

ISSN 2077-8708

**Проблемы
физики,
математики
и техники**

№3 (60) 2024

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:
С.А. Хахомов (Беларусь)

**ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО
РЕДАКТОРА:**
А.В. Рогачёв (Беларусь)
Д.Л. Коваленко (Беларусь)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миротин (Беларусь)
В.В. Мोजаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)
М.А. Ярмоленко (Беларусь)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины
ул. Советская, 104,
246028, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

EDITOR-IN-CHIEF:
S.A. Khakhomov (Belarus)

DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:
A.V. Rogachev (Belarus)
D.L. Kovalenko (Belarus)

EDITORIAL BOARD:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)
M.A. Yarmolenko (Belarus)

EXECUTIVE SECRETARY:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

EDITION ADDRESS:
Francisk Skorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246028, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 3 (60) 2024

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

- Гапоненко Н.В., Махмутов Р.Т., Лашковская Е.И., Телеш Е.В., Шустикова К.В., Ковалев В.А., Радюш Ю.В., Жигулин Д.В., Пилипенко В.А., Семченко А.В.** Тонкопленочный конденсатор на основе титаната бария, сформированного золь-гель методом на титане 7
- Минчук В.С., Гаврилюк В.С., Дежкунов Т.А., Перхунова А.Ю., Дежкунов Н.В.** Исследование спектра кавитационного шума в поле погружного ультразвукового излучателя . . . 13
- Никитюк Ю.В., Прохоренко В.А., Демиденко О.М., Смородин В.С., Воруев А.В.** Разработка программных средств моделирования и оптимизации параметров лазерной резки хрупких неметаллических материалов 18
- Новикова О.В., Тюменков Г.Ю.** Функция плотности для модели земледобной Венеры . . 23
- Салицкий В.С.** Изгиб локальной нагрузкой круглой пятислойной пластины 27
- Самофалов А.Л., Фаняев И.А., Сомов П.В., Семченко И.В., Ковалев А.А., Чу Хуэй.** Проектирование фазового манипулятора с использованием метаматериалов на основе парных планарных спиралей 32
- Фаняев И.А., Самофалов А.Л., Семченко И.В., Хахомов С.А., Кравченко А.Ю., Ли Мэнмэн.** Метаповерхность на основе одновитковых планарных спиралей со свойством не отражающего поглотителя в СВЧ диапазоне 38
- Хило П.А., Ревенок М.А.** Изотропная дифракция бесселева светового пучка при акустооптическом взаимодействии 44

МАТЕМАТИКА

- Авлас А.Н.** Моделирование влияния теплового расширения на коэффициент теплопроводности материала с закрытыми порами 48
- Гальмак А.М.** Полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида. I 54
- Поцейко П.Г.** О рациональных аппроксимациях сопряженной функции на отрезке сопряженными суммами Валле Пуссена 59
- Старовойтов А.П., Оснач Т.М., Рябченко Н.В.** О существовании тригонометрических аппроксимаций Паде 71
- Шилин А.П.** Линейное интегро-дифференциальное уравнение с коэффициентами в виде специальных сумм 77

ТЕХНИКА

- Видрицкий А.Э., Ланин В.Л.** Сборка электронных модулей приемников инфракрасного излучения с применением преформ припоя 81

ИНФОРМАТИКА

- Аксенова Н.А.** Сравнительный анализ алгоритмов фильтрации для изображений архитектурных планов 86
- Дик К.С., Мухуров Н.И., Крузе И., Асимов Р.М., Осипович В.С.** Методика и программное средство поиска аномалий в данных телеметрии солнечной электростанции на основе искусственной нейронной сети – автокодировщик 92

ЛЮДИ НАУКИ

- Александр Владимирович Рогачёв** 101

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования
результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки:

- технические;
- физико-математические.

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редак-
ции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), реше-
ние коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ
Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21.
Приказы Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 31.12.2020 № 338, № 339.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах
данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Акаде-
мии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий
«Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в
Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную
библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е.А. Ружицкая*
Корректоры *И.А. Хорсун, Т.А. Фицнер*
Дизайн обложки *А.В. Ермаков*

Подписано в печать 05.09.24. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 12,32. Уч.-изд. л. 10,73. Тираж 17 экз. Заказ № 440.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246028, Гомель

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2024
© Проблемы физики, математики и техники, 2024
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2024

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December 2009

Released quarterly

№ 3 (60) 2024

CONTENTS

PHYSICS

- Gaponenko N.V., Makhmutov R.T., Lashkovskaya E.I., Telesh E.V., Shustsikava K.V., Kovalev V.A., Radyush Yu.V., Zhigulin D.V., Pilipenko V.A., Semchenko A.V.** Thin-film capacitor based on barium titanate formed by the sol-gel method on titanium 7
- Minchuk V.S., Gavgiluk V.S., Dezhkunov T.A., Perkhunova A.Yu., Dezhkunov N.V.** Study of the spectrum of cavitation noise in the field of a submersible ultrasonic embedder 13
- Nikitjuk Yu.V., Prokhorenko V.A., Demidenko O.M., Smorodin V.S., Voruev A.V.** Development of software tools for modeling and optimization of laser cutting parameters of brittle non-metallic materials 18
- Novikova O.V., Tyumenkov G.Yu.** Density function for a model of earth-like Venus 23
- Salicki V.S.** Bending a circular five-layer plate by local load 27
- Samofalov A.L., Faniayeu I.A., Somov P.V., Semchenko I.V., Kovalev A.A., Chu Hui.** Designing a phase manipulator using metamaterials based on paired planar spirals 32
- Faniayeu I.A., Samofalov A.L., Semchenko I.V., Khakhomov S.A., Kravchenko A.Y., Li Mengmeng.** Metasurface based on single-turn planar spirals with non-reflective absorber property in the microwave range 38
- Khilo P.A., Revenok M.A.** Isotropic diffraction of a Bessel light beam during cousto-optic interaction 44

MATHEMATICS

- Aulas A.N.** Simulation of the influence of thermal expansion on the thermal conductivity coefficient of a closed-pore material 48
- Gal'mak A.M.** Polyadic analogues of normal subgroups in polyadic groups of special form. I 54
- Patseika P.G.** On rational approximations of conjugate function on an interval by conjugate Vallée Poussin sums 59
- Starovoitov A.P., Osnach T.M., Ryabchenko N.V.** On the existence of trigonometric Padé approximations 71
- Shilin A.P.** Linear integro-differential equation with coefficients in the form of special sums 77

TECHNICS

- Vidritskiy A.E., Lanin V.L.** Assembly of electronic modules of infrared radiation receivers with the use of solder performs 81

INFORMATION SCIENCE

- Aksionova N.A.** Comparative analysis of filtration algorithms for images of architectural plans . . . 86
- Dzick K.S., Mukhurov N.I., Kruse I., Asimov R.M., Asipovich V.S.** Methods and software for anomalies searching in the telemetry data of a solar power plant based on the artificial neuron network – autoencoder 92

PEOPLE OF SCIENCE

- Alexander Vladimirovich Rogachev** 101

Founder – Francisk Skorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science:

- **Technics;**
- **Physics and Mathematics.**

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

ТОНКОПЛЕНОЧНЫЙ КОНДЕНСАТОР НА ОСНОВЕ ТИТАНАТА БАРИЯ, СФОРМИРОВАННОГО ЗОЛЬ-ГЕЛЬ МЕТОДОМ НА ТИТАНЕ

Н.В. Гапоненко¹, Р.Т. Махмутов¹, Е.И. Лашковская¹, Е.В. Телеш¹, К.В. Шустикова¹,
В.А. Ковалев¹, Ю.В. Радюш², Д.В. Жигулин³, В.А. Пилипенко³, А.В. Семченко⁴

¹Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

²Научно-практический центр Национальной академии наук Беларуси по материаловедению, Минск

³ОАО «ИНТЕГРАЛ» – управляющая компания холдинга «ИНТЕГРАЛ», Минск

⁴Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

THIN-FILM CAPACITOR BASED ON BARIUM TITANATE FORMED BY THE SOL-GEL METHOD ON TITANIUM

N.V. Gaponenko¹, R.T. Makhmutov¹, E.I. Lashkovskaya¹, E.V. Telesh¹, K.V. Shustsikava¹,
V.A. Kovalev¹, Yu.V. Radyush², D.V. Zhigulin³, V.A. Pilipenko³, A.V. Semchenko⁴

¹Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

²Scientific and Practical Center of the National Academy of Sciences of Belarus for Materials Science, Minsk

³JSC “INTEGRAL” – “INTEGRAL” Holding Managing Company, Minsk

⁴Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. На основе многослойной золь-гель пленки титаната бария с использованием титановой подложки изготовлен лабораторный тонкопленочный конденсатор. Приведены результаты измерения емкости и тангенса угла диэлектрических потерь сформированного конденсатора в диапазоне частот 0,2 кГц – 200 кГц. Установлено, что при переходе от низкочастотного диапазона к высокочастотному значение тангенса угла диэлектрических потерь уменьшается на порядок и составляет 0,032–0,039 для диапазона частот от 50 кГц до 200 кГц. Для всего исследуемого диапазона значение емкости конденсатора составляет 560–750 пФ и удельной емкости 41–55 нФ/см². Для диапазона частот 0,2 кГц – 200 кГц рассчитана диэлектрическая проницаемость титаната бария, изменяющаяся от 136 до 43.

Ключевые слова: BaTiO₃, золь-гель метод, емкость пленочного конденсатора, тангенс угла диэлектрических потерь.

Для цитирования: Тонкопленочный конденсатор на основе титаната бария, сформированного золь-гель методом на титане / Н.В. Гапоненко, Р.Т. Махмутов, Е.И. Лашковская, Е.В. Телеш, К.В. Шустикова, В.А. Ковалев, Ю.В. Радюш, Д.В. Жигулин, В.А. Пилипенко, А.В. Семченко // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 7–12. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_7. – EDN: XIDSWV

Abstract. A laboratory thin-film capacitor was manufactured based on a multilayer sol-gel film of barium titanate using a titanium substrate. The results of measuring the capacitance and dielectric loss tangent of the formed capacitor in the frequency range 0.2 kHz – 200 kHz are presented. It has been established that when moving from the low-frequency range to the high-frequency one, the value of the dielectric loss tangent decreases by an order of magnitude and amounts to 0.032–0.039 for the frequency range from 50 kHz to 200 kHz. For the entire range under study, the capacitance value of the capacitor is 560–750 pF and the specific capacitance is 41–55 nF/cm². For the frequency range 1 kHz – 10 kHz, the dielectric constant of barium titanate is calculated to be from 108 to 127.

Keywords: BaTiO₃, sol-gel method, film capacitor capacitance, dielectric loss tangent.

For citation: Thin-film capacitor based on barium titanate formed by the sol-gel method on titanium / N.V. Gaponenko, R.T. Makhmutov, E.I. Lashkovskaya, E.V. Telesh, K.V. Shustsikava, V.A. Kovalev, Yu.V. Radyush, D.V. Zhigulin, V.A. Pilipenko, A.V. Semchenko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 3 (60). – P. 7–12. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_7 (in Russian). – EDN: XIDSWV

Введение

Пленки неорганических перовскитов интенсивно исследуются для формирования элементов энергонезависимой памяти [1], конденсаторов [2]–[5], мемристоров [6], фотонных кристаллов и микрорезонаторов [7]–[9]. Для изготовления конденсаторных структур обычно в качестве подложки выбирается кремний, а нижние электроды формируют напылением платины или

других драгоценных металлов и дополнительным адгезионным слоем. При этом электрофизические свойства неорганических перовскитов, сформированных на других металлах, практически не исследовались. Подложки титана представляют интерес благодаря высокой температуре плавления, но окисляются при термообработке, что влияет на фазовый состав формируемых на них пленок. Привлекательно, что при

формировании конденсаторных структур сегнетоэлектриков на титане роль нижнего электрода играет сама подложка титана, и таким образом, в отличие от структур на кремнии, использование подложки титана устраняет необходимость напыления в вакууме слоев TiO_x и платины для формирования нижнего электрода пленочного конденсатора.

В данной работе приведены результаты измерения емкости и тангенса угла диэлектрических потерь и оценена диэлектрическая проницаемость титаната бария, сформированного золь-гель методом, в конденсаторной пленочной структуре на титане.

1 Методика эксперимента

Для изготовления конденсаторной структуры использовалась подложка из титана размером 15×15 мм. Золь оксида алюминия получали на основе изопророксида алюминия, изопроропилового спирта, воды и азотной кислоты. Четыре слоя ксерогеля оксида алюминия формировали последовательно центрифугированием золя со скоростью 2000 об/мин с последующей сушкой каждого слоя при $200^\circ C$ в течение 10 минут и отжигом на воздухе при $450^\circ C$ в течение 30 минут. Затем наносился золь титаната бария. Золь титаната бария синтезировали на основе изопророксида титана $Ti(OC_3H_7)_4$, ацетата бария $(Ba(CH_3COO)_2)$, ацетилацетона $(CH_3-CO-CH_2-CO-CH_3)$ и уксусной кислоты (CH_3COOH) [9]. Пять слоев ксерогеля $BaTiO_3$ было сформировано центрифугированием со скоростью 2900 об/мин с последующей сушкой каждого слоя при $200^\circ C$ в течение 10 мин и отжигом на воздухе при $450^\circ C$ в течение 30 мин после сушки последнего слоя. Окончательная термообработка проводилась при температуре $700^\circ C$. Затем методом ионно-лучевого распыления было произведено напыление через маску контактов из никеля квадратной формы размером около 1,165 мм.

Морфологию экспериментальных образцов исследовали с помощью сканирующего электронного микроскопа (СЭМ) S-4800 (Hitachi, Япония). Элементный анализ образцов исследовался методом энергодисперсионного рентгеновского микроанализа (EDX) с использованием установки Quantax 200 (Bruker, Германия). Для получения изображения скола образца использовалось ионное травление на установке FEI Microscope Systems Versa 3D.

Рентгенодифракционные исследования образцов проводились в CuK_α -излучении на автоматизированном дифрактометре ДРОН-3 с графитовым монохроматором на дифрагированном пучке. Рентгеновские дифракционные спектры регистрировались методом пошагового сканирования с шагом 0.04° и временем экспозиции в каждой точке 2 с.

Емкость (С) и тангенс угла диэлектрических потерь ($tg\delta$) измерялись с использованием измерителя иммитанса E7-20 в диапазоне частот 200 Гц – 200 кГц.

2 Результаты и обсуждение

Схема сформированной структуры приведена на рисунке 2.1. По данным энергодисперсионного анализа исходная подложка состоит из следующих основных элементов (в ат.%): Ti – 88,3%; Al – 7,3%; C – 4,1%; Cr – 0,2%, Fe – 0,1%.

На рисунке 2.2 приведены РЭМ изображения скола сформированной структуры и контактов из никеля на поверхности титаната бария. Сторона контакта квадрата из никеля составляет около 1,165 мм, соответственно площадь квадратного контакта около $1,36 \text{ мм}^2$. Толщина пленки титаната бария составляет 329 нм, оксида алюминия 110 нм. Приведенные значения площади верхнего контакта конденсатора и толщин пленок обоих материалов использовались нами в дальнейшем для оценки диэлектрической проницаемости ксерогеля титаната бария.

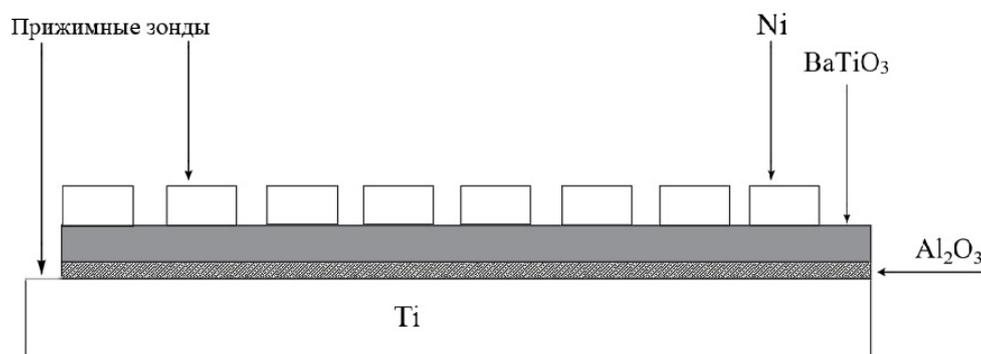


Рисунок 2.1 – Схематическое изображение поперечного сечения структуры титан / оксид алюминия / ксерогель титаната бария / Ni

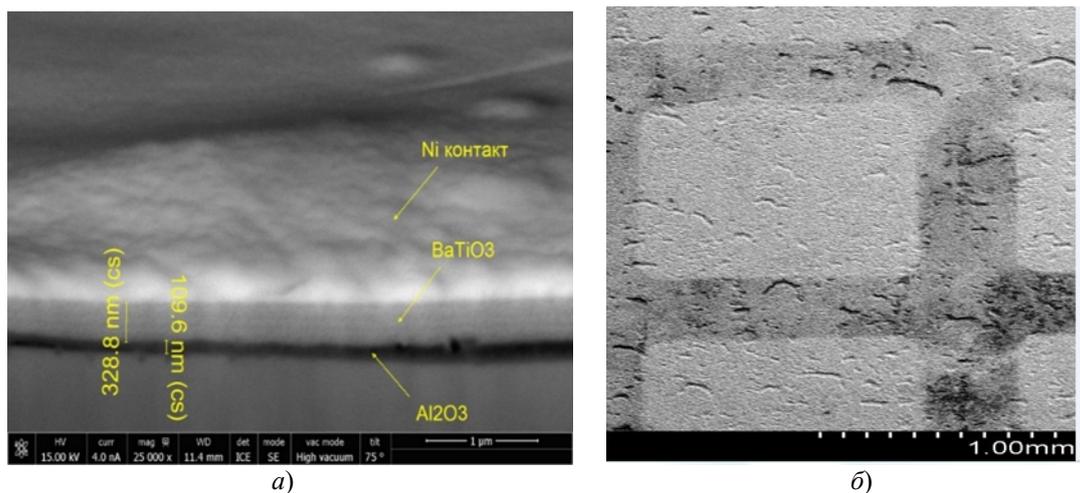


Рисунок 2.2 – а) РЭМ-изображение структуры титан / оксид алюминия / ксерогель титаната бария / никель; б) снимок контакта из никеля

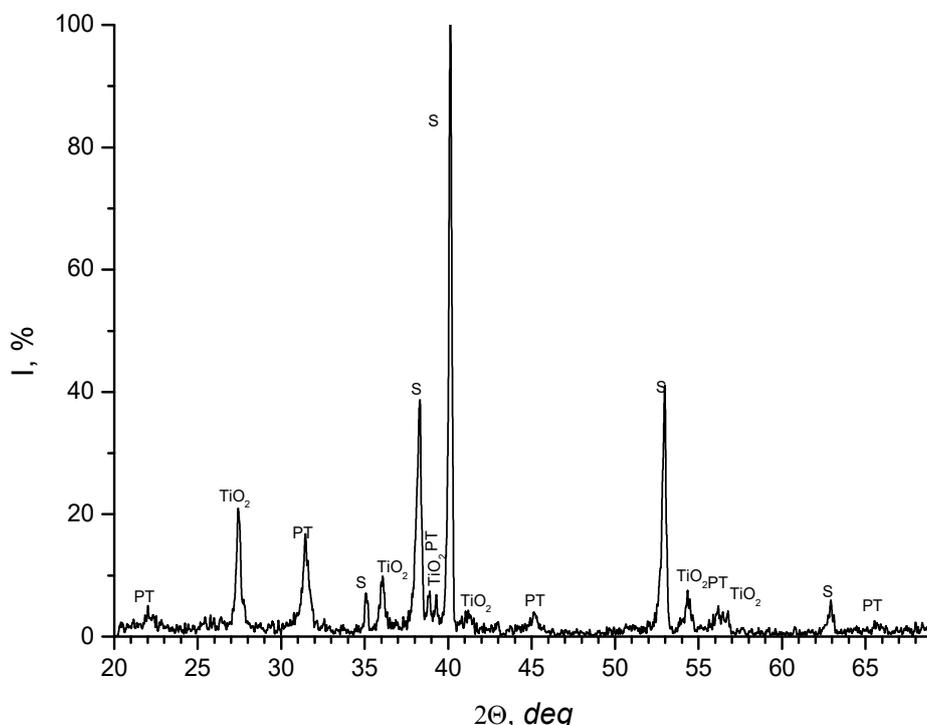


Рисунок 2.3 – Нормированный рентгеновский дифракционный спектр структуры титан / оксид алюминия / ксерогель титаната бария после термообработки на воздухе при температуре 700° С (символом S обозначены линии подложки, TiO₂ – оксида титана, PT – перовскита)

На рисунке 2.3 представлен рентгеновский дифракционный спектр структуры титан / оксид алюминия / ксерогель титаната бария после отжига при температуре 700 °С. Интенсивность максимального пика принята за сто процентов. Из рисунка видно, что спектр от подложки доминирует (обозначен символом S на рисунке). Линии подложки из титана установлены сравнением рентгеновских спектров от подложки до нанесения слоёв и текущего спектра. Также на данном спектре присутствуют линии TiO₂ (рутил), которые хорошо согласуются с литературными

данными (ICSD 24780). На представленном спектре нами обнаружена серия линий, обозначенных символом PT, которые мы относим к перовскиту – титанату бария. Линии перовскита размыты и имеют малую интенсивность, поэтому определить сингонию и параметры решётки затруднительно. Размытие линий и их малую интенсивность мы связываем с малой толщиной слоя и малыми размерами кристаллитов. Линий оксида алюминия не обнаружено, что подтверждает его аморфное состояние [10].

Проведены измерения емкости и тангенса угла диэлектрических потерь в 32 точках конденсатора. Среднеквадратичное отклонение измеренной величины рассчитывалось по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

где x_i – i -й элемент выборки измеренной величины, n – объем выборки, \bar{x} – среднее арифметическое выборки.

На рисунке 2.4 приведена зависимость емкости конденсатора от частоты измерения. С увеличением частоты емкость уменьшается в интервале от 660 до 560 пФ. Можно условно выделить два диапазона частот – низкочастотный от 0,2 кГц до 20 кГц и высокочастотный от 50 кГц до 200 кГц. При переходе от низкочастотного диапазона к высокочастотному значение тангенса угла диэлектрических потерь уменьшается на порядок и составляет 0,03–0,04 для диапазона частот от 50 кГц до 200 кГц (рисунки 2.5, 2.6, таблица 2.1). При этом в области высоких частот среднеквадратичное отклонение уменьшается по

сравнению со значениями низкочастотного диапазона.

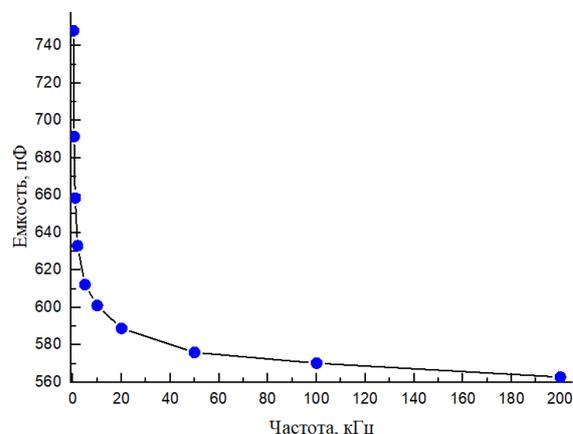


Рисунок 2.4 – Зависимость емкости конденсатора на подложке из титана с пленками ксерогелей оксида алюминия и титаната бария от частоты

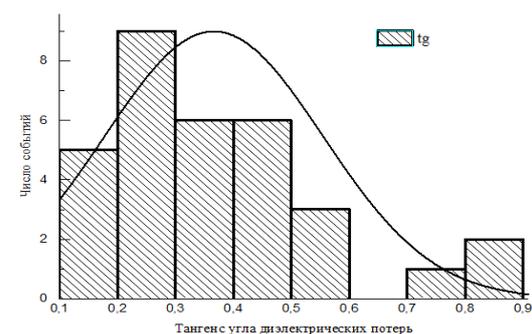
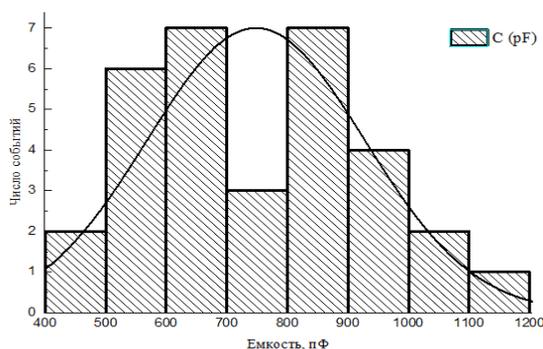


Рисунок 2.5 – Распределение емкости (а) и тангенса угла диэлектрических потерь (б) для измерений при 200 Гц в 32 точках конденсаторной структуры

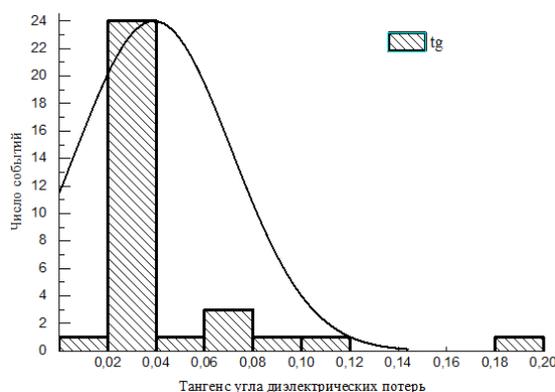
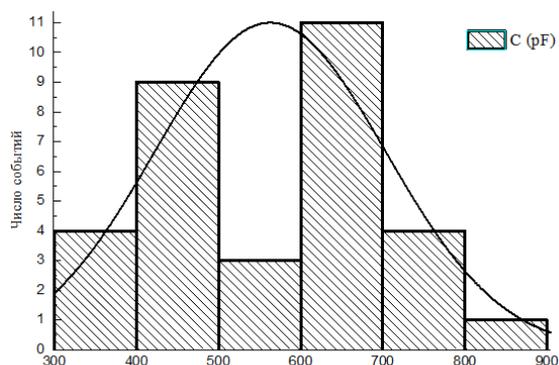


Рисунок 2.6 – Распределение емкости (а) и тангенса угла диэлектрических потерь (б) для измерений при 200 кГц в 32 точках конденсаторной структуры

Таблица 2.1 – Характеристики полученных конденсаторных структур

Частота, f , кГц	Среднее значение ёмкости, пФ	Среднеквадратичное отклонение ёмкости, σ_C	Среднее значение тангенса угла диэлектрических потерь, $\text{tg}\delta$	Среднеквадратичное отклонение тангенса угла диэлектрических потерь, $\sigma_{\text{tg}\delta}$
0,2	748	177	0,37	0,19
0,5	691	158	0,21	0,087
1	659	154	0,14	0,058
2	633	148	0,10	0,041
5	612	145	0,07	0,027
10	601	145	0,06	0,023
20	589	142	0,05	0,02
50	576	139	0,04	0,015
100	570	140	0,03	0,012
200	563	138	0,04	0,032

Для всего исследуемого диапазона значение ёмкости конденсатора составляет ~560–750 пФ и удельной ёмкости 41–55 нФ/см².

Приведенные результаты измерения ёмкости относятся к двум последовательно соединенным конденсаторам из ксерогеля оксида алюминия и ксерогеля титаната бария. Диэлектрическая проницаемость оксида алюминия, полученного золь-гель методом, составляет около 8 при удельной ёмкости тонкопленочного конденсатора на его основе от 80 до 60 нФ/см² для диапазона частот от 100 Гц до 1 МГц [10]. С учетом этих опубликованных данных и результатов наших измерений ёмкости всей конденсаторной структуры и измеренной толщины пленок оксида алюминия и титаната бария, используя формулу для расчета эквивалентной ёмкости для последовательного соединения двух конденсаторов (2.1) и формулу для ёмкости плоского конденсатора (2.2), мы определили, что диэлектрическая проницаемость пленки ксерогеля титаната бария в полученном нами конденсаторе изменяется от 136 для 0,2 кГц до 43 для 200 кГц при значении диэлектрической проницаемости оксида алюминия $\epsilon = 8$:

$$C_{\text{BaTiO}_3} = \frac{C_{\text{Al}_2\text{O}_3} \cdot C}{C_{\text{Al}_2\text{O}_3} - C}, \quad (2.1)$$

$$C_{\text{Al}_2\text{O}_3} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}, \quad (2.2)$$

где C – измеренная эквивалентная ёмкость для двух последовательных конденсаторов из оксида алюминия и титаната бария, $C_{\text{Al}_2\text{O}_3}$ – рассчитанное значение ёмкости для пленки оксида алюминия со значением $\epsilon = 8$, $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная, ϵ – диэлектрическая проницаемость оксида алюминия, S – площадь контакта, d – толщина пленки оксида алюминия.

Заключение

Разработана лабораторная технология получения золь-гель для формирования пленок ксерогелей оксида алюминия и титаната бария общей

толщиной около 440 нм и изготовления конденсаторных структур на их основе на подложке титана. В полученной структуре роль нижнего электрода играет сама подложка из титана и таким образом, в отличие от структур на кремнии, устраняется дополнительная операция напыления нижнего металлического контакта. Сформированная конденсаторная структура в диапазоне частот 200 Гц – 200 кГц имеет ёмкость 560–750 пФ и удельную ёмкость 41–55 нФ/см².

Полученные результаты свидетельствуют о перспективе предложенного нами метода формирования тонкопленочного конденсатора с высокой диэлектрической проницаемостью на титане, принимая во внимание низкую себестоимость изготовления структур, а также высокую прочность и теплопроводность подложек из титана и его сплавов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Влияние состава и условий золь-гель процесса на свойства сегнетоэлектрических тонких пленок титаната бария-стронция / С.А. Хахомов, А.В. Семченко, В.В. Сидский, В.В. Васильевич, А.А. Маевский, О.И. Тюленкова, В.Е. Гайшун, Д.Л. Коваленко, О.В. Пахомов, А.В. Еськов, А.С. Старков, А.Л. Холкин, В.А. Пилипенко // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 4 (49). – Р. 45–50.
2. Kamalasanan, M.N. Dielectric and ferroelectric properties of BaTiO₃ thin films grown by the sol-gel process / M.N. Kamalasanan, N. Deepak Kumar, S. Chandra // Journal of Applied Physics. – 1993. – Vol. 74. – Р. 5679–5686.
3. Preparation, microstructural and electrical characterization of SrTiO₃ thin films prepared by chemical route / F.M. Pontes, E.R. Leite, E.J.H. Lee, E. Longo, J.A. Varela // Journal of the European Ceramic Society. – 2001. – Vol. 21 (3). – Р. 419–426.
4. Тонкопленочный конденсатор на основе титаната стронция, сформированного золь-гель методом / Х. Сохраби Анараки, Н.В. Гапоненко, М.А. Руденко, В.В. Колос, А.Н. Петлицкий,

А.С. Турцевич // Микроэлектроника. – 2015. – Т. 44 (6). – С. 476–480.

5. *Structure and dielectric properties of barium titanate thin films for capacitor applications* / Fan He, Wei Ren, Guanghua Liang, Peng Shi, Xiaoqing Wu, Xiaofeng Chen // *Ceramics International*. – 2013. – Vol. 39 (1). – P. S481–S485.

6. *Низкоомные и высокоомные состояния в пленках титаната стронция, сформированных золь-гель методом* / Х. Сохраби Анараки, Н.В. Гапоненко, В.Г. Литвинов, А.В. Ермачихин, В.В. Колос, А.Н. Пеглицкий, В.А. Иванов // ФТТ. – 2015. – Т. 57 (10). – С. 1977–1980.

7. *Enhanced Luminescence of Europium in Sol-Gel Derived BaTiO₃/SiO₂ Multilayer Cavity Structure* / N.V. Gaponenko, P.A. Kholov, T.F. Raichenok, S.Ya. Prislowski // *Optical Materials*. – 2019. – Vol. 96C. – P. 109265 (5 pages).

8. *Barium Titanate Nanostructures and Thin Films for Photonics* / A. Karvounis, F. Timpu, V.V. Vogler-Neuling, R. Savo, R. Grange // *Advanced Optical Materials*. – 2020. – Vol. 8 (24). – Art. № 2001249 (23 pages).

9. *Upconversion luminescence from sol-gel-derived erbium- and ytterbium-doped BaTiO₃ film structures and the target form* / N.V. Gaponenko, N.I. Staskov, L.V. Sudnik, P.A. Vityaz, A.R. Luchanok, Yu.D. Karnilava, E.I. Lashkovskaya, M.V. Stepikhova, A.N. Yablonskiy, V.D. Zhivulko, A.V. Mudryi, I.L. Martynov, A.A. Chistyakov, N.I. Kargin, V.A. Labunov, Yu.V. Radyush, E.B. Chubenko,

V.Yu. Timoshenko // *Photonics*. – 2023. – Vol. 10. – P. 359 (12 pages).

10. *Sol-Gel Processed High-k Aluminum Oxide Dielectric Films for Fully Solution-Processed Low-Voltage Thin-Film Transistors* / Wenwen Xia, Guodong Xia, Guangsheng Tu, Xin, Dong, Sumei Wang, Rui Liu // *Ceramics International*. – 2018. – Vol. 44 (8). – P. 9125–9131.

Работа выполнена при частичной поддержке договора БРФФИ №Т23РНФ-147 и задания 3.5 ГПНИ «Фотоника и электроника для инноваций».

Поступила в редакцию 28.05.2024.

Информация об авторах

Гапоненко Николай Васильевич – д.ф.-м.н., профессор
Махмутов Руслан Тахирджанович – аспирант
Лашковская Екатерина Игоревна – м.н.с.
Телеш Евгений Владимирович – старший преподаватель
Шустикова Ксения Валерьевна – инженер-электроник
Ковалев Владимир Андреевич – студент
Радюш Юрий Владимирович – к.ф.-м.н, доцент
Жигулин Дмитрий Владимирович – начальник сектора физико-технического анализа
Пилипенко Владимир Александрович – д.т.н., профессор,
член-корреспондент НАН Беларуси
Семченко Алина Валентиновна – к.ф.-м.н., доцент

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА КАВИТАЦИОННОГО ШУМА В ПОЛЕ ПОГРУЖНОГО УЛЬТРАЗВУКОВОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

В.С. Минчук, В.С. Гаврилюк, Т.А. Дежкунов, А.Ю. Перхунова, Н.В. Дежкунов

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

STUDY OF THE SPECTRUM OF CAVITATION NOISE IN THE FIELD OF A SUBMERSIBLE ULTRASONIC EMBEDIER

V.S. Minchuk, V.S. Gavgiluk, T.A. Dezhkunov, A.Yu. Perkhunova, N.V. Dezhkunov

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

Аннотация. Исследован ряд составляющих спектра кавитационного шума, использующихся для оценки активности кавитации. Показано, что характер зависимостей исследованных параметров от интенсивности ультразвука различается для малых и больших расстояний от излучателя. Установлено, что связь исследованных параметров между собой характеризуется высокой степенью корреляции для близких расстояний от излучателя в условиях развитой кавитационной области. В кавитационной области вдали от излучателя эти параметры не связаны однозначно между собой и характеризуются низким уровнем корреляции. На основании полученных данных предложен подход к выбору оптимального метода оценки активности кавитации.

Ключевые слова: кавитация, ультразвук, кавитационный шум, спектр кавитационного шума.

Для цитирования: Исследование спектра кавитационного шума в поле погружного ультразвукового излучателя / В.С. Минчук, В.С. Гаврилюк, Т.А. Дежкунов, А.Ю. Перхунова, Н.В. Дежкунов // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 13–17. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_13. – EDN: YHJRPI

Abstract. A number of components of the cavitation noise spectrum, used to assess cavitation activity, have been studied. It is shown that the nature of the dependences of the studied parameters on the ultrasound intensity differs for small and large distances from the emitter. It has been established that the relationship between the studied parameters is characterized by a high degree of correlation for close distances from the emitter under conditions of a developed cavitation region. In the cavitation region far from the emitter, these parameters are not clearly related to each other and are characterized by a low level of correlation. Based on the data obtained, an approach to choosing the optimal method for assessing cavitation activity is proposed.

Keywords: cavitation, ultrasound, cavitation noise, cavitation noise spectrum.

For citation: Study of the spectrum of cavitation noise in the field of a submersible ultrasonic embedier / V.S. Minchuk, V.S. Gavgiluk, T.A. Dezhkunov, A.Yu. Perkhunova, N.V. Dezhkunov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 3 (60). – P. 13–17. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_13 (in Russian). – EDN: YHJRPI

Введение

Контроль уровня активности акустической кавитации при ультразвуковой (УЗ) интенсификации физико-химических процессов в жидкостях является актуальной задачей [1]–[5]. К настоящему времени предложено большое количество методов исследования кавитации. В последние годы наиболее пристальное внимание исследователи уделяют акустическим методам, основанным на регистрации и спектральном анализе акустического сигнала, генерируемого кавитационными пузырьками – кавитационного шума (КШ) при их пульсациях и захлопывании. Спектр КШ обычно включает пик на частоте ультразвукового поля f_0 , генерирующего кавитацию, гармоники nf_0 , где n – целое число, субгармонику $f_0/2$, частоты $(2n+1)f_0/2$ и непрерывную составляющую (НСКШ). В качестве индикаторов состояния кавитационной области в работах [1]–[8] исследовались следующие

компоненты спектра КШ: субгармоника $f_0/2$ [1], [3]–[5], непрерывная составляющая [2], интегральная интенсивность КШ за вычетом основной частоты [6], интегральная интенсивность КШ в диапазоне частот от 300 кГц до 10 МГц [7]. В европейском стандарте [8] предлагается оценивать интенсивность КШ по величине интеграла непрерывной составляющей спектра в диапазоне частот от f_0 до 20 МГц или по величине непрерывной составляющей вблизи частоты $2,25f_0$. Однако информация о соотношении оценок, получаемых упомянутыми выше методами в литературе отсутствует, что затрудняет возможности стандартизации измерений и введения единицы активности кавитации.

В данной работе выполнена синхронная регистрация и анализ составляющих спектра КШ при варьировании в широком диапазоне интенсивности ультразвука и расстояния между датчиком и излучателем.

1 Методика и установка

Для генерирования кавитации использовался ультразвуковой генератор УЗГ-58-22(БГУИР, Минск) с погружным пьезоэлектрическим излучателем с волноводом-концентратором, диаметр излучающей поверхности 15 мм, резонансная частота $f_0 = 21$ кГц. В качестве рабочей жидкости использовалась водопроводная вода. Возникающий кавитационный шум регистрировался при помощи кавитометра ICA-7DS (БГУИР, Минск) и пьезоэлектрического датчика кавитации. Интенсивность ультразвука варьировали изменением выходной мощности генератора.

Используя Фурье-преобразование кавитометр ежесекундно формирует 16 спектров кавитационного шума (частота дискретизации – 2 МГц, количество сэмплов в спектре – 2048). Имеется функция усреднения спектров (1÷255).

Регистрировались следующие компоненты спектра: амплитуда основной гармоники A_0 на частоте ультразвукового поля f_0 , амплитуда субгармоники A_s на частоте $f_s = f_0 / 2$, амплитуда непрерывной составляющей спектра A_{WBN} на частоте $2,25f_0$, суммарная амплитуда S всех составляющих спектра в диапазоне от 100 до 1000 кГц.

Пьезоэлектрический датчик кавитации фиксировался на оси излучателя под ним на расстояниях от излучателя $L = 3, 7$ и 15 мм. Схема установки представлена на рисунке 1.1. Проводились измерения при различной выходной мощности генератора $P = 5 \div 100$ Вт. Время измерения для

каждого значения P составляло 45 секунд (3 круга по 15 секунд), за это время кавитометр производит усреднение 720 спектров.

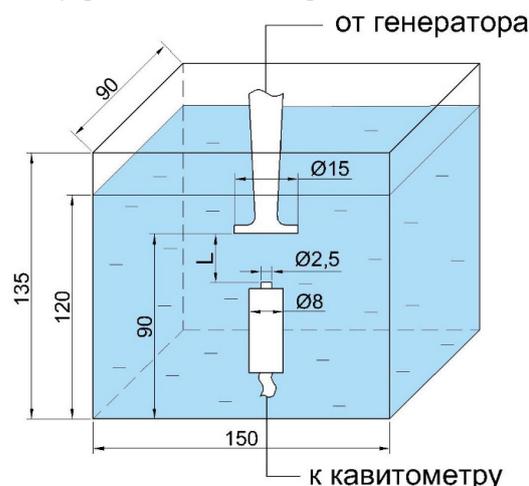
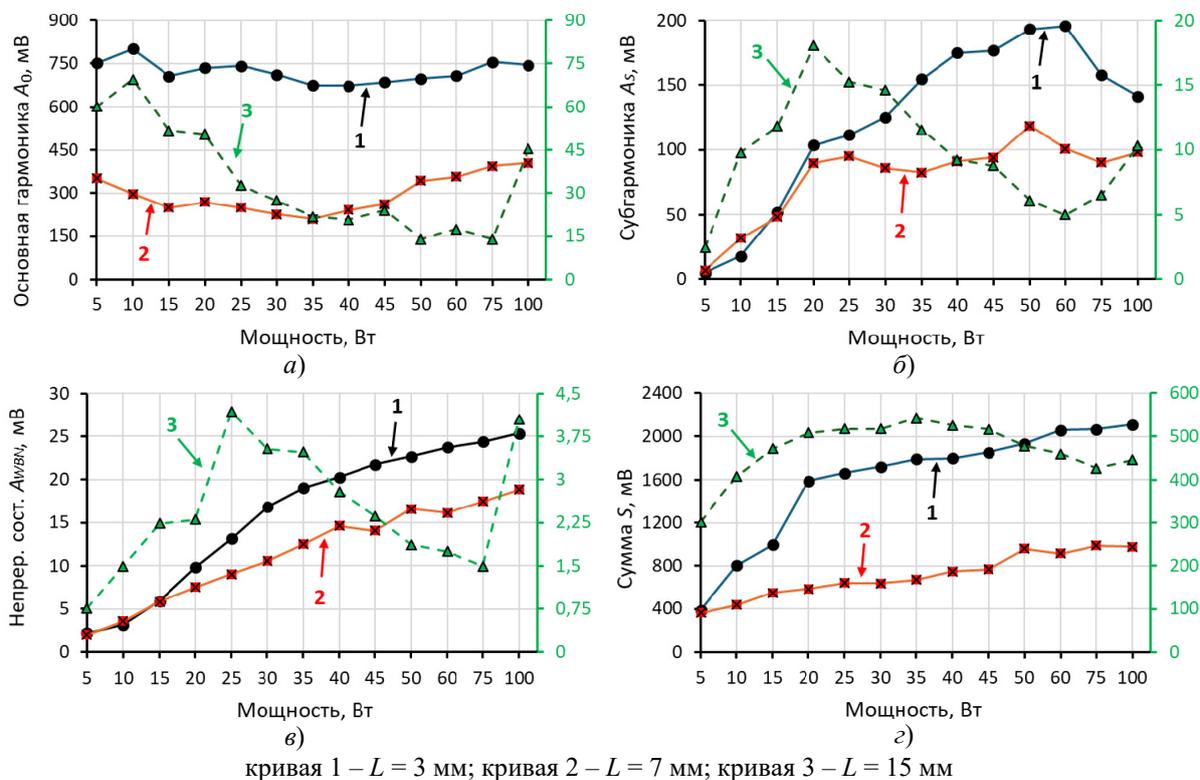


Рисунок 1.1 – Схема установки для исследований

2 Результаты и их анализ

На рисунке 2.1 приведены зависимости амплитуды исследуемых компонент спектра от выходной мощности генератора P при различных зазорах L между излучателем и датчиком. Зависимостям при $L = 3$ и 7 мм (кривые 1 и 2) соответствует шкала слева, зависимостям при $L = 15$ мм (кривая 3) – справа. Каждая точка на графике получена в результате усреднения 720 спектров.



кривая 1 – $L = 3$ мм; кривая 2 – $L = 7$ мм; кривая 3 – $L = 15$ мм

Рисунок 2.1 – Зависимость амплитуды компонент спектра кавитационного шума от мощности: а) основная гармоника; б) субгармоника, в) непрерывная составляющая на частоте $2,25f_0$; г) суммарная амплитуда в диапазоне 100÷1000 кГц

Рассмотрим вначале данные, представленные на рисунках 2.1 б)-з). Характерной чертой представленных здесь результатов при малых расстояниях от излучателя (кривые 1 и 2) является увеличение регистрируемых параметров при увеличении мощности генератора. При этом субгармоника (рисунок 2.1 б, кривые 1 и 2) при P больше 50 Вт начинает уменьшаться.

Если же датчик находится на расстоянии 15 мм от излучателя зависимости имеют вид кривых с максимумом. Сигнал на частотах $f_0/2$ и $2,25f_0$ (рисунок 2.1 б и 2.1 в, кривая 3) достигает максимального значения при P в диапазоне 20...25 Вт, затем начинается быстрое уменьшение величин. Суммарная амплитуда S (рисунок 2.1 з, кривая 3) также достигает относительного максимума при $P \sim 20$ Вт, однако затем мало меняется с ростом P .

Отметим, что амплитуда A_0 на основной частоте (рисунок 2.1 а) для малых L (3 и 7 мм, кривые 1 и 2) мало меняется с ростом P . При больших L (кривая 3) A_0 в целом уменьшается с ростом P за исключением «краевых» областей, т. е. при $P < 10$ Вт и $P > 75$ Вт.

Из сравнения кривых 1, 2 и 3 следует, что при увеличении расстояния L до излучателя интенсивность исследовавшихся величин быстро уменьшается. Например, наблюдается кратное уменьшение амплитуды основной гармоники при увеличении расстояния с 3 до 15 мм, что говорит о сильном поглощении и рассеивании звуковой волны при удалении от излучателя. И это падение в абсолютных величинах растет по мере увеличения интенсивности ультразвука. С ростом излучаемой мощности увеличивается и концентрация пузырьков в кавитационной области, как следствие растет и поглощение.

Поглощением объясняется и различный характер зависимостей исследовавшихся величин от мощности P при малых и больших расстояниях L до излучателя. Для малых L полное затухание УЗ относительно невелико, поэтому с ростом излучаемой мощности концентрация пузырьков и интенсивность их пульсаций и захлопывания увеличиваются, что и приводит к увеличению интенсивности составляющих спектра КШ во всем исследовавшемся диапазоне P . Для больших L (15 мм и больше) суммарное ослабление УЗ становится настолько сильным, что, начиная с некоторых значений P_{\max} , начинается уменьшение A_0 , A_S , A_{WBN} и S и полученные зависимости данных параметров от P имеют вид кривых с максимумом.

На расстоянии $L = 15$ мм при P в диапазоне 75–100 Вт происходит скачок амплитуды A_0 и A_{WBN} (опыты повторили несколько раз, данный вид зависимости сохранялся). A_S начинает увеличиваться при $P = 60$ Вт. Скачкообразный рост A_S , A_{WBN} и A_0 при превышении мощности в 75 Вт

может быть связан с удалением больших неэффективных пузырей из зоны кавитации акустическими течениями. Действительно, при таких мощностях в кавитационной области визуально наблюдаются интенсивные потоки жидкости, с которыми пузыри с размерами порядка 1 мм и больше перемещаются из кавитационной области.

На рисунке 2.2 изображены попарные зависимости величин A_S , A_{WBN} и S при различных расстояниях до излучателя L . Размер каждой точки зависит от соответствующей мощности W . В левом углу каждой зависимости приведен рассчитанный коэффициент корреляции Пирсона.

Увеличение расстояния до излучателя приводит к ослаблению линейной взаимосвязи между рассматриваемыми оценками активности кавитации. Например, при $L = 3$ мм коэффициент корреляции находился в диапазоне 0,93–0,95, а при $L = 15$ мм в диапазоне 0,66–0,68.

Таким образом, из представленных результатов следует, что оценки активности кавитации, основанные на регистрации субгармоники, непрерывной составляющей или интеграла, будут давать схожий результат при исследовании кавитации в кавитационной области вблизи излучателя, в данном случае, на расстояниях до 7 мм. На расстоянии $L = 15$ мм связь между исследовавшимися величинами не является однозначной как при большой интенсивности ультразвука, так и при интенсивности ультразвука порядка порога кавитации. Поэтому выбор оптимального варианта оценки активности кавитации должен производиться именно в таких условиях. Одним из подходов может быть сравнение получаемых зависимостей параметров спектра КШ с интенсивностью звуколюминесценции (ЗЛ) или скоростью кавитационной эрозии, т. к. к настоящему времени общепризнано, что эти эффекты обусловлены захлопыванием кавитационных полостей.

На рисунке 2.3 представлена эволюция спектра кавитационного шума при увеличении мощности на генераторе. Отметим, что амплитуда составляющих данных спектров может незначительно отличаться от результатов на рисунке 2.1, так как существует временной лаг между измерениями, а также тем, что измерения кавитации характеризуются невысокой воспроизводимостью.

Видна существенная разница между уровнем гармонических составляющих (обусловлены периодическими колебаниями кавитационных пузырей) и уровнем непрерывной составляющей (считается, что данная составляющая обусловлена асинхронным схлопыванием пузырей). Развитие кавитационной области при увеличении мощности на генераторе сопровождается увеличением уровня как гармоник (за исключением A_0), так и непрерывной составляющей.

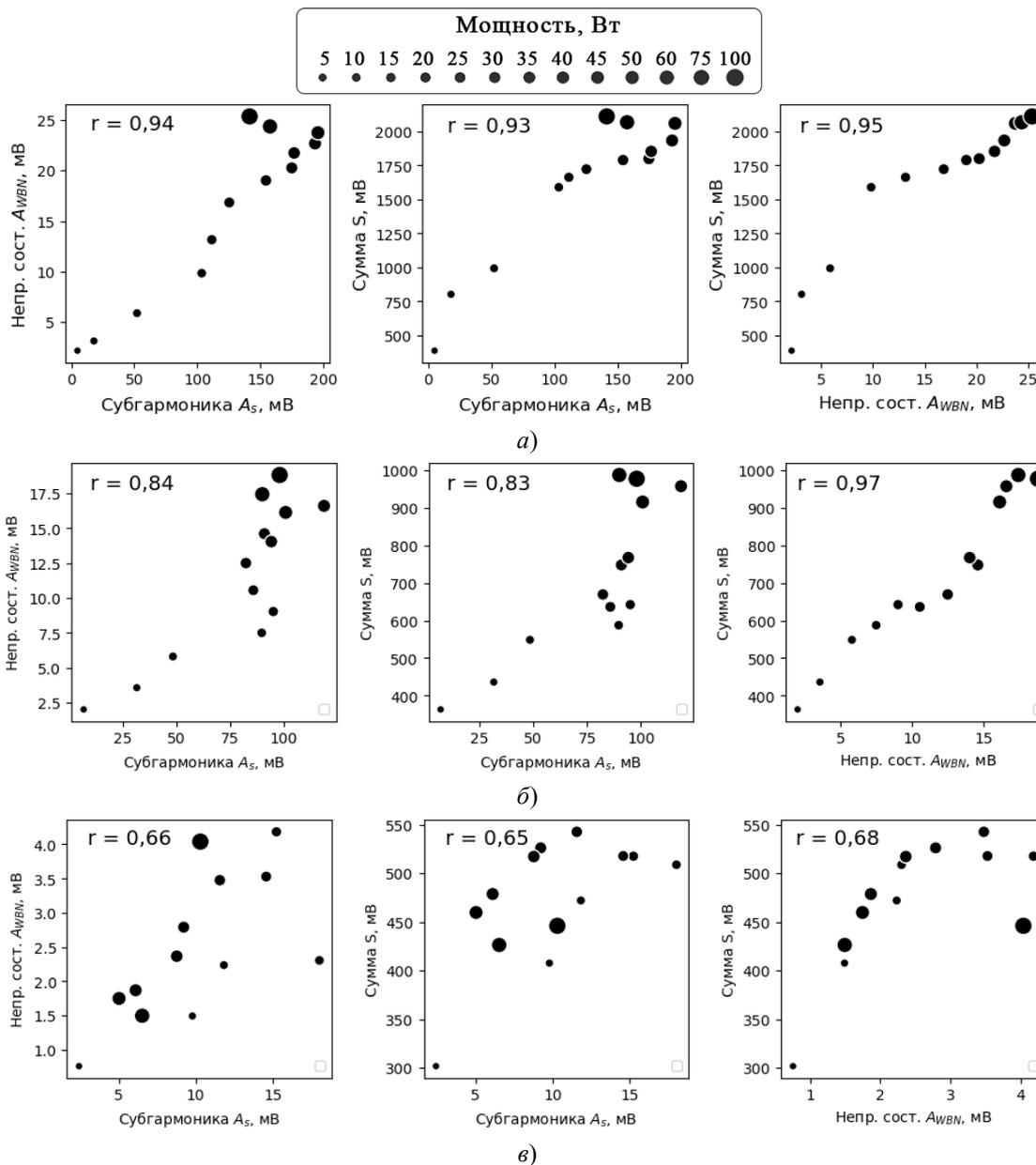


Рисунок 2.2 – Связь между оценками активности кавитации при различном зазоре между излучателем и датчиком: а – 3 мм; б – 7 мм; в – 15 мм

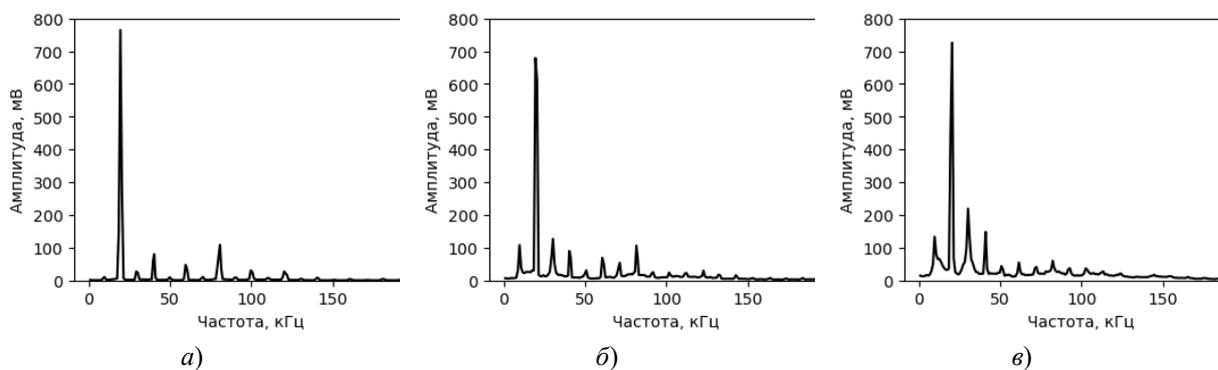


Рисунок 2.3 – Эволюция спектра кавитационного шума при увеличении мощности генератора на расстоянии 3 мм от излучателя: а) 10 Вт; б) 25 Вт; в) 80 Вт

Заключение

Исследован ряд составляющих спектра кавитационного шума, используемых для оценки активности кавитации. Спектры регистрировались при варьировании выходной мощности ультразвукового генератора и расстояния от датчика кавитации до излучателя ультразвуковых колебаний. Показано, что характер зависимостей исследовавшихся параметров от интенсивности ультразвука различается для малых и больших расстояний от излучателя, что связано в основном с увеличением поглощения и рассеяния ультразвука в кавитационной области по мере удаления от излучателя и увеличением концентрации пузырьков в кавитационной области при увеличении интенсивности ультразвука.

Установлено, что связь исследовавшихся параметров между собой характеризуется высокой степенью корреляции для близких расстояний от излучателя (в данном случае – до 7 мм) в условиях развитой кавитационной области, т. е. при интенсивности ультразвука намного выше порога кавитации. В кавитационной области вдали от излучателя эти параметры не связаны однозначно между собой и характеризуются низким уровнем корреляции. На основании полученных данных предложен подход к выбору оптимального метода оценки активности кавитации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скворцов, С.П.* Методы контроля параметров ультразвуковой кавитации / С.П. Скворцов // Наука и Образование. – 2015. – Т. 2. – С. 83–100. – DOI: 10.7463/0215.0759806.
2. *Acoustic characterization of cavitation intensity: A review* / W. Pengfei [et al.] // *Ultrasonics Sonochemistry*. – 2022. – Vol. 82. – P. 105878. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ultsonch.2021.105878>
3. *Свиридов, А.П.* Кавитационная активность водных суспензий пористых кремниевых наночастиц с различной степенью гидрофобности поверхности / А.П. Свиридов, Л.А. Осминкина, В.Г. Андреев // *Акустический журнал*. – 2023. – Т. 69, № 1. – С. 92–100. – DOI: 10.31857/S032079192260038X.
4. *Smith, R.* Comparing Phantom and Animal Metrics Applied in the Determination of Focused Ultrasound Stable and Inertial Cavitation Levels / R. Smith, S. Khan, L. Curiel // *Ultrasound in Medicine & Biology*. – 2023. – № 49. – P. 1118–1128.
5. *Evaluation of correlation between chemical dosimetry and subharmonic spectrum analysis to examine the acoustic cavitation* / H. Hasanzadeh [et al.] // *Ultrasonics Sonochemistry*. – 2010. – Vol. 17, № 5. – P. 863–869.
6. *Исследование корреляции звуколюминесценции и кавитационного шума в поле фокусирующего излучателя* / А.В. Котухов [и др.] // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2020. – № 4 (45). – С. 32–36.
7. *Characterization of transient cavitation activity during sonochemical modification of magnesium particles* / N. Brezhneva [et al.] // *Ultrasonics Sonochemistry*. – 2020. – Vol. 70, № 3–4. – P. 105315–105327.
8. *Measurement of cavitation noise in ultrasonic baths and ultrasonic reactors*. IEC TS 63001: 2024 RLV Standard. – 2024. – 85 p.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, проекты № Т23М-026 и № Т24МП-056.

Поступила в редакцию 17.07.2024.

Информация об авторах

Минчук Вячеслав Сергеевич – м.н. сотрудник
Гаврилюк Виталий Степанович – инженер-программист
Дежкунов Тимофей Александрович – оператор ПЭВМ
Перхунова Александра Юрьевна – стажер м.н. сотрудника
Дежкунов Николай Васильевич – к.т.н., доцент

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ЛАЗЕРНОЙ РЕЗКИ ХРУПКИХ НЕМЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Ю.В. Никитюк, В.А. Прохоренко, О.М. Демиденко, В.С. Смородин, А.В. Воруев

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

DEVELOPMENT OF SOFTWARE TOOLS FOR MODELING AND OPTIMIZATION OF LASER CUTTING PARAMETERS OF BRITTLE NON-METALLIC MATERIALS

Yu.V. Nikitjuk, V.A. Prokhorenko, O.M. Demidenko, V.S. Smorodin, A.V. Voruev

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Описана разработка средств моделирования и поиска оптимальных параметров процесса лазерной резки хрупких неметаллических материалов методом лазерного раскалывания. Программные средства реализованы на языке Python и предназначены для конечно-элементного моделирования, нейросетевого моделирования и поиска оптимальных параметров с применением генетического алгоритма. Применение разработанных программных средств рассмотрено на примере поиска оптимальных параметров резки кварцевой пластины.

Ключевые слова: нейросетевое моделирование, конечноэлементное моделирование, FEniCS лазерная резка, генетический алгоритм, оптимизация параметров.

Для цитирования: Разработка программных средств моделирования и оптимизации параметров лазерной резки хрупких неметаллических материалов / Ю.В. Никитюк, В.А. Прохоренко, О.М. Демиденко, В.С. Смородин, А.В. Воруев // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 18–22. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_18. – EDN: VFWQQP

Abstract. This paper describes the development of tools for modeling and searching for optimal parameters for the process of laser cutting of brittle non-metallic materials using laser chopping. Software tools are designed for finite element modeling, neural network modeling and searching for optimal parameters using a genetic algorithm and are implemented in Python. The use of the developed software is shown using the example of searching for optimal parameters for cutting a quartz plate.

Keywords: neural network modeling, finite element modeling, FEniCS laser cutting, genetic algorithm, parameter optimization.

For citation: Development of software tools for modeling and optimization of laser cutting parameters of brittle non-metallic materials / Yu.V. Nikitjuk, V.A. Prokhorenko, O.M. Demidenko, V.S. Smorodin, A.V. Voruev // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 3 (60). – P. 18–22. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_18 (in Russian). – EDN: VFWQQP

Введение

Метод резки стекол путем лазерного раскалывания [1]–[10] обладает рядом существенных преимуществ, таких как высокая точность разделения и высокая скорость обработки, что делает его особенно востребованным в современных технологических процессах. Разработка средств автоматизированного поиска оптимальных параметров лазерной резки стекол представляет собой, таким образом, важную научно-практическую задачу.

На рисунке 0.1 показана схема процесса лазерного раскалывания пластины эллиптическим лазерным пучком с применением хладагента (вид сверху).

В данной работе представлены разработанные авторами программные средства моделирования и

поиска оптимальных параметров процесса лазерной резки хрупких неметаллических материалов методом лазерного раскалывания.

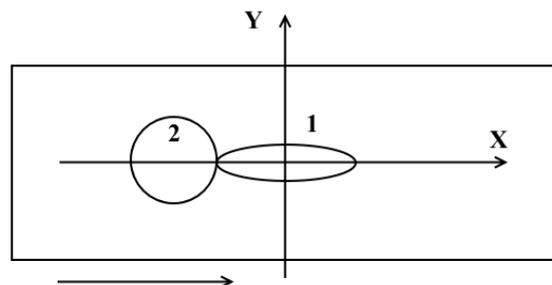


Рисунок 0.1 – Схема процесса лазерной резки, вид сверху: 1 – зона воздействия лазерного излучения, 2 – зона воздействия хладагента

В основе подхода лежит последовательное применение конечноэлементного и нейросетевого моделирование откликов задачи и осуществление поиска оптимальных параметров лазерной резки с применением авторского генетического алгоритма.

1 Конечноэлементное моделирование процесса лазерной резки

Обрабатываемым изделием в рассматриваемой задаче является пластина из силикатного стекла. На поверхность пластины воздействуют лазерное излучение (длина волны 10,6 мкм, эллиптический пучок) и хладагент.

Факторы задачи:

- скорость движения лазерного пучка и хладагента (V);
- мощность лазерного излучения (P);
- полуоси эллиптического пучка (A, B).

Отклики задачи:

- максимальные напряжения растяжения (σ_{yy});
- максимальная температура в зоне обработки (T_{max}).

Тепловая задача описывается уравнением:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + f \quad (1.1)$$

в области пространства Ω на промежутке времени $(0, t_{max}]$ с граничным условием $T = T_D$ на $\partial\Omega$ и начальными условиями $T = T_0$ в момент времени $t = 0$. Искомая функция зависит от времени и координаты в трехмерном пространстве ($T = T(x, y, z, t)$).

При решении зависимых от времени уравнений в частных производных вводится дискретизация времени. Производная по времени может быть аппроксимирована как отношение разности текущего значения функции и значения с предыдущего шага Δt и величины шага по времени Δt :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^{n+1} \approx \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t}. \quad (1.2)$$

Таким образом,

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} = \nabla^2 T^{n+1} + f^{n+1}. \quad (1.3)$$

При известных начальных условиях возможно его решить для следующих моментов времени T^0, T^1, T^2, \dots :

$$T^{n+1} - \Delta t \nabla^2 T^{n+1} = T^n + \Delta t f^{n+1} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

Применение метода конечных элементов требует приведения уравнений к слабой форме. Используется умножение на тестовую функцию $v \in \hat{F}$ и производится интегрирование вторых производных по частям, слабую форму можно записать как

$$a(T, v) = L_{n+1}(v), \quad (1.5)$$

где

$$a(T, v) = \int_{\Omega} (Tv + \Delta t \nabla T \cdot \nabla v) dx, \quad (1.6)$$

$$L_{n+1}(v) = \int_{\Omega} (T^n + \Delta t f^{n+1}) v dx. \quad (1.7)$$

Помимо решения вариационной задачи на каждом шаге также необходимо аппроксимировать начальные условия. В вариационной форме они принимают вид:

$$a_0(T, v) = \int_{\Omega} Tv dx, \quad (1.8)$$

$$L_0(v) = \int_{\Omega} T_0 v dx. \quad (1.9)$$

Моделирование выполнялось для слабо-связной постановки задачи.

Вариационную форму задачи упругости можно записать как

$$\int_{\Omega} \frac{\sigma(u)}{\varepsilon(v)} d\Omega = \int_{\Omega} g \cdot v d\Omega. \quad (1.10)$$

Уравнение термоупругости может быть записано как:

$$\sigma = \mathbb{C} : (\varepsilon - \alpha(T - T_0)I) = \lambda tr(\varepsilon)I + 2\mu\varepsilon - \alpha(3\lambda + 2\mu)(T - T_0)I, \quad (1.11)$$

где λ, μ – параметры Ламе, α – коэффициент теплового расширения, I – единичная матрица.

Алгоритм конечноэлементного моделирования задачи имплементирован с использованием открытой библиотеки FEniCS [11] на языке Python. Библиотека FEniCS предоставляет обширный инструментарий для решения дифференциальных уравнений в частных производных, позволяя поставить и решить соответствующие вариационные задачи с применением выбранного типа конечных элементов.

Для численных экспериментов использована дискретизация по времени $\Delta t = 0,1$ с.

Пример визуализации температурных полей и термоупругих полей напряжения на обрабатываемой поверхности пластины, полученных в результате выполнения конечноэлементного расчета, показана на рисунках 1.1 и 1.2. Визуализация выполнена средствами языка Python и библиотеки Matplotlib.

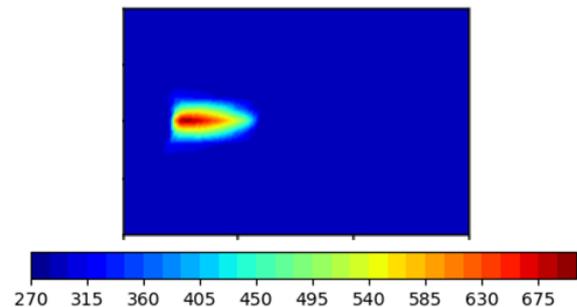


Рисунок 1.1 – Визуализация вычисленных температурных полей на обрабатываемой поверхности пластины, K

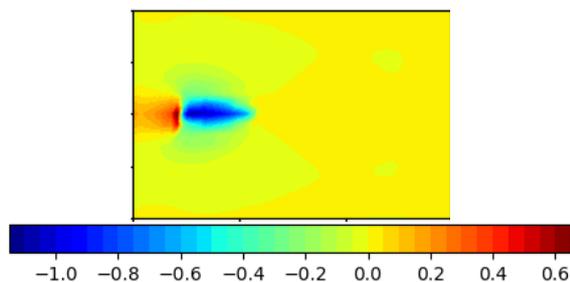


Рисунок 1.2 – Визуализация вычисленных полей напряжений растяжения σ_{yy} на обрабатываемой поверхности пластины, 10^2 МПа

2 Нейросетевое моделирование параметров лазерной резки

Исходные данные для нейросетевого моделирования получены в результате проведения численных экспериментов (конечноэлементного моделирования). Проведено 64 эксперимента с различными вариациями значений факторов, рассчитаны аппроксимируемые величины σ_{yy} и T_{max} .

Модели нейросетевых аппроксиматоров, их алгоритмы обучения реализованы на языке Python с использованием библиотеки Keras [12].

Была использована методика поиска оптимальных архитектур трехслойных аппроксиматоров перебором [8]. Тепловые карты распределений MSE для аппроксиматоров откликов σ_{yy} и T_{max} показаны на рисунке 2.1. В данной работе число нейронов варьировалось в диапазоне от 10 до 55 с шагом 5.

В таблице 2.1 приведены значения метрик для наилучших архитектур аппроксиматоров температуры T_{max} и напряжения σ_{yy} .

В результате применения метода найдены оптимальные трехслойные архитектуры [25-25-1] для аппроксимации σ_{yy} и [25-30-1] для аппроксимации T_{max} .

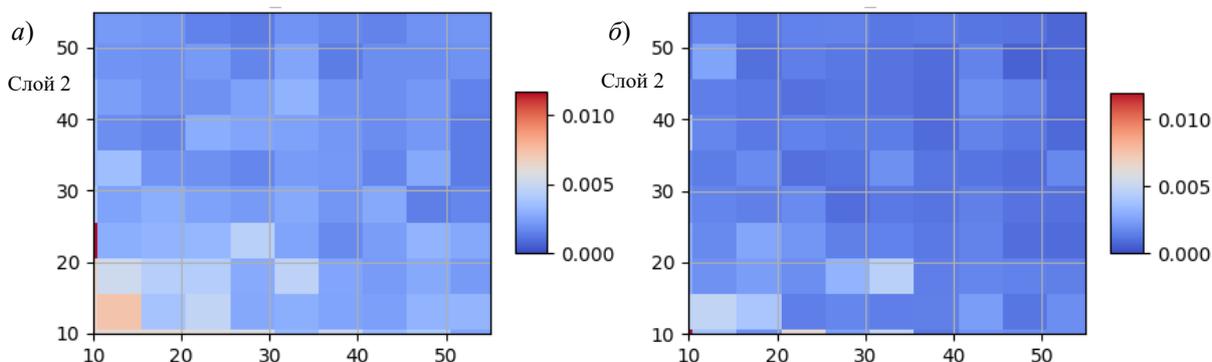


Рисунок 2.1 – Тепловые карты распределений значений среднеквадратичной ошибки (MSE), полученные в результате кросс-валидации трехслойных архитектур-кандидатов нейросетевых аппроксиматоров откликов T (а) и σ_{yy} (б)

Таблица 2.1 – Значения метрик MSE и R^2 для выбранных архитектур аппроксиматоров максимальной температуры T (первая строка) и максимального напряжения растяжения σ_{yy} (вторая строка)

Архитектура нейросети	MSE	R^2	Количество эпох обучения
25-30-1	0,0012	0,97	152
25-25-1	0,0021	0,95	148

3 Поиск оптимальных параметров процесса лазерного раскалывания стеклянных пластин

Для осуществления многокритериальной оптимизации использован авторский генетический алгоритм [8]–[10]. Задана целевая функция для максимизации откликов σ_{yy} и V . В целевой функции использованы нормализованные (в диапазоне [0; 1]) значения всех параметров задачи $(A', B', V', P', \sigma'_{yy})$. Генетический алгоритм минимизирует целевую функцию $L(A', B', V', P')$, которая включает в себя слагаемые, соответствующие оптимизируемым параметрам (аппроксимированное нейронной сетью значение σ_{yy} и V), а также ограничения на выход за диапазоны допустимых значений для факторов задачи (A', B', V', P') , и ограничению $T_{max} < 789$ K для аппроксимированного нейронной сетью значения максимальной температуры T_{max} :

$$L(A', B', V', P') = -(\alpha_1 \sigma'_{yy} + \alpha_2 V') + \beta_1 E_1 + \beta_2 E_2 + \beta_3 E_3 + \beta_4 E_4,$$

$$E_1 = \begin{cases} 1, & A' \notin [0, 1], \\ 0, & A' \in [0, 1]; \end{cases} \quad E_2 = \begin{cases} 1, & B' \notin [0, 1], \\ 0, & B' \in [0, 1]; \end{cases}$$

$$E_3 = \begin{cases} 1, & V' \notin [0, 1], \\ 0, & V' \in [0, 1]; \end{cases} \quad E_4 = \begin{cases} 1, & P' \notin [0, 1], \\ 0, & P' \in [0, 1]; \end{cases}$$

$$E_5 = \begin{cases} 1, & T_{max} \geq 789K, \\ 0, & T_{max} < 789K; \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5; \beta_i = 1,0, i = \overline{1,5}.$$

На рисунке 3.1 показан график изменения значений целевой функции (наилучшее значение и среднее по популяции) в процессе поиска оптимальных значений параметров с применением генетического алгоритма (размер популяции 250, число поколений 30).

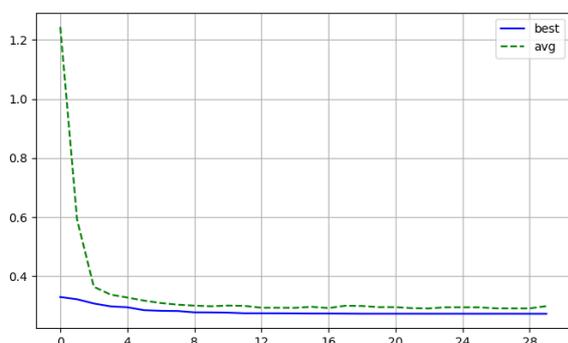


Рисунок 3.1 – Процесс сходимости генетического алгоритма на протяжении 30 поколений

В результате применения генетического алгоритма найдены оптимальные значения факторов, представленные в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Найденные оптимальные значения параметров лазерной резки

V , м/с	A , мм	B , мм	P , Вт	T , К	σ_{yy} , МПа
0,005	3,7	1,01	5,99	716,5 (692)	68,8 (66,2)

Установлено, что вычисленные с применением аппроксимации значения напряжения σ_{yy} и температуры T для найденного набора оптимальных параметров задачи определены с погрешностями, не превышающими 4% (в скобках в таблице 3.2 указаны значения, полученные в результате конечноэлементного расчета с использованием разработанных программных средств).

Заключение

В данной работе описана методика применения конечноэлементных расчетов, нейросетевого моделирования и генетического алгоритма для многокритериальной оптимизации процесса лазерной резки стеклянных пластин эллиптическими пучками методом лазерного раскалывания. Разработаны соответствующие программные средства, включающие в себя средства конечноэлементного моделирования задачи с применением открытой библиотеки FEniCS, средства нейросетевого моделирования с применением открытой библиотеки Keras с возможностью поиска оптимальной архитектуры нейросетевого аппроксиматора и авторский генетический алгоритм.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kondratenko, V.S. Precision Cutting of Glass and Other Brittle Materials by Laser-Controlled Thermo-Splitting / V.S. Kondratenko, S.A. Kudzh // Glass and ceramics. – 2017. – № 74. – P. 75–81.
2. Serdyukov, A.N. Features of controlled laser thermal cleavage of crystalline silicon / A.N. Serdyukov, S.V. Shalupaev, Y.V. Nikityuk // Crystallography Reports. – 2010. – Vol. 55, № 6. – P. 933–937. – DOI: 10.1134/S1063774510060064
3. Features of controlled laser thermal cleavage of crystal quartz / A.N. Serdyukov, E.B. Shershnev, Y.V. Nikityuk [et al.] // Crystallography Reports. – 2012. – Vol. 57, № 6. – P. 792–797. – DOI: 10.1134/S1063774512060120.
4. Determination of the parameters of two-beam laser splitting of silicate glasses using regression and neural network models / Y.V. Nikityuk, A.N. Serdyukov, I.Y. Aushev // Journal of the Belarusian State University. Physics. – 2022. – № 1. – P. 35–43. – DOI: 10.33581/2520-2243-2022-1-35-43.
5. Применение искусственных нейронных сетей и метода конечных элементов для определения параметров обработки кварцевых золь-гель стекол эллиптическими лазерными пучками / Ю.В. Никитюк, А.Н. Сердюков, В.А. Прохоренко, И.Ю. Аушев // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 3 (48). – С. 30–36.
6. Optimization of two-beam laser cleavage of silicate glass / Y.V. Nikityuk, A.N. Serdyukov, I.Y. Aushev // Journal of Optical Technology. – 2022. – Vol. 89, № 2. – P. 121–125. – DOI: 10.1364/JOT.89.000121.
7. Nikityuk, Y.V. Determination of the Parameters of Controlled Laser Thermal Cleavage of Crystalline Silicon Using Regression and Neural Network Models / Y.V. Nikityuk, A.N. Serdyukov // Crystallogr. Rep. – 2023. – Vol. 68. – P. 1199–1204. – DOI: 10.1134/S1063774523600679.
8. Никитюк, Ю.В. Многокритериальная оптимизация параметров лазерной резки кварцевого стекла с применением нейросетевого моделирования и генетического алгоритма / Ю.В. Никитюк, В.А. Прохоренко, А.И. Кулыба // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 26–31.
9. Multi-Criteria Optimization of Quartz Glass Laser Cleaving Parameters via Neural Network Simulation and Genetic Algorithm / Y. Nikityuk, V. Prokhorenko, A. Semchenko, D. Kovalenko // 2023 7th International Conference on Information, Control, and Communication Technologies (ICCT). – 2023. – Astrakhan, Russian Federation. – P. 1–3. – DOI: 10.1109/ICCT58878.2023.10347113.
10. Optimization of Quartz Sol-gel Glass Cutting Parameters by Elliptical Laser Beams Using Neural Network Simulation and Genetic Algorithm / Y. Nikityuk, V. Prokhorenko, A. Semchenko, D. Kovalenko // Recent Advances in Technology Research and Education. Inter-Academia 2023. Lecture Notes

in Networks and Systems; ed. Y. Ono, J. Kondoh. – Springer, Cham, 2023. – Vol. 939. – DOI: 10.1007/978-3-031-54450-7_34.

11. *Langtangen, H.P.* A Logg Solving PDEs in Python: the FEniCS tutorial I / H.P. Langtangen. – Springer, Cham, 2017. – 146 p. – DOI: 10.1007/978-3-319-52462-7.

12. *Chollet, F.* Deep learning with Python / F. Chollet. – Shelter Island: Manning Publications Co., 2018. – 384 p.

Информация об авторах

Никитюк Юрий Валерьевич – к.ф.-м.н., доцент
Прохоренко Владислав Александрович – ст. преподаватель
Демиденко Олег Михайлович – д.т.н., профессор
Смородин Виктор Сергеевич – д.т.н., профессор
Воружев Андрей Валерьевич – к.т.н., доцент

Поступила в редакцию 15.05.2024.

УДК 523.42

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_23

EDN: RNRZHA

ФУНКЦИЯ ПЛОТНОСТИ ДЛЯ МОДЕЛИ ЗЕМЛЕПОДОБНОЙ ВЕНЕРЫ**О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков***Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины***DENSITY FUNCTION FOR A MODEL OF EARTH-LIKE VENUS****O.V. Novikova, G.Yu. Tyumenkov***Francisk Skorina Gomel State University*

Аннотация. Проведено корректирующее моделирование функции плотности Венеры на основе модели PVM, предполагающей пятислойную внутреннюю структуру планеты. Получен аналитический и графический вид новых функций плотности для трёх физически правомерных приближений, обусловленных допустимыми изменениями размеров ядра и коры планеты.

Ключевые слова: внутреннее строение, масса планеты, радиус планеты, функция плотности, шаровой слой, модель PVM.

Для цитирования: Новикова, О.В. Функция плотности для модели землеподобной Венеры / О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 23–26. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_23. – EDN: RNRZHA

Abstract. A corrective modeling of the density function of Venus based on the PVM model, which assumes a five-layer internal structure of the planet, is carried out. The analytical and graphical forms of new density functions are obtained for three physically valid approximations, conditioned by permissible changes in the dimensions of the planet's core and crust.

Keywords: internal structure, planet mass, planet radius, density function, spherical layer, PVM model.

For citation: Novikova, O.V. Density function for a model of earth-like Venus / O.V. Novikova, G.Yu. Tyumenkov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 3 (60). – P. 23–26. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_23 (in Russian). – EDN: RNRZHA

Введение

Научные исследования внутреннего строения Венеры, в отличие от её атмосферы и поверхности, оказались крайне затруднительными из-за технически сложных условий на поверхности – давление 9,3 МПа, температура около 740 К. Имеющееся научное оборудование пока не позволяет в таких условиях проводить сейсмические эксперименты. Ближайший разрабатываемый совместный проект Роскосмоса и NASA – отправка станции Венера-Д, спускаемый модуль которой будет иметь новейший сейсмометр, способный проработать на поверхности в указанных условиях около двух месяцев.

В силу вышесказанного внутреннее строение Венеры описывается в рамках модельных представлений, опирающихся на разностороннюю эмпирическую базу [1]–[6]. При этом часто используются элементы сравнительного моделирования, основанного на её схожести с Землёй [7], [8]. В свою очередь теория Земли во всех её физических проявлениях достаточно хорошо разработана [9]. Поэтому в землеподобных моделях Венеры реализуется приближение пяти шаровых слоёв, как и у Земли (условно: 1 – ядро; 2, 3, 4 – промежуточные слои и 5 – кора). При

этом основополагающей моделью является так называемая параметрически простая модель Венеры (PVM) [10], допускающая, что будет показано ниже, некоторую доработку применительно, в частности, к математическому виду функций плотности шаровых слоёв, а, следовательно, и к виду функции плотности Венеры в целом.

Поэтому целью данной работы является модификация функций плотности шаровых слоёв с учётом точных значений массы и радиуса планеты, а также значений плотностей на границах верхних слоёв и их толщин, величины которых можно считать более достоверными, чем у слоёв нижних.

Приведём некоторые физические характеристики Венеры, которые будем использовать в дальнейших расчётах:

– масса (без атмосферы) [5]

$$M = 4,86682 \cdot 10^{24} \text{ кг};$$

– средний радиус (без атмосферы) [1]

$$R = 6051,8 \text{ км};$$

– плотность коры [10] $\rho_k = 2800 \text{ кг/м}^3$;

– плотность в центре [10] $\rho_{ц} = 11742 \text{ кг/м}^3$;

– допустимые значения радиуса ядра (нижнего) [2] $r_{ня} = 2800\text{--}3500 \text{ км}$;

– допустимые значения толщины коры [3]

$$H_k = 12\text{--}65 \text{ км}.$$

1 Функции плотности в параметрически простой модели Венеры (PVM)

Параметрически простая модель Венеры (PVM) была сформулирована в работе [10]. Фигурирующие в ней функции плотности, используемые до настоящего времени, например [8], приведены в Таблице 1.1. Они имеют полиномиальный вид, удовлетворяют условию

$$\frac{d^2\rho_i}{dr^2} \leq 0,$$

необходимость выполнения которого обоснована в [11], и параметризованы безразмерным расстоянием r/R , где радиус Венеры $R_{PVM} = 6050$ км.

Таблица 1.1 – Функции плотности для шауровых слоёв в PVM

№ слоя	Функция плотности слоя $\rho_i(r)$, кг/м ³	Диапазон расстояний от центра, км
1	$\rho_1(r) = 11742 - 170 \cdot r/R - 5402 \cdot (r/R)^2 - 3642 \cdot (r/R)^3$	0–3207
2	$\rho_2(r) = 6770 - 2467 \cdot r/R - 266 \cdot (r/R)^2$	3207–5303
3	$\rho_3(r) = 10101 - 6871 \cdot r/R$	5303–5579
4	$\rho_4(r) = 7374 - 4146 \cdot r/R$	5579–5980
5	$\rho_5(r) = 2800$	5980–6050

Интеграл от функций плотности вида

$$M = 4\pi \sum_{i=1}^5 \int_{r_i}^{r_{i+1}} \rho_i(r) r^2 dr \quad (1.1)$$

определяет массу планеты. Функции плотности Венеры из Таблицы 1.1, проинтегрированные в диапазоне указанных расстояний от центра планеты, дают массу Венеры M_{PVM}

$$M_{PVM} = 4,8612 \cdot 10^{24} \text{ кг.} \quad (1.2)$$

Полученный результат имеет заметное абсолютное отклонение ΔM от реальной массы $M = 4,86682 \cdot 10^{24}$ кг:

$$\Delta M = (M - M_{PVM}) = 5,62 \cdot 10^{21} \text{ кг.}$$

Видим, что ΔM достаточно велико, поэтому попробуем модифицировать функции плотности $\rho_i(r)$ согласно требованиям, сформулированным нами во Введении. Следствием чего будет нулевое значение ΔM .

Но прежде определим значения нижних и верхних плотностей на границах слоёв. Эти плотности определяются химическим составом и фазовым состоянием вещества слоя, поэтому могут считаться одинаковыми в различных, но близких по физическому содержанию моделях. Данное утверждение в большей степени относится к верхним слоям, подвергающимся меньшему давлению.

Используя данные Таблицы 1.1, рассчитаем значения плотностей на границах слоёв, введя соответственно верхнюю $\rho_{i(верх)}(r)$ и нижнюю $\rho_{i(нижн)}(r)$ плотности. Результаты расчётов приведены в Таблице 1.2.

Таблица 1.2 – Значения плотностей на границах слоёв

№ слоя	r_i в PVM, км	$\rho_{i(нижн)}(r)$, кг/м ³	$\rho_{i(верх)}(r)$, кг/м ³
1	0	11742,0	–
1	3207	–	9591,5
2	3207	5387,5	–
2	5303	–	4403,3
3	5303	4078,4	–
3	5579	–	3765,0
4	5579	3550,8	–
4	5980	–	3276,0
5	5980	2800,0	–
5	6050	–	2800,0

2 Модификация функции плотности

Значения толщин трёх верхних слоёв разумно полагать более достоверными, поэтому для новых функций плотности мы их не изменим. Функции плотности $\rho_i(r)$ подвергнем модификации с учетом их значений на границах слоёв, используя верхнюю $\rho_{i(верх)}(r)$ и нижнюю $\rho_{i(нижн)}(r)$ плотности для новых расстояний от центра планеты, сохранив также при этом их полиномиальный вид.

Так как предполагается сделать три приближения для возможных различных значений размеров ядра (нижнего) и коры, то введем дополнительный индекс приближения $j = 1, 2, 3$. Теперь значение $R = 6051,8$ км. И, таким образом, $\rho_i^j(r)$ будем определять, исходя из общего вида

$$\rho_i^j(r) = A_i^j + B_i^j \cdot \frac{r}{R} + C_i^j \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^2 + D_i^j \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^3, \quad (2.1)$$

на основе использования:

- неизменной функции плотности коры $\rho_5^j(r) = \rho_5(r)$;
- линейного приближения и значений соответствующих верхних и нижних плотностей слоёв при неизменных толщинах для $\rho_3^j(r)$ и $\rho_4^j(r)$;
- параболического приближения с незначительным изменением значений верхних и нижних плотностей и толщины слоя для $\rho_2^j(r)$;
- кубического приближения с незначительным изменением значения верхней плотности слоя для $\rho_1^j(r)$ при неизменной нижней, а также нормировки полной функции плотности на массу планеты $M = 4,86682 \cdot 10^{24}$ кг.

Результаты расчётов на основе выражения (2.1) и оговоренных условий, точно соответствующие значению $M = 4,86682 \cdot 10^{24}$ кг, представлены в Таблицах 2.1–2.3. То есть, по условию моделирования $\Delta M = 0$ изначально. Нормировка на реальную массу Венеры осуществлялась интегралом (1.1). Невзирая на простой полиномиальный вид функций плотности слоёв, интегрирование

с целью ускорения и оптимизации процесса расчётов осуществлялось с помощью системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica [12]. Попутно отметим, что помимо указанного инструмента при астрофизических и астрономических численных исследованиях удобно использовать язык Python [13].

2.1 Приближение 1

Приближение 1 предполагает минимизацию размеров толщины коры и радиуса ядра, согласно [3] и [2], соответственно: $h_K = 12$ км, $r_J = 2800$ км.

Таблицу 2.1 – Функции плотности для шаровых слоёв в Приближении 1

№ слоя	Функция плотности слоя $\rho_i^1(r)$, кг/м ³	Диапазон расстояний от центра, км
1	$\rho_1^1(r) = 11742 - 170 \cdot r / R - 5402 \cdot (r/R)^2 - 3645 \cdot (r/R)^3$	0–2800
2	$\rho_2^1(r) = 7071 - 2466,6 \cdot r / R - 266 \cdot (r/R)^2$	2800–5363
3	$\rho_3^1(r) = 10167,6 - 6871,3 \cdot r / R$	5363–5639
4	$\rho_4^1(r) = 7415,2 - 4147,3 \cdot r / R$	5639–6039,8
5	$\rho_5^1(r) = 2800$	6039,8–6051,8

В Таблице 2.1 и далее обновлённые численные значения коэффициентов функций плотности будем выделять жирным шрифтом.

2.2 Приближение 2

Приближение 2 предполагает максимизацию размеров толщины коры и радиуса ядра, согласно [3] и [2], соответственно: $h_K = 65$ км, $r_J = 3500$ км.

Таблицу 2.2 – Функции плотности для шаровых слоёв в Приближении 2

№ слоя	Функция плотности слоя $\rho_i^2(r)$, кг/м ³	Диапазон расстояний от центра, км
1	$\rho_1^2(r) = 11742 - 170 \cdot r / R - 5402 \cdot (r/R)^2 - 3633,1 \cdot (r/R)^3$	0–3500
2	$\rho_2^2(r) = 6047 - 2010 \cdot r / R - 260,6 \cdot (r/R)^2$	3500–5310
3	$\rho_3^2(r) = 10107,4 - 6871,3 \cdot r / R$	5310–5586
4	$\rho_4^2(r) = 7378,9 - 4147,3 \cdot r / R$	5586–5986,8
5	$\rho_5^2(r) = \rho_5(r) = 2800$	5986,8–6051,8

2.3 Приближение 3

Приближение 3 использует средние размеры толщины коры и радиуса ядра, согласно [3] и [2], соответственно: $h_K = 38,5$ км, $r_J = 3150$ км.

Таблица 2.3 – Функции плотности для шаровых слоёв в Приближении 3

№ слоя	Функция плотности слоя $\rho_i^3(r)$, кг/м ³	Диапазон расстояний от центра, км
1	$\rho_1^3(r) = 11742 - 170 \cdot r / R - 5402 \cdot (r/R)^2 - 3660 \cdot (r/R)^3$	0–3150
2	$\rho_2^3(r) = 6794 - 2467 \cdot r / R - 266 \cdot (r/R)^2$	3150–5336,3
3	$\rho_3^3(r) = 10138,8 - 6872,8 \cdot r / R$	5336,3–5612,3
4	$\rho_4^3(r) = 7397 - 4147 \cdot r / R$	5612,3–6013,3
5	$\rho_5^3(r) = \rho_5(r) = 2800$	6013,3–6051,8

3 Графический вид функций плотности

Данные Таблицы 1.1 и Таблиц 2.1–2.3 позволяют получить графическое изображение исходной функции плотности в модели PVM и модельных функций плотности для трёх предложенных приближений.

Видно, что заметные отличия имеются в областях первого и второго слоя, что связано с используемыми при моделировании возможными размерами ядра и коры. Но при этом все эти функции плотности точно нормированы на массу Венеры.

Использование предельных значений для размеров ядра и коры говорит о том, что кривые 1 и 2 ограничивают область нахождения реальной функции плотности, неким образом коррелирующей с кривыми 3 и 4.

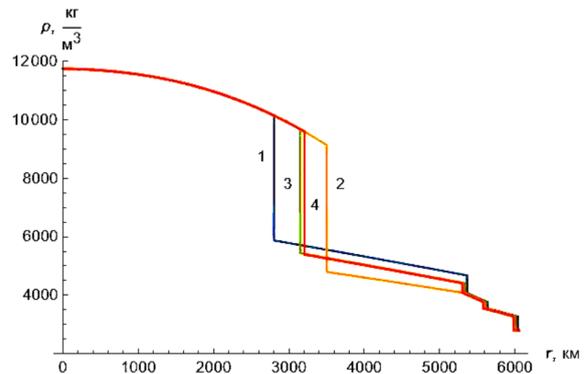


Рисунок 2.1 – Модельные функции плотности Венеры: 1, 2, 3 соответствуют номерам Приближений, 4 – модели PVM

Заключение

Таким образом, в работе получен аналитический и графический вид функций плотности планеты Венеры для трёх физически правомерных приближений, обусловленных допустимыми вариациями размеров её ядра и коры. Все приближения функций плотности точно задают массу планеты и определены на расстоянии,

соответствующем радиусу планеты. Они могут рассматриваться как варианты оптимизации функции плотности в модели PVM. Надеемся, что полученные в работе результаты смогут быть полезными при проведении дальнейшего более детального моделирования внутреннего строения Венеры с использованием данных новейших экспериментов и будут соответствовать результатам сейсмологических наблюдений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotation Elements: 2015* / B.A. Archinal [et al.] // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* – 2018. – Vol. 130, № 22. – P. 1–46.
2. *Tidal Constraints of the Interior of Venus* / C. Dumoulin, G. Tobie, O. Verhoeven, N. Rembaux // *J. Geophys. Res. Planet.* – 2017. – Vol. 122, № 6. – P. 1338–1352.
3. *Yang, A. Separation of Dynamic and Isostatic Components of the Venusian Gravity and Topography and Determination of the Crustal Thickness of Venus* / A. Yang, J. Huang, D. Wei // *Planet and Space Sci.* – 2016. – Vol. 129. – P. 24–31.
4. *The deep interior of Venus, Mars and the Earth: a brief review and the need for planetary surface-based measurements* / A. Mocquet, P. Rosenblatt, V. Dehant, O. Verhoeven // *Planet and Space Sci.* – 2011. – Vol. 5. – P. 1048–1061.
5. *Venus Fact Sheet* [Electronic resource]. – Mode of access: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/venusfact.html/>. – Date of access: 04.06.2024.
6. *Basilevsky, A.T. The Surface of Venus* / A.T. Basilevsky, J.W. Head // *Rep. Prog. Phys. Journal.* – 2003. – Vol. 66, № 10. – P. 1699–1734.
7. *Гудкова, Т.В. О параметрах землеподобной модели Венеры* / Т.В. Гудкова, В.Н. Жарков // *Астрономический вестник.* – 2019. – Т. 53, № 1. – С. 1–4.
8. *Гудкова, Т.В. Модели внутреннего строения землеподобной Венеры* / Т.В. Гудкова, В.Н. Жарков // *Астрономический вестник.* – 2020. – Т. 54, № 1. – С. 24–32.
9. *Anderson, D.L. Theory of the Earth* / D.L. Anderson. – Boston: Blackwell Scientific Publications, 1998. – 379 p.
10. *Жарков, Н.В. Физическая модель Венеры* / Н.В. Жарков, И.Я. Засурский // *Астрономический вестник.* – 1982. – Т. 16, № 1. – С. 18–28.
11. *Уильям, Б. Внутреннее строение планет* / Б. Уильям. – Москва: Мир, 1987. – 328 с.
12. *Wolfram, S. Metamathematics: Foundations & Physicalization* / S. Wolfram. – New York: Wolfram Media Inc., 2022. – 190 p.
13. *Schmidt, W. Numerical Python in astronomy and astrophysics* / W. Schmidt, M. Völschow. – Cham, Switzerland: Springer, 2021. – 260 p.

Поступила в редакцию 14.06.2024.

Информация об авторах

Новикова Ольга Владимировна – магистр ф.-м.н.
Тюменков Геннадий Юрьевич – к.ф.-м.н., доцент

УДК 539.3

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_27
EDN: APZZLI**ИЗГИБ ЛОКАЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ КРУГЛОЙ ПЯТИСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ****В.С. Салицкий***Белорусский государственный университет транспорта, Гомель***BENDING A CIRCULAR FIVE-LAYER PLATE BY LOCAL LOAD****V.S. Salicki***Belarusian State University of Transport, Gomel*

Аннотация. Исследован изгиб упругой круглой пятислойной пластины под действием распределенной по кругу локальной поперечной нагрузки. В симметричной по толщине пластине три тонких несущих слоя (два внешних и один внутренний), деформирование которых подчиняется гипотезам Кирхгофа. В двух относительно толстых заполнителях нормаль остается прямолинейной и не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол. Система дифференциальных уравнений равновесия пластины получена вариационным методом Лагранжа. Аналитическое решение задачи выписано в функциях Бесселя в конечном виде. Приведены численные результаты исследования прогибов и относительных сдвигов в зависимости от радиуса силового круга, толщины внутреннего несущего слоя, материалов внешних несущих слоев.

Ключевые слова: *пятислойная пластина, круговая нагрузка, аналитическое решение, численные исследования.*

Для цитирования: *Салицкий, В.С. Изгиб локальной нагрузкой круглой пятислойной пластины / В.С. Салицкий // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 27–31. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_27. – EDN: APZZLI*

Abstract. The bending of an elastic circular five-layer plate under the action of a local transverse load distributed in a circle was studied. The plate, symmetrical in thickness, has three thin load-bearing layers (two external and one internal), the deformation of which obeys Kirchhoff's hypotheses. In two relatively thick fillers, the normal remains straight and does not change its length, but rotates through some additional angle. The system of differential equations for the equilibrium of the plate was obtained by the Lagrange variational method. The analytical solution of the problem is written in Bessel functions in final form. Numerical results of the study of deflections and relative shifts are presented depending on the radius of the force circle, the thickness of the internal load-bearing layer, and the materials of the external load-bearing layers.

Keywords: *five-layer plate, circular load, analytical solution, numerical investigations.*

For citation: *Salicki, V.S. Bending a circular five-layer plate by local load / V.S. Salicki // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 3 (60). – P. 27–31. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_27 (in Russian). – EDN: APZZLI*

Введение

В связи с возросшими современными требованиями промышленности к прочности и материалоемкости конструкций резко усилился спрос на использование композитных, в том числе пятислойных, элементов. Поэтому постановка и решение соответствующих краевых задач является актуальной проблемой.

Монографии [1]–[5] посвящены разработке механико-математических моделей и методов расчета слоистых элементов конструкций. Указаны особенности квазистатического и динамического деформирования, приведены примеры решения конкретных задач.

Динамическое воздействие на пятислойные пластины и трехслойные цилиндрические оболочки рассмотрено в работах [6]–[9]. Приняты гипотезы ломаной линии, исследованы свободные и вынужденные колебания.

Квазистатическому деформированию трехслойных круговых пластин посвящены статьи

[10]–[14]. Для несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа, для заполнителя – Тимошенко. Получены аналитические решения краевых задач и проведена их численная апробация.

Изгиб трехслойных пластин на основании Пастернака исследован в [15], [16]. В публикациях [17], [18] приводятся результаты о неосесимметричном нагружении трехслойных пластин в своей плоскости.

Система дифференциальных уравнений равновесия круглой пятислойной симметричной по толщине пластины получены в [19]. Решение краевой задачи об изгибе пятислойной круглой пластины под действием равномерно распределенной по внешней поверхности верхнего слоя нагрузкой приведено в [20], [21]. Здесь предлагается постановка и решение краевой задачи для пятислойной пластины, нагруженной локальной осесимметричной круговой нагрузкой.

1 Постановка и решение краевой задачи

Пусть на симметричную по толщине пяти-слойную круглую пластину действует локальная нагрузка, равномерно распределённая по кругу относительного радиуса $r \leq b$ (рисунок 1.1). Ее можно представить в следующем аналитическом виде:

$$q(r) = q_0 H_0(b-r), \quad (1.1)$$

где $H_0(x)$ – функция Хэвисайда; q_0 – интенсивность распределенной нагрузки.

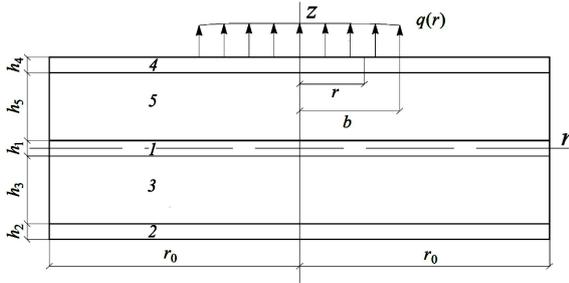


Рисунок 1.1 – Расчётная схема симметричной по толщине пятислойной круговой пластины

Для тонких жестких внешних и внутреннего несущих слоев толщиной $h_2 = h_4, h_1$ (см. рисунок 1.1) принимаются гипотезы Кирхгофа о прямолинейности, несжимаемости и перпендикулярности нормали к деформированной срединной поверхности. Эти слои принимают на себя основную силовую нагрузку. В легких более толстых заполнителях нормаль к срединной поверхности после приложения нагрузки остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$ – гипотеза Тимошенко. Задача решается в цилиндрической системе координат r, ϕ, z , связанной со срединной плоскостью заполнителя. Все геометрические параметры пластины отнесены к радиусу r_0 . В принятых условиях все перемещения в пластине выражаются через прогиб пластины $w(r)$, который во всех слоях одинаков, и сдвиг в заполнителях $\psi(r)$.

Система уравнений равновесия, полученная в [19], в случае нагрузки (1.1) принимает вид

$$L_2(a_4\psi - a_5w_{,r}) - 2cG_3\psi = 0, \\ L_3(a_5\psi - a_6w_{,r}) = -q_0H_0(b-r), \quad (1.2)$$

где запятой в индексе обозначена производная по следующей координате; коэффициенты

$$a_4 = \left[2K_2^+ h_2 h_3^2 + 2K_3^+ \frac{h_3^3}{3} \right], \\ a_5 = \left[K_2^+ h_2 h_3 (h_1 + 2h_3 + h_2) + 2K_3^+ h_3 \left(\frac{h_1 h_3}{4} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right], \\ a_6 = \left[2K_2^+ h_2 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} + h_1 h_3 + \frac{h_2^2}{3} + h_2 h_3 + h_3^2 \right) + \right.$$

$$\left. + K_1^+ \frac{h_1^3}{12} + 2K_3^+ h_3 \left(\frac{h_1^2}{4} + \frac{h_1 h_3}{2} + \frac{h_3^2}{3} \right) \right];$$

L_2, L_3 – дифференциальные операторы

$$L_2(g) \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}, \\ L_3(g) \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Краевую задачу о деформировании круглой пятислойной пластины локальной нагрузкой замкнем, добавив к системе уравнений (1.2) граничные условия заделки контура $r = r_0$:

$$\psi = w = w_{,r} = 0. \quad (1.3)$$

После элементарных преобразований в системе (1.2) можно выделить отдельное уравнение для сдвига в заполнителе $\psi(r)$ и переписать ее в виде

$$L_2(\psi) - \beta^2\psi = f, \\ L_3(a_5\psi - a_6w_{,r}) = -q_0H_0(b-r), \quad (1.4)$$

где коэффициенты и функция, входящие в первое уравнение

$$\beta^2 = \frac{2a_6h_3G_3}{a_4a_6 - a_5^2}, \quad \gamma_1 = \frac{a_5}{a_4a_6 - a_5^2}, \\ f(r) = \frac{a_5}{r(a_4a_6 - a_5^2)} \left(\int q_0H_0(b-r)rdr - C_1 \right) = \\ = \frac{\gamma_1}{r} \left(\frac{q_0(r^2 - b^2)}{2} H_0(b-r) - C_1 \right).$$

Решение системы дифференциальных уравнений (1.4) будет

$$\psi = C_2 I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r) + \psi_r, \\ w = \frac{a_5}{a_6} \int \psi dr + \frac{q_0}{a_6} \int L_3^{-1}(H_0(b-r)) dr - \\ - \frac{C_1}{4a_6} r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5 r^2}{4a_6} + C_6 \ln r + C_4 \quad (1.5)$$

$I_1(\beta r), K_1(\beta r)$ – функции Бесселя и Макдональда первого порядка; интегралы вычисляются в пределах от 0 до r ; ψ_r – частное решение первого из уравнений (1.4), которое получено методом вариации постоянных

$$\psi_r = \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(b-r) \times \quad (1.6)$$

$$\times \left[\frac{b^2}{r} - r + 2b(K_1(\beta b)I_1(\beta r) - I_1(\beta b)K_1(\beta r)) \right] + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2 r}.$$

Интегралы, входящие во второе уравнение системы (1.5), будут

$$\int L_3^{-1}(q) dr = \frac{q_0}{16} \left(\frac{r^4 - 5b^4}{4} - b^4 \ln \left(\frac{r}{b} \right) - \right. \\ \left. - 2b^2 r^2 \ln \left(\frac{r}{b} \right) + b^2 r^2 \right) H_0(b-r), \\ \int \psi dr = \frac{C_2 I_0(\beta r)}{\beta} - \frac{C_3 K_0(\beta r)}{\beta} + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2} \ln(r) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(b-r) \left[\frac{b^2 - r^2}{2} + b^2 \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \right. \\
 & \left. + \frac{2b}{\beta} (K_1(\beta b)I_0(\beta r) + I_1(\beta b)K_0(\beta r)) - \frac{2}{\beta^2} \right]. \quad (1.7)
 \end{aligned}$$

Константы интегрирования C_1, \dots, C_6 – при условии заделки по контуру пятислойной пластины (1.3) будут

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -\frac{q_0 b^2}{2}, \quad C_2 = \frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2 I_1(\beta)} \left(\frac{b^2}{2} - bK_1(\beta)I_1(\beta b) \right), \\
 C_3 &= \frac{q_0 \gamma_1 b I_1(\beta b)}{\beta^2}, \\
 C_4 &= -\frac{a_5 \gamma_1 q_0}{a_6 \beta^4 I_1(\beta)} \left(\frac{b^2 I_0(\beta) \beta}{2} - bI_1(\beta b) \right) + \frac{q_0 b^4}{32a_6} + \frac{q_0 b^2}{16a_6}, \\
 C_5 &= \frac{q_0 b^2}{8} (2 - b^2), \quad C_6 = \frac{q_0 b^4}{16a_6}.
 \end{aligned}$$

Решение (1.5) с учетом частного решения (1.6) и интегралов (1.7) для пластины, заделанной по контуру, принимает вид:

$$\begin{aligned}
 \psi &= \frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2} \left\{ \frac{I_1(\beta r)}{I_1(\beta)} \left(\frac{b^2}{2} - bK_1(\beta)I_1(\beta b) \right) + \right. \\
 & \left. + bI_1(\beta b)K_1(\beta r) + \frac{H_0(b-r)}{2} \times \right. \\
 & \left. \times \left[\frac{b^2}{r} - r + 2b(K_1(\beta b)I_1(\beta r) - I_1(\beta b)K_1(\beta r)) - \frac{b^2}{2r} \right] \right\}, \\
 w &= \frac{a_5}{a_6} \frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2 I_1(\beta)} \left\{ \frac{I_0(\beta r)}{\beta I_1(\beta)} \left(\frac{b^2}{2} - bK_1(\beta)I_1(\beta b) \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{b^2 I_0(\beta) \beta}{2\beta^2 I_1(\beta)} + \frac{bI_1(\beta b)}{\beta^2 I_1(\beta)} - \frac{bI_1(\beta b)K_0(\beta r)}{\beta} - \right. \\
 & \left. - \frac{b^2}{2} \ln(r) - \frac{H_0(b-r)}{2} \left[\frac{b^2 - r^2}{2} + b^2 \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{2b}{\beta} (K_1(\beta b)I_0(\beta r) + I_1(\beta b)K_0(\beta r)) - \frac{2}{\beta^2} \right] \right\} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{q_0}{8a_6} \left\{ \left(\frac{r^4 - 5b^4}{8} - \frac{b^4}{2} \ln\left(\frac{r}{b}\right) - b^2 r^2 \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{b^2 r^2}{2} \right) \times \right. \\
 & \quad \times H_0(b-r) + b^2 r^2 (\ln r - 1) + \\
 & \quad \left. + \frac{b^2}{4} r^2 (2 - b^2) + \frac{b^4}{2} \ln r + \frac{b^4}{4a_6} + \frac{b^2}{2a_6} \right\}. \quad (1.8)
 \end{aligned}$$

2 Численные результаты

Численно исследованы, приведенные в (1.8), прогиб и сдвиг в пятислойной круглой пластине радиуса $r_0 = 1$. За основную расчетную модель принята пластина со слоями из материалов Д16-Т – фторопласт – Д16-Т – фторопласт – Д16-Т. Толщины несущих слоев: $h_1 = h_2 = h_4 = 0,02$, заполнителей: $h_3 = h_5 = 0,1$. Величина нагрузки $q_0 = 10$ МПа. Упругие характеристики этих материалов приведены в [1].

Рисунок 2.1 *a, б* иллюстрирует изменение перемещений в базовой модели в зависимости от радиальной координаты при различных значениях радиуса b пятна круговой нагрузки q . При увеличении радиуса пятна перемещения увеличиваются нелинейно.

Зависимость максимальных прогиба и относительного сдвига от величины пятна приложенной распределённой нагрузки при различной толщине внутреннего несущего слоя представлена на рисунке 2.2 *a, б*. Уменьшение толщины внутреннего несущего слоя в 2 раза приводит к увеличению прогиба на 11,4 процента. Увеличение толщины внутреннего несущего слоя в 1,5 раза приводит к уменьшению прогиба на 15,2 процента.

Влияние механических характеристик материалов внешних несущих слоёв на величину максимальных перемещений в зависимости радиуса пятна нагрузки иллюстрирует рисунок 2.3 *a, б*. Замена материала наружных несущих слоёв на титановый сплав приводит к уменьшению прогиба на 5 процентов. Применение более жестких несущих слоёв из кордиерита уменьшает максимальные перемещения по сравнению с базовым вариантом на 37,5 процентов.

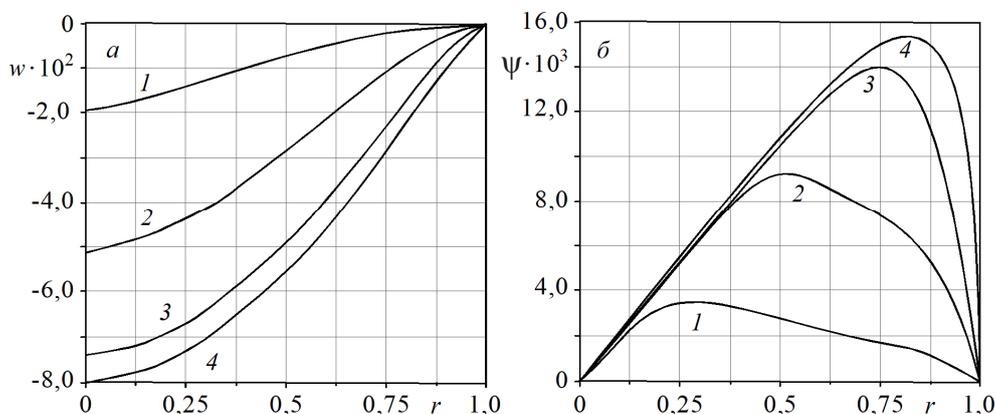


Рисунок 2.1 – Перемещения в пластине при различных радиусах b пятна нагрузки
 $1 - b = 0,25; 2 - b = 0,5; 3 - b = 0,75; 4 - b = 1$

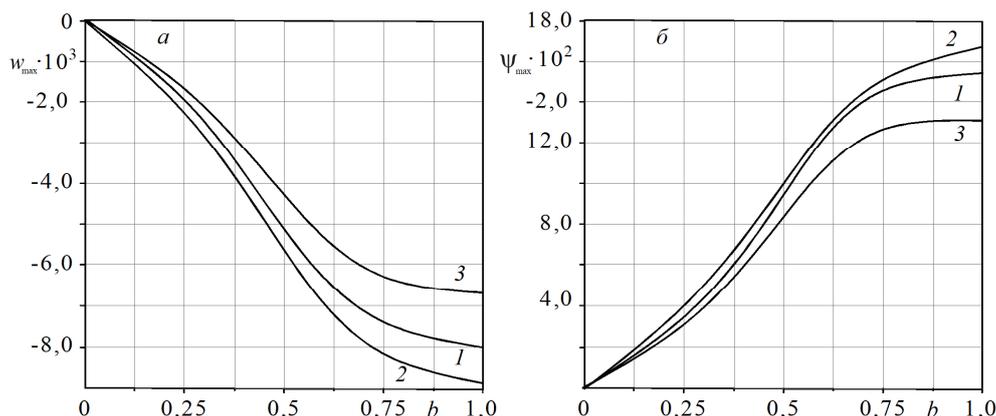


Рисунок 2.2 – Максимальные перемещения в зависимости от радиуса пятна нагрузки
 $1 - h_1 = 0,02$; $2 - h_1 = 0,01$; $3 - h_1 = 0,03$

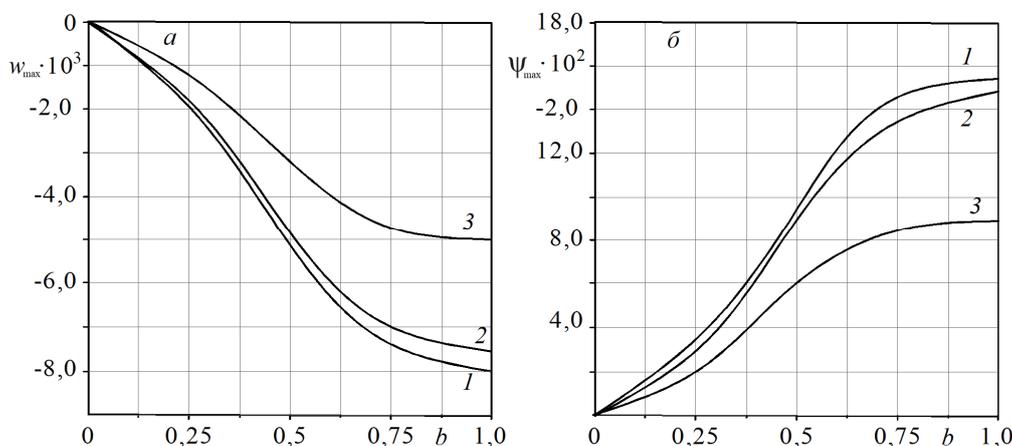


Рисунок 2.3 – Зависимость перемещений пятислойной пластины от радиуса пятна нагрузки при различных материалах внешних несущих слоёв (а, б)
 $1 - \text{Д16-Т} - \text{Фторопласт-4} - \text{Д16-Т} - \text{Фторопласт-4} - \text{Д16-Т}$;
 $2 - \text{Титан} - \text{Фторопласт-4} - \text{Д16-Т} - \text{Фторопласт-4} - \text{Титан}$;
 $3 - \text{Кордиерит} - \text{Фторопласт-4} - \text{Д16-Т} - \text{Фторопласт-4} - \text{Кордиерит}$

Заключение

Предложенная в работе постановка краевой задачи и полученное решение описывает напряженно-деформированное состояние круглой пятислойной пластины при локальной круговой поверхностной нагрузке. Это позволяет продолжить построение подобных моделей при других видах локальных нагрузок. Численные результаты подтвердили существенное влияние локальности поверхностной нагрузки и вида материалов несущих слоев на величину максимальных прогиба и относительного сдвига в пластине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков, А.Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
2. Aghalovyan, L. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells / L. Aghalovyan. – Singapore – London: World Scientific Publishing, 2015. – 376 p.

3. Журавков, М.А. Математические модели механики твердого тела // М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. – Минск: БГУ, 2021 – 535 с.
4. Zhuravkov, M.A. Mechanics of Solid Deformable Body / M.A. Zhuravkov, Lyu Yongtao, E.I. Starovoitov. – Singapore: Springer, 2022. – 317 p.
5. Абдусаттаров, А. Деформирование и повреждаемость упругопластических элементов конструкций при циклических нагружениях / А. Абдусаттаров, Э.И. Старовойтов, Н.Б. Рузиева. – Ташкент: «IDEAL PRESS», 2023 – 381 с.
6. Лачугина, Е.А. Поперечные колебания пятислойной упругой круговой пластины с жесткими заполнителями / Е.А. Лачугина // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – Вып. 15. – С. 212–219.
7. Лачугина, Е.А. Частоты собственных колебаний пятислойной круговой пластины / Е.А. Лачугина // Теоретическая и прикладная механика. – Минск: БНТУ, 2023. – Вып. 38. – С. 227–233.

8. Gorshkov, A.G. Harmonic vibrations of a viscoelastoplastic sandwich cylindrical shell / A.G. Gorshkov, E.I. Starovoitov, A.V. Yarovaia // International Applied Mechanics. – 2001. – Т. 37, № 9. – С. 1196–1203. DOI: 10.1023/A:1013290600951.
9. Старовойтов, Э.И. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т. 21, № 2. – С. 162–169.
10. Деформирование ступенчатой композитной балки в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Ю.М. Плещачевский, Д.В. Леоненко, Д.В. Тарлаковский // Инженерно-физический журнал. – 2015. – Т. 88, № 4. – С. 987–993.
11. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – № 1 (22). – С. 31–35.
12. Захарчук, Ю.В. Трехслойная круговая упругопластическая пластина со сжимаемым наполнителем / Ю.В. Захарчук // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 72–79.
13. Starovoitov, E.I. Elastic circular sandwich plate with compressible filler under axially symmetrical thermal force load / E.I. Starovoitov, Y.V. Zakharchuk, E.L. Kuznetsova // Journal of the Balkan Tribological Association. – 2021. – № 27 (2). – P. 175–188.
14. Старовойтов, Э.И. Изгиб трехслойной пластины равномерно распределенной нагрузкой в нейтронном потоке / Э.И. Старовойтов // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 3 (48). – С. 56–62. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2021_3_48_56
15. Старовойтов, Э.И. Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака / Э.И. Старовойтов, А.Г. Козел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 392–406.
16. Козел, А.Г. Математическая модель деформирования круговой трёхслойной пластины на основании Пастернака / А.Г. Козел // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 42–46.
17. Нестерович, А.В. Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой однослойной пластины / А.В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 54–61.
18. Нестерович, А.В. Напряженное состояние круговой трехслойной пластины при осесимметричном нагружении в своей плоскости / А.В. Нестерович // Механика. Исследования и инновации. – 2019. – № 12 (12). – С. 152–157.
19. Салицкий, В.С. Уравнения равновесия круговой пятислойной пластины в усилиях / В.С. Салицкий // Материалы XXVII Междунар. симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. – 2021. – Т. 1. – С. 199–201.
20. Салицкий, В.С. Изгиб защемлённой по контуру круговой пятислойной пластины / В.С. Салицкий // Механика. Исследования и инновации. – Гомель, 2022. – Вып. 15 – С. 209–213.
21. Салицкий, В.С. Изгиб круговой пятислойной пластины / В.С. Салицкий // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 2023. – Вып. 38. – С. 234–239.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-25».

Поступила в редакцию 08.04.2024.

Информация об авторах

Салицкий Владислав Сергеевич – аспирант

**ПРОЕКТИРОВАНИЕ ФАЗОВОГО МАНИПУЛЯТОРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
МЕТАМАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ ПАРНЫХ ПЛАНАРНЫХ СПИРАЛЕЙ****А.Л. Самофалов¹, И.А. Фаняев¹, П.В. Сомов¹,
И.В. Семченко², А.А. Ковалев¹, Хуэй Чу³**¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины²ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника», Минск³Нанкинский университет науки и технологии**DESIGNING A PHASE MANIPULATOR USING METAMATERIALS
BASED ON PAIRED PLANAR SPIRALS****A.L. Samofalov¹, I.A. Faniayeu¹, P.V. Somov¹,
I.V. Semchenko², A.A. Kovalev¹, Hui Chu³**¹Francisk Skorina Gomel State University²SSPA "Optics, Optoelectronics and Laser Technology", Minsk³Nanjing University of Science and Technology

Аннотация. Проведено моделирование метаматериала, состоящего из парных планарных спиралей, для фазовой манипуляции электромагнитных волн в СВЧ диапазоне. Получены геометрические параметры метаматериала и значения фазы на резонаторах, оптимальные для управления диаграммой направленности. Изменение фазы волны, излучаемой планарным спиральным элементом, предложено реализовать путем изменения емкости варикапа при изменении напряжения на нем.

Ключевые слова: метаматериал, фазоманипулятор, парная планарная спираль, СВЧ диапазон.

Для цитирования: Проектирование фазового манипулятора с использованием метаматериалов на основе парных планарных спиралей / А.Л. Самофалов, И.А. Фаняев, П.В. Сомов, И.В. Семченко, А.А. Ковалев, Хуэй Чу // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 32–37. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_32. – EDN: AZMISC

Abstract. A metamaterial consisting of paired planar spirals has been simulated for phase manipulation of electromagnetic waves in the microwave range. The optimal geometric parameters of the metamaterial and the phase values at the resonators were obtained to control the radiation pattern. It was proposed to realize the phase change of the wave emitted by a planar spiral element by changing the capacitance of the varicap when the voltage on it changes.

Keywords: metamaterial, phase manipulator, paired planar spiral, microwave range.

For citation: Designing a phase manipulator using metamaterials based on paired planar spirals / A.L. Samofalov, I.A. Faniayeu, P.V. Somov, I.V. Semchenko, A.A. Kovalev, Hui Chu // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 3 (60). – P. 32–37. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_32 (in Russian). – EDN: AZMISC

Введение

В последние годы большое внимание уделяется метаповерхностям и метаматериалам [1], в том числе настраиваемым, режимами работы которых можно динамически управлять. Одним из способов динамического управления является цифровое кодирование [2]–[5]. Данный способ получил быстрое развитие и был предложен для цифрового управления электромагнитными волнами путем проектирования двух различных кодирующих элементов с противоположными фазами отраженных волн (например, 0° и 180°) в качестве цифровых битов «0» и «1» (двоичный регистр) [2]. Метаповерхности цифрового кодирования значительно упрощают процедуры проектирования и оптимизации функциональных режимов. Располагая кодирующие элементы на двумерной плоскости с заранее разработанными

последовательностями, полученные метаповерхности можно использовать для управления электромагнитными волнами простым и эффективным способом. При этом диапазон применения метаповерхностей кодирования не ограничивается микроволновыми частотами, он также может быть расширен до терагерцового диапазона [5].

В частности, в работе [6] путем включения активных компонентов в каждую элементарную ячейку метаповерхности была успешно достигнута электронная настройка фундаментальных свойств электромагнитной волны, например, регулируемого поглощения. Настройка фазы отраженной волны в пределах 360° описана в работе [7], отдельная регулировка амплитуды и фазы предложены в статье [8], манипуляции с поляризацией описаны в работе [9].

В статье [10] показаны динамические многофункциональные свойства метаповерхности с цифровым управлением с относительно большим размером апертуры (>20 длин волн). Предлагаемая метаповерхность строится путем соединения 5 идентичных субметаповерхностей, каждая из которых состоит из 320 активных элементарных ячеек. Путем интеграции одного PIN-диода в каждую элементарную ячейку реализуется реконфигурируемая фаза для волны одной поляризации. Используя это анизотропное свойство, в первую очередь можно реализовать реконфигурируемое преобразование поляризации. Различные функции, включая гибкое рассеяние, планарную фокусировку, управление лучом, а также формирование луча, также продемонстрированы при программировании матрицы кодирования с помощью генетического алгоритма и метода обратного преобразования Фурье. Более того, переключение между этими функциями в реальном времени достигается за счет использования программируемой пользователем матрицы. По сравнению с другими работами, в которых обычно внимание сфокусировано только на одном режиме управления, каждой элементарной ячейкой в предлагаемой метаповерхности можно управлять независимо, и, таким образом, можно добиться более универсальных функций.

В работе [11] многофункциональная реконфигурируемая передающая матрица была реализована путем периодической организации реконструкции частотных характеристик элементарной ячейки с использованием 1-битных атрибутов переключателя ВКЛ/ВЫКЛ PIN-диода. В данной работе показано, что реконфигурируемая передающая решетка, основанная на активных элементах, управляемых электромагнитным полем, может быть реализована двумя способами. Первый заключается в переключении поляризации волны с вертикальной на вертикальную или с вертикальной на горизонтальную путем управления направлением электрического тока

посредством создания периодической конфигурации элементарной ячейки с частотно-селективной характеристикой активного элемента [12]. Возможно также создание диаграммы направленности луча с высоким коэффициентом усиления и управление лучом с помощью изменения длины пути индуцированного тока с использованием переменного конденсатора [13], [14]. Второй метод состоит в концентрации падающей электромагнитной волны на участок, расположенный в периодической структуре, и делает возможной функцию управления лучом и преобразование поляризации за счет управления фазой и направлением электрического тока [15].

В данной работе предлагается метаматериал, состоящий из парных планарных спиралей, предназначенный для фазовой манипуляции электромагнитных волн в СВЧ диапазоне с функцией управления главным лепестком диаграммы направленности за счет использования в каждом излучающем элементе активного компонента – варикапа. Разработанный метаматериал способен динамически изменять направление основного луча без механического перемещения метаматериала и может быть использован в качестве «смарт-рефлектора».

1 Теория и моделирование

Предложена конструкция фазоманипулятора, состоящего из парных планарных спиральных элементов (рисунок 1.1). Каждый элемент можно характеризовать как пару планарных спиралей, при этом одна спираль в паре имеет правое направление закручивания, а вторая спираль – левое направление закручивания. Металлические полоски, из которых состоит планарная спираль, расположены на разных поверхностях печатной платы и соединены металлизированным отверстием в плате. Кроме пары планарных спиралей, каждый элемент метаповерхности содержит также варикап.

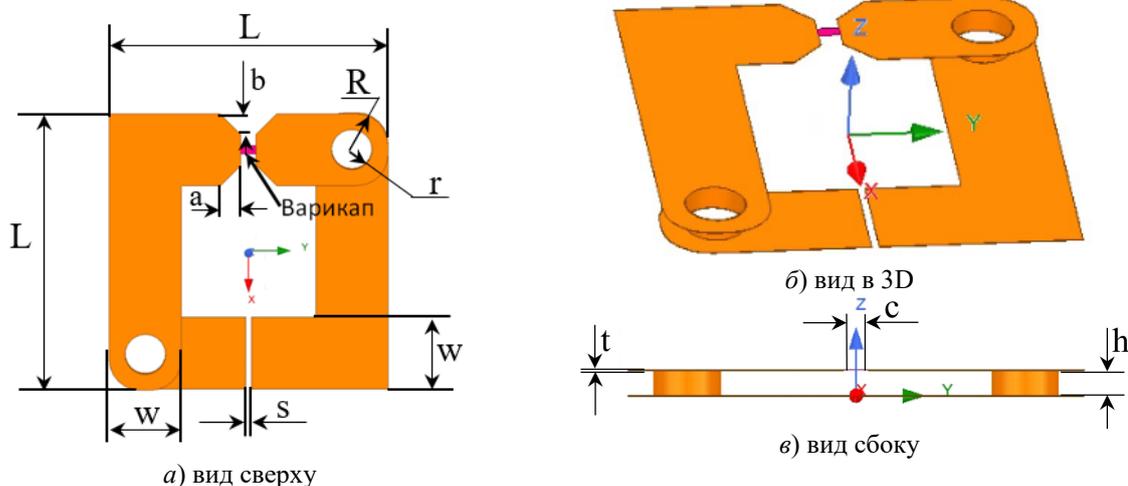


Рисунок 1.1 – Парная планарная спираль как элемент фазоманипулятора

Численные значения параметров парной планарной спирали (рисунок 1.1) приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Численные значения параметров парной планарной спирали

Параметр	L	w	s	a	b	c	r	R	t	h
Значение в мм	27	7	0,5	2	2	1,5	2	3,5	0,035	1,5

Возбуждение колебаний в таком элементе осуществляется за счет энергии падающей электромагнитной волны. Изменение фазы волны, излучаемой парным планарным спиральным элементом, осуществляется путем изменения емкости варикапа при изменении напряжения на нем. Как известно, варикап – это полупроводниковый диод, используемый в качестве переменной емкости с достаточно высокой добротностью.

В варикапе используется свойство $p-n$ перехода изменять барьерную ёмкость под действием внешнего обратного напряжения, при этом зависимость ёмкости варикапа от запирающего напряжения (вольтфарадная характеристика) носит нелинейный характер.

В работе проведено численное моделирование параметров одиночного элемента фазоманипулятора и найдена частотная зависимость фазы и относительной амплитуды электромагнитной волны, излучаемой таким резонатором при различных значениях электроемкости варикапа в пределах 0,2–2,2 пФ с шагом 0,01 пФ (рисунки 1.2 и 1.3).

На рисунках 1.2 и 1.3 численные значения фазы и относительной амплитуды излучаемой волны при различной емкости варикапа указаны для частоты 3,14 ГГц. Как видно из графиков на рисунке 1.2, именно вблизи частоты 3,14 ГГц имеет место наиболее широкий диапазон фазовых изменений для исследуемой структуры, чем и обусловлен выбор данной частоты.

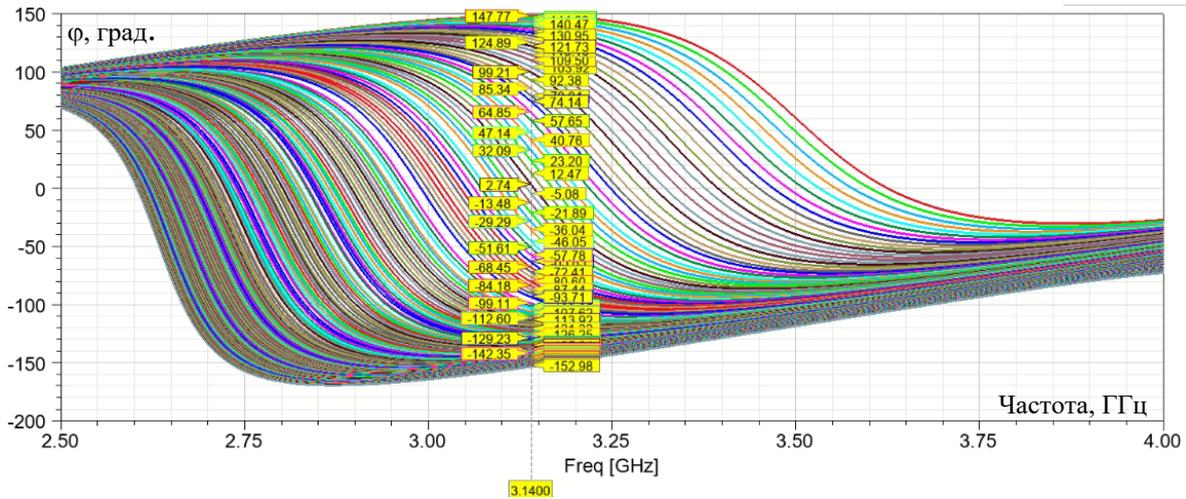


Рисунок 1.2 – Частотная зависимость фазы электромагнитной волны, излучаемой резонатором, при различных значениях электроемкости варикапа

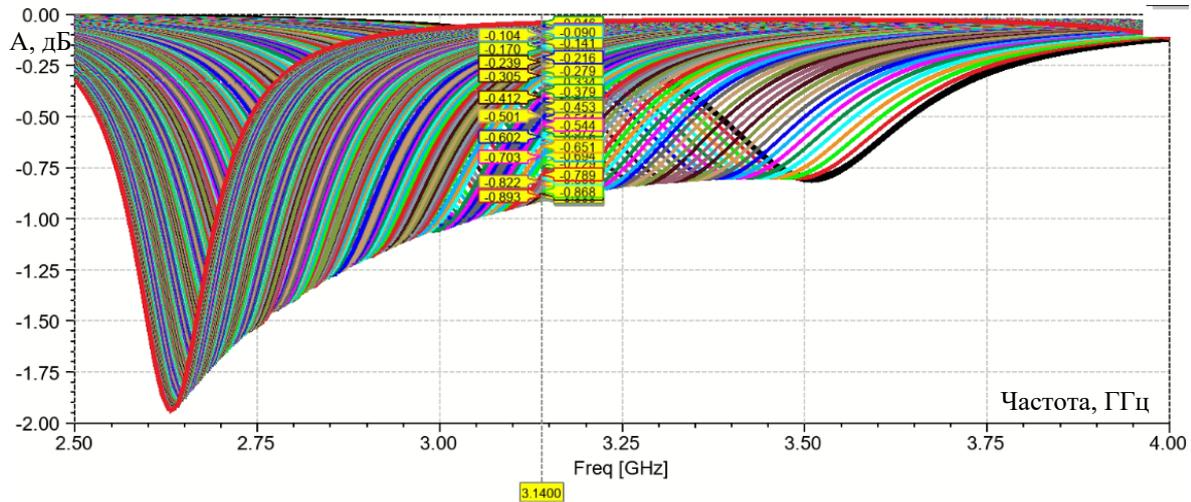


Рисунок 1.3 – Частотная зависимость относительной амплитуды электромагнитной волны, излучаемой резонатором, при различных значениях электроемкости варикапа

На рисунке 1.3 приведены резонансные кривые, анализ которых показывает, что относительные потери сигнала на частоте 3,14 ГГц незначительны и составляют менее 1 дБ, на частоте 2,63 ГГц потери сигнала составляют около 2 дБ, а в области 4 ГГц потери сигнала отсутствуют.

В данной работе исследуется случай нормального падения электромагнитной волны СВЧ диапазона на метаповерхность, в этом случае все элементы метаповерхности возбуждаются в одинаковой фазе. Для формирования волнового фронта волны, излучаемой метаповерхностью под определенным углом θ , необходимо на соседних элементах установить разность хода волны или смещение по фазе. На рисунке 1.4 показан принцип формирования такого наклонного излучения.

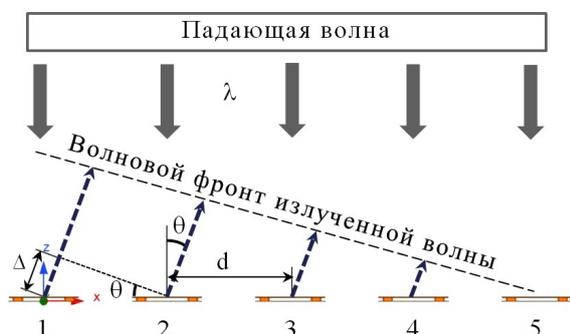


Рисунок 1.4 – Принцип формирования метаповерхностью наклонного излучения

Для формирования волны, излученной под углом θ относительно нормали метаматериала, необходимо задать разность хода волн Δ между соседними резонаторами:

$$\Delta = d \sin \theta,$$

где d – расстояние между резонаторами.

Разность фаз волн для соседних резонаторов можно выразить через эту величину как

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta, \text{ тогда}$$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta, \quad (1.1)$$

отсюда

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\lambda \Delta\phi}{2\pi d}\right) = \arcsin\left(\frac{c \Delta\phi}{2\pi v d}\right), \quad (1.2)$$

где c – скорость света в вакууме, v – частота.

Теоретические значения угла θ для нескольких значений разности фаз между элементами $\Delta\phi$ (при $d = 30$ мм и $v = 3,14$ ГГц) приведены в таблице 1.2.

Чтобы задать необходимую разность фаз излучаемых волн для соседних элементов, необходимо из графиков на рисунке 1.2 выбрать кривую и определить соответствующее этой кривой значение емкости варикапа. Затем это значение емкости задаем первому элементу (рисунок 1.4)

или первому ряду метаматериала (рисунок 2.1). Далее выбираем другую кривую, значение фазы волны для которой на частоте 3,14 ГГц отличается от фазы для предыдущей кривой на $\Delta\phi$. Значение емкости, соответствующее второй кривой, задаем второму элементу или ряду метаматериала и т. д. Таким образом, мы задаем одинаковую разность фаз излучаемых волн для соседних элементов (рядов), что обеспечивает формирование наклонного излучения под заданным углом θ .

Таблица 1.2 – Значение угла θ для различных значений разности фаз $\Delta\phi$ (при $d = 30$ мм и $v = 3,14$ ГГц)

$\Delta\phi$, град	30	45	60	70
θ , град	15,4	23,5	32	38,3

2 Результаты и их обсуждение

Для проверки приведенных выше рассуждений смоделирован метаматериал фазоманипулятора, состоящий из 25 парных планарных спиральных резонаторов (рисунок 2.1). Метаматериал смоделирован на основе двустороннего стеклотекстолита FR4 с толщиной ядра 1,5 мм и медными слоями толщиной 35 мкм. В качестве экрана за метаматериалом вплотную расположен односторонний стеклотекстолит FR4 с такой же толщиной ядра и медного слоя.

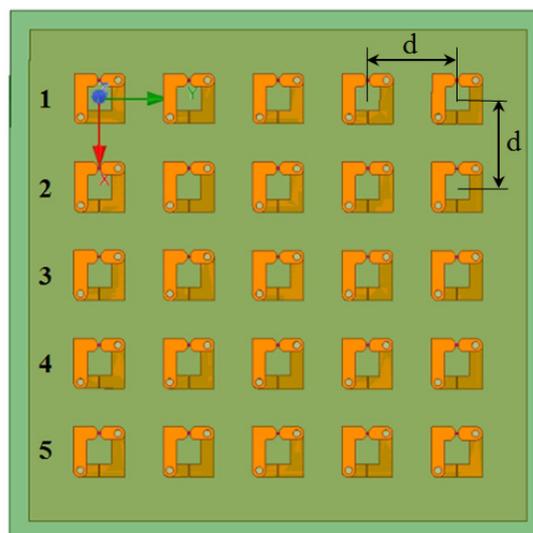


Рисунок 2.1 – Метаматериал, состоящий из 25 парных планарных спиральных резонаторов

Задавая значение электроемкости варикапов C в первом ряду (поскольку в каждом ряду C одинаково), а затем в следующем ряду – в соответствии с требуемой разностью фаз (как это описано выше), можно добиться управления наклоном главного лепестка диаграммы направленности метаматериала в плоскости XOZ .

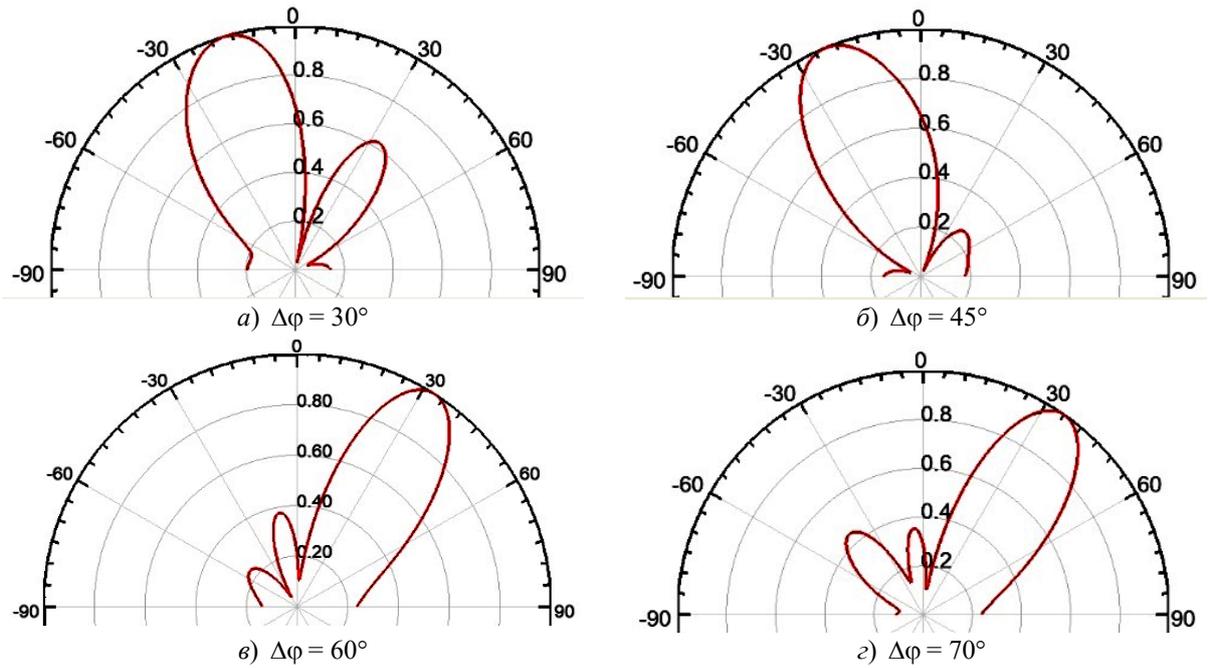


Рисунок 2.2 – Примеры формирования угла наклона главного лепестка диаграммы направленности при различных значениях разности фаз волн для соседних рядов метаматериала

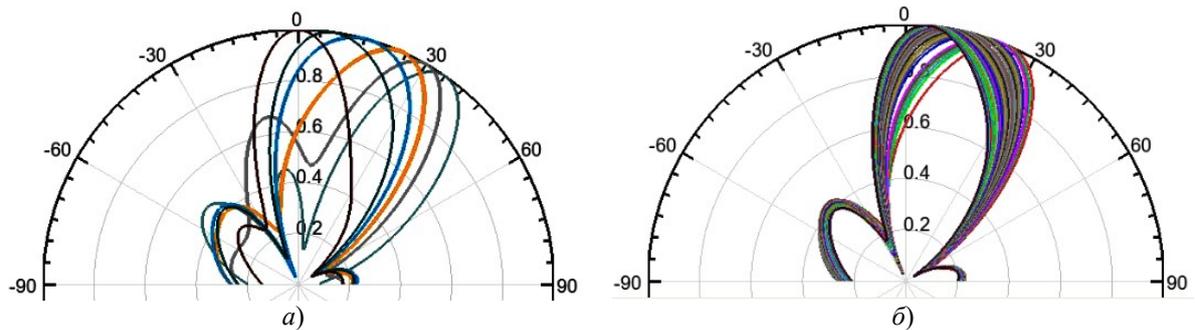


Рисунок 2.3 – Примеры управления наклоном главного лепестка диаграммы направленности в полярных координатах (при $d = 31$ мм)

На рисунке 2.2 приведены примеры формирования угла наклона главного лепестка диаграммы направленности при различных значениях разности фаз волн для соседних элементов (при $d = 30$ мм и $\nu = 3,14$ ГГц) (в соответствии с таблицей 1.2).

На рисунке 2.2 продемонстрирована возможность управления главным лепестком диаграммы направленности как влево (рисунки 2.2 а, 2.2 б), так и вправо (рисунки 2.2 в, 2.2 з). Направление поворота лепестка зависит от порядка задания емкости варикапов по рядам (по возрастанию или по убыванию емкости). Отметим, что значение угла наклона главного лепестка на рисунке б не всегда в точности соответствует теоретическому значению (таблица 1.2), что связано в первую очередь с невозможностью из графиков на рисунке 1.2 выделить кривые, разность фаз волн для которых в точности соответствует выбранному значению. В этом случае выбирается кривая со значением фазы волны, наиболее близким к необходимому.

Исследован и другой способ управления диаграммой направленности: задав значение емкости варикапов C в первом ряду (в каждом ряду она одинакова, емкость в следующем ряду задается путем умножения номера ряда на C) и изменяя емкость варикапа с шагом $0,01$ пФ, можно управлять поворотом главного лепестка диаграммы направленности с шагом 5° (рисунке 2.3 а) при определенных значениях d . Для плавного качания луча с малым углом отклонения емкость изменялась с шагом $0,001$ пФ (рисунке 2.3 б).

При определенных значениях расстояния между резонаторами и емкости варикапа C можно получить двух- и трехлучевую диаграмму направленности (рисунке 2.4).

Результаты моделирования (рисунки 2.2–2.4) демонстрируют широкие возможности по управлению диаграммой направленности путем изменения емкости варикапов при изменении напряжения на них. На практике подача напряжения на соответствующие варикапы и управление ими

могут быть реализованы с использованием микросхем ПЛИС (программируемые логические интегральные схемы) в связке с микросхемами цифро-аналоговых преобразователей или цифровыми потенциометрами, что вместе с микропрограммой в ПЛИС осуществляет изменение емкости варикапа. Такая реализация может обеспечить плавное и непрерывное качание лепестка диаграммы направленности.

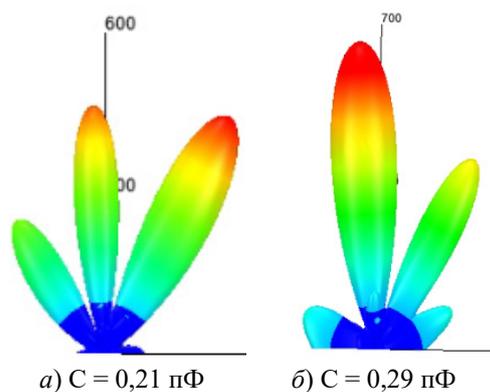


Рисунок 2.4 – Примеры реализации многолучевой диаграммы направленности в трехмерном виде при $d = 47,7$ мм, что соответствует половине длины волны падающего излучения на частоте 3,14 ГГц

Заключение

Проведено исследование возможности фазовой манипуляции электромагнитных волн при их взаимодействии с метаповерхностью на основе парных планарных спиралей. Предложено устройство для управления фазой волны путем изменения емкости варикапа при изменении напряжения на нем.

Разработанный метаматериал, за счет фазовых манипуляций с падающей волной, позволяет в режиме реального времени быстро изменять направление основного отраженного луча без механического перемещения метаматериала. Фазовый манипулятор за счет динамического управления варикапами создаёт возможность формирования различных диаграмм направленности в зависимости от текущих задач. Он может быть полезен для использования в таких областях техники, как радиолокация, спутниковая связь, беспроводные сети и др.

Планируется изготовление экспериментальных образцов метаматериалов, состоящих из парных планарных спиральных фазоманипулирующих элементов, для микроволнового диапазона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Семченко, И.В. Электромагнитные волны в метаматериалах и спиральных структурах: монография / И.В. Семченко, С.А. Хахомов. – Минск: Беларуская навука, 2019. – 279 с.

2. Coding metamaterials, digital metamaterials and programmable metamaterials / T.J. Cui [et al.] // Light Sci. Appl. – 2014. – Vol. 3. – P. 218.

3. Broadband diffusion of terahertz waves by multi-bit coding metasurfaces / L.H. Gao [et al.] // Light Sci. Appl. – 2015. – Vol. 4. – P. 324.

4. Frequency-dependent dual-functional coding metasurfaces at terahertz frequencies / S. Liu [et al.] // Adv. Opt. Mater. – 2016. – Vol. 4. – P. 1965–1973.

5. An ultra-thin broadband active frequency selective surface absorber for ultrahigh-frequency applications / W. Xu [et al.] // J. Appl. Phys. – 2015. – Vol. 118. – P. 1849031–1849038.

6. Zhu, B. Active impedance metasurface with full 360 deg reflection phase tuning / B. Zhu, J. Zhao, Y. Feng // Sci. Rep. – 2013. – Vol. 3. – P. 3059.

7. Dynamic control of electromagnetic wave propagation with the equivalent principle inspired tunable metasurface / B. Zhu [et al.] // Sci. Rep. – 2014. – Vol. 4. – P. 4971.

8. Dielectric metasurfaces for complete control of phase and polarization with subwavelength spatial resolution and high transmission / A. Arbabi [et al.] // Nature Nanotechnology. – 2015. – Vol. 10. – P. 937–943.

9. A programmable metasurface with dynamic polarization, scattering and focusing control / Y. Huanhuan [et al.] // Scientific Reports. – 2016. – Vol. 6. – P. 35692.

10. Lee, I.G. Design of multi-functional transmitarray with active linear polarization conversion and beam steering capabilities / I.G. Lee, J.Y. Kim, I.P. Hong // Appl. Sci. – 2022. – Vol. 12. – P. 4319.

11. Li, Y. A wideband multifunctional multilayer switchable linear polarization metasurface / Y. Li, Q. Cao, Y. Wang // IEEE Antennas Wirel. Propag. Lett. – 2018. – Vol. 17. – P. 1314–1318.

12. Reconfigurable metasurface for multifunctional control of electromagnetic waves / C. Huang [et al.] // Adv. Opt. Mater. – 2017. – Vol. 5. – P. 1700485.

13. Dual-band transmitarray with low scan loss for satcom applications / T.K. Pham [et al.] // IEEE Trans. Antennas Propag. – 2021. – Vol. 69. – P. 1775–1780.

14. Circularly-polarized reconfigurable transmitarray in Ka-band with beam scanning and polarization switching capabilities / L. Di Palma [et al.] // IEEE Trans. Antennas Propag. – 2017. – Vol. 65. – P. 529–540.

15. Using reconfigurable transmitarray to achieve beam-steering and polarization manipulation applications / C. Huang [et al.] // IEEE Trans. Antennas Propag. – 2015. – Vol. 63. – P. 4801–4810.

Работа выполнена в рамках реализации проектов БРФФИ Ф22КИТГ-021 и Ф23КИ-027.

Поступила в редакцию 17.05.2024.

Информация об авторах

Самофалов Андрей Леонидович – к.ф.-м.н., доцент

Фаняев Иван Александрович – к.т.н., доцент

Сомов Павел Владиславович – ассистент

Семченко Игорь Валентинович – д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. НАН Беларуси

Ковалёв Андрей Александрович – старший преподаватель

Хуэй Чу – доктор инженерии, профессор

МЕТАПОВЕРХНОСТЬ НА ОСНОВЕ ОДНОВИТКОВЫХ ПЛАНАРНЫХ СПИРАЛЕЙ СО СВОЙСТВОМ НЕ ОТРАЖАЮЩЕГО ПОГЛОТИТЕЛЯ В СВЧ ДИАПАЗОНЕ

И.А. Фаняев¹, А.Л. Самофалов¹, И.В. Семченко²,
С.А. Хахомов¹, А.Ю. Кравченко^{1,3}, Мэнмэн Ли⁴

¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

²ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника», Минск

³Белорусский научно-исследовательский и проектный институт нефти, Гомель

⁴Нанкинский университет науки и технологии

METASURFACE BASED ON SINGLE-TURN PLANAR SPIRALS WITH NON-REFLECTIVE ABSORBER PROPERTY IN THE MICROWAVE RANGE

I.A. Faniayeu¹, A.L. Samofalov¹, I.V. Semchenko²,
S.A. Khakhomov¹, A.Y. Kravchenko^{1,3}, Mengmeng Li⁴

¹Francisk Skorina Gomel State University

²SSPA "Optics, Optoelectronics and Laser Technology", Minsk

³Belarusian Scientific Research and Design Institute of Oil, Gomel

⁴Nanjing University of Science and Technology

Аннотация. Проведен теоретический расчет, моделирование и экспериментальное исследование метаповерхности на основе одновитковых планарных спиралей для получения максимального поглощения при отсутствии отражения электромагнитной волны в СВЧ диапазоне. Расчет структурных параметров поглощающего метаматериала проведен для двух стеклотекстолитов – Arlon AD255C и Taconic TLY. Результаты исследований подтвердили возможность использования предложенной структуры в качестве не отражающего поглотителя электромагнитных волн.

Ключевые слова: метаповерхность, поглощение, планарная спираль, СВЧ диапазон.

Для цитирования: Метаповерхность на основе одновитковых планарных спиралей со свойством не отражающего поглотителя в СВЧ диапазоне / И.А. Фаняев, А.Л. Самофалов, И.В. Семченко, С.А. Хахомов, А.Ю. Кравченко, Мэнмэн Ли // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 38–43. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_38. – EDN: DDYWPW

Abstract. The theoretical calculation, modelling and experimental study of the metasurface based on single-turn planar spirals for obtaining maximum absorption in the absence of electromagnetic wave reflection in the microwave range have been carried out. The calculation of the structural parameters of the absorbing metamaterial was carried out for two glass-textolites – Arlon AD255C and Taconic TLY. The results of the studies confirmed the possibility of using the proposed structure as a non-reflective absorber of electromagnetic waves.

Keywords: metasurface, absorption, planar spiral, microwave range.

For citation: Metasurface based on single-turn planar spirals with non-reflective absorber property in the microwave range / I.A. Faniayeu, A.L. Samofalov, I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, A.Y. Kravchenko, Mengmeng Li // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 3 (60). – P. 38–43. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_38 (in Russian). – EDN: DDYWPW

Введение

Эффективным, или совершенным поглотителем можно считать метаповерхность, способную полностью поглощать падающие на нее СВЧ волны, при этом коэффициенты отражения и прохождения такого устройства на резонансной частоте должны равняться нулю.

Для получения полного поглощения в метаматериале или на метаповерхности необходимо получить эквивалентный электромагнитный

отклик ячейки такой искусственной структуры. При этом коэффициенты отражения и прохождения вблизи резонансной частоты должны равняться нулю, т. е. метаповерхность должна не пропускать и не отражать электромагнитные волны в рассматриваемом диапазоне частот. Достичь желаемых свойств позволяет баланс электрического дипольного и магнитного моментов отдельного элемента метаповерхности. В качестве элемента метаповерхности мы

рассматриваем одновитковую планарную спираль. Под действием падающей плоской электромагнитной волны в такой одновитковой планарной спирали индуцируются дипольные моменты, которые можно выразить через компоненты тензоров электрических, магнитных, электромагнитных и магнитоэлектрических поляризуемостей. Равные по абсолютной величине амплитуды этих поляризуемостей означают сбалансированный отклик от такого микрорезонатора. Данная методика подробно описана в работах [1]–[2]. В статье [3] в качестве элемента метаповерхности предложена планарная спираль, состоящая из двух витков. В статьях [4]–[6] исследованы метаповерхности на основе двухвитковых планарных спиралей, обладающие свойствами поглотителя и преобразователя поляризации СВЧ волн, не испытывающих отражение. В отличие от двухвитковой планарной спирали, рассматриваемая нами в данной статье одновитковая спираль содержит меньшее число элементов (полосок и отверстий на печатной плате), что приводит к упрощению и удешевлению изготовления метаповерхности в рамках технологий печатных плат.

Необходимо отметить, что электромагнитные свойства метаматериалов и метаповерхностей, состоящих из объемных гладких спиральных элементов, интенсивно исследовались на протяжении последних десятилетий [7]–[14].

1 Теоретические сведения

Рассмотрим уравнения, описывающие отражённые и прошедшие поля в случае эффективного поглотителя падающих электромагнитных волн на резонансной частоте. Расположение и количество планарных спиралей для реализации метаповерхностью функции поглощения может быть найдено, если предварительно определена требуемая ориентация электрического и магнитного дипольных моментов в элементарной ячейке. Для достижения полного поглощения падающей волны компоненты отраженных и прошедших полей должны удовлетворять условиям:

$$E_r^x = 0, E_t^x = 0, E_r^y = 0, E_t^y = 0. \quad (1.1)$$

Не нарушая общности подхода, рассмотрим линейно поляризованную падающую волну, вектор E которой колеблется, например, вдоль оси ox , при этом поля падающей волны имеют вид

$$\vec{E}_{inc} = E_0 \vec{x}_0, \vec{H}_{inc} = -\frac{E_0}{\eta_0} \vec{y}_0, \quad (1.2)$$

где E_0 – амплитуда волны, η_0 – импеданс свободного пространства. Тогда компоненты отраженного $E_r^{x,y}$ и прошедшего $E_t^{x,y}$ полей могут быть найдены из уравнений:

$$E_r^x = -\frac{j\omega\eta_0}{2S} \left(\hat{p}_x - \frac{1}{c} \hat{m}_y \right), \quad (1.3)$$

$$E_t^x = E_0 - \frac{j\omega\eta_0}{2S} \left(\hat{p}_x + \frac{1}{c} \hat{m}_y \right), \quad (1.4)$$

$$E_r^y = -\frac{j\omega\eta_0}{2S} \left(\hat{p}_y + \frac{1}{c} \hat{m}_x \right), \quad (1.5)$$

$$E_t^y = -\frac{j\omega\eta_0}{2S} \left(\hat{p}_y - \frac{1}{c} \hat{m}_x \right). \quad (1.6)$$

Здесь \hat{p}_x и \hat{p}_y , \hat{m}_x и \hat{m}_y – компоненты электрического и магнитного дипольных моментов элементарной ячейки метаповерхности, S – площадь этой ячейки, c – скорость света в вакууме, ω – угловая частота волны, j – мнимая единица.

Подставив условие (1.1) в (1.3)–(1.6), можно получить конечные условия для отсутствия пропускания и отражения волны с любой поляризацией, основанные на электрических и магнитных дипольных моментах элементарной ячейки метаповерхности, которые записываются следующим образом:

$$0 = -\frac{j\omega\eta_0}{2S} \left(\hat{p}_x - \frac{1}{c} \hat{m}_y \right), \quad (1.7)$$

$$0 = E_0 - \frac{j\omega\eta_0}{2S} \left(\hat{p}_x + \frac{1}{c} \hat{m}_y \right), \quad (1.8)$$

$$0 = -\frac{j\omega\eta_0}{2S} \left(\hat{p}_y + \frac{1}{c} \hat{m}_x \right), \quad (1.9)$$

$$0 = -\frac{j\omega\eta_0}{2S} \left(\hat{p}_y - \frac{1}{c} \hat{m}_x \right). \quad (1.10)$$

Отсюда следует, что

$$\hat{p}_x = \frac{1}{c} \hat{m}_y, \quad (1.11)$$

$$\frac{2SE_0}{j\omega\eta_0} = \hat{p}_x + \frac{1}{c} \hat{m}_y, \quad (1.12)$$

$$\hat{p}_y = -\frac{1}{c} \hat{m}_x, \quad (1.13)$$

$$\hat{p}_y = \frac{1}{c} \hat{m}_x. \quad (1.14)$$

Подставляя уравнение (1.11) в (1.12) и (1.13) в (1.14), получаем конечные условия

$$\hat{p}_x = \frac{1}{c} \hat{m}_y = -j \frac{SE_0}{\omega\eta_0}, \quad (1.15)$$

$$\hat{p}_y = \frac{1}{c} \hat{m}_x = 0. \quad (1.16)$$

Из этих условий следует, что x -составляющая электрического момента элементарной ячейки метаповерхности должна быть равна y -составляющей магнитного момента, а остальные компоненты должны быть равны нулю. Полученные условия (1.15) и (1.16) показывают необходимую ориентацию и значения составляющих электрического и магнитного дипольных моментов отдельных планарных спиралей. Данное условие может быть выполнено при использовании в каждой ячейке двух ортогональных

левозакрученных планарных спиралей и двух ортогональных правозакрученных планарных спиралей со сбалансированными моментами.

2 Оптимизация параметров метаповерхности на основе одновитковых планарных спиралей с функцией не отражающего поглотителя в СВЧ диапазоне

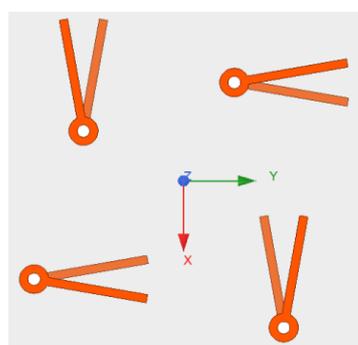
Путем численного моделирования с использованием метода конечных элементов проведена оптимизация параметров метаповерхности на основе одновитковых планарных спиралей с функцией не отражающего поглотителя для получения максимальной эффективности на резонансной частоте в СВЧ диапазоне.

Численный расчет структурных параметров одновитковой планарной спирали и всего не отражающего поглотителя проведен с учетом технических возможностей технологий изготовления печатных плат. В качестве диэлектрика рассмотрены два материала с относительно невысокой стоимостью и соответствующими нашим расчетам относительной диэлектрической проницаемостью и тангенсом угла диэлектрических потерь: Arlon AD255C и Taconic TLY.

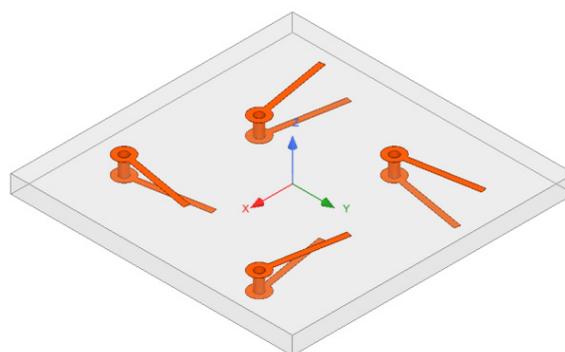
На рисунке 2.1 показан вариант расположения планарных одновитковых спиралей в элементарной ячейке не отражающего поглотителя в соответствии с приведенными теоретическими расчетами.

Изменяя параметры элементарной ячейки, добились равенства как действительных, так и мнимых частей компонент электрического и магнитного дипольного моментов на резонансной частоте, то есть сбалансированности моментов исследуемой ячейки.

Таким образом, в процессе оптимизации получены численные параметры метаматериала, состоящего из одновитковых планарных спиралей на подложках Arlon AD255C и Taconic TLY, обладающего функцией не отражающего поглотителя на резонансной частоте 4 ГГц.



а) вид сверху



б) вид в 3D

Рисунок 2.1 – Вариант расположения планарных одновитковых спиралей в элементарной ячейке не отражающего поглотителя

Численные значения оптимизированных параметров приведены в таблице 2.1. Здесь β – угол между металлическими полосками на двух сторонах печатной платы, a – длина полоски, измеряемая от центра отверстия в плате, r – радиус отверстия с металлизированными стенками, w – ширина металлической полоски, l – расстояние между планарными спиральями в ячейке.

Таблица 2.1 – Значения параметров не отражающего поглотителя в СВЧ диапазоне на различных подложках

Параметр	β , град	a , мм	r , мм	w , мм	l , мм
Расположение планарных одновитковых спиралей на Arlon AD255C	20	13,8	0,75	1	12
Расположение планарных одновитковых спиралей на Taconic TLY	18,3	14,55	0,75	1	12,2

На рисунке 2.2 приведены графики частотной зависимости коэффициентов со-поляризованного отражения (R_{co}) и прохождения (T_{co}), коэффициентов кросс-поляризованного отражения (R_{cr}) и прохождения (T_{cr}), поглощения (A) для рассматриваемых метаматериалов.

Анализ графиков на рисунке 2.2 показывает, что для диэлектрика Arlon AD255C коэффициент поглощения (A) принимает значения, близкие к 0,7 на резонансной частоте, равной 4 ГГц, а для Taconic TLY – близкие к 0,63, при этом в первом случае коэффициенты со-поляризованного (R_{co}) и кросс-поляризованного отражения (R_{cr}) не превышают 6%, во втором случае коэффициент со-поляризованного отражения (R_{co}) равен нулю, а кросс-поляризованного отражения (R_{cr}) – 13%. Таким образом, суммарный коэффициент отражения для двух поляризаций отражённой волны для обоих материалов не превышает 13%.

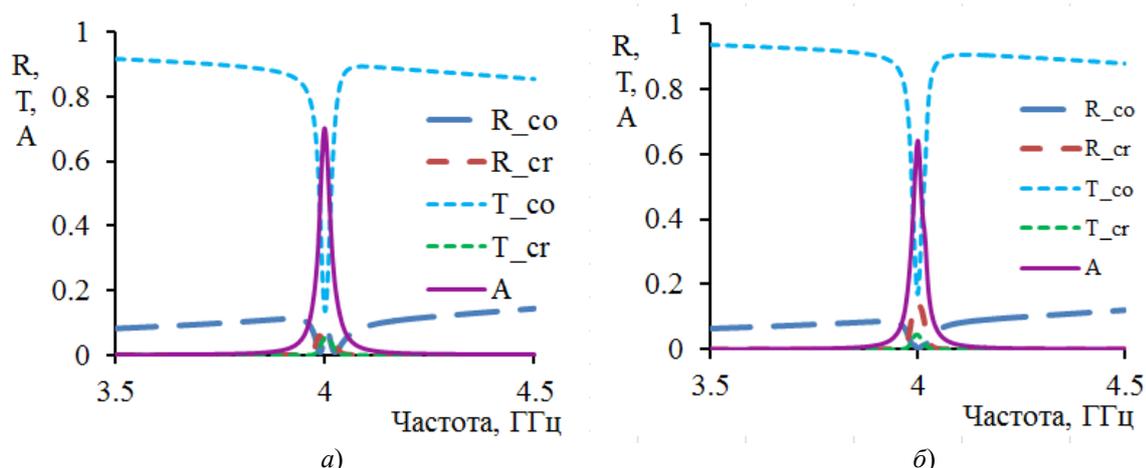


Рисунок 2.2 – Графики частотной зависимости коэффициентов со-поляризованного отражения (R_{co}) и прохождения (T_{co}), коэффициентов кросс-поляризованного отражения (R_{cr}) и прохождения (T_{cr}), коэффициента поглощения (A) не отражающего поглотителя в случае медных полосок на подложке Arlon AD255C (а) и Taconic TLY (б)

Полные значения коэффициентов отражения (R), прохождения (T) и поглощения (A) выражены следующим образом:

$$R = R_{co} + R_{cr}, T = T_{co} + T_{cr},$$

$$A = 1 - R_{co} - R_{cr} - T_{co} - T_{cr}.$$

В результате проведенной оптимизации было установлено, что для получения максимальной эффективности поглощения необходимо располагать спирали на метаповерхности под прямым углом относительно друг друга, а также иметь четко обозначенные одинаковые координаты расположения спиралей относительно центра элементарной ячейки размером 50 мм. Добиться более высоких показателей поглощения не позволяют конструктивные особенности. В

частности, одновитковая планарная спираль имеет не параллельные электрический и магнитный дипольные моменты, из-за чего коэффициенты со-поляризованного и кросс-поляризованного отражения и аналогичные коэффициенты прохождения имеют различные значения.

3 Экспериментальное исследование

Для проведения экспериментальных исследований с использованием технологии РСВ на подложке Arlon AD255C изготовлен экспериментальный образец метаповерхности на основе одновитковых планарных спиралей с функцией не отражающего поглотителя (рисунок 3.1).

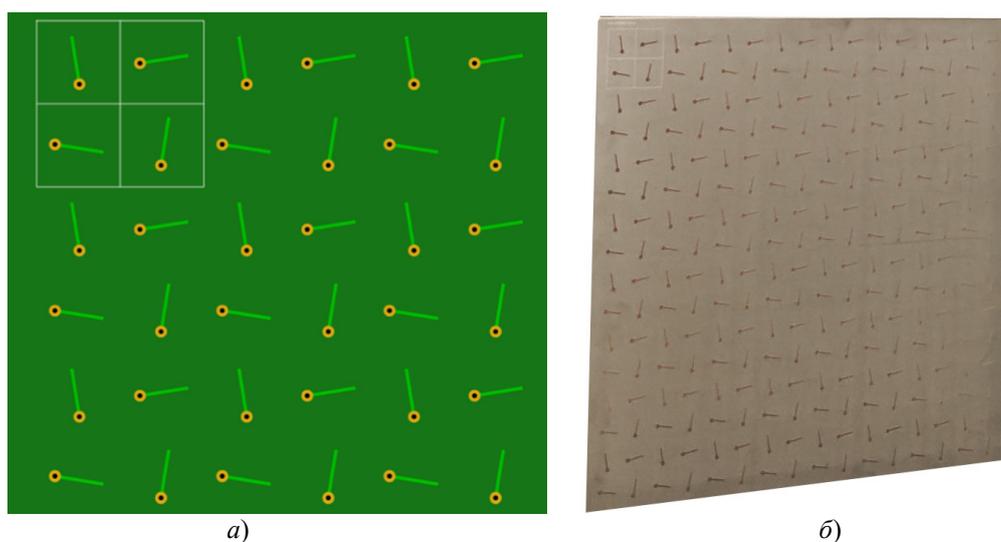


Рисунок 3.1 – Чертеж платы в формате РСВ (а) и фото экспериментального образца (б) метаповерхности на основе одновитковых планарных спиралей с функцией не отражающего поглотителя на подложке Arlon AD255C

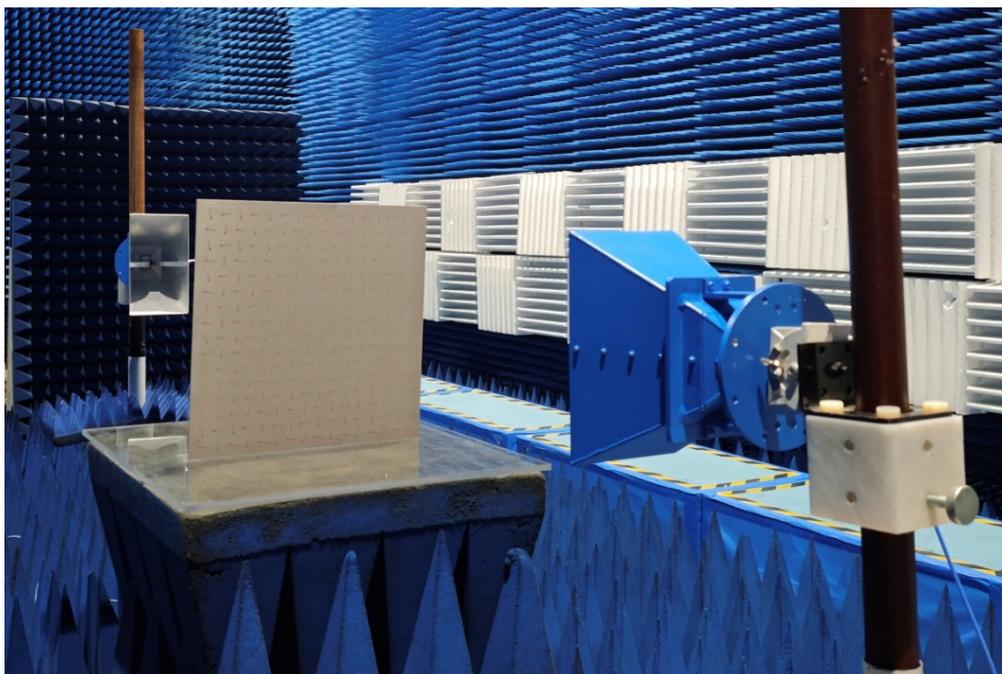


Рисунок 3.2 – Экспериментальная установка для исследования спроектированной и созданной метаповерхности на отражение и прохождение

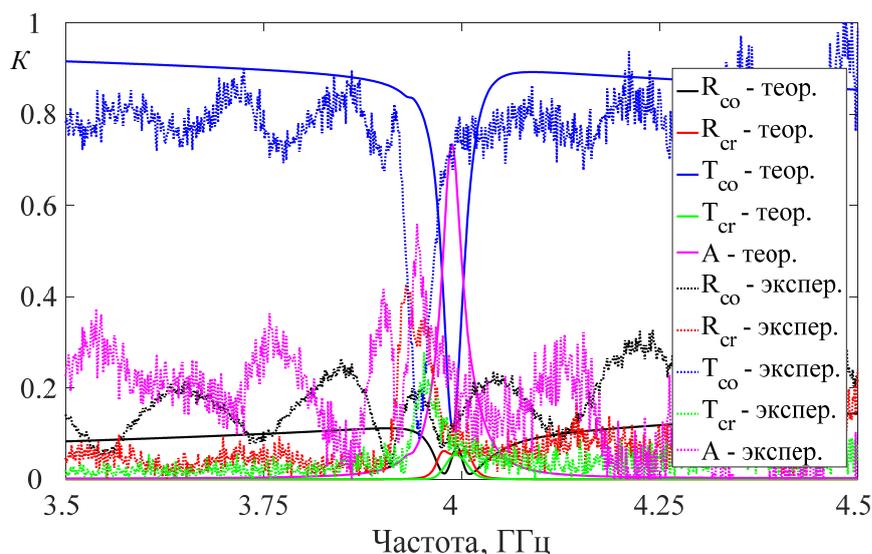


Рисунок 3.3 – Результаты экспериментальных исследований и их сравнение с результатами численного моделирования не отражающего поглотителя на подложке Arlon AD255C

С изготовленным образцом проведены экспериментальные исследования в безэховой камере научной лаборатории электромагнитных метаматериалов Нанкинского университета науки и технологии (Нанкин, КНР) (рисунок 3.2).

Результаты экспериментальных исследований и их сравнение с результатами численного моделирования не отражающего поглотителя на подложке Arlon AD255C приведены на рисунке 3.3.

Сравнение результатов моделирования и эксперимента показывает высокую степень

соответствия полученных результатов. При этом экспериментально полученные значения резонансной частоты и максимума поглощения меньше теоретически рассчитанных значений, что обусловлено не точным соответствием значения диэлектрической проницаемости и тангенса угла потерь реального диэлектрика Arlon AD255C его усреднённым параметрам, заданным при моделировании, а также погрешностью при изготовлении экспериментального образца.

Заключение

Проведена оптимизация с использованием метода конечных элементов, одновитковых планарных спиралей и их расположения в ячейке метаповерхности для получения максимального поглощения при отсутствии отражения СВЧ волн. В отличие от ранее рассмотренной двухвитковой планарной спирали, предлагаемая в данной статье одновитковая спираль содержит меньшее число элементов (полосок и отверстий на печатной плате), что приводит к упрощению и удешевлению изготовления метаповерхности в рамках технологий печатных плат. Расчет структурных параметров поглощающей метаповерхности проведен с учетом технических возможностей технологий изготовления печатных плат. В качестве диэлектрической подложки платы в СВЧ диапазоне рассмотрены два материала – Arlon AD255C и Taconic TLY.

По результатам моделирования изготовлены экспериментальные образцы метаповерхностей на основе одновитковых планарных спиралей и проведены экспериментальные исследования. Результаты исследования подтверждают эффективность использования предложенной метаповерхности в качестве не отражающего поглотителя на резонансной частоте, равной 4 ГГц.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Generalized constitutive relations for meta materials based on the quasi-static Lorentz theory* / A. Ishimaru [et al.] // IEEE Trans. Antennas Propag. – 2003. – Vol. 51 – P. 2550–2557.
2. *Determining polarizability tensors for an arbitrary small electromagnetic scatterer* / V.S. Asadchy [et al.] // Photonics and Nanostructures – Fundamentals and Applications. – 2014. – Vol. 12, № 4. – P. 298–304.
3. *Planar broadband Huygens' metasurfaces for wave manipulations* / F.S. Cuesta [et. al.] // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2018. – Vol. 66 (12). – P. 7117–7127.
4. *Проектирование, изготовление и экспериментальное исследование метаматериалов на основе планарных спиралей для фильтрации поляризованного излучения в СВЧ диапазоне* / А.Ю. Кравченко [и др.] // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2021. – № 6 (129). – С. 140–146.
5. *Метаматериал на основе планарных спиралей как преобразователь поляризации электромагнитных волн* / И.В. Семченко [и др.] // Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук. – 2022. – Т. 58, № 1. – С. 110–119.
6. *Проектирование метаматериалов на основе планарных спиралей в СВЧ диапазоне* / И.В. Семченко, А.Ю. Кравченко, А.Л. Самофалов, И.А. Фаняев // Известия Гомельского

государственного университета имени Ф. Скорины. – 2020. – № 3 (120). – С. 154–160.

7. *Electromagnetic waves in artificial chiral structures with dielectric and magnetic properties* / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, S.A. Tretyakov, A.H. Sihvola // Electromagnetics. – 2001. – Vol. 21, №. 5. – P. 401–414.

8. *Semchenko, I.V. Artificial Uniaxial Bianisotropic Media at Oblique Incidence of Electromagnetic Waves* / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov // Electromagnetics. – 2002. – Vol. 22, № 1. – P. 71–84.

9. *Semchenko, I.V. Polarization Plane Rotation of Electromagnetic Waves by the Artificial Periodic Structure with One-Turn Helical Elements* / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, A.L. Samofalov // Electromagnetics. – 2006. – Vol. 26, № 3-4. – P. 219–233.

10. *Optimal Shape of Spiral: Equality of Dielectric, Magnetic and Chiral Properties* / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, A.L. Samofalov, S.A. Tretyakov // Proceedings of META'08, NATO Advanced Research Workshop, Metamaterials for Secure Information and Communication Technologies 7–10 May, 2008, Marrakesh. – Morocco, 2008. – P. 71–80

11. *Semchenko, I.V. Helices of optimal shape for nonreflecting covering* / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, A. L. Samofalov // The European Physical Journal. Applied Physics. – 2010. – Vol. 49, № 3. – P. 33002-p1 – 33002-p5.

12. *Поглотители электромагнитного излучения СВЧ-диапазона на основе полимерных композитов и киральных структур* / Цянь Сонгсонг, В.А. Банный, А.Л. Самофалов, И.В. Семченко, С.А. Хахомов // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 40–45.

13. *Investigation of electromagnetic properties of a high absorptive, weakly reflective metamaterial-substrate system with compensated chirality* / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, V.S. Asadchy, S.V. Golod, E.V. Naumova, V.Ya. Prinz, A.M. Goncharenko, G.V. Sinitsyn, A.V. Lyakhnovich, V.L. Malevich // Journal of Applied Physics. – 2017. – Vol. 121. – P. 015108-1 – 015108-8.

14. *Семченко, И.В. Электромагнитные волны в метаматериалах и спиральных структурах: монография* / И.В. Семченко, С.А. Хахомов. – Минск: Беларуская навука, 2019. – 279 с.

Работа выполнена в рамках проектов БРФФИ Ф22КИТГ-021 и Ф23КИ-027.

Поступила в редакцию 22.05.2024.

Информация об авторах

Фаняев Иван Александрович – к.т.н., доцент
Самофалов Андрей Леонидович – к.ф.-м.н., доцент
Семченко Игорь Валентинович – д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. НАН Беларуси
Хахомов Сергей Анатольевич – д.ф.-м.н., доцент
Кравченко Александр Юрьевич – инженер
Мэнмэн Ли – доктор инженерии, профессор

ИЗОТРОПНАЯ ДИФРАКЦИЯ БЕССЕЛЕВА СВЕТОВОГО ПУЧКА ПРИ АКУСТООПТИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

П.А. Хило, М.А. Ревенок

Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого

ISOTROPIC DIFFRACTION OF A BESSEL LIGHT BEAM DURING ACOUSTO-OPTIC INTERACTION

P.A. Khilo, M.A. Revenok

Sukhoi State Technical University of Gomel

Аннотация. Исследован процесс акустооптической (АО) дифракции бesselева пучка ТЕ-типа на бesselевом акустическом пучке в акустически поперечно изотропных кристаллах. Рассмотрена АО дифракция на вертикально поляризованной (SV-) акустической волне, позволяющая задействовать в АО- процессе диагональные компоненты тензора диэлектрической проницаемости. Установлено, что за счет указанных диагональных компонент может быть реализована изотропная дифракция бesselева светового пучка с высокой эффективностью. Предложенная схема АО дифракции представляет интерес для модуляции бesselевых световых пучков с возможностями динамической перестройки их параметров.

Ключевые слова: бesselевы световые пучки, бesselевы акустические пучки, акустооптическая дифракция.

Для цитирования: Хило, П.А. Изотропная дифракция бesselева светового пучка при акустооптическом взаимодействии / П.А. Хило, М.А. Ревенок // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 44–47. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_44. – EDN: MXGOED

Abstract. The process of acousto-optical (AO) diffraction of a TE-type Bessel beam and a Bessel acoustic beam in acoustically transversely isotropic crystals has been studied. AO diffraction by a vertically polarized (SV-) acoustic wave is considered, which makes it possible to use diagonal components of the dielectric constant tensor in the AO process. It has been established that due to the indicated diagonal components, isotropic diffraction of a Bessel light beam can be realized with a high interaction efficiency. The proposed AO diffraction scheme is of interest for modulating Bessel light beams with the possibility of dynamically adjusting their parameters.

Keywords: Bessel light beams, Bessel acoustic beams, acousto-optic diffraction.

For citation: Khilo, P.A. Isotropic diffraction of a Bessel light beam during acousto-optic interaction / P.A. Khilo, M.A. Revenok // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 3 (60). – P. 44–47. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_44 (in Russian). – EDN: MXGOED

Введение

Дифракция света на ультразвуке, или акустооптическое (АО) взаимодействие, представляет значительный интерес для исследований ввиду многочисленных применений данного явления в науке и технике. Акустооптические устройства позволяют эффективно управлять различными характеристиками светового поля, такими как интенсивность, частота, состояние поляризации, направление распространения и др. Использование в акустооптике бesselевых пучков (БП) представляет научный и практический интерес из-за наличия в таких пучках новых свойств, не характерных для пучков гауссова типа. К ним относятся в первую очередь бездифракционность и самовосстановление пространственного профиля за препятствиями. Указанные свойства обусловлены конической структурой пространственного спектра БП и в одинаковой степени присущи как бesselевым световым

пучкам (БСП), так и бesselевым акустическим пучкам (БАП).

Применение БАП позволит значительно расширить возможности акустооптики в преобразовании характеристик БСП, таких как порядок фазовой дислокации волнового фронта, угол конусности, угловая расходимость. Свойство бездифракционности бesselевых световых и акустооптических пучков перспективно для повышения точности функционирования ряда устройств акустооптики, в частности, спектроанализаторов, фильтров, а также модуляторов и дефлекторов. Свойство самореконструкции волнового фронта важно для применений БП в дефектоскопии.

1 Геометрия акустооптического взаимодействия бesselева акустического и бesselева светового пучков

На рисунке 1.1 показано взаимное положение волновых векторов световых и акустического

полей в рассматриваемой задаче. Для АО взаимодействия световых пучков в одноосных кристаллах оптимальная геометрия, соответствующая цилиндрической симметрии пучков, реализуется при их распространении вдоль оптической оси. В этом случае отсутствуют искажения взаимодействующих пучков, вызванные анизотропией. Что касается бesselевых акустических пучков (БАП), то для уменьшения эффектов анизотропии наиболее простым является случай распространения в акустически поперечно изотропных средах.

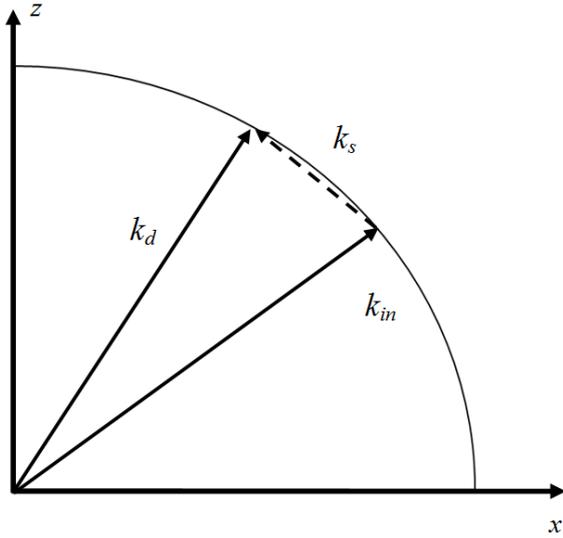


Рисунок 1.1 – Векторная диаграмма АО дифракции бesselева светового пучка на акустическом бesselевом пучке

В работе будет рассматриваться $o \rightarrow o$ тип дифракции. В этом случае падающий бesselев пучок является ТЕ- поляризованным (или o - пучком). Парциальные волновые векторы \vec{k}_{in} – падающего пучка, \vec{k}_d – дифрагированного БСП и волновой вектор \vec{k}_s – акустического БП показаны на рисунке 1.1. Световые падающий и дифрагированный БП и акустический БП распространяются в положительном направлении оси z .

При наличии векторного синхронизма парциальные волновые векторы падающего и дифрагированного БСП и соответствующий вектор БАП образуют замкнутые треугольники. Отсюда следуют уравнения векторного синхронизма для БП, аналогичные известным уравнениям для плоских волн

$$\vec{k}_o + \vec{k}_s = \vec{k}_{d,o}. \quad (1.1)$$

Из уравнения (1.1), в зависимости от решаемой задачи, можно определить параметры одного из полей по заданным параметрам двух остальных. К примеру, при заданных углах падения γ_o и дифракции γ_{od} световых пучков, частота f_s и угол конусности БАП, необходимые для

реализации синхронной брегговской дифракции, находятся из (1.1) и равны

$$f_s = \frac{v(\gamma_s)k_s}{2\pi}, \quad k_s = \sqrt{2k_o^2 - 2k_o^2 \cos(\gamma_{od} - \gamma_o)},$$

$$\text{tg}(\gamma_s) = \frac{\sin(\gamma_{od}) - \sin(\gamma_o)}{\cos(\gamma_{od}) - \cos(\gamma_o)}.$$

Здесь $v(\gamma_s)$ – фазовая скорость SV-поляризованного БАП. Эта скорость рассчитывается из уравнения [1]

$$2\rho v^2 = c_{44} + c_{11} \sin^2 \gamma_s + c_{33} \cos^2 \gamma_s - \left[((c_{11} - c_{44}) \sin^2 \gamma_s + (c_{44} - c_{33}) \cos^2 \gamma_s)^2 + (c_{13} + c_{44})^2 \sin^2 2\gamma_s \right]^{1/2},$$

где c_{ik} – компоненты тензора упругой жесткости и ρ – плотность кристалла.

Так для кристалла ZnO, который будет использоваться далее в качестве примера, компоненты тензора упругой жесткости и плотность равны $c_{44} = 4,25 \cdot 10^{10}$ Па, $c_{11} = 20,97 \cdot 10^{10}$ Па, $c_{33} = 21,09 \cdot 10^{10}$ Па, $c_{13} = 10,51 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho = 5,67 \cdot 10^3$ кг/м³.

2 Тензор АО дифракции бesselевых светового и акустического пучков

Для SV-поляризованного БАП порядка n в поперечно изотропном кристалле компоненты вектора смещения \vec{U} представим в виде (см. [5]–[8] а также, [2]–[4])

$$\vec{U} = u_0 \left[J_n^-(q_s, \rho) \vec{e}_\rho + iJ_n^+(q_s, \rho) \vec{e}_\phi + 2ic_z J_n(q_s, \rho) \vec{e}_z \right] \times \exp i(k_{sz}z + in\phi - \Omega t),$$

где

$$J_n^\pm(q_s, \rho) = J_{n-1}(q_s, \rho) \pm J_{n+1}(q_s, \rho), \quad q_s = k_s \sin(\gamma_s),$$

$$c_z = \frac{-(c_{13} + c_{44}) q_s^2}{c_{44} q_s^2 + c_{33} k_{sz}^2 - \rho \Omega^2} \cdot \frac{k_{sz}}{q_s}.$$

Здесь q_s и $k_{sz} = \sqrt{k_s^2 - q_s^2}$ – радиальная и продольная компоненты волнового вектора БАП,

γ_s – угол конуса БАП; $u_0 = \sqrt{\frac{P}{\rho v^3}} \frac{1}{k_{sz} \sqrt{W_s}}$; P –

мощность акустической волны; ρ – плотность кристалла; $v = 2\pi f/k_s$ – фазовая скорость;

$\Omega = 2\pi f$, f – частота акустической волны,

$$W_s = 2\pi \int_0^{R_b} (J_n^-(q_s, \rho) + J_n^+(q_s, \rho) + 2c_z^2 J_n^2(q_s, \rho)) \rho d\rho;$$

R_b – радиус бesselева пучка.

Тензор $\Delta\hat{\epsilon}$, описывающий процесс АО дифракции, представим в виде

$$\Delta\hat{\epsilon} = \Delta\hat{\epsilon}_0 \exp(ik_{sz}z + in\phi - i\omega_s t). \quad (2.1)$$

Для кристаллов гексагональных классов симметрии ненулевые компоненты тензора $\Delta\hat{\epsilon}_0$ равны

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{0,\phi z} &= \Delta\varepsilon_{0,z\phi} = \frac{1}{4} \varepsilon_o \varepsilon_e p_{44} u_0 J_n^+(q_s \rho), \\ \Delta\varepsilon_{0,\rho z} &= \Delta\varepsilon_{0,z\rho} = -\frac{i}{4} \varepsilon_o \varepsilon_e p_{44} u_0 J_n^-(q_s \rho), \\ \Delta\varepsilon_{0,\rho\rho} &= \Delta\varepsilon_{0,\phi\phi} = \frac{c_z}{2} \varepsilon_o \varepsilon_e p_{13} u_0 J^n(q_s \rho), \\ \Delta\varepsilon_{0,zz} &= \Delta\varepsilon_{0,\phi\phi} = \frac{c_z}{2} \varepsilon_o \varepsilon_e p_{33} u_0 J^n(q_s \rho), \end{aligned} \quad (2.2)$$

или в матричной форме

$$\begin{aligned} \Delta\hat{\varepsilon}_0 &= \quad (2.3) \\ &= \Delta\varepsilon^0 \begin{bmatrix} c_z p_{13} J^n(q_s \rho) & 0 & -ip_{44} J_n^-(q_s \rho) \\ 0 & c_z p_{13} J^n(q_s \rho) & p_{44} J_n^+(q_s \rho) \\ -ip_{44} J_n^-(q_s \rho) & p_{44} J_n^+(q_s \rho) & c_z p_{33} J^n(q_s \rho) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где $\Delta\varepsilon^0 = \varepsilon_o \varepsilon_e u_0 / 4$.

Из (2.1)–(2.3) следует, что если падающий БСП имеет порядок m , то он будет рассеиваться в бесселев пучок порядка $m+n$ или $m-n$, в зависимости от знака дислокаций. Далее будут рассматриваться дислокации одного знака. Кроме того, если падающий и дифрагированный пучки являются ТЕ поляризованными, то в процессе дифракции задействованы только диагональные компоненты тензора $\Delta\varepsilon_{\rho\rho}$, $\Delta\varepsilon_{\phi\phi}$.

Следствием этого является то, что в оптически анизотропных кристаллах при возбуждении вертикально поляризованным БАП становится возможным рассеяние типа $o \rightarrow o$. Этот тип АО дифракции важен тем, что здесь возможно достижения высокой эффективности АО преобразования вследствие оптимального согласования, или т. н. пространственного синхронизма [2]–[4] падающего и дифрагированного БСП.

3 Эффективность дифракции

Процедура вывода укороченных уравнений для АО дифракции с участием бесселевых пучков описывалась ранее (см., например [2]–[4]). Для рассматриваемого здесь $o \rightarrow o$ типа АО дифракции эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dA_{m+n}^o}{dz} &= i\chi_{m+n,m}^{oo} A_m^o \exp(-i\Delta k_z z), \\ \frac{dA_m^o}{dz} &= i\chi_{m,m+n}^{oo} A_{m+n}^o \exp(i\Delta k_z z). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь A_m^o и A_{m+n}^o – амплитуды исходного и дифрагированного БСП. Δk_z – волновая расстройка при АО взаимодействии.

Параметры акустооптической связи $\chi_{m,n}^{oo}$ имеют вид $\chi_{m+n,m}^{oo} = g\alpha_{m+n}^o$, $\chi_{m,m+n}^{oo} = g\alpha_m^o$, где $g = g(m, n)$,

$$\begin{aligned} g(m, n) &= 2\pi p_{13} \int_0^{R_b} 2J_n(q_s \rho) [J_{m+n-1}(q\rho) J_{m-1}(q_{in}\rho) + \\ &+ J_{m+n+1}(q\rho) J_{m+1}(q_{in}\rho)] \rho d\rho. \end{aligned}$$

Коэффициенты $\alpha_m^o, \alpha_{m+n}^o$ равны

$$\begin{pmatrix} \alpha_{m+n}^o \\ \alpha_m^o \end{pmatrix} = k_0^2 \Delta\varepsilon_0 q_{in} \begin{pmatrix} (k_{oz}^{in} k_{oz}^d W_{m+n}^o)^{-1} \\ (k_{oz}^{in} k_{oz}^{in} W_m^o)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Здесь k_{oz}^{in}, k_{oz}^d – проекции волновых векторов падающего и дифрагированного БСП на ось z соответственно.

$$W_{m+n}^o(q) = 2\pi \int_0^{R_b} [J_{m+n-1}(q\rho)^2 + J_{m+n+1}(q\rho)^2] \rho d\rho,$$

$$W_m^o(q_{in}) = 2\pi \int_0^{R_b} [J_{m-1}(q_{in}\rho)^2 + J_{m+1}(q_{in}\rho)^2] \rho d\rho,$$

имеют смысл интегралов мощности для дифрагированного и падающего бесселевых пучков.

В отличие от случая плоских волн, коэффициенты связи достаточно сложные, т.к. содержат интегралы перекрытия различных по пространственной структуре компонент бесселевых светового и акустического пучков. Интегралы перекрытия представлены на рисунке 3.1 как функции угла отклонения конуса волновых векторов дифрагированного пучка от направления пространственного синхронизма. Указанное направление выбрано под углом 44 град к оптической оси (рисунок 1.1). Для достижения пространственного синхронизма в данном направлении при угле конуса падающего БСП 44 град потребуется частота звука, равная 200 МГц.

Из графика видно, что в рассматриваемой геометрии дифракции интеграл $g(\theta)$, описывающий перекрытие радиальных и азимутальных компонент БСП и z – компоненты БАП, имеет максимальное значение при выполнении условия продольного синхронизма, когда $\Delta k_z = 0$.

Далее была рассчитана резонансная кривая, описывающая зависимость эффективности дифракции от угла отклонения от направления полного синхронизма. Полный синхронизм здесь означает, что в направлении максимума интеграла перекрытия реализуется также и согласование фазовых скоростей, т. е. волновая расстройка Δk_z равна нулю.

Для расчета резонансной кривой использовалась формула для эффективности дифракции в одну поперечную моду, следующая из укороченных уравнений (3.1)

$$\begin{aligned} \eta(\theta) &= \frac{W_{m+n}^o(\theta) / W_m^o(\theta) \chi_{m+n,m}^{oo}(\theta)^2}{[\Delta k_z(\theta) / 2]^2 + \chi_{m+n,m}^{oo}(\theta) \chi_{m,m+n}^{oo}(\theta)} \times \\ &\times \sin^2 \left(L \sqrt{[\Delta k_z(\theta) / 2]^2 + \chi_{m+n,m}^{oo}(\theta) \chi_{m,m+n}^{oo}(\theta)} \right), \end{aligned}$$

где L – длина взаимодействия. Значение L рассчитывалось из уравнения

$$\sin \left(L \sqrt{\chi_{m+n,m}^{oo}(\theta) \chi_{m,m+n}^{oo}(\theta)} \right) = 1,$$

соответствующего условию максимума интенсивности дифрагированного поля в направлении полного синхронизма.

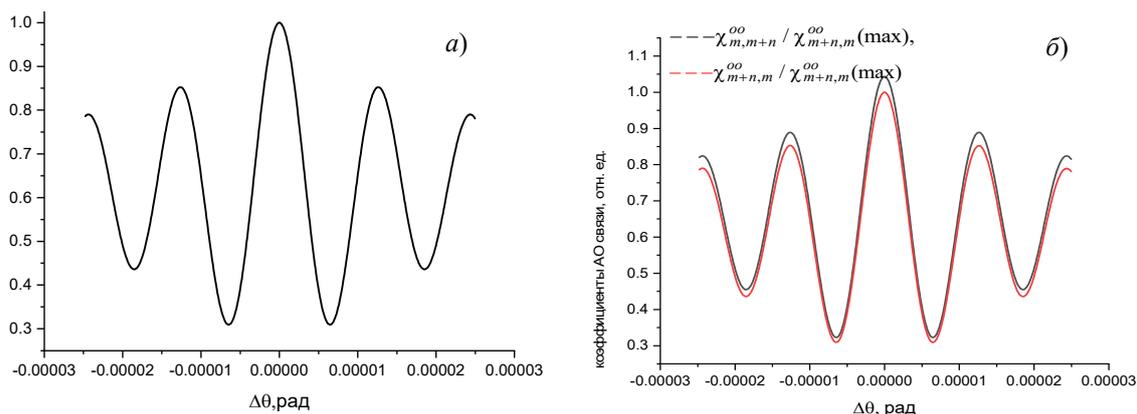


Рисунок 3.1 – Угловая зависимость интеграла перекрытия (а) и коэффициентов АО связи (б), описывающих прямую и обратную перекачку энергии при АО взаимодействии, обусловленная взаимодействием различных компонент бesselевых светового и акустического пучков

При мощности акустической волны 1 Вт длина L оказалась равной 5.2 мм. В итоге, резонансная кривая эффективности имеет вид, показанный на рисунке 3.2. Она, как видим, симметрична относительно направления синхронизма. Угловая полуширина кривой синхронизма при рассматриваемых углах конусности взаимодействующих БСП примерно 0,003 мрад.

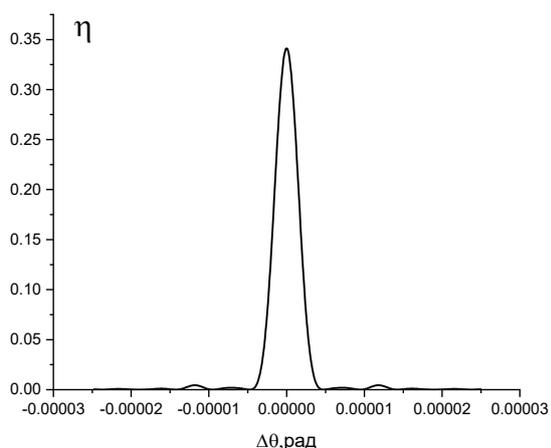


Рисунок 3.2 – Резонансная кривая акустооптического взаимодействия БСП и БАП

Резонансная кривая на рисунке 3.2 показывает, что процесс АО взаимодействия происходит в достаточно узкой цилиндрической области, ограничивающей пучки. Воспользовавшись формулой $\Delta\theta \approx \lambda/R_b$, описывающей угловое расстояние бesselевых мод в цилиндрической области радиусом R_b , получим, что при $R_b = 2 \text{ см}$ $\Delta\theta \approx 0,03$ мрад. При этом центральная мода имеет относительную эффективность дифракции $\sim 0,36$, что связано с малой угловой шириной резонансной кривой.

Заключение

Таким образом, в работе предложен и описан режим поляризационно изотропной АО

дифракции бesselевых светового пучка ТЕ типа на SV- поляризованной акустической волне. Такой тип АО дифракции реализует новый метод получения бesselевых пучков, отличающийся возможностями динамического управления параметрами генерируемого БСП, а также переноса винтовых дислокаций из акустического бesselевого пучка на световой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Auld, B.A. Acoustic Fields and Waves in Solids / B.A. Auld // John Wiley & Sons, Inc. – 1973. – Vol. 1. – 430 p.
2. Transformation of phase dislocations under acousto-optic interaction of optical and acoustical Bessel beams / V.N. Belyi [et al.] // J. Opt. 18 (7). – 2016. – P. 074002-08.
3. Features of the acousto-optic interaction of Bessel light beams and Bessel acoustic beams in transversely isotropic crystals / V.N. Belyi [et al.] // J. Opt. Technol. – 2017. – Vol. 84, № 2. – P. 130–136.
4. Low-frequency backward acousto-optical scattering of Bessel light beams / V.N. Belyi [et al.] // Opt. comm. – 2018. – Vol. 415. – P. 6–12.
5. Nondiffracting bulk-acoustic X waves in crystals / J. Salo [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1999. – Vol. 83, № 6. – P. 1171–1174.
6. Salo, J. Nondiffracting waves in anisotropic media / J. Salo, M.M. Salomaa // Phys. Rev. E. – 1999. – Vol. 67, № 5. – 056609 (9 p.).
7. Honarvar, F. Acoustic wave scattering from transversely isotropic cylinders / F. Honarvar, A.N. Sinclair // J. Acoust.Soc. Am. – 2003. – Vol. 100, № 1. – P. 57–63.
8. Ahmad, F. Acoustic scattering by transversely isotropic cylinders / F. Ahmad, A. Rahman // Int. J. Eng. Sci. – 2000. – Vol. 38, № 5. – P. 325–335.

Поступила в редакцию 27.03.2024.

Информация об авторах

Хило Петр Анатольевич – д.ф.-м.н., профессор
Ревенок Марина Анатольевна – старший преподаватель

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТЕПЛООВОГО РАСШИРЕНИЯ НА КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МАТЕРИАЛА С ЗАКРЫТЫМИ ПОРАМИ

А.Н. Авлас

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск

SIMULATION OF THE INFLUENCE OF THERMAL EXPANSION ON THE THERMAL CONDUCTIVITY COEFFICIENT OF A CLOSED-PORE MATERIAL

A.N. Aulas

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk

Аннотация. Рассматривается влияние теплового расширения материала матрицы на эффективный коэффициент теплопроводности материала с закрытыми порами с использованием прямого численного моделирования. Выполнены вычислительные эксперименты. Установлено увеличение коэффициента теплопроводности композитного материала в зависимости от времени термообработки.

Ключевые слова: эффективный коэффициент теплопроводности, коэффициент теплового расширения, математическая модель, сеточные методы, вычислительный эксперимент.

Для цитирования: Авлас, А.Н. Моделирование влияния теплового расширения на коэффициент теплопроводности материала с закрытыми порами / А.Н. Авлас // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 48–53. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_48. – EDN: QWEGKN

Abstract. The effect of thermal expansion of the matrix material on the effective thermal conductivity coefficient of a closed-cell material is examined using direct numerical simulation. Computational experiments have been performed. An increase in the thermal conductivity coefficient of the composite material was established depending on the heat treatment time.

Keywords: effective thermal conductivity coefficient, thermal expansion coefficient, mathematical model, grid methods, computational experiment.

For citation: Aulas, A.N. Simulation of the influence of thermal expansion on the thermal conductivity coefficient of a closed-pore material / A.N. Aulas // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 3 (60). – P. 48–53. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_48 (in Russian). – EDN: QWEGKN

Введение

При создании покрытий различного типа широко используются композиционные материалы. Однако проектирование новых композиционных материалов связано с высокими затратами на определение их эффективных характеристик, таких как теплофизические и упругопрочностные характеристики.

Сложность определения свойств композиционного материала заключается в его структуре [1]: на свойства композита влияют не только свойства составляющих включений, но также их размер, расположение, форма, распределение относительно друг друга. Кроме того, на свойства композита могут оказать существенное влияние межфазный слой, химические взаимодействия компонент с основным материалом, приводящие к возникновению новых включений и др.

Одной из значимых, при создании композиционных покрытий, характеристик является коэффициент теплопроводности материала. Существует ряд формул, позволяющих вычислить

значение коэффициента теплопроводности композита в зависимости от значений коэффициентов, составляющих компонент и их объёмной или массовой долей в композите [2]. В качестве примеров можно привести модель Максвелла, статистическую и матричную модели и др. [3]. Существенным недостатком подобного рода моделей является их низкая точность.

Работа является продолжением исследований по определению эффективного коэффициента теплопроводности композиционных материалов с использованием средств вычислительной математики [4]–[7]. В работе исследуется влияние теплового расширения материала, содержащего закрытые поры, на эффективный коэффициент теплопроводности. Для этого используется метод исследования ячейки периодичности композита, основанный на прямом численном математическом моделировании тепловых процессов при нагреве, в котором структура компонент учитывается явным образом [1]. Это приводит к решению задачи распространения тепла по

неоднородной области с учетом конкретных теплофизических свойств матрицы и включений. Проводя процедуру осреднения и сопоставляя осреднённые по неоднородной расчётной области параметры с аналогичными результатами, полученными для условно однородной среды, устанавливаются эффективные характеристики.

1 Математическая модель

Рассмотрим прямоугольный представительный объём материала D , состоящий из материала матрицы и пор, наполненных газом (воздухом). Предполагаем, что исходные свойства материала матрицы, а также распределение и размер пор известны заранее.

Построение сетки произведём в предположении, что каждая её ячейка состоит из одного материала. Размер ячейки выберем таким образом, чтобы он был меньше размера наименьшей поры в материале.

Введём декартовую систему координат, начало которой поместим в левый верхний угол рассматриваемого объёма. Построим сетку $\Omega_h = \sum_{i \in I, j \in J} \omega^{(i,j)}$, где I, J – пространства индексов: $I = \{0, 1, \dots, n_1\}$, $J = \{0, 1, \dots, n_2\}$, и

$$\omega^{(i,j)} = [ih_1; (i+1)h_1] \times [jh_2; (j+1)h_2].$$

Вид сеточной области приведён на рисунке 1.1 а).

Пусть V_m и V_p – объём материала матрицы и пор в исследуемом материале. Тогда объём материала составит $V = V_m + V_p$. Долю материала матрицы и пор обозначим как $K_m = \frac{V_m}{V}$ и

$$K_p = \frac{V_p}{V} \text{ соответственно.}$$

Будем считать, что тепловое расширение материала при повышении температуры образца компенсируется только сжатием газа в порах и уменьшением их объёма. Обозначим коэффициент линейного теплового расширения материала матрицы как α .

Предположим, что структура материала получена при известной температуре $T_{нач}$ и что вычисление эффективного коэффициента теплопроводности производится для температуры $T_{кон}$. Их разность обозначим как $\Delta T = T_{кон} - T_{нач}$. Тогда коэффициент объёмного расширения материала матрицы составит $\beta = 2\alpha\Delta T$ [8].

Изменение объёма материала матрицы составит:

$$\Delta V_m = \beta V_m.$$

Тогда процентное содержание материала матрицы после теплового расширения будет равняться:

$$K'_m = \frac{V_m + \Delta V_m}{V} = K_m + \beta K_m = (1 + \beta)K_m.$$

Соответственно, процентное содержание пор в материале после теплового расширения материала матрицы составит:

$$K'_p = 1 - K'_m = \left(1 - \beta \frac{1 - K_p}{K_p}\right) K_p.$$

Коэффициент объёмного сжатия поры составит:

$$k_p^{об} = \frac{K'_p}{K_p} = 1 - \beta \frac{1 - K_p}{K_p}.$$

Исходя из предположения, что изменение температуры материала при установлении стационарного потока тепла в процессе моделирования несущественно, предварительно изменим ячейки сетки Ω_h таким образом, чтобы площадь каждой ячейки-поры изменилась на коэффициент $k_p^{об}$.

Коэффициент теплопроводности λ газов зависит в том числе от давления, поэтому необходимо рассмотреть изменение давления в порах после изменения их объёма. Поскольку далее речь идёт исключительно о газе, находящемся в порах, нижний индекс p будем опускать.

Запишем уравнение Клапейрона – Менделеева для начального и конечного состояния газа:

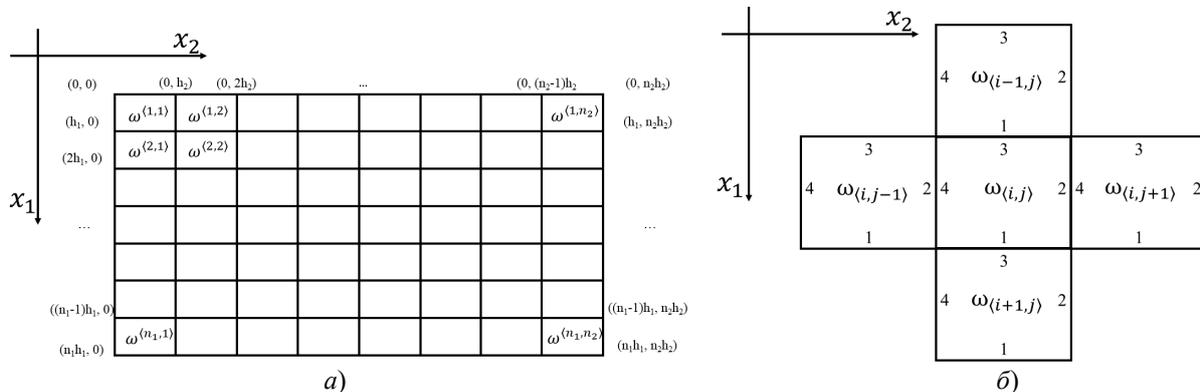


Рисунок 1.1 – а) общий вид сетки; б) нумерация граней в ячейке

$$p_{нач} V_{нач} = nRT_{нач}, \quad (1.1)$$

$$p_{кон} V_{кон} = nRT_{кон}. \quad (1.2)$$

где $p_{нач}, p_{кон}$ – давление газа, $V_{нач}, V_{кон}$ – объём, занимаемый газом, n – количество вещества, R – универсальная газовая постоянная, $T_{нач}, T_{кон}$ – температура газа.

Выразим $p_{кон}$ из уравнения (1.2):

$$p_{кон} = \frac{nRT_{кон}}{V_{кон}}.$$

Выражая значение nR из уравнения (1.1) и принимая во внимание, что

$$V_{кон} = V'_{кон} = k_p^{об} V_p = k_p^{об} V_{нач},$$

получим следующее значение для $p_{кон}$:

$$p_{кон} = \frac{p_{нач} T_{кон}}{k_p^{об} T_{нач}}.$$

Для вычисления коэффициента теплопроводности рассмотрим двумерную задачу распространения тепла для неоднородного композиционного материала в рамках представительного объёма, который представим в виде пластины.

Уравнение теплового баланса в области D имеет вид:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda_k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right), \quad (x_1, x_2) \in D, \quad t > t_0, \quad (1.3)$$

где $\rho = \rho(x_1, x_2; T)$ – плотность, $C = C(x_1, x_2; T)$ – теплоёмкость, $\lambda_k = \lambda_k(x_1, x_2; T)$ – теплопроводность по соответствующему направлению. Отметим, что для газов λ_k будет зависеть ещё и от давления. В дальнейшем индекс k будет означать направление вдоль одной из направляющих осей координат (соответствующую координату).

Для формирования теплового потока вдоль оси Ox_1 определим граничные условия следующим образом: на нижней Γ_1 и на верхней Γ_3 границах образца зададим условие постоянной температуры:

$$T|_{\Gamma_1} = T_{нагр} = const, \quad (1.4)$$

$$T|_{\Gamma_3} = T_{охл} = const, \quad (1.5)$$

причём предполагаем, что $T_{нагр} > T_{охл}$.

Предполагаем, что пластина периодически бесконечна в направлении оси Ox_2 . Из чего дополняем условия на границах Γ_2 и Γ_4 условием периодичности:

$$T|_{\Gamma_2} = T|_{\Gamma_4}. \quad (1.6)$$

На границах раздела материала матрицы и пор $\Gamma_{конт}$ будем рассматривать условия идеального теплового контакта, при котором имеет место равенство температур и тепловых потоков:

$$T|_{\Gamma_{конт}^-} = T|_{\Gamma_{конт}^+}, \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_{конт}^-} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_{конт}^+}, \quad (1.7)$$

где верхние индексы «-» и «+» означают расположение «слева» и «справа» от границы соответственно.

В качестве начального условия зададим распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$:

$$T(x_1, x_2; 0) = T_0(x_1, x_2) = T_{охл}. \quad (1.8)$$

Решаем дифференциальную систему (1.3)–(1.8) приближённым сеточным методом [9].

Построим систему уравнений для температуры. Рассмотрим каждую отдельную ячейку $\omega^{(i,j)}$. Аппроксимируем уравнение (1.3) с помощью метода контрольного объёма. В качестве точки, в которой будем искать решение, выберем центр масс ячейки $\omega^{(i,j)}$ в этом случае, построенный контрольный объём будет совпадать с самой ячейкой. Температуру каждой ячейки определяем в центре контрольного объёма, окружающего её, т. е. сеточная величина температуры в ячейке представляет среднее интегральное значение соответствующей непрерывно распределённой величины:

$$T^{(i,j)} \approx \frac{1}{V^{(i,j)}} \iint_{\omega^{(i,j)}} T dx_1 dx_2,$$

где $V^{(i,j)}$ – объём ячейки $\omega^{(i,j)}$.

Проинтегрируем уравнение (1.3) по контрольному объёму. Для удобства индекс ячейки $\langle i, j \rangle$ временно опустим.

$$\frac{1}{V} \iint_{\omega} \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dV = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^2 \iint_{\omega} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda_k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) dV,$$

Используя формулу Остроградского – Гаусса, получим:

$$\frac{1}{V} \iint_{\omega} \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dV = \frac{1}{V} \oint_{\partial\omega} \left(\sum_{k=1}^2 \lambda_k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) \vec{n} dS, \quad (1.9)$$

где $\partial\omega$ – граница ячейки $\omega^{(i,j)}$, \vec{n} – внешняя единичная нормаль к $\partial\omega$. В дальнейшем для обозначения координаты внешней нормали воспользуемся следующим обозначением: n_k , $k \in \{1, 2\}$. Отметим, что при использовании прямоугольной сетки, нормали будут параллельны осям координат.

Учитывая форму ячеек, интеграл по границе контрольного объёма вычисляем как сумму произведений значений вектора потока в центрах граней контрольного объёма на площади его граней:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{V} \oint_{\partial\omega} \left(\sum_{k=1}^2 \lambda_k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) \vec{n} dS = \\ & = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^4 S_m \left(\lambda_k \frac{\partial T}{\partial x_k} n_{k;m} \right) \Big|_{P_m} = \\ & = \frac{1}{V} \sum_{m=1}^4 S_m \sum_{k=1}^2 \left(\lambda_{k;m} n_{k;m} \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) \Big|_{P_m}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где индекс m соответствует обходу граней ячейки, как указано на рисунке 1.1 б), S_m – площадь m -ой грани (в двумерном случае – длина грани). Таким образом, получение дискретного аналога балансового уравнения сводится к аппроксимации потоков $\lambda_k \frac{\partial T}{\partial x}$ в серединных точках P_m на соответствующих гранях.

Построим аппроксимации потоков на гранях контрольного объёма ω :

$$\sum_{k=1}^2 \left(\lambda_k \frac{\partial T}{\partial x_k} n_k S \right) \Big|_{P_m} = \sum_{k=1}^2 \left(\lambda_k \frac{\partial T}{\partial x_k} n_k \right) \Big|_{P_m} S_m.$$

Введём дополнительную индексацию относительно ячейки $\omega^{(i,j)}$. Обозначим верхним индексом *inner* внутреннее значение в рассматриваемой ячейке и обозначение *outer* для значений в соседних ячейках. В качестве основы для нумерации граней воспользуемся уже выбранной на рисунке 1.1 б) нумерацией. Для индексов граней используем обозначение $m \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Также введём нумерацию ячеек, соседних с рассматриваемой. Пронумеруем их в соответствии с номерами смежных граней с ячейкой $\langle i, j \rangle$. Таким образом можно сопоставить локальную индексацию соседних ячеек с индексацией ячеек в общей структуре сетки:

$$*_m^{outer} = \begin{cases} m = 1, outer = \langle i + 1, j \rangle, \\ m = 2, outer = \langle i, j + 1 \rangle, \\ m = 3, outer = \langle i - 1, j \rangle, \\ m = 4, outer = \langle i, j - 1 \rangle. \end{cases} \quad (1.11)$$

Используя введённую индексацию, найдём выражение теплового потока для грани ячейки:

$$\frac{1}{V} S_m \sum_{k=1}^2 \lambda_{k;m} n_{k;m} \frac{(T - T_m^{outer})(O_{k;m}^{outer} - O_k)}{l_m^2}, \quad (1.12)$$

$m \in \{1, 2, 3, 4\}$.

где $O = (O_1; O_2)$ – центральная точка выбранной ячейки, $n_{k;m}$ – k -ая компонента вектора нормали \vec{n}_m .

В силу определения сеточной величины для левой части имеем:

$$\frac{1}{V} \iint_{\omega} \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dV = \rho C \frac{T - \check{T}}{\Delta t}, \quad (1.13)$$

где \check{T} – температура в ячейке ω на предыдущем временном слое, ρ и C вычисляются в центре ячейки ω .

Подставим аппроксимации (1.12) и (1.13) в уравнение (1.9):

$$\rho C \frac{T - \check{T}}{\Delta t} = \frac{1}{V} \sum_{m=1}^4 S_m \sum_{k=1}^2 \lambda_{k;m} n_{k;m} \frac{(T - T_m^{outer})(O_{k;m}^{outer} - O_k)}{(l_m)^2}. \quad (1.14)$$

Поскольку точка P_m располагается на границе ячейки и может оказаться на границе разделения сред, необходимо получить усреднённое значение коэффициента теплопроводности. Аппроксимацию коэффициента теплопроводности λ на границе контакта выберем исходя из значения, наиболее соответствующего физике тепловых процессов:

$$\lambda_k \Big|_{P_m} = \frac{2\lambda_k^{inner} \lambda_k^{outer}}{\lambda_k^{inner} + \lambda_k^{outer}}, \quad m \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Реализуем алгоритм с использованием явных разностных схем. Для этого вводим переменный шаг по времени $\Delta t_n, n = 1, \dots, N$, где t_N – время установления стационарного режима, который на каждом временном слое будет обеспечивать условие устойчивости разностной схемы. В правой части явной разностной схемы, полученной в (1.14), все значения температур возьмём на предыдущем временном слое.

Поскольку теплофизические свойства компонент (λ, ρ, C) зависят от температуры, то проверяем условие Куранта на предыдущем временном слое:

$$\Delta t_n \leq \frac{\max_{\langle i,j \rangle} \rho(t_{n-1}) C(t_{n-1})}{\min_{\langle i,j \rangle} \lambda(t_{n-1})} \Delta x_1 \Delta x_2. \quad (1.15)$$

Завершаем вычислительный процесс при достижении стационарного потока, что означает:

$$\left| T_n^{\langle i,j \rangle} - T_{n-1}^{\langle i,j \rangle} \right| \leq \varepsilon \left| T_{n-1}^{\langle i,j \rangle} \right|,$$

где ε – некоторая заданная погрешность.

Для определения эффективного коэффициента теплопроводности воспользуемся подходом, описанным в [8]. Гомогенизируем композиционный материал, заменив его на однородный со значением коэффициента теплопроводности, соответствующим значению для рассматриваемого композита. После завершения вычислительного процесса, ищем усреднённый коэффициент теплопроводности композита λ_1^{eff} по формуле:

$$\lambda_1^{eff} = \frac{Q_1}{S_1^{n.o.} \Delta T_1 \Delta t_N},$$

где Q_1 – переданное через композит количество теплоты, $S_1^{n.o.}$ – площадь поверхности представительного объёма, ΔT_1 – градиент температур между верхней (Γ_3) и нижней (Γ_1) гранями представительного объёма. Вычисления производим в направлении теплового потока, т. е., согласно выбору граничных условий, вдоль направления оси Ox_1 .

Количество теплоты Q_1 находим как сумму количества теплоты $q_1^{\langle i,j \rangle}$, прошедшему через каждый контрольный объём композита:

$$Q_1 = \left| \sum_{\langle i,j \rangle} q_1^{\langle i,j \rangle} \right|.$$

Значение q_1 определяем согласно формуле (1.12):

$$q_1 = \frac{1}{V} \sum_{m=1}^2 S_m \lambda_{1,m} n_{1,m} \frac{(T - T_m^{\text{outer}})(O_{1,m}^{\text{outer}} - O_1)}{(l_m)^2}$$

Для определения λ_2^{eff} по направлению Ox_2 граничные условия необходимо изменить следующим образом: на границах Γ_1 и Γ_3 задать условия периодичности, на границах Γ_2 и Γ_4 задать постоянные температуры $T_{\text{нагр}}$ и $T_{\text{охл}}$.

2 Вычислительный эксперимент

Рассмотрим образцы бронзы БрО12. Для построения начальных данных воспользуемся металлографическими снимками шлифов образцов (рисунок 2.1).

Свойства материалов, участвующих в теплопереносе, указаны в таблице 2.1 [10].

Таблица 2.1 – Свойства материалов

	Материал	
	БрО12	Воздух
Теплопроводность λ , Вт/м·К	48,56	1
Удельная теплоёмкость C , Дж/кг·К	368,4	1005
Плотность ρ , кг/м ³	8800	1,2
Числовое обозначение	0	1

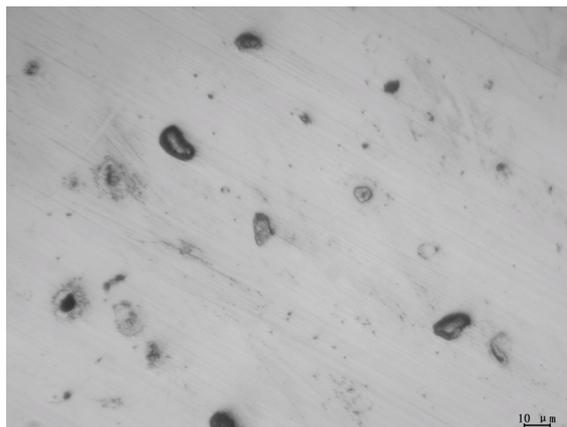


Рисунок 2.1 – Пример металлографического снимка шлифа бронзы БрО12 с наличием закрытых пор

Для вычислительных экспериментов были выбраны 3 образца с различной пористостью. Начальная конфигурация области расчёта образцов представлена на рисунке 2.2.

Вычисление эффективного коэффициента теплопроводности образцов проводили до увеличения температуры на ΔT . Результаты численных экспериментов приведены на рисунке 2.3

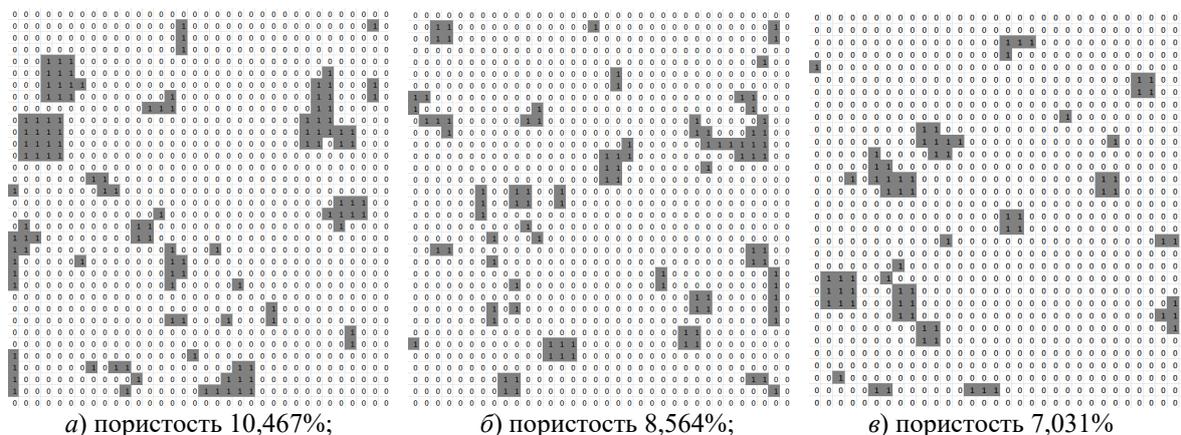


Рисунок 2.2 – Матрицы входных данных моделируемых материалов

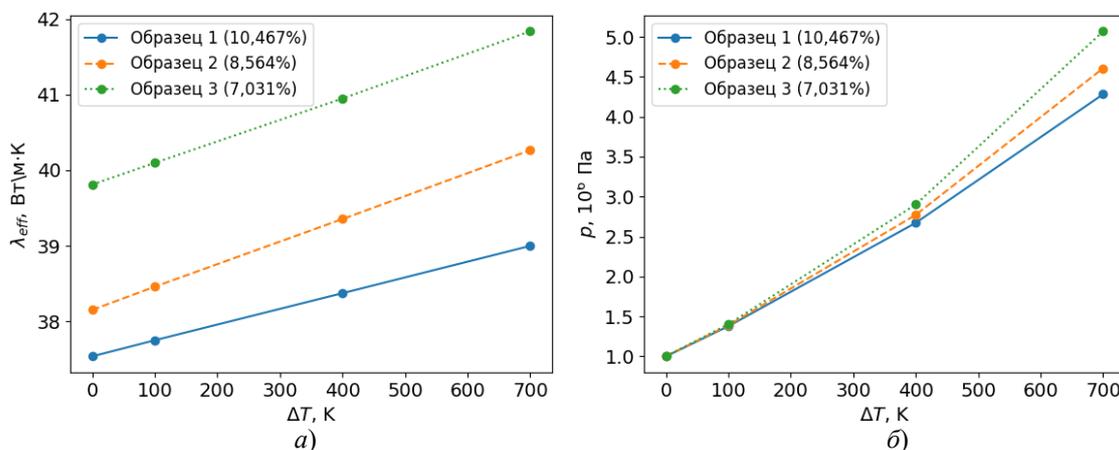


Рисунок 2.3 – а) изменение коэффициента теплопроводности; б) изменение давления воздуха в порах

для трёх образцов с различной пористостью при температуре выше начальной на ΔT , равной 100, 400, 700 °K. Точками отмечены полученные значения эффективного коэффициента теплопроводности. Начальное значение эффективного коэффициента теплопроводности образцов, соответствующее значению при $\Delta T = 0$, получено согласно разработанному ранее методу [6] для $T_{нач} = 300^\circ K$.

На рисунке 2.3 а) отображено изменение эффективных коэффициентов теплопроводности образцов в зависимости от температуры нагрева. Рисунок 2.3 б) демонстрирует рост давления воздуха внутри пор. Как было указано ранее, это ведёт к изменению теплофизических характеристик материала, что необходимо учитывать при моделировании, например, тепловых и деформационных процессов.

В таблице 2.2 показано изменение пористости образцов при различной тепловой обработке. Поскольку пористость оказывает влияние и на другие эффективные свойства материала, то их надо также корректировать при прогнозировании материала. 100, 400, 700 °K.

Таблица 2.2 – Изменение пористости K_p образцов в зависимости от ΔT

	ΔT	0 °K	100 °K	400 °K	700 °K
Образец 1	K_p , %	10,467	10,136	9,142	8,148
Образец 2		8,564	8,226	7,211	6,196
Образец 3		7,031	6,687	5,655	4,623

Таким образом, приведённая модель тепловых процессов с учётом теплового расширения материала матрицы показывает влияние на эффективный коэффициент теплопроводности материала, содержащего закрытые поры, что необходимо учитывать при проектировании материала.

Заключение

Описанный в работе подход позволяет уточнить эффективный коэффициент теплопроводности композиционного материала, содержащего закрытые поры. Модель учитывает структуру и расположение пор в материале, зависимость теплофизических свойств материалов от температуры. Выполнена программная реализация метода, произведены вычислительные эксперименты. Показано, что в зависимости от величины тепловой обработки наблюдается уменьшение пор в материале, что ведёт к увеличению эффективного коэффициента теплопроводности композита. Предложенная методика может быть

использована для прогнозного определения эффективного коэффициента теплопроводности с учётом последующей термообработки материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дисперсно-наполненные полимерные композиты технического и медицинского назначения* / Б.А. Люкшин, С.В. Шилько, Ю.К. Машков [и др]. – Новосибирск: Издательство СО РАН, 2017. – 311 с.
2. *Зарубин, В.С.* Инженерные методы решения задач теплопроводности / В.С. Зарубин. – Москва: Энергоатомиздат, 1983. – 328 с.
3. *Модельные представления о теплопереносе в полимерных нанокompозитах* / А.В. Никитин, В.А. Лиопо, С.В. Авдейчик, В.А. Струк // Прикладная математика и физика. – 2014. – Т. 5, № 176. – С. 150–160.
4. *Численное исследование теплофизических свойств композиционного порошкового материала* / Г.Ф. Громыко, Н.П. Мацука, А.Ф. Ильющенко, А.В. Лешок // Сборник «Порошковая металлургия». – 2020. – Вып. 43. – С. 132–139.
5. *Авлас, А.Н.* Влияние добавок крупного компонента графита на эффективный коэффициент теплопроводности фрикционных композиционных покрытий на основе меди / А.Н. Авлас // XX Международная научная конференция молодых учёных «Молодёжь в науке – 2023». Материалы конференции. – Минск. – 2023. – С. 501–503.
6. *Авлас, А.Н.* Получение коэффициента теплопроводности композиционных материалов с использованием численного моделирования / А.Н. Авлас, Н.П. Мацука // Информационные технологии в промышленности, логистике и социальной сфере. Тезисы докладов. – 2023 – С. 7–10.
7. *Авлас, А.Н.* Численный расчёт эффективного коэффициента теплопроводности дисперсно-наполненных композиционных материалов / А.Н. Авлас // Труды института математики. – 2024. – Т. 32, №1. – С. 91–102.
8. *Новикова, С.И.* Тепловое расширение твёрдых тел / С.И. Новикова. – Москва: Наука, 1974. – 295 с.
9. *Самарский, А.А.* Теория разностных схем / А.А. Самарский. – Москва: Наука, 1977. – 656 с.
10. *Чиркин, В.С.* Теплофизические свойства материалов ядерной техники / В.С. Чиркин. – Москва: Атомиздат, 1968. – 485 с.

Поступила в редакцию 11.07.2024.

Информация об авторах

Авлас Артём Николаевич – мл. научный сотрудник

ПОЛИАДИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП В ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. I

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв

POLYADIC ANALOGUES OF NORMAL SUBGROUPS IN POLYADIC GROUPS OF SPECIAL FORM. I

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev

Аннотация. В статье изучаются полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида, то есть в полиадических группах с l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, которая называется полиадической операцией специального вида и определяется на декартовой степени A^k n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки $\sigma \in S_k$, порядка делящего $l - 1$, и n -арной операции η .

Ключевые слова: полиадическая операция, полуинвариантные l -арные подгруппы, n -полуинвариантные l -арные подгруппы.

Для цитирования: Гальмак, А.М. Полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 54–58. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_54. – EDN: QXHKOX

Abstract. The article studies the normal subgroups in polyadic groups of special form, that is in polyadic groups with l -ary operation $\eta_{s, \sigma, k}$ that is called polyadic operation of special form and is defined on Cartesian power of A^k n -ary group $\langle A, \eta \rangle$ by substitution $\sigma \in S_k$ which order divides $l - 1$ and n -ary operation η .

Keywords: polyadic operation, semiinvariant l -ary subgroups, n -semiinvariant l -ary subgroups.

For citation: Gal'mak, A.M. Polyadic analogues of normal subgroups in polyadic groups of special form. I / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 3 (60). – P. 54–58. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_54 (in Russian). – EDN: QXHKOX

Введение

Инвариантные и полуинвариантные l -арные подгруппы впервые появились у В. Дёрнте в [1] и являются полиадическими аналогами нормальных подгрупп. При $l = 2$ понятия полуинвариантности и инвариантности совпадают, так как определяющие их равенства принимают вид равенства $xB = Bx$, определяющего нормальные подгруппы. Указанные полиадические аналоги В. Дёрнте являются частными случаями более общего понятия – n -полуинвариантных l -арных подгрупп. Их изучению в полиадических группах специального вида и посвящена данная статья.

1 Предварительные сведения

Напомним, что l -арную подгруппу $\langle B, \eta \rangle$ l -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ называют [2, с. 52] *инвариантной* в ней, если

$$\begin{aligned} \eta(x \underbrace{B \dots B}_{l-1}) &= \eta(\underbrace{Bx B \dots B}_{l-2}) = \dots \\ \dots &= \eta(\underbrace{B \dots B x B}_{l-1}) = \eta(\underbrace{B \dots B x}_{l-1}) \end{aligned}$$

для любого $x \in A$. Если же

$$\eta(x \underbrace{B \dots B}_{l-1}) = \eta(\underbrace{B \dots B x}_{l-1})$$

для любого $x \in A$, то $\langle B, \eta \rangle$ называют [2, с. 55] *полуинвариантной* в $\langle A, \eta \rangle$.

Полуинвариантные и инвариантные l -арные подгруппы являются частными случаями более общего понятия из следующего определения.

Определение 1.1. l -Арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ l -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, где $l = s(n - 1) + 1$, $s \geq 1$, называется *n -полуинвариантной* в ней, если

$$\eta(x \underbrace{B \dots B}_{l-1}) = \eta(\underbrace{B \dots B x B \dots B}_{i(n-1) \quad (s-1)(n-1)})$$

для любого $x \in A$ и любого $i = 1, \dots, s$.

В развёрнутом виде последнее равенство переписывается следующим образом

$$\begin{aligned} \eta(x \underbrace{B \dots B}_{l-1}) &= \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x \underbrace{B \dots B}_{(s-1)(n-1)}) = \\ &= \eta(\underbrace{B \dots B}_{2(n-1)} x \underbrace{B \dots B}_{(s-2)(n-1)}) = \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots &= \eta(\underbrace{B \dots B}_{{(s-2)(n-1)}} x \underbrace{B \dots B}_{{2(n-1)}}) = \\ &= \eta(\underbrace{B \dots B}_{{(s-1)(n-1)}} x \underbrace{B \dots B}_{{n-1}}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{{l-1}} x). \end{aligned}$$

Ясно, что l -полуинвариантные l -арные подгруппы l -арной группы – это в точности её полуинвариантные l -арные подгруппы, а 2-полуинвариантные l -арные подгруппы l -арной группы – это в точности её инвариантные l -арные подгруппы.

Из определения 1.1 также следует, что всякая n -полуинвариантная l -арная подгруппа l -арной группы является и полуинвариантной в ней. В частности, полуинвариантными являются инвариантные l -арные подгруппы.

Имеет место

Лемма 1.1 [3, лемма 6.2]. *Если l -арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ l -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, где $l = s(n - 1) + 1$, $s \geq 1$, удовлетворяет условию*

$$\eta(\underbrace{x B \dots B}_{{l-1}}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{{n-1}} x \underbrace{B \dots B}_{{(s-1)(n-1)}}),$$

то для любого $i \geq 1$ выполняется условие

$$\eta(\underbrace{x B \dots B}_{{l-1}}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{{j(n-1)}} x \underbrace{B \dots B}_{{i(l-1)-j(n-1)}}),$$

где $j = 0, 1, \dots, is - 1$.

Полагая в лемме 1.1 $i = 1$, получим

Следствие 1.1. *Если l -арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ l -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, где $l = s(n - 1) + 1$, $s \geq 1$, удовлетворяет условию*

$$\eta(\underbrace{x B \dots B}_{{l-1}}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{{n-1}} x \underbrace{B \dots B}_{{(s-1)(n-1)}}),$$

то выполняется условие

$$\eta(\underbrace{x B \dots B}_{{l-1}}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{{j(n-1)}} x \underbrace{B \dots B}_{{(s-j)(n-1)}}),$$

где $j = 0, 1, \dots, s - 1$.

В развёрнутом виде последнее равенство из следствия 1.1 переписывается следующим образом

$$\begin{aligned} \eta(\underbrace{x B \dots B}_{{l-1}}) &= \eta(\underbrace{B \dots B}_{{n-1}} x \underbrace{B \dots B}_{{(s-1)(n-1)}}) = \\ &= \eta(\underbrace{B \dots B}_{{2(n-1)}} x \underbrace{B \dots B}_{{(s-2)(n-1)}}) = \dots = \eta(\underbrace{B \dots B}_{{(s-2)(n-1)}} x \underbrace{B \dots B}_{{2(n-1)}}) = \\ &= \eta(\underbrace{B \dots B}_{{(s-1)(n-1)}} x \underbrace{B \dots B}_{{n-1}}). \end{aligned}$$

Ясно, что этого недостаточно для n -полуинвариантности l -арной подгруппы $\langle B, \eta \rangle$ в l -арной группе $\langle A, \eta \rangle$. Однако следствие 1.1 позволяет сформулировать следующий критерий n -полуинвариантности l -арной подгруппы $\langle B, \eta \rangle$ в l -арной группе $\langle A, \eta \rangle$, с помощью которого в [3] были определены n -полуинвариантные l -арные подгруппы l -арной группы.

Предложение 1.1. *Полуинвариантная l -арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ l -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ явля-*

ется n -полуинвариантной в ней тогда и только тогда, когда

$$\eta(\underbrace{x B \dots B}_{{l-1}}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{{n-1}} x \underbrace{B \dots B}_{{(s-1)(n-1)}}).$$

Можно показать [4, теорема 2.3.29], что для n -полуинвариантности конечной l -арной подгруппы $\langle B, \eta \rangle$ в l -арной группе $\langle A, \eta \rangle$ достаточно равенства

$$\eta(\underbrace{x B \dots B}_{{l-1}}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{{n-1}} x \underbrace{B \dots B}_{{(s-1)(n-1)}}).$$

В частности [4, следствие 2.3.30], для инвариантности конечной l -арной подгруппы $\langle B, \eta \rangle$ l -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ достаточно равенства

$$\eta(\underbrace{B \dots B}_{{l-1}}) = \eta(\underbrace{B x B \dots B}_{{l-2}}).$$

Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n - 1) + 1$, $k \geq 2$, $\sigma \in \mathbf{S}_k$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ определяется на декартовой степени A^k следующим образом:

$$\eta_{s, \sigma, k}(x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{l1}, \dots, x_{lk}) = (y_1, \dots, y_k),$$

$$\begin{aligned} \text{где} \\ y_j &= \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) = \\ &= \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \dots x_{i\sigma^{i-1}(j)}), j \in \{1, \dots, k\}. \end{aligned}$$

В [5] было доказано, что если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа.

2 Вспомогательные результаты

Предложение 2.1. *Пусть H_1, H_2, \dots, H_l – подмножества n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$. Тогда*

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(H_1^k \dots H_{t-1}^k \mathbf{x} H_{t+1}^k \dots H_l^k) &= \\ &= \eta(H_1 \dots H_{t-1} x_{\sigma^{j-1}(1)} H_{t+1} \dots H_l) \times \dots \\ &\dots \times \eta(H_1 \dots H_{t-1} x_{\sigma^{j-1}(k)} H_{t+1} \dots H_l) \end{aligned}$$

для любого $t = 1, \dots, l$. В частности,

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x} H_2^k \dots H_l^k) &= \\ &= \eta(x_1 H_2 \dots H_l) \times \dots \times \eta(x_k H_2 \dots H_l), \\ \eta_{s, \sigma, k}(H_1^k \dots H_{l-1}^k \mathbf{x}) &= \\ &= \eta(H_1 \dots H_{l-1} x_{\sigma^{j-1}(1)}) \times \dots \times \eta(H_1 \dots H_{l-1} x_{\sigma^{j-1}(k)}). \end{aligned}$$

Если подстановка σ из \mathbf{S}_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(H_1^k \dots H_{l-1}^k \mathbf{x}) &= \\ &= \eta(H_1 \dots H_{l-1} x_1) \times \dots \times \eta(H_1 \dots H_{l-1} x_k). \end{aligned}$$

Доказательство. Так как

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(H_1^k \dots H_{t-1}^k \mathbf{x} H_{t+1}^k \dots H_l^k) &= \\ &= \{ \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_{t-1} \mathbf{x} \mathbf{h}_{t+1} \dots \mathbf{h}_l) \mid \\ &\mathbf{h}_i \in H_i^k, i = 1, \dots, t-1, t+1, \dots, l \} = \\ &= \{ \eta_{s, \sigma, k}((h_{11}, \dots, h_{1k}) \dots (h_{(t-1)1}, \dots, h_{(t-1)k})(x_1, \dots, x_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (h_{(t+1)1}, \dots, h_{(t+1)k}) \dots (h_{l1}, \dots, h_{lk}) | \\ & h_{ij} \in H_i, i = 1, \dots, t-1, t+1, \dots, l; j = 1, \dots, k \} = \\ & = \{ \eta(h_{11}h_{2\sigma(1)} \dots h_{(t-1)\sigma^{t-2}(1)} x_{\sigma^{t-1}(1)} h_{(t+1)\sigma(1)} \dots h_{l\sigma^{l-1}(1)}), \dots \\ & \dots, \eta(h_{1k}h_{2\sigma(k)} \dots h_{(t-1)\sigma^{t-2}(k)} x_{\sigma^{t-1}(k)} h_{(t+1)\sigma(k)} \dots h_{l\sigma^{l-1}(k)}) | \\ & \quad h_{i\sigma(j)} \in H_i, \\ & \quad i = 1, \dots, t-1, t+1, \dots, l; \sigma(j) = 1, \dots, k \} = \\ & = \eta(H_1 \dots H_{t-1} x_{\sigma^{t-1}(1)} H_{t+1} \dots H_l) \times \dots \\ & \dots \times \eta(H_1 \dots H_{t-1} x_{\sigma^{t-1}(k)} H_{t+1} \dots H_l), \end{aligned}$$

то верно первое равенство из условия леммы.

Второе и третье равенства получаются из первого, если в нём положить соответственно $t = 1$ и $t = l$.

Четвёртое равенство является следствием третьего, так как подстановка σ^{l-1} является тождественной. \square

Следующее предложение, получается из предложения 2.1, если в нём положить

$$H_1 = \dots = H_{t-1} = B, H_{t+1} = \dots = H_l = C.$$

Предложение 2.2. Пусть B и C – подмножества n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$. Тогда

$$\begin{aligned} & \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{t-1} \mathbf{x} \underbrace{C^k \dots C^k}_{l-t}) = \\ & = \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_{\sigma^{t-1}(1)} \underbrace{C \dots C}_{l-t}) \times \dots \\ & \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_{\sigma^{t-1}(k)} \underbrace{C \dots C}_{l-t}) \end{aligned}$$

для любого $t = 1, \dots, l$. В частности,

$$\begin{aligned} & \eta_{1,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{t-1} \mathbf{x} \underbrace{C^k \dots C^k}_{n-t}) = \\ & = \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_{\sigma^{t-1}(1)} \underbrace{C \dots C}_{n-t}) \times \dots \\ & \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{t-1} x_{\sigma^{t-1}(k)} \underbrace{C \dots C}_{n-t}), \end{aligned}$$

где $t = 1, \dots, n$.

Лемма 2.1. Пусть $\langle B, \eta \rangle$ и $\langle C, \eta \rangle$ – n -арные подгруппы n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$. Тогда

$$\begin{aligned} & 1) \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{(i-1)(n-1)} \mathbf{x} \underbrace{C^k \dots C^k}_{(s+1-i)(n-1)}) = \\ & = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(1)} \underbrace{C \dots C}_{n-1}) \times \dots \\ & \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(k)} \underbrace{C \dots C}_{n-1}) \end{aligned}$$

для любого $i = 2, \dots, s+1$;

$$\begin{aligned} & 2) \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{(i-1)(n-1)} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{(s+1-i)(n-1)}) = \\ & = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(1)} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \\ & \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(k)} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \end{aligned}$$

для любого $i = 2, \dots, s+1$;

$$\begin{aligned} & 3) \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}) = \\ & = \eta(x_1 \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(x_k \underbrace{B \dots B}_{n-1}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 4) \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1} \mathbf{x}) = \\ & = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_{\sigma^{l-1}(1)}) \times \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_{\sigma^{l-1}(k)}); \end{aligned}$$

5) если подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1} \mathbf{x}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_1) \times \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_k).$$

Доказательство. 1) Полагая в первом равенстве предложения 2.1

$$t = (i-1)(n-1) + 1,$$

$$H_1 = \dots = H_{t-1} = B, H_{t+1} = \dots = H_l = C,$$

где $i = 2, \dots, s+1$, и, учитывая тот факт, что $\langle B, \eta \rangle$ и $\langle C, \eta \rangle$ – n -арные подгруппы в $\langle A, \eta \rangle$, получим

$$\begin{aligned} & \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{(i-1)(n-1)} \mathbf{x} \underbrace{C^k \dots C^k}_{(s+1-i)(n-1)}) = \\ & = \eta(\underbrace{B \dots B}_{(i-1)(n-1)} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(1)} \underbrace{C \dots C}_{(s+1-i)(n-1)}) \times \dots \\ & \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{(i-1)(n-1)} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(k)} \underbrace{C \dots C}_{(s+1-i)(n-1)}) = \\ & = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(1)} \underbrace{C \dots C}_{n-1}) \times \dots \\ & \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(k)} \underbrace{C \dots C}_{n-1}). \end{aligned}$$

Следовательно, равенство из 1) верно.

2) Получается из 1) при $B = C$.

3) Полагая во втором равенстве предложения 2.1

$$H_2 = \dots = H_l = B,$$

где $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа в $\langle A, \eta \rangle$.

4) Полагая в третьем равенстве предложения 2.1

$$H_1 = \dots = H_{l-1} = B,$$

где $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа в $\langle A, \eta \rangle$.

5) Следует из 4), так как подстановка σ^{l-1} является тождественной. \square

Замечание 2.1. Все равенства в предложениях 2.1, 2.2 и лемме 2.1 можно записать более компактно. Например, если для $j = 1, \dots, k$ положить

$$F_j = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(j)} \underbrace{B \dots B}_{n-1}),$$

$$G_j = \eta(x_j \underbrace{B \dots B}_{n-1}), \quad H_j = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_j),$$

то равенства 2), 3) и 5) из леммы 2.1 примут вид

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{(i-1)(n-1)} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{(s+1-i)(n-1)}) = F_1 \times \dots \times F_j \times \dots \times F_k,$$

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}) = G_1 \times \dots \times G_j \times \dots \times G_k,$$

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1} \mathbf{x}) = H_1 \times \dots \times H_j \times \dots \times H_k.$$

Полагая в лемме 2.1 $n = 2$, $B = C$, $\sigma^l = \sigma$, получим

Следствие 2.1 [6, лемма 4.1.1]. Пусть подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, B – подгруппа группы A ,

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k.$$

Тогда:

$$1) \left[\underbrace{B^k \dots B^k}_{i-1} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-i} \right]_{l,\sigma,k} = Bx_{\sigma^{i-1}(1)} B \times \dots \times Bx_{\sigma^{i-1}(k)} B$$

для любого $i = 2, \dots, l-1$;

$$2) \left[\mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1} \right]_{l,\sigma,k} = x_1 B \times \dots \times x_k B;$$

$$3) \left[\underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1} \mathbf{x} \right]_{l,\sigma,k} = Bx_1 \times \dots \times Bx_k.$$

3 Основной результат

Как отмечалось выше, если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ – l -арная группа. Понятно, что если $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle B^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ – l -арная подгруппа l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$.

Теорема 3.1. Пусть подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$. Тогда:

1) если подстановка σ^{n-1} является тождественной, то l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ n -полуинвариантна в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ тогда и только тогда, когда n -арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ полуинвариантна в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$;

2) l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ полуинвариантна в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ тогда и только тогда, когда n -арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ полуинвариантна в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$.

Доказательство. Так как подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle B^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ – l -арная подгруппа l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$.

1) **Необходимость.** Из n -полуинвариантности $\langle B^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ в $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ следует полуинвариантность $\langle B^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ в $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$, а это означает, что

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}) = \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1} \mathbf{x}) \quad (3.1)$$

для любого $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$. Тогда, ввиду утверждений 3) и 5) леммы 2.1,

$$\begin{aligned} & \eta(x_1 \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(x_k \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \\ & = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_1) \times \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_k), \end{aligned} \quad (3.2)$$

откуда

$$\eta(\underbrace{x_j B \dots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_j), j = 1, \dots, k \quad (3.3)$$

для любого $x_j \in A$. В частности,

$$\eta(x_1 \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_1)$$

для любого $x_1 \in A$, что означает полуинвариантность $\langle B, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$.

Достаточность. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ – произвольный элемент из A^k . Из полуинвариантности $\langle B, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$ следует (3.3), а это значит верно (3.2). Тогда, ввиду утверждений 3) и 5) леммы 2.1, верно (3.1).

Кроме того, используя полуинвариантность $\langle B, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$, а также тот факт, что $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа в $\langle A, \eta \rangle$, получим

$$\begin{aligned} \eta(\underbrace{x_j B \dots B}_{n-1}) & = \eta(\underbrace{x_j B \dots B}_{n-1} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \\ & = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_j \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \end{aligned}$$

для любого $j = 1, \dots, k$, то есть

$$\eta(\underbrace{x_j B \dots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_j \underbrace{B \dots B}_{n-1}).$$

Последнее равенство в силу тождественности подстановки σ^{n-1} переписывается следующим образом

$$\eta(\underbrace{x_j B \dots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(j)} \underbrace{B \dots B}_{n-1})$$

для любого $i = 2, \dots, s$. Тогда

$$\begin{aligned} & \eta(x_1 \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(x_k \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \\ & = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(1)} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \\ & \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(k)} \underbrace{B \dots B}_{n-1}). \end{aligned}$$

Применив к последнему равенству утверждения 3) и 2) леммы 2.1, получим

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{l-1}) = \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k \dots B^k}_{(i-1)(n-1)} \mathbf{x} \underbrace{B^k \dots B^k}_{(s+1-i)(n-1)}),$$

откуда и из равенства (3.1) следует n -полуинвариантность $\langle B^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ в $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$.

2) Полагаем в 1) $n = l$. □

Считая в теореме 3.1 σ циклом длины $m \geq 2$, при этом m делит $l-1$, получим

Следствие 3.1. Пусть σ – цикл из S_k длины $m \geq 2$, m делит $l-1$, $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$. Тогда:

1) если m делит $n-1$, то l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ n -полуинвариантна в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ тогда и только тогда, когда n -арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ полуинвариантна в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$;

2) l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ полуинвариантна в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s,\sigma,k} \rangle$ тогда и

только тогда, когда n -арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ полуинвариантна в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$.

Полагая в следствии 3.1 $\sigma = (12 \dots m) \in S_k$, получим

Следствие 3.2. Пусть t делит $l-1$, $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$. Тогда:

1) если t делит $n-1$, то l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, (12 \dots m), k} \rangle$ n -полуинвариантна в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots m), k} \rangle$ тогда и только тогда, когда n -арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ полуинвариантна в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$;

2) l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, (12 \dots m), k} \rangle$ полуинвариантна в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots m), k} \rangle$ тогда и только тогда, когда n -арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ полуинвариантна в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$.

Полагая в следствии 3.2 $t = k$, получим

Следствие 3.3. Пусть k делит $l-1$, $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$. Тогда:

1) если k делит $n-1$, то l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$ n -полуинвариантна в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$ тогда и только тогда, когда n -арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ полуинвариантна в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$;

2) l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$ полуинвариантна в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, (12 \dots k), k} \rangle$ тогда и только тогда, когда n -арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ полуинвариантна в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.

2. Русаков, С.А. Алгебраические n -арные системы / С.А. Русаков. – Минск: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

3. Гальмак, А.М. Конгруэнции полиадических групп / А.М. Гальмак. – Минск: Беларуская навука, 1999. – 182 с.

4. Гальмак, А.М. n -Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.

5. Гальмак, А.М. О разрешимости уравнений в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2018. – №1 (51). – С. 4–10.

6. Гальмак, А.М. Полиадические операции и обобщённые матрицы / А.М. Гальмак. – Могилёв: МГУП, 2015. – 295 с.

Поступила в редакцию 30.04.2024.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор

О РАЦИОНАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЯХ СОПРЯЖЕННОЙ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ СОПРЯЖЕННЫМИ СУММАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

П.Г. Поцейко

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

ON RATIONAL APPROXIMATIONS OF CONJUGATE FUNCTION ON AN INTERVAL BY CONJUGATE VALLÉE POUSSIN SUMS

P.G. Patseika

Yanka Kupala State University of Grodno

Аннотация. Исследуются аппроксимации сопряженной функции на отрезке $[-1, 1]$ суммами Валле Пуссена сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва с ограничениями на количество геометрически различных полюсов. Устанавливается интегральное представление соответствующих приближений. Для сопряженной функции с плотностью $(1-x)^\gamma$, $\gamma \in (0,1)$ получены интегральное представление приближений, оценка поточечных приближений и равномерных приближений с определенной мажорантой введенным методом рациональной аппроксимации. Устанавливается асимптотическое выражение мажоранты при $n \rightarrow \infty$, зависящее от параметров аппроксимирующей функции. Найдены оптимальные значения параметров, при которых обеспечивается наибольшая скорость убывания мажоранты. В качестве следствия найдены оценки приближений на отрезке $[-1, 1]$ сопряженной функции суммами Валле Пуссена сопряженных полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва.

Ключевые слова: сопряженная функция, ряд Фурье – Чебышёва, суммы Валле Пуссена, функция со степенной особенностью, поточечные и равномерные приближения, наилучшие приближения, асимптотические оценки.

Для цитирования: Поцейко, П.Г. О рациональных аппроксимациях сопряженной функции на отрезке сопряженными суммами Валле Пуссена / П.Г. Поцейко // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 59–70. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_59. – EDN: RCLUXH

Abstract. The approximations of the conjugate function on the segment $[-1, 1]$ by Vallée Poussin sums of conjugate rational integral Fourier – Chebyshev operators with restrictions on the number of geometrically different poles are investigated. An integral representation of the corresponding approximations is established. An integral representation of approximations, the estimation of pointwise approximations and uniform approximations with a certain majorant are obtained for a conjugate function with density $(1-x)^\gamma$, $\gamma \in (0,1)$. Its asymptotic expression for $n \rightarrow \infty$, depending on the parameters of the approximating function, is established. The optimal values of the parameters at which the highest rate of decreasing majorant is provided are found. As a consequence, the estimates of approximations of conjugate function on the segment $[-1, 1]$ by Vallée Poussin sums of conjugate polynomial Fourier – Chebyshev series are found.

Keywords: conjugate function, Fourier – Chebyshev series, Vallée Poussin sums, function with power singularity, pointwise and uniform approximations, best approximations, asymptotic estimates.

For citation: Patseika, P.G. On rational approximations of conjugate function on an interval by conjugate Vallée Poussin sums / P.G. Patseika // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 3 (60). – P. 59–70. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_59 (in Russian). – EDN: RCLUXH

Введение

При решении различных задач математики и ее приложений возникают интегралы с ядром типа Коши, взятые вдоль отрезка действительной оси, которые при помощи различных преобразований приводятся к виду:

$$\hat{f}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t) dt}{t-x\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in [-1, 1], \quad (0.1)$$

где интеграл в правой части понимается в смысле главного значения по Коши и для его существования достаточно потребовать, чтобы функция $f(t)$ удовлетворяла на отрезке $[-1, 1]$ условию Липшица любого порядка [1], [2].

Преобразование $\hat{f}(x)$ можно рассматривать также как один из вариантов определения сопряженной функции с функцией f , заданной на отрезке $[-1, 1]$. При этом суперпозиция $\hat{f}(\cos \theta)$ определенным образом выражается через функцию, тригонометрически сопряженную с индуцированной функцией $f(\cos \theta)$, а именно

$$\hat{f}(\cos \theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\cos \tau) \operatorname{ctg} \frac{\tau - \theta}{2} d\tau, \quad x = \cos \theta.$$

Последнее выражение является хорошо известным [3], [4] представлением сопряженной функции с ядром Гильберта 2π -периодической

функции f . С этой функцией связано большое количество задач полиномиальной аппроксимации. Рациональная аппроксимация периодической сопряженной функции исследовалась в [5].

В [6] изучены рациональные аппроксимации сопряженной функции вида (0.1) на отрезке $[-1, 1]$ частичными суммами сопряженных рядов Фурье по одной системе ортогональных рациональных функций Чебышёва – Маркова с двумя геометрически различными полюсами. В частности, найдены оценки равномерных приближений, когда плотность $f(t)$ имеет на отрезке $[-1, 1]$ степенную особенность. Установлено, что специальным выбором полюсов аппроксимирующей функции возможно получить скорость рациональных приближений большего порядка малости в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами.

В 1979 году Е.А. Ровба [7] ввел интегральный оператор на отрезке на основании системы рациональных функций Чебышёва – Маркова, который является обобщением частичных сумм полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва. Пусть задано произвольное множество чисел $\{a_k\}_{k=1}^n$, где a_k либо являются действительными и $|a_k| < 1$, либо попарно комплексно-сопряженными. На множестве суммируемых на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1-x^2)^{-1/2}$ функций $f(x)$ рассмотрим рациональный интегральный оператор [7]:

$$s_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\cos v) \frac{\sin \lambda_n(v, u)}{\sin \frac{v-u}{2}} dv, \quad x = \cos u, \quad (0.2)$$

где

$$\lambda_n(v, u) = \int_u^v \left(\frac{1}{2} + \lambda_n(y) \right) dy,$$

$$\lambda_n(y) = \sum_{k=1}^n \frac{1 - |z_k|^2}{1 + 2|z_k| \cos(y - \arg z_k) + |z_k|^2}, \quad (0.3)$$

$$z_k = \frac{a_k}{1 + \sqrt{1 - a_k^2}}, \quad |z_k| < 1.$$

Оператор $s_n : f \rightarrow \mathbb{R}_n(A)$, где $\mathbb{R}_n(A)$ – множество рациональных функций вида:

$$\frac{p_n(x)}{\prod_{k=1}^n (1 + a_k x)}, \quad p_n(x) \in \mathbb{P}_n,$$

A – множество параметров (a_1, a_2, \dots, a_n) и $s_n(1, x) \equiv 1$. Если положить $z_k = 0, k = 1, \dots, n$, то $s_n(f, x)$ представляет собой частичную сумму полиномиального ряда Фурье – Чебышёва. Новый метод рациональной аппроксимации на отрезке нашел широкое применение в решении практических задач [8]–[10].

В работе [11] построен сопряженный с оператором (0.2) рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышёва

$$\hat{s}_n(f, x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) \frac{\cos \frac{v-u}{2} - \cos \lambda_n(v, u)}{\sin \frac{v-u}{2}} dv,$$

$$x = \cos u, \quad (0.4)$$

где $\lambda_n(v, u)$ определена в (0.3).

Его образом является рациональная функция вида

$$\frac{\sqrt{1-x^2} p_{n-1}(x)}{\prod_{k=1}^n (1 + a_k x)}, \quad p_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}.$$

Там же исследованы рациональные приближения на отрезке $[-1, 1]$ сопряженной функции с плотностью $(1-x)^\gamma, \gamma > 1/2$, сопряженным оператором (0.4) с произвольным фиксированным количеством геометрически различных полюсов. Найдены их оптимальные значения, при которых обеспечивается наибольшая скорость убывания равномерных рациональных приближений введенным методом. При этом порядки равномерных рациональных приближений оказываются выше в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами.

Приближения периодических функций усеченными средними тригонометрических рядов Фурье впервые рассмотрел Валле Пуссен [12], [13]. Изучению аппроксимационных свойств средних Валле Пуссена тригонометрических рядов Фурье на различных функциональных классах посвящено значительное число работ (см., напр., [14]–[19]). Л.М. Абрамов [20] установил асимптотическое выражение функций Лебега сумм Валле Пуссена рядов Фурье – Чебышёва. Впоследствии исследованию аппроксимационных свойств сумм Валле Пуссена рядов Фурье – Чебышёва в равномерной метрике на различных функциональных классах посвящены работы И.М. Ганзбурга [21], А.Ф. Тимана и И.М. Ганзбурга [22], Т.О. Оматаева [23].

Приближения сопряженных 2π -периодических функций суммами Валле Пуссена сопряженных тригонометрических рядов Фурье исследовались в работах А.Д. Щербиной [24], А.Ф. Тимана [25], С.А. Теляковского [16], [26], В.А. Дудаса [27], С.П. Байбородова [28] и других известных специалистов в области теории функций.

В 1977 году В.Н. Русак [29] ввел рациональные операторы типа Валле Пуссена на вещественной оси и исследовал некоторые их аппроксимационные свойства. В работе [30] был построен алгебраический рациональный интегральный оператор типа Валле Пуссена на отрезке и получены оценки равномерных приближений функций, дифференцируемых в смысле Римана – Лиувилля, при специальном выборе полюсов у аппроксимирующей функции. В работе [31] были изучены аппроксимационные свойства рациональных интегральных операторов типа

Валле Пуссена на отрезке $[-1, 1]$ на классах функций ограниченной вариации с заданным модулем непрерывности. В частности, было установлено, что для данного класса функций равномерные приближения имеют порядок наилучшего. В работах [32], [33] авторами были введены суммы Валле Пуссена рационального интегрального оператора Фурье – Чебышёва (0.2) с произвольным фиксированным количеством геометрически различных полюсов и исследованы его аппроксимационные свойства в приближениях на классах интегралов Пуассона и функции Маркова на отрезке $[-1, 1]$ соответственно.

В [34] были введены суммы Фейера сопряженного рационального оператора Фурье – Чебышёва (0.4) с произвольным фиксированным числом геометрически различных полюсов и найдены оценки приближений сопряженной функции с плотностью, имеющей на отрезке $[-1, 1]$ степенную особенность. Установлено, что специальным выбором параметра аппроксимирующей функции можно добиться увеличения скорости рациональных приближений в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами.

Представляет интерес ввести суммы Валле Пуссена сопряженного рационального оператора Фурье – Чебышёва (0.4) с произвольным фиксированным числом геометрически различных полюсов и исследовать их аппроксимационные свойства. В работе устанавливается интегральное представление соответствующих приближений, и изучаются приближения на отрезке $[-1, 1]$ сопряженной функции с плотностью, имеющей степенную особенность. В заключительной части найдены оптимальные значения параметров аппроксимирующей функции, при которых обеспечивается наибольшая скорость убывания мажоранты рациональных приближений изучаемым аппаратом.

1 Суммы Валле Пуссена сопряженных интегральных операторов Фурье – Чебышёва

Пусть q – произвольное натуральное число. A_q есть подмножество параметров A (см. (0.2)) таких, что среди чисел a_1, a_2, \dots, a_n , ровно q различных и кратность каждого параметра равна $m, n = mq, n > q$. Таким образом, будем вести речь об аппроксимации рациональными функциями с q геометрически различными полюсами в расширенной комплексной плоскости.

Составим сумму:

$$\hat{V}_{2n,q}(f, x) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=m}^{2m} \hat{s}_{kq}(f, x), \quad x \in [-1, 1], \quad m \in \mathbb{N}, \quad (1.1)$$

где $\hat{s}_{kq}(f, x)$ определена в (0.4).

Выражение (1.1) естественно назвать суммами Валле Пуссена сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва с q геометрически различными полюсами.

Заметим, что приближения непрерывных функций с характерными особенностями рациональными функциями с фиксированным числом геометрически различных полюсов впервые рассматривались в работах К.Н. Лунгу [35], [36].

Введем следующие обозначения

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}(f, x, A_q) = \hat{f}(x) - \hat{V}_{2n,q}(f, x), \quad x \in [-1, 1],$$

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}(f, A_q) = \|\hat{f}(x) - \hat{V}_{2n,q}(f, x)\|_{C[-1,1]}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема 1.1. Для приближений сопряженной функции (0.1) на отрезке $[-1, 1]$ суммами Валле Пуссена (1.1) имеет место интегральное представление

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) G_{2n}(v, u) dv, \quad x = \cos u, \quad (1.2)$$

где

$$G_{2n}(v, u) = \frac{\sin\left(\frac{v-u}{2} + \left(2m + \frac{1}{2}\right)\lambda_q^*\right) - \sin\left(\frac{v-u}{2} + \left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda_q^*\right)}{4\pi(m+1)\sin\frac{v-u}{2}\sin\frac{\lambda_q^*}{2}},$$

$$n = mq,$$

$$\lambda_q^* = \lambda_q^*(v, u) = \int_u^v \sum_{k=1}^q \frac{1 - |z_k|^2}{1 + 2|z_k|\cos(y - \arg z_k) + |z_k|^2} dy. \quad (1.3)$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}(f, x) = \frac{1}{m+1} \left((2m+1)\hat{\delta}_{2n,q}(f, x) - m\hat{\delta}_{n-q,q}(f, x) \right), \quad (1.4)$$

$$x \in [-1, 1], \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $\hat{\delta}_n(f, x)$ – приближения на отрезке $[-1, 1]$ сопряженной функции (0.1) сопряженным рациональным интегральным оператором Фейера [33] порядка n в случае $q, n = mq$, геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции. Известно [33], что

$$\hat{\delta}_{n,q}(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) K_n(v, u) dv, \quad x = \cos u,$$

где

$$K_n(v, u) = \frac{1}{8\pi(m+1)\sin\frac{v-u}{2}\sin^2\frac{\lambda_q^*}{2}} \times$$

$$\times \left(\cos\frac{v-u}{2} - \cos\left(\frac{v-u}{2} - \lambda_q^*\right) + \right.$$

$$\left. + \cos\left(\frac{v-u}{2} + m\lambda_q^*\right) - \cos\left(\frac{v-u}{2} + (m+1)\lambda_q^*\right) \right),$$

$$n = mq,$$

$\lambda_q^* = \lambda_q^*(v, u)$ определена в теореме 1.1. Положив в ядре $K_n(v, u)$ последнего интегрального представления $m \mapsto 2m$ и $m \mapsto m-1$, получим

последовательно приближения суммами Фейера $\hat{\delta}_{2n,q}(f, x)$ и $\hat{\delta}_{n-q,q}(f, x)$ соответственно. Подставив эти представления в (1.4), после несложных преобразований придем к (1.2). \square

В теореме 1.1 положим значения параметров $a_k = 0, k = 1, 2, \dots, q$. Тогда $A_q = (0, 0, \dots, 0) = O$ и величина $\hat{\varepsilon}_{2n,1}(f, x, O) = \hat{\varepsilon}_{2n}^{(0)}(f, x)$ представляет собой приближения сопряженной функции (0.1) суммами Валле Пуссена сопряженного полиномиального ряда Фурье – Чебышёва. Из теоремы 1.1 получаем

Следствие 1.1. *Имеет место интегральное представление*

$$\hat{\varepsilon}_{2n}^{(0)}(f, x) = \frac{1}{4\pi(n+1)} \times \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) \frac{\sin(2n+1)(v-u) - \sin n(v-u)}{\sin^2 \frac{v-u}{2}} dv, \\ x = \cos u, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для доказательства последнего интегрального представления достаточно в (1.2) положить параметры $a_k = 0, k = 1, 2, \dots, q$.

2 Приближения сопряженной функции с плотностью, имеющей степенную особенность

Изучим приближения сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x) = (1-x)^\gamma, \gamma \in (0, 1)$, суммами Валле Пуссена (1.1). Пусть параметры $z_k, k = 1, 2, \dots, q$, выбраны следующим образом:

$$z_k \mapsto -\alpha_k, \quad \alpha_k \in [0, 1], \quad k = 1, 2, \dots, q.$$

Теорема 2.1. *Для приближений сопряженной функции (0.1) с плотностью $f_\gamma(x), \gamma \in (0, 1)$ на отрезке $[-1, 1]$ суммами Валле Пуссена (1.1) имеют место:*

1) *интегральное представление:*

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}(f_\gamma, x, A_q) = -\frac{2^{1-\gamma} \sin \pi\gamma}{\pi(m+1)} \times \int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma} t^{-\gamma}}{\sqrt{1-2t \cos u + t^2}} \Omega_n(t, x) \sin \psi_n(x, t) \omega_q^m(t) dt, \quad (2.1)$$

где

$$\Omega_n(t, x) = \sqrt{\frac{1 - 2\omega_q^{m+1}(t)M_{q(m+1)}(x) + \omega_q^{2(m+1)}(t)}{1 - 2\omega_q(t)M_q(x) + \omega_q^2(t)}},$$

$$\psi_n(x, t) = \arg \frac{\xi \omega_q^m(\xi)}{1 - t\xi} + \arg \frac{1 - (\omega_q(\xi)\omega_q(t))^{m+1}}{1 - \omega_q(\xi)\omega_q(t)},$$

$$\omega_q(t) = \prod_{k=1}^q \frac{t - \alpha_k}{1 - \alpha_k t}, \quad \xi = e^{iu},$$

$$M_q(x) = \frac{1}{2} \left(\omega_q(\xi) + \overline{\omega_q(\xi)} \right),$$

– рациональная функция Чебышёва – Маркова порядка q ;

2) *поточечная оценка*

$$|\hat{\varepsilon}_{2n,q}(f_\gamma, x, A_q)| \leq \frac{2^{1-\gamma} \sin \pi\gamma}{\pi(m+1)} \int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma} t^{-\gamma}}{\sqrt{1-2tx+t^2}} \Omega_n(t, x) |\omega_q(t)|^m dt, \quad (2.2)$$

$$x \in [-1, 1];$$

3) *равномерная оценка*

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}(f_\gamma, A_q) \leq \hat{\varepsilon}_{2n,q}^*(f_\gamma, A_q), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.3)$$

где

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}^*(f_\gamma, A_q) = \frac{2^{1-\gamma} \sin \pi\gamma}{\pi(m+1)} \times \int_0^1 (1-t)^{2\gamma-1} t^{-\gamma} \frac{1 - |\omega_q(t)|^{m+1}}{1 - |\omega_q(t)|} |\omega_q(t)|^m dt. \quad (2.4)$$

Доказательство. Воспользуемся соотношением (1.4). Известно [32], что для приближений сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x)$ суммами Фейера сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва имеет место интегральное представление

$$\hat{\delta}_{n,q}(f_\gamma, x, A_q) = \frac{-\sin \pi\gamma}{2^\gamma \pi i(m+1)} \times \int_0^1 (1-t)^{2\gamma} t^{-\gamma} \left[\frac{\xi(1 - (\omega_q(\xi)\omega_q(t))^{m+1})}{(1-t\xi)(1 - \omega_q(\xi)\omega_q(t))} - \frac{1 - (\overline{\omega_q(\xi)\omega_q(t)})^{m+1}}{(\xi-t)(1 - \overline{\omega_q(\xi)\omega_q(t)})} \right] dt, \quad n = mq, \quad x = \cos u.$$

Положив в последнем интегральном представлении последовательно $m \mapsto 2m$ и $m \mapsto m-1$ и подставив найденные соотношения в (1.4), придем к представлению

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}(f_\gamma, x, A_q) = \frac{-\sin \pi\gamma}{2^\gamma \pi i(m+1)} \int_0^1 (1-t)^{2\gamma} t^{-\gamma} \times \left[\frac{\xi((\omega_q(\xi)\omega_q(t))^m - (\omega_q(\xi)\omega_q(t))^{2m+1})}{(1-t\xi)(1 - \omega_q(\xi)\omega_q(t))} - \frac{(\overline{\omega_q(\xi)\omega_q(t)})^m - (\overline{\omega_q(\xi)\omega_q(t)})^{2m+1}}{(\xi-t)(1 - \overline{\omega_q(\xi)\omega_q(t)})} \right] dt.$$

Заметив, что выражения в квадратных скобках подынтегрального выражения являются взаимно комплексно-сопряженными, чтобы прийти к (2.1) достаточно выполнить соответствующие преобразования и учесть, что [37, С. 50]

$$M_q(x) = (1/2)(\omega_q(\xi) + \overline{\omega_q(\xi)}),$$

$$\xi = e^{iu}, \quad x = \cos u,$$

– рациональная косинус-дробь Чебышёва – Маркова порядка q .

Соотношение (2.2) легко следует из интегрального представления (2.1).

Для доказательства третьего утверждения теоремы 2.1 в (2.2) воспользуемся оценкой

$$\Omega_n(t, x) = \sqrt{\frac{1 - 2\omega_q^{m+1}(t)M_{q(m+1)}(x) + \omega_q^{2(m+1)}(t)}{1 - 2\omega_q(t)M_q(x) + \omega_q^2(t)}} \leq$$

$$\leq \frac{1 - |\omega_q(t)|^{m+1}}{1 - |\omega_q(t)|}, \quad t \in [0, 1], \quad m \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2.1 доказана. \square

В теореме 2.1 положим значение параметров $\alpha_k = 0, k = 1, 2, \dots, q$. Тогда

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}^{(0)}(f_\gamma, x, O) = \hat{\varepsilon}_{2n}^{(0)}(f_\gamma, x)$$

представляют собой приближения сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ суммами Валле Пуссена сопряженного полиномиального ряда Фурье – Чебышёва. Отсюда получаем

Следствие 2.1. Для приближений суммами Валле Пуссена сопряженного полиномиального ряда Фурье – Чебышёва сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x)$, $\gamma \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$, на отрезке $[-1, 1]$ имеют место:

1) интегральное представление:

$$\hat{\varepsilon}_{2n}^{(0)}(f_\gamma, x) = -\frac{2^{1-\gamma} \sin \pi \gamma}{\pi(n+1)} \int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma} t^{n-\gamma}}{(1-2tx+t^2)^2} P_n(t, x) dt,$$

$$x \in [-1, 1];$$

где

$$P_n(t, x) = \sin(n+1)u - 2t \sin nu + t^2 \sin(n-1)u -$$

$$-t^{n+1} \sin(2n+2)u + 2t^{n+2} \sin(2n+1)u - t^{n+3} \sin 2nu,$$

$$x = \cos u;$$

2) поточечная оценка

$$|\hat{\varepsilon}_{2n}^{(0)}(f_\gamma, x)| \leq$$

$$\leq \frac{2^{1-\gamma} |\sin \pi \gamma|}{\pi(n+1)} \int_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma} t^{n-\gamma} \sqrt{1-2t^{n+1}T_{n+1}(x)+t^{2n+2}}}{1-2tx+t^2} dt,$$

$$x \in [-1, 1],$$

где $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ – полином Чебышёва первого рода степени n ;

3) равномерная оценка:

$$\hat{\varepsilon}_{2n}^{(0)}(f_\gamma) \leq \frac{2^{1-\gamma} |\sin \pi \gamma|}{\pi(n+1)} \int_0^1 (1-t)^{2\gamma-1} t^{-\gamma} \frac{t^n - t^{2n+1}}{1-t} dt,$$

$$n \in \mathbb{N}.$$

Утверждения последнего следствия легко получить если положить в теореме 2.1 значения всех параметров равными нулю. Отметим, что в полиномиальном случае ограничения на параметр γ , $\gamma \in (0, 1)$, могут быть сняты в предположении достаточно большого n , $n+1 > \gamma$.

3 Асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений

Исследуем асимптотическое поведение величины (2.4) при $m \rightarrow \infty$. Для решения этой задачи в правой части (2.4) выполним замену переменного по формуле $t = (1-u)/(1+u)$, $dt = -2du/(1+u)^2$. Тогда

$$\hat{\varepsilon}_{2n}^*(f_\gamma, A_q) = \quad (3.1)$$

$$= \frac{2^{\gamma+1} \sin \pi \gamma}{\pi(m+1)} \int_0^1 \mu_\gamma(u) \frac{|\pi_q(u)|^m - |\pi_q(u)|^{2m+1}}{1 - |\pi_q(u)|} du, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\text{где } \mu_\gamma(u) = \frac{u^{2\gamma-1}}{(1+u)(1-u^2)^\gamma}, \quad \pi_q(u) = \prod_{k=1}^q \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u},$$

$$\beta_k = \frac{1 - \alpha_k}{1 + \alpha_k}, \quad \beta_k \in (0, 1].$$

Отметим, что в рассматриваемом нами случае для каждого значения $n \in \mathbb{N}$ может выбираться соответствующий набор параметров $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q)$, то есть вообще говоря $\alpha_k = \alpha_k(m)$, $k = 1, 2, \dots, q$. В связи с этим будем полагать, что выполняется следующее условие

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m(1 - \alpha_k) = \infty, \quad k = 1, 2, \dots, q, \quad (3.2)$$

и учитывать его в дальнейших рассуждениях. Без нарушения общности можно полагать параметры β_k , $k = 1, 2, \dots, q$, упорядоченными следующим образом: $0 < \beta_q \leq \dots \leq \beta_1 \leq 1$.

Теорема 3.1. Для мажоранты равномерных приближений сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x)$, $\gamma \in (0, 1)$, суммами Валле Пуссена (1.1) при $m \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические равенства:

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}^*(f_\gamma, A_q) \sim$$

$$\sim \frac{\sin \pi \gamma}{\pi} \left\{ \begin{array}{l} \frac{2^{1-\gamma} \Gamma(2\gamma)(2^{1-2\gamma} - 1)}{(1-2\gamma) \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right)^{2\gamma} (m+1)^{2\gamma}} + \Phi_n^{(\gamma)}(A_q), \\ \gamma \in (0; 0,5), \\ \frac{\sqrt{2} \ln 2}{\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} (m+1)} + \Phi_n^{(\frac{1}{2})}(A_q), \quad \gamma = \frac{1}{2}, \\ \frac{2^{2-3\gamma} \Gamma(2\gamma)(2^{2\gamma-1} - 1)}{(2\gamma-1) \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right)^{2\gamma} (m+1)^{2\gamma}} + \Phi_n^{(\gamma)}(A_q), \\ \gamma \in (0,5; 1), \end{array} \right. \quad (3.3)$$

$$\text{где } \Phi_n^{(\gamma)}(A_q) = \frac{2^{\gamma+\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}}{(m+1)^{\frac{3}{2}}} \times \quad (3.5)$$

$$\times \sum_{j=1}^{q-1} \frac{b_j^{2\gamma-\frac{3}{2}} |\pi_q(b_j)|^m}{(1-b_j^2)^\gamma (1+b_j)(1-|\pi_q(b_j)|)} \sqrt{\sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 - b_j^2)^2}}$$

$$+ \frac{\Gamma(1-\gamma)}{2^{1-\gamma} (m+1)^{2-\gamma} \left(1 - \prod_{k=1}^q \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k} \right) \left(\sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{1-\beta_k^2} \right)^{1-\gamma}} \times$$

$$\times \left(\prod_{k=1}^q \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k} \right)^m,$$

b_j – единственный корень уравнения

$$\sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{u^2 - \beta_k^2} = 0, \quad (3.5)$$

на интервале (β_{j+1}, β_j) , $j = 1, \dots, q-1$,

$\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера, $n = mq$.

Доказательство. Введем следующие обозначения

$$I_n^{(1)}(A_q) = \int_0^{\beta_q} \mu_\gamma(u) \frac{\pi_q^m(u) - \pi_q^{2m+1}(u)}{1 - \pi_q(u)} du,$$

$$I_n^{(2)}(A_q) = \sum_{j=1}^{q-1} \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \mu_\gamma(u) \frac{|\pi_q(u)|^m - |\pi_q(u)|^{2m+1}}{1 - |\pi_q(u)|} du,$$

$$I_n^{(3)}(A_q) = \int_{\beta_1}^1 \mu_\gamma(u) \frac{|\pi_q(u)|^m - |\pi_q(u)|^{2m+1}}{1 - |\pi_q(u)|} du.$$

Тогда из равенства (3.1) находим, что

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}^*(f_\gamma, A_q) = \frac{2^{\gamma+1} \sin \pi\gamma}{\pi(m+1)} [I_n^{(1)}(A_q) + I_n^{(2)}(A_q) + I_n^{(3)}(A_q)], \quad (3.6)$$

$$n \in \mathbb{N}.$$

Изучим по отдельности асимптотическое поведение при $m \rightarrow \infty$ каждого из интегралов справа. Результаты сформулируем в виде трех лемм.

Лемма 3.1. При $m \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические равенства

$$I_n^{(1)}(A_q) \sim \quad (3.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Gamma(2\gamma)(2^{1-2\gamma} - 1)(m+1)^{1-2\gamma}}{(1-2\gamma) \left(2 \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right)^{2\gamma}}, \gamma \in \left(0, \frac{1}{2} \right), \\ \frac{\ln 2}{2 \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}}, \gamma = \frac{1}{2}, \\ \frac{\Gamma(2\gamma)(2^{2\gamma-1} - 1)}{2^{2\gamma-1}(2\gamma-1) \left(2 \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right)^{2\gamma} (m+1)^{2\gamma-1}}, \gamma \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right), \end{array} \right.$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

Доказательство. Воспользуемся методами исследования асимптотического поведения интегралов, предложенными в [38, с. 375]. Продифференцировав интеграл $I_n^{(1)}(A_q)$ по параметру m , получим

$$\frac{\partial I_n^{(1)}(A_q)}{\partial m} = \int_0^{\beta_q} \mu_\gamma(u) \frac{\ln \pi_q(u)}{1 - \pi_q(u)} [e^{mS(u)} - 2e^{(2m+1)S(u)}] du,$$

$$S(u) = \sum_{k=1}^q \ln \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}.$$

Для исследования асимптотического поведения интеграла справа в последнем равенстве воспользуемся методом Лапласа [39], [40]. Функция $S(u)$ убывает на отрезке $[0, \beta_q]$, поскольку

$$S'(u) = -2 \sum_{k=1}^q \beta_k / (\beta_k^2 - u^2) < 0, \text{ и, следовательно,}$$

достигает своего максимального значения при $u = 0$. Учитывая разложение в ряд Тейлора

$$S(u) = -2u \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} + o(u),$$

и асимптотическое равенство

$$\mu_\gamma(u) \frac{\ln \pi_q(u)}{1 - \pi_q(u)} \sim -u^{2\gamma-1},$$

справедливые при $u \rightarrow 0$, для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$ и $m \rightarrow \infty$ будем иметь

$$\frac{\partial I_n^{(1)}(A_q)}{\partial m} \sim - \int_0^\varepsilon u^{2\gamma-1} e^{-2mu \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}} du + 2 \int_0^\varepsilon u^{2\gamma-1} e^{-2(2m+1)u \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}} du.$$

Выполнив в первом интеграле замену переменного $2mu \sum_{k=1}^q 1/\beta_k \mapsto u$, а во втором замену пере-

менного $2(2m+1)u \sum_{k=1}^q 1/\beta_k \mapsto u$, получим

$$\frac{\partial I_n^{(1)}(A_q)}{\partial m} \sim \frac{-1}{\left(2 \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right)^{2\gamma}} \left(\frac{1}{m^{2\gamma}} \int_0^{2\varepsilon m \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}} u^{2\gamma-1} e^{-u} du - \frac{2}{(2m+1)^{2\gamma}} \int_0^{2\varepsilon(2m+1) \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}} u^{2\gamma-1} e^{-u} du \right), \quad m \rightarrow \infty.$$

Принимая во внимание, что

$$\int_0^{+\infty} u^{2\gamma-1} e^{-u} du = \Gamma(2\gamma), \quad 2\gamma > 0,$$

при $m \rightarrow \infty$ будем иметь

$$\frac{\partial I_n^{(1)}(A_q)}{\partial m} \sim \frac{-\Gamma(2\gamma)}{\left(2 \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right)^{2\gamma}} \left[\frac{1}{m^{2\gamma}} - \frac{2}{(2m+1)^{2\gamma}} \right], \quad m \rightarrow \infty.$$

Чтобы вернуться к асимптотическому выражению величины $I_n^{(1)}(A_q)$, проинтегрируем правую и левую части последнего асимптотического равенства по параметру m . Выполнив указанное действие, придем к (3.7) для соответствующих значений параметра γ , $\gamma \in (0, 1)$. \square

Лемма 3.2. При $m \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое равенство:

$$I_n^{(2)}(A_q) \sim \quad (3.8)$$

$$\sim \sqrt{\frac{\pi}{2m}} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{b_j^{2\gamma-\frac{3}{2}} |\pi_q(b_j)|^m}{(1-b_j^2)^\gamma (1+b_j)(1-|\pi_q(b_j)|) \sqrt{\sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{(\beta_k^2-b_j^2)^2}},$$

где $b_j, j=1,2,\dots,q-1$, определены в формулировке теоремы 3.1.

Доказательство. Запишем

$$I_n^{(2)}(A_q) = \sum_{j=1}^{q-1} \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{\mu_\gamma(u)}{1-|\pi_q(u)|} [e^{mS(u)} - e^{(2m+1)S(u)}] du,$$

где

$$S(u) = \sum_{k=1}^j \ln \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} + \sum_{k=j+1}^q \ln \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k}.$$

Поскольку

$$S'(u) = \sum_{k=1}^j \frac{-2\beta_k}{\beta_k^2 - u^2} + \sum_{k=j+1}^q \frac{2\beta_k}{u^2 - \beta_k^2},$$

$$S''(u) = \sum_{k=1}^j \frac{-4\beta_k u}{(\beta_k^2 - u^2)^2} + \sum_{k=j+1}^q \frac{-4\beta_k u}{(u^2 - \beta_k^2)^2} < 0,$$

$$u \in (\beta_{j+1}, \beta_j),$$

причем $\lim_{u \rightarrow \beta_{j+1}} S'(u) = +\infty, \lim_{u \rightarrow \beta_j} S'(u) = -\infty$, то заключаем, что существует внутренняя точка $b_j \in (\beta_{j+1}, \beta_j)$, в которой функция $S(u)$ достигает на этом интервале максимума и $S'(b_j) = 0$.

Используя разложения

$$S(u) = \sum_{k=1}^j \ln \frac{\beta_k - b_j}{\beta_k + b_j} + \sum_{k=j+1}^q \ln \frac{b_j - \beta_k}{b_j + \beta_k} - 2b_j(u - b_j)^2 \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 - b_j^2)^2} + o((u - b_j)^2),$$

и
$$\frac{\mu_\gamma(u)}{1-|\pi_q(u)|} = \frac{\mu_\gamma(b_j)}{1-|\pi_q(b_j)|} + O((u - b_j)),$$

справедливые при $u \rightarrow b_j$, для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$ и $m \rightarrow \infty$ находим, что

$$I_n^{(2)}(A_q) \sim \sum_{j=1}^{q-1} \frac{\mu_\gamma(b_j)}{1-|\pi_q(b_j)|} \times \left(|\pi_q(b_j)|^m \int_{b_j-\varepsilon}^{b_j+\varepsilon} e^{-2b_j m(u-b_j)^2 \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{(\beta_k^2-b_j^2)^2}} du - |\pi_q(b_j)|^{2m+1} \int_{b_j-\varepsilon}^{b_j+\varepsilon} e^{-2b_j(2m+1)(u-b_j)^2 \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{(\beta_k^2-b_j^2)^2}} du \right). \quad (3.9)$$

Выполнив в каждом из интегралов под знаком круглых скобок последовательно замену переменного $u - b_j \mapsto u$, затем для каждого из интегралов соответствующие замены переменных

$$2b_j m \sum_{k=1}^q \beta_k / (\beta_k^2 - b_j^2)^2 u^2 \mapsto t^2 \text{ и}$$

$$2b_j(2m+1) \sum_{k=1}^q \beta_k / (\beta_k^2 - b_j^2)^2 u^2 \mapsto t^2$$

и учитывая, что $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, из (3.9) при $m \rightarrow \infty$ будем иметь

$$I_n^{(2)}(A_q) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{\mu_\gamma(b_j) b_j^{-1/2}}{(1-|\pi_q(b_j)|) \sqrt{\sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 - b_j^2)^2}} \times \left(\frac{|\pi_q(b_j)|^m}{\sqrt{m}} - \frac{|\pi_q(b_j)|^{2m+1}}{\sqrt{2m+1}} \right).$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{|\pi_q(b_j)|^m}{\sqrt{m}} - \frac{|\pi_q(b_j)|^{2m+1}}{\sqrt{2m+1}} = \frac{|\pi_q(b_j)|^m}{\sqrt{m}} \left(1 - \sqrt{\frac{m}{2m+1}} |\pi_q(b_j)|^{m+1} \right) = \frac{|\pi_q(b_j)|^m}{\sqrt{m}} (1 + o(1)),$$

поскольку $|\pi_q(b_j)|^m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, из последнего асимптотического равенства получим соотношение (3.8). \square

Лемма 3.3. При $m \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое равенство:

$$I_n^{(3)}(A_q) \sim \quad (3.10)$$

$$\sim \frac{\Gamma(1-\gamma)}{4 \left(1 - \prod_{k=1}^q \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k} \right) \left(m \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{1-\beta_k^2} \right)^{1-\gamma} \left(\prod_{k=1}^q \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k} \right)^m}.$$

Доказательство. Интеграл $I_n^{(3)}(A_q)$ представим в виде

$$I_n^{(3)}(A_q) = \int_{\beta_1}^1 \frac{\mu_\gamma(u)}{1-|\pi_q(u)|} [e^{mS(u)} - e^{(2m+1)S(u)}] du,$$

$$S(u) = \sum_{k=1}^q \ln \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k}.$$

Для исследования асимптотического поведения интеграла, как и прежде, воспользуемся методом Лапласа [39], [40]. Поскольку

$$S'(u) = 2 \sum_{k=1}^q \beta_k / (u^2 - \beta_k^2) > 0,$$

то заключаем, что функция $S(u)$ возрастает при $u \in [\beta_1, 1]$ и, значит, достигает своего максимального значения при $u = 1$. Раскладывая функцию $S(u)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $u = 1$:

$$S(u) = \sum_{k=1}^q \ln \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k} + 2 \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{1-\beta_k^2} (u-1) + o(u-1),$$

$$u \rightarrow 1,$$

и отмечая, что

$$\frac{\mu_\gamma(u)}{1-|\pi_q(u)|} \sim \frac{(1-u)^{-\gamma}}{2^{1+\gamma} \left(1 - \prod_{k=1}^q \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k} \right)}, \quad u \rightarrow 1,$$

для некоторого достаточно малого $\varepsilon > 0$ и $m \rightarrow \infty$ находим

$$I_n^{(3)}(A_q) \sim \frac{1}{2^{1+\gamma} \left(1 - \prod_{k=1}^q \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right)} \left(\prod_{k=1}^q \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right)^m \times \left[\int_{1-\varepsilon}^1 (1-u)^{-\gamma} e^{2m \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{1-\beta_k^2}(u-1)} du - \left(\prod_{k=1}^q \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right)^{m+1} \int_{1-\varepsilon}^1 (1-u)^{-\gamma} e^{2(2m+1) \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{1-\beta_k^2}(u-1)} du \right].$$

Выполнив в интегралах справа последовательно замены переменных по формуле $1-u \mapsto u$, затем для первого интеграла замену

$$2m \sum_{k=1}^q \beta_k / (1-\beta_k^2) u \mapsto u,$$

а для второго интеграла замену

$$2(2m+1) \sum_{k=1}^q \beta_k / (1-\beta_k^2) u \mapsto u,$$

придем к асимптотическому равенству

$$I_n^{(3)}(A_q) \sim \frac{\Gamma(1-\gamma)}{4 \left(1 - \prod_{k=1}^q \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right) \left(m \sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{1-\beta_k^2}\right)^{1-\gamma} \left(\prod_{k=1}^q \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right)^m} \times \left[1 - \left(\frac{m}{2m+1}\right)^{1-\gamma} \left(\prod_{k=1}^q \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right)^{m+1} \right], \quad m \rightarrow \infty.$$

Чтобы из последнего асимптотического равенства прийти к (3.10), достаточно заметить, что с учетом условия (3.2)

$$\left(\prod_{k=1}^q \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}\right)^{m+1} \sim e^{-2(m+1) \sum_{k=1}^q \beta_k} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \quad \square$$

Вернемся к доказательству теоремы 3.1. Из равенства (3.6) с учетом полученных асимптотических равенств (3.7), (3.8) и (3.10) придем к соотношениям (3.3) и (3.4). Доказательство теоремы 3.1 завершено. \square

Следствие 3.3. Для равномерных приближений сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x)$, $\gamma \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$, суммами Валле Пуссена сопряженного ряда Фурье – Чебышёва справедливы оценки сверху

$$\hat{\varepsilon}_{2n}^{(0)}(f_\gamma) \leq \frac{|\sin \pi \gamma|}{\pi} \times \begin{cases} \frac{2^{1-\gamma} \Gamma(2\gamma)(2^{1-2\gamma} - 1)}{(1-2\gamma)(n+1)^{2\gamma}}, & \gamma \in (0; 0.5), \\ \frac{\sqrt{2} \ln 2}{n+1}, & \gamma = 1/2, \\ \frac{2^{2-3\gamma} \Gamma(2\gamma)(2^{2\gamma-1} - 1)}{(2\gamma-1)(n+1)^{2\gamma}}, & \gamma > 0.5. \end{cases}$$

Доказательство. Следует непосредственно из (3.3) если положить $\alpha_k = 0, k = 1, 2, \dots, q$. \square

Обратим внимание, что в отличие от результатов, полученных в теореме 3.1, в следствии 3.3 ограничения на параметр γ снимаются для достаточно большого n , $n+1 > \gamma$.

4 Наилучшая мажоранта равномерных приближений сопряженной функции суммами Валле Пуссена

Представляет интерес минимизировать правые части соотношений (3.3) посредством выбора оптимального для каждой задачи набора параметров $A_q^* = (a_1^*, \dots, a_q^*)$. Другими словами, найти наилучшую мажоранту равномерных приближений сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ суммами Валле Пуссена (1.1). Для реализации поставленной задачи положим

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}(f_\gamma) = \inf_{A_q} \hat{\varepsilon}_{2n,q}(f_\gamma, A_q),$$

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}^*(f_\gamma) = \inf_{A_q} \hat{\varepsilon}_{2n,q}^*(f_\gamma, A_q).$$

Отметим, что из (2.3) следует справедливость соотношения $\hat{\varepsilon}_{2n,q}(f_\gamma) \leq \hat{\varepsilon}_{2n,q}^*(f_\gamma)$, $n \in \mathbb{N}$. Исходя из этого неравенства, дальше будем иметь дело только с его правой частью.

Теорема 4.1. Справедливы асимптотические равенства:

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}^*(f_\gamma) \sim v(\gamma, q) \left(\frac{\ln^{2q-1} n}{n^{2q}}\right)^{2\gamma}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.1)$$

где

$$v(\gamma, q) = \begin{cases} \frac{2^{1+\gamma} \Gamma(2\gamma)(2^{1-2\gamma} - 1)(q^{2q+1} \gamma^{2q-1})^{2\gamma} [(q-1)!]^{4\gamma}}{1-2\gamma}, & \gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ \sqrt{2} \ln 2 \cdot q^{2q+1} \frac{[(q-1)!]^2}{2^{2q-2}}, & \gamma = \frac{1}{2}, \\ \frac{2^{2-\gamma} \Gamma(2\gamma)(2^{2\gamma-1} - 1)(q^{2q+1} \gamma^{2q-1})^{2\gamma} [(q-1)!]^{4\gamma}}{2\gamma-1}, & \gamma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases}$$

Доказательство. Очевидно, что при постоянных значениях параметров $\beta_k, k = 1, 2, \dots, q$, порядок стремления к нулю правой части асимптотических равенств (3.3) не будет отличаться от полиномиального, определенного в следствии 3.3. Пусть набор параметров задан следующим образом:

$$\alpha_k = \frac{1-\beta_k}{1+\beta_k}, \beta_k = c_k \left(\frac{\ln m}{m}\right)^{2k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, q, \quad (4.2)$$

где c_k – коэффициенты, подлежащие определению. Изучим асимптотическое поведение правой части соотношения (3.3) в этом случае. Прежде

всего исследуем величину (3.4). Для выполнения этой задачи необходимо выяснить характер параметров b_j , $j = 1, 2, \dots, q-1$, входящих в нее и являющихся корнями уравнения (3.5). Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 4.1. В условиях (4.2) на параметры β_k , $k = 1, 2, \dots, q$, для корней уравнения (3.5) справедливо асимптотическое равенство

$$b_j \sim \sqrt{c_j c_{j+1}} \left(\frac{\ln m}{m} \right)^{2j}, \quad j = 1, 2, \dots, q-1, \quad m \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Уравнение (3.5) представим в виде

$$\sum_{k=1}^j \frac{1}{\beta_k (1 - (u/\beta_k))^2} = \frac{1}{u^2} \sum_{k=j+1}^q \frac{\beta_k}{1 - (\beta_k/u)^2}, \quad (4.3)$$

$$j = 1, \dots, q-1.$$

Для каждого фиксированного $j = 1, 2, \dots, q-1$ корень $b_j \in (\beta_{j+1}, \beta_j)$ удовлетворяет неравенствам

$$c_{j+1} \left(\frac{\ln m}{m} \right)^{2j+1} < b_j < c_j \left(\frac{\ln m}{m} \right)^{2j-1}, \quad j = 1, \dots, q-1.$$

Отсюда при заданных значениях параметров β_k , $k = 1, 2, \dots, q$, и $m \rightarrow \infty$ находим, что слева в (4.3)

$$\sum_{k=1}^j \frac{1}{\beta_k (1 - (b_j/\beta_k))^2} \sim \sum_{k=1}^j \frac{1}{\beta_k} \sim \frac{1}{c_j} \left(\frac{m}{\ln m} \right)^{2j-1}.$$

При этом справа в (4.3) устанавливаем, что

$$\frac{1}{b_j^2} \sum_{k=j+1}^q \frac{\beta_k}{1 - (b_j/\beta_k)^2} \sim \frac{1}{b_j^2} \sum_{k=j+1}^q \beta_k \sim \frac{c_{j+1}}{b_j^2} \left(\frac{\ln m}{m} \right)^{2j+1},$$

$$m \rightarrow \infty.$$

Подставив два последних асимптотических равенства в (4.3) получим

$$\frac{1}{c_j} \left(\frac{m}{\ln m} \right)^{2j-1} \sim \frac{c_{j+1}}{b_j^2} \left(\frac{\ln m}{m} \right)^{2j+1}, \quad m \rightarrow \infty,$$

откуда следует утверждение леммы 4.1. \square

Вернемся к доказательству теоремы 4.1. Используя результаты последней леммы, нетрудно показать, что

$$|\pi_q(b_j)| \sim e^{-4 \sqrt{\frac{c_{j+1} \ln m}{c_j m}}}, \quad j = 1, \dots, q-1, \quad m \rightarrow \infty.$$

Отсюда сразу же следует, что

$$1 - |\pi_q(b_j)| \sim 4 \sqrt{\frac{c_{j+1} \ln m}{c_j m}}, \quad |\pi_q(b_j)|^m \sim \frac{1}{m^{4 \sqrt{\frac{c_{j+1}}{c_j}}}},$$

$$m \rightarrow \infty.$$

Несложными рассуждениями приходим к асимптотическому соотношению

$$\sqrt{\sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 - b_j^2)^2}} \sim \frac{\sqrt{c_{j+1}}}{c_j c_{j+1}} \left(\frac{m}{\ln m} \right)^{3j - \frac{1}{2}},$$

$$j = 1, 2, \dots, q-1, \quad m \rightarrow \infty.$$

Из легко проверяемого асимптотического равенства

$$\prod_{k=1}^q \frac{1 - \beta_k}{1 + \beta_k} \sim e^{-2c_1 \frac{\ln m}{m}}, \quad m \rightarrow \infty,$$

нетрудно получить, что:

$$1 - \prod_{k=1}^q \frac{1 - \beta_k}{1 + \beta_k} \sim 2c_1 \frac{\ln m}{m}, \quad \left(\prod_{k=1}^q \frac{1 - \beta_k}{1 + \beta_k} \right)^m \sim \frac{1}{m^{2c_1}},$$

$$m \rightarrow \infty;$$

$$\sum_{k=1}^q \frac{\beta_k}{1 - \beta_k^2} \sim c_1 \frac{\ln m}{m}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Учитывая сказанное, для величины (3.4) придем к асимптотическому выражению

$$\Phi_n^{(\gamma)}(A_q) \sim 2^{2+\gamma} \sqrt{\pi} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{(c_j c_{j+1})^{\frac{4j\gamma-3j}{2}} c_j^{\frac{3}{2}} (\ln m)^{4j\gamma-\frac{3}{2}}}{m^{4j\gamma+4} \sqrt{\frac{c_{j+1}}{c_j}}} +$$

$$+ \frac{\Gamma(1-\gamma)}{(2c_1 \ln m)^{2-\gamma} m^{2c_1}}, \quad m \rightarrow \infty.$$

При найденном асимптотическом равенстве, обратимся к соотношению (3.3). Будем различать случаи. Пусть $\gamma \in (0, 1/2)$. В этом случае из (3.3) находим

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}^*(f_\gamma, A_q) \sim \frac{2^{1-\gamma} \Gamma(2\gamma)(2^{1-2\gamma} - 1)}{(1-2\gamma) \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right)^{2\gamma} (m+1)^{2\gamma}} + \Phi_n^{(\gamma)}(A_q).$$

Подставив в первое слагаемое заданные параметры β_k , $k = 1, 2, \dots, q$, придем к асимптотическому равенству

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}^*(f_\gamma, A_q) \sim \frac{2^{1-\gamma} \Gamma(2\gamma)(2^{1-2\gamma} - 1) c_q^{2\gamma} (\ln m)^{2\gamma(2q-1)}}{(1-2\gamma) m^{4q\gamma}} +$$

$$+ 2^{2+\gamma} \sqrt{\pi} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{(c_j c_{j+1})^{\frac{4j\gamma-3j}{2}} c_j^{\frac{3}{2}} (\ln m)^{4j\gamma-\frac{3}{2}}}{m^{4j\gamma+4} \sqrt{\frac{c_{j+1}}{c_j}}} +$$

$$+ \frac{\Gamma(1-\gamma)}{(2c_1 \ln m)^{2-\gamma} m^{2c_1}}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Найдем такие коэффициенты c_k , $k = 1, 2, \dots, q$, при которых величина справа будет асимптотически минимальной. Принципиальным условием для этого является равенство показателей степеней при m . Другими словами, параметры c_k , $k = 1, 2, \dots, q$, должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} 4q\gamma = 4j\gamma + 4 \sqrt{\frac{c_{j+1}}{c_j}}, & j = 1, \dots, q-1, \\ 4q\gamma = 2c_1. \end{cases} \quad (4.4)$$

Заметим, что в этом случае асимптотическое поведение величины $\hat{\varepsilon}_{2n,q}^*(f_\gamma, A_q)$ будет определяться первым слагаемым. Другими словами,

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}^*(f_\gamma, A_q) = \frac{2^{1-\gamma} \Gamma(2\gamma)(2^{1-2\gamma} - 1) c_q^{2\gamma} (\ln m)^{2\gamma(2q-1)}}{(1-2\gamma) m^{4q\gamma}} +$$

$$+o\left(\left(\frac{\ln^{2q-1} m}{m^{2q}}\right)^{2\gamma}\right), m \rightarrow \infty.$$

При этом из системы (4.4) находим, что

$$c_q = 2q\gamma^{2q-1}[(q-1)!]^2.$$

Отметив к тому же, что $m = n/q$, из последнего асимптотического равенства найдем

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}^*(f_\gamma, A_q^*) = v_1(\gamma, q) \left(\frac{\ln^{2q-1} n}{n^{2q}}\right)^{2\gamma} + o\left(\left(\frac{\ln^{2q-1} n}{n^{2q}}\right)^{2\gamma}\right),$$

$$n \rightarrow \infty,$$

где

$$v_1(\gamma, q) = \frac{2^{1+\gamma} \Gamma(2\gamma)(2^{1-2\gamma} - 1)(q^{2q+1}\gamma^{2q-1})^{2\gamma} [(q-1)!]^{4\gamma}}{1 - 2\gamma},$$

$$\gamma \in (0, 1/2).$$

Рассуждая аналогичным образом, получим при $\gamma = 1/2$

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}^*(f_\gamma, A_q^*) = \sqrt{2}q^{2q+1} \ln 2 \frac{[(q-1)!]^2 \ln^{2q-1} n}{2^{2q-2} n^{2q}} +$$

$$+o\left(\frac{\ln^{2q-1} n}{n^{2q}}\right), n \rightarrow \infty,$$

и при $\gamma \in (1/2, 1)$

$$\hat{\varepsilon}_{2n,q}^*(f_\gamma, A_q^*) =$$

$$= v_2(\gamma, q) \left(\frac{\ln^{2q-1} n}{n^{2q}}\right)^{2\gamma} + o\left(\left(\frac{\ln^{2q-1} n}{n^{2q}}\right)^{2\gamma}\right), n \rightarrow \infty,$$

где

$$v_2(\gamma, q) =$$

$$= \frac{2^{2-\gamma} \Gamma(2\gamma)(2^{2\gamma-1} - 1)(q^{2q+1}\gamma^{2q-1})^{2\gamma} [(q-1)!]^{4\gamma}}{2\gamma - 1}.$$

Осталось показать, что при найденных c_k , $k = 1, 2, \dots, q$, набор параметров β_k , $k = 1, 2, \dots, q$, будет оптимальным, то есть величина $\varepsilon_{2n}^*(A_q)$ имеет при них асимптотически минимальное значение. Для доказательства этого утверждения достаточно воспользоваться рассуждениями, предложенными, например, в [41], [42]. Приводить их в настоящей работе не будем ввиду того, что они являются достаточно громоздкими. Последнее позволяет заключить, что набор

$$\alpha_k^* = \frac{1 - \beta_k^*}{1 + \beta_k^*}, \beta_k^* = c_k^* \left(\frac{\ln m}{m}\right)^{2k-1}, k = 1, \dots, q,$$

где c_k^* определяются условием (4.4), является оптимальным и выполняется соотношение (4.1). \square

Интересно сравнить наилучшую мажоранту равномерных приближений, полученную для каждого $\gamma \in (0, 1)$ в теореме 4.1, с наилучшей мажорантой $\varepsilon_{2n,q}^*(f_\gamma)$ равномерных рациональных приближений функции $f_\gamma(x)$, $\gamma \in (0, 1)$, на отрезке $[-1, 1]$ суммами Валле Пуссена рациональных

интегральных операторов Фурье – Чебышёва (0.2) с q геометрически различными полюсами. Этот результат содержится в [33]. Из указанной работы и полученных в теореме 4.1 результатов, заключаем, что

$$\varepsilon_{2n,q}^*(f_\gamma) \sim \hat{\varepsilon}_{2n,q}^*(f_\gamma), \gamma \in (0, 1), n \rightarrow \infty.$$

Заключение

В работе исследованы рациональные аппроксимации сопряженной функции на отрезке $[-1, 1]$ суммами Валле Пуссена сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва с произвольным фиксированным количеством геометрически различных полюсов. Установлено интегральное представление приближений сопряженной функции.

Изучены рациональные аппроксимации на отрезке $[-1, 1]$ сопряженной функции с плотностью $(1-x)^\gamma$, $\gamma \in (0, 1)$, введенными суммами Валле Пуссена. Получены интегральное представление приближений, оценка поточечных приближений и равномерных приближений с определенной мажорантой. Установлено ее асимптотическое выражение при $n \rightarrow \infty$, зависящее от параметров аппроксимирующей функции. В заключительной части найдены оптимальные значения параметров, при которых обеспечивается наибольшая скорость убывания мажоранты.

Следствием полученных результатов являются оценки поточечных и равномерных приближений и асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений сопряженной функции на отрезке суммами Валле Пуссена сопряженных полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что при специальном выборе параметров аппроксимирующей функции возможно добиться скорости равномерных приближений большей в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1958. – 543 с.
2. Мухелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд. / Н.И. Мухелишвили. – Москва: Наука, 1968. – 513 с.
3. Бари, Н.К. Тригонометрические ряды / Н.К. Бари. – Москва: Физматлит, 1961. – 936 с.
4. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды. В 2-х томах. Том 1. / А. Зигмунд. – Москва: Мир, 1965. – 616 с.
5. Русак, В.Н. Равномерная рациональная аппроксимация сопряженных функций / В.Н. Русак, И.В. Рыбаченко // Вестник БГУ. Сер. 1. Математика и информатика. – 2013. – Т. 3. – С. 83–86.

6. Ровба, Е.А. Приближения сопряженных функций частичными суммами сопряженных рядов Фурье по одной системе алгебраических дробей Чебышева – Маркова / Е.А. Ровба, П.Г. Поцейко // Известия вузов. Математика. – 2020. – № 9. – С. 68–84.
7. Ровба, Е.А. Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации / Е.А. Ровба // Доклады АН БССР. – 1979. – Т. 23, № 11. – С. 968–971.
8. Смотрицкий, К.А. О приближении дифференцируемых в смысле Римана – Лиувилля функций / К.А. Смотрицкий // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2002. – Т. 4. – С. 42–47.
9. Patseika, P.G. On one rational integral operator of Fourier – Chebyshev type and approximation of Markov functions / P.G. Patseika, Y.A. Roubba, K.A. Smatrytski // Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. – 2020. – Vol. 2. – P. 6–27.
10. Поцейко, П.Г. Приближения на классах интегралов Пуассона рациональными интегральными операторами Фурье – Чебышёва / П.Г. Поцейко, Е.А. Ровба // Сибирский математический журнал. – 2021. – Т. 62, № 2. – С. 362–386.
11. Поцейко, П.Г. Сопряженный рациональный оператор Фурье – Чебышева и его аппроксимационные свойства / П.Г. Поцейко, Е.А. Ровба // Известия вузов. Математика. – 2022. – № 3. – С. 44–60.
12. La Vallée Poussin, Ch.-J. Sur la meilleure approximation des fonction d'une variable réelle par des expressions d'ordre donne / Ch.-J. de La Vallée Poussin // Comptes Rendus Acad. sci. Paris. – 1918. – Vol. 166. – P. 799–802.
13. La Vallée Poussin, Ch.-J. Lecons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle / Ch.-J. de La Vallée Poussin. Paris: GAUTHIER VILLARS ET CIE, 1919. – 150 p.
14. Никольский, С.М. О некоторых методах приближения тригонометрическими суммами / С.М. Никольский // Известия Академии наук СССР. Сер. матем. – 1940. – Т. 4, № 6. – С. 509–520.
15. Стечкин, С.Б. О суммах Валле Пуссена / С.Б. Стечкин // Доклады АН СССР. – 1951. – Т. 80, № 4. – С. 545–548.
16. Теляковский, С.А. Приближение дифференцируемых функций суммами Валле Пуссена / С.А. Теляковский // Доклады АН СССР. – 1958. – Т. 121, № 3. – С. 426–429.
17. Ефимов, А.В. О приближении периодических функций суммами Валле Пуссена / А.В. Ефимов // Известия Академии наук СССР. Сер. матем. – 1959. – Т. 23, № 5. – С. 737–770.
18. Рукасов, В.И. Приближение суммами Валле Пуссена классов аналитических функций / В.И. Рукасов // Украинский математический журнал. – 2003. – Т. 55, № 6. – С. 806–816.
19. Сердюк, А.С. Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена в рівномірній та інтегральних метриках / А.С. Сердюк // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. – 2009. – Vol. 6. – P. 34–39.
20. Абрамов, Л.М. Об асимптотическом поведении функций Лебега некоторых методов суммирования рядов Чебышёва / Л.М. Абрамов // Доклады АН СССР. – 1954. – Т. ХСVIII, № 2. – С. 173–176.
21. Ганзбург, И.М. Обобщение некоторых результатов С.М. Никольского и А.Ф. Тимана / И.М. Ганзбург // Доклады АН СССР. – 1957. – Т. 116, № 5. – С. 727–730.
22. Ганзбург, И.М. Линейные процессы приближения функций, удовлетворяющих условию Липшица, алгебраическими многочленами / И.М. Ганзбург, А.Ф. Тиман // Известия Академии наук СССР. Сер. матем. – 1958. – Т. 22, № 6. – С. 771–810.
23. Оматаев, Т.О. О приближении непрерывных на отрезке функций усечёнными суммами Валле Пуссена / Т.О. Оматаев // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1977. – № 6. – С. 99–106.
24. Щербина, А.Д. Об одном методе суммирования рядов, сопряженных рядам Фурье / А.Д. Щербина // Математический сборник. – 1950. – Т. 27 (69), № 2. – С. 157–170.
25. Тиман, А.Ф. Аппроксимативные свойства линейных методов суммирования рядов Фурье / А.Ф. Тиман // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1953. – Т. 17, № 2. – С. 99–134.
26. Теляковский, С.А. О приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье / С.А. Теляковский // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1960. – Т. 24, № 2. – С. 213–242.
27. Дудас, В.А. Приближение сопряженных периодических функций суммами Валле Пуссена / В.А. Дудас // Украинский математический журнал. – 1978. – Т. 30, № 4. – С. 522–528.
28. Байбородов, С.П. Приближение функций суммами Валле Пуссена / С.П. Байбородов // Математические заметки. – 1980. – Т. 27, № 1. – С. 33–48.
29. Русак, В.Н. Об одном методе приближения рациональными функциями на вещественной оси / В.Н. Русак // Математические заметки. – 1977. – Т. 22, № 3. – С. 375–380.
30. Ровба, Е.А. Приближение функций, дифференцируемых в смысле Римана – Лиувилля, рациональными операторами / Е.А. Ровба // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 1996. – Т. 40, № 6. – С. 18–22.
31. Смотрицкий, К.А. О приближении функций ограниченной вариации рациональными операторами на отрезке / К.А. Смотрицкий // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка.

Инфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2005. – Т. 2, № 2. – С. 60–68.

32. Поцейко, П.Г. Суммы Валле Пуссена рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва и аппроксимации интегралов Пуассона на отрезке / П.Г. Поцейко, Е.А. Ровба // Сибирский математический журнал. – 2023. – Т. 64, № 1. – С. 162–183.

33. Поцейко, П.Г. Суммы Валле Пуссена рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышева и аппроксимации функции Маркова / П.Г. Поцейко, Е.А. Ровба // Алгебра и анализ. – 2023. – Т. 35, № 5. – С. 183–208.

34. Поцейко, П.Г. О рациональных сопряженных суммах Фейера на отрезке и аппроксимациях сопряженной функции / П.Г. Поцейко // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 56–67.

35. Лунгу, К.Н. О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов / К.Н. Лунгу // Математический сборник. – 1971. – Т. 86 (128), № 2 (10). – С. 314–324.

36. Лунгу, К.Н. О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов / К.Н. Лунгу // Сибирский математический журнал. – 1984. – Т. 15, № 2. – С. 151–160.

37. Русак, В.Н. Рациональные функции как аппарат приближения / В.Н. Русак. – Минск: БГУ, 1979. – 153 с.

38. Сидоров, Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1989. – 480 с.

39. Евграфов, М.А. Асимптотические оценки и целые функции / М.А. Евграфов. – Москва: Наука, 1979. – 320 с.

40. Федорюк, М.В. Асимптотика. Интегралы и ряды / М.В. Федорюк. – Москва: Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1987. – 544 с.

41. Ровба, Е.А. Константы в приближении $|x|$ рациональными интерполяционными процессами / Е.А. Ровба, Е.Г. Микулич // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 6. – С. 11–15.

42. Микулич, Е.Г. Точные оценки равномерных приближений функции $|\sin x|$ частными суммами рядов Фурье по рациональным функциям / Е.Г. Микулич // Вестник БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2011. – Т. 1. – С. 84–90.

Поступила в редакцию 01.02.2024.

Информация об авторах

Поцейко Павел Геннадьевич – к.ф.-м.н., доцент

О СУЩЕСТВОВАНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ

А.П. Старовойтов, Т.М. Оснач, Н.В. Рябченко

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

ON THE EXISTENCE OF TRIGONOMETRIC PADÉ APPROXIMATIONS

A.P. Starovoitov, T.M. Osnach, N.V. Ryabchenko

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. В работе, опираясь на хорошо известные результаты о классических аппроксимациях Паде степенного ряда, найдены условия, при которых для заданного ряда Фурье существуют тригонометрические аппроксимации Паде – Якоби. Это позволило описать класс рядов Фурье по многочленам Чебышёва первого и второго рода, для которых существуют нелинейные аппроксимации Паде – Чебышёва. В частности, дано ещё одно доказательство известной теоремы С.П. Сутина.

Ключевые слова: аппроксимации Паде, аппроксимации Паде – Чебышёва, степенные ряды, ряды Фурье, ряды по многочленам Чебышёва.

Для цитирования: Старовойтов, А.П. О существовании тригонометрических аппроксимаций Паде / А.П. Старовойтов, Т.М. Оснач, Н.В. Рябченко // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 71–76. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_71. – EDN: JIITRN

Abstract. In this work, based on the well-known results on classical Padé approximants of power series, the conditions are found under which trigonometric Padé – Jacobi approximants exist for a given Fourier series. This made it possible to describe the class of Fourier series in Chebyshev polynomials of the first and second kind, for which there are nonlinear Padé – Chebyshev approximants. In particular, another proof of the well-known theorem of S.P. Suetin is given.

Keywords: Padé approximants, Padé – Chebyshev approximations, power series, Fourier series, series in Chebyshev polynomials.

For citation: Starovoitov, A.P. On the existence of trigonometric Padé approximations / A.P. Starovoitov, T.M. Osnach, N.V. Ryabchenko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 3 (60). – P. 71–76. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_71 (in Russian). – EDN: JIITRN

Введение

Рассмотрим тригонометрический ряд

$$f^t(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} (a_l \cos lx + b_l \sin lx) \quad (0.1)$$

с действительными коэффициентами, сходящийся при всех $x \in \mathbb{R}$ и определяющий функцию f^t , заданную на всей действительной прямой.

Для ряда (0.1) определим два вида тригонометрических аппроксимаций Паде.

Тригонометрической аппроксимацией Паде – Фробениуса типа (n, m) ряда (функции) f^t назовём рациональную дробь

$$\pi_{n,m}^t(x; f^t) = \frac{P_{n,m}^t(x)}{Q_{n,m}^t(x)},$$

где тождественно не равный нулю тригонометрический многочлен $Q_{n,m}^t$, $\deg Q_{n,m}^t \leq m$ и тригонометрический многочлен $P_{n,m}^t$, $\deg P_{n,m}^t \leq n$ удовлетворяют условию

$$(Q_{n,m}^t f^t - P_{n,m}^t)(x) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} (\tilde{a}_l \cos lx + \tilde{b}_l \sin lx). \quad (0.2)$$

Здесь и далее n, m – целые неотрицательные числа.

Тригонометрической аппроксимацией Паде – Якоби типа (n, m) ряда f^t назовём рациональную функцию

$$\hat{\pi}_{n,m}^t(x) = \hat{\pi}_{n,m}^t(x; f^t) = \frac{\hat{P}_{n,m}^t(x)}{\hat{Q}_{n,m}^t(x)},$$

при всех $x \in \mathbb{R}$ представляемую тригонометрическим рядом, у которой тригонометрические многочлены в числителе и знаменателе имеют степени $\deg \hat{Q}_{n,m}^t \leq m$, $\deg \hat{P}_{n,m}^t \leq n$ и для которой

$$f^t(x) - \hat{\pi}_{n,m}^t(x) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} (\tilde{a}_l \cos lx + \tilde{b}_l \sin lx).$$

Тригонометрические аппроксимации Паде – Фробениуса и Паде – Якоби являются естественным обобщением соответствующих классических аппроксимаций Паде степенного ряда [1]. Хорошо известно, что ряд важных свойств классических аппроксимаций Паде при таком обобщении не сохраняется. Например, тригонометрические аппроксимации Паде – Фробениуса $\pi_{n,m}^t$ всегда существуют, но определяются, вообще

говоря, не однозначно, а тригонометрические аппроксимации Паде – Якоби $\hat{\pi}_{n,m}^f$ не всегда существуют, но в важных для приложений случаях определяются однозначно [2]–[5]. В данной работе будем рассматривать только тригонометрические аппроксимации Паде – Якоби (свойства тригонометрических аппроксимаций Паде – Фробениуса подробно изучались в [3]). Нас интересуют условия, при которых они существуют. В основной теореме работы найден широкий класс тригонометрических рядов, для которых тригонометрические аппроксимации Паде – Якоби $\hat{\pi}_{n,m}^f$ существуют. В частности, показано, что существование тригонометрических аппроксимаций Паде – Якоби можно описать с помощью хорошо известных результатов о классических аппроксимациях Паде степенного ряда. В качестве приложения получено новое конструктивное доказательство известной теоремы С.П. Суетина [5] о существовании и единственности нелинейных аппроксимаций Паде – Чебышёва аналитических функций, представимых в виде ряда Фурье по многочленам Чебышёва первого рода. Аналогичный результат получен и для нелинейных аппроксимаций Паде – Чебышёва аналитических функций, представимых в виде ряда Фурье по многочленам Чебышёва второго рода.

1 Аппроксимации Паде степенного ряда

Приведём некоторые хорошо известные факты теории аппроксимаций Паде степенных рядов, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Тригонометрическому ряду (0.1) поставим в соответствие степенной ряд

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l z^l, \tag{1.1}$$

в котором $f_0 = a_0 / 2$, $f_l = a_l - ib_l$, $l = 1, 2, \dots$. Нетрудно заметить, что при таком выборе коэффициентов f_l ряд (0.1) является действительной частью ряда (1.1) при $z = e^{ix}$.

Для каждой пары (n, m) существуют алгебраические многочлены $Q_{n,m}$, $\deg Q_{n,m} \leq m$, $P_{n,m}$, $\deg P_{n,m} \leq n$, для которых

$$(Q_m f - P_n)(z) = O(z^{n+m+1}). \tag{1.2}$$

Здесь под $O(z^p)$ понимаем степенной ряд вида $c_1 z^p + c_2 z^{p+1} + \dots$. Рациональную функцию

$$\pi_{n,m}(z) = \pi_{n,m}(z; f) = \frac{P_{n,m}(z)}{Q_{n,m}(z)}$$

принято называть *аппроксимацией Паде – Фробениуса* типа (n, m) ряда f (авторство А. Паде основывается на его диссертации [6] 1892 г.; в качестве определения рациональной дроби $\pi_{n,m}(\cdot; f)$ соотношения (1.2) впервые были предложены в 1881 г. Г. Фробениусом [7]). Многочлены $Q_{n,m}$ и

$P_{n,m}$ условием (1.2) определяются не единственным образом, тем не менее, дроби $\pi_{n,m}(\cdot; f)$ определяют одну и ту же рациональную функцию [8].

Несколько иная интерполяционная конструкция была предложена К. Якоби [9]. Она приводит к следующему определению.

Аппроксимацией Паде – Якоби типа (n, m) ряда f будем называть рациональную дробь

$$\hat{\pi}_{n,m}(z) = \hat{\pi}_{n,m}(z; f) = \frac{\hat{P}_{n,m}(z)}{\hat{Q}_{n,m}(z)},$$

у которой алгебраические многочлены $\hat{Q}_{n,m}, \hat{P}_{n,m}$ имеют степени соответственно не выше m и n и для которой $f(z) - \hat{\pi}_{n,m}(z) = O(z^{n+m+1})$. В отличие от $\pi_{n,m}$ аппроксимация Паде – Якоби $\hat{\pi}_{n,m}$ может не существовать [1], но если существует, то совпадает с $\pi_{n,m}$. Первый существенный результат в исследовании условий, при которых $\hat{\pi}_{n,m}$ существует, был получен К. Якоби [9]. Для его формулировки введем в рассмотрение определители Адамара

$$H_{n,m} = \begin{vmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+1} & \dots & f_n \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \dots & f_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n & f_{n+1} & \dots & f_{n+m-1} \end{vmatrix},$$

элементами которых являются коэффициенты ряда (1.1). Здесь при $p < 0$ считаем, что $f_p = 0$.

К. Якоби [9] доказал, что если определитель $H_{n,m} \neq 0$, то аппроксимации Паде – Якоби $\hat{\pi}_{n,m}(\cdot; f)$ существуют и совпадают с аппроксимациями Паде – Фробениуса $\pi_{n,m}(\cdot; f)$. Полное исследование условий при которых $\hat{\pi}_{n,m}(\cdot; f)$ существуют, провёл Д. Бейкер [1, гл. 1, § 1.4]. В этой связи рациональные функции $\hat{\pi}_{n,m}(\cdot; f)$ называют также аппроксимациями Паде в смысле Бейкера. Если матрица

$$F_{n,m} = \begin{bmatrix} f_{n-m+1} & f_{n-m+1} & \dots & f_n & f_{n+1} \\ f_{n-m+2} & f_{n-m+3} & \dots & f_{n+1} & f_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n & f_{n+1} & \dots & f_{n+m-1} & f_{n+m} \end{bmatrix}$$

является матрицей полного ранга (т. е. $\text{rank} F_{n,m} = m$), то многочлены Паде $Q_{n,m}, P_{n,m}$ условиями (1.2) определяются однозначно (с точностью до числового множителя) (см. [1], [10]) и при некотором выборе нормирующего множителя представляются в виде

$$Q_{n,m}(z; f) = \begin{vmatrix} f_{n-m+1} & \dots & f_n & f_{n+1} \\ f_{n-m+2} & \dots & f_{n+1} & f_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n & \dots & f_{n+m-1} & f_{n+m} \\ z^m & \dots & z & 1 \end{vmatrix}, \tag{1.3}$$

$$P_{n,m}(z; f) = \begin{vmatrix} f_{n-m+1} & \cdots & f_n & f_{n+1} \\ f_{n-m+2} & \cdots & f_{n+1} & f_{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & \cdots & f_{n+m-1} & f_{n+m} \\ z^m \Phi_{n-m}(z) & \cdots & z \Phi_{n-1}(z) & \Phi_n(z) \end{vmatrix}, \quad (1.4)$$

где $\Phi_k(z) = \sum_{l=0}^k f_l z^l$; $\Phi_k(z) \equiv 0$ и $f_k = 0$ при $k < 0$.

Замечание 1. Если определитель Адамара $H_{n,m} \neq 0$, то матрица $F_{n,m}$ является матрицей полного ранга.

Замечание 2. В том случае, когда коэффициенты ряда (1.1) являются действительными числами, многочлены Паде $Q_{n,m}(\cdot; f)$, $P_{n,m}(\cdot; f)$ являются алгебраическими многочленами с действительными коэффициентами.

2 Существование тригонометрических аппроксимаций Паде – Якоби

Основным результатом статьи является следующая

Теорема 2.1. При $n \geq m$ для существования тригонометрической аппроксимации Паде – Якоби $\hat{\pi}_{n,m}^t(\cdot; f^t)$ функции f^t , представленной рядом (0.1), достаточно, чтобы для соответствующей аналитической функции f , представленной рядом (1.1), выполнялись следующие три условия:

- 1) для пары (n, m) существует аппроксимация Паде – Якоби $\hat{\pi}_{n,m}(\cdot; f)$;
- 2) ряд (1.1) имеет радиус сходимости $R > 1$;
- 3) рациональная функция $\hat{\pi}_{n,m}(\cdot; f)$ в круге $\bar{D} = \{z : |z| \leq 1\}$ не имеет полюсов.

Доказательство. Из условия 1) следует, что в некоторой окрестности нуля

$$f(z) - \hat{\pi}_{n,m}(z; f) = \sum_{l=n+m+1}^{+\infty} \tilde{f}_l z^l \quad (2.1)$$

Выполнение условий 2) и 3) позволяет в качестве такой окрестности взять открытый круг с центром в нуле, радиус которого больше 1. Тогда положив в (2.1) $z = e^{ix}$, а затем приравняв действительные части от выражений, стоящих слева и справа от знака нового равенства, получим

$$\begin{aligned} f^t(x) - \operatorname{Re}\{\hat{\pi}_{n,m}(e^{ix}; f)\} &= \\ &= \sum_{l=n+m+1}^{\infty} (d_l \cos lx + h_l \sin lx). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Остаётся показать, что при $n \geq m$

$$\hat{\pi}_{n,m}^t(x; f^t) = \operatorname{Re}\{\hat{\pi}_{n,m}(e^{ix}; f)\}. \quad (2.3)$$

Пусть числитель $\hat{P}_{n,m}(\cdot; f)$ и знаменатель $\hat{Q}_{n,m}(\cdot; f)$ дроби $\hat{\pi}_{n,m}(\cdot; f)$ представимы в виде

$$\hat{Q}_{n,m}(z; f) = \sum_{l=0}^m q_l z^l, \quad \hat{P}_{n,m}(z; f) = \sum_{l=0}^m p_l z^l.$$

Тогда при $z = e^{ix}$ (см. [1, часть 2, гл. 1, § 1.6])

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{\hat{\pi}_{n,m}(e^{ix}; f)\} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{P}_{n,m}(z; f)}{\hat{Q}_{n,m}(z; f)} + \overline{\frac{\hat{P}_{n,m}(z; f)}{\hat{Q}_{n,m}(z; f)}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sum_{l=0}^n p_l e^{ilx} \cdot \sum_{s=0}^m \bar{q}_s e^{-isx} + \sum_{l=0}^n \bar{p}_l e^{-ilx} \cdot \sum_{s=0}^m q_s e^{isx}}{\sum_{s=0}^m q_s e^{isx} \cdot \sum_{l=0}^m \bar{q}_l e^{-ilx}} = \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sum_{s=0}^n \sum_{l=0}^m \{\operatorname{Re}(p_s \bar{q}_l) \cos(s-l)x - \operatorname{Im}(p_s \bar{q}_l) \sin(s-l)x\}}{\sum_{s=0}^m \sum_{l=0}^m \{\operatorname{Re}(q_s \bar{q}_l) \cos(s-l)x - \operatorname{Im}(q_s \bar{q}_l) \sin(s-l)x\}} =: \\ &=: \frac{\hat{P}_{n,m}^t(x)}{\hat{Q}_{n,m}^t(x)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что в (2.4) многочлен $\hat{Q}_{n,m}^t$ имеет степень не выше m , а при $n \geq m$ степень многочлена $\hat{P}_{n,m}^t$ не превышает n . Тогда из (2.2) и (2.4) вытекает, что эти многочлены являются знаменателем и числителем дроби $\hat{\pi}_{n,m}^t(\cdot; f^t)$. Справедливость равенства (2.3) установлена и теорема 2.1 доказана. \square

Предположим теперь, что ряд (0.1) имеет вид

$$f^t(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos lx. \quad (2.5)$$

Ряду (2.5) соответствует степенной ряд (1.1)

$$f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a_l z^l \quad (2.6)$$

с действительными коэффициентами. Если для функции (2.6) выполнены условия теоремы 1, то аппроксимации Паде – Якоби $\hat{\pi}_{n,m}(\cdot; f)$ существуют и совпадают с аппроксимациями Паде – Фробениуса $\pi_{n,m}(\cdot; f)$. Поскольку в рассматриваемом случае числитель и знаменатель дроби $\hat{\pi}_{n,m}(\cdot; f)$ являются алгебраическими многочленами с действительными коэффициентами, то из (2.4) получаем

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{n,m}^t(x; f^t) = \operatorname{Re}\{\hat{\pi}_{n,m}(e^{ix}; f)\} &= \\ &= \frac{\sum_{s=0}^n \sum_{l=0}^m p_s q_l \cos(s-l)x}{\sum_{s=0}^m \sum_{l=0}^m q_s q_l \cos(s-l)x}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Следовательно справедливо

Следствие 2.1. Пусть $n \geq m$, а функция f^t представлена тригонометрическим рядом (2.5). Тогда при выполнении для f условий теоремы 2.1 существует тригонометрическая аппроксимация Паде – Якоби $\hat{\pi}_{n,m}^t(\cdot; f^t)$, числитель $\hat{P}_{n,m}^t$ и знаменатель $\hat{Q}_{n,m}^t$ которой являются чётными тригонометрическими многочленами с

действительными коэффициентами, и справедливости равенства

$$\hat{Q}_{n,m}^t(x; f^t) = Q_{n,m}(e^{ix}; f) \cdot \overline{Q_{n,m}(e^{ix}; f)}, \quad (2.8)$$

$$\hat{P}_{n,m}^t(x; f^t) = \operatorname{Re} \left\{ P_{n,m}(e^{ix}; f) \cdot \overline{Q_{n,m}(e^{ix}; f)} \right\}, \quad (2.9)$$

$$f^t(x) - \hat{\pi}_{n,m}^t(x; f^t) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} d_l \cos lx. \quad (2.10)$$

Если соответствующая степенному ряду (2.6) матрица $F_{n,m}$ является матрицей полного ранга, то при соответствующей нормировке многочлены $Q_{n,m}(\cdot; f)$, $P_{n,m}(\cdot; f)$ в (2.8), (2.9) вычисляются по формулам (1.3), (1.4), в которых $f_l = a_l$ для всех l .

Предположим теперь, что ряд (0.1) имеет вид

$$f^t(x) = \sum_{l=1}^{\infty} b_l \sin lx. \quad (2.11)$$

В отличие от общего случая, поставим ряду (2.11) в соответствие ряд

$$f(z) = \sum_{l=1}^{\infty} b_l z^l. \quad (2.12)$$

Так как коэффициенты b_l – действительные числа, то $f^t(x) = \operatorname{Im} f(e^{ix})$. Считаем, что для f выполнены условия теоремы 1. Тогда существует аппроксимация Паде – Якоби $\hat{\pi}_{n,m}(\cdot; f)$. Пусть $\hat{P}_{n,m}(\cdot; f)$, $\hat{Q}_{n,m}(\cdot; f)$ – соответственно числитель и знаменатель дроби $\hat{\pi}_{n,m}(\cdot; f)$. Рассуждая аналогично, как и при доказательстве теоремы 2.1, при $n \geq m$ и $z = e^{ix}$ получим

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{n,m}^t(x; f^t) &= \operatorname{Im} \left\{ \hat{\pi}_{n,m}(e^{ix}; f) \right\} = \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{\hat{P}_{n,m}(z; f)}{\hat{Q}_{n,m}(z; f)} - \overline{\frac{\hat{P}_{n,m}(z; f)}{\hat{Q}_{n,m}(z; f)}} \right) = \\ &= \frac{\sum_{s=0}^n \sum_{l=0}^m p_s q_l \sin(s-l)x}{\sum_{s=0}^m \sum_{l=0}^m q_s q_l \cos(s-l)x}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Следствие 2.2. Пусть $n \geq m$, а функция f^t представлена тригонометрическим рядом (2.11). Тогда при выполнении для ряда (2.12) условий теоремы 2.1 существуют тригонометрические аппроксимации Паде – Якоби $\hat{\pi}_{n,m}^t(\cdot; f^t)$, числитель $\hat{P}_{n,m}^t$ и знаменатель $\hat{Q}_{n,m}^t$ которых являются тригонометрическими многочленами с действительными коэффициентами, числитель $\hat{P}_{n,m}^t$ является нечетным тригонометрическим многочленом и справедливы равенства

$$\hat{Q}_{n,m}^t(x; f^t) = Q_{n,m}(e^{ix}; f) \cdot \overline{Q_{n,m}(e^{ix}; f)}, \quad (2.14)$$

$$\hat{P}_{n,m}^t(x; f^t) = \operatorname{Im} \left\{ P_{n,m}(e^{ix}; f) \cdot \overline{Q_{n,m}(e^{ix}; f)} \right\}, \quad (2.15)$$

$$f^t(x) - \hat{\pi}_{n,m}^t(x; f^t) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} h_l \sin lx. \quad (2.16)$$

Если соответствующая степенному ряду (2.12) матрица $F_{n,m}$ является матрицей полного ранга, то при соответствующей нормировке многочлены $Q_{n,m}(\cdot; f)$, $P_{n,m}(\cdot; f)$ в (2.14), (2.15) вычисляются по формулам (1.3), (1.4), в которых $f_l = a_l$ для всех l .

3 Аппроксимации Паде – Чебышёва

В этом разделе приведём примеры приложений теоремы 2.1 и её следствий.

3.1. Рассмотрим ряд Фурье по многочленам Чебышёва $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ первого рода

$$f^{ch1}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a_l T_l(x) \quad (3.1)$$

с действительными коэффициентами. Считаем, что ряд (3.1) сходится на $[-1, 1]$ и определяет на этом отрезке функцию f^{ch1} . Известно (см., например, [5]), что для любой пары индексов (n, m) и ряда f^{ch1} существует тождественно не равный нулю алгебраический многочлен $Q_{n,m}^{ch1}$, $\deg Q_{n,m}^{ch1} \leq m$ и алгебраический многочлен $P_{n,m}^{ch1}$, $\deg P_{n,m}^{ch1} \leq n$ такие, что

$$(Q_{n,m}^{ch1} f^{ch1} - P_{n,m}^{ch1})(x) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \tilde{a}_l T_l(x). \quad (3.2)$$

Линейной аппроксимацией Паде – Чебышёва первого рода для пары (n, m) и ряда f^{ch1} называют рациональную дробь

$$\pi_{n,m}^{ch1}(x) = \pi_{n,m}^{ch1}(x; f^{ch1}) = \frac{P_{n,m}^{ch1}(x)}{Q_{n,m}^{ch1}(x)},$$

где многочлены $Q_{n,m}^{ch1}$, $P_{n,m}^{ch1}$ определяются равенством (3.2). Линейные аппроксимации Паде – Чебышёва $\pi_{n,m}^{ch1}(x; f^{ch1})$ всегда существуют, но определяются, вообще говоря, не однозначно [5].

Нелинейной аппроксимацией Паде – Чебышёва первого рода для пары (n, m) и ряда f^{ch1} называют рациональную дробь вида

$$\hat{\pi}_{n,m}^{ch1}(x) = \hat{\pi}_{n,m}^{ch1}(x; f^{ch1}) = \frac{\hat{P}_{n,m}^{ch1}(x)}{\hat{Q}_{n,m}^{ch1}(x)},$$

где алгебраические многочлены $\hat{Q}_{n,m}^{ch1}$, $\hat{P}_{n,m}^{ch1}$, степени которых соответственно не превышают m и n , подобраны так, чтобы

$$f^{ch1}(x) - \hat{\pi}_{n,m}^{ch1}(x; f^{ch1}) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \hat{a}_l T_l(x).$$

В отличие от линейных, нелинейные аппроксимации Паде – Чебышёва $\hat{\pi}_{n,m}^{ch1}(\cdot; f^{ch1})$ не всегда существуют, но если существуют, то определяют однозначно [5]. С точки зрения эффективности

приближения функций, представленных рядами по многочленам Чебышёва первого рода, нелинейные аппроксимации $\hat{\pi}_{n,m}^{ch1}(\cdot; f^{ch1})$ имеют значительные преимущества в сравнении с линейными. По этой причине, несмотря на проблему их существования, например, в системе MAPLE реализована программа вычисления именно нелинейных аппроксимаций Паде – Чебышёва (подробнее см. [5], [11]).

Следующая теорема доказана С.П. Суетиным [5], исходя из довольно общих результатов, касающихся свойств оператора Фабера. Здесь будет дано другое доказательство теоремы Суетины, которое опирается только на следствие 2.1 из теоремы 2.1 и является конструктивным (получен явный вид аппроксимаций Паде – Чебышёва первого рода).

Теорема 3.1. Рассмотрим ряд (3.1), представляющий функцию f^{ch1} , в котором коэффициенты a_l совпадают с коэффициентами рядов (2.5) и (2.6). Тогда при $n \geq t$ для существования нелинейной аппроксимации Паде – Чебышёва первого рода $\hat{\pi}_{n,m}^{ch1}(\cdot; f^{ch1})$ необходимо и достаточно, чтобы для функции f , заданной равенством (2.6), выполнялись условия 1) – 3) теоремы 2.1.

При выполнении условий 1) – 3) для числителя и знаменателя рациональной дроби $\hat{\pi}_{n,m}^{ch1}(\cdot; f^{ch1})$ справедливы формулы

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{n,m}^{ch1}(x; f^{ch1}) &= Q_{n,m}(e^{i \arccos x}; f) \cdot \overline{Q_{n,m}(e^{i \arccos x}; f)}, \quad (3.3) \\ \hat{P}_{n,m}^{ch1}(x; f^{ch1}) &= \\ &= \operatorname{Re} \left\{ P_{n,m}(e^{i \arccos x}; f) \cdot \overline{Q_{n,m}(e^{i \arccos x}; f)} \right\}. \quad (3.4) \end{aligned}$$

Если соответствующая степенному ряду (2.6) матрица $F_{n,m}$ является матрицей полного ранга, то при соответствующей нормировке многочлены $Q_{n,m}(\cdot; f)$, $P_{n,m}(\cdot; f)$ в (3.3), (3.4) вычисляются по формулам (1.3), (1.4), в которых $f_l = a_l$ для всех l .

Доказательство. Из условий теоремы следует, что функция $f^t(x) = f^{ch1}(\cos x)$ представима тригонометрическим рядом

$$f^t(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos lx.$$

Учитывая следствие 2.1, равенства (2.4) и (2.7)–(2.10), числитель, знаменатель тригонометрической аппроксимации Паде – Якоби $\hat{\pi}_{n,m}^t(\cdot; f^t)$ и остаточный член предствимы в виде

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{n,m}^t(x; f^t) &= Q_{n,m}(e^{ix}; f) \cdot \overline{Q_{n,m}(e^{ix}; f)} = \\ &= \sum_{l=0}^m q_l \cos lx, \quad (3.5) \end{aligned}$$

$$\hat{P}_{n,m}^t(x; f^t) = \operatorname{Re} \left\{ P_{n,m}(e^{ix}; f) \cdot \overline{Q_{n,m}(e^{ix}; f)} \right\} = (3.6)$$

$$= \sum_{l=0}^n p_l \cos lx,$$

$$f^t(x) - \hat{\pi}_{n,m}^t(x; f^t) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} d_l \cos lx. \quad (3.7)$$

Вместо x подставим в (3.7) $\arccos x$. В результате с учетом (3.5) и (3.6) получим

$$f^{ch1}(x) - \hat{\pi}_{n,m}^{ch1}(x; f^{ch1}) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} d_l T_l(x),$$

где

$$\hat{\pi}_{n,m}^{ch1}(x; f^{ch1}) = \frac{\hat{P}_{n,m}^t(\arccos x; f^t)}{\hat{Q}_{n,m}^t(\arccos x; f^t)}.$$

Отсюда и из (3.5), (3.6) следуют равенства (3.3) и (3.4). Достаточность условий 1) – 3) доказана. Необходимость доказана в [5]. \square

3.2. Рассмотрим ряд Фурье по многочленам Чебышёва $U_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sin(n \arccos x)$ второго рода

$$f^{ch2}(x) = \sum_{l=1}^{\infty} b_l U_l(x) \quad (3.8)$$

с действительными коэффициентами. Считаем, что ряд (3.8) сходится при $x \in [-1, 1]$ и определяет на $[-1, 1]$ функцию f^{ch2} . Аналогично, как и в предыдущем случае, определяются линейные $\pi_{n,m}^{ch2}(\cdot; f^{ch2})$ и нелинейные $\hat{\pi}_{n,m}^{ch2}(\cdot; f^{ch2})$ аппроксимации Паде – Чебышёва второго рода. Например, нелинейной аппроксимацией Паде – Чебышёва второго рода для пары (n, m) и ряда (3.8) f^{ch2} назовём рациональную дробь

$$\hat{\pi}_{n,m}^{ch2}(x; f^{ch2}) = \frac{\hat{P}_{n,m}^{ch2}(x)}{\hat{Q}_{n,m}^{ch2}(x)},$$

у которой алгебраические многочлены $\hat{Q}_{n,m}^{ch2}$, $\hat{P}_{n,m}^{ch2}$ имеют соответственно степени не выше m и n , и

$$f^{ch2}(x) - \hat{\pi}_{n,m}^{ch2}(x; f^{ch2}) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \hat{a}_l U_l(x).$$

Ряду (3.8) f^{ch2} поставим в соответствие ряды (2.11) и (2.12) с такими же коэффициентами, определяющие соответственно функции f^t и f . Следующая теорема является аналогом теоремы 3.1 для нелинейных аппроксимаций Паде – Чебышёва второго рода.

Теорема 3.2. При $n \geq t$ для существования нелинейной аппроксимации Паде – Чебышёва второго рода $\hat{\pi}_{n,m}^{ch2}(\cdot; f^{ch2})$ достаточно, чтобы ряд (2.12), удовлетворял условиям 1) – 3) теоремы 1.

При выполнении условий 1) – 3) для ряда (2.12) числитель и знаменатель рациональной дроби $\hat{\pi}_{n,m}^{ch2}(\cdot; f^{ch2})$ определяются формулами

$$\hat{Q}_{n,m}^{ch2}(x; f^{ch2}) = Q_{n,m}(e^{i \arccos x}; f) \cdot \overline{Q_{n,m}(e^{i \arccos x}; f)}, \quad (3.9)$$

$$\hat{P}_{n,m}^{ch2}(x; f^{ch2}) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Im} \left\{ P_{n,m}(e^{i \arccos x}; f) \cdot \overline{Q_{n,m}(e^{i \arccos x}; f)} \right\}. \quad (3.10)$$

Если соответствующая степенному ряду (2.12) матрица $F_{n,m}$ является матрицей полного ранга, то при соответствующей нормировке многочлены $Q_{n,m}(\cdot; f)$, $P_{n,m}(\cdot; f)$ в (3.9), (3.10) вычисляются по формулам (1.3), (1.4), в которых $f_l = b_l$ для всех l .

Доказательство. Из (3.8) следует, что функция $f^t(x) = \sqrt{1-x^2} f^{ch2}(\cos x)$ представима тригонометрическим рядом

$$f^t(x) = \sum_{l=1}^{\infty} b_l \sin lx.$$

Учитывая следствие 2.2, равенства (2.4) и (2.13)–(2.15), числитель, знаменатель тригонометрической аппроксимации Паде – Якоби $\hat{\pi}'_{n,m}(\cdot; f^t)$ и остаточный член предствимы в виде

$$\hat{Q}'_{n,m}(x; f^t) = Q_{n,m}(e^{ix}; f) \cdot \overline{Q_{n,m}(e^{ix}; f)} = \sum_{l=0}^{\infty} q_l \cos lx, \quad (3.10)$$

$$\hat{P}'_{n,m}(x; f^t) = \operatorname{Im} \left\{ P_{n,m}(e^{ix}; f) \cdot \overline{Q_{n,m}(e^{ix}; f)} \right\} = \sum_{l=0}^{\infty} p_l \sin lx, \quad (3.11)$$

$$f^t(x) - \hat{\pi}'_{n,m}(x; f^t) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} d_l \sin lx. \quad (3.12)$$

Вместо x подставим в (3.12) $\arccos x$, а затем разделим левую и правую часть полученного равенства на $\sqrt{1-x^2}$. В результате с учётом равенств (3.10), (3.11) получим

$$f^{ch2}(x) - \hat{\pi}_{n,m}^{ch2}(x; f^{ch2}) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} d_l U_l(x),$$

где

$$\hat{\pi}_{n,m}^{ch2}(x; f^{ch2}) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\hat{P}'_{n,m}(\arccos x; f^t)}{\hat{Q}'_{n,m}(\arccos x; f^t)}.$$

Отсюда и из (3.10), (3.11) следуют равенства (3.9) и (3.10). Достаточность условий 1)–3) доказана. Теорема 3.2 доказана. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейкер мл., Дж. Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс – Моррис. – Москва: Мир, 1986.

2. Лабыч, Ю.А. Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье / Ю.А. Лабыч, А.П. Старовойтов // Математический сборник. – 2009. – Т. 200, № 7. – С. 107–130.

3. Старовойтов, А.П. Существование и единственность совместных аппроксимаций Эрмита – Фурье / А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко, Т.М. Оснач // Проблемы физики, математики и техники – 2023. – № 2 (55). – С. 68–73.

4. Старовойтов, А.П. О существовании тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Якоби и нелинейных аппроксимаций Эрмита – Чебышёва / А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко, Т.М. Оснач // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2023. – № 2. – С. 6–17.

5. Суетин, С.П. О существовании нелинейных аппроксимаций Паде – Чебышёва для аналитических функций / С.П. Суетин // Математические заметки. – 2009. – Т. 86, № 2. – С. 290–303.

6. Padé, H. Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles / H. Padé // Annales scientifiques de l'É.N.S. Ser. 3 – 1892. – Vol. 9. – P. 3–93.

7. Frobenius, G. Ueber Relationen zwischen den Näherung – sbruchen von Potenzreihen / G. Frobenius // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1881. – Vol. 90. – P. 1–17.

8. Никишин, Е.М. Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – Москва: Наука, 1988.

9. Jacobi, C. Über die Darstellung einer Reihe gegebner Werthe durch eine gebrochne rationale Function / C. Jacobi // J. Reine Angew. Math. – 1846. – Vol. 30. – P. 127–156.

10. Старовойтов, А.П. О детерминантных представлениях многочленов Эрмита – Паде / А.П. Старовойтов, Н.В. Рябченко // Труды Московского математического общества – 2022. – Т. 83, № 1. – С. 17–35.

11. Гончар, А.А. Аппроксимации Паде – Чебышёва для многозначных аналитических функций, вариация равновесной энергии и S -свойство стационарных компактов / А.А. Гончар, Е.А. Рахманов, С.П. Суетин // УМН. – 2011. – Т. 66, № 6. – С. 3–36.

Поступила в редакцию 27.02.2024.

Информация об авторах

Старовойтов Александр Павлович – д.ф.-м.н., профессор
Оснач Татьяна Михайловна – аспирантка
Рябченко Наталия Валерьевна – к.ф.-м.н.

ЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ВИДЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ СУММ

А.П. Шилин

Белорусский государственный университет, Минск

LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH COEFFICIENTS IN THE FORM OF SPECIAL SUMS

A.P. Shilin

Belarusian State University, Minsk

Аннотация. Решено в явном виде новое линейное гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение первого порядка. Уравнение задано на замкнутой кривой, расположенной на комплексной плоскости. Коэффициенты уравнения выражаются в виде сумм некоторых слагаемых. Во все слагаемые сумм определенным образом входит конечное число одних и тех же заданных функций. Используются классические и обобщенные формулы Сохоцкого, теория краевой задачи Римана, формулы решения линейных дифференциальных уравнений, свойства аналитических функций. Решение проиллюстрировано примером.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, формулы Сохоцкого, краевая задача Римана, линейное дифференциальное уравнение.

Для цитирования: Шилин, А.П. Линейное интегро-дифференциальное уравнение с коэффициентами в виде специальных сумм / А.П. Шилин // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 77–80. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_77. – EDN: JLQBBW

Abstract. A new linear hypersingular integro-differential equation of the first order has been explicitly solved. The equation is given on a closed curve located on the complex plane. The coefficients of the equation are expressed as sums of some summands. A finite number of the same functions are included in all summands of sums in a certain way. Classical and generalized Sokhotsky formulas, the theory of the Riemann boundary value problem, formulas for solving linear differential equations, properties of analytical functions are used. The solution is illustrated with an example.

Keywords: integro-differential equation, Sokhotsky formulas, Riemann boundary problem, linear differential equation.

For citation: Shilin, A.P. Linear integro-differential equation with coefficients in the form of special sums / A.P. Shilin // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 3 (60). – P. 77–80. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_77 (in Russian). – EDN: JLQBBW

Введение

Для развития теории интегро-дифференциальных уравнений важно выявлять такие случаи уравнений, которые допускают точное аналитическое решение. В [1] Э.И. Зверович указал решение линейного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, основанное на использовании обобщенных формул Сохоцкого. Настоящая работа примыкает к изучению тех пока немногих случаев переменных коэффициентов в подобных уравнениях (напр., [2], [3]), когда сохраняется возможность точного аналитического решения.

1 Постановка задачи

Пусть $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ – два каких-либо множества, элементы которых упорядочены и могут перемножаться, $n \in \mathbb{N}$. Будем составлять произведения вида $A = c_1 c_2 \dots c_n$, где

для каждого $k = \overline{1, n}$ либо $c_k = a_k$, либо $c_k = b_k$.

Обозначим $L_s(a_k, b_k; n)$ сумму всевозможных произведений вида A таких, в которых множители a_k встречаются s раз (и, следовательно, множители b_k встречаются $n-s$ раз), $s = \overline{0, n}$. Например,

$$L_3(a_k, b_k; 5) = a_1 a_2 a_3 b_4 b_5 + a_1 a_2 b_3 a_4 b_5 + a_1 a_2 b_3 b_4 a_5 + a_1 b_2 a_3 a_4 b_5 + a_1 b_2 a_3 b_4 a_5 + a_1 b_2 b_3 a_4 a_5 + b_1 a_2 a_3 a_4 b_5 + b_1 a_2 b_3 a_4 a_5,$$

$$L_0(a_k, b_k; 2) = b_1 b_2, \quad L_1(a_k, b_k; 1) = a_1.$$

Обозначим через L простую гладкую замкнутую положительно ориентированную кривую на комплексной плоскости. Пусть D_+ и D_- – соответственно внутренняя и внешняя области комплексной плоскости по отношению к этой кривой. Зададим H -непрерывные (т. е. удовлетворяющие условию Гельдера) функции $f(t)$,

$p_k(t)$, $k = \overline{1, n}$, $t \in L$. Пусть на кривой L существуют H -непрерывные производные $p'_k(t)$, $k = \overline{1, n}$. Будем искать на этой кривой H -непрерывную вместе со своей производной функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} L_{2s} \left(p_k(t), \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{\tau-t}; n \right) \varphi'(t) - \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} L_{2s} \left(p'_k(t), \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2}; n \right) \varphi(t) + \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} L_{2s-1} \left(p_k(t), \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{\tau-t}; n \right) \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} - \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} L_{2s-1} \left(p'_k(t), \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2}; n \right) \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau-t} = f(t), \quad t \in L. \quad (1.1)$$

Интегралы в уравнении понимаются в смысле конечной части по Адамару [4], [5]; интегралы с $\tau-t$ в знаменателе совпадают при этом с интегралами, понимаемыми в смысле главного значения по Коши. Квадратные скобки означают целую часть числа. В частности, при $n=1$ получим уравнение

$$\frac{\varphi'(t) \int_L \frac{p_1(\tau) d\tau}{\tau-t} - \frac{\varphi(t) \int_L \frac{p_1(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2}}{\pi i} + \frac{p_1(t) \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} - \frac{p'_1(t) \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau-t}}{\pi i} = f(t), \quad t \in L,$$

способ решения которого указан в [6]. Считаем далее $n \geq 2$. Укажем еще развернутый вид уравнения (1.1) при $n=3$:

$$\left(\frac{1}{\pi i} \int_L \left(\frac{p_1(t)p_2(t)p_3(\tau)}{\tau-t} + \frac{p_1(t)p_2(\tau)p_3(t)}{\tau-t} + \frac{p_1(\tau)p_2(t)p_3(t)}{\tau-t} \right) d\tau - \frac{1}{\pi^3 i} \int_L \frac{p_1(\tau) d\tau}{\tau-t} \int_L \frac{p_2(\tau) d\tau}{\tau-t} \int_L \frac{p_3(\tau) d\tau}{\tau-t} \right) \varphi'(t) - \left(\frac{1}{\pi i} \int_L \left(\frac{p'_1(t)p'_2(t)p_3(\tau)}{(\tau-t)^2} + \frac{p'_1(t)p_2(\tau)p'_3(t)}{(\tau-t)^2} + \frac{p_1(\tau)p'_2(t)p'_3(t)}{(\tau-t)^2} \right) d\tau - \frac{1}{\pi^3 i} \int_L \frac{p_1(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} \int_L \frac{p_2(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} \int_L \frac{p_3(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} \right) \varphi(t) + \left(p_1(t)p_2(t)p_3(t) - \frac{p_1(t)}{\pi^2} \int_L \frac{p_2(\tau) d\tau}{\tau-t} \int_L \frac{p_3(\tau) d\tau}{\tau-t} - \frac{p_2(t)}{\pi^2} \int_L \frac{p_1(\tau) d\tau}{\tau-t} \int_L \frac{p_3(\tau) d\tau}{\tau-t} - \right.$$

$$\left. - \frac{p_3(t)}{\pi^2} \int_L \frac{p_1(\tau) d\tau}{\tau-t} \int_L \frac{p_2(\tau) d\tau}{\tau-t} \right) \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} - \left(p'_1(t)p'_2(t)p'_3(t) - \frac{p'_1(t)}{\pi^2} \int_L \frac{p_2(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} \int_L \frac{p_3(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} - \frac{p'_2(t)}{\pi^2} \int_L \frac{p_1(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} \int_L \frac{p_3(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} - \frac{p'_3(t)}{\pi^2} \int_L \frac{p_1(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} \int_L \frac{p_2(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} \right) \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau-t} = f(t), \quad t \in L. \quad (1.2)$$

2 Решение уравнения

Введем интегралы типа Коши

$$P_{k\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{\tau-z}, \quad k = \overline{1, n}, \quad z \in D_{\pm}.$$

Далее будем использовать классические и обобщенные формулы Сохоцкого [1], [4] для соответствующих предельных значений, являющихся H -непрерывными функциями на кривой L :

$$P'_{k\pm}(t) = \pm \frac{1}{2} p_k^{(m)}(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{(\tau-t)^{m+1}}, \quad k = \overline{1, n}, \quad m = 0, 1, \quad t \in L.$$

В результате коэффициент при $\varphi'(t)$ в уравнении (1.1) преобразуется следующим образом:

$$\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} L_{2s} \left(p_k(t), \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{\tau-t}; n \right) = \frac{1}{2} \left(\prod_{k=1}^n \left(p_k(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{\tau-t} \right) + \prod_{k=1}^n \left(-p_k(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{\tau-t} \right) \right) = 2^{n-1} \left(\prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} p_k(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{\tau-t} \right) + \prod_{k=1}^n \left(-\frac{1}{2} p_k(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{p_k(\tau) d\tau}{\tau-t} \right) \right) = 2^{n-1} \left(\prod_{k=1}^n P_{k+}(t) + \prod_{k=1}^n P_{k-}(t) \right).$$

Аналогично преобразуя остальные коэффициенты уравнения (1.1), получим

$$\left(\prod_{k=1}^n P_{k+}(t) + \prod_{k=1}^n P_{k-}(t) \right) \varphi'(t) - \left(\prod_{k=1}^n P'_{k+}(t) + \prod_{k=1}^n P'_{k-}(t) \right) \varphi(t) + \left(\prod_{k=1}^n P_{k+}(t) - \prod_{k=1}^n P_{k-}(t) \right) \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} - \left(\prod_{k=1}^n P'_{k+}(t) - \prod_{k=1}^n P'_{k-}(t) \right) \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau-t} = \frac{f(t)}{2^{n-1}}, \quad t \in L. \quad (2.1)$$

Введем еще интеграл типа Коши

$$\Phi_{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad z \in D_{\pm}.$$

После использования формул Сохоцкого

$$\varphi^{(m)}(t) = \Phi_+^{(m)}(t) - \Phi_-^{(m)}(t), \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^{m+1}} = \Phi_+^{(m)}(t) + \Phi_-^{(m)}(t), \quad t \in L, \quad m = 0, 1,$$

уравнение (2.1) приобретает вид

$$\left(\prod_{k=1}^n P_{k+}(t) \right) \Phi_+'(t) - \left(\prod_{k=1}^n P_{k-}(t) \right) \Phi_-'(t) - \left(\prod_{k=1}^n P_{k+}'(t) \right) \Phi_+(t) + \left(\prod_{k=1}^n P_{k-}'(t) \right) \Phi_-(t) = \frac{f(t)}{2^n}, \quad t \in L,$$

который можно расценивать как краевую задачу Римана о скачке

$$\Psi_+(t) - \Psi_-(t) = \frac{f(t)}{2^n}, \quad t \in L, \quad (2.3)$$

для функций

$$\Psi_+(z) = \left(\prod_{k=1}^n P_{k+}(z) \right) \Phi_+'(z) - \left(\prod_{k=1}^n P_{k+}'(z) \right) \Phi_+(z), \quad z \in D_+, \quad (2.4)$$

$$\Psi_-(z) = \left(\prod_{k=1}^n P_{k-}(z) \right) \Phi_-'(z) - \left(\prod_{k=1}^n P_{k-}'(z) \right) \Phi_-(z), \quad z \in D_-. \quad (2.5)$$

Будем предполагать далее для простоты, что

$$P_{k\pm}(z) \neq 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad z \in D_{\pm} \cup L, \quad z \neq \infty. \quad (2.6)$$

Обозначим l – суммарный порядок нуля на бесконечности функций $P_{k-}(z)$, $k = \overline{1, n}$. Из соотношения (2.5) вытекает, что задачу Римана (2.3) следует решать в классе функций, имеющих на бесконечности нуль порядка по меньшей мере $l + 2$. Согласно [7] для разрешимости этой задачи необходимы и достаточны условия

$$\int_L f(t) t^k dt = 0, \quad k = \overline{0, l}, \quad (2.7)$$

которые далее предполагаем выполненными. Тогда

$$\Psi_{\pm}(z) = F_{\pm}(z), \quad F_{\pm}(z) = \frac{1}{2^{n+1} \pi i} \int_L \frac{f(\tau) d\tau}{\tau - z}, \quad z \in D_{\pm}.$$

Теперь из соотношений (2.4), (2.5) находим функции $\Phi_{\pm}(z)$ как решения линейных дифференциальных уравнений:

$$\Phi_{\pm}(z) = \left(\int_{z_{\pm}}^z \frac{F_{\pm}(\zeta) d\zeta}{\prod_{k=1}^n P_{k\pm}(\zeta)} \exp \left(- \int_{z_{\pm}}^{\zeta} \frac{\prod_{k=1}^n P_{k\pm}'(\omega)}{\prod_{k=1}^n P_{k\pm}(\omega)} d\omega \right) + C_{\pm} \right) \times \exp \left(\int_{z_{\pm}}^z \frac{\prod_{k=1}^n P_{k\pm}'(\zeta)}{\prod_{k=1}^n P_{k\pm}(\zeta)} d\zeta \right), \quad z \in D_{\pm}, \quad (2.8)$$

где z_{\pm} – фиксированные точки в соответствующих областях D_{\pm} , $C_{\pm} \in \mathbb{C}$. Следует также обеспечить выполнение условия $\Phi_-(\infty) = 0$, выражающего известное свойство интеграла типа Коши. Удобно в дальнейшем брать $z_- = \infty$, и тогда для выполнения этого условия должно быть $C_- = 0$. Отметим, что все интегралы в формулах (2.8) существуют и дают однозначные аналитические функции в соответствующих областях. При этом у функций $\Phi_{\pm}(z)$ и у их производных существуют предельные H -непрерывные значения на L .

3 Основной результат. Пример

Теперь при $m = 0$ из равенства (2.2) можно найти искомую функцию, а также заключить, что эта функция удовлетворяет предполагавшимся на нее требованиям. Таким образом, оказывается справедливым следующий результат.

Теорема. Для разрешимости уравнения (1.1) необходимо и достаточно выполнение условий (2.7). Если эти условия выполняются, то решение уравнения (1.1) содержит одну произвольную постоянную C_+ и имеет вид

$$\varphi(t) = \left(\int_{z_+}^t \frac{F_+(\zeta) d\zeta}{\prod_{k=1}^n P_{k+}(\zeta)} \exp \left(- \int_{z_+}^{\zeta} \frac{\prod_{k=1}^n P_{k+}'(\omega)}{\prod_{k=1}^n P_{k+}(\omega)} d\omega \right) + C_+ \right) \times \exp \left(\int_{z_+}^t \frac{\prod_{k=1}^n P_{k+}'(\zeta)}{\prod_{k=1}^n P_{k+}(\zeta)} d\zeta \right) - \int_{\infty}^t \frac{F_-(\zeta) d\zeta}{\prod_{k=1}^n P_{k-}(\zeta)} \times \exp \left(- \int_{\infty}^{\zeta} \frac{\prod_{k=1}^n P_{k-}'(\omega)}{\prod_{k=1}^n P_{k-}(\omega)} d\omega \right) \exp \left(\int_{\infty}^{\zeta} \frac{\prod_{k=1}^n P_{k-}'(\zeta)}{\prod_{k=1}^n P_{k-}(\zeta)} d\zeta \right).$$

В качестве примера приведем решение уравнения (1.2) на окружности $|t - 1| = 0,5$, взяв

$$p_1(t) = \sin t - \frac{1}{t-1}, \quad p_2(t) = \cos t - \frac{1}{t-1}, \quad p_3(t) = \frac{t^2 - 2}{t-1}, \quad f(t) = 8 \left(\sin 2t - \frac{1}{(t-1)^6} \right).$$

Легко вычислить, что

$$\frac{1}{\pi i} \int_{|\tau-1|=0,5} \frac{p_1(\tau) d\tau}{\tau - t} = \sin t + \frac{1}{t-1}, \quad \frac{1}{\pi i} \int_{|\tau-1|=0,5} \frac{p_2(\tau) d\tau}{\tau - t} = \cos t + \frac{1}{t-1}, \quad \frac{1}{\pi i} \int_{|\tau-1|=0,5} \frac{p_3(\tau) d\tau}{\tau - t} = t + 1 + \frac{1}{t-1},$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_{|t-1|=0,5} \frac{p_1(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} = \cos t - \frac{1}{(t-1)^2},$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_{|t-1|=0,5} \frac{p_2(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} = -\sin t - \frac{1}{(t-1)^2},$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_{|t-1|=0,5} \frac{p_3(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} = 1 - \frac{1}{(t-1)^2}.$$

Укажем сразу вид (2.1) уравнения в этом примере, получающийся после упрощения его коэффициентов:

$$\left(\sin t \cos t(t+1) + \frac{1}{(t-1)^3} \right) \varphi'(t) + \left(\sin t \cos t + \frac{1}{(t-1)^6} \right) \varphi(t) + \left(\sin t \cos t(t+1) - \frac{1}{(t-1)^3} \right) \frac{1}{\pi i} \int_{|t-1|=0,5} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} + \left(\sin t \cos t - \frac{1}{(t-1)^6} \right) \frac{1}{\pi i} \int_{|t-1|=0,5} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau-t} = 2 \left(\sin 2t - \frac{1}{(t-1)^6} \right), \quad |t-1|=0,5.$$

Соответствующая задача Римана (2.3) о скачке

$$\Psi_+(t) - \Psi_-(t) = \sin 2t - \frac{1}{(t-1)^6}, \quad |t-1|=0,5,$$

должна решаться в классе функций, имеющих на бесконечности нуль по меньшей мере 5-го порядка. Ее решение очевидно:

$$\Psi_+(z) = \sin 2z, \quad \Psi_-(z) = \frac{1}{(z-1)^6}.$$

Теперь уравнениям (2.4), (2.5) в случае примера легко придать вид

$$(z+1)\Phi'_+(z) + \Phi_+(z) = 2, \quad |z-1| < 0,5,$$

$$\Phi'_-(z) + \frac{1}{(z-1)^3} \Phi_-(z) = \frac{1}{(z-1)^3}, \quad |z-1| > 0,5,$$

а их решениями (с учетом условия $\Phi_-(\infty) = 0$) будут функции

$$\Phi_+(z) = \frac{2z + C_+}{z+1}, \quad \Phi_-(z) = 1 - e^{\frac{1}{2(z-1)^2}}.$$

Наконец, получим решение примера

$$\varphi(t) = \Phi_+(t) - \Phi_-(t) = \frac{t-1+C_+}{t+1} + e^{\frac{1}{2(t-1)^2}}.$$

Заключительное замечание

Условия (2.6) можно ослабить, допуская у функций $P_{k\pm}(z)$ конечное число нулей в областях D_{\pm} . Это приведет к дополнительным ограничениям на функцию $f(t)$, при выполнении которых метод решения уравнения сохранится.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зверович, Э.И. Решение гиперсингулярного интегро-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами / Э.И. Зверович // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 6. – С. 5–8.

2. Шилин, А.П. Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение эйлера типа / А.П. Шилин // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 17–29. – DOI: <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2020-56-1-17-29>.

3. Шилин, А.П. Гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение с линейными функциями в коэффициентах / А.П. Шилин // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2022. – Т. 58, № 4. – С. 358–369. – DOI: <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-4-358-369>.

4. Зверович, Э.И. Обобщение формул Сохоцкого / Э.И. Зверович // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2012. – №2. – С. 24–28.

5. Адамар, Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. – Москва: Наука, 1978. – 352 с.

6. Зверович, Э.И. Решение интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными интегралами специального вида / Э.И. Зверович, А.П. Шилин // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 404–407. – DOI: <https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407>.

7. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.

Поступила в редакцию 18.12.2023.

Информация об авторе

Шилин Андрей Петрович – к.ф.-м.н., доцент

УДК 621.791.35

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_81
EDN: JVEVVM**СБОРКА ЭЛЕКТРОННЫХ МОДУЛЕЙ ПРИЕМНИКОВ ИНФРАКРАСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРЕФОРМ ПРИПОЯ****А.Э. Видрицкий¹, В.Л. Ланин²**¹ОАО «ИНТЕГРАЛ», Минск²Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск**ASSEMBLY OF ELECTRONIC MODULES OF INFRARED RADIATION RECEIVERS WITH THE USE OF SOLDER PREFORMS****A.E. Vidritskiy¹, V.L. Lanin²**¹JSC "INTEGRAL", Minsk²Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

Аннотация. Описаны методы и режимы проведения технологических операций крепления преформ из припоя к основанию корпуса для монтажа кристалла и герметизации электронных модулей приёмников инфракрасного излучения, которые обеспечивают их надёжную фиксацию на металлизированных поверхностях. Определены зависимости прочности крепления преформ от режимов проведения операций.

Ключевые слова: приёмники инфракрасного излучения, монтаж кристаллов, герметизация, преформа, сварка, пайка.

Для цитирования: Видрицкий, А.Э. Сборка электронных модулей приёмников инфракрасного излучения с применением преформ припоя / А.Э. Видрицкий, В.Л. Ланин // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 81–85. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_81. – EDN: JVEVVM

Abstract. The methods and modes of technological operations for attaching solder preforms to the base of the housing for mounting the crystal and sealing electronic modules of infrared receivers, which ensure their reliable fixation on metalized surfaces, are described. The dependences of the fastening strength of the preforms on the modes of operations are determined.

Keywords: infrared radiation receivers, crystal assembly, sealing, preform, welding, soldering.

For citation: Vidritskiy, A.E. Assembly of electronic modules of infrared radiation receivers with the use of solder preforms / A.E. Vidritskiy, V.L. Lanin // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 3 (60). – P. 81–85. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_81 (in Russian). – EDN: JVEVVM

Введение

Расширение сферы применения тепловизионных и других ИК-приборов требует, наряду с повышением их чувствительности, понижения стоимости, энергопотребления, массы и высокой надёжности. Всем этим требованиям удовлетворяют неохлаждаемые матричные приёмники [1]. Тепловизоры, созданные на основе неохлаждаемых матричных микроболометров, в последнее время заняли доминирующее положение на рынке вследствие их низкой стоимости по сравнению с охлаждаемыми матричными фотоприёмными устройствами. Достоинством технологии создания микроболометров является их полная совместимость с КМОП кремниевой технологией, поскольку фоточувствительные элементы формируются непосредственно на кремниевой пластине, на которой уже предварительно создана интегральная схема считывания [2]. Типичный пиксель микроболометра состоит из навесной мембранной структуры, включающей слой, поглощающий ИК излучение и термочувствительный слой, преобразующий изменение темпе-

ратуры мембраны в электрический выходной сигнал [3].

В развитых странах индустрия, занимающаяся производством инфракрасных технических средств, приборов и систем, достигла внушительных масштабов и трансформировалась в обособленные секторы промышленности. Объем затрат на разработку и производство инфракрасных приборов исчисляется миллиардами долларов ежегодно.

Современным решением при сборке корпуса микроболометра является нанесение припоя в виде преформ. Преформы представляют собой отформованный припой, высеченный штамповкой с жесткими допусками. Для того чтобы обеспечить надёжность изделия в целом, процесс сборки необходимо проводить с использованием припоя для герметизации, имеющего разницу температур плавления с припоем для монтажа кристалла не менее 70–100°С [4].

В статье описывается процесс сборки микроболометров с использованием преформ припоя, который представляет собой сложную и

многоступенчатую процедуру, требующую высокой точности и профессионализма.

1 Конструкция фотоприемного устройства

Фотоприемное устройство состоит из следующих элементов (рисунок 1.1): основание корпуса; преформа из припоя для монтажа кристалла; кристалл – приемник ИК-излучения; преформа из припоя для герметизации; германиевое окно, которое выступает в роли крышки корпуса.

При выборе материала преформы необходимо принимать во внимание следующие факторы: [5]: прочность на разрыв, усталостная прочность, сопротивление сдвигу, вязкость разрушения (сопротивление развитию трещин), коэффициент термического расширения, теплопроводность.

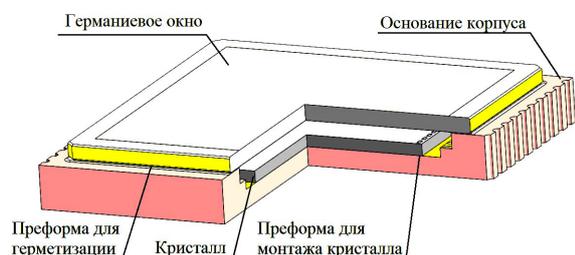


Рисунок 1.1 – Конструкция микроболметра

На основании вышеизложенного для монтажа кристаллов выбран припойный сплав 81Pb19In – температура плавления 260 / 275° С (солидус/ликвидус), прочность 17,65 МПа [6].

2 Исследование режимов крепления преформы для монтажа кристалла

Для проведения монтажа кристаллов в основание корпуса с требуемой точностью на малогабаритной вакуумной печи оплавления RSS-160-S разработана специальная графитовая оснастка, которая предусматривает загрузку основания корпуса дном вверх. Процесс пайки кристалла к основанию корпуса предусматривает предварительное размещение на монтажной площадке преформы (81Pb19In, температура плавления 280° С). С целью предотвращения смещения преформы необходимо предварительно ее закрепить на монтажной площадке. Ориентация преформы проводится под микроскопом по реперным знакам на монтажной площадке. Крепление преформ проводилось на универсальном комплексе УС.ИМ-227СК (рисунок 2.1), основные параметры которого приведены в таблице 2.1.

Для крепления преформы из материала 81Pb19In методом контактной сварки использовался расщепленный электрод ЭК1 20-80.

На рисунке 2.2 показана зависимость усилия на отрыв от величины сварочного напряжения.



Рисунок 2.1 – Универсальный комплекс контактной микросварки УС.ИМ-227СК

Таблица 2.1 – Основные параметры универсального комплекса контактной микросварки УС.ИМ-227СК

Наименование параметра	Величина параметра
Режим сварки	Точечная сварка – пайка
Толщина (преформы / фольги), мкм	От 20 до 100
Тип применяемого инструмента	ЭК1, ИУ и аналоги
Выходная мощность блока контактной сварки, Вт	2,5–40,0
Программируемое сварочное напряжение для расщепленного электрода, В	0,1–4,0
Форма напряжения для расщепленного электрода	Меандр
Частота сигнала для расщепленного электрода, Гц	500–600
Время разогревающей ступени сварочного импульса, с	0,001–0,500
Программируемое время импульса для расщепленного электрода, с	0,001–9,999
Максимальная температура электрода при точечной микроспайке, °С	300
Диапазон регулирования температуры столика, °С	20–350
Диапазон усилия сжатия соединяемых элементов, Н	0,6–10
Точность присоединения преформы, мкм	± 50

Режимы, при которых была достигнута максимальная прочность на отрыв (~0,1Н для каждой точки) преформы от монтажной площадки следующие:

- усилие на электрод – 0,4 Н,
- количество импульсов – 20 шт,
- длительность импульса – 1 мс,
- пауза между импульсами 5 мс,
- сварочное напряжение 0,4 В,
- температура нагревательного стола – (125–135) °С,
- количество сварных точек – девять,
- размер точек присоединения – 50–100 мкм.

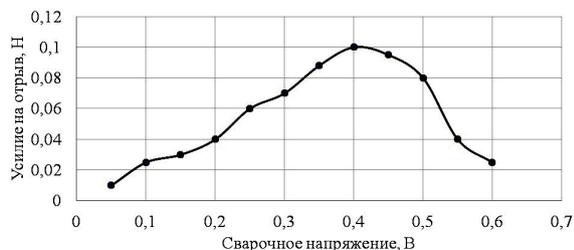


Рисунок 2.2 – Зависимость усилия на отрыв от величины сварочного напряжения

На рисунке 2.3 показан фрагмент преформы закрепленной на монтажной площадке основания корпуса со сварными точками от расщепленного электрода и внешний вид монтажной площадки после удаления преформы. Как видно из рисунка 2.3 – после удаления преформы на монтажной площадке осталась часть материала припоя, т. е. сцепление припоя с золотым покрытием выше прочности припоя.

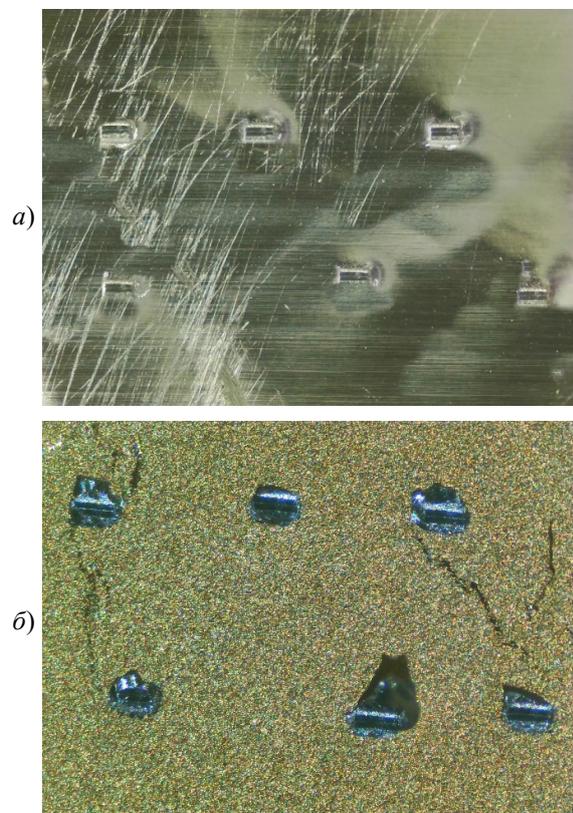


Рисунок 2.3 – Монтажная площадка основания корпуса с закрепленной преформой (а) и после ее отрыва (б)

Значительное отклонение от описанных режимов приводило к прожогу преформы либо к недостаточному ее оплавлению и как следствие – отсутствию хорошего сцепления с монтажной площадкой.

3 Исследование режимов крепления преформы для герметизации корпуса

Для проведения операции герметизации на высоковакуумной печи модели 3150 разработана специальная графитовая оснастка, которая предусматривает загрузку оснований корпусов с посаженными кристаллами дном корпуса вверх. Процесс герметизации предусматривает предварительное крепление на ободке основания преформы 80In15Pb5Ag (температура плавления 150 °С).

В процессе отработки крепления преформы методом пайки микросварочным инструментом ИУ2-100-300 на универсальном комплексе УС.ИМ-227СК опробовано несколько вариантов режимов. На рисунке 3.1 показана зависимость усилия на отрыв от температуры инструмента.

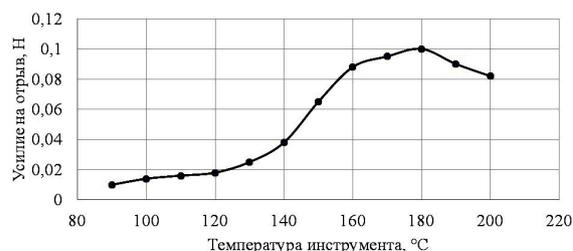


Рисунок 3.1 – Зависимость усилия на отрыв от температуры инструмента

Режимы, при которых была достигнута максимальная прочность на отрыв (~0,1Н для каждой точки) преформы от ободка основания корпуса, следующие:

- усилие на инструмент – 0,4 Н,
- время сварки – 6–8 секунд для каждой точки,
- температура нагревательного стола – 140–150° С,
- температура инструмента – 175–185° С,
- количество сварных точек 24.

Размер точек присоединения от 300 до 350 мкм.

На рисунке 3.2 показан фрагмент ободка основания корпуса с закрепленной преформой и после ее отрыва.

Из рисунка следует, что после удаления преформы на ободке основания корпуса остается часть материала припоя в точности повторяющая геометрическую форму микросварочного инструмента, что говорит о качественном проведении процесса. Значительное отклонение от описанных режимов приводило к прожогу преформы либо к недостаточному ее оплавлению и как следствие – отсутствию хорошего сцепления с ободком основания корпуса.

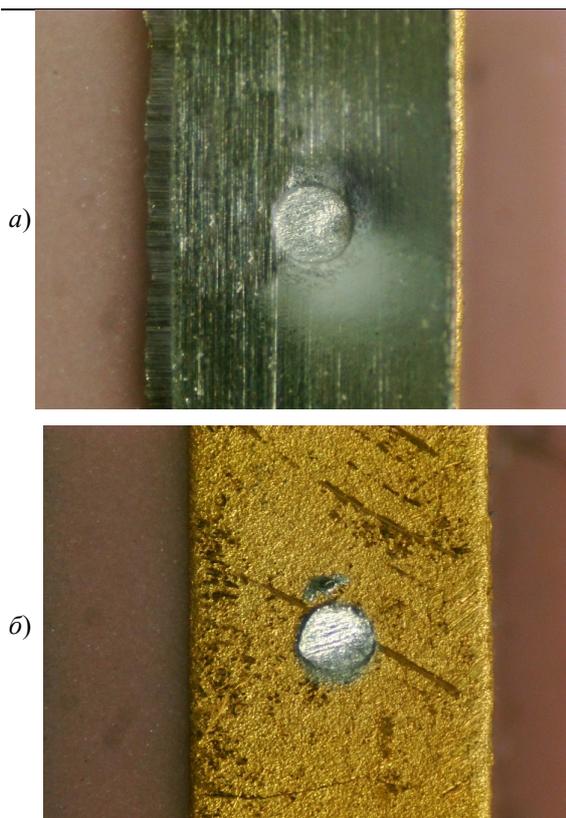


Рисунок 3.2 – Фрагмент ободка основания корпуса с закрепленной преформой (а) и после ее отрыва (б)

4 Монтаж кристаллов приемников ИК излучения

Монтаж кристаллов во многом схож с аналогичным процессом для других изделий электронной техники, однако имеет следующие особенности:

- запрет на использование ультразвуковых колебаний во избежание разрушения матрицы пикселей,

- подъем температуры не свыше 320°C – характеристики терморезистора деградируют при превышении данной температуры.

После крепления преформы из материала $81\text{In}19\text{Pb}$ к основанию корпуса проведен монтаж кристалла на малогабаритной вакуумной печи оплавления RSS-160-S фирмы UniTemp (рисунок 4.1), техническая характеристика приведена в таблице 4.1.

На рисунке 4.2 приведен экспериментально оптимизированный термопрофиль процесса монтажа кристалла, который приводит к минимуму образования пустот в паяном шве «кристалл – монтажная площадка».

Ультразвуковое исследование паяного шва (рисунок 4.3) показало, что площадь пустот в паяном шве составляет не более 5%, что соответствует всем требованиям, предъявляемым к сборке.



Рисунок 4.1 – Малогабаритная вакуумная печь оплавления RSS-160-S ф. UniTemp

Таблица 4.1 – Техническая характеристика малогабаритной вакуумной печи оплавления RSS-160-S

Параметр	Значение параметра
Температура нагрева, $^{\circ}\text{C}$	До 400, опционально до 500
Вакуум, мбар	До 10^{-3}
Нагреваемая рабочая зона, мм	160×160
Высота камеры, мм	40
Скорость нагрева, К/мин	Более 100
Скорость охлаждения, К/мин	Более 100

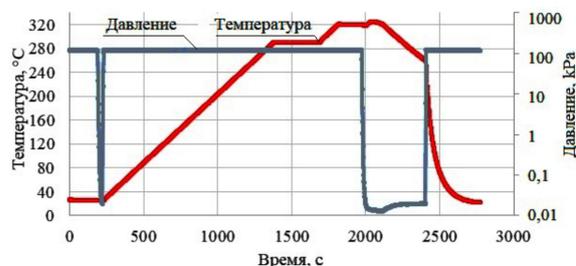


Рисунок 4.2 – Термопрофиль монтажа кристалла

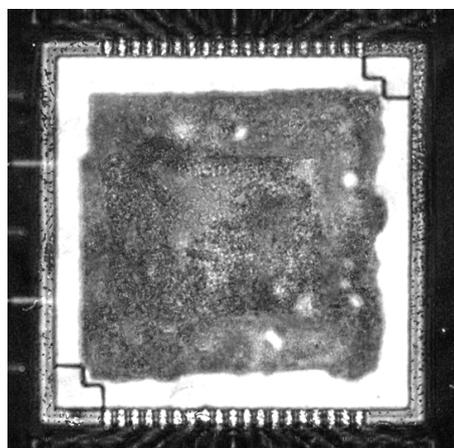


Рисунок 4.3 – Внешний вид паяного шва под кристаллом

Заключение

Экспериментально установлены зависимости влияния температуры инструмента и величины сварочного напряжения расщепленного электрода на прочность крепления преформ из материалов 80In15Pb5Ag и 81In19Pb соответственно для монтажа кристалла и герметизации фотоприемного устройства.

Процесс сборки микроболометров является сложным и трудоемким, требующим высокой точности и профессионализма. Несмотря на это, разработка новых технологий и усовершенствование старых методов позволяют создавать эффективные микроболометрические сенсоры для различных областей применения

Важность данных технологий обусловлена их способностью обеспечивать высококачественное изображение в различных условиях освещенности, что делает их незаменимыми для систем видеонаблюдения, тепловизионных устройств и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Неохлаждаемые матричные микроболометрические приемники ИК излучения на основе золь-гель VO* / В.Н. Овсяк, В.В. Шашкин, М.А. Демьяненко [и др.] // Прикладная физика. – 2005. – № 6. – С. 114–117.
2. *О возможности создания комплексированного интегрального матричного фотоприемника для ИК и УФ диапазонов спектра на основе*

микроболометров и карбида кремния / В.С. Фещенко, А.А. Алтухов, А.Ю. Митягин [и др.] // Известия академии Инженерных Наук им. А.М. Прохорова. – 2013. – № 3. – С. 84–88.

3. *Performance Improvements for VOx Microbolometer FPAs* / D. Murphy, M. Ray, J. Wyles, J. Asbrock, C. Hewitt, R. Wyles, E. Gordon, T. Sessler, A. Kennedy, S. Baur, D. Van Lue // Proc. SPIE. 5406. – 2004. – P. 531–540.

4. *Видрицкий, А.* Вакуумплотная герметизация микроболометров / А. Видрицкий, В. Ланин // Электроника: Наука, Технология, Бизнес. – 2023. – № 2. – С. 60–66.

5. *Тимошенко, С.П.* Технологии вакуумной герметизации МЭМС / С.П. Тимошенко, А.Н. Бойко, Б.М. Симонов // Известия вузов. – Электроника. – 2010. – № 1. – С. 11–23.

6. *Edwards, L.K.* Viscoelastic behavior of 80In15Pb5Ag and 50Sn50Pb alloys / L.K. Edwards, R.S. Lakes, W.A. Nixon // Experiment and modeling. Journal of Applied Physics. – 2000. – № 87 (3). – P. 1135–1140. – DOI: 10.1063/1.371990.

Поступила в редакцию 15.04.2024.

Информация об авторах

Видрицкий Александр Эдуардович – инженер
Ланин Владимир Леонидович – д.т.н., профессор

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ АРХИТЕКТУРНЫХ ПЛАНОВ

Н.А. Аксенова

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

COMPARATIVE ANALYSIS OF FILTRATION ALGORITHMS FOR IMAGES OF ARCHITECTURAL PLANS

N.A. Aksionova

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Рассматривается применение сглаживающих фильтров для предварительной обработки изображений архитектурных планов. Проводится сравнительный анализ фильтров Гаусса и Рудина – Ошера – Фатемии (ROF) на базе модели Шамболя. Программные модули реализованы на языке программирования Python с использованием OpenCV. Результаты показали, что для предварительной обработки не сильно зашумленных изображений лучше применять фильтр Гаусса, а для изображений с высоким уровнем шума – фильтр ROF, предотвращающий потерю особых точек углов.

Ключевые слова: *предварительная обработка, фильтрация, шум, гауссово размытие, фильтр Гаусса, фильтр Рудина – Ошера – Фатемии, модель Шамболя, Python, OpenCV.*

Для цитирования: Аксенова, Н.А. Сравнительный анализ алгоритмов фильтрации для изображений архитектурных планов / Н.А. Аксенова // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 86–91. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_86. – EDN: HTGWNV

Abstract. The use of smoothing filters for pre-processing images of architectural plans is considered. A comparative analysis of Gaussian and Rudin – Osher – Fatemi (ROF) filters based on the Chambolle model is carried out. The software modules are implemented in the Python programming language using OpenCV. The results showed that for pre-processing not very noisy images it is better to use a Gaussian filter, and for images with a high noise level it is better to use the ROF filter, which prevents the loss of special corner points.

Keywords: *preprocessing, filtering, noise, Gaussian blur, Gaussian filter, Rudin – Osher – Fatemi filter, Chambolle model, Python, OpenCV.*

For citation: Aksionova, N.A. Comparative analysis of filtration algorithms for images of architectural plans / N.A. Aksionova // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 3 (60). – P. 86–91. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_86 (in Russian). – EDN: HTGWNV

Введение

Одной из известных задач обработки изображений является задача шумоподавления, т. е. устранения или ослабления шума с целью повышения качества изображений или для предварительной обработки.

Существуют множество методов, таких как адаптивная медианная фильтрация [1], адаптивный фильтр Винера [2], методы, основанные на модели ROF (англ. Rudin – Osher – Fatemi) [3]–[5] и другие методы, основанные на уравнения в частных производных и т. д.

В данной статье проводится сравнительный анализ фильтра Гаусса и фильтра ROF на базе модели Шамболя с целью выявить преимущества, недостатки и области эффективного применения. Оба метода широко применяются в алгоритмах обработки изображений, но каждый из них имеет свои уникальные характеристики.

Эффективность фильтра Гаусса в контексте удаления шума исследуется во множестве работ [7]–[11], поскольку он является одним из наиболее распространенных.

Фильтр Гаусса основан на математической концепции распределения Гаусса и применяется для сглаживания изображений путем уменьшения различий между значениями пикселей. Он работает путем замены каждого пикселя изображения средним значением его соседних пикселей, взвешенным по расстоянию. Этот метод позволяет сгладить фрагменты изображения, устраняя тем самым небольшие дефекты и шумы.

Основная идея фильтра ROF заключается в нахождении оптимальных значений для яркости пикселей в изображении, при которых будет достигаться минимальное значение общей вариации. Для этого алгоритм начинает с оценки значений пикселей и последовательно улучшает их путем минимизации ошибки оценки. Процесс повторяется

до тех пор, пока не будет достигнуто устойчивое состояние, когда ошибка оценки станет минимальной.

Фильтр ROF использует функционал, который минимизирует разность между исходным и очищенным изображением, при этом учитывает естественное разрежение градиента. Этот метод позволяет сохранить края и детали изображения, и одновременно удаляет шумы.

Целью работы является исследование алгоритмов фильтрации для предварительной обработки изображений архитектурных планов и их подготовка для процесса трехмерного моделирования.

1 Общая постановка задачи

Существует множество методов предварительной очистки изображений, и выбранный алгоритм шумоподавления зависит от типа шума, специфики входного изображения и направления процесса его использования. Изображения архитектурных планов содержат наборы различных контуров и углов, максимально контрастных по отношению к фону. В качестве входных изображений используются цифровые планы в форматах jpg, png или bmp, которые могут искажаться под действием фотосъемки или при сканировании. Для сокращения цветового диапазона входное изображение переводится в градации серого.

Поскольку входная информация представляет собой план-схемы квартир, домов, зданий и т. п., то в качестве ключевых особенностей были выбраны изолированные точки, представляющие углы строений. Ключевая точка – это некоторый участок изображения, который является отличительным [12].

В статьях [13], [14] описана разработка библиотеки детекторов углов на Python с использованием OpenCV и был представлен математический аппарат выбранных алгоритмов, проводился сравнительный анализ и апробация разработанных программных модулей.

После предварительной обработки изображение архитектурного плана импортируется в графический редактор Blender, где с помощью дополнительного программного модуля на нем определяются особые точки углов. Далее по этим ключевым точкам происходит процесс трехмерного конструирования. Предложенный способ конструирования позволяет облегчить процесс моделирования объектов зданий, помещений, квартир, домов и т. п., и создать цифровую модель по ее архитектурному плану за достаточно короткий промежуток времени.

Методика сравнительного анализа в данной работе включает следующие аспекты процесса исследования:

1. Эффективность алгоритма фильтрации.
2. Вычислительная сложность.
3. Точность сохранения особых точек углов и структуры границ.

2 Математические основы

Алгоритм фильтра Гаусса. Фильтр Гаусса основан на математической функции Гаусса (2.1), которая создает визуально мягкие переходы между пикселями изображения.

$$G_{\sigma, \mu_x, \mu_y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x-\mu_x)^2 + (y-\mu_y)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.1)$$

где (μ_x, μ_y) – математические ожидания по осям x и y , σ – стандартное отклонение (σ^2 – дисперсия), которое также называют радиусом этой функции или масштабом. Формула показывает, что двумерный фильтр Гаусса можно реализовать с помощью последовательного применения двух одномерных фильтров, в горизонтальном и в вертикальном направлении.

Нормальным распределением является распределение вероятностей, которое задается функцией плотности вероятности, для одномерного случая совпадающей с функцией Гаусса. Параметр μ – это среднее значение математического ожидания распределения, его медиана и мода, а σ – среднеквадратическое отклонение распределения (σ^2 – дисперсия). В природе нормальное распределение встречается часто, как и в различных приложениях. Широкое распространение нормального распределения основано на его бесконечной непрерывной делимости с конечной дисперсией. В теории вероятностей бесконечно делимым распределением называется такое распределение случайной величины, когда она может быть представлена в виде произвольного числа независимых, распределенных одинаково слагаемых.

Если гауссова функция центрирована, т. е. средние $\mu_x = \mu_y = 0$, то формула (2.1) упрощается до вида (2.2).

Функция Гаусса широко используется в обработке изображений и лежит в основе многих фильтров. В обработке изображений используется функция Гаусса со значениями параметров $\mu_x = \mu_y = 0$:

$$G_{\sigma}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\pi\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma^2} + \frac{y^2}{\sigma^2}\right)}. \quad (2.2)$$

Локальная свертка для входного изображения I при $\sigma > 0$ определяется по формуле (2.3):

$$L(x, y, \sigma) = [I * G_{\sigma}](x, y). \quad (2.3)$$

Помимо эффективного способа хранения и представление изображений в виде свертки, фильтр Гаусса дает еще одно преимущество. Классическое представление цифровых изображений

в виде матрицы дискретных значений функции яркости не позволяет напрямую определить дифференциальные операторы, действующие на изображение. В то время как, благодаря свойству свертки, действие дифференциального оператора на изображение можно определить через производные функции Гаусса (гауссовы производные).

Гауссовы производные играют большую роль в обработке изображений. Они используются для обнаружения границ объектов и других особенностей на изображениях.

Алгоритм ROF на базе модели Шамболя.

При обработке изображений полное вариационное шумоподавление, также известное как полная вариационная регуляризация (суммарная вариационная фильтрация), представляет собой процесс удаления шума. Он основан на том принципе, что сигналы с чрезмерной и ложной детализацией имеют высокую общую вариацию, то есть интеграл величины градиента изображения высок. В соответствии с этим принципом уменьшение общего отклонения сигнала удаляет нежелательные детали, сохраняя при этом важные детали, такие как края и углы. Данное свойство является весомым аргументом для использования модели ROF, учитывая специфику входных изображений проектно-сметной документации, основу которых составляют контуры архитектурных планов.

Идея устранения шума на растровых изображениях сформирована на основе свойства полной вариации функции яркости: полная вариация функции яркости изображения стремится к минимуму для гладких изображений и становится значительной для негладких (зашумлённых), у которых функция яркости испытывает резкие колебания значений.

В данной статье приводится описание математической модели ROF на базе алгоритма Шамболя.

Полной вариацией полутонового изображения I называется сумма норм градиентов, которая в непрерывном представлении имеет вид:

$$J(I) = \int |\nabla I| dx. \quad (2.4)$$

В дискретной форме формула примет вид:

$$J(I) = \sum_x |\nabla I|, \quad (2.5)$$

где суммирование производится по всем точкам изображения $X = [x, y]$. Вариант модели ROF, предложенный Шамболем, находит очищенное от шума изображение U , для которого достигается минимум функции

$$\min_U \|I - U\|^2 + 2\lambda J(U), \quad (2.6)$$

где норма $\|I - U\|$ измеряет разницу между исходным U и входным изображением I . Это означает, что данная модель ищет «плоское» изображение, но не допускающее «перескоков» на границах между областями.

Свойства регуляризации. Параметр регуляризации λ играет решающую роль в процессе шумоподавления. Когда $\lambda = 0$, сглаживание отсутствует, и результат такой же, как при минимизации суммы квадратов. Как $\lambda \rightarrow \infty$, однако член общей вариации играет все более сильную роль, что приводит к тому, что результат имеет меньшую общую вариацию за счет того, что он меньше похож на входной (зашумленный) сигнал. Таким образом, выбор параметра регуляризации имеет решающее значение для достижения нужного уровня удаления шума.

3 Методология эксперимента

Для экспериментально исследования был создан набор данных ArhiPlans, содержащий 468 изображений проектно-сметной документации. Для репрезентативности данного набора в выборку были добавлены синтетические изображения: сгенерированные нейросетями, зашумленные, содержащие размытие и высвеченные области.

Три набора данных «VectorArh», «PhotoArh» и «ScanArh» содержат реальные изображения архитектурных планов: в векторе, полученные с помощью фотосъемки и при сканировании. Четыре набора данных «GenerArh», «NoiseArh», «BlurArh» и «LightArh» содержат синтетические изображения: сгенерированные нейросетями, зашумленные, размытые и высвеченные соответственно.

Методика сравнительного анализа проводилась по скорости обработки и оценки сглаживания особых точек углов. В эксперименте использовались входные изображения размерами 480×640, 1440×1920 и 1920×2560 пикселей, маски фильтров размером 3×3 и 5×5 и дисперсии 0.5; 1.5; 3. Программные модули предварительной обработки изображений реализованы на языке Python с использованием библиотеки OpenCV.

Пример зашумленного входного изображения и его вид после предварительной обработки показаны на рисунке 3.1. Апробация алгоритма ROF показала, что детализация основных контуров и особых точек углов остаётся четкой, в то время как дополнительная информация (надписи, тонкие линии и т. д.) становятся размытыми, что уменьшает объем хранения и обработки информации.

На рисунке 3.2 показаны увеличенные фрагменты изображений, на которых распознавались особые точки углов. Увеличение радиуса для фильтра Гаусса на зашумленных изображениях приводит к сглаживанию углов, которые не будут определены.



Рисунок 3.1 – Результаты предварительной обработки изображения

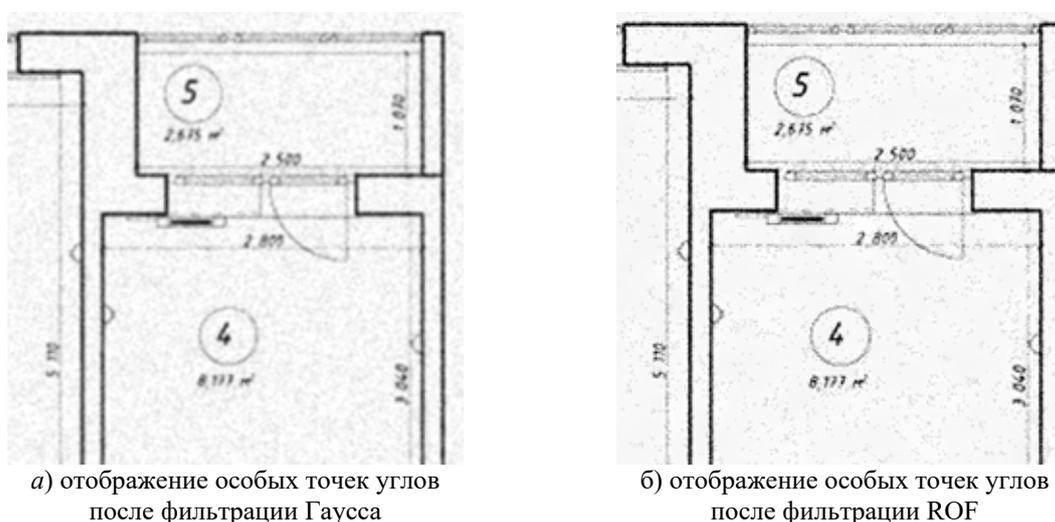


Рисунок 3.2 – Оценка сглаживания углов после предварительной обработки

4 Сравнение методов фильтрации

Для сравнительного анализа программных модулей использовалась выборка из 468 изображений архитектурных планов, 234 из которых были плохого качества.

В таблицах 4.1 и 4.2 приведено среднее время работы программных модулей в зависимости от выбранного метода, разрешения изображения и параметров фильтра.

Основные аспекты сравнительного анализа.

Сглаживание. Фильтр Гаусса применяет размытие, которое удаляет высокочастотные компоненты и создает плавные переходы между пикселями, однако может привести к потере деталей. Это особенно заметно при удалении шума на изображениях с высоким разрешением или на изображениях с тонкими деталями. Фильтр ROF применяет дополнительные операции, например, регуляризацию, которая позволяет лучше сохранять информацию о форме, контурах и углах объектов на изображении.

Устранение шума. Оба фильтра могут использоваться для удаления шума, но с разной эффективностью. Фильтр Гаусса обычно хорошо справляется с удалением гауссовского шума или небольшого количества шума, но может не давать хороших результатов при более сложных типах шума. Фильтр ROF, благодаря дополнительным операциям регуляризации, может обеспечить лучшие результаты при удалении шума.

Сохранение границ и углов. Фильтр Гаусса может привести к размытым границам, сглаженным углам и потере деталей. ROF фильтр сохраняет границы и текстуры, он может быть более предпочтителен для задач, где важно сохранить детали и контуры объектов на изображении.

Реализация и вычислительная сложность. Фильтр Гаусса относительно прост в реализации и вычислительно эффективен. ROF фильтр включает дополнительные операции, такие как оптимизация энергии или вариационный метод, и может быть более вычислительно требовательным.

Таблица 4.1 – Апробация программного модуля фильтра Гаусса

Размер изображения	Фильтрация Гаусса			
	Параметры фильтра	Время, с	Параметры фильтра	Время, с
480×640	core [3,3], $\sigma = 1,5$	0,0089380	core [5,5], $\sigma = 3$	0,0061209
1440×1920	core [3,3], $\sigma = 1,5$	0,0049850	core [5,5], $\sigma = 3$	0,0070235
1920×2560	core [3,3], $\sigma = 1,5$	0,0104804	core [5,5], $\sigma = 3$	0,0073249

Таблица 4.2 – Апробация программного модуля фильтра ROF на базе модели Шамболя

Размер изображения	Фильтрация ROF			
	Параметры фильтра	Время, с	Параметры фильтра	Время, с
480×640	$\lambda = 0,2$; $\sigma = 0,5$; <i>iterations</i> = 10	0,2639312	$\lambda = 0,5$; $\sigma = 0,5$; <i>iterations</i> = 15	0,3676090
1440×1920	$\lambda = 0,2$; $\sigma = 0,5$; <i>iterations</i> = 10	0,3917226	$\lambda = 0,5$; $\sigma = 0,5$; <i>iterations</i> = 15	0,5546364
1920×2560	$\lambda = 0,2$; $\sigma = 0,5$; <i>iterations</i> = 10	2,1988928	$\lambda = 0,5$; $\sigma = 0,5$; <i>iterations</i> = 15	3,2480199

При сравнительном анализе на выборке изображений с различными уровнями шума и разрешением было установлено, что оба фильтра эффективно удаляют шум. Однако, процесс предварительной обработки с помощью фильтра Гаусса показал более быстрые результаты по времени выполнения, особенно на изображениях с большим разрешением. Фильтр ROF демонстрировал более глубокое сглаживание изображений, но его вычислительная сложность может ограничить его применение на практике, и необходимо проводить дополнительные исследования и эксперименты для настройки и выбора оптимальных параметров алгоритма для конкретных задач и изображений.

Заключение

Представлено исследование по фильтрации изображений проектно-сметной документации архитектурных планов застройщика по предварительной обработке для трехмерного моделирования на основе особых точек углов. Данный эксперимент проводился для выборки реальных и синтетических изображений, сгенерированных нейросетями, зашумленных, размытых, высвеченных. Обнаружено, что фильтр Гаусса работает быстрее и лучше для не зашумленных изображений, в то время как фильтр ROF лучше справляется с задачей для сильно зашумленных изображений и предотвращает потерю особых точек углов, что имеет большое значение для последующего процесса моделирования. Данный эксперимент показал, что несмотря на чуть более долгое время предварительной обработки изображений, фильтр ROF позволяет более точно сохранять границы и углы объектов и является более эффективным для изображений с высоким уровнем шума.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wang, C. An improved adaptive median filter for Image denoising / C. Wang, L. Tian // ICSEE. – 2012. – Vol. 53, № 2. – P. 64.

2. Abe, C. Iterative Edge-Preserving adaptive Wiener filter for image denoising / C. Abe // ICSEE. – 2012. – Vol. 4, № 4. – P. 503–506.

3. Rudin, L.I. Nonlinear total variation based noise removal algorithms / L.I. Rudin, S. Osher, E. Fatemi // Physica D. – 1992. – Vol. 60. – P. 259–268. – DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0167-2789\(92\)90242-F](http://dx.doi.org/10.1016/0167-2789(92)90242-F)

4. An introduction to total variation for image analysis / A. Chambolle [et al.] // Theoretical foundations and numerical methods for sparse recovery. – 2009. – Vol. 9. – P. 263–340.

5. Chan, T.F. Image Processing and Analysis: Variational, PDE, wavelet, and Stochastic Methods / T.F. Chan, J. Shen. – SIAM, 2005.

6. Rudin-Osher-Fatemi total variation denoising using split Bregman. IPOL, 2012. [Electronic recourse]. – Mode of access: <http://www.ipol.im/pub/art/2012/g-tvd/>. – Date of access: 26.06.2024.

7. Hwang, J.J. Gaussian Forensic Detection using Blur Quantity of Forgery Image / J.J. Hwang, K.H. Rhee // 2019 International Conference on Green and Human Information Technology (ICGHIT). IEEE. – 2019. – P. 86–88.

8. Moradifar, M. Performance Improvement of Gaussian Filter using SIMD Technology / M. Moradifar, A. Shahbahrami // 2020 International Conference on Machine Vision and Image Processing (MVIP). – 2020. – P. 1–6.

9. Achin, J. Learning and control using Gaussian processes / J. Achin, X.N. Truong, M. Morari // ACM / IEEE 9th International Conference on Cyber-Physical Systems (ICCPS). IEEE. – 2018. – P. 140–149.

10. Cao, G. Gaussian process model predictive control of unknown non-linear systems / G. Cao G., E.M.K. Lai, F. Alam // IET Control Theory & Applications. – 2017. – Vol. 11, № 5. – P. 703–713.

11. Robust filtering and smoothing with Gaussian processes / M.P. Deisenroth, R.D. Turner, M.F. Huber [et al.] // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2012. – Vol 57. – № 7. – P. 1865–1871.

12. Аксёнова, Н.А. Разработка SDK для мобильного приложения с применением технологии дополненной реальности / Н.А. Аксёнова, А.И. Кучеров // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2021. – № 126 (3). – С. 81–84.

13. Demidenko, O.M. Development of a Machine Vision System for Image Recognition of Design Estimates / O.M. Demidenko, N.A. Aksionova // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2022. – Vol. 25, № 2. – P. 159–167. – DOI: <https://doi.org/10.33581/1561-4085-2022-25-2-159-167>.

14. Aksionova, N.A. Method of construction of three-dimensional structures based on key corner points / N.A. Aksionova, D.S. Sych, A.V. Varuyeu // *Izvestia of F. Skorina Gomel State University*. – 2021. – № 6 (141). – P. 69–75.

15. Demidenko, O.M. 3D-modeling of Augmented Reality objects using Shi-Tomasi corner

detection algorithms / O.M. Demidenko, N.A. Aksionova, A.V. Varuyeu // *J. Phys. CS*. 2091. – 2021. – P. 012058. – DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2091/1/012058>.

16. *Modification of the Canny Edge Detector for Recognition of Image Markers of Architectural Plans* / N.A. Aksionova, O.M. Demidenko, A.V. Varuyeu, D.S. Sych // 2023 7th International Conference on Information, Control, and Communication Technologies (ICCT). Astrakhan, Russian Federation. – 2023. – DOI: <https://doi.org/10.1109/ICCT58878.2023.10347056>.

Поступила в редакцию 17.05.2024.

Информация об авторах

Аксёнова Наталья Андреевна – аспирантка

МЕТОДИКА И ПРОГРАММНОЕ СРЕДСТВО ПОИСКА АНОМАЛИЙ В ДАННЫХ ТЕЛЕМЕТРИИ СОЛНЕЧНОЙ ЭЛЕКТРОСТАНЦИИ НА ОСНОВЕ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ – АВТОКОДИРОВЩИК

К.С. Дик¹, Н.И. Мухуров², И. Крузе³, Р.М. Асимов⁴, В.С. Осипович⁵

¹Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

²ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника», Минск

³ООО «Сенсотроника», Минск

⁴ООО «Сансниффер», Нюрнберг, Германия

⁵Лаборатория корпорации Новотек, Чарльстон, Южная Каролина, США

METHODS AND SOFTWARE FOR ANOMALIES SEARCHING IN THE TELEMETRY DATA OF A SOLAR POWER PLANT BASED ON THE ARTIFICIAL NEURON NETWORK – AUTOENCODER

K.S. Dzick¹, N.I. Mukhurov², I. Kruse³, R.M. Asimov⁴, V.S. Asipovich⁵

¹Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

²SSPA “Optics, Optoelectronics and Laser Technology”, Minsk

³LTD “Sensotronica”, Minsk

⁴LTD “Sunsniffer”, Nürnberg, German

⁵Novotech Laboratory INC, Charleston, SC, USA

Аннотация. Разработана новая методика и программное средство поиска аномалий в работе солнечных панелей на основе искусственной нейронной сети типа автокодировщик, обученной по данным телеметрии солнечной электростанции. Методика основана на статистических исследованиях отклонений, измеренных от восстановленных нейронной сетью значений силы тока и напряжения всех солнечных панелей электростанции. Введен критерий оценки наличия неисправности в работе солнечной панели на основе статистических исследований. С использованием разработанной методики и программного средства поиска аномалий в данных телеметрии за полгода наблюдений при разных критериях оценки обнаружены от 14 до 45 аномалий в 33 солнечных панелях. Все случаи проанализированы на предмет причин возникновения аномалий в работе солнечных панелей. Установлено, что использование при анализе результатов работы искусственной нейронной сети в качестве критерия обнаружения аномалий четыре среднеквадратических отклонения для среднедневных измеренных значений силы тока ΔI и напряжения ΔU даёт возможность обнаружить неисправные солнечные панели. А использование в качестве критерия обнаружения аномалий три и два среднеквадратического отклонения – снижение эффективности в работе солнечных панелей, связанной с деградацией, избыточным затенением и другими факторами.

Ключевые слова: солнечная панель, автокодировщик, искусственная нейронная сеть, поиск аномалий, солнечная электростанция, телеметрия.

Для цитирования: Методика и программное средство поиска аномалий в данных телеметрии солнечной электростанции на основе искусственной нейронной сети – автокодировщик / К.С. Дик, Н.И. Мухуров, И. Крузе, Р.М. Асимов, В.С. Осипович // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 92–100. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_92. – EDN: HUPWAR

Abstract. A new method and software tool for identifying anomalies in the operation of solar panels have been developed based on an artificial neural network of the autoencoder type, trained using solar power plant telemetry data. The method is based on statistical studies of deviations measured from the values of current and voltage of all solar panels of the power plant restored by the neural network. A criterion for assessing the presence of a malfunction in the operation of a solar panel based on statistical studies is introduced. Using the developed methodology and software for searching for anomalies in telemetry data over six months of observations, 14 to 45 anomalies were detected in 33 solar panels under different evaluation criteria. All the cases were analyzed for the causes of anomalies in the operation of solar panels. It has been established that the use of four standard deviations for average daily measured values of current ΔI and voltage ΔU as anomaly detection criterion in the analysis of the results of the artificial neural network operation makes it possible to detect faulty solar panels. And the use of three and two standard deviations as anomaly detection criterion can help to detect a decrease in the efficiency of solar panels associated with degradation, excessive shading and other factors.

Keywords: solar panel, normalized power value, anomaly detection, maximum power point, solar power plant, telemetry.

For citation: Methods and software for anomalies searching in the telemetry data of a solar power plant based on the artificial neuron network – autoencoder / K.S. Dzick, N.I. Mukhurov, I. Kruse, R.M. Asimov, V.S. Asipovich // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 3 (60). – P. 92–100. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_3_60_92 (in Russian). – EDN: HUPWAR

Введение

Увеличение объёмов производства электроэнергии с помощью солнечных электростанций способствует усовершенствованию систем контроля за их техническим состоянием, а также разработке методов автоматического обнаружения дефектных солнечных панелей и аномалий в их работе.

В качестве технических средств наблюдения за техническим состоянием солнечных панелей, работающих в составе электростанций, в настоящее время применяют облачные ресурсы (<https://www.solarfeeds.com/mag/solar-monitoring-systems-in-the-world/>, <http://www.sunsniffer.de/solution/what-is-sunsniffer.html>, <https://www.solareye.eu/platform/?r=site/page&view=features>, <http://www.pvsyst.com/en/>), которые обеспечивают сбор, хранение и визуализацию телеметрии при оснащении солнечных электростанций соответствующим оборудованием. Как правило, данными телеметрии в облачных сервисах являются напряжение, температура, сила тока каждой солнечной панели и освещённости для всех панелей электростанции. Поиск неисправностей в работе солнечной панели и классификация этих неисправностей зависят от внимания и квалификации специалиста, который использует облачный ресурс.

В контексте обнаружения аномалий в функционировании солнечных панелей некоторые исследователи предлагают применять их моделирование [1]–[3], сравнивая результат моделирования с телеметрией. В то время, как другие специалисты [4]–[10] рассматривают возможности использования алгоритмов для расчёта точки максимальной мощности (МРР) и сравнивать её с фактическими полученными значениями. Есть работы, которые развивают и дополняют оба рассмотренных способа [11]–[14], создавая цифрового двойника для каждой солнечной панели на основе результатов телеметрии.

Активно идёт поиск подходов к применению нейронных сетей для поиска аномалий в работе солнечных панелей. Авторы [15] приводят обзор применений нейронных сетей в поиске аномалий в солнечных панелях. Однако рассмотренные авторами применения направлены на поиск дефектов поверхности солнечных панелей на основе фотографий и нацелены на анализ изображений. Исследование [16] описывает результат использования нейронной сети *generalized regression neural networks* (GRNNs) для построения вольтамперных характеристик для шести различных солнечных панелей (отличие в материалах, из которых изготовлены). Обучение нейронной сети было осуществлено на данных, измеренных в лаборатории при нормальных условиях: STC. Применение для поиска аномалий в работе не рассматривалось. Авторы [17] приводят сравнение разных видов нейронных сетей при применении их для предсказания выработки

солнечной электростанции энергии в зависимости от погодных условий. В работе [18] был использован автокодировщик для поиска аномалий в сигнале на выходе инвертора на основании сигнала результата измерения освещённости. Все приведенные исследования не используют результаты телеметрии и имеют сложности применения их для поиска аномалий в работе отдельных солнечных панелей в электростанции.

Цель настоящего исследования – разработка методики и программного средства обнаружения аномалий в работе солнечных панелей по результатам телеметрии, представленной облачным ресурсом (<http://www.sunsniffer.de/solution/what-is-sunsniffer.html>) на основании искусственной нейронной сети типа автокодировщик.

1 Методика эксперимента

В ходе исследования использовались результаты телеметрии с электростанции *Südstadt-Forum*, расположенной в Нюрнберге, Германия. В состав установки входят три инвертора (модели SUN2000-20KTL, Sinvert PVM17 и Sinvert PVM20) с 16 последовательностями (цепочки солнечных панелей) и 287 солнечных панелей. Все цепочки состоят из 18 фотоэлектрических монокристаллических модулей M190 (STORM Energy GmbH, Германия).

В результате сбора телеметрии солнечной электростанции в облачном хранилище хранятся данные для API, включающие в себя следующие параметры: напряжение, силу тока, температуру в корпусе солнечной панели, уровень освещённости, временную метку. Интервал фиксации перечисленных параметров 2 мин. Набор данных собирался с июня 2019 г. по ноябрь 2019 г. включительно и в аналогичный период в 2018 г.

Для реализации и проверки предложенной методики и алгоритма использовались следующие средства разработки: Python, Tensorflow.

Проведение исследования проходило по следующему алгоритму:

- подготовка данных телеметрии (исходных датасетов для обучения и тестирования автокодировщика);
- обучение автокодировщика;
- поиск аномалий в работе солнечных панелей с использованием обученного автокодировщика.

Для подготовки датасета для обучения автокодировщика и для анализа работоспособности солнечных панелей результаты телеметрии были подвержены фильтрации, чтобы использовать только результаты сбора данных в солнечные дни. Параметры фильтра: сила тока – 0–15 А, освещённость – 360–1500 W/m², производная по току – –0,2–0,2, производная по освещённости – –3,8–3,8. Далее из результатов фильтрации были подготовлены векторы входных данных для обучения автокодировщика и векторы данных для

его тестирования. Вектор входных данных имел размерность 200×3 и включал в себя результаты телеметрии с 10.00 до 17.00 часов следующих параметров: временная метка, температура в корпусе солнечной панели T , уровень освещенности G . Вектор тестовых данных имел размерность 200×3 и включал в себя следующие параметры: временная метка, температура в корпусе солнечной панели T , уровень освещенности G . На выходе автокодировщика в обоих случаях был получен вектор 200×3 , то есть при подаче тестовых данных на вход нейронная сеть должна была по результатам обучения восстановить значения напряжения и силы тока на основании температуры в корпусе солнечной панели и уровня освещенности. Кроме того, для обучения автокодировщика были использованы данные телеметрии стабильно работающих солнечных панелей (без дефектов и сниженной эффективности в работе), отобранные в результате прямого анализа и применения других способов поиска аномалий в работе солнечных панелей.

Разработанная искусственная нейронная сеть представляет собой автокодировщик и состоит из семи слоёв нейронов. Её более детальная структурная схема с указанием функций активации слоёв отражена на рисунке 1.1.

Для определения критериев детектирования солнечных панелей в аномальном режиме работы были использованы среднедневные отклонения измеренных значений силы тока ΔI и напряжения ΔU от восстановленных автокодировщиком, а также количество строк l в векторе, средние отклонения в которых по напряжению или по силе тока превысили установленное значение.

$$\Delta I = \frac{\sum_{i=1}^N I'_i - I_i}{N},$$

где I' – восстановленная автокодировщиком сила тока, A ; I – сила тока, измеренная при сборе телеметрии, A ; N – количество точек в течение дня, использованных для расчётов.

$$\Delta U = \frac{\sum_{i=1}^N U'_i - U_i}{N},$$

где U' – восстановленное автокодировщиком напряжение, B ; U – напряжение, измеренное при сборе телеметрии, B ; N – количество точек в течение дня, использованных для расчётов.

Далее был осуществлён расчёт среднеквадратического отклонения для ΔI и ΔU каждой из солнечных панелей для комплекта солнечных дней по формулам.

$$\sigma_I = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M |\Delta I_i - \Delta I_{av}|^2}{M}}, \quad \sigma_U = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M |\Delta U_i - \Delta U_{av}|^2}{M}},$$

где ΔI_{av} и ΔU_{av} – среднее арифметическое для ΔI и ΔU , соответственно; ΔI_i и ΔU_i – значения ΔI и ΔU для одной панели соответственно; M – количество значений анализируемой выборки.

В качестве аномалий были рассмотрены солнечные панели, удовлетворяющие условию:

$$\Delta I > K\sigma_I \text{ или } \Delta U > K\sigma_U, \quad (1.1)$$

где K – коэффициент, являющийся критерием детектирования аномалии в солнечных панелях. В эксперименте были использованы значения коэффициента K – 2, 3 и 4.

Таким образом были сформированы списки солнечных панелей и аномалий в них.

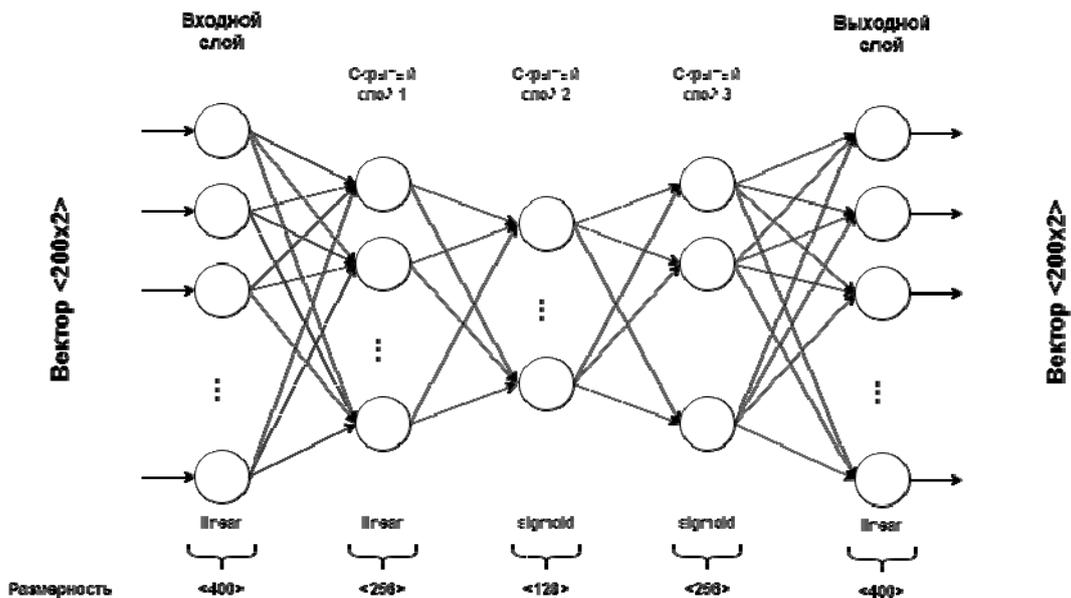


Рисунок 1.1 – Архитектура разработанного и используемого автокодировщика

2 Результаты исследования

Таблица 2.1 содержит результат применения условия (1.1) при поиске аномалий в работе солнечных панелей электростанции в течение шести месяцев (июнь – ноябрь) 2019 г. При этом в поиске аномалий участвовали только солнечные дни рассмотренного периода: 28 и 30 июня,

26 июля, 18-20 августа, 4 и 18 сентября, 14 и 26 октября, 13, 14 и 26 ноября. Таким образом, в выборку для анализа попали результаты расчёта средних отклонений силы тока ΔI и напряжения ΔU для 287 солнечных панелей для тринадцати дней.

Таблица 2.1 – Результаты поиска аномалий в течение шести месяцев (июнь – ноябрь) 2019 г.

Критерий и количество солнечных панелей/аномалий	Номер солнечной панели	Месяц	Среднедневные отклонения измеренных значений силы тока ΔI , А	Среднедневные отклонения измеренных значений напряжения ΔU , В
Для $\Delta I > 4\sigma_I$ или $\Delta U > 4\sigma_U$; 5 солнечных панелей; 14 аномалий	Module 2,2_2	Август	-3,65	2,62
		Ноябрь	-0,26	5,54
	Module 2,3_10	Июнь	-0,76	10,84
		Июль	0,25	10,57
		Август	-1,61	13,01
		Сентябрь	0,54	5,48
		Октябрь	0,18	6,77
		Ноябрь	0,48	9,67
		Август	-1,58	7,26
	Module 2,4_14	Сентябрь	-0,99	3,7
		Июль	2,59	6,96
	Module 1,4_3	Август	2,44	6,52
		Ноябрь	0,07	4,44
		Август	-1,14	6,04
Для $\Delta I > 3\sigma_I$ или $\Delta U > 3\sigma_U$; 18 солнечных панелей; 29 аномалий	Module 1,1_2	Июнь	-1,98	2,52
	Module 1,1_11	Ноябрь	-0,13	5,52
	Module 1,11_14	Август	-0,77	6,31
	Module 1,11_15	Ноябрь	-0,63	4,22
	Module 1,12_11	Июнь	-1,95	2,31
	Module 2,2_15	Август	-1,48	5,51
	Module 1,9_2	Август	-2,28	4,34
	Module 1,9_3	Август	-1,93	1,9
	Module 1,9_10	Август	-2,14	3,3
	Module 1,9_16	Август	-1,41	6,34
	Module 1,9_18	Август	-2,31	3,43
	Module 1,5_7	Ноябрь	0,88	6,25
	Module 1,5_8	Июнь	-1,65	3,76
		Август	-2,47	2,02
		Ноябрь	0,68	6,15
Для $\Delta I > 2\sigma_I$ или $\Delta U > 2\sigma_U$; 33 солнечных панелей; 45 аномалий	Module 1,2_8	Июнь	0,17	3,87
	Module 1,2_11	Июнь	0,14	3,65
	Module 1,2_12	Июнь	0,20	3,77
	Module 1,2_14	Июнь	0,17	3,66
	Module 1,3_12	Июнь	0,15	4,56
	Module 1,3_15	Июнь	-0,41	3,83
	Module 1,3_16	Июнь	-0,52	4,29
	Module 1,11_5	Июнь	-1,95	2,68
	Module 1,11_11	Август	-0,99	4,95
	Module 1,11_18	Август	-1,23	4,49
	Module 1,12_1	Август	-1,45	3,76
	Module 2,3_12	Июнь	0,91	-3,81
	Module 1,4_1	Июль	0,87	-4,52
	Module 1,5_14	Ноябрь	1,23	5,54
	Module 1,6_18	Ноябрь	0,16	4,48
	Module 1,8_4	Август	-1,36	4,32

Знак «минус» у среднего отклонения измеренных значений силы тока ΔI и напряжения ΔU от восстановленных автокодировщиком свидетельствует о том, что при заданных входных кривых освещённости и температуры исследуемые солнечные панели выдали измеренные силу тока и напряжение выше, чем рассчитала искусственная нейронная сеть при таких входных данных. Такая ситуация характерна для значений среднего отклонения измеренных значений силы тока ΔI и говорит о том, что солнечная панель функционировала в более эффективном режиме, чем ожидалось по результатам расчёта нейронной сети. Положительные значения ΔI и ΔU свидетельствуют о снижении измеренных характеристик относительно ожидаемых нейронной сетью. В таблице зафиксированы оба вида аномальной работы солнечных панелей.

Применение различного значения критерия детектирования аномалий K приводит к детекции разного количества аномалий в солнечных панелях: от 14 аномалий в 5 солнечных панелях при $K = 4$, до 45 аномалий в 33 панелях при $K = 2$. При использовании критерия детектирования аномалий $K = 4$ разработанное программное

обеспечение говорит о наличии 14 аномалий в пяти солнечных панелях с номерами: Module 2,2_2, Module 2,3_10, Module 2,4_14, Module 2,4_3 и Module 1,1_15. Среднедневные отклонения силы тока ΔI измеренных значений от восстановленных автокодировщиком при этом варьируются от $-3,65$ до $2,59$ А (среднее значение $-0,25$ А), а среднедневные отклонения напряжения ΔU – от $2,62$ до $13,01$ В (среднее значение $7,1$ В).

В случае применения в качестве критерия значения $K = 3$, количество аномалий увеличивается до 29 в 18 солнечных панелях. Диапазон изменения среднедневных отклонений силы тока ΔI и напряжения ΔU при этом остаётся прежним, а средние значения составляют $-0,79$ А и $5,63$ В. То есть, среднее значение ΔI смещается в отрицательную сторону, что говорит об аномалиях, связанных с более эффективной работой солнечных панелей, чем этого ожидала искусственная нейронная сеть при заданных условиях, среднее значение ΔU снижается.

Критерий детектирования аномалий $K = 3$ увеличивает количество аномалий до 45 в 33 солнечных панелях при средних значениях ΔI и ΔU $-0,6$ А и $4,73$ В соответственно.

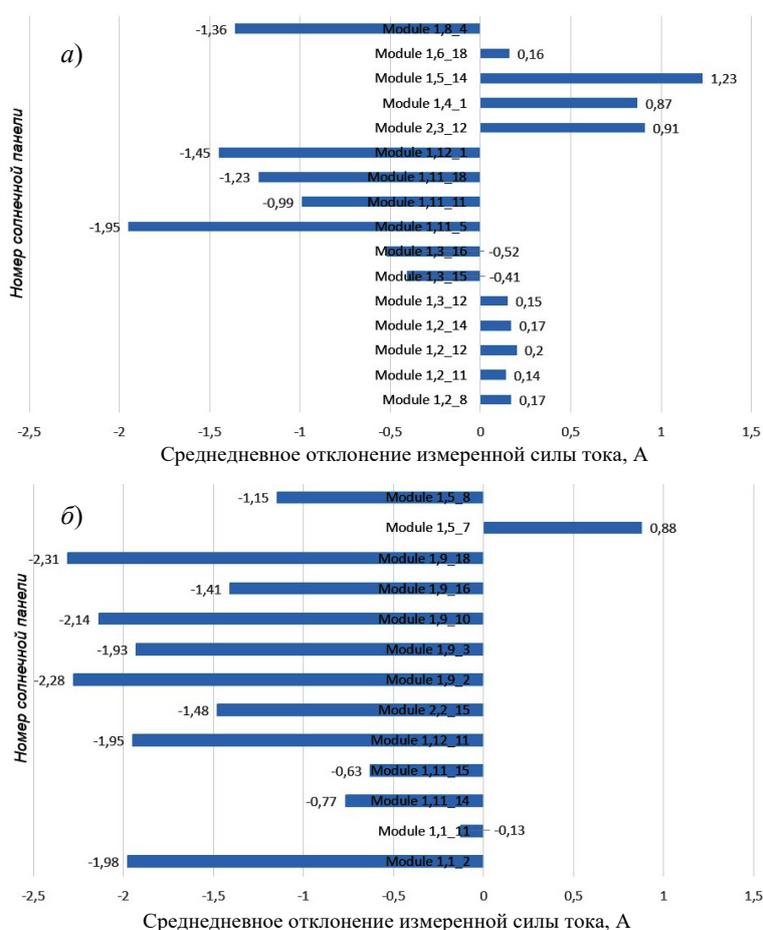


Рисунок 2.1 – Диаграммы среднедневных отклонений измеренных значений силы тока ΔI , А: а) $K = 2$ (за вычетом случаев для $K = 4$ и $K = 3$); б) $K = 3$ (за вычетом случаев для $K = 4$)

Трёхмерная диаграмма для всех анализируемых дней, где по оси Z отложены номера панелей, отражена на рисунке 2.2. Для каждого солнечного дня облако точек на диаграмме средних отклонений измеренных значений силы тока ΔI и напряжения ΔU от восстановленных автокодирующим выглядит индивидуально (рисунок 2.3), что связано с различием в измеренных фактических значениях для уровня освещённости G и температуры в корпусе панели T , а также

режимах работы инверторов и факторов, связанных с затенением или запылением части солнечных панелей. При этом рисунок 2.3 позволяет визуально идентифицировать аномальные значения ΔI и ΔU . Солнечные панели, имеющие аномалию в работе, выделяются из общего облака точек либо на всех диаграммах, если дефект стабилен от месяца к месяцу, либо на диаграмме определённого дня, если дефект присущ исследуемому дню.

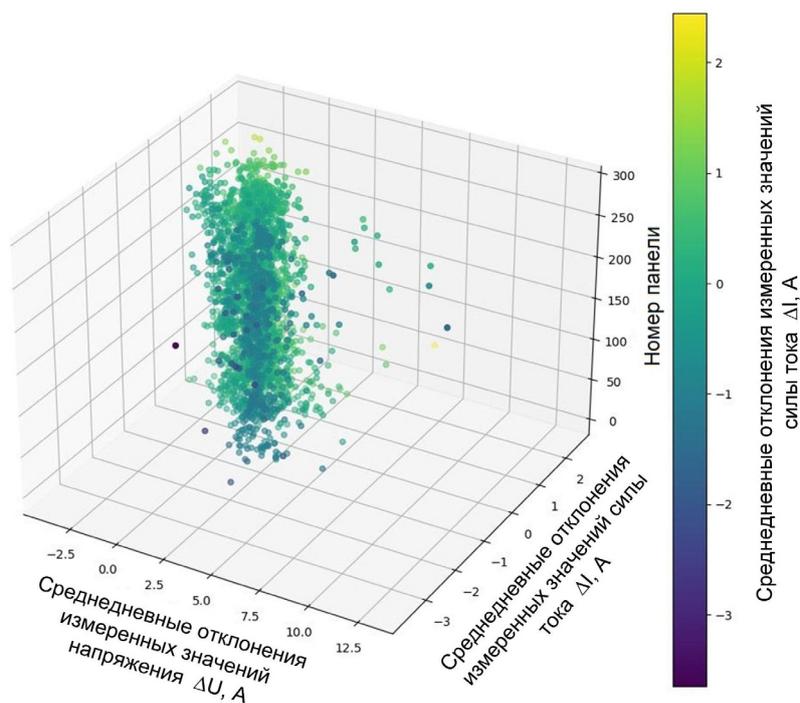


Рисунок 2.2 – Результат построения средних отклонений измеренных значений силы тока ΔI и напряжения ΔU от восстановленных автокодирующим в привязке к номеру солнечных панелей электростанции для исследуемых солнечных дней в трёхмерном пространстве

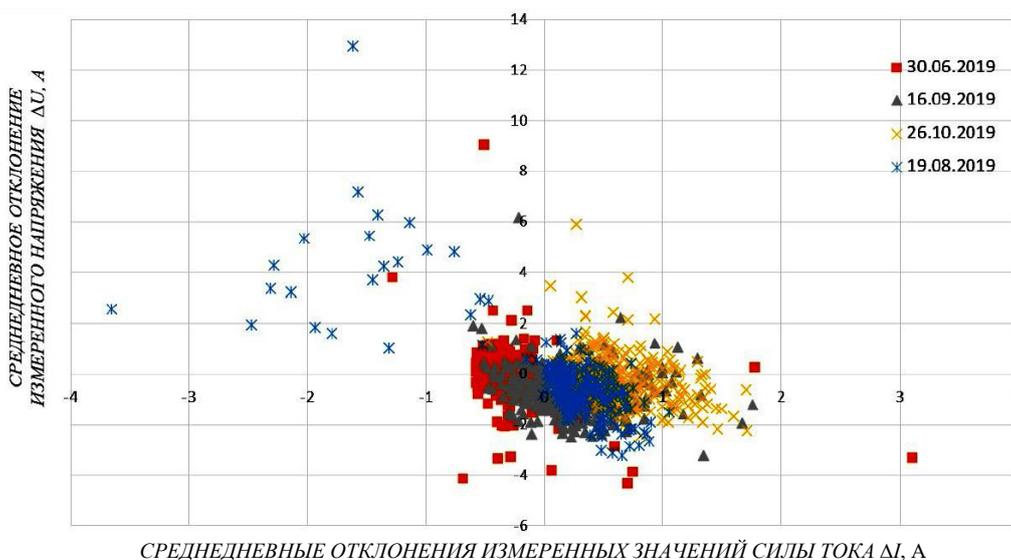


Рисунок 2.3 – Результат построения средних отклонений измеренных значений силы тока ΔI и напряжения ΔU от восстановленных автокодирующим для всех солнечных панелей электростанции для следующих четырёх солнечных дней: 30 июня, 18 августа, 16 сентября, 26 октября 2019 г.

Проанализируем кривые напряжения, силы тока, освещённости и температуры, измеренные и восстановленные автокодировщиком для некоторых солнечных панелей из таблицы.

Аномальная работа солнечной панели Module 2,3_10 сохраняется все шесть месяцев, при этом средние отклонения измеренных значений напряжения ΔU изменяются от 5,48 В (при $\Delta I = 0,54$ А) до 13,01 В (при $\Delta I = -1,61$ А). Аномальная работа солнечной панели с номером Module 2,3_10 подтверждается и другими способами поиска и анализа аномалий [20], [21], в том числе и основанными на оценке выработки электроэнергии.

На рисунке 2.4 отражены кривые для солнечной панели с номером Module 2,3_10. Кривые показывают, что измеренное для солнечной панели Module 2,3_10 напряжение на 10 В ниже, чем рассчитанное автокодировщиком при кривой

освещённости и температуре измеренных 18 августа 2019 г. Это может свидетельствовать об открытии одного из защитных диодов в солнечной панели, которые предназначены для отключения от цепи частей солнечной панели. Аналогичные выводы по этой солнечной панели и кривая напряжения сравнения с рабочей панелью приведены в [20]. При этом кривая силы тока, рассчитанная автокодировщиком, практически совпадает с кривой, построенной по результатам измерения. Отличие наблюдается только в начале дня: от нулевой до сотой точки сила тока имеет значения, близкие к нулю, и затем резко вырастает до 2,2–2,3 А. Такое поведение кривой скорее всего связано с затенением солнечной панели в утреннее время при том, что датчик освещённости не попадает в область затенения, так как построенная по его показаниям кривая в этот период имеет плавный рост.

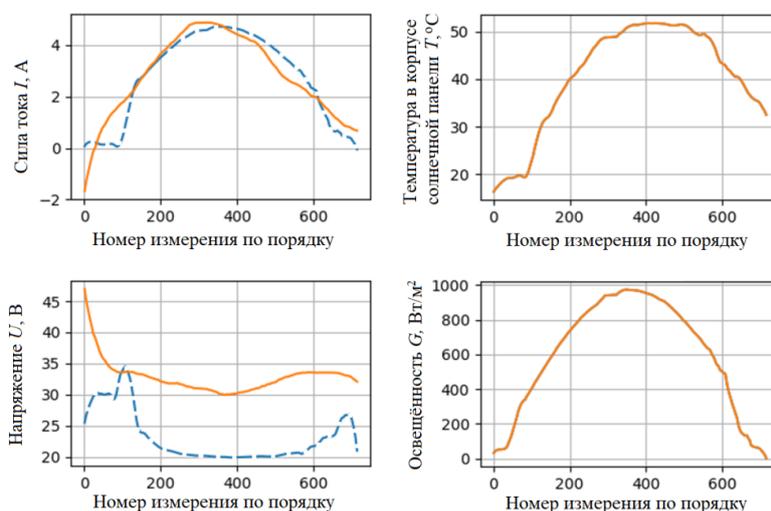


Рисунок 2.4 – Кривые силы тока I , напряжения U (синим цветом измеренные значения, оранжевым – рассчитанные автокодировщиком), температуры в панели T и освещённости G (оранжевым цветом измеренные) в течение дня для солнечной панели с номером Module 2.3_10

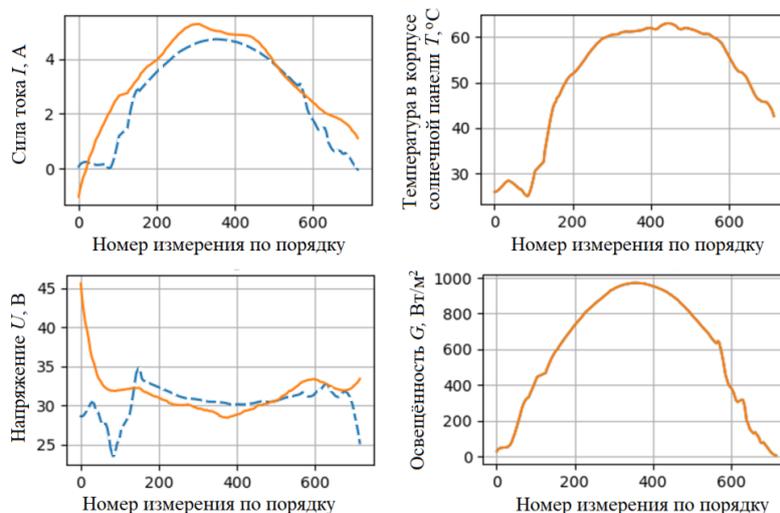


Рисунок 2.5 – Кривые силы тока I , напряжения U (синим цветом измеренные значения, оранжевым – рассчитанные автокодировщиком), температуры в панели T и освещённости G (оранжевым цветом измеренные) в течение дня для солнечной панели с номером Module 2.3_11

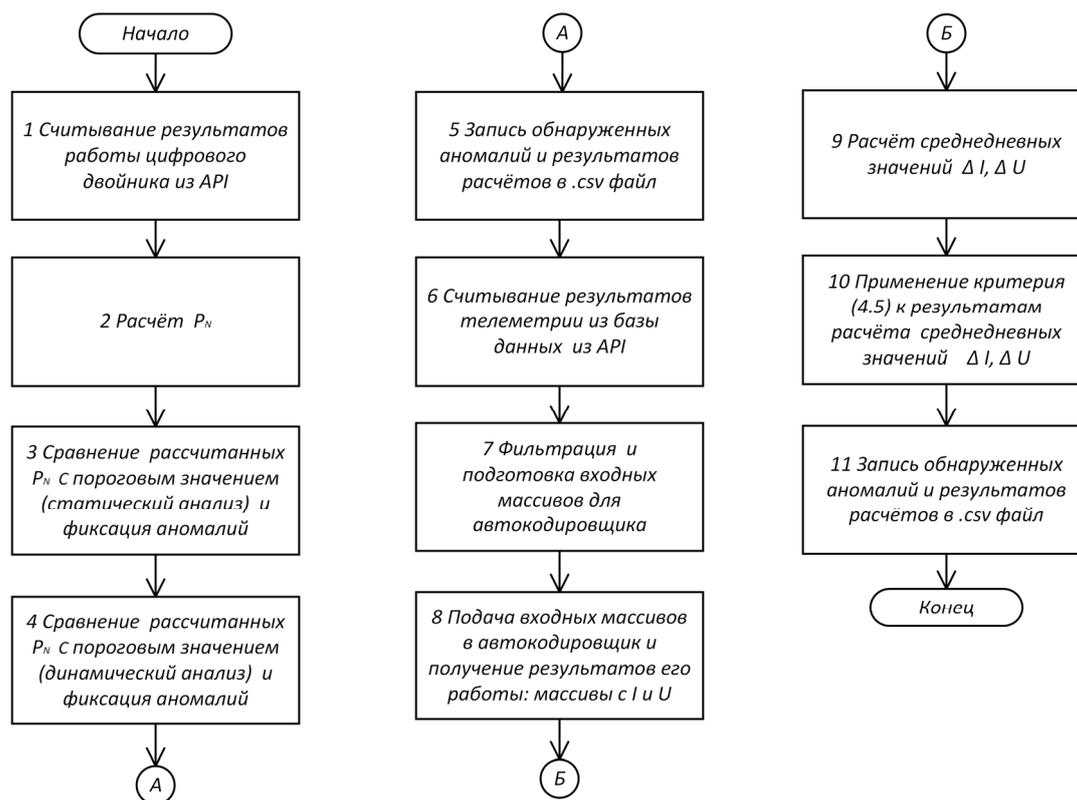


Рисунок 2.6 – Блок-схема алгоритма программного обеспечения для поиска аномалий в работе солнечных панелей, разработанного на основе предложенной методики

По результатам проведенных исследований было разработано программное средство, алгоритм работы которого представлен на рисунке 2.6. Входными данными для программного средства являются результаты телеметрии из базы данных от API (<http://www.sunsniffer.de/solution/what-is-sunsniffer.html>), а выходными данными – список солнечных панелей с обнаруженными в них аномалиями в привязке к анализируемой дате.

Заключение

Результаты исследования показали, что использование автокодировщика для поиска аномалий в работе панелей солнечной электростанции позволяет обнаруживать аномалии. При этом установлено, что использование в качестве критерия обнаружения аномалий четыре среднеквадратических отклонения для средневенных измеренных значений силы тока ΔI и напряжения ΔU дают возможность обнаружить неисправные солнечные панели. А использование в качестве критерия обнаружения аномалий три и два среднеквадратического отклонения – снижение эффективности в работе солнечных панелей, связанное с деградацией, избыточным затенением и другими факторами.

Для повышения точности поиска аномалий в работе солнечных панелей при использовании разработанного программного обеспечения сле-

дует использовать комбинацию двух искусственных нейронных сетей (автокодировщиков), где в качестве обучающего датасета для одной нейронной сети использовать результат телеметрии сразу после монтажа электростанции, в качестве обучающего датасета для другой нейронной сети – отдельной солнечной панели, что нивелирует влияние на результат обучения автокодировщика результатов воздействия таких факторов, как деградация и загрязнение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dorin, P. Modelling and simulation of photovoltaic cells / P. Dorin, C. Farcas, I. Ciocan // ACTA Technica Napocensis. – 2008. – Vol. 49, № 1. – P. 42–47.
2. Modeling and simulation of energy recovery from a photovoltaic solar cell / O.D. Adeniyi [et al.] // Nigerian J. of Technological Research. – 2016. – Vol. 11. – P. 26–31.
3. MATLAB/Simulink based modelling of solar photovoltaic cell / T. Salmi [et al.] // Intern. J. of Renewable Energy Research. – 2012. – Vol. 2, № 2. – P. 213–218.
4. Tina, G. Monitoring and diagnostics of photovoltaic power plants / G. Tina, F. Cosentino, C. Ventura // Renewable Energy in the Service of Mankind; ed. A. Sayigh. – Springer, Cham. – 2016. – Vol. 2. – P. 505–516.

5. *Ibbini, M.* Analysis and design of a maximum power point tracker for a stand-alone photovoltaic system using Simscape / M. Ibbini, A. Adawi // Intern. J. of Advanced Trends in Computer Science and Engineering. – 2019. – Vol. 8, № 1. – P. 54–57.
6. *Rashid, Md.M.* Design and construction of the solar photovoltaic simulation system with the implementation of MPPT and boost converter using Matlab/Simulink / Md.M. Rashid, A. Habib, M. Mahdi Hasan // Asian J. of Current Research. – 2018. – Vol. 3, № 1. – P. 27–36.
7. *Flatness-based control for the maximum power point tracking in a photovoltaic system / G.-A. Leopoldo [et al.]* // Energies. – 2019. – Vol. 12. – P. 1843–1862. – DOI: <https://doi.org/10.3390/en12101843>
8. *Modeling of PV module with consideration of environmental factors / N. Kishor [et al.]* // 2010 IEEE PES Innovative Smart Grid Technologies Conf. Europe (ISGT Europe), Gothenburg, Sweden, 11–13 Oct. 2010. – Gothenburg, 2010. – P. 121–126.
9. *Simulation of PV array output power for modified PV cell model / N. Kishor [et al.]* // 2010 IEEE Intern. Conf. on Power and Energy, Kuala Lumpur, Malaysia, 29 Nov. – 01 Dec. 2010. – Kuala Lumpur, 2010. – P. 533–538.
10. *Steady-state model and power flow analysis of grid-connected photovoltaic power system / Y. Wang [et al.]* // 2008 IEEE Intern. Conf. on Industrial Technology, Chengdu, China, 21–24 Apr. 2008. – Chengdu, 2008. – P. 1–6.
11. *Virtual laboratory for testing of solar power plants in big data analysis / R.M. Asimov [et al.]* // Collection of Materials of the V Intern. Scientific and Practical Conf. “Big Data and Advanced Analytics”, Minsk, 13–14 Mar. 2019. – Minsk, 2019. – P. 61–65.
12. *Asipovich, V.S.* Digital twin in the analysis of a big data / V.S. Asipovich, R.M. Asimov, S.V. Chernoshey // Collection of Materials of the IV Intern. Scientific and Practical Conf. “Big Data and Advanced Analytics”, Minsk, 3–4 May 2018. – Minsk, 2018. – P. 69–78.
13. *Digital twin for PV module fault detection / S. Valevich [et al.]* // J. of Engineering Science. – 2020. – Vol. XXVII, № 4. – P. 80–87.
14. *Digital twin for PV plant's power generation analysis / R. M. Asimov [et al.]* // Collection of Materials of the VI Intern. Scientific and Practical Conf. “Big Data and Advanced Analytics”, Minsk, 20–21 May 2020. – Minsk, 2020. – P. 78–88.
15. *Deep Learning-Based Fault Diagnosis of Photovoltaic Systems: A Comprehensive Review and Enhancement Prospects / M. Mansouri, M. Trabelsi, H. Nounou, M. Nounou* // IEEE Access. – 2021. – Vol. 9. – P. 126286–126306.
16. *Prediction Model for the Performance of Different PV Modules Using Artificial Neural Networks / M. Jaber, A. Sufiyan, A. Hamid, K. Sopian, A. Fazlizan, A. Ibrahim* // Appl. Sci. – 2022. – Vol. 12. – P. 3349.
17. *Data-Driven Day-Ahead PV Estimation Using Autoencoder-LSTM and Persistence Model / Y. Zhang, C. Qin, A.K. Srivastava, C. Jin; R.K. Sharma* // IEEE Transactions on Industry Applications. – 2020. – Vol. 56, № 6. – P. 7185–7192. – DOI: 10.1109/TIA.2020.3025742
18. *Machine Learning Schemes for Anomaly Detection in Solar Power Plants / M. Ibrahim, A. Alsheikh, F.M. Awaysheh, M.D. Alshehri* // Energies. – 2022. – № 15. – P. 1082.
19. *Информационное обеспечение мониторинга технического состояния солнечных электростанций / С. В. Валевич [и др.]* // Информационные технологии. – 2020. – Т. 26, № 10. – С. 594–601.
20. *Дик, К.С.* Методика поиска дефектных солнечных панелей в данных телеметрии электростанции на основе результатов работы цифрового двойника / К.С. Дик // Доклады БГУИР. – 2023. – Т. 21, № 6. – С. 113–120.
21. *Methods and software tool for automating static and dynamic search for anomalies in telemetry data of a solar power plant / K.S. Dzik [et al.]* // International Journal of Advanced Research. – 2023. – Vol. 11, № 8. – P. 143–155.

Поступила в редакцию 22.05.2024.

Информация об авторах

Дик Константин Сергеевич – аспирант
Мухуров Николай Иванович – д.т.н., профессор
Крузе Ингмар – директор
Асимов Рустам Мустафьевич – к.т.н., директор
Осипович Виталий Семенович – к.т.н., доцент, технический директор

АЛЕКСАНДР ВЛАДИМИРОВИЧ РОГАЧЁВ
(к 75-летию со дня рождения)

13 августа 2024 года исполнилось 75 лет известному белорусскому ученому, Заслуженному деятелю науки Республики Беларусь, члену-корреспонденту Национальной академии наук Беларуси, доктору химических наук, профессору.

А.В. Рогачёв окончил Гомельский государственный университет в 1972 г. и был направлен для работы в ИММС АН БССР, где без отрыва от производства обучался в аспирантуре (1976–1979 гг.) и в 1979 г. представил к защите кандидатскую диссертацию «Исследование процессов формирования металлических пленок на поверхностях полимеров в вакууме». Диссертация на соискание ученой степени доктора химических наук по специальности 02.00.04 – Физическая химия «Кинетические и физикохимические закономерности процессов массо- и энергопереноса при формировании тонкопленочных металлополимерных систем в вакууме», была успешно защищена в Москве в 1989 г. в специализированном совете при Институте химической физики АН СССР.

В 1981 г. А.В. Рогачёв был приглашен для работы в Белорусский институт инженеров железнодорожного транспорта и последовательно занимал в нем должности старшего преподавателя, доцента, профессора, заведующего кафедрой, с 2001 г. – проректора по научной работе, директора Научно-исследовательского института железнодорожного транспорта. С февраля 2004 г. по июнь 2016 г. Александр Владимирович ректор Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины. С 2016 г. – директор Научно-исследовательского физико-химического института ГГУ.

А.В. Рогачёв – активно работающий ученый с мировым именем. Широкою известностью имеют его фундаментальные работы в области электронно-лучевых и ионно-плазменных технологий. Он признан основателем научной школы в области физической химии композиционных, многослойных тонкопленочных систем на основе полимерных и неорганических материалов, синтеза сложных химических соединений из активной газовой фазы. Является автором релаксационно-диффузионной теории межфазных процессов, на основе которой активно развивается научное направление в области физикохимии гетерогенных систем.

А.В. Рогачёв – автор более 750 научных трудов, в том числе 8 монографий и учебных пособий, 82 авторских свидетельств и патентов. Под руководством А.В. Рогачёва защищено 16 кандидатских диссертаций, он является научным консультантом двух соискателей, подготовивших докторские диссертации.

Научная деятельность А.В. Рогачёва высоко оценена в Республике Беларусь и за её пределами. В июне 2009 г. он избран членом-корреспондентом Национальной академии наук Беларуси.

За выдающийся вклад в развитие науки и высшего образования А.В. Рогачёв награжден орденом Почета Республики Беларусь (2009 г.), ему присвоено почетное звание Заслуженного деятеля науки Республики Беларусь (2003 г.), почетного доктора Института химии новых материалов НАН Беларуси (2014 г.). Награжден памятной медалью академика П.Л. Капицы «Автору научного открытия» РАЕН (2002 г.), знаком «Почётный железнодорожник» (2003 г.).

За большой вклад в социальную модернизацию Китая, сотрудничество А.В. Рогачёв награжден Премией дружбы Правительства КНР (2021), премией «Дружба Цзиньлин» провинции Цзянсу (2020), удостоен звания «Почетный гражданин провинции Цзянсу» (2020), звания «Почетный гражданин города Уси» (2022), звания «Человек года 2020 Нанкинского университета науки и технологии» (2020), звания «Почетный профессор Нанкинского университета науки и технологии» (2012), «Почетный профессор Тайюанского технологического университета» (2018), «Почетный профессор Бодинского технологического университета» (2023).

Редколлегия журнала «Проблемы физики, математики и техники» поздравляет Александра Владимировича с юбилеем и желает крепкого здоровья, неиссякаемой энергии, творческих идей, новых научных достижений и успехов во всех сферах его многогранной деятельности!

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfimt.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;

- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e. g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).