

ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№4 (61) 2024

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:
С.А. Хахомов (Беларусь)

**ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО
РЕДАКТОРА:**
А.В. Рогачёв (Беларусь)
Д.Л. Коваленко (Беларусь)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Мажаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)
М.А. Ярмоленко (Беларусь)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины
ул. Советская, 104,
246028, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

EDITOR-IN-CHIEF:
S.A. Khakhomov (Belarus)

DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:
A.V. Rogachev (Belarus)
D.L. Kovalenko (Belarus)

EDITORIAL BOARD:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)
M.A. Yarmolenko (Belarus)

EXECUTIVE SECRETARY:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

EDITION ADDRESS:
Francisk Skorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246028, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 4 (61) 2024

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

- Ван Цзинцзе, Пилипцов Д.Г., Рогачёв А.В., Руденков А.С., Саховский К.А., Чепкасов С.Ю.** Влияние условий осаждения на структуру и механические свойства а-С покрытий 7
- Васькевич В.В., Коваленко Д.Л., Туан Ань Нгуен, Гайшун В.Е., Тиен Вонг Нгуен.** Синтез и свойства защитных композиционных золь-гель покрытий, содержащих графен 13
- Гиргель С.С.** Энергетические и поляризационные свойства векторных гауссовых световых пучков с простым астигматизмом 19
- Можаровский В.В., Киргинцева С.В.** Влияние композитной футеровки двухслойных труб, применяющейся при технологии санации полимерным «чулком», на параметры гидроудара 25
- Руденков А.С., Рогачёв А.В., Ярмоленко М.А., Пилипцов Д.Г., Никитюк Ю.В.** Морфология и фазовый состав углеродных покрытий, сформированных на поверхности двухслойной системы на основе этилцеллюлозы и серной кислоты 30

МАТЕМАТИКА

- Басик А.И., Грицук Е.В., Галуц Д.В.** Нерегуляризуемость задачи Дирихле для одной бигармонической системы в \mathbb{R}^4 40
- Гальмак А.М.** Полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида. II 45
- Княгина В.Н.** О p -длине произведения двух B -групп 48
- Малинковский Ю.В.** Модификация открытых однолинейных сетей Джексона с экспоненциальными ограничениями на времена ожидания, допускающая стационарное распределение в форме произведения 53
- Сафонов В.Г., Скиба А.Н.** Характеризация некоторых классов конечных групп 57

ТЕХНИКА

- Купо А.Н., Федосенко Н.Н., Шершнев Е.Б., Никитюк Ю.В., Алешкевич Н.А.** Формирование топологии поверхности покрытия металлов термохимическим методом в условиях лазерной активации 65

ИНФОРМАТИКА

- Курочка К.С., Панарин К.А., Макеева К.С.** Нейросетевая модель и алгоритм обучения классификатора для обработки данных гель-электрофореза сыворотки крови человека 70
- Прохоренко В.А., Никитюк Ю.В., Смородин В.С.** Система адаптивного управления технологической операцией лазерной обработки хрупких неметаллических материалов 78
- Сукач Е.И., Кончиц А.П.** Вероятностно-алгебраический метод анализа медицинской статистики 82

ОБЗОРЫ

- Каморников С.Ф., Тютянов В.Н.** σ -Проблема Кегеля – Виландта: обзор результатов 89

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования
результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки:

- технические;
- физико-математические.

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редак-
ции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), реше-
ние коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ
Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.
Приказы Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 31.12.2020 № 338, № 339.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах
данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Акаде-
мии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий
«Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в
Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную
библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е.А. Ружицкая*
Корректоры *И.А. Хорсун, Т.А. Фицнер*
Дизайн обложки *А.В. Ермаков*

Подписано в печать 11.12.24. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 11,86. Уч.-изд. л. 10,33. Тираж 17 экз. Заказ № 620.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246028, Гомель

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2024
© Проблемы физики, математики и техники, 2024
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2024

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December 2009

Released quarterly

№ 4 (61) 2024

CONTENTS

PHYSICS

- Wang Jingjie, Pilipstov D.G., Rogachev A.V., Rudenkov A.S., Sakhovsky K.A., Chepkasov S.Yu.** Influence of deposition conditions on the structure and mechanical properties of a-C coatings 7
- Vaskevich V.V., Kovalenko D.L., Tuan Anh Nguyen, Gaishun V.E., Thien Vuong Nguyen.** Synthesis and properties of protective compositional sol-gel coatings containing graphene 13
- Girgel S.S.** Energy and polarisation properties of vector Gaussian light beams with simple astigmatism 19
- Mozharovsky V.V., Kirhintsava S.V.** The effect of the composite lining of double-layer pipes used in the technology of polymer “stocking” sanitation on the parameters of a water hammer 25
- Rudenkov A.S., Rogachev A.V., Yarmolenko M.A., Piliptsov D.G., Nikityuk Y.V.** Morphology and phase composition of carbon coatings formed on the surface of two-layer system based on ethyl cellulose and sulfuric acid 30

MATHEMATICS

- Basik A.I., Gricuk E.V., Haluts D.V.** Irregularizability of the Dirichlet problem for one biharmonic system in \mathbb{R}^4 40
- Gal'mak A.M.** Polyadic analogues of normal subgroups in polyadic groups of special form. II . . . 45
- Kniahina V.N.** On the p -length of a product of two B -groups 48
- Malinkovskii Yu.V.** Open one-line Jackson networks with exponential constraints on waiting times modification by product form of the stationary distribution 53
- Safonov V.G., Skiba A.N.** Characterization of some classes of finite groups 57

TECHNICS

- Kupo A.N., Fedosenko N.N., Shershnev E.B., Nikitiuk Y.V., Alyashkevich N.A.** Formation of the surface topology of metal coatings by the thermochemical method under laser activation conditions 65

INFORMATION SCIENCE

- Kurochka K.S., Panarin K.A., Makeeva K.S.** Neural network model and classifier training algorithm for processing human serum gel electrophoresis data 70
- Prokhorenko V.A., Nikitjuk Yu.V., Smorodin V.S.** Adaptive control system for technological operation of laser processing of brittle non-metallic materials 78
- Sukach E.I., Konchits A.P.** Probabilistic-algebraic method of analysis of medical statistics 82

REVIEWS

- Kamornikov S.F., Tyutyaynov V.N.** The Kegel – Wielandt σ -problem: review of results 89

Founder – Francisk Skorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science:

- **Technics;**
- **Physics and Mathematics.**

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 538.951:620.3

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_7

EDN: ANRURM

ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ ОСАЖДЕНИЯ НА СТРУКТУРУ И МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА a-C ПОКРЫТИЙ

Цзинцзе Ван¹, Д.Г. Пилипцов¹, А.В. Рогачёв¹,
А.С. Руденков¹, К.А. Саховский¹, С.Ю. Чепкасов²

¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

²Новосибирский национальный исследовательский государственный университет

INFLUENCE OF DEPOSITION CONDITIONS ON THE STRUCTURE AND MECHANICAL PROPERTIES OF a-C COATINGS

Jingjie Wang¹, D.G. Pilipstov¹, A.V. Rogachev¹,
A.S. Rudenkov¹, K.A. Sakhovsky¹, S.Yu. Chepkasov²

¹Francisk Skorina Gomel State University

²Novosibirsk National Research State University

Аннотация. Методом импульсного катодно-дугового испарения сформированы аморфные углеродные покрытия. Определены зависимость скорости осаждения, фазового состава, шероховатости RMS, механических свойств покрытий от ориентации подложки по отношению к потоку углеродной плазмы. Показано, что параметры осаждения и свойства покрытий немонотонно изменяются при увеличении угла падения потока на подложку. На основании данных атомно-силовой микроскопии установлена зависимость шероховатости RMS покрытий от угла падения потока. Наиболее высокое содержание sp^3 -фазы, твердость и модуль упругости достигаются при угле падения 15° .

Ключевые слова: углеродные покрытия, осаждение, структура, морфология, механические свойства.

Для цитирования: Влияние условий осаждения на структуру и механические свойства a-C покрытий / Цзинцзе Ван, Д.Г. Пилипцов, А.В. Рогачёв, А.С. Руденков, К.А. Саховский, С.Ю. Чепкасов // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 7–12. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_7. – EDN: ANRURM

Abstract. Amorphous carbon coatings were formed by the pulsed cathode-arc evaporation method. The dependences of the deposition rate of the phase composition, RMS roughness, and mechanical properties of the coatings on the orientation of the substrate relative to the carbon plasma flow were determined. It was shown that the deposition parameters and coating properties change non-monotonically with increasing angle of incidence of the flow on the substrate. The analysis of the AFM data showed the dependence of the RMS roughness of the coatings on the angle of incidence of the flow. The highest content of the sp^3 -phase, hardness, and elastic modulus are achieved at an angle of incidence of 15° .

Keywords: carbon coatings, deposition, structure, morphology, mechanical properties.

For citation: Influence of deposition conditions on the structure and mechanical properties of a-C coatings / Jingjie Wang, D.G. Pilipstov, A.V. Rogachev, A.S. Rudenkov, K.A. Sakhovsky, S.Yu. Chepkasov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 4 (61). – P. 7–12. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_7 (in Russian). – EDN: ANRURM

Введение

В последнее время методы вакуумного осаждения углеродных покрытий находят широкое применение в промышленности. Способность атомов углерода образовывать связи с различным типом гибридизации определяет многообразие углеродных покрытий, структура которых изменяется в широком диапазоне: от монокристаллических алмазных до аморфных. Свойства таких покрытий зависят от их фазового состава, в частности, от отношения количества атомов с различными типами гибридизации связей, упорядоченности и размера Csp^2 и Csp^3 кластеров. Так, твердость аморфных углеродных (a-C) покрытий обусловлена высоким содержанием sp^3 гибридизированных атомов углерода, а низкие

значения коэффициента трения достигаются при высокой концентрации графитовой sp^2 -фазы. Структурно-фазовый состав таких покрытий определяется условиями осаждения, энергетическими режимами работы испарителя, а также условиями конденсации и роста покрытий на подложке [1], [2]. Геометрические параметры осаждения, такие как расстояние «катод-подложка», угол падения ионного потока оказывают существенное влияние на плотность потока углеродной плазмы, степень ионизации и энергию ионов углерода, изменение которых обусловлено протеканием в потоке столкновений, что в итоге сказывается на значении скорости роста покрытий, параметрах процессов структурообразования. Известно [3], [4], что плотность

плазменного потока (особенно импульсного) и распределение ионов по энергиям определяются его адиабатическим расширением в вакууме и электрическим взаимодействием ионов в потоке, что приводит к изменению плотности ионов углерода в потоке, а также изменению их энергетического спектра в промежутке между источником ионов и подложкой. Изменение плотности потока, конденсирующегося на подложке, определяет скорость роста покрытий. Также снижение энергии ионов углерода уменьшает вероятность образования центров зародышей sp^3 -фазы, что и определяет изменение фазового состава.

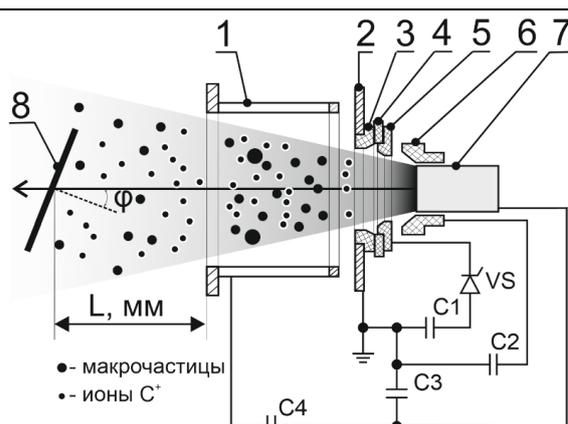
Учет данных особенностей роста покрытий, определение изменений их структуры при различных геометрических параметрах осаждения важны при формировании покрытий равной толщины на поверхности сложной формы, что имеет важное практическое значение. При этом следует учитывать, что, как показано в [5], структура углеродных слоев, а также их механические свойства существенно зависят от толщины углеродных покрытий и обеспечение их одинаковой толщины слоя является необходимым для достижения однородных свойств по всей поверхности покрытия.

Основной целью работы является определение закономерностей влияния пространственной ориентации подложки на скорость роста покрытий, их фазовый состав, шероховатость, механические свойства.

1 Оборудование и методы исследования

Для осаждения а-С покрытий использовался импульсный вакуумно-дуговой метод (рисунок 1.1). Вакуумная камера откачивалась до остаточного давления 5.7×10^{-3} Па. Покрытия осаждались при температуре 23°C на кремниевые подложки с ориентацией (111), предварительно подвергнутые очистке в течение 15 минут потоком ионов аргона, генерируемого ионным источником типа «АИДА» (напряжение разряда 100 В и плотность тока 25 A/m^2). Осаждение из импульсных потоков углеродной плазмы проходило при начальном напряжении импульсного дугового разряда 300 В, частоте следования импульсов разряда 5 Гц и различных углах падения ионного потока на подложку, отмеряемых между осью потока ионов углерода и нормалью к поверхности подложки и составляющих 0° , 15° , 45° и 75° . Угол падения менялся путем поворота подложки относительно направления распространения потока ионов. Расстояние катод-подложка составляло 300 мм.

Определение фазового состава и свойств проводилось для покрытий одинаковой толщины, которая достигалась изменением количества импульсов разряда (от 1000 до 3000).



1 – анод; 2, 3, 5, 6 – электроды поджига,
4 – керамический изолятор,
7 – графитовый катод, 8 – подложка

Рисунок 1.1 – Экспериментальная схема осаждения а-С покрытий при различных углах падения ионного потока

Структура покрытий изучалась методом спектроскопии комбинационного рассеяния света с использованием КР микроскопа Sentera (Bruker, США). Спектры комбинационного рассеяния света возбуждали лазерным излучением с длиной волны 532 нм и мощностью 20 мВт в диапазоне волновых чисел от 1000 до 2000 cm^{-1} .

Морфологию поверхности покрытий определяли методом атомно-силовой микроскопии (АСМ) в режимах измерения топографии и фазового контраста участка поверхности, размером $4 \times 4 \text{ мкм}^2$ с применением прибора SolverPRO P47 (NT-MDT, РФ). При измерениях использовался динамический полуконтактный метод. В результате последующей математической обработки трехмерного изображения рельефа определялась среднеквадратичная (RMS) шероховатость покрытий.

Исследование механических свойств покрытий проводили методом индентирования в режиме динамического механического анализа («НаноСкан 4D», ФГБНУ «ТИСНУМ», г. Троицк, РФ). В качестве индентора использовали алмазную трехгранную пирамиду типа Берковича с углом между осью пирамиды и гранью равным $65,3^\circ$. Перед началом измерений проводилась калибровка податливости системы и формы индентора на эталонном образце (плавленый кварц) с известным модулем упругости и твердостью. При этом типичная амплитуда колебаний составила порядка нескольких нанометров при максимальной нагрузке 40 мН. Измерение проводили при глубине индентирования, не превышающей $20 \pm 3 \text{ нм}$. Полученные кривые анализировали в рамках модели Оливера – Фарра [6], что позволяет получить всю необходимую информацию о твердости и упругости исследуемых покрытий [7], [8]. С целью обеспечения метрологической достоверности значений измеренных параметров

на каждом образце покрытий проводилось по 15 измерений при идентичных условиях нагружения, затем результаты усреднялись.

2 Результаты исследований и их анализ

На начальном этапе определена зависимость изменения толщины покрытий от угла падения потока на поверхность (рисунок 2.1), на основании которой получена зависимость скорости осаждения покрытий от угла падения потока углеродной плазмы. Скорость роста покрытий определялась как изменение толщины покрытия за один импульс, и, в зависимости от угла падения потока, изменялась от 0,03 нм/имп до 0,09 нм/имп. Установленная скорость роста покрытий позволила оптимизировать количество разрядных импульсов и время осаждения покрытий, что позволило получить покрытия одинаковой толщины. За счет увеличения количества импульсов с увеличением угла были осаждены покрытия со средней толщиной 91 ± 1 нм.

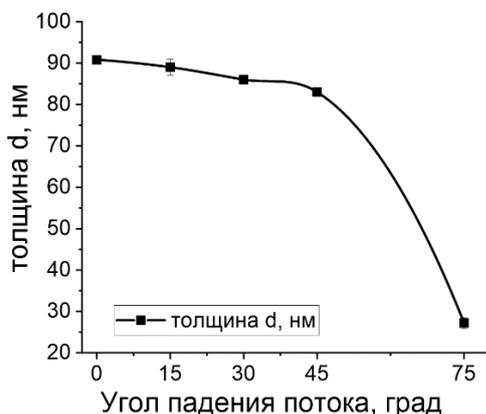


Рисунок 2.1 – Зависимость толщины покрытий а-С от угла падения потока

Как видно из данных, приведенных на рисунке 2.1, с ростом угла до 45° толщина покрытий незначительно изменяется, что может быть объяснено относительно невысокой ориентацией частиц в потоке за счет присутствия в нем достаточно высокой концентрации диффузионно рассеянных ионов. При достижении угла 75° толщина покрытий и скорость роста существенно снижается, что объясняется распределением в потоке ионов углерода, снижением его плотности, а также отражением ионов от поверхности. Установление скорости осаждения покрытий, определяемое как отношение толщины покрытия к количеству импульсов разряда, позволило определить количество импульсов разряда, при которых формируются покрытия одинаковой толщины, независимо от угла падения потока. В зависимости от угла падения потока, количество импульсов изменялось от 1000 до 3000.

На рисунке 2.2 представлены спектры комбинационного рассеяния покрытий, осажденных

при разных углах падения потока. На всех спектрах КРС наблюдается широкий ассиметричный пик, расположенный в диапазоне $1000\text{--}1900\text{ см}^{-1}$. Спектры были представлены двумя функциями Гаусса с центром при 1565 см^{-1} (пик G) и с центром при 1360 см^{-1} (пик D).

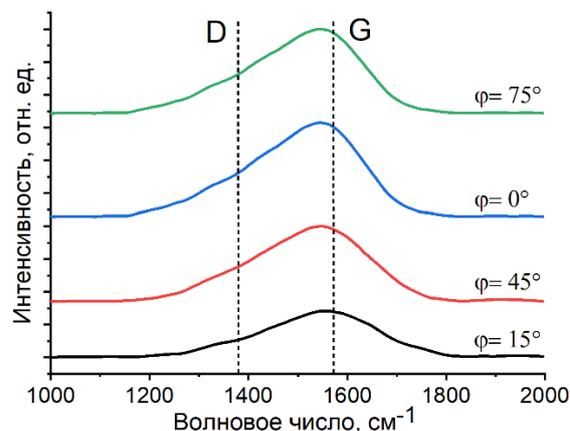
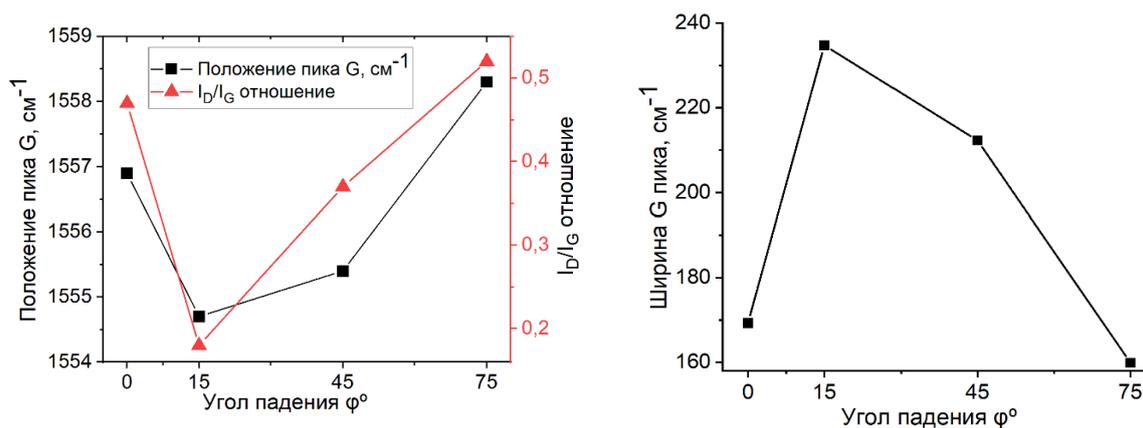


Рисунок 2.2 – Спектры КРС покрытий а-С, осажденных при различных углах падения потока

Пик D проявляется в спектре КРС углеродных покрытий за счет колебаний sp^2 связей атомов углерода в ароматическом кольце, а пик G обусловлен растяжением пар атомов углерода в кольце и линейной цепи [9]–[11]. Отношение интенсивности пика D к интенсивности пика G (I_D / I_G) и положение пика G отражают изменение отношения sp^3 / sp^2 атомов углерода в а-С покрытиях. Как правило, рост отношения sp^3 / sp^2 в покрытиях приводит к уменьшению отношения I_D / I_G и смещению положения пика G в область более низких волновых чисел в спектрах комбинационного рассеяния [9], [12].

Результаты математической обработки спектров КРС представлены на рисунке 2.3.

Видно (рисунок 2.3, а), что, при увеличении угла падения потока от 0° до 15° , значения отношения I_D / I_G уменьшаются, при этом положение пика G смещается в область более низких волновых чисел, что указывает на увеличение отношения sp^3 / sp^2 в покрытиях а-С. Однако при последующем увеличении угла падения потока значения отношения I_D / I_G возрастает, а положение пика G смещается в область более высоких волновых чисел, что свидетельствует об уменьшении отношения sp^3 / sp^2 атомов углерода в покрытиях а-С с увеличением угла падения потока. Стоит отметить, что покрытие а-С, осажденное при угле падения потока 15° , демонстрирует минимальные значения отношения I_D / I_G и положения пика G, что указывает на максимальное содержание в покрытии sp^3 гибридных атомов углерода.

а) положение пика G и отношение I_D / I_G

б) ширина пика G

Рисунок 2.3 – Параметры спектра КРС покрытий а-С, осажденных при различных углах падения потока

Значения ширины пика G (рисунок 2.3, б) связаны с размерами кластеров Csp^2 , а также со структурными нарушениями, например степенью структурного беспорядка, вызванной искажением угла связи и длины связи [10]. Видно (рисунок 2.3, б), что ширина G пика сначала увеличивается, а затем уменьшается по мере увеличения угла падения потока углеродной плазмы. Ширина пика G также достигает максимума при угле падения 15° , что свидетельствует о том, что покрытие а-С, осажденное при данном угле, характеризуется самым высоким значением отношения sp^3 / sp^2 среди осажденных покрытий, что согласуется с выводом, полученным в результате анализа отношения I_D / I_G и смещения положения пика G.

Известно, что механизм роста твердых алмазоподобных покрытий подчиняется субплантационной модели роста [13], [14] и зависит от энергии конденсирующихся на поверхности подложки ионов углерода. При этом известно, что оптимальной энергией ионов в потоке плазмы, при которой происходит образование Csp^3 связей в покрытии, является 60–80 эВ. В рамках данной модели адсорбирующиеся на поверхности подложки ионы углерода, в случае достаточно высокой их энергии, проникают в приповерхностный слой подложки на несколько атомных слоев и, в результате термодрейфа, образуют увеличение локальной плотности в приповерхностном слое подложки. Формируемые в результате этого флуктуации плотности являются центрами роста углеродных кластеров с преимущественным sp^3 типом гибридизации углеродных связей. При более высокой энергии адсорбирующихся ионов наблюдается графитизация покрытия а-С, что определяется ростом локальной температуры, протеканием процессов, связанных с релаксационным отжигом растущего слоя, что активирует формирование более термодинамически устойчивой фазы, а именно графита (sp^2 фазы).

При нормальном угле падения ионы углерода бомбардируют поверхность роста, при этом

их энергия достаточна для субплантации в поверхность подложки. Тем не менее, при нормальном осаждении локальная температура достигает высоких значений, что приводит к незначительному увеличению количества атомов с sp^3 гибридизованными связями в покрытии. При увеличении угла падения до 15° часть энергии ионов рассеивается при упругом взаимодействии с подложкой, что приводит к снижению энергии ионов и, как следствие этого, уменьшению влияния релаксационного отжига на начальных стадиях роста покрытий [15]–[17].

На рисунке 2.4 приведены результаты исследований, полученные методом атомно-силовой микроскопии в режиме топографии. Данный режим позволяет оценить изменение поверхностной морфологии покрытий и их рельеф.

Как видно из данных, приведённых на рисунке 2.4, с ростом угла падения потока размер макрочастиц уменьшается, также снижается и перепад высот, указывающий на уменьшение размера таких частиц. При больших углах на поверхности наблюдаются единичные частицы с размером, не превышающим 100 нм. Также стоит отметить, что поверхность всех покрытий, независимо от угла падения потока, характеризуется достаточно высокой степенью однородности. Макрочастицы, которые генерируются в потоке под действием импульсного разряда, как правило, движутся прямолинейно, не обладают зарядом и, соответственно, электрическое поле не оказывает влияние на траекторию их движения. Увеличение угла падения может снизить вероятность столкновения и закрепления макрочастиц на поверхности роста и впоследствии уменьшить их количество на поверхности покрытия.

На рисунке 2.5 приведены результаты обработки данных атомно-силовой микроскопии, характеризующие изменение поверхностной шероховатости RMS покрытий, осажденных из импульсных потоков углеродной плазмы при различных углах падения потока.

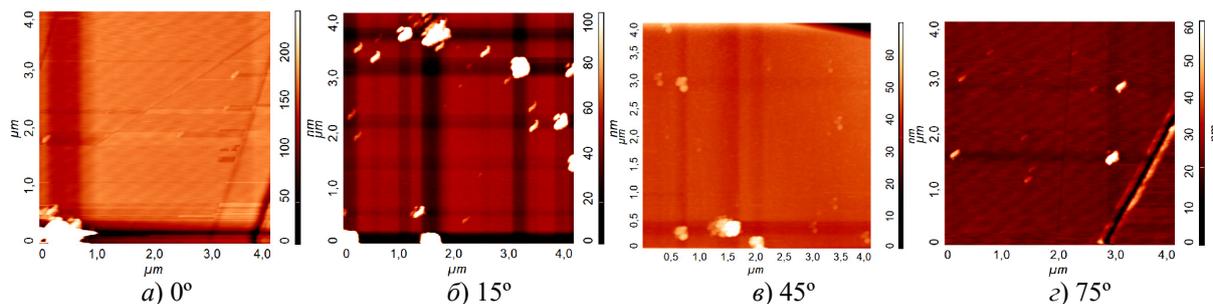


Рисунок 2.4 – АСМ изображения поверхности покрытий а-С, осажденных при различных углах падения потока

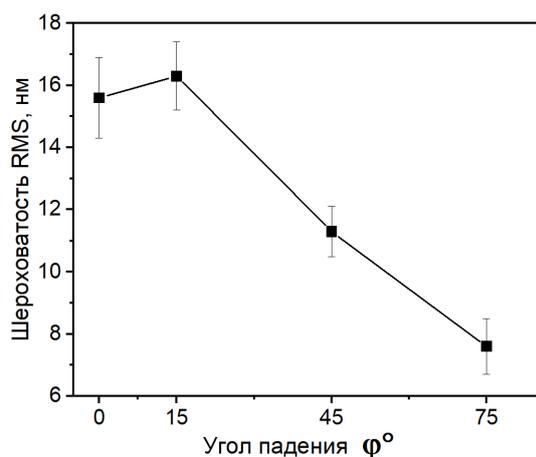


Рисунок 2.5 – Значение поверхностной шероховатости RMS покрытий, осажденных при различных углах падения потока

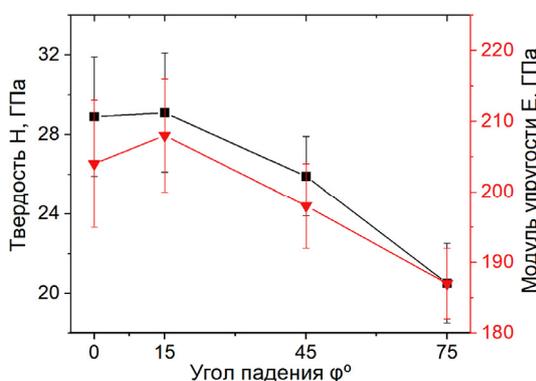


Рисунок 2.6 – Твердость и модуль упругости покрытий а-С, осажденных при различных углах падения потока

Установлена зависимость шероховатости RMS покрытий как функции угла падения потока (рисунок 2.5). Шероховатость RMS растет с ростом угла падения потока до 15°, а при превышении его значительно снижается. Покрытия а-С, осажденные при угле падения потока 75°, обладают гладкой поверхностью с низкой шероховатостью порядка 8 нм. Полученный результат указывает на возможность получения покрытий с низкой шероховатостью и минимальным содержанием на поверхности макрочастиц путем

выбора больших (более 45°) углов между направлением падения потока и плоскостью подложки.

Методом наноиндентирования определена твердость покрытий а-С, осажденных из импульсных потоков углеродной плазмы при различной пространственной ориентации подложки (рисунок 2.6).

Определение фазового состава и свойств проводилось для покрытий одинаковой толщины, которая достигалась изменением количества импульсов разряда (от 1000 до 3000).

Видно, что изменения твердости и модуля упругости покрытий а-С, осажденных при различных углах падения потока, коррелируют с изменением структурно-фазового состава покрытий. Однако следует отметить, что твердость покрытий а-С, осажденных при углах падения потока 0° и 15°, практически не отличается. Это указывает на то, что влияние остаточных напряжений, носящих характер сжатия и определяющих твердость покрытия, не однозначно зависит от содержания атомов углерода в состоянии с sp^3 гибридами связями.

Заметим, что бомбардировка растущей поверхности покрытия ионами углерода, падающими нормально к поверхности, приводит к образованию и росту дефектов радиационно-поврежденного типа, что стимулирует рост в покрытии напряжений сжатия. При нормальном падении ионов на подложку все ионы взаимодействуют с подложкой, что приводит к увеличению активных центров и росту напряжений сжатия. С ростом угла падения потока вероятность адсорбции и имплантации ионов в подложку и растущее покрытие снижается, что приводит к уменьшению флуктуаций плотности и уменьшает образование сжимающих напряжений.

Изменение твердости покрытий зависит от плотности покрытий, содержания sp^3 фазы, а также размера Csp^2 кластеров. Также на снижение твердости покрытия оказывает влияние подложка (в области малых толщин покрытий). С уменьшением толщины покрытия влияние подложки на полученные результаты усиливается, что, наряду с изменением фазового состава, приводит к более низким значениям твердости.

Заключение

Установлены зависимости скорости осаждения фазового состава, шероховатости, механических свойств углеродных покрытий, полученных из импульсной катодной плазмы, от ориентации подложки по отношению к потоку углеродной плазмы. Показано, что при увеличении угла падения потока на подложку, параметры осаждения и свойства покрытий изменяются немонотонно. Наиболее высокое содержание sp^3 фазы, твердость и модуль упругости достигаются при угле падения 15° . Шероховатость RMS достигает минимальных значений при высоких углах падения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Properties of ta-C coatings prepared by pulsed cathodic arc source at various distances* / S. Chepkasov [et al.] // J. Phys.: Conf. Ser. – 2018. – Vol. 1115, № 3. – P. 032066.
2. *The Effect of the Substrate Spatial Orientation on The Properties of Amorphous Carbon Coatings Deposited from Pulse Plasma Flows* / S. Chepkasov [et al.] // 2020 7th International Congress on Energy Fluxes and Radiation Effects (EFRE), Tomsk, Russia, 14–26 september 2020 / Institute of High Current Electronics. – Tomsk, 2020. – P. 856–862.
3. *Schultrich, B. Structure and Characterization of Vacuum Arc Deposited Carbon Films – A Critical Overview* / B. Schultrich // Coating. – 2022. – Vol. 12. – P. 109-1–109-33.
4. *Wongpanya, P. Nanomechanical properties and thermal stability of Al-N-co-doped DLC films prepared by filtered cathodic vacuum arc deposition* / P. Wongpanya, P. Silawong, P. Photongkam // Surface and Coatings Technology. – 2021. – Vol. 424. – P. 127655.
5. *Размерные эффекты в бислойных покрытиях титан-углерод. 2. Зависимость структуры и свойств от толщины углеродного слоя* / Чжоу Бин [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 1 (18). – С. 16–20.
6. *Oliver, W.C. An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments* / W.C. Oliver, G.M. Pharr // Journal of Materials Research. – 1992. – Vol. 7 (6). – P. 1564–1583.
7. *ISO 14577-2:2015. – Part 2: Metallic materials. Instrumented indentation test for hardness and materials parameters. Verification and calibration of testing machines.*
8. *Leyland, A. On the significance of the H / E ratio in wear control: a nanocomposite coating approach to optimised tribological behavior* / A. Leyland, A. Matthews // Wear. – 2000. – Vol. 246 (1–2). – P. 1–11.

9. *Ferrari, A.C. Interpretation of Raman spectra of disordered and amorphous carbon* / A.C. Ferrari, J. Robertson // Phys. Rev. – 2000. – Vol. 61. – P. 14095.

10. *Casiraghi, C. Raman spectroscopy of hydrogenated amorphous carbons* / C. Casiraghi, A.C. Ferrari, J. Robertson // Phys. Rev. – 2005. – Vol. 72, Vol. 8. – P. 085401.

11. *Microstructural and stress properties of ultrathin diamondlike carbon films during growth* / T.B. Ma, Y.Z. Hu, H. Wang, X. Li // Phys. Rev. – 2007. – Vol. 75, № 3. – P. 035425.

12. *Robertson, J. Diamond-like amorphous carbon* / J. Robertson // Mater. Sci. Eng. R. – 2002. – Vol. 37. – P. 129–281.

13. *Subplantation model for film growth from hyperthermal species* / Y. Lifshitz, S.R. Kasi, J.W. Rabalais, W. Eckstein // Physical Review. – 1990. – Vol. 41, № 15. – P. 10468.

14. *Robertson, J. Deposition mechanisms for promoting sp^3 bonding in diamond-like carbon* / J. Robertson // Diamond and Related Materials. – 1993. – Vol. 2, № 5–7. – P. 984–989.

15. *Schultrich, B. Modeling of ta-C growth: influence of the technological parameters* / B. Schultrich // Diam. & Relat. Mater. – 2011. – Vol. 20, № 5–6. – P. 758–792.

16. *Influences of target power and pulse width on the growth of diamond-like/graphite-like carbon coatings deposited by high power impulse magnetron sputtering* / W. Dai, X. Li, L. Wu, Q. Wang // Diam. & Relat. Mater. – 2021. – Vol. 111. – P. 108232.

17. *Tribological behavior of diamond-like carbon (DLC) coatings against aluminum alloys at elevated temperatures* / W. Ni, Y.T. Cheng, A.M. Weiner, T.A. Perry // Surf. & Coat. Technol. – 2006. – Vol. 201, № 6. – P. 3229–3234.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (проект № 20212075). Авторы выражают благодарность Центру коллективного пользования ВТАН при НГУ за предоставленный доступ к экспериментальному оборудованию.

Поступила в редакцию 05.09.2024.

Информация об авторах

Цзинцзе Ван – магистрант

Пилицов Дмитрий Геннадьевич – к.т.н., доцент

Рогачёв Александр Владимирович – чл.-корр. НАН Беларуси, д.х.н., профессор

Руденков Александр Сергеевич – к.ф.-м.н., доцент

Саховский Кирилл Артурович – аспирант

Чепкасов Сергей Юрьевич – инженер

УДК 539.23:67.017

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_13

EDN: YFRDBX

СИНТЕЗ И СВОЙСТВА ЗАЩИТНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ ЗОЛЬ-ГЕЛЬ ПОКРЫТИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ГРАФЕН

В.В. Васьеви́ч¹, Д.Л. Ковале́нко¹, Туан Ань Нгуе́н², В.Е. Гайшу́н¹, Тиен Вонг Нгуе́н²

¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

²Институт тропических технологий Вьетнамской академии наук и технологии, Ханой

SYNTHESIS AND PROPERTIES OF PROTECTIVE COMPOSITIONAL SOL-GEL COATINGS CONTAINING GRAPHENE

V.V. Vaskevich¹, D.L. Kovalenko¹, Tuan Anh Nguyen², V.E. Gaishun¹, Thien Vuong Nguyen²

¹Francisk Skorina Gomel State University

²Institute for Tropical Technology of Vietnam Academy of Science and Technology, Hanoi

Аннотация. Определены оптимальные условия синтеза и методика получения композиционных защитных золь-гель покрытий, содержащих мелкодисперсные порошки оксида титана (углерода) и наноразмерный порошок графена. Представлены результаты исследования толщины, адгезии и морфологии поверхности полученных покрытий. Установлено влияние состава и концентрации графена на твердость, ударопрочность, стойкость к истиранию и гидрофобные свойства. Проведены исследования влагостойкости, стойкости к воздействию солевого тумана и стойкости к температурным колебаниям полученных золь-гель покрытий.

Ключевые слова: золь-гель, пленкообразующий раствор, композиционные покрытия, толщина, адгезия, механическая прочность, стойкость к термоциклированию.

Для цитирования: Синтез и свойства защитных композиционных золь-гель покрытий, содержащих графен / В.В. Васьеви́ч, Д.Л. Ковале́нко, Туан Ань Нгуе́н, В.Е. Гайшу́н, Тиен Вонг Нгуе́н // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 13–18. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_13. – EDN: YFRDBX

Abstract. The optimal conditions for synthesis are determined. The technology for obtaining composite protective sol-gel coatings that contain finely dispersed powders of titanium oxide (carbon) and nanosized graphene powder is described. The results of analyzing the thickness, adhesion, and surface morphology of the resulting coatings are presented. The influence of the composition and concentration of graphene on the hardness, impact resistance, abrasion resistance and hydrophobic properties is established. The moisture resistance, resistance to salt fog and resistance to temperature fluctuations of the resulting sol-gel coatings are investigated.

Keywords: sol-gel, film-forming solution, compositional coatings, thickness, adhesion, mechanical strength, resistance to thermal cycling.

For citation: Synthesis and properties of protective compositional sol-gel coatings containing graphene / V.V. Vaskevich, D.L. Kovalenko, Tuan Anh Nguyen, V.E. Gaishun, Thien Vuong Nguyen // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 4 (61). – P. 13–18. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_13 (in Russian). – EDN: YFRDBX

Введение

Современные защитные покрытия должны соответствовать нескольким общим требованиям: они обязаны быть экологически чистыми, долговечными, удобными для нанесения и легко поддаваться как сухой, так и влажной уборке. Защитные покрытия обязаны обладать хорошей адгезией к поверхности и быть стойкими к коррозии, механическим повреждениям и воздействию ультрафиолетового излучения. Кроме того, ко многим видам покрытий предъявляются специальные требования, такие как повышенная износостойкость, стойкость к растрескиванию, ударопрочность и они должны обладать стойкостью к воздействию морского тумана и температурным колебаниям.

В последнее время композитные покрытия стали неотъемлемой частью инновационного прогресса, открывая новые возможности по сравнению с традиционными защитными материалами. Благодаря сочетанию уникальных свойств разных компонентов, можно создавать защитные покрытия для различных поверхностей, выделяющихся высокими эксплуатационными характеристиками при относительно небольшой стоимости.

Одним из прогрессивных и быстроразвивающихся методов получения композиционных покрытий с заданными свойствами является золь-гель метод. Использование композиционных наноструктурированных золь-гель покрытий, в отличие от существующих аналогов, позволяет объединить лучшие свойства стекловидной

матрицы и мелкодисперсного наполнителя для придания получаемым материалам улучшенных физико-химических и прочностных характеристик по сравнению с существующими аналогами защитных покрытий [1]–[3].

В работе представлена методика формирования и свойства композиционных золь-гель покрытий на основе кремнийорганической матрицы, содержащей армирующие порошки оксида титана или углерода, модифицированные наноразмерным порошком графена.

1 Синтез материалов

Для получения композиционных покрытий с хорошей пластичностью и адгезией к металлам необходимо использовать гибридные составы, в которых совместно с традиционными тетраэтилортосиликатом (ТЭОС) ($\geq 99,0\%$ (GC), Si (C₂H₅O)₄, производства Sigma-Aldrich, Германия) будет использоваться метилтриэтоксисилан (МТЭС) ($\geq 99\%$, CH₃Si(OC₂H₅)₃ производства Sigma-Aldrich, Германия).

Золь готовят следующим образом: смешивают необходимое количество метилтриэтоксисилана и тетраэтилортосиликата, полученную смесь заливают изопропиловым спиртом ($\geq 99,5\%$, C₃H₇OH производства EMPLURA, Германия) и перемешивают. После смешивания в эту смесь добавляют раствор азотной кислоты (HNO₃) в деминерализованной воде (H₂O) и перемешивают. Массовое соотношение исходных компонентов составило МТЭС : ТЭОС : C₃H₇OH : H₂O : HNO₃ = 2:1:2:0,75:0,02.

Для полного созревания раствора его необходимо выдержать при комнатной температуре в течение 2–3 дней.

Мелкодисперсные порошки оксида титана и углерода вводят в виде массовой навески при интенсивном перемешивании к свежеприготовленным растворам в концентрациях от 20–30 масс.%. Наноразмерный порошок графена вводят в виде массовой навески к уже перемешанным композиционным растворам в концентрациях от 0,1–0,5 масс.%.

Растворы наносят с помощью краскопульты на прямоугольные подложки (размером 10×5 см) и кружки (диаметром 3 см) из алюминиевого сплава 1105АМ, вырезанные из плоских листов толщиной 1,5 мм, поставляемые компанией «ПилотПро» (Россия). Раствор распыляют по всей поверхности равномерным слоем в 2–3 захода для обеспечения визуальной сплошности и однородности.

На завершающем этапе термическая обработка приводит к завершению реакций разложения промежуточных продуктов гидролиза и полному удалению остатков растворителя и органических веществ. Процесс сушки начинается на поверхности покрытия. Образующаяся сверху плотная пленка препятствует свободному отводу

паров растворителя, находящихся в нижележащих слоях. Это увеличивает время сушки и ухудшает качество пленки. Поэтому сушку проводят поэтапно: в начальный период (при интенсивном испарении растворителя) при температуре (60–100)°С в течение 20–30 минут (скорость нагрева $\approx 5^\circ\text{C}$ в минуту), затем при температуре (200–250)°С в течение 30–60 минут (скорость нагрева $\approx 10^\circ\text{C}$ в минуту). Скорость отверждения покрытий зависит от типа пленкообразующего раствора и толщины покрытия [1], [2]. Список полученных образцов представлен в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Составы полученных композиционных золь-гель покрытий, содержащих мелкодисперсные порошки и графен.

Образец	Содержание, г			
	Золь SiO ₂	TiO ₂	Углерод	Графен
S1	70	30	–	0,1
S2	70	30	–	0,2
S3	70	30	–	0,5
S4	70	–	30	0,1
S5	70	–	30	0,2
S6	70	–	30	0,5

2 Исследование адгезии и толщины полученных композиционных покрытий

Так как композиционные золь-гель покрытия сформированы на подложках из алюминия и по толщине близки к значениям лакокрасочных материалов, контроль толщины проводили с использованием толщиномера СЕМ dt-156, который предназначен для неразрушающего измерения толщины покрытий.

Результаты исследования толщины полученных композиционных покрытий представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Результаты определения толщины композитных покрытий

Образец	Толщина, мкм	Внешний вид покрытия
S1	17,6 ± 0,5	
S2	18,3 ± 0,5	
S3	16,9 ± 0,5	
S4	31,7 ± 0,5	
S5	29,5 ± 0,5	
S6	32,2 ± 0,5	

Толщина полученных композиционных покрытий варьируется от 17 мкм до 32 мкм и зависит типа наполнителя. Большей толщиной обладают покрытия с углеродом, в среднем их толщина составляет ≈ 31 мкм, это связано с более повышенной вязкостью раствора, что позволяет формировать более толстые слои. Композиционные покрытия с оксидом титана имеют толщину 17–18 мкм, это связано с малым размером частиц (около 0,2–0,8 мкм) и его плотной упаковкой при распылении на подложку. Добавка наноразмерного порошка графена не оказывает влияния на толщину из-за его незначительной концентрации.

Проведение адгезионных испытаний позволяет установить степень прочности соединения покрытия с подложкой. В работе исследование адгезии проводили согласно ГОСТ 31149-2014 методом решетчатого надреза [4].

Результаты испытания показывают, что все покрытия, содержащие порошки, имеют самый высокий класс адгезии согласно ISO 2409:2013 – Класс 0 (края надрезов полностью гладкие;

сегменты решетки не отслоились). Стоит отметить, что увеличение концентрации наноразмерного порошка углерода не влияет на адгезионные свойства композиционных золь-гель покрытий.

3 Определение морфологии поверхности полученных композиционных покрытий

На рисунке 3.1 представлены СЭМ-изображения поверхности образцов алюминия с покрытием, полученных с помощью сканирующего электронного микроскопа JSM 6510LV (JEOL, Япония).

На полученных СЭМ-изображениях поверхности образцов хорошо видны графеновые нанопластины (средний размер которых 150–200 нм), сформировавшиеся из наноразмерного порошка графена, размер которых увеличивается с увеличением концентрации графена (500–700 нм для образца S3). Эти данные подтверждают хорошее распределение графена в кремниевой золь-гель матрице на основе оксида кремния с наполнителем в виде оксида титана [5].

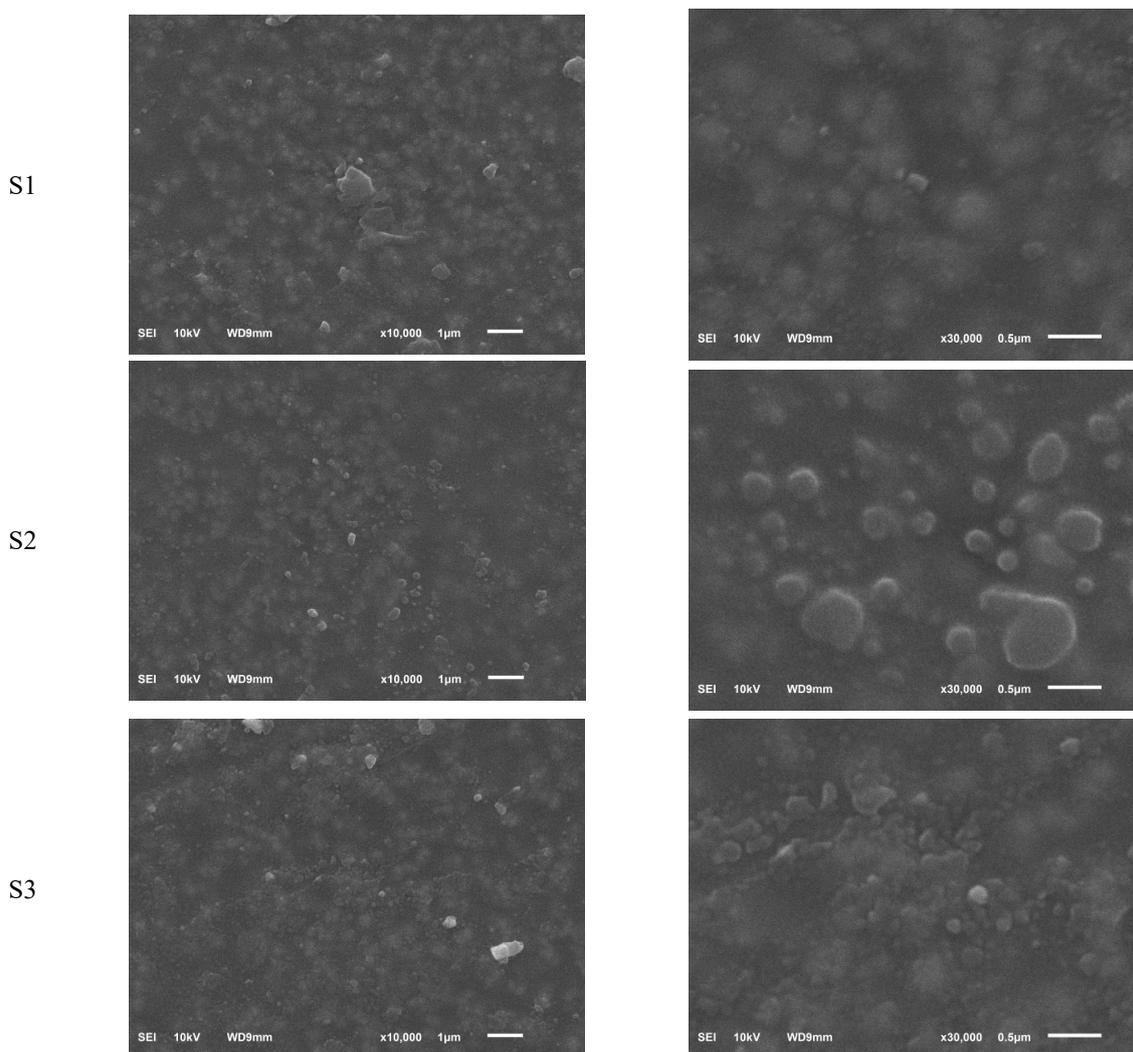


Рисунок 3.1 – СЭМ-изображения образцов с покрытием (слева: $\times 10\,000$; справа: $\times 30\,000$): S1, S2 и S3 составы покрытий из таблицы 1.1

4 Исследование механических и эксплуатационных характеристик получаемых композиционных покрытий

4.1 Исследование гидрофобных свойств.

Гидрофобными являются материалы и покрытия, угол смачивания которых водой и водными растворами превышает 90° . Гидрофобность – свойство, которое определяется не столько характеристиками материала в целом, сколько свойствами и структурой приповерхностного слоя толщиной в несколько десятков нанометров. Возможность восстановления гидрофобности является уникальной характеристикой кремнийорганических эластомеров. Именно эта характеристика обеспечивает им преимущество в условиях сильных загрязнений по сравнению с другими защитными материалами. Анализ гидрофобных свойств (краевого угла смачивания) поверхности полученных композиционных покрытий проводили с использованием анализатора краевого угла смачивания OCA-50 (Dataphysics, Германия). Результаты исследования представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Измеренные значения краевого угла смачивания

Образец	Краевой угол смачивания, $^\circ$
S0 (пластина алюминия)	$96,43 \pm 0,71$
S1	$102,1 \pm 0,27$
S2	$106,60 \pm 0,66$
S3	$121,27 \pm 1,12$
S4	$99,1 \pm 0,54$
S5	$104,34 \pm 0,65$
S6	$111,5 \pm 0,82$

Значение краевого угла смачивания для чистой алюминиевой подложки составляет 96° . Нанесение композиционных золь-гель покрытий позволяет повысить краевой угол смачивания до 121° для покрытий с оксидом титана и до 111° для покрытий, содержащих углерод. Это связано с наличием Si – CH₃ группы и увеличением концентрации наноразмерного порошка графена. Покрытия с наполнителем в виде оксида титана имеют больший угол смачивания по сравнению с покрытиями, содержащими углерод.

4.2 Исследование твердости и ударопрочности.

В лакокрасочной промышленности стандартным методом определения прочности покрытия является метод царапания карандашом. При испытаниях используют твердомер «Константа-ТК» (ООО НТЦ «Эксперт», Москва) набор карандашей с различной твердостью. Выступающая часть грифеля карандаша имеет длину примерно 6 мм. Последний имеет цилиндрическую форму, а его кончик сточен тонкой

абразивной бумагой. Угол нажима на поверхность – 45° , надавливают на поверхность покрытия с нагрузкой (750 ± 10) г. Твердость покрытия соответствует твердости карандаша, который еще не повреждает покрытие. Карандаши имеют твердость в диапазоне от 6В до 9Н, где твердость покрытия соответствует максимальной твердости карандаша, который не повреждает покрытие [6].

Основной из характеристик, определяющих срок эксплуатации и стойкость покрытия при деформации вместе с подложкой, является прочность покрытий при ударе. Любое покрытие за период всего срока эксплуатации изделия, включая процесс транспортировки и монтажа и кончая его эксплуатацией в различных климатических условиях окружающей среды, испытывает динамические и статические нагрузки, среди которых удар, изгиб, вибрация.

Для исследования ударопрочности используется прибор Удар-Тестер (ООО «Градиент-Техно», Москва) согласно условиям, описанным в ГОСТ 4765-73 [7]. Методика измерения прочности покрытий при ударе заключается в нанесении с определенной высоты ударного воздействия по покрытию бойком с наконечником сферической формы с диаметром 8 мм и тарированной массой величиной 1 кг.

Результаты исследования твердости и ударопрочности полученных покрытий представлены в таблице 4.2

Таблица 4.2 – Результаты исследования твердости и ударопрочности

Образец	Твёрдость	Результат испытания на ударопрочность
S1	6Н	незначительные растрескивания
S2	6Н	нет видимых дефектов
S3	7Н	нет видимых дефектов
S4	4Н	незначительные растрескивания
S5	5Н	незначительные растрескивания
S6	5Н	нет видимых дефектов

Увеличение содержания графена в обоих типах покрытий с 0,1 масс.% до 0,5 масс.% позволяет повысить их твердость и, как следствие, увеличивают их устойчивость к царапинам благодаря наличию жестких армирующих наночастиц графена внутри матрицы. С увеличением концентрации графена повышается твердость покрытий: для покрытий с оксидом титана с 6Н (при концентрациях графена 0,1–0,2 масс.%) до 7Н (при концентрациях графена 0,5 масс.%), для покрытий с наполнителем из оксида титана с 4Н (при концентрациях графена 0,1 масс.%) до 7Н (при концентрациях графена 0,2–0,5 масс.%).

Результаты испытания ударопрочности показывают, что образцы с большим содержанием графена не имеют видимых повреждений и трещин после испытания. Таким образом, увеличение концентрации графена в матрице позволяет улучшить ударопрочность получаемых защитных покрытий.

4.3 Исследование стойкости к истиранию.

Еще одним важным параметром при исследовании защитных покрытий является его стойкость к истиранию. В работе стойкость к истиранию определялась методом истирания резиновым наконечником, изготовленным из пищевой резины средней плотности (П-С), через батистовую прокладку при нагрузке на наконечник 200 г. При проведении испытаний образцы поочередно помещают в установку для трения, где происходит воздействие на них 10000 циклов непрерывного истирания. После извлечения образцов проводят визуальную оценку их внешнего вида и целостности исследуемого покрытия. По результатам испытаний установлено, что полученные покрытия не имеют следов износа на своей поверхности т.е. обладают высокой механической стойкостью к истиранию (более 10000 циклов).

4.4 Исследование влагостойкости и стойкости к воздействию солевого тумана.

Влага играет значимую роль в процессе разрушения поверхности защитных покрытий, применяемых в тропическом климате. Покрытия вне помещений подвержены влиянию влаги из-за росы, осадков в виде дождя, воздействия солевого тумана и т. д.

Исследования влагостойкости проводят с помощью «погружного» теста в воду на 5 суток, после чего образцы извлекают и сушат на воздухе. После высыхания оценивается внешний вид защитных покрытий. По результатам испытания можно сделать вывод, что вода не оказывает влияния на полученные образцы, которые не изменили своего внешнего вида.

Проведено тестирование устойчивости покрытий к водным аэрозолям (солевой туман) согласно ГОСТ Р 52763-2007 [8]. Методика тестирования представляет собой распыление концентрированного раствора хлорида натрия (5%, либо морской воды) в специальном изолированном боксе, куда помещен образец. Непрерывное или периодическое агрессивное воздействие на образец обеспечивается за счет взаимодействия солевого раствора с сжатым воздухом в форсунке, где образуется туман. Чем выше способность сопротивляться разъеданию, тем дольше образец может находиться в заданных условиях без следов коррозионного эффекта. Такие тесты позволяют имитировать ускоренный процесс старения объекта. Условия испытания можно варьировать, меняя длительность воздействия тумана и/или его температуру.

Во время испытания полученные образцы помещают в камеру с солевым туманом на 48 часов при температуре $27 \pm 2^\circ \text{C}$. После извлечения проводят оценку внешнего вида защитных покрытий на предмет появления дефектов, следов коррозии или отслоения. Все полученные покрытия отлично показали себя при проведении испытания (не имеют следов коррозии, отслоений или дефектов).

4.5 Испытание на стойкость к термоциклированию.

На завершающем этапе исследования эксплуатационных характеристик получаемые покрытия проверили на стойкость к резким температурным перепадам.

Термоциклирование проводится последовательно: изначально образцы размещают в камере холода, а после выдержки при пониженной температуре их переносят в камеру тепла. В каждой из этих камер заранее установлена требуемая температура. Одним из важных моментов при проведении испытаний является то, что время переноса из одной камеры в другую должно быть минимально. Для испытания применяют две отдельные камеры. В одной образцы выдерживают при низкой температуре, в другой – при высокой.

Методика испытания заключается в следующем: образцы помещают в первую камеру с температурой минус $(35 \pm 3)^\circ \text{C}$ и выдерживают там при данной температуре в течение 3 часов. Затем резко извлекают и помещают во вторую камеру, предварительно разогретую до температуры плюс $(100 \pm 5)^\circ \text{C}$, и выдерживают в течение 3 часов. Затем снова переносят образцы в первую камеру, и повторяют испытания.

По завершении испытания проводят внешний осмотр образцов, и повторно проводят исследование механических характеристик: адгезии, твердости и ударопрочности.

Установлено, что воздействие влаги и температурных колебаний не изменяет механические характеристик полученных покрытий.

Заключение

Толщина полученных композиционных покрытий варьируется от 17 мкм до 32 мкм и зависит от типа наполнителя, при этом добавка в малых концентрациях наноразмерного порошка графена не оказывает влияния на толщину покрытий.

Результаты испытания на адгезию показывают, что все покрытия, содержащие порошки, имеют самый высокий класс адгезии согласно ISO 2409:2013 – Класс 0 (края надрезов полностью гладкие; сегменты решетки не отслоились).

Анализ СЭМ-изображений поверхности образцов подтверждает хорошую дисперсность графена в кремниевой золь-гель матрице с наполнителем в виде оксида титана. Установлено, что на поверхности образуются графеновые

нанопластины, средний размер которых увеличивается с повышением концентрации частиц наноразмерного графена в исходном растворе.

Увеличение концентрации наноразмерного порошка графена в обоих типах покрытий с 0,1 масс.% до 0,5 масс.% позволяет повысить их твердость до 7Н и, как следствие, увеличивать их устойчивость к царапинам благодаря наличию жестких армирующих наночастиц графена внутри матрицы, а также улучшает гидрофобные свойства, позволяя повысить краевой угол смачивания до 121° для покрытий с оксидом титана и до 111° для покрытий, содержащих углерод.

Результаты испытания на ударопрочность показывают, что образцы с большим содержанием наночастиц графена улучшают ударопрочность получаемых защитных покрытий.

Полученные покрытия прошли испытания на влагостойкость с помощью «погружного» теста в воду на 5 суток и испытания устойчивости покрытий в солевом тумане в течении 48 часов при температуре $27 \pm 2^\circ \text{C}$ без изменения своих механических характеристик.

Установлено, что все полученные покрытия обладают термостойкостью от минус ($35 \pm 3^\circ \text{C}$) до плюс ($100 \pm 5^\circ \text{C}$), что дает возможность использовать их не только в условиях тропического климата, но и в более агрессивных средах.

Основываясь на результатах исследования можно сделать вывод, что присутствие наноразмерного графена в матрице улучшает гидрофобные, механические и эксплуатационные свойства полученных защитных композиционных золь-гель покрытий.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Т23В-009), фонда Вьетнамской академии наук и технологий (проект QTBY01.08/23-24) и государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Материаловедение, новые материалы и технологии» задания 4.1.1 и 4.1.6.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Антикоррозионные золь-гель SiO_2 покрытия для защиты металлических поверхностей* / Д.Л. Коваленко [и др.] // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2011. – № 6 (69). – С. 94–97.

2. *Защитные золь-гель покрытия с гидрофобными свойствами* / В.Е. Гайшун [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 3 (8). – С. 15–19.

3. *Исследование структурно-механических свойств защитных золь-гель покрытий на основе оксидов Si, Ti, Zr и их комплексов* / Д.Л. Коваленко [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 21–24.

4. *ГОСТ 31149-2014* Материалы лакокрасочные. Определение адгезии методом решетчатого надреза. – Введ. 01.09.2015. – Москва: ФГУП «СТАНДАРТИНФОРМ», 2015. – 12 с.

5. *Effect of graphene on mechanical and anti-corrosion properties of $\text{TiO}_2\text{-SiO}_2$ sol-gel coating* / D.L. Kovalenko, V. Uong Van, V.P. Mac, T.V. Nguyen, L. Pham Thi, T.A. Nguyen, V.E. Gaishun, V.V. Vaskevich, D.L. Tran // *Anti-Corrosion Methods and Materials*. – 2024. – Vol. 71, № 6. – P. 820–830.

6. *ГОСТ Р 54586-2011* Материалы лакокрасочные. Метод определения твердости покрытия по карандашу. – Введ. 01.09.2011. – Москва: ФГУП «СТАНДАРТИНФОРМ», 2012. – 12 с.

7. *ГОСТ 4765-73* Материалы лакокрасочные. Метод определения прочности при ударе (с изменениями). – Введ. 01.07.1974. – Москва: ИПК Издательство стандартов, 1973. – 7 с.

8. *ГОСТ Р 52763-2007* Методы испытаний на стойкость к климатическим внешним воздействующим факторам машин, приборов и других технических изделий. Испытания на воздействие соляного тумана. – Введ. 01.01.2008. – Москва: ФГУП «СТАНДАРТИНФОРМ», 2007. – 8 с.

Поступила в редакцию 09.09.2024.

Информация об авторах

Васильевич Василий Васильевич – старший преподаватель

Коваленко Дмитрий Леонидович – к.ф.-м.н., доцент

Туан Ань Нгуен – к.х.н.

Гайшун Владимир Евгеньевич – к.ф.-м.н., доцент

Тиен Вонг Нгуен – к.т.н.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ И ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ВЕКТОРНЫХ ГАУССОВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ С ПРОСТЫМ АСТИГМАТИЗМОМ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ENERGY AND POLARISATION PROPERTIES OF VECTOR GAUSSIAN LIGHT BEAMS WITH SIMPLE ASTIGMATISM

S.S. Girgel

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Исследуются аналитически поляризационные и энергетические свойства векторных световых пучков с простым астигматизмом. Проведено графическое моделирование эллипсов поляризации, интенсивности и поперечных потоков энергии исследуемых векторных астигматических световых пучков.

Ключевые слова: астигматические пучки, гауссовы пучки, поляризация, поперечные потоки энергии.

Для цитирования: Гиргель, С.С. Энергетические и поляризационные свойства векторных гауссовых световых пучков с простым астигматизмом / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 19–24. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_19. – EDN: UUWZHB

Abstract. The polarization and energy properties of vector light beams with simple astigmatism are investigated analytically. Graphical modelling of polarization ellipses, intensity and transverse energy fluxes of the investigated vector astigmatic light beams is carried out.

Keywords: astigmatic beams, Gaussian beams, polarization, transverse energy fluxes.

For citation: Girgel, S.S. Energy and polarisation properties of vector Gaussian light beams with simple astigmatism / S.S. Girgel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 4 (61). – P. 19–24. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_19 (in Russian). – EDN: UUWZHB

Введение

После изобретения лазера была предложена достаточно реалистичная модель, описывающая такое узконаправленное световое излучение, как гауссов световой пучок, у которого амплитуда убывает по гауссову закону при удалении от оптической оси Z пучка. Интенсивность такого пучка в поперечном сечении аппроксимируется колоколообразной поверхностью. Простейший круговой гауссов пучок образует на экране световое пятно, которое не имеет резких границ и обладает круговой симметрией. Для астигматического пучка Гаусса световое пятно в поперечном сечении пучка имеет уже эллипсовидную форму. Такие астигматические пучки могут генерироваться лазерами с астигматическими резонаторами или, например, возникать после прохождения кругового гауссова пучка через астигматическую оптическую систему, в простейшем случае, цилиндрическую линзу.

Скалярные гауссовы световые пучки в настоящее время детально изучены, как теоретически, так и экспериментально [1]–[9]. В статьях [10]–[14] был предложен общий формализм для описания векторных параксиальных световых

пучков с однородной и неоднородной поляризацией. В работах [1]–[6] обсуждались различные аспекты теории гауссовых световых пучков.

В настоящей работе мы будем изучать декартовы векторные пучки Гаусса с однородной и неоднородной поляризацией, их векторные поляризационные и энергетические свойства. Сначала в разделе 1 излагается общий формализм для описания поляризационных и энергетических характеристик векторных декартовых астигматических пучков с однородной поляризацией. Затем, в разделе 2, этот формализм применяется для исследования поляризационных и энергетических характеристик векторных ТМ пучков Гаусса с простым астигматизмом. В разделе 3 проведено графическое моделирование поляризационных свойств, интенсивности и поперечных потоков энергии. Выполнен анализ полученных результатов, который подтвердил и проиллюстрировал аналитические расчеты.

1 Параксиальные векторные астигматические световые пучки с однородной поляризацией

Одно из возможных простых решений параболического уравнения

$$(\partial_{xx} + \partial_{yy} + 2ik\partial_z)f = 0$$

можно записать в виде [1]–[3] $f = G$, где

$$G = \sqrt{\frac{q_{ox}q_{oy}}{q_xq_y}} \exp\left(\frac{ik}{2}\left(\frac{x^2}{q_x} + \frac{y^2}{q_y}\right)\right) - \text{гауссиан с про-$$

стым астигматизмом, включающий два комплексных параметра пучка q_x и q_y , $q_{x,y} = z - q_{ox,oy}$, q_{ox} и q_{oy} – два свободных комплексных параметра: $q_{ox,oy} = q'_{ox,oy} + iq''_{ox,oy}$.

Астигматический гауссиан G описывает скалярные пучки Гаусса. Для векторных гауссовых световых пучков с простым астигматизмом и однородной поляризацией поперечную часть вектора \mathbf{E} электрического поля световой волны возьмем в форме $\mathbf{E}_\perp = \mathbf{e}_\perp G$; где нормированный ($|\mathbf{e}_\perp|^2 = 1$) вектор поляризации [11]–[13] $\mathbf{e}_\perp = \eta_x \mathbf{e}_x + \eta_y \mathbf{e}_y$. Тогда полные векторы электромагнитного поля гауссовых световых пучков с простым астигматизмом и однородной поляризацией имеют вид:

$$\mathbf{E} = \left(\eta_x \mathbf{e}_x + \eta_y \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z \cdot \left(\frac{\eta_x x}{q_x} + \frac{\eta_y y}{q_y} \right) \right) \cdot G;$$

$$\mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{n} \left(-\eta_y \mathbf{e}_x + \eta_x \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z \cdot \left(\frac{\eta_y y}{q_x} - \frac{\eta_x x}{q_y} \right) \right) \cdot G.$$

Геометрические характеристики эллипса поляризации электрического вектора светового пучка задаются комплексным параметром [11]

$\frac{\eta_y}{\eta_x} = \eta = \eta' + i\eta'' = \text{tg}(\psi' + i\psi'')$. При этом азимут главной оси эллипса поляризации относительно оси Ox равен ψ' , а эллиптичность $\gamma = \text{th}\psi''$.

Запишем энергетические характеристики гауссовых пучков с однородной поляризацией. Для параксиальных пучков плотность энергии поля w и продольная плотность потока энергии S_z соответ-

ственно равны [11]: $w = \frac{\varepsilon |\mathbf{E}_\perp|^2}{8\pi}$, $S_z = \frac{c}{n} w$. Тогда

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi} \left| \frac{q_{ox}q_{oy}}{q_xq_y} \right|^2 \exp\left(-k \left(\frac{x^2 q''_{ox}}{|q_x|^2} + \frac{y^2 q''_{oy}}{|q_y|^2} \right)\right).$$

Пятно интенсивности в поперечном сечении пучка имеет эллипсовидную форму, которая меняет свою форму и размеры при изменении расстояния z . Эллипс пятна превращается в окружность при двух значениях расстояния

$$z_{1,2} = \frac{q'_{ox}q''_{oy} - q'_{oy}q''_{ox} \pm \sqrt{q''_{ox}q''_{oy} \cdot |q_x - q_y|}}{q''_{oy} - q''_{ox}}.$$

Общая плотность потока энергии $\mathbf{S} = S_z \mathbf{e}_z + \mathbf{S}_\perp$, причем поперечный поток можно, согласно [8]–[9], разделить на орбитальный \mathbf{S}_o и спиновый \mathbf{S}_s

потоки энергии $\mathbf{S}_\perp = \mathbf{S}_o + \mathbf{S}_s$, где

$$\mathbf{S}_s = \frac{c\varepsilon}{8\pi nk} \text{Im}([\nabla_\perp, \mathbf{e}_z](E_x^* E_y));$$

$$\mathbf{S}_o = \frac{c\varepsilon}{8\pi nk} \text{Im}(E_x^* \nabla_\perp E_x + E_y^* \nabla_\perp E_y).$$

Целесообразно для дальнейших расчетов ввести

[15] вектор $\mathbf{a} = \frac{\nabla_\perp f}{f}$. Тогда плотность попереч-

ного потока энергии однородно поляризованных астигматических гауссовых световых пучков можно представить в простой форме [15]

$$\mathbf{S}_\perp = \frac{S_z}{k} \cdot (\text{Im}(\mathbf{a}) + \text{th} 2\psi'' \cdot [\text{Re}(\mathbf{a}), \mathbf{e}_z]) = \mathbf{S}_o + \mathbf{S}_s.$$

Поперечный поток можно, как и для гауссовых мод с однородной поляризацией, разделить на орбитальный \mathbf{S}_o и спиновый \mathbf{S}_s потоки энергии. Вычисляя, находим, что

$$\mathbf{S}_o = S_z \left(\frac{x \mathbf{e}_x (z - q'_{ox})}{|q_x|^2} + \frac{y \mathbf{e}_y (z - q'_{oy})}{|q_x|^2} \right);$$

$$\mathbf{S}_s = S_z \left(\frac{x \mathbf{e}_y q''_{ox}}{|q_x|^2} - \frac{y \mathbf{e}_x q''_{oy}}{|q_y|^2} \right) \text{th}(2\psi'').$$

Здесь параметр эллиптичности световой волны $\text{th}(2\psi'') = \frac{2\eta''}{1 + |\eta|^2}$. Сопоставим эти характери-

стики со свойствами стигматических (круговых) гауссовых пучков, для которых, как известно [1], достаточно одного комплексного параметра пучка $q = z - q'_0 - iq''_0$; $\text{Im}\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{q''_0}{|q|^2}$; $\text{Re}\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{z - q'_0}{|q|^2}$

и, переходя к стигматическим пучкам, получаем

$$S_z = \frac{c\varepsilon}{8\pi n} |G|^2; \mathbf{S}_\perp = \left(\mathbf{e}_z + \rho \frac{(z - q'_0) \mathbf{e}_\rho + \text{th} 2\psi'' \cdot q''_0 \mathbf{e}_\phi}{|q|^2} \right) S_z.$$

Видим отличия от стигматического случая: 1) спиновые и орбитальные потоки энергии гауссового астигматического пучка имеют и радиальную, и азимутальную компоненты; 2) для стигматических пучков направления потоков энергии \mathbf{S}_o и \mathbf{S}_s ортогональны, для астигматических гауссовых – нет.

Проводилось графическое моделирование эллипсов поляризации, интенсивности и поперечных потоков энергии векторных световых гауссовых пучков с простым астигматизмом и с однородной поляризацией по сечению. С целью некоторого упрощения и обобщения был осуществлен переход к безразмерным переменным и параметрам. Пусть x_0 и $z_0 = kx_0^2/2$ – характерные размеры в поперечном и продольном направлениях пучка соответственно. Переходы к безразмерным переменным и параметрам выполнены по формулам $\{x \rightarrow x/x_0, y \rightarrow y/x_0, z_0 = kx_0^2/2, z \rightarrow z/z_0, q_{x,y} \rightarrow q_{x,y}/z_0, k \rightarrow 2\}$.

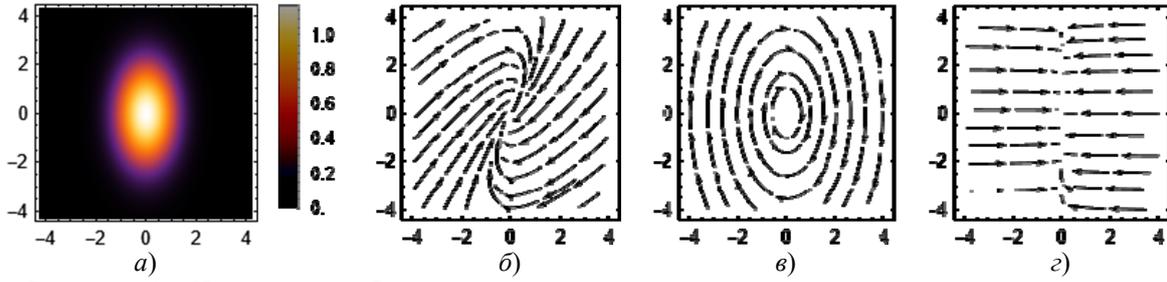


Рисунок 1.1 – Интенсивность I и линии поперечных потоков энергии однородно поляризованных векторных астигматических гауссовых пучков с простым астигматизмом: а) интенсивность I ; б) линии общего S_{\perp} потока энергии; в) линии спинного S_s потока энергии; г) линии орбитального S_o потока энергии. Свободные безразмерные параметры: $z = 0$; $q'_{0x} = 1, 0$; $q'_{0y} = 1, 0$; $q''_{0x} = 1$; $q''_{0y} = 6$; $\text{th } 2\psi'' = 1$

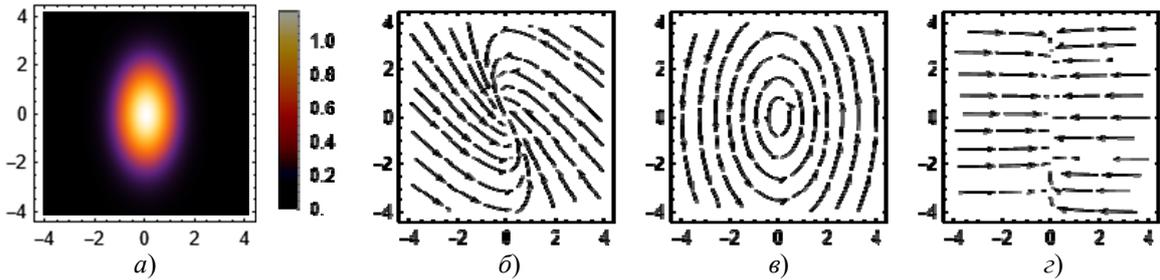


Рисунок 1.2 – Интенсивность I и линии поперечных потоков энергии однородно поляризованных векторных астигматических гауссовых пучков с простым астигматизмом: а) интенсивность I ; б) линии общего S_{\perp} потока энергии; в) линии спинного S_s потока энергии; г) линии орбитального S_o потока энергии. Свободные безразмерные параметры: $z = 0$; $q'_{0x} = 1, 0$; $q'_{0y} = 1, 0$; $q''_{0x} = 1$; $q''_{0y} = 6$; $\text{th } 2\psi'' = -1$

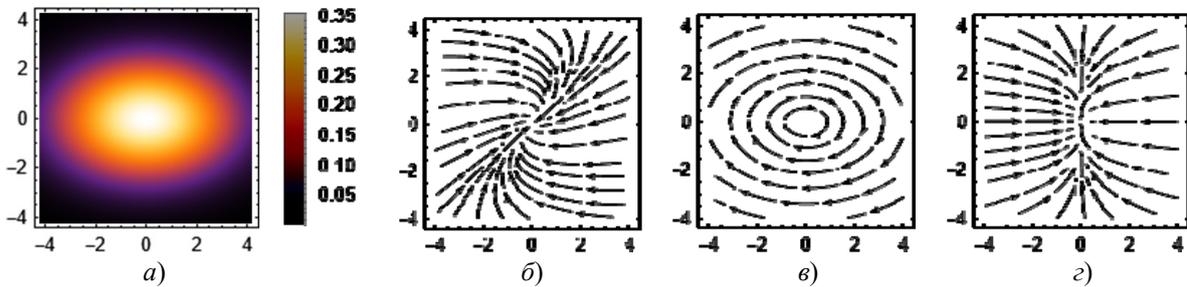


Рисунок 1.3 – Интенсивность I и линии поперечных потоков энергии однородно поляризованных векторных астигматических гауссовых пучков с простым астигматизмом: а) интенсивность I ; б) линии общего S_{\perp} потока энергии; в) линии спинного S_s потока энергии; г) линии орбитального S_o потока энергии. Свободные безразмерные параметры: $z = -3$; $q'_{0x} = 1, 0$; $q'_{0y} = 0, 3$; $q''_{0x} = 1$; $q''_{0y} = 6$; $\text{th } 2\psi'' = -1$

Если имеем линейную поляризацию по всему сечению пучка, тогда спиновый поток энергии строго равен нулю и поперечный поток энергии является полностью орбитальным. Для наглядности поэтому мы везде выбирали правую и левую циркулярную поляризацию, чтобы спиновый поток энергии был максимальным. Картина интенсивности в поперечном сечении пучка с однородной циркулярной поляризацией представляет собой пятно эллиптической формы (рисунки 1.1–1.3). Отношение полуосей эллипса интенсивности зависит от коэффициента q''_{0y} / q''_{0x} и расстояния z . Линии орбитального S_o потока энергии параллельны оси OX , кроме об-

ласти вблизи оси OX . Линии спинного S_s потока энергии повторяют форму пятна интенсивности. Линии общего S_{\perp} потока энергии представляют собой сплюснутые вихри. Их симметрия – 2_2 . Симметрия картин спинного и орбитального потоков энергии, а также эллипса интенсивности более высокая – $2_2 m_x m_y$. При изменении правой циркулярной поляризации на левую картины интенсивности и орбитального потока не меняются, а направления вращения спиновых потоков энергии изменяются на противоположные (рисунок 1.2).

2 Векторные пучки с простым астигматизмом и неоднородной поляризацией по сечению (ТМ-моды)

Начнем с векторов поля гауссовых ТМ-мод с простым астигматизмом. Для парааксиальных пучков: $\mathbf{E} = \nabla_{\perp} f + i \frac{i}{k} \Delta_{\perp} f \mathbf{e}_z$; $\mathbf{H} = n[\mathbf{e}_z, \nabla_{\perp} f]$, где f – некоторое решение параболического уравнения. В качестве f для гауссовых ТМ мод возьмем $f = \frac{G}{ik}$. После некоторых преобразований получаем выражения

$$\mathbf{E}_{TM} = \left(\mathbf{b}_{\perp} + \left(\frac{i}{k} \left(\frac{1}{q_x} + \frac{1}{q_y} \right) - \mathbf{b}_{\perp}^2 \right) \cdot \mathbf{e}_z \right) \cdot G;$$

$\mathbf{H}_{TM} = \frac{\varepsilon}{n} [\mathbf{e}_z, \mathbf{b}_{\perp}] \cdot G$, описывающие соответственно векторы электрического и магнитного поля гауссовых ТМ мод. Здесь введен характеристический вектор $\mathbf{b}_{\perp} = \frac{x\mathbf{e}_x}{q_x} + \frac{y\mathbf{e}_y}{q_y}$. Поляризационные характеристики определяются параметром [12]

$$\eta = E_y^{(1)} / E_x^{(1)} = \frac{b_y}{b_x} = \frac{yq_x}{xq_y} = \operatorname{tg}(\psi' + i\psi'').$$

Азимут эллипсов поляризации световой волны ψ' , а ее эллиптичность $\gamma = \operatorname{th} 2\psi''$. Энергетические характеристики парааксиального светового пучка: плотность энергии светового поля $w = \frac{\varepsilon |\mathbf{b}_{\perp} G|^2}{8\pi}$, продольная плотность потока энергии $S_z = \frac{c}{n} w$. Для ТМ мод поперечная плотность

потока энергии [16] $\mathbf{S}_{\perp} = \frac{c\varepsilon}{8\pi n} \operatorname{Re}(\mathbf{E}_{\perp}^* E_z)$. Тогда, после некоторых преобразований, находим, что $\mathbf{S}_{\perp} = S_z \left(\operatorname{Re}(\mathbf{b}_{\perp}) + [\mathbf{e}_z, \operatorname{Im}(\mathbf{b}_{\perp})] \operatorname{th} 2\psi'' \right)$, или

$$\mathbf{S}_{\perp} = \frac{c\varepsilon |G|^2}{8\pi n} \operatorname{Re} \left(\frac{x\mathbf{e}_x}{q_x^*} \left(\frac{-i}{kq_y} + \frac{x^2}{q_x^2} + \frac{y^2}{q_y^2} \right) + \frac{y\mathbf{e}_y}{q_y^*} \left(\frac{-i}{kq_x} + \frac{x^2}{q_x^2} + \frac{y^2}{q_y^2} \right) \right).$$

Поперечный поток можно [8]–[9], как и для гауссовых мод с однородной поляризацией, разделить на орбитальный \mathbf{S}_o и спиновый \mathbf{S}_s потоки энергии. Вычисляя, находим, что

$$\mathbf{S}_s = \frac{c\varepsilon |G|^2}{8\pi n} \times \operatorname{Im} \left[\left(\frac{1}{k} \left(\frac{1}{q_x} + \frac{1}{q_y} \right) - \operatorname{Im}(\mathbf{b}_{\perp}) \cdot \mathbf{b}_{\perp} \right) [\mathbf{e}_z, \mathbf{b}_{\perp}^*] \cdot \mathbf{e}_z \right].$$

После некоторых преобразований получаем в

координатной форме

$$\mathbf{S}_s = \frac{c\varepsilon |G|^2}{8\pi n} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{q_x^* q_y} \right) \times \left(\frac{x\mathbf{e}_x - y\mathbf{e}_y}{k} - 2xy \operatorname{Im} \left(\frac{y\mathbf{e}_x}{q_y} - \frac{x\mathbf{e}_y}{q_x} \right) \right).$$

Плотность орбитального потока энергии $\mathbf{S}_o = S_z \operatorname{Re}(\mathbf{b}_{\perp})$ формально такая же, как для однородной поляризации, т. е.

$$\mathbf{S}_o = S_z \left(\frac{x\mathbf{e}_x (z - q'_{0x})}{|q_x|^2} + \frac{y\mathbf{e}_y (z - q'_{0y})}{|q_y|^2} \right).$$

Отличие состоит в плотности продольного потока энергии S_z .

Обсудим теперь ограничения, налагаемые на компоненты $q''_{0x,0y}$, чтобы гауссиан обладал квадратичной интегрируемостью (КИ). Для гауссовых пучков с простым астигматизмом выделим явно действительные и мнимые части комплексных параметров пучка $(1/q_x, 1/q_y)$. В итоге $\frac{1}{q_{x,y}} = \rho_{1,2} + i\omega_{1,2}$, где $\omega_{1,2} = \frac{q''_{0x,0y}}{|q_{x,y}|^2}$, $\rho_{1,2} = \frac{z - q'_{0x,0y}}{|q_{x,y}|^2}$.

Амплитудная часть гауссиана G , зависящая только от (x, y) : $G \propto \exp\left(-\frac{k}{2}(x^2\omega_x + y^2\omega_y)\right)$.

Здесь символ \propto означает пропорциональность. Отсюда вытекают известные [1] условия КИ гауссиана: $\{\omega_x > 0, \omega_y > 0\}$, или, иначе, $\{q''_{0x} > 0, q''_{0y} > 0\}$.

Перейдем теперь к анализу условий КИ для смещенных пучков Гаусса с простым астигматизмом. Теперь гауссиан имеет вид:

$$G = G_x G_y = \sqrt{\frac{q_{0x} q_{0y}}{q_x q_y}} \exp\left(\frac{ik}{2} \left(\frac{(x - ix_0)^2}{q_x} + \frac{(y - iy_0)^2}{q_y} \right)\right).$$

Амплитудная часть гауссиана G , зависящая только от (x, y) ,

$$G_x \propto \operatorname{Re} \left(\exp\left(\frac{ik}{2} (x - ix_0)^2 (\rho_1 + i\omega_1)\right) \right).$$

После простых преобразований находим, что

$$G_x \propto \exp\left(-\frac{k\omega_1}{2} \left(x - \frac{x_0\rho_1}{\omega_1}\right)^2\right).$$

Аналогично, $G_y \propto \exp\left(-\frac{k\omega_2}{2} \left(y - \frac{y_0\rho_2}{\omega_2}\right)^2\right)$.

Итак, комплексное смещение поперечных компонент (x, y) гауссана приводит к тому, что эллипс интенсивности светового пятна гауссового пучка деформируется. Центры осей эллипсов смещаются от оси OZ :

$$\left\{ x \rightarrow x - \frac{x_0\rho_1}{\omega_1}, y \rightarrow y - \frac{y_0\rho_2}{\omega_2} \right\}.$$

Однако условия КИ при этом не изменяются!

Это ясно также из физических соображений. Комплексные смещения $\{x \rightarrow x - ix_0, y \rightarrow y - iy_0\}$ координат для парааксиальных пучков, согласно Бэндрес [7], эквивалентны некоторому небольшому повороту оси OZ в пространстве. Физических следствий при этом, естественно, не возникает.

3 Графическое моделирование эллипсов поляризации, интенсивности и поперечных потоков энергии гаусса ТМ типа

На рисунках 3.1 а) – 3.3 а) изображены эллипсы поляризации вместе с направлениями

вращения для ТМ мод Гаусса с простым астигматизмом. Поляризация ТМ-мод Гаусса в сечении пучка является сильно неоднородной по поперечному сечению пучка и, в общем случае, эллиптической. Она зависит от координат x, y, z и не зависит явно от 3D гауссиана $G = G_x G_y$.

Вдоль осей координат OX и OY эллиптичность волн строго равна нулю. С возрастанием расстояния от оси пучка поляризация постепенно становится линейной радиальной.

Картинки интенсивности представляют собой два пятна. Общая симметрия картин эллипсов поляризации, спинового и орбитального потоков энергии, а также эллипса интенсивности – 2_z .

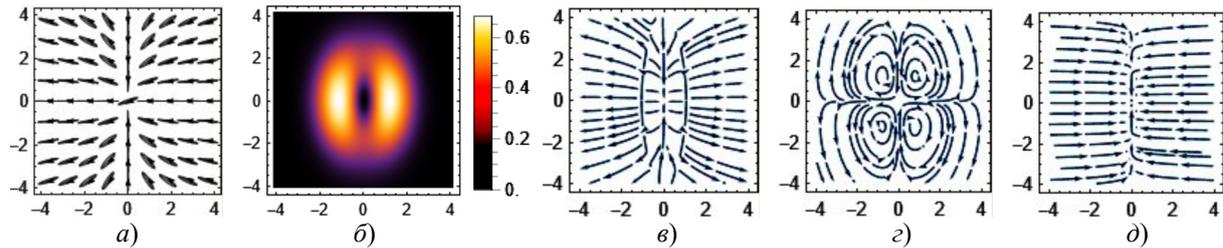


Рисунок 3.1 – Эллипсы поляризации, интенсивность I и линии поперечных потоков энергии ТМ векторных астигматических гауссовых пучков с простым астигматизмом: а) эллипсы поляризации; б) интенсивность I ; в) линии общего S_{\perp} потока энергии; г) линии спинового S_s потока энергии; д) линии орбитального S_o потока энергии. Свободные безразмерные параметры: $z = 0$; $q'_{0x} = 1,0$;

$$q'_{0y} = 0,3; q''_{0x} = 2; q''_{0y} = 6$$

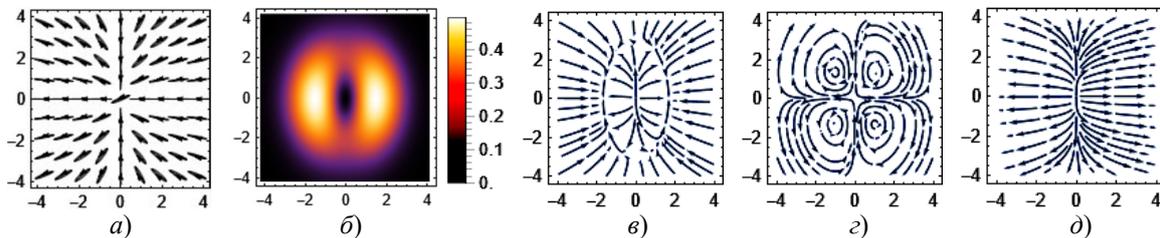


Рисунок 3.2 – Эллипсы поляризации, интенсивность I и линии поперечных потоков энергии ТМ векторных астигматических гауссовых пучков с простым астигматизмом: а) эллипсы поляризации; б) интенсивность I ; в) линии общего S_{\perp} потока энергии; г) линии спинового S_s потока энергии; д) линии орбитального S_o потока энергии. Свободные безразмерные параметры: $z = 3$; $q'_{0x} = 1,0$;

$$q'_{0y} = 0,3; q''_{0x} = 2; q''_{0y} = 6$$

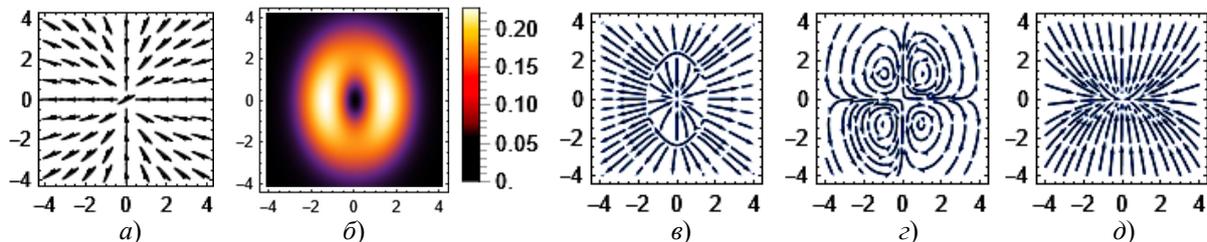


Рисунок 3.3 – Эллипсы поляризации, интенсивность I и линии поперечных потоков энергии ТМ векторных астигматических гауссовых пучков с простым астигматизмом: а) эллипсы поляризации; б) интенсивность I ; в) линии общего S_{\perp} потока энергии; г) линии спинового S_s потока энергии; д) линии орбитального S_o потока энергии. Свободные безразмерные параметры: $z = 0$; $q'_{0x} = 0,4$;

$$q'_{0y} = 2,6; q''_{0x} = 3,5; q''_{0y} = 6$$

Интересно, что линии поперечных спиновых потоков энергии представляют собой замкнутые кривые, как и для однородной поляризации. Однако видны четыре разделенных сектора. Линии спинового S_s потока энергии уже не повторяют форму пятна интенсивности. Линии общего S_{\perp} потока энергии также образуют более сложные картины.

Заключение

В данной работе записаны новые решения векторного параболического уравнения, описывающие параксиальные векторные световые гауссовы пучки с простым астигматизмом и с однородной и неоднородной поляризациями (ТМ-моды). Представлены явные выражения для векторов поля, для интенсивности, спинового, орбитального и общего поперечного потоков энергии векторных параксиальных световых пучков Гаусса с простым астигматизмом. Обсуждались пучки с однородной и неоднородной (ТМ-моды) поляризациями. Сформулированы ограничения на свободные параметры гауссовых пучков, чтобы они переносили конечную мощность.

Проведенное графическое моделирование эллипсов поляризации, интенсивности и поперечных потоков энергии (орбитального S_o , спинового S_s и общего $S_{\perp} = S_o + S_s$) для рассматриваемых типов векторных гауссовых пучков подтвердило и проиллюстрировало правильность аналитических расчетов.

Варьирование свободных параметров позволяет в определенных пределах изменять физические свойства рассматриваемых пучков Гаусса с простым астигматизмом. Это может открыть новые перспективы использования таких пучков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гончаренко, А.М. Гауссовы пучки света / А.М. Гончаренко. – Минск: Наука и техника, 1977. – 142 с.
2. Киселев, А.П. Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравнения (обзор) / А.П. Киселев // Оптика и спектроскопия. – 2007. – Т. 102, № 4. – С. 661–681.
3. Абрамочкин, Е.Г. Современная оптика гауссовых пучков / Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 184 с.
4. Ананьев, Ю.А. Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев. – Москва: Наука, 1990. – 264 с.
5. Heyman, H. Gaussian beam and pulsed beam dynamics: complex-source and complex-spectrum formulations within and beyond paraxial asymptotics / E. Heyman, L.B. Felsen // J. Opt. Soc. Am. A. – 2001. – Vol. 18. – P. 1588–1611.
6. Paraxial Gaussian modes with simple astigmatic phases and nonpolynomial amplitudes / A.B. Plachenov [et al.], // Proc. of the Inter. Conf. DAYS on DIFFRACTION. – 2017. – P. 264–269.
7. Bandres, M.A. Cartesian beams / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2007. – Vol. 32, № 23. – P. 3459–3461.
8. Berry, M.V. Optical currents / M.V. Berry // Journal of Optics A: Pure and Applied Optics. – 2009. – Vol. 11 (9). – P. 094001.
9. Bekshaev, A. Internal flows and energy circulation in light beams / A. Bekshaev, K. Bliokh, M. Soskin // Journal of Optics. – 2011. – Vol. 13 (5). – P. 053001.
10. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства векторных параксиальных гауссовых световых пучков / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 3 (12). – С. 19–23.
11. Гиргель, С.С. Свойства векторных параксиальных световых пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 20–24.
12. Гиргель, С.С. Свойства векторных параксиальных световых пучков. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1 (10). – С. 11–14.
13. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 1 (26). – С. 17–21.
14. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4 (33). – С. 7–10.
15. Гиргель, С.С. Векторные циркулярные параксиальные пучки Куммера–Гаусса. Поляризация и энергетические свойства / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 7–11.
16. Гиргель, С.С. Энергетические характеристики векторных циркулярных пучков Куммера конечной мощности. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 20–24.

Поступила в редакцию 03.09.2024.

Информация об авторах

Гиргель Сергей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор

ВЛИЯНИЕ КОМПОЗИТНОЙ ФУТЕРОВКИ ДВУХСЛОЙНЫХ ТРУБ, ПРИМЕНЯЮЩЕЙСЯ ПРИ ТЕХНОЛОГИИ САНАЦИИ ПОЛИМЕРНЫМ «ЧУЛКОМ», НА ПАРАМЕТРЫ ГИДРОУДАРА

В.В. Можаровский, С.В. Киргинцева

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

THE EFFECT OF THE COMPOSITE LINING OF DOUBLE-LAYER PIPES USED IN THE TECHNOLOGY OF POLYMER “STOCKING” SANITATION ON THE PARAMETERS OF A WATER HAMMER

V.V. Mozharovsky, S.V. Kirhintsava

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Исследуется влияние характеристик внутреннего покрытия двухслойных труб на параметры гидравлического удара (напор, давление) и расход (скорость) движущейся жидкости известным методом характеристик [1], [2]. Предложена методика и создана программа в среде Delphi, позволяющая определять параметры гидроудара при движении жидкостей в двухслойных трубах с покрытием из композита с различным расположением волокон в матрице композиционного материала при условии, что оси анизотропии совпадают с направлением волокон. Скорость волны жидкости в ортотропной трубе определялась по разработанной методике [3]–[5], показано, что полученные результаты хорошо согласуются с другими экспериментальными и теоретическими данными. Предложенная методика может применяться для новой технологии восстановления работоспособности трубопроводов путем вставки специального «чулка» из синтетического войлока (композита).

Ключевые слова: труба с покрытием, ортотропия, волокна, матрица, скорость волны, гидравлический удар, метод характеристик, напор, расход жидкости.

Для цитирования: Можаровский, В.В. Влияние композитной футеровки двухслойных труб, применяющейся при технологии санации полимерным «чулком», на параметры гидроудара / В.В. Можаровский, С.В. Киргинцева // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 25–29. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_25. – EDN: QYDGBF

Abstract. The influence of the characteristics of the inner coating of double-layer pipes on the parameters of hydraulic shock (head (pressure) and flow rate (velocity) of a moving liquid) by the well-known method of characteristics is investigated [1], [2]. A technique has been proposed and a program has been created in the Delphi environment that allows determining the parameters of a water hammer when liquids move in two-layer pipes coated with a composite with a different arrangement of fibers in the matrix of a composite material, provided that the axes of anisotropy coincide with the direction of the fibers. The velocity of the liquid wave in the orthotropic tube was determined according to the developed method [3]–[5], it is shown that the results obtained are in good agreement with other experimental and theoretical data. The proposed technique can be used for a new technology for restoring the operability of pipelines by inserting a special “stocking” made of synthetic felt (composite).

Keywords: coated pipe, orthotropy, fibers, matrix, wave velocity, hydraulic shock, method of characteristics, pressure, fluid flow.

For citation: Mozharovsky, V.V. The effect of the composite lining of double-layer pipes used in the technology of polymer “stocking” sanitation on the parameters of a water hammer / V.V. Mozharovsky, S.V. Kirhintsava // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 4 (61). – P. 25–29. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_25 (in Russian). – EDN: QYDGBF

Введение

При длительной эксплуатации трубопроводов часто возникают локальные повреждения вследствие коррозии металла, трещин, разрывов, устранение которых требует значительных затрат для ремонта. Действительно, обслуживание и ремонт подземных трубопроводов проводится путем извлечения поверхностных слоев грунта и раскопки открытых траншей, удаления изношенных трубопроводов, замены. Эти мероприятия по ремонту трудоемкие и длительные.

Поэтому во всем мире применяется новая технология восстановления работоспособности трубопроводов путем вставки специального «чулка» из синтетического войлока (или композита), который пропитан композитным материалом. Далее «чулок» из композита твердеет и внутри старого трубопровода формируется новая труба. В других странах эту технологию восстановления ещё называют технология CIPP («Cured – In – Place Pipe») трубопроводов. Несущая способность новой сформированной трубы остается сравнима с реконструируемой. Поэтому

очень важно изучать и строить математические модели расчета двухслойных труб, то есть, которые имеют футеровку. Так, в процессе эксплуатации таких трубопроводов для транспортировки любой жидкости или её прокачки насосом, безусловно, возникает явление гидроудара, которое может привести к разрушению покрытия из композита (футеровки). Для правильного выбора геометрических и физических параметров (свойств материала, выбор специальных волокон и т. д.) таких покрытий требуется создать методику расчета скорости движения ударной волны, силы удара и других механических параметров для характеристики при эксплуатации трубопровода.

1 Постановка задачи

Необходимо провести теоретические исследования, касающиеся определения скорости волны, напора и расхода жидкости при её течении в двухслойных трубах с изотропной и ортотропной футеровками при гидравлическом ударе. Рассматриваются двухслойные трубы длиной L с внутренним, средним и внешним радиусом r_a , r_b и r_c соответственно, с протекающей внутри жидкостью плотностью ρ (рисунок 1.1).

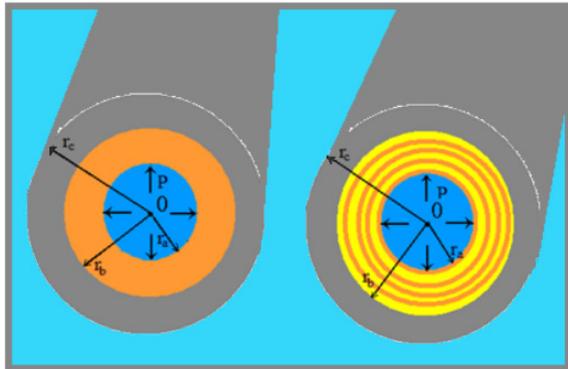


Рисунок 1.1 – Изотропная труба
 а) с изотропной футеровкой;
 б) с ортотропной футеровкой

2 Методика определения скорости волны и максимального давления при гидравлическом ударе

В расчетах по гидравлике известно, что с помощью формул, предложенных российским ученым Н.Е. Жуковским, можно легко определять предельно возможное значение напора при гидравлическом ударе (прямой удар) [1]:

$$\Delta P = \pm \rho C V_0 \text{ или } \Delta H = \pm C V_0 / g, \quad (2.1)$$

где ΔP – ударное повышение давления; ρ – плотность перекачиваемой жидкости; C – скорость ударной волны; $g = 9,82 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения; H – пьезометрический напор; $V_0 = 4Q / (\pi D^2)$ – скорость жидкости в трубе; Q – расход жидкости; D – внутренний диаметр трубы.

Известно, что скорость ударной волны при движении жидкости в трубе, входящая в (2.1) для изотропных труб, определяется по формуле Н.Е. Жуковского [1]:

$$C = 1 / \sqrt{\frac{\rho}{K} + \rho \frac{D}{E\delta}}, \quad (2.2)$$

где K – модуль объемной упругости жидкости, E – модуль упругости материала трубы; δ – толщина стенки трубопровода.

В настоящее время для расчета ударной волны для двухслойных труб и труб из композитов производится расчет скорости ударной волны на основе теории упругости анизотропного тела [3]–[6]. Так, в работе [3] выведены формулы, определяющие скорость волны при гидроударе для различных комбинаций слоистых упругих ортотропных свойств трубы и футеровки. Поэтому расчетная зависимость, определяющая скорость волны в двухслойных трубах, как для изотропных, так и для анизотропных, определяется по формуле:

$$C = \sqrt{\frac{K/\rho}{1+K\Omega}}, \quad (2.3)$$

– для изотропной трубы с изотропной футеровкой

$$\Omega = \frac{2}{\alpha} \left[-1 + \left(-\frac{\beta}{\alpha} + 1 \right) \left(\frac{r_a}{r_b} \right)^{-2} \left[\alpha \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \frac{g}{\gamma} \right) - g \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \right) \right] / \left[\beta \left(1 - \left(\frac{r_a}{r_b} \right)^{-2} \right) \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \frac{g}{\gamma} \right) - g \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \right) \left(1 - \left(\frac{r_a}{r_b} \right)^{-2} \frac{\beta}{\alpha} \right) \right] \right],$$

$$\gamma = \frac{E^{(2)}}{1-\nu^{(2)}}, \quad g = \frac{-E^{(2)}}{1+\nu^{(2)}}, \quad \beta = \frac{-E^{(1)}}{1+\nu^{(1)}}, \quad \alpha = \frac{E^{(1)}}{1-\nu^{(1)}},$$

$E^{(2)}$ и $\nu^{(2)}$ – характеристики изотропной трубы, $E^{(1)}$ и $\nu^{(1)}$ – характеристики изотропной футеровки;

– для изотропной трубы с ортотропной футеровкой

$$\Omega = \frac{2}{\alpha} \left[-1 + \left(-\frac{\beta}{\alpha} + 1 \right) \left(\frac{r_a}{r_b} \right)^{-2k_1} \left[\alpha \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \frac{g}{\gamma} \right) - g \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \right) \right] / \left[\beta \left(1 - \left(\frac{r_a}{r_b} \right)^{-2k_1} \right) \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \frac{g}{\gamma} \right) - g \left(1 - \left(\frac{r_c}{r_b} \right)^{-2} \right) \left(1 - \left(\frac{r_a}{r_b} \right)^{-2k_1} \frac{\beta}{\alpha} \right) \right] \right],$$

$$\beta = A_{12}^{(1)} - k_1 A_{11}^{(1)}, \quad \alpha = A_{11}^{(1)} k_1 + A_{12}^{(1)}, \quad \gamma = \frac{E}{1-\nu}, \quad g = \frac{-E}{1+\nu},$$

где E и ν – характеристики изотропной трубы, k_1 – коэффициент для покрытия,

$$A_{11} = \frac{E_r}{1 - \nu_{r0}\nu_{0r}}, A_{12} = \nu_{r0} \frac{E_0}{1 - \nu_{r0}\nu_{0r}}, A_{22} = \frac{E_0}{1 - \nu_{r0}\nu_{0r}}.$$

Механические свойства (модули упругости материала трубы E_0 , E_r и коэффициенты Пуассона ν_{0r} , ν_{r0}) представлены в случае плоского напряженного состояния в цилиндрической системе координат $\theta r z$ и определяются по правилу «смесей» с объемным содержанием V волокна (индекс f) в матрице (индекс m) волокнистых материалов при различных способах расположения волокон и определяются следующим образом [4], [5]:

– перпендикулярное расположение волокон по отношению к оси z :

$$E_r = E_m \frac{1 + \eta V}{1 - \eta V}, \quad \eta = \frac{E_f - E_m}{E_f + E_m},$$

$$E_0 = VE_f + (1 - V)E_m, \quad \nu_{r0} = V\nu_f + (1 - V)\nu_m,$$

$$\nu_{0r} = \frac{E_0}{E_r} \nu_{r0};$$

– радиальное расположение волокон по отношению к оси z :

$$E_r = VE_f + (1 - V)E_m, \quad E_0 = E_m \frac{1 + \eta V}{1 - \eta V},$$

$$\eta = \frac{E_f - E_m}{E_f + E_m}, \quad \nu_{r0} = \frac{E_r}{E_0} \nu_{0r}, \quad \nu_{0r} = V\nu_f + (1 - V)\nu_m;$$

– параллельное расположение волокон по отношению к оси z :

$$E_r = VE_f + (1 - V)E_m, \quad E_0 = E_r, \quad \nu_{r0} = \nu_{0r},$$

$$\nu_{0r} = V\nu_f + (1 - V)\nu_m.$$

3 Пример расчета давления и расхода жидкости в двухслойных трубах

По разработанной методике составлена программа в среде Delphi на основе метода характеристик, в которой учитывался расчет скорости волны для двухслойных труб и определялись основные параметры. Рассмотрим расчет

изотропной трубы (модуль упругости и коэффициент Пуассона трубы равны $E = 210$ ГПа, $\nu = 0,3$) с внутренним покрытием с радиусами $r_a = 0,147$ м, $r_b = 0,150$ м $r_c = 0,156$ м. Труба длиной $L = 2500$ м была разделена на 5 секций; задаются условия $H_0 = 49,95$ м; $Q_0 = 0,1$ м³/с; коэффициент трения $f = 0,018$; $T_{max} = 50$ с; время закрытия задвижки $t_c = 0$ с; константа s , характеризующая быстроту закрытия клапана, принята равной 0 [5]. Скорость жидкости в трубе $V_0 = 1,47$ м/с. Произведен расчет напора и расхода жидкости и сделан анализ о влиянии расположения волокон (перпендикулярное, параллельное, радиальное) в матрице композиционного материала футеровки на скорость волны, давление и расход жидкости при гидроударе. В таблице 3.1 представлены характеристики покрытий, а также значения скорости, максимального напора H_{max} , вычисленного по методу характеристик, по формуле Жуковского и по программе в Excel [7].

Скорость волны для двухслойной трубы с изотропным покрытием, вычисленная по разработанной методике [3] совпадает с результатами, представленными в работе [6]. Из данных таблицы 3.1 видно, что H_{max} для двухслойной трубы с изотропным покрытием, вычисленные тремя способами (по методу характеристик, формуле Жуковского (2.1) со скоростью, вычисленной по формуле (2.3) и расчету Excel, используя формулу (2.3)), близки по значению.

На рисунке 3.1 представлены графики зависимости напора H и расхода жидкости Q от времени t для трубы с изотропным покрытием при $t_c = 0$ с, $s = 0$, вычисленные методом характеристик.

В формуле определения скорости волны и параметров гидроудара можно использовать формулу Жуковского (2.2), применяя правило «смесей» для определения эффективного модуля упругости двухслойной трубы.

Таблица 3.1 – Изменение максимального напора H_{max} (в метрах) и скорости C (м/с) в зависимости от характеристик покрытия

Покрытие	C , м/с	H_{max} , м (метод характеристик, формула (2.3))	H_{max} , м (формула (2.3))	H_{max} , м (расчет Excel, формула (2.3))
Изотропное ($E = 14,804$ ГПа, $\nu = 0,3$ [6])	1187	224,72	228,11	245,04
Ортотропное ($E_f = 86$ ГПа, $\nu_f = 0,22$, $E_m = 3,76$ ГПа, $\nu_m = 0,374$)	Перпендикулярное расположение волокон ($V = 30\%$) $E_r = 6,6$ ГПа, $E_0 = 28,4$ ГПа, $\nu_{r0} = 0,328$, $\nu_{0r} = 1,410$			
	1184,25	224,30	227,68	244,61
	Параллельное расположение волокон ($V = 30\%$) $E_r = 28,4$ ГПа, $E_0 = 28,4$ ГПа, $\nu_{r0} = 0,328$, $\nu_{0r} = 0,328$			
	1194,34	225,81	229,20	246,12
	Радиальное расположение волокон ($V = 30\%$) $E_r = 28,4$ ГПа, $E_0 = 6,6$ ГПа, $\nu_{r0} = 1,410$, $\nu_{0r} = 0,328$			
	1184,21	224,29	227,68	244,60

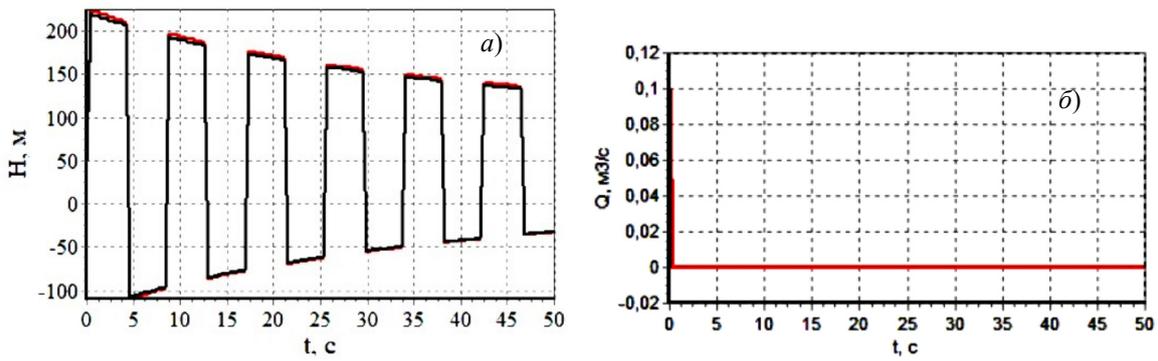


Рисунок 3.1 – а) напор H ; б) расход жидкости Q ($t_c = 0$ с, $s = 0$)

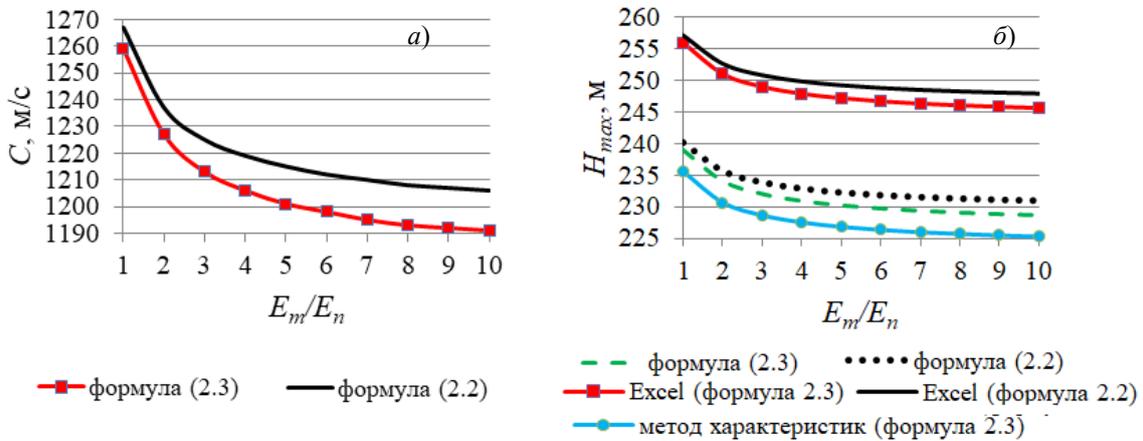


Рисунок 3.2 – Графики зависимости: а) скорости волны C от E_m / E_n ; б) напора H_{max} от E_m / E_n (покрытие изотропное)

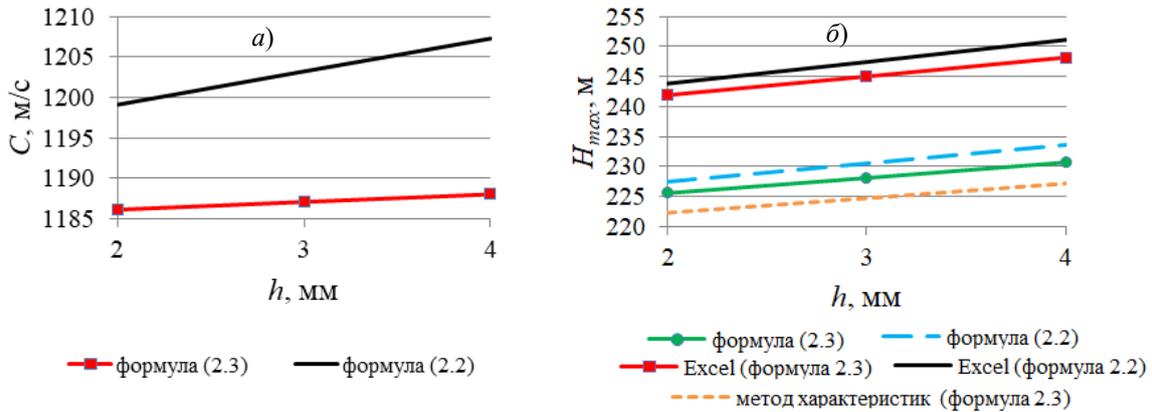


Рисунок 3.3 – Графики зависимости: а) скорости волны C от h ; б) напора H_{max} от толщины покрытия h (покрытие изотропное)

Графики зависимости скорости волны от соотношения модулей упругости трубы и покрытия E_m / E_n ($E_m = 210$ ГПа, E_n – модули упругости трубы и покрытия соответственно) в двухслойной трубе с изотропным покрытием, вычисленные по разработанной методике и по формуле Жуковского (в которой скорость волны гидроудара определяется, как по формуле (2.2), так и по (2.3)), представлены на рисунке 3.2 (а). Следует отметить, что в данном рассматриваемом

случае при заданных физико-механических характеристиках, отличие полученных результатов расчета параметров гидроудара незначительны, что может быть не характерно для других случаев, например, в случае двухслойной трубы с покрытием из композита.

На рисунке 3.2 (б) показаны графики зависимости напора H_{max} при движении жидкости в трубе с покрытием от соотношения модулей упругости трубы и покрытия E_m / E_n , вычисленные

по разработанной методике (формула (2.3)), формуле Жуковского (формулы (2.1), (2.2)), методом характеристик (формула (2.3)) и программе в Excel, используя формулы (2.2) и (2.3).

Исследование влияния толщины изотропного покрытия с механическими характеристиками, указанными в таблице 3.1, на параметры гидроудара показало, что в данном рассматриваемом случае с увеличением толщины внутреннего покрытия трубы скорость волны и напор увеличиваются по линейной зависимости, что отражено на рисунке 3.3.

На рисунке 3.4 представлен график зависимости скорости волны C от объемного содержания V и расположения волокон в футеровке двухслойной трубы.

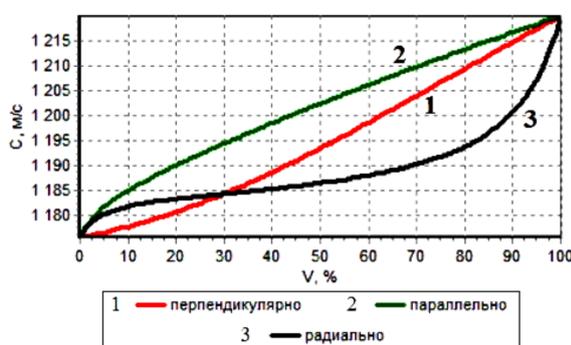


Рисунок 3.4 – График зависимости скорости волны C от объемного содержания V и расположения волокон в футеровке двухслойной трубы

На рисунке 3.5 представлен график зависимости напора H при движении жидкости в трубе от времени t при перпендикулярном расположении волокон по отношению к оси z ($V = 30\%$) при $t_c = 0$ с, $s = 0$. Расчеты показали, что существенных отличий в значениях напора H от рассматриваемых случаев расположения волокон для данной задачи не выявлено. В тоже время можно заметить о влиянии объемного содержания V и расположения волокон в футеровке двухслойной трубы на скорости волны C (рисунок 3.4).

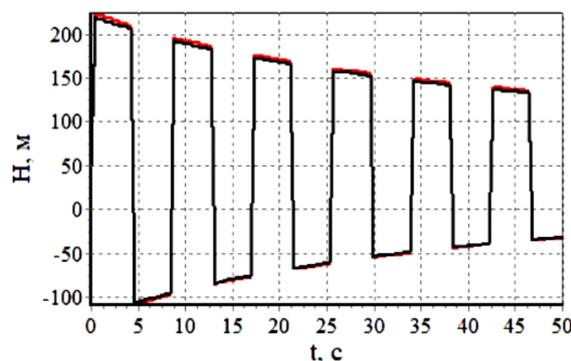


Рисунок 3.5 – График зависимости напора H от времени t при перпендикулярном расположении волокон ($V = 30\%$)

Заключение

Предложена методика определения параметров гидравлического удара (скорости волны, напора, расхода жидкости) при движении жидкостей в двухслойных трубах с внутренним покрытием, изотропным и из композита с разным расположением волокон в матрице композиционного материала при условии, что оси анизотропии совпадают с направлением волокон. Разработана компьютерная программа определения параметров гидроудара на основе метода характеристик. Показана необходимость проведения компьютерного расчета скорости, напора для оптимизации применяемых материалов труб и исключения гидравлических скачков давлений в трубопроводах с целью защиты от разрушений. Предложенная методика может применяться для новой технологии восстановления работоспособности трубопроводов путем вставки специального «чулка» (рукава) из синтетического войлока (композита).

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский, Н.Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах / Н.Е. Жуковский. – Москва: Гостехтеоретлитиздат, 1949. – 104 с.

2. Rahul, Kr. Garg. Analysis of Hydraulic Transients in a Reservoir-Valve-Pipeline Arrangement by Using Method of Characteristics (MOC) / Rahul Kr. Garg, Dr. Arun Kumar // International Conference Advancement in Technologies & its applications in Current Era (ICATACE-2018): Conference Paper, April 2018. – India. – 9 p.

3. Можаровский, В.В. Скорость волны при гидроударе и напряженно-деформированное состояние слоистых футерованных труб из ортотропных материалов / В.В. Можаровский, С.В. Киргинцева // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 44–51.

4. Можаровский, В.В. Влияние схем армирования трубы из композита на скорость волны при гидравлическом ударе / В.В. Можаровский, С.В. Киргинцева // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 21–25.

5. Можаровский, В.В. Влияние расположения волокон в трубе из композита на параметры гидравлического удара / В.В. Можаровский, С.В. Киргинцева // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 4 (57). – С. 30–35.

6. Wave celerity in hydraulic transients computation for cipp-rehabilitated pipes / F. Evangelista [et al.] // Int. J. Comp. Meth. and Exp. Meas. – 2020. – Vol. 8, № 4. – P. 326–340.

7. Water hammer Calculation Excel Sheet [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.coursehero.com/file/46340495/Water-Hammer-Calculationxsl/>. – Дата доступа: 15.05.2023.

Поступила в редакцию 24.06.2024.

Информация об авторах

Можаровский Валентин Васильевич – д.т.н., профессор
Киргинцева Светлана Викторовна – старший преподаватель

МОРФОЛОГИЯ И ФАЗОВЫЙ СОСТАВ УГЛЕРОДНЫХ ПОКРЫТИЙ, СФОРМИРОВАННЫХ НА ПОВЕРХНОСТИ ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ ЭТИЛЦЕЛЛЮЛОЗЫ И СЕРНОЙ КИСЛОТЫ

А.С. Руденков, А.В. Рогачев, М.А. Ярмоленко, Д.Г. Пилипцов, Ю.В. Никитюк

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

MORPHOLOGY AND PHASE COMPOSITION OF CARBON COATINGS FORMED ON THE SURFACE OF TWO-LAYER SYSTEM BASED ON ETHYL CELLULOSE AND SULFURIC ACID

A.S. Rudenkov, A.V. Rogachev, M.A. Yarmolenko, D.G. Piliptsov, Y.V. Nikityuk

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Определено влияние архитектуры и структуры двухслойной системы на основе этилцеллюлозы и серной кислоты, а также режимов формирования на морфологию и фазовый состав углеродных покрытий, сформированных на их поверхности. Показано, что углеродные слои, осажденные на поверхности двухслойной системы ЭЦ/ H₂SO₄ с более высоким соотношением Csp³ / Csp², также характеризуются более высоким соотношением Csp³ / Csp², по сравнению с углеродными слоями, сформированными на поверхности H₂SO₄ / ЭЦ.

Ключевые слова: углерод, серная кислота, этилцеллюлоза, морфология, фазовый состав.

Для цитирования: Морфология и фазовый состав углеродных покрытий, сформированных на поверхности двухслойной системы на основе этилцеллюлозы и серной кислоты / А.С. Руденков, А.В. Рогачев, М.А. Ярмоленко, Д.Г. Пилипцов, Ю.В. Никитюк // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 30–39. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_30. – EDN: RIERVT

Abstract. The influence of the architecture and structure of the two-layer system based on ethyl cellulose and sulfuric acid, as well as the formation modes, on the morphology and phase composition of carbon coatings formed on their surface is determined. It is shown that, due to the epitaxial nature of growth, the carbon layers deposited on the surface of the two-layer system EC / H₂SO₄ with a higher Csp³ / Csp² ratio are also characterized by a higher Csp³ / Csp² ratio, compared to the carbon layers formed on the surface of H₂SO₄ / EC.

Keywords: carbon, sulfuric acid, ethyl cellulose, morphology, phase composition.

For citation: Morphology and phase composition of carbon coatings formed on the surface of two-layer system based on ethyl cellulose and sulfuric acid / A.S. Rudenkov, A.V. Rogachev, M.A. Yarmolenko, D.G. Piliptsov, Y.V. Nikityuk // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 4 (61). – P. 30–39. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_30 (in Russian). – EDN: RIERVT

Введение

Применение современных вакуумных методов формирования наноструктурированных покрытий позволяет получить углеродные слои различного функционального назначения путем варьирования содержания sp³-, sp²- или sp¹-гибридизированных атомов углерода [1], а также путем введения в состав матрицы различных его аллотропных модификаций (фуллеренов, графена, углеродных нанотрубок и волокон) [2]–[4]. Природа прекурсора углерода, условия и режимы формирования в значительной степени влияют на физико-химические свойства осаждаемых углеродных покрытий [1]. Эффективными технологическими приемами управления фазовым составом и свойствами углеродных покрытий является их легирование и формирование на подслое из элементов различной природы [2],

[5], [6]. В частности, в работах [3], [5], [7] в качестве материала подслоев с целью синтеза фуллеренов, графена и углеродных слоев, содержащих фазы внедрения на основе базисных графеновых плоскостей, были использованы серосодержащие соединения. Также необходимо отметить, что серная кислота используется в процессе окислительной обработки углеродных волокон с целью химической модификации их поверхности [8]. При этом для синтеза углеродных волокон и нитей широко используется карбонизация производных целлюлозы [9].

Таким образом, разработка методики формирования углеродных слоев заданного фазового состава, которая бы сочетала подходы электрохимических методов карбонизации полимерных материалов и ионно-плазменные методы

осаждения наноструктурированных покрытий, является актуальной задачей.

Целью настоящей работы является определение морфологических особенностей и фазового состава углеродных покрытий, полученных из плазмы импульсного катодно-дугового разряда при различных режимах осаждения на поверхности двухслойных систем на основе этилцеллюлозы и серной кислоты, сформированных путем электронно-лучевого диспергирования исходных компонент. Применение серной кислоты с целью карбонизации осаждаемых из газовой фазы покрытий достаточно перспективно, поскольку низкие значения давления насыщенных паров препятствуют ее быстрому испарению в условиях технологического вакуума (10^{-3} Па) [10]. Это позволяет использовать кислоту в качестве мишени при электронно-лучевом диспергировании. Нагрев мишени будет сопровождаться генерацией потока молекул воды, H_2SO_4 и SO_3 . Предварительные исследования установили образование на подложках тонкого слоя вещества, интенсивно сорбирующего влагу из атмосферы воздуха при разгерметизации вакуумной камеры

1 Методика эксперимента

Покрытия формировали в вакууме в результате воздействия потока низкоэнергетических электронов на мишень с последующим нанесением углеродных слоев из плазмы импульсного катодно-дугового разряда. Давление остаточных газов в вакуумной камере перед осаждением покрытий составляло $\approx 4 \cdot 10^{-3}$ Па. Двухслойное покрытие на основе этилцеллюлозы и серной кислоты формировали в одном технологическом цикле без разгерметизации вакуумной камеры. В качестве материала мишеней были использованы порошки этилцеллюлозы (ЭЦ, N-100, CAS 9004-57-3, Sigma-Aldrich), серная кислота (H_2SO_4 , ОСЧ, ГОСТ 14262-78). Дополнительная очистка и сушка порошка ЭЦ перед нанесением покрытий не производилась. В качестве материала подложек для анализа средствами рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии (РФЭС), спектроскопии комбинационного рассеяния, атомно-силовой микроскопии были использованы кремниевые пластины; пластины NaCl – для исследования методами инфракрасной спектроскопии. Подложки перед нанесением подвергались стандартной процедуре очистки. Термообработку покрытий проводили в атмосфере воздуха при температуре $120^\circ C$ в течение 30 минут. В дальнейшем на поверхности двухслойных систем на основе ЭЦ и H_2SO_4 были сформированы углеродные слои с различной частотой следования импульсов источника углеродной плазмы (5 Гц, 10 Гц и 15 Гц) (3000 импульсов, напряжение разряда 350 В). Толщина полученных покрытий не превышала 250 нм.

Морфология поверхности сформированных покрытий была исследована методами атомно-силовой микроскопии (АСМ) при помощи микроскопа Solver Pro (NT-MDT, Россия), работающего в режиме полуконтакта (область сканирования – 5×5 мкм), а также средствами сканирующего электронного микроскопа GeminiSEM 360 (Carl Zeiss, Германия). Основными параметрами изображений АСМ, характеризующими морфологические особенности поверхности, являются: параметр оценки рельефа поверхности, вычисляемый как корень квадратный из среднего квадрата расстояний вершин неровностей профиля до его средней линии – Rms; среднее арифметическое отклонение всех точек профиля шероховатости от средней линии на длине оценки – Ra; диаметр, средняя высота и количество отдельных структурных образований (далее – зерен).

Определение молекулярной структуры покрытий осуществлялось при помощи инфракрасного (ИК) Фурье спектрофотометра Vertex-70 (Bruker) с диапазоном сканирования $4000\text{--}300\text{ см}^{-1}$ и разрешением 4 см^{-1} .

Анализ химического состава и структуры химических связей трехслойных покрытий осуществлялся методами рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии (РФЭС) средствами спектрометра PHI Quantera (Япония) в результате возбуждения исследуемого вещества $K\alpha$ -излучением алюминия при следующих параметрах: энергия кванта – 1486,6 эВ, мощность – 250 Вт.

Поверхностная энергия покрытий была определена на основании измерений краевых углов смачивания поверхности глицерином и дистиллированной водой фиксированного объема (5 мкл). Анализ изображения капли осуществлялся с помощью программно-аппаратного комплекса «Капля-2».

Изучение фазового состава покрытий осуществлялось средствами спектроскопии комбинационного рассеяния при помощи спектрометра Senterra (Bruker, Германия) при длине волны возбуждающего излучения 532 нм с мощностью 5 мВт.

2 Результаты и их обсуждение

Средствами РФЭС установлено, что двухслойные покрытия ЭЦ / H_2SO_4 содержат в 2 раза больше серы (1,6 ат. %) по сравнению с H_2SO_4 / ЭЦ покрытиями (0,8 ат. %).

Независимо от последовательности формирования слоев, ИК-спектры двухслойного покрытия на основе ЭЦ и H_2SO_4 после термической обработки при $120^\circ C$ в течение 30 мин практически идентичны (рисунок 2.1).

После термообработки двухслойная система теряет способность к интенсивному поглощению влаги из атмосферы воздуха. На это указывают малые значения оптической плотности полос в области валентных колебаний ОН-групп

(3600–3000 см⁻¹). Взаимодействие слоя этилцеллюлозы с серной кислотой не приводит к полной карбонизации молекул. На это указывают полосы поглощения в области валентных и деформационных колебаний С–Н связей (3000–2800 см⁻¹), (1500–1300 см⁻¹) [11]. Полосы поглощения при 1109 и 616 см⁻¹ характеризуются наиболее высоким значением оптической плотности. В области волновых чисел (1200–1000 см⁻¹) проявляются валентные колебания С–О, S=O связей. При этом на присутствие в тонком слое кислородсодержащих групп указывает поглощение при 1720 см⁻¹ (валентные колебания С=О). Однако поглощение при 616 см⁻¹ не может быть соотнесено с присутствием в молекулярной структуре двухслойной системы С–О связей. В данной области ИК-спектра могут проявляться серосодержащие связи. Таким образом, можно предположить, что наиболее интенсивными в ИК-спектре подобной двухслойной системы являются полосы поглощения серосодержащих соединений.

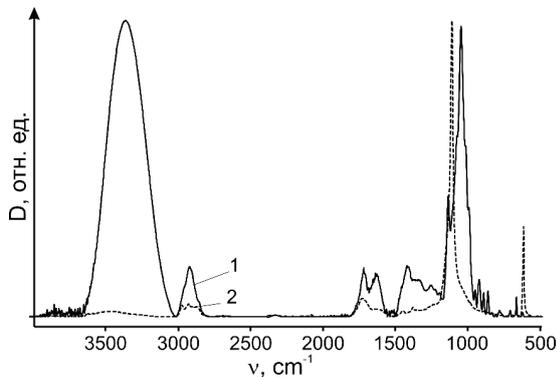


Рисунок 2.1 – ИК-спектры покрытий на основе ЭЦ и H₂SO₄ (1 – покрытие на основе этилцеллюлозы; 2 – двухслойная система ЭЦ и H₂SO₄ после термообработки)

Согласно данным сканирующей электронной микроскопии трехслойные покрытия ЭЦ/H₂SO₄/C характеризуются более развитой морфологией, чем покрытия H₂SO₄/ЭЦ/C (рисунок 2.2), что, по всей видимости, вызвано воздействием летучих продуктов испарения серной кислоты на ранее сформированный слой этилцеллюлозы. Показано, что с увеличением частоты следования импульсов источника углеродной плазмы количество дефектов на поверхности также возрастает, что, вероятно, обусловлено увеличением температуры подложки. Известно [1], что с увеличением частоты следования импульсов происходит увеличение температуры подложки и рост плотности потока углеродной плазмы.

Результаты АСМ (рисунок 2.3) подтверждают данные СЭМ, свидетельствующие о более высокой дисперсности углеродных слоев, сформированных на покрытии ЭЦ/H₂SO₄.

Установлено, что покрытия ЭЦ/H₂SO₄ характеризуются большей субшероховатостью Rms

и в 7 раз большим числом отдельных структурных образований по сравнению с покрытиями H₂SO₄/ЭЦ (таблица 2.1).

Таблица 2.1 – Морфологические особенности двухслойных покрытий на основе этилцеллюлозы, серной кислоты и углеродных покрытий, сформированных на их поверхности (площадь 5×5 мкм)

Покрытие	Частота следования импульсов, 5 Гц	Средняя высота, нм	Rms, нм	Плотность зерен, шт.	Средний диаметр зерен, нм
H ₂ SO ₄ /ЭЦ	–	6,8	1,1	93	54
ЭЦ/H ₂ SO ₄	–	21,0	6,1	691	85
H ₂ SO ₄ /ЭЦ/C	5	16,1	4,4	55	119
	10	46,0	6,3	75	92
	15	74,6	13,6	35	128
ЭЦ/H ₂ SO ₄ /C	5	20,6	4,8	80	59
	10	29,5	6,3	93	81
	15	63,2	10,6	41	137

Вышеуказанные особенности сохраняются и для трехслойных систем с верхним углеродным слоем. При этом общей закономерностью является увеличение субшероховатости Rms покрытий с увеличением частоты следования импульсов. Наибольшей плотностью зерен на площади сканирования из рассматриваемых трехслойных систем обладают покрытия ЭЦ/H₂SO₄/C, у которых верхний углеродный слой сформирован с частотой следования импульсов равной 10 Гц.

Показано, что у покрытий ЭЦ/H₂SO₄ краевой угол смачивания для обеих жидкостей существенно ниже, чем в случае H₂SO₄/ЭЦ (таблица 2.2).

Таблица 2.2 – Значения краевого угла смачивания и поверхностной энергии и ее составляющих

Образец	H ₂ SO ₄ /ЭЦ	ЭЦ/H ₂ SO ₄
Угол смачивания (глицерин), градусы	68,9	53,1
Угол смачивания (вода), градусы	90,9	57,7
Дисперсионная составляющая, мДж/м ²	40,5	15,0
Полярная составляющая, мДж/м ²	0,7	27,9
Поверхностная энергия, мДж/м ²	41,3	42,9

Основной вклад в значение поверхностной энергии покрытий H₂SO₄/ЭЦ вносит дисперсионная составляющая, в то время как в случае ЭЦ/H₂SO₄ полярная составляющая преобладает, что свидетельствует о наличии химических соединений с сильно полярными связями у данного типа покрытий.

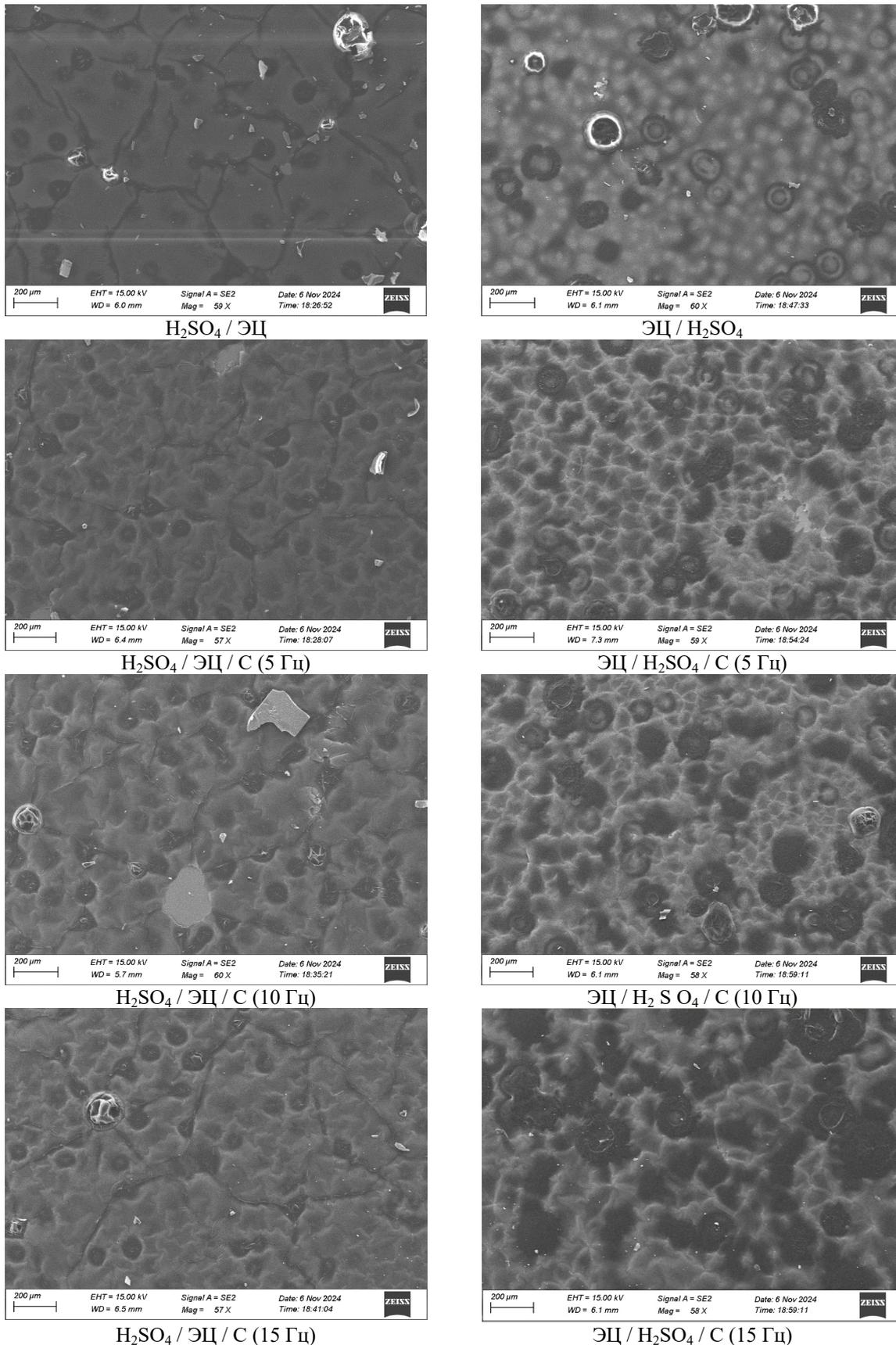


Рисунок 2.2 – СЭМ изображения покрытий без верхнего углеродного слоя и с углеродным слоем, сформированным при различной частоте следования импульсов

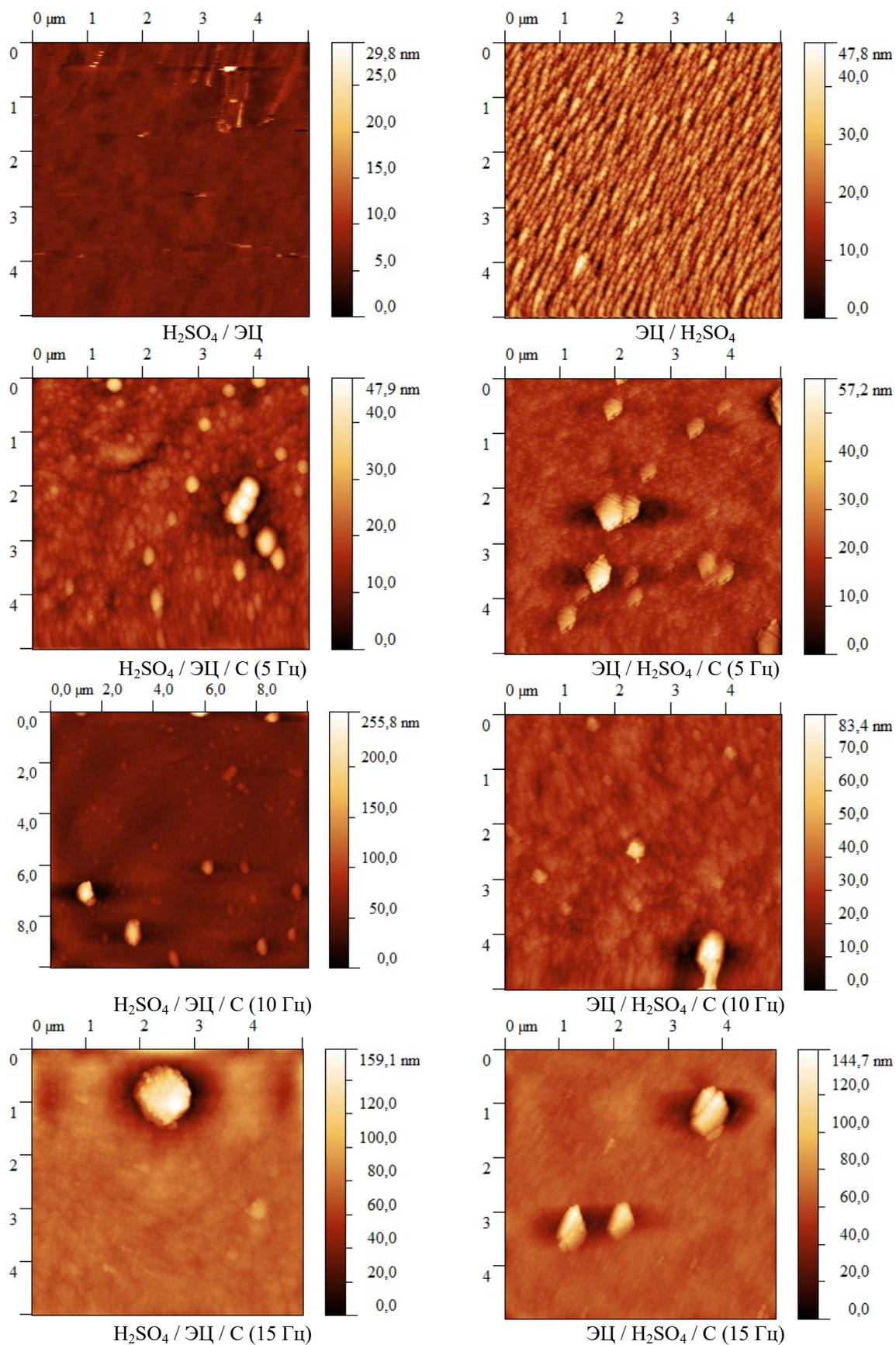


Рисунок 2.3 – АСМ изображения покрытий без верхнего углеродного слоя и с углеродным слоем, сформированным при различной частоте следования импульсов

В настоящей работе анализ спектров комбинационного рассеяния осуществлялся путем разложения исходных спектров на две гауссианы. В общем случае выделяют следующую двухфазную модель углеродного пика: первая фаза соответствует sp^2 -матрице, включающей в себя sp^3 -гибридизированные атомы углерода, и характеризуется D-пиком между 1300 см^{-1} и 1500 см^{-1} ; вторая фаза обусловлена sp^2 -кластерами и определяется при помощи G-пика около 1580 см^{-1} [12]–[14]. Также необходимо отметить, что D-пик обусловлен модой радиальных колебаний sp^2 -гибридизированных атомов углерода только в кольцах, а не в цепочках [14], [15].

Установлено, что углеродные слои, сформированные на двухслойных системах $\text{H}_2\text{SO}_4/\text{ЭЦ}$ и $\text{ЭЦ}/\text{H}_2\text{SO}_4$, характеризуются меньшими значениями соотношения I_D/I_G (таблица 2.3), по сравнению с данными КР-спектроскопии однокомпонентных углеродных покрытий, композиционных металл-углеродных покрытий и покрытий легированными неметаллами, полученными ранее [16]–[18].

Снижение интенсивности D-пика может быть обусловлено аморфизацией sp^2 -матрицы с одновременным ростом содержания расположенных в ней sp^3 -гибридизированных атомов [19]. Поскольку с увеличением содержания sp^3 -фазы углеродные кольца разрушаются на сегменты с цепочками $\text{C}=\text{C}$ групп, D-пик, вызванный модами ароматических sp^2 -колец, исчезает. Помимо этого, снижение интенсивности D-пика может быть обусловлено увеличением размера отдельных зерен [15], что, в целом, согласуется с результатами статистической обработки данных атомно-силовой спектроскопии.

D-пик спектров покрытий $\text{H}_2\text{SO}_4/\text{ЭЦ}$ сильно смещен к 1500 см^{-1} по сравнению с D-пиком $\text{ЭЦ}/\text{H}_2\text{SO}_4$ покрытий. Помимо этого, такое смещение в разной степени характерно для всех трехслойных систем, рассматриваемых в настоящей работе (наиболее выражено для углеродных слоев, сформированных на двухслойных

системах $\text{H}_2\text{SO}_4/\text{ЭЦ}$ и $\text{ЭЦ}/\text{H}_2\text{SO}_4$ при частоте 5 Гц и 15 Гц соответственно). При этом ширина G-пика $\text{H}_2\text{SO}_4/\text{ЭЦ}$ (105 см^{-1}) меньше, чем ширина G-пика (117 см^{-1}) $\text{ЭЦ}/\text{H}_2\text{SO}_4$. Совокупность данных фактов, согласно [20], может быть обусловлена более высокой степенью упорядоченности графитовой фазы и образованием нанокристаллического графита вследствие окисления и интенсивной графитизации карбонизированного слоя этилцеллюлозы, вызванных последующей термообработкой при температуре 120°C на воздухе.

Также необходимо отметить, что все полученные трехслойные системы характеризуются высокой степенью упорядоченности sp^2 -кластеров, о чем свидетельствует относительно небольшая ширина G-пика (для всех образцов $100\text{--}110\text{ см}^{-1}$).

Средствами РФЭС установлены особенности химического и фазового состава двухслойных систем на основе $\text{H}_2\text{SO}_4/\text{ЭЦ}$ и $\text{ЭЦ}/\text{H}_2\text{SO}_4$ (таблица 2.4) и углеродных покрытий, сформированных на их поверхности с различной частотой следования импульсов генератора углеродной плазмы (таблица 2.5).

C1s пик РФЭС расположен на интервале $280\text{--}290\text{ эВ}$ и раскладывается при помощи функции Лоренца – Гаусса на следующие компоненты (рисунки 2.4, 2.5): Csp^2 – пик с энергией связи $\sim 284,6\text{ эВ}$; Csp^3 – пик с энергией связи $\sim 285,4\text{ эВ}$; $\text{C}=\text{S}$ – пик с энергией связи $\sim 287\text{ эВ}$, $\text{C}=\text{O}$ – пик с энергией связи $\sim 287,5\text{ эВ}$. COOH/COOR – пик с энергией связи $288,3\text{--}289,4\text{ эВ}$ [5], [21]. S2p пик характеризуется наличием следующих компонентов (рисунок 2.4): спин-орбитальные составляющие $\text{S}2p_{3/2}$ и $\text{S}2p_{1/2}$ вблизи $163,7\text{ эВ}$ и $164,8\text{ эВ}$ соответственно; SO_3^{2-} – пик с энергией связи $167,4\text{ эВ}$; SO_4^{2-} [5], [7], [22], [23]. Поскольку метод РФЭС чувствителен только к поверхностному слою [24], для углеродных слоев, сформированных на поверхности двухслойных систем на основе этилцеллюлозы и серной кислоты, S2p-пик детектировать не удалось.

Таблица 2.3 – Параметры КР-спектров двухслойных систем на основе этилцеллюлозы и серной кислоты, а также углеродных покрытий, сформированных на их поверхности

Покрытие	Частота следования импульсов, Гц	D-пик		G-пик		I_D/I_G
		Положение, см^{-1}	Ширина, см^{-1}	Положение, см^{-1}	Ширина, см^{-1}	
$\text{H}_2\text{SO}_4/\text{ЭЦ}$	–	1454	327	1581	105	0,37
$\text{ЭЦ}/\text{H}_2\text{SO}_4$	–	1381	286	1581	117	0,29
$\text{H}_2\text{SO}_4/\text{ЭЦ}/\text{C}$	5	1461	275	1580	110	0,42
	10	1437	283	1578	108	0,34
	15	1441	280	1576	103	0,30
$\text{ЭЦ}/\text{H}_2\text{SO}_4/\text{C}$	5	1438	269	1577	110	0,37
	10	1422	284	1576	107	0,31
	15	1471	249	1581	107	0,27

Таблица 2.4 – Статистическая обработка результатов РФЭС двухслойных систем на основе этилцеллюлозы и серной кислоты

Покрытие	Пики РФЭС	Тип связи	Пик, эВ ± 0,3 эВ	Ширина, эВ	Доля площади, %	C_{sp^3} / C_{sp^2}	$C = S / C_{sp^3} + C_{sp^2}$	$S / S-O$
$H_2SO_4 / ЭЦ$	C1s	C_{sp^2}	284,6	1,2	55,3	0,63	0,068	0,19
		C_{sp^3}	285,5	2,0	34,9			
		C = S	286,9	1,4	6,1			
		COOH / COOR	288,9	1,3	3,7			
	S2p	$Sp^{3/2}$	163,4	1,1	4,4			
		$Sp^{1/2}$	164,9	1,7	11,8			
		SO_3	167,5	1,7	36,4			
		SO_4	168,8	1,8	47,4			
ЭЦ / H_2SO_4	C1s	C_{sp^2}	284,6	1,1	44,2	1,1	0,072	5,3
		C_{sp^3}	285,2	1,5	48,3			
		C = S	286,9	1,7	6,7			
		COOH / COOR	288,5	0,9	0,8			
	S2p	$Sp^{3/2}$	163,5	1,4	47,6			
		$Sp^{1/2}$	164,6	1,8	36,5			
		SO_3	167,4	1,4	5,5			
		SO_4	169,2	2,3	10,4			

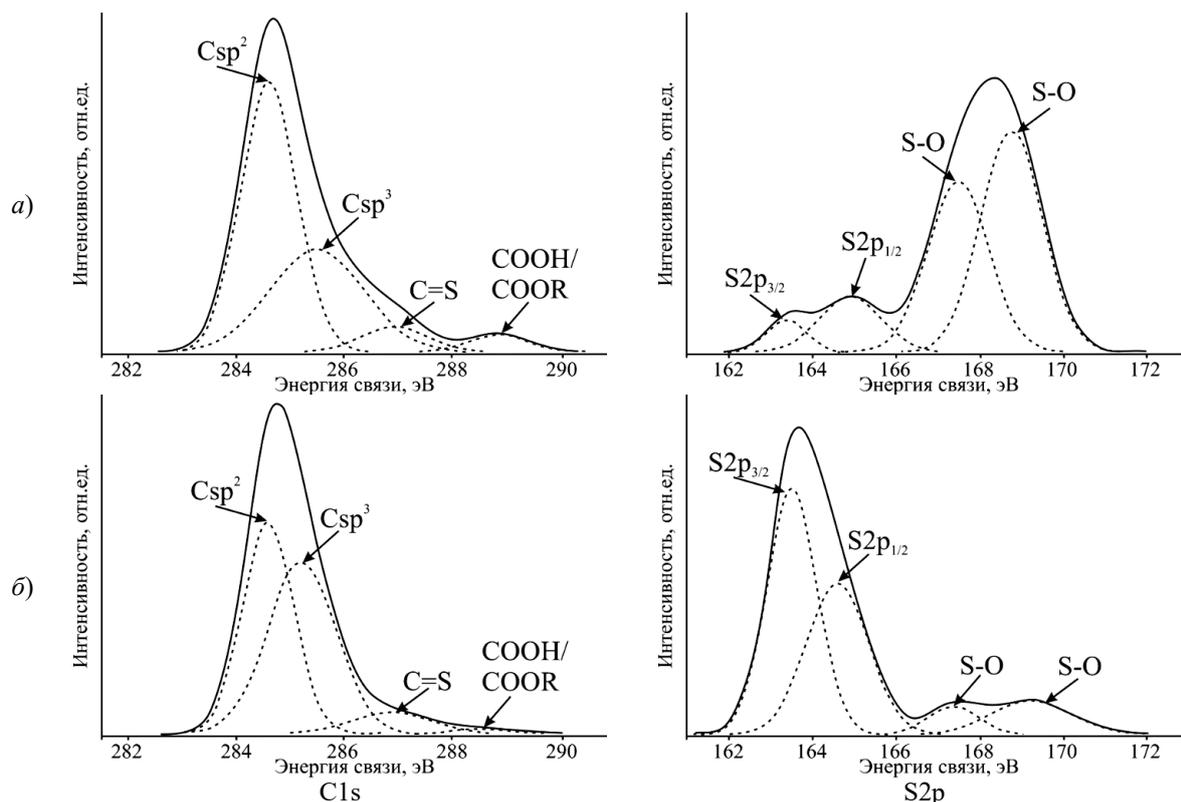


Рисунок 2.4 – Результаты РФЭС двухслойных покрытий: а) $H_2SO_4 / ЭЦ$; б) $ЭЦ / H_2SO_4$

Двухслойные системы $\text{ЭЦ} / H_2SO_4$ характеризуются более высоким соотношением C_{sp^3} / C_{sp^2} по сравнению с покрытиями $H_2SO_4 / \text{ЭЦ}$, что, вероятно, обусловлено более интенсивной карбонизацией при взаимодействии осаждаемых фрагментов H_2SO_4 с ранее сформированным слоем этилцеллюлозы с образованием широкого спектра различных аллотропных модификаций углерода. В частности, авторы [21] соотносят

окисление и образование «аморфного» графена с C_{sp^3} составляющей C1s пика РФЭС. С другой стороны, более высокое значение доли интегральной площади C_{sp^2} составляющей C1s пика РФЭС, а значит более низкое значение соотношения C_{sp^3} / C_{sp^2} , покрытий $H_2SO_4 / \text{ЭЦ}$ обусловлено более интенсивным окислением и графитизацией слоя целлюлозы вследствие термообработки.

Также необходимо отметить, что S2p-пик ЭЦ / H₂SO₄ характеризуется более высокими значениями долей интегральной площади компонентов, соответствующих S2p_{3/2} и S2p_{1/2}. Вышеуказанные составляющие S2p-пика РФЭС, согласно [5], обусловлены внедрением атомов серы в матрицу на основе sp²-гибридизированных атомов углерода. Кроме этого, авторы [22] соотносят компонент около 163,6 эВ с C-S-C связями.

Наличие химических связей атомов серы с атомами углерода также подтверждается выделением C = S составляющей в составе C1s пика. Однако, значения долей интегральной площади данного компонента C1s пика РФЭС обоих видов

двухслойных покрытий на основе целлюлозы и серной кислоты практически равны, что позволяет сделать вывод о том, что сера присутствует преимущественно в виде оксидов (покрытие H₂SO₄ / ЭЦ) либо в химически несвязанном состоянии (покрытие ЭЦ / H₂SO₄).

Результаты РФЭС углеродных покрытий (рисунок 2.5), сформированных на поверхности двухслойных систем на основе этилцеллюлозы и серной кислоты (таблица 2.5), свидетельствуют об увеличении соотношения Csp³ / Csp² с увеличением частоты следования импульсов генератора углеродной плазмы и согласуются с результатами КР-спектроскопии.

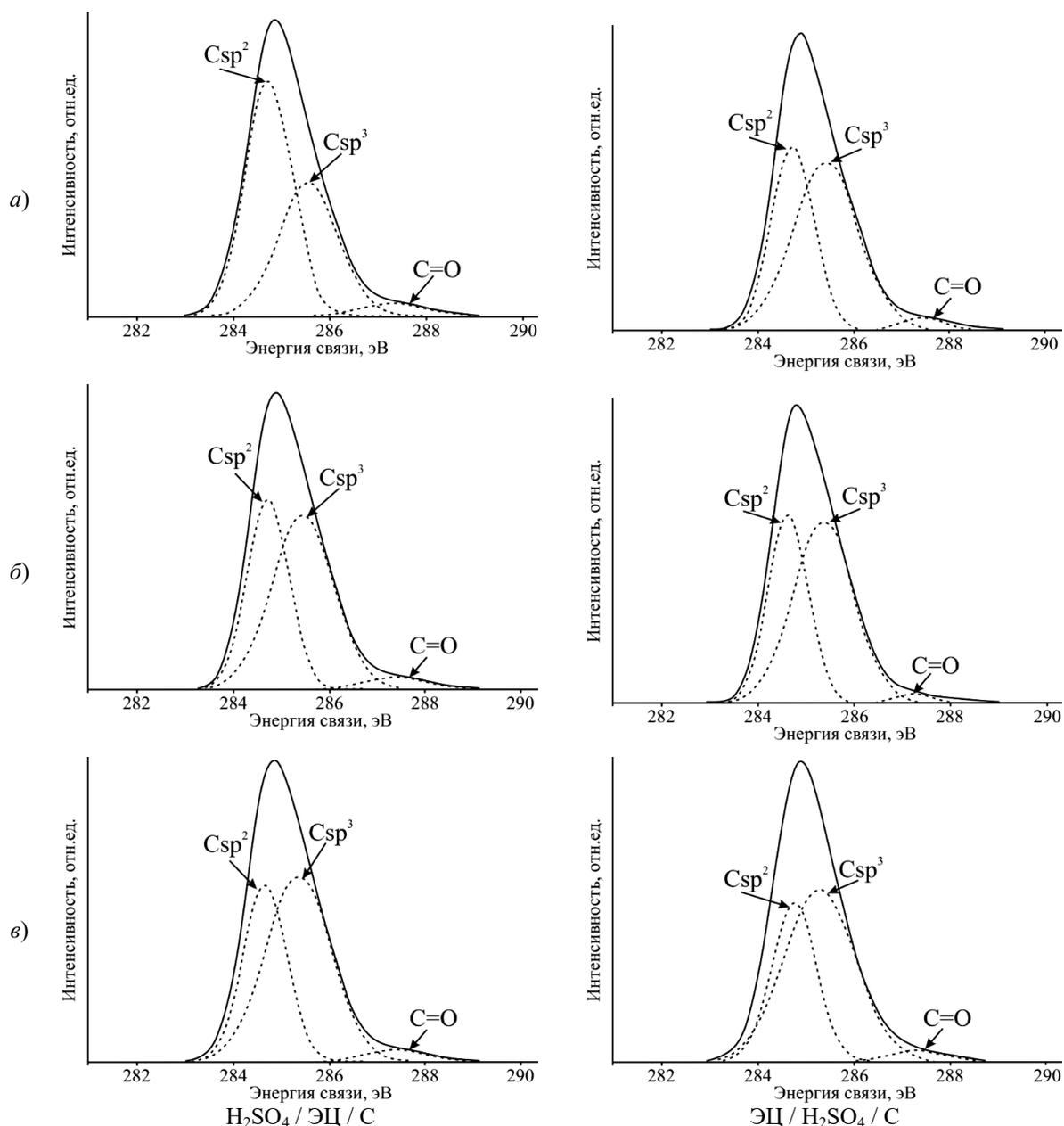


Рисунок 2.5 – Результаты РФЭС углеродных покрытий, сформированных на поверхности двухслойных систем на основе этилцеллюлозы и серной кислоты с различной частотой следования импульсов: а) 5 Гц; б) – 10 Гц; в) 15 Гц

Таблица 2.5 – Статистическая обработка результатов РФЭС углеродных покрытий, сформированных на поверхности двухслойных систем на основе этилцеллюлозы и серной кислоты

Покрытие	Частота следования импульсов, Гц	Пики РФЭС	Тип связи	Пик, эВ ± 0,3 эВ	Ширина, эВ	Доля площади, %	Csp ³ / Csp ²
H ₂ SO ₄ / ЭЦ / С	5	C1s	Csp ²	284,7	1,2	55,9	0,72
			Csp ³	285,6	1,5	40,1	
			C = O	287,3	1,5	4,0	
	10	C1s	Csp ²	284,7	1,0	40,4	1,38
			Csp ³	285,4	1,6	55,8	
			C = O	287,4	1,5	3,9	
	15	C1s	Csp ²	284,6	1,1	37,5	1,58
			Csp ³	285,3	1,6	59,3	
			C = O	287,4	1,4	3,2	
ЭЦ / H ₂ SO ₄ / С	5	C1s	Csp ²	284,7	1,0	39,7	1,44
			Csp ³	285,4	1,6	57,3	
			C = O	287,4	1,1	3,1	
	10	C1s	Csp ²	284,6	1,0	39,3	1,49
			Csp ³	285,4	1,5	58,5	
			C = O	287,2	1,0	2,2	
	15	C1s	Csp ²	284,8	1,1	35,4	1,74
			Csp ³	285,3	1,7	61,7	
			C = O	287,3	1,3	2,9	

Углеродные слои, осажденные на поверхности двухслойной системы ЭЦ / H₂SO₄ с более высоким исходным соотношением Csp³ / Csp², также характеризуются более высоким соотношением Csp³ / Csp², по сравнению с углеродными слоями, сформированными на H₂SO₄ / ЭЦ. Данный факт, по-видимому, обусловлен влиянием на фазовый состав ранее полученных двухслойных систем на основе серной кислоты и целлюлозы.

Таким образом, использование двухслойных систем на основе этилцеллюлозы и серной кислоты позволяет управлять фазовым составом осаждаемых на их поверхности углеродных слоев.

Выводы

Установлены особенности морфологии и фазового состава углеродных покрытий, осажденных на двухслойных подложках на основе этилцеллюлозы и серной кислоты. Показано, что при электронно-лучевом диспергировании серной кислоты и этилцеллюлозы формируются карбонизированные слои. Последующий отжиг при температуре 120° С приводит к их графитизации. Методами РФЭС и КР спектроскопии установлено, что степень графитизации покрытий H₂SO₄ / ЭЦ, в сравнении с покрытиями ЭЦ / H₂SO₄, существенно выше. Полученные таким образом двухслойные системы оказывают существенное влияние на фазовый состав углеродных покрытий, осаждаемых из плазмы импульсного катодно-дугового разряда. Углеродные слои, осажденные на поверхности двухслойной системы ЭЦ / H₂SO₄ с более высоким соотношением

Csp³ / Csp² также характеризуются более высоким соотношением Csp³ / Csp² по сравнению с углеродными слоями, сформированными на поверхности H₂SO₄ / ЭЦ. Таким образом, осаждение карбонизированных подслоев на основе целлюлозы и серной кислоты с различной степенью их графитизации является эффективным технологическим приемом управления фазовым составом углеродных покрытий, формируемых из плазмы импульсного катодно-дугового разряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Композиционные углеродные покрытия, осажденные из импульсной катодной плазмы / Д.Г. Пилипцов, А.С. Руденков, П.А. Лучников, А.В. Рогачев, Цзян Сяо Хун, Чжоу Бин. – Москва: Радиотехника, 2020. – 283 с.
2. Nitrogen and Sulfur Co-Doped Graphene as Efficient Electrode Material for L-Cysteine Detection / C. Varodi [et al.] // Chemosensors. – 2021. – Vol. 9. – P. 146–173.
3. Fullerene-like CS_x: A first-principles study of synthetic growth / C. Goyenola [et al.] // Chemical Physics Letters. – 2011. – Vol. 506. – P. 86–91.
4. Rogala-Wielgus, D. Preparation and properties of composite coatings, based on carbon nanotubes, for medical applications / D. Rogala-Wielgus, A.j Zieliński // Carbon Letters. – 2024. – Vol. 34. – P. 565–601.
5. Reactive sputtering of CS_x thin solid films using CS₂ as precursor / H. Hogberg [et al.] // Vacuum. – 2020. – Vol. 182. – Article 109775.
6. Synthesis of diamond-like carbon film on copper and titanium interlayer by vacuum cathode

arc evaporation / B. Zhou, Xiaohong Jiang, Zhubo Liu, A.V. Rogachev, Ruiqi Shen, D.G. Piliptsov // *Applied Mechanics and Materials*. – 2012. – Vol. 189. – P. 167–171.

7. *Nitrogen and Sulfur Co-Doped Graphene as Efficient Electrode Material for L-Cysteine Detection* / C. Varodi [et al.] // *Chemosensors*. – 2021. – Vol. 9. – P. 146–173.

8. Сидорина, А.И. Модификация поверхности углеродных армирующих наполнителей для полимерных композиционных материалов электрохимической обработкой / А.И. Сидорина // *Труды ВИАМ*. – 2022. – № 4. – С. 61–75.

9. Колобков, А.С. Развитие технологий получения углеродных волокон / А.С. Колобков // *Труды ВИАМ*. – 2022. – № 8. – С. 123–131.

10. Амелин, А.Г. Технология серной кислоты: учебное пособие для вузов / А.Г. Амелин. – Москва: Химия. – 1983. – 360 с.

11. Беллами, А. Инфракрасные спектры сложных молекул / А. Беллами. – Москва: Мир, 1963. – 592 с.

12. *Long-term stability of hydrogenated DLC coatings: Effects of aging on the structural, chemical and mechanical properties* / M. Cloutier [et al.] // *Diamond and Related Materials*. – 2014. – Vol. 48. – P. 65–72.

13. *Ferrari, A.C. Determination of bonding in diamond-like carbon by Raman spectroscopy* / A.C. Ferrari // *Diamond and Related Materials*. – 2002. – Vol. 11. – P. 1053–1061.

14. *Resonant Raman scattering of amorphous carbon and polycrystalline diamond films* / J. Wagner [et al.] // *Physical Review B*. – 1989. – Vol. 40. – P. 1817–4107.

15. *Ferrari, A.C. Interpretation of Raman spectra of disordered and amorphous carbon* / A.C. Ferrari, J. Robertson // *Physical Review B*. – 2000. – Vol. 61. – P. 4095–4107.

16. Влияние ионного азотирования на фазовый состав, структуру и свойства углеродных покрытий / А.С. Руденков, А.В. Рогачев, Д.Г. Пилипцов, Н.Н. Федосенко, Сянь Хун Джанг // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2016. – № 1 (26). – С. 37–42.

17. Руденков, А.С. Морфология и фазовый состав легированных кремнием углерод-титановых покрытий / А.С. Руденков, А.В. Рогачев, Д.Г. Пилипцов // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2021. – № 3 (48). – С. 37–41.

18. *Морфология и фазовый состав кремний-углеродных покрытий* / А.С. Руденков, А.В. Рогачев, Д.Г. Пилипцов, А.Н. Купо, А.С. Побыха,

П.А. Лучников // «Наноматериалы и наноструктуры – XXI век». – 2019. – Т. 10, № 1. – С. 35–42.

19. *Ultraviolet Raman spectroscopy characterizes chemical vapor deposition diamond film growth and oxidation* / R.W. Bormett [et al.] // *Journal of Applied Physics*. – 1995. – Vol. 77. – P. 5916–5923.

20. *Raman spectroscopy on amorphous carbon films* / J. Shwan [et al.] // *Journal of Applied Physics*. – 1996. – Vol. 80. – P. 440–447.

21. *Chen, X. A review on C1s XPS-spectra for some kinds of carbon materials* / X. Chen, X. Wang, D. Fang // *Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures*. – Vol. 28. – P. 1048–1058.

22. *Pettifer, Z.E. Reconstruction of pyrrhotite fracture surfaces* / Z.E. Pettifer, J.S. Quinton, S.L. Harmer // *Minerals Engineering*. – 2022. – Vol. 184. – Article 107666.

23. *Использование эффекта дифференциальной зарядки в методе РФЭС для установления природы поверхностных соединений, образующихся при взаимодействии с SO_x модельного катализатора Pt / (BaCo₃ + CeO₂)* / М. Ю. Смирнов [и др.] // *Кинетика и катализ*. – 2011. – Т. 52. – С. 605–614.

24. Юдин, А.Л. Рентгеновская фотоэлектронная спектроскопия: учеб.-метод. пособие / А.Л. Юдин. – Кемерово, 2004. – 47 с.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках НИР «Разработка основ комбинированной технологии формирования планарно-структурированных углеродных покрытий из импульсной катодной углеродной плазмы и продуктов лазерного диспергирования полимерных материалов», комплексное 1.12 задание «Синтез нанокomпозиционных пленочных структур, формирование материалов с высокими функциональными свойствами с использованием электронно-лучевых, ионных, лазерных методов обработки» ГПНИ «Фотоника и электроника для инновации», подпрограмма «Фотоника и ее применения».

Поступила в редакцию 02.09.2024.

Информация об авторах

Руденков Александр Сергеевич – к.ф.-м.н., доцент
Рогачев Александр Владимирович – чл.-корр. НАН Беларуси, д.х.н., профессор
Ярмоленко Максим Анатольевич – д.т.н., профессор
Пилипцов Дмитрий Геннадьевич – к.т.н., доцент
Никитюк Юрий Валерьевич – к.ф.-м.н., доцент

НЕРЕГУЛЯРИЗУЕМОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОЙ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В \mathbb{R}^4

А.И. Басик¹, Е.В. Грицук², Д.В. Галуц¹

¹Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

²Брестский государственный технический университет

IRREGULARIZABILITY OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR ONE BIHARMONIC SYSTEM IN \mathbb{R}^4

A.I. Basik¹, E.V. Gricuk², D.V. Haluts¹

¹Brest State A.S. Pushkin University

²Brest State Technical University

Аннотация. Линейную однородную систему p дифференциальных уравнений первого порядка в \mathbb{R}^d назовем бигармонической, если каждая компонента произвольного ее непрерывно дифференцируемого решения удовлетворяет уравнению $\Delta^2 u = 0$, где Δ – оператор Лапласа в \mathbb{R}^d . В настоящей статье приводится пример бигармонической системы в \mathbb{R}^4 , не являющейся ни четырехмерным аналогом системы Коши – Римана, ни эллиптической псевдосимметрической системой. Для этой системы рассматривается задача Дирихле в произвольной ограниченной области с достаточно гладкой границей. Доказывается, что в некоторой точке границы ранг матрицы Лопатинского задачи Дирихле не является максимальным. Также показывается, что в этой точке предельная задача для рассматриваемой задачи Дирихле не является однозначно разрешимой.

Ключевые слова: эллиптическая система, задача Дирихле, регуляризуемая краевая задача, условие Лопатинского.

Для цитирования: Басик, А.И. Нерегуляризуемость задачи Дирихле для одной бигармонической системы в \mathbb{R}^4 / А.И. Басик, Е.В. Грицук, Д.В. Галуц // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 40–44. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_40. – EDN: UESTUB

Abstract. A linear homogeneous system of p first order differential equations in \mathbb{R}^d is called biharmonic if each component of its arbitrary continuously differentiable solution satisfies the equation $\Delta^2 u = 0$, where Δ is the Laplace operator in \mathbb{R}^d . In this article we give an example of a biharmonic system in \mathbb{R}^4 , which is neither a four-dimensional analogue of the Cauchy – Riemann system nor an elliptic pseudo-symmetric system. For this system we consider the Dirichlet problem in an arbitrary bounded region with a sufficiently smooth boundary. It is proved that at some point of the boundary the rank of the Lopatinski matrix of the Dirichlet problem is not maximal. It is also shown that at this point the limit problem for the considered Dirichlet problem is not uniquely solvable.

Keywords: elliptic system, Dirichlet problem, regularizable boundary value problem, Lopatinski condition.

For citation: Basik, A.I. Irregularizability of the Dirichlet problem for one biharmonic system in \mathbb{R}^4 / A.I. Basik, E.V. Gricuk, D.V. Haluts // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 4 (61). – P. 40–44. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_40 (in Russian). – EDN: UESTUB

Введение

Пусть в пространстве \mathbb{R}^4 задана эллиптическая система четырех дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\sum_{j=1}^4 A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} = 0, \quad (0.1)$$

где A_j ($j=1,2,3,4$) – заданные действительные квадратные матрицы четвертого порядка, $U = (u_1(x), \dots, u_4(x))^T$ – искомая четырехкомпонентная вектор-функция, $x = (x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4$, T означает транспонирование.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ – ограниченная область, границей которой является достаточно гладкая поверхность Ляпунова $\partial\Omega$. Рассмотрим краевую задачу отыскания решения $U(x)$ системы (0.1) в области Ω , удовлетворяющего граничным условиям

$$\mathfrak{B} \left(y, \frac{\partial}{\partial x} \right) \Big|_{\Omega \ni x \rightarrow y} = f(y) \quad (y \in \partial\Omega). \quad (0.2)$$

Здесь $f: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ – заданный двухкомпонентный вектор-столбец; \mathfrak{B} – матричный, размера 2×4 , граничный оператор, состоящий из скалярных линейных операторов, «полиномиальных относительно нормали» к $\partial\Omega$ [1].

Как показали исследования ряда ученых, граничный оператор для эллиптической системы нельзя задавать произвольно. Он должен в некотором смысле дополнять свойства решений системы. Для эллиптических систем дифференциальных уравнений условие дополнительности граничных условий было получено Я.Б. Лопатинским [2]; его принято называть условием регуляризуемости краевой задачи, а задачу, для которой это условие выполнено, регуляризуемой. Известно [1], [3], что регуляризуемость краевой задачи является необходимым и достаточным условием нетеровости оператора, отвечающего этой задаче и действующего в определенных банаховых пространствах.

В свое время был неожиданным тот факт, что для системы Фьютера (системы простейшей структуры в \mathbb{R}^4 по терминологии М.З. Соломяка) любые граничные условия не могут образовывать вместе с системой регуляризуемую краевую задачу [4].

В.С. Виноградов выделил в пространстве \mathbb{R}^4 класс эллиптических псевдосимметрических систем четырех уравнений первого порядка [5]. Для (0.1) это означает, что $A_1 = E$ – единичная, а $A_j = -A_j^T$ при $j = 2, 3, 4$ – кососимметрические матрицы четвертого порядка. В работе [5] показывается, что, в случае когда (0.2) есть оператор умножения на постоянную матрицу размера 2×4 (задача Римана – Гильберта), однородная краевая задача (0.1), (0.2) имеет бесконечно много линейно независимых решений. Позже было доказано отсутствие внутренних регуляризуемых краевых задач для эллиптических псевдосимметрических систем [6].

В статье [7] определяется понятие многомерного аналога системы Коши – Римана. Применительно к рассматриваемому случаю, система (0.1) называется четырехмерным аналогом системы Коши – Римана (кратко ЧКР-системой), если каждая компонента произвольного непрерывно дифференцируемого ее решения удовлетворяет уравнению Лапласа в \mathbb{R}^4 . Необходимыми и достаточными условиями принадлежности системы (0.1) ЧКР типу является невырожденность матриц A_j ($j = 1, \dots, 4$) и выполнение матричных равенств

$$A_k^{-1} A_j + A_j^{-1} A_k = 0 \quad (k, j = 1, \dots, 4, k \neq j). \quad (0.3)$$

А.Т. Усс показал отсутствие для ЧКР-систем регуляризуемых внутренних краевых задач [7].

Отметим, что в трехмерном пространстве для системы Моисила – Теодореску [8], для трехмерных аналогов системы Коши – Римана [9], для систем ортогонального типа [10] существуют регуляризуемые внутренние краевые задачи.

В настоящей статье приводится пример эллиптической системы (0.1), которая не является

четырёхмерным аналогом системы Коши – Римана [7], не принадлежит классу эллиптических псевдосимметрических систем [5], однако каждое непрерывно дифференцируемое ее решение является бигармонической функцией. Для этой системы в настоящей работе исследуется регуляризуемость задачи Дирихле.

1 Пример бигармонической системы в \mathbb{R}^4

Здесь и всюду ниже, если не оговорено противное, считаем, что $A_1 = E$ – единичная матрица четвертого порядка,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Характеристическая матрица системы (0.1) с матричными коэффициентами (1.1) имеет вид

$$\mathfrak{A}(\xi) = \sum_{j=1}^4 A_j \xi_j =$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_4 & \xi_3 + \xi_4 & \xi_2 \\ \xi_3 - \xi_4 & \xi_1 - \xi_2 & -2\xi_2 & 2\xi_4 \\ -\xi_3 & \xi_2 & \xi_1 + \xi_2 & \xi_3 - \xi_4 \\ -\xi_2 & -\xi_3 & -\xi_3 + \xi_4 & \xi_1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

и при этом для всех векторов $\xi \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ выполняется неравенство

$$\det \mathfrak{A}(\xi) = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2)^2 \neq 0.$$

Последнее означает, что рассматриваемая система (0.1), (1.1) является эллиптической.

Очевидно, что (0.1) не является псевдосимметрической системой в \mathbb{R}^4 . Поскольку

$$A_2^{-1} A_3 + A_3^{-1} A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

(т. е. нарушаются равенства (0.3)), то система (0.1) не является четырехмерным аналогом системы Коши – Римана. Тем не менее, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Каждая компонента $u_k(x)$ ($k = 1, \dots, 4$) произвольного непрерывно дифференцируемого решения $U(x)$ системы (0.1) является бигармонической функцией.*

Доказательство. Пусть $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^4$ – непрерывно дифференцируемая вектор-функция, удовлетворяющая системе (0.1). Поскольку рассматриваемая система является эллиптической,

то каждая компонента $u_k(x)$ ($k = 1, \dots, 4$) вектора $U(x)$ является бесконечно дифференцируемой в области Ω функцией [11, с. 141]. Применяя к нулевой вектор-функции $\sum_{j=1}^4 A_j \frac{\partial U(x)}{\partial x_j}$ оператор

$\sum_{k=1}^4 A_k^{-1} \frac{\partial}{\partial x_k}$, получим

$$\begin{aligned} \Delta u_1 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_4} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} - \\ - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_4} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_4} \equiv 0, \\ \Delta u_2 - \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_4} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_4} \equiv 0, \\ \Delta u_3 + \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_4} \equiv 0, \quad \Delta u_4 \equiv 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}$ – оператор Лапласа в \mathbb{R}^4 .

Тогда

– из четвертого равенства (1.3) следует, что $\Delta^2 u_4 = 0$ в области Ω ;

– из третьего равенства (1.3) с учетом четвертого:

$$\Delta^2 u_3 = -\frac{\partial^2 \Delta u_4}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \Delta u_4}{\partial x_2 \partial x_4} = 0;$$

– из второго равенства (1.3) с учетом четвертого:

$$\Delta^2 u_2 = \frac{\partial^2 \Delta u_4}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \Delta u_4}{\partial x_1 \partial x_4} - \frac{\partial^2 \Delta u_4}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \Delta u_4}{\partial x_2 \partial x_4} = 0;$$

– из первого равенства (1.3) с учетом второго и третьего:

$$\begin{aligned} \Delta^2 u_1 = & -\frac{\partial^2 \Delta u_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \Delta u_2}{\partial x_2 \partial x_4} - \frac{\partial^2 \Delta u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \\ & + \frac{\partial^2 \Delta u_3}{\partial x_1 \partial x_4} + \frac{\partial^2 \Delta u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \Delta u_3}{\partial x_2 \partial x_4} = \\ = & -\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \left(\frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_4} - \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_4} \right) + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_4} \left(\frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_4} - \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_4} \right) - \\ & - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \left(-\frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_4} \right) + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_4} \left(-\frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_4} \right) + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \left(-\frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_4} \right) + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_4} \left(-\frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial x_2 \partial x_4} \right) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, каждая из функций $u_k(x)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) удовлетворяет уравнению $\Delta^2 u = 0$ в области Ω , т. е. является бигармонической в Ω функцией. \square

2 Задача Дирихле для рассматриваемой системы

В теории аналитических функций под задачей Дирихле понимают задачу отыскания голоморфной в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ функции $u + iv$ по известной на границе этой области ее действительной (или мнимой) части

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi \quad (v|_{\partial\Omega} = \psi).$$

Если функция φ непрерывна по Гельдеру на границе области $\partial\Omega$, то существует единственная гармоническая в Ω функция, принимающая заданные граничные значения. Сопряженная к ней гармоническая функция определяется из системы Коши – Римана с точностью до произвольной действительной постоянной. Из приведенных рассуждений также следует, что произвольно задавать значения аналитической функции на границе области нельзя, ибо действительная часть функции восстанавливается по мнимой части функции с точностью до произвольной постоянной и наоборот. Таким образом, задача восстановления аналитической функции по известной на границе области «половине» ее значений (действительной или мнимой части) является регуляризуемой.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ ограниченная область, границей которой является гладкая поверхность Ляпунова $\partial\Omega$. По аналогии с двумерным случаем под задачей Дирихле для системы (0.1) будем понимать задачу отыскания непрерывно дифференцируемого решения системы (0.1) в области Ω и непрерывного по Гельдеру в замыкании этой области, удовлетворяющего граничным условиям вида

$$u_3|_{\partial\Omega} = f_1(x), \quad u_4|_{\partial\Omega} = f_2(x) \quad (x \in \partial\Omega), \quad (2.1)$$

где $f_1, f_2 : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – заданные непрерывные по Гельдеру функции (два граничных условия – «половина» значений вектор-функции $U(x)$).

Теорема 2.1. *Задача Дирихле для системы (0.1), (1.1) не является регуляризуемой.*

Доказательство. Напомним, что задача (0.1), (2.1) называется регуляризуемой, если для нее выполнено условие Лопатинского. Оно представляет собой дополнительное ограничение на матрицу граничного оператора (2.1) и для рассматриваемой задачи состоит в том, что ранг матрицы

$$L(y, \tau) = \int_{\gamma} \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}^{-1} (\lambda v(y) + \tau) d\lambda \quad (2.2)$$

является максимальным в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом ненулевом касательном к $\partial\Omega$ в

точке y векторе τ . В формуле (2.2) через $v(y)$ обозначен единичный вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке y , матрица граничного оператора (2.1) имеет вид

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и интегрирование ведется по простому замкнутому контуру γ , лежащему в верхней комплексной λ -полуплоскости и охватывающему находящиеся там корни уравнения

$$\det \mathfrak{A}(\lambda v(y) + \tau) = 0. \quad (2.3)$$

Покажем, что в той точке \tilde{y} границы $\partial\Omega$, в которой внутренняя нормаль параллельна оси Ox_1 , условие Я.Б. Лопатинского задачи (0.1), (2.1) не выполняется. В этом случае $v(\tilde{y}) = (1, 0, 0, 0)$, $\tau = (0, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$, уравнение (2.3) принимает вид $(\lambda^2 + |\tau|^2)^2 = 0$, где $|\tau|^2 = \tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 \neq 0$. Пусть контур γ охватывает точку $i|\tau|$. Тогда, применяя основную теорему о вычетах, получим

$$\begin{aligned} L(\tilde{y}, \tau) &= \int_{\gamma} \frac{1}{(\lambda^2 + |\tau|^2)^2} \begin{pmatrix} \lambda^2 \tau_2 - \lambda \tau_1 \tau_2 + \tau_2 |\tau|^2 + \tau_1^2 \tau_3 \\ \tau_1 (\lambda^2 + |\tau|^2) \\ -\lambda^2 \tau_1 - \lambda \tau_2^2 - \tau_1 |\tau|^2 + \tau_1 \tau_2 \tau_3 \\ \tau_2 (\lambda^2 + |\tau|^2) \\ \lambda^3 - \lambda^2 \tau_1 + \lambda (\tau_1^2 + \tau_2 \tau_3 + \tau_3^2) - \tau_1 |\tau|^2 + \tau_1 \tau_2 \tau_3 - \tau_1 \tau_3^2 \\ (\tau_2 - \tau_3) (\lambda^2 + |\tau|^2) \\ -\lambda^2 (\tau_2 - \tau_3) + \lambda \tau_1 \tau_3 + \tau_3 |\tau|^2 \\ \lambda (\lambda^2 + |\tau|^2) \end{pmatrix} d\lambda = \\ &= 2\pi i \left[\begin{pmatrix} \frac{i(2\tau_2 |\tau|^2 + \tau_1^2 \tau_3)}{4|\tau|^3} & \frac{i(2\tau_1 |\tau|^2 - \tau_1 \tau_2 \tau_3)}{4|\tau|^3} \\ -\frac{i\tau_1}{2|\tau|} & -\frac{i\tau_2}{2|\tau|} \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. \begin{pmatrix} \frac{2|\tau|^3 + i(2\tau_1 |\tau|^2 + \tau_1 \tau_3^2 - \tau_1 \tau_2 \tau_3)}{4|\tau|^3} & \frac{i(\tau_2 - 2\tau_3)}{4|\tau|^2} \\ -\frac{i(\tau_2 - \tau_3)}{2|\tau|} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

Осталось заметить, что при $\tau = (0, 0, 0, 1)$ матрица Лопатинского задачи Дирихле в точке \tilde{y} принимает вид

$$L(\tilde{y}, \tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pi i & \pi \\ 0 & 0 & -\pi & \pi i \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\text{rank } L(\tilde{y}, \tau) = 1 < 2$. \square

Доказанная теорема означает [1], что оператор, отвечающий задаче Дирихле для системы (0.1), не является нетеровским в определенных банаховых пространствах, т. е. имеет либо незамкнутое множество значений, либо бесконечномерное ядро или коядро.

3 Другое доказательство теоремы 2.1

Рассмотрим другое доказательство теоремы 2.1. Не ограничивая общности, можно считать, что точка \tilde{y} совпадает с началом координат. Задаче (0.1), (2.1) соответствует так называемая предельная задача [12] для исходной системы (0.1) в полупространстве $x_1 > 0$ и граничного условия (2.1), заданного на гиперплоскости $x_1 = 0$ (по терминологии И.М. Гельфанда [12], мы рассматриваем краевую задачу под микроскопом в окрестности точки \tilde{y} со все большим и большим увеличением). Сделав в предельной задаче преобразование Фурье по переменным x_2, x_3 и x_4 получим

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial x_1}(x_1, \xi') = -i(A_2 \xi_2 + A_3 \xi_3 + A_4 \xi_4) \hat{U}(x_1, \xi') \quad (3.1)$$

$$(x_1 > 0),$$

$$\hat{u}_3|_{x_1=0} = h_1, \quad \hat{u}_4|_{x_1=0} = h_2, \quad (3.2)$$

где $\xi' = (\xi_2, \xi_3, \xi_4)$, $\hat{U}(x_1, \xi')$ – преобразование Фурье $U(x)$:

$$\hat{U}(x_1, \xi') = (2\pi)^{-3/2} \iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-i(x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 + x_4 \xi_4)} U(x) dx_2 dx_3 dx_4.$$

Эквивалентная формулировка условия регуляризуемости краевой задачи (0.1), (2.1) в точке \tilde{y} состоит в том, что при каждом ненулевом векторе ξ' в пространстве устойчивых решений \mathfrak{M}_+ системы уравнений (3.1) (т. е. стремящихся к нулю при $x_1 \rightarrow +\infty$) задача (3.1), (3.2) однозначно разрешима [12], [13].

Рассмотрим (3.1), (3.2) при $\xi' = (0, 0, 1)$ (сравнить с вектором τ из доказательства теоремы 2). В этом случае $-iA_4$ есть матрица системы (3.1), имеющая двукратные собственные значения -1 и 1 . Тогда множество устойчивых решений системы (3.1) задается формулой

$$\hat{U}(x_1, \xi') = (C_1 v_1 + C_2 (v_1 x_1 + v_2)) e^{-x_1}, \quad (3.3)$$

где $v_1 = (i, 1, 0, 0)^T$ – собственный вектор матрицы $-iA_4$, отвечающий собственному значению -1 ; $v_2 = (0, -3, 2, 2i)^T$ – вектор, присоединенный к вектору v_1 ; C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Осталось заметить, что при любом C_1 и $C_2 = 0$ функция $\hat{U}(x_1, \xi')$, заданная формулой (3.3), является устойчивым решением однородной задачи (3.1), (3.2) при $\xi' = (0, 0, 1)$. Таким образом, условие однозначной разрешимости (3.1), (3.2) в \mathfrak{M}_+ нарушается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агранович, М.С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М.С. Агранович // Успехи математических наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3–120.

2. Лопатинский, Я.Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям / Я.Б. Лопатинский // Украинский математический журнал. – 1953. – Т. 5. – С. 123–151.
3. Волевич, Л.Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем / Л.Р. Волевич // Математический сборник. – 1965. – Т. 68 (110), № 3. – С. 373–416.
4. Соломяк, М.З. О линейных эллиптических системах первого порядка / М.З. Соломяк // Доклады АН СССР. – 1963. – Т. 150, № 1. – С. 48–51.
5. Виноградов, В.С. Граничная задача для псевдосимметрических систем / В.С. Виноградов // Дифференциальные уравнения. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 161–163.
6. Басик, А.И. О краевых задачах для эллиптических псевдосимметрических систем первого порядка в \mathbb{R}^4 / А.И. Басик, А.Т. Усс // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 38, № 3. – С. 410–412.
7. Усс, А.Т. Гомотопическая классификация трех- и четырехмерных аналогов системы Коши – Римана / А.Т. Усс // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, № 8. – С. 1118–1125.
8. Шевченко, В.И. Гомотопическая классификация задач Римана – Гильберта для голоморфного вектора / В.И. Шевченко // Республиканский межведомственный сборник «Математическая физика». – Киев, 1975. – Вып. 17. – С. 184–186.
9. Усс, А.Т. Краевая задача Римана – Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши – Римана / А.Т. Усс // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 6. – С. 10–15.
10. Басик, А.И. Задача Римана – Гильберта для эллиптических систем ортогонального типа в \mathbb{R}^3 / А.И. Басик, Е.В. Грицук, Т.А. Грицук // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 7–16. – DOI: <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-7-16>.
11. Хермандер, Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными / Л. Хермандер. – Москва: Мир, 1965. – 379 с.
12. Гельфанд, И.М. Об эллиптических уравнениях / И.М. Гельфанд // Успехи математических наук. – 1960. – Т. 15, вып. 3. – С. 121–132.
13. Агранович, М.С. Общие краевые задачи для эллиптических систем в многомерной области / М.С. Агранович, А.С. Дынин // Доклады АН СССР. – 1962. – Т. 146, № 3. – С. 511–514.

Поступила в редакцию 22.04.2024.

Информация об авторах

Басик Александр Иванович – к.ф.-м.н., доцент
Грицук Евгений Васильевич – к.ф.-м.н., доцент
Галуц Дмитрий Владимирович – студент

ПОЛИАДИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП В ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. II

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв

POLYADIC ANALOGUES OF NORMAL SUBGROUPS IN POLYADIC GROUPS OF SPECIAL FORM. II

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev

Аннотация. В статье продолжается изучение полиадических аналогов нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида.

Ключевые слова: полиадическая операция, полуинвариантные l -арные подгруппы, n -полуинвариантные l -арные подгруппы.

Для цитирования: Гальмак, А.М. Полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида. II / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 45–47. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_45. – EDN: QDMGXA

Abstract. The study on the polyadic analogues of normal subgroups in polyadic groups of special form is carried on.

Keywords: polyadic operation, semiinvariant l -ary subgroups, n -semiinvariant l -ary subgroups.

For citation: Gal'mak, A.M. Polyadic analogues of normal subgroups in polyadic groups of special form. II / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 4 (61). – P. 45–47. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_45 (in Russian). – EDN: QDMGXA

Введение

Данная статья, посвящённая изучению полиадических аналогов нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида, является продолжением статьи [1] и составляет с ней единое целое, что отражено в названиях обеих статей. В связи с этим нумерация разделов в настоящей статье продолжает нумерацию разделов в [1]. Сохраняется преемственность в отношении соглашений, определений и обозначений из [1], все они остаются в силе и в данной статье. В ней ссылки на результаты из работы [1] даются без указания на эту работу. Например, ссылка на лемму 2.1 означает, что имеется в виду лемма 2.1 из раздела 2 в [1].

4 Условия не n -полуинвариантности

В следующей теореме доказываются неравенства, позволяющие сформулировать признаки не n -полуинвариантности, в частности неинвариантности подалгебр в полиадических группах специального вида.

Теорема 4.1. Пусть подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $B \neq A$. Тогда:

1) если для некоторого $t = 2, \dots, l-1$ подстановка σ^{t-1} не является тождественной, то

существует такой элемент $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$, что

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{t-1} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-t}), \quad (4.1)$$

то есть l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ не является инвариантной в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$;

2) если для некоторого $i = 2, \dots, s$ подстановка $\sigma^{(i-1)(n-1)}$ не является тождественной, то существует такой элемент $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$, что

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{(i-1)(n-1)} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{(s+1-i)(n-1)}),$$

то есть $\langle B^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ не является n -полуинвариантной в $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$.

Доказательство. 1) Если σ^{t-1} – нетождественная подстановка, то существует $j \in \{1, \dots, k\}$, для которого $\sigma^{t-1}(j) \neq j$, а так как $B \neq A$, то найдется такой элемент $u \in A$, $u \notin B$, что

$$\eta(\underbrace{u B \dots B}_{n-1}) \neq B. \quad (4.2)$$

Зафиксируем элемент $b \in B$ и выберем в A^k элемент $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ так, что $x_j = u$, все остальные компоненты равны b , в частности $x_{\sigma^{t-1}(j)} = b$.

Неравенство $\sigma^{t-1}(j) \neq j$ гарантирует такой выбор. Для случая $\sigma^{t-1}(j) = j$ такой выбор был бы невозможен, так как $u \neq b$.

Если предположить инвариантность $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle > \langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, то

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}) = \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1})$$

для выбранного \mathbf{x} .

Применяя к левой части последнего равенства утверждение 3) леммы 2.1, а к правой – предложение 2.2 при $B = C$, получим

$$\begin{aligned} \eta(\underbrace{x_1 B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(\underbrace{x_j B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(\underbrace{x_k B \dots B}_{n-1}) &= \\ &= \eta(\underbrace{B \dots B}_{l-1} x_{\sigma^{-1}(1)} \underbrace{B \dots B}_{l-t}) \times \dots \\ &\dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{l-1} x_{\sigma^{-1}(j)} \underbrace{B \dots B}_{l-t}) \times \dots \\ &\dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{l-1} x_{\sigma^{-1}(k)} \underbrace{B \dots B}_{l-t}), \end{aligned}$$

откуда

$$\eta(\underbrace{x_j B \dots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{l-1} x_{\sigma^{-1}(j)} \underbrace{B \dots B}_{l-t}).$$

Тогда из условия

$$x_j = u, x_{\sigma^{-1}(j)} = b \in B, u \notin B$$

получаем

$$\eta(\underbrace{u B \dots B}_{n-1}) = B,$$

что противоречит (4.2). Поэтому верно (4.1). Следовательно, $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является инвариантной в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

2) Полагаем в 1) $t = (i-1)(n-1) + 1$. □

Замечание 4.1. В утверждении 1) теоремы 4.1 отсутствует случай $t = l$, так как в этом случае из условия $\sigma^l = \sigma$ следует тождественность подстановки σ^{l-1} , что противоречит условию.

Замечание 4.2. В утверждении 2) теоремы 4.1 условием $i = 2, \dots, s$ исключается случай $l = n$, так как в этом случае $s = 1$.

5 Следствия

Полагая в теореме 4.1 $t = 2, i = 2$, получим

Следствие 5.1. Пусть подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma, \langle B, \eta \rangle - n$ -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle, B \neq A$. Тогда:

1) если подстановка σ не является тождественной, то существует элемент $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$ такой, что

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{B^k \mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-2}),$$

то есть l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является инвариантной в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$;

2) если подстановка σ^{n-1} не является тождественной, то существует элемент $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$ такой, что

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{n-1} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{(s-1)(n-1)}),$$

то есть $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуинвариантной в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Считая в утверждении 1) теоремы 4.1 σ циклом длины $m \geq 2$, где m делит $l-1$, получим

Следствие 5.2. Пусть $\sigma -$ цикл из S_k длины $m \geq 2, m$ делит $l-1, \langle B, \eta \rangle - n$ -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle, B \neq A, t -$ любой элемент множества $\{2, \dots, m\}$. Тогда существует элемент $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$ такой, что верно равенство (4.1), то есть l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является инвариантной в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Доказательство теоремы 4.1 позволяет более конкретно переформулировать следствие 5.2.

Следствие 5.3. Пусть $\sigma = \{i_1, \dots, i_m\} -$ цикл из S_k длины $m \geq 2, m$ делит $l-1, \langle B, \eta \rangle - n$ -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle, B \neq A, b -$ произвольный элемент из $B, u -$ произвольный элемент из $A \setminus B$, зафиксируем любой $j \in \{i_1, \dots, i_m\}$ и положим

$$\mathbf{x} = (x_1 = b, \dots, x_{j-1} = b, x_j = u, x_{j+1} = b, \dots, x_k = b).$$

Тогда

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{B^k \mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-2}),$$

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{B^k B^k \mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-3}),$$

...

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{m-2} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-m+1}),$$

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{m-1} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-m}),$$

то есть l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является инвариантной в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Если $\sigma -$ цикл длины $m \geq 2, m$ не делит $n-1$, то подстановка σ^{n-1} не является тождественной. Поэтому, считая в утверждении 2) теоремы 4.1 $i = 2, \sigma$ циклом длины $m \geq 2$, где m делит $l-1, m$ не делит $n-1$, получим

Следствие 5.4. Пусть $\sigma = \{i_1, \dots, i_m\} -$ цикл из S_k длины $m \geq 2, m$ делит $l-1, m$ не делит $n-1, \langle B, \eta \rangle - n$ -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle, B \neq A, b -$ произвольный элемент из $B, u -$ произвольный элемент из $A \setminus B$, зафиксируем любой $j \in \{i_1, \dots, i_m\}$ и положим

$$\mathbf{x} = (x_1 = b, \dots, x_{j-1} = b, x_j = u, x_{j+1} = b, \dots, x_k = b).$$

Тогда

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{n-1} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{(s-1)(n-1)}),$$

то есть $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуинвариантной в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Замечание 5.1. В следствиях 5.3 и 5.4 в качестве цикла длины m можно взять цикл $(12 \dots m) \in S_k$. При этом будут выполняться все неравенства из этих следствий. Сформулируем соответствующие следствия, не указывая эти неравенства.

Следствие 5.5. Пусть m делит $l-1, \langle B, \eta \rangle - n$ -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle, B \neq A$.

Тогда l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, (12 \dots m), k} \rangle$ не является инвариантной в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots m), k} \rangle$.

Следствие 5.6. Пусть t делит $l-1$, t не делит $n-1$, $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $B \neq A$. Тогда l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, (12 \dots m), k} \rangle$ не является n -полуинвариантной в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots m), k} \rangle$.

Полагая в следствиях 5.5 и 5.6 $t = k$, получим ещё два следствия.

Следствие 5.7. Пусть k делит $l-1$, $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $B \neq A$. Тогда l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$ не является инвариантной в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$.

Следствие 5.8. Пусть k делит $l-1$, k не делит $n-1$, $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $B \neq A$. Тогда l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$ не является n -полуинвариантной в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$.

Случай $n = 2$. В этом случае понятия 2-полуинвариантности и полуинвариантности для n -арных подгрупп тождественны понятию нормальности для подгрупп. Потому при $n = 2$ из теорем 3.1 (утверждение 2)) и 4.1 (утверждение 1) при $t = 2$) вытекает

Следствие 5.9. [2, предложение 4.1.1]. Пусть подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, B – подгруппа группы A . Тогда:

1) l -арная подгруппа $\langle B^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ полуинвариантна в l -арной группе $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ тогда и только тогда, когда подгруппа B нормальна в группе A ;

2) если $B \neq A$, подстановка σ не является тождественной, то $\langle B^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$ не является инвариантной в $\langle A^k, []_{l, \sigma, k} \rangle$.

Можно сформулировать аналогичные бинарные результаты для других приведённых выше следствий. Ограничимся здесь таким результатом для следствий 3.3 (утверждение 2)) и 5.8, считая в нём $n = 2$, $l = k + 1$.

Следствие 5.10 [2, следствие 4.1.4]. Пусть B – подгруппа группы A . Тогда:

1) $(k+1)$ -арная подгруппа $\langle B^k, []_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$ $(k+1)$ -арной группы $\langle A^k, []_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$ полуинвариантна в ней тогда и только тогда, когда подгруппа B нормальна в группе A ;

2) если $B \neq A$, то $\langle B^k, []_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$ не является инвариантной в $\langle A^k, []_{k+1, (12 \dots k), k} \rangle$.

Случай $n = 3$. Полагая в теореме 4.1 $n = 3$, получим

Следствие 5.11. Пусть для подстановки σ из S_k подстановка σ^{2s} является тождественной, $\langle B, \eta \rangle$ – тернарная подгруппа тернарной группы $\langle A, \eta \rangle$, $B \neq A$. Тогда:

1) если для некоторого $t = 2, \dots, 2s$ подстановка σ^{t-1} не является тождественной, то существует такой элемент $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$, что

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{2s}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{t-1} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{2s-t+1}), \quad (5.1)$$

то есть $(2s+1)$ -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является инвариантной в $(2s+1)$ -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$;

2) если для некоторого $i = 2, \dots, s$ подстановка $\sigma^{2(i-1)}$ не является тождественной, то существует такой элемент $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$, что

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{2s}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{2(i-1)} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{2(s+1-i)}),$$

то есть $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является 3-полуинвариантной в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Аналогичные результаты, соответствующие случаю $n = 3$, можно сформулировать для всех полученных выше следствий из теоремы 4.1. Ограничимся следствиями 5.1 и 5.2.

Следствие 5.12. Пусть для подстановки σ из S_k подстановка σ^{2s} является тождественной, $\langle B, \eta \rangle$ – тернарная подгруппа тернарной группы $\langle A, \eta \rangle$, $B \neq A$. Тогда:

1) если подстановка σ не является тождественной, то существует элемент $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$ такой, что

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{2s}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{B^k \mathbf{x} B^k \dots B^k}_{2s-1}),$$

то есть $(2s+1)$ -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является инвариантной в $(2s+1)$ -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$;

2) если подстановка σ^2 не является тождественной, то существует элемент $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$ такой, что

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{2s}) \neq \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{B^k B^k \mathbf{x} B^k \dots B^k}_{2(s-1)}),$$

то есть $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является 3-полуинвариантной в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Следствие 5.13. Пусть σ – цикл из S_k длины $t \geq 2$, t делит $2s$, $\langle B, \eta \rangle$ – тернарная подгруппа тернарной группы $\langle A, \eta \rangle$, $B \neq A$, t – любой элемент множества $\{2, \dots, t\}$. Тогда существует элемент $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$ такой, что верно неравенство (5.1), то есть $(2s+1)$ -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является инвариантной в $(2s+1)$ -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А.М. Полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 54–58.

2. Гальмак, А.М. Полиадические операции и обобщённые матрицы / А.М. Гальмак. – Могилёв: МГУП, 2015. – 295 с.

Поступила в редакцию 25.09.2024.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор

О p -ДЛИНЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ B -ГРУПП**В.Н. Княгина***Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины***ON THE p -LENGTH OF A PRODUCT OF TWO B -GROUPS****V.N. Kniahina***Francisk Skorina Gomel State University*

Аннотация. Конечная ненильпотентная группа называется B -группой, если в ее фактор-группе по подгруппе Фраттини все собственные подгруппы примарны. Исследуется p -длина $l_p(G)$ конечной p -разрешимой группы, являющейся произведением двух B -подгрупп. В частности, доказывается, что $l_p(G) \leq 1$, если p не делит индекс одной из B -подгрупп.

Ключевые слова: конечная группа, B -группа, p -разрешимая группа, p -длина, произведение подгрупп.

Для цитирования: Княгина, В.Н. О p -длине произведения двух B -групп / В.Н. Княгина // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 48–52. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_48. – EDN: DBDFPO

Abstract. A finite non-nilpotent group is called a B -group if every proper subgroup of its quotient group by Frattini subgroup is primary. The p -length $l_p(G)$ of a finite p -soluble group, which is the product of two B -subgroups, is studied. It has been proved that $l_p(G) \leq 1$ if p does not divide the index of one of the B -subgroups.

Keywords: finite group, B -group, p -soluble group, p -length, product of subgroups.

For citation: Kniahina, V.N. On the p -length of a product of two B -groups / V.N. Kniahina // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 4 (61). – P. 48–52. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_48 (in Russian). – EDN: DBDFPO

Введение

B -группой называют конечную ненильпотентную группу, у которой в фактор-группе по подгруппе Фраттини все собственные подгруппы примарны. Группа Шмидта (конечная ненильпотентная группа с нильпотентными собственными подгруппами) является B -группой. В строении B -групп и групп Шмидта есть сходства и есть различия. Так, обе они бипримарны, одна из силовских подгрупп в этих группах нормальна, а другая силовская подгруппа – циклическая, см. лемму 2.2 [1]. Одно из различий между B -группами и группами Шмидта заключается в том, что если в группе Шмидта подгруппа Фраттини нормальной силовской подгруппы содержится в центре группы, то в B -группе это свойство нарушается. Например, диэдральная группа порядка 18 является B -группой и не является группой Шмидта.

В работе [1] были описаны начальные свойства B -групп и изучена группа, факторизуемая примарной группой и B -группой. В частности, было доказано, что если конечная группа $G = HK$ представима в виде произведения B -подгруппы H и примарной подгруппы K , и если порядок ненормальной силовской подгруппы в H не равен 3 и 7, то группа G разрешима.

В работе [2] было установлено, что конечная p -разрешимая группа, представимая в виде произведения двух своих подгрупп Шмидта, имеет p -длину не более 2. Эта оценка точная, симметрическая группа S_4 имеет 2-длину, равную 2, и является произведением двух групп Шмидта A_4 и S_3 .

В настоящей работе исследуется конечная группа $G = HK$, представимая в виде произведения двух B -подгрупп H и K . Такая группа может быть простой, например, знакопеременная группа A_5 степени 5 является произведением двух B -подгрупп $H \cong A_4$ и $K \cong [C_3]C_2$. В случае, когда конечная группа $G = HK$ p -разрешима устанавливаются достаточные условия, при которых она имеет единичную p -длину. Если B -подгруппы H и K сверхразрешимы, то конечная группа $G = HK$ будет разрешимой, а если порядок G нечетен, то G сверхразрешима.

1 Вспомогательные результаты

Порядки всех рассматриваемых в работе групп конечны. Мы используем стандартные обозначения, а также терминологию из [3], [4].

Напомним некоторые обозначения. Прямое произведение двух подгрупп A и B с нормальной подгруппой A записывается $[A]B$. Центр, коммутант, подгруппы Фраттини и Фиттинга группы G обозначаются соответственно через $Z(G)$, G' , $\Phi(G)$ и $F(G)$. Запись $Y \leq X$ ($Y < X$) означает, что Y – подгруппа (собственная подгруппа) группы X .

Для фиксированных групп будем использовать следующие обозначения:

Z_m – циклическая группа порядка m ,

E_{p^m} – элементарная абелева группа порядка p^m ,

D_{2n} – диэдральная группа порядка $2n$,

S_n и A_n – симметрическая и знакопеременная группы степени n .

Группа G с нормальной силовской p -подгруппой G_p называется p -замкнутой. Если в группе G имеется нормальная подгруппа $G_{p'}$ такая, что $G = [G_{p'}]G_p$, то группа G называется p -нильпотентной.

Будем использовать обозначения $B_{(p,q)}$ для B -группы с нормальной силовской p -подгруппой и ненормальной силовской Q -подгруппой.

Приведем используемые при доказательстве теорем свойства B -групп.

Лемма 1.1 [1, лемма 2.2]. Пусть B – $B_{(p,q)}$ -группа, p и Q – ее силовские p - и Q -подгруппы. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) $B = [P]Q$;

(2) $P \cap \Phi(B) = \Phi(P)$, $P = B'$ и $P/\Phi(P)$ – главный фактор группы B порядка p^m , где m – показатель числа p по модулю Q ;

(3) $Q = \langle y \rangle$ – циклическая подгруппа и $y^q \in Z(B)$. Кроме того, $\Phi(B) = \Phi(P) \times \langle y^q \rangle$ и $Z(B) \leq \Phi(B)$;

(4) Если H – нормальная в B подгруппа и $H \neq B$, то H нильпотентна;

(5) Если t – максимальная в B подгруппа, то либо t нормальна в B и $M = P \times \langle y^q \rangle$, либо $M = [\Phi(P)]Q^x$ для некоторого $x \in B$.

Лемма 1.2 [1, лемма 2.4]. Пусть N – нормальная подгруппа $B_{(p,q)}$ -группы B , $N \neq B$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) силовская p -подгруппа P_1 из N либо совпадает с силовской p -подгруппой группы B , либо $P_1 \leq \Phi(B) \cap P = \Phi(P)$;

(2) силовская Q -подгруппа Q_1 из N содержится в $\langle y^q \rangle \leq Z(B)$, где $\langle y \rangle$ – силовская Q -подгруппа группы B ;

(3) либо $P \leq N$, либо $N \leq \Phi(B)$;

(4) фактор-группа B/N либо является $B_{(p,q)}$ -группой, либо циклической Q -группой.

Ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы примарны, называется группой типа A . Таким образом, B -группу можно определить как группу, у которой фактор-группа по подгруппе Фраттини является группой типа A .

Приведем свойства групп типа A , используемые в дальнейшем.

Лемма 1.3 [5, с. 83]. Если S – группа типа A , то справедливы следующие утверждения:

(1) $S = [P]Q$, где p – нормальная силовская p -подгруппа, Q – ненормальная силовская Q -подгруппа, p и Q – различные простые числа;

(2) Q – циклическая подгруппа простого порядка Q и Q действует неприводимо на p ;

(3) p – элементарная абелева подгруппа порядка p^m , где m – показатель числа p по модулю Q , подгруппа p является минимальной нормальной подгруппой группы S ;

(4) $Z(S) = \Phi(S) = 1$;

(5) $1 < P < S$ – главный ряд группы S .

В следующих двух примерах показано, что при определенных условиях B -группа не является группой Шмидта.

Пример 1.1. Диэдральная группа порядка $2p^n$, $p > 2$, $n \in \mathbb{N}$, является $B_{(p,2)}$ -группой. При $n > 1$ она не будет группой Шмидта.

Пример 1.2. Пусть p и Q – простые числа, p делит $q-1$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда ненильпотентная группа $[Z_{q^n}]Z_p$ является $B_{(q,p)}$ -группой. При $n > 1$ она не будет группой Шмидта.

Лемма 1.4. Если H – $B_{(p,q)}$ -группа и Q делит $p-1$, то силовская p -подгруппа в H циклическая.

Доказательство. Пусть $H = [P]Q$ – $B_{(p,q)}$ -группа. Тогда $H/\Phi(H)$ – группа типа A порядка $p^m q$, где m – показатель p по модулю Q . По условию Q делит $p-1$, поэтому $m=1$. По лемме 1.1 (2) $P \cap \Phi(H) = \Phi(P)$, поэтому $|P/\Phi(P)| = p$ и p – циклическая группа.

Пусть π – множество простых чисел. У каждой π -разрешимой группы существует нормальный ряд, факторы которого являются π -группами или π' -группами. Такой ряд называют (π, π') -рядом. π -длиной π -разрешимой группы G называют наименьшее число π -факторов среди всех (π, π') -рядов группы G . π -длина π -разрешимой группы G обозначается через $l_\pi(G)$. Как обычно, $O_{\pi'}(G)$ и $O_\pi(G)$ – наибольшие нормальные π' - и π -подгруппы группы G соответственно. \square

Лемма 1.5 [6, лемма 4]. Пусть в p -разрешимой группе G силовская p -подгруппа является произведением двух циклических подгрупп. Тогда:

- (1) если $p > 2$, то $l_p(G) \leq 1$;
 (2) если $p = 2$, то $G/O_{2',2}(G)$ либо имеет нечетный порядок, либо изоморфна S_3 . В частности, $l_2(G) \leq 2$.

Лемма 1.6 [2, лемма 5]. Пусть G – π -разрешимая группа. Если силовские p -подгруппы группы G циклические для всех $p \in \pi(G)$, то $l_\pi(G) \leq 1$.

2 Достаточные условия, при которых произведение двух B -групп имеет единичную p -длину

Теорема 2.1. Пусть G – p -разрешимая конечная группа и B – ее $B_{(p,q)}$ -подгруппа для некоторого $q \in \pi(G)$. Если p не делит индекс подгруппы B в группе G , то $l_p(G) \leq 1$.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы G . Пусть N – неединичная нормальная подгруппа группы G , а B – ее $B_{(p,q)}$ -подгруппа, $B = [P]Q$. По условию, p не делит $|G : B|$, поэтому p – силовская p -подгруппа группы G . По свойствам B -групп (лемма 1.2 (4)) фактор-группа BN/N либо циклическая Q -группа, либо $B_{(p,q)}$ -группа. Если BN/N – циклическая Q -группа, то G/N – p' -группа и $l_p(G/N) \leq 1$. Пусть теперь $BN/N = B_{(p,q)}$ -группа. Так как

$$|G/N : BN/N| = |G : BN|,$$

$$|G : B| = |G : BN| \|BN : B|,$$

то p не делит $|G : BN| = |G/N : BN/N|$. По индукции $l_p(G/N) \leq 1$. Значит, в любом случае $l_p(G/N) \leq 1$ для каждой неединичной нормальной в G подгруппы N . Предположим, что $l_p(G) > 1$. По лемме VI.6.9 [3] следует считать, что

$$\Phi(G) = O_{p'}(G) = 1, \quad O_p(G) = C_G(O_p(G))$$

и $N = O_p(G)$ является единственной минимальной нормальной в G подгруппой. Пусть t – максимальная в G подгруппа, не содержащая N . Тогда $N \cap M = 1$ и $G = [N]M$. Так как $N \leq P \leq B$, то согласно лемме 1.2 (3) либо $N = P$, либо $N \leq \Phi(B)$. Если $N = P$, то $l_p(G) \leq 1$. Если $N \leq \Phi(B)$, то по тождеству Дедекинда

$$B = [N](B \cap M) = \Phi(B)(B \cap M) = B \cap M,$$

что невозможно. \square

Теорема 2.2. Пусть A и B – B -подгруппы p -разрешимой конечной группы G и пусть $G = AB$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) если A и B – p -замкнутые pd -подгруппы и $p \neq 3$ или $\pi(G) \neq \{2, 3\}$, то G p -замкнута;

- (2) если A и B – p -нильпотентные pd -подгруппы и $p \neq 2$ или $3 \notin \pi(G)$, то группа G p -нильпотентна;

- (3) если p не делит $\text{НОД}(|G : A|, |G : B|)$, то $l_p(G) \leq 1$.

Доказательство. (1) Введем следующие обозначения: $A = [P_1]Q$, $B = [P_2]R$, где P_1 и P_2 – силовские p -подгруппы из A и B такие, что P_1P_2 – силовская p -подгруппа из G (см. лемму VI.4.7 [3]), Q – силовская Q -подгруппа из A , R – силовская r -подгруппа из B . Поскольку $\pi(G) = \{p, q, r\}$ и G p -разрешима, то группа G разрешима и по лемме VI.4.7 [3] можно считать, что QR – $\{q, r\}$ -холлова подгруппа при $q \neq r$ или QR – силовская Q -подгруппа при $q = r$.

Предположим, что $q \neq r$ и пусть $\pi = \{q, r\}$. Тогда $l_\pi(G) \leq 1$ по лемме 1.6 и $K = O_p(G)(QR)$ нормальна в G . Теперь $Q \leq A \cap K \triangleleft A$ и $R \leq B \cap K \triangleleft B$. По свойствам B -групп (Q не содержится в собственной подгруппе, нормальной в A) $A \leq K$. Аналогично, $B \leq K$. Поэтому $G = O_p(G)(QR)$ – p -замкнутая группа.

Пусть $q = r$. Если $l_q(G) = 1$, то $O_p(G)(QR)$ – нормальна в G и опять $G = O_p(G)(QR)$ – p -замкнутая группа. Пусть $l_q(G) > 1$. Так как силовская Q -подгруппа группы G является произведением двух циклических подгрупп Q и R , то по лемме 1.5 получаем, что $q = 2$ и $p = 3$. Теперь P_1 и P_2 – циклические подгруппы по лемме 1.4 и по лемме 1.5 $l_3(G) \leq 1$.

- (2) Введем следующие обозначения: $A = [Q]P_1$, $B = [R]P_2$, где P_1 и P_2 – силовские p -подгруппы в A и в B такие, что P_1P_2 является силовской p -подгруппой группы G (см. лемму VI.4.7 [3]), Q – силовская Q -подгруппа из A , R – силовская r -подгруппа из B .

Если $p > 2$, то P_1P_2 – метациклическая группа по лемме III.11.5 [3] и $l_p(G) \leq 1$ по лемме 1.5. Теперь $K = O_p(G)(P_1P_2)$ нормальна в G , поэтому $P_1 \leq A \cap K$ и $A \cap K$ нормальна в A . По свойствам B -групп получаем, что $A \leq K$. Аналогично, $B \leq K$ и $K = G$ – p -нильпотентная группа.

Пусть $p = 2$. Тогда силовская 2-подгруппа P_1P_2 в группе G является произведением двух циклических подгрупп. По лемме 1.5 либо фактор-группа $G/O_{2',2}(G)$ имеет нечетный порядок, либо изоморфна S_3 .

Пусть $G/O_{2',2}(G)$ имеет нечетный порядок. Тогда $P_1P_2 \leq O_{2',2}(G)$ и $A \cap O_{2',2}(G)$ – нормальная подгруппа в группе A , причем

$P_1 \leq A \cap O_{2',2}(G)$. Это возможно лишь когда $A \leq O_{2',2}(G)$. Аналогично, $B \leq O_{2',2}(G)$ и $G = O_{2',2}(G)$ – 2-нильпотентная группа. Если $G/O_{2',2}(G) \cong S_3$, то $3 \in \pi(G)$, что исключается условием (2) теоремы.

(3) Утверждение следует из теоремы 2.1. \square

3 О произведении сверхразрешимых B -групп

Теорема 3.1. Пусть A – сверхразрешимая B -подгруппа конечной группы G и пусть $G = AB$, где B – циклическая или сверхразрешимая B -подгруппа. Тогда третий коммутант G''' – абелева 2-группа и $n(G) \leq 3$.

Доказательство. Согласно лемме 2.7 [1] все силовские подгруппы в A и в B циклические. Если группа G имеет нечетный порядок, то по теореме Берковича [7] группа G сверхразрешима. В частности, коммутант G' – 2-нильпотентен. Так как силовские подгруппы в G метациклические, то G' – метациклическая подгруппа и $G'' = 1$.

Далее считаем, что группа G имеет четный порядок. Если силовская 2-подгруппа в G циклическая, то G 2-нильпотентна, в частности, разрешима. Если силовская 2-подгруппа в G нециклическая, то A и B имеют четные порядки и в каждой из них имеется циклическая подгруппа индекса ≤ 2 согласно лемме 1.1 (3). По теореме В.С. Монахова [8] группа G разрешима. Несложно проверить, что условия теоремы наследуются фактор-группами, поэтому группа G примитивна: $\Phi(G) = 1$, $G = [N]M$, $N = F(G) = O_p(G) = C_G(N)$ – единственная минимальная нормальная в G подгруппа, m – максимальная подгруппа и $M_G = 1$. Так как N дополняема в силовской p -подгруппе, то $|N| = p$ или $|N| = p^2$ согласно леммам 2 и 3 [6]. Если $|N| = p$, то G сверхразрешима [6, лемма 5] и теорема справедлива. Если $|N| = p^2$, то силовская p -подгруппа в группе G нециклическая, поэтому p делит порядок подгруппы A и порядок подгруппы B . Кроме того, обе подгруппы A и B имеют нормальные силовские p -подгруппы порядка p . Так как B -группа с нормальной силовской подгруппой простого порядка является группой Шмидта, то применима теорема из [9], по которой G''' – абелева 2-группа и $n(G) \leq 3$. \square

Пример 3.1. Группа $GL(2,3) = AB$ является произведением B -группы $A \cong S_3$ и циклической 2-группы $B \cong C_8$. Производная длина $GL(2,3)$ равна 4, а 2-нильпотентная длина $GL(2,3)$ равна 3. Этот пример подтверждает точность полученных в теореме верхних границ для 2-нильпотентной и производной длин.

Следствие 3.1. Пусть A и B – B -подгруппы конечной группы G нечетного порядка и пусть $G = AB$. Если A и B сверхразрешимы, то G сверхразрешима.

Следствие 3.2. Пусть A и B – сверхразрешимые B -подгруппы конечной группы G и пусть $G = AB$. Если $|A|$ нечетен, то G 2-нильпотентна и $l_p(G) \leq 1$ для всех $p \in \pi(G)$.

Доказательство. Согласно лемме 2.7 [1] все силовские подгруппы в A и в B циклические. Силовская 2-подгруппа из B является силовской 2-подгруппой группы G , поэтому G 2-нильпотентна. Силовские подгруппы нечетного порядка в группе G метациклические. Применяя лемму 1.5 получаем, что $l_p(G) \leq 1$ для всех $p \in \pi(G)$. \square

Пример 3.2. Пусть p – простое нечетное число и C_p – циклическая группа порядка p . Эта группа обладает автоморфизмом α порядка 2. Зададим отображение $\phi: S_4 \rightarrow \langle \alpha \rangle$ следующим образом: $\phi(\tau) = \alpha$, если τ – нечетная перестановка и $\phi(\tau) = 1$, если τ – четная перестановка. Тогда ϕ – гомоморфизм группы S_4 на $\langle \alpha \rangle$, ядро которого совпадает с A_4 . Рассмотрим полупрямое произведение $G = [C_p]S_4$ относительно гомоморфизма ϕ . Тогда $G = S_3([C_p] \langle (1234) \rangle)$ есть произведение двух сверхразрешимых B -подгрупп, причем G – не 2-нильпотентная группа и $l_2(G) = 2$. При $p = 3$ построенная группа не 3-замкнута. Этот пример показывает, что произведение двух сверхразрешимых B -подгрупп может быть несверхразрешимой группой, в частности, 2-длина группы может быть > 1 .

Пример 3.3. Полупрямое произведение $[E_{7^2}]S_3$, в котором симметрическая группа S_3 неприводимо действует на элементарной абелевой группе E_{7^2} порядка 49, является минимальной несверхразрешимой группой, она 2- и 3-сверхразрешима, но не 7-сверхразрешима. Группа

$$[E_{7^2}]S_3 = ([U]Z_2)([V]Z_3),$$

$$E_{7^2} = U \times V, U \cong V \cong Z_7$$

является произведением двух сверхразрешимых B -подгрупп порядков 14 и 21.

ЛИТЕРАТУРА

1. Княгина, В.Н. О произведении B -группы и примарной группы / В.Н. Княгина // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 3 (32). – С. 52–57.
2. Княгина, В.Н. О p -длине произведения двух групп Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Сибирский математический журнал. – 2004. – Т. 45, № 2. – С. 329–333.
3. Huppert, B. Endliche Gruppen I / В. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York, 1967.

4. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006.

5. Монахов, В.С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В.С. Монахов // Труды Укр. матем. конгресса 2001. – Киев: Институт математики НАУ. – 2002. – секция № 1. – С. 81–90.

6. Монахов, В.С. О частичной сверхразрешимости конечной факторизуемой группы / В.С. Монахов // Доклады НАН Беларуси. – 2001. – Т. 45, № 3. – С. 32–36.

7. Беркович, Я.Г. О разрешимых группах конечного порядка / Я.Г. Беркович // Математический сборник. – 1967. – Т. 74, № 1. – С. 75–92.

8. Монахов, В.С. О произведении двух групп, одна из которых содержит циклическую подгруппу индекса ≤ 2 / В.С. Монахов // Математические заметки. – 1974. – Т. 16, № 2. – С. 285–295.

9. Монахов, В.С. Произведение сверхразрешимых групп Шмидта / В.С. Монахов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 1999. – № 1. – С. 41–46.

Поступила в редакцию 13.06.2024.

Информация об авторах

Княгина Виктория Николаевна – к.ф.-м.н., доцент

УДК 519.2:621.394.74

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_53

EDN: PVNWEO

МОДИФИКАЦИЯ ОТКРЫТЫХ ОДНОЛИНЕЙНЫХ СЕТЕЙ ДЖЕКSONА С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ВРЕМЕНА ОЖИДАНИЯ, ДОПУСКАЮЩАЯ СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ В ФОРМЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Ю.В. Малинковский*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

OPEN ONE-LINE JACKSON NETWORKS WITH EXPONENTIAL CONSTRAINS ON WAITING TIMES MODIFICATION BY PRODUCT FORM OF THE STATIONARY DISTRIBUTION

Yu.V. Malinkovskii*Francisk Skorina Gomel State University*

Аннотация. Рассмотрена однолинейная экспоненциальная сеть массового обслуживания, в которой время ожидания между вызовами обслуживания в подсистемах сети является случайной величиной, условное распределение которой при фиксированном числе вызовов в подсистемах имеет показательное распределение. Вызовы, обслуженные в подсистемах, и вызовы, не дождавшиеся обслуживания, движутся по сети в соответствии с разными матрицами маршрутизации. Предлагается модификация сети с экспоненциальными ограничениями на время ожидания, позволяющая получить стационарное распределение в форме произведения. Для достижения этой цели вводятся дополнительные компенсирующие потоки сигналов, управляющие определенными перемещениями вызовов в сети.

Ключевые слова: сеть массового обслуживания, стационарное распределение, форма произведения, время ожидания, время пребывания, экспоненциальные ограничения, компенсирующие потоки, модифицированная сеть.

Для цитирования: Малинковский, Ю.В. Модификация открытых однолинейных сетей Джексона с экспоненциальными ограничениями на времена ожидания, допускающая стационарное распределение в форме произведения / Ю.В. Малинковский // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 53–56. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_53. – EDN: PVNWEO

Abstract. One-line exponential queueing network, in which the waiting time by customers in the nodes is random variable whose conditional distribution (on fixed customers qualities) is exponential, was considered. The customers served in the nodes and the non-served customers move in the network according to a different routing matrices. A network modification with exponential bounded waiting times and product form stationary distribution is presented. To achieve this goal additional compensative flows of moving in the network control signals are introduced.

Keywords: queueing network, stationary distribution, product form, waiting time, sojourn time, exponential restricts, compensative flows, modificatory network.

For citation: Malinkovskii, Yu.V. Open one-line Jackson networks with exponential constrains on waiting times modification by product form of the stationary distribution / Yu.V. Malinkovskii // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 4 (61). – P. 53–56. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_53 (in Russian). – EDN: PVNWEO

Введение

В последние годы наметилась тенденция к созданию информационно-вычислительных сетей различного назначения. возникают проблемы, от решения которых зависит эффективность их использования. Весьма важной является проблема «узких подсистем» в сети, т. е. подсистем сети, в которых нагрузка подсистем максимальна. При большом числе вызовов в узком месте очередь неограниченно растет, в то время как в других подсистемах очереди незначительны либо вовсе отсутствуют. Одним из способов преодоления этого недостатка является введение мгновенных обходов вызовами подсистем [1], что благоприятствует более равномерному

распределению нагрузки между подсистемами. Иным способом уменьшения нагрузки в «узких местах» является помещение в соответствующих подсистемах резервных линий [2], [3]. Еще одним способом уменьшения нагрузки является ограничение продолжительностей ожидания обслуживания заявок в узлах случайными величинами, имеющими показательное распределение [4]–[8].

К сожалению, автор настоящей статьи допустил в [5] ошибку при формулировке результатов в пунктах 4 и 5, связанных с ограничением на время ожидания. В дальнейшем выяснилось, что, в случае, когда суммарная интенсивность ухода вызовов из подсистем за счет завершения

времени ожидания постоянна, уравнения графика для сети с ограничением на время ожидания будут отличаться от соответствующих уравнений графика для сети с ограничением на время пребывания. В связи с этим в общем случае стационарное распределение не имеет формы произведения. Вниманию читателя предлагается модификация сети, позволяющая получить стационарное распределение в форме произведения. Для достижения этой цели вводится дополнительный компенсирующий поток сигналов, управляющий определенными перемещениями вызовов в сети.

1 Постановка задачи

В сеть, состоящую из N однолинейных подсистем, поступает простейший поток вызовов с интенсивностью λ . Поступающий вызов независимо от других вызовов с вероятностью p_{0i} направляется в i -ую подсистему $\left(i = \overline{1, N}, \sum_{i=1}^N p_{0i} = 1\right)$.

Число мест для ожидания вызовов в подсистемах бесконечно. Время обслуживания вызова единственной линией i -ой подсистемы имеет показательное распределение с параметром μ_i ($i = \overline{1, N}$). Время ожидания начала обслуживания вызова в i -ой подсистеме является случайной величиной, условное распределение которой (если в i -ой подсистеме находится n_i вызовов) показательное с параметром $\frac{\nu_i}{n_i - 1}$ ($i = \overline{1, N}$). Таким

образом, условная вероятность того, что длительность ожидания начала обслуживания каждого вызова в очереди i -той подсистемы закончится в промежутке времени $[t, t + h)$, если в момент t в подсистеме находилось n_i вызовов, равна

$\frac{\nu_i}{n_i - 1} h + o(h)$ при $h \rightarrow 0$, а условная вероятность завершения процесса ожидания хотя бы одного из вызовов равна $\nu_i h + o(h)$. Если вызов поступает в подсистему, свободную от вызовов, он сразу начинает обслуживаться. Предполагается, что промежутки времени между моментами поступления вызовов, времена обслуживания вызовов и времена ожидания вызовов в подсистемах суть независимые случайные величины. Вызов, обслуженный в i -ой подсистеме, мгновенно и независимо от других вызовов с вероятностью p_{ij} переходит в j -ую подсистему, а с вероятностью p_{i0} покидает сеть $\left(i, j = \overline{1, N}, \sum_{j=0}^n p_{ij} = 1\right)$.

Вызов, время ожидания которого в i -той подсистеме закончилось, мгновенно и независимо от других вызовов с вероятностью r_{ij} направляется

в j -ую подсистему, а с вероятностью r_{i0} покидает сеть $\left(i, j = \overline{1, N}, \sum_{j=0}^n r_{ij} = 1\right)$.

Время ожидания которого в i -той подсистеме закончилось, мгновенно и независимо от других вызовов с вероятностью r_{ij} направляется

в j -ую подсистему, а с вероятностью r_{i0} покидает сеть $\left(i, j = \overline{1, N}, \sum_{j=0}^n r_{ij} = 1\right)$.

2 Открытые сети с ограниченным временем ожидания вызовов в подсистемах

В [5] рассмотрена сеть, отличающаяся от введенной в разделе 1 сети только тем, что в ней вместо ограничения на время ожидания использовалось ограничение на время пребывания заявок в подсистемах. Для этой сети была введена стохастическая матрица маршрутизации следующим образом: $S = (s_{ij}), i, j = \overline{0, N}$, где для $i \neq 0$

$$s_{ij} = \frac{\mu_i p_{ij} + \nu_i r_{ij}}{\mu_i + \nu_i},$$

а $s_{0j} = p_{0j}$. Здесь

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p_{01} & p_{02} & \dots & p_{0N} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{N0} & p_{N1} & p_{N2} & \dots & p_{NN} \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & r_{01} & r_{02} & \dots & r_{0N} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{N0} & r_{N1} & r_{N2} & \dots & r_{NN} \end{pmatrix},$$

названные матрицами маршрутизации соответственно обслуженных и потерянных в результате окончания пребывания вызовов.

Как показано в [5], в предположении, что матрица S неприводима, интенсивность $\lambda \varepsilon_i$ потока вызовов, выходящих из i -ой подсистемы ($i = \overline{1, N}$), удовлетворяет следующим уравнениям трафика:

$$\varepsilon_j = p_{0j} + \sum_{i=1}^N \varepsilon_i s_{ij}, j = \overline{1, N}. \quad (2.1)$$

имеющим в случае неприводимой матрицы маршрутизации единственное положительное решение.

Состояния сети в момент t в [5] описывались цепью Маркова с непрерывным временем

$$\mathbf{n}(t) = (n_1(t), n_2(t), \dots, n_N(t)),$$

где $n_i(t)$ – число вызовов в i -ой подсистеме в момент времени t . Пространство состояний этого процесса $X = \mathbf{Z}_+^N$, где $\mathbf{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$. В силу неприводимости матрицы маршрутизации и положительности интенсивностей выхода из состояний в моменты ее скачков $\mathbf{n}(t)$, очевидно, – неприводимая цепь Маркова.

Пусть $\{p(\mathbf{n}), \mathbf{n} \in X\}$ – ее предельное эргодическое распределение, которое в этом случае будет единственным решением уравнений глобального равновесия

$$\begin{aligned}
 & p(\mathbf{n}) \left(\lambda + \sum_{i=1}^N (\mu_i(1-p_{ii}) + \nu_i(1-r_{ii})) I_{\{n_i \neq 0\}} \right) = \\
 & = \sum_{i=1}^N p(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i) \lambda p_{0i} + \sum_{i=1}^N p(\mathbf{n} + \mathbf{e}_i) (\mu_i p_{i0} + \nu_i r_{i0}) + \\
 & + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N p(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i) (\mu_j p_{ji} + \nu_j r_{ji}), \mathbf{n} \in X, \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

удовлетворяющим условию нормировки

$$\sum_{\mathbf{n} \in X} p(\mathbf{n}) = 1.$$

Здесь \mathbf{e}_i – единичный вектор i -го направления, причем предполагается, что $p(\mathbf{n}) = 0$ при $\mathbf{n} \notin X$.

В [5] доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. Для неприводимости цепи Маркова $\mathbf{n}(t)$ необходимо и достаточно неприводимости матрицы маршрутизации $S = (s_{ij})$. Если матрица маршрутизации неприводима, то для эргодичности цепи $\mathbf{n}(t)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\rho_i = \frac{\lambda \varepsilon_i}{\mu_i + \nu_i} < 1 \quad (i = \overline{1, N}). \quad (2.3)$$

где $(\varepsilon_i, i = \overline{1, N})$ – решение уравнения трафика (2.1). В этом случае финальное стационарное распределение имеет форму произведения

$$p(\mathbf{n}) = p_1(n_1) p_2(n_2) \dots p_N(n_N), \quad (2.4)$$

с множителями $p_i(n_i) = \rho_i^{n_i} (1 - \rho_i)$, где $\{\varepsilon_i, i = \overline{1, N}\}$ – решение уравнения трафика (2.1).

3 Модификация открытой сети с ограниченным временем ожидания вызовов в подсистемах

В [7], [8] доказано, что за исключением двух очевидных вырожденных частных случаев для сети из раздела 1 не существует стационарного распределения в форме произведения (2.4). Кроме того, матрица маршрутизации будет зависеть от \mathbf{n} , благодаря чему уравнение трафика существенно усложнится. Поэтому модифицируем сеть из раздела 1 следующим образом. Введем компенсирующий поток сигналов, промежутки времени между моментами поступления которых предполагаются независимыми от промежутков времени между моментами поступления вызовов в сеть, времен обслуживания и времен ожидания вызовов в подсистемах сети. Этот поток предполагается стационарным пуассоновским с интенсивностью поступления в каждую подсистему j , равной ν_j , когда в j -ой подсистеме находится ровно один вызов (другими словами источник сигналов перекрывается, когда $n_j \neq 1$). Учитывая данное обстоятельство, интенсивность этого потока можно записать как $\nu_j I_{\{n_j=1\}}$. Поступающий сигнал не зависит от других сигналов и

функционирования сети с вероятностью r_{j0} направляется только в j -ую подсистему, где он вычеркивает единственный вызов и пропадает вместе с ним, не оказывая дальнейшего воздействия на сеть, либо с вероятностью r_{ji} вместе с указанным воздействием в j -ой подсистеме добавляет ровно один вызов в одной из подсистем i (или пропадает, не оказывая воздействия на поведение сети $(i, j = \overline{1, N})$). Ведь по постановке задачи предыдущего раздела $\sum_{i=0}^N r_{ji} = 1, j = \overline{1, N}$. Таким образом, $\nu_j r_{j0} I_{\{n_j=1\}}$ – интенсивность поступления единственного сигнала извне в j -ую подсистему, когда в ней находится единственный вызов, $\nu_j r_{ji} I_{\{n_j=1\}}$ – интенсивность поступления сигнала извне в j -ую подсистему и рождения вызова в i -ой подсистеме, когда в j -ой подсистеме находится единственный вызов.

Уравнения глобального равновесия для стационарных вероятностей состояний цепи Маркова $\mathbf{n}(t)$ имеют форму

$$\begin{aligned}
 & p(\mathbf{n}) \left\{ \lambda + \sum_{i=1}^N ((\mu_i(1-p_{ii}) + \nu_i(1-r_{ii})) I_{\{n_i \neq 0\}} + \right. \\
 & \left. + \nu_i(1-r_{ii}) I_{\{n_i=1\}}) \right\} = \sum_{i=1}^N p(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i) \lambda p_{0i} I_{\{n_i \neq 0\}} + \\
 & + \sum_{i=1}^N p(\mathbf{n} + \mathbf{e}_i) \left((\mu_i p_{i0} + \nu_i r_{i0} I_{\{n_i \neq 0\}}) + \nu_i r_{i0} I_{\{n_i=0\}} \right) + \\
 & + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N p(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i) \times \\
 & \times \left((\mu_j p_{ji} + \nu_j r_{ji} I_{\{n_j \neq 0\}}) + \nu_j r_{ji} I_{\{n_j=0\}} \right) I_{\{n_i \neq 0\}}, \mathbf{n} \in X.
 \end{aligned}$$

Используя свойство индикаторов, нетрудно привести эту систему уравнений к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 & p(\mathbf{n}) \left(\lambda + \sum_{i=1}^N (\mu_i(1-p_{ii}) + \nu_i(1-r_{ii})) I_{\{n_i \neq 0\}} \right) = \\
 & = \sum_{i=1}^N p(\mathbf{n} - \mathbf{e}_i) \lambda p_{0i} I_{\{n_i \neq 0\}} + \sum_{i=1}^N p(\mathbf{n} + \mathbf{e}_i) (\mu_i p_{i0} + \nu_i r_{i0}) + \\
 & + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N p(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i) (\mu_j p_{ji} + \nu_j r_{ji}) I_{\{n_i \neq 0\}}, \mathbf{n} \in X.
 \end{aligned}$$

Но эта система совпадает с системой уравнений глобального равновесия (2.2) для сети Джексона с экспоненциальным ограничением на время пребывания вызовов в подсистемах [5]. Более того, нетрудно понять, что для этих сетей совпадают системы прямых и обратных уравнений Колмогорова, а также совпадают уравнения Колмогорова для безусловных вероятностей $P\{\mathbf{n}(t) = \mathbf{n}\}$. Очевидно, цепь Маркова с непрерывным временем $\{\mathbf{n}(t)\}$ для этих цепей консервативна и регулярна. Следовательно [9], имеют место системы прямых и обратных уравнений Колмогорова для условных вероятностей

(вероятностей перехода) и системы уравнений Колмогорова для безусловных вероятностей, а решения систем прямых и обратных уравнений совпадают. Значит, цепь Маркова $\{\mathbf{n}(t)\}$ для обоих процессов является феллеровской (напомним, что цепь Маркова называется феллеровской, если инфинитезимальные характеристики, т. е. интенсивности перехода и интенсивности выхода однозначно определяют вероятности перехода $p_{nm}(t)$). Если начальное распределение для обеих цепей совпадает, то совпадают и их конечномерные распределения, т. е. эти цепи эквивалентны в широком смысле. При выполнении условия эргодичности (2.3) обе цепи эргодичны, а эргодическое стационарное распределение для них имеет форму произведения (2.4). Таким образом, с учетом [9] имеет место следующий результат.

Теорема 3.1. Если матрица маршрутизации для сети с экспоненциальными ограничениями на время пребывания неприводима, то для сети с экспоненциальными ограничениями на время ожидания и сигналами перемещения заявок при выполнении условия

$$\rho_i = \frac{\lambda \varepsilon_i}{\mu_i + \nu_i} < 1, \quad i = \overline{1, N},$$

цепь Маркова $\mathbf{n}(t)$ эргодична, а ее единственное стационарное распределение имеет форму произведения $p(\mathbf{n}) = p_1(n_1)p_2(n_2)\dots p_N(n_N)$ с множителями $p_i(n_i) = \rho_i^{n_i}(1 - \rho_i)$, где $\{\varepsilon_i, i = \overline{1, N}\}$ – решение уравнения трафика (2.1):

$$\varepsilon_j = p_{0j} + \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \frac{\mu_i p_{ij} + \nu_i r_{ij}}{\mu_i + \nu_i}, \quad j = \overline{1, N}.$$

Хотя физическое описание сети с экспоненциальными ограничениями на время пребывания в сети с экспоненциальными ограничениями на время ожидания и потоками сигналов перемещения вызовов существенно отличается, обе сети описываются одним и тем же в широком смысле случайным марковским процессом и имеют одно и то же стационарное распределение.

Заключение

Исследовались открытые сети с однолинейными подсистемами, что ограничивает возможность применения полученных результатов. Некоторые результаты для сетей с многоканальными подсистемами автором получены, но пока не опубликованы, а другие находятся в стадии исследования. В последнее время автором и его аспирантом получен первый результат [10] по инвариантности стационарного распределения по отношению к закону распределения времен обслуживания вызовов при фиксированных моментах первого порядка для сетей с экспоненциальными ограничениями на время пребывания и дисциплиной абсолютного приоритета с дообслуживанием для вновь поступающего вызова (LCFS PR).

Отметим, что возможность варьирования матрицами маршрутизации обслуженных и не дождавшихся обслуживания вызовов позволяет учитывать самые разнообразные практические ситуации и снижать необходимым образом нагрузку в «узких местах» исследуемых сетей. А это весьма важно при модернизации уже существующих и проектировании новых информационно-вычислительных сетей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малинковский, Ю.В. Сети массового обслуживания с обходами узлов заявками / Ю.В. Малинковский // Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 2. – С. 102–110.
2. Малинковский, Ю.В. Сети с симметричными резервными каналами / Ю.В. Малинковский // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1986. – № 4. – С. 69–77.
3. Ковалев, Е.А. Сети массового обслуживания с резервными приборами / Е.А. Ковалев, Ю.В. Малинковский // Автоматика и вычислительная техника. – 1987. – № 2. – С. 64–70.
4. Ковалев, Е.А. Сети массового обслуживания с ограниченным временем ожидания в очередях / Е.А. Ковалев // Автоматика и вычислительная техника. – 1985. – № 2. – С. 50–55.
5. Malinkovskii, Yu.V. Jackson networks with single-line nodes and limited sojourn or waiting times / Yu.V. Malinkovsky // Automation and remote control. – 2015. – Vol. 76, № 4. – С. 67–79.
6. Malinkovskii, Yu.V. Stationary probability distribution for states of G-networks with constrained sojourn waiting time / Yu.V. Malinkovsky // Automation and remote control. – 2017. – Vol. 564, № 4. – С. 155–167.
7. Малинковский, Ю.В. Замкнутая сеть Гордона – Ньюэлла с однолинейными полюсами и экспоненциально ограниченным временем ожидания запросов / Ю.В. Малинковский, В.А. Немилостивая // Информатика. – 2023. – Т. 20, № 4. – С. 48–55.
8. Немилостивая, В.А. Сети Джексона с однолинейными станциями и экспоненциальными ограничениями на времена ожидания требований / В.А. Немилостивая, Ю.В. Малинковский // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2023. – № 6 (141). – С. 92–98.
9. Гихман, И.И. Теория случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – Москва: Наука. – 1972. – Т. II. – 640 с.
10. Малинковский, Ю.В. Инвариантность стационарного распределения открытой сети обслуживания с экспоненциальным ограничением на время пребывания / Ю.В. Малинковский, С.А. Евмененко // Автоматика и телемеханика. – 2024. – № 9. – С. 93–100.

Поступила в редакцию 02.09.2024.

Информация об авторах

Малинковский Юрий Владимирович – д.ф.-м.н., профессор

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В.Г. Сафонов¹, А.Н. Скиба²¹Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск²Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

CHARACTERIZATION OF SOME CLASSES OF FINITE GROUPS

V.G. Safonov¹, A.N. Skiba²¹Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk²Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу; \mathbb{P} – множество всех простых чисел и $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – произвольное разбиение множества \mathbb{P} . Под σ -свойством группы мы подразумеваем любое ее свойство, которое зависит от σ и которое не подразумевает никаких ограничений на σ . В статье анализируются дальнейшие приложения теории σ -свойств группы при изучении обобщенных T -групп и других классов конечных групп.

Ключевые слова: конечная группа, σ -свойство группы, σ -субнормальная подгруппа, σ -перестановочная подгруппа, $P\sigma T$ -группа.

Для цитирования: Сафонов, В.Г. Характеризация некоторых классов конечных групп / В.Г. Сафонов, А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 57–64. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_57. – EDN: FSGNTY

Abstract. Throughout the paper, all groups are finite and G always denotes a finite group; \mathbb{P} is the set of all primes and $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ is an arbitrary partition of \mathbb{P} . By a σ -property of a group we mean any property of it that depends on σ and that does not imply any restrictions on σ . In this paper, further applications of the theory of σ -properties of a group in the study of generalized T -groups and other classes of finite groups are analyzed.

Keywords: finite group, σ -property of a group, σ -subnormal subgroup, σ -permutable subgroup, $P\sigma T$ -group.

For citation: Safonov, V.G. Characterization of some classes of finite groups / V.G. Safonov, A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 4 (61). – P. 57–64. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_57 (in Russian). – EDN: FSGNTY

Введение

На протяжении всей статьи все группы и G всегда обозначает конечную группу; $L(G)$ – решетка всех подгрупп группы G . Более того, \mathbb{P} – множество всех простых чисел, а $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение \mathbb{P} ; $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Если n – целое число, символ $\pi(n)$ обозначает множество всех простых чисел, делящих n ; $\pi(G) = \pi(|G|)$ – это множество всех простых чисел, делящих порядок G ; $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ и $\sigma(G) = \sigma(|G|)$ [1].

Под σ -свойством группы мы подразумеваем любое ее свойство, которое зависит от σ и которое не подразумевает никаких ограничений на σ [2], [3].

Сначала мы напомним некоторые концепции и примеры, которые играют основополагающую роль в теории σ -свойств группы.

Группа G называется: (i) σ -полной, если G имеет холлову σ_i -группу для всех $i \in I$; σ -примарной, если G является σ_i -группой для некоторого $i \in I$; σ -нильпотентной, если G является прямым произведением σ -примарных групп; σ -разрешимой, если каждый главный фактор G является σ -примарным.

(ii) Подгруппа A из G называется: σ -субнормальной в G , если в G существует цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G$$

такая, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является σ -примарной для всех $i = 1, \dots, n$; σ -перестановочной в G , если G σ -полна и A перестановочна со всеми холловыми σ_i -подгруппами G для всех $i \in I$.

Пример 0.1. В математической практике, мы часто имеем дело с одним из следующих специальных разбиений \mathbb{P} :

- (i) $\sigma = \sigma^1 := \{\{2\}, \{3\}, \{5\} \dots\}$;
- (ii) $\sigma = \sigma^\pi := \{\pi, \pi'\}$;
- (iii) $\sigma = \sigma^{1^\pi} := \{\{p_1\}, \dots, \{p_n\}, \pi'\}$, где

$$\pi = \{p_1, \dots, p_n\}.$$

(i) В случае, когда $\sigma = \sigma^1$, G является σ -примарной (соответственно, σ -разрешимой, σ -нильпотентной) тогда и только тогда, когда G является p -группой для некоторого простого p (соответственно, G разрешима, нильпотентна). В этом случае подгруппа A из G является: σ -субнормальной в G тогда и только тогда, когда A субнормальна в G ; σ -перестановочной в G тогда и только тогда, когда A перестановочна со всеми силовскими подгруппами из G .

(ii) В случае, когда $\sigma = \sigma^\pi$, G является σ -примарной (соответственно, σ -разрешимой, σ -нильпотентной) тогда и только тогда, когда G является либо π -группой, либо π' -группой (соответственно, G является π -отделимой, π -разложимой, т. е. $G = O_\pi(G) \times O_{\pi'}(G)$); подгруппа A из G является σ^π -субнормальной в G тогда и только тогда, когда G имеет цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G,$$

где $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ или $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является либо π -группой, либо π' -группой для всех $i = 1, \dots, n$. В этом случае мы говорим, следуя [4], [5], что A является π, π' -субнормальной в G .

Подгруппа A из G является σ^π -перестановочной в G тогда и только тогда, когда G имеет как холлову π -подгруппу, так и холлову π' -подгруппу и A перестановочна со всеми такими холловыми подгруппами из G . В этом случае мы говорим, следуя [4], [5], что A является π, π' -перестановочной в G .

(iii) В случае, когда $\sigma = \sigma^{1^\pi}$, G является σ -примарной (соответственно, σ -разрешимой, σ -нильпотентной) тогда и только тогда, когда G является либо π' -группой, либо p -группой для некоторого $p \in \pi$ (соответственно, G является π -разрешимой, π -специальной [6], [7], т. е.

$$G = O_{p_1}(G) \times \dots \times O_{p_n}(G) \times O_{\pi'}(G);$$

подгруппа A из G является σ^{1^π} -субнормальной в G тогда и только тогда, когда G имеет цепь подгрупп

$$A = A_0 \leq A_1 \leq \dots \leq A_n = G,$$

где $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ или $A_i / (A_{i-1})_{A_i}$ является либо p -группой для некоторого $p \in \pi$, либо π' -группой для всех $i = 1, \dots, n$. В этом случае мы говорим, что A является 1^π -субнормальной [4], [5] в G .

Подгруппа A из G является σ^{1^π} -перестановочной в G тогда и только тогда, когда G имеет холлову π' -подгруппу и A перестановочна со всеми холловскими π' -подгруппами и со всеми

силовскими p -подгруппами из G для всех $p \in \pi$. В этом случае мы говорим, что A является 1^π -перестановочной [4], [5] в G .

Фактически основы теории σ -свойств группы были заложены в работах [2], [3] [6], где методами теории были найдены σ -обобщения теоремы Виландта о решетке субнормальных подгрупп [8] и результатов Дескинза – Кегеля [9], [10] о силовских перестановочных подгруппах конечных групп.

Напомним, что подгруппа A конечной группы G называется перестановочной с подгруппой B , если $AB = BA$. Если A перестановочна во всех силовских подгруппах G , то A называется силовской перестановочной или S -перестановочной в G .

Напомним, что верна следующая теорема.

Теорема 0.2 (Виландт, [8]). Множество всех субнормальных подгрупп группы G образует подрешетку в $\mathcal{L}(G)$.

Основные свойства силовских перестановочных подгрупп были доказаны в работах [9], [10].

Теорема 0.3. Если подгруппа A силовски перестановочна в группе G , то A субнормальна в G (Кегель [9]) и ее секция A / A_G нильпотентна (Дескинз [10]).

Теорема 0.4 (Кегель [9]). Множество всех силовских перестановочных подгрупп группы G образует подрешетку в $\mathcal{L}(G)$.

Но фактически, эти три классических результата являются специальными случаями следующих теорем.

Теорема 0.5 (А.Н. Скиба [3]). Если подгруппа A σ -полной группы G является σ -перестановочной в G , то A σ -субнормальна в G и ее секция A / A_G σ -нильпотентна.

Теорема 0.6 (Скиба [3]). (i) Множество всех σ -субнормальных подгрупп группы G образует подрешетку в $\mathcal{L}(G)$.

(ii) Множество всех σ -перестановочных подгрупп σ -полной группы G образует подрешетку в $\mathcal{L}(G)$.

Теоремы 0.2, 0.3 и 0.4 являются частными случаями теорем 0.5 и 0.6, где $\sigma = \sigma^1$ (см. пример 0.1 (i)). Все остальные частные случаи теорем 0.5 и 0.6 являются новыми. В частности, ввиду примера 0.1 (ii) (iii) мы имеем следующие результаты.

Теорема 0.7. Предположим, что группа G имеет холлову π -подгруппу и холлову π' -подгруппу.

(i) Если подгруппа A группы G перестановочна со всеми холловыми π -подгруппами и всеми холловыми π' -подгруппами G , то A π, π' -субнормальна в G и ее секция A / A_G π -разложима.

(ii) Множество всех подгрупп из G , перестановочных со всеми ее холловыми π -подгруппами и

всеми холловыми π' -подгруппами, образует подрешетку в $\mathcal{L}(G)$.

Теорема 0.8. *Предположим, что группа G имеет холлову π' -подгруппу.*

(i) *Если подгруппа A группы G перестановочна со всеми холловыми π' -подгруппами и со всеми силовскими p -подгруппами G для всех $p \in \pi$, то A 1π -субнормальна в G и ее секция A/A_G π -специальна.*

(ii) *Множество всех подгрупп группы G , перестановочных со всеми холловыми π' -подгруппами и всеми силовскими p -подгруппами G для всех $p \in \pi$, образует подрешетку в $\mathcal{L}(G)$.*

Теорема 0.9. *Множество всех π, π' -субнормальных подгрупп и множество всех 1π -субнормальных подгрупп группы G являются подрешетками в $\mathcal{L}(G)$.*

В данной работе мы обсуждаем некоторые новые результаты теории σ -свойств группы.

1 $P\sigma T$ -группы

Теоремы 0.5 и 0.6 нашли приложения в работах многих авторов. Отметим, в частности, что работа [3], где были доказаны эти два результата, имеет уже более 300 цитирований в публикациях Х. Аль-Шаро, Д.С. Бейдлемана, А. Баллестера-Болинчеса, Х. Биня, А.Ф. Васильева, З. Ванга, Н.Н. Воробьева, Н.Т. Воробьева, В. Го, С. Жанга, М.С. Педрасы-Агилеры, М. Ферраро, М. Тромбетти, Перес-Калабуинг, С. Као, А-Мин Лю, Д. Сонга, А.Н. Скибы, С.Ф. Каморникова, В.Н. Тютянова, Д.А. Сеницы, И.Н. Сафоновой, В.Г. Сафонова, М.М. Сарокиной, В.И. Мурашко, В.А. Грицковой, В.С. Закревской, В.Н. Рыжик, Дж. Хуана, А.А. Хелиэля, М.М. Шомрани и многих других авторов.

И первые глубокие приложения теоремы 0.5 и 0.6 нашли в работах [3], [6] при решении проблемы описания σ -разрешимых $P\sigma T$ -групп.

Определение 1.1. Мы говорим, следуя [2], [3], что σ -полная группа G является $P\sigma T$ -группой, если σ -перестановочность является транзитивным отношением в G , т. е., если K является σ -перестановочной подгруппой группы H и H является σ -перестановочной подгруппой группы G , то K является σ -перестановочной подгруппой группы G .

В случае, когда $\sigma = \sigma^1$, $P\sigma T$ -группа также называется PST -группой [11].

Описание PST -групп было впервые получено Агравалом [12] для разрешимого случая, и Робинсоном в [13] – для общего случая. В дальнейших публикациях (см. главу 2 книги [11]) авторы обнаружили и описали многие другие интересные характеристики PST -групп.

Ввиду результатов работ [12], [13] и многих других известных результатов о структуре

PST -групп [11, гл. 2], вполне естественной и интересной является следующая проблема.

Проблема 1.2 [2], [3]. *Какова структура σ -полной $P\sigma T$ -группы?*

Эта задача оказалась очень сложной, и даже в σ -разрешимом случае ее решение потребовало разработки многих аспектов теории σ -свойств группы. Теория σ -разрешимых $P\sigma T$ -групп была в основном разработана в работах [3], [4], [16]–[20] и следующая теорема является ключевым результатом в этом направлении.

Теорема 1.3 (см. теорему А в [6]). *Если G является σ -разрешимой $P\sigma T$ -группой и $D = G^{\sigma^1}$ – ее σ -нильпотентный корадикал G , то выполняются следующие условия:*

(i) $G = D \rtimes M$, где D является абелевой холловской подгруппой G нечетного порядка, M является σ -нильпотентной и каждый элемент G индуцирует степенной автоморфизм в D ;

(ii) $O_{\sigma_i}(D)$ имеет нормальное дополнение в холловской σ_i -подгруппе G для всех i .

Обратно, если условия (i) и (ii) выполняются для некоторых подгрупп D и M из G , то G является σ -разрешимой $P\sigma T$ -группой.

Фактически, теорема 1.3 является главным итогом работ [3], [6].

В статье [4] эта проблема 1.2 решена при условии, что холловские σ_i -подгруппы G сверхразрешимы для всех $i \in I$.

Мы используем $R(D)$ для обозначения наибольшей нормальной разрешимой подгруппы группы D .

Мы говорим, что:

(А) $(D, \Phi(D); U_1, \dots, U_k)$ является комплексом Робинсона (комплексом Робинсона в случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$) группы G , если $D \neq 1$ является нормальной подгруппой группы G такой, что:

(i) $D/\Phi(D) = U_1/\Phi(D) \times \dots \times U_k/\Phi(D)$, где $U_i/\Phi(D)$ является простым не- σ -примарным главным фактором группы G для всех i , $\Phi(D) = Z(D)$, и

(ii) каждый главный фактор G ниже $\Phi(D)$ является циклическим.

(В) $(D, \Phi(D); U_1, \dots, U_k)$ является обобщенным σ -комплексом Робинсона G , если $D \neq 1$ является нормальной подгруппой в G такой, что $D/\Phi(D) = U_1/\Phi(D) \times \dots \times U_k/\Phi(D)$, где $U_i/\Phi(D)$ является простым не- σ -примарным главным фактором G для всех i и $\Phi(D) = Z(D)$.

(С) $(D, \Phi(D); U_1, \dots, U_k)$ является слабым σ -комплексом Робинсона группы G , если $D \neq 1$ является нормальной подгруппой группы G , такой что $D/\Phi(D) = U_1/\Phi(D) \times \dots \times U_k/\Phi(D)$, где

$U_i / \Phi(D)$ является простым не- σ -примарным главным фактором группы G для всех i и $\Phi(D) = R(D)$.

Пример 1.4. (i) Пусть

$$G = SL(2, 7) \times A_7 \times A_5 \times B,$$

где $B = C_{43} \times C_7$ является неабелевой группой порядка 301 и пусть

$$\sigma = \{\{2, 3, 5\}, \{7, 43\}, \{2, 3, 5, 7, 43\}'\}.$$

Тогда

$$(SL(2, 7) \times A_7, Z(SL(2, 7)); SL(2, 7), A_7, Z(SL(2, 7)))$$

является σ -комплексом Робинсона G и

$$(SL(2, 7) \times A_7 \times A_5, Z(SL(2, 7));$$

$$SL(2, 7), A_7, Z(SL(2, 7)), A_5, Z(SL(2, 7)))$$

является комплексом Робинсона G .

(ii) Если $(D, Z(D); U_1, \dots, U_k)$ является комплексом Робинсона σ^π для G (см. пример 0.1 (ii)), то $U_i / Z(D)$ не является ни π -группой, ни π' -группой, и в этом случае мы говорим, что $(D, Z(D); U_1, \dots, U_k)$ является π, π' -комплексом Робинсона для G .

(iii) Если $(D, Z(D); U_1, \dots, U_k)$ является комплексом Робинсона $\sigma^{1\pi}$ для G (см. пример 0.1(iii)), то $U_i / Z(D)$ не является ни π' -группой, ни p -группой для всех $p \in \pi$, и в этом случае мы говорим, что $(D, Z(D); U_1, \dots, U_k)$ является комплексом Робинсона 1π для G .

(iv) Пусть L является 5-Фраттини модулем для A_5 . Пусть K является нерасщепляющим расширением L с помощью A_5 . Тогда для некоторой нормальной подгруппы N из K мы имеем $L/N \leq \Phi(K/N)$ и $C_K(L/N) = L$, поскольку порядок мультипликатора Шура $M(K/A) = M(A_5)$ группы A_5 не делится на 5 (см. раздел 4.15 (A) в [14, гл. 4]). Следовательно, $A \not\leq Z(K)$.

Теперь $G = K \times A_7 \times B$, где $B = C_{43} \times C_7$ является неабелевой группой порядка 301 и пусть $\sigma = \{\{2, 3\}, \{5, 7, 43\}, \{2, 3, 5, 7, 43\}'\}$. Тогда

$$(K \times A_7, L; K, LA_7)$$

является слабым σ -комплексом Робинсона G и этот комплекс не является обобщенным σ -комплексом Робинсона G .

Пусть $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Если $\pi = \emptyset$, то мы положим $O_\pi(G) = O_\emptyset(G) = 1$. Мы говорим, что G удовлетворяет N_π , если всякий раз, когда N является разрешимой нормальной подгруппой G , π' -элементы G индуцируют степенные автоморфизмы в $O_\pi(G/N)$. Мы также говорим, следуя [11, определение 2.1.18], что G удовлетворяет N_p , если всякий раз, когда N является разрешимой нормальной подгруппой G , p' -элементы G

индуцируют степенные автоморфизмы в $O_p(G/N)$.

В работе [15] доказана следующая теорема, дающая решение проблемы 1.2 в общем случае.

Теорема 1.5. Пусть G является σ -полной группой. Если G является $P\sigma T$ -группой, то G имеет нормальную подгруппу D такую, что:

(i) G/D является σ -разрешимой $P\sigma T$ -группой,

(ii) если $D \neq 1$, G имеет обобщенный

σ -комплекс Робинсона $(D, \Phi(D); U_1, \dots, U_k)$, и

(iii) для любого множества

$$\{j_1, \dots, j_r\} \subseteq \{1, \dots, k\},$$

где $1 \leq r < k$, G и $G/U_{j_1}' \cdots U_{j_r}'$ удовлетворяют

N_{σ_i} для всех $\sigma_i \in \sigma(\Phi(D))$.

Более того, если G имеет слабый σ -комплекс Робинсона $(D, \Phi(D); U_1, \dots, U_k)$ и условия (i) и (iii) выполняются для G , то G является $P\sigma T$ -группой.

Мы говорим, что группа G является обобщенно сверхразрешимой, если каждый абелев главный фактор G является циклическим.

В качестве применения теоремы 1.5 может быть доказана следующая теорема [15].

Теорема 1.6. Предположим, что G является σ -полной группой и все холловы σ_i -подгруппы из G обобщенно сверхразрешимы для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$. Тогда G является $P\sigma T$ -группой, если и только если G имеет нормальную подгруппу D такую, что:

(i) G/D является σ -разрешимой $P\sigma T$ -группой,

(ii) если $D \neq 1$, G имеет σ -комплекс Робинсона $(D, \Phi(D); U_1, \dots, U_k)$, и

(iii) для любого множества

$$\{j_1, \dots, j_r\} \subseteq \{1, \dots, k\},$$

где $1 \leq r < k$, G и $G/U_{j_1}' \cdots U_{j_r}'$ удовлетворяют

N_{σ_i} для всех $\sigma_i \in \sigma(\Phi(D))$.

Следующее утверждение доказано в работе [4].

Следствие 1.7. Предположим, что G является σ -полной группой и все холловы σ_i -подгруппы из G сверхразрешимы для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$. Тогда G является $P\sigma T$ -группой, если и только если G имеет нормальную подгруппу D такую, что:

(i) G/D является σ -разрешимой $P\sigma T$ -группой,

(ii) если $D \neq 1$, G имеет σ -комплекс Робинсона $(D, \Phi(D); U_1, \dots, U_k)$, и

(iii) для любого множества

$$\{j_1, \dots, j_r\} \subseteq \{1, \dots, k\},$$

где $1 \leq r < k$, G и $G/U_{j_1}' \cdots U_{j_r}'$ удовлетворяют

N_{σ_i} для всех $\sigma_i \in \sigma(\Phi(D))$.

Ввиду примера 0.1 (iii) из теоремы 1.3 получаем следующее

Следствие 1.8. Предположим, что G имеет холлову π' -подгруппу. Тогда условие 1π -перестановочности является транзитивным отношением в G тогда и только тогда, когда G имеет нормальную подгруппу D такую, что:

(i) G/D является π -разрешимой и условие 1π -перестановочности является транзитивным отношением в G/D ,

(ii) если $D \neq 1$, G имеет обобщенный 1π -комплекс Робинсона $(D, \Phi(D); U_1, \dots, U_k)$, и

(iii) для любого множества $\{j_1, \dots, j_r\} \subseteq \{1, \dots, k\}$,

где $1 \leq r < k$, G и $G/U'_{j_1} \dots U'_{j_r}$ удовлетворяют N_p для всех $p \in \pi(\Phi(D))$ и, также, N_{π} для случая $O_{\pi}(\Phi(D)) \neq 1$.

Ввиду примера 0.1 (i) из следствия 1.8 получаем следующее утверждение, доказанное Робинсоном в работе [13].

Следствие 1.9. Группа G является PST-группой в том и только в том случае, когда G имеет совершенную нормальную подгруппу D такую, что:

(i) G/D является разрешимой PST-группой,

(ii) если $D \neq 1$, G имеет комплекс Робинсона $(D, \Phi(D); U_1, \dots, U_k)$, и

(iii) для любого множества $\{j_1, \dots, j_r\} \subseteq \{1, \dots, k\}$,

где $1 \leq r < k$, G и $G/U'_{j_1} \dots U'_{j_r}$ удовлетворяют N_p для всех $p \in \pi(\Phi(D))$.

Теорема 1.3 также имеет много других следствий. В частности, ввиду примера 0.1 (ii) из теоремы 1.3 получаем следующее

Следствие 1.10. Предположим, что G имеет холлову π -подгруппу и холлову π' -подгруппу. Тогда условие π, π' -перестановочности является транзитивным отношением в G в том и только в том случае, когда G имеет нормальную подгруппу D такую, что:

(i) G/D является π -отделимой и условие π, π' -перестановочности является транзитивным отношением в G/D ,

(ii) если $D \neq 1$, G имеет обобщенный π, π' -комплекс Робинсона $(D, \Phi(D); U_1, \dots, U_k)$, и

(iii) для любого множества $\{j_1, \dots, j_r\} \subseteq \{1, \dots, k\}$,

где $1 \leq r < k$, G и $G/U'_{j_1} \dots U'_{j_r}$ удовлетворяют N_{π} если $O_{\pi}(\Phi(D)) \neq 1$ и $N_{\pi'}$ если $O_{\pi'}(\Phi(D)) \neq 1$.

В работе [15] найдена также следующая новая характеристика σ -разрешимых PST-групп.

Теорема 1.11. Пусть G – σ -разрешимая группа и $D = G^{\sigma\pi}$ – σ -нильпотентный корадикал G . Тогда G является PST-группой в том и только в том случае, когда D изолирует A^G / A_G , то

есть, если $D \cap A^G = D \cap A_G$ для каждой σ -субнормальной подгруппы A из G .

Этот результат является новым для каждого специального разбиения множества \mathbb{P} .

В частности, взяв $\sigma = \sigma^1$, мы видим, что имеет место следующий новый результат о PST-группах.

Теорема 1.12. Пусть G – разрешимая группа и $D = G^{\sigma\pi}$ – нильпотентный корадикал G . Тогда G является PST-группой в том и только в том случае, когда D изолирует A^G / A_G , то есть, если $D \cap A^G = D \cap A_G$ для каждой субнормальной подгруппы A из G .

Приведем еще два интересных следствия теоремы 1.11.

Теорема 1.13. Пусть G – π -отделимая группа и D – π -разложимый корадикал G . Тогда π, π' -перестановочность является транзитивным отношением в G в том и только в том случае, когда D изолирует A^G / A_G для каждой π, π' -субнормальной подгруппы A из G .

Теорема 1.14. Пусть G – π -разрешимая группа, а D – π -специальный корадикал G . Тогда 1π -перестановочность является транзитивным отношением в G в том и только в том случае, когда D изолирует A^G / A_G для каждой 1π -субнормальной подгруппы A из G .

2 Обобщенно нормальные подгруппы

Анализ теорем 1.11 и 1.12 привел к открытию, восходящих к [18], новых решеточных методов исследования обобщенных T -групп и других классов групп, полезных для приложений.

Начнем со следующих определений, мотивацией для которых являются теоремы 1.11 и 1.12 и которые были впервые введены и применялись в работе [15].

Напомним, что подгруппа A из G покрывает (соответственно изолирует) главный (композиционный) фактор H/K из G , если $AH = AK$ (если, соответственно, $A \cap H = A \cap K$). Эти концепции восходят к классической работе Ф. Холла [21], где было доказано, что каждый системный нормализатор разрешимой группы G покрывает все центральные главные факторы и изолирует все эксцентральные главные факторы G .

Подгруппа, которая либо покрывает, либо изолирует каждый главный фактор группы G , называется CAP-подгруппой группы G . Нетрудно показать, что каждая подгруппа сверхразрешимой группы и каждая максимальная подгруппа разрешимой группы являются CAP-подгруппами.

В отчетный период мы применяли новый, восходящий к [18], подход к использованию идеи изолирования для доказательства новых характеристик различных классов групп.

Пусть $\mathcal{L}(G)$ – это решетка всех подгрупп G ; $\mathcal{L}_{sn}(G)$ – это решетка всех субнормальных подгрупп G и $G \in \mathcal{L}$ – это подрешетка в $\mathcal{L}_{sn}(G)$, то есть $A \cap B, \langle A, B \rangle \in \mathcal{L}$ для всех $A, B \in \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_{sn}(G)$.

Пусть A – подгруппа G . Тогда: A^c – это \mathcal{L} -замыкание A в G , то есть пересечение всех подгрупп в \mathcal{L} , содержащих A , а A_c – это \mathcal{L} -ядро A в G , то есть подгруппа A , порожденная всеми подгруппами A , принадлежащими \mathcal{L} .

Пример 2.1. (i) A^G – нормальное замыкание A в G , а A_G – ядро A в G .

(ii) A^{snG} – субнормальное замыкание A в G , а A_{snG} – субнормальное ядро A в G .

(iii) Подгруппа A из G называется *силовски перестановочной* или *S-перестановочной* [11] в G , если A перестановочна с каждой силовой подгруппой p из G , то есть $AP = PA$. S-перестановочные подгруппы из G образуют подрешетку решетки всех субнормальных подгрупп из G (Кегель) и этот важный результат позволяет связать с каждой подгруппой A из G две S-перестановочные подгруппы из G : S-ядро A_{sG} из A в G [22], то есть подгруппа из A , порожденная всеми S-перестановочными подгруппами из G , содержащимися в A , и S-перестановочное замыкание A^{sG} из A в G [23], то есть пересечение всех S-перестановочных подгрупп из G , содержащих A .

Определение 2.2. Пусть A и N – подгруппы G , и предположим, что $G \in \mathcal{L}$ – подрешетка $\mathcal{L}_{sn}(G)$. Тогда мы говорим, что A – N - \mathcal{L} -подгруппа G , если либо $A \in \mathcal{L}$, либо $A_c < A < A^c$ и N изолирует каждый композиционный фактор G между A_c и A^c .

В частности, мы говорим, что:

(i) A является N -нормальной в G , если либо A нормально в G , либо $A_G < A < A^G$, и N изолирует каждый композиционный фактор G между A_G и A^G ;

(ii) A является N -субнормальной в G , если либо A субнормально в G , либо $A_{snG} < A < A^{snG}$, и N изолирует каждый композиционный фактор G между A_{snG} и A^{snG} ;

(iii) A является N -S-перестановочной в G , если либо A является S-перестановочной в G , либо $A_{sG} < A < A^{sG}$ и N изолирует каждый композиционный фактор G между A_{sG} и A^{sG} .

В работе [15] эти концепции нашли следующие применения.

Теорема 2.3. Пусть \mathfrak{M} – класс всех разрешимых групп S с нильпотентной длиной $l(S) \leq r$. Тогда G – разрешимая группа (соответственно, разрешимая группа с $l(G) \leq r+1$) в том

и только в том случае, когда выполняются следующие два условия:

(i) G имеет такую нормальную подгруппу N , для которой фактор группа G/N разрешима (соответственно, G/N разрешима и $l(G/N) \leq r+1$), и

(ii) каждая \mathfrak{M} -критическая подгруппа группы G является N -субнормальной в G .

Теорема 2.4. (i) Группа G разрешима тогда и только тогда, когда в G имеется нормальная подгруппа N такая, что G/N разрешима и каждая подгруппа Шмидта группы G N -субнормальна в G .

(ii) Группа G метанильпотентна тогда и только тогда, когда в G имеется нормальная подгруппа N такая, что G/N метанильпотентна и каждая подгруппа Шмидта группы G N -субнормальна в G .

В работе [25] В.Н. Семенчук доказал следующий специальный случай этой теоремы.

Следствие 2.5. Если каждая подгруппа Шмидта группы G субнормальна в G , то G метанильпотентна.

Следствие 2.6. Пусть \mathfrak{M} – класс всех разрешимых групп S с нильпотентной длиной $l(S) \leq r$. Тогда G – разрешимая группа (соответственно, разрешимая группа с $l(G) \leq r+1$) в том и только в том случае, когда выполняются следующие два условия:

(i) G имеет такую нормальную подгруппу N , для которой фактор группа G/N разрешима (соответственно, G/N разрешима и $l(G/N) \leq r+1$), и

(ii) каждая \mathfrak{M} -критическая подгруппа группы G является N -субнормальной в G .

Теорема 2.7. Производная подгруппа G' группы G нильпотентна тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

(i) G имеет такую нормальную подгруппу N , для которой производная подгруппа $(G/N)'$ фактор группы G/N нильпотентна, и

(ii) каждая подгруппа Шмидта группы G является N -субнормальной в G .

Следствие 2.8. Производная подгруппа G' группы G является нильпотентной тогда и только тогда, когда G имеет нормальную подгруппу N такую, что производная подгруппа $(G/N)'$ группы G/N нильпотентна и каждая подгруппа Шмидта группы G N -субнормальна в G .

В работе [26] В.С Монахов и В.Н. Княгина доказали следующий случай этой теоремы.

Следствие 2.9. Если каждая подгруппа Шмидта группы G субнормальна в G , то производная подгруппа G' группы G нильпотентна.

Теорема 2.10. Группа G является r -разрешимой тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

(i) G имеет нормальную подгруппу N с p -разрешимым фактором G/N , и

(ii) в каждой максимальной цепочке $M_2 < M_1 < M_0 = G$ группы G длины 2 по крайней мере одна из подгрупп M_2 или M_1 является N -субнормальной в G , тогда G p -разрешима.}

В работе [27] Спенсер доказал следующий результат.

Следствие 2.11. Если в каждом максимальной цепи $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ группы G длины 3 хотя бы одна из подгрупп M_3 , M_2 или M_1 субнормальна в G , то G разрешима.

3 $Q\sigma T$ -группы

Напомним, что подгруппа M группы G называется модулярной в G , если M – модулярный элемент в смысле Куроша решетки $\mathcal{L}(G)$, т. е.

(i) $\langle X, M \cap Z \rangle = \langle X, M \rangle \cap Z$ для всех $X \leq G, Z \leq G$ таких, что $X \leq Z$, и

(ii) $\langle M, Y \cap Z \rangle = \langle M, Y \rangle \cap Z$ для всех $Y \leq G, Z \leq G$ таких, что $M \leq Z$.

Определение 3.1. Мы говорим, что G является $Q\sigma T$ -группой, если каждая σ -субнормальная подгруппа в G является модулярной в G .

В работе [15] доказана следующая теорема, обобщающая основной результат работы Робинсона [13].

Теорема 3.2. Предположим, что G – σ -полная группа. Тогда G является $Q\sigma T$ -группой, если и только если G имеет нормальную подгруппу D такую, что:

- (i) G/D – σ -разрешимая $Q\sigma T$ -группа,
- (ii) если $D \neq 1$, G имеет σ -комплекс Робинсона $(D, Z(D); U_1, \dots, U_k)$ и
- (iii) для любого множества

$$\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, k\},$$

где $1 \leq r < k$, G и $G/U'_{i_1} \dots U'_{i_r}$ удовлетворяют N_{σ_i} для всех $\sigma_i \in \sigma(Z(D))$ и P_{σ_i} для всех $\sigma_i \in \sigma(D)$.

Прежде отметим, что данная теорема выделяет новый класс σ -сверхразрешимых групп и, кроме того, она дает условия, при которых группа факторизуется двумя холловскими подгруппами с единичным пересечением.

Но эта теорема имеет и ряд других приложений. Отметим некоторые из них.

В случае $\sigma = \sigma^{1\pi}$ из этой теоремы получаем следующее

Следствие 3.3. Предположим, что G имеет холлову π' -подгруппу. Тогда каждая π -субнормальная подгруппа группы G модулярна в G , если и только если G имеет нормальную подгруппу D такую, что:

- (i) G/D – π -разрешимая группа, в которой каждая π -субнормальная подгруппа модулярна,

(ii) если $D \neq 1$, G имеет π -комплекс Робинсона $(D, Z(D); U_1, \dots, U_k)$ и

(iii) для любого множества

$$\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, k\},$$

где $1 \leq r < k$, G и $G/U'_{i_1} \dots U'_{i_r}$ удовлетворяют

N_p для всех простых чисел p , делящих $|Z(D)|$, и $N_{\pi'}$, если $O_{\pi'}(Z(D)) \neq 1$, а также G и $G/U'_{i_1} \dots U'_{i_r}$ удовлетворяют P_p для всех простых чисел p , делящих $|D|$ и $P_{\pi'}$ если $O_{\pi'}(D) \neq 1$.

В случае $\pi = \mathbb{P}$ из следствия 3.3 получаем следующее

Следствие 3.4 (Робинсон [13]). G является PT -группой, если и только если G имеет нормальную совершенную подгруппу D такую, что:

(i) G/D – разрешимая PT -группа и

(ii) если $D \neq 1$, G имеет комплекс Робинсона $(D, Z(D); U_1, \dots, U_k)$ и

(iii) для любого множества

$$\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, k\},$$

где $1 \leq r < k$, G и $G/U'_{i_1} \dots U'_{i_r}$ удовлетворяют

N_p для всех $p \in \pi(Z(D))$ и P_p для всех $p \in \pi(D)$.

Теорема 3.2 имеет также много других следствий. В частности, из теоремы 3.2 получаем следующее

Следствие 3.5. Предположим, что G имеет холл π -подгруппа и холлова π' -подгруппа. Тогда каждая π, π' -субнормальная подгруппа группы G модулярна в G , если и только если G имеет нормальную подгруппу D такую, что:

(i) G/D – π -отделимая группа, в которой любая π, π' -субнормальная подгруппа модулярна,

(ii) если $D \neq 1$, G имеет π, π' -комплекс Робинсона $(D, Z(D); U_1, \dots, U_k)$ и

(iii) для любого множества

$$\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, k\},$$

где $1 \leq r < k$, G и $G/U'_{i_1} \dots U'_{i_r}$ удовлетворяют

N_{π} , если $O_{\pi}(Z(D)) \neq 1$ и $N_{\pi'}$, если $O_{\pi'}(D) \neq 1$, а также G и $G/U'_{i_1} \dots U'_{i_r}$ удовлетворяют P_{π} , если $O_{\pi}(D) \neq 1$ и $P_{\pi'}$, если $O_{\pi'}(D) \neq 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Skiba, A.N. On some results in the theory of finite partially soluble groups / A.N. Skiba // Commun. Math. Stat. – 2016. – Vol. 4, № 3. – P. 281–309.
2. Skiba, A.N. On σ -properties of finite groups I / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2014. – № 4 (21). – P. 89–96.
3. Skiba, A.N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

4. *A Robinson description of finite $P\sigma T$ -groups* / X.-F. Zhang, W. Guo, I.N. Safonova, A.N. Skiba // *J. Algebra*. – 2023. – Vol. 631. – P. 218–235. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2023.04.023>
5. *Characterizations of some classes of finite σ -soluble $P\sigma T$ -groups* / H. Li, A.-M. Liu, I.N. Safonova, A.N. Skiba // *Comm. Algebra*. – 2024. – Vol. 52, iss. 1. – P. 128–139. – DOI: <https://doi.org/10.1080/00927872.2023.2235006>.
6. *Skiba, A.N.* Some characterizations of finite σ -soluble $P\sigma T$ -groups / A.N. Skiba // *J. Algebra*. – 2018. – Vol. 495. – P. 114–129.
7. *Guo, W.* On σ -supersoluble groups and one generalization of *CLT*-groups / W. Guo, A.N. Skiba // *J. Algebra*. – 2018. – Vol. 512. – P. 92–108.
8. *Wielandt, H.* Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen / H. Wielandt // *Math. Z.* – 1939. – Vol. 45. – P. 200–244.
9. *Kegel, O.H.* Sylow-Gruppen and Subnormalteilerendlicher / O.H. Kegel // *Gruppen, Math. Z.* – 1962. – Vol. 78. – P. 205–221.
10. *Deskins, W.E.* On quasinormal subgroups of finite groups / W.E. Deskins // *Math. Z.* – 1963. – Vol. 82. – P. 125–132.
11. *Ballester-Bolinches, A.* Products of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad. – Walter de Gruyter, Berlin – New York, 2010.
12. *Agrawal, R.K.* Finite groups whose subnormal subgroups permute with all Sylow subgroups / R.K. Agrawal // *Proc. Amer. Math. Soc.* – 1975. – Vol. 47. – P. 77–83.
13. *Robinson, D.J.S.* The structure of finite groups in which permutability is a transitive relation / D.J.S. Robinson // *J. Austral. Math. Soc.* – 2001. – Vol. 70. – P. 143–159.
14. *Gorenstein, D.* Finite simple groups. An introduction to their Classification / D. Gorenstein. – Plenum Press New York and London, 1982.
15. *Сафонов, В.Г.* Новые решеточные методы исследования групп / В.Г. Сафонов, А.Н. Скиба // Препринт, 2024.
16. *Zhu, X.* Finite σ -soluble groups in which σ -permutability is a transitive relation / X. Zhu, C. Cao, W. Guo // *Journal of Algebra and Its Applications*. – 2019. – Vol. 18, iss. 4. – P. 1950064 (11 pages). – DOI: 10.1142/S0219498819500646.
17. *Adarchenko, N.M.* A new characterization of finite σ -soluble $P\sigma T$ -groups / N.M. Adarchenko // *Algebra and Discrete Math.* – 2020. – Vol. 29, № 1. – P. 33–41.
18. *Skiba, A.N.* On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A.N. Skiba // *J. Algebra*. – 2020. – Vol. 550. – P. 69–85.
19. *G-covering subgroup systems for some classes of σ -soluble groups* / A.-M. Liu, W. Guo, I.N. Safonova, A.N. Skiba // *J. Algebra*. – 2021. – Vol. 585. – P. 280–293.
20. *Ballester-Bolinches, A.* On two classes of generalized *T*-groups / A. Ballester-Bolinches, M.C. Pedraza-Aguilera, V. Pérez-Calabuig // *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*. – 2023. – Vol. 117. – P. 105. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s13398-023-01443-5>.
21. *Hall, P.* On the system normalizers of a soluble Group / P. Hall // *Proc. London Math. Soc.* – 1937. – Vol. 43. – P. 307–328.
22. *Skiba, A.N.* On weakly *S*-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // *J. Algebra*. – 2007. – Vol. 315, № 1. – P. 192–209.
23. *Guo, W.* Finite groups with given *S*-embedded and *N*-embedded subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // *J. Algebra*. – 2009. – Vol. 321. – P. 2843–2860.
24. *On σ -permutable subgroups of σ -soluble finite groups* / Zhigang Wang, A.-Ming Liu, V.G. Safonov, A.N. Skiba // *Journal of Group Theory*. – 2024. – DOI: <https://doi.org/10.1515/jgth-2024-0012>.
25. *Семенчук, В.Н.* Конечные группы с системой минимальных не- \mathfrak{F} -групп / В.Н. Семенчук. – В книге Структура подгрупп конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1981. – С. 138–149.
26. *Монахов, В.С.* О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта / В.С. Монахов, В.Н. Княгина // *Сибирский математический журнал*. – 2004. – Т. 45, № 6. – С. 1316–1322.
27. *Spencer, A.E.* Maximal nonnormal chains in finite groups / A.E. Spencer // *Pacific J. Math.* – 1968. – Vol. 27, № 1. – P. 167–173.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф23РНФ-237) и Министерства образования Республики Беларусь (гранты № 20211328, № 20211778).

Поступила в редакцию 31.08.2024.

Информация об авторах

Сафонов Василий Григорьевич – д.ф.-м.н., профессор
Скиба Александр Николаевич – д.ф.-м.н., профессор

УДК 621.373.826

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_65
EDN: FSLULQ

ФОРМИРОВАНИЕ ТОПОЛОГИИ ПОВЕРХНОСТИ ПОКРЫТИЯ МЕТАЛЛОВ ТЕРМОХИМИЧЕСКИМ МЕТОДОМ В УСЛОВИЯХ ЛАЗЕРНОЙ АКТИВАЦИИ

А.Н. Купо, Н.Н. Федосенко, Е.Б. Шершнев, Ю.В. Никитюк, Н.А. Алешкевич

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

FORMATION OF THE SURFACE TOPOLOGY OF METAL COATINGS BY THE THERMOCHEMICAL METHOD UNDER LASER ACTIVATION CONDITIONS

A.N. Kupo, N.N. Fedosenko, E.B. Shershnev, Y.V. Nikitiuk, N.A. Alyashkevich

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Исследованы структурные особенности осадков никеля, меди, олова и серебра, сформированные в процессе электролиза с использованием активирующего лазерного излучения. Показано, что введение лазерного излучения в процессы электролиза позволяет получать гальванические покрытия с улучшенными эксплуатационными характеристиками, в частности электропроводностью, при скорости формирования заданной субмикронной микрогеометрии до 5,69 мкм/с.

Ключевые слова: *субмикронная топология, атомно-силовая микроскопия, локальное электрохимическое осаждение.*

Для цитирования: Формирование топологии поверхности покрытия металлов термохимическим методом в условиях лазерной активации / А.Н. Купо, Н.Н. Федосенко, Е.Б. Шершнев, Ю.В. Никитюк, Н.А. Алешкевич // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 65–69. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_65. – EDN: FSLULQ

Abstract. The structural features of deposits of nickel, copper, tin and silver formed during electrolysis using activating laser radiation have been studied. It has been shown that the introduction of laser radiation into electrolysis processes makes it possible to obtain electroplated coatings with improved performance characteristics, in particular electrical conductivity, at a rate of formation of a given submicron microgeometry of up to 5.69 $\mu\text{m/s}$.

Keywords: *submicron topology, atomic force microscopy, local electrochemical deposition.*

For citation: *Formation of the surface topology of metal coatings by the thermochemical method under laser activation conditions / A.N. Kupo, N.N. Fedosenko, E.B. Shershnev, Y.V. Nikitiuk, N.A. Alyashkevich // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 4 (61). – P. 65–69. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_65 (in Russian). – EDN: FSLULQ*

Introduction

Electrochemical deposition of metals was carried out in liquid electrolytes, where, under the influence of an electric field and a concentration gradient, cations move to the cathode and are reduced. As a result, a deficiency of metal ions occurs near the surface on which the deposition is carried out, which causes relaxation inhibition of the process. When exposed to laser radiation (LR), the concentration of highly active particles – electrons, ions, excited molecules – corresponds to its non-equilibrium thermodynamic state, which is the reason for a significantly different course of processes than in conventional thermochemistry [1]–[5]. Although the study of the described processes has been actively carried out for several decades, the task of determining the optimal technological modes of coating production at a high rate of deposition is still relevant [5].

1 Methods and techniques of the experiment

We formed electrochemical coatings using continuous and pulsed LR sources. In each case, lasers and recording equipment of different types were used, the sizes and materials of the electrodes, as well as electrolytes, varied. The main purpose of the LR in accordance with the thermal mechanism of electrolysis activation is to transport the largest possible amount of radiant energy to the interface of the “electrolyte-electrode” phases. In contrast, when implementing LR exposure according to the photochemical mechanism, it is important that as much of the LR energy as possible is absorbed in the electrolyte, initiating dissociation reactions. When setting up an experiment under the conditions corresponding to both variants of the process, the information about the sorption and spectral properties of electrolytes is important.

When the LR passes through the electrolyte layer, its intensity decreases, and for this reason, the

effective heat output of the heat source on the treated surface decreases. At the same time, it is assumed that the power density of the heat source W in the center of the zone of thermal influence of the LR is expressed through the intensity of LR I in accordance with the Bouguer – Lambert – Beer law [1], [2]:

$$W = (1 - R) I e^{-\varepsilon h},$$

where R – the reflection coefficient of the LR, ε – the spectral absorption coefficient of the precipitate material at the used wavelength LR; h – the thickness of the electrolyte layer.

In our research, the following types of electrolytes are most widely used in the technological processes of modern microelectronics [5]:

1) copper plating sulphate electrolyte ($\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ – 200 g/l, H_2SO_4 – 50 g/l);

2) nickel sulfate electrolyte ($\text{NiSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$ – 220 g/l, $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$ – 80 g/l, NaCl – 12 g/l, H_3BO_3 – 35 g/l);

3) silver plating ferrocyanide electrolyte (AgNO_3 – 40 g/l, $\text{K}_4\text{Fe}(\text{CN})_6 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$ – 150 g/l, K_2CO_3 – 25 g/l);

4) tin sulphuric acid electrolyte (SnSO_4 – 40 g/l, H_2SO_4 – 100 g/l, OC-20 – 4 g/l);

5) silver cyanide electrolyte ($\text{K}[\text{Ag}(\text{CN})_2]$ – 40 g/l, KCN – 50 g/l, K_2CO_3 – 40 g/l, KNO_3 – 60 g/l).

The spectral characteristics of these electrolytes in the wavelength range of 190–1100 nm were studied using the Cary-50 spectrophotometer (Varian, USA) of Agilent Technologies. The electrolyte absorption indicators presented in Table 1.1 were established.

Table 1.1 – Spectral distribution of extinction index ε (cm^{-1}) of the electrolytes under study at the intensity of the LR 10^{11} W/m^2

Electrolyte type	Wavelength λ , nm			
	266	355	532	1060
1	0.010	0.083	0.017	0.617
2	0.753	0.213	0.057	0.587
3	0.015	0.293	0.087	0.097
4	0.012	0.162	0.041	0.323
5	0.011	0.305	0.093	0.105

In practice, it is difficult to provide ideal conditions for a positive effect on both the electrolyte and the surface of the metal at the same time, so compromise options for activating processes are most often used, and before starting the calculations, it is necessary to know exactly the intensity of the radiation both absorbed by the electrolyte and falling on the surface of the electrode.

The activation of electrolysis processes with an improvement in the useful properties of coatings is also facilitated by the methods based on the selection of the electrolyte composition, changes in its temperature and acidity, and the use of periodic currents of a special shape.

However, methods of modifying the composition of the electrolyte, for example, such as the introduction of gloss-forming, leveling and anti-pitting additives, have a number of drawbacks, starting with high cost, and ending with contamination of the electrolyte with the decomposition products of these additives. All these disadvantages are associated with the need to complicate galvanic equipment.

For the experiments, the most optimal laser in terms of type and parameters was selected, taking into account the dependence of the reflectance coefficients of various materials on the wavelength of the LI, the radiation attenuation coefficient of the electrolyte and the proportion of the radiant energy absorbed by the electrolyte and substrate. The radiation energy in the pulse, its duration, and the diameter of the light spot on the treated surface should be considered as the main parameters characterizing laser technological installations. Yttrium aluminum garnet was used as the active element of the laser (YAG, $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$). Two types of laser systems were used:

1. «КВАНТ-12». Working mode – pulse-periodic; pulse laser energy – 12 J; pulse duration – $(1-4) \cdot 10^{-3}$ s; pulse repetition rate – (1–60) Hz.

2. LS-2137U. Energy in pulse when generated for different wavelengths: 532 nm was (536–448) mJ, 355 nm – (140–222) mJ, 266 nm – (93–120) mJ, 213 nm – (18–21) mJ, pulse duration 6–8 ns, a pulse repetition rate: 0,1–10 Hz.

The schematic diagram of the experimental setup designed to study the effect of laser radiation on the process of electrolytic deposition of metals is presented in Figure 1.1 [1], [2].

The formation of electrochemical coatings took place as follows. After passing through the optical system, the LI was focused on the cathode, where, due to the surface heat source, a heat-affected zone appeared. The anode and cathode were connected to a power source, the current of which was stabilized by software. The coordinate system provides for the mutual movement of the laser radiation source and the cathode, as well as the focusing of laser radiation. The anode was made with a hole designed to allow laser radiation to pass through the electrolyte to the cathode.

The resulting coatings were studied by atomic force microscopy (AFM) with the use of a software and hardware complex «Solver P47 PRO». By means of AFM technology and subsequent computer processing of the resulting three-dimensional array in accordance with the methods of mathematical statistics, it is possible to determine the geometric characteristics of the nanorelief, such as the average size of nanocrystallites (“grains”), the direction of the normal to their surface, the average width and depth of the intergrain gap, and others. Based on this information, it is possible to predict what macroscopic properties (in particular, thermal and

electrical conductivity, microhardness) the surface under study will have.

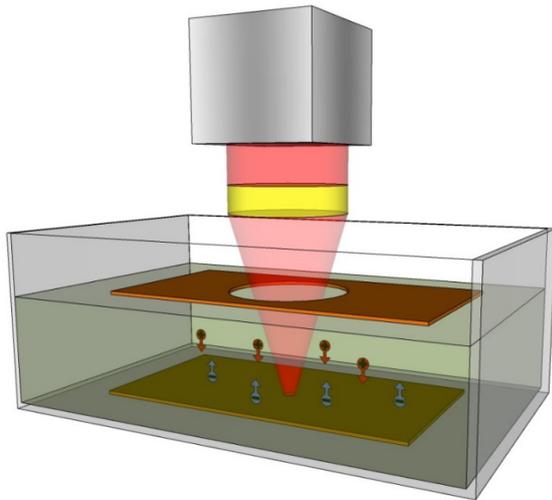


Figure 1.1 – Schematic diagram of the laser activation process

2 Experiment results and discussion

The microtopology of the surface of nickel, tin, copper and silver coatings formed by laser electrochemical method on non-conductive substrates made of sital and silicon, on which conductive sublayers of copper, chromium, titanium and nickel were preliminarily applied in a vacuum, was studied by the AFM method. Deposition was carried out in various modes, varying the pulse repetition frequency $f = 5-15$ Hz and pulse duration $\tau = 1-8 \cdot 10^{-3}$ c, at wavelength LI λ , corresponding to the minimum absorption for each of the electrolytes (Table 1.1), This ensured the optimal power density of the heat source on the cathode surface, which for different types of coating is a $W = 2,0-3,5 \cdot 10^{10}$ W/m². The studied samples are solid metal coatings applied in the process of electrochemical deposition, on which local precipitates have been formed under the influence of LI in an area commensurate with the diameter of the laser spot.

The experimental studies of the formation of local sediments in the stationary electrolysis mode were carried out for Ni, Ar, Cu and Sn at the optimal technological modes of stationary electrolysis using the types of electrolytes specified in Table 1.1. At the same time, different values of the intensity of the LI were taken I and the material of the conductive sublayer. The generalized experimental results characterizing the highest rate of coating growth without the effect of laser recrystallization and loss of coating quality are presented in Table 2.1.

A three-dimensional image, a histogram of inclination and an orientation diagram of nano-crystallites (grains) for a number of formed local sediments and their electrochemical background were obtained by the AFM method. For example, Figures 2.1 and 2.2 show the results of the AFM

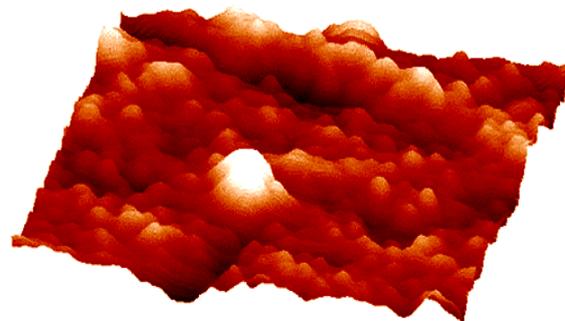
study of the silver coating formed on the copper substrate of the silicon substrate.

Table 2.1– Normal v_n and tangential v_τ growth rates of local precipitation

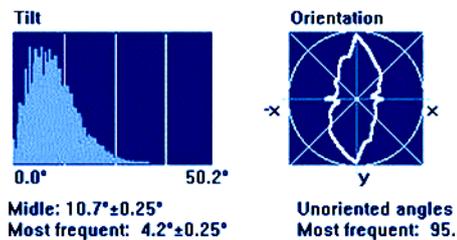
Sludge Material	Sublayer Material	$I, 10^{10}$ W/m ²	$v_n, \mu\text{m/s}$	$v_\tau, \text{Mm/s}$
Nickel (Ni)	Copper (Cu)	1.57	0.14	4.07
	Kovar	0.92	0.13	5.69
Silver (Ar)	Copper (Cu)	2.51	0.07	4.53
	Nickel (Ni)	2.32	0.06	4.51
Copper (Cu)	Molybdenum (Mo)	3.71	0.75	4.88
	Tungsten (W)	2.31	1.25	4.07
	Kovar	3.33	1.17	4.88
Tin (Sn)	Molybdenum (Mo)	3.51	1.19	4.88
	Tungsten (W)	2.73	1.22	4.07
	Kovar	3.33	1.14	4.88

The results of the AFM studies indicate that the topology of coatings of all the studied metaldles in the zone of local sedimentation differs significantly from the structure of the background coating. This trend is independent of the nature of the substrate material and subcoat.

The analysis of the structural features of the electrochemical coatings of all the studied metals showed that in the area of the electrochemical background, the samples in all the studied cases represent a homogeneous isotropic set of grains.

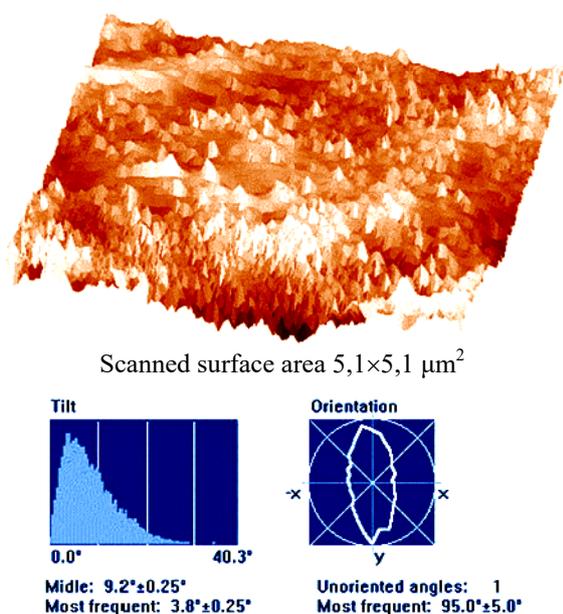


Scanned surface area $4,7 \times 4,7 \mu\text{m}^2$



Tilt histogram and orientation diagram

Figure 2.1 – Results of the AFM study of the silver surface topology in the zone of local sediment deposited on the copper sublayer of the silicon substrate



Tilt histogram and orientation diagram

Figure 2.2 – Results of the AFM study of the topology of the silver surface in the zone of the electrochemical background deposited on the copper sublayer of the silicon substrate

At the same time, the average linear dimensions of such grains in 1.5–1.7 times less than on a similar substrate and sublayer for precipitates obtained under laser activation conditions. The surface of the crystallites of the local sediment has a fairly pronounced orientation along a certain direction. These facts are considered by us as confirmation that the impact of laser radiation activates recrystallization processes in the zone of local sediment, so a more accurate and regular crystal structure is formed, which causes increased wear resistance and electrical conductivity.

In addition, the following patterns have been revealed:

- When replacing the metal used as a sublayer, the size of crystalline grains and the degree of orientation of crystallites change; the structure of local metal sediments becomes more accurate.
- The structural features of local metal sediments (and, consequently, their operational properties) are significantly influenced primarily by the nature of the material of the conductive sublayer (in particular, the coefficient of conductivity, which determines the efficiency of thermal energy removal from the heat-affected zone).

When the intensity of the LI increases in the range $(1-6) \cdot 10^{10} \text{ W/m}^2$ in local sediments of silver, copper and tin, there is a decrease in contact resistance by 20–40 % compared to the coatings formed without the use of laser activation. This is due to the fact that the local current density in the

irradiated zone is 5 to 10 times higher than the local current density on an unirradiated surface. This leads to the formation of a fine-crystalline, densely packed coating structure with a minimum number of microdefects. In addition, with an increase in the intensity of the LI in the specified range, the coating heats up due to the absorption of laser energy. Under the influence of the described processes, the microhardness of thin-film layers and internal microstresses in them decrease. These effects ultimately contribute to a decrease in contact resistance with an increase in power density due to recrystallization, which is in good agreement with the results of the microhardness study.

However, with a further increase in the power density of the LI introduced into the heat-affected zone, the normal process of structure formation is disrupted due to the huge local current density and the large number of ions in this zone. As a result, the stable crystallization process is disrupted, and the perfection of the crystal structure decreases. On the surface of the coating, chaotically located large crystalline formations are formed.

Conclusion

The dependence of the stationary index of electrolyte extinction on the intensity of LI was analyzed. It has been established that with an increase in the power density of the LI values, the absorption indicators are stable up to the threshold level $W = 3 \cdot 10^{10} \text{ W/m}^2$, after exceeding which there is an increase in the value of ϵ , caused by scattering on convective flows, and at $W \geq 10^{12} \text{ W/m}^2$ relative energy losses are approaching 100%, as the electrolyte is heated to the boiling point.

The AFM method was used to study the topology of the surface of local sediments of a number of metals, as well as their electrochemical “background”. It is shown that the crystal structure of the metal coating in the zone of local sediment is ordered and oriented in comparison with the electrochemical background. This is due to the fact that the effect of laser radiation activates the recrystallization processes.

It has been established that with an increase in the intensity of the LI, the average linear size of crystallites of the studied metals in the zone of local sediment increases by 1.5–1.7 times. Compared to the electrochemical background, the structure becomes more densely packed, the depth of the inter-grain dips decreases in 1.8–2.0 times, which affects the electrically conductive properties of electroplating.

REFERENCES

1. Fedosenko, N.N. Features of the microstructure of the copper surface formed by the laser electrochemical method / N.N. Fedosenko, V.G. Sholokh, A.N. Kupo // Bulletin of Polotsk State University. Series B. Technical Sciences. – 2005. – № 7. – P. 112–116 (in Russian).

2. *The influence of laser radiation on heat exchange processes during electrochemical deposition of silver* / A.A. Khmyl, N.N. Fedosenko, V.A. Emelyanov, V.G. Sholokh, A.N. Kupo // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series. – 2006. – № 2. – P. 17–20 (in Russian).

3. *Fedosenko, N.N.* Laser electrochemical modification of the surface of electronic materials / N.N. Fedosenko, V.G. Sholokh, A.N. Kupo // Proceedings of Francisk Skorina Gomel State University. – 2006. – № 6 (39). – Part 1. – P. 144–147 (in Russian).

4. *Technologies of submicron structures of microelectronics* / A.P. Dostanko [et al.] // Chapter 6 “Laser activation of electrochemical processes of formation of submicron structures”; A.N. Kupo;

edited by acad. A.P. Dostanko. – Minsk: Belarusian Science, 2018. – 270 p. (in Russian).

5. *Khmyl, A.A.* Laser technology for intensifying galvanic deposition of functional coatings / A.A. Khmyl, V.A. Lanin, A.N. Kupo // Technologies in the electronic industry. – 2016. – № 8. – P. 42–46 (in Russian).

The article was submitted 03.10.2024.

Информация об авторах

Купо Александр Николаевич – к.т.н., доцент

Федосенко Николай Николаевич – к.т.н., доцент

Шеринев Евгений Борисович – д.т.н., доцент

Никитюк Юрий Валерьевич – к.ф.-м.н., доцент

Алешкевич Николай Александрович – к.ф.-м.н., доцент

НЕЙРОСЕТЕВАЯ МОДЕЛЬ И АЛГОРИТМ ОБУЧЕНИЯ КЛАССИФИКАТОРА ДЛЯ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ ГЕЛЬ-ЭЛЕКТРОФОРЕЗА СЫВОРОТКИ КРОВИ ЧЕЛОВЕКА

К.С. Курочка¹, К.А. Панарин¹, К.С. Макеева²

¹Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого

²Гомельский государственный медицинский университет

NEURAL NETWORK MODEL AND CLASSIFIER TRAINING ALGORITHM FOR PROCESSING HUMAN SERUM GEL ELECTROPHORESIS DATA

K.S. Kurochka¹, K.A. Panarin¹, K.S. Makeeva²

¹Sukhoi State Technical University of Gomel

²Gomel State Medical University

Аннотация. Анализ биомедицинских изображений протеинограмм, получаемых в результате гель-электрофореза, является актуальным направлением исследований. В результате исследования различных методов и средств анализа электрофореграмм, авторами предложена ресурсоэффективная и быстрая модель сверточной нейронной сети, позволяющая осуществлять классификацию протеинограмм сыворотки крови человека с высокой точностью при низких требованиях к вычислительным ресурсам компьютера.

Ключевые слова: нейронные сети, компьютерное зрение, распознавание изображений, протеинограммы, электрофорез.

Для цитирования: Курочка, К.С. Нейросетевая модель и алгоритм обучения классификатора для обработки данных гель-электрофореза сыворотки крови человека / К.С. Курочка, К.А. Панарин, К.С. Макеева // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 70–77. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_70. – EDN: INSQVT

Abstract. The analysis of biomedical images of proteinograms obtained as a result of gel electrophoresis is a research area of current interest. As a result of the study of various methods and means of analyzing electrophoregrams, the authors proposed a resource-efficient and fast model of convolutional neural network, which allows the classification of human blood serum proteinograms with high accuracy at low requirements to computing resources of the computer.

Keywords: neural networks, computer vision, image recognition, proteinograms, electrophoresis.

For citation: Kurochka, K.S. Neural network model and classifier training algorithm for processing human serum gel electrophoresis data / K.S. Kurochka, K.A. Panarin, K.S. Makeeva // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 4 (61). – P. 70–77. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_70 (in Russian). – EDN: INSQVT

Введение

В настоящее время информационные технологии применяются во всех областях деятельности человека. Медицина не стала исключением. Актуальные разработки в области информационных технологий оказывают положительное влияние на развитие новых способов организации медицинской помощи населению. Активное внедрение современных технологий в медицинскую отрасль в большинстве стран позволило повысить эффективность диагностирования и лечения [1].

Анализ и классификация изображений, получаемых в настоящее время генетике и медицине, является важной проблемой обработки экспериментальной информации, поток которой в последние годы неизбежно растет. Многие из актуальных задач радиобиологии, практической

генетики и клинической медицины сталкиваются с двумя важными и взаимно конфликтующими проблемами обработки растущего потока данных. Это, во-первых, массовость обработки, требующая ее автоматизации, и, во-вторых, чрезвычайная сложность анализа изображений, подлежащих надежной классификации по их биологическим, генетическим или медицинским свойствам. Яркими примерами таких проблем являются задачи автоматической классификации генетической изменчивости белковых структур в результате радиационного поражения или других факторов по данным их электрофореграмм, решение которых включает в себя получение электрофоретических спектров исследуемых белков с последующим распознаванием их изображений с целью выявления генетической принадлежности образца.

Наиболее распространенный метод электрофореза – гель-электрофорез – проводится в агарозном или полиакриламидном геле и позволяет, варьируя структуру геля и состав буферного раствора, проводить разделение на основе различия в молекулярных массах изоэлектрических точек и биоспецифическом средстве. Анализ электрофоретических спектров позволяет обнаруживать изменения в белковых структурах, возникающие вследствие воздействия радиационного излучения.

В силу многокритериальности и объемности этой задачи необходима автоматизация процессов распознавания и классификации результатов гель-электрофореза сыворотки крови человека, при этом можно выделить следующие требования к обработке данных: максимальная скорость вычислений при предельно достижимой их точности. Реализация этих требований при наличии вышеперечисленных условий неизбежно натолкнулась на ограниченность традиционно применяемых классических подходов, таких как самоорганизующиеся карты Кохонена и скрытая марковская модель, т. к. они либо не давали достаточной точности, либо скорости вычислений. Выполненные ранее работы по этой теме также показали неэффективность применения нейронных сетей прямого распространения [2]–[4].

За счет улучшения мощностей современной компьютерной базы становится возможным воздействие для решения данной задачи нейросетевых методов глубокого обучения с использованием свёрточных нейронных сетей.

Применение свёрточных нейронных сетей позволяет осуществлять локализацию и классификацию исследуемых объектов на зашумленных изображениях в автоматизированном режиме [5].

1 Аналитический обзор существующих методов и подходов анализа электрофореграмм белковых структур

Среди методов классификации и разделения спектральных данных, таких как электрофореграммы, можно выделить несколько подходов.

Самоорганизующиеся карты Кохонена – вид ИНС (искусственной нейронной сети), предложенный Кохоненом [2], основной задачей которого является преобразование входного сигнала любой размерности в одно- или двумерную дискретную карту.

Скрытая марковская модель – Hidden Markov Model (HMM) – это статистическая модель, в которой основной задачей является определить неизвестные параметры на следующей отсечке времени на основе наблюдаемого «настоящего».

В литературе существует множество примеров использования методов, описанных выше, для решения задач обработки биологической информации.

В работе [3] авторы попытались сравнить

применение SOM для задачи классификации разновидностей стручкового перца на основе электрофореграмм. Результаты исследования показали эффективность распознавания порядка 90%. Исследования [4], [6] показывают возможность применения однослойного перцептрона в задаче распознавания по электрофоретическим спектрам. У авторов получилось добиться эффективности классификации на тестовой выборке в пределах 70–90%, что, как утверждают авторы, соответствует результату, который показывают эксперты. Исследование [7] является примером того, как можно использовать комбинированный подход в классификации, путем предварительной кластеризации данных с помощью SOM.

Иным перспективным подходом является метод опорных векторов (Support Vector Machine, SVM). Это один из методов обучения, который используется для решения задач классификации и регрессии. Основная идея метода заключается в построении гиперплоскости, разделяющей объекты выборки наиболее оптимальным способом. В работе [10] применение метода опорных векторов в отношении двумерных изображений гель-электрофореза позволило достичь 89,85% точности классификации.

Однако данные подходы используют устаревшие инструменты, не учитывающие развитие современной компьютерной техники и не отличающиеся высокой точностью и производительностью. Поэтому возникает насущная потребность в разработке нового математического и алгоритмического аппарата с привлечением математических средств [11]. Сюда относится развитие и применение нейросетевых методов глубокого обучения и других новых подходов машинного обучения, используемых в последние годы.

Наиболее продуктивным подходом является применение искусственных нейронных сетей глубокого обучения, показавших высокие результаты применительно к обработке изображений различной природы, в том числе и медицинских [12]. Наилучшие результаты по классификации изображений демонстрируют сверточные нейронные сети, предобученные на обширных наборах данных.

2 Подготовка входных данных для обучения модели нейронной сети

В данном исследовании информация представлена спектрами электрофореза сыворотки крови человека. Принципиальной основой всех электрофоретических методов является тот факт, что находящиеся в растворе молекулы, располагающие электрическим зарядом, под действием сил электрического поля смещаются в сторону противоположно заряженного электрода.

На рисунке 2.1 представлен пример электрофореграммы сыворотки крови человека в агарозном геле.

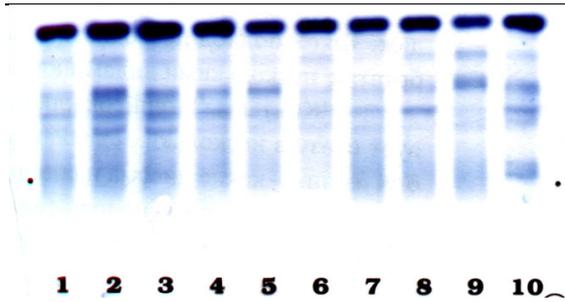


Рисунок 2.1 – Дорожки гель-электрофореза, иллюстрирующие разделение белков в сыворотке крови человека

В качестве белковых маркеров для людей используются следующие глобулины:

- Альбумин;
- Альфа-1-глобулин;
- Альфа-2-глобулин;
- Бета-глобулин;
- Гамма-глобулин.

С целью упрощения анализа и ускорения работы классификатора данные целесообразно предварительно подготовить.

Биомедицинские изображения, полученные в результате гель-электрофореза, представлены в виде цифровых сканов физических пластинок с результатами реакций, в связи с чем они не обладают достаточно высоким качеством и четкостью.

Зачастую группы глобулинов на снимке по цветности и заполнению пикселями практически не отличаются от фоновых шумов и имеют нарушенные контуры, что затрудняет их однозначную идентификацию при помощи таких распространённых методов, как классические способы сегментации изображений [7], [8], а также нахождения контуров и границ [10].

Данная задача решается путем применения набора различных фильтров. На начальном этапе для устранения мелких шумов и артефактов сканирования используется усредняющие фильтры. Идея применения усредняющих фильтров заключается в замене исходных значений элементов изображения на средние значения по маске фильтра.

Использование усредняющих фильтров состоит в подавлении «несуществующих» деталей на изображении. Под «несуществующими» понимаются совокупности пикселей, которые малы по сравнению с размерами маски фильтра. При программной реализации данный фильтр может быть представлен в виде следующей формулы:

$$G_{i,j} = \sum_{s=-\frac{m-1}{2}}^{\frac{m-1}{2}} \sum_{t=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} W_{s,t} E_{(i+s),(j+t)},$$

где $G_{i,j}$ – элемент матрицы изображения после фильтрации, $W_{s,t}$ – элемент массива ядра свертки изображения с размером $M \times N$, $E_{i,j}$ – элемент матрицы исходного изображения.

Полученное изображение сглаживается при

помощи гауссова размытия [13]. К сглаженному изображению применяется адаптивная пороговая обработка, позволяющая сохранить наиболее контрастные участки и удалить участки с низким уровнем яркости, полученные в результате размытия (рисунок 2.2).

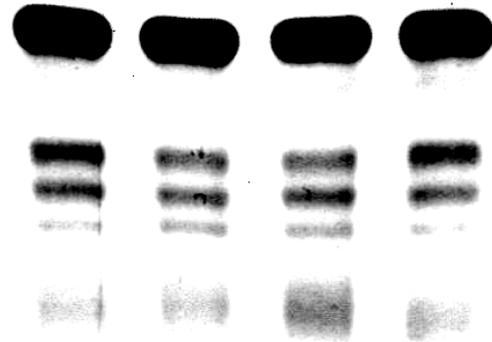


Рисунок 2.2 – Пример обработанного изображения

Обработанные подобным образом исходные изображения позволяют четко выделить искомые фрагменты, что дает возможность корректно оценить расположение и интенсивность концентраций белков в образце.

3 Подход на основе transfer learning

На сегодняшний день наиболее успешным и наиболее распространенным способом анализа является использование готовых моделей крупных нейронных сетей с обширной многоуровневой архитектурой. Данные модели предварительно обучены на крупных базах изображений общего профиля, содержащих сотни тысяч картинок, охватывающих множество областей.

Подобный подход делает рассматриваемые модели нейронных сетей достаточно универсальными, снабжая их информацией о широком спектре признаков и позволяя использовать их для любого типа изображений.

В контексте переноса обучения готовые модели дообучаются на новых данных. Применение такого метода позволяет получить рабочее решение с достаточно высокими результатами в ситуациях, когда обучающих данных недостаточно для полноценного обучения новой модели или когда для обучения собственной модели большого размера требуются значительные вычислительные мощности.

Но у данного подхода есть определенные минусы:

- малые специализированные модели способны выдавать результаты схожего качества при меньшем потреблении вычислительных ресурсов;

- крупные архитектуры с большим количеством параметров предобучения могут негативно сказываться на качестве предсказаний в конкретных специализированных задачах.

Наиболее перспективным и актуальным решением на сегодняшний день является сверточная нейронная сеть глубокого обучения EfficientNet, разработанная компанией Google и основанная на базовой сети, разработанной поиском нейронной архитектуры с использованием платформы AutoML MNAS [15].

Сеть настраивается для получения максимальной точности, но также штрафует, если сеть очень «тяжелая» с точки зрения вычислений. Она также наказывается за медленное время вывода, когда сети требуется много времени для прогнозирования.

Таким образом, EfficientNet обладает высокой эффективностью при низком требовании к вычислительным ресурсам, что делает возможным её применение к решению задач классификации протеинограмм.

В качестве обучающей выборки для переобучения нейронной сети использованы 668 изображений протеинограмм сыворотки крови человека, полученных в результате гель-электрофореза пациентов детских поликлиник.

По виду патологий протеинограммы могут быть разделены на несколько основных типов, обусловленных повышенными либо пониженными концентрациями пяти групп определенных белков [14].

Среди имеющихся изображений были выделены три наиболее распространенных класса патологий:

- острые воспаления;
- β -глобулиновые плазмоцитомы;
- γ -глобулиновые плазмоцитомы.

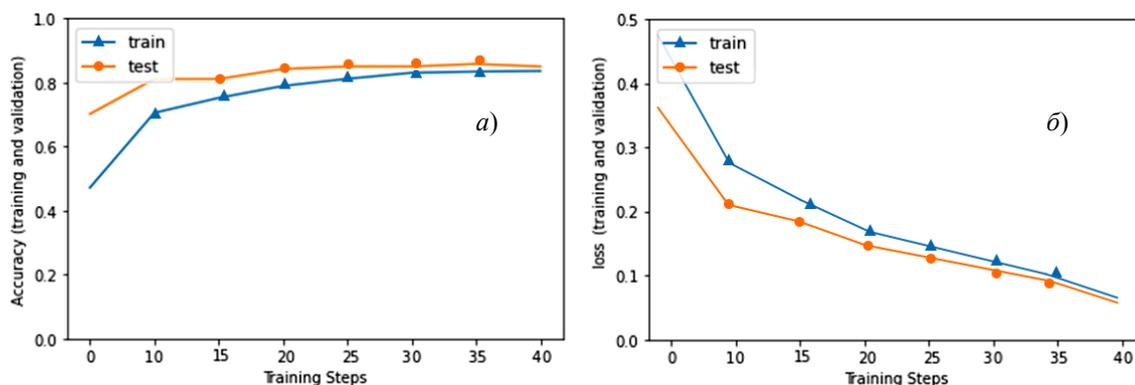


Рисунок 3.1 – Графики изменения точности классификации (а) и значения кросс-энтропии (б) в процессе обучения

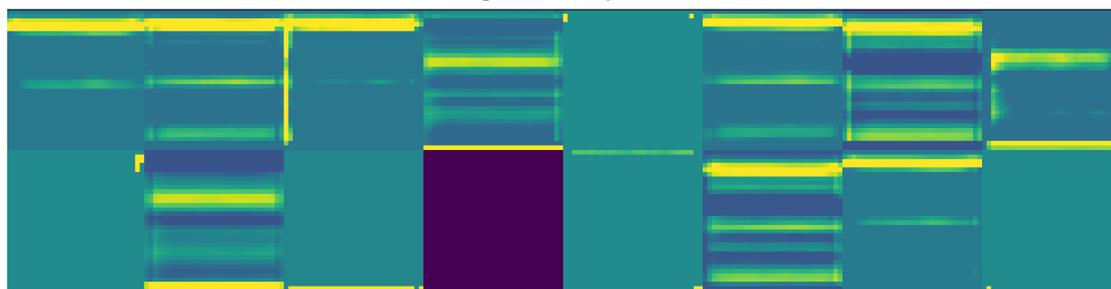


Рисунок 4.1 – Карта признаков протеинограммы сыворотки крови

Набор данных был разделен на обучающую и тестовую выборки в пропорции 80% к 20%, что соответствует 551 и 137 изображениям.

Процесс обучения состоял из 40 эпох с размером серии в 16 элементов и занял 1 ч 38 минут на видеокарте GTX 1080Ti.

Итоговые значения точности на валидном наборе изображений составили 86,3%.

Графики изменения значений accuracy и loss сети представлены на рисунке 3.1.

Время обработки одного изображения составляет 3.8 секунды.

Таким образом, на необработанных данных предобученная модель нейронной сети демонстрирует недостаточные результаты, затрачивая при этом значительное время как на обучение, так и на обработку изображений

4 Архитектура свёрточной нейронной сети собственной разработки

С целью уменьшения времени обучения модели искусственной нейронной сети, а также для повышения скорости обработки запросов и увеличения точности итогового распознавания изображений протеинограмм была спроектирована собственная облегченная модель нейронной сети.

Для того чтобы произвести корректную оценку структуры имеющихся изображений, были получены карты признаков, извлеченные из промежуточных сверточных слоев использованной ранее предобученной модели нейронной сети Google EfficientNet. Пример карты признаков приведен на рисунке 4.1.

Как видно из приведенной иллюстрации, протеинограммы сыворотки крови человека не содержат объектов сложной формы и структуры. Данные изображения являются однородными и монохромными, с чередой полос различной ширины и интенсивности, расположенных в заранее известных местах.

Подобные признаки достаточно легко извлекаются на высоком уровне, не требуя для своего нахождения сложных вложенных блоков свёрток различного разрешения, как это реализовано в крупных предобученных моделях.

Таким образом, модель нейронной сети можно значительно упростить, сведя её к нескольким свёрточным (conv) слоям различного размера со слоем подвыборки (MaxPooling) и полносвязным Dense-слоем на выходе.

Значительное влияние на процесс обучения модели нейронной сети и качество конечного результата влияет правильный выбор функции оптимизации.

Для выбора оптимального варианта проведено тестирование наиболее популярных алгоритмов оптимизации на базе простой тестовой модели на основе двух свёрточных слоев с целью оценки влияния их эффективности в зависимости от числа эпох обучения проектируемой модели.

Результаты сравнения представлены в виде графика на рисунке 4.2.

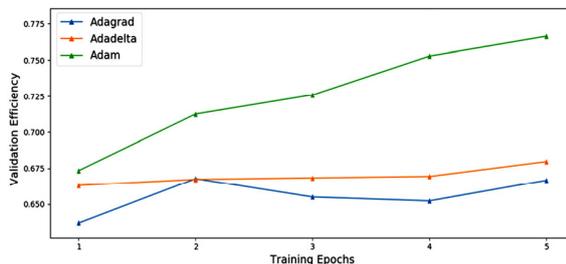


Рисунок 4.2 – График зависимости эффективности от числа эпох и алгоритма оптимизации

Из данного графика можно сделать вывод, что для оптимальной эффективности процесса обучения модели свёрточной нейронной сети целесообразно применить оптимизатор Adam.

С целью подбора наиболее рациональной архитектуры были реализованы несколько различных моделей собственной свёрточной нейронной сети на основе фреймворка Tensor-flow + Keras с применением как различной структуры слоёв, так и различных параметров.

Полученные модели состоят из таких слоёв как:

- свёрточный слой Conv;
- слой подвыборки MaxPooling;
- слой прореживания Dropout;
- полносвязный слой Dense.

При составлении моделей использовался как простейший и наиболее быстрый вариант, состоящий из двух свёрточных слоев и одного слоя подвыборки, так и варианты с тремя свёрточными слоями.

В разработанных моделях изменялось количество и расположение слоёв подвыборки MaxPooling. Кроме вариантов с общим слоем подвыборки опробован также вариант применения слоя подвыборки для каждого свёрточного слоя.

На рисунке 4.3 продемонстрирован график зависимости эффективности обучения спроектированных моделей свёрточной нейронной сети в зависимости от числа и конфигурации различных слоёв.

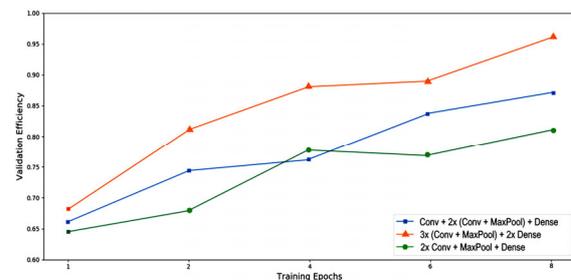


Рисунок 4.3 – График зависимости эффективности от выбора архитектуры ИНС и числа эпох

Как видно из представленного графика, наиболее эффективной оказалась модель свёрточной нейронной сети, содержащая три свёрточных слоя, каждый из которых был снабжен собственным слоем подвыборки MaxPooling.

На рисунке 4.4 представлена полная схема итоговой модели разработанной свёрточной нейронной сети для классификации снимков протеинограмм сыворотки крови человека.

Обучающий набор данных составляет 668 изображений протеинограмм, предварительно обработанных для устранения шумов и дефектов.

В таблице 4.1 представлено распределение изображений по классам.

Таблица 4.1 – Распределение выборки по классам

№	Наименование	Количество
1	острые воспаления	267
2	β-глобулиновые плазмоцитомы	168
3	γ-глобулиновые плазмоцитомы	241

Исходные данные разделены в пропорциях 80% учебных к 20% валидационных.

При обучении сети использовалась стратегия обучения MiniBatch, размер серии составляет 32 изображения. Изначальная длительность обучения выставлена в размере 25 эпох с сохранением состояния модели после каждой эпохи.

На рисунке 4.5 представлен график роста уровня точности сети в процессе обучения.

Из графиков видно, что на этапе 12-ой эпохи обучение модели нейронной сети завершилось и началось переобучение. Таким образом, для дальнейшей работы целесообразно использовать версию модели, сохраненную по окончании 12-ой эпохи.

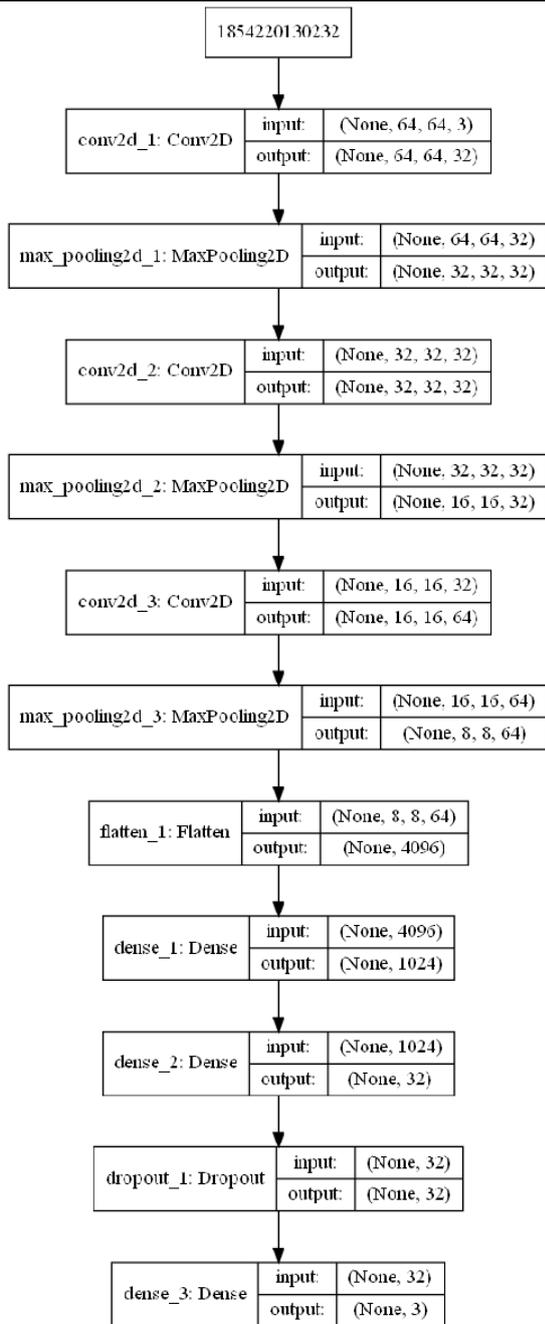


Рисунок 4.4 – Схема архитектуры предложенной модели нейронной сети для классификации электрофореграмм

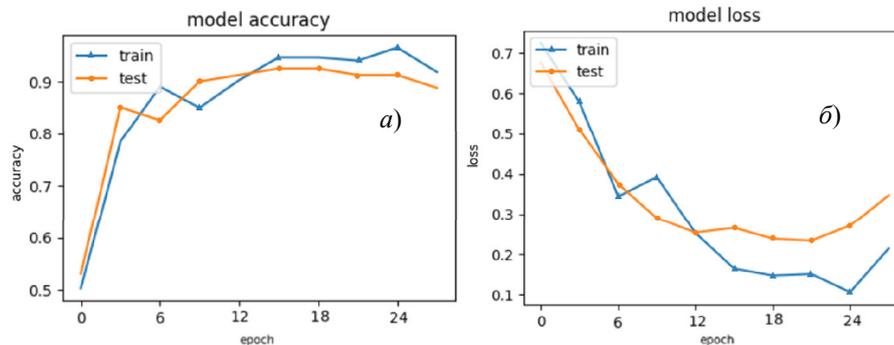


Рисунок 4.5 – График изменения точности классификации (а) и значения кросс-энтропии (б) в процессе обучения

Общее время обучения модели нейронной сети на видеокарте GTX 1080Ti составляет ~121 с. Время обработки одного изображения при распознавании составляет 1 с.

Таким образом можно сделать вывод о высокой производительности и вычислительной эффективности предложенной модели в сравнении с рассмотренными ранее существующими моделями.

В ходе проверки на тестовой выборке из 48 денситограмм нейронной сетью была допущена одна ошибка. Таким образом, точность работы предложенной архитектуры нейронной сети может быть оценена как 97,96%.

Компактность и высокая производительность разработанной модели нейронной сети позволяет успешно развертывать ее не только на стационарных ПК, но и на энергоэффективных одноплатных компьютерах. Такие системы обладают низким энергопотреблением, не требуют активного охлаждения и могут быть размещены непосредственно в медицинских учреждениях для автоматизированного анализа протеинограмм.

Важным аспектом при разработке сверточной нейронной сети для классификации протеинограмм являлось обеспечение возможности ее развертывания и эксплуатации на компактных энергоэффективных вычислительных системах, таких как одноплатные компьютеры (SBC – Single Board Computers). Использование компактных и энергоэффективных одноплатных компьютеров позволяет развертывать алгоритмы обработки медицинских изображений непосредственно в лечебных учреждениях, не требуя наличия дорогостоящих вычислительных кластеров.

Для тестирования производительности предложенной архитектуры были использованы три распространенные SBC-системы: Orange Pi PC2, ASUS Tinker Board и Khadas VIM1, обладающие различными характеристиками процессоров и видеоподсистем. Результаты тестов сведены в таблицу 4.2.

Как видно из таблицы, наибольшую производительность разработанная модель продемонстрировала на более мощной системе ASUS Tinker Board, однако даже на бюджетном Orange

Таблица 4.2 – Производительность на одноплатных компьютерах

Компьютер	CPU	GPU	Время обработки 1 изображения, сек.	Энергопотребление, Вт
Orange Pi PC2	4x A53 1,8 ГГц	Mali-450MP4	4,2	3
ASUS Tinker Board	4x A17 1,8 ГГц	Mali-T764	2,1	5
Khadas VIM1	4x A53 2,0 ГГц	Mali-450MP4	3,5	5

Pi PC2 время обработки одного изображения составило приемлемые 4,2 секунды при минимальном энергопотреблении 3 Вт. Таким образом, предложенная компактная архитектура сверточной нейронной сети позволяет эффективно решать задачу классификации протеинограмм плазмы крови человека даже на недорогих ARM-системах с малым энергопотреблением, непосредственно в условиях лечебных учреждений на компактном и недорогом оборудовании.

По результатам анализа полученных данных сделан вывод о возможности использования разработанной модели для решения практических задач по классификации протеинограмм при низком потреблении вычислительных ресурсов и высокой скорости обучения и классификации.

Заключение

В результате проведенного исследования электрофореграмм плазмы крови человека была разработана ресурсоэффективная и быстрая модель сверточной нейронной сети, позволяющая осуществлять классификацию протеинограмм сыворотки крови человека с высокой точностью при низких требованиях к вычислительным ресурсам ЭВМ, что позволяет адаптировать данную модель для использования на портативных устройствах и одноплатных компьютерах.

Выделены ключевые признаки в спектрах электрофореграмм, позволяющие классифицировать наличие патологий.

Произведена подготовка и обработка медицинских данных, осуществлена апробация существующих методов и алгоритмов для обработки данных электрофореза белковых структур и данных рентгенограмм.

Предложенная модель сверточной нейронной сети показала высокую эффективность в выявлении трех классов патологии человека:

- острые воспаления;
- β -глобулиновые плазмцитомы;
- γ -глобулиновые плазмцитомы.

По результатам валидации точность работы предложенной архитектуры нейронной сети составила 97,96%.

Проведен сравнительный анализ с методом переноса обучения на предобученные модели, показавший превосходство разработанной модели как в скорости работы, так и в точности классификации.

Предложенная модель позволяет классифицировать протеинограммы плазмы крови человека без необходимости применения денситометра для построения денситограмм.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Доступность и качество медицинской помощи как основные принципы здравоохранения Республики Беларусь* / М.М. Сачек, И.В. Малахова, И.И. Новик, И.П. Цербинская // Материалы науч.-практ. конф. с международ. участием к Всемирному дню здоровья 2018 г., посвящённой всеобщему охвату услугами здравоохранения и 70-летию ВОЗ. – Киев, 2018. – С. 161–163.
2. *Kohonen, T. The self-organizing map* / T. Kohonen // *Neurocomputing*. – 1998. – Vol. 21, № 1. – P. 1–6.
3. *Kingma, D.P. A method for stochastic optimization* / D.P. Kingma, Ba J. Adam // *arXiv preprint arXiv:1412.6980*. – 2014.
4. *Ruanet, V.V. The use of a self-organizing feature map for the treatment of the results of RAPD and ISSR analyses in studies on the genomic polymorphism in the genus Capsicum L* / V.V. Ruanet, E.Z. Kochieva, N.N. Ryzhova // *Russian Journal of Genetics*. – 2005. – Vol. 41, № 2. – P. 202–210.
5. *Ruanet, V.V. The use of artificial neural networks for automatic analysis and genetic identification of gliadin electrophoretic spectra in durum wheat* / V.V. Ruanet, A.M. Kudryavtsev, S.Y. Dadashev // *Russian Journal of Genetics*. – 2001. – Vol. 37, № 10. – P. 1207–12.
6. *Kurochka, K.S. Algorithm for real-time binary classification of adenomas and norms images obtained by confocal microscopy* / K.S. Kurochka, K.A. Panarin // 2020 International Conference Mechatronic Systems and Materials (MSM). – 2020. – P. 1–5. – DOI: 10.1109/MSM49833.2020.9202107.
7. *Classification of potato varieties using isoelectrophoretic focusing patterns, neural nets, and statistical methods* / K. Jensen [et al.] // *Journal*

of agricultural and food chemistry. – 1997. – Vol. 45, № 1. – P. 158–161.

8. *Eduardo, A.R.* Detection of Vertebral Plateaus in Lateral Lumbar Spinal X-ray Images with Gabor Filters / A.R. Eduardo, H.N. Marcello, M.R. Rangaraj // 32th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC). – 2010. – P. 4052–4055. – DOI: 10.1109/IEMBS.2010.

9. *Segmentation of Natural Images by Texture and Boundary Compression* / H. Mobahi, S. Rao, A. Yang, S. Sastry, Y. Ma // International Journal of Computer Vision – 2011. – Vol. 95. – P. 86–98. – DOI: 10.1007/s11263-011-0444-0.

10. *Ohlander, R.* Picture Segmentation Using a Recursive Region Splitting Method, / R. Ohlander, K. Price, D.R. Raj // Computer Graphics and Image Processing. – 1978. – Vol. 8, № 3. – P. 313–333. – DOI: 10.1016/0146-664X(78)90060-6.

11. *Canny, J.A.* Computational Approach to Edge Detection / J. A. Canny // IEEE. – 1986. – 20 p.

12. *Developing of a Mathematical Model to Perform Measurements of Axial Vertebral Rotation on Computer-Aided and Automated Diagnosis Systems, Using Raimondi's Method* / J. Hurtado-Aviles, J. Roca-González, K.S. Kurochka, J.M. Sanz-Mengibar, F. Santonja-Medina // Radiology Research

and Practice. – 2021. – Vol. 2021. – DOI: <https://doi.org/10.1155/2021/5523775>

13. *Kurochka, K.S.* Algorithm of Definition of Mutual Ar-rangement of L1–L5 Vertebrae on X-ray Images / K.S. Kurochka, K.A. Panarin // Optical Memory and Neural Networks. – 2018. – Vol. 27, № 3. – P. 161–169.

14. *Гонсалес, Р.* Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – Москва: Техносфераб, 2012. – 1104 с.

15. *Справочник по клинико-биохимическим исследованиям и лабораторной диагностике* / В.С. Камышников. – Москва: МЕДпресс-информ, 2009. – 896 с.

16. *Meta-Learning of Neural Architectures for Few-Shot Learning* / T. Elsken, B. Staffler, J.H. Metzen, F. Hutter // 2020 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). – 2021. – arXiv:1911.11090.

Поступила в редакцию 03.05.2024.

Информация об авторах

Курочка Константин Сергеевич – к.т.н., доцент
Панарин Константин Александрович – инженер-программист
Макеева Ксения Сергеевна – старший преподаватель

СИСТЕМА АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ОПЕРАЦИЕЙ ЛАЗЕРНОЙ ОБРАБОТКИ ХРУПКИХ НЕМЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

В.А. Прохоренко, Ю.В. Никитюк, В.С. Смородин

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ADAPTIVE CONTROL SYSTEM FOR TECHNOLOGICAL OPERATION OF LASER PROCESSING OF BRITTLE NON-METALLIC MATERIALS

V.A. Prokhorenko, Yu.V. Nikitjuk, V.S. Smorodin

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. В работе представлена компьютерная система адаптивного управления технологической операцией лазерной резки хрупких неметаллических изделий. Описаны процедуры синтеза структуры нейрорегулятора параметров технологической операции резки и автоматизированного выбора оптимальной архитектуры нейронной сети на основе заданных критериев качества адаптации управления. Стабилизация параметров технологической операции лазерной резки методом термораскалывания приведена на примере обработки силикатных стекол эллиптическими лазерными пучками.

Ключевые слова: система адаптации управления, нейросетевое моделирование, синтез структуры нейрорегулятора, стабилизация параметров технологической операции.

Для цитирования: Прохоренко, В.А. Система адаптивного управления технологической операцией лазерной обработки хрупких неметаллических материалов / В.А. Прохоренко, Ю.В. Никитюк, В.С. Смородин // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 78–81. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_78. – EDN: KIVJIH

Abstract. This paper presents a computer system for adaptive control of the technological operation of laser cutting of fragile non-metallic products. The procedures for synthesizing the structure of the neural regulator of the parameters of the technological operation of cutting and the automated selection of the optimal architecture of the neural network based on the specified criteria for the quality of control adaptation are described. Stabilization of the parameters of the technological operation of laser cutting by the method of thermal splitting is given on the example of processing silicate glasses with elliptical laser beams.

Keywords: control adaptation system, neural network modeling, synthesis of the structure of the neuroregulator, stabilization of the parameters of a technological operation.

For citation: Prokhorenko, V.A. Adaptive control system for technological operation of laser processing of brittle non-metallic materials / V.A. Prokhorenko, Yu.V. Nikitjuk, V.S. Smorodin // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 4 (61). – P. 78–81. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_78 (in Russian). – EDN: KIVJIH

Introduction

This paper describes an approach to constructing a computer system for adaptive control of the technological operation of laser cutting of fragile non-metallic products based on the technology of constructing mathematical models of complex technical objects [1].

Laser splitting is an effective method of special processing of brittle non-metallic materials. When implementing this technology, it is important to form a specified mode of heating and cooling of the workpiece, especially at the upper limit of the maximum permissible temperature, which has a direct impact not only on the quality of processing, but also on the fundamental possibility of forming a laser-induced crack [2]. At the same time, various external factors can affect the temperature values of the workpiece during cutting. Thus, the task of

developing algorithms for taking into account destabilizing effects in real time is relevant.

The developed control adaptation system is based on the use of neuroregulators and allows for corrective actions on the set of control variables of a technological operation, in the presence of external control actions and random disturbances, ensuring stabilization of laser cutting parameters.

Figure 0.1 shows a diagram of the laser cleavage process of a silicate glass plate using an elliptical laser beam.

The factors in the process under consideration include:

- laser beam and coolant speed (V);
- laser radiation power (P);
- semi-axes of the elliptical beam (A, B).

Responses: maximum tensile stresses (σ_{yy}); maximum temperature in the processing zone (T_{max}).

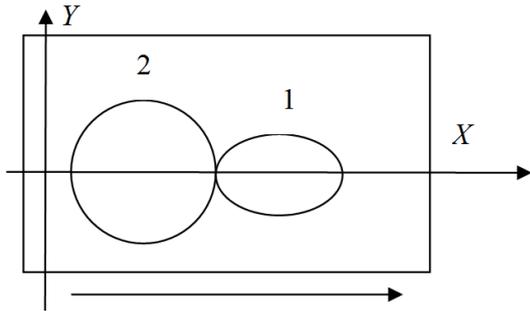


Figure 0.1 – Scheme of the laser cutting process, top view: 1 – zone affected by laser radiation, 2 – zone affected by refrigerant; the laser beam and coolant spot move from left to right

1 Simulation modeling of laser cutting operation control system

The simulation model of the control system uses signal generators for the responses of the physical laser cutting process (maximum tensile stress (σ_{yy}) and maximum temperature in the processing zone (T_{max})). The operation of the generators is provided by neural network approximation [3]. A feature of neural network approximation of responses in the context of this work is the use of not only the problem factors but also the response values at previous points in time as input signals of neural networks. The data set for constructing neural network response approximators was obtained using finite element modeling of the physical process of laser cutting using software tools developed by the authors [4]. When implementing the finite element model, a change in the values of control variables was simulated by randomly changing the values of the problem factors V and P .

Using the procedure for selecting optimal neural network architectures [3], neural network response approximators with architectures [80-40-1] for σ_{yy} and [60-50-1] for T_{max} were constructed (Figure 1.1).

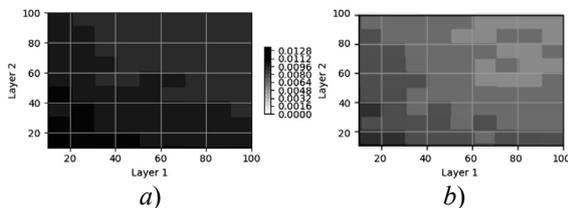


Figure 1.1 – Heat maps of the distributions of the mean square error (MSE) values obtained as a result of cross-validation of three-layer candidate architectures of neural network response approximators σ_{yy} (a) and T (b)

The simulation model of the cutting process control system includes (the diagram is shown in Figure 1.2):

- random disturbance generator $GENSGN_{\epsilon}$ and response generators $GENSGN_{\sigma}$ and $GENSGN_T$, based on the operation of neural network approximators σ_{yy} and T_{max} , which accept the values of the current set of problem factors determined by the control variables, and the values of the approximated responses at the current and previous time steps;
- executors EX_{1-4} , responsible for the execution of microtechnological operations [1] for setting the values of the control variables $\{U_p, U_v\}$ (change with a given step towards an increase or decrease).

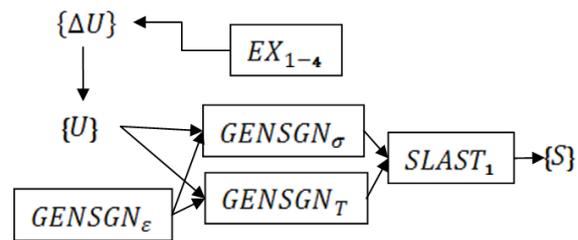


Figure 1.2 – Fragment of the signal generation circuit in the simulation model of the laser cutting technological operation

2 Implementation of the technological operation control loop

In the control loop of the laser cutting process operation, the values of the control variables responsible for the factors of the physical process of laser cutting are set. The control variables $\{U\}$ of the software and technological complex for optimizing the parameters of cutting non-metallic products include the speed of the laser beam and coolant (U_v), the power of the laser radiation (U_p), and the semi-axes of the elliptical laser beam (U_A, U_B). In this case, $\{U_p, U_v\}$ – the power of the laser radiation and the speed of the laser beam – are available for adjustment in real time.

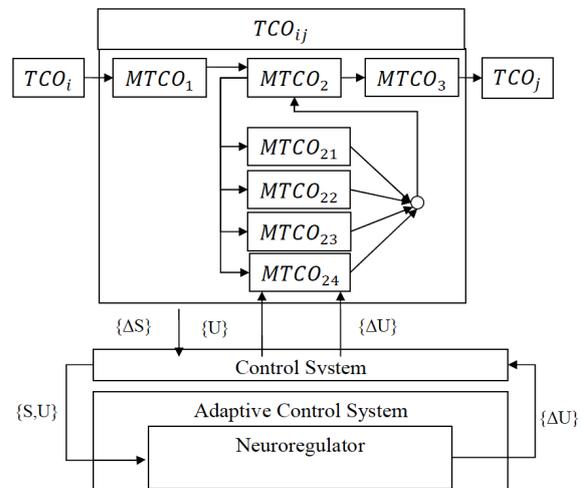


Figure 2.1 – Scheme of adaptation of control of technological operation of laser cutting

The technological operation diagram of laser cutting includes microtechnological operations presented in Figure 2.1. Operations $MTCO_{1-3}$ are responsible for starting cutting, performing cutting and stopping cutting; operations $MTCO_{21-24}$ are responsible for setting the cutting parameters V, P, A, B .

Within the developed control adaptation system, the required stabilization of laser cutting parameters is carried out by constructing a neuroregulator using reinforcement learning algorithms [5], [6].

3 Procedure for synthesizing a neuroregulator of technological operation parameters

The neuroregulator generates signals that have corrective effects on the set of control variables. It has 5 outputs, i. e. inaction, or changes in one of the available control variables in the direction of increase or decrease with a step determined by the implementation of the corresponding microtechnological operation. The maximum output of the neuroregulator determines the activated microtechnological operation.

The scheme of the procedure for synthesizing a neuroregulator is shown in Figure 3.1. The algorithm for constructing a neuroregulator includes the following stages: determination by the user of the system of criteria for the quality of adaptation; search for the optimal architecture of the neuroregulator, training and validation.

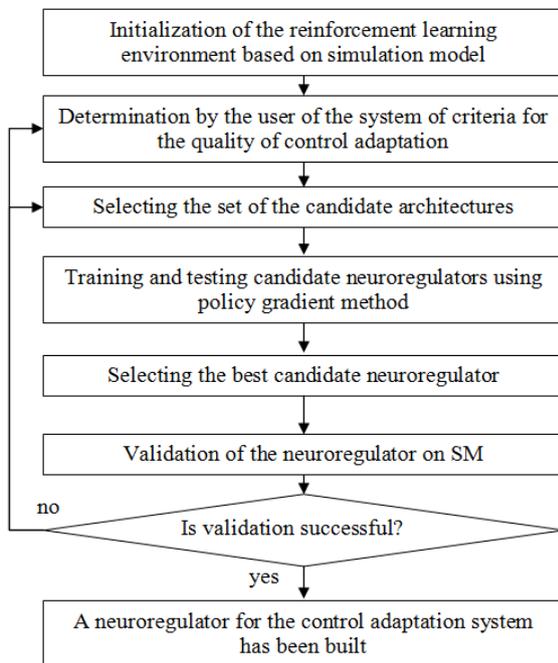


Figure 3.1 – Schematic diagram of the algorithm for synthesizing a neuroregulator using reinforcement learning

In this work, a multilayer perceptron is used as a neuroregulator. The adaptation quality criteria are set by defining the reward function in the reinforcement learning procedure.

The search for the optimal architecture of the neuroregulator is implemented using a scheme for enumerating candidate architectures with varying the number of neurons in the layers. For each architecture, a reinforcement learning procedure is performed with subsequent testing of the model for 128 episodes. The criterion for selecting a candidate architecture is the average reward value obtained as a result of testing.

The policy gradient [7], [9] with the softmax [8] learning scheme was used as a reinforcement learning algorithm. The described simulation model is used as the environment for training the agent. In the process of interacting with the environment, the neuroregulator has access to factors and responses at the current and previous simulation steps: $T_{\max}^t, T_{\max}^{t-1}, \sigma_{yy}^t, \sigma_{yy}^{t-1}, V, P, P_{t-1}$. At each step the neuroregulator has access to 5 actions to change the control variables $\{U_P, U_V\}$ or to do nothing.

The training of the neuroregulator is carried out over 512 episodes of interaction with the environment with random initial values of the control variables $\{U\}$. The agent's reward function when implementing the reinforcement learning algorithm is the adaptation quality assessment function, which allows taking into account the user's requirements for control adaptation:

$$R = \alpha_1 R_T + \alpha_2 R_V + \alpha_3 R_\sigma,$$

where R_T – component for assessing whether the temperature is maintained within the acceptable range; R_V – cutting speed assessment component; R_σ – component of the maximum tensile stress assessment.

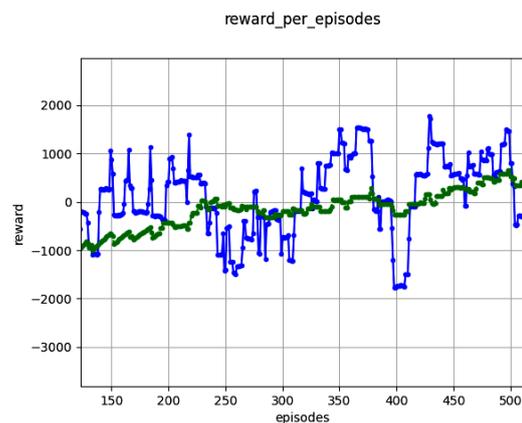


Figure 3.2 – Dynamics of changes in the value of the quality of control adaptation during the training of the neuroregulator

To select the optimal architecture of the neuroregulator, the candidate architectures are trained and tested. Based on the results of the procedure (Figure 3.4), a neuroregulator with the architecture [7-80-64-32-5] was selected.

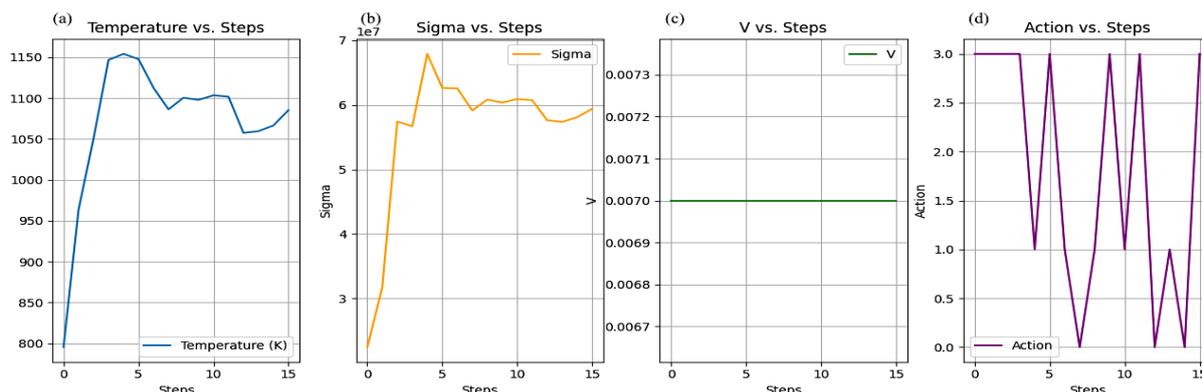


Figure 3.3 – Response values (a, b), control variable (V) (c), selected actions (d) in the process of implementing the stabilization of parameters by the constructed neuroregulator

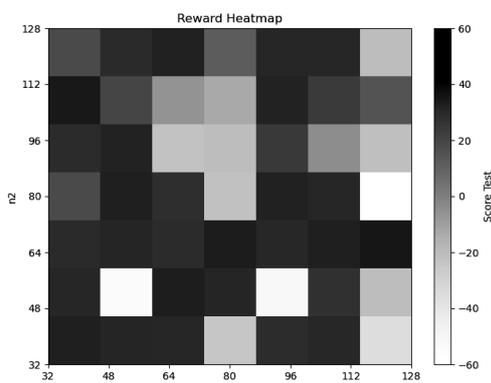


Figure 3.4 – Heat map of the mean test reward values obtained for the selected 4-layer perceptrons

A neuroregulator has been constructed that provides corrective effects on control variables $\{U\}$ (Figure 3.3) with the implementation of the requirement to prevent the parameters of the laser cutting technological process (maximum temperature T_{\max}) from going beyond the permissible interval. Figure 3.2 shows a graph of the change in the agent metrics under the control of the neuroregulator in the process of reinforcement learning.

Conclusion

A control adaptation system for the technological operation of laser cutting of fragile non-metallic materials based on the use of neuroregulators has been developed. A procedure for synthesizing the structure of a neuroregulator is described, which ensures the stabilization of the parameters of the technological operation according to the specified criteria of the quality of control adaptation in the presence of random disturbances and external control actions. The application of the developed control adaptation system is shown using the example of stabilizing the parameters of the technological operation of cutting silicate glasses with elliptical laser beams.

REFERENCES

1. Smorodin, V.S. Methods and means of simulation modeling of technological production processes:

monograph / V.S. Smorodin, I.V. Maksimey. – Gomel: F. Skorina Gomel State University, 2007. – 369 p.

2. Nikityuk, Yu.V. Physical laws of laser thermal splitting of silicate glasses and alumina ceramics: dis. ... Cand. of Phys. and Mathematics. Sciences 01.04.21 / Yu.V. Nikityuk. – Gomel, 2009. – 165 p.

3. Application of Artificial Neural Networks and Finite Element Method for Determining the Parameters of Elliptic Laser Beam Treatment of Quartz Sol-Gel Glasses / Yu.V. Nikityuk [et al.] // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 3 (48). – P. 30–36.

4. Development of Software Tools for Modeling and Optimization of Laser Cutting Parameters of Brittle Non-Metallic Materials / Yu.V. Nikityuk [et al.] // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 3 (60). – P. 18–22.

5. Smorodin, V.S. Stabilization of Technological Cycle Parameters when Constructing Feedback Control / V.S. Smorodin, V.A. Prokhorenko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 2 (55). – P. 83–88.

6. Prokhorenko, V.A. Adaptive control system for the technological cycle of automated production / V.A. Prokhorenko // Proceedings of F. Skorina Gomel State University. – 2023. – № 3 (138). – P. 69–73.

7. Smorodin, V.S. Stabilization of Parameters of Technological Operations in the Presence of External Control Actions / V. Smorodin, V. Prokhorenko // Open semantic technologies for intelligent systems. – 2024. – № 8. – P. 263–268.

8. A Survey of Exploration Methods in Reinforcement Learning / Susan Amin [et al.]. – <https://arxiv.org/abs/2109.00157>.

9. Sutton, R.S. Reinforcement Learning: An Introduction / R.S. Sutton, A.G. Barto. – Cambridge: The MIT Press, 2018. – 2-nd edition. – 552 p.

Поступила в редакцию 11.09.2024.

Информация об авторах

Прохоренко Владислав Александрович – ст. преподаватель
Никитюк Юрий Валерьевич – к.ф.-м.н., доцент
Сморodin Виктор Сергеевич – д.т.н., профессор

ВЕРОЯТНОСТНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД АНАЛИЗА МЕДИЦИНСКОЙ СТАТИСТИКИ

Е.И. Сукач¹, А.П. Кончиц²

¹Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины

²Институт леса Национальной академии наук Беларуси, Гомель

PROBABILISTIC-ALGEBRAIC METHOD OF ANALYSIS OF MEDICAL STATISTICS

E.I. Sukach¹, A.P. Konchits²

¹Francisk Skorina Gomel State University

²Institute of Forest of the National Academy of Sciences of Belarus

Аннотация. Излагается подход к исследованию взаимного влияния различных причин смертности. Вводятся понятия наблюдаемой и действующей смертности. Предлагается способ восстановления действующих значений смертности, не искаженных влиянием других причин смертности. Подход демонстрируется на примере восстановления действующих значений смертности при исключении смертности от внешних причин.

Ключевые слова: биология продолжительности жизни, возрастная динамика общей смертности, наблюдаемая и действующая смертность, стратегия здравоохранения, расчеты изменения продолжительности жизни, значения смертности, процесс вымирания, компенсационный эффект, оценка вклада отдельных причин смертности.

Для цитирования: Сукач, Е.И. Вероятностно-алгебраический метод анализа медицинской статистики / Е.И. Сукач, А.П. Кончиц // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 82–88. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_82. – EDN: BBUQIH

Abstract. An approach to the study of the mutual influence of various causes of mortality is outlined. The concepts of observed and effective mortality are introduced. A method is proposed to restore the current mortality values that are not distorted by the influence of other causes of mortality. The approach is demonstrated by the example of restoring the current mortality values while excluding mortality from external causes.

Keywords: biology of life expectancy, age dynamics of total mortality, observed and current mortality, health strategy, calculations of changes in life expectancy, mortality values, process of extinction, compensatory effect, assessment of the contribution of individual causes of mortality.

For citation: Sukach, E.I. Probabilistic-algebraic method of analysis of medical statistics / E.I. Sukach, A.P. Konchits // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 4 (61). – P. 82–88. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_82 (in Russian). – EDN: BBUQIH

Введение

Анализ смертности и продолжительности жизни традиционно является одним из центральных в демографических исследованиях. Прогнозирование продолжительности жизни, определение мер, способствующих увеличению продолжительности жизни, является актуальной областью научных исследований, в результате развития которой сложилось целое направление, базирующееся на применении точных количественных методов и вероятностного подхода к явлениям природы, конечной целью которого является стремление выяснить механизмы процессов по их внешнему проявлению.

Изучение механизмов, определяющих продолжительность жизни, тесно связано с исследованием процессов старения организма с учетом всего наблюдаемого разнообразия конкретных болезней и оценкой возрастной динамики смертности по различным причинам.

Для прогнозирования демографических процессов и оценки результативности долгосрочных мер в области медицины используются современные технологии обработки статистических данных, базирующиеся на математических методах, значительную часть которых составляют методы математического моделирования. Все подходы, целью которых является исследование процессов старения организма, можно условно разделить на два класса.

Первый класс предполагает учет различных причин смерти в ходе моделирования возрастной динамики общей смертности [1]. Несомненное достоинство подобного подхода – возможность учета специфической медико-биологической информации о конкретных механизмах возникновения и развития каждого типа патологии. Между тем, при таком подходе практически не представляется возможным создать модель

общей смертности, как следствие, оценить продолжительность жизни.

Основным ограничением моделей второго класса при анализе возрастной динамики общей смертности является игнорирование отдельных причин смерти [2], [3]. Следует отметить, что простота математического описания в ряде подобных случаев не гарантирует правильность получаемых результатов, неучет разнообразия возрастной патологии при математическом моделировании продолжительности жизни должно быть обосновано в любой предлагаемой модели.

Исходной посылкой известных моделей продолжительности жизни, поддерживающих две крайние позиции по данному вопросу: учет всего наблюдаемого многообразия причин смерти либо его полное игнорирование, является игнорирование взаимного влияния причин смертности.

Однако, простая трехпараметрическая модель Гомперца – Мейкема [4], описывающая с высокой точностью возрастную динамику общей смертности при самом разном соотношении отдельных причин смерти для реальных статистических данных, свидетельствует о согласованности отдельных причин смерти, их взаимодействии.

Таким образом, накопленные статистические данные смертности являются наблюдаемым результатом взаимодействия причин смертности. А известные методы не решают поставленную задачу, а позволяют получить выводы, исходя из наблюдаемых показателей смертности.

С этой целью они используют данные сервера ВОЗ и других медицинских и демографических сайтов, систематизирующих статистическую информацию, характеризующую динамику процесса вымирания, которая выражается в возрастных показателях общей смертности и возрастных показателях смертности по разным причинам. Статистические данные представляют собой наблюдаемые значения выделенных показателей, которые возникли в результате взаимодействия и взаимного влияния случайных процессов, обусловленных как внешними факторами, так и множественными биологическими процессами внутри человека. Результат этого взаимодействия проявляется в виде наблюдаемых статистических данных, классифицированных по различным причинам для различных стран и временных интервалов.

Поэтому актуальна разработка нового подхода и программных средств его реализации для выявления действующих повозрастных показателей смертности по каждой из причин, не искажённых воздействием других причин смерти и определяющих, в совокупности, наблюдаемые повозрастные показатели общей смертности.

Это позволит использовать восстановленные действующие значения смертности для уточнения выводов, полученных на основе

наблюдаемых статистических данных, выявления отличительных особенностей действующих значений смертности для различных причин, различных возрастных групп и временных периодов, и воссоздания (корректировки) действующей картины динамики продолжительности жизни в целом.

В статье рассматриваются вопросы анализа медико-демографических данных с использованием аппарата вероятностно-алгебраического моделирования, позволяющего представлять случайный процесс формирования наблюдаемых показателей смертности в виде композиции случайных процессов формирования повозрастных показателей смертности по различным причинам с учетом заданных функций их взаимодействия.

В статье приводится математический аппарат вероятностно-алгебраического моделирования и описывается способ его использования для восстановления действующих значений возрастной смертности с учётом взаимодействия различных причин смертности. Применение подхода демонстрируется на примере оценки действующих значений возрастных показателей смертности по внешним причинам, используемом статистические данные CDC [5]. Приведенный пример поясняет идею предложенного подхода.

1 Формализация объекта исследования

Проводя аналогию с подходом оценки надёжности технических систем, будем рассматривать биологический объект в виде сложной системы, включающей ряд взаимосвязанных подсистем, функционирование которых подчиняется естественным законам накопления повреждений, характерных для технических систем. Учитывая согласованность причин смертностей, будем предполагать, что разрушение организма является многостадийным процессом, не зависящим от конкретных причин смерти [4].

При оценке продолжительности жизни биологических объектов будем использовать подход, основанный на выделении для взаимодействующих подсистем исследуемого объекта предельного состояния, свидетельствующего о прекращении его функционирования.

Объектом исследования является случайный процесс смертности для представителей социально-биологической группы на выбранном временном интервале.

С использованием вероятностно-алгебраического аппарата будем моделировать сложный случайный процесс взаимодействия множества причин смертностей, классифицированных ВОЗ и определяющих в конечном итоге продолжительность жизни человека (представителей социально-биологической группы). Исходными данными для реализации моделирования служит статистическая информация, характеризующая процессы смертности, которая имеется на

различных демографических и медицинских серверах, обрабатывающих, классифицирующих и хранящих данные для различных стран и временных интервалов [5], [6].

Данные, характеризующие процесс смертности, представляют собой вектор, каждый элемент которого представляет число умерших в j -ой возрастной группе:

$$W = (w_1, w_2, \dots, w_N), \quad (2.1)$$

где N – число возрастных групп исследуемого объекта. Имея вектор повозрастной численности исследуемой социально-биологической группы, а именно:

$$D = (d_1, d_2, \dots, d_N), \quad (2.2)$$

можно получить вектор повозрастных интенсивностей смертности:

$$P^i = (p_1^i, p_2^i, \dots, p_N^i), \sum_{j=1}^N p_j^i = 1, p_j^i = \frac{w_j}{d_j}, j = \overline{1, N}, \quad (2.3)$$

где i – метка причины смертности, j – номер возрастной группы.

Известные наблюдаемые статистические данные представим в виде вектора вероятностей повозрастных показателей смертности по причине A :

$$P^A = (p_1^A, \dots, p_N^A), \sum_{j=1}^N p_j^A = 1. \quad (2.4)$$

Вектор вероятностей, описывающий повозрастные показатели общей смертности обозначим:

$$P^S = (p_1^S, \dots, p_N^S), \sum_{j=1}^N p_j^S = 1. \quad (2.5)$$

Обозначим действующие (очищенные от влияния других причин смертности) повозрастные показатели смертности по причине A для анализируемого объекта вектором:

$$P^{VA} = (p_1^{VA}, \dots, p_N^{VA}), \sum_{j=1}^N p_j^{VA} = 1, \quad (2.6)$$

где j -ый элемент вектора определяет значение вероятности смерти по причине A для j -ой возрастной группы анализируемого объекта.

Действующие вероятностные повозрастные показатели смертности по всем остальным причинам, исключая A , обозначим вектором:

$$P^{V\bar{A}} = (p_1^{V\bar{A}}, \dots, p_N^{V\bar{A}}), \sum_{j=1}^N p_j^{V\bar{A}} = 1, \quad (2.7)$$

где j -ый элемент вектора определяет значение вероятности смерти для j -ой возрастной группы анализируемого объекта по различным причинам смертности, исключая причину A .

Опишем процесс взаимодействия причин смертностей моделью, включающей два компонента K_1 и K_2 . Будем считать, что число состояний компонентов $S = \{S_j\}, j = \overline{1, N}$, определяется числом выделенных возрастных групп, для каждой из которых известны вероятности наблюдаемой общей смертности вида (2.5) и наблюдаемые значения смертности по причине A (2.4).

В настоящем изложении в качестве компонентов будем рассматривать случайные процессы формирования вероятностных значений смертности по различным причинам, взаимодействие которых описывается некоторой функцией F .

Ставится задача аналитического расчёта вектора действующих показателей смертности по причине A вида (2.6) для анализируемого объекта по наблюдаемым значениям общей смертности (2.5) и наблюдаемым значениям смертности по причине A (2.4).

С этой целью предлагается использовать метод вероятностно-алгебраического моделирования сложных систем [5], основанный на аппарате стохастических алгебр, которые порождаются операциями, описываемыми функциями взаимодействия компонентов (случайных процессов смертности), выделенных в процессе формализации объекта исследования.

2 Математическая основа вероятностно-алгебраического моделирования

Для заданной функции $F: S \times S \rightarrow S$ компонент $K_3 = K_1 * K_2$ назовем F -композицией компонентов K_1 и K_2 , если $K_3 = F(K_1, K_2)$.

Для независимых компонентов эта композиция определяет вектор интенсивностей общей смертности $P^3 = P^1 * P^2$ по интенсивностям смертностей по причине 1 и причине 2, соответственно P^1 и P^2 :

$$P_k^3 = \sum_{k=F(i,j)} P_i^1 P_j^2. \quad (3.1)$$

Ввиду линейности и дистрибутивности, введенная соотношением (3.1) операция умножения векторов пространства R^N порождает алгебру A_F .

Векторы

$$\sigma^1 = (1, 0, 0, 0, \dots, 0), \sigma^2 = (0, 1, 0, 0, \dots, 0), \dots,$$

$$\sigma^N = (0, 0, 0, 0, \dots, N)$$

являются базисными векторами алгебры A_F .

Умножением базисных векторов определяется тензор структурных коэффициентов алгебры – $\|a_{ij}^k\|$. Структурные коэффициенты алгебры A_F задаются следующим образом:

$$\|a_{ij}^k\| = \begin{cases} a_{ij}^k = 1, & \text{если } k = F(i, j); \\ a_{ij}^k = 0, & \text{если } k \neq F(i, j). \end{cases} \quad (3.2)$$

Алгебру, структурные коэффициенты которой удовлетворяют условию

$$\forall i, j, k, a_{ij}^k \geq 0 \text{ и } \sum_{k=1}^N a_{ij}^k = 1, \quad (3.3)$$

будем называть стохастической, поскольку элементами множества её представлений являются стохастические матрицы $M = \|m_{jk}\|$. Элементы

матриц $M = \|m_{jk}\|$ определяются по формуле:

$$m_{jk} = \sum_{i=1}^N a_{ij}^k p_i, \quad (3.4)$$

где a_{ij}^k – структурные коэффициенты алгебры, p_i – элементы произвольного вектора вида (2.3).

Например, для стохастической алгебры A_F , порождённой функцией $F(i, j) = \min(i, j)$, формируется множество представлений, элементами которых являются стохастические матрицы. Вид этих матриц определяется исходным вектором вероятностей $P=(p_1, p_2, \dots, p_N)$:

$$M_{\min} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_1 & \sum_{i=2}^n p_i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_1 & p_2 & \sum_{i=3}^n p_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \dots & \sum_{i=n-1}^n p_i & 0 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \dots & p_{n-1} & p_n \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Примерами других функций, описывающими композицию изображений, могут служить следующие: $F_1(i, j) = \max(i, j)$, $F_2(i, j) = \min(i, j)$, $F(i, j) = \min(i + j, N)$, $F_3(i, j) = |i - j|$ и другие. Эти функции имеют свою семантическую окраску и однозначно определяют коэффициенты вероятностно-алгебраического моделирования a_{ij}^k , удовлетворяющие условию (3.3) при реализации расчётов с использованием формулы (3.2).

4 Вероятностно-алгебраическая модель взаимодействия независимых причин смертностей

Для оценки продолжительности жизни социально-биологической системы используется модель, включающая два компонента K_1 и K_2 . Компоненты отражают в модели случайный процесс смертности для исследуемого объекта, а именно: K_1 – отражает повозрастную смертность, обусловленную причиной 1; K_2 – представляет повозрастную смертность по причине 2. Повозрастные показатели смертности описываются векторами, соответственно P_1 и P_2 , которые имеют вид (2.3).

Используя терминологию из области надёжности технических систем, предположим, что компоненты взаимодействуют по функции $F(i, j) = \min(i, j)$. То есть, модель для определения повозрастного показателя смертности имеет вид $K_3 = K_1 * K_2$, в которой процесс взаимодействия компонентов описывается функцией $F(i, j) = \min(i, j)$. Это означает, что отказ системы (смерть представителя социально-биологической группы) наступает либо по причине 1, либо по причине 2.

Вероятностно-алгебраическое моделирование реализует процесс формирования вектора вероятностей состояний системы по векторам

вероятностей состояний структурных элементов с учётом взаимодействия и взаимного влияния последних [5]. В процессе моделирования аналитически рассчитывается результирующий вектор вероятностей, характеризующий вероятность общей повозрастной смертности вида (2.5).

С использованием структурных коэффициентов алгебры a_{ij}^k вида (3.2) операция умножения $P^3 = P^1 * P^2$, определённая соотношением (3.1), может быть представлена в виде:

$$p_k^3 = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N a_{ij}^k p_i^1 p_j^2, \text{ где } i, j, k = \overline{1, N}. \quad (4.1)$$

Вектора вида (2.3) являются исходными для реализации вероятностно-алгебраического моделирования. Структурные коэффициенты алгебры (3.3) называются коэффициентами вероятностно-алгебраического моделирования, а процесс формирования результирующего вектора вероятностей P^3 по исходным векторам вероятностей P^1 и P^2 называется вероятностно-алгебраическим моделированием.

Результатом вероятностно-алгебраического моделирования, характеризующим процесс взаимодействия причин смертностей для исследуемого объекта, является вектор вероятностей состояний (2.5), описывающий повозрастные показатели общей смертности.

Таким образом, зная значения векторов P^1 и P^2 , а также закон их композиции F , по соотношению (4.1) можно определить значения результирующего вектора P^3 .

Соотношение (4.1) может быть обобщено для описания композиции большего числа исходных компонентов (случайных процессов смертей по разным причинам). Так, для композиции трех компонентов (по причинам 1, 2 и 3) значения вектора повозрастных показателей общей смертности определяются следующим образом:

$$p_k^4 = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N a_{ijl}^k p_i^1 p_j^2 p_l^3, \text{ где } i, j, l, k = \overline{1, N}. \quad (4.2)$$

Такая модель описывает случайный процесс формирования повозрастных показателей общей смертности, когда важно выделить две лидирующие причины смертности. При этом в модели в качестве исходных данных используются значения повозрастных показателей по причине 1, повозрастных показателей по причине 2 и по причине 3. По ним в соответствии с заданной операцией аналитически с использованием описанного формализма формируется результирующий вектор повозрастных показателей смертности по всем причинам.

5 Решение задачи определения действующих показателей смертностей

С использованием описанного формализма возможно решение обратной задачи, а именно: нахождение значений вектора P^1 повозрастных

показателей смертности по причине 1 по вектору вероятностей общей смертности P^3 и вектору вероятностей повозрастных показателей по причине P^2 соответственно.

С этой целью матрица M_{P^2} вида (3.5) определяется следующим образом:

$$M_{P^2} = \sum_{j=1}^N a_{ij}^k p_j^2. \quad (5.1)$$

Тогда операция умножения $P^3 = P^1 * P^2$ может быть представлена следующим образом:

$$P^3 = M_{P^2} \cdot P^1. \quad (5.2)$$

Откуда следует:

$$P^1 = (M_{P^2})^{-1} \cdot P^3. \quad (5.3)$$

Этот способ аналитических расчетов интересен для восстановления неизвестных векторов вероятностей смертности по причине 1 по известным данным.

В целом математически обоснованные аналитические расчёты (2.1)–(5.3), реализуемые в результате построения и использования вероятностно-алгебраических моделей «конкурирующие смертности», гарантируют точность получения результирующих данных даже в условиях отсутствия статистических данных. Для этой цели могут быть использованы как прямые (4.1), так и обратные (5.3) модели взаимодействия случайных процессов смертности.

Для решения задачи оценки действующих показателей строятся вероятностно-алгебраические модели с различными функциями взаимодействия компонентов.

Опишем случайный процесс взаимодействия действующих причин смертности двумя функциями F_1 и F_2 .

Функция $F_1(i, j) = \min(i, j)$ задаёт операцию, порождающую стохастическую алгебру на множестве векторов вида (2.3) и позволяющую рассчитать коэффициенты вероятностно-алгебраического моделирования. При описании процесса взаимодействия причин смертностей указанной функцией, который реализуется вероятностно-алгебраическом умножением действующих векторов (2.6) и (2.7), номер состояния системы (результирующего элемента K_3) определяется состоянием с минимальным номером, характеризующим наступление смерти в более молодом возрасте.

Будем полагать, что функция F_2 имеет следующий вид:

$$F_2(i, j) = \begin{cases} i, & \text{если } i \leq j; \\ N, & \text{если } i > j. \end{cases} \quad (5.4)$$

Это означает, что при расчёте коэффициентов моделирования (3.2), определяющих результат вероятностно-алгебраического умножения векторов (2.6) и (2.7), состояние системы определяет номер состояния (возрастной группы) вектора (2.6), если он меньше или равен номеру

второго вектора (2.7). В противном случае результирующему состоянию присваивается номер N . С учётом семантики исследуемой предметной области это будет означать, что отдельно фиксируются случаи смерти по причине A для всех возрастных групп, а все случаи смертности по другим причинам относятся к состоянию N , определяющему последнюю возрастную группу.

Для восстановления действующих показателей смертности составляем две вероятностно-алгебраические модели. Первая модель имеет вид:

$$K_3 = F_1(K_1, K_2),$$

где компоненты K_1 и K_2 описываются векторами (2.6) и (2.7), а элемент K_3 описывает процесс взаимодействия этих элементов по функции. $F_1(i, j) = \min(i, j)$.

Будем считать, что значения вектора вероятностей, характеризующего элемент K_3 , известны и задаются вектором (2.5), представляющим наблюдаемые повозрастные показатели общей смертности для исследуемых возрастных групп.

Вторая модель реализует вероятностно-алгебраическое умножение тех же векторов вероятностей (2.6) и (2.7), но по функции (5.4):

$$K_3 = F_2(K_1, K_2).$$

Полагаем, что результат вероятностно-алгебраического умножения описывается вектором (2.4), отражающим наблюдаемые повозрастные показатели смертности по причине A .

Решение системы двух уравнений (5.2) и (5.3) позволяет восстановить вероятности действующих повозрастных показателей смертности по причине A (2.6) и вероятности действующих повозрастных показателей смертности по всем остальным причинам (2.7) без учёта взаимодействия (конкуренции) причин в случайном процессе смертности.

6 Восстановления действующих повозрастных показателей смертности от внешних причин. Применение разработанного метода к полученным с сайта CDC [6] данным, отражающим процесс смертности для мужчин в 1999 году в США, позволило найти единственное решение задачи восстановления векторов действующих вероятностей показателей смертности, обусловленных внешними причинами и всеми остальными причинами, исключая внешние.

На рисунке 6.1 представлены зависимости логарифмических значений векторов вероятностей повозрастных показателей смертности (логарифмических значений интенсивностей смертности) от возраста для анализируемых данных, а именно: наблюдаемые значения повозрастного показателя общей смертности (2.1); наблюдаемая повозрастная смертность по внешним причинам (2.2); действующая повозрастная смертность по внешним причинам (2'); действующая повозрастная смертность по другим причинам (1').

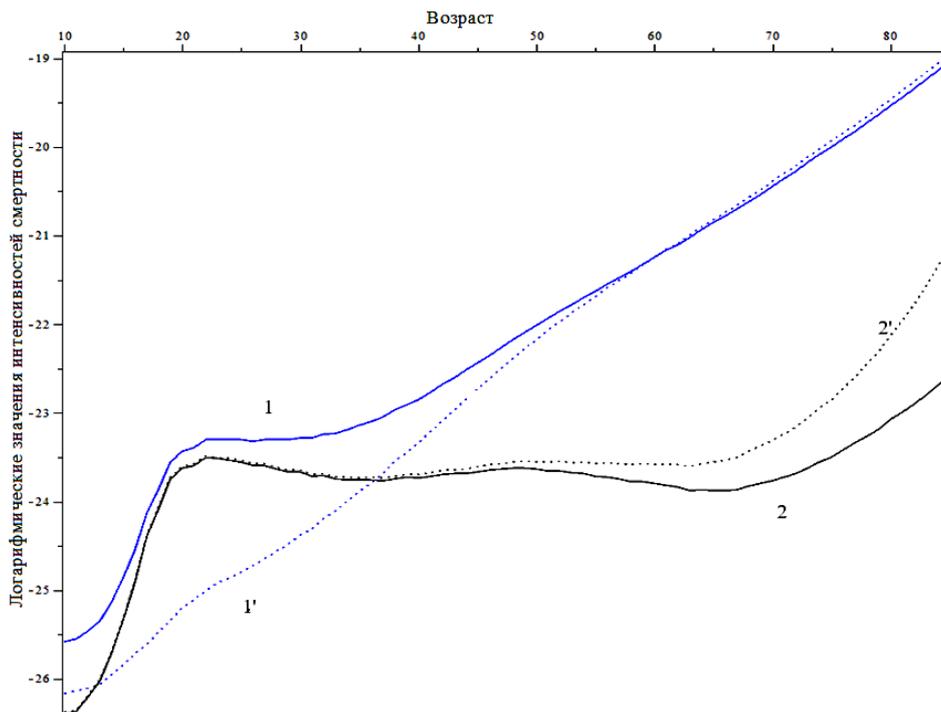


Рисунок 6.1 – Зависимость логарифма значений векторов вероятностей наблюдаемых и действующих смертностей от возраста

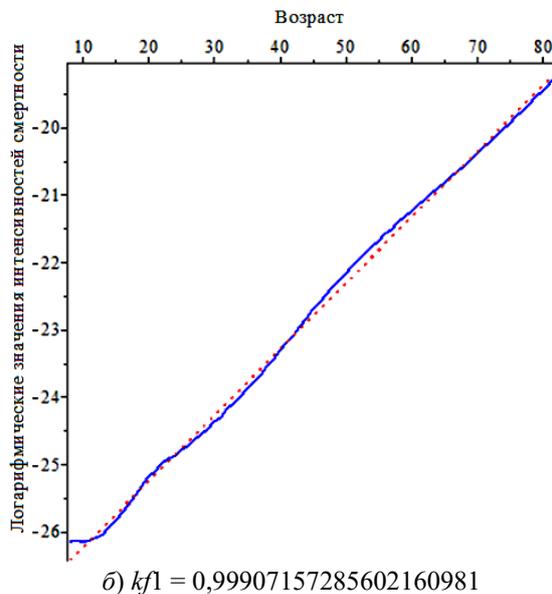
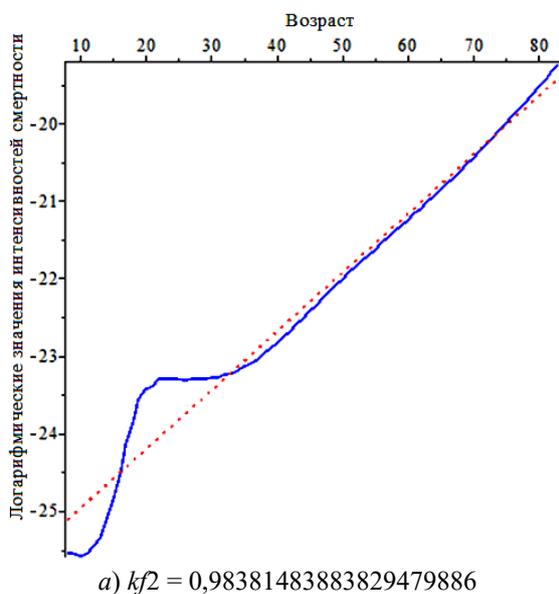


Рисунок 6.2 – Зависимости логарифмов значений интенсивностей повозрастной общей смертности (а) от возраста и логарифмов значений интенсивностей повозрастной общей смертности от возраста, в предположении, что смертность по внешним причинам была корректно исключена (б)

На рисунке 6.2 представлены зависимости логарифмических значений интенсивностей повозрастной общей смертности (а) и общей смертности, в предположении, что смертность по внешним причинам была корректно исключена (б).

Как видно из рисунков, рисунок 6.2 согласуется с законом Гомперца (на рисунках представлен пунктирной линией). Полученная точность расчетов значительно превышает точность

наблюдаемых статистических данных: $kf1 = 0,9990715$. А точность проведенных расчетов определяется точностью исходных данных.

Заключение

В статье представлен точный аналитический способ нахождения действующих значений повозрастной смертности по различным причинам по наблюдаемой повозрастной смертности.

Расчёты реализуются путем построения двух вероятностно-алгебраических моделей, использующих известные наблюдаемые значения смертности.

Полученные аналитическим способом значения действующих по возрасту показателей смертности по различным причинам позволяют провести сравнительный анализ их с аналогичными наблюдаемыми показателями смертности и оценить разницу между ними.

Практическое значение предложенного подхода: определив значения действующих по возрасту показателей смертности (не искажённые влиянием других причин смертности), можно тем самым определить их долю в общей смертности и стратегическое направление снижения смертности. При этом среди огромного многообразия причин смерти удастся выделить небольшое их число и оценить их непосредственное влияние на общую смертность. Практическая значимость полученных результатов состоит в возможности оценить ожидаемое снижение общей смертности в результате применения мер по предупреждению смертности по лидирующими причинами смертности.

Таким образом, предложен принципиально иной подход к оценке вероятностных показателей по возрасту смертности и оценке значимости причин смерти, основанный не на статистически наблюдаемой величине смертности по данной причине, а на первичной, изначальной величине смертности без учёта влияния всех остальных причин на общую смертность.

Использование предложенного подхода, описывающего процесс взаимного влияния причин смертностей в процессе вымирания социально-биологической системы, позволит уточнить выводы, вытекающие из анализа статистических медико-демографических данных для различных исследуемых объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Woodbury, M.A.* A theoretical model of the physiological dynamics of circulatory disease in human populations / M.A. Woodbury, K.J. Manton // *Hum. Biol.* – 1983. – Vol. 55. – P. 417–441.

2. *Skurnick, F.D.* Stochastic studies of aging and mortality in multicellular organisms. I. The asymptotic theory / F.D. Skurnick, G. Kemeny // *Mech. Ageing and Develop.* – 1978. – Vol. 7. – P. 65–80.

3. *Сукач, Е.И.* Имитационное моделирование продолжительности жизни биологических систем / Е.И. Сукач, В.Л. Мережа, Т.Я. Каморникова // *Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины.* – 2003. – № 3 (54). – С. 96–100.

4. *Гаврилов, Л.А.* Биология продолжительности жизни / Л.А. Гаврилов, Н.С. Гаврилова. – Москва: Наука, 1991. – 280 с.

5. *Сукач, Е.И.* Вероятностно-алгебраическое моделирование сложных систем графовой структуры / Е.И. Сукач. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2012. – 224 с.

6. *National Center for Health Statistics:* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.cdc.gov/nchs/deaths.htm> – Дата доступа: 6.04.2024.

Поступила в редакцию 07.06.2024.

Информация об авторах

Сукач Елена Ивановна – к.ф.-м.н., доцент
Кончиц Андрей Петрович – к.б.н.

УДК 512.542

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_89

EDN: BHOFNX

σ-ПРОБЛЕМА КЕГЕЛЯ – ВИЛАНДТА: ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ**С.Ф. Каморников¹, В.Н. Тютянов²**¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины²Гомельский филиал Международного университета «МИТСО»**THE KEGEL – WIELANDT σ-PROBLEM: REVIEW OF RESULTS****S.F. Kamornikov¹, V.N. Tyutyaynov²**¹Francisk Skorina Gomel State University²Gomel Branch of International University «MITSO»

Аннотация. Пусть σ – разбиение множества всех простых чисел. В работе обсуждаются результаты разных лет и разных авторов, касающиеся σ -проблемы Кегеля – Виландта, и анализируются подходы к ее решению.

Ключевые слова: конечная группа, холлова подгруппа, конечная простая группа, субнормальная подгруппа, проблема Кегеля – Виландта, разбиение множества всех простых чисел, σ -субнормальная подгруппа, σ -полная группа, σ -проблема Кегеля-Виландта, решетка подгрупп.

Для цитирования: Каморников, С.Ф. σ -Проблема Кегеля – Виландта: обзор результатов / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 89–97. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_89. – EDN: BHOFNX

Abstract. Let σ be a partition of the set of all prime numbers. In the paper the results of different years and different authors concerning the Kegel-Wielandt σ -problem are discussed, and the approaches to its solution are analysed.

Keywords: finite group, Hall subgroup, finite simple group, subnormal subgroup, Kegel – Wielandt problem, partition of the set of all prime numbers, σ -subnormal subgroup, σ -complete group, Kegel – Wielandt σ -problem, subgroup lattice.

For citation: Kamornikov, S.F. The Kegel – Wielandt σ -problem: review of results / S.F. Kamornikov, V.N. Tyutyaynov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 4 (61). – P. 89–97. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_4_61_89 (in Russian). – EDN: BHOFNX

Введение

Все рассматриваемые в работе группы являются конечными.

Кегель в 1962 году в работе [1] предложил следующую концепцию p -субнормальной подгруппы: для данного простого числа p подгруппа H группы G называется p -субнормальной в G (при этом, следуя [2], мы пишем $H \leq_p G$), если $H \cap P \in Syl_p(H)$ для любой силовской p -подгруппы P группы G . Очевидно, отношение \leq_p является транзитивным и если $H < G$, то $H \leq_p G$ для любого простого p . Отсюда следует, что если подгруппа H субнормальна в G , то $H \leq_p G$ для любого простого p .

В [1] Кегель выдвинул следующую гипотезу: подгруппа H конечной группы G является субнормальной в G тогда и только тогда, когда она p -субнормальна для любого простого числа p .

Виландт в 1980 году (см. [3]), когда классификация конечных простых групп была практически завершена, включил эту гипотезу в список наиболее важных проблем, требующих решения

после завершения классификации. Поэтому с тех пор эту гипотезу называют проблемой Кегеля – Виландта.

Полное решение гипотезы Кегеля – Виландта, опирающееся на классификацию конечных простых групп, было получено Кляйдманом в 1991 году. Оно связано с изучением структуры минимального контрпримера (G, H) , где H – такая подгруппа из G , что $H \leq_p G$ для любого простого p , а под минимальностью контрпримера понимается минимальность суммы $|G| + |H|$. В работе [4] установлено, что в минимальном контрпримере (G, H) группы G и H являются простыми. Дальнейший анализ в [4] ввиду классификационной теоремы связан с перебором всех простых неабелевых групп и установлением в каждом возможном случае простого числа p и p -элемента $h \in H$, для которого не выполняется равенство $\Theta_H(h) = \Theta_G(h)$, где

$$\Theta_G(h) = \frac{|Syl_p(G)|}{|\{P \in Syl_p(G) \mid h \in P\}|}$$

и

$$\Theta_H(h) = \frac{|Syl_p(H)|}{|\{F \in Syl_p(H) \mid h \in F\}|}.$$

Работа [4] стимулировала развитие целого ряда новых концепций обобщенной субнормальности (с основными результатами, касающимися некоторых из них, можно ознакомиться в [5]). С позиций проблемы Кегеля – Виландта наибольший интерес представляет предложенная А.Н. Скибой в рамках σ -метода концепция σ -субнормальной подгруппы.

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества \mathbb{P} всех простых чисел, т.е. $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Пусть G – σ -полная группа, т.е. G обладает по крайней мере одной холловой σ_i -подгруппой для любого $i \in I$. Для $i \in I$ мы пишем $H \leq_{\sigma_i} G$, если подгруппа обладает тем свойством, что $H \cap S_i \in Hall_{\sigma_i}(H)$ для каждой холловой σ_i -подгруппы S_i группы G и любого $i \in I$.

В [6] под номером 6.4 А.Н. Скиба сформулировал следующий интересный аналог гипотезы Кегеля – Виландта (см. также вопрос 19.86 из «Коуровской тетради» [7]).

σ -Проблема Кегеля – Виландта: Верно ли, что подгруппа H σ -полной группы G является σ -субнормальной в G , если $H \leq_{\sigma_i} G$ для любого $i \in I$?

Решить σ -проблему Кегеля – Виландта – значит либо доказать, что для любого разбиения σ подгруппа H σ -полной группы G является σ -субнормальной в G , либо построить пример разбиения σ , для которого подгруппа H σ -полной группы G не является σ -субнормальной в G , если $H \leq_{\sigma_i} G$ для любого $i \in I$.

Отметим также, что если $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ и подгруппа H является σ -субнормальной в σ -полной группе G , то ввиду леммы 2.6 из [8] $H \leq_{\sigma_i} G$ для любого $i \in I$. Таким образом, по сути, σ -проблема Кегеля – Виландта ставит вопрос о нахождении нового критерия σ -субнормальности подгруппы в σ -полной группе.

Концепция σ -субнормальности, развивающая идею субнормальной подгруппы, предложена А.Н. Скибой в [8]. Эта концепция базируется на следующем определении.

Для заданного разбиения σ множества всех простых чисел подгруппа H группы G называется σ -субнормальной в G , если существует цепь подгрупп $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G$ такая, что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i , либо группа $H_i / Core_{H_i}(H_{i-1})$ является σ_j -группой для некоторого $j \in I$.

Ясно, что подгруппа H субнормальна в группе G тогда и только тогда, когда она σ -субнормальна в G для минимального разбиения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$, состоящего из одноэлементных подмножеств. Поэтому для минимального разбиения σ -проблема Кегеля – Виландта превращается в проблему Кегеля – Виландта.

В [9] предложена обобщенная σ -проблема Кегеля – Виландта. Появление ее связано с существованием групп, обладающих несколькими классами сопряженных холловых подгрупп, и идея состоит в том, чтобы рассматривать не все полные холловы множества типа σ , а лишь некоторые из них.

Следуя [8], будем говорить, что для разбиения $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ система $\Sigma = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ холловых σ_i -подгрупп ($i = 1, 2, \dots, k$) группы G является полным холловым множеством типа σ группы G , если выполняются следующие два условия:

- 1) $(|S_i|, |S_j|) = 1$ для всех $i \neq j \in \{1, 2, \dots, k\}$;
- 2) $\pi(G) = \pi(S_1) \cup \pi(S_2) \cup \dots \cup \pi(S_k)$.

Если $\Sigma = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ – полное холлово множество типа σ группы G , то, очевидно, система $\Sigma^g = \{S_1^g, S_2^g, \dots, S_k^g\}$ также является полным холловым множеством типа σ группы G для любого элемента $g \in G$.

Будем говорить, что полное холлово множество Σ типа σ группы G редуцируется в подгруппу H группы G , если $H \cap S_i$ – холлова σ_i -подгруппа из H для любого $i = 1, 2, \dots, k$ (возможно, что $H \cap S_i = 1$ для некоторых $i = 1, 2, \dots, k$).

Обобщенная σ -проблема Кегеля – Виландта: Пусть σ – разбиение множества всех простых чисел и $\Sigma = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ – полное холлово множество типа σ группы G . И пусть H – такая подгруппа из G , что Σ^g редуцируется в H для любого элемента $g \in G$. Верно ли, что подгруппа H является σ -субнормальной в G ?

Если в σ -проблеме Кегеля – Виландта требуется, чтобы любое полное холлово множество Σ типа σ группы G редуцировалось в подгруппу H группы G , то в ее обобщенном аналоге речь идет только о полных холловых множествах Σ^g ($g \in G$) для некоторого заданного полного холлового множества Σ группы G . Ввиду леммы 2.6 из [8] положительное решение обобщенной σ -проблемы Кегеля – Виландта всегда приводит к решению σ -проблемы Кегеля – Виландта.

В настоящее время, кроме минимального разбиения, σ -проблема Кегеля – Виландта решена для целого ряда разбиений σ множества всех простых чисел. В третьей части обзора мы приводим эти разбиения и относящиеся к ним результаты. Мы описываем также содержание всех

сложившихся в настоящее время подходов к решению σ -проблемы Кегеля – Виландта, выделяя следующие из них:

- 1) исследовать σ -проблему Кегеля – Виландта для **фиксированного разбиения** σ ;
- 2) исследовать σ -проблему Кегеля – Виландта для **фиксированных простых групп и произвольного разбиения** σ ;
- 3) исследовать σ -проблему Кегеля – Виландта для произвольного разбиения σ , **отталкиваясь от решеточных свойств** группы;
- 4) исследовать σ -проблему Кегеля – Виландта для произвольного разбиения σ , **отталкиваясь от факторизационных свойств** простых групп.

Структурно работа построена так, что ее основные разделы связаны с описанием перечисленных выше подходов 1)–4).

В основу обзора положен доклад авторов «Об обобщенной проблеме Кегеля – Виландта» [10] на Международной конференции «Алгебра и динамические системы», посвященной 70-летию А.А. Махнева (г. Нальчик, 9–15 июля 2023 года).

1 Определения и обозначения

В работе используются определения и обозначения, принятые в [11]. Что касается терминологии теории σ -субнормальных подгрупп, то мы отсылаем читателя к работе [8].

Если π – некоторое множество простых чисел, то символом π' обозначается множество всех тех простых чисел, которые не принадлежат π . В частности, если множество π состоит из одного простого числа p , то π' – дополнение множества $\{p\}$ в множестве всех простых чисел.

Подгруппа H называется *холловой π -подгруппой* группы G , если $\pi(H) \subseteq \pi$ и $\pi(G:H) \subseteq \pi'$. Будем говорить, следуя [12], что группа G *обладает свойством*:

- E_π , если она содержит холлову π -подгруппу (т. е. $Hall_\pi(G) \neq \emptyset$);
- C_π , если G обладает свойством E_π и любые две холловы π -подгруппы группы G сопряжены;
- D_π , если G обладает свойством C_π и всякая π -подгруппа группы G содержится в некоторой холловой π -подгруппе.

Будем также использовать следующие обозначения:

- если p – простое число, то G_p – силовская p -подгруппа группы G и $Syl_p(G)$ – множество всех силовских p -подгрупп группы G ;
- если π – некоторое множество простых чисел, то G_π – холлова π -подгруппа группы G и $Hall_\pi(G)$ – множество всех холловых π -подгрупп группы G ;

– E_π – множество всех групп, обладающих свойством E_π (в частности, σ -полнота группы G для $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ означает, что $G \in \bigcap_{i \in I} E_{\sigma_i}$);

– если $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – разбиение множества всех простых чисел и n – натуральное число, то $\sigma(n) = \{\sigma_i \cap \pi(n) \mid i \in I, \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$;

– $\sigma(G) = \sigma(|G|)$;

– Z_n – циклическая группа порядка n .

Мы будем часто использовать обозначения из «Атласа конечных групп» [13]. Если A и B – подгруппы группы G , то $A \times B$ – их прямое произведение, а $A : B$ и $A.B$ – расщепляемое и произвольное расширение группы A с помощью группы B , соответственно.

Обозначения $H \triangleleft G$, $H \in sn(G)$ и $H \in sn_\sigma(G)$ используются нами вместо слов « H – нормальная подгруппа группы G », « H – субнормальная подгруппа группы G », и « H – σ -субнормальная подгруппа группы G » соответственно.

Следуя [14], для E_π -группы G через $SZ_\pi(G)$ обозначим множество всех ее подгрупп, в которые редуцируются все холловы π -подгруппы группы G .

Понятно, что подгруппа H σ -полной группы G удовлетворяет условиям σ -проблемы Кегеля – Виландта тогда и только тогда, когда $H \in \bigcap_{i \in I} SZ_{\sigma_i}(G)$.

Следуя [8], для разбиения $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ будем говорить, что группа G называется:

- 1) σ -*примарной*, если она является σ_i -группой для некоторого $i \in I$;
- 2) σ -*разрешимой*, если она обладает главным рядом, каждый фактор которого σ -примарен;
- 3) σ -*нильпотентной*, если G является прямым произведением некоторых σ -примарных групп, т.е. группа G представима в виде прямого произведения своих холловых σ_i -подгрупп для некоторых $i \in I$ (далее класс всех σ -нильпотентных групп обозначается \mathfrak{R}_σ).

Простая проверка показывает, что произведение двух нормальных σ -нильпотентных подгрупп группы G является σ -нильпотентной подгруппой, а потому в G существует наибольшая нормальная σ -нильпотентная подгруппа, которая обозначается $F_\sigma(G)$ и называется σ -нильпотентная радикалом группы G .

Если \mathfrak{F} – непустой класс групп, то подгруппа H группы G называется \mathfrak{F} -*субнормальной в смысле Кегеля*, если существует цепь подгрупп $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G$ такая, что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i , либо группа $H_i / Core_{H_i}(H_{i-1})$ принадлежит \mathfrak{F} .

Простая проверка показывает, что подгруппа H группы G σ -субнормальна в G для некоторого разбиения σ множества всех простых чисел тогда и только тогда, когда она является \mathfrak{R}_σ -субнормальной в G в смысле Кегеля.

Формация \mathfrak{F} называется *решеточной*, если множество всех \mathfrak{F} -субнормальных в смысле Кегеля подгрупп в любой группе образует подрешетку решетки всех подгрупп этой группы.

2 Некоторые технические результаты

Для иллюстрации техники доказательства в данном разделе мы приводим в виде лемм некоторые результаты, играющие ключевую роль при доказательстве основных теорем разделов 3–5.

Пусть H – подгруппа σ -полной группы G , $\sigma(G) = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$ и $\Sigma = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ – полное холлово множество типа σ группы G . Будем говорить, что пара (G, H) является *контрпримером к обобщенной σ -проблеме Кегеля – Виландта*, если для любого $g \in G$ полное холлово множество Σ^g редуцируется в H , но подгруппа H не является σ -субнормальной в G . Если при этом пара (G, H) такова, что сумма $|G| + |H|$ минимальна, то контрпример (G, H) будем называть *минимальным контрпримером к обобщенной σ -проблеме Кегеля – Виландта*.

Следующая лемма, устанавливает строение минимального контрпримера к обобщенной σ -проблеме Кегеля – Виландта и сводит ее решение к анализу строения холловых подгрупп простых неабелевых групп.

Лемма 2.1 [9, лемма 2.4]. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – разбиение множества всех простых чисел. Если (G, H) – минимальный контрпример к обобщенной σ -проблеме Кегеля – Виландта, то G и H – простые неабелевы группы.

Таким образом, структура минимального контрпримера к обобщенной σ -проблеме Кегеля – Виландта такая же, как и контрпримера к гипотезе Кегеля – Виландта.

Отметим, что, как и для обобщенной σ -проблемы, минимальный контрпример к σ -проблеме Кегеля – Виландта имеет такое же строение, которое описано в лемме 2.1.

Ввиду требования σ -полноты группы G в σ -проблеме Кегеля – Виландта ее решение тесно связано со следующим вопросом (известным как проблема 3.2 из [15]):

Найти холловы подгруппы конечных простых групп.

Изучением этой проблемы занимались многие математик (см., например, обзор [15]). Полная классификация холловых подгрупп известных простых групп завершена в работе [15] и содержится в приложении 1 к ней.

Понятно, что классификация холловых подгрупп простых групп не решает проблемы описания σ -полных простых групп, которая даже для конкретных разбиений σ является достаточно сложной теоретико-групповой и теоретико-числовой задачей.

Приведем лишь несколько примеров разбиений σ , для которых классифицированы все σ -полные простые группы. Первый из них связан с известной теоремой Л.С. Казарина, описывающей простые неабелевы группы, которые содержат холлову p' -подгруппу:

Лемма 2.2 [16, теорема 7]. Пусть p – простое число, $\sigma = \{\{p\}, p'\}$ и G – простая группа, порядок которой делится на p . Тогда и только тогда G является σ -полной, когда выполняется одно из следующих условий:

(a) $G = A_p$ и $G_{p'} \cong A_{p-1}$;

(b) $G = PSL_n(q)$, где $q = r^m$, $m \geq 1$, r – простое число и $G_{p'}$ – параболическая подгруппа в G ; при этом $|G : G_{p'}| = (q^n - 1) / (q - 1) = p^k$ и n – простое число;

(c) $G = PSL_2(11)$, $p = 11$ и $G_{p'} \cong A_5$;

(d) $G = M_{11}$, $p = 11$ и $G_{p'} \cong M_{10}$;

(e) $G = M_{23}$, $p = 23$ и $G_{p'} \cong M_{22}$.

Другой пример связан с разбиением $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{2, 3\}'\}$.

Лемма 2.3 [17, теорема В]. Пусть $\pi = \{2, 3\}'$ и $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \pi\}$. Если $|G : G_\pi| = 2^\alpha \cdot 3^\beta$, где $\alpha \geq 2$, $\beta \geq 1$, то простая группа G является σ -полной тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

(1) $G \cong A_5 \cong SL_2(4) \cong PSL_2(5)$, $G_\pi \cong Z_5$;

(2) $G \cong A_6 \cong PSL_2(9)$, $G_\pi \cong Z_5$;

(3) $G \cong PSL_2(7) \cong SL_3(2)$, $G_\pi \cong Z_7$;

(4) $G \cong SL_2(8)$, $G_\pi \cong Z_7$;

(5) $G \cong PSL_2(17)$, $G_\pi \cong Z_{17}$;

(6) $G \cong SL_3(3)$, $G_\pi \cong Z_{13}$;

(7) $G \cong SU_3(3)$, $G_\pi \cong Z_7$;

(8) $G \cong PSU_4(2) \cong PSp_4(3)$, $G_\pi \cong Z_5$;

(9) $G \cong M_{11}$, $G_\pi \cong Z_{11} : Z_5$;

(10) $G \cong M_{12}$, $G_\pi \cong Z_{11} : Z_5$;

(11) $G \cong PSL_2(q)$, $q = p^n$, $p \geq 5$, G_π содержится в подгруппе Бореля группы $PSL_2(q)$.

Доказательство леммы 2.3 опирается на теорему 1.1 из [18], описывающую простые группы, которые содержат подгруппу, индекс которой имеет в точности два различных простых делителя.

Разбиение $\sigma = \{\{p\}, p'\}$ является частным случаем *бинарного* разбиения, т. е. разбиения σ ,

имеющего вид $\sigma = \{\pi, \pi'\}$ для некоторого множества простых чисел π .

Следуя [15], будем говорить, что группа G обладает *стандартной* холловой π -подгруппой, если либо $|\pi \cap \pi(G)| \leq 1$, либо $\pi(G) \subseteq \pi$. В противном случае холлова π -подгруппа называется *нестандартной*.

Следующая лемма, приведенная в [19], описывает простые группы, факторизуемые двумя нестандартными холловыми подгруппами. Доказательство ее следует из результатов работ [20]–[22].

Лемма 2.4 [19, лемма 2]. Пусть G – простая группа, представимая в виде произведения нестандартных холловых подгрупп A и B таких, что $A \cap B = 1$. Тогда выполняется одно из следующих условий:

- (1) $G \cong M_{11}$, $A \cong 3^2 : Q_8.2$ и $B \cong 11 : 5$;
- (2) $G \cong M_{23}$, $A \in \{2^4 : A_7, PSL_3(4) : 2_2\}$ и $B \cong 23 : 11$;
- (3) $G \cong PSL_2(11)$, $A \in \{A_4, D_{12}\}$ и $B \cong 11 : 5$;
- (4) $G \cong PSL_2(29)$, $A \cong A_5$ и $B \cong 29 : 7$;
- (5) $G \cong PSL_2(59)$, $A \in \{A_5, D_{60}\}$ и $B \cong 59 : 29$;
- (6) $G \cong PSL_2(2^n)$, $A \cong U : Z_{2^{n-1}}$ и $B \cong Z_{2^{n+1}}$ ($n \geq 2$, $|U| = 2^n$);
- (7) $G \cong PSL_2(p^n)$, $A \cong U : Z_{(p^n-1)/2}$ и $B \cong D_{2^{n+1}}$ (p – нечетное простое число, $p^n \notin \{7, 11, 29, 59\}$, $p^n \equiv -1 \pmod{4}$, $|U| = p^n$);
- (8) $G \cong PSL_5(2)$, $A \cong 2^6 : (S_3 \times PSL_2(7))$ и $B \cong 31 : 5$;
- (9) $G \cong PSL_r(p^n)$ ($\{r, p\} \neq \{5, 2\}$), $A \cong P_i$ – параболическая подгруппа ($i \in \{1, r-1\}$), и $B \in \{T : Z_r, T\}$ (p – простое число, r – нечетное простое число и $(r, p^n-1) = 1$, T – тор порядка $(p^r-1)/(p^n-1)$).

Леммы 2.2 и 2.4 приводят к следующей классификации σ -полных простых групп для бинарного разбиения σ .

Лемма 2.5. Пусть π – некоторое множество простых чисел и $\sigma = \{\pi, \pi'\}$. Простая группа G является σ -полной тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

- (1) $\pi(G) \subseteq \pi$;
- (2) $\pi(G) \subseteq \pi'$;
- (3) $\pi(G) \cap \pi \neq \emptyset$, $\pi(G) \cap \pi' \neq \emptyset$ и G – группа из списков, представленных в леммах 2.2 и 2.4.

Нам понадобятся результаты работы [2], из которых следует решение проблемы Кегеля – Виландта, основанное на факторизационных свойствах простых групп. Следуя [2], будем говорить, что подгруппа H является *силовски p -транзитивной* в G , если H , действуя сопряжением,

транзитивно переставляет силовские p -подгруппы из G (т. е. выполняется равенство $G = HN_G(P)$ для некоторой силовской p -подгруппы P группы G).

Как отмечено в [2], если подгруппа H является силовски p -транзитивной в G , то $H \leq_p G$. Следующая лемма, вытекающая из теоремы 1.4 работы [2], показывает, что для $p \geq 5$ и при условии $p \in \pi(H)$ обратное утверждение имеет место лишь в трех нетривиальных случаях.

Лемма 2.6. Пусть G – простая группа и H – такая ее собственная подгруппа, что $|H|$ делится на p и $H \leq_p G$ для некоторого простого числа $p \geq 5$. Тогда H является силовски p -транзитивной в G и выполняется одно из следующих условий:

- (a) $G \cong A_n$, $H \cong A_{n-1}$, где $n = s \cdot p^a > p$ и $1 \leq s < p$;
- (b) $G \cong U_3(5)$, $H \cong A_7$ и $p = 5$;
- (c) $G \cong HS$ – группа Хигмэна – Симса, $H \cong M_{22}$ и $p = 5$.

Из леммы 2.6 для простой группы G , в частности, следует, что если $|H|$ делится на pq для двух различных простых чисел p и q , $\{p, q\} \neq \{2, 3\}$, $H \leq_p G$ и $H \leq_q G$, то $G = H$. С учетом строения минимального контрпримера к проблеме Кегеля – Виландта это дает ее другое и более короткое решение.

В случае σ -проблемы Кегеля – Виландта лемма 2.6 позволяет при рассмотрении минимального контрпримера (G, H) исходить из того, что если $\sigma(G) = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$, $|\sigma_i| = 1$ и $\sigma_i \cap \pi(H) \neq \emptyset$, то либо $\sigma_i = \{2\}$, либо $\sigma_i = \{3\}$. При этом в общем случае требование $|\sigma_i| = 1$ нельзя заменить требованием $|\sigma_i \cap \pi(H)| = 1$. В то же время имеет место следующая

Лемма 2.7 [19, лемма 4]. Пусть H – подгруппа группы G и $S \in \text{Hall}_\pi(G)$ для некоторого множества π простых чисел. Если $S_p \triangleleft S$ для некоторого $p \in \pi$ и $S^g \cap H \in \text{Hall}_\pi(H)$ для любого $g \in G$, то $H \leq_p G$.

Отметим также, что в случае минимального контрпримера (G, H) множество $\pi(H)$ не может содержаться в некоторой компоненте разбиения σ .

Лемма 2.8 [9, лемма 2.5]. Пусть (G, H) – минимальный контрпример к обобщенной σ -проблеме Кегеля – Виландта и $\sigma(G) = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$. Тогда $\pi(H)$ не содержится в σ_i для любого $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Существенную роль при анализе минимального контрпримера играет введенная в [19] по

аналогии с [4] функция $\Theta_{G,\pi}$, сопоставляющая каждому π -элементу g группы G число

$$\Theta_{G,\pi}(g) = \frac{|Hall_\pi(G)|}{|\{S \in Hall_\pi(G) \mid g \in S\}|}.$$

Лемма 2.9 [19, лемма 7]. Пусть H – подгруппа D_π -группы G и $H \in C_\pi$. Если $S \cap H \in Hall_\pi(H)$ для любой холловой π -подгруппы S группы G , то для каждого π -элемента $h \in H$ имеет место равенство $\Theta_{G,\pi}(h) = \Theta_{H,\pi}(h)$.

3 Фиксированные разбиения

Один из подходов исследования σ -проблемы Кегеля – Виландта связан с рассмотрением частных разбиений.

Алгоритм решения при таком подходе состоит в выполнении следующих трех шагов:

- 1) зафиксировать некоторое разбиение σ ;
- 2) классифицировать для σ все σ -полные простые группы;
- 3) на основе анализа строения описанных σ -полных простых групп доказать, что множество контрпримеров к σ -проблеме Кегеля – Виландта для данного σ является пустым.

Работа Кляйдмана [4] связана с рассмотрением частного разбиения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$. Понятно, что в этом случае в силу теоремы Силова любая конечная группа является σ -полной. Поэтому при анализе минимального контрпримера следует рассматривать все известные простые неабелевы группы.

Отметим также, что из леммы 2.6 с учетом $p^a q^b$ -теоремы Бернсайда следует, что σ -проблема Кегеля – Виландта имеет положительное решение для разбиения σ , в котором все компоненты, не содержащие числа 2 или 3, являются одноэлементными.

Первый пример отличного от минимального разбиения и разбиения $\sigma = \{\{2,3\}, \{5\}, \{7\}, \dots\}$, подтверждающий σ -гипотезу Кегеля – Виландта, рассмотрен в [9].

Теорема 3.1 [9, теорема 1.1]. Пусть p – простое число, $\sigma = \{\{p\}, p'\}$ и G – σ -полная группа. Если H – такая подгруппа из G , что $H \leq_p G$ и $H \leq_{p'} G$, то $H \in sn_\sigma(G)$.

Отметим, что в оригинальном изложении теорема 1.1 работы [9] дает положительное решение обобщенной σ -проблемы Кегеля – Виландта для разбиения $\sigma = \{\{p\}, p'\}$.

Доказательство теоремы 3.1 опирается на лемму 2.1, устанавливающую строение минимального контрпримера к обобщенной σ -проблеме Кегеля – Виландта для произвольного разбиения σ , а также на лемму 2.2, описывающую σ -полные простые группы для разбиения $\sigma = \{\{p\}, p'\}$. При этом ввиду лемм 2.6 и 2.8

достаточно ограничиться рассмотрением случаев $p = 2$ и $p = 3$.

Для произвольного бинарного разбиения σ -проблема Кегеля – Виландта решена в работе [19].

Теорема 3.2 [19, теорема А]. Пусть π – некоторое множество простых чисел и $\sigma = \{\pi, \pi'\}$. Подгруппа H группы σ -полной группы G является σ -субнормальной в G тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- (1) $H \leq_\pi G$;
- (2) $H \leq_{\pi'} G$.

При анализе минимального контрпримера к теореме 3.2 используется лемма 2.9.

В работе [17] σ -проблема Кегеля – Виландта решена для разбиения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{2,3\}'\}$.

Теорема 3.3 [17, теорема А]. Пусть $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{2,3\}'\}$. Подгруппа H группы $G \in E_{\{2,3\}'}$ является σ -субнормальной в G тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- (1) $H \leq_2 G$;
- (2) $H \leq_3 G$;
- (3) $H \leq_{\{2,3\}'} G$.

Доказательство теоремы 3.3 опирается на лемму 2.5.

Приведем несколько открытых вопросов.

Проблема 3.4. Решить σ -проблему Кегеля – Виландта для разбиения $\sigma = \{\{2,3\}, \{p\}, \{2,3,p\}'\}$, где $p \geq 5$.

Будем говорить, что разбиение σ является *тринарным*, если $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$.

Проблема 3.5. Решить σ -проблему Кегеля – Виландта для произвольного тринарного разбиения σ .

Понятно, что проблема 3.5 связана с решением следующей интересной задачи.

Проблема 3.6. Пусть $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ – тринарное разбиение множества всех простых чисел. Классифицировать все простые неабелевы группы G , принадлежащие классу $E_{\sigma_1} \cap E_{\sigma_2} \cap E_{\sigma_3}$.

Проблема 3.7. Решить σ -проблему Кегеля – Виландта для такого разбиения σ , что $\sigma_i = \{2,3\}$ для некоторого $i \in I$.

4 σ -Проблема Кегеля – Виландта в классе простых неабелевых групп

Из леммы 2.1 следует, что если G – минимальный контрпример к σ -проблеме Кегеля – Виландта, то G – простая неабелева группа (при этом H также является простой неабелевой группой). С учетом этого, второй подход к решению σ -проблемы Кегеля – Виландта связан со следующим алгоритмом действий:

1) зафиксировать простую неабелеву группу G (или некоторый класс простых неабелевых групп);

2) доказать, что для любого разбиения σ множества всех простых чисел группа G не может входить в минимальный контрпример (G, H) для каждой ее простой подгруппы H .

Пусть далее \mathfrak{K} – класс простых неабелевых групп, которые не являются минимальными контр-примерами к σ -проблеме Кегеля – Виландта. Тогда справедлива следующая

Теорема 4.1. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ и G – σ -полная группа, все неабелевы композиционные факторы которой принадлежат \mathfrak{K} . Если H – такая подгруппа группы G , что $H \cap S_i$ – холлова σ_i -подгруппа из H для любого $i \in I$ и всякой холловой σ_i -подгруппы S_i группы G , то $H \in sn_\sigma(G)$.

В настоящее время известно, что классу \mathfrak{K} принадлежат:

- 1) знакопеременные группы [9, предложение 2.6];
- 2) группы Судзуки [23];
- 3) спорадические группы [24];
- 4) группы Ри [25];
- 5) лиевы группы ранга 1 [26].

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 4.2 [26, теорема 1]. Пусть σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел, G – σ -полная группа, все неабелевы композиционные факторы которой являются либо знакопеременными группами, либо спорадическими группами, либо лиевыми группами ранга 1. Если Σ – полное холлово множество типа σ группы G , то подгруппа H группы G является σ -субнормальной в G тогда и только тогда, когда Σ^g редуцируется в H для любого $g \in G$.

5 σ -Проблема Кегеля – Виландта и решетки подгрупп

В [27] (см. также работу [28]) описаны все наследственные насыщенные решеточные формации. Из этого описания следует, что формация \mathfrak{R}_σ всех σ -нильпотентных групп является решеточной, т. е. множество $sn_\sigma(G)$ всех σ -субнормальных подгрупп группы G является подрешеткой решетки всех подгрупп группы G .

В связи с этим, естественно, возникает задача исследования σ -проблемы Кегеля – Виландта в группе G при дополнительном предположении, что некоторые классы ее подгрупп обладают определенными решеточными свойствами. Первые результаты, относящиеся к такой постановке задачи, опубликованы в [29] и инициированы работой [14].

Напомним, что множество L подгрупп группы G является (по вложению):

– *нижней полурешеткой*, если из $A \in L$ и $B \in L$ всегда следует, что $A \cap B \in L$;

– *верхней полурешеткой*, если из $A \in L$ и $B \in L$ всегда следует, что $\langle A, B \rangle \in L$;

– *решеткой*, если L является одновременно верхней и нижней полурешетками.

Теорема 5.1 [29, теорема 1]. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел, G – σ -полная группа и $SZ_{\sigma_i}(G)$ является верхней полурешеткой для любого $i \in I$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) группа G является σ -разрешимой;

2) подгруппа H группы G является σ -субнормальной в G тогда и только тогда, когда $H \in \bigcap_{i \in I} SZ_{\sigma_i}(G)$.

Следствие 5.2. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел, G – σ -полная группа и $SZ_{\sigma_i}(G)$ является решеткой для любого $i \in I$. Тогда и только тогда подгруппа H группы G является σ -субнормальной в G , когда $H \in \bigcap_{i \in I} SZ_{\sigma_i}(G)$.

Таким образом, в σ -полной группе G , обладающей тем свойством, что $SZ_{\sigma_i}(G)$ является либо верхней полурешеткой, либо решеткой для любого $i \in I$, σ -проблема Кегеля – Виландта решается положительно.

Следует отметить, что группа G с отмеченным свойством устроена достаточно просто. На это указывает следующая

Теорема 5.3 [29, теорема 2]. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел, G – σ -полная группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) множество $SZ_{\sigma_i}(G)$ является верхней полурешеткой для любого $i \in I$;

2) группа $G/F_\sigma(G)$ является σ -нильпотентной.

В связи с теоремами 5.1 и 5.3 возникает несколько вопросов.

Проблема 5.4. Каково строение σ -полной группы G , обладающей тем свойством, что $SZ_{\sigma_i}(G)$ является нижней полурешеткой для любого $i \in I$?

Проблема 5.5. Пусть G – σ -полная группа и для любого $i \in I$ множество $SZ_{\sigma_i}(G)$ образует нижнюю полурешетку. Доказать, что если подгруппа H группы G для любого $i \in I$ принадлежит множеству $SZ_{\sigma_i}(G)$, то она σ -субнормальна в G .

В связи с проблемой 5.5 интересна следующая **Проблема 5.6.** Существует ли простая неабелева группа, содержащая собственную Π -подгруппу, являющуюся простой неабелевой группой?

Напомним, что подгруппа H группы G называется π -подгруппой, если $H \cap H^x \in \{1, H\}$ для любого $x \in G$.

6 σ -Проблема Кегеля – Виландта и σ -транзитивные группы

Пусть π – некоторое множество простых чисел. По аналогии с [2] будем говорить, что подгруппа H группы $G \in E_\pi$ называется π -транзитивной, если сопряжением она действует транзитивно на множестве всех холловых π -подгрупп группы G . Если $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел, то подгруппа H σ -полной группы G называется σ -транзитивной, если она σ_i -транзитивна для любого $i \in I$.

Понятно, что если подгруппа H π -транзитивна в G , то $G \in C_\pi$. Кроме того, $G = HN_G(G_\pi)$ для любой холловой π -подгруппы G_π .

Доказательство следующей леммы осуществляется простой проверкой.

Лемма 6.1. Если подгруппа H π -транзитивна в G , то $H \leq_\pi G$.

Проблема 6.2. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел и H – σ -транзитивная подгруппа σ -полной группы G . Верно ли, что $H \in sn_\sigma(G)$?

ЛИТЕРАТУРА

1. Kegel, O.H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1962. – Vol. 78. – P. 205–221.
2. Guralnick, R. Sylow p -subgroups and subnormal subgroups of finite groups / R. Guralnick, P.B. Kleidman, R. Lyons // Proc. London Math. Soc. – 1993. – Vol. 66, № 1. – P. 129–151.
3. Wielandt, H. Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute / H. Wielandt // Proc. Pure Math. – 1980. – Vol. 37. – P. 161–173.
4. Kleidman, P.B. A proof of the Kegel – Wielandt conjecture on subnormal subgroups / P.B. Kleidman // Ann. Math. – 1991. – Vol. 133, № 2. – P. 369–428.
5. Каморников, С.Ф. Подгрупповые функторы и классы групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск: Белорусская наука, 2003. – 256 с.
6. Скиба, А.Н. О σ -свойствах конечных групп II / А.Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 70–83.
7. The Kourovka Notebook: Unsolved problems in group theory. – Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2022. – 269 p.
8. Skiba, A.N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

9. Каморников, С.Ф. О σ -субнормальных подгруппах конечных групп / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Сибирский математический журнал. – 2020. – Т. 61, № 2. – С. 337–343.

10. Каморников, С.Ф. Об обобщенной проблеме Кегеля – Виландта / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Тезисы докладов Международной конференции «Алгебра и динамические системы», посвященной 70-летию А.А. Махнева, Нальчик, 9–15 июля 2023 г. – Нальчик: Издательство «Принт-центр», 2023. – С. 62–64.

11. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

12. Hall, P. Theorems like Sylow's / P. Hall // Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 6. – P. 286–304.

13. Atlas of sporadic groups / J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson. – Oxford: Clarendon Press, 1985. – 252 p.

14. Ballester-Bolinches, A. On join properties of Hall π -subgroups of finite π -soluble groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro // J. Algebra. – 1998. – Vol. 204, № 2. – P. 532–548.

15. Вдовин, Е.П. Теоремы силовского типа / Е.П. Вдовин, Д.О. Ревин // УМН. – 2011. – Т. 66, № 5. – С. 3–46.

16. Казарин, Л.С. О произведении конечных групп / Л.С. Казарин // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 269, № 3. – С. 528–531.

17. Каморников, С.Ф. σ -Проблема Кегеля – Виландта для разбиения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{2, 3\}'\}$ / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 4 (57). – С. 64–68.

18. Li, C.H. On permutation groups of degree a product of two prime-powers / C.H. Li, X. Li // Communications in Algebra. – 2014. – Vol. 42, № 11. – P. 4722–4743.

19. Ballester-Bolinches, A. On the Kegel – Wielandt σ -problem for binary partitions / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, V.N. Tyutyaynov // Annali di Matematica Pura ed Applicata. – 2022. – Vol. 201, № 1. – P. 443–451.

20. Arad, Z. On finite factorizable groups / Z. Arad, E. Fisman // J. Algebra. – 1984. – Vol. 86, № 2. – P. 522–548.

21. Fisman, E. On the product of two finite solvable groups / E. Fisman // J. Algebra. – 1983. – Vol. 80, № 2. – P. 517–536.

22. Тихоненко, Т.В. О факторизации конечной группы холловыми подгруппами / Т.В. Тихоненко, В.Н. Тютянов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2009. – № 1 (52). – С. 125–133.

23. Каморников, С.Ф. О σ -субнормальных подгруппах конечных $3'$ -групп / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Украинский математический журнал. – 2020. – Т. 72, № 6. – С. 806–811.

24. Каморников, С.Ф. О некоторых аспектах σ -проблемы Кегеля – Виландта / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Известия вузов. Математика. – 2022. – № 2. – С. 18–28.

25. Каморников, С.Ф. К σ -проблеме Кегеля – Виландта / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Математические заметки. – 2021. – Т. 109, № 4. – С. 564–570.

26. Каморников, С.Ф. К σ -проблеме Кегеля – Виландта / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2023. – Т. 29, № 4. – С. 121–129.

27. Васильев, А.Ф. О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. – С. 27–54.

28. Ballester-Bolinches, A. On the lattice of \mathfrak{F} -subnormal subgroups / A. Ballester-Bolinches, K. Doerk, M.D. Perez-Ramos // J. Algebra. – Vol. 148. – P. 42–52.

29. Xu, Zh. On some aspects of the Kegel – Wielandt σ -problem / Zh. Xu, X. Yi, S.F. Kamornikov // Ricerche di Matematica. – 2024. – Vol. 73. – P. 2771–2778.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда и Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта Ф23РНФ-237.

Поступила в редакцию 18.08.2024.

Информация об авторах

*Каморников Сергей Федорович – д.ф.-м.н., профессор
Тютянов Валентин Николаевич – д.ф.-м.н., профессор*

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;

- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e. g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charters top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).