t) \ln \left| \frac{t-x}{h} \right| dt + \sum_{i=0}^{\infty} d_i \int_{-a}^a p(t) \left(\frac{t-x}{h} \right)^{2i} dt \right],$$

$$|x| < a.$$

Тогда теоретический расчет значения полуширины контакта производился по асимптотической зависимости:

$$\left[\frac{a}{h}\right]^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4d_1 a_0^2 / h^2}}{2d_1},$$

которую после некоторых преобразований можно записать в удобную формулу для вычислений в виде:

$$a^2 / a_0^2 = \frac{1}{1 - d_1 (a^2 / h^2)},$$

где коэффициенты d_j (ограничимся $j = 1$) определяются вычислением интегралов:

$$d_j = \frac{(-1)^j}{(2j)!} \int_0^\infty [1 + L(\beta)] \beta^{2j-1} d\beta;$$

$$L(\beta) = \frac{T(\beta)}{\Lambda(\beta)}; \quad \left| \frac{t-x}{h} \right| < 2,$$

где

$$T(\beta) = \left(R_2 Q_1 sh \frac{\beta}{\beta_1} ch \frac{\beta}{\beta_2} - R_1 Q_2 sh \frac{\beta}{\beta_2} ch \frac{\beta}{\beta_1} \right) (\beta_2 - \beta_1);$$

$$\Lambda(\beta) = \beta_1 R_1 Q_1 + \beta_2 R_2 Q_2 +$$

$$+ (\beta_1 R_1 Q_2 + \beta_2 R_2 Q_1) sh \frac{\beta}{\beta_1} sh \frac{\beta}{\beta_2} -$$

$$- (\beta_1 Q_1 R_2 + \beta_2 Q_2 R_1) ch \frac{\beta}{\beta_1} ch \frac{\beta}{\beta_2}.$$

Входящие здесь коэффициенты определяются из работы [1], [2]:

$$Q_i = S_{12} \gamma_i - \frac{S_{22}}{\gamma_i}; \quad R_i = S_{11} \gamma_i^2 - S_{12}; \quad i = 1, 2;$$

коэффициенты S_{ij} в случае плоской деформации:

$$S_{ii} = \frac{1 - \nu_{3i} \nu_{i3}}{E_i}; \quad i = 1, 2; \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}};$$

$$S_{12} = \frac{-(\nu_{12} + \nu_{13} \nu_{31})}{E_1}.$$

Здесь E_j , G_{12}, ν – технические постоянные материала, параметр γ_i , $i = 1, 2$ – это действительные корни характеристического уравнения

$$S_{11} \gamma^4 + (2S_{12} + S_{66}) \gamma^2 + S_{22} = 0,$$

которые определяются по формулам

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{S_{66} + 2S_{12} \pm \sqrt{(S_{66} + 2S_{12})^2 - 4S_{11} S_{22}}}{2S_{11}}}, \quad i = 1, 2.$$

Обозначив $\beta_i = \frac{1}{\gamma_i}$, $i = 1, 2$, на основании

свойств корней характеристического уравнения имеем:

$$\beta_1 \beta_2 = \frac{S_{11}}{S_{22}}; \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 = \frac{2S_{12} + S_{66}}{S_{22}}.$$

Для изотропного покрытия имеем: $\beta_1 = \beta_2 = 1$.

2. Методику расчета строим в случае тонкого покрытия ($h < a$), полуширина контакта

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{2} PhRS}; \quad \text{давление} \quad p(x) = \frac{a^2 - x^2}{2RhS} \quad \text{или}$$

$$p(x) = \frac{3P}{4a^3} (a^2 - x^2), \quad \text{где } R - \text{радиус индентора, } h -$$

толщина покрытия; $S = S_{22} - S_{12}^2 / S_{11}$.

После некоторых преобразований можно также записать формулу, удобную для расчетов:

$$a^2 / a_0^2 = (3\pi / 2) (a/h)^{-k_s},$$

$$\text{где } k_s = \frac{1 - S_{12}^2 / (S_{11} S_{22})}{2(\beta_1 + \beta_2)}.$$

Применяя эти асимптотические зависимости, построены графики изменения размера зоны контакта от толщины покрытия на жестком основании (рисунок 2.1).

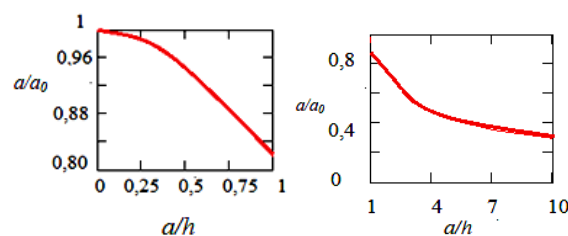


Рисунок 2.1 – Зависимость относительной полуширины площадки контакта a / a_0 от a / h для жесткого основания

3 Методика расчета параметров контакта жесткого цилиндра с волокнистым покрытием на упругом основании

Рассматривая расчет размеров зон контакта жесткого цилиндра с волокнистым покрытием на упругом основании можно построить инженерную методику расчета износа, используя графические зависимости рисунка 1.2, полученные на основе работы [1]. Для удобства в инженерных расчетах графического описания изменения зоны контакта цилиндров была сделана аппроксимация кривых с помощью аналитических зависимостей (уравнения кубической регрессии)

$$\tilde{a} = b_3 \alpha^3 + b_2 \alpha^2 + b_1 \alpha + b_0,$$

где $\tilde{a} = a / a_0$, $\alpha = a / h$; коэффициенты b_i определяются из таблицы 3.1.

Построенные графики (рисунок 2.1) и зависимости для определения зон контакта весьма неудобны, так как отношение размеров зон контакта $\tilde{a} = a / a_0$ является функцией отношения a / h , которое неизвестно. Поэтому используя уравнения кубической регрессии, выразим $\tilde{a} = a / a_0$ через a_0 / h . Для этого кубическое уравнение регрессии решаем методом Кардано с уточнением по численному методу Ньютона. Для этой процедуры был разработан алгоритм и компьютерная программа.

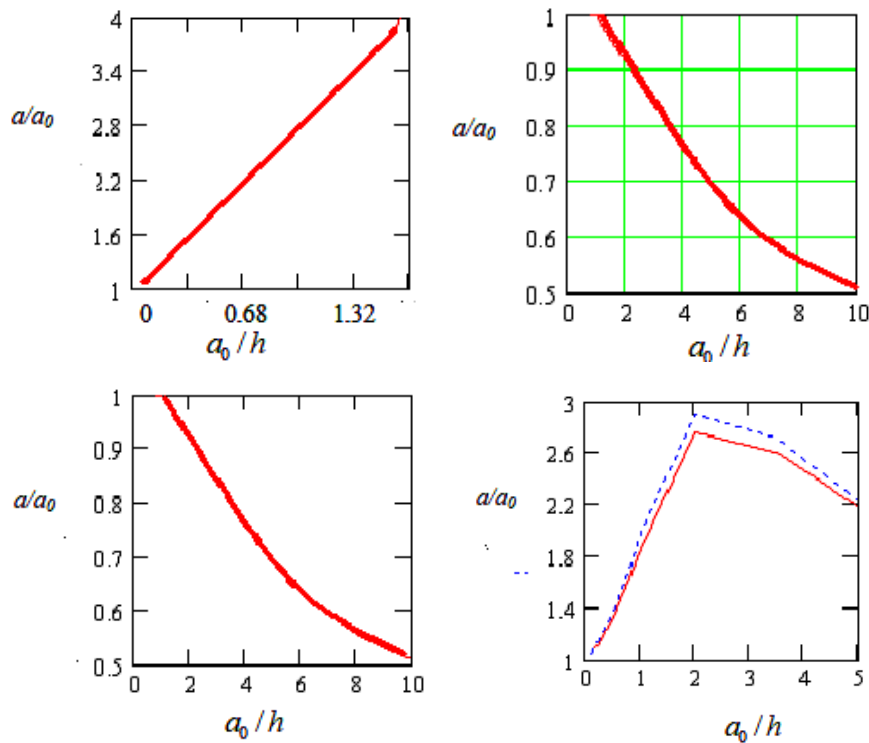


Рисунок 3.1 – Графики, показывающие изменения параметров контакта a/a_0 для a_0/h (штриховая линия – расчет по приближенным формулам)

Таблица 3.1 – Коэффициенты b_i

№ графика на рисунке 1.2	b_3	b_2	b_1	b_0
1	0,0114	-0,1592	1,015	0,9762
2	0,0002	-0,0424	0,5847	0,985
3	0,0031	-0,0461	0,2486	0,9979
4	0,0006	-0,0079	0,034	0,9958
5	0,0072	-0,0651	0,0478	1,0005

При разработке алгоритма расчета износа материала зубьев зубчатого колеса с покрытием необходимо выполнять следующие пункты:

а) рассчитываются координаты характерных точек зуба [2]. Строится профиль зуба. Формула для определения линейного износа зубьев зубчатого колеса из композита при заданной интенсивности износа I : $h_u = 2a v_{ck} n z t I / v$, здесь полуширина контакта a определяется по вышеуказанной методике.

б) Для каждого типа материала определяется величина износа h_u . Задается I_h – безразмерная характеристика износа (вычисляется из эксперимента).

Для отработки методики расчета рассмотрим простейший пример.

Пусть зубчатая передача без смазки выполнена из шестерни с покрытием из композита $h = 2$ мм, состоящего из полиамидной матрицы и стеклянных волокон с модулями упругости

$E_m = 3500$ кг/мм², $E_f = 85000$ кг/мм², коэффициентами Пуассона $\nu_m = 0,35$, $\nu_f = 0,2$, модулями сдвига $G_m = 1300$ кг/мм², $G_f = 35420$ кг/мм², с различным процентным содержанием волокон, зацепляется с таким же колесом. Например, по вышеприведенным зависимостям сделан расчет механических постоянных коэффициентов материала (ортотропного) для шестерни и колеса из композита с процентным содержанием волокон $V = 40\%$: $E_1 = 36100$ кг/мм²; $\eta = 0,92$; $E_2 = 7582$ кг/мм²; $G_{12} = 2838$ кг/мм²; $\nu_{12} = \nu_{13} = 0,29$; $\nu_{21} = \nu_{31} = 0,06$; $K_f = 47222$ кг/мм²; $K_m = 3889$ кг/мм²; $K = 6144$ кг/мм²; $\nu_{23} = \nu_{32} = 0,53$. Зубчатая передача имеет следующие геометрические размеры в общепринятых обозначениях [2]–[4] и режим работы: $m = 4$, $z_s = 23$, $z_k = 23$, $A = 92$ мм, $\alpha = 20^\circ$, $b = 20$ мм, $d_s = 92$ мм, $d_k = 92$ мм, $M_{кр} = 852,6$ н.мм; $n_s = 2000$ об/мин, передаточное число – $u = 1$. По результатам испытаний износ зубьев шестерни и колеса определялся числом циклов нагружения $N_s = 4,15 \cdot 10^7$. Необходимо определить изнашивание зубьев h_u при заданной интенсивности изнашивания $I_s = 4,1 \cdot 10^{-8}$.

Математическая модель контакта будет следующей. При продольном расположении (рисунок 3.2) волокна ориентированы параллельно оси X .

Для приближенных инженерных расчетов упругих постоянных волокнистых материалов

можно воспользоваться соотношениями для модулей упругости

$$E_1 = E_x = V_f E_f + (1 - V_f) E_m;$$

$$E_2 = E_y = \frac{E_m (1 + \eta V_f)}{1 - \eta V_f},$$

где $\eta = \frac{E_f - E_m}{E_f + E_m}$, V_f – объемное содержание во-

локна в матрице, а коэффициенты Пуассона определяются по формуле

$$\nu_{12} = V_f \nu_f + (1 - V_f) \nu_m,$$

из свойств симметрии следует:

$$E_3 = E_2; \nu_{13} = \nu_{12}; \nu_{31} = \nu_{21}; \nu_{32} = \nu_{23}; \nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \nu_{12}.$$

Индексы f и m обозначают волокно и матрицу соответственно.

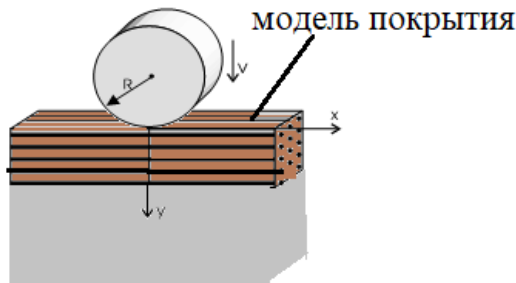


Рисунок 3.2 – Контакт жесткого цилиндра с ортотропным покрытием при продольном расположении волокна в матрице

Возьмем интенсивность изнашивания зуба шестерни $I_s = 4,1 \cdot 10^{-8}$. Используя приведенные ранее формулы для расчета исходных данных [2]–[4] и определения зон контакта, износа зубьев из композита зависимости $h_u = 2a \nu_{ck} n z t l / \nu$, строим график влияния объемного содержания волокон на толщину изношенного слоя для $h > a$ (рисунок 3.3).

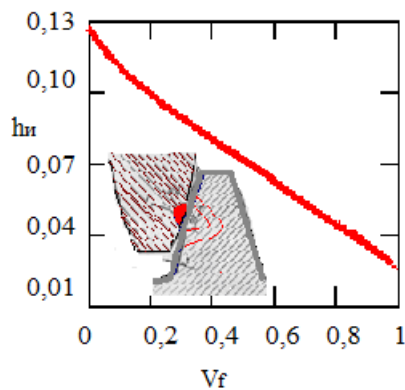


Рисунок 3.3 – График зависимости величины h_u (мм) износа покрытия от объемного содержания волокон V_f

4 Методика и алгоритм решения задачи определения напряжений

Расчет напряжений в упругом теле зубьев зубчатых колес из композита показал совпадение с известными данными расчета для зубьев из изотропных материалов, в частном случае, при выбранных определенных параметрах. Предложенный алгоритм и результаты расчета могут найти применение в вычислениях деформативности и напряженного состояния зубьев зубчатых колес из композитов для зубчатых передач.

Рассматривается реализация задачи расчета напряжений в покрытии из композита зуба зубчатого колеса при контакте с металлическим зубом, используя работу [1]. Сначала рассматриваем случай для ортотропного покрытия на жестком основании:

а) исходя из введенных пользователем начальных данных (модули Юнга, коэффициенты Пуассона, величину действующего давления и др.) программа по формулам из п.1 находит все необходимые величины для определения напряжений и перемещений;

б) далее по формулам (см. (3.19)–(3.22) из [1]) находим необходимые значения напряжений и перемещений

Разработана программа расчета напряжений для изотропных покрытий с волокнистым основанием, используя формулы из [1].

Создана систематизация по расчету напряжений и деформативности зубьев зубчатых колес применительно к композитам, учитывая: параллельное, нормальное расположение волокон и радиальное; рассматривается волокнистый материал изготовления зуба и определение его напряженного состояния при контактом взаимодействии. В этом случае можно рассматривать также расположение волокон и для функционально-градиентного материала зуба зубчатого колеса, считая, что зуб имеет покрытие из композита и основание может быть изотропным, жестким, ортотропным, трансверсально-изотропным. Для определения контактных перемещений зубьев из однородного изотропного полимерного колеса, находящегося в зацеплении, исходят из преобразованных формул Герца – Беляева, которые приведены, например, в [1]. Если материал зуба является волокнистым композитом, то для определения упругих постоянных, таких как модули упругости, коэффициенты Пуассона, можно применять приближенные формулы, определяющие эти постоянные через модули упругости матрицы и волокна по правилу «смесей».

Заключение

Износ контактирующих зубьев зубчатых колес зависит от множества факторов. Влияние всех факторов в предлагаемой модели одновременно учесть затруднительно. Поэтому в работе

приводятся примеры для расчета параметров контакта и износа зубьев с целью описания асимптотической методики и иллюстрации работы компьютерной программы. Для инженерного расчета необходимо проводить экспериментальные исследования для определения интенсивности изнашивания различных контактирующих волокнистых материалов. Таким образом, в результате выполнения данной работы была написана программа, позволяющая строить профиль зубьев зубчатых колес, определять зону контакта взаимодействующих зубьев зубчатых колес, вычислять толщину изношенного слоя, учитывать расположение волокон в матрице композиционного материала на параметры износа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Можаровский, В.В.* Прикладная механика слоистых тел из композитов / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский. – Минск: Наука и техника, 1988. – 280 с.
2. *Реализация методики расчета износа зубьев зубчатого колеса из волокнистого композиционного материала* / В.В. Можаровский,

Д.С. Кузьменков, Ю.В. Василевич, С.В. Киргинцева // Теоретическая и прикладная механика. – 2024. – Вып. 39. – С. 109–115.

3. *Крагельский, И.В.* Основы расчетов на трение и износ / И.В. Крагельский, М.Н. Добычин, В.С. Комбалов. – Москва: Машиностроение, 1977. – 526 с.

4. *Влияние расположения волокон на параметры контакта и износа для зубьев зубчатых передач из композитов* / В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков, Ю.В. Василевич, С.В. Киргинцева // Математические методы в технологиях и технике. – 2023. – № 10. – С. 71–75.

Поступила в редакцию 30.01.2025.

Информация об авторах

Можаровский Валентин Васильевич – д.т.н., профессор
Кузьменков Дмитрий Сергеевич – к.ф.-м.н., доцент
Киргинцева Светлана Викторовна – старший преподаватель

СТРУКТУРА, МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГРАДИЕНТНЫХ НАНОКОМПОЗИЦИОННЫХ МЕДЬ-УГЛЕРОДНЫХ ПОКРЫТИЙ

А.С. Руденков¹, Ванг Цзинцзе¹, А.В. Рогачев¹, Лю Джубо²,
Д.Г. Пилипцов¹, Е.А. Кулеш¹, А.Н. Купо¹

¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

²Институт машиностроения и автомобилестроения, Тайюаньский технологический университет

STRUCTURE, MECHANICAL PROPERTIES OF GRADIENT NANOCOMPOSITE COPPER-CARBON COATINGS

A.S. Rudenkov¹, Wang Jingjie¹, A.V. Rogachev¹, Liu Jubo²,
D.G. Piliptsov¹, E.A. Kulesh¹, A.N. Kupo¹

¹Francisk Skorina Gomel State University

²Institute of Mechanical and Automobile Engineering, Taiyuan University of Technology

Аннотация. Предложена методика формирования композиционных медь-углеродных покрытий осаждением из совмещенных потоков углеродной плазмы и электродугового испарения меди с возрастающим содержанием углерода в процессе роста слоя. Исследования структурно-фазового состава, выполненные методом КР и РФЭ спектроскопии, показали, что увеличение концентрации меди стимулирует графитизацию углеродной матрицы, приводит к уменьшению размеров Csp² кластеров и увеличению их концентрации. Методом атомно-силовой микроскопии установлено присутствие меди в покрытии в виде отдельных частиц размером 100...500 нм. Для покрытий характерно снижение твердости и упругости с увеличением глубины индентирования.

Ключевые слова: нанокomпозиционные медь-углеродные покрытия, химический состав, твердость, импульсное катодно-дуговое испарение.

Для цитирования: Структура, механические свойства градиентных нанокomпозиционных медь-углеродных покрытий / А.С. Руденков, Ванг Цзинцзе, А.В. Рогачев, Лю Джубо, Д.Г. Пилипцов, Е.А. Кулеш, А.Н. Купо // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 43–50. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_43. – EDN: ADUQNG

Abstract. A method for forming composite copper-carbon coatings by deposition from combined flows of carbon plasma and electric arc evaporation of copper with increasing carbon content during layer growth is proposed. The studies of the structural-phase composition performed by the method of Raman and X-ray photoelectron spectroscopy showed that an increase in the copper concentration stimulates graphitization of the carbon matrix: it leads to a decrease in the size of Csp² clusters and an increase in their concentration. The presence of copper in the coating in the form of individual particles 100...500 nm in size was established by the method of atomic force microscopy. The coatings are characterized by a decrease in hardness and elasticity with an increase in the indentation depth.

Keywords: nanocomposite copper-carbon coatings, chemical composition, hardness, pulsed cathodic arc evaporation.

For citation: Structure, mechanical properties of gradient nanocomposite copper-carbon coatings / A.S. Rudenkov, Wang Jingjie, A.V. Rogachev, Liu Jubo, D.G. Piliptsov, E.A. Kulesh, A.N. Kupo // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 43–50. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_43 (in Russian). – EDN: ADUQNG

Введение

Одной из важных задач современного машиностроения, микроэлектроники, является развитие технологии осаждения покрытий, обладающих высокой твердостью, износостойкостью, тепло- и электропроводностью, при этом обеспечивающих низкие значения коэффициента трения. Такие покрытия применяются в микроэлектронике, в частности, при изготовлении скользящих электрических контактов, используются при формировании топологии и выводов интегральных микросхем и плат [1]. Активное использование покрытий из платины, золота и

меди связано с их относительно низким коэффициентом трения и высокой электро- и теплопроводностью, необходимой для эффективного отвода тепла из зоны трения. Однако применение золота и платины ограничено в связи с их высокой стоимостью, также использование платины в качестве подслоя не желательно в высокотемпературных процессах, что связано с ее кристаллизацией в процессе отжига [1]–[3]. В последнее время для формирования элементов электронных устройств получило активное развитие использование металл-углеродных композитов. Установлено, что повышение механических свойств

медных покрытий можно добиться путем введения в их объём углерода, который, формируя различные фазовые включения, выполняет роль твердой смазки. Как показано в работах [4]–[6], с ростом содержания графита в объёме композиционного медь-углеродного покрытия было установлено монотонное уменьшение коэффициента трения. Композиционные Cu–C покрытия формируют с использованием различных вакуумных методов (катодно-дугового испарения, магнетронного распыления, термоионного и др.), а также методами химического осаждения. В связи с этим перспективным представляется использование метода импульсного катодно-дугового разряда, позволяющего формировать покрытия с высокой концентрацией sp^3 гибридных атомов углерода.

Известно, что механические свойства покрытий, такие как твердость, остаточные напряжения, определяются структурой покрытия, а именно отношением sp^2/sp^3 компонент [4], [7], [8]. Данное отношение зависит от энергетических параметров разряда: частоты и напряжения разрядных импульсов.

Высокие остаточные напряжения и хрупкость в сочетании с плохой адгезией к полимерным и стеклянным подложкам ограничивает область применения композитных покрытий при нанесении на мягкие и деформирующиеся под нагрузкой подложки. Наиболее перспективными, в сравнении с композиционными и многослойными, являются градиентные покрытия с переменной концентрацией состава по толщине [9]–[11].

Основной целью работы является установление закономерностей влияния элементного и структурно-фазового состава медь-углеродных покрытий на их механические свойства.

1 Методика формирования покрытий и исследования

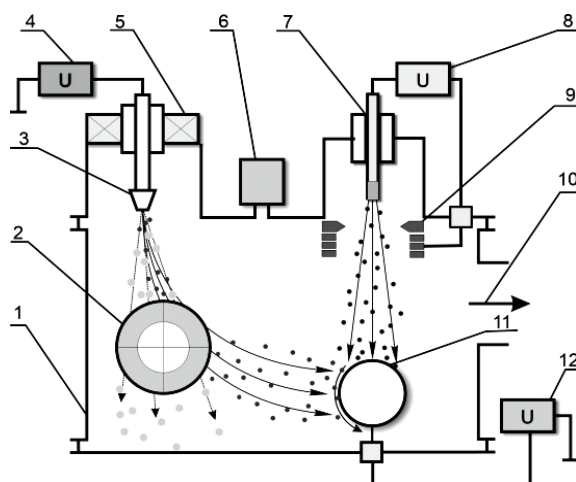
Осаждение покрытий с переменной по толщине составом проводилось на предварительно нанесенный медный подслои, что позволяло обеспечить необходимые значения прочности адгезионного соединения с материалом подложки (рисунок 1.1).



Рисунок 1.1 – Схематическое изображение медь-углеродного покрытия, осажденного на медный подслои

Следующим этапом процесса осаждения является введение в плазму, генерируемую в

результате электродугового испарения медного катода, ионов углерода, в результате испарения графита импульсной дугой с последующим увеличением концентрации ионов углерода в потоке металлической плазмы в результате возрастания частоты работы генератора углеродной плазмы с помощью устройства, схема которого представлена на рисунке 1.2.



- 1 – вакуумная камера,
- 2 – сепаратор дугового испарителя,
- 3 – катод дугового испарителя,
- 4 – блок питания дугового испарителя,
- 5 – система управления дуговым разрядом,
- 6 – система контроля давления в вакуумной камере,
- 7 – импульсный источник углеродной плазмы,
- 8 – блок питания импульсного источника,
- 9 – система поджига и анодный узел импульсного источника углеродной плазмы,
- 10 – откачка,
- 11 – вращающаяся оснастка с подложками,
- 12 – блок питания напряжения смещения

Рисунок 1.2 – Схема осаждения медь-углеродных покрытий

На предварительно сформированном подслое меди толщиной 100–150 нм осаждали нанокomпозиционные медь-углеродные Cu/a-C (5...20 Гц):Cu слои. Изменение Cu/C отношения по толщине покрытия осуществляли путем увеличения частоты следования импульсов разряда углеродного источника от 5 до 20 Гц (шаг 5 Гц) при неизменном токе дугового испарителя меди. Покрытия осаждали при различном токе дугового испарителя (60–90 А) с катодом из меди, что позволило изменять концентрацию меди в покрытии.

Микроструктура покрытий была определена методом спектроскопии комбинационного рассеивания с помощью КР микроскопа Senterra (Bruker). Возбуждение спектров осуществлялось длиной волны 532 нм мощностью 20 мВт.

Химический состав и распределение химических элементов в поперечном сечении композиционных покрытий определяли методом рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии (РФЭС). Измерения производили посредством прибора ULVAC-РНИ Quanterra II при возбуждении вещества K_{α} -излучением алюминия с энергией кванта 1486,6 эВ и суммарной мощностью 25 Вт.

Измерение твердости и модуля упругости покрытий проводили с использованием наноиндентора «НаноСкан 4D» (ФГБНУ «ТИСНУМ» г. Троицк, Россия). В качестве индентора использовали алмазную трехгранную пирамидку Берковича (ГОСТ 9377-81). Измерение проводили согласно ISO 14577-1:2015 методом динамического механического анализа при максимальной нагрузке на индентор 40 мН. Обработка полученных результатов выполнялась согласно ГОСТ Р 8.736-2011.

2 Полученные результаты и их анализ

На рисунках 2.1, 2.2 представлены КР спектры Cu/a-C (5...20):Cu покрытий с различным содержанием меди по толщине слоя. Для всех покрытий характерно наличие широкого асимметричного пика в области 1000–2000 см^{-1} , что характерно для спектров покрытий, содержащих sp^2 и sp^3 углеродные фазы. В них наблюдаются две sp^2 полосы: G с частотой максимума 1560–1600 см^{-1} и D с частотой максимума 1350–1420 см^{-1} . Относительное содержание sp^3 фазы в покрытии рассчитывалось согласно методике, предложенной в работах [12]–[14].

Результаты математической обработки, такие как положение максимума и полуширина G пика, а также отношение интенсивностей D и G пиков приведены в таблице 2.1.

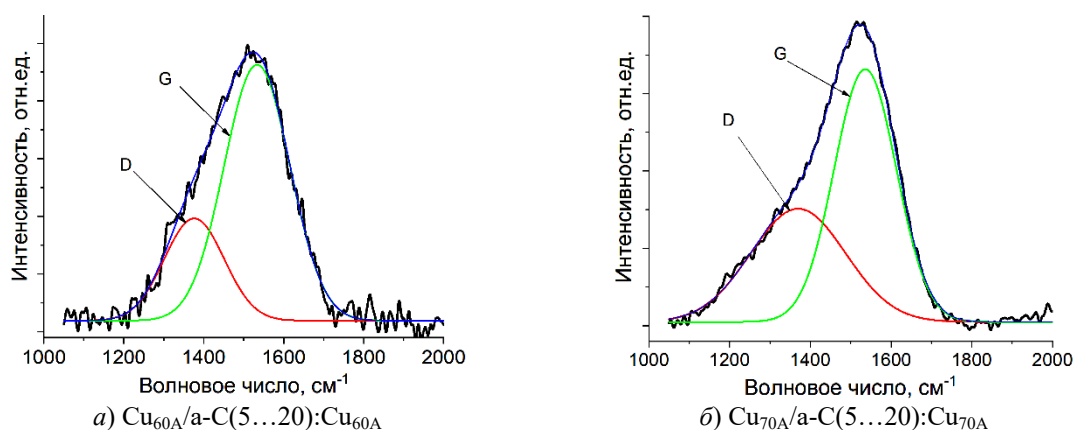


Рисунок 2.1 – Спектры КР медь-углеродных покрытий

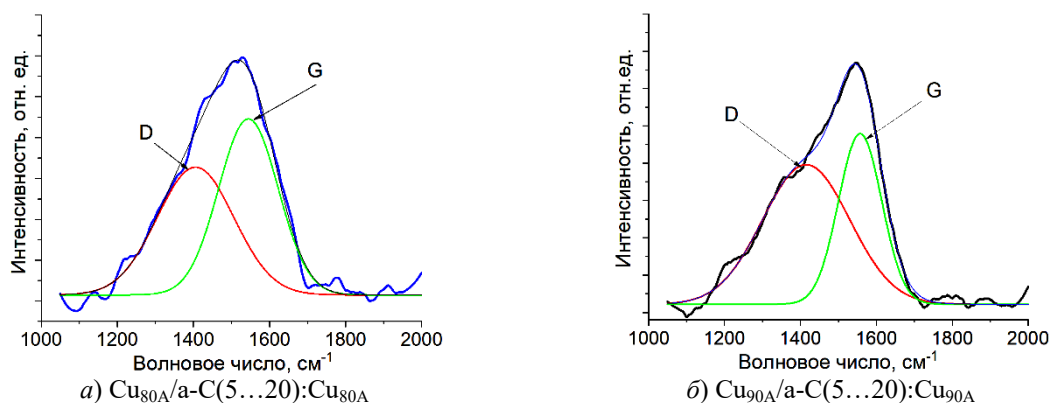


Рисунок 2.2 – Спектры КР медь-углеродных покрытий

Таблица 2.1 – Параметры КР спектров медь-углеродных покрытий

Покрытие	I_D / I_G отношение	Положение G пика, см^{-1}	Ширина G пика, см^{-1}	Λ_a , нм	sp^3 , %
Cu _{60A} /a-C(5...20):Cu _{60A}	0,36	1533,1	164,7	12	26,2
Cu _{70A} /a-C(5...20):Cu _{70A}	0,68	1535,9	154,1	7	16,3
Cu _{80A} /a-C(5...20):Cu _{80A}	0,93	1544,5	156,4	5	18,5
Cu _{90A} /a-C(5...20):Cu _{90A}	1,65	1557,2	113,9	3	*

* – согласно полученным значениям можно утверждать, что в данном покрытии не содержится sp^3 фаза. Покрытие представляет собой композит из меди и графита.

Представленные в таблице 2.1 параметры спектров КР медь-углеродных покрытий показывают, что с ростом тока дугового разряда, определяющим изменение концентрации меди в покрытии, значения отношения I_D / I_G резко увеличиваются, ширина G пика при этом уменьшается, что указывает на изменение структуры углеродной матрицы.

Увеличение отношения I_D / I_G указывает на рост количества Csp^2 кластеров, что хорошо согласуется с уменьшением ширины G пика. Сужение G пика свидетельствует о формировании более упорядоченных Csp^2 кластеров графита, характеризующихся малым размером [15], [16]. Таким образом, имеются основания считать, что рост концентрации меди приводит к уменьшению размеров Csp^2 кластеров и увеличению степени их упорядочения в покрытии.

При высоком токе дугового разряда (более 80 А) энергия ионов меди в потоке достигает максимальных значений, что приводит к интенсивному нагреву подложки, которая изменяет условия конденсации за счет увеличения подвижности атомов углерода на подложке. Это приводит к увеличению sp^2 фазы в покрытии.

Смещение центра G пика в сторону более высоких волновых чисел (таблица 2.1) может быть обусловлено искажением валентных углов в атомах sp^2 кластеров и уменьшением содержания sp^3 связей [16], [17]. Смещение G пика в сторону высоких волновых чисел с ростом тока дугового разряда не связано с увеличением содержания sp^3 гибридных связей, так как их концентрация уменьшается с увеличением содержания меди в покрытии. Минимум положения G пика регистрируется при токе дугового испарителя 60 А, что объясняется искажением углов связи атомов углерода в графитовых кластерах. Скорость формирования медной составляющей покрытия значительно превышает скорость формирования структуры углеродной матрицы. Поэтому углерод начинает диффундировать и расти между медными зёрнами. При

высоких значениях тока дугового испарителя (более 90 А) рост количества sp^2 связей определяется увеличением концентрации меди в покрытии, что подтверждается методом РФЭС (рисунок 2.3).

Медь является относительно инертным элементом по отношению к углероду, поэтому для дальнейшего исследования изменения состава химических связей и структуры углеродной матрицы анализировали изменение C1s состояния атомов углерода на поверхности (без травления) и в глубине слоя (время травления 2 минуты). Кроме того, химическая активность меди может приводить к формированию оксидов в объеме покрытий в результате взаимодействия с атмосферным кислородом, а также его диффузии из верхнего слоя.

На рисунках 2.4 и 2.5 приведены РФЭ спектры состояния углерода, полученные при разном времени травления, которые показывают изменение химического состава по глубине слоя. Спектры C1s состояния атомов углерода $a-Cu_{60A}/a-C(5...20):Cu_{60A}$ и $a-Cu_{90A}/a-C(5...20):Cu_{90A}$ покрытий с различной концентрацией меди представляют собой широкие пики асимметричной формы, которые могут быть разложены на три компонента с центрами при 284,5, 285,2 и 286,5–287,5 эВ и определяют такие типы связей атомов углерода, как Csp^2 (графит), Csp^3 (алмаз) и C – O соответственно [1], [7], [16].

Как видно из рисунков 2.4 и 2.5, интенсивность пика, ответственного за Csp^3 состояние атомов углерода в поверхностном слое покрытия, ниже, чем в объеме покрытия. Такое поведение параметров РФЭ спектров согласуется с результатами анализа КР спектров и указывает на влияние меди на процессы графитизации а-C слоя, вызванные как процессами взаимодействия в плазме, так и наличием меди. В качестве параметра, указывающего на изменение структурно-фазового состава покрытий, использовали значение Csp^2/Csp^3 отношения, определяемое как отношение интегральных интенсивностей соответствующих пиков (таблица 2.1).

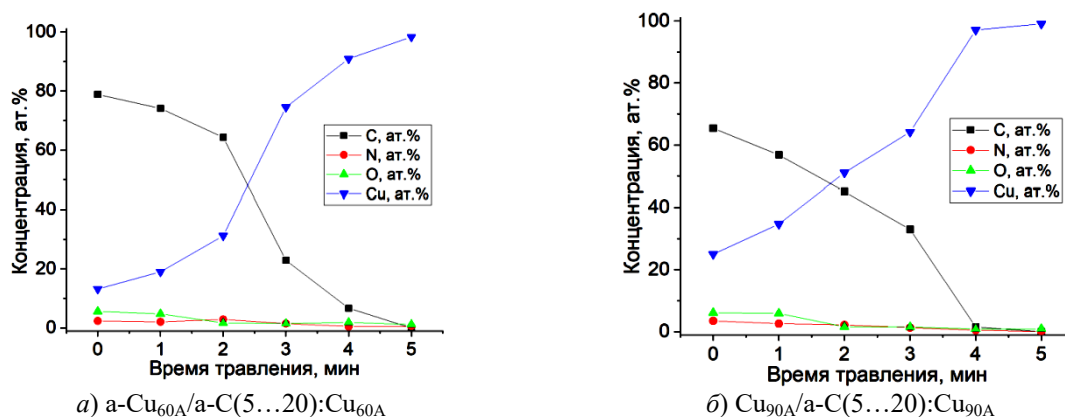


Рисунок 2.3 – Профиль распределения химических элементов по толщине покрытия

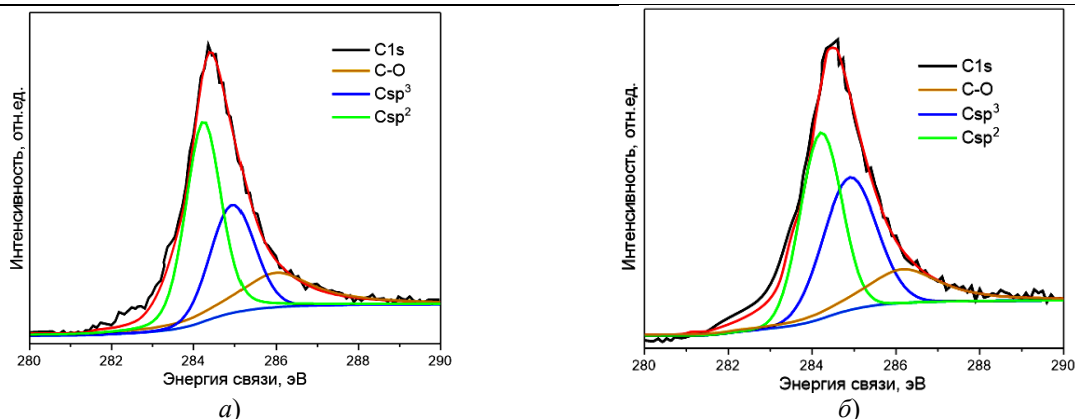


Рисунок 2.4 – Спектры C1s состояния атома углерода в а-Cu_{60A}/а-C(5...20):Cu_{60A} покрытии: а) на поверхности, б) после травления 2 минуты

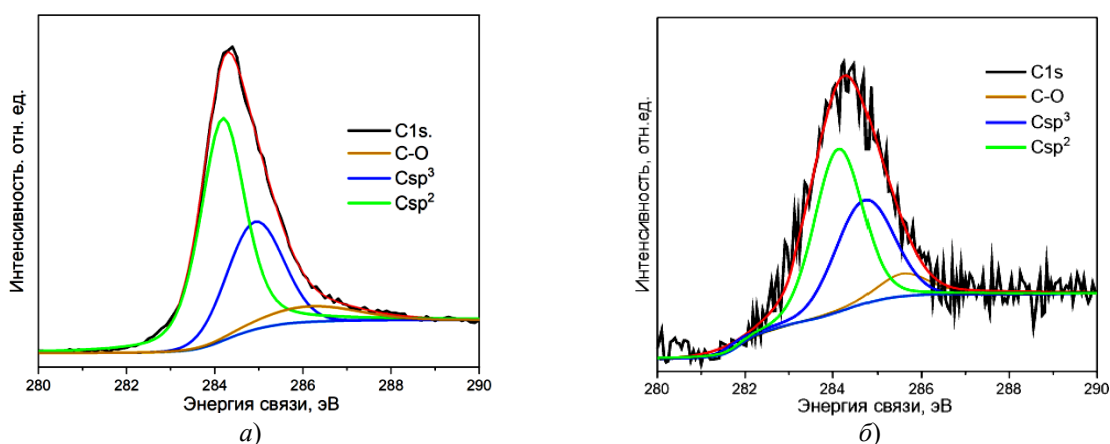


Рисунок 2.5 – Спектры C1s состояния атома углерода в а-Cu_{90A}/а-C(5...20):Cu_{90A} покрытии: а) на поверхности, б) после травления 2 минуты

Таблица 2.2 – Анализ РФЭ спектров C1s состояния атомов углерода

Покрытие	Csp ² /Csp ³ отношение	
	Поверхность	Травление 2 минуты
Cu _{60A} /а-C(5...20):Cu _{60A}	1,5	1,2
Cu _{90A} /а-C(5...20):Cu _{90A}	1,7	1,3

На рисунке 2.6 представлены АСМ изображения поверхности покрытий. Изображения фазового контраста характеризуют изменение механических свойств, в данном случае твердости, и позволяют качественно оценить их распределение на поверхности медной и углеродной составляющей покрытий. Согласно представленным изображениям, углерод находится на поверхности покрытия в виде сплошной матрицы (на снимке углерод представлен более светлыми участками поверхности).

Медь на поверхности покрытия содержится в виде самостоятельной фазы, образуя несвязанные с углеродом единичные включения размером от 100 до 500 нм. Можно отметить, что с ростом тока дугового испарителя до 80–90 А наблюдается увеличение количества частиц на поверхности, что связано с локальным перегревом поверхностных слоев катода, последующим

формированием капельной фазы в потоке испаряемого материала и, несмотря на наличие магнитной сепарации, их захват и транспортировка в потоке ионов меди, с последующим закреплением на поверхности покрытия.

Параметры поверхностной морфологии (шероховатость и размер зерна) определяли в результате обработки АСМ изображений, полученных с площадки размером 4×4 мкм и 30×30 мкм и представленных в таблицах 2.2 и 2.3 соответственно. С ростом тока дугового испарителя от 60 А до 90 А, а также с увеличением содержания углерода на поверхности покрытия, поверхность покрытия становится более развитой, ее формирование зависит как от условий генерации ионных потоков углерода и металла (ток дуги и плотность потока), так и от эффективности сепарации потока металлической плазмы [18], [19].

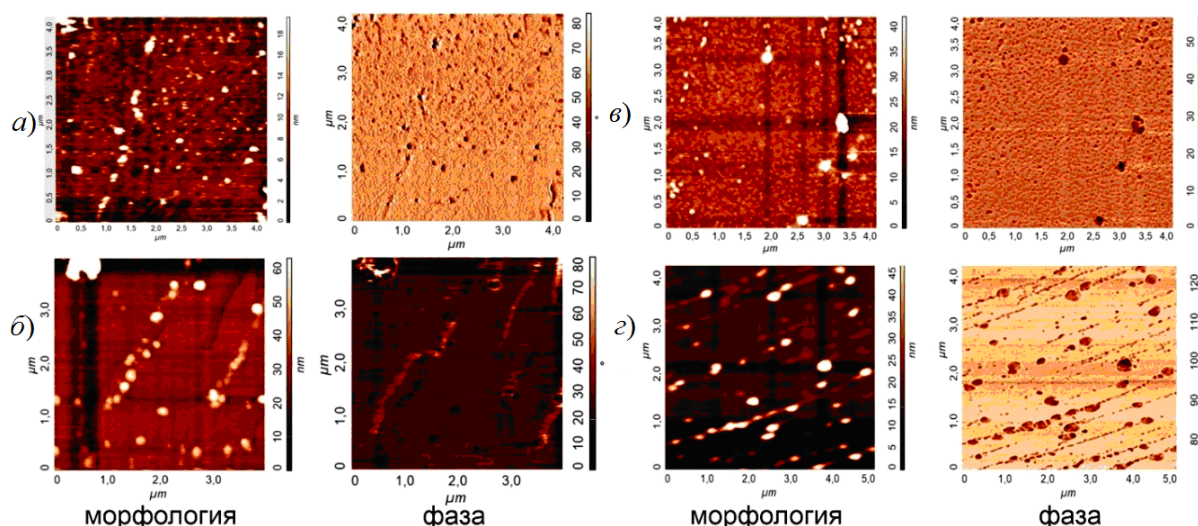


Рисунок 2.6 – АСМ изображения поверхности покрытий:
 а) $\text{Cu}_{60\text{A}}/\text{a-C}(5\dots20):\text{Cu}_{60\text{A}}$, б) $\text{Cu}_{70\text{A}}/\text{a-C}(5\dots20):\text{Cu}_{70\text{A}}$, в) $\text{Cu}_{80\text{A}}/\text{a-C}(5\dots20):\text{Cu}_{80\text{A}}$, г) $\text{Cu}_{90\text{A}}/\text{a-C}(5\dots20):\text{Cu}_{90\text{A}}$

Таблица 2.3 – Параметры поверхностной морфологии приведены в таблице

Покрытие	Шероховатость RMS, нм	Шероховатость Ra, нм	Размер зерна $D_{\text{ср}}$, нм
$\text{Cu}_{60\text{A}}/\text{a-C}(5\dots20):\text{Cu}_{60\text{A}}$	3,9	1,8	9,1
$\text{Cu}_{70\text{A}}/\text{a-C}(5\dots20):\text{Cu}_{70\text{A}}$	1,9	1,5	4,8
$\text{Cu}_{80\text{A}}/\text{a-C}(5\dots20):\text{Cu}_{80\text{A}}$	2,3	1,1	5,7
$\text{Cu}_{90\text{A}}/\text{a-C}(5\dots20):\text{Cu}_{90\text{A}}$	1,7	1,4	6,8

Таблица 2.4 – Параметры поверхностной морфологии приведены в таблице

Покрытие	Шероховатость RMS, нм	Шероховатость Ra, нм	Размер зерна $D_{\text{ср}}$, нм
$\text{Cu}_{60\text{A}}/\text{a-C}(5\dots20):\text{Cu}_{60\text{A}}$	6,4	3,8	16,1
$\text{Cu}_{70\text{A}}/\text{a-C}(5\dots20):\text{Cu}_{60\text{A}}$	6,1	3,7	38,1
$\text{Cu}_{80\text{A}}/\text{a-C}(5\dots20):\text{Cu}_{80\text{A}}$	15,3	13,7	15,7
$\text{Cu}_{90\text{A}}/\text{a-C}(5\dots20):\text{Cu}_{90\text{A}}$	10,3	7,2	24,7

Как видно из таблицы 2.3, параметры поверхностной шероховатости вне областей с высоким содержанием макрочастиц на поверхности достаточно низкие и определяют параметры углеродной матрицы.

Результаты анализа участка поверхности размером 30×30 мкм позволяют оценить параметры поверхностной морфологии на микроуровне. Установлено, что при токе дуги 80 А эффективность работы сепаратора снижается по сравнению с током дуги 90 А, что приводит к увеличению в потоке количества макрочастиц меди и, как следствие этого, поверхностной шероховатости (таблица 2.4).

Сравнивая результаты, приведенные в таблицах 2.3 и 2.4, можно сделать вывод, что на макроуровне (площадь сканирования 30×30 мкм) параметры поверхностной морфологии преимущественно зависят от режима генерации металлического потока и определяются условиями конденсации медной компоненты покрытия и эффективностью работы сепаратора.

Также, согласно таблице 2.1, с ростом тока дуги происходит уменьшение размера графитовых кластеров L_a , что может быть связано с особенностями осаждения и роста углеродной компоненты покрытия. В соответствии с [18] углерод, который не имеет растворимости в меди, осажаясь по границам зерен меди, препятствует формированию крупных кристаллитов Cu , формируя при этом графитовые кластеры с минимальным размером.

Результаты исследования механических свойств приведены на рисунке 2.7. Показано, что значения твердости и модуля упругости отдельных слоев покрытия зависят от распределения в нем меди. Согласно результатам исследований, выполненных методом РФЭ и КР спектроскопии, увеличение концентрации углерода в покрытии приводит к формированию наноконпозиционной структуры с малым размером зерна, как графита, так и меди, что и определяет увеличение их твердости.

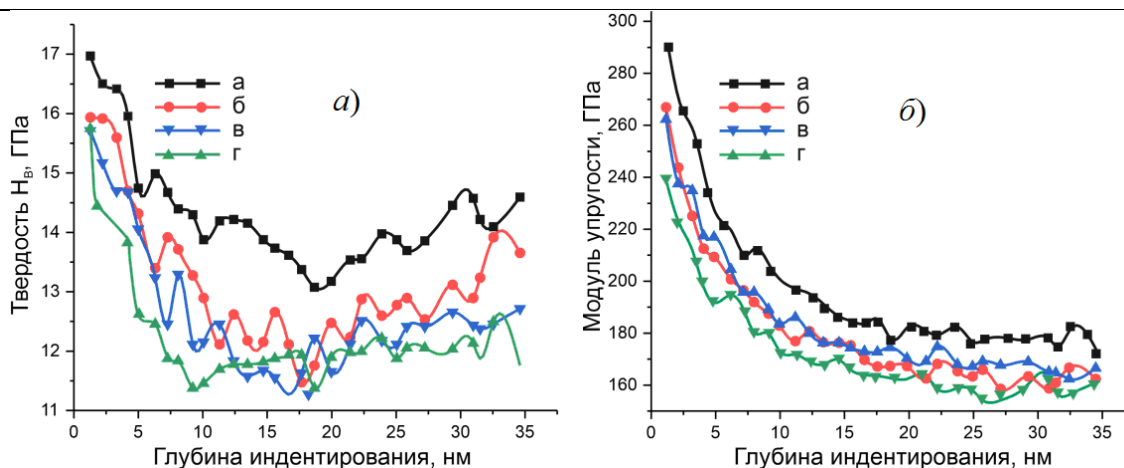


Рисунок 2.7 – Распределение твердости (а) и модуля упругости (б) по глубине покрытий:

а – $\text{Cu}_{60\text{A}}/\text{a-C}(5\dots20):\text{Cu}_{60\text{A}}$; б – $\text{Cu}_{70\text{A}}/\text{a-C}(5\dots20):\text{Cu}_{70\text{A}}$;
 в – $\text{Cu}_{80\text{A}}/\text{a-C}(5\dots20):\text{Cu}_{80\text{A}}$; г – $\text{Cu}_{90\text{A}}/\text{a-C}(5\dots20):\text{Cu}_{90\text{A}}$

Заключение

Предложена методика формирования композиционных медь-углеродных покрытий с контролируемым химическим, структурно-фазовым составом по толщине покрытия. Показано, что распределение углерода и меди по толщине покрытия определяется режимами формирования как углеродной, так и медной компонент покрытия. Установлено, что, изменяя частоту импульсов генератора углеродной плазмы, при постоянном потоке ионов меди возможно изменять как элементный состав покрытия, так и отношения $\text{Csp}^3/\text{Csp}^2$ фаз в объеме покрытия. Исследования структурно-фазового состава, выполненные методом КР и РФЭ спектроскопии, показали, что увеличение концентрации меди приводит к уменьшению размеров Csp^2 кластеров и увеличению степени их упорядочения в покрытии, стимулирует графитизацию углеродной матрицы. Методом атомно-силовой микроскопии определена морфология поверхности сформированных медь-углеродных покрытий. В режиме фазового контраста проанализировано изменение фазового состава медь-углеродных слоев, осажденных на поверхности меди. Установлено, что твердость и упругость покрытий снижаются с увеличением глубины индентирования, что находится в соответствии с изменением их структуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нанокomпозиционные покрытия и технологии в микроэлектронике* / В.А. Емельянов, А.В. Рогачев, Н.Н. Федосенко, Д.Г. Филиппов. – Минск: Беларус. навука, 2014. – 410 с.
2. *Матюшков, В.Е.* Материалы и покрытия, содержащие углеродные наночастицы / В.Е. Матюшков, Э.М. Шпилевский // *Машиностроение и техносфера XXI века: Сб. трудов XII Международной научно-технической конференции,*

ДонНТУ, Донецк, 12-17 сент. 2005 г.; в 5-ти томах. – Донецк: ДонНТУ, 2005. – Т. 4. – С. 220–226.

3. *Шпилевский, Э.М.* Металл-фуллереновые материалы и структуры / Э.М. Шпилевский // *Высокие технологии в промышленности России: материалы XI Международной научно-технической конференции, Москва, 8-10 сентября 2005 г.* – Москва: ОАО ЦНИТИ – ТЕХНОМАШ. – 2005. – С. 122–130.

4. *Композиционные углеродные покрытия, осажденные из импульсной катодной плазмы* / Д.Г. Филиппов [и др.]; под ред. А.В. Рогачева. – Москва: Радиотехника, 2020. – 283 с.

5. *Electrodeposition of Ag-doped diamond-like carbon films on stainless steel for supercapacitor applications* / S. Buathong [et al.] // *Journal of Alloys and Compounds.* – 2025. – Vol. 1010. – P. 177942.

6. *Formation of Nanostructured Coating Based on the Amorphous Carbon Matrix and Silver Nanocrystallites* / A. Kolpakov [et al.] // *Journal of nano- and electronic physics.* – 2016. – Vol. 8, № 4 (1). – P. 04019.

7. *Stanishevsky, A.* Fabrication, characterization, and postprocessing of cathodic-arc-derived hydrogen-free tetrahedral amorphous carbon / A. Stanishevsky // *Handbook of surfaces interfaces of materials: in 5 vol.: ed. H.S. Nalwa.* – Burlington, 2001. – Vol. 4: Solid thin films and layers. – P. 282–334.

8. *Станишевский, А.В.* Углеродные пленки, полученные импульсной конденсацией в вакууме / А.В. Станишевский, Э.И. Тоцицкий // *Письма в журнал технической физики.* – 1990. – Т. 16, № 19. – С. 76–78.

9. *Градиентные антифрикционные серебряно-алмазные покрытия* / М.В. Ненашев [и др.] // *Известия Самарского научного центра Российской академии наук.* – 2011. – Т. 13, № 4 (3). – С. 824–828.

10. Улучшение показателей адгезии между подложкой и покрытием реставрационных интрузивных слоев / И.Ф. Прогалянский [и др.] // Вестник Новгородского государственного университета. – 2014. – № 81. – С. 81–84.

11. Исследование особенностей микроструктуры, механических свойств и термической стабильности нанокompозитных покрытий на основе аморфного углерода / А.В. Андреев [и др.] // Перспективные материалы с иерархической структурой для новых технологий и надежных конструкций: материалы Международной конференции. – Томск, 21-25 сентября 2015 г. – С. 438–439.

12. Tuinstra, F. Raman spectrum of graphite / F. Tuinstra, J.L. Koenig // J. of Chem. Phys. – 1970. – Vol. 53, № 3. – P. 1126–1130.

13. Quantitative measurements of sp^3 content in DLC films with Raman spectroscopy / W.G. Cui [et al.] // Surface and Coatings Technology. – 2010. – Vol. 205. – P. 1995–1999.

14. Highly radiation-stable DLC coatings for a new class of detectors: Structural and morphological features / A. Serra [et al.] // Vacuum. – 2024. – Vol. 225. – P. 113221.

15. Механические свойства легированных медью углеродных покрытий, осажденных из импульсной катодной плазмы / Д.Г. Пилипцов [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 3 (4). – С. 25–30.

16. Wu, W.-Y. Growth and characteristics of metal-containing diamond-like carbon using a self-

assembled process / W.-Y. Wu, J.-M. Ting // Carbon. – 2006. – Vol. 44, № 7. – P. 1210–1217.

17. Mechanical properties and Raman spectra of tetrahedral amorphous carbon films with high sp^3 fraction deposited using a filtered cathodic arc / S. Xu [et al.] // Philos. Mag. B. – 1997. – Vol. 76, № 3. – P. 351–361.

18. Surface properties of copper-incorporated diamond-like carbon films deposited by hybrid magnetron sputtering / M.-Y. Tsai [et al.] // Ceramics Intern. – 2013. – Vol. 39, № 7. – P. 8335–8340.

19. Structure and optical properties of Cu-DLC composite films deposited by cathode arc with double-excitation source / B. Zhou [et al.] // Diamond and Related Materials. – 2016. – Vol. 69. – P. 191–197.

Материалы статьи подготовлены при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Т24КИ-012 от 01.03.2024 г).

Поступила в редакцию 15.01.2025.

Информация об авторах

Руденков Александр Сергеевич – к.ф.-м.н., доцент

Ванг Цзинцзе – магистрант

Рогачев Александр Владимирович – чл.-корр. НАН Беларуси, д.х.н., профессор

Лю Джубо – к.т.н., доцент

Пилипцов Дмитрий Геннадьевич – д.т.н., доцент

Кулеши Екатерина Александровна – старший преподаватель

Купо Александр Николаевич – к.т.н., доцент

УДК 537.876:621.3

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_51
EDN: CJVZWE

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДНК-ПОДОБНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ И ВЫЧИСЛЕНИЕ УСРЕДНЕННЫХ АКТИВНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ И ЕМКОСТЕЙ НУКЛЕОТИДОВ И ВОДОРОДНЫХ СВЯЗЕЙ

И.В. Семченко¹, Е.Д. Пискунова², А.Л. Самофалов², П.В. Сомов²

¹ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника», Минск

²Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

MODELLING OF DNA-LIKE ELECTRICAL CIRCUIT AND CALCULATION OF THE AVERAGE ACTIVE RESISTANCES AND CAPACITANCES OF NUCLEOTIDES AND HYDROGEN BONDS

I.V. Semchenko¹, E.D. Piskunova², A.L. Samofalov², P.V. Somov²

²SSPA “Optics, Optoelectronics and Laser Technology”, Minsk

²Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Проведен расчет усредненных активных сопротивлений и емкостей нуклеотидов и водородных связей в молекуле ДНК на основе сравнения теоретической модели с известными экспериментальными данными. Для исследования токов и напряжений на различных участках эквивалентной электрической схемы молекулы ДНК спроектирована цепь, аналогичная структуре молекулы ДНК в плане электропроводности. Показано, что для сегментов ДНК, состоящих из ста пятидесяти и более пар нуклеотидов, может быть применена модель бесконечной электрической цепи с повторяющимися звеньями.

Ключевые слова: молекула ДНК, нуклеотиды, водородные связи, электрическая цепь, электрическое сопротивление, электроемкость.

Для цитирования: Моделирование ДНК-подобной электрической цепи и вычисление усредненных активных сопротивлений и емкостей нуклеотидов и водородных связей / И.В. Семченко, Е.Д. Пискунова, А.Л. Самофалов, П.В. Сомов // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 51–57. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_51. – EDN: CJVZWE

Abstract. The average active resistances and capacitances of nucleotides and hydrogen bonds in the DNA molecule were calculated based on the comparison of the theoretical model with known experimental data. A circuit similar to the structure of the DNA molecule in terms of electrical conductivity was designed to study the currents and voltages at different parts of the equivalent electrical circuit of the DNA molecule. It is shown that for DNA segments consisting of one hundred fifty or more pairs of nucleotides, the model of an infinite electrical circuit with repeating links can be applied.

Keywords: DNA molecule, nucleotides, hydrogen bonds, electric circuit, electrical resistance, electrical capacity.

For citation: Modelling of DNA-like electrical circuit and calculation of the average active resistances and capacitances of nucleotides and hydrogen bonds / I.V. Semchenko, E.D. Piskunova, A.L. Samofalov, P.V. Somov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 51–57. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_51 (in Russian). – EDN: CJVZWE

Введение

Молекула ДНК представляет интерес не только в качестве хранителя генетической информации, но и как наноразмерный элемент электрических цепей нового поколения. Из результатов экспериментов следует, что водородные связи между парами оснований передают электрические импульсы, но не пропускают постоянный ток между ними, что является типичным свойством электрических конденсаторов. Следовательно, структуру ДНК можно смоделировать как схему, состоящую из цепей, содержащих эффективные резисторы и конденсаторы. В работе предложена эквивалентная электрическая схема молекулы ДНК как наноразмерного

проводника, которая в первом приближении описывает перенос носителей заряда вдоль двойной спирали. В настоящее время не сделан четкий вывод об электрической проводимости молекулы ДНК, поскольку она проявляет очень разные проводящие свойства в различных условиях, подобно изолятору, проводнику или полупроводнику. Поэтому в статье используется модель ДНК-подобной спирали как электрического проводника, которая может послужить основой для дальнейших более углубленных исследований и сравнения с экспериментальными данными.

1 Теоретические сведения

В настоящее время функциональные нанопроводники и наноэлектроника весьма востребованы для применения в интегральных схемах следующего поколения, но использование большинства наноразмерных устройств в больших масштабах ограничивается рядом проблем. ДНК обладает большим потенциалом для применения в качестве молекулярного наноразмерного проводника благодаря хорошему качеству синтеза, высокой степени очистки, близкой к единице, и наноразмерной самоорганизации. Тем не менее, отсутствует полное понимание процесса переноса заряда в основном состоянии (В-форма) молекулы ДНК для электронных конфигураций в биологически подходящих условиях, где сохраняется полностью парная двуспиральная структура.

Экспериментальная часть работы [1], с результатами которой ведется сравнение в данной статье, заключается в следующем: были проведены исследования процесса переноса заряда в двуцепочечных монослоях ДНК, помещенных на золотой подложке. С помощью окислительно-активного зонда измерялась сила тока в различных парах азотистых оснований (в том числе в первой и семнадцатой паре) для одной и той же молекулы ДНК, то есть при неизменной последовательности нуклеотидов. Эксперимент проходил в строго контролируемых температурных условиях. Измерения выполнялись при помощи циклической и прямоугольной вольтамперометрии. Полученные результаты использовались для оценки скорости переноса заряда и подвижности носителей. Установлено, что скорость переноса заряда зависит от температуры и имеет обратную зависимость от расстояния, что согласуется со скачкообразным механизмом переноса. Эти результаты устанавливают основные факторы скорости передачи заряда и подвижности носителей в молекулярных ДНК-проводниках, определяя их последующие применения для наноразмерной электроники [1].

В статье [1] молекула ДНК рассматривается как нелинейный полупроводник с прыжковым механизмом переноса заряда. Установлено, что энергия активации переноса заряда в таком полупроводнике зависит от длины рассматриваемого сегмента, что не характерно для обычных полупроводников. Энергия активации принимает значения от 74 до 144 миллиэлектронвольт, при этом она зависит от длины исследуемого сегмента немонотонным образом, сначала увеличиваясь для пар оснований с номерами 4, 9 и 13, а затем уменьшаясь для пары оснований с номером 17. Такая немонотонная зависимость энергии активации переноса заряда требует дополнительного обоснования.

В статье [1] делается вывод, что полученные экспериментальные результаты больше соответствуют модели прыжкового механизма пе-

реноса заряда, чем модели туннельного переноса заряда. Хотя подробное исследование проводимости в зависимости от частоты тока не проводилось, в статье [1] отмечено, что при вольтамперометрии с использованием прямоугольных импульсов результат очень чувствителен к выбору частоты импульсов, которая была равна 40 Гц. Для циклической вольтамперометрии с эффективной частотой 0,05 Гц максимальная измеренная сила тока существенно отличалась, приблизительно в 77 раз, по сравнению с квадратно-волновой вольтамперометрией. Однако хорошо известно, что для прыжкового механизма переноса заряда, которому в статье [1] отдаётся предпочтение, в низкочастотном пределе проводимость полупроводника не зависит от частоты [2]–[4]. Указанные обстоятельства приводят к необходимости разработки новых, дополнительных моделей электропроводности ДНК, в том числе с учётом активных сопротивлений и емкостей нуклеотидов и водородных связей.

Молекула ДНК может быть охарактеризована колебательным контуром, состоящим из блоков, где каждая пара оснований и водородная связь обладают активным сопротивлением и емкостью. Такая схема объясняет перенос заряда в ДНК как на малые, так и на большие расстояния в хорошем согласии с экспериментальными данными, которые привели к идентификации так называемых механизмов суперобмена и многоступенчатого перехода. Однако, в отличие от случайных скачкообразных событий и суперобмена, схема отражает четко определенный механизм переноса заряда, подтверждающий большую надежность генетического вещества в доставке электронов [5]. Проводящие свойства молекулы ДНК представляют интерес не только в связи с возможными использованиями макромолекулы в наноструктурах, но и в плане анализа вредных факторов, которые могут привести к повреждению ДНК. Поэтому электропроводность молекулы ДНК и ее механизмы продолжают привлекать внимание исследователей [6]–[25], но они еще не полностью изучены. Водяная оболочка, в которой находится молекула ДНК, может привести к возрастанию электропроводности макромолекулы. Электропроводящие свойства молекулы ДНК должны быть тщательно изучены и учтены, наряду с другими физическими свойствами, в связи с перспективой использования ДНК в качестве элемента нанопроводящих устройств. Наличие проводящих свойств молекулы ДНК было предсказано на основании теоретических исследований в работе [26]. Затем в статье [27] была рассмотрена роль переноса заряда в биохимических процессах клетки, таких как репликация, транскрипция и репарация ДНК. Информация об открытии быстрого переноса заряда между донором и акцептором в молекуле ДНК была опубликована в работе [28]. В результате

возникла нанобиоэлектроника как новое направление исследований, которое представляет собой совершенствование молекулярной электроники и использует ДНК, с учетом ее проводящих свойств, в новых микроэлектронных устройствах [29]–[31]. В случае биомолекул, включая ДНК, с целью анализа проблемы переноса заряда могут быть использованы различные модели и взаимодополняющие методы теоретического исследования. В ряде работ применяется основное уравнение [32] и уравнение матрицы плотности в формах Редфилда [33] и Линдблада [34], [35]. В основу используемых методов могут быть положены также численные решения квантовых моделей, в том числе с учетом эффектов многочастичного взаимодействия заряженного носителя со средой. При этом принимаются во внимание молекулярные колебания и, возможно, другие степени свободы окружающего вещества [36]–[38]. Отметим, что механизмы проводимости молекулы ДНК и их детали в нашей статье рассматриваются, в основном, в обзорном плане.

2 Расчет и моделирование

Структуру молекулы ДНК в расплетенном виде визуально можно представить в виде блочной конструкции, у которой в роли каркасных, ведущих элементов выступают азотистые основания, или нуклеотиды, а поперечными соединительными элементами являются водородные связи (рисунок 2.1). Рассмотрим эти азотистые основания и водородные связи как резисторы и конденсаторы с некоторым эффективным сопротивлением и электрической емкостью. В рамках приближенных вычислений предполагается, что все нуклеотиды имеют одинаковый усредненный импеданс, включающий в себя активное и емкостное сопротивление, и все водородные связи – также одинаковый усредненный импеданс. Такой подход является приближенным, поскольку молекула ДНК содержит четыре типа нуклеотидов, каждый из которых может иметь свое активное сопротивление и электроемкость. Аналогично, водородные связи могут иметь различные электрические характеристики, зависящие от типов соединяемых нуклеотидов. Однако молекула ДНК имеет очень большую длину и может содержать десятки тысяч пар азотистых оснований. Для такой длинной электрической цепи главную роль играют именно усредненные значения сопротивлений и емкостей нуклеотидов и водородных связей между ними. Ниже в статье показано, что для фрагментов ДНК, состоящих из ста пятидесяти и более пар нуклеотидов, с учетом ослабления электрического тока вдоль нитей, может быть применена модель очень длинной (в пределе – бесконечной) электрической цепи с повторяющимися звеньями. Такая длинная электрическая цепь может быть охарактеризована усредненными эффективными значениями со-

противлений и емкостей азотистых оснований и водородных связей. Цель статьи – найти значения импедансов, позволяющие в первом приближении получить значения силы тока на различных нуклеотидах и для различных частот переменного тока, измеренные в эксперименте [1].

Эквивалентная электрическая схема молекулы ДНК показана на рисунке 2.1.

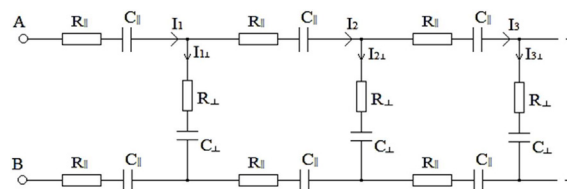


Рисунок 2.1 – ДНК-подобная электрическая цепь

Здесь $R_{||}$ и $C_{||}$ – усредненные эффективные значения активного сопротивления и емкости нуклеотидов, R_{\perp} и C_{\perp} – усредненные эффективные значения активного сопротивления и емкости водородных связей.

Данная цепь может быть представлена в эквивалентном виде с использованием комплексных импедансов нуклеотидов и водородных связей (рисунок 2.2).

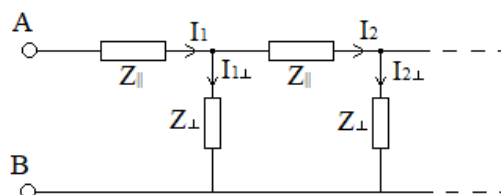


Рисунок 2.2 – Эквивалентный вид ДНК-подобной электрической цепи, характеризуемой комплексными импедансами

Поскольку два резистора $R_{||}$ и две емкости $C_{||}$ соединены последовательно в каждом замкнутом контуре, комплексные импедансы принимают вид

$$Z_{||} = 2 \left(R_{||} - i \frac{1}{\omega C_{||}} \right), \quad Z_{\perp} = R_{\perp} - i \frac{1}{\omega C_{\perp}}, \quad (2.1)$$

где i – мнимая единица.

Используя метод, применяемый в сборнике задач И.Е. Иродова [39] для расчета бесконечных цепей, получаем полный импеданс очень длинной ДНК-подобной цепи

$$Z_{AB} = Z_{\infty} = \frac{Z_{||}}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4Z_{\perp}}{Z_{||}}} \right). \quad (2.2)$$

Эта формула позволяет найти силу тока в первом азотистом основании, ближайшем к источнику тока, который создает напряжение между нитями, равное U_{AB} :

$$I_1 = \frac{U_{AB}}{Z_{AB}}. \quad (2.3)$$

Если выполняется неравенство

$$|Z_{\perp}| \gg |Z_{\parallel}|, \quad (2.4)$$

которое может выполняться для ДНК-подобной цепи, и подтверждается данными, приведенными ниже, то выражение для полного импеданса (2.2) принимает вид

$$Z_{AB} = Z_{\infty} \approx \sqrt{Z_{\parallel} Z_{\perp}}. \quad (2.5)$$

Рассчитывая последовательно токи в каждом следующем звене ДНК-подобной цепи и используя неравенство (2.4), получаем приближенную формулу для силы тока в нуклеотиде с номером k :

$$I_k \approx I_1 \left(1 - (k-1) \sqrt{\frac{Z_{\parallel}}{Z_{\perp}}} \right), \quad (2.6)$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$ – номер звена цепи, при этом отсчет ведется от точки приложения напряжения. Сила тока в первом звене I_1 вычисляется по формулам (2.1)–(2.5). Аналогично, при выполнении неравенства (2.4), сила тока в водородной связи звена с номером k равна

$$I_{k\perp} \approx I_1 \sqrt{\frac{Z_{\parallel}}{Z_{\perp}}}. \quad (2.7)$$

В статье [1] в процессе эксперимента изменены значения силы тока в первом $I_1^{(1)}$ и семнадцатом $I_{17}^{(1)}$ нуклеотидах выбранного сегмента молекулы ДНК для одной частоты электрического тока $\nu_1 = 40$ Гц, а также значения силы тока в этих же нуклеотидах $I_1^{(2)}$ и $I_{17}^{(2)}$ того же сегмента ДНК для другой частоты $\nu_2 = 0,05$ Гц. Используя формулы (2.3)–(2.5), получаем следующее выражение

$$\frac{|Z_{\parallel}^{(1)}| \cdot |Z_{\perp}^{(1)}|}{2|I_1^{(1)}|^2} = \frac{|U_1|^2}{2|I_1^{(1)}|^2}, \quad (2.8)$$

где индекс в скобках обозначает первую частоту тока, U_1 – напряжение, создаваемое источником. Такая же формула справедлива для второй частоты. Далее, находя отношение электрических

токов в различных нуклеотидах на двух частотах, получаем выражения для параметров ДНК-подобной электрической цепи

$$C_{\parallel} \approx \frac{\sqrt{\nu_1^2 - \nu_2^2}}{\pi \nu_1 \nu_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{|Z_{\parallel}^{(2)}|^2 - |Z_{\parallel}^{(1)}|^2}}, \quad (2.9)$$

$$C_{\perp} \approx \frac{\sqrt{\nu_1^2 - \nu_2^2}}{\pi \nu_1 \nu_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{|Z_{\perp}^{(2)}|^2 - |Z_{\perp}^{(1)}|^2}}, \quad (2.10)$$

$$R_{\parallel} \approx \frac{1}{2} \sqrt{|Z_{\parallel}^{(1)}|^2 - \frac{1}{\pi^2 \nu_1^2 C_{\parallel}^2}}, \quad (2.11)$$

$$R_{\perp} \approx \sqrt{|Z_{\perp}^{(1)}|^2 - \frac{1}{4\pi^2 \nu_1^2 C_{\perp}^2}}. \quad (2.12)$$

Здесь $Z_{\parallel}^{(1)}$ и $Z_{\perp}^{(1)}$ – импедансы для первой частоты тока; $Z_{\parallel}^{(2)}$ и $Z_{\perp}^{(2)}$ – импедансы для второй частоты. Значения, полученные из формул (2.9)–(2.12), далее играют роль первого шага в процессе моделирования ДНК-подобной цепи.

Используя экспериментальные данные из статьи (2.1) и аналитические расчеты, проведено численное моделирование и анализ электрической эквивалентной схемы в программе Micro-Cap. В результате получены усредненные значения сопротивлений и емкостей для нуклеотидов и водородных связей: $R_{\parallel} = 6 \cdot 10^3$ Ом, $R_{\perp} = 1,1 \cdot 10^6$ Ом, $C_{\parallel} = 46 \cdot 10^{-6}$ Ф, $C_{\perp} = 3,6 \cdot 10^{-9}$ Ф, при которых значения силы тока в различных звеньях цепи приблизительно соответствуют экспериментальным данным.

На рисунке 2.3 представлены результаты моделирования и анализа бесконечной эквивалентной цепи в программе Micro-Cap для частоты $\nu_1 = 40$ Гц. Значения токов на схеме указаны в микро- (мА) и наноамперах (нА). Как показывают расчеты, модель бесконечной цепи можно использовать, если сегмент ДНК-подобного проводника содержит более ста пятидесяти пар нуклеотидов. Для такой длинной цепи сила тока в ее элементах практически не изменяется при изменении числа звеньев.

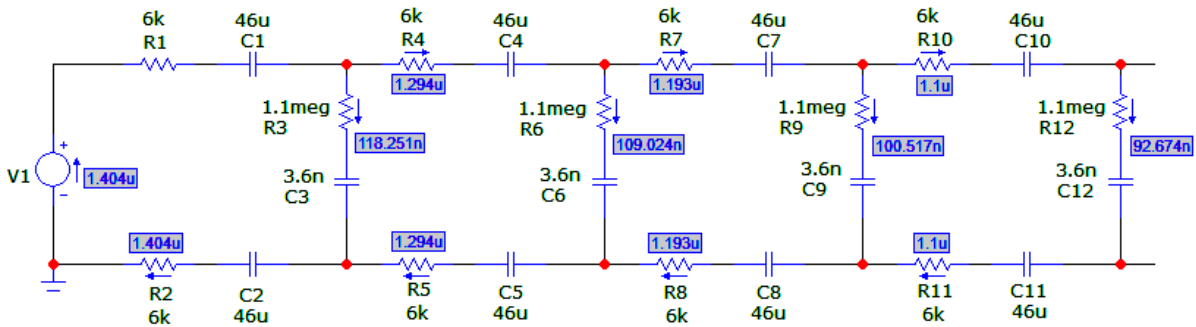


Рисунок 2.3 – Результаты моделирования и анализа электрической схемы для частоты тока $\nu_1 = 40$ Гц

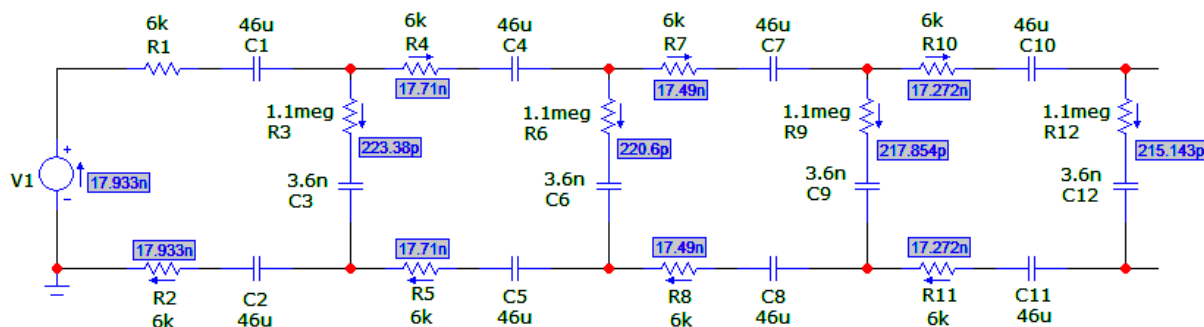


Рисунок 2.4 – Результаты моделирования и анализа электрической схемы для частоты тока $\nu_2 = 0,05$ Гц

Таблица 2.1 – Сравнение экспериментальных и рассчитанных значений силы тока в нуклеотидах для двух частот

Частота	$\nu_1 = 40$ Гц	$\nu_2 = 0,05$ Гц
Сила тока при моделировании	$I_{1(\text{модел})} = 1404$ (нА)	$I_{1(\text{модел})} = 17,9$ (нА)
	$I_{17(\text{модел})} = 382,6$ (нА)	$I_{17(\text{модел})} = 14,7$ (нА)
Сила тока в эксперименте	$I_{1(\text{экспер})} = 1400$ (нА)	$I_{1(\text{экспер})} = 18$ (нА)
	$I_{17(\text{экспер})} = 350$ (нА)	$I_{17(\text{экспер})} = 15$ (нА)

На рисунке 2.4, представлены результаты для аналогичной схемы, но уже для другой частоты $\nu_2 = 0,05$ Гц.

Значения токов, полученные в эксперименте в статье [1] и в результате моделирования, представлены в таблице 2.1 для более наглядного сравнения.

Установлено, что погрешности полученных результатов не превышают 9 процентов для всех значений токов.

Таким образом, значения активного сопротивления и емкостей нуклеотидов, усредненные для четырех типов нуклеотидов, равны $R_{\text{нукл}} = 6 \cdot 10^3$ Ом, $C_{\text{нукл}} = 46 \cdot 10^{-6}$ Ф. Аналогично, усредненные значения активного сопротивления и емкостей водородных связей равны $R_{\text{водор. связь}} = 1,1 \cdot 10^6$ Ом, $C_{\text{водор. связь}} = 3,6 \cdot 10^{-9}$ Ф.

Используя найденные значения активного сопротивления и емкостей нуклеотидов и водородных связей, можно на основе формул (2.1)–(2.5) вычислить импеданс очень длинной молекулы ДНК. Например, для частоты $\nu_1 = 40$ Гц модуль импеданса равен $|Z_{\infty}^{(1)}| \approx 97 \cdot 10^3$ Ом. Аналогично, для частоты $\nu_2 = 0,05$ Гц модуль импеданса очень длинной молекулы ДНК равен $|Z_{\infty}^{(2)}| \approx 7,9 \cdot 10^6$ Ом.

Отметим, что при увеличении длины ДНК-подобной цепи ее импеданс уменьшается. Например, для частоты $\nu_1 = 40$ Гц импеданс бесконечно длинной цепи меньше импеданса ее одного звена приблизительно в 16 раз. Аналогично, для частоты $\nu_2 = 0,05$ Гц импеданс очень длинной молекулы ДНК меньше импеданса одной пары нуклеотидов и их водородной связи приблизительно в 112 раз.

Найденные усредненные значения активных сопротивлений и емкостей нуклеотидов и водородных связей могут быть в дальнейшем использованы при проектировании наноразмерных электрических схем на основе молекулы ДНК.

Заключение

Предложена упрощенная электрическая схема молекулы ДНК как наноразмерного проводника. Введено эффективное комплексное сопротивление, усредненное для всех нуклеотидов, а также эффективное комплексное сопротивление водородной связи между нуклеотидами, образующими пары. Получены выражения для полного сопротивления двойной спирали и для силы тока на различных участках ДНК, если электрическое напряжение приложено между двумя нитями. Вычислены усредненные значения сопротивлений и емкостей нуклеотидов и водородных связей, которые могут быть в дальнейшем использованы при проектировании наноразмерных электрических схем, состоящих из сегментов молекулы ДНК.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wohlgamuth, C.H. DNA as a molecular wire: Distance and sequence dependence / C.H. Wohlgamuth, M.A. McWilliams, J.D. Slinker // Analytical chemistry. – 2013. – Т. 85, № 18. – P. 8634–8640.
2. Dyre, J.C. Universality of ac conduction in disordered solids / J.C. Dyre, T.B. Schröder // Reviews of Modern Physics. – 2000. – Т. 72, № 3. – P. 873.
3. Dyre, J.C. Hopping models and ac universality / J.C. Dyre, T.B. Schröder // Physica Status Solidi (B). – 2002. – Vol. 230, № 1. – P. 5–13.

4. Поклонский, Н.А. Флуктуационная модель высокочастотной прыжковой электропроводности умеренно компенсированных полупроводников с водородоподобными примесями / Н.А. Поклонский, С.А. Вырко, А.Г. Забродский // Физика твердого тела. – 2005. – Т. 47, № 7. – С. 1195–1202.
5. Xu, K. Stepwise oscillatory circuits of a DNA molecule / K. Xu // Journal of biological physics. – 2009. – Vol. 35. – P. 223–230.
6. Eley, D.D. Semiconductivity of organic substances. Part 7. – The polyamides / D.D. Eley, D.I. Spivey // Transactions of the Faraday Society. – 1961. – Vol. 57. – P. 2280–2287.
7. Snart, R.S. The electrical properties and stability of DNA to UV radiation and aromatic hydrocarbons / R.S. Snart // Biopolymers: Original Research on Biomolecules. – 1973. – Vol. 12, № 7. – P. 1493–1503.
8. Tran, P. Charge transport along the λ -DNA double helix / P. Tran, B. Alavi, G. Gruner // Physical Review Letters. – 2000. – Vol. 85, № 7. – P. 1564.
9. Warman, J.M. DNA: a molecular wire? / J.M. Warman, M.P. de Haas, A. Rupprecht // Chemical physics letters. – 1996. – Vol. 249, № 5-6. – P. 319–322.
10. Dewarrat, F. Electric characterization of DNA: diss. / F. Dewarrat. – Basel University: Basel, Switzerland, 2002. – 96 p.
11. Fink, H.W. Electrical conduction through DNA molecules / H.W. Fink, C. Schönenberger // Nature. – 1999. – Vol. 398, № 6726. – P. 407–410.
12. Cai, L. Self-assembled DNA networks and their electrical conductivity / L. Cai, H. Tabata, T. Kawai // Applied Physics Letters. – 2000. – Vol. 77, № 19. – P. 3105–3106.
13. Electrical conduction through poly (dA)-poly (dT) and poly (dG)-poly (dC) DNA molecules / K.H. Yoo [et al.] // Physical review letters. – 2001. – Vol. 87, № 19. – P. 198102.
14. Direct measurement of electrical transport through DNA molecules / D. Porath [et al.] // Nature. – 2000. – Vol. 403, № 6770. – P. 635–638.
15. Proximity-induced superconductivity in DNA / A.Y. Kasumov [et al.] // Science. – 2001. – Vol. 291, № 5502. – P. 280–282.
16. Legrand, O. Single molecule study of DNA conductivity in aqueous environment / O. Legrand, D. Côte, U. Bockelmann // Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. – 2006. – Vol. 73, № 3. – P. 031925.
17. Insulating behavior of λ -DNA on the micron scale / Y. Zhang [et al.] // Physical Review Letters. – 2002. – Vol. 89, № 19. – P. 198102.
18. Conductivity of a single DNA duplex bridging a carbon nanotube gap / X. Guo [et al.] // Nature nanotechnology. – 2008. – Vol. 3, № 3. – P. 163–167.
19. Study on the conductivity of DNA molecules under magnetic fields / M. Gao [et al.] // 2021 IEEE International Conference on Manipulation, Manufacturing and Measurement on the Nanoscale (3M-NANO). – IEEE, 2021. – P. 134–137.
20. Electrons on the double helix: optical experiments on native DNA / E. Helgren [et al.] // arXiv preprint cond-mat/0111299. – 2001.
21. Electrical conductivity measurement of λ DNA molecules by conductive atomic force microscopy / Y. Wang [et al.] // Nanotechnology. – 2021. – Vol. 33, № 5. – P. 055301.
22. Mallajosyula, S.S. Toward DNA conductivity: a theoretical perspective / S.S. Mallajosyula, S.K. Pati // The Journal of Physical Chemistry Letters. – 2010. – Vol. 1, № 12. – P. 1881–1894.
23. Additive transport in DNA molecular circuits / T. Sebechlebská [et al.] // Journal of Materials Chemistry C. – 2022. – Vol. 10, № 33. – P. 12022–12031.
24. Wang, J. Electrical conductivity of double stranded DNA measured with ac impedance spectroscopy / J. Wang // Physical Review B – Condensed Matter and Materials Physics. – 2008. – Vol. 78, № 24. – P. 245304.
25. Charra, F. Organic Nanophotonics / F. Charra, V.M. Agranovich, F. Kajzar. – Springer Science & Business Media: Berlin, Germany, 2003. – 502 p.
26. Eley, D.D. Semiconductivity of organic substances. Part 9. Nucleic acid in the dry state / D.D. Eley, D.I. Spivey // Transactions of the Faraday Society. – 1962. – Vol. 58. – P. 411–415.
27. Demple, B. Repair of oxidative damage to DNA: enzymology and biology / B. Demple, L. Harrison // Annual review of biochemistry. – 1994. – Vol. 63, № 1. – P. 915–948.
28. Hall, D.B. Oxidative DNA damage through long-range electron transfer / D.B. Hall, R.E. Holmlin, J.K. Barton // Nature. – 1996. – Vol. 382, № 6593. – P. 731–735.
29. Petty, M.C. An Introduction to Molecular Electronics / M.C. Petty, M.R. Bryce, D. Bloor. – L.: Oxford University Press, 1995. – 387 p.
30. Baker, R.J. CMOS: Circuit Design, Layout, and Simulation / R.J. Baker. – New York: Wiley, 2008. – 1208 p.
31. Лахно, В.Д. Молекулярные устройства на основе ДНК. Нанобиоэлектроника / В.Д. Лахно, А.В. Винников // Препринты Института прикладной математики им. МВ Келдыша РАН. – 2018, № 137. – С. 26.
32. Petrov, E.G. Bridge mediated electron transfer: a unified description of the thermally activated and superexchange mechanisms / E.G. Petrov, Y.R. Zelinsky, V. May // The Journal of Physical Chemistry B. – 2002. – Vol. 106, № 12. – P. 3092–3102.
33. Electron transfer rates in bridged molecular systems 2. A steady-state analysis of coherent tunneling and thermal transitions / D. Segal [et al.] //

The Journal of Physical Chemistry B. – 2000. – Vol. 104, № 16. – P. 3817–3829.

34. *Alicki, R.* Quantum Dynamical Semigroups and Applications / R. Alicki, K. Lendi // Lect. Notes Phys. – 2007. – Vol. 717. – 129 p.

35. *Charge transport in molecular systems: A theoretical approach* / E.A. Weiss [et al.] // J. Chem. Phys. – 2006. – Vol. 124. – P. 074501.

36. *Lakhno, V.D.* Sequence dependent hole evolution in DNA / V.D. Lakhno // Journal of Biological Physics. – 2004. – Vol. 30. – P. 123–138.

37. *Фиалко, Н.С.* Перенос заряда в 1D-цепочке «донор-мостик-акцептор» при $T = 300$ К / Н.С. Фиалко, В.Д. Лахно // Препринты Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. – 2018. – № 77. – 17 с.

38. *Сюракшин, А.В.* Перенос заряда в молекуле ДНК в рамках простой модели открытой квантовой системы / А.В. Сюракшин, В.Д. Лахно, В.Ю. Юшанхай // Препринты Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. – 2021. – № 23. – 26 с.

39. *Иродов, И.Е.* Задачи по общей физике / И.Е. Иродов. – Москва: Наука, 1988. – 416 с.

Работа выполнена в рамках ГПНИ КОН-ВЕРГЕНЦИЯ-2025, подпрограмма «Междисциплинарные исследования и новые зарождающиеся технологии».

Поступила в редакцию 14.01.2025.

Информация об авторах

Семченко Игорь Валентинович – д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. НАН Беларуси

Пискунова Екатерина Дмитриевна – магистрантка

Самофалов Андрей Леонидович – к.ф.-м.н., доцент

Сомов Павел Владиславович – ассистент

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МЕТАМАТЕРИАЛА-ФАЗОМАНИПУЛЯТОРА С ПРИМЕНЕНИЕМ НЕЙРОСЕТЕВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

П.В. Сомов¹, А.Л. Самофалов¹, Ю.В. Никитюк¹,
С.А. Хахомов¹, И.В. Семченко², Даши Динг³

¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

²ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника», Минск

³Нанкинский университет науки и технологии

OPTIMIZATION OF METAMATERIAL PHASE MANIPULATOR PARAMETERS USING NEURAL NETWORK MODELING AND GENETIC ALGORITHM

P.V. Somov¹, A.L. Samofalov¹, Yu.V. Nikityuk¹,
S.A. Khakhomov¹, I.V. Semchenko², Dazhi Ding³

¹Francisk Skorina Gomel State University

²SSPA "Optics, Optoelectronics and Laser Technology", Minsk

³Nanjing University of Science and Technology

Аннотация. Для прогнозирования характеристик метаматериала-фазоманипулятора проведена оптимизация соответствующих параметров такого устройства с использованием искусственной нейронной сети и генетического алгоритма. Показано, что относительная погрешность определения значений исследуемых параметров не превысила 1% по сравнению со значениями, рассчитанными методом конечных элементов.

Ключевые слова: метаматериал, фазоманипулятор, планарная спираль, искусственные нейронные сети, генетический алгоритм.

Для цитирования: Оптимизация параметров метаматериала-фазоманипулятора с применением нейросетевого моделирования и генетического алгоритма / П.В. Сомов, А.Л. Самофалов, Ю.В. Никитюк, С.А. Хахомов, И.В. Семченко, Даши Динг // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 58–63. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_58. – EDN: CMNQKR

Abstract. To predict the characteristics of the metamaterial-phase-manipulator, the optimization of the relevant parameters of such a device was carried out using an artificial neural network and a genetic algorithm. It is shown that the relative error in determining the values of the investigated parameters did not exceed 1% compared to the values calculated by the finite element method.

Keywords: metamaterial, phase manipulator, planar spiral, artificial neural networks, genetic algorithms.

For citation: Optimization of metamaterial phase manipulator parameters using neural network modeling and genetic algorithm / P.V. Somov, A.L. Samofalov, Yu.V. Nikityuk, S.A. Khakhomov, I.V. Semchenko, Dazhi Ding // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 58–63. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_58. – EDN: CMNQKR

Introduction

Metamaterials and metasurfaces have significant scientific interest for many research groups around the world. These artificial structures possess unique properties not observed in natural materials: a negative refraction index, low diffraction limit of an object image, complete absorption in a specific frequency range, etc. [1]–[4].

Currently, artificial neural networks and genetic algorithms are successfully used in various fields of science and technology. Artificial neural networks provide the ability to find complex nonlinear dependencies in the studied functions of many arguments, which manifest when modeling the

interaction of electromagnetic waves with metamaterials. Genetic algorithms are a specific case of evolutionary methods based on collective learning within a population and imitating natural selection. Genetic algorithms provide the search for the best solutions by inheriting and enhancing the useful properties of many objects during the simulation of their evolution [5]–[11].

In this work, artificial neural networks and genetic algorithms are applied to predict and optimize the parameters of a metamaterial for the possibility of phase manipulation of electromagnetic waves when interacting with a metasurface based on planar resonators.

1 Modeling

The project of a metamaterial phase manipulator consisting of 25-paired planar spiral resonators located on a dielectric layer is built via Ansys HFSS software (Figure 1.1, a). The resonators are copper strips and cylinders connecting both sides of the structure. Each resonator also contains a varicap.

The metamaterial modeling was based on double-sided FR4 fiberglass with a core thickness of 1.5 mm and copper layers with a thickness of 35 microns. As a screen behind the metamaterial, a single-sided FR4 fiberglass surface was used with the same core and copper layer thickness.

The wavefront emitted by the metasurface with given radiation pattern diagram parameters (Figure 1.1, b) is formed due to the presence of a difference in wave paths or phase shift of the wave. This is achieved by changing the capacitance of the varicaps on neighboring resonators. By setting the capacitance value C of the varicaps in the first row (since in each row C is the same), and then in the next row according to the required phase difference, it is possible to control the tilt of the main lobe of the metamaterial's radiation pattern diagram in the XOZ plane.

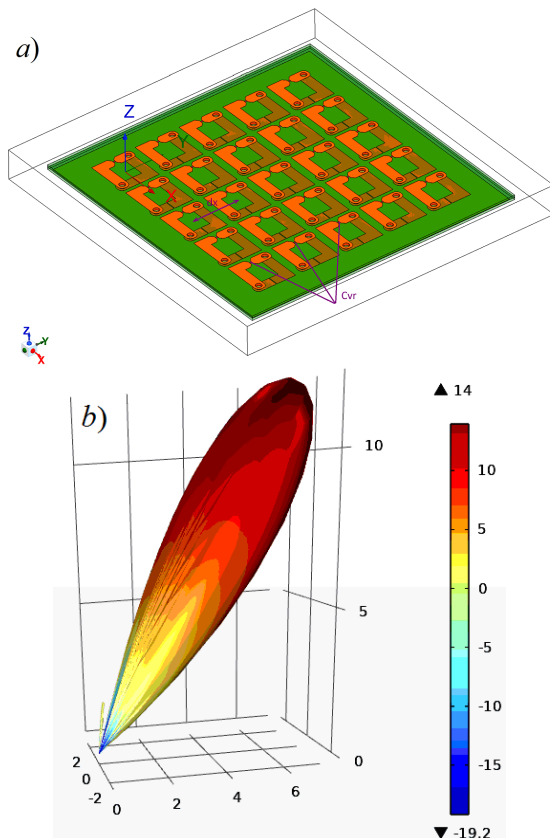


Figure 1.1 – The project of the metamaterial consisting of 25-paired planar spiral resonators located on the dielectric layer (a); an example of a radiation pattern diagram formed by the metasurface (b).

Here, dx is the distance between the centers of resonators in the metasurface, C_{vr} is the varicap with the specified capacitance.

To form the training and testing data arrays for artificial neural networks, the radiation pattern calculations were performed using the finite element method in Ansys HFSS.

The input parameters are adjusted in such a way that the metamaterial has a radiation pattern diagram with the minimum lobe width, which allows obtaining concentrated space radiation of maximum power. During the research, it was found that the most effective parameters for solving this problem are the inter-element distance (spatial period of the metasurface dx) and the capacitance of the varicaps.

The geometric parameters of the planar spiral resonators were pre-determined by analytical methods for calculating the polarizations of any particle of arbitrary shape, the linear dimensions of which are small compared to the wavelength, as described in the work [12].

2 Solving optimization problem

During the numerical experiment, a sample formed in the DesignXplorer module of the Ansys Software was used.

According to the experiment plan, the calculations were performed for two input parameters: P1 is varicap capacitance C_{vr} , P2 is inter-element distance dx . At the same time, the following output parameters were determined: the electric field intensity at the maximum of the radiation pattern diagram E and the lobe width of the radiation at half the power of the radiation $d\theta$. Thus, the research object model was response functions linking the output parameters (E , $d\theta$) with the factors (dx , C_{vr}) (Table 2.1).

Figure 2.1 shows the dependencies of E and $d\theta$ on the input parameters, and Figure 2.2 shows their response surfaces.

Table 2.1 – Parameters of planar spiral resonators

Input parameters	Value of input parameters
P2 (dx , mm)	28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40
P1 (C_{vr} , pF)	0.1–0.5

The calculations were performed for 533 combinations of input parameters (Figure 2.1), 513 of which used for training artificial networks and 20 for testing (Table 2.2).

Artificial neural networks were formed using the TensorFlow machine-learning library. The ReLU activation function, Adam optimizer, and MSE loss function were used in creating the networks. The neural network underwent training for a total of 700 epochs. As a result, 25 artificial neural networks were created with the number of neurons in the two hidden layers ranging from 10 to 50 with an interval of 10.

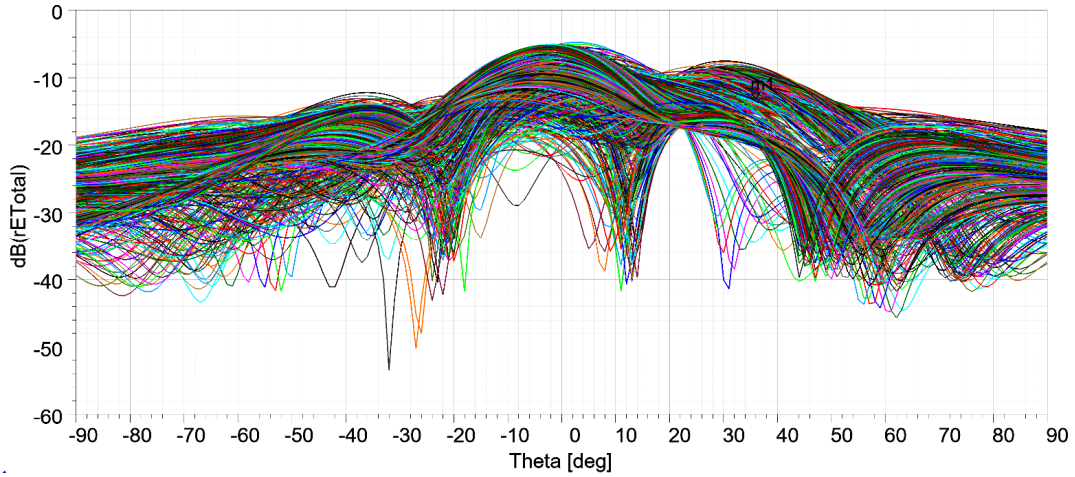


Figure 2.1 – Dependence of electric field intensity on the angle of rotation of the radiation pattern diagram

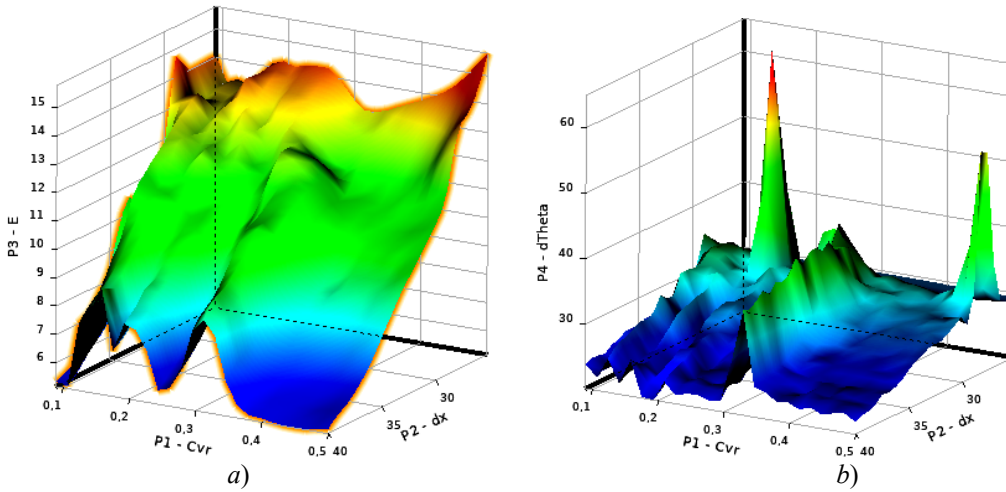


Figure 2.2 – Response surfaces of E (a) and dTheta (b)

Table 2.2 – Test dataset

N	Cvr, pF	dx, mm	E, dB	dTheta, deg
1	0.24	30	11.31	29
2	0.24	32	10.36	28
3	0.21	38	8.31	25
4	0.12	31	12.97	34
5	0.44	29	10.80	31
6	0.45	36	6.87	25
7	0.22	33	11.78	29
8	0.39	30	10.34	31
9	0.38	28	11.19	32
10	0.32	34	11.12	42
11	0.48	34	8.26	27
12	0.17	36	9.28	23
13	0.37	33	9.20	29
14	0.14	33	11.51	25
15	0.49	38	5.94	23
16	0.43	33	8.84	28
17	0.41	29	10.71	31
18	0.11	31	12.14	30
19	0.12	35	11.02	31
20	0.19	28	13.35	63

The following criteria were used to evaluate the obtained models: root mean squared error (*RMSE*), mean absolute error (*MAE*) and the coefficient of determination R^2 :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d_i - y_i)^2},$$

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |d_i - y_i|, \quad R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (d_i - y_i)^2}{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2},$$

where d_i represents the values, calculated using finite element analysis; y_i denotes the values, calculated using neural network predictions.

Figure 2.3 shows the heat maps illustrating the distribution of validation errors in determining the output parameters. The vertical and horizontal axes show the number of neurons in the first and second hidden layers of artificial neural networks, respectively. The intensity of the color-coding indicates the magnitude of the error: the error increases as the color transitions from light to dark.

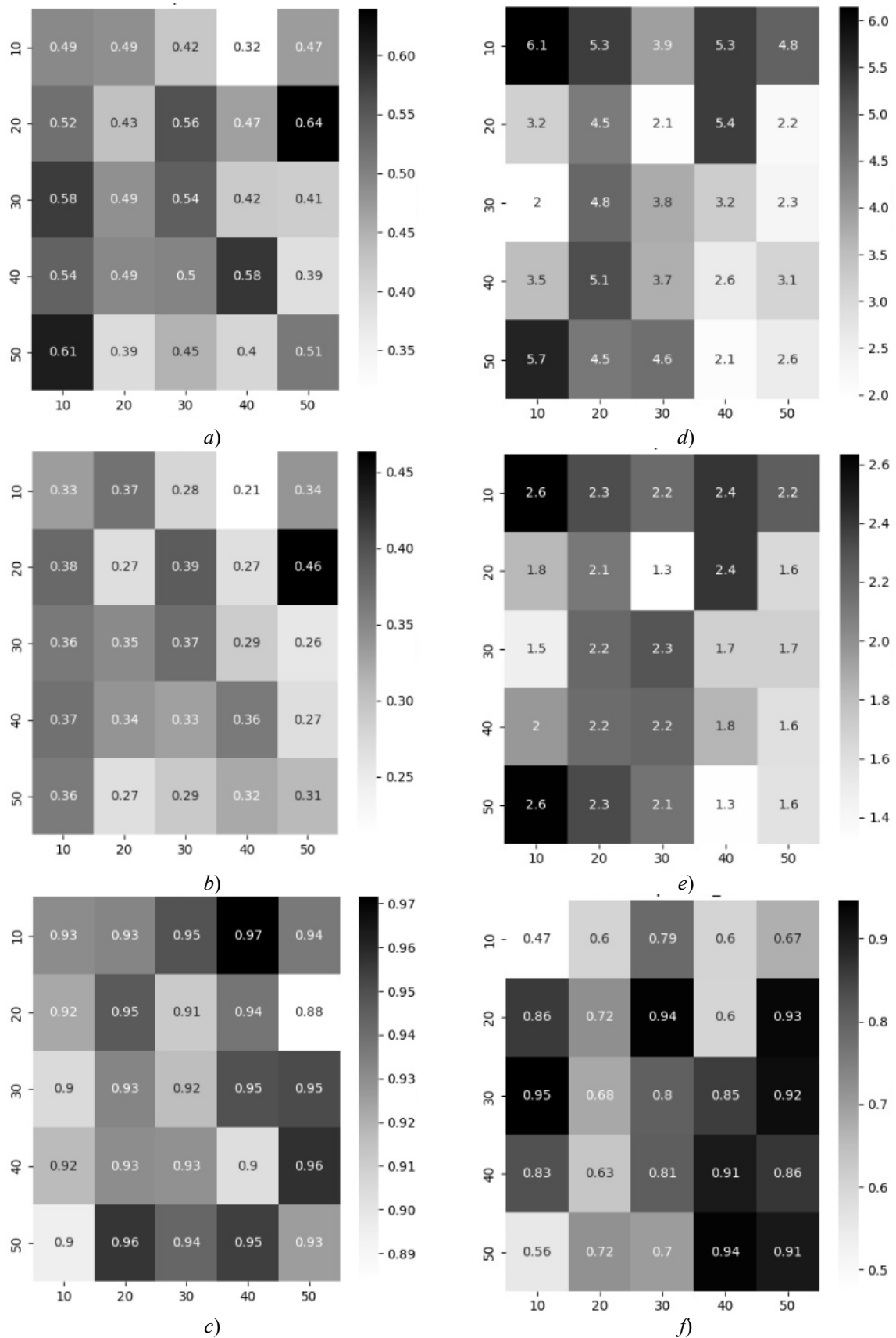


Figure 2.3 – Heat maps of distribution $RMSE$ (a), MAE (b), R^2 (c) (darker color there means higher determination) for E and heat maps of distribution $RMSE$ (d), MAE (e), R^2 (f) (darker color there means higher determination) for dTheta

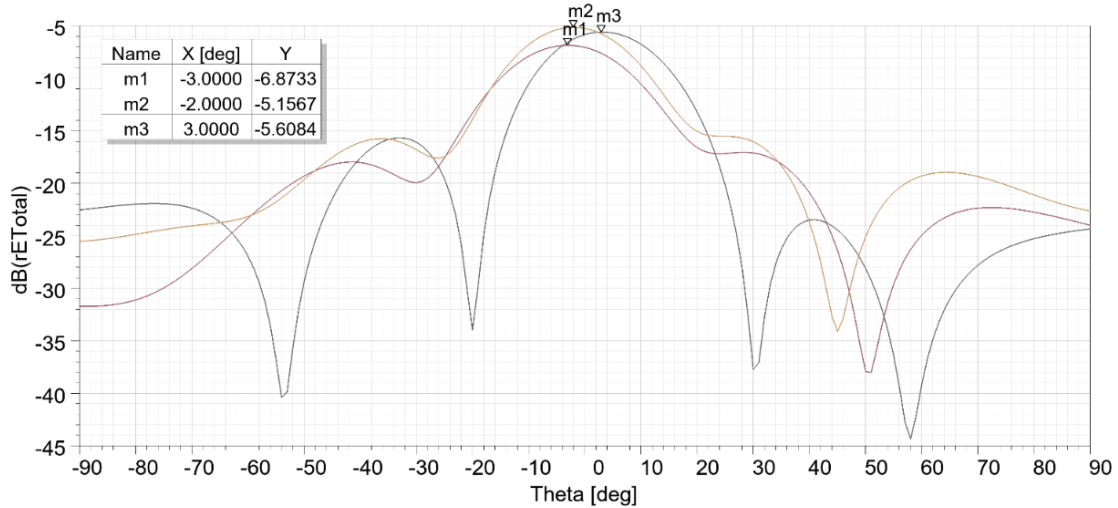


Figure 2.4 – Candidate points calculated via finite element analysis

The neural network with the architecture [2-10-40-2] demonstrated superior performance in determining the values of E, whereas the network with the architecture [2-50-40-2] achieved the highest accuracy in determining the values of dTheta. Here, the numbers 2 in square brackets indicate the fact that the analysis is performed using two input and two output parameters. Table 2.2 presents the evaluation results of the corresponding neural network models.

Table 2.2 – Results of neural network model evaluation

Criteria	E	dTheta,
RMSE	0.3 dB	2.1 deg
MAE	0.2 dB	1.3 deg
R ²	0.9715	0.9398

The optimization problem was to find the minimum module of the intensity E, expressed in decibels, and the minimum dTheta. The lobe width of the radiation at half power was calculated from the maximum intensity of the obtained directional diagram by subtracting 4 dB.

Table 2.3 presents the values of the candidate points found through the genetic algorithm. Figure 2.4 shows the actual values of these points, calculated via the finite element analysis. The minus signs on the Y-axis indicate that the values taken in decibels; however, we considered the modules of these values and it is easy to notice that the values predicted by the neural network closely match the analytical ones.

Table 2.3 – Values of candidate points

Point	1	2	3
P2 – dx, mm	40	37.6949	36.0617
P1 – Cvr, pF	0.4551	0.1013	0.4957
P3 – E, dB	5.1408	5.6246	6.8716
P4 – dTheta, deg	21.8735	22.7504	23.8187

Conclusion

The obtained results allow us to conclude that neural network models are sufficiently effective in predicting the parameters of metamaterials, which in turn provides the possibility of optimizing the corresponding parameters using genetic algorithms. At the same time, the relative error in determining the values of the studied parameters did not exceed 1% compared to the values calculated using the finite element method.

REFERENCES

1. *The Design of Chiral Metamaterials and Metasurfaces* / Y. Song, I. Semchenko, S. Khakhomov, L. Wang. – Elsevier, 2025. – 268 p.
2. Семченко, И.В. Электромагнитные волны в метаматериалах и спиральных структурах / И.В. Семченко, С.А. Хахомов. – Минск: Беларуская навука, 2019. – 279 с.
3. *Absorbers of microwaves based on polymer composites and chiral structures* // Qian Songsong, V.A. Bannyi, A.L. Samofalov, I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2014, № 4 (21). – P. 40–45.
4. Semchenko, I.V. Optimal Shape of Spiral: Equality of Dielectric, Magnetic and Chiral Properties / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, A.L. Samofalov // Proceedings of META’08, Metamaterials for Secure Information and Communication Technologies, 7-10 May, 2008, Marrakesh – Morocco. – P. 71–80.
5. Головки, В.А. Нейросетевые технологии обработки данных: учеб. пособие / В.А. Головки, В.В. Краснопрошин. – Минск: БГУ, 2017. – 263 с.
6. Емельянов, В.В. Теория и практика эволюционного моделирования / В.В. Емельянов, В.В. Курейчик, В.М. Курейчик. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 432 с.
7. *Metamodelling technique for the efficient design optimisation of metasurfaces* / F. Ferranti

[et al.] // Electronics Letters. – 2016. – Т. 52, № 14. – P. 1191–1192.

8. Nikityuk, Yu.V. Optimization of two-beam laser cleavage of silicate glass / Yu.V. Nikityuk, A.N. Serdyukov, I.Y. Aushev // Journal of Optical Technology. – 2022. – Vol. 89, № 2. – P. 121–125.

9. Nikitjuk, Yu.V. Determination of the Parameters of Controlled Laser Thermal Cleavage of Crystalline Silicon Using Regression and Neural Network Models / Yu.V. Nikitjuk, A.N. Serdyukov // Crystallography Reports. – 2023. – Vol. 68, № 7. – P. 1199–1204.

10. Characterization of Laser Welding of Steel 30XГСН2А by Combining Artificial Neural Networks and Finite Element Method / Yu. Nikitjuk [et al.] // Lecture Notes in Networks and Systems. – 2022. – Vol. 422. – P. 273–279.

11. Оптимизация параметров поглощающих метаматериалов на основе П-образных элементов / С.А. Хахомов [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 3 (52). – С. 56–60.

12. Determining polarizability tensors for an arbitrary small electromagnetic scatterer / V.S. Asadchy [et al.] // Photonics and Nanostructures – Fundamentals and Applications. – 2014. – Vol. 12, № 4. – P. 298–304.

The work was carried out within the framework of BRFFI projects F22KITG-021, F23KI-027, F24KITG-005.

The article was submitted 20.01.2025.

Информация об авторах

Сомов Павел Владиславович – ассистент
Самофалов Андрей Леонидович – к.ф.-м.н., доцент
Никитюк Юрий Валерьевич – к.ф.-м.н., доцент
Хахомов Сергей Анатольевич – к.ф.-м.н., доцент, ректор
Семченко Игорь Валентинович – д.ф.-м.н., профессор,
чл.-корр. НАН Беларуси
Дашин Динг – доктор инженерии, профессор

ПОЛИАДИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП В ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. III

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв

POLYADIC ANALOGUES OF NORMAL SUBGROUPS IN POLYADIC GROUPS OF SPECIAL FORM. III

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev

Аннотация. В статье продолжается изучение полиадических аналогов нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида.

Ключевые слова: полиадическая операция, полуинвариантные l -арные подгруппы, n -полуинвариантные l -арные подгруппы.

Для цитирования: Гальмак, А.М. Полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида. III / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 64–66. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_64. – EDN: CRZWMH

Abstract. The study on the polyadic analogues of normal subgroups in polyadic groups of special form is carried on.

Keywords: polyadic operation, semiinvariant l -ary subgroups, n -semiinvariant l -ary subgroups.

For citation: Gal'mak, A.M. Polyadic analogues of normal subgroups in polyadic groups of special form. III / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 64–66. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_64 (in Russian). – EDN: CRZWMH

Введение

Данная статья, посвящённая изучению полиадических аналогов нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида, является продолжением статей [1], [2] и составляет с ними единое целое. В связи с этим нумерация разделов в настоящей статье продолжает нумерацию разделов в [2]. Сохраняется преемственность в отношении соглашений, определений и обозначений из [1], [2], все они остаются в силе и в новой статье. В ней ссылки на результаты из работ [1], [2] даются без указания на эти работы. Например, ссылка на следствие 5.1 означает, что имеется в виду следствие 5.1 из раздела 5 в [2].

6 Условия полуинвариантности, но не n -полуинвариантности

Теорема 6.1. Пусть подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^n \neq \sigma$, $\sigma^l = \sigma$, $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа полуабелевой n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $B \neq A$. Тогда l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ полуинвариантна, но не n -полуинвариантна в полуабелевой l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, которая не является n -полуабелевой.

Доказательство. n -Арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ полуабелевой n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ является полуинвариантной в ней. Поэтому, согласно

утверждению 2) теорем 3.1, l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ полуинвариантна в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, а согласно утверждению 2) следствия 5.1 $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуинвариантной в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. Тогда по теореме 4.5 из [3] $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – полуабелева l -арная группа, не являющаяся n -полуабелевой. \square

Замечание 6.1. В доказательстве теоремы 6.1 полуинвариантность $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ может быть получена как следствие полуабелевости $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Кроме того, если в теореме 6.1 $\langle B, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная подгруппа, то l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ является полуабелевой, но не n -полуабелевой. Это следует из теоремы 4.5 из [3] ввиду полуабелевости $\langle B, \eta \rangle$.

Полагая в теореме 6.1 $n = 2$, получим

Следствие 6.1. Пусть нетождественная подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, B – подгруппа абелевой группы A , $B \neq A$. Тогда l -арная подгруппа $\langle B^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ полуинвариантна, но не инвариантна в полуабелевой l -арной группе $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$, которая не является абелевой.

Ясно, что в теореме 6.1 σ – нетождественная подстановка. Если при этом подстановка σ^n

является тождественной, $s = n$, то получим приведённую ниже теорему.

Теорема 6.2. Пусть для нетождественной подстановки $\sigma \in S_k$ подстановка σ^n является тождественной, $l = n(n - 1) + 1$, $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа полуабелевой n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $B \neq A$. Тогда l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{n, \sigma, k} \rangle$ полуинвариантна, но не n -полуинвариантна в полуабелевой l -арной группе $\langle A^k, \eta_{n, \sigma, k} \rangle$, которая не является n -полуабелевой.

Замечание 6.2. Если в теореме 6.2 $\langle B, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная подгруппа, то l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{n, \sigma, k} \rangle$ является полуабелевой, но не n -полуабелевой. Это следует из теоремы 4.5 из [3] ввиду полуабелевости $\langle B, \eta \rangle$.

Следующее следствие вытекает из теоремы 6.2, если в ней положить σ – цикл длины $k \geq 2$ из S_k , $n = k$.

Следствие 6.2. Пусть $l = k(k - 1) + 1$, σ – цикл длины $k \geq 2$ из S_k , $\langle B, \eta \rangle$ – k -арная подгруппа полуабелевой k -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $B \neq A$. Тогда l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{k, \sigma, k} \rangle$ полуинвариантна, но не k -полуинвариантна в полуабелевой l -арной группе $\langle A^k, \eta_{k, \sigma, k} \rangle$, которая не является k -полуабелевой.

Полагая в следствии 6.2 $\sigma = (12 \dots k)$, получим

Следствие 6.3. Пусть $l = k(k - 1) + 1$, $\langle B, \eta \rangle$ – k -арная подгруппа полуабелевой k -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $B \neq A$. Тогда l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{k, (12 \dots k), k} \rangle$ полуинвариантна, но не k -полуинвариантна в полуабелевой l -арной группе $\langle A^k, \eta_{k, (12 \dots k), k} \rangle$, которая не является k -полуабелевой.

Полагая в следствиях 6.2 и 6.3 $k = 3$, получим ещё два следствия.

Следствие 6.4. Пусть σ – цикл длины 3 из S_3 , $\langle B, \eta \rangle$ – тернарная подгруппа полуабелевой тернарной группы $\langle A, \eta \rangle$, $B \neq A$. Тогда 7-арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{3, \sigma, 3} \rangle$ полуинвариантна, но не 3-полуинвариантна в полуабелевой 7-арной группе $\langle A^k, \eta_{3, \sigma, 3} \rangle$, которая не является 3-полуабелевой.

Следствие 6.5. Пусть $\langle B, \eta \rangle$ – тернарная подгруппа полуабелевой тернарной группы $\langle A, \eta \rangle$, где $B \neq A$. Тогда 7-арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{3, (123), 3} \rangle$ полуинвариантна, но не 3-полуинвариантна в полуабелевой 7-арной группе $\langle A^k, \eta_{3, (123), 3} \rangle$, которая не является 3-полуабелевой.

7 Случай тождественной подстановки

Согласно утверждению 1) следствия 5.1, l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ может быть инвариантной в ней только в случае тождественности подстановки σ . Следующая теорема показывает, что это действительно так.

Теорема 7.1. Если ε – тождественная подстановка из S_k , $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, то l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, \varepsilon, k} \rangle$ инвариантна в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \varepsilon, k} \rangle$ тогда и только тогда, когда n -арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ инвариантна в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$.

Необходимость. Инвариантность $\langle B^k, \eta_{s, \varepsilon, k} \rangle$ в $\langle A^k, \eta_{s, \varepsilon, k} \rangle$ означает, что

$$\eta_{s, \varepsilon, k}(\underbrace{x B^k \dots B^k}_{l-1}) = \eta_{s, \varepsilon, k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{t-1} x \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-t}) \quad (7.1)$$

для любого $x = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$ и любого $t = 2, \dots, l$. Тогда, применив к левой части полученного равенства утверждение 3) леммы 2.1, а к правой части – предложение 2.2 при $B = C$, получим

$$\begin{aligned} & \eta(x_1 \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(x_k \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \\ & = \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_{\varepsilon^{-1}(1)} \underbrace{B \dots B}_{l-t}) \times \dots \\ & \quad \dots \\ & \quad \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_{\varepsilon^{-1}(k)} \underbrace{B \dots B}_{l-t}). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Это равенство, ввиду тождественности подстановки ε , переписывается следующим образом

$$\begin{aligned} & \eta(x_1 \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(x_k \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \\ & = \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_1 \underbrace{B \dots B}_{l-t}) \times \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_k \underbrace{B \dots B}_{l-t}). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Так как $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, то равенство (7.3) при $t = 2, \dots, n - 1$ принимает вид

$$\begin{aligned} & \eta(x_1 \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(x_k \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \\ & = \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_1 \underbrace{B \dots B}_{n-t}) \times \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_k \underbrace{B \dots B}_{n-t}). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Следовательно,

$$\eta(x_j \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_j \underbrace{B \dots B}_{n-t}) \quad (7.5)$$

для любого $t = 2, \dots, n$ и любого $j = 1, \dots, k$, что означает инвариантность $\langle B, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$.

Достаточность. Пусть $x = (x_1, \dots, x_k)$ – произвольный элемент из A^k . Из инвариантности $\langle B, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$ следует (7.5) для любого $t = 2, \dots, n$ и любого $j = 1, \dots, k$, откуда получаем (7.4). Так как $\langle B, \eta \rangle$ – инвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, то равенство (7.4) может быть переписано в виде (7.3). Далее последовательно получаем (7.2) и (7.1). Следовательно, l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, \varepsilon, k} \rangle$ инвариантна в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \varepsilon, k} \rangle$. \square

8 Новое доказательство теоремы 4.1

Приведём доказательство первого утверждения теоремы 4.1, отличное от приведённого в [2].

Теорема 8.1. Пусть подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$ и для некоторого

$t = 2, \dots, l-1$ подстановка σ^{t-1} не является тождественной, $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, отличная от неё. Тогда существует элемент $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$ такой, что $\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{t-1} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-t})$. (8.1)

Доказательство. Зафиксируем элементы $b \in B, u \in A, u \notin B$. Пусть для определённости $\sigma^{t-1}(j) = m$, где $j < m$. Положим

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{m-1}, x_m = u, x_{m+1}, \dots, x_k),$$

где $x_1 = \dots = x_{j-1} = x_j = x_{j+1} = \dots = x_{m-1} = x_{m+1} = \dots = x_k = b$.

Тогда, используя второе равенство из предложения 2.1, получим

$$\begin{aligned} & \eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}) = \\ & = \eta(\underbrace{b B \dots B}_{l-1}) \times \dots \times \eta(\underbrace{b B \dots B}_{l-1}) \times \eta(\underbrace{b B \dots B}_{l-1}) \times \\ & \quad \times \eta(\underbrace{b B \dots B}_{l-1}) \times \dots \times \eta(\underbrace{b B \dots B}_{l-1}) \times \eta(\underbrace{u B \dots B}_{l-1}) \times \\ & \quad \times \eta(\underbrace{b B \dots B}_{l-1}) \times \dots \times \eta(\underbrace{b B \dots B}_{l-1}) = \\ & = \eta(\underbrace{b B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(\underbrace{b B \dots B}_{n-1}) \times \eta(\underbrace{b B \dots B}_{n-1}) \times \\ & \quad \times \eta(\underbrace{b B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(\underbrace{b B \dots B}_{n-1}) \times \eta(\underbrace{u B \dots B}_{n-1}) \times \\ & \quad \times \eta(\underbrace{b B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(\underbrace{b B \dots B}_{n-1}) = \\ & = \underbrace{B \times \dots \times B}_{j-1} \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{m-j-1} \times \eta(\underbrace{u B \dots B}_{n-1}) \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{k-m}, \end{aligned}$$

то есть

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}) = \underbrace{B \times \dots \times B}_{j-1} \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{m-j-1} \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{m-j-1} \times \eta(\underbrace{u B \dots B}_{n-1}) \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{k-m}. \quad (8.2)$$

Аналогично, используя первое равенство из предложения 2.1 и учитывая, что $x_{\sigma^{t-1}(r)} = b$ для любого $r \in \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, m-1, m, m+1, \dots, k\}$, получим

$$\begin{aligned} & \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{t-1} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-t}) = \\ & = \eta(\underbrace{B \dots B b B \dots B}_{t-1}) \times \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B b B \dots B}_{l-t}) \times \\ & \quad \times \eta(\underbrace{B \dots B x_{\sigma^{t-1}(j)} B \dots B}_{t-1}) \times \\ & \quad \times \eta(\underbrace{B \dots B b B \dots B}_{t-1}) \times \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B b B \dots B}_{l-t}) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \eta(\underbrace{B \dots B x_{\sigma^{t-1}(m)} B \dots B}_{t-1}) \times \\ & \times \eta(\underbrace{B \dots B b B \dots B}_{t-1}) \times \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B b B \dots B}_{l-t}) = \\ & = \underbrace{B \times \dots \times B}_{j-1} \times \eta(\underbrace{B \dots B x_m B \dots B}_{t-1}) \times \\ & \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{m-j-1} \times \eta(\underbrace{B \dots B x_j B \dots B}_{t-1}) \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{k-m} = \\ & = \underbrace{B \times \dots \times B}_{j-1} \times \eta(\underbrace{B \dots B u B \dots B}_{t-1}) \times \\ & \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{m-j-1} \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{k-m}, \end{aligned}$$

то есть $\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{t-1} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-t}) = \underbrace{B \times \dots \times B}_{j-1} \times \eta(\underbrace{B \dots B u B \dots B}_{t-1}) \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{m-j-1} \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{k-m}$. (8.3)

Если предположить

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}) = \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{t-1} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-t}),$$

то из (8.2) и (8.3) следует

$$\begin{aligned} & \underbrace{B \times \dots \times B}_{j-1} \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{m-j-1} \times \\ & \times \eta(\underbrace{u B \dots B}_{n-1}) \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{k-m} = \\ & = \underbrace{B \times \dots \times B}_{j-1} \times \eta(\underbrace{B \dots B u B \dots B}_{t-1}) \times \\ & \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{m-j-1} \times \underbrace{B \times \dots \times B}_{k-m}. \end{aligned}$$

Сравнивая множители, стоящие в левой и правой частях полученного равенства на j -ом и m -ом местах, получим

$$B = \eta(\underbrace{B \dots B u B \dots B}_{t-1}), \quad B = \eta(\underbrace{u B \dots B}_{n-1}),$$

что невозможно, так как

$$B \cap \eta(\underbrace{B \dots B u B \dots B}_{t-1}) = \emptyset, \quad B \cap \eta(\underbrace{u B \dots B}_{n-1}) = \emptyset.$$

Следовательно, сделанное предположение неверно, а верно неравенство (8.1) для выбранного \mathbf{x} . \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А.М. Полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (60). – С. 54–58.

2. Гальмак, А.М. Полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида. II / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (61). – С. 45–47.

3. Гальмак, А.М. Перестановочность элементов в полиадических группоидах специального вида / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 3 (36). – С. 70–75.

Поступила в редакцию 06.01.2025.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор

ЭКВИВАЛЕНТНАЯ СТРУКТУРНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ФУНКЦИИ ИЗ ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА

Г.Н. Казимиров, В.В. Бураковский

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

EQUIVALENT STRUCTURAL CHARACTERISTIC OF A FUNCTION FROM A LEBESGUE SPACE

G.N. Kazimirov, V.V. Burakovskiy

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Доказывается эквивалентность итерированного модуля гладкости и K -функционала Петре.

Ключевые слова: итерированный модуль гладкости, K -функционал.

Для цитирования: Казимиров, Г.Н. Эквивалентная структурная характеристика функции из пространства Лебега / Г.Н. Казимиров, В.В. Бураковский // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 67–69. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_67. – EDN: NEPSMJ

Abstract. The equivalence of the iterated modulus of smoothness and the Petre K -functional is proved.

Keywords: iterated modulus of smoothness, K -functional.

For citation: Kazimirov, G.N. Equivalent structural characteristic of a function from a Lebesgue space / G.N. Kazimirov, V.V. Burakovskiy // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 67–69. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_67 (in Russian). – EDN: NEPSMJ

Введение

Ранее в [1]–[3] были получены теоремы о связи итерированных обобщённых модулей гладкости с K -функционалом Петре. В настоящей работе рассматривается обычный итерированный модуль гладкости и его связь с K -функционалом Петре.

1 Основные определения

Будем говорить, что 2π -периодическая функция $f \in L_p$, $1 \leq p < \infty$, если для $1 \leq p < \infty$ она измерима на отрезке $[0, 2\pi]$ и

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty,$$

а для $p = \infty$ функция f непрерывна на отрезке $[0, 2\pi]$ и $\|f\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)|$.

Введём обозначения ($r = 2, 3, \dots$):

$$\begin{aligned} \Delta_h^1(f, x) &= f(x+h) - f(x), \\ \Delta_{h_1, \dots, h_r}^r(f, x) &= \Delta_{h_r}^1(\Delta_{h_1, \dots, h_{r-1}}^{r-1}(f, x), x), \\ \Delta_h^r(f, x) &= \Delta_h^1(\Delta_h^{r-1}(f, x), x), \\ \tilde{\omega}_r(f, \delta)_p &= \sup_{h_i \leq \delta, i=1, \dots, r} \left\| \Delta_{h_1, \dots, h_r}^r(f, x) \right\|_p. \end{aligned}$$

Через $W_p^{(r)}$ обозначим классы (пространства Соболева) таких функций g , что $g \in L_p$ для $1 \leq p \leq \infty$, а для $p = \infty$ существует величина

$$\sup \text{vrai} |f| = \inf \{ M : |f(x)| \leq Mn.v. \}$$

и

$$\begin{aligned} W_p^{(1)} &= \left\{ f : f(x) = C + \int_a^x \varphi(t) dt, \right. \\ &\quad \left. \varphi - 2\pi\text{-периодическая и } \int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = 0, \varphi \in L_p \right\}, \\ &\quad \dots \\ W_p^{(r)} &= \left\{ f : f(x) = C + \int_a^x \varphi(t) dt, \right. \\ &\quad \left. \varphi - 2\pi\text{-периодическая и } \int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = 0, \varphi \in W_p^{(r-1)} \right\}. \end{aligned}$$

Для $f \in L_p$ введём K -функционал Петре по формуле:

$$K_r(f, \delta)_p = \inf_{g \in W_p^{(r)}} \left\{ \|f - g\|_p + \delta^r \|g^{(r)}(x)\|_p \right\}.$$

2 Вспомогательные утверждения

Положим $H^1(f, x) = \int_0^x f(z) dz$,

$$L_h^1(f, x) = \frac{1}{h} \int_0^h f(x+u)du,$$

а для $k = 2, 3, \dots$

$$L_{h_1, \dots, h_k}^k(f, x) = L_{h_k}(L_{h_1, \dots, h_{k-1}}^{k-1}(f, x), x),$$

$$H^k(f, x) = H^1(H^{k-1}(f, x), x).$$

Лемма 2.1. Если $f \in L_1$, то для любых $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство:

$$L_h^k(f, x) = \frac{1}{h^k} \Delta_h^k(H^k(f, x), x).$$

Доказательство: воспользуемся индукцией по k .

1. Пусть $k = 1$. Тогда $f(x) = (H^1(f, x))'$,

$$f(x+u) = (H^1(f, x+u))',$$

$$L_h^1(f, x) = \frac{1}{h} \int_0^h f(x+u)du = \frac{1}{h} \int_0^h (H(f, x+u))' du =$$

$$= \frac{1}{h} (H(f, x+h) - H(f, x)) = \frac{1}{h} \Delta_h^1(H(f, x), x).$$

2. Предположим Лемма 2.1 справедлива для $k - 1$, т. е.

$$L_h^{k-1}(f, x) = \frac{1}{h^{k-1}} \Delta_h^{k-1}(H^{k-1}(f, x), x).$$

Тогда

$$(H^k(f, x))' = H^{k-1}(f, x),$$

$$L_h^k(f, x) = \frac{1}{h} \int_0^h L_h^{k-1}(f, x+u)du =$$

$$= \frac{1}{h^k} \int_0^h \Delta_h^{k-1}(H^{k-1}(f, x), x+u)du =$$

$$= \frac{1}{h^k} \int_0^h \Delta_h^{k-1}((H^k(f, x))', x+u)du =$$

$$= \frac{1}{h^k} \int_0^h (\Delta_h^{k-1}(H^k(f, x), x+u))' du =$$

$$= \frac{1}{h^k} \Delta_h^k(H^k(f, x), x). \quad \square$$

3 Основной результат

Теорема 3.1. Пусть даны числа p, r такие, что $1 \leq p \leq \infty$, $r = 1, 2, 3, \dots$. Тогда для $f \in L_p$ справедливы неравенства:

$$C_1 \tilde{\omega}_r(f, \delta)_p \leq K_r(f, \delta)_p \leq C_2 \tilde{\omega}(f, \delta)_p,$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 не зависят от f и δ .

Доказательство. Для любой функции $g \in L_p$ $\tilde{\omega}_r(f, \delta)_p \leq \tilde{\omega}_r(f - g, \delta)_p + \tilde{\omega}(g, \delta)_p$.

Очевидно, что $\tilde{\omega}_r(f - g, \delta)_p \leq C_3 \|f - g\|_p$.

Далее

$$\Delta_{t_1}^1(g, x) = g(x+t_1) - g(x) = \int_0^{t_1} g'(x+u)du,$$

$$\|\Delta_{t_1}^1(g, x)\|_p \leq \left| \int_0^{t_1} \|g'(x+u)\|_p du \right| = |t_1| \|g'(x)\|_p.$$

По индукции получаем, что

$$\|\Delta_{t_1, \dots, t_r}^r(g, x)\|_p \leq |t_1| \cdot |t_2| \cdot \dots \cdot |t_r| \|g^{(r)}(x)\|_p.$$

Следовательно, $\tilde{\omega}_r(g, \delta)_p \leq \delta^r \|g^{(r)}(x)\|_p$.

Переходя к точной нижней грани по всем функциям $g \in W_p^{(r)}$, получим:

$$C_1 \tilde{\omega}_r(f, \delta)_p \leq K_r(f, \delta)_p.$$

Для доказательства правого неравенства рассмотрим функцию

$$A_h^r(f, x) = f(x) - (E - L_h^r)^r(f, x),$$

где

$$E(f, x) = f(x).$$

Очевидно, $L_h^r(f, x) \in W_p^{(r)}$. Нетрудно проверить, что $W_p^{(l)} \subset W_p^{(r)}$ при $l \geq r \geq 1, l = r, r+1, \dots$

Поэтому $A_h^r(f, x) \in W_p^{(r)}$. Так как $L_h^r(f, x, \nu, \mu)$ имеет абсолютно непрерывную производную на каждом $[a, b] \subset (-1, 1)$, то применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и обобщённое неравенство Минковского, имеем для $l = 2, 3, \dots$

$$\|((L_h^r)'(f, x))^{(l)}\|_p \leq C_4 \|(L_h^r(f, x))^{(l)}\|_p.$$

Так как $A_h^r(f, x)$ представляет собой сумму произведений $L_h^r(f, x)$, то

$$\|(A_h^r(f, x))^{(r)}\|_p \leq C_5 \|(L_h^r(f, x))^{(r)}\|_p.$$

Применяя лемму 2.1, имеем

$$h^r \|(A_h^r(f, x))^{(r)}\|_p \leq C_6 \|(\Delta_h^r(H^r(f, x), x))^{(r)}\|_p =$$

$$= C_3 \|(\Delta_h^r((H^r(f, x))^{(r)}, x))\|_p \leq$$

$$\leq C_3 \sup_{|h| \leq h} \|\Delta_h^r(f, x)\|_p \leq C_3 \tilde{\omega}_r(f, h)_p,$$

где положительные постоянные C_2 и C_3 не зависят от h .

С другой стороны, так как

$$E - L_h^r = (E - L_h)(E + L_h + \dots + L_h^{r-1}),$$

то из определения $L_h(f, x)$ и обобщённого неравенства Минковского следует, что

$$\|L_h(f, x)\|_p \leq C_4 \|f\|_p.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|(E - L_h^r)(g, x)\|_p &\leq C_5 \|(E - L_h)(g, x)\|_p \leq \\ &\leq C_6 \sup_{0 \leq u \leq h} \|\Delta_u(g, x)\|_p. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Из неравенства (3.1) следует, что

$$\begin{aligned} \|f(x) - A_h^r(f, x)\|_p &\leq \\ &\leq C_7 \sup_{0 \leq u_1 \leq h} \sup_{0 \leq u_2 \leq h} \dots \sup_{0 \leq u_r \leq h} \|\Delta_{u_1, u_2, \dots, u_r}^r(f, x)\|_p \leq \\ &\leq C_8 \tilde{\omega}_r(f, h)_p. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$K_r(f, \delta)_p \leq C_9 \tilde{\omega}(f, \delta)_p. \quad \square$$

Заключение

В статье рассмотрена эквивалентная структурная характеристика функций $f \in L_p$. Ранее этот результат был получен для обобщённого модуля гладкости, определяемого при помощи оператора обобщённого сдвига типа Чебышева [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Казимиров, Г.Н. Эквивалент структурной характеристики сложного процесса, модулируемого алгебраическими многочленами / Г.Н. Казимиров // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 3 (36). – С. 76–79.

2. Казимиров, Г.Н. О теоремах Джексона для k -го обобщённого модуля гладкости / Г.Н. Казимиров // Деп. в ВИНТИ РАН 27.12.94, 3054-В94. – С. 1–40.

3. Казимиров, Г.Н. Эквивалентная структурная характеристика данного обобщённого модуля гладкости / Г.Н. Казимиров // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 3 (4). – С. 49–51.

Поступила в редакцию 28.12.2024.

Информация об авторах

Казимиров Григорий Николаевич – к.ф.-м.н., доцент
Бураковский Владимир Викторович – к.ф.-м.н., доцент

G-СЕТЬ С НЕНАДЁЖНЫМИ СИСТЕМАМИ, КОНТРОЛЬНЫМИ И КВАРАНТИННЫМИ ОЧЕРЕДЯМИ И ВОЗМОЖНОСТЬЮ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЗАЯВОК МЕЖДУ СИСТЕМАМИ

Д.Я. Копать

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

G-NETWORK WITH UNRELIABLE SYSTEMS WITH CONTROL AND QUARANTINE QUEUES AND THE OPTION OF MOVING NEGATIVE ORDERS BETWEEN SYSTEMS

D.Y. Kopats

Yanka Kupala State University of Grodno

Аннотация. Объектом исследования в статье является G-сеть, состоящая из ненадёжных карантинных, контрольных и обслуживающих очередей в системах (СеМО). Отрицательные заявки после уничтожения одной положительной могут как покидать сеть, так и перемещаться между системой массового обслуживания (СМО) сети. Предполагается, что в определённой доле случаев вирус может обмануть антивирусное программное обеспечение (АПО) и причинить компьютерной сети вред. Такое возможно до тех пор, пока вирус не будет обнаружен АПО определённой СМО. С помощью метода многомерных производящих функций (ММПФ) найдены средние характеристики данной СеМО, если все её характеристики, кроме числа линий обслуживания (ЛО), функционируют в режиме насыщения.

Ключевые слова: G-сеть, ненадёжные линии обслуживания, системы с карантинными и контрольными очередями, метод многомерных производящих функций, нестационарные вероятности состояний, средние характеристики.

Для цитирования: Копать, Д.Я. G-сеть с ненадёжными системами, контрольными и карантинными очередями и возможностью перемещения отрицательных заявок между системами / Д.Я. Копать // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 70–77. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_70. – EDN: NWEPAT

Abstract. The object of the investigation in the article is a G-network consisting of unreliable quarantine, control and service queues in the systems (QS). After the destruction of one positive claim, negative claims can either leave the network or move between the QS of the network. It is assumed that in a certain proportion of cases, a virus can deceive antivirus software (ASW) and cause harm to a computer network. This is possible until the virus is detected by the ASW of a certain QS. Using the method of multidimensional generating functions (MDGF), the average characteristics of a given QS are found if all of its characteristics, except for the number of SLs, operate in saturation mode.

Keywords: G-network, unreliable service lines, systems with control and quarantine queues, method of multidimensional generating functions, non-stationary state probability, average characteristics.

For citation: Kopats, D.Y. G-network with unreliable systems with control and quarantine queues and the option of moving negative orders between systems / D.Y. Kopats // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 70–77. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_70 (in Russian). – EDN: NWEPAT

Введение

G-сети как разновидность сетей массового обслуживания (СеМО), в которых помимо заявок, требующих обслуживания, функционируют объекты, которые не требуют обслуживания, но приносят вред СеМО в стационарном режиме были введены в рассмотрение в статье [1], а в переходном режиме впервые исследовались в статье [2]. В статье [3] была исследована G-сеть с ненадёжными линиями обслуживания в переходном режиме в случае, когда линия обслуживания (ЛО) приходила в неисправность из-за причин, не связанных с компьютерными вирусами. Модели информационных систем и сетей (ИСС) с установленным антивирусным программным обеспечением (АПО), основанные на

использовании СеМО, как известно автору статьи, впервые были исследованы в статье [4]. В статье [4] предполагается наличие в каждой системе массового обслуживания (СМО) контрольной очереди (КонО), которая проверяет заявку на стандартность и, в случае успешного прохождения данной проверки, заявка попадает в очередь на обслуживание. В случае, если заявка не проходит проверку на стандартность, она попадает в карантинную очередь (КарО), которая является отдельной СМО, и проходит лечение. В случае его успешности она возвращается в ту же СМО на обслуживание, иначе покидает СеМО. КонО является математической моделью функционирования АПО, которое проверяет заявку на наличие вируса. В работе [4] не предполагалось

наличие в любой момент времени прихода отрицательных заявок в СМО сети. Такая модель означает наличие только одного карантина во всей ИСС. Но в большинстве современных ПК установлено АПО, то есть в каждой СМО должен быть карантин. В статье [5] предполагалось, что в каждой СМО СеМО, помимо КонО и обслуживающей очереди, присутствует ещё и КарО, которая в случае признания заявки отрицательной лечит её, но в случае, если отрицательной заявке удаётся обмануть АПО, она уничтожает одну положительную заявку и уходит из СеМО. В работе [6] предлагалось, что отрицательная заявка способна после уничтожения одной положительной заявки перемещаться между СМО сети, пока не будет найдена в КонО.

Данная статья посвящена нахождению вероятностно-временных характеристик для марковской G-сети с ненадёжными системами с Кон и КарО с помощью ММПФ. Данная модель обобщает модель в статье [6] на случай ненадёжности функционирующих в СМО ЛО. Данная модель соответствует ИТСС, ПК которой на некоторое время могут потерять отклик некоторого числа ПО или из-за значительного перегрева процессора ПК на определённое время. В отличие от моделей исследования G-сети, например, в статье [3] условие для ЛО смягчено: здесь функция Хевисайда для исправных ЛО аппроксимируется не единицей, а своим средним значением. Для количества заявок в СМО сети накладываются условия функционирования сети в режиме насыщения.

1 Описание сети

Рассмотрим G-сеть [1], состоящую из n СМО. В СМО $S_i, i = \overline{1, n}$ поступают простейшие потоки положительных и отрицательных заявок с интенсивностями соответственно $\lambda_{0i}^+, \lambda_{0i}^-, i = \overline{1, n}$. Первоначально поступившая в i -ю СМО заявка становится в КонО, где проверяется на стандартность, т. е. на наличие вируса в течении времени, имеющего показательную функцию распределения (ПФР) с параметром $\mu_i^{(v)}, i = \overline{1, n}$. После проверки на стандартность в i -ой СМО положительная заявка признается таковой с вероятностью p_i^+ и поступит в очередь на обслуживание в этой СМО, а с вероятностью $1 - p_i^+$ будет признана отрицательной и отправится в КарО на лечение. С вероятностью p_i^- отрицательная заявка после проверки на стандартность в i -ой СМО признается таковой и переходит в КарО на лечение, а с вероятностью $1 - p_i^-$ может ошибочно быть признана положительной и поступит в очередь на обработку, где она уничтожает одну положительную заявку в непустой системе, после чего с вероятностью n_{i0} покидает сеть или

с вероятностью n_{ij} переходит в КонО j -ой СМО,

$\sum_{j=0}^n n_{ij} = 1, i = \overline{1, n}$. В пустой очереди на обслуживание отрицательная заявка не имеет влияния на систему. Пусть длительности обслуживания положительных заявок в СМО S_i имеют ПФР с параметром $\mu_i, i = \overline{1, n}$, по завершении которого с вероятностью p_{ij}^+ переходит в КонО СМО S_j как положительная заявка, с вероятностью p_{ij}^- – как отрицательная и с вероятностью $p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^n (p_{ij}^+ + p_{ij}^-)$ покидает сеть, $i, j = \overline{1, n}$.

ЛО в КонО, КарО и обслуживающих очередях могут подвергаться случайным поломкам. Тогда приходят в неисправность все ЛО системы, а заявки, находившиеся на обслуживании, становятся первыми в очередь. Поэтому время исправной работы СМО S_i обозначим через $\beta_i, i = \overline{1, n}$, а время восстановления СМО S_i $\gamma_i, i = \overline{1, n}$. В карантине заявки, признанные отрицательными, становятся в КарО. Предположим, что длительность лечения заявки в i -ом узле имеет ПФР с параметром $\mu_i^{(c)}, i = \overline{1, n}$. Если лечение успешное, то заявка с вероятностью $p_i^{(s)}, i = \overline{1, n}$, переходит в очередь на обработку в i -ой СМО, иначе с вероятностью $1 - p_i^{(s)}$ отрицательная заявка удаляется, т. е. покидает сеть. Пусть вирус не может обмануть при его лечении. Состояние сети описывается вектором:

$$(\vec{d}, \vec{k}, \vec{l}, t) = (d_1, \dots, d_n, \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n, \vec{l}_1, \dots, \vec{l}_n; t), \quad (1.1)$$

где

$$(\vec{d}_i, \vec{k}_i, \vec{l}_i, t) = (d_i; k_i^{(p)}; k_i^{(s)}; l_i^{(n)}; l_i^{(c)}; t),$$

$k_i^{(p)}; l_i^{(n)}$ – соответственно число положительных и отрицательных заявок, находящихся в КонО i -ой СМО; $k_i^{(s)}$ – число положительных заявок на обслуживании в i -ой СМО; $l_i^{(c)}$ – число заявок на КарО в i -ой СМО, d_i – равно 1, если все ЛО в i -ой СМО исправны и 0 в противном случае. Дисциплина обслуживания в КонО RS. Тогда вероятность проверки на стандартность положительной заявки в режиме насыщения равна

$$q_i^+ = \left(\lambda_{0i}^+ + \sum_{j=1}^n \mu_j p_{ji}^+ \right) \left(\lambda_{0i}^+ + \lambda_{0i}^- + \sum_{j=1}^n \mu_j (p_{ji}^+ + p_{ji}^-) \right)^{-1}.$$

В [7] данный коэффициент представлен в стационарном режиме. Пусть \vec{I}_α, I_α – вектора размерностей $2n$ и n соответственно, состоящие из 0, кроме компоненты с номером α , равной единице.

2 Система РДУ Колмогорова для нестационарных вероятностей состояний сети

Возможны следующие переходы нашего марковского процесса в состояние $(\bar{d}, \bar{k}, \bar{l}, t + \Delta t)$ за время Δt :

1) из состояния $(\bar{d}, \bar{k} - \bar{l}_{2i-1}, \bar{l}, t)$ с вероятностью $\lambda_{0i}^+ u(k_i^{(p)}) \Delta t + o(\Delta t)$, в КонО i -ой СМО извне за время Δt поступит положительная заявка $i = \overline{1, n}$;

2) из состояния $(\bar{d}, \bar{k}, \bar{l} - \bar{l}_{2i-1}, t)$ в КонО i -ой СМО за время Δt извне поступит отрицательная заявка с вероятностью $\lambda_{0i}^- u(l_i^{(n)}) \Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1, n}$;

3) из состояния $(\bar{d}, \bar{k} + \bar{l}_{2i-1} - \bar{l}_{2i}, \bar{l}, t)$, положительная заявка после проверки на стандартность в i -ой СМО будет признана таковой и перейдет в очередь для обслуживания с вероятностью $\mu_i^{(v)} u(d_i) q_i^+ p_i^+ u(k_i^{(s)}) \Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1, n}$;

4) из состояния $(\bar{d}, \bar{k} + \bar{l}_{2i-1}, \bar{l} - \bar{l}_{2i}, t)$ с вероятностью $\mu_i^{(v)} u(d_i) q_i^+ (1 - p_i^+) \times u(l_i^{(c)}) \Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1, n}$ положительная заявка после проверки на стандартность в i -ой СМО будет признана отрицательной и перейдет в КарО;

5) из состояния $(\bar{d}, \bar{k}, \bar{l} + \bar{l}_{2i-1} - \bar{l}_{2i}, t)$, с вероятностью $\mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) u(d_i) \times p_i^- u(l_i^{(c)}) \Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1, n}$ отрицательная заявка после проверки на стандартность в i -ой СМО будет признана отрицательной и перейдет в КарО;

6) из состояния $(\bar{d}, \bar{k} + \bar{l}_{2i}, \bar{l} + \bar{l}_{2i-1}, t)$, с вероятностью $\mu_i^{(v)} n_{i0} (1 - q_i^+) \times (1 - p_i^-) u(d_i) u(k_i^{(s)}) \Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1, n}$ отрицательная заявка после проверки на стандартность в i -ой СМО будет признана положительной, перейдет в очередь на обслуживание и удалит 1 положительную заявку, уйдя из сети;

7) из состояния $(\bar{d}, \bar{k}, \bar{l} + \bar{l}_{2i-1}, t)$, $i = \overline{1, n}$ $\mu_i^{(v)} u(d_i) (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) n_{i0} \times (1 - u(k_i^{(s)})) \Delta t + o(\Delta t)$ отрицательная заявка после проверки на стандартность в i -ой СМО будет признана положительной, перейдет в пустую очередь на обслуживание и уйдет из сети;

8) из состояния $(\bar{d}, \bar{k} + \bar{l}_{2i}, \bar{l} + \bar{l}_{2i-1} - \bar{l}_{2j-1}, t)$, с вероятностью $\mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) u(k_i^{(s)}) n_{ij} u(l_j^{(n)}) \times u(d_i) \Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1, n}$ отрицательная заявка после проверки на стандартность в i -ой СМО

будет признана положительной, перейдет в очередь на обслуживание и удалит 1 положительную заявку, перейдя в КонО j -ой СМО;

9) из состояния $(\bar{d}, \bar{k}, \bar{l} + \bar{l}_{2i-1} - \bar{l}_{2j-1}, t)$, $i = \overline{1, n}$ $\mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) (1 - u(k_i^{(s)})) n_{ij} u(d_i) \times u(l_j^{(n)}) \Delta t + o(\Delta t)$ отрицательная заявка после проверки на стандартность в i -ой СМО будет признана положительной, перейдет в очередь на обслуживание, но застанет систему пустой и перейдет в КонО j -ой СМО;

10) из состояния $(\bar{d} - I_i, \bar{k}, \bar{l}, t)$, с вероятностью $\gamma_i (1 - u(d_i)) \Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1, n}$ СМО S_i восстановится и начнёт обслуживать заявку;

11) из состояния $(\bar{d} + I_i, \bar{k}, \bar{l}, t)$, с вероятностью $\beta_i u(d_i) \Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1, n}$ СМО S_i выйдет из строя;

12) из состояния $(\bar{d}, \bar{k} - \bar{l}_{2i}, \bar{l} + I_{2i}, t)$, с вероятностью $\mu_i^{(c)} p_i^{(s)} u(d_i) u(k_i^{(s)}) \Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1, n}$ КарО i -ой СМО удастся вылечить отрицательную заявку и она отправляется в очередь на обслуживание в i -ую СМО;

13) из состояния $(\bar{d}, \bar{k}, \bar{l} + \bar{l}_{2i}, t)$, с вероятностью $\mu_i^{(c)} (1 - p_i^{(s)}) u(d_i) \Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1, n}$ КарО невылеченная отрицательная заявка покидает сеть;

14) из состояния $(\bar{d}, \bar{k} + \bar{l}_{2i} - \bar{l}_{2j-1}, \bar{l}, t)$, с вероятностью $\mu_i p_{ij}^+ u(d_i) u(k_j^{(p)}) \Delta t + o(\Delta t)$, $i, j = \overline{1, n}$ время обслуживания заявки в i -ой СМО закончилось и она направится в КонО j -ой СМО снова как положительная заявка;

15) из состояния $(\bar{d}, \bar{k} + \bar{l}_{2i}, \bar{l} - \bar{l}_{2j-1}, t)$, с вероятностью $\mu_i u(d_i) p_{ij}^- u(l_j^{(n)}) \Delta t + o(\Delta t)$, $i, j = \overline{1, n}$ время обслуживания заявки в i -ой СМО закончилось и она направляется в КонО j -ой СМО как отрицательная заявка;

16) из состояния $(\bar{d}, \bar{k} + \bar{l}_{2i}, \bar{l}, t)$, с вероятностью $\mu_i u(d_i) p_{i0} \Delta t + o(\Delta t)$, $i = \overline{1, n}$ после обслуживания заявки в i -ой СМО она уходит из сети;

17) из состояния $(\bar{d}, \bar{k}, \bar{l}, t)$, с вероятностью

$$1 - \sum_{i=1}^n \left[\lambda_{0i}^+ u(k_i^{(p)}) + \lambda_{0i}^- u(l_i^{(n)}) + \mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) u(d_i) n_{i0} + \gamma_i (1 - u(d_i)) + u(d_i) \left[\beta_i + \mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) \sum_{j=1}^n n_{ij} u(l_j^{(n)}) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \mu_i^{(v)} q_i^+ p_i^+ u(k_i^{(s)}) + \\
 & + \mu_i^{(v)} (q_i^+ (1 - p_i^+) + (1 - q_i^+) p_i^-) u(l_i^{(c)}) + \\
 & + \mu_i^{(c)} (p_i^{(s)} u(k_i^{(s)}) + (1 - p_i^{(s)})) + \\
 & + \mu_i \left(1 - \sum_{j=1}^n p_{ij}^+ (1 - u(k_j^{(p)})) + p_{ij}^- (1 - u(l_j^{(n)})) \right) \Delta t + \\
 & + o(\Delta t).
 \end{aligned}$$

Аппроксимируем функцию $u(d_i)$ её математическим ожиданием, которое по определению функции Хевисайда равно $P(d_i(t) \geq 1)$. Представив исправность ЛО процессом гибели и размножения с множеством состояний $\{0; 1\}$, положив, что в начальный момент времени все системы исправны, используя работу [9], получим:

$$\begin{aligned}
 u(d_i) & = 1 - \beta_i (\beta_i + \gamma_i)^{-1} (1 - e^{-(\beta_i + \gamma_i)t}) = \\
 & = (\beta_i + \gamma_i)^{-1} (\gamma_i + \beta_i e^{-(\beta_i + \gamma_i)t}).
 \end{aligned}$$

С помощью формулы полной вероятности в которой, перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, можно показать, что нестационарные вероятности состояний в режиме насыщения, т. е. $\forall t k_i^{(p)} > 0, k_i^{(s)} > 0, l_i^{(n)} > 0, l_i^{(c)} > 0, d_i > 0$. Тогда

$$u(k_i^{(p)}) = u(k_i^{(s)}) = u(l_i^{(n)}) = u(l_i^{(c)}) = 1, i = \overline{1, n}$$

удовлетворяют системе РДУ:

$$\begin{aligned}
 & \frac{dP(\vec{d}; \vec{k}, \vec{l}, t)}{dt} = \\
 & = - \sum_{i=1}^n \left\{ \lambda_{0i}^+ + \lambda_{0i}^- + \gamma_i \frac{\beta_i}{\beta_i + \gamma_i} (1 - e^{-(\beta_i + \gamma_i)t}) + \right. \\
 & + \left. \left(\frac{\gamma_i}{\beta_i + \gamma_i} + \frac{\beta_i}{\beta_i + \gamma_i} e^{-(\beta_i + \gamma_i)t} \right) \left[\beta_i + \mu_i + \mu_i^{(v)} + \mu_i^{(c)} \right] \right\} \times \\
 & \quad \times P(\vec{d}; \vec{k}, \vec{l}, t) + \\
 & + \sum_{i=1}^n \left[\lambda_{0i}^+ P(\vec{d}; \vec{k} - \vec{l}_{2i-1}; \vec{l}; t) + \right. \\
 & \quad + \lambda_{0i}^- P(\vec{d}; \vec{k}; \vec{l} - \vec{l}_{2i-1}; t) + \\
 & \quad + \left. \left(\frac{\gamma_i}{\beta_i + \gamma_i} + \frac{\beta_i}{\beta_i + \gamma_i} e^{-(\beta_i + \gamma_i)t} \right) \times \right. \\
 & \quad \times \left[\mu_i^{(v)} q_i^+ p_i^+ P(\vec{d}; \vec{k} + \vec{l}_{2i-1} - \vec{l}_{2i}; \vec{l}; t) + \right. \\
 & \quad + \mu_i^{(c)} p_i^{(s)} P(\vec{d}; \vec{k} - \vec{l}_{2i}; \vec{l} + \vec{l}_{2i}; t) + \\
 & \quad + \mu_i^{(v)} (q_i^+ (1 - p_i^+) P(\vec{d}; \vec{k} + \vec{l}_{2i-1}; \vec{l} - \vec{l}_{2i}; t) + \\
 & \quad + (1 - q_i^+) p_i^- P(\vec{d}; \vec{k}; \vec{l} + \vec{l}_{2i-1} - \vec{l}_{2i}; t)) + \\
 & \quad + \left. \left. \left(\mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) n_{i0} P(\vec{d}; \vec{k} + \vec{l}_{2i}; \vec{l} + \vec{l}_{2i-1}; t) \right) + \right. \right. \\
 & \quad + \left. \left. \sum_{j=1}^n \left\{ \left(\mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) n_{ij} \times \right. \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \left. \left. \times P(\vec{d}; \vec{k} + \vec{l}_{2i}; \vec{l} + \vec{l}_{2i-1} - \vec{l}_{2j-1}; t) \right\} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(\mu_i^{(c)} (1 - p_i^{(s)}) \right) P(\vec{d}; \vec{k}; \vec{l} + \vec{l}_{2i}; t) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \mu_i p_{i0} P(\vec{d}; \vec{k} + \vec{l}_{2i}; \vec{l}; t) \right] + \right. \\
 & + \frac{\gamma_i \beta_i}{\beta_i + \gamma_i} (1 - e^{-(\beta_i + \gamma_i)t}) P(\vec{d} - I_i; \vec{k}, \vec{l}, t) + \\
 & + \frac{\beta_i}{\beta_i + \gamma_i} (\gamma_i + \beta_i e^{-(\beta_i + \gamma_i)t}) P(\vec{d} + I_i; \vec{k}, \vec{l}, t) + \\
 & + \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\gamma_i}{\beta_i + \gamma_i} + \frac{\beta_i}{\beta_i + \gamma_i} e^{-(\beta_i + \gamma_i)t} \right) \times \\
 & \times \left[\mu_i p_{ij}^+ u(k_j^{(p)}) P(\vec{d}; \vec{k} + \vec{l}_{2i} - \vec{l}_{2j-1}; \vec{l}; t) + \right. \\
 & \left. + \mu_i p_{ij}^- P(\vec{d}; \vec{k} + \vec{l}_{2i}; \vec{l} - \vec{l}_{2j-1}; t) \right]. \tag{2.1}
 \end{aligned}$$

3 Метод многомерных производящих функций

Для решения системы РДУ (2.1) используем методику, изложенную в [2]. Обозначим через $\Psi_{5n}(z, t)$, где $z = (z_1, z_2, \dots, z_{5n})$, производящую функцию размерности $5n$:

$$\begin{aligned}
 \Psi_{5n}(z, t) & = \sum_{\substack{d_i=0 \\ i=1, n}}^1 \sum_{\substack{k_i^{(p)}, k_i^{(s)}=0 \\ i=1, n}}^\infty \sum_{\substack{l_i^{(c)}=0 \\ i=1, n}}^\infty \sum_{\substack{l_i^{(n)}=0 \\ i=1, n}}^\infty P(\vec{d}, \vec{k}, \vec{l}, t) \times \\
 & \quad \times \prod_{i=1}^n z_i^{d_i} z_{n+2i-1}^{k_i^{(p)}} z_{n+2i}^{k_i^{(s)}} z_{3n+2i-1}^{l_i^{(c)}} z_{3n+2i}^{l_i^{(n)}}. \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

Суммирование берется по каждому $k_i^{(p)}, k_i^{(s)}, l_i^{(n)}, l_i^{(c)}$, от 0 до ∞ , а значения d_i от 0 до 1 $i = \overline{1, n}$. Пусть X – множество всевозможных состояний нашей СеМО. Обозначим через

$$\begin{aligned}
 & \sum_{(\vec{d}, \vec{k}, \vec{l}) \in X} \bullet = \\
 & = \sum_{d_1=0}^1 \dots \sum_{d_n=0}^1 \sum_{k_1^{(p)}=0}^\infty \sum_{k_1^{(s)}=0}^\infty \dots \sum_{k_n^{(p)}=0}^\infty \sum_{k_n^{(s)}=0}^\infty \sum_{l_1^{(c)}=0}^\infty \sum_{l_1^{(n)}=0}^\infty \dots \sum_{l_n^{(c)}=0}^\infty \sum_{l_n^{(n)}=0}^\infty \bullet.
 \end{aligned}$$

Из (3.1) следует, что

$$\begin{aligned}
 & \frac{d\Psi_{5n}(z, t)}{dt} = \\
 & = \sum_{(\vec{d}, \vec{k}, \vec{l}) \in X} \frac{dP(\vec{k}, \vec{l}, t)}{dt} \prod_{i=1}^n z_i^{d_i} z_{n+2i-1}^{k_i^{(p)}} z_{n+2i}^{k_i^{(s)}} z_{3n+2i-1}^{l_i^{(c)}} z_{3n+2i}^{l_i^{(n)}}. \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

Умножив каждое из уравнений (2.2) на $\prod(\vec{z}) = \prod_{i=1}^n z_i^{d_i} z_{n+2i-1}^{k_i^{(p)}} z_{n+2i}^{k_i^{(s)}} z_{3n+2i-1}^{l_i^{(c)}} z_{3n+2i}^{l_i^{(n)}}$ и просуммировав по всем возможным значениям $k_i^{(p)}, k_i^{(s)}, l_i^{(n)}, l_i^{(c)}$ от 1 до $+\infty$, а значения d_i от 0 до 1 $i = \overline{1, n}$ получим

$$\frac{d\Psi_{5n}(z, t)}{dt} = - \sum_{i=1}^n \left\{ \lambda_{0i}^+ + \lambda_{0i}^- + \gamma_i (1 - u(d_i)) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{\gamma_i}{\beta_i + \gamma_i} + \frac{\beta_i}{\beta_i + \gamma_i} e^{-(\beta_i + \gamma_i)t} \right) \times \\
 & \times \left[\beta_i + \mu_i + \mu_i^{(v)} + \mu_i^{(c)} \right] \Psi_{5n}(z, t) + \\
 & + \sum_{i=1}^n \left[\lambda_{0i}^+ \sum_{(\bar{d}, \bar{k}, \bar{l}) \in X} P(\bar{d}; \bar{k} - \tilde{I}_{2i-1}; \bar{l}; t) \Pi(\bar{z}) + \right. \\
 & + \lambda_{0i}^- \sum_{(\bar{d}, \bar{k}, \bar{l}) \in X} P(\bar{d}; \bar{k}; \bar{l} - \tilde{I}_{2i-1}; t) \Pi(\bar{z}) + \\
 & + \left. \left(\frac{\gamma_i}{\beta_i + \gamma_i} + \frac{\beta_i}{\beta_i + \gamma_i} e^{-(\beta_i + \gamma_i)t} \right) \times \right. \\
 & \times \Pi(\bar{z}) \left[\mu_i^{(v)} q_i^+ p_i^+ \sum_{(\bar{d}, \bar{k}, \bar{l}) \in X} P(\bar{d}; \bar{k} + \tilde{I}_{2i-1} - \tilde{I}_{2i}; \bar{l}; t) + \right. \\
 & + \mu_i^{(c)} p_i^{(s)} \sum_{(\bar{d}, \bar{k}, \bar{l}) \in X} P(\bar{d}; \bar{k} - \tilde{I}_{2i}; \bar{l} + \tilde{I}_{2i}; t) \Pi(\bar{z}) + \\
 & + \mu_i^{(v)} q_i^+ (1 - p_i^+) \times \\
 & \times \sum_{(\bar{d}, \bar{k}, \bar{l}) \in X} P(\bar{d}; \bar{k} + \tilde{I}_{2i-1}; \bar{l} - \tilde{I}_{2i}; t) \Pi(\bar{z}) + \\
 & + \mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) \times \\
 & \times \left. \left(p_i^- \sum_{(\bar{d}, \bar{k}, \bar{l}) \in X} P(\bar{d}; \bar{k}; \bar{l} + \tilde{I}_{2i-1} - \tilde{I}_{2i}; t) \Pi(\bar{z}) + \right. \right. \\
 & + (1 - p_i^-) n_{i0} \sum_{(\bar{d}, \bar{k}, \bar{l}) \in X} P(\bar{d}; \bar{k} + \tilde{I}_{2i}; \bar{l} + \tilde{I}_{2i-1}; t) \Pi(\bar{z}) \left. \left. + \sum_{j=1}^n \mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) n_{ij} \times \right. \right. \\
 & \times \sum_{(\bar{d}, \bar{k}, \bar{l}) \in X} P(\bar{d}; \bar{k} + \tilde{I}_{2i}; \bar{l} + \tilde{I}_{2i-1} - \tilde{I}_{2j-1}; t) \Pi(\bar{z}) + \\
 & + \left. \left. \left(\mu_i^{(c)} (1 - p_i^{(s)}) \right) \sum_{(\bar{d}, \bar{k}, \bar{l}) \in X} P(\bar{d}; \bar{k}; \bar{l} + \tilde{I}_{2i}; t) \Pi(\bar{z}) + \right. \right. \\
 & + \mu_i p_{i0} \sum_{(\bar{d}, \bar{k}, \bar{l}) \in X} P(\bar{d}; \bar{k} + \tilde{I}_{2i}; \bar{l}; t) \Pi(\bar{z}) \left. \left. + \Pi(\bar{z}) \times \right. \right. \\
 & \times \left. \left. \left\{ \frac{\gamma_i \beta_i}{\beta_i + \gamma_i} (1 - e^{-(\beta_i + \gamma_i)t}) P(\bar{d} - I_i; \bar{k}, \bar{l}, t) + \right. \right. \right. \\
 & + \frac{\beta_i}{\beta_i + \gamma_i} (\gamma_i + \beta_i e^{-(\beta_i + \gamma_i)t}) P(\bar{d} + I_i; \bar{k}, \bar{l}, t) \left. \left. \right\} + \right. \\
 & + \left. \left. \left(\frac{\gamma_i}{\beta_i + \gamma_i} + \frac{\beta_i}{\beta_i + \gamma_i} e^{-(\beta_i + \gamma_i)t} \right) \times \right. \right. \\
 & \times \sum_{i,j=1}^n \left[\mu_i p_{ij}^+ \sum_{(\bar{d}, \bar{k}, \bar{l}) \in X} P(\bar{d}; \bar{k} + \tilde{I}_{2i} - \tilde{I}_{2j-1}; \bar{l}; t) \Pi(\bar{z}) + \right. \\
 & + \mu_i p_{ij}^- \sum_{(\bar{d}, \bar{k}, \bar{l}) \in X} P(\bar{d}; \bar{k} + \tilde{I}_{2i}; \bar{l} - \tilde{I}_{2j-1}; t) \Pi(\bar{z}) \left. \right].
 \end{aligned}$$

Рассмотрим суммы последнего равенства. Аналогично [2], получим:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_1 &= \lambda_{0i}^+ \sum_{(\bar{d}, \bar{k}, \bar{l}) \in X} P(\bar{d}; \bar{k} - \tilde{I}_{2i-1}; \bar{l}; t) \times \\
 & \times \prod_{i=1}^n z_i^{d_i} z_{n+2i-1}^{k_i^{(p)}} z_{n+2i}^{k_i^{(s)}} z_{3n+2i-1}^{l_i^{(n)}} z_{3n+2i}^{l_i^{(c)}} = \lambda_{0i}^+ z_{n+2i-1} \Psi_{5n}(z, t); \\
 \Sigma_2 &= \lambda_{0i}^- \sum_{(\bar{d}, \bar{k}, \bar{l}) \in X} P(\bar{d}; \bar{k}; \bar{l} - \tilde{I}_{2i-1}; t) \Pi(\bar{z}) = \\
 & = \lambda_{0i}^- z_{3n+2i-1} \Psi_{5n}(z, t).
 \end{aligned}$$

Рассмотрим другие суммы:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_3 &= \sum_{(\bar{d}, \bar{k}, \bar{l}) \in X} P(\bar{d}; \bar{k} + \tilde{I}_{2i-1} - \tilde{I}_{2i}; \bar{l}; t) \times \\
 & \times \prod_{i=1}^n z_i^{d_i} z_{n+2i-1}^{k_i^{(p)}} z_{n+2i}^{k_i^{(s)}} z_{3n+2i-1}^{l_i^{(n)}} z_{3n+2i}^{l_i^{(c)}} = \frac{z_{n+2i}}{z_{n+2i-1}} \Psi_{5n}(z, t).
 \end{aligned}$$

Последний переход возможен в силу функционирования СМО сети в режиме насыщения. Аналогично данной сумме можно получить:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_4 &= \sum_{(\bar{d}, \bar{k}, \bar{l}) \in X} P(\bar{d}; \bar{k} - \tilde{I}_{2i}; \bar{l} + \tilde{I}_{2i}; t) \times \\
 & \times \prod_{i=1}^n z_i^{d_i} z_{2i-1}^{k_i^{(p)}} z_{2i}^{k_i^{(s)}} z_{2n+2i-1}^{l_i^{(n)}} z_{2n+2i}^{l_i^{(c)}} = \frac{z_{n+2i}}{z_{3n+2i}} \Psi_{5n}(z, t);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma_5 &= \sum_{(\bar{d}, \bar{k}, \bar{l}) \in X} P(\bar{d}; \bar{k} + \tilde{I}_{2i-1}; \bar{l} - \tilde{I}_{2i}; t) \times \\
 & \times \prod_{i=1}^n z_i^{d_i} z_{2i-1}^{k_i^{(p)}} z_{2i}^{k_i^{(s)}} z_{2n+2i-1}^{l_i^{(n)}} z_{2n+2i}^{l_i^{(c)}} = \frac{z_{3n+2i}}{z_{n+2i-1}} \Psi_{5n}(z, t);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma_6 &= \sum_{(\bar{d}, \bar{k}, \bar{l}) \in X} P(\bar{d}; \bar{k}; \bar{l} + \tilde{I}_{2i-1} - \tilde{I}_{2i}; t) \times \\
 & \times \prod_{i=1}^n z_i^{d_i} z_{2i-1}^{k_i^{(p)}} z_{2i}^{k_i^{(s)}} z_{2n+2i-1}^{l_i^{(n)}} z_{2n+2i}^{l_i^{(c)}} = \frac{z_{3n+2i}}{z_{3n+2i-1}} \Psi_{5n}(z, t);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma_7 &= \sum_{(\bar{d}, \bar{k}, \bar{l}) \in X} P(\bar{d}; \bar{k}; \bar{l} + \tilde{I}_{2i}; t) \times \\
 & \times \prod_{i=1}^n z_i^{d_i} z_{2i-1}^{k_i^{(p)}} z_{2i}^{k_i^{(s)}} z_{2n+2i-1}^{l_i^{(n)}} z_{2n+2i}^{l_i^{(c)}} = \frac{1}{z_{3n+2i}} \Psi_{5n}(z, t);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma_8 &= \sum_{(\bar{d}, \bar{k}, \bar{l}) \in X} P(\bar{d}; \bar{k} + \tilde{I}_{2i}; \bar{l}; t) \times \\
 & \times \prod_{i=1}^n z_i^{d_i} z_{2i-1}^{k_i^{(p)}} z_{2i}^{k_i^{(s)}} z_{2n+2i-1}^{l_i^{(n)}} z_{2n+2i}^{l_i^{(c)}} = \frac{1}{z_{n+2i}} \Psi_{5n}(z, t);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma_9 &= \sum_{(\bar{d}, \bar{k}, \bar{l}) \in X} P(\bar{d}; \bar{k} + \tilde{I}_{2i} - \tilde{I}_{2j-1}; \bar{l}; t) \times \\
 & \times \prod_{i=1}^n z_i^{d_i} z_{2i-1}^{k_i^{(p)}} z_{2i}^{k_i^{(s)}} z_{2n+2i-1}^{l_i^{(n)}} z_{2n+2i}^{l_i^{(c)}} = \frac{z_{n+2j-1}}{z_{n+2i}} \Psi_{5n}(z, t);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{10} &= \sum_{(\bar{d}, \bar{k}, \bar{l}) \in X} P(\bar{d}; \bar{k} + \tilde{I}_{2i}; \bar{l} - \tilde{I}_{2j-1}; t) \times \\
 & \times \prod_{i=1}^n z_i^{d_i} z_{2i-1}^{k_i^{(p)}} z_{2i}^{k_i^{(s)}} z_{2n+2i-1}^{l_i^{(n)}} z_{2n+2i}^{l_i^{(c)}} = \frac{z_{3n+2j-1}}{z_{n+2i}} \Psi_{5n}(z, t);
 \end{aligned}$$

$$\Sigma_{11} = \sum_{(\vec{d}, \vec{k}, \vec{l}) \in X} P(\vec{d}; \vec{k} + \vec{I}_{2i}; \vec{l} + \vec{I}_{2i-1}; t) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^n z_i^{d_i} z_{2i-1}^{k_i^{(p)}} z_{2i}^{k_i^{(s)}} z_{2n+2i-1}^{l_i^{(n)}} z_{2n+2i}^{l_i^{(c)}} = \frac{1}{z_{3n+2i-1} z_{n+2i}} \Psi_{5n}(z, t);$$

$$\Sigma_{12} = \sum_{(\vec{d}, \vec{k}, \vec{l}) \in X} P(\vec{d}; \vec{k} + \vec{I}_{2i}; \vec{l} + \vec{I}_{2i-1} - \vec{I}_{2j-1}; t) \prod(\vec{z}) =$$

$$= \frac{z_{3n+2j-1}}{z_{n+2i} z_{3n+2i-1}} \Psi_{5n}(z, t).$$

Аналогично [3] получим:

$$\Sigma_{13} = \sum_{d_i=0}^1 \dots \sum_{d_{n-1}=0}^1 \sum_{k_1^{(p)}=1}^{\infty} \sum_{k_1^{(s)}=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n^{(p)}=1}^{\infty} \sum_{k_n^{(s)}=1}^{\infty} \sum_{l_1^{(n)}=1}^{\infty} \sum_{l_1^{(c)}=1}^{\infty} \dots$$

$$\dots \sum_{l_n^{(n)}=1}^{\infty} \sum_{l_n^{(c)}=1}^{\infty} P(\vec{d} - I_i; \vec{k}, \vec{l}, t) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^n z_i^{d_i} z_{n+2i-1}^{k_i^{(p)}} z_{n+2i}^{k_i^{(s)}} z_{3n+2i-1}^{l_i^{(n)}} z_{3n+2i}^{l_i^{(c)}} = z_i \Psi_{5n}(z, t);$$

$$\Sigma_{14} = \sum_{d_i=0}^1 \dots \sum_{d_{n-1}=0}^1 \sum_{k_1^{(p)}=1}^{\infty} \sum_{k_1^{(s)}=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n^{(p)}=1}^{\infty} \sum_{k_n^{(s)}=1}^{\infty} \sum_{l_1^{(n)}=1}^{\infty} \sum_{l_1^{(c)}=1}^{\infty} \dots$$

$$\dots \sum_{l_n^{(n)}=1}^{\infty} \sum_{l_n^{(c)}=1}^{\infty} P(\vec{d} + I_i; \vec{k}, \vec{l}, t) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^n z_i^{d_i} z_{n+2i-1}^{k_i^{(p)}} z_{n+2i}^{k_i^{(s)}} z_{3n+2i-1}^{l_i^{(n)}} z_{3n+2i}^{l_i^{(c)}} = \frac{1}{z_i} \Psi_{5n}(z, t).$$

С учётом данных сумм, последнее равенство примет вид:

$$\frac{d\Psi_{5n}(z, t)}{dt} =$$

$$= \Psi_{5n}(z, t) \left\{ - \sum_{i=1}^n \left(\lambda_{0i}^+ + \lambda_{0i}^- + \gamma_i (1 - u(d_i)) \right) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\gamma_i}{\beta_i + \gamma_i} + \frac{\beta_i}{\beta_i + \gamma_i} e^{-(\beta_i + \gamma_i)t} \right) \times \right.$$

$$\times \left[\beta_i + \mu_i + \mu_i^{(v)} + \mu_i^{(c)} \right] + \lambda_{0i}^+ z_{n+2i-1} + \lambda_{0i}^- z_{3n+2i-1} +$$

$$\left. + \left(\frac{\gamma_i}{\beta_i + \gamma_i} + \frac{\beta_i}{\beta_i + \gamma_i} e^{-(\beta_i + \gamma_i)t} \right) \times \right.$$

$$\times \left[\mu_i^{(c)} p_i^{(s)} \frac{z_{n+2i}}{z_{3n+2i}} + \mu_i^{(v)} \left(q_i^+ p_i^+ \frac{z_{n+2i}}{z_{n+2i-1}} + \right. \right.$$

$$\left. q_i^+ (1 - p_i^+) \frac{z_{3n+2i}}{z_{n+2i-1}} + (1 - q_i^+) p_i^- \frac{z_{3n+2i}}{z_{3n+2i-1}} \right] +$$

$$\left. + \left(\mu_i^{(c)} (1 - p_i^{(s)}) \right) \frac{1}{z_{3n+2i}} + \mu_i p_{i0} \frac{1}{z_{n+2i}} + \right.$$

$$\left. \left(\mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) n_{i0} \frac{1}{z_{3n+2i-1} z_{n+2i}} \right) \right] +$$

$$\left. + \left(\frac{\gamma_i}{\beta_i + \gamma_i} + \frac{\beta_i}{\beta_i + \gamma_i} e^{-(\beta_i + \gamma_i)t} \right) \times \right.$$

$$\times \sum_{i,j=1}^n \left[\mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) n_{ij} \frac{z_{3n+2j-1}}{z_{n+2i} z_{3n+2i-1}} + \right.$$

$$\left. + \mu_i \left(p_{ij}^+ \frac{z_{n+2j-1}}{z_{n+2i}} + p_{ij}^- \frac{z_{3n+2j-1}}{z_{n+2i}} \right) \right] \left. \right\} +$$

$$+ z_i \gamma_i \left(\frac{\beta_i}{\beta_i + \gamma_i} - \frac{\beta_i}{\beta_i + \gamma_i} e^{-(\beta_i + \gamma_i)t} \right) +$$

$$+ \frac{z_i \gamma_i \beta_i}{\beta_i + \gamma_i} (1 - e^{-(\beta_i + \gamma_i)t}) +$$

$$+ \frac{\beta_i}{z_i (\beta_i + \gamma_i)} (\gamma_i + \beta_i e^{-(\beta_i + \gamma_i)t}) \left. \right\}.$$

Решение данного ДУ с учётом начального состояния $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_1^{(p)}, \alpha_1^{(s)}, \dots, \alpha_n^{(p)}, \alpha_n^{(s)}, \alpha_1^{(n)}, \alpha_1^{(c)}, \dots, \alpha_n^{(n)}, \alpha_n^{(c)})$ т. е. $P(\vec{\alpha}, t) = 1$ имеет вид:

$$\Psi_{5n}(z, t) = \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\beta_i \gamma_i}{(\beta_i + \gamma_i)^2} \right) (1 - z_i) + \right. \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\beta_i}{(\beta_i + \gamma_i)^2} \right) \left[\beta_i \left(\frac{z_i - 1}{z_i} \right) + \mu_i^{(v)} + \mu_i^{(c)} + \mu_i \right] + \right.$$

$$\left. + \left(- \frac{\beta_i}{(\beta_i + \gamma_i)^2} \right) \left[\mu_i^{(c)} p_i^{(s)} \frac{z_{n+2i}}{z_{3n+2i}} + \mu_i^{(v)} \left(q_i^+ p_i^+ \frac{z_{n+2i}}{z_{n+2i-1}} + \right. \right. \right.$$

$$\left. + q_i^+ (1 - p_i^+) \frac{z_{3n+2i}}{z_{n+2i-1}} + (1 - q_i^+) p_i^- \frac{z_{3n+2i}}{z_{3n+2i-1}} \right] +$$

$$\left. + \left(\mu_i^{(c)} (1 - p_i^{(s)}) \right) \frac{1}{z_{3n+2i}} + \mu_i p_{i0} \frac{1}{z_{n+2i}} + \right.$$

$$\left. + \left(\mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) n_{i0} \frac{1}{z_{3n+2i-1} z_{n+2i}} \right) \right] -$$

$$- \sum_{i,j=1}^n \left[\mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) n_{ij} \frac{z_{3n+2j-1}}{z_{n+2i} z_{3n+2i-1}} + \right.$$

$$\left. + \mu_i \left(p_{ij}^+ \frac{z_{n+2j-1}}{z_{n+2i}} + p_{ij}^- \frac{z_{3n+2j-1}}{z_{n+2i}} \right) \right] \left. \right\} \times$$

$$\times \exp \left\{ - \sum_{i=1}^n \left[\gamma_i \left(\frac{\beta_i t}{\beta_i + \gamma_i} + \frac{\beta_i}{(\beta_i + \gamma_i)^2} e^{-(\beta_i + \gamma_i)t} \right) + \right. \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\gamma_i t}{\beta_i + \gamma_i} - \frac{\beta_i}{(\beta_i + \gamma_i)^2} e^{-(\beta_i + \gamma_i)t} \right) \left[\beta_i + \mu_i^{(v)} + \mu_i^{(c)} + \mu_i \right] + \right.$$

$$\left. + (\lambda_{0i}^+ + \lambda_{0i}^- + \mu_i + \lambda_{0i}^+ z_{2i-1} + \lambda_{0i}^- z_{2n+2i-1}) t + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\gamma_i t}{\beta_i + \gamma_i} - \frac{\beta_i}{(\beta_i + \gamma_i)^2} e^{-(\beta_i + \gamma_i)t} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left[\mu_i^{(c)} p_i^{(s)} \frac{z_{n+2i}}{z_{3n+2i}} + \mu_i^{(v)} \left(q_i^+ p_i^+ \frac{z_{n+2i}}{z_{n+2i-1}} + \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 &+ q_i^+ (1 - p_i^+) \frac{z_{3n+2i}}{z_{n+2i-1}} + (1 - q_i^+) p_i^- \frac{z_{3n+2i}}{z_{3n+2i-1}} + \\
 &+ \left(\mu_i^{(c)} (1 - p_i^{(s)}) \right) \frac{1}{z_{3n+2i}} + \mu_i p_{i0} \frac{1}{z_{n+2i}} + \\
 &+ \left(\mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) n_{i0} \frac{1}{z_{3n+2i-1} z_{n+2i}} \right) + \\
 &+ \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\gamma_i t}{\beta_i + \gamma_i} - \frac{\beta_i}{(\beta_i + \gamma_i)^2} e^{-(\beta_i + \gamma_i)t} \right) \times \\
 &\times \left[\mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) n_{ij} \frac{z_{3n+2j-1}}{z_{n+2i} z_{3n+2i-1}} + \right. \\
 &\left. + \mu_i \left(p_{ij}^+ \frac{z_{n+2j-1}}{z_{n+2i}} + p_{ij}^- \frac{z_{3n+2j-1}}{z_{n+2i}} \right) \right] \times \\
 &\times \prod_{i=1}^n z_i^{\alpha_i} z_{n+2i-1}^{\alpha_{i-1}^{(p)}} z_{n+2i}^{\alpha_i^{(s)}} z_{3n+2i-1}^{\alpha_{i-1}^{(n)}} z_{3n+2i}^{\alpha_i^{(c)}}.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

4 Нахождение среднего числа заявок

С помощью производящей функции (3.4), аналогично работе [9], можно находить выражения для среднего числа положительных и отрицательных заявок в КоО, а также числа заявок на обслуживании и на КарО, дифференцируя (3.4) по той компоненте в точке $z_i = 1, i = \overline{1, 5n}$, которая в векторе (1.1) за неё отвечает. Введём обозначения

$$D_i(t) = M\{d_i(t)\}, N_i^{(p)}(t) = M\{k_i^{(p)}(t)\},$$

$$L_i^{(c)}(t) = M\{l_i^{(c)}(t)\},$$

$$N_i^{(s)}(t) = M\{k_i^{(s)}(t)\}, L_i^{(n)}(t) = M\{l_i^{(n)}(t)\}.$$

Выражение для среднего числа исправных ЛО имеет вид:

$$\begin{aligned}
 D_i(t) &= \frac{\partial \Psi_{5n}(z, t)}{\partial z_i} \Big|_{z_i=1, l=\overline{1, 5n}} = \\
 &= \frac{\gamma_i}{\beta_i + \gamma_i} + \frac{\beta_i}{(\beta_i + \gamma_i)^2} e^{-(\beta_i + \gamma_i)t}.
 \end{aligned}$$

То есть среднее число положительных заявок в КоО равно:

$$\begin{aligned}
 N_i^{(p)}(t) &= \frac{\partial \Psi_{5n}(z, t)}{\partial z_{n+2i-1}} \Big|_{z_i=1, l=\overline{1, 5n}} = \left[\lambda_{0i}^+ - \mu_i^{(v)} q_i^+ + \right. \\
 &+ \sum_{j=1}^n \left(\frac{\gamma_j}{\beta_j + \gamma_j} + \frac{\beta_j}{\beta_j + \gamma_j} e^{-(\beta_j + \gamma_j)t} \right) \mu_j p_{ji}^+ \left. \right] + \alpha_i^{(p)}.
 \end{aligned}$$

Аналогично найдём остальные характеристики

$$\begin{aligned}
 L_i^{(n)}(t) &= \left(\lambda_{0i}^- - \mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) + \right. \\
 &+ \sum_{j=1}^n \left[\mu_j^{(v)} (1 - q_j^+) (1 - p_j^-) n_{ji} + \mu_j p_{ji}^- \right] \left. \right) t + \alpha_i^{(n)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_i^{(s)}(t) &= \left\{ \mu_i^{(c)} p_i^{(s)} + \mu_i^{(v)} q_i^+ p_i^+ - \mu_i - \right. \\
 &\left. - \mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) (1 - p_i^-) \right\} t + \alpha_i^{(s)}, \\
 L_i^{(c)}(t) &= \left\{ -\mu_i^{(c)} + \mu_i^{(v)} q_i^+ (1 - p_i^+) + \right. \\
 &\left. + \mu_i^{(v)} (1 - q_i^+) p_i^- \right\} t + \alpha_i^{(c)}.
 \end{aligned}$$

Пример. Рассмотрим СеМО, состоящую из $n = 3$ СМО. Интенсивности входящих потоков положительных и отрицательных заявок в СМО сети $\lambda_{0i}^+, \lambda_{0i}^-$ равны соответственно $\lambda_{01}^+ = 4, \lambda_{02}^+ = 8, \lambda_{03}^+ = 7, \lambda_{0i}^- = 1, i = \overline{1, 3}$. Интенсивности выхода из строя β_i и интенсивности восстановления γ_i равны соответственно $\beta_i = i, i = \overline{1, 3}, \gamma_1 = 4, \gamma_2 = 7, \gamma_3 = 3$. Интенсивности обслуживания заявок в различных очередях представлены в таблице 4.1. Вероятности правильного определения положительных p_i^+ и отрицательных заявок p_i^- в КоО систем сети равны соответственно $p_1^+ = 0,9 + 0,02i, p_1^- = 0,97, p_2^- = 0,85, p_3^- = 0,9$. Вероятности выплечить заявку в карантине $p_i^{(s)}$ следующие $p_i^{(s)} = 0,8 - 0,1i, i = \overline{1, 3}$. В таблице 4.2 представлены вероятности перехода обслуженных заявок в КоО других СМО.

Таблица 4.1 – Интенсивности обслуживания заявок в различных очередях СМО

$i \backslash \mu$	1	2	3
$\mu_i^{(v)}$	7	5	4
μ_i	6	4	2
$\mu_i^{(c)}$	1	8	3

Таблица 4.2 – Вероятности перехода заявок после обслуживания

	p_{ij}^+			p_{ij}^-			p_{i0}
$j \backslash i$	1	2	3	1	2	3	
1	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2
2	0,1	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,3
3	0,1	0,2	0,1	0,2	0,2	0,1	0,1

Расчеты ПФ выполнены в пакете компьютерной алгебры WolframMathematica.

Заключение

В статье представлена G-сеть, состоящая из ненадежных систем с КоО, КарО, и обслуживающими очередями и возможностью перемещения отрицательных заявок между СМО сети

в качестве модели ИСС с АПО и способностью перехода вирусов по ПК сети и выхода многоядерных процессоров ИСС из строя. С помощью ММПФ найдены нестационарные вероятности состояний сети в режиме насыщения и средние характеристики сети. Показано, что число невредоносных файлов при проверке на наличие вирусов при функционировании ИСС в режиме насыщения зависит от числа этих заявок, пришедших в ИСС извне и в результате перехода после обслуживания в данную СМО, а также от интенсивности проверки их на стандартность. Число вирусов в АПО зависит от числа вирусов, пришедших в КС извне, и также от эффективности работы ПО в других ПК ИСС при обнаружении резидентных и нерезидентных вирусов, то есть АПО в каждом ПК ИСС определяет загруженность работы другого.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gelenbe, E.* Product form queueing networks with negative and positive customers / E. Gelenbe // Journal of Applied Probability. – 1991. – Vol. 28. – P. 656–663.
2. *Matalytski, M.* Non-stationary analysis of queueing network with positive and negative messages / M. Matalytski, V. Naumenko // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. – 2013. – Vol. 12, № 2. – P. 61–71.
3. *Копать, Д.Я.* Анализ G-сети с ненадежными линиями обслуживания / Д.Я. Копать, М.А. Матальцкий // Вести Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 441–453.
4. *Летунович, Ю.Е.* Открытые марковские сети массового обслуживания с контрольными очередями и карантинным узлом / Ю.Е. Летунович, О.В. Якубович // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2017. – № 41. – С. 32–38.
5. *Матальцкий, М.А.* Математическая модель компьютерных сетей с антивирусным программным обеспечением / М.А. Матальцкий, Д.Я. Копать, В.В. Науменко // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2021. – Т. 11, № 3. – С. 37–45.
6. *Копать, Д.Я.* Нахождение ожидаемых доходов систем в G-сети с контрольной и карантинной очередями и перемещениями отрицательных заявок между системами сети / Д.Я. Копать // Информационно-коммуникационные технологии: достижения, проблемы, инновации (ИКТ-2022): сб. материалов II Междунар. науч.-практ. конф., Полоцк, 30-31 марта 2022 г. – Новополоцк: ПГУ им. Евфросинии Полоцкой, 2022. – С. 23–28.
7. *Назаров, А.А.* Теория массового обслуживания: учебное пособие / А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов. – 2-е изд., испр. – Томск: Изд-во НТЛ. 2010. – 228 с.
8. *Ивницкий, В.А.* Теория сетей массового обслуживания / В.А. Ивницкий. – Москва: Физматлит, 2004. – 772 с.
9. *Матальцкий, М.А.* Стохастические сети с нестандартными перемещениями заявок: монография / М.А. Матальцкий, В.В. Науменко. – ГрГУ им. Я.Купалы. – Гродно: ГрГУ, 2016. – 346 с.

Поступила в редакцию 03.06.2024.

Информация об авторах

Копать Дмитрий Ярославович – к.ф.-м.н., доцент

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОДНОВРЕМЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРАВОЙ ЧАСТИ И КОЭФФИЦИЕНТА В ПСЕВДО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМ И ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЯМИ

Я.Т. Мегралиев, Р.Ш. Садыхзаде

Бакинский государственный университет

INVERSE PROBLEM OF SIMULTANEOUS DETERMINATION OF THE RIGHT-HAND SIDE AND THE COEFFICIENT IN A THIRD-ORDER PSEUDO-HYPERBOLIC EQUATION WITH PERIODIC AND INTEGRAL CONDITIONS

Y.T. Mehraliyev, R.S. Sadikhzada

Baku State University

Аннотация. В работе исследована обратная краевая задача с неизвестным коэффициентом, который зависит от времени, для псевдо гиперболического уравнения третьего порядка с периодическим и интегральным условиями. При решении исходной обратной краевой задачи осуществляется переход от исходной обратной задачи к некоторой вспомогательной обратной задаче. Существование и единственность решения вспомогательной задачи доказываются с помощью сжатых отображений. Затем снова производится переход к исходной обратной задаче и, следовательно, делается вывод о разрешимости исходной обратной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, псевдо гиперболическое уравнение, метод Фурье, классическое решение.

Для цитирования: Мегралиев, Я.Т. Обратная задача одновременного определения правой части и коэффициента в псевдо гиперболическом уравнении третьего порядка с периодическим и интегральным условиями / Я.Т. Мегралиев, Р.Ш. Садыхзаде // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 78–86. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_78. – EDN: NZDPLC

Abstract. The inverse boundary value problem with an unknown time-dependent coefficient for a third-order pseudo-hyperbolic equation with periodic and integral conditions is studied. When solving the original inverse boundary value problem, the transition from the original inverse problem to some auxiliary inverse problem is carried out. The existence and uniqueness of the solution to an auxiliary problem are proved with the help of contracted mappings. Then the transition to the original inverse problem is made again, as a result, the conclusion is made on the solvability of the original inverse problem.

Keywords: inverse problem, pseudo-hyperbolic equation, Fourier method, classical solution.

For citation: Mehraliyev, Y.T. Inverse problem of simultaneous determination of the right-hand side and the coefficient in a third-order pseudo-hyperbolic equation with periodic and integral conditions / Y.T. Mehraliyev, R.S. Sadikhzada // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 78–86. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_78 (in Russian). – EDN: NZDPLC

Введение

Задачи, в которых вместе с решением того или иного дифференциального уравнения надо определить также коэффициент (коэффициенты) самого уравнения, либо же правую часть уравнения, в математике и в математическом моделировании называют обратными задачами. Другими словами, задача определения правой части дифференциального уравнения или (и) восстановления неизвестных коэффициентов по некоторым данным называется обратной краевой задачей в теории уравнений математической физики. Если в обратной задаче неизвестными являются решение и правая часть, то такая обратная задача называется линейной; если же

неизвестными являются решение и хотя бы один из коэффициентов, то обратная задача будет нелинейной.

Теория обратных задач ведет начало с XVII века. Это задачи нахождения фигуры равновесия вращающейся жидкости, кинематическая проблема в сейсмологии, обратная задача Штурма – Лиувилля и др.

Обратные задачи являются благоприятно развивающимся разделом современной математики и в последнее время широко применяются в различных областях науки. Обратные задачи для различных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах. Отметим работы А.Н. Тихонова [1],

М.М. Лаврентьева [2], [3], А.М. Денисова [4], М.И. Иванчова [5] и их последователей.

Псевдо гиперболические уравнения возникают в теории нестационарного течения вязкого газа при распространении начальных уплотнений в вязком газе [6], в теории солитонов [7] при описании процесса движения электронов в системе «сверхпроводник – диэлектрик с туннельной проводимостью – сверхпроводник».

Разрешимость обратных задач в различных постановках с теми или иными условиями переопределения для псевдо гиперболических уравнений была предметом исследования в работах [8]–[13].

Данная работа посвящена исследованию нелинейной обратной задачи с неизвестным коэффициентом и правой части для псевдо гиперболического уравнения третьего порядка с периодическим и интегральным условиями.

1 Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче

Рассмотрим для уравнения

$$u_{tt}(x,t) - \alpha u_{xxx}(x,t) - \beta u_{xx}(x,t) = a(t)u(x,t) + b(t)g(x,t) + f(x,t) \quad (1.1)$$

в области $D_T = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 \leq t \leq T\}$ обратную краевую задачу с начальными условиями

$$u(x,0) = \int_0^T p_1(t)u(x,t) + \varphi(x), \quad (1.2)$$

$$u_t(x,0) = \int_0^T p_2(t)u(x,t) + \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1),$$

периодическим условием

$$u(0,t) = u(1,t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (1.3)$$

нелокальным интегральным условием

$$\int_0^1 u(x,t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (1.4)$$

и с дополнительным условием

$$u(x_i,t) = h_i(t), \quad (i = 1,2; 0 \leq t \leq T), \quad (1.5)$$

где $x_i \in (0,1)$, $i = 1,2$; $x_1 \neq x_2$ – фиксированное, $\alpha > 0, \beta > 0$ – заданные числа, $f(x,t)$, $g(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $h_i(t) (i = 1,2)$ – заданные функции, а $u(x,t)$, $a(t)$ и $b(t)$ – искомые функции.

Введем обозначения

$$\tilde{C}^2(D_T) =$$

$$= \{u(x,t) : u(x,t) \in C^2(D_T), u_{xxx}(x,t) \in C(D_T)\}.$$

Определение 1.1. Тройку $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ функций $u(x,t) \in \tilde{C}^2(\bar{D}_T)$, $a(t) \in C[0,T]$ и $b(t) \in C[0,T]$, удовлетворяющих уравнению (1.1) в D_T , условиям (1.2) в $[0,1]$, условиями (1.3)–(1.5) в $[0,T]$, назовем классическим решением обратной краевой задачи (1.1)–(1.5).

Для исследования (1.1)–(1.5) рассмотрим следующую задачу:

$$y''(t) = a(t)y(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (1.6)$$

$$y(0) = \int_0^T p_1(t)y(t)dt, \quad y'(0) = \int_0^T p_2(t)y(t)dt, \quad (1.7)$$

где $p_1(t), p_2(t), a(t) \in C[0,T]$ – заданные функции, а $y = y(t)$ – искомая функция, причем под решением задачи (1.6), (1.7) понимаем функцию $y(t)$, принадлежащую $C^2[0,T]$ и удовлетворяющую условиям (1.6), (1.7) в обычном смысле.

Справедлива следующая

Лемма 1.1 [14]. Пусть $p_1(t), p_2(t), a(t) \in C[0,T]$ и выполняется неравенство

$$\left(T \|p_2(t)\|_{C[0,T]} + \|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \frac{T}{2} \|a(t)\|_{C[0,T]} \right) T < 1,$$

то задача (1.6), (1.7) имеет только тривиальное решение.

Теперь наряду с обратной краевой задачей (1.1)–(1.5) рассмотрим следующую вспомогательную обратную краевую задачу. Требуется определить $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ функций $u(x,t) \in \tilde{C}^2(\bar{D}_T)$, $a(t), b(t) \in C[0,T]$, из соотношений (1.1)–(1.3) и

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (1.8)$$

$$h''_i(t) - \alpha u_{xxx}(x_i,t) - \beta u_{xx}(x_i,t) = a(t)h_i(t) + b(t)g(x_i,t) + f(x_i,t) \quad (i = 1,2; 0 \leq t \leq T). \quad (1.9)$$

Справедлива следующая

Теорема 1.1. Пусть

$$\varphi(x) \in C^1[0,1], \quad \psi(x) \in C[0,1], \quad \varphi'(0) = \varphi'(1),$$

$$p_i(t) \in C[0,T], \quad h_i(t) \in C^2[0,T] \quad (i = 1,2),$$

$$p_1(t) \geq 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad f(x,t), \quad g(x,t) \in C(D_T),$$

$$\int_0^1 f(x,t) dx = 0, \quad \int_0^1 g(x,t) dx = 0,$$

$$h(t) \equiv h_1(t)g(x_2,t) - h_2(t)g(x_1,t) \neq 0 \quad (0 \leq t \leq T)$$

и выполняются условия согласования

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 \psi(x) dx = 0, \quad (1.10)$$

$$h_i(0) = \int_0^T p_1(t)h_i(t)dt + \varphi(x_i), \quad (1.11)$$

$$h'_i(0) = \int_0^T p_2(t)h_i(t)dt + \psi(x_i), \quad i = 1,2.$$

Тогда верны следующие утверждения:

1. Каждое классическое решение $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ задачи (1.1)–(1.5) также является решением задачи (1.1)–(1.3), (1.8), (1.9);

2. Каждое решение $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ задачи (1.1)–(1.3), (1.8), (1.9) такое, что

$$\left(T \|p_2(t)\|_{C[0,T]} + \|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \frac{T}{2} \|a(t)\|_{C[0,T]} \right) T < 1, \quad (1.12)$$

является классическим решением (1.1)–(1.5).

Доказательство. Пусть $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ является классическим решением задачи (1.1)–(1.5). Интегрируя уравнение (1.1) по x от 0 до 1, имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x, t) dx - \alpha(u_{xx}(1, t) - u_{xx}(0, t)) - \\ & - \beta(u_x(1, t) - u_x(0, t)) = \\ & = a(t) \int_0^1 u(x, t) dx + b(t) \int_0^1 g(x, t) dx + \\ & + \int_0^1 f(x, t) dx \quad (0 \leq t \leq T). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Допуская, что

$$\int_0^1 f(x, t) dx = \int_0^1 g(x, t) dx = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

из (1.13) находим:

$$\alpha(u_{xx}(1, t) - u_{xx}(0, t)) + \beta(u_x(1, t) - u_x(0, t)) = 0 \quad (0 \leq t \leq T). \quad (1.14)$$

В силу (1.2), с учетом $\varphi'(0) = \varphi'(1)$, нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} & u_x(1, 0) - u_x(0, 0) - \int_0^T p_1(t)(u_x(1, t) - u_x(0, t)) dt = \\ & = u_x(1, 0) - \int_0^T p_1(t)u_x(1, t) dt - (u_x(0, 0) - \\ & - \int_0^T p_1(t)u_x(0, t) dt) = \varphi'(1) - \varphi'(0) = 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Очевидно, что общее решение (1.14) имеет вид:

$$u_x(1, t) - u_x(0, t) = Ce^{-\frac{\beta t}{\alpha}} \quad (0 \leq t \leq T). \quad (1.16)$$

Отсюда, с учетом (1.15), получаем:

$$C \left(1 + \int_0^T p_1(t) e^{-\frac{\beta t}{\alpha}} dt \right) = 0. \quad (1.17)$$

В силу $p_1(t) \geq 0$ ($0 \leq t \leq T$) из (1.17) получим $C = 0$, подставляя его в (1.16), заключаем, что $u_x(1, t) - u_x(0, t) = 0$ ($0 \leq t \leq T$). Следовательно, ясно, что выполняется и условие (1.8).

Подставляя в уравнение (1.1), $x = x_i$ ($i = 1, 2$) находим:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} u(x_i, t) - \alpha u_{xx}(x_i, t) - \beta u_{xx}(x_i, t) = \\ & = a(t)u(x_i, t) + b(t)g(x_i, t) + f(x_i, t) \quad (i = 1, 2; 0 \leq t \leq T). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Далее, считая $h_i(t) \in C^2[0, T]$ ($i = 1, 2$) и дифференцируя два раза (1.5), имеем:

$$u_{tt}(x_i, t) = h_i''(t) \quad (i = 1, 2; 0 \leq t \leq T). \quad (1.19)$$

Из (1.18), с учетом (1.5) и (1.19), приходим к выполнению (1.9).

Теперь предположим, что $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ является решением задачи (1.1)–(1.3), (1.8),

(1.9). Тогда из (1.13), с учетом

$$\int_0^1 f(x, t) dx = \int_0^1 g(x, t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T)$$

и (1.8), находим:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x, t) dx = a(t) \int_0^1 u(x, t) dx \quad (0 \leq t \leq T). \quad (1.20)$$

В силу (1.2), с учетом (1.10), нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} & \int_0^1 u(x, 0) dx - \int_0^T p_1(t) \left(\int_0^1 u(x, t) dx \right) dt = \\ & = \int_0^1 \left(u(x, 0) - \int_0^T p_1(t)u(x, t) dt \right) dx = \int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \\ & \int_0^1 u_t(x, 0) dx - \int_0^T p_2(t) \left(\int_0^1 u(x, t) dx \right) dt = \\ & = \int_0^1 \left(u_t(x, 0) - \int_0^T p_2(t)u(x, t) dt \right) dx = \int_0^1 \psi(x) dx = 0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Так как, в силу леммы 1.1, задача (1.20), (1.21) имеет только тривиальное решение, то

$$\int_0^1 u(x, t) dx = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

т. е. выполняется условие (1.4).

Далее, из (1.9) и (1.18) находим:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} (u(x_i, t) - h_i(t)) = a(t)(u(x_i, t) - h_i(t)) \quad (i = 1, 2; 0 \leq t \leq T). \end{aligned} \quad (1.22)$$

В силу (1.2) и условий согласования (1.11), имеем:

$$\begin{aligned} & u(x_i, 0) - h_i(0) - \int_0^T p_1(t)(u(x_i, t) - h_i(t)) dt = \\ & = u(x_i, 0) - \int_0^T p_1(t)u(x_i, t) dt - \\ & - \left(h_i(0) - \int_0^T p_1(t)h_i(t) dt \right) = \\ & = \varphi(x_i) - \left(h_i(0) - \int_0^T p_1(t)h_i(t) dt \right) = 0, \\ & u_t(x_i, 0) - h_i'(0) - \int_0^T p_2(t)(u(x_i, t) - h_i(t)) dt = \\ & = u_t(x_i, 0) - \int_0^T p_2(t)u(x_i, t) dt - \\ & - \left(h_i'(0) - \int_0^T p_2(t)h_i(t) dt \right) = \\ & = \psi(x_i) - \left(h_i'(0) - \int_0^T p_2(t)h_i(t) dt \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Из (1.22) и (1.23), в силу леммы 1.1, заключаем, что выполняются условие (1.5). \square

2 Приведение вспомогательной обратной задачи к системе

Известно [15], система

$$1, \cos \lambda_1 x, \sin \lambda_1 x, \dots, \cos \lambda_k x, \sin \lambda_k x, \dots \quad (2.1)$$

образует базис в $L_2(0,1)$, где $\lambda_k = 2k\pi$, $k = 0, 1, \dots$

Так как система (2.1) образует базис в $L_2(0,1)$, то очевидно, что для каждого решения $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ задачи (1.1)–(1.3), (1.8), (1.9) его первую компонента $u(x,t)$ имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}(t) \cos \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t) \sin \lambda_k x, \quad (2.2)$$

$$\lambda_k = 2\pi k,$$

где

$$u_{10}(t) = \int_0^1 u(x,t) dx,$$

$$u_{1k}(t) = 2 \int_0^1 u(x,t) \cos \lambda_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$u_{2k}(t) = 2 \int_0^1 u(x,t) \sin \lambda_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Применяя формальную схему метода Фурье, для определения искомым коэффициентов $u_{1k}(t)$ ($k = 0, 1, \dots$) и $u_{2k}(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) функции $u(x,t)$ из (1.1) и (1.2) получаем:

$$u''_{10}(t) = F_{10}(t; u, a, b) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (2.3)$$

$$u''_{ik}(t) + \alpha \lambda_k^2 u'_{ik}(t) + \beta \lambda_k^2 u_{ik}(t) = F_{ik}(t; u, a, b) \quad (i = 1, 2; k = 1, 2, \dots; 0 \leq t \leq T), \quad (2.4)$$

$$u_{10}(0) = \varphi_{10} + \int_0^T p_1(t) u_{10}(t) dt, \quad (2.5)$$

$$u'_{10}(0) = \psi_{10} + \int_0^T p_2(t) u_{10}(t) dt,$$

$$u_{ik}(0) = \varphi_{ik} + \int_0^T p_1(t) u_{ik}(t) dt, \quad (2.6)$$

$$u'_{ik}(0) = \psi_{ik} + \int_0^T p_2(t) u_{ik}(t) dt, \quad i = 1, 2; k = 1, 2, \dots$$

где

$$F_{1k}(t; u, a, b) = a(t)u_{1k}(t) + b(t)g_{1k}(t) + f_{1k}(t), \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$f_{10}(t) = \int_0^1 f(x,t) dx,$$

$$f_{1k}(t) = 2 \int_0^1 f(x,t) \cos \lambda_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$g_{10}(t) = \int_0^1 g(x,t) dx,$$

$$g_{1k}(t) = 2 \int_0^1 g(x,t) \cos \lambda_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\varphi_{10} = \int_0^1 \varphi(x) dx, \quad \psi_{10} = 2 \int_0^1 \psi(x) dx,$$

$$\varphi_{1k} = 2 \int_0^1 \varphi(x) \cos \lambda_k x dx,$$

$$\psi_{1k} = 2 \int_0^1 \psi(x) \cos \lambda_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$F_{2k}(t; u, a, b) = a(t)u_{2k}(t) + b(t)g_{2k}(t) + f_{2k}(t),$$

$$f_{2k}(t) = 2 \int_0^1 f(x,t) \sin \lambda_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$g_{2k}(t) = 2 \int_0^1 g(x,t) \sin \lambda_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\varphi_{2k} = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin \lambda_k x dx,$$

$$\psi_{2k} = 2 \int_0^1 \psi(x) \sin \lambda_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Теперь предположим, что $\alpha^2 \pi^2 - \beta > 0$.

Далее, из (2.3)–(2.6) находим:

$$u_{10}(t) = \varphi_{10} + \int_0^T p_1(t) u_{10}(t) dt + \quad (2.7)$$

$$+ t \left(\psi_{10} + \int_0^T p_2(t) u_{10}(t) dt \right) + \int_0^t (t-\tau) F_{10}(\tau; u, a, b) d\tau,$$

$$u_{ik}(t) = \frac{1}{\gamma_k} \left[(\mu_{2k} e^{\mu_{1k} t} - \mu_{1k} e^{\mu_{2k} t}) \left(\varphi_{ik} + \int_0^T p_1(t) u_{ik}(t) dt \right) + \right. \\ \left. + (e^{\mu_{2k} t} - e^{\mu_{1k} t}) \left(\psi_{ik} + \int_0^T p_2(t) u_{ik}(t) dt \right) + \int_0^t F_{ik}(\tau; u, a, b) (e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \right] \quad (2.8)$$

$$(i = 1, 2; k = 1, 2, \dots),$$

где

$$\mu_{ik} = -\frac{\alpha \lambda_k^2}{2} + (-1)^i \lambda_k \sqrt{\frac{\alpha^2 \lambda_k^2}{4} - \beta} \quad (i = 1, 2),$$

$$\gamma_k = \mu_{2k} - \mu_{1k} = 2\lambda_k \sqrt{\frac{\alpha^2 \lambda_k^2}{4} - \beta} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

После подстановки выражения из (2.7), (2.8) в (2.2), для определения компоненты $u(x,t)$ решения задачи (1.1)–(1.3), (1.8), (1.9), получаем:

$$u(x,t) = \varphi_{10} + \int_0^T p_1(t) u_{10}(t) dt +$$

$$+ t \left(\psi_{10} + \int_0^T p_2(t) u_{10}(t) dt \right) + \int_0^t (t-\tau) F_{10}(\tau; u, a, b) d\tau +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\gamma_k} \left[(\mu_{2k} e^{\mu_{1k} t} - \mu_{1k} e^{\mu_{2k} t}) \left(\varphi_{1k} + \int_0^T p_1(t) u_{1k}(t) dt \right) + \right. \right.$$

$$\left. + (e^{\mu_{2k} t} - e^{\mu_{1k} t}) \left(\psi_{1k} + \int_0^T p_2(t) u_{1k}(t) dt \right) + \right.$$

$$\left. \left. + \int_0^t F_{1k}(\tau; u, a, b) (e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \right] \right\} \cos \lambda_k x +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\gamma_k} \left[(\mu_{2k} e^{\mu_{1k}t} - \mu_{1k} e^{\mu_{2k}t}) \left(\Phi_{2k} + \int_0^T p_1(t) u_{2k}(t) dt \right) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + (e^{\mu_{2k}t} - e^{\mu_{1k}t}) \left(\Psi_{2k} + \int_0^T p_2(t) u_{2k}(t) dt \right) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \int_0^t F_{2k}(\tau; u, a, b) (e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \right] \right\} \sin \lambda_k x. \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

Теперь, из (1.9), с учетом (2.2), имеем:

$$\begin{aligned}
 a(t) = [h(t)]^{-1} & \left\{ g(x_2, t) (h_1''(t) - f(x_1, t)) - \right. \\
 & - g(x_1, t) (h_2''(t) - f(x_2, t)) + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \lambda_{2k}^2 u_{1k}'(t) + \beta \lambda_k^2 u_{1k}(t)) \times \\
 & \times (g(x_2, t) \cos \lambda_k x_1 - g(x_1, t) \cos \lambda_k x_2) + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \lambda_{2k}^2 u_{2k}'(t) + \beta \lambda_k^2 u_{2k}(t)) \times \quad (2.10) \\
 & \left. \times (g(x_2, t) \sin \lambda_k x_1 - g(x_1, t) \sin \lambda_k x_2) \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b(t) = [h(t)]^{-1} & \left\{ h_1(t) (h_2''(t) - f(x_2, t)) - \right. \\
 & - h_2(t) (h_1''(t) - f(x_1, t)) + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \lambda_{2k}^2 u_{1k}'(t) + \beta \lambda_k^2 u_{1k}(t)) \times \\
 & \times (h_1(t) \cos \lambda_k x_2 - h_2(t) \cos \lambda_k x_1) + \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \lambda_{2k}^2 u_{2k}'(t) + \beta \lambda_k^2 u_{2k}(t)) \times \\
 & \left. \times (h_1(t) \sin \lambda_k x_2 - h_2(t) \sin \lambda_k x_1) \right\}. \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

Два раза дифференцируя (2.8), получим:

$$\begin{aligned}
 u_{ik}'(t) = \frac{1}{\gamma_k} & \left[\mu_{1k} \mu_{2k} (e^{\mu_{1k}t} - e^{\mu_{2k}t}) \left(\Phi_{ik} + \int_0^T p_1(t) u_{ik}(t) dt \right) + \right. \\
 & + (\mu_{2k} e^{\mu_{2k}t} - \mu_{1k} e^{\mu_{1k}t}) \left(\Psi_{ik} + \int_0^T p_2(t) u_{ik}(t) dt \right) + \quad (2.12) \\
 & \left. + \int_0^t F_{ik}(\tau; u, a, b) (\mu_{2k} e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - \mu_{1k} e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \right] \quad (i = 1, 2),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_k''(t) = \frac{1}{\gamma_k} & \left[\mu_{1k} \mu_{2k} (\mu_{1k} e^{\mu_{1k}t} - \mu_{2k} e^{\mu_{2k}t}) \times \right. \\
 & \times \left(\Phi_{ik} + \int_0^T p_1(t) u_{ik}(t) dt \right) + \\
 & + (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k}t} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k}t}) \left(\Psi_{ik} + \int_0^T p_2(t) u_{ik}(t) dt \right) + \\
 & \left. + \int_0^t F_{ik}(\tau; u, a, b) (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \right] + \quad (2.13) \\
 & + F_{ik}(t; u, a, b) \quad (i = 1, 2).
 \end{aligned}$$

В силу (2.4) и (2.13) имеем:

$$\alpha \lambda_k^2 u_{ik}'(t) + \beta \lambda_k^2 u_{ik}(t) = F_{ik}(t; u, a, b) - u_{ik}''(t) =$$

$$\begin{aligned}
 & = -\frac{1}{\gamma_k} \left[\mu_{1k} \mu_{2k} (\mu_{1k} e^{\mu_{1k}t} - \mu_{2k} e^{\mu_{2k}t}) \times \right. \\
 & \quad \times \left(\Phi_{ik} + \int_0^T p_1(t) u_{ik}(t) dt \right) + \quad (2.14) \\
 & \quad \left. + (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k}t} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k}t}) \left(\Psi_{ik} + \int_0^T p_2(t) u_{ik}(t) dt \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \int_0^t F_{ik}(\tau; u, a, b) (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \right] \quad (i = 1, 2).
 \end{aligned}$$

Для того, чтобы получить уравнение для второй компоненты $a(t)$ и третьей компоненты $b(t)$ решение задачи (1.1)–(1.3), (1.8), (1.9), подставив выражение (2.14) в (2.10), (2.11) получаем:

$$\begin{aligned}
 a(t) = [h(t)]^{-1} & \left\{ g(x_2, t) (h_1''(t) - f(x_1, t)) - \right. \\
 & - g(x_1, t) (h_2''(t) - f(x_2, t)) - \\
 & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k} \left[\mu_{1k} \mu_{2k} (\mu_{1k} e^{\mu_{1k}t} - \mu_{2k} e^{\mu_{2k}t}) \times \right. \\
 & \quad \times \left(\Phi_{1k} + \int_0^T p_1(t) u_{1k}(t) dt \right) + \\
 & \quad + (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k}t} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k}t}) \left(\Psi_{1k} + \int_0^T p_2(t) u_{1k}(t) dt \right) + \\
 & \quad + \int_0^t F_{1k}(\tau; u, a, b) (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \times \\
 & \quad \times (g(x_2, t) \cos \lambda_k x_1 - g(x_1, t) \cos \lambda_k x_2) + \\
 & \quad - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k} \left[\mu_{1k} \mu_{2k} (\mu_{1k} e^{\mu_{1k}t} - \mu_{2k} e^{\mu_{2k}t}) \times \right. \\
 & \quad \times \left(\Phi_{2k} + \int_0^T p_1(t) u_{2k}(t) dt \right) + \\
 & \quad + (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k}t} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k}t}) \left(\Psi_{2k} + \int_0^T p_2(t) u_{2k}(t) dt \right) + \\
 & \quad + \int_0^t F_{2k}(\tau; u, a, b) (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \times \\
 & \quad \left. \left. \times (g(x_2, t) \sin \lambda_k x_1 - g(x_1, t) \sin \lambda_k x_2) \right\}, \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b(t) = [h(t)]^{-1} & \left\{ h_1(t) (h_2''(t) - f(x_2, t)) - \right. \\
 & - h_2(t) (h_1''(t) - f(x_1, t)) + \\
 & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k} \left[\mu_{1k} \mu_{2k} (\mu_{1k} e^{\mu_{1k}t} - \mu_{2k} e^{\mu_{2k}t}) \times \right. \\
 & \quad \times \left(\Phi_{1k} + \int_0^T p_1(t) u_{1k}(t) dt \right) + \\
 & \quad + (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k}t} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k}t}) \left(\Psi_{1k} + \int_0^T p_2(t) u_{1k}(t) dt \right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^t F_{1k}(\tau; u, a, b) (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \times \\
 & \quad \times (h_1(t) \cos \lambda_k x_2 - h_2(t) \cos \lambda_k x_1) - \\
 & \quad - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k} \left[\mu_{1k} \mu_{2k} (\mu_{1k} e^{\mu_{1k}t} - \mu_{2k} e^{\mu_{2k}t}) \times \right. \\
 & \quad \left. \times \left(\varphi_{2k} + \int_0^T p_1(t) u_{2k}(t) dt \right) + \right. \\
 & \quad \left. + (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k}t} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k}t}) \left(\psi_{2k} + \int_0^T p_2(t) u_{2k}(t) dt \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \int_0^t F_{2k}(\tau; u, a, b) (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \times \right. \\
 & \quad \left. \times (h_1(t) \sin \lambda_k x_2 - h_2(t) \sin \lambda_k x_1) \right]. \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи (1.1)–(1.3), (1.8), (1.9) сведено к решению системы (2.9), (2.15), (2.16) относительно неизвестных функций $u(x, t)$, $a(t)$ и $b(t)$.

Справедлива следующая

Лемма 2.1. Если $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ любое решение задачи (1.1)–(1.3), (1.8), (1.9), то функции

$$\begin{aligned}
 u_{10}(t) &= \int_0^1 u(x, t) dx, \\
 u_{1k}(t) &= 2 \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots, \\
 u_{2k}(t) &= 2 \int_0^1 u(x, t) \sin \lambda_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots,
 \end{aligned}$$

удовлетворяют системе (2.7), (2.8) в $C[0, T]$.

Из леммы 2.1 следует

Следствие 2.1. Пусть система (2.9), (2.15), (2.16) имеет единственное решение. Тогда если задача (1.1)–(1.3), (1.8), (1.9) имеет решение, то оно единственное.

3 Исследование существования и единственности классического решения обратной задачи

Обозначим через $B_{2,T}^\alpha$ [16] совокупность всех функций вида

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}(t) \cos \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t) \sin \lambda_k x,$$

$$\lambda_k = 2\pi k,$$

рассматриваемых в \bar{D}_T , где каждая из функций $u_k(t)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) непрерывна на $[0, T]$ и удовлетворяет условию

$$\begin{aligned}
 J(u) \equiv & \|u_0(t)\|_{C[0,T]} + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^\alpha \|u_{1k}(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \\
 & + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^\alpha \|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty,
 \end{aligned}$$

где α – некоторое неотрицательное число.

Норму в этом множестве определим так:

$$\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^\alpha} = J(u).$$

Через E_T^α обозначим пространство

$$B_{2,T}^\alpha \times C[0, T] \times C[0, T]$$

вектор-функций $z(x, t) = \{u(x, t), a(t), b(t)\}$ с нормой

$$\|z(x, t)\|_{E_T^\alpha} = \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^\alpha} + \|a(t)\|_{C[0,T]} + \|b(t)\|_{C[0,T]}.$$

Известно, что $B_{2,T}^\alpha$ и E_T^α являются банаховыми пространствами.

В пространстве E_T^3 рассмотрим оператор

$$\Phi(u, a, b) = \{\Phi_1(u, a, b), \Phi_2(u, a, b), \Phi_3(u, a, b)\},$$

где

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(u, a, b) &= \\
 &= \tilde{u}(x, t) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_{1k}(t) \cos \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_{2k}(t) \sin \lambda_k x,
 \end{aligned}$$

$$\Phi_2(u, a, b) = \tilde{a}(t), \quad \Phi_3(u, a, b) = \tilde{b}(t),$$

а $\tilde{u}_{10}(t)$, $\tilde{u}_{ik}(t)$ ($i = 1, 2; k = 1, 2, \dots$), $\tilde{a}(t)$ и $\tilde{b}(t)$ равно соответственно правым частям (2.7), (2.8), (2.15) и (2.16).

Нетрудно видеть, что $\mu_{ik} < 0$,

$$|\mu_{ik}| \leq \frac{1}{2} (\alpha \lambda_k^2 - 1) + \sqrt{\frac{1}{4} (\alpha \lambda_k^2 - 1)^2 - \beta \lambda_k^2} \leq \alpha \lambda_k^2,$$

$$|\mu_{1k} \mu_{2k}| = \beta \lambda_k^2,$$

$$\frac{1}{\gamma_k} = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{1}{4} (\alpha \lambda_k^2 - 1)^2 - \beta \lambda_k^2}} \leq \frac{1}{\alpha \lambda_k^2} \equiv \frac{\gamma_0}{\lambda_k^2}$$

$$(i = 1, 2; k = 1, 2, \dots).$$

Учитывая эти соотношения, имеем:

$$\begin{aligned}
 & \|\tilde{u}_{10}(t)\|_{C[0,T]} \leq |\phi_{10}| + T |\psi_{10}| + \\
 & + T \left(\|p_1(t)\|_{C[0,T]} + T \|p_2(t)\|_{C[0,T]} \right) \|u_{10}(t)\|_{C[0,T]} + \\
 & + |\psi_{10}| + T \sqrt{T} \left(\int_0^T |f_{10}(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \\
 & + T \sqrt{T} \|b(t)\|_{C[0,T]} \left(\int_0^T |g_{10}(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \\
 & + T^2 \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u_{10}(t)\|_{C[0,T]}, \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|\tilde{u}_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{7} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\phi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \sqrt{7} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |\psi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \sqrt{7} \left(\|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \|p_2(t)\|_{C[0,T]} \right) \times$$

$$\times T \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sqrt{7T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |f_{ik}(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \\
 & + \sqrt{7T} \|b(t)\|_{C[0,T]} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |g_{ik}(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \\
 & + \sqrt{7T} \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.2) \\
 \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} & \leq \| [h(t)]^{-1} \|_{C[0,T]} \left\{ \|g(x_2, t)(h_1''(t) + f(x_1, t)) - \right. \\
 & \quad \left. - g(x_1, t)(h_2''(t) - f(x_2, t))\|_{C[0,T]} + \right. \\
 & \quad \left. + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \| |g(x_1, t)| + |g(x_2, t)| \|_{C[0,T]} \times \right. \\
 & \quad \left. \times \sum_{i=1}^2 \left[\alpha \beta \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \alpha^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |\psi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
 & \quad \left. + \alpha T (\beta \|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \alpha \|p_2(t)\|_{C[0,T]}) \times \right. \\
 & \quad \left. \times \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
 & \quad \left. + \alpha^2 \sqrt{T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |f_{ik}(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
 & \quad \left. + \alpha^2 \sqrt{T} \|b(t)\|_{C[0,T]} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |g_{ik}(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
 & \quad \left. + \alpha^2 T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (3.3) \\
 \|\tilde{b}(t)\|_{C[0,T]} & \leq \| [h(t)]^{-1} \|_{C[0,T]} \left\{ \|h_1(t)(h_2''(t) - f(x_2, t)) - \right. \\
 & \quad \left. - h_2(t)(h_1''(t) - f(x_1, t))\|_{C[0,T]} + \right. \\
 & \quad \left. + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \| |h_1(t)| + |h_2(t)| \|_{C[0,T]} \times \right. \\
 & \quad \left. \times \sum_{i=1}^2 \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |\psi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
 & \quad \left. + \alpha T (\beta \|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \alpha \|p_2(t)\|_{C[0,T]}) \times \right. \\
 & \quad \left. \times \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
 & \quad \left. + \alpha^2 \sqrt{T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |f_{ik}(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
 & \quad \left. + \alpha^2 \sqrt{T} \|b(t)\|_{C[0,T]} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^2 |g_{ik}(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\left. + \alpha^2 T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (3.4)$$

Предположим, что данные задачи (1.1)–(1.3), (1.8), (1.9) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha^2 \pi^2 - \beta > 0$.
2. $\varphi(x) \in C^2[0,1], \varphi'''(x) \in L_2(0,1),$
 $\varphi(0) = \varphi(1), \varphi'(0) = \varphi'(1), \varphi''(0) = \varphi''(1).$
3. $\psi(x) \in C^2[0,1], \psi'''(x) \in L_2(0,1),$
 $\psi(0) = \psi(1), \psi'(0) = \psi'(1), \psi''(0) = \psi''(1).$
4. $f(x, t), f_x(x, t), f_{xx}(x, t) \in C(D_T),$
 $f_{xxx}(x, t) \in L_2(D_T),$
 $f(0, t) = f(1, t), f_x(0, t) = f_x(1, t),$
 $f_{xx}(0, t) = f_{xx}(1, t) \quad (0 \leq t \leq T).$
5. $g(x, t), g_x(x, t), g_{xx}(x, t) \in C(D_T),$
 $g_{xxx}(x, t) \in L_2(D_T),$
 $g(0, t) = g(1, t), g_x(0, t) = g_x(1, t),$
 $g_{xx}(0, t) = g_{xx}(1, t) \quad (0 \leq t \leq T).$
6. $p_i(t) \in C[0, T], h_i(t) \in C^2[0, T], i = 1, 2,$
 $h(t) \equiv h_1(t)g(x_2, t) - h_2(t)g(x_1, t) \neq 0 \quad (0 \leq t \leq T).$

Тогда из (3.1)–(3.4) соответственно находим

$$\|\tilde{u}(x, t)\|_{B_{2,T}^3} \leq A_1(T) + B_1(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + C_1(T) \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + D_1(T) \|b(t)\|_{C[0,T]}, \quad (3.5)$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq A_2(T) + B_2(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + C_2(T) \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + D_2(T) \|b(t)\|_{C[0,T]}, \quad (3.6)$$

$$\|\tilde{b}(t)\|_{C[0,T]} \leq A_3(T) + B_3(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + C_3(T) \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + D_3(T) \|b(t)\|_{C[0,T]}, \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned}
 A_1(T) & = \|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)} + T \|\psi(x)\|_{L_2(0,1)} + \\
 & \quad + T \sqrt{T} \|f(x, t)\|_{L_2(D_T)} + \\
 & \quad + 2\sqrt{7}\alpha\gamma_0 \|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + 2\sqrt{7}\alpha\gamma_0 \|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \\
 & \quad + 2\sqrt{7T}\gamma_0 \|f_{xx}(x, t)\|_{L_2(D_T)}, \\
 B_1(T) & = T^2 + 2\sqrt{7}\gamma_0 T, \\
 C_1(T) & = T(1 + \sqrt{7}\alpha\gamma_0) \|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \\
 & \quad + T(T + \sqrt{7}\alpha\gamma_0) \|p_2(t)\|_{C[0,T]}, \\
 D_1(T) & = T\sqrt{T} \|g(x, t)\|_{L_2(D_T)} + 2\sqrt{7T}\gamma_0 \|g_{xx}(x, t)\|_{L_2(D_T)}, \\
 A_2(T) & = \| [h(t)]^{-1} \|_{C[0,T]} \left\{ \|h_1(t)(h_2''(t) - f(x_2, t)) - \right. \\
 & \quad \left. - h_2(t)(h_1''(t) - f(x_1, t))\|_{C[0,T]} + \right. \\
 & \quad \left. + 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \| |g(x_1, t)| + |g(x_2, t)| \|_{C[0,T]} \times \right.
 \end{aligned}$$

$$\times \left[\|\Phi''(x)\|_{L_2(0,1)} + \|\Psi''(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{T} \|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} \right],$$

$$B_2(T) = \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \left\| |g(x_1,t)| + |g(x_2,t)| \right\|_{C[0,T]} T,$$

$$C_2(T) = \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \left\| |g(x_1,t)| + |g(x_2,t)| \right\|_{C[0,T]} \times \\ \times \left(\|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \|p_2(t)\|_{C[0,T]} \right) T,$$

$$D_2(T) = \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \left\| |g(x_1,t)| + |g(x_2,t)| \right\|_{C[0,T]} \sqrt{T} \|g_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)},$$

$$A_3(T) = \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]} \left\{ \|g(x_2,t)(h_1''(t) - f(x_1,t)) - \right. \\ \left. - g(x_1,t)(h_2''(t) - f(x_2,t)) \right\|_{C[0,T]} + \\ + 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| |h_1(t)| + |h_2(t)| \right\|_{C[0,T]} \times$$

$$\times \left[\|\Phi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \|\Psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{T} \|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} \right],$$

$$B_3(T) = \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \left\| |h_1(t)| + |h_2(t)| \right\|_{C[0,T]} T,$$

$$C_3(T) = \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left\| |h_1(t)| + |h_2(t)| \right\|_{C[0,T]} \times \left(\|P_1(t)\|_{C[0,T]} + \|P_2(t)\|_{C[0,T]} \right) T,$$

$$D_3(T) = \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \left\| |h_1(t)| + |h_2(t)| \right\|_{C[0,T]} \sqrt{T} \|g_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}.$$

Из неравенств (3.5)–(3.7) заключаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} + \|\tilde{b}(t)\|_{C[0,T]} \leq \\ \leq A(T) + B(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + \\ + C(T) \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + D(T) \|b(t)\|_{C[0,T]}, \quad (3.8)$$

где

$$A(T) = A_1(T) + A_2(T) + A_3(T), \\ B(T) = B_1(T) + B_2(T) + B_3(T), \\ C(T) = C_1(T) + C_2(T) + C_3(T), \\ D(T) = D_1(T) + D_2(T) + D_3(T).$$

Итак, можно доказать следующую

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия 1–6 и справедливо неравенство

$$(A(T) + 2)(B(T)(A(T) + 2) + C(T) + D(T)) < 1, \quad (3.9)$$

тогда задача (1.1)–(1.3), (1.8), (1.9) имеет в шаре $K = K_R \left(\|z\|_{E_T^3} \leq R \leq A(T) + 2 \right)$ пространства E_T^3 единственное решение.

Доказательство. В пространстве E_T^3 рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \quad (3.10)$$

где $z = \{u, a, b\}$, компоненты $\Phi_i(u, a, b)$ ($i = 1, 2, 3$), оператора $\Phi(u, a, b)$, определены правыми частями уравнений (2.9), (2.15) и (2.16) соответственно.

Аналогично (3.8) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E_T^3} \leq A(T) + B(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + \\ + C(T) \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + D(T) \|b(t)\|_{C[0,T]} \leq \\ \leq A(T) + (A(T) + 2)(B(T)(A(T) + 2) + C(T) + D(T)), \\ \|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E_T^3} \leq B(T)(A(T) + 2) \times \\ \times \left(\|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + \|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0,T]} \right) + \\ + C(T) \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + \\ + D(T) \|b_1(t) - b_2(t)\|_{C[0,T]}. \quad (3.12)$$

Тогда из оценок (3.11) и (3.12), с учетом (3.9) следует, что оператор Φ действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому оператор Φ в шаре $K = K_R$ имеет единственную неподвижную точку $\{z\} = \{u, a, b\}$, которая является решением уравнения (3.10), т. е. является в шаре $K = K_R$ единственным решением системы (2.9), (2.15) и (2.16).

Тогда функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B_{2,T}^3$, непрерывна и имеет непрерывные производные $u_x(x,t)$ и $u_{xx}(x,t)$ в D_T .

Теперь из (2.12) получаем:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^3 \|u'_{ik}(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{7} \beta \gamma_0 \|\Phi''(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ + \sqrt{7} \alpha \gamma_0 \|\Psi''(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{7} \left(\|p_1(t)\|_{C[0,T]} + \|p_2(t)\|_{C[0,T]} \right) \times \\ \times T \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \alpha \gamma_{0\sqrt{T}} \|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} + \\ + \sqrt{7} \alpha \gamma_{0T} \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ + \alpha \gamma_{0\sqrt{T}} \|b(t)\|_{C[0,T]} \|g_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} \quad (i = 1, 2).$$

Отсюда следует, что $u_i(x,t)$, $u_{ix}(x,t)$, $u_{ixx}(x,t)$ непрерывны в \bar{D}_T .

Из уравнения (2.4) имеем:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k \|u''_{ik}(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq 2\alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u'_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ 2\beta \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ 2 \left\| \|f_x(x,t) + a(t)u_x(x,t) + b(t)g_x(x,t)\|_{C[0,T]} \right\|_{L_2(0,1)} \\ &\quad (i=1,2). \end{aligned}$$

Из последнего соотношения следует, что функция $u_i(x,t)$ непрерывна в \bar{D}_T .

Легко проверить, что уравнение (1.1) и условия (1.2), (1.3), (1.8), (1.9) удовлетворяются в обычном смысле. Значит, $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ является решением задачи (1.1)–(1.3), (1.8), (1.9). В силу следствия леммы 2.1, оно единственно в шаре $K = K_R$. \square

С помощью теоремы 1.1, в силу теоремы 2.1, непосредственно вытекает однозначная разрешимость исходной задачи (1.1)–(1.5).

Теорема 3.2. Пусть выполняются все условия теоремы 3.1 и $p_1(t) \geq 0$ ($0 \leq t \leq T$),

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(x) dx &= \int_0^1 \psi(x) dx = 0, \\ \int_0^1 f(x,t) dx &= \int_0^1 g(x,t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \\ h_i(0) &= \int_0^T p_1(t) h_i(t) dt + \varphi(x_i), \\ h'_i(0) &= \int_0^T p_2(t) h_i(t) dt + \psi(x_i), \quad i=1,2, \end{aligned}$$

$$\left(T \|P_2(t)\|_{C[0,T]} + \|P_1(t)\|_{C[0,T]} + \frac{T}{2} (A(T) + 2) \right) T < 1.$$

Тогда задача (1.1)–(1.5) имеет в шаре $K = K_R$ ($\|z\|_{E_T^3} \leq A(T) + 2$) единственное классическое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов, А.И. Об устойчивости обратных задач / А.И. Тихонов // Доклады АН СССР. – 1943. – Т. 39, № 5. – С. 195–198.
2. Лаврентьев, М.М. Об одной обратной задаче для волнового уравнения / М.М. Лаврентьев // Доклады АН СССР. – 1964. – Т. 157, № 3. – С. 520–521.
3. Лаврентьев, М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.Т. Шишатский. – Москва: Наука, 1980. – 288 с.
4. Иванов, В.К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Танина. – Москва: Наука, 1978. – 206 с.

5. Денисов, А.М. Введение в теорию обратных задач / А.М. Денисов. – Москва: МГУ, 1994. – 206 с.

6. Войт, С.С. Распространение начальных уплотнений в вязком газе / С.С. Войт // Учёные записки МГУ. Серия Механика. – 1954. – Т. 4, вып. 172. – С. 125–142.

7. Лонгрен, К. Солитоны в действии / К. Лонгрен, Э. Скотт. – Москва: Мир, 1981.

8. Кожанов, А.И. Об одном классе псевдогиперболических уравнений с неизвестным коэффициентом / А.И. Кожанов, Р.Р. Сафиуллова // Челябинский физ.-матем. журнал. – 2022. – Т. 7, вып. 2. – С. 164–180.

9. Lorenzi, A. Identification problems for pseudohyperbolic integrodifferential operator equation / A. Lorenzi, E. Paparoni // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 1993. – Vol. 5, № 19. – P. 523–548.

10. Mehraliyev, Y. Two-dimensional inverse boundary value problem for a third-order pseudo hyperbolic equation with an additional integral condition / Y. Mehraliyev, R. Sadikhzade, A. Ramazanova // European Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2023. – Vol. 16, № 2. – P. 670–686.

11. Мегралиев, Я.Т. О разрешимости одной обратной краевой задачи для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка с дополнительным интегральным условием / Я.Т. Мегралиев // Известия вузов Поволжского региона. Серия Физ.-мат. науки. – 2013. – № 1. – С. 19–33.

12. Azizbayova, E.I. Inverse Boundary-Value Problem for the Equation of Longitudinal Wave Propagation with Non-self-adjoint Boundary Conditions / E.I. Azizbayova, Y.T. Mehraliyev // Filomat. – 2019. – Vol. 33, № 16. – P. 5259–5271. – DOI: <https://doi.org/10.2298/FIL1916259A>

13. Lorenzi, A. Identification problems for pseudohyperbolic integrodifferential operator equation / A. Lorenzi, E. Paparoni // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. – 1993. – Vol. 5, № 19. – P. 523–548.

14. Мегралиев, Я.Т. Обратная краевая задача для одного уравнения Буссинеска четвертого порядка с нелокальными интегральными по времени условиями второго рода / Я.Т. Мегралиев, Ф.Х. Ализаде // Вестник Удмуртского ун-та. Матем. Мех. Компьютер. науки. – 2016. – Т. 26, № 4. – С. 503–514.

15. Будаков, Б.М. Сборник задач по математической физике / Б.М. Будаков, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. – Москва: Наука, 1972.

16. Мегралиев, Я.Т. О разрешимости одной обратной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка / Я.Т. Мегралиев // Вестник ТвГУ. Серия Прикладная математика. – 2011. – № 23. – С. 25–38.

Поступила в редакцию 25.06.2024.

Информация об авторах

Мегралиев Яшар Топуш – д.ф.-м.н., профессор
Садыхзаде Рена Шафи – аспирантка

УДК 512.542

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_87

EDN: OQGGJH

О σ -ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С ОГРАНИЧЕННЫМ \mathfrak{H}_σ -ДЕФЕКТОМ

И.Н. Сафонова, В.В. Скрундь

Белорусский государственный университет, Минск

ON σ -LOCAL FORMATIONS OF FINITE GROUPS WITH BOUNDED \mathfrak{H}_σ -DEFECT

I.N. Safonova, V.V. Skrundz

Belarusian State University, Minsk

Аннотация. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – некоторые σ -локальные формации конечных групп. Тогда через $\mathfrak{F}/_\sigma \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$ обозначают решетку всех σ -локальных формаций \mathfrak{X} таких, что $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$. Длину решетки $\mathfrak{F}/_\sigma \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$ называют \mathfrak{H}_σ -дефектом σ -локальной формации \mathfrak{F} . В частности, если \mathfrak{H} – формация всех единичных групп, то \mathfrak{H}_σ -дефект σ -локальной формации \mathfrak{F} называют l_σ -длиной формации \mathfrak{F} . Изучены общие свойства \mathfrak{H}_σ -дефекта σ -локальных формаций, получено описание минимальных σ -локальных не \mathfrak{H} -формаций для произвольной σ -нильпотентной σ -локальной формации \mathfrak{H} , дано описание решеточного строения σ -локальных формаций \mathfrak{H}_σ -дефекта 1. Получены описания решеточного строения приводимых σ -локальных формаций конечного \mathfrak{H}_σ -дефекта, а также решеточного строения приводимых σ -локальных формаций конечной l_σ -длины.

Ключевые слова: конечная группа, σ -локальная формация, критическая σ -локальная формация, \mathfrak{H}_σ -дефект σ -локальной формации, l_σ -длина σ -локальной формации.

Для цитирования: Сафонова, И.Н. О σ -локальных формациях конечных групп с ограниченным \mathfrak{H}_σ -дефектом / И.Н. Сафонова, В.В. Скрундь // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 87–101. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_87. – EDN: OQGGJH

Abstract. Let \mathfrak{F} and \mathfrak{H} be some σ -local formations of finite groups. Then $\mathfrak{F}/_\sigma \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$ denote the lattice of all σ -local formations \mathfrak{X} such that $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$. The length of the lattice $\mathfrak{F}/_\sigma \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$ is called a \mathfrak{H}_σ -defect of the σ -local formation \mathfrak{F} . In particular, if \mathfrak{H} is the formation of all identity groups, then the \mathfrak{H}_σ -defect of a σ -local formation \mathfrak{F} is called a l_σ -length of the formation \mathfrak{F} . The general properties of \mathfrak{H}_σ -defect of σ -local formations are studied, the description of minimal σ -local non- \mathfrak{H} -formations for an arbitrary σ -nilpotent σ -local formation \mathfrak{H} is obtained, the description of the lattice structure of σ -local formations of \mathfrak{H}_σ -defect 1 is given. The descriptions of the lattice structure of reducible σ -local formations of finite \mathfrak{H}_σ -defect, as well as the lattice structure of reducible σ -local formations of finite l_σ -length are obtained.

Keywords: finite group, σ -local formation, critical σ -local formation, \mathfrak{H}_σ -defect of a σ -local formation, l_σ -length of a σ -local formation.

For citation: Safonova, I.N. On σ -local formations of finite groups with bounded \mathfrak{H}_σ -defect / I.N. Safonova, V.V. Skrundz // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 87–101. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_87 (in Russian). – EDN: OQGGJH

Введение

Все рассматриваемые группы являются конечными. Мы придерживаемся терминологии и обозначений, принятых в [1]–[4].

Изучение и классификация формаций с заданными ограничениями на решетки их подформаций является одной из наиболее интересных и содержательных задач теории формаций конечных групп. Установленная А.Н. Скибой [5]

модулярность решетки всех формаций, а также решетки всех локальных формаций, позволила привлечь методы и конструкции общей теории решеток при изучении внутреннего строения формаций конечных групп. Изучение структурного строения локальной формации \mathfrak{F} на основе свойств достаточно хорошо изученной ее подформации впервые было проведено А.Н.Скибой и Е.А.Таргонским [6]. Данный подход основывался

на введенном ими понятии \mathfrak{H} -дефекта локальной формации. В работе [6] были изучены основные свойства \mathfrak{H} -дефекта локальной формации, а также получена классификация локальных формаций нильпотентного дефекта ≤ 2 . Впоследствии данный метод широко использовался при изучении структурного строения не только локальных формаций [7]–[17], но и ряда формаций других типов, таких как функторно замкнутые кратно локальные формации [2], [18], [19], тотально насыщенные формации [20]–[22], частично насыщенные [23]–[28] и др. При этом, в качестве \mathfrak{H} рассматривалась не только формация всех нильпотентных групп, но и другие достаточно хорошо известные классы (класс всех p -разложимых, p -нильпотентных, π -разложимых, π -нильпотентных, p -замкнутых, метанильпотентных, разрешимых, сверхразрешимых групп и др.).

Отметим, что указанные результаты базировались на разработанной теории минимальных локальных не \mathfrak{H} -формаций. Напомним, что формацию \mathfrak{F} называют минимальной локальной не \mathfrak{H} -формацией [29] или \mathfrak{H}_i -критической формацией [30], если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные локальные подформации из \mathfrak{F} содержатся в классе групп \mathfrak{H} . Общая задача изучения критических формаций была поставлена Л.А. Шеметковым на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп [29]. Решение этой задачи для локальных формаций было получено А.Н. Скибой в цикле работ [30]–[34], завершающим результатом которого стало описание \mathfrak{H}_i -критических формаций для случая, когда \mathfrak{H} – произвольная формация классического типа [34], т. е. формация имеющая такой локальный экран, все неабелевы значения которого локальны.

Развитие теории σ -локальных формаций привело к необходимости изучения и классификации критических σ -локальных формаций. В этой связи задача Л.А. Шеметкова о классификации критических формаций в теории σ -локальных формаций была решена в работах [35], [36] для произвольной σ -локальной формации \mathfrak{H} классического типа.

В данной работе, используя разработанные методы теории критических σ -локальных формаций, мы изучаем структурное строение σ -локальных формаций на основе идей работы [6]. Следуя [2], [6], мы вводим понятие \mathfrak{H}_σ -дефекта σ -локальной формации, а также l_σ -длины σ -локальной формации и изучаем структурное строение σ -локальных формаций конечного \mathfrak{H}_σ -дефекта и конечной l_σ -длины.

Основными результатами являются: описание минимальных σ -локальных не \mathfrak{H} -формаций (теорема 3.4) для произвольной σ -нильпотентной

σ -локальной формации \mathfrak{H} , т. е. неприводимых σ -локальных формаций \mathfrak{H}_σ -дефекта 1; доказано существование формаций такого вида во всякой σ -локальной формации $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ (теорема 3.8); описание структурного строения σ -локальных формаций \mathfrak{H}_σ -дефекта 1 (теорема 3.14) и их характеристизация (теорема 3.18); описание структурного строения приводимых σ -локальных формаций конечного \mathfrak{H}_σ -дефекта (теорема 4.1), а также описание внутреннего строения приводимых σ -локальных формаций конечной l_σ -длины (теорема 4.5).

Основные результаты работы мы доказываем в разделах 3 и 4, а также рассматриваем некоторые, наиболее интересные, следствия полученных результатов.

1 Основные определения и обозначения

Основные понятия теории σ -свойств групп, а также общие свойства σ -локальных формаций и их решеток представлены в работах [3], [4] и [37]–[48].

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел \mathbb{P} . Если n целое число, то $\sigma(n)$ обозначает множество

$$\{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}; \quad \sigma(G) = \sigma(|G|).$$

Группа G называется [3]: σ -примарной, если G является σ_i -группой для некоторого i ; σ -нильпотентной, если G – прямое произведение σ -примарных групп.

Класс всех σ -нильпотентных групп обозначают символом \mathfrak{N}_σ , а класс всех единичных групп символом (1).

Функция f вида $f : \sigma \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ называется *формационной σ -функцией* [4]. Для всякой формационной σ -функции f класс $LF_\sigma(f)$ определяется следующим образом:

$$LF_\sigma(f) = (G \mid G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } G/O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i))$$

для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$.

Если для некоторой формационной σ -функции f имеет место $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, то говорят, что формация \mathfrak{F} является σ -локальной, а f является σ -локальным определением \mathfrak{F} .

Совокупность всех σ -локальных формаций обозначают через l_σ . Формации из l_σ называют l_σ -формациями.

Пусть f – формационная σ -функция. Тогда символом $\text{Supp}(f)$ обозначают *носитель f* , то есть, множество всех σ_i таких, что $f(\sigma_i) \neq \emptyset$. Формационную σ -функцию f называют: *внутренней*, если $f(\sigma_i) \subseteq LF_\sigma(f)$ для всех i ; *полной*, если $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$ для всех i .

Если F – полная внутренняя формационная σ -функция и $\mathfrak{F} = LF_\sigma(F)$, то F называют *каноническим σ -локальным определением \mathfrak{F}* .

Мы также используем $\bigcap_{j \in J} f_j$ для обозначения *формационной σ -функции H* такой, что $h(\sigma_i) = \bigcap_{j \in J} f_j(\sigma_i)$, в частности,

$$h(\sigma_i) = (f_1 \cap f_2)(\sigma_i) = f_1(\sigma_i) \cap f_2(\sigma_i),$$

для всех i .

Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ множество всех σ -локальных определений формации \mathfrak{F} . Тогда $f = \bigcap_{j \in J} f_j$ называют *наименьшим σ -локальным определением \mathfrak{F}* .

Пусть \mathfrak{X} – некоторая совокупность групп. Через $l_\sigma \text{form}(\mathfrak{X})$ обозначают пересечение всех σ -локальных формаций, содержащих \mathfrak{X} , и называют σ -локальной формацией, порожденной совокупностью групп \mathfrak{X} . Если $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form}(G)$ для некоторой группы G , то \mathfrak{F} называют *однопорожденной σ -локальной формацией*.

Для произвольного набора групп \mathfrak{X} и любого $\sigma_i \in \sigma$ символом $\mathfrak{X}(\sigma_i)$ [39, с. 962] обозначают класс групп, определенный следующим образом: $\mathfrak{X}(\sigma_i) = (G / O_{\sigma_i}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$, если $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{X}(\sigma_i) = \emptyset$, если $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{X})$.

Пусть \mathfrak{X} – некоторый набор групп. Для любого $\sigma_i \in \sigma$ и всякого неотрицательного целого числа n , следуя [2, с. 31], мы определяем класс групп $\mathfrak{X}_n^\sigma(\sigma_i)$ следующим образом: $\mathfrak{X}_n^\sigma(\sigma_i) = l_n^\sigma \text{form}(\mathfrak{X}(\sigma_i))$, если $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X})$ и $\mathfrak{X}_n^\sigma(\sigma_i) = \emptyset$, если $\sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{X})$. В частности, если $n = 0$, то $\mathfrak{X}_0^\sigma(\sigma_i) = \text{form}(\mathfrak{X}(\sigma_i))$, если $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X})$ и $\mathfrak{X}_0^\sigma(\sigma_i) = \emptyset$, если $\sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{X})$.

Пусть теперь $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ – некоторый набор σ -локальных формаций. Тогда мы полагаем $\bigvee_\sigma(\mathfrak{F}_j \mid j \in J) = l_\sigma \text{form}(\bigcup_{j \in J} \mathfrak{F}_j)$. В частности, если \mathfrak{h} и \mathfrak{F} – σ -локальные формации, то

$$\mathfrak{h} \bigvee_\sigma \mathfrak{F} = l_\sigma \text{form}(\mathfrak{h} \cup \mathfrak{F}).$$

Следуя [29], [30], *минимальной σ -локальной не \mathfrak{h} -формацией* или *\mathfrak{h}_σ -критической формацией* мы называем σ -локальную формацию $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{h}$, все собственные σ -локальные подформации которой содержатся в классе групп \mathfrak{h} .

σ -Локальную формацию \mathfrak{h} мы называем *σ -локальной формацией классического типа*, если \mathfrak{h} имеет такое σ -локальное определение, все неабелевы значения которого σ -локальны.

Напомним [2, с. 12], что непустой набор формаций θ называется *полной решеткой формаций*, если пересечение любого множества формаций из θ снова принадлежит θ , а множество θ

содержит формацию \mathfrak{M} , такую, что $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{M}$ для всех $\mathfrak{h} \in \theta$. Всякую формацию из θ называют *θ -формацией*.

Для любых двух θ -формаций \mathfrak{M} и \mathfrak{h} , где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{h}$, через $\mathfrak{h} /_\theta \mathfrak{M}$ обозначают [2, с. 168] решетку θ -формаций \mathfrak{X} таких, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{h}$. В частности, через $\mathfrak{h} /_\sigma \mathfrak{M}$ обозначают решётку σ -локальных формаций \mathfrak{X} таких, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{h}$.

Пусть θ – некоторая полная модулярная решетка формаций.

Напомним [2, с. 192], что для любых двух θ -формаций \mathfrak{F} и \mathfrak{M} , где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ через $|\mathfrak{F} : \mathfrak{M}|_\theta$ обозначают длину решетки $\mathfrak{F} /_\theta \mathfrak{M}$ θ -формаций, заключенных между \mathfrak{M} и \mathfrak{F} . Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{h} – произвольные θ -формации. Тогда \mathfrak{h}_θ -дефектом формации \mathfrak{F} называют длину решетки $\mathfrak{F} /_\theta \mathfrak{h} \cap \mathfrak{F}$ (конечную или бесконечную) и обозначают $|\mathfrak{F} : \mathfrak{h} \cap \mathfrak{F}|_\theta$.

В частности, следуя [2, с. 192] \mathfrak{h}_σ -дефектом σ -локальной формации \mathfrak{F} мы будем называть длину решетки $\mathfrak{F} /_\sigma \mathfrak{h} \cap \mathfrak{F}$ и обозначать $|\mathfrak{F} : \mathfrak{h} \cap \mathfrak{F}|_\sigma$.

Пусть 0_θ – нуль решетки θ , $\mathfrak{F} \in \theta$. Тогда θ -длиной [2, с. 212] формации \mathfrak{F} называют кардинальное число $|\mathfrak{F} : 0_\theta|_\theta$. В частности, *длиной* формации \mathfrak{F} называют число $l(\mathfrak{F}) = |\mathfrak{F} : \emptyset|$; *длиной* локальной формации \mathfrak{F} называют число $l_1(\mathfrak{F}) = |\mathfrak{F} : (1)|_1$.

Следуя [2, с. 212], l_σ -длиной σ -локальной формации \mathfrak{F} назовем число $l_\sigma(\mathfrak{F}) = |\mathfrak{F} : (1)|_\sigma$.

Напомним также понятие прямого разложения формации [2, с. 171]. Пусть $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ – некоторый непустой набор подклассов $\mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{F}$ такой, что $\mathfrak{F}_{j_1} \cap \mathfrak{F}_{j_2} = (1)$ для любого $j_1 \neq j_2$ из J . Если, кроме того, каждая группа $G \in \mathfrak{F}$ имеет вид $G = A_{j_1} \times \dots \times A_{j_t}$, где $A_{j_1} \in \mathfrak{F}_{j_1}, \dots, A_{j_t} \in \mathfrak{F}_{j_t}$ для некоторого $j_1, \dots, j_t \in J$, то пишут, что $\mathfrak{F} = \bigoplus_{j \in J} \mathfrak{F}_j$ (в частности, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{F}_t$, если $J = \{1, \dots, t\}$).

Подформацию \mathfrak{M} формации \mathfrak{F} называют *дополняемой* [2, с. 170] в \mathfrak{F} , если $\mathfrak{F} = \text{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{h})$ и $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{h} = (1)$ для некоторой подформации \mathfrak{h} из \mathfrak{F} . В этом случае подформацию \mathfrak{h} называют *дополнением* к \mathfrak{M} в \mathfrak{F} .

2 Вспомогательные результаты

Для доказательства основного результата работы нам понадобятся следующие известные факты теории формаций.

Следующие две леммы являются частными случаями (при $\theta = I_\sigma$) лемм 5.2.8, 5.2.7 [2] соответственно.

Лемма 2.1 [2, лемма 5.2.8]. Пусть \mathfrak{M} , \mathfrak{F} , \mathfrak{X} и \mathfrak{H} – σ -локальные формации, причем $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{X}$. Тогда если m , r и t – соответственно \mathfrak{H}_σ -дефекты формаций \mathfrak{M} , \mathfrak{X} и \mathfrak{F} , причем $m, r < \infty$, то $t \leq m + r$.

Лемма 2.2 [2, лемма 5.2.7] Пусть \mathfrak{M} , \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – σ -локальные формации, причем $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда $|\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\sigma \leq |\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma$.

Частным случаем теоремы 1.15 [39, с. 960] является

Лемма 2.3. Множество I_σ всех σ -локальных формаций образует полную алгебраическую и модулярную решетку формаций.

Лемма 2.4 [36, лемма 2.1]. Пусть Π – непустое подмножество из σ . Тогда \mathfrak{G}_Π всех Π -групп и класс \mathfrak{N}_Π всех σ -нильпотентных Π -групп являются σ -локальными формациями и справедливы следующие утверждения.

(1) $\mathfrak{G}_\Pi = LF_\sigma(g)$, где g – каноническое σ -локальное определение формации \mathfrak{G}_Π . При этом, $g(\sigma_i) = \mathfrak{G}_\Pi$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $g(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$;

(2) $\mathfrak{N}_\Pi = LF_\sigma(n) = LF_\sigma(N)$, где n и N , соответственно, наименьшее и каноническое σ -локальные определения формации \mathfrak{N}_Π . При этом, $n(\sigma_i) = (1)$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $n(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$, $N(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $N(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$.

Лемма 2.5 [44, теорема 3.1]. Пусть \mathfrak{F} – непустая формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) \mathfrak{F} является n -кратно σ -локальной ($n \geq 1$);
- (ii) $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{F}_{n-1}^\sigma(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$;
- (iii) $\mathfrak{F} = \text{form}(\cup_{\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{F}_{n-1}^\sigma(\sigma_i))$.

Лемма 2.6 [44, с. 2372]. Пусть $\mathfrak{F} = \bigoplus_{j \in J} \mathfrak{F}_j$, где $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ – набор таких формаций, что $\sigma(\mathfrak{F}_a) \cap \sigma(\mathfrak{F}_b) = \emptyset$ для любых $a, b \in J$, $a \neq b$. Тогда и только тогда формация \mathfrak{F} n -кратно σ -локальна ($n \geq 1$), когда \mathfrak{F}_j является n -кратно σ -локальной формацией для всех j .

Лемма 2.7 [36, теорема А]. Пусть \mathfrak{H} – σ -локальная формация классического типа и H – ее каноническое σ -локальное определение. Тогда и только тогда \mathfrak{F} является минимальной σ -локальной не \mathfrak{H} -формацией, когда $\mathfrak{F} = I_\sigma \text{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом

$P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из следующих условий:

- (1) $G = P$ – простая σ_i -группа, $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$;
- (2) P – не σ -примарная группа и $P = G^{H(\sigma_i)}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(P)$;
- (3) $G = P \rtimes K$, где $P = C_G(P)$ – p -группа, $p \in \sigma_i$, а K – такая монолитическая группа с монолитом $Q = K^{H(\sigma_i)}$, что $\sigma_i \notin \sigma(Q)$ и либо $\Phi(K) = 1$ и $K^{H(\sigma_i)} \subseteq Q$ для всех $\sigma_j \in \sigma(Q)$, либо K – минимальная не $H(\sigma_i)$ -группа одного из следующих типов:

- (а) группа кватернионов порядка 8, если $2 \notin \sigma_i$;
- (б) неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты $q \notin \sigma_i$;
- (в) циклическая q -группа, $q \notin \sigma_i$.

Лемма 2.8 [39, лемма 2.1]. Пусть f и H – формационные σ -функции и пусть $\Pi = \text{Supp}(f)$. Допустим, что $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f) = LF_\sigma(h)$. Тогда:

- (1) $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$;
- (2) $\mathfrak{F} = (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{G}_\Pi$. Следовательно, \mathfrak{F} является насыщенной формацией;
- (3) если каждая группа из \mathfrak{F} является σ -разрешимой, то $\mathfrak{F} = (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{G}_\Pi$;

- (4) если $\sigma_i \in \Pi$, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$;
- (5) $\mathfrak{F} = LF_\sigma(F)$, где F – единственная формационная σ -функция, такая что $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} F(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $F(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Более того, $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$ для всех i .

Частным случаем теоремы 1.1. работы [43] является следующая

Лемма 2.9 [43, теорема 1.1]. Пусть \mathfrak{X} – некоторый непустой набор групп, $\mathfrak{F} = I_\sigma \text{form} \mathfrak{X} = LF_\sigma(f)$, где f – наименьшее σ -локальное определение \mathfrak{F} . Тогда верны следующие утверждения:

- (1) $\sigma(\mathfrak{X}) = \sigma(\mathfrak{F})$;
- (2) $f(\sigma_i) = \mathfrak{X}_0^\sigma(\sigma_i) = \mathfrak{F}_0^\sigma(\sigma_i)$ для всех i ;
- (3) если H – произвольное σ -локальное определение \mathfrak{F} , то для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X})$ имеем $f(\sigma_i) = \text{form}(A \mid A \in \mathfrak{F} \cap h(\sigma_i), O_{\sigma_i}(A) = 1)$.

Лемма 2.10 [43, лемма 3.2]. Пусть $\sigma_i \in \sigma$, $1 \neq P$ – σ_i -группа, A – группа с $O_{\sigma_i}(A) = 1$ и $G = P \wr A = K \rtimes A$ – регулярное сплетение групп P и A , где K – база сплетения G . Тогда

$$O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G) = K.$$

Лемма 2.11 является частным случаем леммы 2.6 [39].

Лемма 2.11 [39, лемма 2.6]. Пусть $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form}(\mathfrak{X}) = LF_\sigma(f)$ – σ -локальная формация порожденная \mathfrak{X} и $\Pi = \sigma(\mathfrak{X})$. Пусть t – формационная σ -функция, такая, что $t(\sigma_i) = \text{form}(\mathfrak{X}(\sigma_i))$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $t(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Тогда:

- (1) $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$;
- (2) t является σ -локальным определением \mathfrak{F} ; и
- (3) $t(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ для всех i .

Лемма 2.12 [39, лемма 2.2]. Если класс групп \mathfrak{F}_j является σ -локальной формацией для всех $j \in J$, то класс $\bigcap_{j \in J} \mathfrak{F}_j$ также является σ -локальной формацией.

Лемма 2.13 [45, следствие 3.7]. Для любых σ -локальных формаций \mathfrak{M} и \mathfrak{H} имеет место решеточный изоморфизм $\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{H} /_\sigma \mathfrak{M} \cong \mathfrak{H} /_\sigma \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}$.

Лемма 2.14 [2, теорема 4.3.2]. Пусть \mathfrak{M} – непустая подформация формации \mathfrak{F} . Тогда если \mathfrak{H} – дополнение к \mathfrak{M} в \mathfrak{F} , то

$$\mathfrak{F} = \{A \times B \mid A \in \mathfrak{M}, B \in \mathfrak{H}\}.$$

3 σ -Локальные формации \mathfrak{h}_σ -дефекта 1

Элемент a решетки L называется *нейтральным* (иначе *дистрибутивным*) [49, с. 96], если для любых $b, c \in L$ тройка a, b, c порождает дистрибутивную подрешетку в решетке L .

Лемма 3.1. Пусть \mathfrak{M} и \mathfrak{F} – σ -локальные формации конечного \mathfrak{h}_σ -дефекта, где \mathfrak{h} – нейтральный элемент решетки σ -локальных формаций. Тогда для \mathfrak{h}_σ -дефекта формации $\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{F}$ имеет место следующее равенство

$$|\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{F} : \mathfrak{h} \cap (\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{F})|_\sigma = |\mathfrak{M} : \mathfrak{h} \cap \mathfrak{M}|_\sigma + |\mathfrak{F} : \mathfrak{h} \cap \mathfrak{F}|_\sigma - |\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} : \mathfrak{h} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})|_\sigma.$$

Доказательство. Пусть \mathfrak{M} , \mathfrak{F} и \mathfrak{h} – σ -локальные формации, удовлетворяющие условию леммы. Положим $\mathfrak{X} = \mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{F}$, $\mathfrak{L} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}$, $t = |\mathfrak{X} : \mathfrak{h} \cap \mathfrak{X}|_\sigma$, $m = |\mathfrak{M} : \mathfrak{h} \cap \mathfrak{M}|_\sigma$, $k = |\mathfrak{F} : \mathfrak{h} \cap \mathfrak{F}|_\sigma$ и $l = |\mathfrak{L} : \mathfrak{h} \cap \mathfrak{L}|_\sigma$. Согласно лемме 2.1 имеем $t \leq m + k$.

Пусть теперь $\mathfrak{X}_1 := \mathfrak{X} \vee_\sigma \mathfrak{h}$, $\mathfrak{M}_1 := \mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{h}$, $\mathfrak{F}_1 := \mathfrak{F} \vee_\sigma \mathfrak{h}$ и $\mathfrak{L}_1 := \mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{h}$. В силу лемм 2.1 и 2.2 справедливы равенства $|\mathfrak{X}_1 : \mathfrak{h} \cap \mathfrak{X}_1|_\sigma = t$,

$$|\mathfrak{M}_1 : \mathfrak{h} \cap \mathfrak{M}_1|_\sigma = m, \quad |\mathfrak{F}_1 : \mathfrak{h} \cap \mathfrak{F}_1|_\sigma = k$$

и $|\mathfrak{L}_1 : \mathfrak{h} \cap \mathfrak{L}_1|_\sigma = l$. Поэтому длина решетки $\mathfrak{X}_1 /_\sigma (\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{h}) = \mathfrak{X} \vee_\sigma \mathfrak{h} /_\sigma \mathfrak{h}$ равна t . Заметим также, что формации \mathfrak{M}_1 и \mathfrak{F}_1 являются элементами

решетки $\mathfrak{X} \vee_\sigma \mathfrak{h} /_\sigma \mathfrak{h} \cong \mathfrak{X} /_\sigma \mathfrak{X} \cap \mathfrak{h}$ и \mathfrak{h}_σ -дефект является функцией высоты решетки $\mathfrak{X} /_\sigma \mathfrak{X} \cap \mathfrak{h}$. Значит, в силу теоремы 16 [49, с. 61] имеет место следующее равенство

$$|\mathfrak{M}_1 \vee_\sigma \mathfrak{F}_1 : \mathfrak{h} \cap (\mathfrak{M}_1 \vee_\sigma \mathfrak{F}_1)|_\sigma = |\mathfrak{M}_1 : \mathfrak{h} \cap \mathfrak{M}_1|_\sigma + |\mathfrak{F}_1 : \mathfrak{h} \cap \mathfrak{F}_1|_\sigma - |\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{F}_1 : \mathfrak{h} \cap (\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{F}_1)|_\sigma. \quad (3.1)$$

Поскольку при этом

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 \vee_\sigma \mathfrak{F}_1 &= (\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{h}) \vee_\sigma (\mathfrak{F} \vee_\sigma \mathfrak{h}) = \\ &= (\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{F}) \vee_\sigma \mathfrak{h} = \mathfrak{X} \vee_\sigma \mathfrak{h}, \end{aligned}$$

то $|\mathfrak{M}_1 \vee_\sigma \mathfrak{F}_1 : \mathfrak{h} \cap (\mathfrak{M}_1 \vee_\sigma \mathfrak{F}_1)|_\sigma = t$. Кроме того, так как по условию леммы формация \mathfrak{h} является нейтральным элементом решетки σ -локальных формаций, то

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{F}_1 &= (\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{h}) \cap (\mathfrak{F} \vee_\sigma \mathfrak{h}) = \\ &= (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}) \vee_\sigma \mathfrak{h} = \mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{h} = \mathfrak{L}_1. \end{aligned}$$

Наконец, поскольку

$$|\mathfrak{L}_1 : \mathfrak{h} \cap \mathfrak{L}_1|_\sigma = l = |\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} : \mathfrak{h} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})|_\sigma,$$

то из (3.1) получаем

$$|\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{F} : \mathfrak{h} \cap (\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{F})|_\sigma = |\mathfrak{M} : \mathfrak{h} \cap \mathfrak{M}|_\sigma + |\mathfrak{F} : \mathfrak{h} \cap \mathfrak{F}|_\sigma - |\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} : \mathfrak{h} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})|_\sigma. \quad \square$$

Лемма 3.2. Пусть \mathfrak{F} , \mathfrak{M} и \mathfrak{h} – такие σ -локальные формации, что $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{M}$. Тогда в том и только в том случае \mathfrak{h}_σ -дефект формации \mathfrak{F} конечен, когда конечны \mathfrak{h}_σ -дефект формации $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}$ и \mathfrak{M}_σ -дефект формации \mathfrak{F} , при этом

$$|\mathfrak{F} : \mathfrak{h} \cap \mathfrak{F}|_\sigma = |\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} : \mathfrak{h} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})|_\sigma + |\mathfrak{F} : \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}|_\sigma.$$

Доказательство. Необходимость. Допустим, что \mathfrak{h}_σ -дефект формации \mathfrak{F} конечен и пусть $|\mathfrak{F} : \mathfrak{h} \cap \mathfrak{F}|_\sigma = n$. В силу леммы 2.2 имеет место неравенство

$$|\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} : \mathfrak{h} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})|_\sigma \leq |\mathfrak{F} : \mathfrak{h} \cap \mathfrak{F}|_\sigma.$$

Поэтому \mathfrak{h}_σ -дефект формации $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}$ также конечен. Пусть $k = |\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} : \mathfrak{h} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})|_\sigma$. Согласно определению \mathfrak{h}_σ -дефекта и в силу леммы 2.3 из модулярности решетки l_σ всех σ -локальных формаций следует, что найдутся такие цепи σ -локальных формаций

$$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{F}_{n-1} \subset \mathfrak{F}_n = \mathfrak{F},$$

$$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{h} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}) =$$

$$= \mathfrak{L}_0 \subset \mathfrak{L}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{L}_{k-1} \subset \mathfrak{L}_k = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F},$$

что \mathfrak{F}_i – максимальная σ -локальная подформация в \mathfrak{F}_{i+1} и \mathfrak{L}_j – максимальная σ -локальная подформация в \mathfrak{L}_{j+1} для всех $i = 0, 1, \dots, n-1$ и $j = 0, 1, \dots, k-1$. Так как $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$, то ввиду леммы 2.3 из модулярности решетки l_σ вытекает, что существует цепь

$$\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{X}_{r-1} \subset \mathfrak{X}_r = \mathfrak{F}$$

σ -локальных формаций длины $t = n - k$ такая, что \mathfrak{X}_i – максимальная σ -локальная подформация в \mathfrak{X}_{i+1} , $i = 0, 1, \dots, t-1$. Поэтому решетка $\mathfrak{F} /_{\sigma} \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}$ имеет конечную длину, равную t . Тогда $t = |\mathfrak{F} : \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}|_{\sigma}$ по определению \mathfrak{M}_{σ} -дефекта.

Достаточность. Пусть

$$k = |\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})|_{\sigma}$$

и $t = |\mathfrak{F} : \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}|_{\sigma}$. Тогда имеем

$$\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{X}_{t-1} \subset \mathfrak{X}_t = \mathfrak{F},$$

$$\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}) =$$

$$= \mathfrak{L}_0 \subset \mathfrak{L}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{L}_{k-1} \subset \mathfrak{L}_k = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F},$$

где \mathfrak{X}_i и \mathfrak{L}_j – максимальная σ -локальная подформация в \mathfrak{X}_{i+1} и \mathfrak{L}_{j+1} соответственно, $i = 0, 1, \dots, t-1$ и $j = 0, 1, \dots, k-1$. Поэтому существует максимальная цепь σ -локальных формаций длины $k+t$ от $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$ до \mathfrak{F} . Ввиду леммы 2.3 из модулярности решетки l_{σ} последнее влечет, что $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_{\sigma} = k+t$, т. е. имеет место равенство

$$|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_{\sigma} =$$

$$= |\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})|_{\sigma} + |\mathfrak{F} : \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}|_{\sigma}. \quad \square$$

Лемма 3.3. Пусть \mathfrak{H} – такая σ -локальная формация, что $(1) \neq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_{\sigma}$. Тогда имеет место равенство $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\Pi}$, где $\Pi = \sigma(\mathfrak{H})$.

Доказательство. Пусть $\Pi = \sigma(\mathfrak{H})$ и \mathfrak{G}_{Π} – класс всех Π -групп. В силу леммы 2.4(1) формация \mathfrak{G}_{Π} σ -локальна. Поэтому имеет место включение $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{G}_{\Pi} \cap \mathfrak{N}_{\sigma} = \mathfrak{N}_{\Pi}$.

С другой стороны, ввиду леммы 2.5 (ii) имеем $\mathfrak{G}_{\sigma} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma} \mathfrak{H}_{\sigma}^{\sigma}(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{H}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$. Значит, с учетом леммы 2.6 имеем

$$\mathfrak{N}_{\Pi} = l_{\sigma} \text{form}(\cup_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i}) = \oplus_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{H}.$$

Таким образом, $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\Pi}$, где $\Pi = \sigma(\mathfrak{H})$. \square

Если \mathfrak{F} – минимальная σ -локальная не \mathfrak{H} -формация, то формация \mathfrak{F} имеет единственную максимальную σ -локальную подформацию \mathfrak{M} и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Поэтому \mathfrak{H}_{σ} -дефект формации \mathfrak{F} равен 1. Таким образом, всякая минимальная σ -локальная не \mathfrak{H} -формация является l_{σ} -неприводимой σ -локальной формацией \mathfrak{H}_{σ} -дефекта 1.

Теорема 3.4. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – такие σ -локальные формации, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_{\sigma}$. Тогда и только тогда \mathfrak{F} является минимальной σ -локальной не \mathfrak{H} -формацией, когда $\mathfrak{F} = l_{\sigma} \text{form}(G)$, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ и выполняется одно из условий:

(1) $G = P$ – простая σ_i -группа для некоторого $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$;

(2) $G = P$ – такая не σ -примарная простая группа, что $\sigma(G) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$;

(3) $G = P \rtimes H$, где $P = C_G(P)$ – абелева p -группа для некоторого $p \in \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$, а H – простая σ_j -группа, $j \neq i$. Кроме того, для всякой группы $G_1 = A \rtimes H = K \rtimes H$, где A – некоторая простая σ_i -группа, K – база регулярного сплетения групп A и H , имеет место равенство $\mathfrak{F} = l_{\sigma} \text{form}(G_1)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть \mathfrak{F} – минимальная σ -локальная не \mathfrak{H} -формация. В силу леммы 3.3 имеет место равенство $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\Pi}$, где $\Pi = \sigma(\mathfrak{H})$. По лемме 2.4(2) имеем $\mathfrak{N}_{\Pi} = LF_{\sigma}(n)$, где n – наименьшее σ -локальное определение формации \mathfrak{N}_{Π} , что $n(\sigma_i) = (1)$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $n(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Следовательно, формация \mathfrak{N}_{Π} является σ -локальной формацией классического типа. Пусть H – каноническое σ -локальное определение формации \mathfrak{H} . Тогда согласно лемме 2.7 имеем $\mathfrak{F} = l_{\sigma} \text{form}(D)$, где D – такая монолитическая группа с монолитом $R = D^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из следующих условий:

(i) $D = R$ – простая σ_i -группа, $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$;

(ii) R – не σ -примарная группа и $R = D^{H(\sigma_i)}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(R)$;

(iii) $D = R \rtimes L$, где $R = C_D(R)$ – p -группа, $p \in \sigma_i$, а L – такая монолитическая группа с монолитом $S = L^{H(\sigma_i)}$, что $\sigma_i \notin \sigma(S)$ и либо $\Phi(L) = 1$ и $L^{H(\sigma_j)} \subseteq S$ для всех $\sigma_j \in \sigma(S)$, либо L – минимальная не $H(\sigma_i)$ -группа одного из следующих типов: (a) группа кватернионов порядка 8, если $2 \notin \sigma_i$; (b) неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты $q \notin \sigma_i$; (c) циклическая q -группа, $q \notin \sigma_i$.

Если для группы D справедливо условие (i), то, очевидно, группа D удовлетворяет условию (1) теоремы.

Пусть для группы выполняется условие (ii). Из леммы 2.4(2) следует, что $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $H(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Покажем, что в этом случае $D = R$ и $\sigma(D) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$.

Действительно, поскольку $R = D^{H(\sigma_i)}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(R)$, то $H(\sigma_i) \neq \emptyset$. Поэтому $\sigma(R) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$ по лемме 2.8 (5).

С другой стороны, так как $|\sigma(R)| > 1$, то для $\sigma_i, \sigma_j \in \sigma(R)$, где $i \neq j$, имеем

$$D/R \in H(\sigma_i) \cap H(\sigma_j) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \cap \mathfrak{G}_{\sigma_j} = (1).$$

Поэтому и в силу монолитичности группы D заключаем, что D – не σ -примарная простая группа такая, что $\sigma(D) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$. Следовательно, группа D удовлетворяет условию (2) теоремы.

Пусть, наконец, для группы выполняется условие (iii). Поскольку $S = L^{H(\sigma_i)}$, то $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$ и $\Phi(L) = 1$, так как $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – насыщенная формация.

Покажем, что L является простой σ_j -группой, $j \neq i$. Действительно, поскольку $L \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$, то $L = S$ является простой σ -примарной группой ввиду монолитичности и σ -нильпотентности группы L . Следовательно, L – σ_j -группа, где $j \neq i$. Значит, группа D удовлетворяет условию (3) теоремы.

Докажем теперь вторую часть утверждения (3) теоремы. Пусть $G_1 = A \wr H = K \rtimes H$, где A – некоторая простая σ_i -группа, K – база регулярного сплетения групп A и H .

Покажем, что $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form}(G_1)$. Пусть $\mathfrak{F}_1 = l_\sigma \text{form}(G_1)$, f и f_1 – наименьшие σ -локальные определения формаций \mathfrak{F} и \mathfrak{F}_1 соответственно. По построению группы G_1 имеем $\sigma(G_1) = \sigma(G)$. Ввиду леммы 2.9 имеем $f(\sigma_s) = \text{form}(G/O_{\sigma_s, \sigma_s}(G))$ для всех $\sigma_s \in \sigma(G)$ и $f(\sigma_s) = \emptyset$ для всех $\sigma_s \notin \sigma(G)$, а также $f_1(\sigma_s) = \text{form}(G_1/O_{\sigma_s, \sigma_s}(G_1))$ для всех $\sigma_s \in \sigma(G_1)$ и $f_1(\sigma_s) = \emptyset$ для всех $\sigma_s \notin \sigma(G_1)$. В силу леммы 2.10 имеем $O_{\sigma_r, \sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G) = P$ и $O_{\sigma_r, \sigma_i}(G_1) = O_{\sigma_i}(G_1) = K$.

Следовательно, для всех $\sigma_s \notin \sigma(G)$ имеем $f(\sigma_s) = f_1(\sigma_s) = \emptyset$ и

$$f(\sigma_i) = \text{form}(G/O_{\sigma_i, \sigma_i}(G)) = \text{form}(H),$$

$$f(\sigma_j) = \text{form}(G/O_{\sigma_j, \sigma_j}(G)) = (1),$$

$$f_1(\sigma_i) = \text{form}(G_1/O_{\sigma_i, \sigma_i}(G_1)) = \text{form}(H),$$

$$f_1(\sigma_j) = \text{form}(G_1/O_{\sigma_j, \sigma_j}(G_1)) = (1).$$

Таким образом, $f(\sigma_k) = f_1(\sigma_k)$ для всех $\sigma_k \in \sigma$. Последнее означает, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Достаточность. Пусть \mathfrak{F} – формация, удовлетворяющая условиям теоремы. Тогда если для \mathfrak{F} выполнены условия (1) или (2), то в силу леммы 2.7 (1) (2), соответственно, формация \mathfrak{F} является минимальной σ -локальной не \mathfrak{H} -формацией.

Пусть теперь для формации \mathfrak{F} выполнено условие (3). Покажем, что в этом случае для формации \mathfrak{F} выполнены условия леммы 2.7 (3).

Действительно, пусть H – каноническое σ -локальное определение формации \mathfrak{H} .

Поскольку по лемме 3.3 имеет место равенство $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\Pi$, где $\Pi = \sigma(\mathfrak{H})$, то в силу леммы 2.4 (2) имеем $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ и $H(\sigma_j) = \mathfrak{G}_{\sigma_j}$. Тогда, очевидно, что $H = H^{H(\sigma_i)}$ – монолитическая группа, $\sigma_i \notin \sigma(H)$ и, кроме того, $\Phi(H) = 1$ и $1 = H^{H(\sigma_j)} \subseteq H$. Следовательно, для группы G выполнены условия (3) леммы 2.7 (3). Поэтому $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form}(G)$ является минимальной σ -локальной не \mathfrak{H} -формацией. \square

В случае, когда $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\sigma$ – формация всех σ -нильпотентных групп, из теоремы 3.4 получаем

Следствие 3.5. *Тогда и только тогда \mathfrak{F} – минимальная σ -локальная не σ -нильпотентная формация, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form}(G)$ и выполняется одно из следующих условий: 1) G – простая не σ -примарная группа; 2) $G = P \rtimes K$, где $P = C_G(P)$ – p -группа, $p \in \sigma_i$, а K – простая σ_j -группа, $j \neq i$.*

В частности, если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$, из теоремы 3.4 имеем

Следствие 3.6. *Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – такие локальные формации, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$. Тогда и только тогда \mathfrak{F} является минимальной локальной не \mathfrak{H} -формацией, когда $\mathfrak{F} = l \text{form}(G)$, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^5$ и выполняется одно из условий:*

$$(1) G = P \text{ – группа простого порядка } p \notin \pi(\mathfrak{H});$$

(2) $G = P$ – такая неабелева простая группа, что $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$;

(3) $G = P \rtimes H$, где $P = C_G(P)$ – абелева p -группа для некоторого $p \in \pi(\mathfrak{H})$, а H – простая q -группа, $q \neq p$. Кроме того, для всякой группы $G_1 = A \wr H = K \rtimes H$, где A – группа простого порядка p , K – база регулярного сплетения групп A и H , имеет место равенство $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form}(G_1)$.

Кроме того, если $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$ – формация всех σ -нильпотентных групп, из теоремы 3.4 получаем следующий известный результат.

Следствие 3.7. *Тогда и только тогда \mathfrak{F} – минимальная локальная не σ -нильпотентная формация, когда $\mathfrak{F} = l \text{form}(G)$ и выполняется одно из следующих условий:*

$$(1) G \text{ – группа Шмидта};$$

$$(2) G \text{ – простая неабелева группа.}$$

Теорема 3.8. *Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – такие σ -локальные формации, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$. Тогда в \mathfrak{F} имеется по крайней мере одна минимальная σ -локальная не \mathfrak{H} -подформация.*

Доказательство. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – σ -локальные формации из условия теоремы. Выберем

в $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ группу G минимального порядка. Тогда G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$. Если при этом $G = P$ – простая σ_i -группа для некоторого $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$ или такая не σ -примарная простая группа, что $\sigma(G) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$, то в силу леммы 3.4 имеем $\mathcal{L} = l_{\sigma} \text{form}(G)$ – искомая минимальная σ -локальная не \mathfrak{H} -подформация. Если, кроме того, $G = P$ – такая не σ -примарная простая группа, что $\sigma(G) \not\subseteq \sigma(\mathfrak{H})$, то, поскольку $\sigma(G) \subseteq \sigma(\mathfrak{F})$ и найдется $\sigma_k \in \sigma(G) \setminus \sigma(\mathfrak{H})$, имеем $\mathfrak{G}_{\sigma_k} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}_{\sigma_k} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Поэтому \mathfrak{G}_{σ_k} – искомая минимальная σ -локальная не \mathfrak{H} -формация из \mathfrak{F} .

Пусть теперь группа G не является простой. Понятно, что $|\sigma(G)| > 1$ и $G/P \neq 1$. Пусть $\sigma_j \in \sigma(G/P)$.

Рассмотрим прежде случай когда P не является σ -примарной группой. Пусть $\sigma_i \in \sigma(P)$, где $\sigma_i \neq \sigma_j$. Тогда найдутся такие простые σ_i -группа A и σ_j -группа H , что $A \in \mathfrak{F}$ и $H \in \mathfrak{H}$. Пусть $D = A \wr H = K \rtimes H$, где K – база регулярного сплетения групп A и H . Тогда по лемме 3.4 имеем $\mathfrak{F} = l_{\sigma} \text{form}(D)$ – искомая минимальная σ -локальная не \mathfrak{H} -формация из \mathfrak{F} .

Пусть теперь группа P является σ -примарной, т. е. σ_i -группой для некоторого i . Тогда, поскольку группа G не является σ -примарной, то найдется $\sigma_k \in \sigma(G/P)$ такое, что $k \neq i$. Поскольку при этом $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$ и $\sigma_k \in \sigma(\mathfrak{H})$, то найдутся простые σ_i -группа $A \in \mathfrak{F}$ и σ_k -группа $H \in \mathfrak{H}$. Пусть $D = A \wr H = K \rtimes H$, где K – база регулярного сплетения групп A и H . Снова, применяя лемму 3.4, получим, что $\mathfrak{F} = l_{\sigma} \text{form}(D)$ – искомая минимальная σ -локальная не \mathfrak{H} -формация из \mathfrak{F} . \square

Следствие 3.9. Пусть \mathfrak{F} не σ -нильпотентная σ -локальная формация. Тогда в \mathfrak{F} имеется по крайней мере одна минимальная не σ -нильпотентная σ -локальная подформация.

В частности, если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$, из теоремы 3.8 получаем следующие известные результаты (см. теорему 2.3.2 [2, с. 72]).

Следствие 3.10 [2, с. 72]. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – такие локальные формации, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$. Тогда в \mathfrak{F} имеется по крайней мере одна минимальная локальная не \mathfrak{H} -подформация.

Если $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$ – формация всех nilпотентных групп, имеем

Следствие 3.11 [2, с. 72]. Пусть \mathfrak{F} не nilпотентная локальная формация. Тогда в \mathfrak{F} имеется по крайней мере одна минимальная не nilпотентная локальная подформация.

Лемма 3.12. Всякая σ -нильпотентная σ -локальная формация является нейтральным элементом решетки l_{σ} . В частности, формация \mathfrak{N}_{σ} всех σ -нильпотентных групп является нейтральным элементом решетки l_{σ} .

Доказательство. Пусть \mathfrak{H} , \mathfrak{F} и \mathfrak{M} – некоторые σ -локальные формации, причем формация \mathfrak{H} является σ -нильпотентной. В силу леммы 2.3 и теоремы 12 [49, с. 56] для доказательства утверждения леммы достаточно показать, что

$$\mathfrak{H} \cap (\mathfrak{F} \vee_{\sigma} \mathfrak{M}) = (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) \vee_{\sigma} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}).$$

Если $\mathfrak{H} = (1)$, то утверждение очевидно. Пусть $\mathfrak{H} \neq (1)$ и $\Pi_1 = \sigma(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F})$ и $\Pi_2 = \sigma(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M})$. Так как $(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) \vee_{\sigma} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}) = l_{\sigma} \text{form}((\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) \cup (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}))$, то по лемме 2.11 имеем

$$\begin{aligned} \sigma((\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) \vee_{\sigma} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M})) &= \sigma((\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) \cup (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M})) = \\ &= \sigma(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) \cup \sigma(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}) = \Pi_1 \cup \Pi_2. \end{aligned}$$

Поскольку $(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) \vee_{\sigma} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{F} \vee_{\sigma} \mathfrak{M})$, то $\sigma((\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) \vee_{\sigma} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M})) \subseteq \sigma(\mathfrak{H} \cap (\mathfrak{F} \vee_{\sigma} \mathfrak{M}))$, т. е. $\Pi_1 \cup \Pi_2 \subseteq \sigma(\mathfrak{H} \cap (\mathfrak{F} \vee_{\sigma} \mathfrak{M}))$.

С другой стороны, $\mathfrak{F} \vee_{\sigma} \mathfrak{M} = l_{\sigma} \text{form}(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{M})$ и опять же по лемме 2.11 имеем

$$\sigma(\mathfrak{F} \vee_{\sigma} \mathfrak{M}) = \sigma(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{M}) = \sigma(\mathfrak{F}) \cup \sigma(\mathfrak{M}).$$

Ввиду леммы 2.12 формация $\mathfrak{H} \cap (\mathfrak{F} \vee_{\sigma} \mathfrak{M})$ σ -локальна. Теперь, если $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H} \cap (\mathfrak{F} \vee_{\sigma} \mathfrak{M}))$, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{F} \vee_{\sigma} \mathfrak{M})$ по лемме 2.5 (ii). Поэтому

$$\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H}) \cap \sigma(\mathfrak{F} \vee_{\sigma} \mathfrak{M}) = \sigma(\mathfrak{H}) \cap (\sigma(\mathfrak{F}) \cup \sigma(\mathfrak{M})).$$

Значит, $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) \cup (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M})$. Следовательно,

$$\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) \cup \sigma(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}) = \Pi_1 \cup \Pi_2.$$

Таким образом,

$$\sigma((\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) \vee_{\sigma} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M})) = \sigma(\mathfrak{H} \cap (\mathfrak{F} \vee_{\sigma} \mathfrak{M})).$$

Так как при этом обе формации

$$(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) \vee_{\sigma} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}) \text{ и } \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{F} \vee_{\sigma} \mathfrak{M})$$

σ -нильпотентны и σ -локальны, то по лемме 3.3 имеем $(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}) \vee_{\sigma} (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}) = \mathfrak{N}_{\Pi} = \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{F} \vee_{\sigma} \mathfrak{M})$, где $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$. Следовательно, σ -локальные формации \mathfrak{H} , \mathfrak{F} и \mathfrak{M} образуют дистрибутивную тройку в решетке l_{σ} и поэтому \mathfrak{H} – нейтральный элемент в l_{σ} . \square

Следующая лемма является прямым следствием лемм 3.1 и 3.12.

Лемма 3.13. Пусть \mathfrak{M} и \mathfrak{F} – σ -локальные формации конечного \mathfrak{H}_{σ} -дефекта, где \mathfrak{H} – σ -нильпотентная σ -локальная формация. Тогда для \mathfrak{H}_{σ} -дефекта формации $\mathfrak{M} \vee_{\sigma} \mathfrak{F}$ имеем

$$\begin{aligned} |\mathfrak{M} \vee_{\sigma} \mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \vee_{\sigma} \mathfrak{F})|_{\sigma} &= |\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_{\sigma} + \\ &+ |\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_{\sigma} - |\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})|_{\sigma}. \end{aligned}$$

В частности, если $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\sigma}$, то для σ -нильпотентного l_{σ} -дефекта формации $\mathfrak{M} \vee_{\sigma} \mathfrak{F}$ имеем

$$|\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{F} : \mathfrak{N}_\sigma \cap (\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{F})|_\sigma = |\mathfrak{M} : \mathfrak{N}_\sigma \cap \mathfrak{M}|_\sigma + \\ + |\mathfrak{F} : \mathfrak{N}_\sigma \cap \mathfrak{F}|_\sigma - |\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} : \mathfrak{N}_\sigma \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})|_\sigma.$$

Напомним, что если \mathfrak{M} и \mathfrak{h} – такие формации, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{h}$. Тогда формацию \mathfrak{M} называют подформацией формации \mathfrak{h} или иначе \mathfrak{h} -подформацией.

Теорема 3.14. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{h} – такие σ -локальные формации, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$. Тогда и только тогда \mathfrak{h}_σ -дефект формации \mathfrak{F} равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{L}$, где \mathfrak{M} – σ -локальная подформация из \mathfrak{h} , \mathfrak{L} – минимальная σ -локальная не \mathfrak{h} -формация, при этом:

(1) всякая \mathfrak{h} -подформация из \mathfrak{F} входит в $\mathfrak{M} \vee_\sigma (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{h})$;

(2) всякая σ -локальная подформация \mathfrak{X} из \mathfrak{F} такая, что $\mathfrak{X} \not\subseteq \mathfrak{h}$, имеет вид $\mathfrak{L} \vee_\sigma (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{h})$.

Доказательство. Необходимость. Пусть \mathfrak{F} – σ -локальная формация с \mathfrak{h}_σ -дефектом 1. Так как $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{h}$, то по теореме 3.8 в \mathfrak{F} содержится некоторая минимальная σ -локальная не \mathfrak{h} -формация \mathfrak{L} . По условию теоремы $\mathfrak{M} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{h}$ – максимальная σ -локальная подформация формации \mathfrak{F} . Поэтому $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{L}$.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{L}$, где \mathfrak{L} – минимальная σ -локальная не \mathfrak{h} -формация, а \mathfrak{M} – σ -локальная формация из \mathfrak{h} . Тогда \mathfrak{h}_σ -дефект формации \mathfrak{F} равен 1 в силу леммы 3.13.

Покажем теперь, что имеют место утверждения (1) и (2). Поскольку $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{h}$ – максимальная σ -локальная подформация в \mathfrak{L} , то в силу лемм 2.3 и 2.13 из решеточного изоморфизма

$$\mathfrak{F} /_\sigma (\mathfrak{M} \vee_\sigma (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{h})) = \\ = (\mathfrak{M} \vee_\sigma (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{h})) \vee_\sigma \mathfrak{L} /_\sigma (\mathfrak{M} \vee_\sigma (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{h})) = \\ = \mathfrak{L} /_\sigma (\mathfrak{L} \cap ((\mathfrak{L} \cap \mathfrak{h}) \vee_\sigma \mathfrak{M})) = \\ = \mathfrak{L} /_\sigma ((\mathfrak{L} \cap \mathfrak{h}) \vee_\sigma (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M})) = \mathfrak{L} /_\sigma \mathfrak{L} \cap \mathfrak{h}$$

получаем, что $\mathfrak{M} \vee_\sigma (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{h})$ – максимальная σ -локальная подформация в \mathfrak{F} . Так как $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{h}$, то любая \mathfrak{h} -подформация из \mathfrak{F} входит в $(\mathfrak{L} \cap \mathfrak{h}) \vee_\sigma \mathfrak{M}$. Поэтому имеет место утверждение (1).

Покажем теперь, что в \mathfrak{F} нет отличных от \mathfrak{L} минимальных σ -локальных не \mathfrak{h} -формаций. Допустим, что это неверно и пусть \mathfrak{L}_1 – такая минимальная σ -локальная не \mathfrak{h} -формация из \mathfrak{F} , что $\mathfrak{L}_1 \neq \mathfrak{L}$.

Тогда поскольку \mathfrak{h}_σ -дефекты формаций \mathfrak{L} и \mathfrak{L}_1 равны 1 и, очевидно, $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{h}$, то в силу леммы 2.7 имеем

$$|\mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{L}_1 : \mathfrak{h} \cap (\mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{L}_1)|_\sigma = |\mathfrak{L} : \mathfrak{h} \cap \mathfrak{L}|_\sigma + \\ + |\mathfrak{L}_1 : \mathfrak{h} \cap \mathfrak{L}_1|_\sigma - |\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}_1 : \mathfrak{h} \cap (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}_1)|_\sigma = 2.$$

Последнее противоречит лемме 2.2, так как $\mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, в формации \mathfrak{F} нет минимальных σ -локальных не \mathfrak{h} -формаций, отличных от \mathfrak{L} .

Пусть теперь \mathfrak{X} – произвольная σ -локальная подформация из \mathfrak{F} такая, что $\mathfrak{X} \not\subseteq \mathfrak{h}$. Тогда в силу доказанного выше и теоремы 3.8 заключаем, что $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{X}$. Так как при этом формация \mathfrak{X} имеет \mathfrak{h}_σ -дефект равный 1, то $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{h}$ – максимальная σ -локальная подформация в \mathfrak{X} . Поэтому имеет $\mathfrak{X} = \mathfrak{L} \vee_\sigma (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{h})$, т. е. справедливо утверждение (2). \square

В случае, когда $\mathfrak{h} = \mathfrak{N}_\sigma$, из теоремы 3.14 получаем

Следствие 3.15. Пусть \mathfrak{F} не σ -нильпотентная σ -локальная формация. Тогда и только тогда σ -нильпотентный l_σ -дефект формации \mathfrak{F} равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{L}$, где \mathfrak{M} – σ -нильпотентная σ -локальная подформация из \mathfrak{F} , \mathfrak{L} – минимальная σ -локальная не σ -нильпотентная формация, при этом:

(1) всякая σ -нильпотентная подформация из \mathfrak{F} входит в $\mathfrak{M} \vee_\sigma (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{h})$;

(2) всякая σ -нильпотентная σ -локальная подформация \mathfrak{X} из \mathfrak{F} имеет вид $\mathfrak{L} \vee_\sigma (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{h})$.

В частности, если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$, из теоремы 3.14 получаем

Следствие 3.16. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{h} – такие локальные формации, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{N}$. Тогда и только тогда \mathfrak{h}_1 -дефект формации \mathfrak{F} равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_1 \mathfrak{L}$, где \mathfrak{M} – локальная подформация из \mathfrak{h} , \mathfrak{L} – минимальная локальная не \mathfrak{h} -формация, при этом:

(1) всякая \mathfrak{h} -подформация из \mathfrak{F} входит в $\mathfrak{M} \vee_1 (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{h})$;

(2) всякая локальная подформация \mathfrak{X} из \mathfrak{F} такая, что $\mathfrak{X} \not\subseteq \mathfrak{h}$, имеет вид $\mathfrak{L} \vee_1 (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{h})$.

Кроме того, если $\mathfrak{h} = \mathfrak{N}$ – формация всех nilпотентных групп, из теоремы 3.14 получаем следующий известный результат.

Следствие 3.17 [1, лемма 20.5]. В точности тогда nilпотентный дефект локальной формации \mathfrak{F} равен 1, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_1 \mathfrak{L}$, где \mathfrak{M} – nilпотентная локальная формация, \mathfrak{L} – минимальная локальная ненильпотентная формация, при этом:

(1) всякая nilпотентная подформация из \mathfrak{F} входит в $\mathfrak{M} \vee_1 (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{N})$;

(2) всякая ненильпотентная локальная подформация \mathfrak{X} из \mathfrak{F} имеет вид $\mathfrak{L} \vee_1 (\mathfrak{X} \cap \mathfrak{N})$.

Теорема 3.18. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – такие σ -локальные формации, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$. Тогда если $\sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$, то следующие условия равносильны:

- (1) $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma = 1$;
- (2) в \mathfrak{F} дополняема каждая ее σ -локальная не \mathfrak{H} -подформация;
- (3) в \mathfrak{F} дополняема каждая ее σ -локальная подформация \mathfrak{M} с $|\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\sigma = 1$.

Доказательство. Пусть имеет место (1) и \mathfrak{M} – σ -локальная подформация из \mathfrak{F} . Тогда если $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{H}$, то по теореме 2.8 имеем $\mathfrak{M} = \mathcal{L} \vee_\sigma (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$, где \mathcal{L} – минимальная σ -локальная не \mathfrak{H} -формация. Пусть $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$, $\Pi_1 = \sigma(\mathfrak{M})$ и $\Pi_2 = \Pi \setminus \Pi_1$. Покажем, что \mathfrak{N}_{Π_2} является дополнением к \mathfrak{M} в \mathfrak{F} . Понятно, что $\mathfrak{N}_{\Pi_2} \cap \mathfrak{M} = (1)$. Покажем, что $\text{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}_{\Pi_2}) = \mathfrak{F}$.

В силу теоремы 2.8 имеем $\mathfrak{F} = \mathcal{L} \vee_\sigma \mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. С другой стороны,

$$\mathfrak{M} = \mathcal{L} \vee_\sigma (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathcal{L} \vee_\sigma \mathfrak{N}_{\Pi_1},$$

поскольку $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}_{\Pi_1}$. Теперь в силу лемм 2.14 и 2.6 имеем

$$\begin{aligned} \text{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}_{\Pi_2}) &= \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}_{\Pi_2} = \mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{N}_{\Pi_2} = \\ &= (\mathcal{L} \vee_\sigma \mathfrak{N}_{\Pi_1}) \vee_\sigma \mathfrak{N}_{\Pi_2} = \mathcal{L} \vee_\sigma \mathfrak{N}_\Pi = \mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Таким образом, формация \mathfrak{N}_{Π_2} является дополнением к \mathfrak{M} в \mathfrak{F} .

Понятно, что если имеет место утверждение (2), то утверждение (3) верно, так как любая σ -локальная подформация \mathfrak{M} с $|\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\sigma = 1$ является не \mathfrak{H} -подформацией из \mathfrak{F} .

Пусть теперь имеет место (3). Покажем, что выполняется условие (1). По условию теоремы $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Поэтому в силу леммы 2.5 в \mathfrak{F} имеется минимальная σ -локальная не \mathfrak{H} -формация \mathcal{L} . Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{M} \vee_\sigma \mathcal{L}$. Ввиду теоремы 2.8 имеет место $|\mathfrak{F}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}_1|_\sigma = 1$.

Значит, по условию теоремы в \mathfrak{F} найдется такая подформация \mathfrak{M}_1 , что $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{F}_1 = (1)$ и $\mathfrak{F} = \text{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{M}_1)$. Применяя теперь леммы 2.14 и 2.6, получаем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{M}_1$ и формация \mathfrak{M}_1 σ -локальна.

Допустим, что $\mathfrak{M}_1 \neq (1)$. Тогда если $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{M}_1)$, то $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$ по условию теоремы. Поэтому и в силу леммы 2.5 (ii) имеют место включения

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{M}_1 \cap (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{F}_1 = (1).$$

Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{M}_1 = (1)$. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{F}_1$. Поэтому $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma = 1$. \square

Замечание 3.19. Отметим, что условие $\sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$ в теореме 3.18 опустить нельзя, поскольку наличие дополнения в \mathfrak{F} у каждой ее σ -локальной не \mathfrak{H} -подформации, а также наличие дополнения в \mathfrak{F} у каждой σ -локальной подформации \mathfrak{M} из \mathfrak{F} с $|\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\sigma = 1$ не влечет равенства $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma = 1$.

Действительно, пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ и

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee_\sigma \mathfrak{G}_{\sigma_j} \vee_\sigma \mathfrak{G}_{\sigma_k},$$

где $\sigma_j, \sigma_k \in \sigma \setminus \{\sigma_i\}$, $j \neq k$. Тогда в силу лемм 2.6 и 2.14 имеем $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{G}_{\sigma_j} \oplus \mathfrak{G}_{\sigma_k}$. Ввиду теоремы 3.4 и леммы 3.1 имеем $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma = 2$. Однако, как нетрудно заметить, всякая σ -локальная не \mathfrak{H} -подформация из \mathfrak{F} , а также всякая σ -локальная подформация из \mathfrak{F} с \mathfrak{H}_σ -дефектом 1, имеют дополнение в \mathfrak{F} .

Вместе с тем, имеет место следующее

Следствие 3.20. Пусть \mathfrak{F} – не σ -нильпотентная σ -локальная формация. Тогда следующие условия равносильны:

- (1) $|\mathfrak{F} : \mathfrak{N}_\sigma \cap \mathfrak{F}|_\sigma = 1$;
- (2) в \mathfrak{F} дополняема каждая ее σ -локальная не σ -нильпотентная подформация;
- (3) в \mathfrak{F} дополняема каждая ее σ -локальная подформация \mathfrak{M} с $|\mathfrak{M} : \mathfrak{N}_\sigma \cap \mathfrak{M}|_\sigma = 1$.

В частности, если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$, из теоремы 3.11 имеем

Следствие 3.21. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – такие локальные формации, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$. Тогда если $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$, то следующие условия равносильны:

- (1) $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\pi = 1$;
- (2) в \mathfrak{F} дополняема каждая ее локальная не \mathfrak{H} -подформация;
- (3) в \mathfrak{F} дополняема каждая ее локальная подформация \mathfrak{M} с $|\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\pi = 1$.

Кроме того, если $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$ – формация всех nilпотентных групп из теоремы 3.4 получаем следующий известный результат (см. следствие 5.2.11).

Следствие 3.21 [2, с. 197]. Пусть \mathfrak{F} – не nilпотентная локальная формация. Тогда следующие условия равносильны:

- (1) $|\mathfrak{F} : \mathfrak{N} \cap \mathfrak{F}|_\pi = 1$;
- (2) в \mathfrak{F} дополняема каждая ее не nilпотентная локальная подформация;
- (3) в \mathfrak{F} дополняема каждая ее локальная подформация \mathfrak{M} с $|\mathfrak{M} : \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}|_\pi = 1$.

4 Приводимые σ -локальные формации ограниченного \mathfrak{H}_σ -дефекта

Пусть \mathfrak{F} – σ -локальная формация. Формацию \mathfrak{F} мы называем *неприводимой σ -локальной*

формацией (или l_σ -неприводимой формацией), если $\mathfrak{F} \neq l_\sigma \text{form}(\cup_{i \in I} \mathfrak{X}_i) = \vee_\sigma (\mathfrak{X}_i \mid i \in I)$, где $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ – набор всех собственных σ -локальных подформаций из \mathfrak{F} . Если же найдутся такие собственные σ -локальные подформации \mathfrak{X} и \mathfrak{H} из \mathfrak{F} , что $\mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee_\sigma \mathfrak{H}$, то формация \mathfrak{F} называется *приводимой σ -локальной* (или l_σ -приводимой) формацией.

Основным результатом данного раздела является следующая теорема, развивающая наблюдения работ [18], [50], [51].

Теорема 4.1. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – такие σ -локальные формации, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$, и пусть \mathfrak{F} – l_σ -приводима. Тогда и только тогда \mathfrak{h}_σ -дефект формации \mathfrak{F} равен k , когда \mathfrak{F} удовлетворяет одному из следующих условий:

(1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{M}$, где \mathfrak{L} – неприводимая σ -локальная формация \mathfrak{h}_σ -дефекта t , $1 \leq t \leq k-1$, а \mathfrak{M} – такая σ -локальная формация \mathfrak{h}_σ -дефекта $k-1$, что $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M}$ является максимальной σ -локальной подформацией формации \mathfrak{L} ;

(2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{M}$, где \mathfrak{L} – неприводимая σ -локальная формация \mathfrak{h}_σ -дефекта k , \mathfrak{M} – такая σ -локальная формация, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{L}$.

Доказательство. Достаточность. Пусть формация \mathfrak{F} удовлетворяет условию (1). Поскольку $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M}$ – единственная максимальная σ -локальная подформация формации \mathfrak{L} , то $|\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M})|_\sigma = t-1$. Значит, в силу леммы 3.13 имеем

$$|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma = |\mathfrak{L} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}|_\sigma + |\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\sigma - |\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M})|_\sigma = t + k - 1 - (t - 1) = k.$$

Пусть теперь формация \mathfrak{F} удовлетворяет условию (2). Тогда по лемме 3.13 получим

$$|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma = |\mathfrak{L} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}|_\sigma + |\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\sigma - |\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M})|_\sigma = k + 0 - 0 = k.$$

Таким образом, имеет место $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma = k$.

Необходимость. Доказательство необходимости проведем индукцией по k . Пусть $k=1$ и \mathfrak{F} – σ -локальная формация с \mathfrak{h}_σ -дефектом 1. Так как $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, то по теореме 3.8 в \mathfrak{F} содержится некоторая минимальная σ -локальная не \mathfrak{H} -подформация \mathfrak{L} . Поскольку \mathfrak{h}_σ -дефект формации \mathfrak{F} равен 1, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ – максимальная σ -локальная подформация в \mathfrak{F} . Поэтому $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{M}$ и формация \mathfrak{F} удовлетворяет условию (2) теоремы.

Пусть $k > 1$ и, предположим, что для $k-1$ теорема верна. Обозначим через \mathfrak{M} максимальную σ -локальную подформацию из \mathfrak{F} , у которой \mathfrak{h}_σ -дефект равен $k-1$.

Допустим, что в формации \mathfrak{F} найдется такая неприводимая σ -локальная подформация \mathfrak{X} , что $\mathfrak{X} \not\subseteq \mathfrak{M}$ и $1 \leq |\mathfrak{X} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}|_\sigma \leq k-1$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{X}$. Пусть $t = |\mathfrak{X} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}|_\sigma$. Если $t=1$, то $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{H}$ – единственная максимальная σ -локальная подформация формации \mathfrak{X} . В силу максимальной формации \mathfrak{M} имеет место равенство $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Поэтому $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$. Значит, $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{H}$ и формация \mathfrak{F} удовлетворяет условию (1) теоремы.

Пусть теперь $2 \leq t \leq k-1$ и любая неприводимая σ -локальная подформация формации \mathfrak{F} с \mathfrak{h}_σ -дефектом меньшим t содержится в формации \mathfrak{M} . Пусть \mathfrak{X}_1 – такая максимальная σ -локальная подформация \mathfrak{X} , что $|\mathfrak{X}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}_1|_\sigma = t-1$. Если \mathfrak{X}_1 – l_σ -неприводима, то по предположению $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{X}_1$ и \mathfrak{F} удовлетворяет условию (1) теоремы.

Пусть \mathfrak{X}_1 – приводимая σ -локальная формация. Поскольку $t-1 < k-1$, то по предположению индукции для формации \mathfrak{X}_1 теорема верна. Поэтому формация \mathfrak{X}_1 удовлетворяет одному из следующих условий:

(а) $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{L}_1 \vee_\sigma \mathfrak{M}_1$, где \mathfrak{L}_1 – неприводимая σ -локальная формация и $|\mathfrak{L}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}_1|_\sigma = s$, $1 \leq s \leq k-2$, а \mathfrak{M}_1 – такая σ -локальная формация, что $|\mathfrak{M}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}_1|_\sigma = k-2$ и $\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{M}_1$ – максимальная σ -локальная подформация формации \mathfrak{L}_1 ;

(б) $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{L}_1 \vee_\sigma \mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{H}$, а \mathfrak{L}_1 – такая неприводимая σ -локальная формация, что $|\mathfrak{L}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}_1|_\sigma = k-1$ и $\mathfrak{M}_1 \not\subseteq \mathfrak{L}_1$.

Пусть имеет место (б). Тогда по предположению $\mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{M}$. Кроме того, поскольку $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{L}_1 \vee_\sigma \mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{X}_1$ и формация \mathfrak{F} удовлетворяет условию (1) теоремы.

Пусть теперь имеет место (а). Если формация \mathfrak{M}_1 является l_σ -неприводимой, то по предположению формации \mathfrak{M}_1 и \mathfrak{L}_1 должны содержаться в \mathfrak{M} . Значит, $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{X}_1$ и формация \mathfrak{F} удовлетворяет условию (1) теоремы.

Если же формация l_σ -приводима, то по индукции для нее теорема верна. Повторяя приведенные выше рассуждения для \mathfrak{M}_1 и т.д., через конечное число шагов (поскольку \mathfrak{h}_σ -дефект рассматриваемых формаций конечен и строго уменьшается) мы получим, что $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{X}_1$. Поэтому формация \mathfrak{F} удовлетворяет условию (1) теоремы.

Допустим теперь, что любая неприводимая σ -локальная подформация из \mathfrak{F} , имеющая \mathfrak{H} -дефект меньший k , содержится в \mathfrak{M} . Поскольку \mathfrak{F} – приводимая σ -локальная формация, то в $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{M}$ найдется группа G такая, что $\mathcal{L} = l_\sigma \text{form}(G) \neq \mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\sigma \mathcal{L}$. Ввиду леммы 2.2 имеем $d = |\mathcal{L} : \mathfrak{H} \cap \mathcal{L}|_\sigma \leq k$. Предположим, что $d < k$.

Если $\mathcal{L} - l_\sigma$ -неприводима, то по предположению $\mathcal{L} \subseteq \mathfrak{M}$. Что невозможно. Значит, \mathcal{L} – приводимая σ -локальная формация. Но тогда по индукции для формации \mathcal{L} теорема верна. Учитывая предположение о неприводимых σ -локальных подформациях, имеющих \mathfrak{H}_σ -дефект меньший k , и то, что $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$, снова заключаем, что $\mathcal{L} \subseteq \mathfrak{M}$. Противоречие. Поэтому $d = k$.

Пусть \mathcal{D} – такая неприводимая σ -локальная подформация из \mathfrak{M} , что $\mathcal{D} \not\subseteq \mathcal{L}$. По лемме 2.2 имеем $m = |\mathcal{D} : \mathfrak{H} \cap \mathcal{D}|_\sigma \leq k$. Ввиду того, что формации \mathcal{L} и \mathcal{D} содержатся в \mathfrak{F} , имеем $\mathfrak{K} = \mathcal{L} \vee_\sigma \mathcal{D} \subseteq \mathfrak{F}$, и по лемме 2.2 имеем $d = |\mathfrak{K} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{K}|_\sigma \leq k$.

С другой стороны, по лемме 3.13 имеет место равенство

$$d = k + m - b, \text{ где } b = |\mathcal{L} \cap \mathcal{D} : \mathfrak{H} \cap (\mathcal{L} \cap \mathcal{D})|_\sigma.$$

Так как $\mathcal{D} \not\subseteq \mathcal{L}$, то $b \leq m - 1$. Поэтому $a \geq k + m - (m - 1) = k + 1$. Противоречие. Таким образом, любая неприводимая σ -локальная подформация из \mathfrak{M} содержится в \mathcal{L} . Значит, если \mathfrak{M} – неприводимая σ -локальная формация, то $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{L}$. Но тогда $\mathfrak{F} = \mathcal{L} \vee_\sigma \mathfrak{M} = \mathcal{L}$, что противоречит определению формации \mathcal{L} . Поэтому формация $\mathfrak{M} - l_\sigma$ -приводима.

Предположим, что $\mathcal{L} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Так как $|\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\sigma = k - 1$, то по индукции для формации \mathfrak{M} теорема верна. Поэтому формацию \mathfrak{M} можно представить в виде (а) или (б). Учитывая, что любая неприводимая σ -локальная не \mathfrak{H} -подформация из \mathfrak{M} содержится в \mathcal{L} , получаем, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathcal{L}$. Противоречие. Таким образом, $\mathcal{L} \cap \mathfrak{H} \subset \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Поскольку $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \not\subseteq \mathcal{L} \cap \mathfrak{H}$.

Пусть \mathcal{L} – неприводимая σ -локальная формация. Тогда, используя представление формации \mathfrak{M} в виде (а) или (б) и учитывая, что любая неприводимая σ -локальная формация с \mathfrak{H}_σ -дефектом меньшим k содержится в \mathcal{L} , получим, что $\mathfrak{F} = \mathcal{L} \vee_\sigma (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$. Таким образом, формация \mathfrak{F} удовлетворяет условию (2) теоремы.

Пусть теперь \mathcal{L} – приводимая σ -локальная формация. Тогда, так как $\mathcal{L} \not\subseteq \mathfrak{M}$, то по теореме

3.8 в \mathcal{L} содержится по меньшей мере одна \mathfrak{M}_σ -критическая формация \mathfrak{X} . Поскольку любая неприводимая σ -локальная формация с \mathfrak{H}_σ -дефектом меньшим k содержится в формации \mathfrak{M} и $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, то $|\mathfrak{X} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}|_\sigma = k$. Заметим также, что любая неприводимая σ -локальная формация из \mathcal{L} с \mathfrak{H}_σ -дефектом меньшим k содержится в \mathfrak{X} , поскольку в противном случае формация \mathfrak{F} будет содержать l_σ -подформацию с \mathfrak{H}_σ -дефектом большим k , что невозможно ввиду леммы 2.1. В силу максимальности формации \mathfrak{M} имеем $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{X}$. Поскольку $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \not\subseteq \mathcal{L} \cap \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{X} \cap \mathfrak{H}$. Поэтому, учитывая представление формации \mathfrak{M} в виде (а) или (б), имеем $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{X} = \mathfrak{X} \vee_\sigma (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$.

Таким образом, формация \mathfrak{F} удовлетворяет условию (2) теоремы. \square

В случае, когда $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\sigma$, мы получаем следующий специальный случай теоремы 4.1.

Следствие 4.2. Пусть \mathfrak{F} – приводимая σ -локальная формация. Тогда и только тогда σ -нильпотентный l_σ -дефект формации \mathfrak{F} равен k , когда \mathfrak{F} удовлетворяет одному из следующих условий:

(1) $\mathfrak{F} = \mathcal{L} \vee_\sigma \mathfrak{M}$, где \mathcal{L} – неприводимая σ -локальная формация σ -нильпотентного l_σ -дефекта t , $1 \leq t \leq k - 1$, а \mathfrak{M} – такая σ -локальная формация σ -нильпотентного l_σ -дефекта $k - 1$, что $\mathcal{L} \cap \mathfrak{M}$ является максимальной σ -локальной подформацией формации \mathcal{L} ;

(2) $\mathfrak{F} = \mathcal{L} \vee_\sigma \mathfrak{M}$, где \mathcal{L} – неприводимая σ -локальная формация σ -нильпотентного l_σ -дефекта k , \mathfrak{M} – такая σ -локальная формация, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathcal{L}$.

В частности, если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$ из теоремы 4.1 получаем

Следствие 4.3. Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{H} – такие локальные формации, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$, и пусть \mathfrak{F} – приводима. Тогда и только тогда \mathfrak{H}_1 -дефект формации \mathfrak{F} равен k , когда \mathfrak{F} удовлетворяет одному из следующих условий:

(1) $\mathfrak{F} = \mathcal{L} \vee_1 \mathfrak{M}$, где \mathcal{L} – неприводимая локальная формация \mathfrak{H}_1 -дефекта t , $1 \leq t \leq k - 1$, а \mathfrak{M} – такая локальная формация \mathfrak{H}_1 -дефекта $k - 1$, что $\mathcal{L} \cap \mathfrak{M}$ является максимальной локальной подформацией формации \mathcal{L} ;

(2) $\mathfrak{F} = \mathcal{L} \vee_1 \mathfrak{M}$, где \mathcal{L} – неприводимая локальная формация \mathfrak{H}_1 -дефекта k , \mathfrak{M} – такая локальная формация, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathcal{L}$.

Кроме того, если $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$ – формация всех нильпотентных групп, из теоремы 4.1 получаем следующий известный результат.

Следствие 4.4 [18]. Пусть \mathfrak{F} – приводимая локальная формация. Тогда и только тогда нильпотентный l -дефект формации \mathfrak{F} равен k , когда \mathfrak{F} удовлетворяет одному из следующих условий:

(1) $\mathfrak{F} = \mathcal{L} \vee_l \mathfrak{M}$, где \mathcal{L} – неприводимая локальная формация нильпотентного l -дефекта t , $1 \leq t \leq k-1$, а \mathfrak{M} – такая локальная формация нильпотентного l -дефекта $k-1$, что $\mathcal{L} \cap \mathfrak{M}$ является максимальной локальной подформацией формации \mathcal{L} ;

(2) $\mathfrak{F} = \mathcal{L} \vee_l \mathfrak{M}$, где \mathcal{L} – неприводимая локальная формация нильпотентного l -дефекта k , \mathfrak{M} – такая локальная формация, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathcal{L}$.

Кроме того, в случае, когда $\mathfrak{H} = (1)$, из теоремы 4.1 получаем следующий результат

Теорема 4.5. Пусть \mathfrak{F} – приводимая σ -локальная формация. Тогда и только тогда l_σ -длина формации \mathfrak{F} равна k , когда \mathfrak{F} удовлетворяет одному из следующих условий:

(1) $\mathfrak{F} = \mathcal{L} \vee_\sigma \mathfrak{M}$, где \mathcal{L} – неприводимая σ -локальная формация l_σ -длины t , $1 \leq t \leq k-1$, а \mathfrak{M} – такая σ -локальная формация l_σ -длины $k-1$, что $\mathcal{L} \cap \mathfrak{M}$ является максимальной σ -локальной подформацией формации \mathcal{L} ;

(2) $\mathfrak{F} = \mathcal{L} \vee_\sigma \mathfrak{M}$, где \mathcal{L} – неприводимая σ -локальная формация l_σ -длины k , \mathfrak{M} – такая σ -локальная формация, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathcal{L}$.

В частности, если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$, из теоремы 4.5 имеем

Следствие 4.6. Пусть \mathfrak{F} – приводимая локальная формация. Тогда и только тогда l -длина формации \mathfrak{F} равна k , когда \mathfrak{F} удовлетворяет одному из следующих условий:

(1) $\mathfrak{F} = \mathcal{L} \vee_l \mathfrak{M}$, где \mathcal{L} – неприводимая локальная формация l -длины t , $1 \leq t \leq k-1$, а \mathfrak{M} – такая локальная формация l -длины $k-1$, что $\mathcal{L} \cap \mathfrak{M}$ является максимальной локальной подформацией формации \mathcal{L} ;

(2) $\mathfrak{F} = \mathcal{L} \vee_\sigma \mathfrak{M}$, где \mathcal{L} – неприводимая локальная формация l -длины k , \mathfrak{M} – такая локальная формация, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathcal{L}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – Москва: Наука, 1989. – 255 с.
2. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.

3. Skiba, A.N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // Journal of Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

4. Skiba, A.N. On one generalization of the local formations / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2018. – № 1 (34). – P. 79–82.

5. Скиба, А.Н. О локальных формациях длины 5 / А.Н. Скиба // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп: труды Гомельского семинара; под ред. канд. физ.-мат. наук М.И. Салука. – Минск: Наука и техника. – 1986. – С. 135–149.

6. Скиба, А.Н. Классификация локальных формаций конечных групп с нильпотентным дефектом 2 / А.Н. Скиба, Е.А. Таргонский // Математические заметки. – 1987. – Т. 41, № 4. – С. 490–499.

7. Скиба, А.Н. О локальных формациях с ограниченным p -разложимым дефектом / А.Н. Скиба // Известия вузов. Серия Математика. – 1991. – № 4. – С. 63–69.

8. Аниськов, В.В. Классификация разрешимых неприводимых локальных формаций с p -нильпотентным дефектом 2 / В.В. Аниськов // Вестник Белорусского государственного университета. Серия 1. – 1995. – № 2. – С. 66–69.

9. Аниськов, В.В. О неприводимых p -разрешимых локальных формациях с π -разложимым дефектом 2 / В.В. Аниськов // Вопросы алгебры. – 1995. – № 8. – С. 11–21.

10. Сафонов, В.Г. О кратных локальных формациях с ограниченным нильпотентным дефектом / В.Г. Сафонов // Вопросы алгебры. – Вып. 9. – С. 112–127.

11. Сафонов, В.Г. О разрешимых локальных формациях нильпотентного дефекта 3 / В.Г. Сафонов // Весці АН Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 1996. – № 3. – С. 8–12.

12. Аниськов, В.В. О приводимых локальных формациях с заданным \mathfrak{H} -дефектом / В.В. Аниськов // Весці АН Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 1997. – № 4. – С. 65–68.

13. Аниськов, В.В. Разрешимые локальные формации с π -нильпотентным дефектом 2 / В.В. Аниськов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 1999. – № 1 (15). – С. 60–63.

14. Сафонов, В.Г. О неразрешимых насыщенных формациях нильпотентного дефекта 3 / В.Г. Сафонов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2004. – № 4 (25). – С. 142–147.

15. Аниськов, В.В. О локальных формациях с p -замкнутым дефектом 2 / В.В. Аниськов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2008. – № 6 (51). – С. 137–140.

16. *Аниськов, В.В.* Разрешимые приводимые локальные формации p -разложимого дефекта 3 / В.В. Аниськов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2009. – № 5 (56). – С. 91–94.
17. *Аниськов, В.В.* О неприводимых разрешимых локальных формациях p -разложимого дефекта 3 / В.В. Аниськов // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 1 (2). – С. 16–21.
18. *Сафонов, В.Г.* О кратных локальных формациях конечных групп с ограниченным нильпотентным дефектом / В.Г. Сафонов // Вопросы алгебры. – 1996. – Вып. 9. – С. 161–175.
19. *Сафонов, В.Г.* О кратных насыщенных формациях нильпотентного дефекта 3 / В.Г. Сафонов // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2005. – № 3 (37). – С. 105–109.
20. *Сафонов, В.Г.* О приводимых totally насыщенных формациях нильпотентного дефекта 3 / В.Г. Сафонов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2005. – № 4 (31). – С. 157–162.
21. *Сафонов, В.Г.* О неприводимых totally насыщенных формациях нильпотентного дефекта 3 / В.Г. Сафонов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2006. – № 3 (36). – С. 131–136.
22. *Сафонов, В.Г.* Totally насыщенные формации с метанильпотентным I_∞ -дефектом 3 / В.Г. Сафонов // Весці НАН Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 2007. – № 4. – С. 40–46.
23. *Сафонов, В.Г.* О приводимых ω -насыщенных формациях с разрешимым дефектом ≤ 2 / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2005. – № 5 (32). – С. 162–165.
24. *Рябченко, А.И.* Частично насыщенные формации с π -специальным дефектом 1 / А.И. Рябченко // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2006. – № 5 (37). – С. 59–68.
25. *Сафонов, В.Г.* О n -кратно ω -насыщенных формациях с максимальной разрешимой подформацией / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Вестник Гродненского гос. университета. Серия Математика. – 2008. – № 2. – С. 53–57.
26. *Сафонов, В.Г.* О τ -замкнутых ω -насыщенных формациях разрешимого I_τ^ω -дефекта 1 / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2008. – № 2 (48). – С. 120–125.
27. *Рябченко, А.И.* О частично насыщенных формациях с \aleph -дефектом 1 / А.И. Рябченко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 2008. – № 1. – С. 28–34.
28. *Рябченко, А.И.* О частично насыщенной формации с максимальной подформацией классического типа / А.И. Рябченко // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2008. – № 5 (50). – С. 216–222.
29. *Шеметков, Л.А.* Экраны ступенчатых формаций / Л.А. Шеметков // Труды VI Всесоюзного симпозиума по теории групп. – Киев: Наукова думка. – 1980. – С. 37–50.
30. *Скиба, А.Н.* О критических формациях / А.Н. Скиба // Известия АН БССР. Серия физ.-мат. наук. – 1980. – № 4. – С. 27–33.
31. *Скиба, А.Н.* О критических формациях / А.Н. Скиба // Известия АН БССР. Серия физ.-мат. наук. – 1981. – № 3. – С. 33–38.
32. *Скиба, А.Н.* О критических формациях / А.Н. Скиба // Доклады АН БССР. – 1983. – Т. 27, № 9. – С. 780–782.
33. *Скиба, А.Н.* Формации со сверхразрешимыми локальными подформациями / А.Н. Скиба // Группы и др. алгебраические системы с условиями конечности. Новосибирск. Наука. – 1984. – Т. 4. – С. 101–118.
34. *Скиба, А.Н.* О критических формациях / А.Н. Скиба // В кн.: Бесконечные группы и прилегающие алгебраические структуры. Киев: Ин-т математики АН Украины. – 1993. – С. 258–268.
35. *Сафонова, И.Н.* О минимальных σ -локальных не- \aleph -формациях конечных групп / И.Н. Сафонова // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 4 (45). – С. 105–112.
36. *Сафонова, И.Н.* О критических σ -локальных формациях конечных групп / И.Н. Сафонова // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2023. – Т. 31, № 2. – С. 63–80.
37. *Chi, Z.* On one application of the theory of n -multiply σ -local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2018. – № 2 (35). – С. 85–88.
38. *Zhang, Ch.* On Σ_7^σ -closed classes of finite groups / Ch. Zhang, Z. Chi, A.N. Skiba // Ukrainian Mathematical Journal. – 2019. – Vol. 70 (2). – P. 1707–1716.
39. *Chi, Z.* On n -multiply σ -local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Communications in Algebra. – 2019. – Vol. 47 (3). – P. 957–968.
40. *Tsarev, A.* Laws of the lattices of σ -local formations of finite groups / A. Tsarev // Mediterranean Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 17, № 3. – Article: 75.
41. *Safonova, I.N.* On some properties of the lattice of totally σ -local formations of finite groups / I.N. Safonova, V.G. Safonov // Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. – 2020. – № 3. – P. 1–14.
42. *Воробьев, Н.Н.* Отделимые решетки n -кратно σ -локальных формаций / Н.Н. Воробьев, И.И. Стаселько, А.О. Ходжагулыев // Сибирский математический журнал. – 2021. – Т. 62, № 4. – С. 721–735.

43. *Safonova, I.N.* Some properties of n -multiply σ -local formations of finite groups / I.N. Safonova // Asian-European Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 15, № 7. – 2250138 (12 pages).
44. *Safonova, I.N.* A criterion for σ -locality of a non-empty formation / I.N. Safonova // Communications in Algebra. – 2022. – Vol. 50, № 6. – P. 2366–2376.
45. *Safonova, I.N.* On properties of the lattice of all τ -closed n -multiply σ -local formations / I.N. Safonova // Communications in Algebra. – 2023. – Vol. 51, № 10. – P. 4454–4461.
46. *Safonova, I.N.* On σ -inductive lattices of n -multiply σ -local formations of finite groups / I.N. Safonova // Journal of Algebra and Its Applications. – 2024. – Vol. 23, № 1. – 2450017 (13 p).
47. *Safonova, I.N.* On the τ -closedness of n -multiply σ -local formation / I.N. Safonova // Advances in Group Theory and Applications. – 2024. – Vol. 18. – P. 123–136.
48. *Safonova, I.N.* On separability of the lattice of τ -closed n -multiply σ -local formations / I.N. Safonova // Communications in Algebra. – 2024. – Vol. 52, № 2. – P. 3309–3318.
49. *Биркгоф, Г.* Теория решеток / Г. Биркгоф. – Москва: Наука, 1984. – 568 с.
50. *Safonov, V.G.* On reducible partially saturated formations with limited soluble defect / V.G. Safonov, I.N. Safonova // 5 Международная алгебраическая конференция в Украине: тезисы докладов, Одесса, 20-27 июля 2005 г. – Одесса: Изд-во Одесского ун-та, 2004. – С. 176.
51. *Safonova, I.N.* On totally ω -composition formations with limited soluble c_∞^ω -defect / I.N. Safonova // The 9th International Algebraic Conference in Ukraine, L'viv, July 8-13 2013. – L'viv Ukraine, 2013. – P. 162.

Исследования выполнены в рамках задания Государственной программы научных исследований «Конвергенция – 2025» при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (проект 20211328).

Поступила в редакцию 14.01.2025.

Информация об авторах

*Сафонова Инна Николаевна – к.ф.-м.н., доцент
Скрундь Валентина Викторовна – аспирант*

ЕДИНСТВЕННОСТЬ И ЯВНЫЙ ВИД ЛИНЕЙНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ЧЕБЫШЁВА

А.П. Старовойтов, И.В. Кругликов

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

UNIQUENESS AND EXPLICIT FORM OF HERMITE – CHEBYSHEV LINEAR APPROXIMATIONS

A.P. Starovoitov, I.V. Kruglikov

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Опираясь на известные результаты о совместных аппроксимациях Эрмита – Паде системы тригонометрических рядов, найдены достаточные условия, при которых линейные аппроксимации Эрмита – Чебышёва существуют и определяются единственным образом. При выполнении найденных условий получены формулы, описывающие явный вид числителей и знаменателя линейных аппроксимаций Эрмита – Паде для системы функций, которые являются суммами рядов Фурье по многочленам Чебышёва первого и второго рода.

Ключевые слова: ряды Фурье, ряды по многочленам Чебышёва, аппроксимации Эрмита – Паде, аппроксимации Паде – Чебышёва, линейные аппроксимации Эрмита – Чебышёва.

Для цитирования: Старовойтов, А.П. Единственность и явный вид линейных аппроксимаций Эрмита – Чебышёва / А.П. Старовойтов, И.В. Кругликов // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 102–107. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_102. – EDN: HUFLRZ

Abstract. Relying on the known results on joint Hermite – Padé approximations of a system of trigonometric series, sufficient conditions are found under which linear Hermite – Chebyshev approximations exist and are determined uniquely. When the found conditions are met, the formulas are obtained that describe the explicit form of the numerators and denominator of linear Hermite – Padé approximations for a system of functions that are sums of Fourier series in Chebyshev polynomials of the first and second kind.

Keywords: Fourier series, series in Chebyshev polynomials, Hermite – Padé approximations, Padé – Chebyshev approximations, linear Hermite – Chebyshev approximations.

For citation: Starovoitov, A.P. Uniqueness and explicit form of Hermite – Chebyshev linear approximations / A.P. Starovoitov, I.V. Kruglikov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 102–107. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_102 (in Russian). – EDN: HUFLRZ

Введение

Пусть система $\mathbf{f}^{ch1} = (f_1^{ch1}, \dots, f_k^{ch1})$ состоит из функций, представимых рядами Фурье по многочленам Чебышёва $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ первого рода

$$f_j^{ch1}(x) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a_l^j T_l(x), j = 1, \dots, k, \quad (0.1)$$

с действительными коэффициентами, которые сходятся при всех $x \in [-1, 1]$. Обозначим чере \mathbb{Z}_+^k множество всех k -мерных мультииндексов $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)$, являющихся упорядоченным набором k целых неотрицательных чисел. Порядком мультииндекса $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)$ назовём сумму $m := m_1 + \dots + m_k$.

Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ и рассмотрим следующий аналог задачи Эрмита – Паде для \mathbf{f}^{ch1} [1, гл. 4, §1]:

Задача A^{ch1} . Для системы функций \mathbf{f}^{ch1} найти тождественно не равный нулю многочлен

$$Q_m^{ch1}(x) = Q_{n, \vec{m}}^{ch1}(x; \mathbf{f}^{ch1}) = \sum_{p=0}^m u_p T_p(x)$$

и многочлены

$$P_j^{ch1}(x) = P_{n_j, n, \vec{m}}^{ch1}(x; \mathbf{f}^{ch1}) = \sum_{p=0}^{n_j} v_p^j T_p(x),$$

$$n_j = n + m - m_j,$$

чтобы для $j = 1, \dots, k$

$$Q_m^{ch1}(x) f_j^{ch1}(x) - P_j^{ch1}(x) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \tilde{a}_l^j T_l(x). \quad (0.2)$$

Определение 0.1. Если пара (Q_m^{ch1}, P^{ch1}) , где $P^{ch1} = (P_1^{ch1}, \dots, P_k^{ch1})$ является решением задачи A^{ch1} , то рациональные дроби

$$\pi_j^{ch1}(x) = \pi_j^{ch1}(x; \mathbf{f}^{ch1}) = \pi_{n_j, n, \vec{m}}^{ch1}(x; \mathbf{f}^{ch1}) = \frac{P_j^{ch1}(x)}{Q_m^{ch1}(x)},$$

$$j = 1, \dots, k,$$

будем называть линейными аппроксимациями Эрмита – Чебышёва 1-го рода для мультииндекса (n, \bar{m}) и системы \mathbf{f}^{ch1} .

Определение 0.2. Нелинейными аппроксимациями Эрмита – Чебышёва 1-го рода для мультииндекса (n, \bar{m}) и системы \mathbf{f}^{ch1} назовём рациональные дроби

$$\hat{\pi}_j^{ch1}(x) = \hat{\pi}_j^{ch1}(x; \mathbf{f}^{ch1}) = \frac{\hat{P}_j^{ch1}(x)}{\hat{Q}_m^{ch1}(x)},$$

где многочлены

$\hat{Q}_m^{ch1}(x) = \hat{Q}_{n, \bar{m}}^{ch1}(x; \mathbf{f}^{ch1})$, $\hat{P}_j^{ch1}(x) = \hat{P}_{n_j, n, \bar{m}}^{ch1}(x; \mathbf{f}^{ch1})$ ($n_j = n + t - m_j$), степени которых не превышают соответственно t и n_j , подобраны так, что

$$f_j^{ch1}(x) - \frac{\hat{P}_j^{ch1}(x)}{\hat{Q}_m^{ch1}(x)} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \hat{a}_l^j T_l(x), j = 1, \dots, k.$$

В том случае, когда $k = 1$, т. е. система \mathbf{f}^{ch1} состоит из одной функции f_1^{ch1} , основные свойства линейных и нелинейных аппроксимаций Эрмита – Чебышёва (в этом случае их называют линейными и нелинейными аппроксимациями Паде – Чебышёва; подробнее о терминологии см. [2]) описаны достаточно подробно (прежде всего см. [2]–[4] и приведённую там литературу, а также [5]–[13]). Например, хорошо известно, что линейная аппроксимация Паде – Чебышёва всегда существует, но в отличие от классической аппроксимации Паде степенного ряда, вообще говоря, не единственна. Нелинейная аппроксимация Паде – Чебышёва не всегда существует, но в случае существования всегда единственна. Имеются примеры сходящихся рядов f_1^{ch1} (см. [14], [15]), для которых нелинейные аппроксимации Паде – Чебышёва существуют и единственны, но при каждом n не являются линейными аппроксимациями Паде – Чебышёва. Аналогично, при любом $k \geq 1$ имеются примеры систем функций \mathbf{f}^{ch1} (см. [9]), для которых существуют нелинейные аппроксимации Эрмита – Чебышёва, не являющиеся линейными аппроксимациями Эрмита – Чебышёва.

Рассмотрим теперь другой тип аппроксимаций Эрмита – Чебышёва. Предположим, что система $\mathbf{f}^{ch2} = (f_1^{ch2}, \dots, f_k^{ch2})$ состоит из функций, представимых рядами Фурье по многочленам Чебышёва $U_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sin(n \arccos x)$ второго

рода

$$f_j^{ch2}(x) = \sum_{l=1}^{\infty} b_l^j U_l(x), j = 1, \dots, k, \quad (0.3)$$

с действительными коэффициентами, которые сходятся при всех $x \in [-1, 1]$. Если вместо рядов (0.1) взять ряды (0.3), то конструкции, аналогичные предыдущим, приводят к линейным и

нелинейным аппроксимациям Эрмита – Чебышёва 2-го рода. Задача Эрмита – Паде для рядов (0.3) имеет вид:

Задача \mathbf{A}^{ch2} . Найти алгебраический многочлен $Q_m^{ch2}(x) = Q_{n, \bar{m}}^{ch2}(x; \mathbf{f}^{ch2})$, $\deg Q_m^{ch2} \leq t$, тождественно не равный нулю, и алгебраические многочлены $P_j^{ch2}(x) = P_{n_j, n, \bar{m}}^{ch2}(x; \mathbf{f}^{ch2})$, $n_j = n + t - m_j$, чтобы для $j = 1, \dots, k$

$$Q_m^{ch2}(x) f_j^{ch2}(x) - P_j^{ch2}(x) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \tilde{b}_l^j U_l(x). \quad (0.4)$$

Определение 0.3. Если пара (Q_m^{ch2}, P^{ch2}) , где $P^{ch2} = (P_1^{ch2}, \dots, P_k^{ch2})$ является решением задачи \mathbf{A}^{ch2} , то рациональные дроби

$$\pi_j^{ch2}(x) = \pi_j^{ch2}(x; \mathbf{f}^{ch2}) = \frac{P_j^{ch2}(x)}{Q_m^{ch2}(x)}, \quad j = 1, \dots, k,$$

будем называть линейными аппроксимациями Эрмита – Чебышёва 2-го рода для мультииндекса (n, \bar{m}) и системы \mathbf{f}^{ch2} .

Определение 0.4. Нелинейными аппроксимациями Эрмита – Чебышёва 2-го рода для мультииндекса (n, \bar{m}) и системы \mathbf{f}^{ch2} назовём алгебраические рациональные дроби

$$\hat{\pi}_j^{ch2}(x) = \hat{\pi}_j^{ch2}(x; \mathbf{f}^{ch2}) = \frac{\hat{P}_j^{ch2}(x)}{\hat{Q}_m^{ch2}(x)},$$

где многочлены

$\hat{Q}_m^{ch2}(x) = \hat{Q}_{n, \bar{m}}^{ch2}(x; \mathbf{f}^{ch2})$, $\hat{P}_j^{ch2}(x) = \hat{P}_{n_j, n, \bar{m}}^{ch2}(x; \mathbf{f}^{ch2})$ ($n_j = n + t - m_j$), степени которых не превышают соответственно t и n_j , подобраны так, что

$$f_j^{ch2}(x) - \frac{\hat{P}_j^{ch2}(x)}{\hat{Q}_m^{ch2}(x)} = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \hat{b}_l^j U_l(x), j = 1, \dots, k.$$

В дальнейшем будем рассматривать только линейные аппроксимации Эрмита – Чебышёва, а основной темой исследований данной работы является нахождение условий на коэффициенты рядов (0.1) и (0.3), при которых линейные аппроксимации Эрмита – Чебышёва 1-го и 2-го определяются единственным образом. В случае единственности будем искать явный вид этих аппроксимаций. Доказательство основных теорем работы существенно опирается на установленную в [10], [11] связь между линейными аппроксимациями Эрмита – Чебышёва и тригонометрическими аппроксимациями Эрмита – Паде системы функций, являющихся суммами соответствующих сходящихся тригонометрических рядов. Отметим, что существование линейных аппроксимаций

$$\pi_j^{ch1}(x; \mathbf{f}^{ch1}), \pi_j^{ch2}(x; \mathbf{f}^{ch2}) \quad (j = 1, \dots, k)$$

при $k > 1$ доказывается также, как и в случае $k = 1$ (см. [5], [8]).

1 Тригонометрические аппроксимации Эрмита – Паде

В этом разделе опишем ряд новых свойств тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Паде. Эти свойства будут получены нами в виде следствий результатов работ [10], [11].

Пусть $\mathbf{f}^t = (f_1^t, \dots, f_k^t)$ – набор тригонометрических рядов

$$f_j^t(x) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} (a_l^j \cos lx + b_l^j \sin lx), j = 1, \dots, k, (1.1)$$

с действительными коэффициентами. Считаем, что ряды (1.1) сходятся при всех $x \in \mathbb{R}$ и каждый ряд определяет функцию f_j^t , заданную на всей действительной прямой. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)$ и для системы \mathbf{f}^t рассмотрим тригонометрический аналог задачи Эрмита – Паде:

Задача \mathbf{A}^t . Для тригонометрических рядов (1.1) найти тождественно не равный нулю тригонометрический многочлен $Q_m^t(x) = Q_{n, \vec{m}}^t(x; \mathbf{f}^t)$, $\deg Q_m^t \leq m$ и такие тригонометрические многочлены

$$P_j^t(x) = P_{n_j, n, \vec{m}}^t(x; \mathbf{f}^t), \deg P_j^t \leq n_j, n_j = n + m - m_j, \text{ чтобы}$$

$$\begin{aligned} Q_m^t(x) f_j^t(x) - P_j^t(x) &= \\ &= \sum_{l=n+m+1}^{\infty} (\tilde{a}_l^j \cos lx + \tilde{b}_l^j \sin lx), j = 1, \dots, k. \end{aligned} (1.2)$$

Условиями (1.2) многочлены $Q_m^t, P_1^t, \dots, P_k^t$ находятся с точностью до числового множителя. Однако, их неединственность может быть и более существенной (см. [10], [11]).

Определение 1.1. Будем говорить, что задача \mathbf{A}^t имеет единственное решение, если это решение единственно с точностью до числового множителя, т. е. для любых двух решений (\bar{Q}_m^t, \bar{P}^t) и $(\tilde{Q}_m^t, \tilde{P}^t)$ задачи \mathbf{A}^t существует число λ , что

$$(\bar{Q}_m^t, \bar{P}^t) = (\lambda \tilde{Q}_m^t, \lambda \tilde{P}^t).$$

Здесь $P^t := (P_1^t, \dots, P_k^t), \lambda P^t := (\lambda P_1^t, \dots, \lambda P_k^t)$.

Определение 1.2. Если пара (Q_m^t, P^t) является решением задачи \mathbf{A}^t , то тригонометрические рациональные дроби

$$\pi_j^t(x) = \pi_j^t(x; \mathbf{f}^t) = \pi_{n_j, n, \vec{m}}^t(x; \mathbf{f}^t) = \frac{P_j^t(x)}{Q_m^t(x)}, j = 1, \dots, k$$

будем называть тригонометрическими аппроксимациями Эрмита – Паде (совместными аппроксимациями Эрмита – Фурье) для мультииндекса (n, \vec{m}) и системы \mathbf{f}^t .

В отличие от аппроксимаций Паде степенного ряда тригонометрические аппроксимации Эрмита – Паде определяются, вообще говоря, не

однозначно, в то время как задача \mathbf{A}^t всегда имеет решение [10], [11]. В том случае, когда задача \mathbf{A}^t имеет единственное решение, тригонометрические аппроксимации Эрмита – Паде $\{\pi_j^t(x; \mathbf{f}^t)\}_{j=1}^k$ определяются однозначно. При $k = 1$ достаточное условие единственности решения задачи \mathbf{A}^t получено в [5]. Для произвольного $k \geq 1$ необходимое и достаточное условие единственности решения задачи \mathbf{A}^t установлено в [10], [11]. Для его формулировки введём обозначения.

Запишем ряды (1.1) и многочлены $Q_m^t(x), P_j^t(x)$ в комплексной форме:

$$f_j^t(x) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l^j e^{ilx}, (1.3)$$

$$Q_m^t(x) = \sum_{p=-m}^m u_p e^{ipx}, P_j^t(x) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} v_p^j e^{ipx}, (1.4)$$

где

$$u_p, v_p^j \in \mathbb{C}, c_0^j = \frac{a_0^j}{2}, c_l^j = \frac{a_l^j - ib_l^j}{2}, c_{-l}^j = \bar{c}_l^j, j = 1, \dots, k; l = 1, \dots$$

Тогда равенства (1.2) примут вид

$$\begin{aligned} Q_m^t(x) f_j^t(x) - P_j^t(x) &= \\ &= \sum_{l=n+m+1}^{+\infty} (\tilde{c}_l^j e^{ilx} + \tilde{c}_{-l}^j e^{-ilx}), j = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Рассмотрим матрицы и определители, элементами которых являются коэффициенты тригонометрических рядов $f_j^t(x)$ системы \mathbf{f}^t . Каждому $l \in \mathbb{Z}$ поставим в соответствие матрицы-строки

$$\mathbb{C}_l^j := (c_{l+m}^j, c_{l+m-1}^j, \dots, c_{l+1}^j, c_l^j, c_{l-1}^j, \dots, c_{l-m+1}^j, c_{l-m}^j),$$

$j = 1, \dots, k$, а действительному числу x – матрицу-строку

$$E_m^t(x) := (e^{-imx} e^{-i(m-1)x} \dots e^{-ix} 1 e^{ix} \dots e^{i(m-1)x} e^{imx}).$$

Для заданного $j \in \{1, \dots, k\}$, фиксированных индекса $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и ненулевого мультииндекса $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)$ в предположении, что $m_j \neq 0$, определим матрицы порядка $m_j \times (2m + 1)$

$$\begin{aligned} F_+^j &:= \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{n_j+m_j}^j \\ \mathbb{C}_{n_j+m_j-1}^j \\ \vdots \\ \mathbb{C}_{n_j+1}^j \end{bmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} c_{n_j+m+m_j}^j & c_{n_j+m+m_j-1}^j & \dots & c_{n_j-m+m_j}^j \\ c_{n_j+m+m_j-1}^j & c_{n_j+m+m_j-2}^j & \dots & c_{n_j-m+m_j-1}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n_j+m+1}^j & c_{n_j+m}^j & \dots & c_{n_j-m+1}^j \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$F_-^j := \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{-n_j-1}^j \\ \mathbb{C}_{-n_j-2}^j \\ \vdots \\ \mathbb{C}_{-n_j-m_j}^j \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} c_{-n_j+m-1}^j & c_{-n_j+m-2}^j & \cdots & c_{-n_j-m-1}^j \\ c_{-n_j+m-2}^j & c_{-n_j+m-3}^j & \cdots & c_{-n_j-m-2}^j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{-n_j+m-m_j}^j & c_{-n_j+m-m_j-1}^j & \cdots & c_{-n_j-m-m_j}^j \end{pmatrix}.$$

Введём в рассмотрение определитель порядка $2m+1$

$$D(n, \bar{m}; x) := \det \left[F_+^k \ \dots \ F_+^2 \ F_+^1 \ E_m^t(x) \ F_-^1 \ F_-^2 \ \dots \ F_-^k \right]^T := \det \begin{bmatrix} F_+^k \\ \vdots \\ F_+^1 \\ E_m^t(x) \\ F_-^1 \\ \vdots \\ F_-^k \end{bmatrix}.$$

В случае, если $m_j = 0$, считаем, что определитель $D(n, \bar{m}; x)$ не содержит блок-матриц F_{\pm}^j . Обозначим через $H_{n, \bar{m}}^t(\mathbf{f}^t)$ матрицу порядка $2m \times (2m+1)$, полученную из элементов определителя $D(n, \bar{m}; x)$ после удаления в нём $(m+1)$ -ой строки $E_m^t(x)$. Если в определителе $D(n, \bar{m}; x)$ строку $E_m^t(x)$ заменить на строку \mathbb{C}_l^j , получим новый определитель $d_l^j(n, \bar{m})$.

Теорема 1.1 [10], [11]. *Задача \mathbf{A}^t всегда имеет решение. Для того, чтобы для фиксированного мультииндекса (n, \bar{m}) , $\bar{m} \neq (0, \dots, 0)$ и системы \mathbf{f}^t задача \mathbf{A}^t имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы $H_{n, \bar{m}}^t(\mathbf{f}^t)$ была матрицей полного ранга, т. е. $\text{rank} H_{n, \bar{m}}^t(\mathbf{f}^t) = 2m$.*

Если $\text{rank} H_{n, \bar{m}}^t(\mathbf{f}^t) = 2m$, то при определённом выборе нормирующего множителя для решений задачи \mathbf{A}^t справедливы представления: при $j = 1, \dots, k$

$$Q_m^t(x) = D(n, \bar{m}; x), \tag{1.5}$$

$$P_j^t(x) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} d_p^j(n, \bar{m}) e^{ipx}, \tag{1.6}$$

$$Q_m^t(x) f_j^t(x) - P_j^t(x) = \sum_{p=n+m+1}^{\infty} (d_p^j(n, \bar{m}) e^{ipx} + d_{-p}^j(n, \bar{m}) e^{-ipx}). \tag{1.7}$$

Следствие 1.1. *Если $H_{n, \bar{m}}^t(\mathbf{f}^t)$ является матрицей полного ранга, то коэффициенты многочленов (1.5) и (1.6) являются действительными числами.*

Рассмотрим две системы $\mathbf{f}^{t1} = (f_1^{t1}, \dots, f_k^{t1})$, $\mathbf{f}^{t2} = (f_1^{t2}, \dots, f_k^{t2})$ тригонометрических рядов, которые ассоциированы с системами (0.1) и (0.3):

$$f_j^{t1}(x) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a_l^j \cos lx,$$

$$f_j^{t2}(x) = \sum_{l=1}^{\infty} b_l^j \sin lx.$$

Следствие 1.2. *Для системы \mathbf{f}^{t1} формулы (1.5)–(1.7) принимают вид:*

$$Q_m^t(x; \mathbf{f}^{t1}) = \sum_{p=0}^m \bar{u}_p \cos px, \quad P_j^t(x; \mathbf{f}^{t1}) = \sum_{p=0}^{n_j} \bar{v}_p^j \cos px,$$

$$(Q_m^t f_j^t - P_j^t)(x) = \sum_{p=n+m+1}^{\infty} \bar{h}_p^j \cos px,$$

где \bar{u}_p , \bar{v}_p^j , $\bar{h}_p^j = 2d_p^j(n, \bar{m})$ – действительные числа.

Следствие 1.3. *Для системы \mathbf{f}^{t2} формулы (1.5)–(1.7) принимают вид:*

$$Q_m^t(x; \mathbf{f}^{t2}) = \sum_{p=0}^m \tilde{u}_p \cos px, \tag{1.8}$$

$$P_j^t(x; \mathbf{f}^{t2}) = \sum_{p=0}^{n_j} \tilde{v}_p^j \sin px, \tag{1.9}$$

$$(Q_m^t f_j^{t2} - P_j^t)(x) = \sum_{p=n+m+1}^{\infty} \tilde{h}_p^j \sin px, \tag{1.10}$$

где \tilde{u}_p , \tilde{v}_p^j , $\tilde{h}_p^j = 2id_p^j(n, \bar{m})$ – действительные числа.

Доказательство следствия 1.3. Следствие 1.1 доказано в [11], а следствие 1.2 доказывается аналогично следствию 1.3.

Для системы \mathbf{f}^{t2} получаем, что $c_0 = 0$, $c_l = -i \frac{b_l}{2}$, $c_{-l} = -c_l$, $l = 1, 2, \dots$. В этом случае блок-матрицы F_{\pm}^j этой системы имеют вид:

$$F_+^j = \begin{pmatrix} c_{n_j+m+m_j}^j & c_{n_j+m+m_j-1}^j & \cdots & c_{n_j-m+m_j}^j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n_j+m+1}^j & c_{n_j+m}^j & \cdots & c_{n_j-m+1}^j \end{pmatrix},$$

$$F_-^j = \begin{pmatrix} -c_{n_j-m+1}^j & -c_{n_j-m+2}^j & \cdots & -c_{n_j+m+1}^j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -c_{n_j-m+m_j}^j & -c_{n_j-m+m_j-1}^j & \cdots & -c_{n_j+m+m_j}^j \end{pmatrix}.$$

Поэтому нетрудно убедиться, что множители при степенях e^{ipx} и e^{-ipx} в правой части равенства (1.5) совпадают, а в равенствах (1.6) и (1.7)

$$d_{-p}^j(n, m) = -d_p^j(n, m), \quad p = 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, k.$$

Отсюда следует справедливость равенств (1.8)–(1.10). Заметим также, что $\text{Re}\{d_p^j(n, \bar{m})\} = 0$. \square

2 Единственность линейных аппроксимаций Эрмита – Чебышёва

Основными результатами работы являются следующие теоремы.

Теорема 2.1. Пусть для мультииндекса (n, \bar{m}) , $\bar{m} \neq (0, \dots, 0)$ матрица $H'_{n, \bar{m}}(\mathbf{f}^{t1})$ имеет полный ранг, т. е. $\text{rank} H'_{n, \bar{m}}(\mathbf{f}^{t1}) = 2m$. Тогда

- 1) для системы \mathbf{f}^{t1} решение задачи \mathbf{A}^{ch1} существует и единственно;
- 2) линейные аппроксимации Эрмита – Чебышева $\{\pi_j^{ch1}(x; \mathbf{f}^{t1})\}_{j=1}^k$ условиями (0.2) определяются однозначно;
- 3) при соответствующей нормировке справедливы представления:

$$Q_m^{ch1}(x; \mathbf{f}^{t1}) = Q_m^t(\arccos x; \mathbf{f}^{t1}),$$

$$P_j^{ch1}(x; \mathbf{f}^{t1}) = P_j^t(\arccos x; \mathbf{f}^{t1}),$$

$$(Q_m^{ch1} f_j^{ch1} - P_j^{ch1})(x) = \sum_{p=n+m+1}^{\infty} 2d_p^j(n, \bar{m}) T_p(x),$$

где многочлены $Q_m^t(\cdot; \mathbf{f}^{t1})$, $P_j^t(\cdot; \mathbf{f}^{t1})$ определяются равенствами (1.5), (1.6).

Теорема 2.2. Пусть для мультииндекса (n, \bar{m}) , $\bar{m} \neq (0, \dots, 0)$ матрица $H'_{n, \bar{m}}(\mathbf{f}^{t2})$ имеет полный ранг, т. е. $\text{rank} H'_{n, \bar{m}}(\mathbf{f}^{t2}) = 2m$. Тогда

- 1) для системы \mathbf{f}^{t2} решение задачи \mathbf{A}^{ch2} существует и единственно;
- 2) линейные аппроксимации Эрмита – Чебышева $\{\pi_j^{ch2}(x; \mathbf{f}^{t2})\}_{j=1}^k$ условиями (0.4) определяются однозначно;
- 3) при соответствующей нормировке справедливы представления:

$$Q_m^{ch2}(x; \mathbf{f}^{t2}) = Q_m^t(\arccos x; \mathbf{f}^{t2}), \quad (2.1)$$

$$P_j^{ch2}(x; \mathbf{f}^{t2}) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} P_j^t(\arccos x; \mathbf{f}^{t2}), \quad (2.2)$$

$$(Q_m^{ch2} f_j^{ch2} - P_j^{ch2})(x) = \sum_{p=n+m+1}^{\infty} 2id_p^j(n, \bar{m}) U_p(x), \quad (2.3)$$

где многочлены $Q_m^t(\cdot; \mathbf{f}^{t2})$, $P_j^{t2}(\cdot; \mathbf{f}^{t2})$ определяются равенствами (1.5), (1.6), а $id_p^j(n, \bar{m})$ – действительные числа.

Доказательство теоремы 2.2. Теорема 2.1 доказывается аналогично.

Рассмотрим ассоциированную с системой $\mathbf{f}^{ch2} = (f_1^{ch2}, \dots, f_k^{ch2})$ систему тригонометрических функций $\mathbf{f}^{t2} = (f_1^{t2}, \dots, f_k^{t2})$. На отрезке $[-1, 1]$ справедливы тождества

$$f_j^{t2}(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} f_j^{ch2}(x), \quad j = 1, \dots, k.$$

Поскольку матрица $H'_{n, \bar{m}}(\mathbf{f}^{t2})$ имеет полный ранг, то по теореме 1.1 для системы \mathbf{f}^{t2} задача \mathbf{A}^t имеет единственное решение. Согласно следствию 1.3 в этом случае для тригонометрических

многочленов Эрмита – Паде справедливы формулы (1.8)–(1.10). Заменяем в равенствах (1.8)–(1.10) x на $\arccos x$, а затем разделим равенства (1.9) и (1.10) на $\sqrt{1-x^2}$. В результате получим

$$Q_m^t(\arccos x; \mathbf{f}^{t2}) = \sum_{p=0}^n \tilde{u}_p^t T_p(x),$$

$$\frac{P_j^t(\arccos x; \mathbf{f}^{t2})}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{p=0}^n \tilde{v}_p^j U_p(x),$$

$$Q_m^{ch2}(\arccos x; \mathbf{f}^{t2}) f_j^{ch2}(x) - \frac{P_j^t(\arccos x; \mathbf{f}^{t2})}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \sum_{p=n+m+1}^{\infty} n \tilde{h}_p^j U_p(x),$$

где $\tilde{h}_p^j = 2id_p^j(n, \bar{m})$ – действительные числа. Отсюда следует справедливость равенств (2.1)–(2.3). \square

Замечание. Теоремы 2.1 и 2.2 являются новыми и представляют самостоятельный интерес и в случае, когда $k=1$. Так в работе [8] при $k=1$ достаточные условия единственности линейных аппроксимаций Паде – Чебышёва 1-го рода получены только для верхней части таблицы Паде – Чебышёва (в условии предполагается, что $n \geq m-1$). Доказательство основного результата в этой работе основано на описании структуры ядра некоторых *теплиц-плюс-ганкелевых* матриц, элементами которых являются коэффициенты ряда $f_1^{ch}(x)$. В частности, в [8] установлено, что для единственности линейной аппроксимации Паде – Чебышёва достаточно, чтобы соответствующая *теплиц-плюс-ганкелева* матрица имела полный ранг. Отметим, что в отличие от матрицы $H'_{n, \bar{m}}(\mathbf{f}^{t1})$ при $k=1$, *теплиц-плюс-ганкелева* матрица в [8], описывающая достаточные условия единственности, имеет существенно более сложную структуру. По этой причине сравнить (проверить эквивалентность!) достаточные условия в [8] и в теореме 2.1 при $k=1$ и $n \geq m-1$, похожие своими формулировками, не представляется возможным.

Отметим также, что для линейных аппроксимаций Паде – Чебышёва 2-го рода задача нахождения достаточных условий единственности до настоящего времени не исследовалась.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никишин, Е.М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – Москва: Наука, 1988.
2. Суетин, С.П. О существовании нелинейных аппроксимаций Паде – Чебышёва для аналитических функций / С.П. Суетин // Математические заметки. – 2009. – Т. 86, № 2. – С. 290–303.
3. Гончар, А.А. Аппроксимации Паде – Чебышёва для многозначных аналитических

функций, вариация равновесной энергии и S -свойство стационарных компактов / А.А. Гончар, Е.А. Рахманов, С.П. Суетин // Успехи математических наук. – 2011. – Т. 66, № 6. – С. 3–36.

4. Бейкер мл., Дж. Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – Москва: Мир, 1986.

5. Лабыч, Ю.А. Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье / Ю.А. Лабыч, А.П. Старовойтов // Математический сборник. – 2009. – Т. 200, № 7. – С. 107–130.

6. Geddes, K.O. Block structure in the Chebyshev – Padé table / K.O. Geddes // SIAM J. Numer. Anal. – 1981. – Vol. 18, № 5. – P. 844 – 861.

7. Адуков, В.М. Асимптотическое поведение знаменателей аппроксимаций Паде – Чебышёва для последней промежуточной строки. Рациональный случай / В.М. Адуков, О.Л. Ибряева // Вестник ЮУрГУ. Серия математика, физика, химия. – 2005. – Т. 6, № 6. – С. 11–18.

8. Ибряева, О.Л. Асимптотическое поведение знаменателей аппроксимаций Паде – Чебышёва для последней промежуточной строки. Рациональный случай / О.Л. Ибряева // Известия Челябинского научного центра. – 2002. – № 4. – С. 1–5.

9. Старовойтов, А.П. О существовании тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Якоби и нелинейных аппроксимаций Эрмита – Чебышёва / А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко, Т.М. Оснач // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2023. – № 2. – С. 6–17.

10. Старовойтов, А.П. Существование и единственность совместных аппроксимаций Эрмита – Фурье / А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко, Т.М. Оснач // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 68–73.

11. Старовойтов, А.П. О существовании тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Якоби и нелинейных аппроксимаций Эрмита – Чебышёва / А.П. Старовойтов, И.В. Кругликов, Т.М. Оснач // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2024. – № 3. – С. 6–12.

12. Mason, J.C. Laurent – Padé approximants to four kinds of Chebyshev polynomial expansions. I. Maehly type approximants / J.C. Mason, A. Crampton // Numerical Algorithms. – 2005. – Vol. 38: 1–3. – С. 3–18.

13. Mason, J.C. Laurent – Padé approximants to four kinds of Chebyshev polynomial expansions. II. Clenshaw – Lord type approximants / J.C. Mason, A. Crampton // Numerical Algorithms. – 2005. – Vol. 38:1–3. – С. 19–29.

14. Суетин, С.П. Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда / С.П. Суетин // Успехи математических наук. – 2002. – Т. 57, № 1. – С. 45–142.

15. Суетин, С.П. Вопросы сходимости аппроксимаций Паде – Фабера. Дисс. ... канд. физ.-матем. наук / С.П. Суетин. – Москва: МГУ, 1981.

Поступила в редакцию 27.11.2024.

Информация об авторах

Старовойтов Александр Павлович – д.ф.-м.н., профессор
Кругликов Игорь Викторович – студент

РЕАЛИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОГО ЗРЕНИЯ ДЛЯ ДЕТЕКТОРОВ УГЛОВ

Н.А. Аксенова

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

IMPLEMENTATION OF A COMPUTER VISION SYSTEM FOR ANGLE DETECTORS

N.A. Aksionova

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Описывается разработка системы машинного зрения, позволяющей определять особые точки углов на статических изображениях архитектурных планов. Основной задачей данной разработки является создание библиотеки на языке программирования Python, содержащей детекторы углов Харриса, Ши – Томази и FAST. Разработанные программные модули являются дополнением для Blender и позволяют ускорить процесс трехмерного моделирования на основе распознанных угловых точек.

Ключевые слова: детекторы углов, особые точки, компьютерное зрение.

Для цитирования: Аксенова, Н.А. Реализация системы компьютерного зрения для детекторов углов / Н.А. Аксенова // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 108–112. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_108. – EDN: IRYMTE

Abstract. The development of a machine vision system that allows you to determine the special points of angles on static images of architectural plans are described. The main objective of this development is to create a library in the Python programming language containing the Harris, Shi – Tomasi and FAST angle detectors. The developed software modules are an addition to Blender and allow you to speed up the process of three-dimensional modeling based on recognized corner points.

Keywords: angle detectors, singular points, computer vision.

For citation: Aksionova, N.A. Implementation of a computer vision system for angle detectors / N.A. Aksionova // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 108–112. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_108 (in Russian). – EDN: IRYMTE

Введение

В современном мире программные системы машинного зрения широко применяются в различных областях, включая компьютерное зрение, робототехнику, беспилотные автомобили и многое другое. Эти системы способны анализировать и интерпретировать изображения и видео, что позволяет компьютерам обрабатывать информацию, подобно тому, как это делает человеческий глаз. Важным аспектом программных систем машинного зрения является способность обнаруживать и извлекать особенности изображений, такие как грани, углы и особые точки интереса [1].

В данной работе описывается разработка библиотеки детекторов углов для программной системы машинного зрения. Углы являются важными структурными элементами визуальных данных и нахождение их положения и характеристик имеет большое значение для анализа изображений и определения геометрических свойств объектов [2]. Детектирование углов в программных системах машинного зрения позволяет

обнаруживать пересечения линий, углы поворота объектов и другие ключевые особенности, что может быть важным в таких задачах как навигация, распознавание объектов, отслеживание движущихся объектов и многое другое [3].

Целью является разработка эффективной библиотеки детекторов углов, которая позволит исследователям и разработчикам использовать их в своих приложениях для программных систем машинного зрения. Библиотека должна предоставлять набор алгоритмов и методов для обнаружения и извлечения углов на изображениях с высокой точностью и скоростью. При этом важно учитывать различные условия освещения, шум, изменения масштаба и поворота объектов.

1 Структура проекта

Библиотека представляет собой три функции, каждая из которых реализует один из методов по нахождению ключевых точек: Harris [4], Shi – Tomasi и FAST. Функции принимают на входе путь к изображению и параметры, регулируемые пользователем. Из таких параметров

можно выделить количество точек для поиска, числовое значение порога для определения пикселя ключевой точкой, количество пикселей, среди которых находится локальная ключевая точка.

Функционал:

- поддержка всех современных форматов графических файлов, такие как: PNG, JPEG, BMP, TIFF, GIF и SVG;
- подсчёт количества распознанных углов для каждого метода;
- оценка скорости распознавания углов.

Для реализации системы компьютерного зрения для детекторов углов было разработано приложение на языке программирования Python с применением импортированных библиотек OpenCV, NumPy, PIL, а также встроенных библиотек Math и Time. Данное приложение позволяет найти ключевые точки на выбранном пользователем изображении и отрегулировать некоторые параметры при их поиске. Приложение представляет собой функцию по вызову выбранного метода на выбранное изображение, а также отчет для выбранного изображения в виде таблицы. В таблице отображаются несколько показателей, характеризующих работу алгоритмов по нахождению особых точек для каждого метода.

Приложение состоит из двух исходных файлов: первый – сама библиотека, второй – интерфейс приложения. Также, имеется изображение, которое может применяться для тестирования программы.

2 Описание основных модулей

Метод Харриса. Функция по нахождению ключевых точек методом Харриса принимает несколько параметров: путь до изображения, размер блока окрестности, а также числовое значение порога для определения пикселя ключевой точкой. Порог принимает значения от нуля включительно до единицы не включительно. Чем меньше значение порога, тем больше углов будет найдено, при вводе нуля это значение будет максимальным.

Функция начинается с чтения изображения и преобразования его в черно-белую шкалу с помощью cv2; после этого оно преобразуется в изображение типа float32:

```
def harris_corner(image, threshold, neighborhood):
    start_time=time.time()
    img=cv2.cvtColor(img,
                    cv2.COLOR_BGR2GRAY)
    gray=np.float(gray)
```

Также в самом начале вызывается функция time.time() и записывается ее текущее значение, чтобы получить время выполнения кода данной функции. Эта строка будет во всех последующих функциях.

Далее вызывается функция cv2.cornerHarris. Новое индивидуальное значение порога равно threshold*dst.max(), согласно ему находятся координаты углов и их количество:

```
dst=cv2.cornerHarris(gray.Neighborh
ood,3,0.04)
corner_map=dst[dst> thresh-
old*dst.max()]
number_of_points=
np.count_nonzero(corner_map)
```

Функция cv2.cornerHarris принимает несколько параметров:

- img – входное черно-белое изображение типа float32;
- blockSize – размер окрестности, учитываемой при обнаружении углов;
- ksize – используемый параметр апертуры производной Собеля;
- k – свободный параметр детектора Харриса.

```
img[dst> threshold*dst.max()]=
[255,0,0]
runtime=time.time()-start_time
return img, number_of_points,
str(neighborhood), threshold,
round(runtime,2)
```

Пиксели, определяемые как углы по алгоритму, помечаются красным цветом.

Далее записывается время работы программы, которое равно разности текущего значения функции time.time() и ранее записанного ее значения.

Функция возвращает:

- изображение с обозначенными углами;
- размер блока окрестности пикселя, в котором производится сравнение по контрастности;
- порог для определения пикселя как ключевой точки;
- округленное до двух знаков после запятой время работы программы в секундах.

Детектор Харриса инвариантен к поворотам, частично инвариантен к аффинным изменениям интенсивности. К недостаткам можно отнести чувствительность к шуму и зависимость детектора от масштаба изображения. Для устранения этого недостатка используют многомасштабный детектор Харриса: multi-scale Harris detector.

Метод Ши – Томази. Функция по нахождению ключевых точек методом Shi – Tomasi принимает несколько параметров: путь до изображения, желаемое количество точек для поиска, а также числовое значение порога для определения пикселя ключевой точкой.

Порог принимает значения от нуля до единицы не включительно. Чем меньше значение порога, тем больше углов будет найдено.

Функция начинается с чтения изображения и преобразование его в черно-белую шкалу с помощью cv2:

```
def shi_tomasi_corner(image,
    threshold, number_of_points):
    start_time=time.time()
    img=cv2.imread(image)
    gray= cv2.cvtColor(img,
        cv2.COLOR_BGR2GRAY)
```

После этого получается массив найденных углов также с помощью функции *cv2.goodFeaturesToTrack*. Она принимает на вход несколько параметров:

image – данное изображение в черно-белом формате;

corners – максимальное количество углов для возврата. Если углов больше, чем найдено, возвращается самые контрастные из них;

qualityLevel – параметр, характеризующий минимально допустимое качество углов изображения;

minDistance – минимально возможное расстояние между возвращенными углами в пикселях;

mask – необязательный параметр для заполнения. Если изображение не пустое, он указывает область, в которой обнаруживаются углы;

blockSize – размер блока для вычисления производной ковариационной матрицы по окружению каждого пикселя;

HarrisDetector – устанавливает использование метода Ши – Томази;

k – свободный параметр детектора Harris.

Далее с помощью цикла *for* на изображении рисуются точки в соответствии с полученными координатами ключевых точек.

```
number_of_points=len(corners)
runtime= time.time()-start_time
return img, number_of_points,
    str(neighborhood), threshold,
    round(runtime, 2)
```

Функция возвращает изображение с обозначенными углами; длину стороны окружения пикселя, в котором производится сравнение по контрастности, которая является константой для этого метода и равна 3; порог, заданный пользователем ранее; округленное до двух знаков после запятой время работы программы в секундах.

Метод FAST. Функция по нахождению ключевых точек методом FAST принимает на вход только путь до изображения.

Функция начинается с чтения изображения с помощью *cv2* и создания локального детектора углов:

```
def FAST_corner(image):
    start_time=time.time()
    img=cv2.imread(image)
    fast=
        cv.FastFeatureDetector_create()
```

С помощью созданного детектора находятся ключевые точки. Далее записываются параметры

для возврата. Число углов равно длине кортежа ключевых точек, значение порога можно получить функцией *getThreshold()*, а значение окрестности для пикселя – функцией *getType()*:

```
Key_point=fast.detect(img, None)
Threshold=fastThreshold()
Neighborhood=fast.getType()
Number_of_points=len(key_points)
```

После этого на изображении помечаются найденные ключевые точки с помощью функции *cv2.drawKeypoints*, которая принимает входное изображение, кортеж ключевых точек, выходное изображение и цвет для ключевых точек в формате RGB:

```
img=cv2.drawKeypoints(img,
    key_points, None, (250, 0, 0))
runtime= time.time()-start_time
return img, number_of_points,
    str(neighborhood),
    threshold, round(runtime, 2)
```

Функция возвращает:

- изображение с обозначенными углами;
- значение окрестности пикселя, в котором производится сравнение по контрастности;
- порог для определения пикселя как ключевой точки;
- округленное до двух знаков после запятой время работы программы в секундах.

3 Тестирование алгоритмов

Для тестирования алгоритмов было выбрано два графических изображения: первое изображение с шумами и невысоким контрастом (рисунок 3.1, а) и второе изображение чёткое с высоким контрастом (рисунок 3.1, б).

Результаты поиска углов методом Ши – Томази представлены на рисунке 3.2.

Выходные данные по методу Ши – Томази для первого изображения:

- время выполнения – 0,01 сек;
- найденные ключевые точки – 204;
- предел – 0,01;
- окружение – 3×3 пикселей.

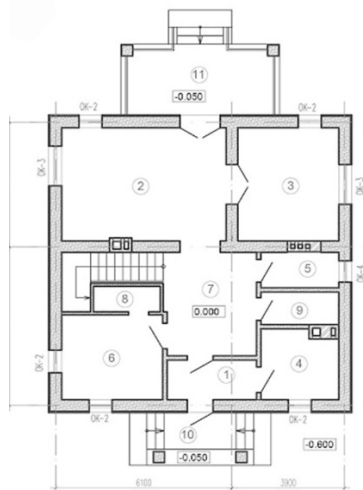
Выходные данные по методу Ши – Томази для второго изображения:

- время выполнения – 0,01 сек;
- найденные ключевые точки – 311;
- предел – 0,01;
- окружение – 3×3 пикселей.

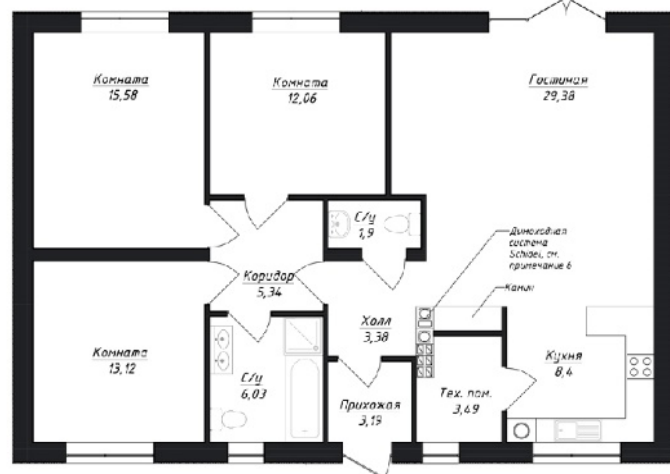
Результаты поиска углов методом Харриса представлены на рисунке 3.3.

Выходные данные по методу Харриса для первого изображения:

- время выполнения – 0,03 сек;
- найденные ключевые точки – 136;
- предел – 0,01;
- окружение – 4×4 пикселей.



а) графическое изображение невысокого контраста с шумами;

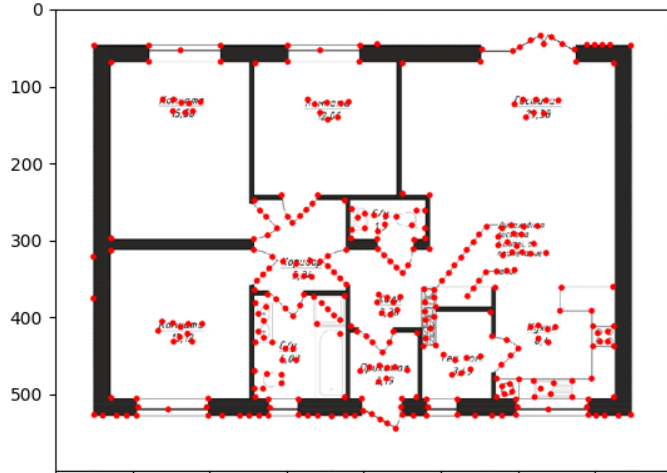


б) графическое изображение высокого контраста без шумов

Рисунок 3.1 – Входные изображения для апробации алгоритмов



а) графическое изображение невысокого контраста с шумами

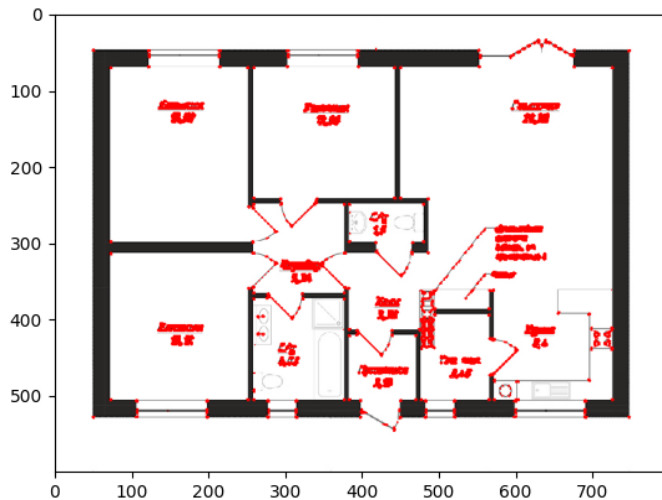


б) графическое изображение высокого контраста без шумов

Рисунок 3.2 – Результат поиска углов методом Ши – Томази



а) графическое изображение невысокого контраста с шумами



б) графическое изображение высокого контраста без шумов

Рисунок 3.3 – Результат поиска углов методом Харриса

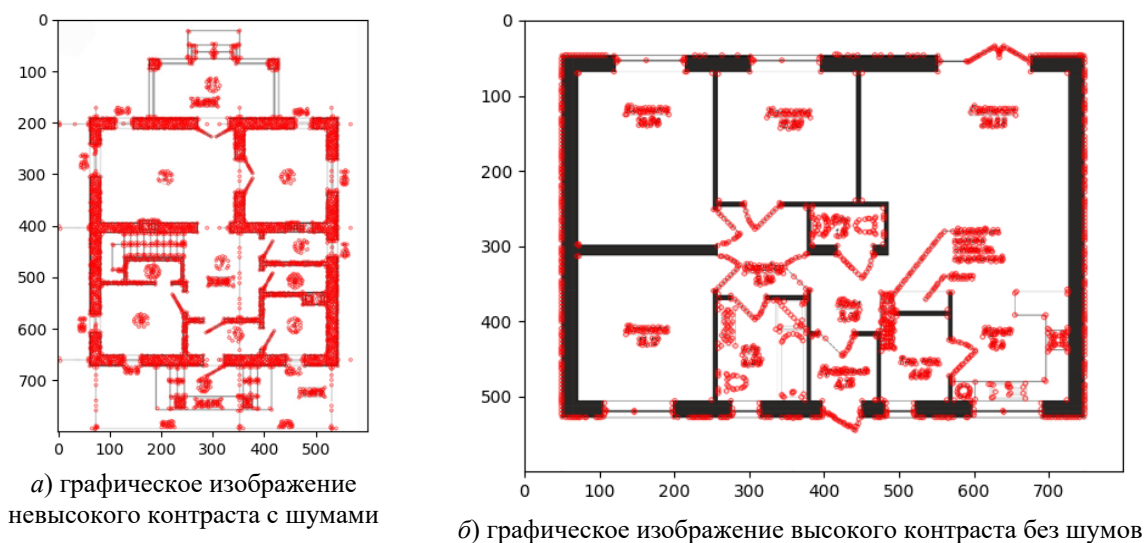


Рисунок 3.4 – Результат поиска углов методом FAST

Выходные данные по методу Харриса для второго изображения:

- время выполнения – 0,02 сек;
- найденные ключевые точки – 162;
- предел – 0,01;
- окружение – 4×4 пикселей.

Результаты поиска углов методом FAST представлены на рисунке 3.4.

Выходные данные по методу FAST для первого изображения:

- время выполнения – 0,03 сек;
- найденные ключевые точки – 483;
- предел – 10,0;
- окружение – 2×2 пикселей.

Выходные данные по методу FAST для второго изображения:

- время выполнения – 0,02 сек;
- найденные ключевые точки – 378;
- предел – 10,0;
- окружение – 2×2 пикселей.

Заключение

В результате проведенных исследований разработана система компьютерного зрения для детекторов углов. Система состоит из двух исходных файлов: библиотеки и интерфейса приложения. В процессе разработки библиотеки было уделено особое внимание оптимизации алгоритмов с целью достижения высокой производительности и эффективного использования вычислительных ресурсов. Реализация была проведена с использованием современных программных инструментов и языков программирования, обеспечивая гибкость и легкость внедрения библиотеки в различные программные системы машинного зрения.

Полученная библиотека является ценным инструментом для исследователей и разработчиков в области программных систем машинного зрения. Она позволяет обнаруживать и извлекать углы изображений с высокой точностью и быстродействием, что может быть полезным для широкого спектра задач, включая навигацию, распознавание объектов, трекинг движущихся объектов и многое другое.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aksionova, N.A.* Method of construction of three-dimensional structures based on key corner points / N.A. Aksionova, D.S. Sych, A.V. Varuyeu // *Proceedings of Francisk Scorina Gomel State University.* – 2023. – № 6 (141). – P. 69–75.

2. *Аксёнова, Н.А.* Разработка SDK для мобильного приложения с применением технологии дополненной реальности / Н.А. Аксенова, А.И. Кучеров // *Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины.* – 2021. – № 126 (3). – С. 81–84.

3. *Demidenko, O.M.* 3D-modeling of Augmented Reality objects using Shi – Tomasi corner detection algorithms. / O.M. Demidenko, N.A. Aksionova, A.V. Varuyeu // *J. Phys. CS.* 2091. – 2021. – P. 012058. – DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2091/1/012058>.

4. *Harris, C.* A combinet corner and edge detector / C. Harris, M. Stephens // *Proceedings of 4th Alvey Vision Conference.* – 1988. – P. 147–151.

Поступила в редакцию 27.01.2025.

Информация об авторах

Аксенова Наталья Андреевна – аспирантка

WEB-ПРИЛОЖЕНИЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ ГИПЕРПАРАМЕТРОВ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ АЛГОРИТМОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ В РАННЕЙ ДИАГНОСТИКЕ ЗАБОЛЕВАНИЙ

Е.В. Тимошенко, А.Ф. Ражков

Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова

WEB APPLICATION FOR RESEARCH OF THE INFLUENCE OF HYPERPARAMETERS ON THE PERFORMANCE OF MACHINE LEARNING ALGORITHMS IN EARLY DIAGNOSIS OF DISEASES

E.V. Timoschenko, A.F. Razhkov

Mogilev State A. Kuleshov University

Аннотация. В статье представлена программная реализация web-приложения для исследования влияния гиперпараметров на эффективность алгоритмов машинного обучения при решении задач классификации биомедицинских данных и прогнозирования наличия заболеваний как продолжение предыдущих исследований по оптимизации гиперпараметров алгоритмов машинного обучения для задач классификации биомедицинских данных. Web-приложение призвано облегчить процесс настройки моделей, предоставляя удобный инструмент для проведения экспериментов, позволяет загружать набор биомедицинских данных, выбирать алгоритм классификации и задавать значения для соответствующих гиперпараметров. Также оно может быть использовано в качестве инструмента поддержки принятия врачебного решения, обеспечивая более точную диагностику на основе анализа клинических данных пациентов.

Ключевые слова: гиперпараметры, модель машинного обучения, алгоритмы классификации, оценка эффективности, ранняя диагностика заболеваний, прогнозная аналитика, web-приложение.

Для цитирования: Тимошенко, Е.В. Web-приложение для исследования влияния гиперпараметров на эффективность алгоритмов машинного обучения в ранней диагностике заболеваний / Е.В. Тимошенко, А.Ф. Ражков // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 113–119. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_113. – EDN: JTWROE

Abstract. The article presents a software implementation of a web application for studying the influence of hyperparameters on the effectiveness of machine learning algorithms when solving problems of classification of biomedical data and predicting the presence of diseases as a continuation of previous studies on optimizing hyperparameters of machine learning algorithms for problems of classification of biomedical data. The web application is designed to facilitate the process of setting up models, providing a convenient tool for conducting experiments, making it possible to load a set of biomedical data, select a classification algorithm and set values for the corresponding hyperparameters. It can also be used as a medical decision support tool, providing more accurate diagnosis based on the analysis of the patient clinical data.

Keywords: hyperparameters, machine learning model, classification algorithms, performance assessment, early diagnosis of diseases, predictive analytics, web application.

For citation: Timoschenko, E.V. Web application for research of the influence of hyperparameters on the performance of machine learning algorithms in early diagnosis of diseases / E.V. Timoschenko, A.F. Razhkov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 113–119. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_113 (in Russian). – EDN: JTWROE

Введение

В современной медицине накапливаются огромные объемы данных, содержащих ценную информацию о состоянии здоровья пациентов. При этом существует множество серьезных заболеваний, которые крайне важно идентифицировать на ранних стадиях для своевременного назначения соответствующего лечения и повышения шансов на благоприятный исход. Эффективная обработка и анализ биомедицинских данных играют ключевую роль в выявлении заболеваний на начальных этапах их развития, когда симптомы могут быть не столь очевидными, но

ранняя диагностика и терапия способны значительно улучшить прогноз для пациента.

Методы машинного обучения находят широкое применение для решения задач прогнозирования и классификации в различных сферах, включая медицину. Одним из наиболее эффективных подходов машинного обучения для целей прогнозной аналитики в здравоохранении является классификация, позволяющая на основе набора признаков отнести пациента к одной из заранее определенных категорий, таких как наличие или отсутствие того или иного заболевания.

Однако эффективность алгоритмов машинного обучения во многом зависит от правильного выбора гиперпараметров, определяющих поведение модели. Гиперпараметры представляют собой параметры, значения которых задаются вручную перед обучением модели и не подлежат автоматической настройке в процессе оптимизации, однако они оказывают значительное влияние на способность модели эффективно обобщать данные и демонстрировать высокую точность прогнозирования. Подбор оптимальных значений гиперпараметров часто требует проведения большого количества экспериментов и анализа полученных результатов. Ранее авторами проводились такие исследования, в результате которых были найдены алгоритмы машинного обучения, обладающие наивысшей производительностью, для некоторых наборов биомедицинских данных [1], [2].

В статье представлена программная реализация web-приложения для исследования влияния гиперпараметров на эффективность алгоритмов машинного обучения при решении задач классификации биомедицинских данных и прогнозирования наличия заболеваний. Такое приложение призвано облегчить процесс настройки моделей, предоставляя удобный инструмент для проведения экспериментов. Web-приложение позволяет загружать набор биомедицинских данных, выбирать алгоритм классификации и задавать значения для соответствующих гиперпараметров. Затем производится обучение моделей с различными комбинациями гиперпараметров, и пользователь может оценить их влияние на точность прогнозов, анализируя значения метрик качества классификации, наиболее распространенной из которых является точность - доля правильно классифицированных объектов. Однако в случае несбалансированных наборов данных, когда один класс значительно превосходит по численности другие, точность становится неинформативной и даже вводящей в заблуждение метрикой. Эта проблема особенно актуальна в задачах медицинской диагностики, где ошибки классификации могут иметь серьезные последствия для здоровья пациентов. Например, при прогнозировании редких, но опасных для жизни заболеваний крайне важно минимизировать количество ложноотрицательных результатов, даже если это приведет к некоторому росту ложноположительных.

1 Анализ предметной области и постановка задачи

Согласно данным Всемирной организации здравоохранения, в число наиболее опасных и распространенных заболеваний, приводящих к высокому уровню смертности, входят сердечно-сосудистые заболевания (17,9 миллиона случаев смерти в 2019 году) [3], рак молочной железы

(685 000 случаев смерти в 2020 году) [4], сахарный диабет (1,5 миллиона смертей в 2019 году) [5], хронические болезни почек (1,2 миллиона смертей в 2017 году) [6] и болезни печени (1,3 миллиона смертей в 2017 году) [7]. Ранняя диагностика этих патологий крайне важна для своевременного начала лечения и повышения шансов на благоприятный исход.

Повышение осведомленности населения о серьезных заболеваниях и мотивация людей из групп риска регулярно проходить профилактические медицинские обследования имеют решающее значение для раннего выявления патологий. Ранняя диагностика не только повышает шансы на успешное лечение, но и позволяет существенно сэкономить время и финансовые ресурсы за счет более простых и экономически эффективных схем терапии на начальных стадиях болезни [8]. Одним из перспективных инструментов для достижения этих целей является разработка систем прогнозирования риска и вероятности наличия заболеваний с использованием современных технологий машинного обучения [9].

Предлагаемое web-приложение, реализующее подобную систему диагностического скрининга, не ставит своей целью полностью заменить врача-специалиста при постановке окончательного диагноза. Это было бы неоправданно, учитывая сложность и многофакторность большинства патологических процессов. Однако применение эффективных алгоритмов машинного обучения и глубокого обучения для анализа медицинских данных пациентов позволяет с высокой точностью прогнозировать риски и вероятности развития заболеваний.

Таким образом, web-приложение выступает в роли системы поддержки принятия врачебных решений [10], предоставляя специалистам дополнительный инструмент для более ранней диагностики и стратификации рисков. Для пациентов же оно служит мотивацией для регулярного прохождения обследований, помогая своевременно выявить возможные проблемы со здоровьем на доклинической стадии.

2 Методы и технологии разработки

Для разработки web-приложения был использован стек технологий, включающий Python, Scikit-Learn и Streamlit. Python был выбран в качестве языка программирования, поскольку он предоставляет богатый инструментарий для эффективного решения задач машинного обучения.

Библиотека Scikit-Learn является одним из наиболее популярных и мощных инструментов в экосистеме Python для создания моделей машинного обучения. Она предоставляет широкий спектр алгоритмов для классификации, регрессии, кластеризации и других задач, а также инструменты для предобработки данных, отбора признаков, кросс-валидации и оценки

производительности моделей. В рамках данного проекта Scikit-Learn использовалась для реализации различных алгоритмов классификации. Библиотека позволяет легко настраивать гиперпараметры этих алгоритмов и обучать модели на загруженных пользователем наборах данных.

Фреймворк Streamlit был использован для разработки web-интерфейса в качестве инструмента создания интерактивных web-приложений на Python. Он обеспечивает кэширование вычислений, что позволяет ускорить работу приложения и повысить его отзывчивость.

3 Архитектура web-приложения

Web-приложение было разработано с использованием модульного подхода (рисунок 3.1), разделяя функциональность на отдельные компоненты. Основные модули включают:

Модуль загрузки данных отвечает за загрузку и предобработку наборов данных, предоставляемых пользователем.

Модуль алгоритмов классификации предоставляет широкий спектр алгоритмов классификации, что дает пользователям возможность гибко выбирать и применять оптимальный алгоритм для задачи классификации.

Модуль оценки производительности вычисляет метрики качества для обученных моделей, такие как точность (accuracy), точность (precision), полнота (recall), F1-мера (F1-score), среднеквадратичная ошибка (Mean Squared Error, MSE).

Модуль интерфейса разработан с использованием Streamlit и предоставляет интуитивно понятный пользовательский интерфейс для взаимодействия с приложением.

Web-приложение спроектировано на основе клиент-серверной архитектуры (рисунок 3.2). Приложение используется для построения и развертывания моделей машинного обучения на веб-сервере. Это позволяет пользователям взаимодействовать с моделями машинного обучения в режиме реального времени через web-интерфейс.

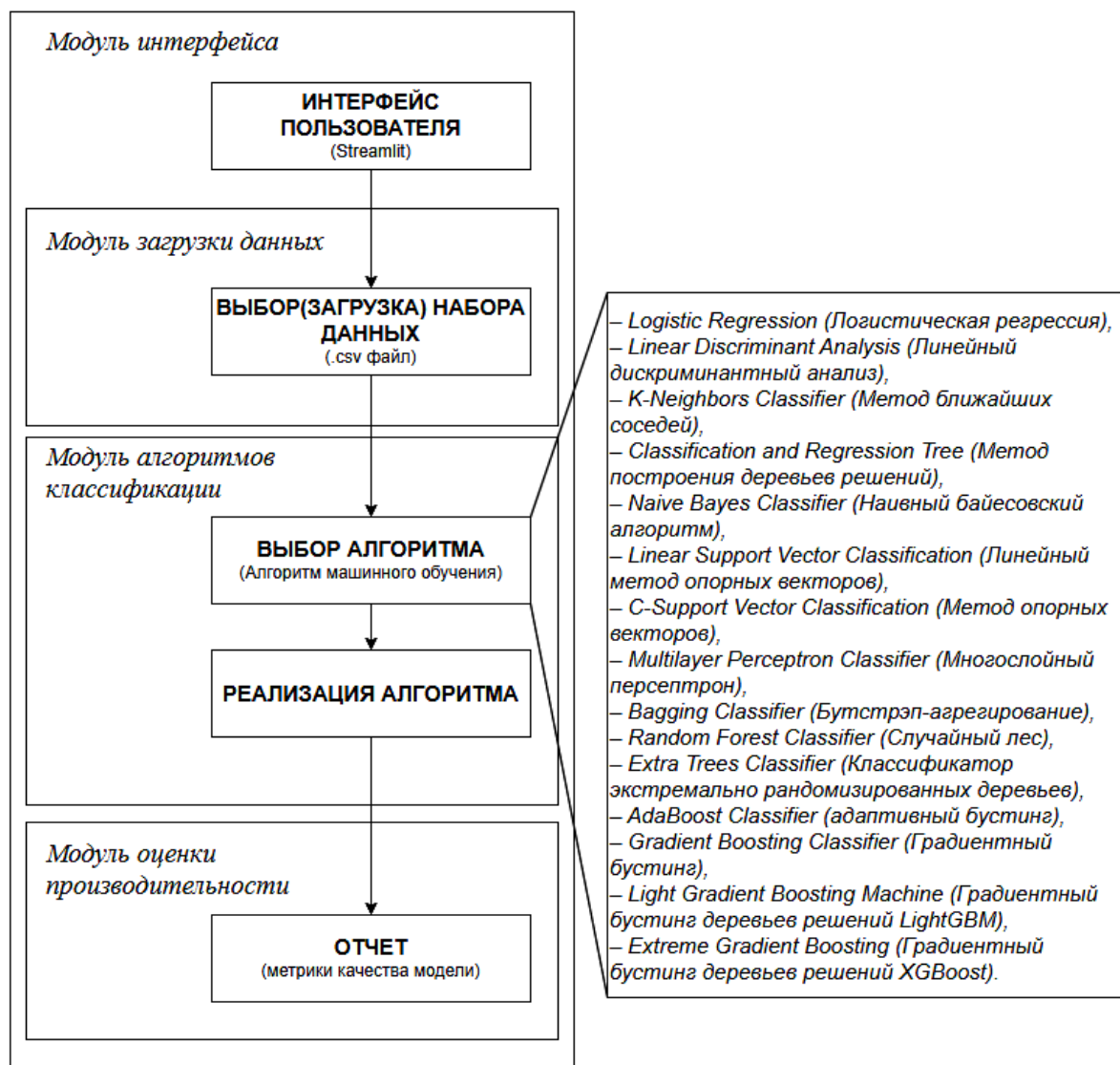


Рисунок 3.1 – Модульный подход

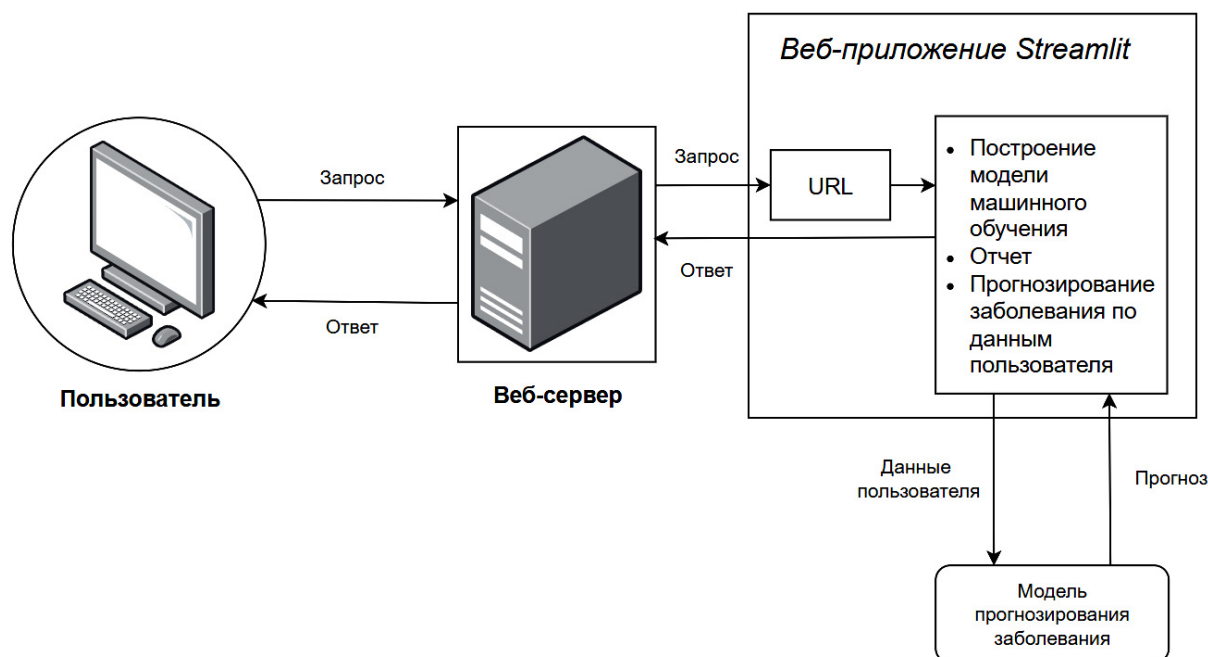


Рисунок 3.2 – Архитектура web-приложения

Такая архитектура обеспечивает модульность и масштабируемость приложения, позволяя легко добавлять новые алгоритмы классификации или метрики оценки производительности в дальнейшем.

Выбранный стек технологий Python, Scikit-Learn и Streamlit обеспечивает гибкость в построении и обучении моделей машинного обучения, а также делает их доступными через интуитивный web-интерфейс, облегчая исследование влияния гиперпараметров на эффективность алгоритмов классификации.

4 Интерфейс web-приложения

Интерфейс разработанного web-приложения соответствует правилам проектирования взаимодействия человека с компьютером [11] для удобства конечного пользователя. Интерфейс является интуитивно понятным, ориентированным преимущественно на пользователей со средним уровнем опыта заполнения форм с данными в интернете. Дизайн приложения также реализован согласно основным правилам проектирования взаимодействия человека с компьютером, поэтому были выбраны оптимальные размер и цвет шрифта, размер и цвет основных функциональных кнопок, размер текстовых полей для ввода данных, выравнивание их содержимого, цвет фона. Используется простой и хорошо организованный вывод информации, где боковая часть интерфейса предназначена для выбора набора данных, алгоритма и его гиперпараметров, а основная часть интерфейса используется для вывода набора данных, метрик выбранной модели машинного обучения и ввода данных пациента

(рисунок 4.1). В каждом поле ввода предусмотрены возможные значения для выбора, а также проверка правильности ввода, чтобы пользователи не смогли отправить неверную информацию.

Для того, чтобы начать работу с приложением, пользователю нужно выполнить следующие действия на боковой панели главной страницы web-приложения: выбрать/загрузить набор данных, выбрать алгоритм и его гиперпараметры (рисунок 4.2).

Разработанное web-приложение, представляющее собой систему прогнозной аналитики на основе моделей машинного обучения, позволяет пользователям загружать собственные наборы данных, где каждая строка соответствует отдельному объекту, описанному набором атрибутов. После загрузки данных осуществляется выбор алгоритма машинного обучения и настройка его гиперпараметров. Обучение моделей машинного обучения происходит на 80% загруженного набора данных, в то время как оставшиеся 20% используются для оценки точности предсказаний. По завершении обучения пользователь получает основные метрики качества модели, такие как точность (accuracy), точность (precision), полнота (recall), F1-мера (F1-score), среднеквадратичная ошибка (Mean Squared Error, MSE). Кроме того, пользователь может ввести атрибуты нового объекта, и приложение предоставит прогноз целевой переменной для этого объекта. Для валидации точности прогнозирования были использованы наборы данных по сердечно-сосудистым заболеваниям, раку молочной железы, диабету, хронической болезни почек, заболеваниям печени.

Приложение совершит обучение выбранной модели и отобразит результаты оценки в виде метрик (рисунки 4.3, 4.4).

Для диагностики пациента необходимо ввести его данные в форму (рисунок 4.5), после чего будет представлена вероятность наличия заболевания (рисунок 4.6).

Машинное обучение в здравоохранении

Прогнозирование сердечно-сосудистых заболеваний

	age	sex	cp	trestbps	chol	fbs	restecg	thalach	exang	oldpeak	slope	ca	thal	Diagnosis
0	63	1	3	145	233	1	0	150	0	2.3000	0	0	1	1
1	37	1	2	130	250	0	1	187	0	3.5000	0	0	2	1
2	41	0	1	130	204	0	0	172	0	1.4000	2	0	2	1
3	56	1	1	120	236	0	1	178	0	0.8000	2	0	2	1
4	57	0	0	120	354	0	1	163	1	0.6000	2	0	2	1
5	57	1	0	140	192	0	1	148	0	0.4000	1	0	1	1
6	56	0	1	140	294	0	0	153	0	1.3000	1	0	2	1
7	44	1	1	120	263	0	1	173	0	0	2	0	3	1
8	52	1	2	172	199	1	1	162	0	0.5000	2	0	3	1
9	57	1	2	150	168	0	1	174	0	1.6000	2	0	2	1
10	54	1	0	140	239	0	1	160	0	1.2000	2	0	2	1

Размер набора данных: (303, 14)

Используемый алгоритм классификации: (LR) Logistic Regression

Графики

Метрики модели:

Precision: 0.829
 Recall: 0.853
 F1-Score: 0.841
 Mean Squared Error: 0.18
 Accuracy: 81.967 %

Время выполнения: 0.9682 с.

Рисунок 4.1 – Главная страница web-приложения

Набор данных и алгоритмы классификации

Выбрать набор данных: Сердечно-сосудистые заболеван... ▾

Выбрать алгоритм классификации: (LR) Logistic Regression ▾

Больше информации об алгоритме

Параметры:

penalty: elasticnet ▾

dual: False ▾

tol (0.01-5.0): 1,01 [- +]

C (0.01-1000.0): 0,01 [- +]

fit_intercept: False ▾

intercept_scaling (0.01-100.0): 0,01 [- +]

Выбрать алгоритм классификации:

- (LR) Logistic Regression ▾
- (LDA) Linear Discriminant Analysis
- (KNN) K-Neighbors Classifier
- (CART) Classification and Regressi...
- (NB) Naive Bayes Classifier
- (LSVC) Linear Support Vector Clas...
- (SVC) C-Support Vector Classifcat...

Выбрать набор данных:

- Сердечно-сосудистые заболеван... ▾
- Сердечно-сосудистые заболеван...
- Рак молочной железы
- Диабет
- Хроническая болезнь почек
- Заболевания печени

Рисунок 4.2 – Выбор алгоритма машинного обучения, набора данных, гиперпараметров

0	63	1	3	145	233	1	0	150	0	2.3000	0	0	1
1	37	1	2	130	250	0	1	187	0	3.5000	0	0	2
2	41	0	1	130	204	0	0	172	0	1.4000	2	0	2
3	56	1	1	120	236	0	1	178	0	0.8000	2	0	2
4	57	0	0	120	354	0	1	163	1	0.6000	2	0	2
5	57	1	0	140	192	0	1	148	0	0.4000	1	0	1
6	56	0	1	140	294	0	0	153	0	1.3000	1	0	2
7	44	1	1	120	263	0	1	173	0	0	2	0	3
8	52	1	2	172	199	1	1	162	0	0.5000	2	0	3
9	57	1	2	150	168	0	1	174	0	1.6000	2	0	2

Рисунок 4.3 – Вывод набора данных

Используемый алгоритм классификации: (LR) Logistic Regression

Графики

Метрики модели:

Precision: 0.829
 Recall: 0.853
 F1-Score: 0.841
 Mean Squared Error: 0.18
 Accuracy: 81.967 %

Время выполнения: 0.8519 с.

Рисунок 4.4 – Вывод метрик выбранной модели

Значения пациента

Дополнительная информация -

В данном разделе Вы можете ввести свои собственные значения для прогнозирования наличия заболевания. Введите необходимые значения ниже, и Вы получите свой статус на основе этих значений.

1 - Высокий риск

0 - Низкий риск

age (20.0000-86.0000)

20 - +

sex (0.0000-1.0000)

0 - +

ср (1.0000-4.0000)

1 - +

trestbps (76.0000-218.0000)

76 - +

chol (74.0000-616.0000)

74 - +

fbs (0.0000-1.0000)

0 - +

restecg (1.0000-3.0000)

1 - +

Рисунок 4.5 – Ввод данных пациента

Ваш статус:

1 - Вы находитесь в группе высокого риска!

Рисунок 4.6 – Вывод статуса пациента

Заключение

Приложение может найти применение в различных сферах, предоставляя ценные инструменты как для исследователей, так и для практикующих специалистов. Для студентов и исследователей приложение послужит платформой для изучения влияния гиперпараметров на производительность алгоритмов машинного обучения. Оно позволит проводить эксперименты с различными моделями на реальных наборах данных, способствуя глубокому пониманию принципов работы алгоритмов машинного обучения [12]. Для врачей и медицинских работников приложение выступает в качестве системы поддержки принятия врачебных решений. Оно предоставляет дополнительный инструмент для более точной диагностики заболеваний, анализируя клинические данные пациентов [13]. Таким образом, приложение имеет широкий спектр применения, позволяя как развивать научные исследования, так и улучшать практику здравоохранения.

В дальнейшем планируется расширение функциональности web-приложения за счет внедрения гибридных нейросетевых моделей, дополнительных метрик оценки производительности моделей, а также возможности визуализации и интерпретации результатов прогнозирования. Кроме того, будет рассмотрена возможность интеграции web-приложения с медицинскими информационными системами для более эффективного использования в клинической практике.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ражков, А.Ф.* Оптимизация гиперпараметров алгоритмов машинного обучения для решения задач классификации данных / А.Ф. Ражков, Е.В. Тимощенко // Современное программирование: материалы IV Международной научно-практической конференции (г. Нижневартовск, 08 декабря 2021 года) / отв. ред. Т.Б. Казиахмедов. – Нижневартовск: Нижневартовский государственный университет, 2022. – С. 267–274.
2. *Тимощенко, Е.В.* Исследование производительности алгоритмов машинного обучения в задачах классификации данных / Е.В. Тимощенко, А.Ф. Ражков // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 4 (57). – С. 94–102.
3. *Cardiovascular diseases (CVDs)* [Электронный ресурс] // Всемирная организация здравоохранения. – Режим доступа: [https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/cardiovascular-diseases-\(cvds\)](https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/cardiovascular-diseases-(cvds)). – Дата доступа: 13.03.2024.
4. *Breast cancer* [Электронный ресурс] // Всемирная организация здравоохранения. – Режим доступа: <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/breast-cancer>. – Дата доступа: 13.03.2024.

5. *Diabetes* [Электронный ресурс] // Всемирная организация здравоохранения. – Режим доступа: <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/diabetes>. – Дата доступа: 13.03.2024.

6. *GBD Chronic Kidney Disease Collaboration.* Global, regional, and national burden of chronic kidney disease, 1990–2017: a systematic analysis for the Global Burden of Disease Study 2017. *Lancet.* – 2020 Feb 29. – Vol. 395, № 10225. – P. 709–733. – DOI: 10.1016/S0140-6736(20)30045-3.

7. *Mortality from chronic liver disease: Recent trends and impact of the COVID-19 pandemic* / U. Fedeli, Amidei C. Barbiellini, V. Casotto, E. Grande, M. Saia, A. Zanetto, F.P. Russo // *World J Gastroenterol.* – 2023 Jul 14. – № 29 (26). – P. 4166–4173. – DOI: 10.3748/wjg.v29.i26.4166.

8. *Lee, S.* Early detection of disease and scheduling of screening examinations / S. Lee, H. Huang, M. Zelen // *Stat Methods Med Res.* – 2004 Dec. – № 13 (6). – P. 443–456. – DOI: 10.1191/0962280204sm377ra.

9. *AI in health and medicine* / P. Rajpurkar, E. Chen, O. Banerjee [et al.] // *Nat Med.* – 2028. – № 28. – P. 31–38. – DOI: <https://doi.org/10.1038/s41591-021-01614-0>.

10. *Hak, F.* Towards effective clinical decision support systems: A systematic review / F. Hak, T. Guimarães, M. Santos // *PLoS One.* – 2022 Aug 15. – № 17 (8). – P. e0272846. – DOI: 10.1371/journal.pone.0272846.

11. *Defining Recommendations to Guide User Interface Design: Multimethod Approach* / C. Diehl, A. Martins, A. Almeida, T. Silva, Ó. Ribeiro, G. Santinha, N. Rocha, A.G. Silva // *JMIR Hum Factors.* – 2022 Sep 30. – № 9 (3). – P. e37894. – DOI: 10.2196/37894.

12. *Тимощенко, Е.В.* Методы интеллектуального анализа данных в виртуальном практикуме для целей цифровизации образования / Е.В. Тимощенко, А.Ф. Ражков // *Цифровая трансформация.* – 2021. – № 4 (17). – С. 52–62.

13. *Malykh, V.L.* Decision support systems in medicine / V.L. Malykh // *Program Systems: Theory and Applications.* – 2019. – № 10:2 (41). – P. 155–184. (In Russian). – DOI: 10.25209/2079-3316-2019-10-2-155-184.

Поступила в редакцию 24.06.2024.

Информация об авторах

Тимощенко Елена Валерьевна – к.ф.-м.н., доцент
Ражков Александр Федорович – аспирант

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;

- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e. g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charters top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).