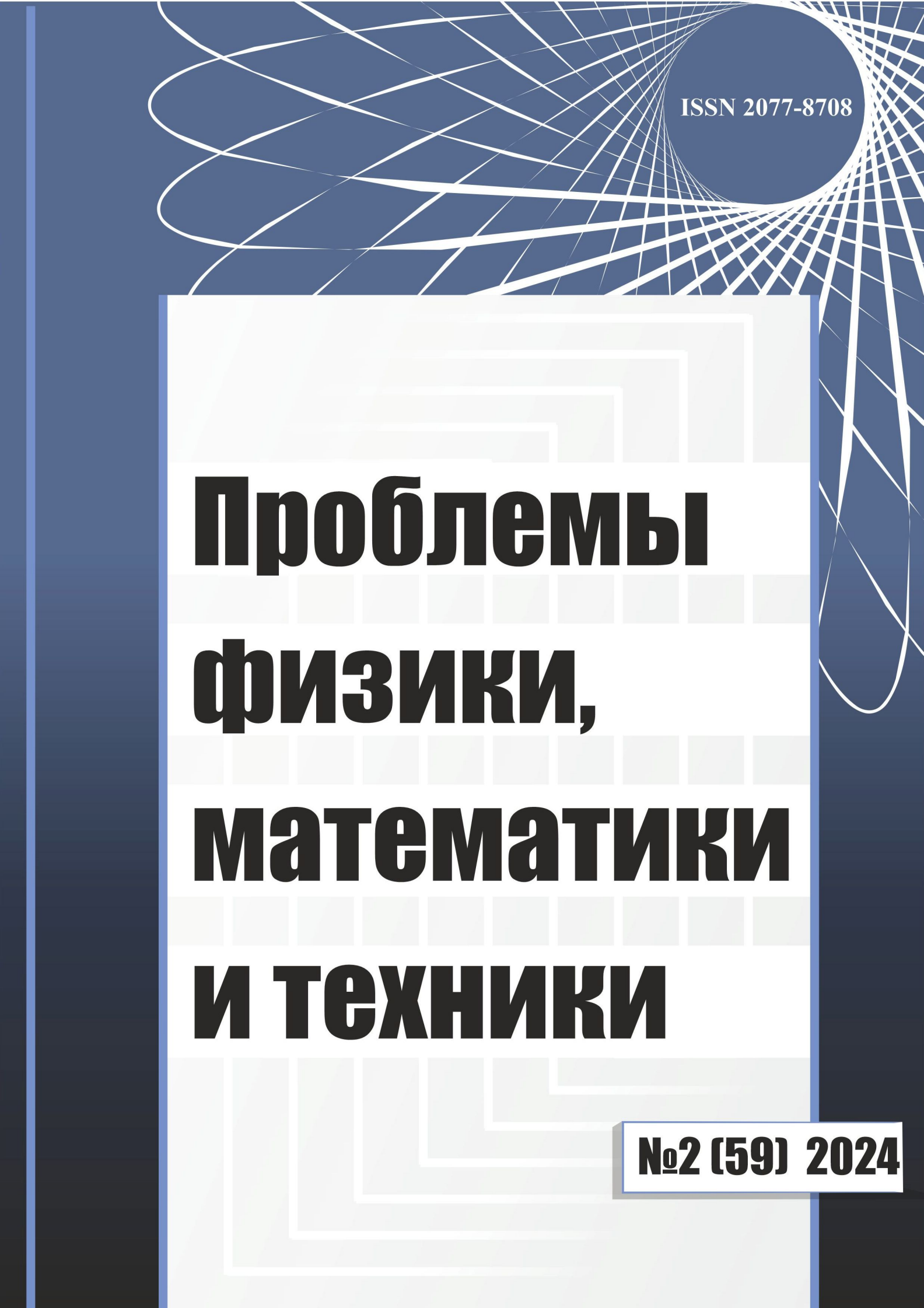




ISSN 2077-8708

Проблемы физики, математики и техники

№2 (59) 2024

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ
«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ,
МАТЕМАТИКИ
И ТЕХНИКИ»**

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:
С.А. Хахомов (Беларусь)

**ЗАМЕСТИТЕЛИ ГЛАВНОГО
РЕДАКТОРА:**
А.В. Рогачёв (Беларусь)
Д.Л. Коваленко (Беларусь)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:
В.Е. Агабеков (Беларусь)
П.Н. Богданович (Беларусь)
А.Ф. Васильев (Беларусь)
Го Вэньбинь (Китай)
С.С. Гиргель (Беларусь)
В.И. Громак (Беларусь)
А.Н. Дудин (Беларусь)
В.А. Еровенко (Беларусь)
А.И. Калинин (Беларусь)
Матс Ларссон (Швеция)
В.Д. Мазуров (Россия)
Ю.В. Малинковский (Беларусь)
А.Р. Миروتин (Беларусь)
В.В. Можаровский (Беларусь)
В.С. Монахов (Беларусь)
Н.К. Мышкин (Беларусь)
Ю.М. Плескачевский (Беларусь)
И.В. Семченко (Беларусь)
А.Н. Сердюков (Беларусь)
А. Сихвола (Финляндия)
А.Н. Скиба (Беларусь)
С.А. Третьяков (Финляндия)
М.А. Ярмоленко (Беларусь)

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ:
Е.А. Ружицкая (Беларусь)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины
ул. Советская, 104,
246028, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: <http://pfmt.gsu.by>

**SCIENTIFIC AND TECHNICAL
JOURNAL
«PROBLEMS OF PHYSICS,
MATHEMATICS
AND TECHNICS»**

EDITOR-IN-CHIEF:
S.A. Khakhomov (Belarus)

DEPUTY EDITORS-IN-CHIEF:
A.V. Rogachev (Belarus)
D.L. Kovalenko (Belarus)

EDITORIAL BOARD:
V.E. Agabekov (Belarus)
P.N. Bogdanovich (Belarus)
A.F. Vasilyev (Belarus)
Guo Wenbin (China)
S.S. Girgel (Belarus)
V.I. Gromak (Belarus)
A.N. Dudin (Belarus)
V.A. Erovenko (Belarus)
A.I. Kalinin (Belarus)
Mats Larsson (Sweden)
V.D. Mazurov (Russia)
Yu.V. Malinkovsky (Belarus)
A.R. Mirotin (Belarus)
V.V. Mozharovsky (Belarus)
V.S. Monakhov (Belarus)
N.K. Myshkin (Belarus)
Yu.M. Pleskachevsky (Belarus)
I.V. Semchenko (Belarus)
A.N. Serdyukov (Belarus)
A. Sihvola (Finland)
A.N. Skiba (Belarus)
S.A. Tretyakov (Finland)
M.A. Yarmolenko (Belarus)

EXECUTIVE SECRETARY:
E.A. Ruzhitskaya (Belarus)

EDITION ADDRESS:
Francisk Skorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246028, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: <http://pfmt.gsu.by>

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 2 (59) 2024

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

- Ахраменко Н.А.** Магнитный поток кольца с током. Индуктивность кольца 7
- Белый В.Н., Кулак Г.В., Тозик Л.А., Шакин О.В.** Дифракция двухпараметрических
кольцевых световых пучков на ультразвуке в кристаллах парателлурита 11
- Бойправ О.В., Челябинский В.С., Лыньков Л.М., Тумилович М.В.** Гибкие многослой-
ные поглотители электромагнитного излучения с упорядоченно-структурированным промежу-
точным слоем на основе алюминиевой стружки 16
- Гиргель С.С.** Поляризационные и энергетические свойства декартовых ТМ-мод Куммера –
Гаусса 22
- Мороз Н.И., Валько Н.Г., Васильев С.В.** Модификация структуры и свойств кремнистой
электротехнической стали лазерным излучением 27
- Никитюк Ю.В., Васильев А.Ф., Марченко Л.Н., Ма Ц., Ван Л., Цинь Ю., Аушев И.Ю.**
Определение параметров управляемого лазерного раскалывания силикатных стекол с использо-
ванием регрессионных, нейросетевых и нечетких моделей 32
- Новикова О.В., Тюменков Г.Ю.** Приближение Рэлея – Джинса в инфракрасном диапазоне
теплого излучения звёзд 39
- Осипов А.Н., Каленкович Е.Н., Рокач В.А., Ма Т.** Изменение параметров сигналов,
возбуждающих холодную плазму, при взаимодействии с объектами 43
- Руденков А.С., Пилипцов Д.Г.** Влияние термообработки на структуру и механические
свойства углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием 48
- Ярмоленко М.А., Горбачев Д.Л., Рогачев А.В., Джанг Сянь Хун, Фролов С.А.** Кинетиче-
ские закономерности осаждения и молекулярная структура покрытий полиоксиметилена, сфор-
мированных из активной газовой фазы 57

МАТЕМАТИКА

- Васильева Т.И.** О некоторых группах из формации сверхразрешимых конечных групп 64
- Жогаль С.П., Жогаль С.И., Орлов В.В.** Исследование флуктуаций в молекулярном
генераторе как автоколебательной системе методом канонических разложений 70
- Корзюк В.И., Рудько Я.В.** Об отсутствии, неединственности и разрушении классических
решений смешанных задач для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом 73
- Косенок Н.С., Близнец И.В., Соболев И.А., Купцова Я.А.** Конечные группы с системами
 N -квазинормальных подгрупп 79
- Мансимов К.Б., Мансимзаде А.Ф.** К необходимым условиям оптимальности в одной
двухступенчатой задаче управления интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра . 84

ТЕХНИКА

- Степаненко Д.А., Еромин Е.С.** Применение метода Качмажа для решения обратных задач
моделирования процесса магнитно-абразивной финишной обработки плоских поверхностей 90

ЛЮДИ НАУКИ

- Гиргель Сергей Сергеевич** 99
- Сердюков Анатолий Николаевич** 100

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки:

- **технические;**
- **физико-математические.**

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21. Приказы Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 31.12.2020 № 338, № 339.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е.А. Ружицкая*
Корректоры *И.А. Хорсун, Т.А. Фицнер*
Дизайн обложки *А.В. Ермаков*

Подписано в печать 12.06.24. Формат 60×84 $\frac{1}{8}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 12,09. Уч.-изд. л. 10,53. Тираж 17 экз. Заказ № 344.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246028, Гомель

© Учреждение образования
«Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины», 2024
© Проблемы физики, математики и техники, 2024
© Problems of Physics, Mathematics and Technics, 2024

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December 2009

Released quarterly

№ 2 (59) 2024

CONTENTS

PHYSICS

Akhramenko N.A. Magnetic flux of ring with current. Ring inductance	7
Bely V.N., Kulak G.V., Tozik L.A., Shakin O.V. Diffraction of two-parameter ring light beams by ultrasound in paratellurite crystals	11
Boiprav O.V., Chelyadinsky V.S., Lynkou L.M., Tumilovich M.V. Flexible multilayer electromagnetic radiation absorbers with an ordered structured intermediate layer based on aluminum shavings	16
Girgel S.S. Polarization and energy properties of the cartesian TM-modes of Kummer – Gauss beams	22
Moroz N.I., Valko N.G., Vasilyev S.V. Modification of the structure and properties of electrical steel by laser radiation	27
Nikityuk Yu.V., Vasilyev A.F., Marchenko L.N., Ma J., Wang L., Qin Y., Aushev I.Yu. Determination of parameters for controlled laser cleaving of silicate glasses using regression, neural network and fuzzy models	32
Novikova O.V., Tyumenkov G.Yu. Rayleigh – Jeans approximation in the infrared range of thermal radiation of stars	39
Osipov A.N., Kalenkovich Y.N., Rokach V.A., Ma T. Changing the parameters of signals exciting cold plasma when interacting with objects	43
Rudnikov A.S., Piliptsov D.G. Influence of heat treatment on the structure and mechanical properties of carbon coatings doped with zirconium and silicon	48
Yarmolenko M.A., Gorbachev D.L., Rogachev A.V., Jiang Xiao Hong, Frolov S.A. Kinetic regularities of deposition and molecular structure of polyoxymethylene coatings formed from the active gas phase	57

MATHEMATICS

Vasilyeva T.I. On some groups from the formation of supersoluble finite groups	64
Zhogal S.P., Zhogal S.I., Orlov V.V. Investigation of fluctuations in molecular generator as self-oscillatory system by method of canonical representations	70
Korzyuk V.I., Rudzko J.V. On the absence, non-uniqueness, and blow-up of classical solutions of mixed problems for the telegraph equation with a nonlinear potential	73
Kosenok N.S., Blisnetz I.V., Sobol I.A., Kuptsova Ya.A. Finite groups with systems of N -quasinormal subgroups	79
Mansimov K.B., Mansimzade A.F. To the necessary optimality conditions in one two-stage control problem for integro-differential equations of Volterra type	84

TECHNICS

Stepanenko D.A., Eromin E.S. Application of Kaczmarz method for solving inverse modelling problems of magnetic-abrasive finishing process of planar surfaces	90
---	----

PEOPLE OF SCIENCE

Girgel Sergej Sergeevich	99
Serdyukov Anatoly Nikolaevich	100

Founder – Francisk Skorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science:

- Technics;**
- Physics and Mathematics.**

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Data-bases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

МАГНИТНЫЙ ПОТОК КОЛЬЦА С ТОКОМ. ИНДУКТИВНОСТЬ КОЛЬЦА

Н.А. Ахраменко

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

MAGNETIC FLUX OF RING WITH CURRENT. RING INDUCTANCE

N.A. Akhramenko

Belarusian State University of Transport, Gomel

Аннотация. В литературе по физике, посвященной разделу «Электричество и магнетизм», рассматриваются различные формы проводников с токами, создающих магнитное поле. Одним из них является кольцо. Кольцо или одновитковый контур является элементом многих электрических устройств. Одним из основных параметров кольца является индуктивность. В данной работе вначале рассматривается магнитный поток, создаваемый кольцом с током. Затем по определенному магнитному потоку находится индуктивность кольца. Полученная формула находится в хорошем соответствии с другими выражениями для индуктивности кольца.

Ключевые слова: кольцо с током, индукция магнитного поля, магнитный поток, индуктивность.

Для цитирования: Ахраменко, Н.А. Магнитный поток кольца с током. Индуктивность кольца / Н.А. Ахраменко // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (59). – С. 7–10. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_7. – EDN: YSFOSG

Abstract. In the literature in physics, devoted to the section “Electricity and magnetism”, various forms of conductors with currents that create a magnetic field are considered. One of them is the ring. A ring or a single-turn circuit is an element of many electrical devices. One of the main parameters of the ring is inductance. In this work, we first consider the magnetic flux created by a current-carrying ring. Then, based on a certain magnetic flux, the inductance of the ring is found. The resulting formula is in good agreement with the other expressions for the inductance of the ring.

Keywords: current ring, magnetic field induction, magnetic flux, inductance.

For citation: Akhramenko, N.A. Magnetic flux of ring with current. Ring inductance / N.A. Akhramenko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 2 (59). – P. 7–10. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_7. – EDN: YSFOSG

Introduction

The study of the inductance properties of current-carrying circuits began to actively develop after the invention of the radio. Nowadays, inductance is needed by a huge number of different customers with a huge range of geometric sizes, small of which have hundreds of microns or fewer. One of the simplest elements of electrical circuits is a ring or a single-turn circuit. To determine the inductance of the ring, formulas from [1]–[3], which are approximate, are often used.

At the same time, it is of great interest to obtain an expression for inductance directly from the definition. In this case, inductance is the coefficient of proportionality between the current and the magnetic flux through the surface limited by the current-carrying circuit [4]–[10]

$$\Phi = LI, \quad (0.1)$$

where Φ – is the magnetic flux, L – is the inductance of the ring, I – is the conductor current.

1 Determination of magnetic field induction inside the ring

The magnetic field induction of a current system can be determined by using the Biot –

Savart – Laplace law [4]–[10]. Finding the magnetic field induction of a circular current within the framework of a general physics course is presented, as a rule, only for points lying on the axis of the coil. In this work, we consider the possibility of using the Biot – Savart – Laplace law for points inside the coil with current (in the plane of the coil).

Let us consider a circular current of radius R and a current element $I d\vec{l}$ (Figure 1.1).

Let us find the magnetic field induction of the current element at a point located at a distance ρ ($\rho < R$) from the center of the circle. According to the Biot – Savart – Laplace law, the magnetic induction created by a current element

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} [d\vec{l} \times \vec{r}], \quad (1.1)$$

where μ_0 – is the magnetic constant, I – is the magnitude of the current, the vector $\vec{r}$ is directed from the current element to the point under study.

The magnitude of magnetic induction taking into account relation (1.1)

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \sin \alpha, \quad (1.2)$$

where α – is the angle between the vectors $d\vec{l}$ and $\vec{r}$.

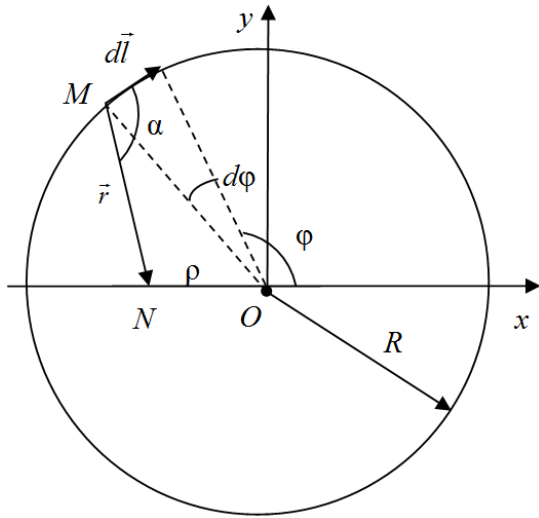


Figure 1.1

The vector $d\vec{B}$ in this case will be directed beyond the plane of the drawing.

Considering that $dl = R d\varphi$, expression (1.2) can be represented in the form

$$dB = \frac{\mu_0 I R d\varphi}{4\pi r^2} \sin \alpha. \quad (1.3)$$

Let us find the connection between the angles α and φ . Let the angle φ lie in the range from 0 to $\pi/2$. From Figure 1.2 it follows that

$$r \cos(\alpha - \pi/2) = R + \rho \cos \varphi.$$

Then after transformations we obtain

$$r \sin \alpha - \rho \cos \varphi = R.$$

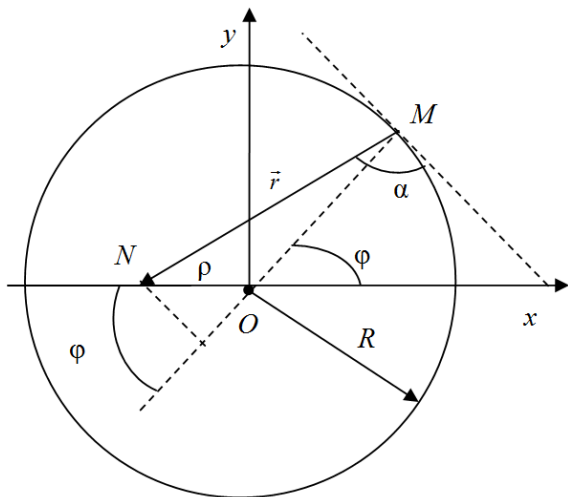


Figure 1.2

Now let the angle φ lie in the range from $\pi/2$ to π . From Figure 1.3 it follows that

$$r \cos(\alpha - \pi/2) + \rho \cos(\pi - \varphi) = R.$$

Then after transformations we obtain

$$r \sin \alpha - \rho \cos \varphi = R.$$

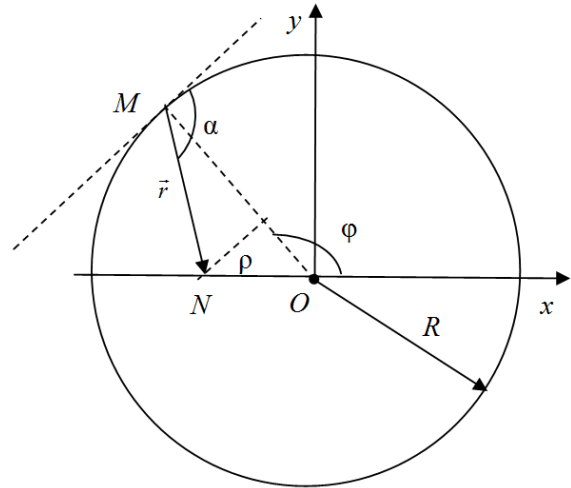


Figure 1.3

Thus, for angles φ lying in the range from 0 to π , the relation is satisfied

$$\sin \alpha = \frac{R + \rho \cos \varphi}{r}. \quad (1.4)$$

Let's substitute relation (1.4) into expression (1.3)

$$dB = \frac{\mu_0 I R (R + \rho \cos \varphi) d\varphi}{4\pi r^3}. \quad (1.5)$$

Using the cosine theorem (Figures 1.2 and 1.3) for triangle ONM and angle $(\pi - \varphi)$, we can write

$$r^2 = \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos(\pi - \varphi)$$

or

$$r = \sqrt{\rho^2 + R^2 + 2\rho R \cos \varphi}. \quad (1.6)$$

Taking (1.6) into account, expression (1.5) is transformed to the form

$$dB = \frac{\mu_0 I R (R + \rho \cos \varphi) d\varphi}{4\pi (\rho^2 + R^2 + 2\rho R \cos \varphi)^{1.5}}. \quad (1.7)$$

Integrating over the entire length of the turn, from (1.7) we obtain

$$B = 2 \int_0^\pi \frac{\mu_0 I R (R + \rho \cos \varphi) d\varphi}{4\pi (\rho^2 + R^2 + 2\rho R \cos \varphi)^{1.5}}. \quad (1.8)$$

In expression (1.8), the two in front of the integral also takes into account the angles φ lying in the range from π to 2π (due to symmetry).

2 Determination of magnetic flux through a surface bounded by a ring

Let us find the elementary magnetic flux through a ring, the inner radius of which is ρ , and the outer radius is $\rho + d\rho$ (the width of such a ring is $d\rho$, the length is $2\pi\rho$, the area is $2\pi\rho d\rho$, and the vector $d\vec{B}$ is perpendicular to the area dS).

$$d\Phi = B dS = B 2\pi\rho d\rho. \quad (2.1)$$

Let us substitute the magnetic induction from (1.8) into expression (2.1)

$$d\Phi = 4\pi\rho \int_0^\pi \frac{\mu_0 IR(R + \rho \cos \varphi) d\varphi}{4\pi(\rho^2 + R^2 + 2\rho R \cos \varphi)^{1.5}} d\rho. \quad (2.2)$$

To find the entire magnetic flux, you need to integrate expression (2.2) over ρ in the range from 0 to R (idealization of the problem when the cross-section of the wire is taken equal to zero).

$$\Phi = \int_0^R \int_0^\pi \frac{\mu_0 IR\rho(R + \rho \cos \varphi)}{4\pi(\rho^2 + R^2 + 2\rho R \cos \varphi)^{1.5}} d\varphi d\rho. \quad (2.3)$$

Let us introduce the parameter $k = \rho / R$, then $d\rho = Rdk$ and relation (2.3) will be rewritten as a double integral

$$\Phi = \mu_0 IR \int_0^1 \int_0^\pi \frac{k(1 + k \cos \varphi)}{(k^2 + 1 + 2k \cos \varphi)^{1.5}} d\varphi dk. \quad (2.4)$$

Using (0.1) we write

$$L = \mu_0 R \int_0^1 \int_0^\pi \frac{k(1 + k \cos \varphi)}{(k^2 + 1 + 2k \cos \varphi)^{1.5}} d\varphi dk. \quad (2.5)$$

The integral in (2.5) is an exact solution of the problem under the assumption that the cross section of the conductor is taken equal to zero. However, with such an idealization of the problem, the integral in (2.5) is divergent. In reality, it is necessary to take into account that the conductor itself through which the current flows has a certain diameter d (that is, the cross-section of the conductor is not zero). In this case, expression (2.5) will be presented in the form

$$L = \mu_0 R \int_0^{1-\frac{d}{D}} \int_0^\pi \frac{k(1 + k \cos \varphi)}{(k^2 + 1 + 2k \cos \varphi)^{1.5}} d\varphi dk, \quad (2.6)$$

where d – is the diameter of the conductor with a round cross-section, D – is the diameter of the ring ($D = 2R$).

Expression (2.6) defines the so-called external inductance and does not take into account the internal inductance caused by the magnetic field inside the conductor. Internal inductance can be neglected if the current flows along the surface of the conductor. This occurs with high-frequency alternating current and a sharp manifestation of the surface effect.

3 Calculation of ring inductance

Let us calculate the inductance using formula (2.6). To do this you need to calculate the double integral

$$J = \int_0^{1-\frac{d}{D}} \int_0^\pi \frac{k(1 + k \cos \varphi)}{(k^2 + 1 + 2k \cos \varphi)^{1.5}} d\varphi dk \quad (3.1)$$

for a number of values d/D . The calculated values of the integral J (3.1) for some values d/D are presented in Table 3.1 (from formula (2.6) $J = L / \mu_0 R$).

For comparison, we also calculate the inductance of the ring using the formulas from [1, p. 207–208]

$$L = \mu_0 R \left(\left(1 - \frac{r^2}{4R^2} \ln \frac{8R}{r} + \frac{r^2}{2R^2} \right) \ln \frac{8R}{r} - 2 + \frac{r^2}{16R^2} \right), \quad (3.2)$$

$$L = \mu_0 R \left(\ln \frac{8R}{r} - 2 \right). \quad (3.3)$$

Formula (3.3) is a simplification of formula (3.2) for $R \gg r$.

Formulas (3.2) and (3.3), taking into account the relation d/D , will be rewritten in the form

$$L = \mu_0 R \times \left(\left(1 - \frac{d^2}{4D^2} \ln \frac{8D}{d} + \frac{d^2}{2D^2} \right) \ln \frac{8D}{d} - 2 + \frac{d^2}{16D^2} \right), \quad (3.4)$$

$$L = \mu_0 R \left(\ln \frac{8D}{d} - 2 \right). \quad (3.5)$$

We will enter the calculation results in Table 3.1. The third and fourth columns contain the results of calculations carried out using formulas (3.4) and (3.5), respectively.

Table 3.1

d/D	J , (3.1)	$L / \mu_0 R$, (3.4)	$L / \mu_0 R$, (3.5)
0,1	2,2177	2,355306	2,382026
0,09	2,33437	2,464278	2,487387
0,08	2,46409	2,585575	2,60517
0,07	2,61028	2,722497	2,738702
0,06	2,77788	2,879888	2,892852
0,05	2,97458	3,065263	3,075174
0,04	3,21319	3,291227	3,298317
0,03	3,5177	3,581436	3,585999
0,02	3,94178	3,989048	3,991465
0,01	4,65626	4,683823	4,684612
0,001	6,9832	6,987181	6,987197

The discussion of the results

Analyzing the dependence of the values of the integral $J(d/D)$, we can note the following.

Firstly, as the ratio d/D increases, the value of the integral $J(d/D)$ decreases. This reduces the inductance of the ring.

Secondly, when the ratio d/D decreases by 10 times (from 0.1 to 0.01), the inductance of the ring does not increase so significantly, a little more than twice.

Thirdly, from table 3.1. it follows that the results of the calculations using formulas (3.4) and (3.5) are in good agreement with the results from formula (3.1). Moreover, the smaller the ratio d/D , the better the fit. At $d/D = 0,1$ the error is approximately 6%. At $d/D = 0,001$ the error is approximately 0,06%.

REFERENCES

1. Калантаров, П.Л. Расчёт индуктивных: справочная книга / П.Л. Калантаров, Л.А. Цейтлин. – Москва: Энергоатомиздат, 1986. – 488 с.
2. Grover, F.W. Inductance Calculation / F.W. Grover. – New York: Van-Nostrand, 1946. – 286 p.

-
3. *Теоретические основы электротехники*: В 3-х т. Учебник для вузов. Том 3. – 4-е изд. / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин. – СПб.: Питер, 2003. – 377 с.
4. *Сивухин, Д.В.* Электричество / Д.В. Сивухин. – Москва: Наука, 1983. – 703 с.
5. *Детлаф, А.А.* Курс физики / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский, Л.Б. Милковская. – Москва: Высшая школа, 1977. – 375 с.
6. *Савельев, И.В.* Курс общей физики: в 3 т. – Т. 2: Электричество и магнетизм. Волны. Оптика / И.В. Савельев. – Москва: Наука, 1988. – 480 с.
7. *Матвеев, А.Н.* Электричество и магнетизм / А.Н. Матвеев. – Москва: Высшая школа, 1983. – 463 с.
8. *Тамм, И.Е.* Основы теории электричества / И.Е. Тамм. – Москва: Физматлит, 2003. – 616 с.
9. *Raymond, A. Serway.* Physics for Scientists and Engineers (with PhysicsNOW and info Trac) / Raymond A. Serway, John W. Jewett: 6 th ed., Thomson Brooks / Cole, 2004. – 1296 p.
10. *Шиляева, К.П.* Физика. Краткая теория и задачи: пособие / К.П. Шиляева, И.О. Деликатная, Н.А. Ахраменко. – Гомель: БелГУТ, 2021. – 211 с.
- The article was submitted 16.01.2024.*
-

Информация об авторах

Ахраменко Николай Арсеньевич – к.т.н., доцент

УДК 534.535

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_11

EDN: YYBWHX

ДИФРАКЦИЯ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЬЦЕВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ НА УЛЬТРАЗВУКЕ В КРИСТАЛЛАХ ПАРАТЕЛЛУРИТА

В.Н. Белый¹, Г.В. Кулак², Л.А. Тозик², О.В. Шакин³

¹Институт физики НАН Беларуси

²Мозырский государственный педагогический университет

³Государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург

DIFFRACTION OF TWO-PARAMETER RING LIGHT BEAMS BY ULTRASOUND IN PARATELLURITE CRYSTALS

V.N. Bely¹, G.V. Kulak², L.A. Tozik², O.V. Shakin³

¹Institute of Physics of National Academy of Sciences of Belarus

²Mozyr State Pedagogical University

³State University of Aerospace Instrumentation, St. Petersburg

Аннотация. Исследована брэгговская дифракция двухпараметрических кольцевых световых пучков на медленной сдвиговой ультразвуковой волне в кристаллах парателлурифта. Показано, что имеет место эффективная перекачка энергии кольцевого пучка из нулевого в первый дифракционный порядок, причем более эффективный энергообмен дифрагированных световых пучков реализуется для циркулярно-поляризованных световых волн. Установлено, что взаимодействующие волны имеют форму кольцевых пучков, причем параметры дифрагированного пучка определяются параметром порядка и радиусом падающего пучка, а также мощностью ультразвука, длиной акустооптического взаимодействия и углом Брэгга.

Ключевые слова: кольцевой двухпараметрический пучок, брэгговская дифракция света, дифракционная эффективность, одноосный гиотропный кристалл, кристалл парателлурифта.

Для цитирования: Дифракция двухпараметрических кольцевых световых пучков на ультразвуке в кристаллах парателлурифта / В.Н. Белый, Г.В. Кулак, Л.А. Тозик, О.В. Шакин // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (59). – С. 11–15. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_11. – EDN: YYBWHX

Abstract. Bragg diffraction of two-parameter ring light beams on a slow shear ultrasonic wave in paratellurite crystals was investigated. It has been shown that the energy of the ring beam is efficiently pumped from the zero to the first diffraction order, and the more efficient energy exchange of the diffracted light beams is realized for circular polarized light waves. It has been found that the interacting waves have the shape of circular beams, wherein the parameters of the diffracted beam are determined by the order parameter and the radius of the incident beam, as well as the power of ultrasound, the length of acoustooptical interaction and the Bragg angle.

Keywords: ring two-parameter beam, Bragg diffraction of light, diffraction efficiency, uniaxial gyrotropic crystal, paratellurite crystal.

For citation: Diffraction of two-parameter ring light beams by ultrasound in paratellurite crystals / V.N. Bely, G.V. Kulak, L.A. Tozik, O.V. Shakin // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 2 (59). – P. 11–15. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_11 (in Russian). – EDN: YYBWHX

Введение

Известно, что для кольцевой апертуры светового поля с равномерным освещением длина фокальной области увеличивается по сравнению с обычными пучками [1]. В работе [2] рассмотрен метод формирования кольцевого пучка посредством аподизации апертуры светового поля. Особенности преобразования кольцевых пучков в бесселевы изучены в работе [3].

Кольцевые световые пучки находят применение в задачах дистанционного лазерного зондирования атмосферы, а также при конструировании устройств оптической связи в свободном пространстве [4], [5]. При этом используется

возможность кольцевых пучков распространяться на большие расстояния без существенных потерь оптической мощности и искажения формы пучка.

В работе [6] исследованы особенности брэгговской дифракции ограниченных световых пучков различных амплитудных распределений (гауссова, прямоугольного и лорентцевого) на ультразвуке. Показано, что дифракционная эффективность максимальна для падающего пучка прямоугольного профиля, уменьшается при использовании гауссова и становится минимальной при переходе к лорентцевым профилям. Отметим, что в [6] использовалась двумерная теория

связанных волн, которая естественным образом учитывает сложное амплитудное распределение падающего светового пучка. В связи с большими перспективами применения кольцевых световых пучков возникает необходимость изучения особенностей управления их параметрами с помощью акустических волн в кристаллах.

1 Теоретические результаты и их обсуждение

В настоящей работе проведены теоретические исследования акустооптической (АО) дифракции кольцевых световых пучков (КП), когда кольцевое поле имеет форму двухпараметрического амплитудного распределения [3]

$$A_m(r, r_0) = \frac{r^2}{r_0^2 \sqrt{w_m}} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right)^m \sigma(r, r_0),$$

где m – целое число, r_0 – радиус пучка,

$$\sigma(r, r_0) = \begin{cases} 1, & r \leq r_0, \\ 0, & r \geq r_0, \end{cases} \quad w_m = \frac{\pi r_0^2}{(m+1)(2m+1)(2m+3)}.$$

Рассмотрена брэгговская дифракция светового пучка, распространяющегося в окрестности оптической оси одноосного гиротропного кристалла параллелурита на медленной сдвиговой ультразвуковой (УЗ) волне [7]. При этом могут использоваться как линейно-поляризованные, так и циркулярно-поляризованные световые пучки для достижения значительной эффективности дифракции.

На рисунке 1.1 представлена геометрия анизотропной брэгговской дифракции эллиптически поляризованных КП.

Рассмотрим геометрию АО взаимодействия (рисунок 1.1), для которой УЗ волна распространяется в кристалле параллелурита под малым углом δ к оси X и занимает пространство между плоскостями $z = 0$ и $z = l$. Ось падающего КП

расположена в плоскости XZ под углом φ_1 к фронту УЗ волн. Сечение поверхности волновых векторов плоскостью дифракции XZ и расположение плосковолновых компонент падающего (k_o и k_e) и плосковолновых компонент дифрагированного (k'_o и k'_e) КП показано на рисунке 1.1, б. При этом предполагается, что в условиях эксперимента возможно раздельное наблюдение двух возможных дифракционных процессов: $\vec{k}_o + \vec{K}_1 = \vec{k}'_e$, $\vec{k}_e + \vec{K}_2 = \vec{k}'_o$, где $\vec{K}_1, \vec{K}_2$ – плосковолновые компоненты акустического пучка. Для рассматриваемой геометрии АО взаимодействия следует положить:

$$\varphi_1 \approx \varphi_2 \approx \varphi = \arcsin(\lambda_0 f / 2nv),$$

где λ_0 – длина световой волны в вакууме, $n = (n_o + n_e) / 2$ – средний показатель преломления кристалла (n_o, n_e – обыкновенный и необыкновенный показатели преломления кристалла), v – фазовая скорость УЗ волны, f – частота ультразвука.

В рамках двумерной теории связанных волн система связанных дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд дифрагированных волн $A_0(r), A_1(\tau)$ имеет вид [6]:

$$\frac{\partial A_0}{\partial \tau} + i\chi A_1 = 0, \quad \frac{\partial A_1}{\partial r} + i\chi A_0 = 0, \quad (1.1)$$

где коэффициент связи дифрагированных волн χ выражается через свертки тензора диэлектрической проницаемости $\Delta \varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ik} \varepsilon_{lj} p_{klmn} U_{mn}$ (ε_{ij}, U_{mn} – компоненты тензора диэлектрической проницаемости и тензора УЗ деформации) с векторами поляризации $\vec{e}_0, \vec{e}_1$ дифрагированных волн нулевого «0» и первого «1» порядка, то есть $\chi = k^2 (\vec{e}_0 \Delta \vec{e}_1) / 2$; $\tau = z \sin \varphi - x \cos \varphi$, $r = z \sin \varphi + x \cos \varphi$; $k = 2\pi n / \lambda_0$. Если искать

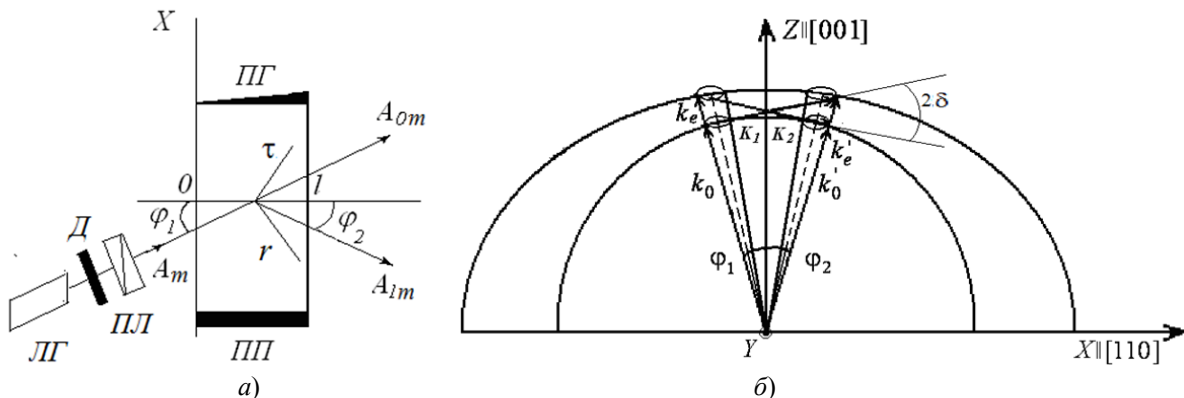


Рисунок 1.1 – а) Схема АО взаимодействия КП и УЗ волны (ПП – пьезопреобразователь, ПГ – поглотитель ультразвука, ЛГ – лазер, Д – диафрагма, ПЛ – пластинка $\lambda / 4$; φ_1 и φ_2 – угол падения и дифракции соответственно); б) геометрия расположения преломленной и дифрагированной плосковолновых компонент КП в плоскости дифракции на медленной сдвиговой УЗ волне в кристалле TeO_2 ($\vec{K}_{1,2}$ – волновые векторы ультразвука, $\vec{k}_{o,e}, \vec{k}'_{o,e}$ – волновые векторы преломленной и дифрагированной волн, 2δ – угол между волновыми векторами $\vec{K}_1$ и $\vec{K}_2$)

решение системы уравнений (1.1) методом Римана [8] с использованием граничных условий: $A_0(z=0) = A_0$, $A_1(z=0) = 0$ то общее решение можно представить в виде:

$$A_0(r) = A_1(r) - \frac{1}{2} \nu \int_{-1}^{+1} A_1[r - l(1-q)\sin\varphi] \frac{J_1(\nu\sqrt{1-q^2})}{\sqrt{1-q^2}} dq, \quad (1.2)$$

$$A_1(\tau) = -i \frac{1}{2} \nu \int_{-1}^{+1} A_1[l(1-q)\sin\varphi - \tau] \times J_0(\nu\sqrt{1-q^2}) dq, \quad (1.3)$$

где $\nu = \chi l / kn^2 \cos\varphi$ – индекс модуляции УЗ волной; $J_0(x)$, $J_1(x)$ – функции Бесселя первого рода, соответственно нулевого и первого порядка. Несложно показать, что индекс модуляции выражается через коэффициент акустооптического качества M_2 [7]: $\nu = \frac{2\pi}{\lambda_0 \cos\varphi} \sqrt{\frac{M_2 P_a l}{2h}}$, где P_a – мощность ультразвука, h – ширина пьезопреобразователя.

В приближении слабого АО взаимодействия ($\nu \leq 0,1$) в выражениях (1.2), (1.3) можно положить, что функции Бесселя удовлетворяют соотношениям: $J_0(x) \approx 1$, $J_1(x) \approx x$. Тогда выражения (1.2), (1.3) можно представить в виде [9]:

$$A_{0m}(r) = A_1(r) - \frac{\nu^2 \sigma(r, r_0) A_{0i} b_m}{8r_0^2 \sqrt{w_m}}, \quad (1.4)$$

$$A_{1m}(\tau) = -i \frac{\nu \sigma(r, r_0) A_{0i} c_m}{2r_0^2 \sqrt{w_m}}, \quad (1.5)$$

где для параметра $m = 1, 2, 3$, входящие в (1.4), (1.5) величины b_1, b_2, b_3 имеют вид:

$$b_1 = \frac{r_0^3}{15} \left\{ \bar{r}_n^3 (5 - 3\bar{r}_n^2) - (\bar{r}_n + 2g/r_0)^3 [5 - 3(\bar{r}_n + 2g/r_0)^2] \right\},$$

$$b_2 = \frac{r_0^3}{7} \left\{ \bar{r}_n^3 (1 - \bar{r}_n^2)^2 - (\bar{r}_n + 2g/r_0)^3 [1 - (\bar{r}_n + 2g/r_0)^2]^2 \right\} + \frac{4b_1}{7},$$

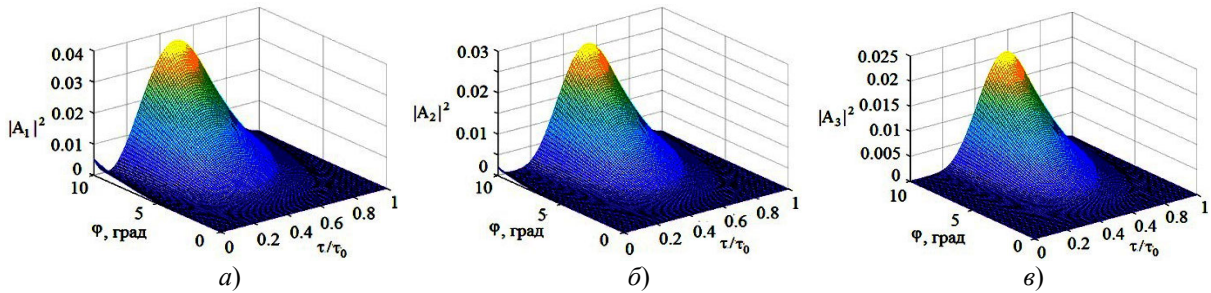


Рисунок 2.1 – Зависимость амплитуды $|A_m|^2$ от угла Брэгга φ и нормированной координаты τ / τ_0 для различных значений параметра m : 1 (а) 2 (б), 3 (в)
(кристалл TeO_2 , $l = 10$ мм, $\lambda_0 = 532$ нм, $P_a = 0,1$ Вт, $M_2 = 793 \cdot 10^{-15}$ с³/кг, $h = 4$ мм, $\tau_0 = 1$ мм, $A_{i0} = 1$)

$$b_3 = \frac{r_0^3}{9} \left\{ \bar{r}_n^3 (1 - \bar{r}_n^2)^3 - (\bar{r}_n + 2g/r_0)^3 [1 - (\bar{r}_n + 2g/r_0)^2]^3 \right\} + \frac{2b_2}{3},$$

причем $g = l \sin\varphi$, $r_n = r/r_0$, $\bar{r}_n = 1 - r_n$. Коэффициенты c_m получаются из b_m заменой: $r \rightarrow \tau$, $r_0 \rightarrow \tau_0$.

Выражения (1.2)–(1.5) позволяют рассчитать амплитудное распределение дифрагированного пучка нулевого и первого порядка для любого уровня акустической мощности и широкого класса падающих световых пучков. Эффективность АО дифракции η рассчитывалась из соотношения

$$\eta = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |A_1(\tau)|^2 d\tau}{\int_{-\infty}^{+\infty} |A_0(r)|^2 dr + \int_{-\infty}^{+\infty} |A_1(\tau)|^2 d\tau}. \quad (1.6)$$

2 Результаты расчетов

Расчеты проводились для АО дифракции циркулярно-поляризованного излучения с длиной волны $\lambda_0 = 532$ нм на медленной сдвиговой УЗ волне, распространяющейся под малым углом $\delta \ll 1$ к оси [110] кристалла парателлурита (TeO_2). Полагалось, что коэффициент АО качества для циркулярно-поляризованной падающей световой волны равен [7]: $M_2 = 793 \cdot 10^{-18}$ с³/г.

На рисунке 2.1 представлена зависимость квадрата амплитуды дифрагированной волны $|A_{1,2,3}|^2$ от угла Брэгга φ и нормированной координаты τ / τ_0 .

Из рисунка 2.1 следует, что для любых углов Брэгга φ дифрагированное световое поле имеет вид кольцевого светового пучка. При увеличении угла Брэгга максимальная амплитуда дифрагированного КП возрастает.

Зависимость квадрата амплитуды дифрагированной волны $|A_m|^2$ от нормированной поперечной координаты τ / τ_0 при различных параметрах $m = 1, 2, 3$ представлена на рисунке 2.2.

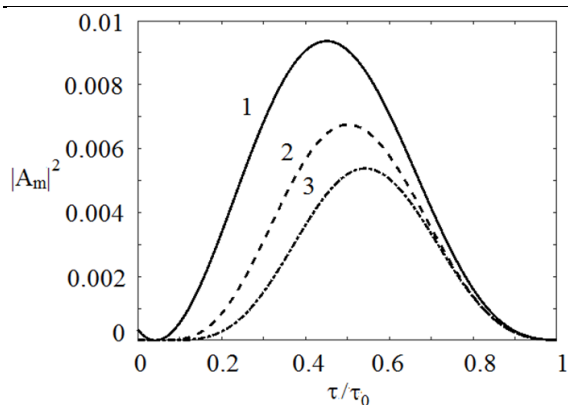


Рисунок 2.2 – Зависимость квадрата амплитуды КП $|A_m|^2$ от нормированной координаты τ/τ_0 при различных параметрах m : 1 – 1, 2 – 2, 3 – 3 (кристалл TeO_2 , $l = 10$ мм, $\lambda_0 = 532$ нм, $M_2 = 793 \cdot 10^{-18}$ с³/г, $h = 4$ мм, $P_a = 0,1$ Вт, $\tau_0 = 1$ мм, $\varphi = 1^\circ$, $A_{i0} = 1$)

Из рисунка 2.2 следует, что максимальное значение амплитуды КП смещается при увеличении параметра m в сторону больших значений τ . Значение амплитуды в центре КП ($\tau = 0$) при изменении параметра m остается неизменным и близко к нулю.

Зависимость квадрата амплитуды дифрагированной волны $|A_1|^2$ от нормированной поперечной координаты τ/τ_0 при различных параметрах τ_0 представлена на рисунке 2.3.

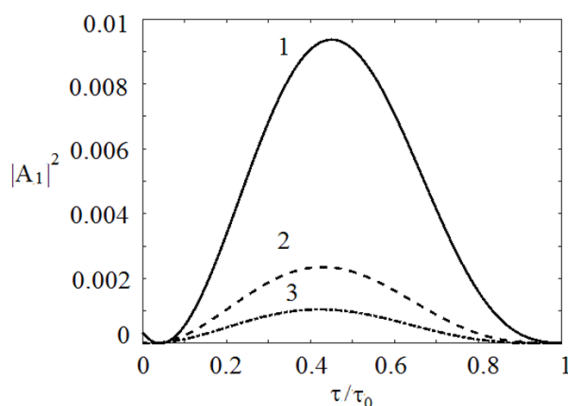


Рисунок 2.3 – Зависимость квадрата амплитуды КП $|A_1|^2$ от нормированной координаты τ/τ_0 при различных параметрах падающего КП τ_0 : 1 – 1, 2 – 2, 3 – 3 мм (кристалл TeO_2 , $l = 10$ мм, $\lambda_0 = 532$ нм, $M_2 = 793 \cdot 10^{-18}$ с³/г, $h = 4$ мм, $P_a = 0,1$ Вт, $\tau_0 = 1$ мм, $\varphi = 1^\circ$, $A_{i0} = 1$)

Из рисунка 2.3 следует, что при увеличении параметра τ_0 квадрат амплитуды КП уменьшается, однако смещения максимума пучка не происходит.

На рисунке 2.4 представлена зависимость дифракционной эффективности η от мощности ультразвука P_a , рассчитанная по формуле (1.6)

для параметра $m = 1$, при различных значениях параметра τ_0 .

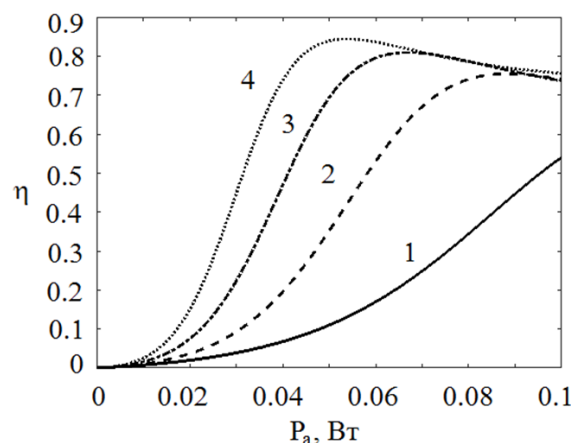


Рисунок 2.4 – Зависимость эффективности дифракции η от мощности ультразвуковой волны P_a при различных значениях параметра τ_0 : 1 – 2, 2 – 3, 3 – 4, 4 – 5 мм (кристалл TeO_2 , $\lambda_0 = 532$ нм, $M_2 = 793 \cdot 10^{-18}$ с³/г, $h = 4$ мм, $l = 10$ мм, $\varphi = 1^\circ$, $A_{i0} = 1$)

Из рисунка 2.4 следует, что для КП эффективность дифракции достигает максимального значения 82% при УЗ мощности 50 мВт на длине АО взаимодействия $l = 10$ мм. При увеличении мощности ультразвука имеет место обратная перекачка энергии светового пучка из первого в нулевой дифракционный порядок; при УЗ мощности 0,1 Вт эффективность дифракции снижается до 72%. С увеличением параметра τ_0 максимальное значение дифракционной эффективности достигается при больших УЗ мощностях. При этом максимальное значение дифракционной эффективности уменьшается.

Закключение

Таким образом, при брэгговской дифракции двухпараметрических КП в кристаллах парателлуриата имеет место эффективная перекачка энергии пучка из нулевого дифракционного порядка в первый. Из-за пространственной ограниченности пучка дифракционная эффективность не достигает максимального значения [6]. Для более эффективного энергообмена дифрагированных световых пучков в одноосном гиротропном кристалле следует, для рассматриваемой геометрии акустооптического взаимодействия и малого угла Брэгга ($\varphi \ll 1$), использовать циркулярно-поляризованные световые пучки ($M_2 = 793 \cdot 10^{-18}$ с³/г) [7]. Дифрагированные световые пучки имеют форму, близкую к двухпараметрическим КП, причем характеристики пучка существенно зависят от параметра порядка и радиуса падающего пучка, а также мощности ультразвука, длины АО взаимодействия и угла Брэгга.

ЛИТЕРАТУРА

1. Linfoot, E.H. Diffraction Images in Systems with an Annular Aperture / E.H. Linfoot, E. Wolf // Proceedings of the Physical Society. Section B. – 1953. – Vol. 66, № 2. – P. 145.
2. Wolford, W.T. Use of Annular Aperture to Increase Focal Depth / W.T. Wolford // Journal of the Optical Society of America. – 1960. – Vol. 50, № 8. – P. 749–753.
3. Формирование бesselевых световых пучков на больших расстояниях из кольцевых полей / Н.А. Хило, П.И. Ропот, П.К. Петров, В.Н. Белый // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2022. – Т. 58, № 1. – С. 90–100.
4. Long-range propagation of annular beam for lidar application / T. Shiina [et. al.] // Opt. Commun. – 2007. – Vol. 279. – P. 159–167.
5. Gerçekcioglu, H. Annular beam scintillations in strong turbulence / H. Gerçekcioglu, Ya. Baykal, C. Nakiboglu // Journal of the Optical Society of America A. – 2010. – Vol. 27, № 8. – P. 1834–1839.
6. Белый, В.Н. Дифракция световых пучков на затухающих ультразвуковых волнах в оптически изотропных средах / В.Н. Белый, И.Г. Войтенко, Г.В. Кулак // Журнал прикладной спектроскопии. – 1992. – Т. 56, № 5-6. – С. 831–836.

7. Блистанов, А.А. Кристаллы квантовой и нелинейной оптики / А.А. Блистанов. – Москва: МИСИС, 2000. – 431 с.

8. Корн, Г. Справочник по математикам. Для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – Москва: Наука, 1984. – 831 с.

9. Прудников, А.П. Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – Москва: Наука, 1981. – 798 с.

Работа выполнялась в рамках программы
Союзного государства «Компонент-Ф» (задание
3.6).

Поступила в редакцию 06.12.2023.

Информация об авторах

Белый Владимир Николаевич – академик НАН Беларуси
Кулак Геннадий Владимирович – д.ф.-м.н., профессор
Тозик Людмила Александровна – аспирантка
Шакин Олег Васильевич – д.т.н., профессор

ГИБКИЕ МНОГОСЛОЙНЫЕ ПОГЛОТИТЕЛИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С УПОРЯДОЧЕННО-СТРУКТУРИРОВАННЫМ ПРОМЕЖУТОЧНЫМ СЛОЕМ НА ОСНОВЕ АЛЮМИНИЕВОЙ СТРУЖКИ

О.В. Бойправ, В.С. Челядинский, Л.М. Лыньков, М.В. Тумилович

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

FLEXIBLE MULTILAYER ELECTROMAGNETIC RADIATION ABSORBERS WITH AN ORDERED STRUCTURED INTERMEDIATE LAYER BASED ON ALUMINUM SHAVINGS

O.V. Boiprav, V.S. Chelyadinsky, L.M. Lynkou, M.V. Tumilovich

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

Аннотация. Представлена технология изготовления низкостоймых гибких многослойных поглотителей электромагнитного излучения СВЧ-диапазона. Низкая стоимость поглотителей обусловлена тем, что в их состав входит алюминиевая стружка, являющаяся отходом производства. Из этой стружки выполнен второй слой поглотителей. Это реализовано путем формирования из нее элементов, характеризующихся одинаковыми формой и размерами, и фиксации этих элементов с одинаковым шагом между первым и третьим слоями, выполненными из синтетического нетканого волокнистого материала. Установлено, что значения коэффициента поглощения электромагнитного излучения в диапазоне частот 2,0–17,0 ГГц поглотителей, изготовленных в соответствии с представленной технологией, достигают величины 0,9, а ширина их эффективной полосы поглощения – 140,0%.

Ключевые слова: алюминиевая стружка, коэффициент поглощения, поглотитель электромагнитного излучения, эффективная полоса поглощения.

Для цитирования: Гибкие многослойные поглотители электромагнитного излучения с упорядоченно-структурированным промежуточным слоем на основе алюминиевой стружки / О.В. Бойправ, В.С. Челядинский, Л.М. Лыньков, М.В. Тумилович // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (59). – С. 16–21. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_16. – EDN: ZEBMHD

Abstract. A technology for manufacturing low-cost flexible multilayer microwave absorbers is proposed. The low cost of the absorbers is due to the fact that they contain aluminum shavings, which are a production waste. The second layer of the absorbers is made from these shavings. This is realized by forming from it the elements characterized by the same shape and size, and fixing these elements with the same step between the first and third layers made from synthetic non-woven fiber material. It has been established that electromagnetic radiation absorption coefficient values of the absorbers manufactured in accordance with the presented technology reach a value of 0.9 in the frequency range of 2.0–17.0 GHz, and the width of their effective absorption band is 140.0%.

Keywords: aluminum shavings, absorption coefficient, electromagnetic radiation absorber, effective absorption band.

For citation: Flexible multilayer electromagnetic radiation absorbers with an ordered structured intermediate layer based on aluminum shavings / O.V. Boiprav, V.S. Chelyadinsky, L.M. Lynkou, M.V. Tumilovich // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 2 (59). – P. 16–21. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_16 (in Russian). – EDN: ZEBMHD

Введение

Объектом ряда проводимых в настоящее время исследований в области разработки многофункциональных материалов являются поглотители электромагнитного излучения (ЭМИ) СВЧ-диапазона на основе отходов производства [1]–[15]. Такие поглотители могут быть условно разделены на следующие группы:

– поглотители на основе органических материалов (как правило, отходов целлюлозно-бумажного, стекольного, деревообрабатывающего, пищевого производств, растениеводства): макулатура [1], [2], стеклобой [2], остатки древесноволокнистых плит [3], древесный уголь [4]–[6], остатки кофе [7], рисовая шелуха [3], [8],

[9], сушеные листья банана [4], скорлупа кокоса [10] и т. п.;

– поглотители на основе неорганических материалов (как правило, отходов металлургических, химических и электронных производств): стальной шлак [11], шлак очистки ваграночных газов [12], покрышки автомобильных шин [13], остатки тонера, используемого в картриджах принтеров [14], материалы на основе электронного лома [15] и т. п.

Авторами статей [1]–[15] отмечено, что при использовании отходов производства для изготовления поглотителей ЭМИ можно одновременно решить следующие задачи:

1) получение низкостоимостных поглотителей ЭМИ, которые целесообразно использовать для электромагнитного экранирования зданий и помещений, в которых располагаются приборы электронной техники, чувствительные к воздействию электромагнитных помех;

2) способствование решению проблемы утилизации ряда отходов производств.

Авторами настоящей статьи было сделано предположение о перспективности применения алюминиевой стружки для изготовления поглотителей ЭМИ. Это предположение основывалось на совокупности следующих особенностей:

1. Алюминиевая стружка представляет собой объемную спираль.

2. Среды, в структуру которых входят проводники в форме объемных спиралей (как упорядоченно, так и хаотично распределенные по объему этих сред), обеспечивают эффективное поглощение энергии взаимодействующего с ними ЭМИ СВЧ-диапазона, что теоретически обосновано в работе [16]. Однако следует отметить, что такое поглощение обеспечивается в узкой полосе частот.

В связи с вышеизложенным целью исследовательской работы, результаты которой представлены в настоящей статье, состояла в экспериментальном обосновании технологии изготовления новых широкополосных поглотителей ЭМИ на основе алюминиевой стружки (т. е. по сути поглотителей в виде сред, содержащих проводники в форме объемных спиралей). Эта технология основана на технологии, представленной в работе [17], и состоит в формировании из алюминиевой стружки элементов одинаковых форм и размеров и дальнейшем фиксировании этих элементов с одинаковым шагом между двумя фрагментами материалов, характеризующихся диэлектрическими свойствами. Экспериментальное обоснование этой технологии базировалось на установленных закономерностях изменения характеристик поглощения ЭМИ таких поглотителей в зависимости от размера входящих в их структуру элементов из алюминиевой стружки.

1 Материалы и методы

Разработанная технология изготовления поглотителей ЭМИ включает в себя следующие операции:

1. Откраивание от рулона синтетического нетканого волокнистого материала двух одинаковых фрагментов, длина, ширина и форма которых зависят от требований, предъявляемым к длине, ширине и форме изготавливаемого поглотителя.

2. Размещение на поверхности одного из фрагментов, полученных в результате реализации операции 1, трафарета, предназначенного для формирования элементов из алюминиевой стружки и характеризующегося следующими свойствами:

– ячейки трафарета характеризуются одинаковыми размером и формой и распределены с одинаковым шагом;

– шаг распределения ячеек трафарета (S) удовлетворяет следующему условию:

$$S \leq \frac{0,4c}{f_l}, \text{ м}, \quad (1.1)$$

где f_l – требуемое значение нижней частоты эффективной полосы поглощения изготавливаемого поглотителя ЭМИ, c – скорость света в вакууме [18], [19];

– ячейки трафарета характеризуются круглой или квадратной формой;

– ширина ячеек трафарета (W) удовлетворяет следующему условию:

$$W \leq \frac{c}{3f_l}, \text{ м [20]}. \quad (1.2)$$

Условия (1.1), (1.2) должны учитываться для того, чтобы минимизировать степень зависимости граничных частот полосы поглощения изготавливаемых поглотителей от угла падения ЭМИ на их поверхность [20].

3. Заполнение каждой ячейки трафарета нормированными по массе порциями алюминиевой стружки.

4. Извлечение трафарета с поверхности фрагмента синтетического нетканого волокнистого материала.

5. Размещение поверх сформированных в результате операций 2–4 элементов на основе алюминиевой стружки (рисунок 1.1) второго из фрагментов, полученных в результате реализации операции 1.



Рисунок 1.1 – Внешний вид сверху элементов, сформированных из алюминиевой стружки и размещенных на поверхности фрагмента синтетического нетканого волокнистого материала

6. Термопрессование конструкции, полученной в результате реализации операций 1–5 при температуре $\sim 250,0^\circ \text{C}$ (т. е. при температуре, соответствующей температуре плавления синтетического нетканого волокнистого материала).

Таблица 1.1 – Характеристики изготовленных образцов поглотителей ЭМИ

Наименование образца	Расстояние между элементами, образующими второй слой образца, м	Ширина элементов, образующих второй слой образца, м	Масса на единицу площади образца, кг/м ²
Образцы поглотителей № 1	0,03	0,03	0,74
Образцы поглотителей № 2		0,06	0,96
Образцы поглотителей № 3		0,09	1,08

7. Откраивание от рулона фольгированной полимерной пленки одного фрагмента, длина, ширина и форма которого соответствуют длине, ширине и форме фрагментов, полученных в результате реализации операции 1.

8. Закрепление фрагмента, полученного в результате реализации операции 7, на одной из поверхностей конструкции, полученной в результате реализации операций 1–6, с помощью распыляемого клея.

В структуру поглотителей ЭМИ, изготовленных в соответствии с представленной технологией, входят четыре слоя. Первый и третий слои (относительно источника ЭМИ) – на основе синтетического нетканого волокнистого материала, второй – на основе упорядоченно расположенных элементов, сформированных из алюминиевой стружки, четвертый – на основе фольгированной полимерной пленки.

Для выполнения экспериментального обоснования разработанной технологии было реализовано следующее.

1. В соответствии с разработанной технологией были изготовлены образцы поглотителей ЭМИ. В таблице 1.1 представлены характеристики этих образцов.

2. Проведены измерения значений коэффициентов отражения и передачи ЭМИ по мощности (соответственно, S_{11} , дБ, и S_{21} , дБ) в диапазоне частот 2,0–17,0 ГГц изготовленных образцов поглотителей согласно методике, представленной в монографии [6, с. 32–34], и в соответствии с алгоритмом, приведенном в работе [21].

3. На основе результатов проведенных измерений выполнен расчет значений коэффициента поглощения ЭМИ (A) в диапазоне частот 2,0–17,0 ГГц изготовленных образцов поглотителей в соответствии с алгоритмом, приведенном в работе [21], и с использованием следующей формулы:

$$A = 1 - 10^{\frac{S_{11}}{10}} - 10^{\frac{S_{21}}{10}}, \text{ отн. ед.}$$

2 Результаты и их обсуждение

На рисунке 2.1 представлены частотные зависимости коэффициента поглощения ЭМИ в диапазоне 2,0–17,0 ГГц изготовленных образцов поглотителей.

Из рисунка 2.1 видно, что значения коэффициента поглощения ЭМИ в диапазоне частот 2,0–17,0 ГГц образцов поглотителей № 1, № 2 и № 3 изменяются соответственно в следующих пределах:

– от 0,08 отн. ед. до 0,85 отн. ед.;

– от 0,1 отн. ед. до 0,9 отн. ед.;

– от 0,1 отн. ед. до 0,94 отн. ед.

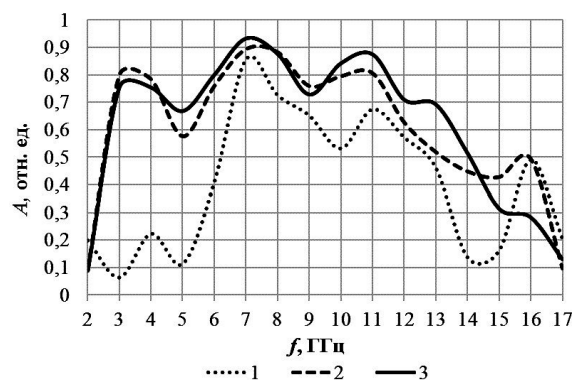


Рисунок 2.1 – Частотные зависимости коэффициента поглощения ЭМИ в диапазоне 2,0–17,0 ГГц образцов поглотителей № 1 (кривая 1), № 2 (кривая 2) и № 3 (кривая 3)

Диапазоны эффективных полос поглощения ЭМИ образцов поглотителей № 1, № 2 и № 3 (т. е. диапазоны частот ЭМИ, в которых значения коэффициента поглощения ЭМИ перечисленных образцов составляют более 0,5 отн. ед. [22]) соответственно следующие:

– от 6,2 ГГц до 12,8 ГГц;

– от 2,5 ГГц до 13,0 ГГц;

– от 2,5 ГГц до 14,0 ГГц.

Значения ширины эффективных полос поглощения ЭМИ образцов поглотителей № 1, № 2 и № 3 соответственно составляют ~ 69,0 %, ~ 136,0 % и ~ 140,0 %, на основании чего можно заключить, что эти поглотители являются широкополосными. Таким образом, при увеличении с 0,03 м до 0,06 м или 0,09 м ширины элементов, образующих второй слой поглотителей ЭМИ, изготовленных в соответствии с разработанной методикой, можно обеспечить увеличение в 2,0 раза ширину их эффективной ширины полосы поглощения, что обусловлено увеличением в 2,0 или 4,5 раза количества содержащейся в этом слое алюминиевой стружки, обеспечивающей поглощение энергии ЭМИ [16].

Из рисунка 2.1 также видно, что характеристики поглощения ЭМИ в эффективных полосах поглощения изготовленных образцов имеют максимумы. Характеристика поглощения ЭМИ в эффективной полосе поглощения образцов поглотителей № 1 имеет два максимума. Значения точек этих максимумов – 7,0 ГГц и 11,0 ГГц,

значения этих максимумов – 0,85 отн. ед. и 0,68 отн. ед. соответственно. Характеристики поглощения ЭМИ в эффективной полосе поглощения образцов поглотителей № 2 и 3 имеют три максимума. Значения точек максимума этих характеристик – 3,5 ГГц, 7,0 ГГц и 11,0 ГГц. Значения соответствующих этим точкам максимумов у характеристики поглощения ЭМИ образцов поглотителей № 2 – 0,82 отн. ед., 0,9 отн. ед., 0,8 отн. ед., а у характеристики поглощения ЭМИ образцов поглотителей № 3 – 0,78 отн. ед., 0,94 отн. ед., 0,88 отн. ед. Максимумы характеристик поглощения ЭМИ изготовленных образцов обусловлены резонансным снижением коэффициента отражения ЭМИ (R) последних на частотах, равных значениям точек максимума (рисунок 2.2).

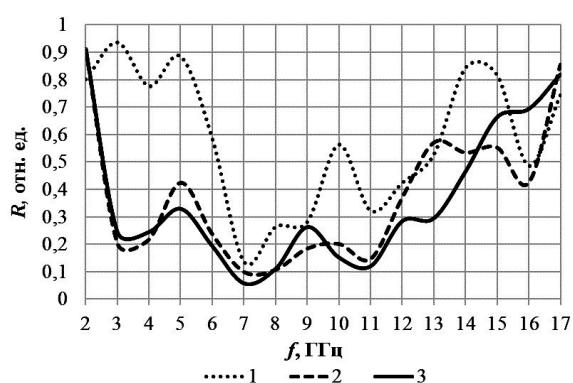


Рисунок 2.2 – Частотные зависимости коэффициента отражения ЭМИ в диапазоне 2,0–17,0 ГГц образцов поглотителей № 1 (кривая 1), № 2 (кривая 2) и № 3 (кривая 3)

Из рисунка 2.2 видно, что образцы поглотителей № 1 обеспечивает резонансное снижение энергии отражаемого от них ЭМИ на частотах 7,0 ГГц и 11,0 ГГц, а образцы поглотителей № 2 и № 3 обеспечивают резонансное снижение энергии отражаемого от них ЭМИ на частотах 3,5 ГГц, 7,0 ГГц и 11,0 ГГц. Это явление обусловлено тем, что перечисленным частотам соответствуют наибольшие значения разности между фазой ЭМИ, отраженного от поверхностей элементов из алюминиевой стружки, входящих в структуру второго слоя поглотителей, и фазой ЭМИ, отраженного от поверхности фольгированной полимерной пленки, на основе которой сформирован четвертый слой поглотителей [23]. Наибольшие значения характеристик поглощения ЭМИ изготовленных образцов соответствуют частоте 7,0 ГГц, исходя из чего можно заключить, что на этой частоте значения указанной разности у них выше, чем на других частотах, равных значениям точек максимума их характеристик поглощения ЭМИ.

Среднее значение коэффициента поглощения ЭМИ в эффективной полосе поглощения образцов поглотителей № 1 составляет 0,64 отн.

ед., а образцов поглотителей № 2 и № 3 – 0,73 отн. ед. и 0,79 отн. ед. соответственно. Более низкие значения коэффициента поглощения ЭМИ образцов поглотителей № 3 по сравнению с образцами поглотителей № 1 и № 2 обусловлено более низкими значениями коэффициента отражения ЭМИ первых по сравнению со вторыми. Это связано со следующими особенностями:

1. Поглотители ЭМИ, изготовленные в соответствии с разработанной технологией, могут быть условно разделены на элементарные многослойные ячейки, в структуру второго слоя каждой из которых входит один элемент из алюминиевой стружки и зазор между этим элементом и соседним к нему.

2. Эквивалентом элемента из алюминиевой стружки является совокупность катушек индуктивности, соединенных параллельно друг с другом (количество катушек индуктивности соответствует количеству стружки), эквивалентом зазора между этим элементом и соседним к нему является конденсатор, соединенный с указанными катушками последовательно [24, с. 66] (емкость конденсатора прямо пропорциональна отношению толщины элемента к расстоянию между этим элементом и соседним к нему [25]), а эквивалентом фрагмента фольгированного полимерного материала является резистор [25] (см. рисунок 2.3; использованный на рисунке 2.3 индекс « n » соответствует количеству алюминиевой стружки, содержащейся в сформированном из нее элементе, входящем в структуру второго слоя элементарной многослойной ячейки поглотителя ЭМИ, изготовленного в соответствии с разработанной технологией).

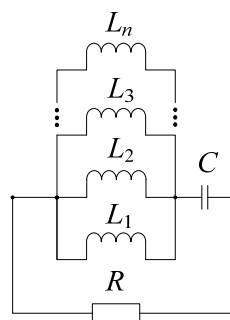


Рисунок 2.3 – Эквивалентная электрическая схема элементарной многослойной ячейки поглотителя ЭМИ, изготовленного в соответствии с разработанной технологией

3. Увеличение размера элемента из алюминиевой стружки, входящего в структуру второго слоя элементарной многослойной ячейки поглотителя ЭМИ, изготовленного в соответствии с разработанной технологией, обуславливает уменьшение суммарной емкости катушек индуктивности, соединенных параллельно друг с другом и входящих в эквивалентную электрическую

схему этой ячейки ($L_{\text{сум}}$), что связано с увеличением количества алюминиевой стружки. Это видно из нижепредставленной формулы (2.1), используемой для расчета суммарной емкости катушек индуктивности, соединенных параллельно друг с другом:

$$\frac{1}{L_{\text{сум}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_n}. \quad (2.1)$$

4. Уменьшение суммарной емкости катушек индуктивности, входящих в эквивалентную электрическую схему элементарной многослойной ячейки поглотителя ЭМИ, изготовленного в соответствии с разработанной технологией, обуславливает уменьшение волнового сопротивления этой ячейки ($Z_{\text{ин}}$), что видно из нижепредставленной формулы (2.2) [25]:

$$\frac{1}{Z_{\text{ин}}} = \frac{1}{2\pi f L_{\text{сум}}} + \frac{1}{R}. \quad (2.2)$$

5. Уменьшение волнового сопротивления элементарной многослойной ячейки поглотителя ЭМИ, изготовленного в соответствии с разработанной технологией, обуславливает уменьшение волнового сопротивления этого поглотителя в целом, что в свою очередь обуславливает снижение значения его коэффициента отражения ЭМИ. Это видно из нижепредставленной формулы (2.3) [25]:

$$S_{11} = \frac{Z_{\text{ин}} - Z_0}{Z_{\text{ин}} + Z_0} = 1 - \frac{2Z_0}{Z_{\text{ин}} + Z_0}, \quad (2.3)$$

где Z_0 – волновое сопротивление воздуха.

Таким образом, при увеличении с 0,03 м до 0,06 м или 0,09 м ширины элементов, образующих второй слой поглотителей ЭМИ, изготовленных в соответствии с разработанной методикой, можно обеспечить увеличение с двух до трех количества точек максимума их характеристик поглощения ЭМИ в диапазоне частот 2,0–17,0 ГГц, что обусловлено возникновением эффекта резонансного снижения энергии отражаемого от этих поглотителей ЭМИ на частоте 3,5 ГГц. Кроме того, при увеличении с 0,03 м до 0,06 м или 0,09 м ширины элементов, образующих второй слой поглотителей ЭМИ, изготовленных в соответствии с разработанной методикой, можно обеспечить увеличение соответственно на 0,09 отн. ед. или 0,15 отн. ед. среднего значения их коэффициента поглощения ЭМИ в эффективной полосе поглощения, что обусловлено снижением волнового сопротивления этих поглотителей за счет увеличения в 2,0 или 4,5 раза количества содержащейся в указанном слое алюминиевой стружки, эквивалентом которой является совокупность катушек индуктивности, соединенных параллельно друг с другом.

Значения коэффициента поглощения ЭМИ в диапазоне частот 2,0–17,0 ГГц поглотителей, изготовленных в соответствии с разработанной методикой, на 0,05–0,4 отн. ед. выше, чем значения

коэффициента поглощения ЭМИ в этом диапазоне частот поглотителей, изготовленных путем прессования двух одинаковых фрагментов синтетического нетканого волокнистого материала и дальнейшего закрепления фрагмента фольгированной полимерной пленки на одной из поверхностей полученной в результате этого структуры (рисунок 2.4).

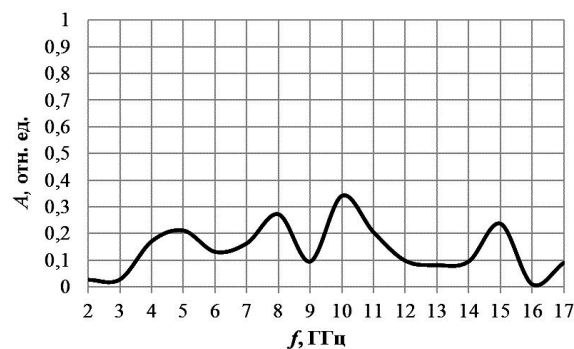


Рисунок 2.4 – Частотная зависимость коэффициента поглощения ЭМИ в диапазоне 2,0–17,0 ГГц образца поглотителя, содержащего два спрессованных фрагмента синтетического нетканого волокнистого материала и фрагмент фольгированной полимерной пленки

Заключение

Таким образом, в соответствии с разработанной технологией могут изготавливаться многослойные поглотители ЭМИ, характеризующиеся гибкостью, низкой стоимостью и широкополосностью. Гибкость этих поглотителей обусловлена тем, что их первый и третий слои выполнены на основе синтетического нетканого волокнистого материала, а четвертый – на основе фольгированной полимерной пленки. Низкая стоимость поглотителей обусловлена тем, что в их состав входит алюминиевая стружка, являющаяся отходом производства. Широкополосность этих поглотителей обусловлена их многослойностью, а также наличием в их структуре слоя в виде совокупности расположенных с одинаковым шагом одинаковых элементов, сформированных из алюминиевой стружки. Как показано по результатам экспериментального обоснования разработанной технологии, ширина эффективной полосы поглощения изготовленных в соответствии с ней поглотителей ЭМИ составляет 140,0 % при условии, что ширина входящих в структуру этих поглотителей элементов из алюминиевой стружки составляет 9,0 см.

Поглотители ЭМИ, изготовленные в соответствии с разработанной технологией, могут использоваться для создания ширм, предназначенных для экранирования оконных проемов помещений, в которых располагаются приборы электронной техники, чувствительные к воздействию электромагнитных помех СВЧ-диапазона.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Design and Manufacture of Electromagnetic Absorber Composed of Boric Acid-Incorporated Wastepaper Composites* / A.I. Kaya [et al.] // Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences. – 2022. – Vol. 30, iss. 3. – Article 23.
2. *A Low-Cost Lightweight Microwave Absorber: Silicon Carbide Synthesized from Tissue* / R. Tan [et al.] // Ceramics International. – 2021. – Vol. 47, iss. 2. – P. 2077–2085.
3. *Product Design from Waste: A Novel Eco-Efficient Pyramidal Microwave Absorber Using Rice Husks and Medium Density Fibreboard Residues* / C.F. Jung [et al.] // Waste Management. – 2021. – Vol. 119. – P. 91–100.
4. *Pattanayak, S.S. Design From Waste: an Eco-Efficient Microwave Absorber Using Dried Banana Leaves and Charcoal Based Composite* / S.S. Pattanayak, S.H. Laskar, S. Sahoo // Journal of Materials Science: Materials in Electronics. – 2022. – Vol. 33, № 19. – P. 13398–13407.
5. *Bin Lailan, N.H.H. Electromagnetic Wave Absorbing Performance of Activated Carbon Based Agricultural Waste – A Review* / N.H.H. bin Lailan, F.M. Idris // Proceeding Insan Junior Researchers International Conference 2021 (iJURECON 2021), Malaysia, 15–17 October 2021. – P. 95–98.
6. *Ayad, H. Electromagnetic Shields Based on Powdered Coal-Containing Materials* / H. Ayad, O. Boiprav, L. Lynkou; under the general edition of L. Lynkou. – Minsk: Bestprint, 2020. – 122 p.
7. *Microwave Absorption Property of Coffee Waste Bio-Carbon Modified by Industrial Waste MnFe₂O₄ Particles* / H. Ali [et al.] // Journal of Materials Research and Technology. – 2020. – Vol. 9, iss. 6. – P. 12869–12879.
8. *Malek, F. Pyramidal Microwave Absorber Design From Waste Material Using Rice Husk and Rubber Tire Dust* / F. Malek, H. Nornikman, O. Nadiyah // Journal of Telecommunication, Electronic and Computer Engineering. – 2015. – Vol. 4, iss. 1. – P. 23–30.
9. *Kumar Dash, A. Development of Microwave Absorbing Material with Organic Waste based Epoxy Blended Composite* / A. Kumar Dash, G. Nath // Indian Journal of Pure & Applied Physics. – 2022. – Vol. 60. – P. 482–488.
10. *Gupta, S. Agricultural Waste Based-Coco Peat and Coconut Shell Activated Carbon Microwave Absorber* / S. Gupta, G. Deep // 2016 IEEE MTT-S International Microwave and RF Conference (IMaRC), India, 5–9 December 2016. – P. 1–4. – DOI: 10.1109/IMaRC.2016.7939621.
11. *Microwave Absorption Ability of Steel Slag and Road Performance of Asphalt Mixtures Incorporating Steel Slag* / B. Lou // Materials. – 2020. – Vol. 13, № 3. – Article 663.
12. *Радиоэкранирующие модульные конструкции на основе порошкообразных материалов* / М.Р.Н. Неамах [и др.]; под редакцией Л.М. Лынькова. – Минск: Бестпринт, 2013. – 182 с.
13. *Glass Foam Composites Based on Tire's Waste for Microwave Absorption Application* / Y. Lamri [et al.] // Journal of Non-Crystalline Solids. – 2020. – Vol. 537. – Article 120017.
14. *An Ecofriendly, Cost-Effective, Lightweight Microwave Absorber Based on Waste Toner* / H. Habib // Journal of Electronic Materials. – 2021. – Vol. 50. – P. 2049–2056.
15. *Development of E-Waste Based Composite Microwave Absorbing Material* / A. Verma // Defence Science Journal. – 2021. – Vol. 71, № 3. – P. 365–371.
16. *Broadband Reflectionless Metasheets: Frequency-Selective Transmission and Perfect Absorption* / V. S. Asadchy [et al.] // Physical Review X. – 2015. – Vol. 5, iss. 3. – Article 031005.
17. *Боїправ, О.В. Усовершенствованная технология изготовления частотно-селективных электромагнитных экранов СВЧ-диапазона, содержащих спиралевидные элементы* / О.В. Бойправ, Н.В. Богущ // Известия высших учебных заведений. Материалы электронной техники. – 2023. – Т. 26, № 1. – С. 46–55.
18. *Anwar, R.S. Frequency Selective Surfaces: A Review* / R.S. Anwar, L. Mao, H. Ning // Applied Sciences. – 2018. – Vol. 8, № 9. – Article 1689.
19. *Avinash. Low-Cost Electromagnetic Absorbers for Shield Packaging* / Avinash, N. Gupta // IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology. – 2023. – Vol. 13, № 3. – P. 374–381.
20. *Singh, A. Quad-Band FSS for Electromagnetic Shielding* / A. Singh, C. Singh // International Journal of Computer Communication and Informatics. – 2021. – Vol. 3, iss. 1. – P. 1–14.
21. *Charcoal- and Foil-Containing Materials for Radio Electronic Control Systems Protection from Electromagnetic Interferences* / O. Boiprav [et al.] // 2022 IEEE 21st international Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA), Tunisia, 19–21 December 2021. – P. 299–304.
22. *Quantitative Interpretation of Electromagnetic Interference Shielding Efficiency: Is It Really a Wave Absorber or a Reflector?* / U. Hwang [et al.] // ACS Omega. – 2022. – Vol. 7, № 5. – P. 4135–4139.
23. *Gaoui, B. Enhancement of the Shielding Effectiveness of Multilayer Materials by Gradient Thickness in the Stacked Layers* / B. Gaoui, A. Hadjadj, M. Kious // Journal of Materials Science: Materials in Electronics. – 2017. – Vol. 28. – P. 11292–11299.
24. *Бей, Н.А. Антенны систем спутниковой связи и навигации* / Н.А. Бей, В.А. Вечтомов, В.Н. Зимин. – Москва: Рудомино, 2010. – 220 с.
25. *Makalesi, A. An Easily Optimizable Frequency Selective Absorber Design for X-Band* / A. Makalesi // Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering. – 2022. – Vol. 22. – P. 136–141.

Поступила в редакцию 05.10.2023.

Информация об авторах

Бойправ Ольга Владимировна – к.т.н., доцент
 Челядинский Владислав Сергеевич – студент
 Лыньков Леонид Михайлович – д.т.н., профессор
 Тумилович Мирослав Викторович – д.т.н., доцент

ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДЕКАРТОВЫХ ТМ-МОД КУММЕРА – ГАУССА

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

POLARIZATION AND ENERGY PROPERTIES OF THE CARTESIAN TM-MODES OF KUMMER – GAUSS BEAMS

S.S. Girgel

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Предложены новые векторные решения параболического уравнения, описывающие декартовы векторные астигматические ТМ световые пучки Куммера – Гаусса (К-Г). Исследуются поляризационные и энергетические свойства таких пучков. Проведено графическое моделирование эллипсов поляризации, интенсивности и поперечных потоков энергии векторных астигматических ТМ световых пучков К-Г.

Ключевые слова: ТМ-моды, астигматические пучки, пучки Куммера – Гаусса, поляризация, поперечные потоки энергии.

Для цитирования: Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства декартовых ТМ-мод Куммера – Гаусса / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (59). – С. 22–26. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_22. – EDN: VDUCZP

Abstract. New vector solutions of the parabolic equation describing Cartesian vector astigmatic TM Kummer – Gauss (K-G) light beams are proposed. The polarization and energy properties of such beams are investigated. The graphical modeling of ellipses of polarization, intensity and transverse energy fluxes of vector astigmatic TM of K-G light beams is carried out.

Keywords: TM-modes, astigmatic beams, Kummer-Gaussian beams, polarization, transverse energy fluxes.

For citation: Girgel, S.S. Polarization and energy properties of the cartesian TM-modes of Kummer – Gauss beams / S.S. Girgel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 2 (59). – P. 22–26. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_22 (in Russian). – EDN: VDUCZP

Введение

Узконаправленные параксиальные световые пучки занимают важную часть оптических исследований. Обычно обсуждаются скалярные световые пучки, например, [1]–[6]. Векторные пучки с однородной поляризацией рассматриваются реже [7]–[11]. Еще реже обсуждаются векторные пучки с неоднородной поляризацией, например ТЕ или ТМ-моды рассматриваются значительно реже [11]–[14]. В наших работах обсуждались циркулярные ТМ пучки Куммера [13], ТМ пучки Бесселя – Гаусса [14]. Все эти пучки характеризуются цилиндрической симметрией. Перейдем к обсуждению неоднородно поляризованных векторных световых пучков с декартовой симметрией. В [11] нами исследовались ТЕ и ТМ гауссовы моды.

В настоящей работе мы будем изучать декартовы векторные пучки К-Г с неоднородной поляризацией, их векторные поляризационные и энергетические свойства. Сначала в разделе 1 излагается общий формализм для описания поляризационных и энергетических характеристик векторных декартовых астигматических пучков с неоднородной поляризацией (ТМ-мод). Затем,

в разделе 2, этот формализм применяется для исследования поляризационных и энергетических характеристик векторных ТМ пучков К-Г. Проведено графическое моделирование поляризационных свойств, интенсивности и поперечных потоков энергии. Выполнен анализ полученных результатов, который подтвердил и проиллюстрировал аналитические расчеты.

1 Векторные параксиальные ТМ декартовы пучки

3D скалярное параболическое уравнение $(\partial_{x,x}^2 + \partial_{y,y}^2 + 4i\partial_z)f = 0$ в декартовой системе координат имеет разделимые решения в виде [1], [3], [4] $f(X, Y, Z) = f_1(X, Z)f_2(Y, Z)f_3(Z)$, $f_3(Z) = f_{31}(Z)f_{32}(Z)$. Амплитуда f представляет собой произведение двух независимых амплитуд для 2D пучков f_1f_{31} и f_2f_{32} , описывающих скалярные декартовы пучки К-Г в плоскостях (X, Z) и (Y, Z) соответственно. Например, решения для скалярных пучков Эрмита – Гаусса, К-Г, Эйри – Гаусса и др. можно представить также в таком виде.

Переход от скалярных к векторным пучкам с неоднородной ТМ поляризацией проще всего выполнить по формулам [14]

$$\mathbf{E} = \nabla_{\perp} f + i\theta \Delta_{\perp} f \mathbf{e}_z; \quad \mathbf{H} = n[\mathbf{e}_z, \nabla_{\perp} f]. \quad (1.1)$$

Здесь безразмерный параметр параксиальности $\theta = 1/(kx_0)$, $\theta \ll 1$. В декартовом базисе

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_x + \mathbf{e}_y E_y + \mathbf{e}_z E_z; \quad \mathbf{H} = n(E_x \mathbf{e}_y - E_y \mathbf{e}_x).$$

Проекция $H_z = 0$, поскольку мы обсуждаем ТМ-моды. Компоненты векторов электрического $\mathbf{E}$ и магнитного полей светового пучка выражаются через функции скалярного пучка, как

$$E_x = f_{1x} f_{2f_3}; \quad E_y = f_{1y} f_{2f_3}; \\ E_z = i\theta f_3 (f_{1xx} f_2 + f_{2yy} f_1),$$

где применяются краткие обозначения $f_{1x} = \partial_x f_1$, $f_{1xx} = \partial_{xx}^2 f_1$ и аналогично $f_{2y} = \partial_y f_2$, $f_{2yy} = \partial_{yy}^2 f_2$.

Введем, следуя формализму [12], комплексный угол $\psi = \psi' + i\psi''$ соотношением

$\eta = \frac{E_y}{E_x} = tg(\psi' + i\psi'')$, тогда азимут эллипса поляризации световой волны равен ψ' , а ее эллиптичность γ выражается как $\gamma = th\psi''$.

Плотности энергии, продольного и поперечного потоков энергии электромагнитного поля для параксиальных векторных пучков с неоднородной поляризацией (ТМ-моды) соответственно равны [4]:

$$w = \frac{\varepsilon(|E_x|^2 + |E_y|^2)}{8\pi}; \quad S_z = \frac{c}{n} w;$$

$$\mathbf{S}_{\perp} = -\frac{c\varepsilon}{8\pi n} \cdot \text{Re}(\mathbf{e}_x E_x^* E_z + \mathbf{e}_y E_y^* E_z). \quad (1.2)$$

В последнем выражении целесообразно выделить явно, следуя Берри и Бекшаеву [5]–[6], плотность орбитального $\mathbf{S}_o$ и спинного $\mathbf{S}_s$ потоков энергии. Получаем $\mathbf{S}_{\perp} = \mathbf{S}_o + \mathbf{S}_s$, где

$$\mathbf{S}_o = \frac{c\varepsilon}{8\pi nK} \text{Im}(\mathbf{e}_x (E_x^* \cdot \partial_x E_x + E_y^* \cdot \partial_x E_y) + \\ + \mathbf{e}_y (E_x^* \cdot \partial_y E_x + E_y^* \cdot \partial_y E_y)), \quad (1.3)$$

$$\mathbf{S}_s = \frac{c\varepsilon\theta}{8\pi n} (\mathbf{e}_x \partial_y - \mathbf{e}_y \partial_x) \text{Im}(E_x^* E_y). \quad (1.4)$$

Видим, что $|\mathbf{S}_{\perp}|/|S_z| \cong \theta \ll 1$, что естественно для параксиальных пучков.

После некоторых преобразований находим, что

$$\mathbf{S}_{\perp} = \frac{c\varepsilon\theta}{8\pi n} |f_3|^2 \text{Im}((\mathbf{e}_x f_2^* f_{1x}^* + \mathbf{e}_y f_1^* f_{2y}^*) \times \\ \times (f_{1x} f_{2yy} + f_{2y} f_{1xx})); \quad (1.5)$$

$$\mathbf{S}_s = \frac{c\varepsilon\theta}{8\pi n} |f_3|^2 \text{Im}(\mathbf{e}_x f_1 f_{1x}^* (|f_{2y}|^2 + f_2^* f_{2yy}) + \\ + \mathbf{e}_y f_2 f_{2y}^* (|f_{1x}|^2 + f_1^* f_{1xx})); \quad (1.6)$$

$$\mathbf{S}_o = \frac{c\varepsilon\theta}{8\pi n} |f_3|^2 \text{Im}(\mathbf{e}_x f_{1x}^* (|f_2|^2 f_{1xx} - |f_{2y}|^2 f_1) + \\ + \mathbf{e}_y f_{2y}^* (|f_1|^2 f_{2yy} - |f_{1x}|^2 f_2)). \quad (1.7)$$

2 Векторные параксиальные ТМ декартовы пучки К-Г

Применим вышеизложенный общий формализм к пучкам К-Г. Амплитуду f_1 обобщенного 2D светового пучка К-Г в плоскости (X, Z) можно записать, как сумму четного и нечетного решения в виде [3]–[4] $f_1 = f_{1o} + f_{1e}$, где

$$f_{1o} = G_x X_1 \cdot M\left(\frac{1}{2} - \frac{v_x}{2}, \frac{3}{2}, X_1^2\right);$$

$$f_{1e} = G_x M\left(-\frac{v_x}{2}, \frac{1}{2}, X_1^2\right).$$

$$\text{Здесь 2D гауссиан } G_x = \sqrt{\frac{Q_{0x}}{Q_x}} \exp\left(\frac{iX^2}{Q_x}\right),$$

безразмерные переменные $X = x/x_0$, $Z = z/z_0$. Свободный комплексный индекс $v_x = v'_x + iv''_x$ является непрерывным. Согласующая функция

$$f_{31} = \left(\frac{Q_{0x} P_x}{P_{0x} Q_x}\right)^{\frac{v_x}{2}}. \text{ Новая переменная } X_1 \text{ выража-$$

ется через старую X , как $X_1^2 = t_x X^2$, где зависящий только от Z множитель $t_x = i(1/P_x - 1/Q_x)$. Для краткости введены два безразмерных комплексных параметра пучка $Q_x = Z - Q_{0x}$ и $P_x = Z - P_{0x}$, где свободные комплексные константы $Q_{0x} = Q'_{0x} + iQ''_{0x}$; $P_{0x} = P'_{0x} + iP''_{0x}$. Пометки o и e здесь и далее указывают соответственно на четность (*even*) и нечетность (*odd*) функций f_{1e} и f_{1o} относительно изменения знаков их аргументов.

В плоскости (X, Z) можно записать аналогично $f_2 = f_{2o} + f_{2e}$. Эти результаты получаются простыми заменами переменных и индексов $X \rightarrow Y$; $1 \rightarrow 2$. Например,

$$f_{2e} = G_y M\left(-\frac{v_y}{2}, \frac{1}{2}, Y_2^2\right);$$

$$f_{2o} = G_y Y_2 \cdot M\left(\frac{1}{2} - \frac{v_y}{2}, \frac{3}{2}, Y_2^2\right); \quad t_y = i\left(\frac{1}{P_y} - \frac{1}{Q_y}\right).$$

Теперь формулы (1.1)–(1.7) полностью применимы к векторным параксиальным ТМ-модам К-Г.

Так как существуют четные и нечетные функции f_1 и f_2 , то по четности все скалярные решения f 3D параболического уравнения делятся на четыре типа: $f_{ee} = f_{1e} f_{2e} f_3$; $f_{oe} = f_{1o} f_{2e} f_3$; $f_{eo} = f_{1o} f_{2e} f_3$; $f_{oo} = f_{1o} f_{2e} f_3$.

Каждой скалярной моде f соответствует, согласно (1.1), векторная ТМ-мода пучков К-Г.

Поэтому существуют 4 типа векторных параксиальных ТМ пучков К-Г, векторы электрического поля которых мы будем обозначать, как $E_{ee}, E_{oe}, E_{eo}, E_{oo}$. Векторы E пучков К-Г зависят от трех переменных (X, Y, Z) и шести $(\nu_1, \nu_2, Q_{0X}, Q_{0Y}, P_{0X}, P_{0Y})$ свободных комплексных параметров. Они описывают шестипараметрическое семейство решений для векторных амплитуд параксиальных декартовых астигматических 3DTM-мод пучков К-Г.

Для физически реализуемых пучков конечной мощности должна выполняться квадратичная интегрируемость (КИ) функций $E_{\perp}$. Для обсуждаемых пучков с простым астигматизмом условия КИ должны выполняться для каждой из плоскостей (X, Z) и (Y, Z) сечения пучка. Можно показать, что условия КИ, найденные в [3] для амплитуд скалярных пучков К-Г, пригодны также и для тех же функций f_1, f_2 векторных амплитуд E параксиальных декартовых астигматических 3DTM-мод пучков К-Г. В таблице 2.1 представлены, следуя [3], достаточные условия КИ скалярных 2D пучков К-Г в определенной плоскости, например, (X, Z) .

Нами проводилось графическое моделирование эллипсов поляризации, интенсивности и поперечных потоков энергии ТМ мод параксиальных пучков К-Г различных типов. Некоторые результаты изображены на рисунках 2.1–2.4 при различных значениях свободных параметров. Выбирались параметры $Q_{0X}'' > 0, Q_{0Y}'' > 0, P_{0X}'' > 0, P_{0Y}'' > 0$ (№1 таблицы 2.1), чтобы обеспечить КИ функций векторной амплитуды пучков К-Г и, тем самым, переносимую конечную

мощность через поперечное сечение пучка. Кроме того, на всех рисунках использовались одинаковые значения всех свободных параметров, чтобы наглядно продемонстрировать влияние различных типов мод на поляризационные и энергетические свойства пучков.

На рисунке 2.1 изображены эллипсы поляризации вместе с направлениями вращения для ТМ-мод К-Г. Поляризация ТМ-мод К-Г в сечении пучка в общем случае является сильно неоднородной по поперечному сечению пучка и, в общем случае, эллиптической. Она зависит от координат X, Y, Z и не зависит явно от 3D гауссиана $G = G_X G_Y$ и функций $f_3(Z)$. С возрастанием расстояния от оси пучка поляризация постепенно становится линейной. При $Z=0$, а также вдоль осей координат OX и OY эллиптичность волн равна нулю.

На рисунках 2.2 (a) – 2.4 (a) показаны некоторые характерные картины интенсивностей пучков в относительных единицах. Видно, что картины интенсивности ТМ-мод К-Г могут быть самыми разнообразными. Существуют от одного до нескольких максимумов интенсивности и даже возможна картина в форме полого овала.

Линии поперечных потоков энергии представляют собой сложные кривые и зависят от многих факторов. Линии орбитального и полного поперечного потоков энергии часто похожи. Это связано с тем, что $|S_s| < |S_{\perp}|$. Линии спиновых потоков энергии обычно образуют замкнутые кривые. Им соответствуют в 3D пространстве спиралевидные кривые.

Таблица 2.1 – Условия КИ для 2D световых пучков К-Г с непрерывным свободным параметром $\nu = \nu' + i\nu''$

№	Ограничения на параметры Q_0''	Ограничения на параметры P_0''	Ограничения на индекс $\nu = \nu' + i\nu'', \mathbb{N} = 1, 2, \dots$	Предел $ f $ при $ x \rightarrow \infty$	Выполнение условий КИ
1	$Q_0'' > 0$	$P_0'' > 0$	нет	$ f_e \rightarrow 0; f_o \rightarrow 0$	да
2	$Q_0'' > 0$	$P_0'' \leq 0$	$\nu = 2\mathbb{N} - 2$	$ f_e \rightarrow 0; f_o \rightarrow \infty$	только для f_e
3	$Q_0'' > 0$	$P_0'' \leq 0$	$\nu = 2\mathbb{N} - 1$	$ f_o \rightarrow 0; f_e \rightarrow \infty$	только для f_o
4	$Q_0'' \leq 0$	$P_0'' > 0$	$\nu = -2\mathbb{N}$	$ f_o \rightarrow 0; f_e \rightarrow \infty$	только для f_o
5	$Q_0'' \leq 0$	$P_0'' > 0$	$\nu = -2\mathbb{N} + 1$	$ f_e \rightarrow 0; f_o \rightarrow \infty$	только для f_e
6	$Q_0'' > 0$	$ P_0'' \rightarrow \infty$	$\nu' > -1/2$	$ f \rightarrow 0$	да
7	$Q_0'' > 0$	$ P_0'' \rightarrow \infty$	$\nu' = -1$	$ f \rightarrow \text{const}$	нет
8	$Q_0'' > 0$	$ P_0'' \rightarrow \infty$	$\nu' \in (-1; -1/2]$	$ f \rightarrow 0$	нет
9	$ Q_0'' \rightarrow \infty$	$P_0'' > 0$	$\nu' < -1/2$	$ f \rightarrow 0$	да
10	$ Q_0'' \rightarrow \infty$	$P_0'' > 0$	$\nu' \in [-1/2; 0)$	$ f \rightarrow 0$	нет
11	$ Q_0'' \rightarrow \infty$	$P_0'' > 0$	$\nu' = 0$	$ f \rightarrow \text{const}$	нет

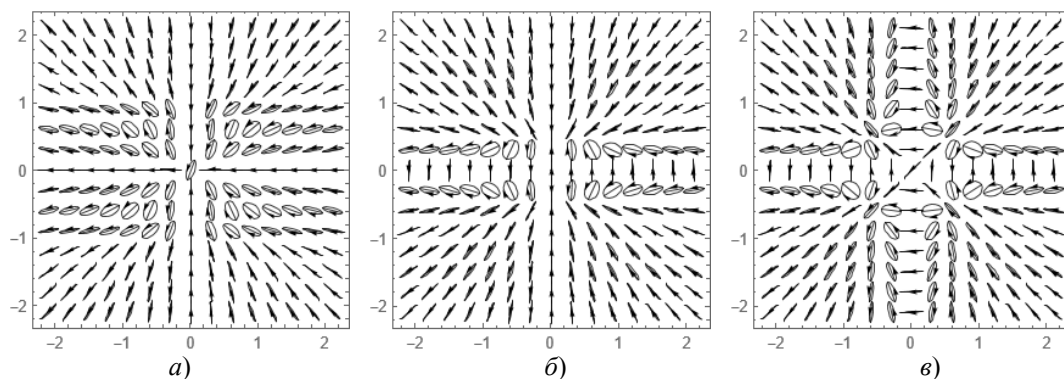


Рисунок 2.1 – Эллипсы поляризации ТМ-мод К-Г: а) ТМ-ее моды, б) ТМ-ео моды, в) ТМ-оо моды. Свободные параметры: $Z = 0,3$; $Q''_{0x} = 0,5$; $Q''_{0y} = 0,2$; $P''_{0x} = 0,3$; $P''_{0y} = 0,4$; $v'_x = -0,2$; $v''_x = 1$; $v'_y = -1,8$; $v''_y = 1$; $Q'_{0x} = 0$; $Q'_{0y} = 0$

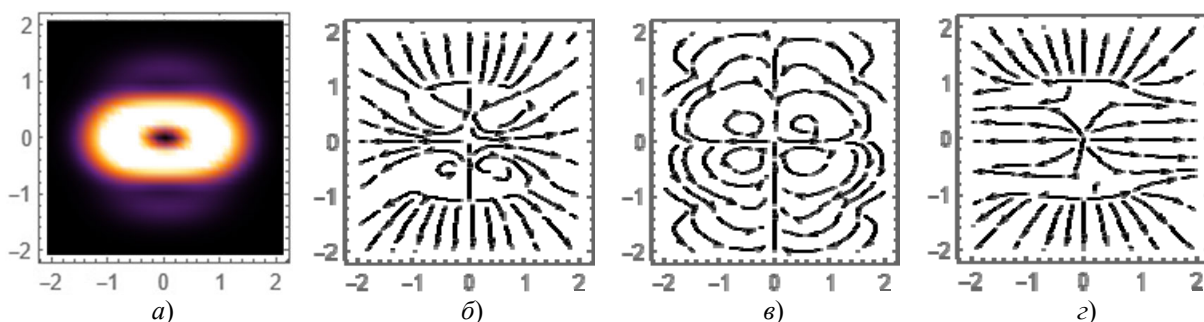


Рисунок 2.2 – Интенсивность I и линии поперечных потоков энергии Еее-мод векторных декартовых пучков К-Г: а) интенсивность I ; б) линии орбитального S_o потока энергии; в) линии спинного S_s потока энергии; г) линии общего $S_{\perp}$ потока энергии. Используемые параметры такие же, как на рисунке 2.1

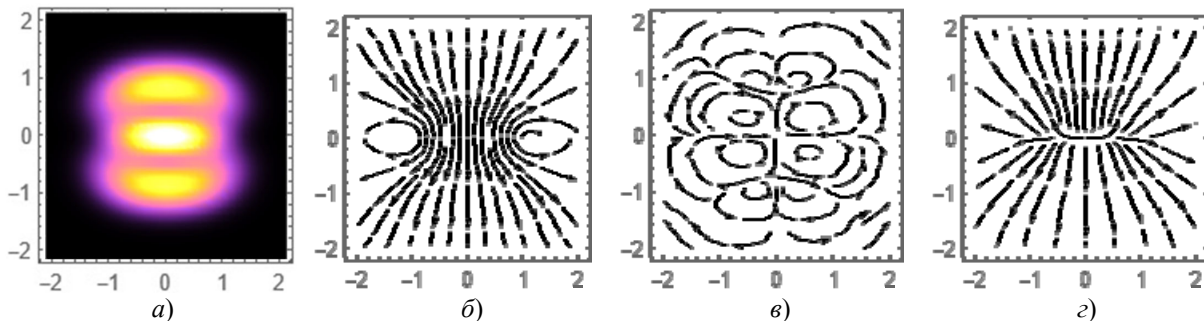


Рисунок 2.3 – Интенсивность I и линии поперечных потоков энергии Еео-мод векторных декартовых пучков К-Г: а) интенсивность I ; б) линии орбитального S_o потока энергии; в) линии спинного S_s потока энергии; г) линии общего $S_{\perp}$ потока энергии. Используемые параметры такие же, как на рисунке 2.1.

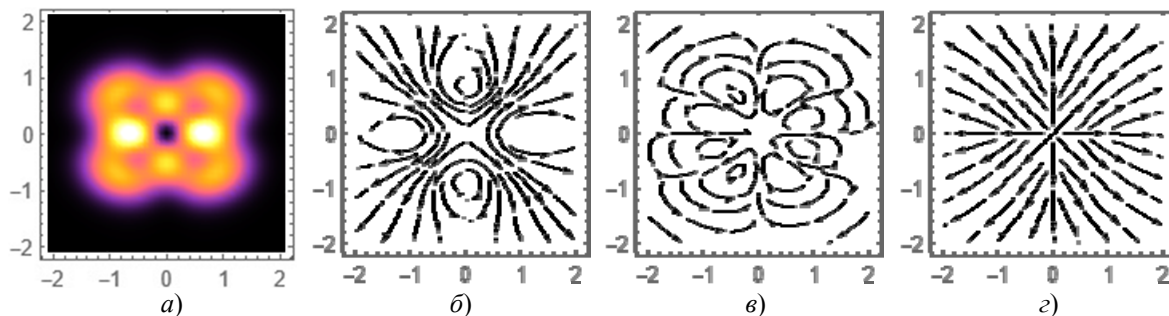


Рисунок 2.4 – Интенсивность I и линии поперечных потоков энергии Еоо-мод векторных декартовых пучков К-Г: а) интенсивность I ; б) линии орбитального S_o потока энергии; в) линии спинного S_s потока энергии; г) линии общего $S_{\perp}$ потока энергии. Используемые параметры такие же, как на рисунке 2.1.

Возрастание продольного расстояния Z приводит, как известно, к поперечному расплыванию картин. Анализ и графическое моделирование показало, что варьирование остальных комплексных свободных параметров сложным образом влияет на возможные изменения соответствующих картин. Даже мнимые части v_x'' , v_y'' свободных параметров v_x , v_y могут радикально изменять картины интенсивности и потоки энергии, хотя не изменяют условий физической реализуемости пучков. Наконец, точечная группа симметрии всех рисунков для поперечных потоков энергии и интенсивностей всегда $m_x m_y 2_z$. Это обусловлено тем, что скалярные функции, описывающие пучки К-Г, являются четными или нечетными относительно координат XY .

Заключение

В данной работе выведены выражения, описывающие не изученные ранее типы пучков – векторные параксиальные декартовы световые пучки К-Г с неоднородной поляризацией (ТМ-моды). Они характеризуются шестью свободными непрерывными комплексными параметрами (v_x , v_y , Q_{0x} , Q_{0y} , P_{0x} , P_{0y}). Записан формализм для вычисления поляризационных характеристик таких пучков. Сформулированы условия физической реализуемости неоднородно поляризованных декартовых векторных пучков К-Г с переносимой конечной мощностью во всем пространстве. Существенно, что условия КИ пригодны для непрерывных комплексных значений свободных параметров v_x и v_y . Вычислены явные выражения для плотностей продольного и поперечных потоков энергии для исследуемых пучков К-Г. Выполнено графическое моделирование эллипсов поляризации, интенсивности и поперечных потоков энергии таких пучков различных типов. Осуществлен соответствующий анализ проведенного графического моделирования. Установлено, что выбор различных свободных параметров пучка приводит к качественно различным физическим следствиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bandres, M.A. Cartesian beams / M.A. Bandres and J.C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2007. – Vol. 32, № 23. – P. 3459–3461.
2. Гиргель, С.С. Скалярные параксиальные двумерные гауссовоподобные световые пучки Куммера – Гаусса / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 1 (2). – С. 7–11.
3. Гиргель, С.С. Скалярные астигматические 3D световые пучки Куммера – Гаусса / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (14). – С. 19–23.
4. Гиргель, С.С. Децентрированные пучки Куммера – Гаусса / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2015. – № 6 (93). – С. 112–116.
5. Berry, M.V. Optical currents / M.V. Berry // Journal of Optics A: Pure and Applied Optics. – 2009. – Vol. 11 (9). – P. 094001.
6. Bekshaev, A. Internal flows and energy circulation in light beams / A. Bekshaev, K. Bliokh, M. Soskin // Journal of Optics. – 2011. – Vol. 13 (5). – P. 053001.
7. Гиргель, С.С. Свойства векторных параксиальных световых пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 20–24.
8. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 1 (26). – С. 17–21.
9. Гиргель, С.С. Энергетические свойства векторных вихревых пучков Лагерра – Гаусса / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 3 (32). – С. 13–17.
10. Гиргель, С.С. Энергетические характеристики векторных декартовых пучков Куммера с переносимой конечной мощностью / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 3 (52). – С. 13–17.
11. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства векторных параксиальных гауссовых световых пучков / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 3 (12). – С. 19–23.
12. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 4 (33). – С. 7–10.
13. Гиргель, С.С. Энергетические характеристики векторных циркулярных пучков Куммера конечной мощности. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 13–17.
14. Гиргель, С.С. Поляризационные свойства и поперечные потоки энергии векторных векторных бessel-гауссовых ТМ световых пучков / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 15–19.

Поступила в редакцию 31.08.2023.

Информация об авторах

Гиргель Сергей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор

МОДИФИКАЦИЯ СТРУКТУРЫ И СВОЙСТВ КРЕМНИСТОЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКОЙ СТАЛИ ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Н.И. Мороз, Н.Г. Валько, С.В. Васильев

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

MODIFICATION OF THE STRUCTURE AND PROPERTIES OF ELECTRICAL STEEL BY LASER RADIATION

N.I. Moroz, N.G. Valko, S.V. Vasilyev

Yanka Kupala State University of Grodno

Аннотация. Представлены результаты исследования структуры и свойств электротехнических сталей, модифицированных лазерным излучением. В качестве объекта исследования использовались стали с содержанием кремния 6,67% и 3,32%. Стали облучались лазерным излучением, генерируемым рубиновым лазером ГОР-100М, с плотностями потока лазерного излучения 10^4 Вт/см² и 10^5 Вт/см². Методом рентгеновского структурного анализа обнаружено, что облучение изучаемых кремнистых электротехнических сталей лазерным излучением с выбранными плотностями потока не приводит к изменению их структурно-фазового состояния. По методу первичной экстинкции были рассчитаны размеры областей когерентного рассеяния и плотность дислокаций сталей. Показано, что размеры областей когерентного рассеяния после облучения лазерным излучением увеличиваются, а плотность дислокаций уменьшается, что приводит к соответствующему снижению микротвердости.

Ключевые слова: электротехническая сталь, лазерное излучение, структура, твердость, рентгеновский фазовый анализ, коррозионная стойкость.

Для цитирования: Мороз, Н.И. Модификация структуры и свойств кремнистой электротехнической стали лазерным излучением / Н.И. Мороз, Н.Г. Валько, С.В. Васильев // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (59). – С. 27–31. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_27. – EDN: UVGFQC

Abstract. The results of studying the structure and properties of electrical steels modified by laser radiation are presented. The steels with silicon content of 6.67% and 3.32% were used as the object of the study. The steels were irradiated with laser radiation generated by a GOR-100M ruby laser with a flux density of 10^4 W/cm² and 10^5 W/cm². By the method of XRD analysis, it was found that the laser irradiation with selected flux densities of the silicon electrical steels did not lead to a change in the structural-phase state. The coherent crystalline domain sizes and the dislocation density of steels were calculated. It is shown that the coherent crystalline domain sizes increase after laser irradiation and dislocation density decreases. The data obtained by XRD analysis correlate with decreasing in microhardness.

Keywords: electrical steel, laser radiation, structure, hardness, X-ray phase analysis, corrosion resistance.

For citation: Moroz, N.I. Modification of the structure and properties of electrical steel by laser radiation / N.I. Moroz, N.G. Valko, S.V. Vasilyev // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 2 (59). – P. 27–31. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_27 (in Russian). – EDN: UVGFQC

Введение

В настоящее время исследования в области улучшения свойств электротехнических сталей являются наиболее интересными в сфере промышленных и прикладных научных разработок. В ряду широкого спектра электротехнических сталей наиболее востребованными являются анизотропные кремнистые стали, свойства которых определяются содержанием кремния и кристаллической структурой [1], [2]. Поэтому актуальным является разработка методов, позволяющих модифицировать структуру кремнистых электротехнических сталей с целью придания им требуемых эксплуатационных свойств.

В последнее время для модифицирования поверхности материалов применяются технологии с использованием концентрированных потоков

энергии и, в частности, лазерные технологии, связанные с обработкой лазерным излучением [3]. Лазерные технологии имеют свою специфику и особенности, в ряде случаев вытесняют традиционные технологии модифицирования поверхностных слоев вследствие более высокой эффективности и уникальности получаемых результатов. Модифицирующее действие лазерного излучения осуществляется за счет целого ряда физических процессов на поверхности мишени, в том числе быстрого нагрева, плазмообразования и охлаждения [4], [5]. При этом, формирующиеся при воздействии лазерного излучения на поверхности различных материалов, микро- и наноструктуры в значительной мере определяют их физические свойства и представляют большой интерес для физики конденсированного состояния [6], [7].

Технология воздействия лазерного излучения (ЛИ) на электротехнические стали имеет свои особенности, определяемые взаимодействием лазерного излучения с металлами, и в первую очередь это касается механизмов передачи энергии и характера энергоснабжения по глубине мишени, а также последующем распределении температуры и термонапряжений в металлах. Следует учитывать, что в зависимости от временных, энергетических и пространственных характеристик излучения может иметь место испарение или плавление участков поверхности, нагрев с изменением структуры кристаллитов, в том числе с формированием остаточных напряжений в зоне воздействия лазерного излучения и ее окрестности.

Несмотря на обширный экспериментальный материал по воздействию лазерного излучения на структуру и свойства электротехнических сталей, до сих пор отсутствует ясное представление о механизме направленной модификации структурных параметров и свойств, а также их взаимосвязи с параметрами лазерного излучения.

Поэтому важным является установление функциональных связей между режимами обработки ЛИ и физико-химическими процессами, определяющими формирование структуры и свойств электротехнических сталей [8]–[10].

Целью настоящей работы являлось исследование влияния ЛИ на структуру и свойства анизотропных кремнистых электротехнических сталей, а также выявление зависимостей структурных параметров и свойств от плотности потока лазерного излучения.

1 Методика эксперимента

В качестве объекта исследования использовались тонколистовые холоднокатаные анизотропные кремнистые стали. Исследовались стали с концентрациями Si, равными 6,67 % (образец № 1) и 3,32% (образец № 2) соответственно [11]. Толщина образца № 1 составляла 0,23 мм, для образца № 2 – 0,3 мм.

Стали модифицировались лазерным излучением, генерируемым рубиновым лазером ГОР-100М, с длиной волны $\lambda = 0,694$ мкм, работающим в режиме свободной генерации (длительность импульса $\tau \sim 1,2$ мс). Образцы облучались в двух режимах: с плотностью потока ЛИ, равной 10^5 Вт/см² и 10^4 Вт/см². При этом в фокусирующей системе использовались как однолинзовые, так и двухлинзовые системы, что позволяло строить изображение диафрагмы на поверхности образца в виде пятна с резкими краями (диаметр варьировался в ходе экспериментов от 1 до 2 мм), что, в свою очередь, обеспечивало получение заданных плотностей потока излучения. Часть (~4%) лазерного излучения направлялась передней гранью стеклянного клина в измеритель энергии ИМО-2Н, входной зрачок которого был

расположен в фокальной плоскости линзы. Энергия лазерных импульсов E_0 варьировалась в пределах от 5 до 60 Дж. Отраженное задней гранью клина излучение направлялось на коаксиальный фотозащитный ФЭК-14, сигнал с которого подавался на вход осциллографа и использовался для регистрации временной формы лазерного импульса. Схема использовавшейся в работе экспериментальной установки для ЛИ облучения приведена на рисунке 1.1.

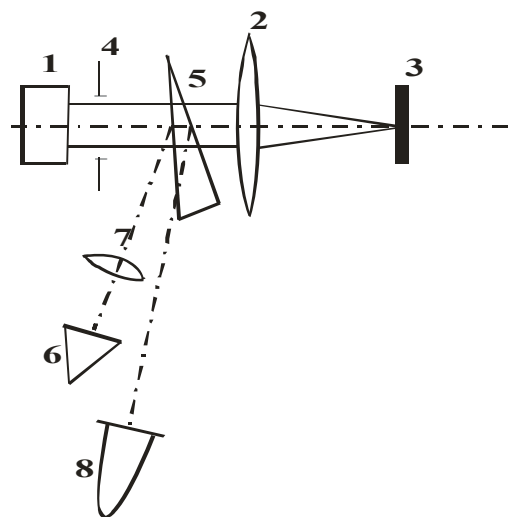


Рисунок 1.1 – Схема экспериментальной установки для облучения ЛИ

- 1 – рубиновый лазер ГОР-100 М;
- 2 – фокусирующая система;
- 3 – образец;
- 4 – диафрагма;
- 5 – стеклянный клин;
- 6 – измеритель энергии ИМО-2Н;
- 7 – линза;
- 8 – коаксиальный фотозащитный ФЭК-14.

Для оценки влияния рентгеновского излучения на структурно-фазовое состояние и тонкую структуру сталей методом рентгеноструктурного анализа были проведены исследования на дифрактометре ДРОН 3М (АО «ИЦ «Буревестник», г. Санкт-Петербург, Россия) в $\text{CuK}\alpha$ излучении с фокусировкой по Брегу – Бретано. Атомное строение облученных ЛИ сталей определялось по основному закону рентгеноструктурного анализа – уравнению Вульфа – Брэгга. Фазовый состав определялся при помощи карточки JCPDS-ASTM.

Размер областей когерентного рассеяния и плотность дислокаций рассчитывалась по эффекту первичной экстинкции. Относительная погрешность в определении межплоскостного расстояния не превышала 1%.

Измерения микротвердости образцов выполняли с помощью твердомера KASON 59-HV (Китай) по методу Виккерса (HV) при нагрузке 0,1 г. Время выдержки составляло 10 с.

2 Результаты эксперимента

Методом рентгеновского структурного анализа обнаружено, что исследуемые стали состоят из рентгеноаморфной фазы и твердого раствора Fe_3Si . Наличие рентгеноаморфной фазы в кремнистых электротехнических сталях вполне закономерно. Во-первых, Si в сталях выполняет роль аморфизатора, и в исследуемых сталях он присутствует в достаточном количестве. Во-вторых, данный вид стали, как правило, получают при высоких скоростях охлаждения жидкого металла.

На рисунке 2.1 приведены участки дифрактограмм от образца № 1 (рисунок 2.1, а) и от образца № 2 (рисунок 2.1, б), модифицированных лазерным излучением с плотностями потока 10^5 Вт/см^2 и 10^4 Вт/см^2 . Сравнивая дифрактограммы, можно констатировать, что стали с содержанием кремния 6,67% и 3,32% имеют одинаковый фазовый состав, а после облучения ЛИ их вид не изменяется. Видно, что у сталей, облученных ЛИ, положение основных рефлексов соответствует положению рефлексов от контрольных, не облученных лазерным излучением образцов.

Указанная закономерность указывает на то, что облучение ЛИ электротехнических сталей с содержанием кремния 6,67% и 3,32% при выбранных плотностях потока ЛИ не приводит к изменению их структурно-фазового состояния. Однако на рисунке 2.1 видно, что после облучения лазерным излучением сталей интенсивность гало в малоугловой области дифрактограмм, которые свидетельствуют о наличии рентгеноаморфной фазы в сталях, больше. Увеличение гало указывает на рост степени аморфности стали. Так, в частности, степень аморфности у стали с содержанием Si 6,67% равна 9,6%, после облучения лазерным излучением с плотностью потока

10^4 Вт/см^2 степень аморфности увеличилась до 11,7%, а при плотности потока ЛИ, равным 10^5 Вт/см^2 – до 14,3%.

Аналогичные закономерности обнаружены и для стали с содержанием Si, равным 3,32%. Для контрольного образца № 2 степень аморфности равна 6,7%, после облучения с плотностью потока 10^4 Вт/см^2 степень аморфности увеличивается до 9,3%, а при 10^5 Вт/см^2 – до 12,3%. Таким образом, установлено, что с увеличением плотности потока лазерного излучения степень аморфности облученных сталей увеличивается, что обусловлено быстрым локальным нагревом поверхности вследствие облучения лазерным излучением. Так, в частности, степень аморфности стали с содержанием Si 6,67% после облучения ЛИ с плотностью потока 10^5 Вт/см^2 возрастает в 1,5 раза, при облучении стали с плотностью потока, равной 10^4 Вт/см^2 в 1,2 раза в сравнении с контрольным образцом. Для стали с содержанием кремния 3,32% после облучения лазерным излучением с плотностью потока 10^5 Вт/см^2 возрастает в 1,8 раза в сравнении с контрольным образцом, при облучении стали с плотностью потока, равной 10^4 Вт/см^2 в 1,3 раза.

На рентгенограммах видно, что после обработки ЛИ кристаллические рефлексы от фазы Fe_3Si становятся уже, что указывает на уменьшение их физического уширения и соответствующее уменьшение плотности дислокаций. Методом первичной экстинкции для образцов № 1 и образцов № 2, обработанных лазерным излучением, были рассчитаны области когерентного рассеяния (ОКР) и плотность дислокаций. Обнаружено, что после обработки ЛИ величина ОКР в сталях увеличивается, а плотность дислокаций уменьшается, что указывает на соответствующее уменьшение микротвердости.

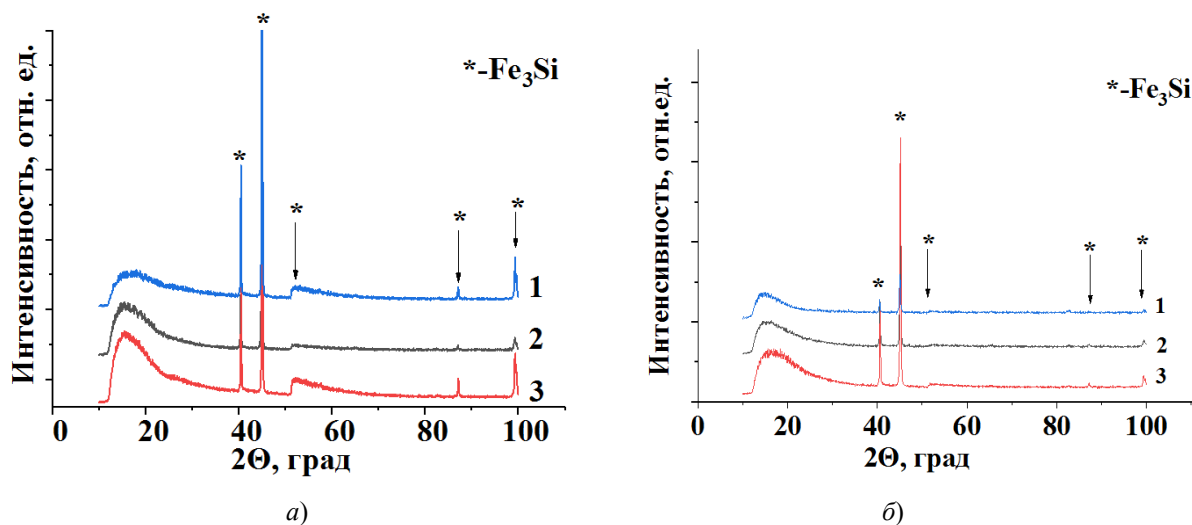


Рисунок 2.1 – Участки дифрактограмм сталей с содержанием кремния 6,67% (а) и 3,32% (б), облученных ЛИ с различными плотностями потока (1 – к.о.; 2 – 10^4 Вт/см^2 ; 3 – 10^5 Вт/см^2)

На рисунке 2.2 приведены зависимости плотности дислокаций и микротвердости для образца № 1 и образца № 2 от плотности потока лазерного излучения. Видно, что с увеличением плотности потока излучения плотность дислокаций сталей монотонно снижается. Так, плотность дислокаций для стали с содержанием 6,67% равна $7 \cdot 10^5 \text{ м}^{-2}$. После облучения ЛИ с плотностью потока 10^4 Вт/см^2 плотность дислокаций уменьшается в 3,5 раза, а при облучении ЛИ с плотностью потока излучения 10^5 Вт/см^2 – на порядок. Для образца № 2 плотность дислокаций равна $3 \cdot 10^5 \text{ м}^{-2}$, при облучении ЛИ с плотностью потока 10^4 Вт/см^2 плотность дислокаций уменьшается в 2 раза, а при облучении ЛИ с плотностью потока излучения 10^5 Вт/см^2 снижается на порядок.

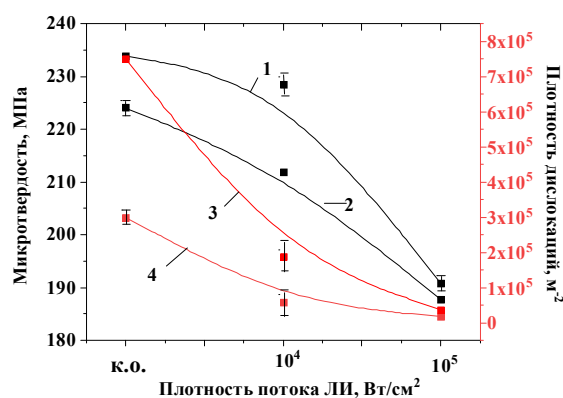


Рисунок 2.2 – Зависимости плотности дислокаций (1, 2) и микротвердости (3, 4) образцов № 1 (1, 3) и образцов № 2 (2, 4) от плотности потока ЛИ

Таким образом, установлено, что в результате воздействия ЛИ на поверхность электротехнических сталей с содержанием кремния 6,67% и 3,32% происходит отжиг дефектов, что в свою очередь должно приводить к снижению микротвердости. Механизм лазерного отжига дефектов в электротехнических сталях основан на тепловом воздействии лазерного излучения, который заключается в том, что энергия лазерного излучения, поглощаемая непосредственно электронной подсистемой металла, практически мгновенно передается в решётку и нагревает её от исходной, комнатной, температуры до температуры отжига, которая в свою очередь изменяется со временем. При этом следует учитывать, что передача энергии осуществляется путём поэтапной электрон-электронного, электрон-фононного и фонон-фононного рассеяния. При импульсном воздействии энергия лазерного излучения распространяется вглубь на длину, не превышающую длину поглощения. При этом концентрация энергии в приповерхностном слое облучаемых сталей приводит к частичному оплавлению металла. Следует учитывать, что скорость движения расплавленных слоев достаточно высокая

вследствие возникновения значительных градиентов температуры приповерхностных слоев облучаемых сталей в процессе воздействия на них лазерным излучением. Результатом описанного механизма является отжиг преимущественно линейных дефектов и конгломератов точечных дефектов.

На рисунке 2.2 видно, что микротвердость сталей с содержанием кремния 6,67% и 3,32% до воздействия лазерным излучением равна 234 МПа и 224 МПа соответственно. После облучения ЛИ микротвердость исследуемых сталей уменьшается. Так, значение микротвердости для стали с содержанием кремния 6,67% после воздействия ЛИ с плотностью потока 10^4 Вт/см^2 равно 200 МПа, а после воздействия ЛИ с 10^5 Вт/см^2 микротвердость стали уменьшается до 188 МПа. Аналогично для стали с содержанием Si, равным 3,32% после облучения ЛИ с плотностями потока 10^4 Вт/см^2 и 10^5 Вт/см^2 , микротвердость равна 190 и 180 МПа соответственно [12], [13].

Результаты исследования микротвердости сталей коррелируют с данными, полученными при расчете плотности дислокаций, а именно при увеличении плотности потока ЛИ микротвердость облучаемых электротехнических сталей с содержанием кремния 6,67% и 3,32% уменьшается. В частности, после воздействия ЛИ с плотностью потока 10^5 Вт/см^2 на сталь с содержанием кремния 6,67% микротвердость уменьшается на 23%, а для стали с содержанием кремния 3,32% – на 17%.

Заключение

Исследовано влияние локальной лазерной обработки на структуру и свойства анизотропной кремнистой электротехнической стали с содержанием кремния 6,67% и 3,32%. Сталь облучалась лазерным излучением в режиме свободной генерации, генерируемым рубиновым лазером ГОР-100М в двух режимах с плотностями потока лазерного излучения 10^4 Вт/см^2 и 10^5 Вт/см^2 .

Методом рентгеновского структурного анализа обнаружено, что структурно-фазовое состояние исследуемых сталей с содержанием кремния 6,67% и 3,32% после облучения ЛИ при выбранных плотностях потока не изменяется.

Установлено, что с увеличением плотности потока ЛИ степень аморфности облученных сталей увеличивается, что обусловлено быстрым локальным нагревом поверхности вследствие облучения лазерным излучением. Так, в частности, степень аморфности стали с содержанием Si 6,67% после облучения ЛИ с плотностью потока 10^5 Вт/см^2 возрастает в 1,5 раза, при облучении стали с плотностью потока, равной 10^4 Вт/см^2 , – в 1,2 раза. Для стали с содержанием кремния 3,32% после облучения ЛИ с плотностью потока 10^5 Вт/см^2 степень аморфности возрастает в 1,8

раза, а после облучения с плотностью потока ЛИ 10^4 Вт/см² – в 1,3 раза.

Показано, что вследствие лазерного отжига дефектов плотность дислокаций сталей после лазерного воздействия уменьшается. В частности, плотность дислокаций для стали с содержанием 6,67% равна $7 \cdot 10^5$ м⁻². После облучения ЛИ с плотностью потока 10^4 Вт/см² плотность дислокаций уменьшается в 3,5 раза, а при облучении ЛИ с плотностью потока излучения 10^5 Вт/см² – на порядок.

Обнаружено, что микротвердость после локальной лазерной обработки с плотностью потока излучения 10^5 Вт/см² образцов стали с содержанием кремния 3,32% ниже практически в 1,3 раза по сравнению с контрольными образцами, а для стали с содержанием кремния 6,67% – в 1,2 раза, что связано с отжигом дефектов сталей и соответствующим уменьшением плотности дислокаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Thermal Processes in Materials of Oil Transformers* / R. Janura, M. Gutten, D. Korenciak, M. Sebok // Proceedings of 2016 International Conference On Diagnostic of Electrical Machines and Insulating Systems in Electrical Engineering (DE-MISEE 2016). – 2016. – P. 81–84.
2. *Measurement of short-circuit effects on transformer winding with SFRA method and impact test* / M. Gutten, R. Janura, M. Sebok, D. Korenciak, M. Kucera // Metrology and measurement systems. – 2016. – Vol. 23, iss. 4. – P. 521–529.
3. *Hecht, J. A short history of laser development* / J. Hecht // Appl. Opt. – 2010. – Vol. 49, iss. 25. – P. F99–F122.
4. *Макаров, Г.Н. Применение лазеров в нанотехнологии: получение наночастиц и наноструктур методами лазерной абляции и лазерной нанолитографии* / Г.Н. Макаров // Успехи физических наук. – 2013. – Т. 183, № 7. – С. 673–718.
5. *Завестовская, И.Н. Лазерное наноструктурирование поверхности материалов* / И.Н. Завестовская // Квантовая электроника. – 2010. – Т. 40, № 11. – С. 942–954.
6. *Kovalenko, V. Laser Micro- and Nanoprocessing* / V. Kovalenko // International Journal of Nanomanufacturing. – 2006. – Vol. 1, № 2. – P. 173–180.
7. *Laser machining by short and ultrashort pulses: state of the art and new opportunities in the age of photons* / J. Meijer, K. Du, A. Gilner, D. Hoffmann, V. Kovalenko, T. Masuzawa, A. Ostendorf, R. Poprawe, W. Shulz // CIRP Annals – Manufacturing Technology. – 2002. – Vol. 51, № 2. – P. 531–550.
8. *Рыкалин, Н.Н., Лазерная обработка материалов* / Н.Н. Рыкалин, А.А. Углов, А.Н. Кокора – Москва: Машиностроение, 1975. – 295 с.
9. *Ivanov, A. Structure changes in metals during their laser treating* / A. Ivanov, A. Sitkevich, N. Valko, S. Vasiliev // 7th International Congress on Energy Fluxes and Radiation Effects (EFRE-2020 online): Abstracts. – Tomsk: Publishing House of IAO SB RAS, 2020. – P. 464–467, 9241929.
10. *Changes in the Crystal Structure of Metals in the Course of Their Laser Processing* / S.V. Vasil'ev, N.G. Val'ko, A.Y. Ivanov, A.L. Sitkevich // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2022. – Vol. 95, № 3. – P. 821–829.
11. *ГОСТ 21427.1-83. Сталь электротехническая холоднокатаная анизотропная тонколистовая. Технические условия.* – Москва: Изд-во стандартов, 1992. – 13 с.
12. *Мороз, Н.И. Влияние отжига на коррозионную стойкость трансформаторной стали, легированной кремнием* / Н.И. Мороз, Н.Г. Валько // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2022. – Т. 12, № 3. – С. 108–115.
13. *Мороз, Н.И. Влияние термической обработки на твердость, структуру и свойства электротехнической стали* / Н.И. Мороз, Н.Г. Валько // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2022. – Т. 12, № 2. – С. 83–91.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант № T23-086).

Поступила в редакцию 29.01.2024.

Информация об авторах

Мороз Наталья Ивановна – аспирант
Валько Наталья Георгиевна – к.ф.-м.н., доцент
Васильев Сергей Валерьевич – к.ф.-м.н., доцент

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ УПРАВЛЯЕМОГО ЛАЗЕРНОГО РАСКАЛЫВАНИЯ СИЛИКАТНЫХ СТЕКОЛ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕГРЕССИОННЫХ, НЕЙРОСЕТЕВЫХ И НЕЧЕТКИХ МОДЕЛЕЙ

Ю.В. Никитюк¹, А.Ф. Васильев¹, Л.Н. Марченко^{1,2},
Ц. Ма³, Л. Ван³, Ю. Цинь³, И.Ю. Аушев⁴

¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

²Псковский государственный университет

³Нанкинский университет науки и технологий

⁴Университет гражданской защиты, Минск

DETERMINATION OF PARAMETERS FOR CONTROLLED LASER CLEAVING OF SILICATE GLASSES USING REGRESSION, NEURAL NETWORK AND FUZZY MODELS

Yu.V. Nikityuk¹, A.F. Vasilyev¹, L.N. Marchenko^{1,2},
J. Ma³, L. Wang³, Y. Qin³, I.Yu. Aushev⁴

¹Francisk Skorina Gomel State University

²Pskov State University

³Nanjing University of Science and Technology

⁴University of Civil Protection of the Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus, Minsk

Аннотация. Представлен один из вариантов решения научно-прикладной задачи прогнозирования характеристик лазерного раскалывания силикатных стекол. Результаты численного эксперимента, реализованного на языке программирования APDL, были использованы для построения регрессионных, нейросетевых и нечетких моделей управляемого лазерного раскалывания силикатных стекол. В качестве варьируемых факторов рассматривались скорость обработки, радиус и мощность лазерного пучка, а в качестве откликов – максимальная температура и термоупругие напряжения растяжения в зоне лазерной обработки. По результатам гранецентрированного варианта центрального композиционного плана эксперимента оценена регрессионная модель откликов лазерной резки стеклянных пластин при заданном уровне значимости. Построены и обучены искусственные нейронные сети зависимости откликов от входных факторов. На основе тепловых карт средней абсолютной процентной ошибки определены наиболее эффективные нейросетевые модели максимальной температуры и термоупругих напряжений растяжения в зоне лазерной обработки. Нечеткое моделирование управляемого лазерного раскалывания силикатных стекол осуществлено по разработанным лингвистическим переменным входных и выходных параметров. Сравнение результатов регрессионного, нейросетевого, нечеткого моделирования проведено на основе критериев точности, при этом выявлена наиболее эффективная модель. Результаты исследований могут быть рекомендованы для прикладного использования аппроксимации максимальной температуры и термоупругого напряжения растяжения в зоне лазерной обработки.

Ключевые слова: лазерная резка, нечеткая логика, искусственная нейронная сеть, ANSYS – универсальная программная система анализа методом конечных элементов.

Для цитирования: Определение параметров управляемого лазерного раскалывания силикатных стекол с использованием регрессионных, нейросетевых и нечетких моделей / Ю.В. Никитюк, А.Ф. Васильев, Л.Н. Марченко, Ц. Ма, Л. Ван, Ю. Цинь, И.Ю. Аушев // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (59). – С. 32–38. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_32. – EDN: UZDLHO

Abstract. This study proposes a solution to the applied research problem of predicting the characteristics of laser cleaving of silicate glasses. The results of a numerical experiment conducted in APDL (Ansys Parametric Design Language) were used to build regression, neural network and fuzzy models for the controlled laser cleaving of silicate glasses. The processing speed, radius, and power of the laser beam were considered as variable factors, whereas the maximum temperature and thermoelastic tensile stresses in the laser-treated area were regarded as responses. The regression model for the responses of laser cutting of glass plates at a specified significance level was estimated using the findings from the face-centered version of the central composite design experiment. Artificial neural networks that exhibit response dependence on input factors were created and trained. The most effective neural network models of the maximum temperature and thermoelastic tensile stresses in the laser-treated area were determined using MAPE (mean absolute percentage error) heat maps. Fuzzy modeling of controlled laser cleaving of silicate glasses was conducted according to the developed linguistic variables of input and output parameters. An evaluation was performed to compare the results of regression, neural network, and fuzzy modelling based on accuracy criteria, ultimately identifying the most effective model. The research findings can be suggested for practical application in approximating the maximum temperature and thermoelastic tensile stress in the laser-treated area.

Keywords: laser cutting, fuzzy logic, artificial neural network, ANSYS – Universal Finite Element Analysis Software System.

For citation: Determination of parameters for controlled laser cleaving of silicate glasses using regression, neural network and fuzzy models / Yu.V. Nikityuk, A.F. Vasilyev, L.N. Marchenko, J. Ma, L. Wang, Y. Qin, I.Yu. Aushev // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 2 (59). – P. 32–38. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_32. – EDN: UZDLHO

Introduction

Silicate glasses are exceptionally well-suited for industrial applications due to their inherent properties. The primary procedure involved in the manufacturing of glass products is cutting, and controlled laser cleaving has multiple advantages compared to conventional methods of dimensional processing. The controlled laser cleaving technology was established in the latter part of the twentieth century. Nevertheless, even today, research on the laser cleaving processes involving various brittle nonmetallic materials remains relevant [1]–[5].

Artificial neural networks have the potential to effectively simulate complex relationships between inputs and outputs of the system; their extensive application stems from their capability to determine nonlinear dependencies in multidimensional datasets [6], [7]. Artificial neural networks are presently being effectively employed to simulate laser processing of materials, including laser cleaving methods [6]–[18]. Regression models of laser processing are also successfully used in modeling the processes under consideration [10]–[20]. The comparison between neural network and regression models for laser cutting of materials was conducted in [10], [20].

The implementation of a fuzzy approach for modelling real processes has been essential to enhancing prediction accuracy. This approach is founded on the concept of fuzzy description of systems and objects. Fuzzy logic is a means of representing the uncertainties of the real world, which are close to human thinking and natural languages [21].

Professor Lotfi Zadeh developed the theory of fuzzy sets in 1965, which serves as the mathematical foundation for fuzzy modelling. In 1994, Professor Bart Kosko demonstrated the theorem of fuzzy approximation, which states that any mathematical system may be approximated by a system that relies on fuzzy logic. Thus, fuzzy set theory allows for the representation of an arbitrary “input – output” relationship without the need for complicated mathematical methods. Fuzzy modelling is particularly beneficial when the processes under study are challenging to analyze using conventional methods [21]–[24].

The use of fuzzy modelling has proven to be effective in determining the parameters of laser processing of materials [25]–[27]. The study described in paper [27] presents the outcomes of a comparison between neural network, fuzzy, and regression models for predicting laser cutting parameters of AISI304 steel.

The present research focuses on developing and comparing the effectiveness of regression, neural network, and fuzzy models in identifying the parameters for controlled laser cleaving of silicate glasses.

1 Finite element analysis

Finite element calculations of temperature and thermoelastic stress fields that arise during controlled laser cleaving in glass plates (Figure 1.1) were performed using APDL as part of the unlinked task of thermoelasticity in a quasi-static formulation.

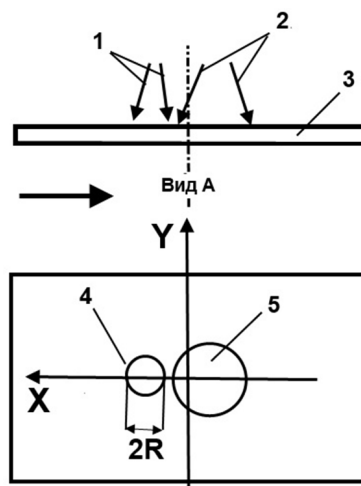


Figure 1.1 – Schematic of mutual arrangement of exposure areas to laser and refrigerant

Position 1 represents the laser beam with a wavelength of $10.6\ \mu\text{m}$, position 2 indicates the refrigerant, position 4 denotes the cross-section of the laser beam with a wavelength of $10.6\ \mu\text{m}$, and position 5 represents the refrigerant exposure area. The silicate glass plate under treatment is identified as position 3.

Calculations were performed for a plate with geometric dimensions of $35 \times 25 \times 2\ \text{mm}$. The model that was created had 36960 Solid 70 elements for thermal analysis and Solid 185 elements for strength analysis. The properties of silicate glass provided in [2] were used in the modeling process. The cutting speed was assumed to be $V = 0.02\ \text{m/s}$. The parameters of the laser beam with the radiation wavelength $\lambda = 10.6\ \mu\text{m}$ were as follows: the radius of the beam radiation spot $R = 0.002\ \text{m}$ and the radiation power $P = 10\ \text{W}$.

It was assumed that the impact of the refrigerant provides cooling of the glass surface with a heat transfer coefficient equal to $8,000\ \text{W/m}^2\text{K}$. Figures 1.2 and 1.3 depict the distributions of temperature and thermoelastic stress fields that are typical of the controlled laser cleaving process applied to glass plates. For the calculated parameters, the values of maximum tensile stresses in the treatment zone σ_{yy} and maximum temperatures T are equal to $25.9\ \text{MPa}$ and $481\ \text{K}$, respectively, with permissible temperature values not exceeding the glass transition temperature of $789\ \text{K}$ [2].

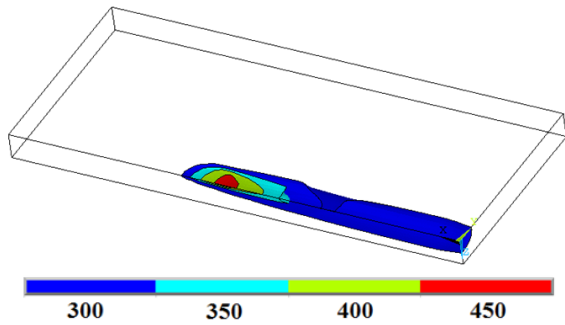


Figure 1.2 – Temperature distribution T throughout the sample's volume, °K

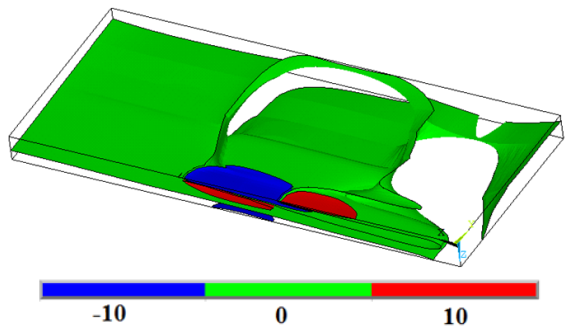


Figure 1.3 – Distribution of stresses σ_{yy} throughout the sample's volume, MPa

2 Regression model

A face-centered version of the central composite design experiment was generated in the DesignXplorer module of the ANSYS software for three factors ($P1$ – $P3$): $P1$ represents the processing speed V , $P2$ represents the laser power P , and $P3$ denotes the radius of the radiation spot R of the beam. The calculations were performed for 15 combinations of input parameters, as specified by the experimental design (Table 2.1).

Table 2.1 – Experimental design and calculation results

№	$P1 V$, m/s	$P2 P$, W	$P3 R$, m	$P4 T$, °K	$P5 \sigma_{yy}$, MPa
1	0.03	10	0.002	481	25.9
2	0.025	10	0.002	504	30.9
3	0.035	10	0.002	464	22.0
4	0.03	5	0.002	387	12.9
5	0.03	15	0.002	576	38.8
6	0.03	10	0.0015	558	33.5
7	0.03	10	0.0025	435	20.9
8	0.025	5	0.0015	442	20.1
9	0.035	5	0.0015	412	14.2
10	0.025	15	0.0015	741	60.3
11	0.035	15	0.0015	651	42.7
12	0.025	5	0.0025	372	12.5
13	0.035	5	0.0025	358	8.9
14	0.025	15	0.0025	530	37.4
15	0.035	15	0.0025	487	26.8

The maximum temperature T in the laser-treated area and the maximum tensile stresses σ_{yy} in the treatment zone were considered as output parameters.

The response functions that establish a relationship between the input factors V , P , R and the output parameters T , σ_{yy} at a significance level of 0.05 are expressed as follows:

$$T = 538 + 62.2P - 2.81 \cdot 10^5 R + 6.74 \cdot 10^7 R^2 - 356VP + 7.69 \cdot 10^5 VR - 12500PR,$$

$$\sigma_{yy} = -4.02 \cdot 10^5 + 8.7 \cdot 10^6 P - 3.3 \cdot 10^9 R - 1.12 \cdot 10^8 VP + 1.12 \cdot 10^{11} VR - 1.29 \cdot 10^9 PR.$$

3 Neural network model

The creation of artificial neural networks with two hidden layers (see Figure 3.1) was implemented via the TensorFlow library in Python, following the algorithm provided in [10].

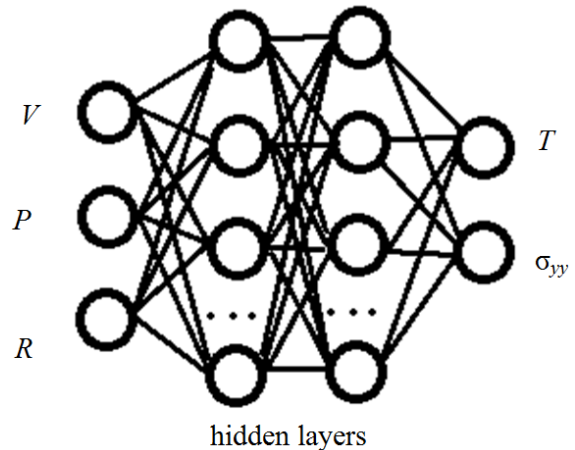


Figure 3.1 – Artificial neural network architecture

The training and test sets were generated by solving the corresponding problems using the finite element method, with 15 combinations of the central composite design experiment being supplemented by 50 combinations of calculations. Thus, the neural networks were trained using a dataset that comprised 60 combinations of controlled laser cleaving parameters. The neural networks were tested using a sample of 5 parameter combinations (see Table 3.1). It is important to mention that this test dataset was also used to assess regression and fuzzy models.

Table 3.1 – Test dataset

№	$P1 V$, m/s	$P2 P$, W	$P3 R$, m	$P4 T$, °K	$P5 \sigma_{yy}$, MPa
1	0.033	12.9	0.0025	466	24.5
2	0.026	7.3	0.0015	506	28.2
3	0.025	10.7	0.002	518	33.1
4	0.03	8.9	0.002	461	23
5	0.029	9.3	0.002	472	24.9

The Adam optimizer, ReLU activation function, and *MSE* loss function were used in the process of constructing the artificial neural networks. The neural network underwent training for a total of 500 epochs. As a result, 16 artificial neural networks were created with the number of neurons in two hidden layers ranging from 5 to 20, with an interval of 5.

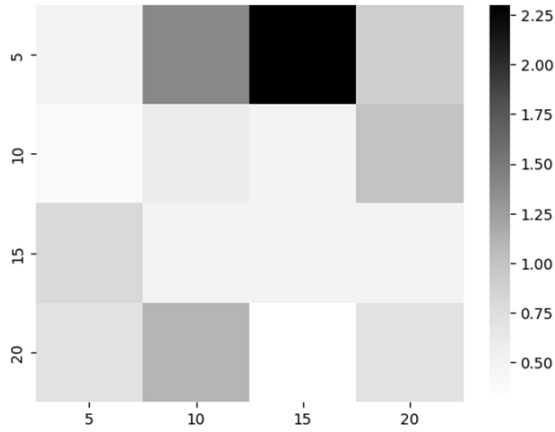


Figure 3.2 – Heat map of *MAPE* distribution when determining T

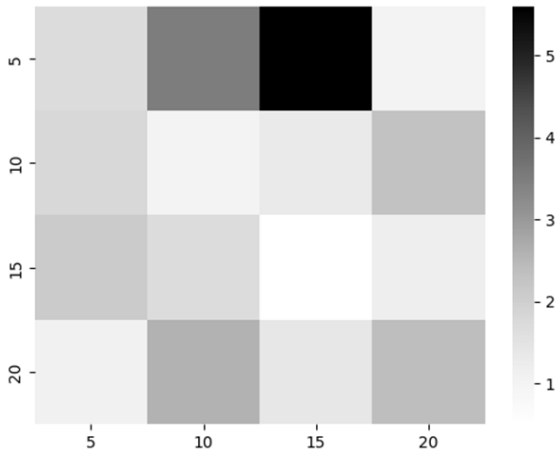


Figure 3.3 – Heat map of *MAPE* distribution when determining σ_{yy}

Figures 3.2 and 3.3 illustrate heat maps of the distribution of mean absolute percentage errors (*MAPE*) in determining the maximum values of temperature and tensile stresses during the controlled laser cleaving of glass plates. The vertical axis represents the number of neurons in the first hidden layer, while the horizontal axis shows the number of neurons in the second hidden layer of the neural network. The intensity of color coding represents the extent of error: the error increases from light to dark.

The neural network with the architecture [3-20-15-2] demonstrated superior performance in predicting the values of maximum temperatures T in the treatment zone, whereas the neural network with the architecture [3-15-15-15-2] achieved the highest accuracy in calculating the maximum tensile stresses σ_{yy} .

4 Fuzzy model

The fuzzy system depicted in Figure 4.1 was employed to do fuzzy modelling of the controlled laser cleaving process on silicate glasses. The fuzzy system was implemented using the Scikit-Fuzzy library in Python.

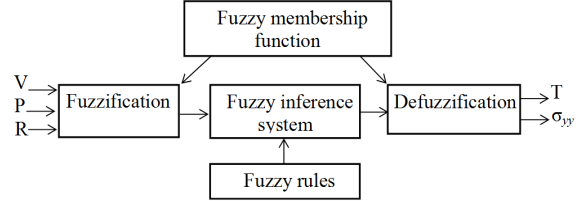


Figure 4.1 – Structure of the fuzzy system employed to simulate controlled laser cleaving

Fuzzification is the procedure of converting exact input variables into fuzzy variables via appropriate membership functions. This paper employed triangular functions to specify the membership of input parameters to fuzzy sets, whereas Gaussian functions were used to define the membership of output parameters to fuzzy sets (Figure 4.2). The following linguistic variables were defined for the input and output parameters.

Input parameters:

$V = \{L - \text{little}, M - \text{medium}, H - \text{high}\};$

$P = \{L - \text{little}, M - \text{medium}, H - \text{high}\};$

$R = \{L - \text{little}, M - \text{medium}, H - \text{high}\}.$

Output parameters:

$T = \{VVL - \text{very very little}, VL - \text{very little}, L - \text{little}, M - \text{medium}, VH - \text{very high}, VVH - \text{very very high}\};$

$\sigma_{yy} = \{VVL - \text{very very little}, VL - \text{very little}, L - \text{little}, M - \text{medium}, VH - \text{very high}, VVH - \text{very very high}\}.$

```

rule1 = ctrl.Rule(V['L'] & P['L'] & R['L'], T_ctrl['V_L'])
rule2 = ctrl.Rule(V['L'] & P['L'] & R['H'], T_ctrl['VV_L'])
rule3 = ctrl.Rule(V['L'] & P['M'] & R['M'], T_ctrl['M'])
rule4 = ctrl.Rule(V['L'] & P['H'] & R['L'], T_ctrl['VV_H'])
rule5 = ctrl.Rule(V['L'] & P['H'] & R['H'], T_ctrl['M'])
rule6 = ctrl.Rule(V['M'] & P['L'] & R['M'], T_ctrl['VV_L'])
rule7 = ctrl.Rule(V['M'] & P['M'] & R['L'], T_ctrl['H'])
rule8 = ctrl.Rule(V['M'] & P['M'] & R['M'], T_ctrl['L'])
rule9 = ctrl.Rule(V['M'] & P['M'] & R['H'], T_ctrl['V_L'])
rule10 = ctrl.Rule(V['M'] & P['H'] & R['M'], T_ctrl['H'])
rule11 = ctrl.Rule(V['H'] & P['L'] & R['L'], T_ctrl['V_L'])
rule12 = ctrl.Rule(V['H'] & P['L'] & R['H'], T_ctrl['VV_L'])
rule13 = ctrl.Rule(V['H'] & P['M'] & R['M'], T_ctrl['L'])
rule14 = ctrl.Rule(V['H'] & P['H'] & R['L'], T_ctrl['V_H'])
rule15 = ctrl.Rule(V['H'] & P['H'] & R['H'], T_ctrl['L'])
  
```

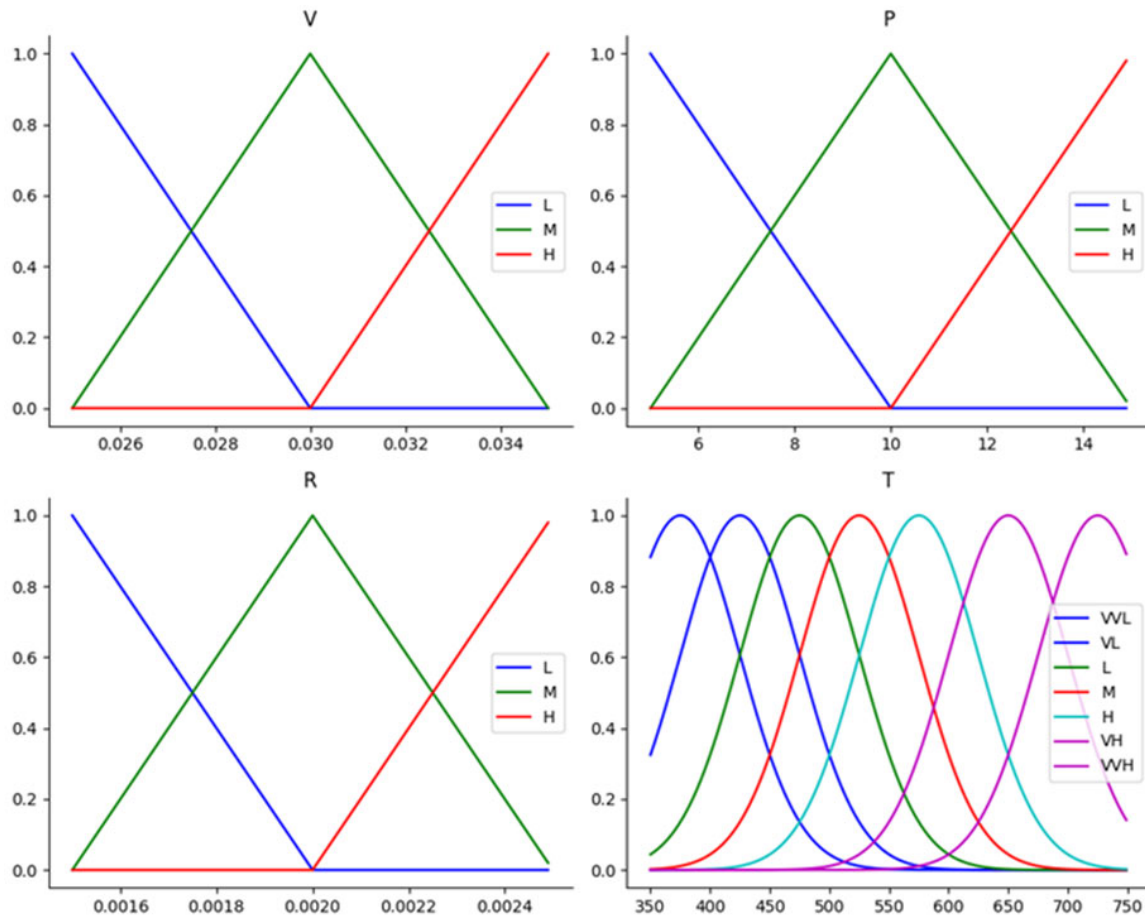


Figure 4.2 – Membership functions of linguistic variables of input and output parameters

The fuzzy inference process is an algorithm used to derive fuzzy conclusions from fuzzy rules. Mamdani fuzzy inference method was used in the fuzzy modeling of controlled laser cleaving, primarily selected for its versatility and simplicity.

Based on the data provided in Table 2.1, a total of 15 rules were derived to ascertain the maximum temperatures in the treatment zone:

Similarly, a set of 15 rules were developed to determine the values of maximum tensile stresses σ_{yy} within the treatment zone.

In order to complete the fuzzy modeling process for the controlled cleaving of silicate glasses involving the center of gravity method, defuzzification was performed to produce numerical values for the output variables.

3 Results and discussion

The following criteria were used to evaluate the resulting regression, neural network and fuzzy models:

– Root Mean Square Error (RMSE)

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d_i - y_i)^2}, \quad (3.1)$$

– Mean Absolute Error (MAE)

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |d_i - y_i|, \quad (3.2)$$

– Mean Absolute Percentage Error (MAPE)

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{d_i - y_i}{d_i} \right| \cdot 100. \quad (3.2)$$

Here, d_i represents the calculated values determined via the finite element method as a result of a numerical experiment, while y_i stands for the model values obtained on the basis of regression, neural network and fuzzy models.

The values of criteria (3.1)–(3.3) used for evaluating the models are given in Table 3.1.

Table 3.1 – Evaluation results of regression, neural network and fuzzy models

Criterion	Regression model		Neural network model		Fuzzy model	
	T	σ_{yy}	T, K	σ_{yy}	T	σ_{yy}
RMSE	3.2	1.12	1.9	0.19	14.6	1.9
MAE	2.4	1.11	1.4	0.15	13.2	1.5
MAPE	0.5%	4.3%	0.3%	0.5%	2.7%	5.4%

The evaluation results of the produced models enable us to draw conclusions regarding the required correspondence with the results of finite element calculations. Meanwhile, the *MAPE* values for determining maximum temperatures and tensile stresses in the laser-treated area were the lowest for neural network models. These values were 0.3% for temperatures (T) and 0.5% for tensile stresses (σ_{yy}), respectively. The neural network models exhibited lower values of *RMSE* and *MAE* compared to the corresponding criteria of regression and fuzzy models. Hence, neural network models exhibit superior accuracy in predicting the parameters of the controlled laser cleaving of glass plates.

Conclusion

The study addresses the solution to the applied research problem of predicting the characteristics of laser cleaving of silicate glasses through mathematical modelling. A numerical experiment in APDL (Ansys Parametric Design Language) has been performed for silicate glass. The processing speed, radius, and power of the laser beam were considered as variable factors, whereas the maximum temperature and thermoelastic tensile stresses in the laser-treated area were regarded as responses.

Regression models of the dependence of the maximum temperature T and thermoelastic tensile stress σ_{yy} on the processing speed, radius, and power of the laser beam at a specified significance level of 0.05 were estimated following the results of the face-centered version of the central composite design of the three-factor experiment.

An artificial neural network with two hidden layers was created to predict the maximum values of temperature and tensile stress in the treatment zone while performing controlled laser cleaving of glass plates. The most optimal neural network models were determined based on the heat maps of *MAPE* distribution.

The study employs fuzzy logic to construct a model for estimating the output parameters (maximum temperature and thermoelastic tensile stress) in the area where laser cleaving of glass occurs. This estimation takes place for a set of initial input parameters such as processing speed, radius and power of the laser beam. Triangular functions were employed for the fuzzification of input parameters, while Gaussian membership functions were utilized for the output parameters. The rule base (15) of fuzzy inference systems was developed based on the experimental data. Mamdani method served as the foundation for fuzzy inference. The defuzzification process resulted in obtaining numerical values for the output parameters.

An evaluation was conducted to compare the outcomes of regression, neural network, and fuzzy modelling using accuracy criteria such as *RMSE*, *MAE*, and *MAPE*. Neural network modeling

provided the lowest values of approximation criteria for both experimental and simulated values.

The models that have been developed are suitable for practical application in approximating the maximum temperature and thermoelastic tensile stress in the laser-treated area while performing the controlled laser cleaving of glass plates in various experiments.

REFERENCES

1. Lumley, R.M. Controlled separation of brittle materials using a laser / R.M. Lumley // *Am. Ceram. Soc. Bull.* – 1969. – Vol. 48. – P. 850–854.
2. Machulka, G.A. Laser processing of glass / G.A. Machulka. – Moscow: Sov. radio, 1979. – 136 p. (In Russian)
3. Nisar, S. Laser glass cutting techniques – A review / S. Nisar // *Journal of laser applications.* – 2013. – Vol. 25, № 4. – P. 042010-1–11.
4. Kondratenko, V.S. Precision Cutting of Glass and Other Brittle Materials by Laser-Controlled Thermo-Splitting (Review) / V.S. Kondratenko, S.A. Kudzh // *Glass Ceram.* – 2017. – Vol. 74. – P. 75–81. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s10717-017-9932-1>.
5. Nikityuk, Yu.V. Physical regularities of laser thermal cleaving of silicate glasses and alumina ceramics: specialty 01.04.21 “Laser physics”: PhD thesis extended abstract / Nikityuk Yuri Valerievich. – Minsk, 2009. – 24 p. (in Russian)
6. Golovko, V.A. Neural network data processing technologies: textbook / V.A. Golovko, V.V. Krasnoproshin. – Minsk: BSU, 2017. – 263 p. (in Russian).
7. Chollet, F. Deep Learning with Python / F. Chollet. – Manning Publications Co., 2018. – 400 p.
8. A review on applications of artificial intelligence in modeling and optimization of laser beam machining / A.N. Bakhtiyari, Z. Wang, L. Wang, H. Zheng // *Optics & Laser Technology.* – 2021. – Vol. 135. – P. 1–18.
9. Comparison of ANN and finite element model for the prediction of thermal stresses in diode laser cutting of float glass / M.B. Kadri, S. Nisar, S.Z. Khan, W.A. Khan // *Optik – Int. J. Light Electron Optics.* – 2015. – Vol. 126, № 19. – P. 1959–1964.
10. Nikityuk, Yu.V. Determination of the parameters of two-beam laser splitting of silicate glasses using regression and neural network models / Yu.V. Nikityuk, A.N. Serdyukov, I.Yu. Aushev // *Journal of the Belarusian State University. Physics.* – 2022. – Vol. 1. – P. 35–43. – DOI: <https://doi.org/10.33581/2520-2243-2022-1-35-43>
11. Application of artificial neural networks and finite element method for determining parameters of quartz sol-gel glass processing by elliptical laser beams / Yu.V. Nikityuk, A.N. Serdyukov, V.A. Prokhorenko, I.Yu. Aushev // *Problems of*

Physics, Mathematics and Technics. – 2021. – № 3 (48). – P. 30–36. (In Russian).

12. Nikityuk, Yu. V. Optimization of two-beam laser cleavage of silicate glass / Y. V. Nikityuk, A. N. Serdyukov, I. Yu. Aushev // Journal of Optical Technology. – 2022. – Vol. 89, № 2. – P. 121–125. – DOI: 10.1364/JOT.89.000121.

13. Nikityuk, Yu. V. Optimization of laser splitting parameters of silicate glasses with elliptical beams in the plane of parallel surface / Yu. V. Nikityuk, A. N. Serdyukov, I. Yu. Aushev // Vestnik of the Sukhoi State Technical University of Gomel. – 2023. – № 3. – P. 17–27.

14. Nikityuk, Yu. V. Optimization of laser cleaving of silicate glasses with elliptical beams using fracture mechanics parameters / Yu. V. Nikityuk, I. Yu. Aushev // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 4 (57). – P. 36–41.

15. Nikityuk, Yu. V. Determination of the Parameters of Controlled Laser Thermal Cleavage of Crystalline Silicon Using Regression and Neural Network Models / Yu. V. Nikityuk, A. N. Serdyukov // Crystallography Reports. – 2023. – Vol. 68, № 7. – P. 195–200.

16. Parametric optimization of silicate-glass-based asymmetric two-beam laser splitting / Yu. V. Nikityuk, A. A. Sereda, A. N. Serdyukov, S. V. Shalupaev, I. Yu. Aushev // Journal of Optical Technology. – 2023. – Vol. 90, № 6. – P. 296–301. – DOI: <https://doi.org/10.1364/JOT.90.000296>.

17. Nikityuk, Yu. V. Optimization of laser cleaving of silicate glasses by elliptical beams under additional influence of hot air flow / Yu. V. Nikityuk, A. N. Serdyukov, I. Yu. Aushev // Proceedings of F. Skorina Gomel State University. – 2023. – № 6 (141). – P. 110–116. (in Russian)

18. Optimisation of parameters for laser cleaving of silicate glasses using U-shaped beams / Yu. V. Nikityuk, A. N. Serdyukov, J. Ma, L. Wang, I. Y. Aushev // Vestnik of the Sukhoi State Technical University of Gomel. – 2023. – № 4. – P. 30–39.

19. Multiparametric optimization of laser cutting of steel sheets / A. E. Gvozdev, I. V. Golyshev, I. V. Minaev, N. N. Sergeev, I. V. Tikhonova, D. M. Khonelidze, A. G. Kolmakov // Inorganic Materials: Applied Research. – 2015. – Vol. 6, № 4. – P. 305–310.

20. Madić, M. Comparative modeling of CO₂ laser cutting using multiple regression analysis and artificial neural network, International Journal of Physical Sciences / M. Madić, M. Radovanović // International Journal of Physical Sciences. – 2012. – Vol. 7 (16). – P. 2422–2430.

21. Emelyanov, S. G. Automated fuzzy-logical control systems: Monograph / S. G. Emelyanov, V. S. Titov, M. V. Bobyr. – Moscow: INFRA-M, 2011. – 176 p.

22. Klir, G. Fuzzy sets and fuzzy logic / G. Klir, B. Yuan. – New Jersey: Prentice hall, 1995. – 574 p.

23. Rutkovskaya, D. Neural networks, genetic algorithms and fuzzy systems / D. Rutkovskaya, M. Pilinski, L. Rutkovsky. – Moscow: Goryachaya Liniya-Telecom, 2013. – 384 p. (In Russian)

24. Shtovba, S. D. Design of fuzzy systems by means of MATLAB / S. D. Shtovba. – Moscow, Goryachaya Liniya, 2007. – 284 p. (in Russian)

25. Bakhtiyari, A. N. A review on applications of artificial intelligence in modeling and optimization of laser beam machining / A. N. Bakhtiyari // Optics & Laser Technology. – 2021. – Vol. 135. – P. 106721.

26. Fuzzy Logic Approach for the Prediction of Dross Formation in CO₂ Laser Cutting of Mild Steel / M. Madić [et al.] // Journal of Engineering Science & Technology Review. – 2015. – Vol. 8, № 3. – P. 143–150.

27. Madić, M. Comparison of fuzzy logic, regression and ANN laser kerf width models / M. Madić, Ž. Čojbašić, M. Radovanović // UPB Scientific Bulletin, Series D: Mechanical Engineering. – 2016. – Vol. 78. – P. 197–212.

The article was submitted 12.01.2024.

Информация об авторах

Никитюк Юрий Валерьевич – к. ф.-м. н., доцент
Васильев Александр Федорович – д. ф.-м. н., профессор
Марченко Лариса Николаевна – к. т. н., доцент
Ма Цзюнь – профессор
Ван Лей – доцент
Цинь Юань – доцент
Аушев Игорь Юрьевич – к. т. н., доцент

ПРИБЛИЖЕНИЕ РЭЛЕЯ – ДЖИНСА В ИНФРАКРАСНОМ ДИАПАЗОНЕ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ЗВЁЗД

О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

RAYLEIGH – JEANS APPROXIMATION IN THE INFRARED RANGE OF THERMAL RADIATION OF STARS

O.V. Novikova, G.Yu. Tyumenkov

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. В работе проведена количественная оценка эффективности приближения Рэля – Джинса для теплового излучения звёзд в инфракрасной области спектра. Для ряда фиксированных температур рассчитано относительное отклонение спектральной плотности Рэля – Джинса от планковской на границах диапазонов *NIR*, *MIR* и *FIR*. Для указанных диапазонов также определены относительные отклонения излучательных способностей, светимостей и блесков. Проведена оценка эффективности приближения для некоторых звёзд.

Ключевые слова: инфракрасное излучение, спектральная плотность, кривая Планка, формула Рэля – Джинса, относительное отклонение, светимость.

Для цитирования: Новикова, О.В. Приближение Рэля – Джинса в инфракрасном диапазоне теплового излучения звёзд / О.В. Новикова, Г.Ю. Тюменков // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (59). – С. 39–42. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_39. – EDN: RRPNB

Abstract. The paper provides a quantitative assessment of the effectiveness of the Rayleigh – Jeans approximation for the thermal radiation of stars in the infrared region of the spectrum. For a number of fixed temperatures, the relative deviations of the Rayleigh – Jeans spectral density from the Planck one at the edges of the *NIR*, *MIR* and *FIR* ranges are calculated. For the same ranges, the relative deviations of emissivities, luminosities and fluxes are also determined. The efficiency of the approximation for some stars is assessed as well.

Keywords: infrared radiation, spectral density, Planck curve, Rayleigh – Jeans formula, relative deviation, luminosity.

For citation: Novikova, O.V. Rayleigh – Jeans approximation in the infrared range of thermal radiation of stars / O.V. Novikova, G.Yu. Tyumenkov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 2 (59). – P. 39–42. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_39 (in Russian). – EDN: RRPNB

Введение

Вид непрерывных составляющих спектров электромагнитного излучения звёзд говорит о правомерности использования модели абсолютно-чёрного тела (АЧТ) для их описания [1], [2]. Как любая модель, АЧТ не является идеально точной, но она достаточно эффективна. Физическая привлекательность модели заключается в том, что единственным параметром звезды, определяющим характер излучения, является температура её поверхности T . И теперь законы, описывающие излучение АЧТ, можно использовать в качестве законов излучения звёзд. В этом случае функция спектральной плотности $\varepsilon(T, \lambda)$, параметризованная температурой T и длиной волны λ , часто называемая «кривой Планка», имеет вид [1], [2]

$$\varepsilon(T, \lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \equiv \varepsilon_p(T, \lambda). \quad (0.1)$$

В (0.1) присутствуют физические константы: h – постоянная Планка, k – постоянная Больцмана, c – скорость света в вакууме. Численные значения этих констант общеизвестны.

В свою очередь, $\varepsilon(T, \lambda)$ имеет связь с интегральной мощностью излучения с единицы поверхности $\varepsilon(T)$, которую также часто называют излучательной способностью, вида

$$\varepsilon(T) = \int_0^\infty \varepsilon(T, \lambda) d\lambda = \sigma T^4. \quad (0.2)$$

Выражение (0.2) – это закон Стефана – Больцмана, где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^2}$ – постоянная Стефана – Больцмана. Если же проинтегрировать (0.2) в пределах от некоторого λ_1 до некоторого λ_2 , то получится мощность излучения с единицы поверхности в выбранном диапазоне

$$\varepsilon(T) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \varepsilon(T, \lambda) d\lambda. \quad (0.3)$$

В дальнейшем на $\varepsilon(T)$ будем навешивать индексы диапазона и типа спектральной плотности, например, $\varepsilon_p^{FIR}(T)$ – то есть, *FIR* диапазон и «планковская» плотность.

Исследование функции (0.1) на экстремум при фиксированной температуре, требующее выполнения условия

$$\left[\frac{\partial \varepsilon(T, \lambda)}{\partial \lambda} \right]_T = 0,$$

приводит к координате максимума

$$\lambda_{(max)} = \frac{b}{T}. \quad (0.4)$$

Выражение (0.4) – закон «смещения Вина», где $b = 2,9 \cdot 10^{-3}$ м·К – постоянная Вина.

Таким образом, приведенные здесь математические соотношения (0.1), (0.2) и (0.4) и рассматриваются в качестве законов излучения АЧГ.

1 Приближение Рэлея – Джинса

Выражение (0.1) для функции спектральной плотности $\varepsilon(T, \lambda)$ сложно было интегрировать аналитическими методами. В настоящее же время используются численные методы, встроенные в компьютерные технологии, например [3]. Поэтому исторически сложилось так, что формула (0.1) была упрощена для случая «длинных» волн. Например, для середины традиционной инфракрасной (далее *ИК*) области спектра с длиной волны $\lambda = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м при температуре $T = 6000$ К показатель экспоненты в (0.1) действительно мал

$$\frac{hc}{\lambda kT} = 0,00479. \quad (1.1)$$

Что позволяет разложить экспоненту в ряд, ограничившись первым порядком малости

$$e^{\frac{hc}{\lambda kT}} = 1 + \frac{hc}{\lambda kT}. \quad (1.2)$$

Предполагая правомерность утверждения о возможной малости (1.1) и для других «длинных» волн и температур, с использованием разложения (1.2) преобразуем (0.1) к виду

$$\varepsilon(T, \lambda) = \frac{2\pi c}{\lambda^4} kT \equiv \varepsilon_{RJ}(T, \lambda). \quad (1.3)$$

Полученную формулу (1.3) называют *формулой Рэлея – Джинса*, которую и надо понимать, как приближение Рэлея – Джинса для функции спектральной плотности (0.1) в «длинноволновой» области спектра.

2 Относительное отклонение спектральных плотностей в инфракрасной области спектра

Специфика различных научных дисциплин, часто предполагает наличие собственных единиц измерения, различных шкал, специфической терминологии и т. д. Это касается и деления

спектра электромагнитного излучения на области, диапазоны и поддиапазоны.

В астрономии, как правило, инфракрасную область спектра делят на диапазоны так, как это представлено в Таблице 2.1, см. например [4]. Следует заметить, что инфракрасная астрономия продолжает активно развиваться и, особенно, в технологическом отношении [5], [6]. И особые надежды ученых в наше время связаны с новейшей информацией, получаемой со снимков, сделанных в диапазонах *ИК* области спектра, космическим телескопом *James Webb* [7]–[9], в арсенале которого имеются камера, спектрограф и устройство формирования изображения в диапазоне *NIR*, а также приборы для работы в диапазоне *MIR*.

Таблица 2.1 – Общепринятое в астрономии разделение инфракрасного излучения на диапазоны

Название	Аббревиатура	Длины волн (мкм)
Ближний инфракрасный диапазон	<i>NIR</i>	0,7 – 5
Средний инфракрасный диапазон	<i>MIR</i>	5 – 40
Дальний инфракрасный диапазон	<i>FIR</i>	40 – 350*

*в астрономии дальняя граница *FIR* диапазона фиксируется на данном уровне, а не на длине волны 1 мм, как, к примеру, в схеме ISO 20473.

Для оценки качества приближения можно использовать относительное отклонение спектральных плотностей $\delta\varepsilon(T, \lambda)$ вида

$$\delta\varepsilon(T, \lambda) = \frac{\varepsilon_{RJ}(T, \lambda) - \varepsilon_p(T, \lambda)}{\varepsilon_p(T, \lambda)}, \quad (2.1)$$

которое характеризует близость расположения приближенной «рэлей-джинсовской» кривой к точной «планковской».

В Таблице 2.2 приведены значения $\delta\varepsilon(T, \lambda)$ для ряда температур, совпадающих либо близких к границам спектральных классов, и для граничных длин волн диапазонов из Таблицы 2.1. При расчётах на основе формул (2.1), (0.1) и (1.3) использовалась система компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica* [10], которая была применена и при последующих вычислениях.

По данным Таблицы 2.2 можно сделать заключение, что в широком диапазоне температур поверхности исследуемое приближение хорошо работает у дальней границы *ИК* области, где $\delta\varepsilon(T, \lambda)$ имеет значения от 1% и менее. Также оно эффективно на ближней границе *FIR* при температурах больше 5000 К. И совершенно непригодно для ближней границы *ИК* области, где в минимуме достигает только 19%. В Таблице

2.2 все приемлемые значения $\delta\epsilon(T, \lambda)$ меньше 5% выделены жирным шрифтом.

Таблица 2.2 – Относительное отклонение спектральных плотностей $\delta\epsilon(T, \lambda)$ на границах диапазонов

$\lambda, \text{ мкм}$ $\delta\epsilon(T, \lambda)$	0,7	5	40	350
$\delta\epsilon(2000K, \lambda)$	2825,9123	1,2349	0,0956	0,0103
$\delta\epsilon(5000K, \lambda)$	13,5941	0,3519	0,0368	0,0041
$\delta\epsilon(10000K, \lambda)$	2,3132	0,1587	0,0182	0,0021
$\delta\epsilon(30000K, \lambda)$	0,4363	0,0495	0,0060	0,0006
$\delta\epsilon(60000K, \lambda)$	0,1926	0,0244	0,0030	0,0003

3 Относительное отклонение излучательных способностей (светимостей, блесков)

Теперь обратимся непосредственно к излучательной способности $\epsilon(T)$ вида (0.3), которая связана со светимостью звезды L и наблюдаемым блеском E в рассматриваемом диапазоне, соотношениями

$$L = 4\pi R^2 \epsilon(T), \quad E = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \epsilon(T), \quad (3.1)$$

где R – радиус звезды, а r – расстояние до звезды.

Данные её расчетов для случаев «планковской» (0.1) и «рэлей-джинсовской» спектральных плотностей (1.3) во всех диапазонах ИК области приведены в Таблице 3.1.

Теперь введем относительное отклонение излучательной способности $\delta\epsilon(T)$ вида

$$\delta\epsilon(T) = \frac{\epsilon_{RJ}(T) - \epsilon_P(T)}{\epsilon_P(T)}, \quad (3.2)$$

которое носит обобщающий характер в силу взаимосвязей (3.1) и будет равно относительным отклонениям светимости и блеска, то есть

$$\delta\epsilon(T) = \delta L(T) = \delta E(T).$$

Таблица 3.1 – Значения излучательных способностей $\epsilon(T)$ в ИК диапазонах для различных температур

$T, \text{ K}$ $\epsilon(T), \text{ Вт/м}^2$	2000	5000	10000	30000	60000
$\epsilon_P^{NIR}(T)$	$8,2234 \cdot 10^5$	$2,1592 \cdot 10^7$	$1,0821 \cdot 10^8$	$5,7910 \cdot 10^8$	$1,3264 \cdot 10^9$
$\epsilon_{RJ}^{NIR}(T)$	$5,0409 \cdot 10^7$	$1,2602 \cdot 10^8$	$2,5204 \cdot 10^8$	$7,5613 \cdot 10^8$	$1,5123 \cdot 10^9$
$\epsilon_P^{MIR}(T)$	$0,7763 \cdot 10^5$	$2,7698 \cdot 10^5$	$6,2021 \cdot 10^5$	$2,0026 \cdot 10^6$	$4,0786 \cdot 10^6$
$\epsilon_{RJ}^{MIR}(T)$	$1,3843 \cdot 10^5$	$3,4608 \cdot 10^5$	$9,9216 \cdot 10^5$	$2,0765 \cdot 10^6$	$4,1529 \cdot 10^6$
$\epsilon_P^{FIR}(T)$	$0,2527 \cdot 10^3$	$0,6582 \cdot 10^3$	$1,3343 \cdot 10^3$	$4,0392 \cdot 10^3$	$8,0967 \cdot 10^3$
$\epsilon_{RJ}^{FIR}(T)$	$0,2705 \cdot 10^3$	$0,6762 \cdot 10^3$	$1,3525 \cdot 10^3$	$4,0575 \cdot 10^3$	$8,1149 \cdot 10^3$

Так как блеск является наблюдаемой характеристикой звёзд, отдадим ему приоритет.

Результаты расчётов $\delta E(T)$ по данным Таблицы 3.1, абсолютно правомерные для $\delta\epsilon(T)$ и $\delta L(T)$, приведены в Таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Значения относительного отклонения блеска $\delta E(T)$

$T, \text{ K}$ $\delta E(T)$	$[\delta E(T)]^{NIR}$	$[\delta E(T)]^{MIR}$	$[\delta E(T)]^{FIR}$
2000	60,2993	0,7832	0,0706
5000	4,8364	0,2495	0,0275
10000	1,3292	0,1160	0,0136
30000	0,3057	0,0369	0,0045
60000	0,1401	0,0182	0,0023

На основе данных Таблицы 3.2 не сложно прийти к выводу, что приближение Рэлея – Джинса в диапазоне *NIR* абсолютно неприменимо при любых температурах поверхностей звёзд, так как минимальное значение относительного отклонения составляет 14%, что много даже для оценочных расчётов. Разумно полагать, что достаточно качественную оценку даёт относительное отклонение на уровне 5% и ниже. Здесь, как и в Таблице 2.2, все приемлемые значения $\delta E(T, \lambda)$ выделены жирным шрифтом.

4 Данные расчётов $\delta E(T)$ для ряда звёзд

Проиллюстрируем выводы предыдущего пункта на примере ряда реальных звёзд в широком диапазоне температур поверхности. Результаты расчётов для них относительных отклонений блесков приведены в Таблице 4.1.

Очевидно, что эти результаты соответствуют общим тенденциям поведения $\delta E(T)$, а, следовательно, и поведения $\delta\epsilon(T)$ и $\delta L(T)$.

Таблица 4.1 – Значения относительного отклонения блеска $\delta E(T)$ ряда звёзд

Звезда (T) \ $\delta E(T)$	$[\delta E(T)]^{MIR}$	$[\delta E(T)]^{FIR}$
β Ориона C (33000 K)	0,0335	0,0041
β Южного Креста (30000 K)	0,0369	0,0045
Сириус B (25200 K)	0,0441	0,0054
Стика (22000 K)	0,0507	0,0067
Ахернар (15000 K)	0,0755	0,0091
Сириус A (9500 K)	0,1226	0,0143
Альтаир (8700 K)	0,1348	0,0157
τ Кита (5300 K)	0,2334	0,0259
ϵ Эридана (4830 K)	0,2596	0,0285
Вольф 359 (3000 K)	0,4592	0,0464

Заключение

Таким образом, в работе показано, что приближение Рэлея – Джинса:

- некорректно использовать в *NIR* диапазоне для звёзд всех спектральных классов, за исключением, может быть, самых горячих звёзд класса *W*;

- правомерно использовать в *MIR* диапазоне для звёзд с температурой поверхности от 25000 K и выше (с относительным отклонением от 5% и ниже);

- применимо в *FIR* диапазоне для всех звёзд, начиная со спектрального класса *M*;

- некорректно для применения во всей *ИК* области спектра за исключением, как было сказано выше, горячих звёзд класса *W*, например, *WR 102*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кононович, Э.В. Общий курс астрономии / Э.В. Кононович, В.И. Мороз. – Москва: URSS, 2022. – 544 с.
2. Carroll, B.W. An Introduction to Modern Astrophysics / B.W. Carroll, D.A. Ostlie. – San

Francisco: Pearson International Edition, 2007. – 1351 p.

3. Schmidt, W. Numerical Python in Astronomy and Astrophysics / W. Schmidt, M. Völschow. – Cham, Switzerland: Springer, 2021. – 260 p.

4. Near, Mid & Far Infrared [Electronic resource]. – Mode of access: <http://www.ipac.caltech.edu/outreach/Edu/Regions/irregions.html/>. – Date of access: 13.03.2024.

5. Cooling Systems for Far-Infrared Telescopes and Instruments / W.A. Holmes, T. Chui, D. Johnson [et al.] // Astronomy. – 2009. – Vol. 2010. – P. 13–23.

6. Labadie, L. Mid-Infrared Guided Optics: a Perspective for Astronomical Instruments / L. Labadie, O. Wallner // Optics Express. – 2009. – Vol. 17. – P. 1947–1962.

7. Near Infrared Camera [Electronic resource]. – Mode of access: <http://www.stsci.edu/jwst/instruments/nircam/>. – Date of access: 09.04.2024.

8. NASA's Webb Delivers Deepest Infrared Image of Universe Yet [Electronic resource]. – Mode of access: <https://www.nasa.gov/image-article/nasa-webb-delivers-deepest-infrared-image-of-universe-yet/>. – Date of access: 31.03.2024.

9. Microshutters [Electronic resource]. – Mode of access: <https://www.jwst.nasa.gov/content/about/innovations/microshutters.html/>. – Date of access: 01.04.2024.

10. Wolfram, S. Metamathematics: Foundations & Physicalization / S. Wolfram. – New York: Wolfram Media Inc., 2022. – 190 p.

Поступила в редакцию 10.04.2024.

Информация об авторах

Тюменков Геннадий Юрьевич – к.ф.-м.н., доцент
Новикова Ольга Владимировна – магистр ф.-м.н.

УДК 533.9.082

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_43

EDN: TFXMZH

ИЗМЕНЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ, ВОЗБУЖДАЮЩИХ ХОЛОДНУЮ ПЛАЗМУ, ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ОБЪЕКТАМИ

А.Н. Осипов, Е.Н. Каленкович, В.А. Рокач, Т. Ма

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

CHANGING THE PARAMETERS OF SIGNALS EXCITING COLD PLASMA WHEN INTERACTING WITH OBJECTS

A.N. Osipov, Y.N. Kalenkovich, V.A. Rokach, T. Ma

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk

Аннотация. Исследуются вопросы регистрации и обработки сигналов, возбуждающих плазму, а также контроля взаимодействия плазмы с поверхностью объектов на основе анализа ее энергетических характеристик. Предложено осуществлять оценку воздействия / взаимодействия холодной плазмы на / с объектами на основе измерения и анализа динамики изменений энергетических характеристик сигналов, возбуждающих плазму.

Ключевые слова: диагностика холодной низкотемпературной плазмы, сигналы генерации, выделяемая мощность на плазме.

Для цитирования: Изменение параметров сигналов, возбуждающих холодную плазму, при взаимодействии с объектами / А.Н. Осипов, Е.Н. Каленкович, В.А. Рокач, Т. Ма // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (59). – С. 43–47. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_43. – EDN: TFXMZH

Abstract. This article studies the issues of recording and processing of the signals that excite plasma, as well as the control of plasma interaction with the surface of objects on the basis of the analysis of its energy characteristics. The article offers assessment of influence/interaction of cold plasma on / with objects on the basis of the measurement and analysis of dynamics of changes of energy characteristics of the signals that excite plasma.

Keywords: diagnostics of cold low-temperature plasma, lasing signals, released power on plasma.

For citation: *Changing the parameters of signals exciting cold plasma when interacting with objects* / A.N. Osipov, Y.N. Kalenkovich, V.A. Rokach, T. Ma // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 2 (59). – P. 43–47. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_43 (in Russian). – EDN: TFXMZH

Введение

Характер взаимодействия различных физических факторов (электромагнитного излучения, теплового излучения, низкотемпературной атмосферной плазмы и др.) с биологическими объектами определяется как параметрами излучения, так и физическими свойствами среды биологического объекта. При взаимодействии различного рода излучений с биологическими объектами лишь часть энергии поглощается. Это взаимодействие носит биофизический характер, т.е. происходит процесс поглощения энергии на уровне биотканей целого организма. Действие излучений на живые организмы обусловлено, в первую очередь, той частью энергии, которая передается, поступает внутрь объекта и поглощается биологическими тканями. Установление количественной взаимозависимости внешнего излучения и характером поглощения энергии в биологическом объекте играет ключевую роль в оценке и интерпретации наблюдаемых биологических эффектов [1].

Расширяется спектр применений низкотемпературной атмосферной плазмы в здравоохранении. Однако широкое применение технологий низкотемпературной атмосферной плазмы сдерживается отсутствием простых методов контроля ее взаимодействия с объектами, включая биообъекты [2], [3]. В работе [4] предложено оценку взаимодействия холодной плазмы на / с объектами осуществлять на основе измерения и анализа динамики изменений энергетических характеристик сигналов, возбуждающих плазму. В данной статье исследуются вопросы регистрации и обработки сигналов, возбуждающих плазму, оценке взаимодействия плазмы на основе анализа ее энергетических характеристик.

1 Методика проведения эксперимента

Методика оценки взаимодействия плазмы с биообъектом основана на измерении и анализе параметров сигналов, возбуждающих плазму (мгновенных значений напряжения и токов), при воздействии плазмы на биообъект. Плазма является высоковольтной нагрузкой для генератора,

сопротивление которой меняется при взаимодействии с объектами. Для оценки динамики изменения нагрузки в данной статье используется параметр мощности, выделяемой на нагрузку. Соответственно, в качестве характеристики плазмы и ее взаимодействия с объектом может быть использовано изменение мощности (полной, активной и реактивной), выделяемой на ней.

Для изучения взаимодействия с объектами и диагностики состояния плазмы разработан исследовательский стенд контроля мощности, выделяемой в нагрузку генератора.

Структурная схема исследовательского стенда на рисунке 1.1 содержит генератор импульсов, формирователь сигнала, повышающий трансформатор, датчик напряжения, первый и второй датчики тока, разрядный блок с электродами, аналогово-цифровой преобразователь сигналов, система подачи газа, вычислительное устройство. Сигнал с выхода генератора импульсов поступает на формирователь сигнала на основе обратного импульсного преобразователя, который формирует сигнал для зажигания атмосферной плазмы. Далее сигнал поступает через повышающий трансформатор на первый и второй электроды разрядного блока. Значения напряжения сигнала во вторичной обмотке повышающего трансформатора, считанные с датчика напряжения, поступают на аналогово-цифровой преобразователь. Для регистрации амплитуды тока в выходной высоковольтной цепи использовано устройство измерения на основе оптопары

[5]. Преимуществами данного устройства являются высокое быстродействие, линейность ВАХ, электрическая изоляция между высоковольтной частью и измерительной цепью. Сигналы токов, протекающие через первый и второй электроды разрядного блока, считываются с первого и второго датчиков тока поступают на аналогово-цифровой преобразователь и регистрируются вычислительным устройством для дальнейшей обработки результатов. В вычислительном устройстве регистрировались также значения напряжения в выходной цепи. Поступившие в вычислительное устройство электрические зависимости мгновенных значений и токов содержат информации о процессе взаимодействия плазмы с объектом. Анализ взаимодействия плазмы и объекта основан на изменении мгновенной мощности, поступающей в плазму, вычисленной посредством регистрируемых мгновенных значений токов и напряжений.

Традиционно для генерации плазмы используется синусоидальные сигналы. В работе [6] для этих целей предложено использовать сигналы с широтно-импульсной модуляцией (ШИМ). В этом случае на разрядный блок подаются сигналы прямоугольной формы с различной скважностью, при этом во вторичной цепи формируются затухающие сигналы синусоидальной формы. Выбор параметров и частоты сигналов, возбуждающих плазму, с учетом резонансных свойств выходного контура позволяет уменьшить энергопотребление генератора.



Рисунок 1.1 – Структурная схема исследовательского стенда

В связи с этим в данных исследованиях также применены сигналы с ШИМ. На рисунке 1.2, а представлен сигнал с ШИМ на выходе генератора импульсов с коэффициентом заполнения $D = 12,5\%$, которые вызывают затухающие колебания (рисунок 1.2, б) во вторичной цепи (на электродах разрядной системы).

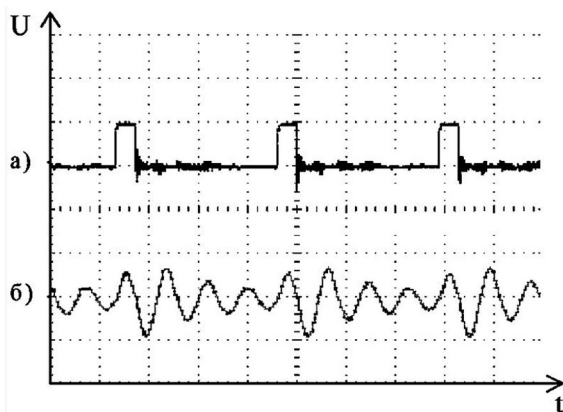


Рисунок 1.2 – Форма задающего сигнала а) в первичной обмотке повышающего трансформатора и форма сигнала, б) на электродах разрядного блока

В проводимых исследованиях частота дискретизации регистрируемых мгновенных значений токов и напряжений составляла $f_d = 5,0225 \text{ МГц}$, а частота задающего сигнала на выходе генератора импульсов – $f_g = 12,25 \text{ кГц}$, коэффициент заполнения $D = 12,5\%$. Максимальная длина обрабатываемых последовательностей – $N = 4000$ отсчетов или $T_0 = N / f_d = 0,79 \text{ мс}$.

2 Обработка результатов исследований

Для обработки результатов измеренных мгновенных значений напряжений и тока в выходной цепи генератора плазмы и оценке ее взаимодействия с объектами разработана программа в среде Matlab. Программа работает следующим образом. Мгновенные значения напряжения $U(n)$ и тока $I(n)$ (рисунок 2.1, а, б)

сохраняются в вычислительном устройстве, где n – номер отсчета, пропорциональный времени t . Амплитудные значения напряжения и тока указаны в относительных единицах.

В исследуемой последовательности укладывается 9 исследуемых (повторяющихся) периодов сигналов. Однако, ввиду нестабильности частоты генератора импульсов, количество полных периодов может в регистрируемой последовательности оказаться меньше на единицу – $M = 8$. Соответственно, частота дискретизации сигналов определяет длительность обрабатываемого сигнала T_0 , а также количество обрабатываемых периодов сигнала возбуждения плазмы

$$M = \lceil N f_g / f_d - 1 \rceil.$$

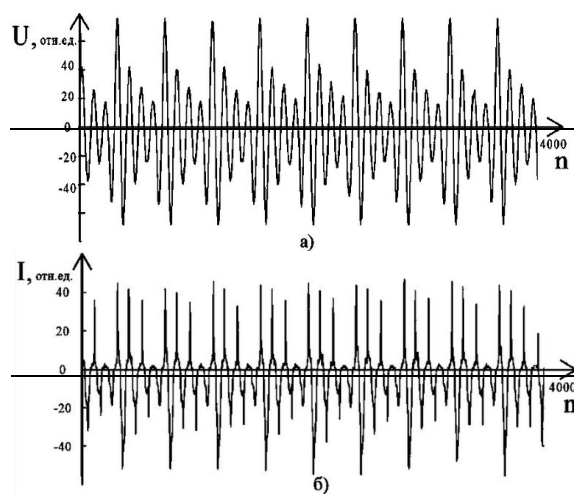


Рисунок 2.1 – Зависимости регистрируемых мгновенных значений напряжения $U(n)$ а) и мгновенных значений тока $I(n)$ б)

Далее производятся вычисления мгновенной электрической мощности в соответствии с известным выражением [7]. График зависимости изменения мгновенной мощности для сигналов, представленных на рисунке 2.1, приведен на рисунке 2.2.

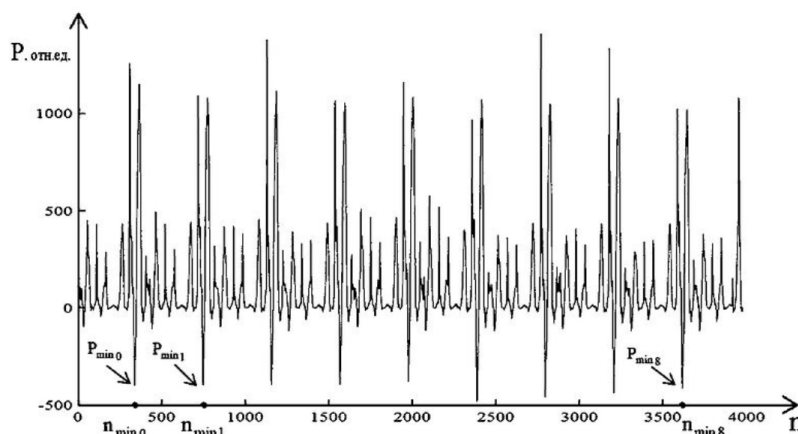


Рисунок 2.2 – Зависимости изменения мгновенной электрической мощности $P(n)$

Как следует из рисунков 2.1 и 2.2, обрабатываемые последовательности содержат 8 полных повторяющихся периодов. Выделение анализируемых периодов исследуемых последовательностей выполняется на основе поиска локальных экстремумов. Для дальнейшей обработки в программе могут быть использованы зависимости мгновенных напряжений $U(n)$, тока $I(n)$, мощностей $P(n)$. Однако более четко отрицательные экстремумы $P_{\min i}$ и соответствующие им отсчеты времени $n_{\min i}$ характерны для зависимости $P(n)$, где $i = 0 \div M$ – порядковый номер локального экстремума, начиная с нулевого. Первый полный период начинается с отсчета времени $n_{\min 0}$ и соответствует локальному отрицательному экстремуму $P_{\min 0}$, а последний заканчивается в момент времени $n_{\min 8}$, определяющий местоположение $P_{\min 8}$.

Алгоритм выделения экстремумов на основе анализа зависимости изменения мгновенной мощности реализован следующим образом.

На отрезке, начиная с нулевого значения от n_0 до $n_0 + \Delta n$, осуществляется поиск минимального значения $P_{\min 0}$ первого локального экстремума и соответствующего ему отсчета времени $n_{\min 0}$. Интервал поиска Δn определяется из выражения:

$$\Delta n = \left(\frac{1}{f_g} + \frac{\Delta f}{f_g^2} \right) f_d, \quad (2.1)$$

где $\frac{\Delta f}{f_g}$ – относительная нестабильность частоты задающего генератора, Δf – величина ухода частоты.

Таким образом определяется значение $n_{\min 0}$, соответствующее экстремуму $P_{\min 0}$. Далее выполняется поиск следующего локального экстремума анализируемой зависимости $P_{\min 1}$, $n_{\min 1}$, соответствующий локальному экстремуму на интервале от $n_{\min 1}$ до $n_{\min 1} + \Delta n$.

Процедура поиска локальных экстремумов $P_{\min i}$ и их местоположения $n_{\min i}$ повторяется на

отрезках времени соответственно от $n_{\min i-1}$ до $n_{\min i-1} + \Delta n$.

Таким образом для дальнейшей обработки формируются интервалы: $n_{\min 0} \div n_{\min 1}$, $n_{\min 1} \div n_{\min 2}$... $n_{\min i-1} \div n_{\min i}$. Для выделенных интервалов рассчитываются энергетические параметры – активная, реактивная и полная электрические мощности:

$$P_i = \frac{1}{n_{\min i} - n_{\min i-1}} \sum_{n_{\min i-1}}^{n_{\min i}} U(n)I(n), \quad (2.2)$$

при $U(n)I(n) \geq 0$,

$$Q_i = \frac{1}{n_{\min i} - n_{\min i-1}} \sum_{n_{\min i-1}}^{n_{\min i}} U(n)I(n), \quad (2.3)$$

при $U(n)I(n) < 0$,

$$S_i = \frac{1}{n_{\min i} - n_{\min i-1}} \sum_{n_{\min i-1}}^{n_{\min i}} \sqrt{P_i^2 + Q_i^2}. \quad (2.4)$$

3 Результаты исследований

В соответствии с полученными значениями строятся зависимости P_i , Q_i , S_i . На рисунке 3.1 приведены зависимости изменения полной мощности, выделяемой на нагрузке при изменении расстояния от факела плазмы до объекта. В качестве объекта использовалась пластина из пластика. На рисунке 3.2 приведены зависимости изменения полной, реактивной и активной мощности при взаимодействии с различными объектами.

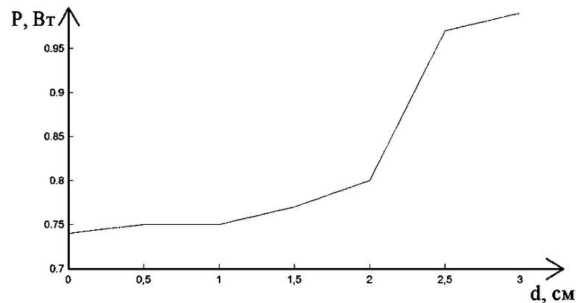


Рисунок 3.1 – Зависимость изменения полной мощности от расстояния до объекта

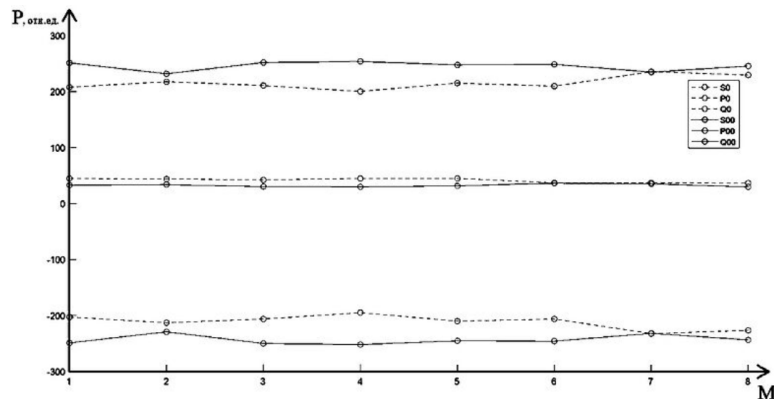


Рисунок 3.2 – Зависимости изменения активной P_0 , реактивной Q_0 , полной S_0 мощности сигналов, генерирующих плазму при её взаимодействии с кюветой физического раствора, P_{00} , Q_{00} , S_{00} – при взаимодействии с кюветой человеческой плазмой

В качестве объектов были использованы кюветы с различным наполнением (физраствором и человеческой плазмой). Как следует из представленных рисунков при взаимодействии плазмы с объектами изменяются энергетические характеристики сигналов, генерирующих плазму. Средние значения активной, реактивной и полной мощности в относительных единицах за рассматриваемый период соответственно составили: при взаимодействии с кюветой с физраствором $S_{00} = 243,87$, $P_{00} = 32,35$, $Q_{00} = -243,477$, при взаимодействии с кюветой с человеческой плазмой – $S_0 = 215,63$, $P_0 = 40,97$, $Q_0 = -211,613$. Таким образом, изменения энергетических параметров характерны при изменении типов объектов (материала, из которого изготовлен объект, формы объекта и т. д.), а также расстояния до объекта.

Заключение и выводы

В данной статье рассмотрены вопросы оценки изменения параметров сигнала в высоковольтной цепи генератора при взаимодействии плазмы с объектами. Для проведения исследования разработан программно-аппаратный комплекс, регистрирующий значения мгновенных токов и напряжений на электродах разрядного блока генератора плазмы. Разработана программа для обработки полученных данных и оценки взаимодействия плазмы с объектами. В результате исследования установлено, что при взаимодействии плазмы с объектами изменяются энергетические характеристики плазмы, а именно полная, активная и реактивная мощности. Установлено, что характеристики активной и реактивной мощности имеют выраженные отличия при изменении расстояния до объекта, а также изменении материала объекта. Данные исследования могут быть использованы для разработки новых методов контроля взаимодействия низкотемпературной атмосферной плазмы с биообъектами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов, А.А. Биофизика ионизирующих и неионизирующих излучений / А.А. Кузнецов // Биофизика ионизирующих и неионизирующих излучений. – 2016. – С. 21.
2. Th. Von Woedtke. Plasmas for medicine / Th. Von Woedtke, H.-R. Metelmann // Contrib. Plasma Phys. – K.D. – UK: Physics Reports 530. – 2013. – P. 291–320.
3. The 2022 Plasma Roadmap: low temperature plasma science and technology / B.P. Abbott, R. Abbott, T.D. Abbott [et. al.] // UK: Journal of Physics D: Applied Physics. – 2013. – P. 2–56.
4. Применение сигналов с ШИМ для генерации низкотемпературной атмосферной плазмы / А.Н. Осипов, Е.Н. Каленкович, В.А. Рокач, Т. Ма // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 32–38.
5. Устройство для измерения тока в высоковольтной цепи: пат. 042096 ЕАПВ / А.Н. Осипов; дата публ.: 13.01.2023.
6. Осипов, А.Н. Энергоэффективное устройство генерации низкотемпературной плазмы диэлектрического барьерного разряда при атмосферном давлении / А.Н. Осипов, Е.Н. Каленкович, В.А. Рокач // Научно-практический журнал: Новости науки и технологий. – 2022. – № 2 (61). – С. 27–32.
7. Электротехника и электроника / Ю.В. Бладыко [и др.] // Электротехника и электроника. – 2009. – С. 7.

Поступила в редакцию 12.04.2024.

Информация об авторах

Осипов Анатолий Николаевич – к.т.н., доцент
Каленкович Евгений Николаевич – ст. преподаватель
Рокач Валерий Александрович – аспирант
Ма Тяньбао – аспирант

ВЛИЯНИЕ ТЕРМООБРАБОТКИ НА СТРУКТУРУ И МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА УГЛЕРОДНЫХ ПОКРЫТИЙ, ЛЕГИРОВАННЫХ ЦИРКОНИЕМ И КРЕМНИЕМ

А.С. Руденков, Д.Г. Пилипцов

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

INFLUENCE OF HEAT TREATMENT ON THE STRUCTURE AND MECHANICAL PROPERTIES OF CARBON COATINGS DOPED WITH ZIRCONIUM AND SILICON

A.S. Rudenkov, D.G. Pilipsou

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Определено влияние режимов термообработки на химический состав, морфологические параметры, механические свойства углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием. Осаждение покрытий осуществлялось из плазменного потока сложного состава, генерируемого импульсным электродуговым и электронно-спарковым испарением. Установлено, что термообработка приводит к графитизации покрытий, образованию упорядоченных sp^2 -кластеров и, как следствие, увеличению модуля упругости, уменьшению значений нанотвердости с последующей их стабилизацией при термообработке свыше 350°C .

Ключевые слова: углеродные покрытия, кремний, цирконий, карбид, кластер, химический состав, морфология, фазовый состав, нанотвердость, модуль упругости.

Для цитирования: Руденков, А.С. Влияние термообработки на структуру и механические свойства углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием / А.С. Руденков, Д.Г. Пилипцов // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (59). – С. 48–56. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_48. – EDN: OBHLQQ

Abstract. The influence of heat treatment modes on the chemical composition, morphological features, and mechanical properties of carbon coatings alloyed with zirconium and silicon was determined. The deposition of coatings was carried out from a plasma flow of complex composition generated by pulsed electric arc and electric spark evaporation. It has been established that heat treatment leads to graphitization of coatings, the formation of ordered sp^2 -clusters and, as a consequence, an increase in the elastic modulus, a decrease in nanohardness values with their subsequent stabilization during heat treatment above 350°C .

Keywords: carbon coatings, silicon, zirconium, carbide, cluster, chemical composition, morphology, phase composition, nanohardness, elastic modulus.

For citation: Rudenkov, A.S. Influence of heat treatment on the structure and mechanical properties of carbon coatings doped with zirconium and silicon / A.S. Rudenkov, D.G. Pilipsou // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 2 (59). – P. 48–56. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_48 (in Russian). – EDN: OBHLQQ

Введение

Превосходные физико-механические свойства (высокая микротвердость, низкий коэффициент трения, высокая проводимость, оптическая прозрачность и др.) углеродных покрытий обусловлены их уникальной структурой, представляющей собой аморфную матрицу, содержащую sp^2 - и sp^3 -гибридизированные атомы углерода [1], [2]. Согласно [3], [4] значения внутренних напряжений и микротвердости прямо пропорционально зависят от содержания sp^3 -гибридизированных атомов. В свою очередь величина соотношения sp^3 / sp^2 обусловлена составом покрытия, выбором методов, условий и режимов его осаждения [1], [5].

Одним из существенных недостатков углеродных покрытий является низкая термостойкость: при температуре выше 400°C наблюдается

уменьшение содержания sp^3 -гибридизированных атомов вследствие графитизации и, как следствие этого, ухудшение механических характеристик [6], [7]. Необходимо отметить, что покрытия, сформированные методом катодно-дугового осаждения и содержащие свыше 85 ат. % sp^3 -гибридизированных атомов, характеризуются высокой термостойкостью (600 – 700°C), но при этом обладают высоким уровнем внутренних напряжений, вызывающих разрушение покрытия при эксплуатации [8]. Вместе с тем существуют экспериментальные данные [2], свидетельствующие о том, что покрытия, характеризующиеся низким содержанием sp^3 -гибридизированных атомов (10–12 ат. %), но обладающие высокой плотностью, также могут иметь высокую термостойкость (свыше 500°C) и достаточно высокие значения микротвердости.

Легирование углеродных покрытий является наиболее эффективным способом снижения уровня внутренних напряжений, степени графитизации и окисления углеродных покрытий при термообработке на воздухе [1], [9], [10]. Показано, что введение в состав углеродных покрытий кремния способствует увеличению соотношения sp^3/sp^2 (за счет замещения sp^2 -атомов), уменьшению размеров sp^2 -кластеров, стабилизации sp^3 -гибридизированных атомов и ингибированию графитизации покрытий при термообработке [9], [11], [12]. При этом данный тип покрытий после термообработки свыше 450°C характеризуется высокими значениями коэффициента трения вследствие образования оксида кремния [11], [12]. Такие изменения фазового состава, повышение механических свойств могут быть достигнуты и при легировании кремний-углеродных покрытий металлами.

Целью настоящей работы является определение влияния термообработки на морфологические особенности, фазовый состав и механические свойства композиционных углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием.

1 Методика эксперимента

Экспериментальные образцы композиционных углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием толщиной 385–400 нм, были сформированы в течение 7500 импульсов на кремниевых подложках путем одновременного распыления составного графитового катода с кремниевыми вставками (напряжение разряда 350 В) с помощью импульсного катодно-дугового источника и электродугового испарения циркония (ток дуги 80 А). Частота следования импульсов источника углеродной плазмы равнялась 10 Гц. Термообработка осуществлялась на воздухе в течение 1 часа при температурах 150°C , 250°C , 350°C , 400°C , 450°C и 500°C .

Изображения топографии композиционных углеродных покрытий были получены при помощи атомно-силового микроскопа Solver Pro (NT-MDT, Россия) в полуконтактном режиме (площадь сканирования – 1×1 , 4×4 мкм). Статистическая обработка результатов атомно-силовой микроскопии осуществлялась средствами программного комплекса Gwyddion.

Определение химического состава и структуры химических связей композиционных углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием, было проведено методами рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии (РФЭС) с использованием рентгено-электронного спектрометра PHI Quantera (Япония) при возбуждении вещества $K\alpha$ -излучением алюминия (энергия кванта – 1486,6 эВ, мощность – 250 Вт).

Изучение фазового состава проводилось методами спектроскопии комбинационного рассеяния с использованием спектрометра Senterra (Bruker, Германия) с длиной волны возбуждающего излучения 532 нм, мощностью 5 мВт.

Значения нанотвердости H и модуля упругости E были получены средствами нанотвердомера НаноСкан 4D (ТИСНУМ, Россия) с алмазным индентором Берковича.

2 Результаты и их обсуждение

Показано, что в процессе термообработки композиционных углеродных покрытий изменяется их химический состав. С увеличением температуры отжига концентрация кислорода увеличивается, а углерода уменьшается (таблица 2.1), что объясняется сорбцией кислорода цирконием и кремнием, образованием оксидов и сгоранием углерода. Необходимо отметить, что процессы окисления начинают более интенсивно протекать при температуре свыше 250°C .

Средствами АСМ показано, что термообработка углеродных покрытий, легированных цирконием и хромом, неоднозначно влияет на их морфологию (рисунок 2.1).

В результате анализа АСМ изображений (таблица 2.2), полученных при сканировании на площади 4×4 мкм, установлено, что термообработка способствует снижению значений средней высоты отдельных структурных образований (зерен), увеличению их количества (при температурах до 450°C) и снижению субшероховатости поверхности (при температурах до 350°C включительно). При увеличении температуры термообработки до 450°C фиксируется увеличение субшероховатости, средней высоты и диаметра зерен, уменьшение их плотности на площади сканирования.

Таблица 2.1 – Влияние термообработки на химический состав углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием

Покрытие	Термообработка, $^\circ\text{C}$	Концентрация элементов в покрытии, ат. %			
		C	Zr	O	Si
C + Zr + Si	–	82,1	7,6	8,5	1,8
	150	80,4		10,2	
	250	79,6		11,0	
	350	71,8		18,8	
	400	69,7		20,9	
	450	58,5		32,1	
	500	56,5		34,1	

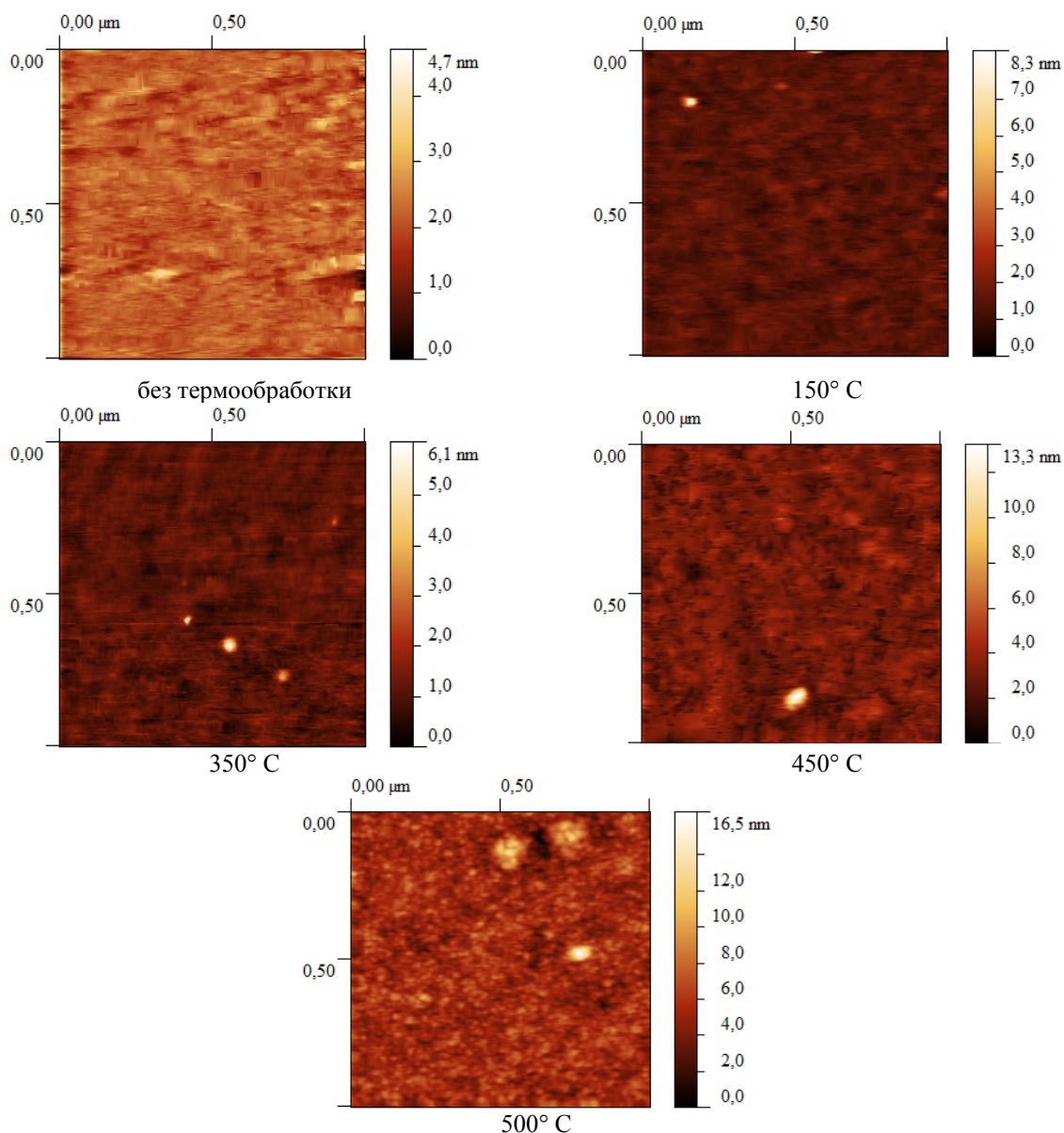


Рисунок 2.1 – Влияние термообработки на морфологию поверхности (1×1 мкм) углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием

Таблица 2.2 – Влияние термообработки на морфологию углеродных покрытий, легированных цирконием и хромом (площадь 4×4 мкм)

Покрытие	Термообработка, °C	Средняя высота, нм	Rms, нм	Плотность зерен, шт. 4×4 мкм	Средний диаметр зерен, нм
C+Zr+Si	-	21,8	3,6	16	106
	150	7,9	2,2	40	50
	250	11,9	2,1	42	67
	350	13,6	3,8	46	55
	400	13,0	3,6	46	70
	450	24,9	5,0	51	60
	500	48,9	6,7	15	172

Данный факт, по всей видимости, обусловлен более интенсивным протеканием процессов графитизации [1], [9] покрытий с последующим выгоранием углерода и проявлением кластеров

преимущественно (вследствие более высокой концентрации по сравнению с кремнием) на основе циркония и его соединений.

Анализ АСМ изображений (рисунок 2.2, таблица 2.3), полученных при сканировании на площади 1×1 мкм, подтверждает вывод об увеличении субшероховатости при температурах 450°C и 500°C , сделанный при анализе изображений с площадью сканирования 4×4 мкм. Однако, плотность зерен существенным образом снижается после термообработки от 250°C и выше и возрастает только при нагреве до температуры 500°C .

Возникшее расхождение обусловлено наличием капельной фазы, генерируемой при электродуговом испарении циркония, и более существенно влияющей на анализ результатов АСМ при сканировании на площади 4×4 мкм. Сканирование на площади 1×1 мкм осуществлялось между крупными включениями и позволяет более точно охарактеризовать морфологические изменения непосредственно углеродной матрицы, происходящие в процессе термообработки.

Таким образом, по всей видимости, изменения морфологии в ходе термообработки, обусловлены процессами графитизации, последующим слиянием кластеров графита при температурах в диапазоне от 250°C до 450°C , увеличением степени дисперсности углеродной матрицы

вследствие термообработки при температуре 500°C и образования нанокристаллического графита, проявлением кластеров на основе циркония и его соединений.

Методом РФЭС установлены особенности процессов химического взаимодействия в композиционных покрытиях при их термообработке. $\text{C}1\text{s}$ пик РФЭ спектра легированных кремнием и цирконием углеродных покрытий, расположенный в диапазоне $280\div 290$ эВ, можно разложить при помощи функции Лоренца – Гаусса на следующие компоненты (рисунок 2.3): пик с энергией связи $\sim 283,3$ соответствует соединениям $\text{C} - \text{Zr}$, пик с энергией связи $\sim 284,4$ эВ обусловлен Csp^2 , пик с энергией связи $\sim 285,2$ эВ – Csp^3 и пик около $\sim 286,0$ эВ соотносится с $\text{C} - \text{O}$ [13]–[15].

$\text{Zr}3\text{d}$ пик РФЭ спектра имеет два максимума, соответствующих спин-орбитальным компонентам 3d -уровней – $3\text{d}^{5/2}$ и $3\text{d}^{3/2}$, и расположен в области энергий $181\text{--}185$ эВ [14], [16]. Пик $\text{Zr}3\text{d}$ можно разложить на 4 компоненты: два пика около ~ 180 эВ и ~ 182 эВ соотносятся с $\text{Zr} - \text{C}$ [14], а две компоненты вблизи ~ 183 эВ и ~ 185 эВ соответствуют $\text{Zr} - \text{O}$ [14], [16].

Высокий уровень шумов не позволил достоверно провести анализ $\text{Si}2\text{p}$ пика.

Таблица 2.3 – Влияние термообработки на морфологию углеродных покрытий, легированных цирконием и хромом (площадь 1×1 мкм)

Покрытие	Термообработка, $^\circ\text{C}$	Средняя высота, нм	Rms, нм	Плотность зерен, шт. 1×1 мкм	Средний диаметр зерен, нм
C + Zr + Si	–	2,17	0,30	107	11,3
	150	1,2	0,32	142	9,3
	250	5,86	0,94	16	24,5
	350	1,13	0,28	88	8,3
	400	1,99	0,29	38	13
	450	3,16	0,78	72	10,3
	500	5,54	1,23	181	12,6

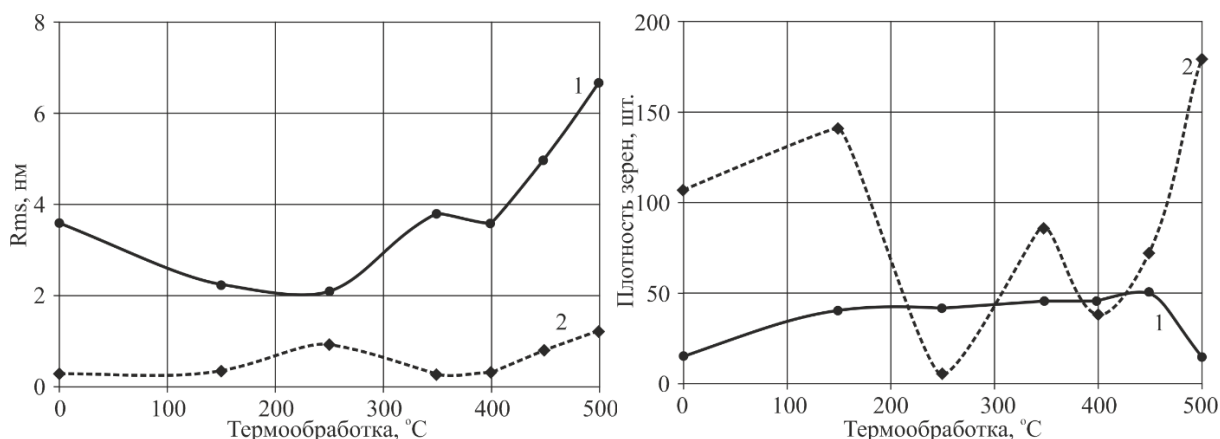


Рисунок 2.2 – Влияние термообработки на морфологию поверхности углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием при различной площади сканирования:

1 – 4×4 мкм; 2 – 1×1 мкм

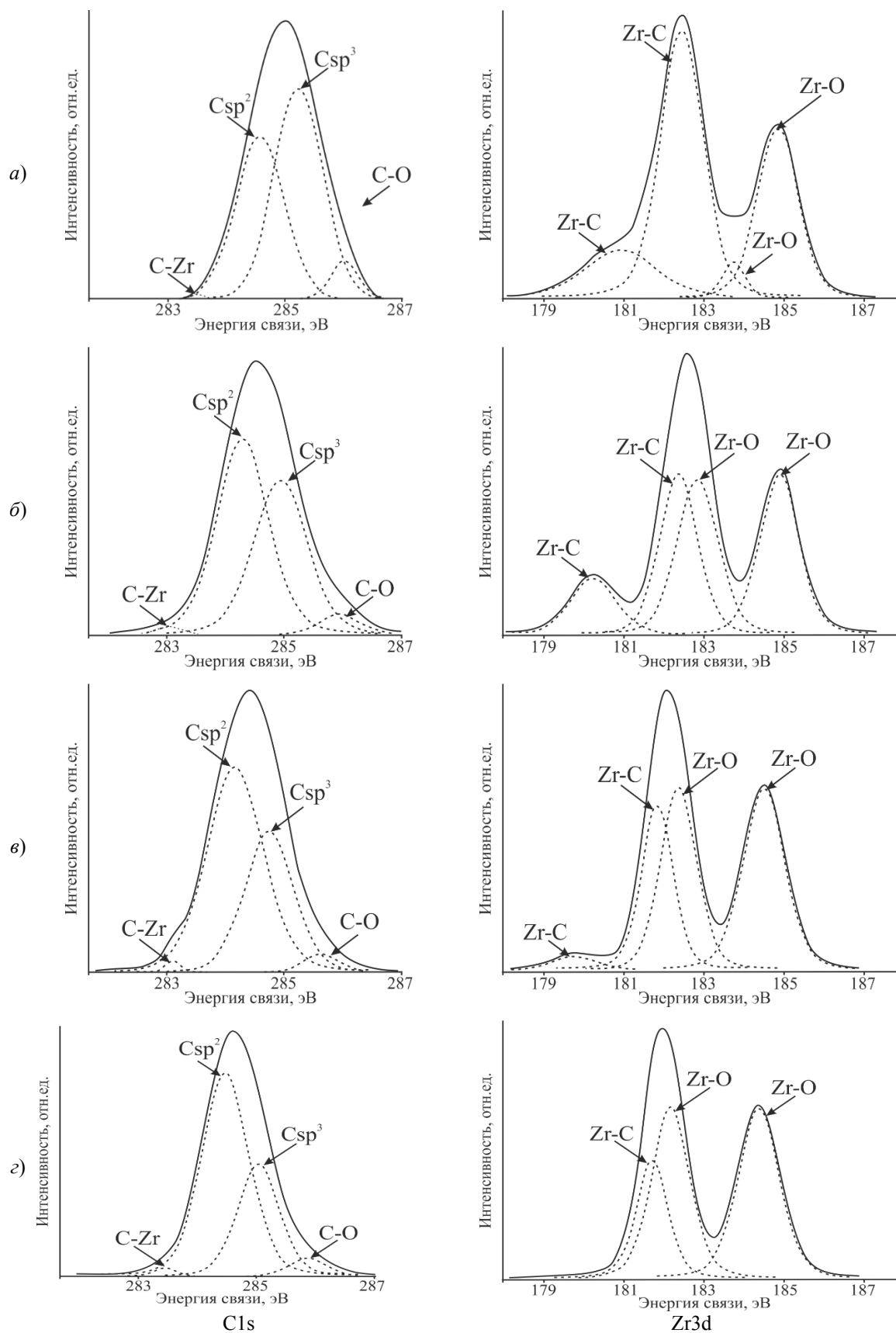


Рисунок 2.3 – C1s и Zr3d пики РФЭС углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием:
а) без термообработки; б) 250° C; в) 400° C; г) 500° C

В результате анализа РФЭ спектров (таблица 2.4) установлено, что увеличение температуры термообработки приводит к возрастанию доли Csp^2 компоненты и уменьшению Csp^3 доли, а значит к уменьшению соотношения sp^3/sp^2 -гибридизированных атомов углерода. Данный факт обусловлен протеканием при термообработке процессов фазовых превращений $sp^3 \rightarrow sp^2$. Необходимо отметить, что увеличение содержания sp^2 -связей в зависимости от температуры термообработки происходит неравномерно в процессе нагрева (рисунок 2.4): при термообработке при температуре $150^\circ C$ доля площади

соответствующего sp^2 -связям пика увеличивается на 11 %, далее в диапазоне температур от $150^\circ C$ – $350^\circ C$ увеличивается менее чем на 2%, затем при термообработке при $400^\circ C$ происходит увеличение доли на 7%, далее при температурах $450^\circ C$ и $500^\circ C$ снова небольшие колебания (до 2%) доли площади Csp^2 -пика около значений 60%. Незначительные колебания значений содержания C – O связей могут быть обусловлены процессами окисления углерода с последующим выгоранием и образованием пор в структуре покрытия.

Таблица 2.4 – Влияние термообработки на фазовый состав углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием

Термо- обработка, $^\circ C$	Пики РФЭ спектра	Тип связи	Пик, эВ $\pm 0,3$ эВ	Ширина, эВ	Доля площади, %	$Csp^3 /$ Csp^2	C – Zr / $Csp^3 +$ Csp^2	Zr – C / Zr – O
–	C1s	C – Zr	283,5	0,3	0,3	1,30	<0,01	1,89
		Csp^2	284,6	1,0	41,1			
		Csp^3	285,2	1,0	53,3			
		C – O	286,0	0,5	5,3			
	Zr3d	*Zr – $C^{5/2}$	180,9	2,1	14,9			
		*Zr – $C^{3/2}$	182,4	1,3	50,6			
		*Zr – $O^{5/2}$	183,7	0,7	3,5			
		*Zr – $O^{3/2}$	184,8	1,2	31,0			
$150^\circ C$	C1s	C – Zr	283,2	0,4	1,0	0,83	0,01	0,75
		Csp^2	284,3	1,1	52,2			
		Csp^3	284,9	1,0	43,2			
		C – O	285,9	0,7	3,6			
	Zr3d	*Zr – $C^{5/2}$	180,2	1,5	14,2			
		*Zr – $C^{3/2}$	182,3	1,3	28,7			
		*Zr – $O^{5/2}$	182,9	1,2	29,9			
		*Zr – $O^{3/2}$	185,0	1,3	27,2			
$250^\circ C$	C1s	C – Zr	283,1	0,5	1,0	0,81	0,01	0,68
		Csp^2	284,3	1,1	52,5			
		Csp^3	284,9	1,1	42,3			
		C – O	285,9	0,8	4,2			
	Zr3d	*Zr – $C^{5/2}$	180,2	1,4	12,0			
		*Zr – $C^{3/2}$	182,4	1,1	28,4			
		*Zr – $O^{5/2}$	182,8	1,2	29,8			
		*Zr – $O^{3/2}$	184,9	1,2	29,8			
$350^\circ C$	C1s	C – Zr	283,3	0,4	1,4	0,73	0,01	0,54
		Csp^2	284,2	1,2	54,1			
		Csp^3	284,9	1,0	39,6			
		C – O	285,8	0,9	5,0			
	Zr3d	*Zr – $C^{5/2}$	179,9	1,1	5,5			
		*Zr – $C^{3/2}$	182,1	1,0	29,6			
		*Zr – $O^{5/2}$	182,6	1,1	31,2			
		*Zr – $O^{3/2}$	184,7	1,1	33,8			
$400^\circ C$	C1s	C – Zr	283,1	0,3	1,0	0,60	0,01	0,41
		Csp^2	284,2	1,1	59,3			
		Csp^3	284,7	1,0	35,7			
		C – O	285,6	0,7	3,9			
	Zr3d	*Zr – $C^{5/2}$	179,8	1,2	2,7			
		*Zr – $C^{3/2}$	181,8	0,9	26,4			
		*Zr – $O^{5/2}$	182,4	1,0	32,6			
		*Zr – $O^{3/2}$	184,5	1,2	38,3			

Термо- обработка, °C	Пики РФЭ спектра	Тип связи	Пик, эВ ± 0,3 эВ	Ширина, эВ	Доля площади, %	Csp^3 / Csp^2	$C - Zr / Csp^3 + Csp^2$	$Zr - C / Zr - O$
450° C	C1s	C – Zr	283,4	0,3	1,1	0,54	0,01	0,34
		Csp ²	284,5	1,0	60,9			
		Csp ³	285,0	1,1	32,6			
		C – O	286,1	0,9	5,4			
	Zr3d	*Zr – C ^{5/2}	180,8	0,5	0,6			
		*Zr – C ^{3/2}	181,7	1,0	24,6			
		*Zr – O ^{5/2}	182,2	1,1	34,1			
		*Zr – O ^{3/2}	184,3	1,3	40,7			
500° C	C1s	C – Zr	283,4	0,5	1,4	0,49	0,01	0,28
		Csp ²	284,5	0,9	62,9			
		Csp ³	285,0	0,8	31,1			
		C-O	285,9	0,7	4,5			
	Zr3d	*Zr – C ^{5/2}	–	–	–			
		*Zr – C ^{3/2}	181,7	0,9	21,8			
		*Zr – O ^{5/2}	182,2	1,1	38,0			
		*Zr – O ^{3/2}	184,4	1,2	40,2			

* – спин-дублет Zr 3d^{5/2}, 3d^{3/2}

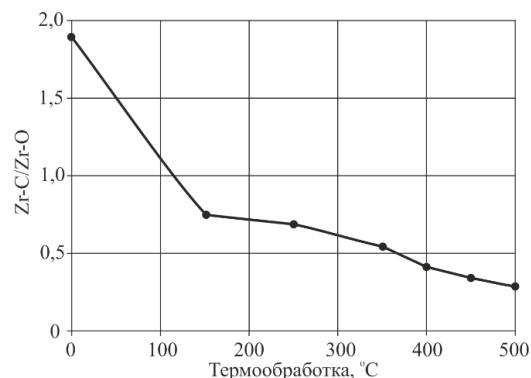
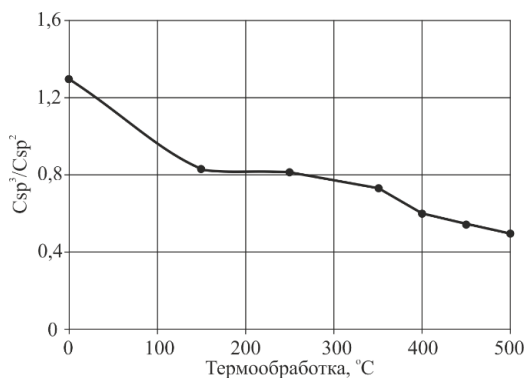


Рисунок 2.4 – Влияние термообработки на соотношение Csp^3 / Csp^2 и $Zr - C / Zr - O$

Из анализа Zr3d пика следует, что с увеличением температуры термообработки в результате процессов окисления несвязанных атомов циркония и разрушения карбидов, происходит увеличение доли площади компонент, соответствующих $Zr - O^{5/2}$ и $Zr - O^{3/2}$ связям и, как следствие, уменьшение соотношения $Zr - C / Zr - O$ (рисунок 2.4).

При этом необходимо отметить, что уменьшение содержания карбида циркония происходит за счет разрушения более слабых $Zr - C^{5/2}$, по сравнению с $Zr - C^{3/2}$, связей. После термообработки при температуре 500° C пик, соответствующий $Zr - C^{5/2}$, не наблюдается, а доля $Zr - C^{3/2}$ уменьшается в 2,3 раза.

Некоторое смещение составляющих Zr3d пиков обусловлено изменением относительного содержания углерода в покрытии вследствие окисления и последующего выгорания, а также образованием аллотропных модификаций оксида циркония [14].

Анализ спектров комбинационного рассеяния (таблица 2.5) подтверждает данные РФЭС,

свидетельствующие об увеличении содержания sp^2 -гибридизированных атомов углерода.

Пик спектров комбинационного рассеяния, соответствующий углероду, локализован в области 1000–1800 cm^{-1} [3]. Согласно общепринятой методике [11], [17] вышеуказанный пик был разложен при помощи функции Гаусса на два: D-пик около 1380 cm^{-1} соответствует матрице на основе sp^2 -гибридизированных атомов углерода и содержащей sp^3 -гибридизированные атомы [17]; G-пик, локализованный вблизи 1550 cm^{-1} , соответствует sp^2 -гибридизированным атомам углерода [11].

С увеличением температуры термообработки положение G-пика монотонно смещается в область более высоких волновых чисел (от 1534 cm^{-1} к 1578 cm^{-1}), что находится в соответствии с [2] и согласно [6] может быть обусловлено уменьшением содержания sp^3 -гибридизированных атомов углерода, увеличением степени топологической упорядоченности sp^2 -кластеров и образованием нанокристаллического графита [2].

Таблица 2.5 – Параметры КР спектров углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием

Термообработка, °C	D-пик		G-пик		I_D / I_G
	Положение, см^{-1}	Ширина, см^{-1}	Положение, см^{-1}	Ширина, см^{-1}	
–	1383	259	1534	203	0,67
150° C	1380	245	1535	214	0,86
250° C	1381	256	1543	183	0,95
350° C	1397	288	1554	229	0,97
400° C	1393	240	1559	201	1,03
450° C	1394	235	1575	124	1,38
500° C	1399	169	1578	70	1,85

Интенсивность D-пика с увеличением температуры термообработки также возрастает, что приводит к увеличению I_D / I_G – соотношения интенсивностей D- и G-пиков (рисунок 2.6) и объясняется фазовыми превращениями $\text{sp}^3 \rightarrow \text{sp}^2$.

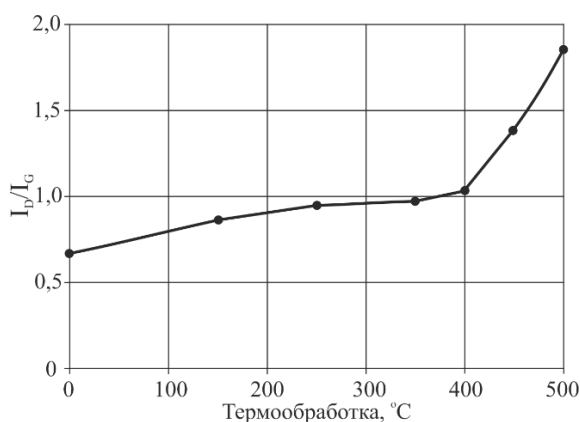


Рисунок 2.6 – Влияние термообработки на соотношение интенсивностей D- и G-пиков I_D / I_G спектров комбинационного рассеяния

Авторы [18] связывают увеличение I_D / I_G в процессе термообработки с образованием бездефектных кластеров нанокристаллического графита. Смещение D-пика в область более высоких волновых чисел может быть вызвано изменением концентрации химических соединений углерода и циркония [16].

Таким образом, результаты КР-спектроскопии также подтверждают, что возрастание температуры термообработки приводит к фазовым переходам $\text{sp}^3 \rightarrow \text{sp}^2$, увеличению степени упорядоченности sp^2 -кластеров с последующим образованием нанокристаллического графита.

Установлено, что с увеличением температуры термообработки углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием, до 350° C их нанотвердость H уменьшается (таблица 2.6) вследствие уменьшения содержания sp^3 -гибридизированных атомов углерода и карбида циркония. При этом, при дальнейшем увеличении температуры до 500° C наблюдается стабилизация значений нанотвердости около 12,6–12,9 ГПа.

Значение модуля упругости уменьшается до 147,1 ГПа при увеличении температуры термообработки до 400° C, что свидетельствует о

повышении пластичности покрытий вследствие их графитизации. Однако, при увеличении температуры до 500° C наблюдается возрастание модуля упругости до 181,5 ГПа, что выше, чем у покрытий без термообработки и обусловлено увеличением жесткости покрытий.

Таблица 2.6 – Механические характеристики кремний-углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием

Термообработка, °C	H , ГПа	E , ГПа	H / E
–	14,5	174,1	0,083
150° C	14,2	171,1	0,083
250° C	13,6	163,3	0,083
350° C	12,9	152,9	0,085
400° C	12,8	147,1	0,087
450° C	12,6	156,8	0,080
500° C	12,7	181,5	0,070

Полученные результаты согласуются с результатами работ [2], [3] и обусловлены фазовым переходом $\text{sp}^3 \rightarrow \text{sp}^2$ с последующим образованием упорядоченных sp^2 -кластеров и формированием нанокристаллического графита, что приводит к уменьшению пластичности покрытия и способствует стабилизации значений микротвердости. Кроме того, причиной такого изменения механических характеристик вследствие термообработки может быть уменьшение содержания карбида циркония с одновременным снижением количества дефектов и увеличением плотности покрытия [2].

Выводы

Показано, что термообработка углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием, неоднозначно влияет на их морфологические особенности из-за процессов графитизации с последующим выгоранием углерода и проявлением на поверхности кластеров на основе циркония и его соединений.

Согласно данным РФЭС и КР-спектроскопии термообработка углеродных покрытий, легированных цирконием и кремнием, приводит к уменьшению содержания карбида циркония и увеличению содержания его оксидов, протеканию фазовых переходов $\text{sp}^3 \rightarrow \text{sp}^2$, графитизации покрытия с образованием упорядоченных

sp^2 -кластеров и, вероятно, нанокристаллического графита. Установленные изменения структуры вследствие термообработки при температуре до $350\div 400^\circ\text{C}$ вызывают снижение нанотвердости покрытий и уменьшение модуля упругости, увеличение модуля упругости до 181,5 ГПа при сохранении значения нанотвердости около $12,6\div 12,9$ ГПа в результате увеличения степени упорядоченности sp^2 -кластеров и формирования нанокристаллического графита при увеличении температуры до 500°C .

ЛИТЕРАТУРА

1. Композиционные углеродные покрытия, осажденные из импульсной катодной плазмы / Д.Г. Пилипцов, А.С. Руденков, П.А. Лучников, А.В. Рогачев, Цзян Сяо Хун, Чжоу Бин. – 2020. – Москва: Радиотехника. – 283 с.
2. *Thermal stability of microhardness and internal stress of hard a-C films with predominantly sp^2 bonds* / V. Kulikovskiy [et al.] // *Diamond and Related Materials*. – 2003. – Vol. 12. – P. 1378–1384.
3. *Robertson, J.* Diamond-like amorphous carbon / J. Robertson // *Materials Science and Engineering: R: Reports*. – 2002. – Vol. 37. – P. 129–281.
4. *Interfaces and temperature stability of step-wise graded DLC films studied by nanoindentation and Raman spectroscopy* / C. Ziebert [et al.] // *Surface and Coatings Technology*. – 2005. – Vol. 200. – P. 1127–1131.
5. *Comparative study of anneal-induced modifications of amorphous carbon films deposited by dc magnetron sputtering at different argon plasma pressures* / L.G. Jacobsohn [et al.] // *Diamond and Related Materials*. – 2000. – Vol. 9. – P. 680–684.
6. *Thermal stability and relaxation in diamond-like-carbon. A Raman study of films with different sp^3 fractions (ta-C to a-C)* / R. Kalish, Y. Lifshitz, K. Nugent, S. Prawer // *Applied Physics Letters*. – 1999. – Vol. 74. – P. 2936–2939.
7. *Effects of annealing temperature on the mechanical, optical, and electrical properties of hydrogenated, nitrogen-doped diamond-like carbon films* / H. Osanai [et al.] // *Thin Solid Films*. – 2022. – Vol. 745. – Article 139100.
8. *Thermal stability of amorphous hard carbon films produced by cathodic arc deposition* / S. Anders [et al.] // *Applied Physics Letters*. – 1997. – Vol. 71. – P. 3367–3369.
9. Влияние режимов формирования и условий термообработки на фазовый состав и структуру кремний-углеродных покрытий, осаждаемых ионно-лучевым распылением / А.С. Руденков, А.В. Рогачев, А.Н. Купо, С.М. Завадский, Д.А. Голосов, П.А. Лучников // «Нanomатериалы и наноструктуры – XXI век». – 2019. – Т. 10, № 2. – С. 29–36.
10. Пилипцов, Д.Г. Влияние термообработки на механические свойства слоистых углеродных

покрытий / Д.Г. Пилипцов // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2021. – № 3 (48). – С. 29–37.

11. *High temperature tribology behavior of silicon and nitrogen doped hydrogenated diamond-like carbon (DLC) coatings* / Xinyu Wang [et al.] // *Tribology International*. – 2022. – Vol. 175. – Article 107845.

12. *Microstructure and high-temperature tribological properties of Si-doped hydrogenated diamond-like carbon films* / T.F. Zhang [et al.] // *Applied Surface Science*. – 2018. – Vol. 435. – P. 963–973.

13. *Long-term stability of hydrogenated DLC coatings: Effects of aging on the structural, chemical and mechanical properties* / M. Cloutier [et al.] // *Diamond and Related Materials*. – 2014. – Vol. 48. – P. 65–72.

14. *Evolution of Phase Composition and Antibacterial Activity of Zr – C Thin Films* / K. Mydlowska [et al.] // *Processes*. – 2020. – Vol. 8. – Article 260.

15. Paik, N. Raman and XPS studies of DLC films prepared by a magnetron sputter-type negative ion source / N. Paik // *Surface & Coatings Technology*. – 2005. – Vol. 200. – P. 2170–2174.

16. *Using photoelectron spectroscopy to observe oxygen spillover to zirconia* / P. Lackner, Z. Zou, S. Mayr, U. Diebold, M. Schmid // *Physical Chemistry Chemical Physics*. – 2019. – Vol. 32. – P. 17613–17620.

17. *Chu, P.K.* Characterization of amorphous and nanocrystalline carbon films / P.K. Chu, L. Li // *Materials Chemistry and Physics*. – 2006. – Vol. 96. – P. 253–277.

18. *Effects of substrate temperature on chemical structure of amorphous carbon films* / N.H. Cho [et al.] // *Journal of Applied Physics*. – 1992. – Vol. 71. – P. 2243–2248.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках НИР «Разработка реакционных ионно-плазменных методов формирования и параметризация покрытий на основе силицированного углерода и карбидообразующих металлов с высокими механическими свойствами и повышенной термостойкостью», комплексное задание 3.1.02 «Разработка устройств и процессов комбинированного электронно-ионного нанесения слоев и модифицирования поверхности для формирования функциональных покрытий» ГПНИ «Материаловедение, новые материалы и технологии», подпрограмма «Электромагнитные, пучково-плазменные и литейно-деформационные технологии обработки и создания материалов».

Поступила в редакцию 27.03.2024.

Информация об авторах

Руденков Александр Сергеевич – к.ф.-м.н., доцент
Пилипцов Дмитрий Геннадьевич – к.т.н., доцент

КИНЕТИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ОСАЖДЕНИЯ И МОЛЕКУЛЯРНАЯ СТРУКТУРА ПОКРЫТИЙ ПОЛИОКСИМЕТИЛЕНА, СФОРМИРОВАННЫХ ИЗ АКТИВНОЙ ГАЗОВОЙ ФАЗЫ

М.А. Ярмоленко¹, Д.Л. Горбачёв¹, А.В. Рогачев¹, Джанг Сянь Хун², С.А. Фролов¹

¹Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

²Нанкинский университет науки и технологии

KINETIC REGULARITIES OF DEPOSITION AND MOLECULAR STRUCTURE OF POLYOXYMETHYLENE COATINGS FORMED FROM THE ACTIVE GAS PHASE

M.A. Yarmolenko¹, D.L. Gorbachev¹, A.V. Rogachev¹, Jiang Xiao Hong², S.A. Frolov¹

¹Francisk Skorina Gomel State University

²Nanjing University of Science and Technology

Аннотация. Установлены кинетические закономерности электронно-лучевого диспергирования полиоксиметилена (ПОМ) и исследована молекулярная структура покрытий, сформированных летучими продуктами разрушения полимера. Определено влияние на скорость роста покрытия, давление в вакуумной камере и молекулярную структуру осаждаемых слоев лазерного ассистирующего воздействия, введение в мишень частиц меди. Показано, что реакционная активность продуктов диспергирования ПОМ может быть значительно повышена путем совместного диспергирования ПОМ и полиэтилена (ПЭ). Осаждение композиционных покрытий протекает с более высокой скоростью. Для компонента ПОМ композиционного покрытия доля складчатых структур в объеме тонкого слоя заметно превышает значение, характерное для однокомпонентного слоя на основе ПОМ.

Ключевые слова: электронно-лучевое диспергирование, лазерное ассистирование, покрытие, полиоксиметилен, молекулярная структура.

Для цитирования: Кинетические закономерности осаждения и молекулярная структура покрытий полиоксиметилена, сформированных из активной газовой фазы / М.А. Ярмоленко, Д.Л. Горбачёв, А.В. Рогачев, Джанг Сянь Хун, С.А. Фролов // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (59). – С. 57–63. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_57. – EDN: PEFHRO

Abstract. The kinetic regularities of electron beam dispersion of polyoxymethylene (POM) have been established and the molecular structure of coatings formed by volatile polymer destruction products has been studied. The effect on the coating growth rate, the pressure in the vacuum chamber and the molecular structure of the deposited layers of laser assisted influence and the copper particles introduction into the target were determined. It has been shown that the reactivity of POM dispersion products can be significantly increased by co-dispersing of POM and polyethylene (PE). The deposition of composite coatings occurs at a higher rate. For the POM component of the composite coating, the proportion of folded structures in the volume of the thin layer is significantly higher than the value typical for a single-component POM-based layer.

Keywords: electron beam dispersion, laser assistance, coating, polyoxymethylene, molecular structure.

For citation: Kinetic regularities of deposition and molecular structure of polyoxymethylene coatings formed from the active gas phase / M.A. Yarmolenko, D.L. Gorbachev, A.V. Rogachev, Jiang Xiao Hong, S.A. Frolov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 2 (59). – P. 57–63. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_57 (in Russian). – EDN: PEFHRO

Введение

Полиоксиметилен относится к полимерам, обладающих высокими эксплуатационными свойствами и широко применяемых в качестве конструкционных материалов при изготовлении прецизионных, требующих высокой жесткости деталей, низкого трения и стабильности размеров даже при больших влажности и перепадах температуры нагрева. Электрофизические свойства полиоксиметилена практически постоянны в широком интервале частот в условиях высокой влажности и изменения температуры, что обусловило их широкое применение в качестве

диалектических материалов. Сохранение достаточно высокой прочности и жесткости при температурах около 100° С, устойчивость полимера к циклическим нагрузкам, его эластичность, гидрофобность и стойкость к воздействию различных химически активных сред, биоинертность определяют перспективность применения полиоксиметилена в медицине при изготовлении протезов, в ортопедической стоматологии [1].

При решении широкого круга технологических задач возникает необходимость использования полиоксиметилена в качестве тонкого покрытия. Однако применение известных способов

получения таких покрытий вследствие их высокой химической стойкости имеет ограничения, так как предполагает использование растворов полиоксиметилена в горячем хлорфеноле, которые обладают высокой токсичностью. Применение же методов формирования покрытий из расплавов является весьма проблематичным из-за интенсивного протекания процессов деполимеризации при нагреве полимера до температуры выше 180°C [2], [3], что сопровождается резким снижением физико-механических свойств. При этом интенсивность термической деполимеризации определяется параметрами теплового воздействия, начинается с концевой группы и распространяется по цепной реакции вдоль всей молекулы.

В работах [4], [5] показана высокая эффективность использования вакуумно-плазменных методов формирования тонких полимерных покрытий различного химического состава и возможность изменения структуры и свойств осажденных слоев в широких пределах достаточно простыми технологическими приемами. Отмечается также их универсальность, возможность формирования композиционных покрытий практически любого состава с регулируемым химическим и фазовым составом. При осаждении слоев из активной газовой фазы, образованной электронно-лучевым диспергированием исходного полимера, создаются условия, обеспечивающие высокую реакционную активность образующихся летучих продуктов и протекание при их адсорбции на поверхности процессов вторичной полимеризации. Данные особенности метода определили основную цель настоящей работы, заключающуюся в определении основных закономерностей осаждения покрытий полиоксиметилена методом электронно-лучевого дисперги-

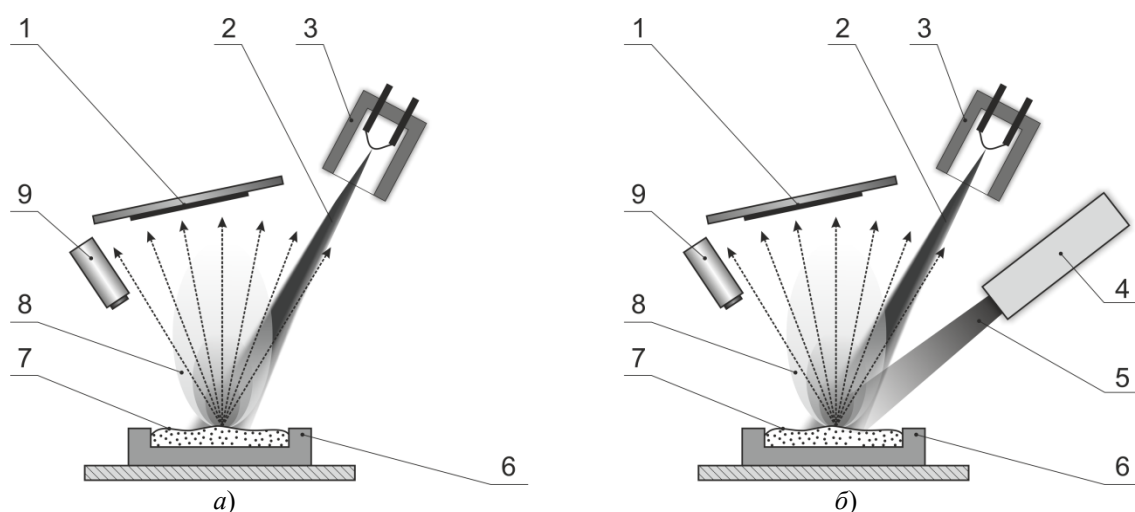
рования, установлении влияния условий и режимов диспергирования, в частности, лазерного ассистирования, интенсивности температурного воздействия на молекулярную структуру и морфологию покрытий.

1 Методика эксперимента

Осаждение покрытий на основе ПОМ производилось из активной газовой фазы, генерируемой электронно-лучевым диспергированием порошка полимера с помощью устройств, схема которых представлена на рисунке 1.1. В качестве источника электронов использовался электронно-лучевой испаритель с катодом прямого накала, позволяющий формировать пучки с плотностью тока $I = 0,01 \div 0,03 \text{ А/см}^2$, энергией частиц $E = 0,1 \div 2,5 \text{ кэВ}$, площадью пятна $S = (1 \div 5) \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$. В процессе нанесения покрытия регистрировали в камере давление летучих продуктов, скорость роста покрытия.

С целью изменения теплового режима процесса деструкции высокомолекулярного соединения осуществляли дополнительное воздействие на зону диспергирования лазерного излучения (лазерное ассистирование), а также введение в состав мишени порошка меди. Массовое соотношение компонентов в мишени (ПОМ: порошок меди) соответствовало 2:1 и 4:1. Порошок меди за счет теплопроводности снижал температуру поверхности композиционной мишени.

В качестве источника лазерного излучения использовался лазер L-2137U+HG-5 с длинами волн лазерного излучения $\lambda = 532$ и 266 нм . Длительность импульса накачки в режиме модулированной добротности составляла 6 нс. Энергия лазерного импульса в системе генератор-усилитель в режиме модулированной добротности составляла 350 и 117 мДж (соответственно



1 – подложки; 2 – электронный луч; 3 – электронно-лучевой испаритель; 4 – лазер; 5 – лазерный луч; 6 – тигель; 7 – исходный полимер; 8 – газовая фаза; 9 – кварцевый измеритель толщины

Рисунок 1.1 – Схемы нанесения покрытий электронно-лучевым диспергированием (а) и электронно-лучевым диспергированием в условиях лазерного ассистирования (б)

для $\lambda = 532$ и 266 нм). Диаметр пятна лазерного излучения – 7 мм. Необходимо отметить, что энергии лазерного излучения недостаточно для диспергирования полимера.

В качестве подложек использовались чистые кремниевые пластины. Предварительно пластины подвергались ионной очистке – 10 минут, рабочий газ – аргон (Ar^+), ток ионного пучка – 1 А.

Определение молекулярной структуры проводили методом ИК-спектроскопии с помощью ИК-Фурье спектрофотометра Vertex-70 (Bruker). Сканирование осуществляли в диапазоне $4000\text{--}300\text{ см}^{-1}$ с разрешением 4 см^{-1} .

Изучение поверхностной морфологии покрытий осуществляли методом атомно-силовой микроскопии (АСМ) в режимах измерения топографии и фазового контраста с помощью прибора Solver P47 PRO (NT-MDT, Зеленоград).

2 Результаты и их обсуждение

Установлено, что кинетика процесса электронно-лучевого диспергирования мишеней на основе ПОМ в условиях дополнительной лазерной

УФ ассистирующей обработки и без подобного энергетического воздействия имеет существенные отличия (рисунок 2.1 и таблица 2.1).

Процесс электронно-лучевого диспергирования порошка ПОМ характеризуется наличием длительного индукционного периода $t_{\text{и}}$, в течение которого в поверхностных слоях полимеры накапливаются физико-химические изменения, однако рост давления в вакуумной камере и толщины покрытия, оцениваемой по изменению резонансной частоты кварцевого датчика не регистрируются. Дополнительное воздействие лазерного излучения на зону диспергирования наиболее значительно (более чем в 4 раза) снижает длительность индукционного периода только при диспергировании мишени ПОМ, не содержащей медный порошок. При ведении в состав мишени меди и лазерном ассистировании регистрируются более высокие значения $t_{\text{и}}$, что связано с частичным отражением излучения поверхностью частиц металла и снижением таким образом его влияния на тепловой режим диспергирования.

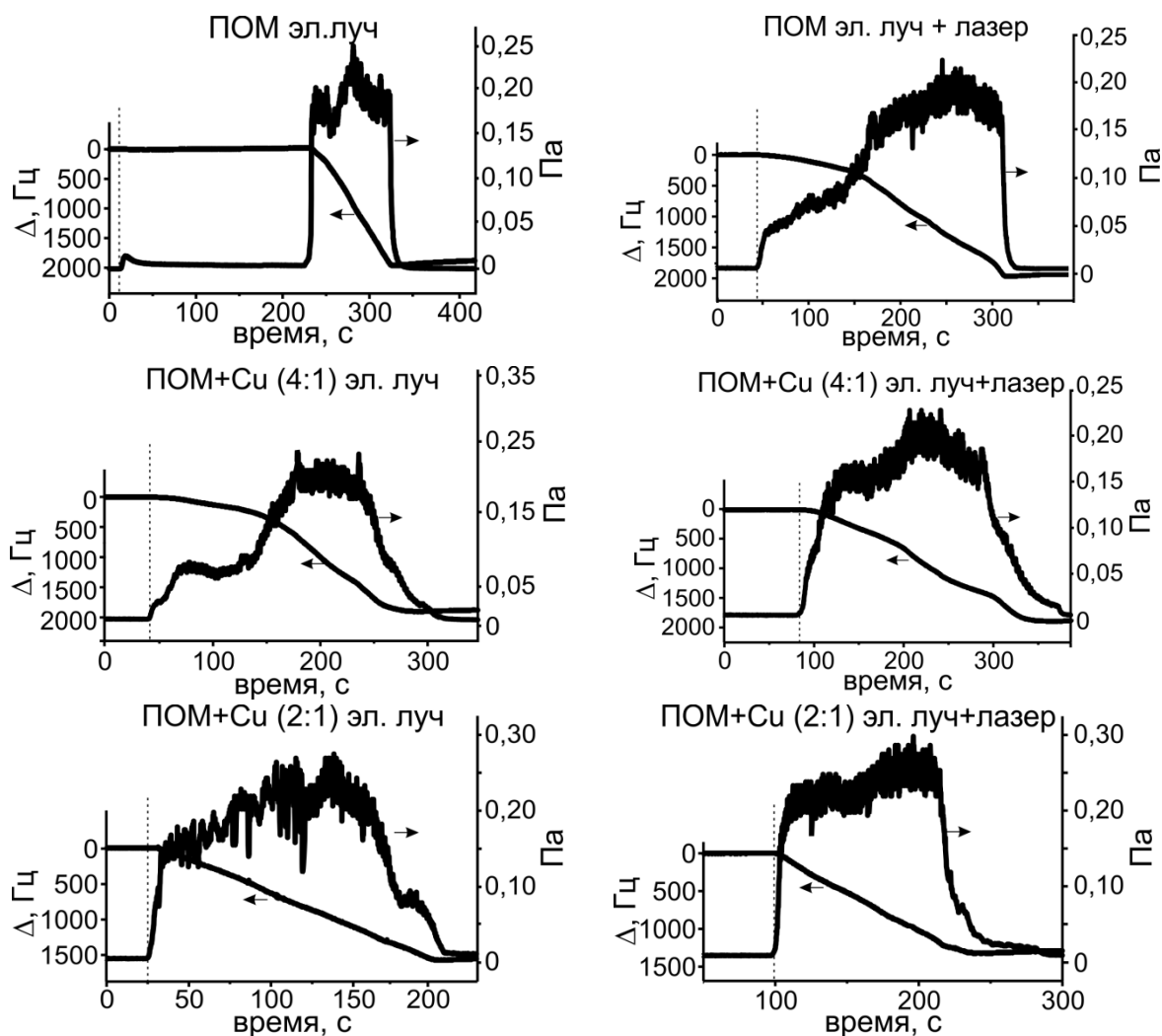


Рисунок 2.1 – Кинетические зависимости изменения толщины покрытия и давления в камере при электронно-лучевом диспергировании мишеней на основе ПОМ

Таблица 2.1 – Параметры кинетики осаждения покрытий на основе АОМ

Состав мишени	t_u , с	параметры нанесения		
		V , Гц/с	P_{cp}	V / P_{cp}
ПОМ	206	19,1	0,196	97,5
ПОМ*	45	7,61 (10,1)	0,176	43,2 (57,4)
ПОМ + Cu (4:1)	43	8,9 (13,7)	0,192	46,4 (71,4)
ПОМ + Cu (4:1)*	90	7,8	0,180	43,3
ПОМ + Cu (2:1)	25	9,4	0,209	45,0
ПОМ + Cu (2:1)*	100	10,5	0,235	44,7
ПОМ + ПЭ (1:1)	131	86,7	0,166	522,3
ПОМ + ПЭ (1:1)*	80	40	0,114	350,9
(ПОМ + ПЭ) + Cu (4:1)	150	93	0,160	581,3
(ПОМ + ПЭ) + Cu (4:1)*	100	61,4	0,164	374,4
(ПОМ + ПЭ) + Cu (2:1)	50	53,8	0,140	384,3
(ПОМ + ПЭ) + Cu (2:1)*	38	73,5	0,142	517,6

* – Покрытие сформировано в условиях лазерного асистирующего воздействия

При лазерном асистирувании и введении в мишень порошка меди значительно изменяются скорость роста покрытия, давление летучих продуктов диспергирования и их реакционная активность, оцениваемая по отношению V / P_{cp} . Из представленных в таблице 2.1 данных следует, что продукты диспергирования ПОМ являются наиболее активными и при практически одинаковом давлении их в камере обеспечивают осаждение покрытия со значительно более высокой скоростью. При снижении теплового режима диспергирования в результате использования составных мишеней ПОМ + Cu реализуется более равновесный режим распада макромолекул ПОМ и образование менее активных летучих продуктов.

Анализ представленных результатов показывает, что влияние ультрафиолетового излучения на процессы электронно-лучевого диспергирования ПОМ является сложным. На начальных стадиях процесса в условиях ультрафиолетового асистирувания, по-видимому, вследствие фотоэффекта имеет место снижение зарядки полимерной мишени и, как следствие этого, возрастает эффективная энергия воздействующего на нее электронного потока. Это определяет снижение индукционного периода. На более поздних стадиях диспергирования регистрируемое снижение давления летучих продуктов и скорости роста покрытия однозначно свидетельствует о доминирующем влиянии протекающих в зоне диспергирования под действием излучения процессов молекулярного взаимодействия, образования структур более стойких и воздействию электронов. При этом присутствие в мишени медных частиц практически не влияет на реакционную активность летучих продуктов.

Одним из эффективных направлений повышения физико-химических свойств ПОМ является его сополимеризация с линейными полимерами [2]. При ее проведении нарушается периодическое

чередование атомов углерода и кислорода в полимерной цепи и повышается термостойкость, поскольку возникает препятствие ступенчатому отщеплению формальдегидных звеньев. В связи с этим интерес представляет изучение особенностей осаждения и молекулярной структуры покрытий, полученных при электронно-лучевом диспергировании мишеней на основе полиоксиметилена и полиэтилена (ПОМ + ПЭ). Установлено, что при их формировании проявляются практически такие же кинетические закономерности (рисунок 2.2, таблица 2.1). В качестве основной особенности диспергирования таких мишеней следует отметить более высокую, в 8–10 раз, реакционную активность образующихся летучих продуктов и соответственно большую скорость роста покрытий, что объясняется высокой реакционной активностью летучих продуктов диспергирования ПЭ.

Методом ИК спектроскопии показано, что условия диспергирования оказывают заметное влияние на молекулярную структуру покрытий ПОМ. Для покрытий, сформированных с использованием порошка меди, ИК спектр в области частот $1300 \div 800 \text{ см}^{-1}$ характеризовался наличием малоинтенсивных «размытых» полос поглощения, в сравнении с аналогичными полосами для слоев, осажденных без использования металла (рисунок 2.3).

При анализе молекулярной структуры покрытий на основе ПОМ особое внимание уделялось полосе поглощения при 1130 см^{-1} ($A_2(3)$), характерной для складчатых (FCC) структур [6], [7]. За полосу внутреннего стандарта принимали полосу поглощения при 1240 см^{-1} . Значение соотношения D_{1130} / D_{1240} для покрытия ПОМ, сформированного с использованием лазерного асистирующего излучения и без, соответственно равно 0,70 и 1,03 (таблица 2.2). В работе [8] было отмечено влияние значения молекулярной массы полиоксиметилена на структуру. Показано,

что низкомолекулярные фракции, как правило, участвуют в образовании кристаллов из полностью вытянутых цепей. С ростом значения молекулярной массы при кристаллизации образуются кристаллы из сложенных цепей. Принимая во внимание результаты, представленные в указанной работе, можно предположить, что величина

D_{1130} / D_{1240} будет определяться молекулярной массой фрагментов макромолекул, формирующих тонкий полимерный слой. По данным спектроскопических исследований, представленных в таблице 2.2, влияние лазерного УФ излучения проявляется в снижении молекулярной массы формируемых покрытие продуктов диспергирования.

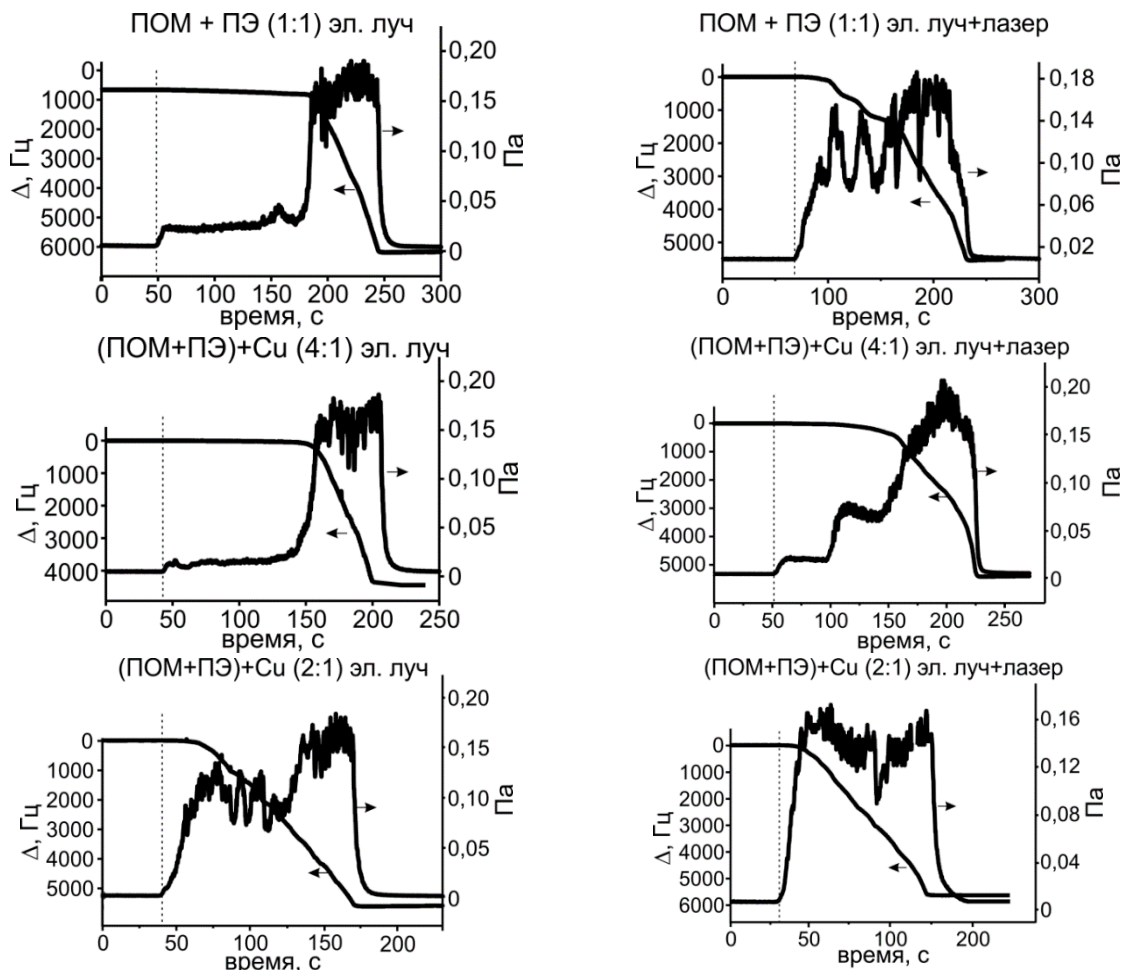
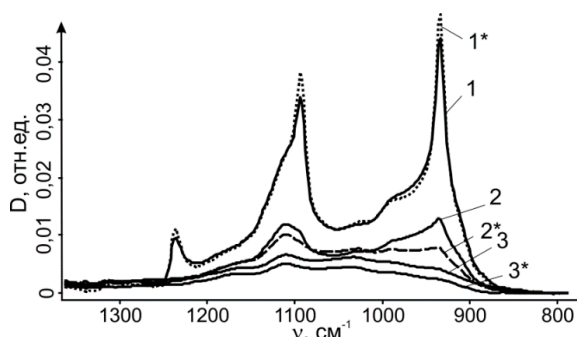


Рисунок 2.2 – Кинетические зависимости толщины покрытия и давления в камере при электронно-лучевом диспергировании мишеней на основе ПОМ + ПЭ



* – электронно-лучевое диспергирование в условиях лазерного assisting воздействия

Рисунок 2.3 – ИК спектры покрытий, сформированных электронно-лучевым диспергированием ПОМ (1); ПОМ + Cu (4:1) (2); 3 – ПОМ + Cu (2:1)

Существенно более низкие значения оптической плотности полос в рассматриваемой частотной области для покрытий, сформированных с использованием меди, можно объяснить частичной десорбцией осажденного слоя после запуска атмосферы в вакуумную камеру, что регистрировалось КИТ. Интенсивная десорбция осажденного слоя наблюдается в случае формирования тонкого покрытия низкомолекулярными соединениями

На рисунке 2.4 представлены АСМ-снимки покрытий на основе ПОМ, сформированные в условиях осаждения. Покрытие на основе ПОМ формируют достаточно дисперсные элементы. Средний размер поверхностных образований не превышает 100 нм. УФ assisting воздействие не оказывает заметного влияния на

морфологию формируемого слоя (рисунок 2.4, в). Результат может являться следствием образования под действием лазерного излучения низкомолекулярных фрагментов, не способных к конденсации на поверхности подложки.

Таблица 2.2 – Значения соотношения D_{1130} / D_{1240} для осажденных слоев

Вид покрытия	D_{1130} / D_{1240}
ПОМ + ПЭ	0,70
ПОМ + ПЭ*	1,03
ПОМ + ПЭ (1:1)	1,28
ПОМ + ПЭ* (1:1)	1,39
(ПОМ + ПЭ) + Cu (4:1)	1,68
(ПОМ + ПЭ) + Cu (4:1)*	1,21
(ПОМ + ПЭ) + Cu (2:1)	3,40
(ПОМ + ПЭ) + Cu (2:1)*	3,27
(подслой ПЭ) + ПОМ	3,1
(подслой ПЭ) + ПОМ*	2,40
(подслой ПЭ + $AlCl_3 \cdot 6H_2O$) + ПОМ	2,76
(подслой ПЭ + $AlCl_3 \cdot 6H_2O$) + ПОМ*	3,24
* – покрытие сформировано в условиях лазерного ассилирующего воздействия	

Для покрытия, сформированного с использованием лазерного ассилирования с $\lambda = 532$, не характерно наличие на поверхности крупных структур. Покрытие является сглаженным. При этом присутствует большое количество мелких сферических элементов, средний размер которых ~ 50 нм.

Электронно-лучевое диспергирование смеси порошков ПЭ и ПОМ, сопровождается осаждением покрытия, представляющего высокодисперсную механическую смесь исходных полимеров. В ИК спектре композиционного покрытия присутствуют все полосы поглощения, характерные для ИК спектров двух полимеров (рисунок

2.5). В связи с тем, что полосы поглощения, относящиеся к полимерам различной природы, не накладываются друг на друга, для каждого композиционного слоя было определено значение соотношения D_{1130} / D_{1240} .

Установлено, что для компоненты ПОМ композиционного покрытия, независимо от способа его осаждения, величина соотношения D_{1130} / D_{1240} заметно превышает значения, характерные для однокомпонентного слоя на основе ПОМ (таблица 2.2). Данный результат свидетельствует о протекании процессов полимеризации на подложке различных компонент мишени одновременно в условиях взаимного влияния. В связи с тем, что скорость электронно-лучевого нанесения покрытия на основе ПЭ превышает аналогичную величину процесса диспергирования ПОМ, фрагменты диспергирования ПОМ осаждаются на слой ранее адсорбированных на подложке продуктов деструкции ПЭ. Возможно, именно свойства слоя ПЭ (морфология, плотность свободных радикалов и др.) определяет формируемую структуру ПОМ. Для подтверждения предположения, предварительно перед осаждением покрытия ПОМ на подложку осаждали подслои, формируемые в процессе электронно-лучевого диспергирования полиэтилена и механической смеси порошков ПЭ и $AlCl_3 \cdot 6H_2O$ (2:1). Морфологические и структурные отличия подобных слоев ранее уже были рассмотрены. Полученные результаты исследований подтверждают роль подслоя (структура, морфология и др.) на формирование складчатых кристаллических областей ПОМ при его последующим осаждении. Однако подобное влияние на структуру покрытия на основе ПОМ нельзя рассматривать отдельно от процесса диспергирования мишени без учета всех возможных взаимодействий продуктов диспергирования друг с другом и с расплавом полимеров.

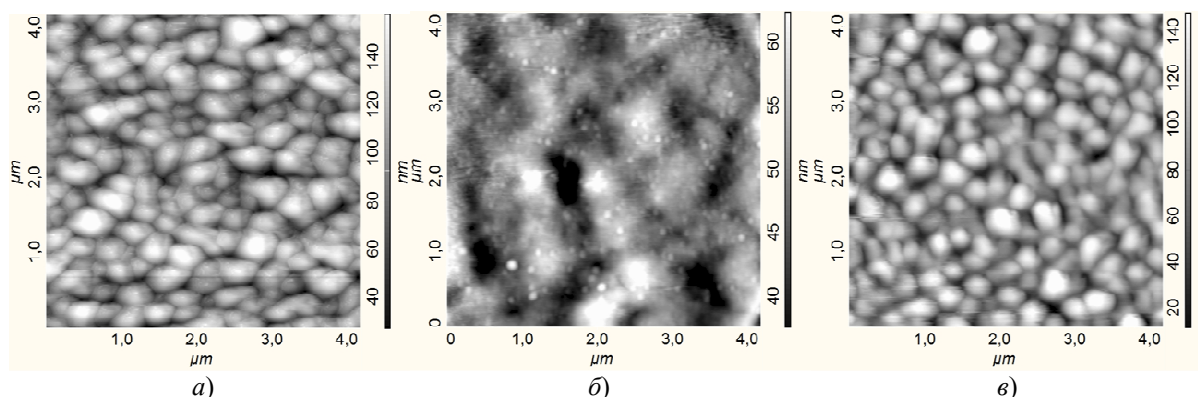
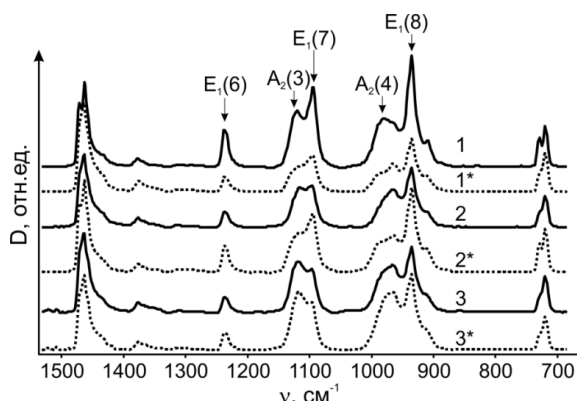


Рисунок 2.4 – АСМ изображения покрытий, сформированных при диспергировании ПОМ (4:1) без лазерного ассилирующего воздействия (а), при лазерном ассилировании с $\lambda = 532$ (б) и 266 нм (в)



* – электронно-лучевое диспергирование в условиях лазерного ассистирующего воздействия

Рисунок 2.5 – ИК спектры покрытий, осажденных электронно-лучевым диспергированием
ПОМ + ПЭ (1); ПОМ + ПЭ + Cu (2:2:1) (2);
ПОМ + ПЭ + Cu (1:1:1) (3)

Заключение

Установлены кинетические закономерности осаждения покрытий ПОМ из летучих продуктов электронно-лучевого диспергирования исходного полимера, особенности влияния лазерного ассистирования и введения в мишень частиц меди на скорость роста покрытия и давления в вакуумной камере, молекулярную структуру осаждаемых слоев. Показано, что воздействие лазерного излучения с $\lambda=266$ нм на мишень ПОМ, как и добавление к полимеру порошка меди проявляется в снижении скорости осаждения покрытия, а также в заметном сокращении длительности индукционного периода или его полном исчезновении. Показано, что одним из проявлений влияния лазерного излучения на полимер является фотоиницируемая деструкция высокомолекулярного соединения, снижение доли складчатых структур в объеме осаждаемого тонкого слоя.

Реакционная активность продуктов диспергирования ПОМ может быть значительно повышена путем совместного диспергирования ПОМ и ПЭ. Осаждение покрытий при диспергировании таких мишеней протекает с более высокой скоростью и для компонента на основе ПОМ композиционного покрытия, независимо от способа его осаждения, доля складчатых структур в объеме тонкого слоя заметно превышает значение, характерное для однокомпонентного слоя на основе ПОМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трегубов, И.Д. Обоснование и применение современных полимерных материалов в клинике ортопедической стоматологии и ортодонтии // Автореф. дисс. на соиск. уч. ст. докт. мед. наук (14.00.21 – стоматология). – Волгоград, 2007.

2. Епиколопьян, С.Н. Химия и технология полиформальдегида / С.Н. Епиколопьян, С.А. Вольфсон. – Москва: Химия, 1968. – 279 с.

3. Справочник по пластическим массам. Изд. 2-е.; под ред. В.М. Катаева, В.А. Попова, Б.И. Сажина. – Москва: Химия, 1975. – Т. I. – 448 с.

4. Микро- и нанокомпозиционные полимерные покрытия, осаждаемые из активной газовой фазы / М.А. Ярмоленко, А.А. Рогачев, П.А. Лучников, А.В. Рогачев, Джанг Сянь Хун. – Москва: Радиотехника, 2016. – 424 с.

5. Перспективы синтеза функциональных биоматериалов из активной газовой фазы / А.В. Рогачев [и др.] // Полимерные материалы и технологии. – 2023. – Т. 9 (4). – С. 97–104.

6. Shimomura, M. Infra-red study on the conformational regularity in needle-like and other polyoxymethylene crystals / M. Shimomura, M. Iguchi // Polymer. – 1982. – Vol. 23. – P. 509–513.

7. Shimomura, M. Vibrational spectroscopic study on trigonal polyoxymethylene and polyoxymethylene-d₂ crystals / M. Shimomura, M. Iguchi // Polymer. – 1988. – Vol. 29. – P. 351–357.

8. Вундерлих, Б. Физика макромолекул. Кристаллическая структура, морфология, дефекты / Б. Вундерлих. – Москва: Мир, 1976. – 620 с.

Работа выполнена в рамках выполнения задания «Плазмохимическое осаждение и конструкция покрытий с пролонгированным освобождением лекарственных препаратов и их применение для лечения костных повреждений» по договору с БРФФИ №Х22КИТГ-024 и проекта №2022YFE0196800 Национального фонда естественных наук Китая Министерства науки и технологий КНР.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках НИР «Разработка методов регулирования структурой и свойств покрытий медицинского назначения путем изменения состава и плотности потока летучих продуктов диспергирования органических соединений с использованием электростатических и фотохимических эффектов», комплексное задание 1.12 «Синтез нанокомпозиционных пленочных структур, формирование материалов с высокими функциональными свойствами с использованием электронно-лучевых, ионных, лазерных методов обработки» ГПНИ «Фотоника и электроника для инноваций», подпрограмма «Фотоника и ее применения».

Поступила в редакцию 15.03.2024.

Информация об авторах

Ярмоленко Максим Анатольевич – д.т.н., профессор
Горбачёв Дмитрий Леонидович – мл. научный сотрудник
Рогачев Александр Владимирович – чл.-корр. НАН Беларуси, д.х.н., профессор
Джанг Сянь Хун – доктор наук, профессор
Фролов Сергей Анатольевич – стажер м.н.с.

О НЕКОТОРЫХ ГРУППАХ ИЗ ФОРМАЦИИ СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Т.И. Васильева

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

ON SOME GROUPS FROM THE FORMATION OF SUPERSOLUBLE FINITE GROUPS

T.I. Vasilyeva

Belarusian State University of Transport, Gomel

Аннотация. В работе для максимальной подгруппы группы G введено понятие n -модулярно вложенной подгруппы (n – некоторое натуральное число). Установлен критерий, при котором каждая максимальная подгруппа в G является n -модулярно вложенной, а также необходимые и достаточные условия, при которых в каждой подгруппе A группы G любая максимальная подгруппа n -модулярно вложена в A для некоторого натурального числа n , $n \leq k$ (k – фиксированное натуральное число).

Ключевые слова: сверхразрешимая группа, максимальная подгруппа, n -модулярно вложенная подгруппа, класс Шунка.

Для цитирования: Васильева, Т.И. О некоторых группах из формации сверхразрешимых конечных групп / Т.И. Васильева // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (59). – С. 64–69. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_64. – EDN: RJFGYO

Abstract. In this work, for a maximal subgroup of a group G , the concept of an n -modularly embedded subgroup (n is some natural number) is introduced. A criterion is established under which every maximal subgroup in G is n -modularly embedded, as well as necessary and sufficient conditions under which in every subgroup A of G any maximal subgroup is n -modularly embedded in A for some natural number n , $n \leq k$ (k – fixed natural number).

Keywords: supersoluble group, maximal subgroup, n -modularly embedded subgroup, Schunck class.

For citation: Vasilyeva, T.I. On some groups from the formation of supersoluble finite groups / T.I. Vasilyeva // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 2 (59). – P. 64–69. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_64 (in Russian). – EDN: RJFGYO

Введение

Все рассматриваемые группы конечные. В нильпотентной группе всякая максимальная подгруппа является нормальной. Хупперт [1, гл. VI, теорема 9.2 (b)] установил, что если группа G сверхразрешима, то все ее максимальные подгруппы имеют в G простой индекс. Шмидт в [2] доказал, что подгруппа M группы G является максимальной модулярной подгруппой в G тогда и только тогда, когда либо M – максимальная нормальная подгруппа в G , либо G/M_G неабелева порядка pq для некоторых простых чисел p и q . В связи с этим введем следующее

Определение 0.1. Пусть n – натуральное число. Максимальную подгруппу M группы G будем называть n -модулярно вложенной в G , если либо $M \trianglelefteq G$, либо $M \neq M_G$, $|G:M| = p$ и $|G/M_G| = pq^n$, q^n делит $p-1$ для некоторых простых чисел p и q .

Отметим, если $n=1$ и максимальная подгруппа в G является n -модулярно вложенной, то она модулярна в G .

В работе получен критерий, при котором все максимальные подгруппы группы G n -модулярно вложены в G , а также необходимые и достаточные условия, при которых в любой подгруппе группы всякая максимальная подгруппа является n -модулярно вложенной для некоторого натурального числа n , $n \leq k$ (k – фиксированное натуральное число).

1 Предварительные сведения

В работе используются стандартные обозначения и определения (см., например, монографии [3], [4]).

Через $\mathbb{P}$ обозначается множество всех простых чисел. Если G – группа, то $|G|$ – порядок G , $\pi(G)$ – множество всех различных простых делителей $|G|$, G_p – силовская p -подгруппа из G для $p \in \mathbb{P}$, $\text{Syl}_p(G)$ – множество всех силовских p -подгрупп из G , $\text{Syl}(G)$ – множество всех силовских подгрупп из G . Если H – подгруппа из G , то используется обозначение $H \leq G$ и $H < G$.

для $H \neq G$. Через $|G:H|$ обозначается индекс H в G , $\pi(G:H)$ – множество всех различных простых делителей $|G:H|$. Для максимальной подгруппы M группы G через M_G обозначается ядро M в G , т. е. $M_G = \cap M^x$ для всех $x \in G$.

Класс групп $\mathfrak{H}$ называется *гомоморфом*, если из $G \in \mathfrak{H}$ и $N \trianglelefteq G$ следует, что $G/N \in \mathfrak{H}$; *наследственным*, если вместе с $G \in \mathfrak{H}$ все подгруппы из G принадлежат $\mathfrak{H}$; *примитивно замкнутым*, если из $G/M_G \in \mathfrak{H}$ для любой максимальной в G подгруппы M всегда следует, что $G \in \mathfrak{H}$; *классом Шунка*, если $\mathfrak{H}$ – примитивно замкнутый гомоморф.

Через $\mathfrak{U}$ обозначается класс всех сверхразрешимых групп, который образует наследственную насыщенную формацию.

Теорема 1.1 [5, теорема 1.4]. Пусть H/K – p -главный фактор группы G . Тогда и только тогда $|H/K| = p$, когда $\text{Aut}_G(H/K)$ абелева экспоненты, делящей $p-1$.

Теорема 1.2 [1, гл. VI, теорема 9.5]. Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы имеют в G простой индекс.

Теорема 1.3 [3, гл. А, теорема 15.6] Пусть M – максимальная подгруппа разрешимой группы G и $M_G = 1$. Тогда справедливы следующие утверждения.

(1) G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N , M дополняет N в G и $N = C_G(N) = F(G)$.

(2) Если p – простой делитель $|N|$, то $O_p(M) = 1$.

(3) Все дополнения к N в G сопряжены с M .

2 Группы с заданными максимальными подгруппами

Лемма 2.1. Пусть n – натуральное число и M – максимальная подгруппа группы G . Тогда следующие утверждения эквивалентны.

(1) M является n -модулярно вложенной в G .

(2) Либо $M \trianglelefteq G$, либо G/M_G ненильпотентна, $|G/M_G| = pq^n$, q^n делит $p-1$ для простых p и q , причем G/M_G – группа с нормальной силовой p -подгруппой и циклической силовой q -подгруппой M/M_G .

Доказательство. Предположим, что выполняется утверждение (1). Если $M = M_G$, то $M \trianglelefteq G$. Допустим, что $M \neq M_G$. Тогда G/M_G ненильпотентна и по (1) $|G/M_G| = pq^n$. Ввиду бипримарности G/M_G по теореме Бернсайда G/M_G разрешима. Так как G/M_G примитивна, по теореме 1.3 (1) $G/M_G = N/M_G \cdot M/M_G$, где

N/M_G – минимальная нормальная подгруппа в G/M_G , $(N/M_G) \cap (M/M_G) = 1$,

$$N/M_G = C_{G/M_G}(N/M_G).$$

Отсюда следует, что $|N/M_G| = |G:M| = p$. Тогда

$$M/M_G \cong G/M_G / C_{G/M_G}(N/M_G)$$

изоморфна подгруппе из $\text{Aut}(Z_p) \cong Z_{p-1}$. Поэтому p не делит $|M/M_G|$, M/M_G – циклическая силовая q -подгруппа в G/M_G , $|M/M_G| = q^n$ делит $p-1$ и $N/M_G \in \text{Syl}_p(G)$. Итак, из утверждения (1) следует утверждение (2).

Если выполняется утверждение (2), то легко проверяется, что M является n -модулярно вложенной в G . Таким образом, из утверждения (2) следует утверждение (1). $\square$

Лемма 2.2. Пусть k – натуральное число. Если в группе G любая максимальная подгруппа является n -модулярно вложенной для некоторого натурального числа n , $n \leq k$, то G сверхразрешима.

Доказательство. Пусть W – любая максимальная подгруппа группы G . Если $W = W_G$, то $W \trianglelefteq G$. Тогда $G = WP$ для некоторой $P \in \text{Syl}_p(G)$ и $p \in \pi(G:W)$. Из максимальности W в G следует, что $|G:W| = p$. Предположим, что $W \neq W_G$. Тогда по определению 0.1 $|G:W|$ – простое число. По теореме 1.2 G сверхразрешима. $\square$

Теорема 2.1. Пусть k – натуральное число, G – группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

(1) В G любая максимальная подгруппа является n -модулярно вложенной для некоторого натурального числа n , $n \leq k$.

(2) G сверхразрешима и $\text{Aut}_G(H/K)$ есть либо единичная группа, либо циклическая группа порядка q^n для любого дополняемого главного фактора H/K из G , $q \in \mathbb{P}$ и некоторого натурального числа n , $n \leq k$.

Доказательство. Предположим, что выполняется утверждение (1). По лемме 2.2 G сверхразрешима.

Возьмем в G любой дополняемый главный фактор H/K . Тогда $G = HM$ для некоторой подгруппы M из G и $H \cap M = K$. Ввиду сверхразрешимости G/K следует, что $|H/K| = p$ – простое число. Тогда из $|G/K:M/K| = |H/K|$ заключаем, что M максимальна в G .

Если $M = M_G$, то $G = HM \leq C_G(H/K)$ и $G/C_G(H/K) = 1$.

Предположим, что $M \neq M_G$. Тогда

$$G/M_G = HM_G/M_G \cdot M/M_G,$$

причем $K = H \cap M_G$. Из $HM_G/M_G \cong H/K$

следует, $|HM_G/M_G| = p$ и HM_G/M_G – минимальная нормальная подгруппа в G/M_G . По теореме 1.3 (1) $HM_G/M_G = C_{G/M_G}(HM_G/M_G)$. Так как M является n -модулярно вложенной в G и G/M_G ненильпотентна, по лемме 2.1 $|G/M_G| = pq^n$ для некоторого простого q , $M/M_G \in \text{Syl}_q(G/M_G)$ и M/M_G – циклическая группа порядка q^n , q^n делит $p-1$. Заметим, что $HM_G \leq C_G(HM_G/M_G)$. Тогда

$$\begin{aligned} G/C_G(HM_G/M_G) &\cong \\ &\cong G/M_G/C_{G/M_G}(HM_G/M_G) \cong M/M_G. \end{aligned}$$

Из теорем 1 и 3 [5, приложение В] следует, что

$$\begin{aligned} G/C_G(H/K) &\cong \text{Aut}_G(H/K) \cong \\ &\cong \text{Aut}_G(HM_G/M_G) \cong G/C_G(HM_G/M_G). \end{aligned}$$

Таким образом, из (1) следует (2).

Пусть справедливо утверждение (2). Возьмем любую максимальную в G подгруппу M . Если $M \trianglelefteq G$, то M является n -модулярно вложенной в G . Пусть $M \neq M_G$. Так как G/M_G разрешима, $G/M_G = N/M_G \cdot M/M_G$, где N/M_G – минимальная нормальная подгруппа в G/M_G ,

$$\begin{aligned} (N/M_G) \cap (M/M_G) &= 1, \\ N/M_G &= C_{G/M_G}(N/M_G). \end{aligned}$$

Отметим, что $|N/M_G| = p$ – простое число ввиду сверхразрешимости G . Имеем

$$\begin{aligned} M/M_G &\cong G/M_G/C_{G/M_G}(N/M_G) \cong \\ &\cong G/C_G(N/M_G) \end{aligned}$$

– циклическая группа порядка q^n , q^n делит $p-1$. Таким образом, G/M_G ненильпотентна и $|G/M_G| = pq^n$. По лемме 2.1 M является n -модулярно вложенной в G . Итак, из (2) следует (1). $\square$

Теорема 2.2. Пусть k – натуральное число, G – группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

(1) В любой подгруппе A из G всякая максимальная в A подгруппа является n -модулярно вложенной для некоторого натурального числа n , $n \leq k$.

(2) G сверхразрешима и $\text{Aut}_G(H/K)$ есть либо единичная группа, либо циклическая группа порядка q^n для любого главного фактора H/K из G , $q \in \mathbb{P}$ и некоторого натурального числа n , $n \leq k$.

Доказательство. Предположим, что выполняется утверждение (1). Тогда любая максимальная подгруппа из G является n -модулярно вложенной в G . По лемме 2.2 G сверхразрешима. Пусть H/K – главный фактор группы G . Тогда $|H/K| = p$ – простое число. В G/K существует

холлова p' -подгруппа R/K ввиду разрешимости G/K . Тогда $G/K = P/K \cdot R/K$ для некоторой $P/K \in \text{Syl}_p(G/K)$. Обозначим

$$A/K = H/K \cdot R/K.$$

Тогда $A = HR$, $H \cap R = K$ и H/K – главный фактор в A . По теореме 2.1 $A/C_A(H/K)$ есть либо 1, либо циклическая группа порядка q^n , q^n делит $p-1$, $n \leq k$. Так как $H \leq C_A(H/K)$, имеем $A = C_A(H/K)R$ и

$$A/C_A(H/K) \cong R/R \cap C_A(H/K) = R/C_R(H/K).$$

С другой стороны из $H/K \leq Z(P/K)$ следует, что $P \leq C_G(H/K)$. Тогда $G = PR = C_G(H/K)R$ и $G/C_G(H/K) \cong R/R \cap C_G(H/K) = R/C_R(H/K)$.

Итак, доказано, что из (1) следует (2).

Пусть теперь выполняется утверждение (2). Возьмем любую подгруппу $A \leq G$. Так как G сверхразрешима, существует главный ряд

$$1 = G_0 < G_1 < \dots < G_{m-1} < G_m = G,$$

где $|G_i/G_{i-1}|$ – простое число, $i = 1, \dots, m$. Рассмотрим ряд

$$\begin{aligned} 1 = G_0 \cap A &\leq G_1 \cap A \leq \dots \leq \\ &\leq G_{m-1} \cap A \leq G_m \cap A = A. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Если $G_{i-1} \cap A = G_i \cap A$ для любого $i = 1, \dots, m$, то $1 = A$ и для A утверждение (1) теоремы выполняется.

Предположим, что существует $j \in \{1, \dots, m\}$, для которого $G_{j-1} \cap A \neq G_j \cap A$. Тогда $1 \neq A$. Для $m=1$ утверждение теоремы выполняется. Поэтому пусть $m > 1$. Из максимальной G_{j-1} в G_j , $G_{j-1} \leq (G_j \cap A)G_{j-1} \leq G_j$ и $G_{j-1} \cap A \neq G_j \cap A$ заключаем, что $G_j = (G_j \cap A)G_{j-1}$. Тогда $G_j/G_{j-1} \cong G_j \cap A/G_{j-1} \cap A$ – главный фактор из A . Отбрасывая из ряда (2.1) повторения, получим главный ряд

$$1 = A_0 < A_1 < \dots < A_{l-1} < A_l = A,$$

где $A_i = G_k \cap A$ для некоторого $k \in \{1, \dots, m\}$, для которого $G_{k-1} \cap A \neq G_k \cap A$. Возьмем любой главный фактор T/S группы A . Тогда

$$\begin{aligned} S &\leq (A_0 \cap T)S \leq (A_1 \cap T)S \leq \dots \\ &\dots \leq (A_{l-1} \cap T)S \leq (A_l \cap T)S = T. \end{aligned}$$

Из $S \neq T$ следует, что $(A_{i-1} \cap T)S \neq (A_i \cap T)S$ для некоторого $i \in \{1, \dots, l\}$. Ввиду максимальной S в T имеем $S = (A_{i-1} \cap T)S$ и $T = (A_i \cap T)S$. Поэтому

$$T/S \cong (A_i \cap T)/(A_{i-1} \cap T)(A_i \cap S).$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} (A_i \cap T)A_{i-1} / (A_i \cap S)A_{i-1} &\cong \\ &\cong (A_i \cap T)/(A_{i-1} \cap T)(A_i \cap S). \end{aligned}$$

Тогда $A_{i-1} \leq (A_i \cap S)A_{i-1} \neq (A_i \cap T)A_{i-1} \leq A_i$. Отсюда $A_{i-1} = (A_i \cap S)A_{i-1}$ и $A_i = (A_i \cap T)A_{i-1}$. Значит, $T/S \cong A_i/A_{i-1} = G_k \cap A/G_{k-1} \cap A$ для некоторого $k \in \{1, \dots, m\}$.

Пусть $|G_k/G_{k-1}| = p$ – простое число. По предположению $G/C_G(G_k/G_{k-1})$ есть либо 1, либо циклическая группа порядка q^n , q^n делит $p-1$, $n \leq k$.

Поскольку $AC_G(G_k/G_{k-1})/C_G(G_k/G_{k-1})$ – подгруппа в $G/C_G(G_k/G_{k-1})$, заключаем, что

$$\begin{aligned} A/C_G(G_k/G_{k-1}) \cap A &\cong \\ &\cong AC_G(G_k/G_{k-1})/C_G(G_k/G_{k-1}) \end{aligned}$$

есть либо 1, либо циклическая группа порядка q^{n_i} , q^{n_i} делит $p-1$ для некоторого натурального числа $n_i \leq n$. Из

$$\begin{aligned} C_G(G_k/G_{k-1}) \cap A &\leq C_A(G_k \cap A/G_{k-1} \cap A) = \\ &= C_A(A_i/A_{i-1}) \end{aligned}$$

заключаем, что $A/C_A(A_i/A_{i-1})$ является гомоморфным образом $A/C_G(G_k/G_{k-1}) \cap A$. Ввиду теорем 1 и 3 [5, приложение В]

$$\begin{aligned} A/C_A(T/S) &\cong \text{Aut}_A(T/S) \cong \\ &\cong \text{Aut}_A(A_i/A_{i-1}) \cong A/C_A(A_i/A_{i-1}) \end{aligned}$$

есть либо 1, либо циклическая группа порядка q^{n_2} , q^{n_2} делит $p-1$ для некоторого натурального числа $n_2 \leq n_1 \leq n$. По теореме 2.1 любая максимальная подгруппа в A является n -модулярно вложенной. Таким образом, из утверждения (2) следует утверждение (1). $\square$

Заметим, что группы из теоремы 2.1 не всегда являются группами из теоремы 2.2.

Пример 2.1. Пусть $n=1$, группа

$$\begin{aligned} P &= \langle a, b, c \mid a^7 = b^7 = c^7 = 1, \\ &ab = ba, ac = ca, b^c = ba \rangle \end{aligned}$$

– неабелева группа порядка 7^3 . Пусть $g \in \text{Aut}(P)$ с действием $(c^i b^j a^k)^g = c^{i6} b^{j2} a^{k12}$ для любых $i, j, k \in \{0, 1, \dots, 6\}$. Группа p имеет экспоненту 7 и $|\langle g \rangle| = 6$. Рассмотрим полупрямое произведение $G = P \rtimes \langle g \rangle$. Покажем, что любая максимальная подгруппа из G модулярна в G и G имеет подгруппу, в которой максимальная подгруппа не является модулярной. Обозначим $A = \langle a \rangle$, $B = \langle b \rangle$, $C = \langle c \rangle$, $D = \langle g \rangle$, $X = \langle g^3 \rangle$, $Y = \langle g^2 \rangle$. Отметим некоторые свойства G .

Так как $A \trianglelefteq P$, имеем $A \leq Z(P)$. Из неабелевости p следует, что $P/Z(P)$ не может быть циклической. Поэтому $A = Z(P)$ и P/A – элементарная абелева группа порядка 7^2 . Тогда $A = P' = \Phi(P)$. Так как $P \trianglelefteq G$ и $D = X \times Y$,

$X \in \text{Syl}_2(D)$, $Y \in \text{Syl}_3(D)$, имеем $PX \trianglelefteq G$ и $PY \trianglelefteq G$. Тогда $\Phi(G) \leq P$. По [3, гл. А, лемма 9.2 (е)] $\Phi(P) \leq \Phi(G)$ и $\Phi(G/\Phi(P)) = \Phi(G)/\Phi(P)$. Экспонента p равна 7, поэтому $\Phi(P) = \Phi(G)$. Итак,

$$1. A = Z(P) = P' = \Phi(P) = \Phi(G).$$

Из $ab = ba, ac = ca$ и $|C \times A| = |B \times A| = 7^2$ следует, что $C \times A \trianglelefteq P$ и $B \times A \trianglelefteq P$. Из $b^c = ba$ и $c^b = ca^{-1}$ заключаем, что B и C не являются нормальными подгруппами в p . Таким образом,

$$2. P = (C \times A) \rtimes B = (B \times A) \rtimes C.$$

Так как $(c^i a^k)^{g^m} = c^{i6^m} a^{k(12)^m}$ и $(b^j a^k)^{g^m} = b^{j2^m} a^{k(12)^m}$ для $i, j, k \in \{0, 1, \dots, 6\}$, $m \in \{0, 1, \dots, 5\}$, имеем $D \leq N_G(C)$, $D \leq N_G(B)$, $D \leq N_G(A)$. Итак,

$$3. CA/A \trianglelefteq G/A, BA/A \trianglelefteq G/A.$$

Из $6^2 = 7 \cdot 5 + 1$, $6^4 = 7 \cdot 185 + 1$, $2^3 = 7 + 1$ следует, что $(c^i)^{g^2} = (c^i)^{g^4} = c^i$ и $(b^j)^{g^3} = b^j$. Поэтому $Y \leq C_G(C)$ и $X \leq C_G(B)$. Тогда

$$4. PY = C_G(CA/A) \text{ и } PX = C_G(BA/A).$$

$$5. 1 < A < CA < P < PY < G \text{ и}$$

$$1 < A < BA < P < PX < G$$

– главные ряды группы G .

Пусть M – максимальная подгруппа из G . Тогда $A \leq M$ по п. 1.

Если $P \leq M$, то $|G:M| \in \{2, 3\}$. При $|G:M| = 2$ подгруппа $M \trianglelefteq G$. Допустим, что $|G:M| = 3$. Тогда по теореме Силова $X^y \in \text{Syl}_2(M)$ для некоторого $y \in G$ и $M = PX^y$. Поэтому $M = (PX)^y = PX \trianglelefteq G$.

Предположим, что P не содержится в M . Тогда $G = PM$. Ввиду разрешимости G подгруппа $D^x \leq M$ для некоторого $x \in G$. Из сверхразрешимости G следует, что $|G:M| = 7$. Так как $G = PD^x$, имеем $M = (P \cap M)D^x$ и $|(P \cap M)/A| = 7$. Тогда $(P \cap M)/A$ совпадает либо с BA/A , либо с CA/A .

Допустим, что $BA/A = (P \cap M)/A$. Тогда $G/A = CA/A \cdot M/A$ и

$$(M/A)_{G/A} = M_G/A \leq C_{G/A}(CA/A).$$

Значит, $M_G \leq PY$. Поэтому 2 не делит $|M_G/A|$.

Заметим, что $CA \cap M = (C \cap M)A = A$ и $CM_G/M_G \cong CA/(CA \cap M_G) = CA/A$. Поэтому

$$\begin{aligned} G/C_G(CM_G/M_G) &\cong \text{Aut}_G(CM_G/M_G) \cong \\ &\cong \text{Aut}_G(CA/A) \cong G/C_G(CA/A) \end{aligned}$$

– циклическая группа порядка 2. Так как $CM_G/M_G = C_{G/M}(CM_G/M_G)$, имеем

$$G/C_G(CM_G/M_G) \cong M/M_G.$$

Если $CA/A = (P \cap M)/A$, то

$G/A = BA/A \cdot M/A$. В этом случае

$G/C_G(BM_G/M_G) \cong G/C_G(BA/A) \cong M/M_G$ – циклическая группа порядка 3. Это означает, что M модулярна в G .

Заметим, что в G подгруппа AD имеет максимальную подгруппу D , которая не является модулярной.

Теорема 2.3. Пусть k – натуральное число. Класс $\mathfrak{X}$ всех групп G , в которых любая максимальная подгруппа является n -модулярно вложенной для некоторого натурального числа n , $n \leq k$, есть класс Шунка, состоящий из сверхразрешимых групп.

Доказательство. По лемме 2.2 $\mathfrak{X}$ состоит из сверхразрешимых групп.

Покажем, что $\mathfrak{X}$ – гомоморф. Пусть $G \in \mathfrak{X}$ и $N \trianglelefteq G$. Для любой максимальной в G/N подгруппы M/N подгруппа M максимальна в G . Так как $N \leq M_G$, имеем $(M/N)_{G/N} = M_G/N$. Подгруппа M n -модулярно вложена в G . Если $M \trianglelefteq G$, то $M/N \trianglelefteq G/N$. Допустим, что $M/N \neq (M/N)_{G/N}$. Из $M \neq M_G$ по определению 0.1 заключаем, что $|G:M| = p$ и $|G/M_G| = pq^n$, q^n делит $p-1$. Поэтому

$$|G/N : M/N| = |G:M| = p$$

и $|G/N/(M/N)_{G/N}| = pq^n$, q^n делит $p-1$. Итак, M/N n -модулярно вложена в G/N и $G/N \in \mathfrak{X}$. Значит, $\mathfrak{X}$ – гомоморф.

Докажем, что $\mathfrak{X}$ примитивно замкнут. Пусть $G/M_G \in \mathfrak{X}$ для любой максимальной в G подгруппы M . Если $M = M_G$, то $M \trianglelefteq G$. Предположим, что $M \neq M_G$. Из $G/M_G \in \mathfrak{X}$ следует, что M/M_G является n -модулярно вложенной в G/M_G . Так как ядро M/M_G изоморфно 1, имеем $|G:M| = |G/M_G : M/M_G| = p$ и $|G/M_G| = pq^n$, q^n делит $p-1$, т. е. M n -модулярно вложена в G . Таким образом, $G \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$ примитивно замкнут. $\square$

Теорема 2.4. Пусть k – натуральное число. Класс $\mathfrak{Y}$ всех групп G таких, что в любой подгруппе A из G всякая максимальная подгруппа из A является n -модулярно вложенной в A для некоторого натурального числа n , $n \leq k$, есть наследственный гомоморф, который обладает следующим свойством: если $G = G_1 \times G_2$ и $G_i \in \mathfrak{Y}$, $i = 1, 2$, то $G \in \mathfrak{Y}$.

Доказательство. Наследственность класса групп $\mathfrak{Y}$ очевидна.

Докажем, что $\mathfrak{Y}$ – гомоморф. Возьмем $G \in \mathfrak{Y}$ и $N \trianglelefteq G$. Пусть A/N – любая подгруппа из G/N и M/N – максимальная в A/N

подгруппа. Тогда из максимальности M в $A \leq G \in \mathfrak{Y}$ следует, что M n -модулярно вложена в A . Если $M = M_A$, то $M \trianglelefteq A$ и $M/N \trianglelefteq A/N$. Допустим, что $M/N \neq (M/N)_{A/N}$. Тогда $M \neq M_A$. Так как M n -модулярно вложена в A , имеем $|A:M| = p$ и $|A/M_A| = pq^n$, q^n делит $p-1$. Отсюда получаем, что $|A/N : M/N| = p$ и $|A/N/(M/N)_{A/N}| = pq^n$. Это означает, что M/N n -модулярно вложена в A/N . Итак, $\mathfrak{Y}$ – гомоморф.

Предположим, что $G = G_1 \times G_2$, $G_i \in \mathfrak{Y}$, $i = 1, 2$. Так как $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}$ – формация, имеем $G \in \mathfrak{U}$. Пусть A – подгруппа группы G и H/K – ее главный фактор. Из наследственности $\mathfrak{Y}$ и $AG_i/G_i \leq G/G_i \in \mathfrak{Y}$ следует, что

$$A/A \cap G_i \cong AG_i/G_i \in \mathfrak{Y}, \quad i = 1, 2.$$

В случае, когда $A \cap G_i = 1$ или $A \leq G_i$, $i = 1, 2$, имеем $A \in \mathfrak{Y}$.

Пусть $1 \neq A \cap G_i \neq A$. По теореме 4 [5, приложение В] $A \cap G_i$ либо покрывает, либо изолирует H/K .

1. Если $A \cap G_i$ покрывает H/K , то $H(A \cap G_i) = K(A \cap G_i)$. Поэтому $H = K(H \cap G_i)$ и H/K изоморфен главному фактору $(H \cap G_i)(A \cap G_2)/A \cap G_2 / (K \cap G_i)(A \cap G_2)/A \cap G_2$ группы $A/A \cap G_2 \in \mathfrak{Y}$. Отсюда и из теоремы 2.2 заключаем, что $A \in \mathfrak{Y}$.

2. Если $A \cap G_i$ изолирует H/K , то

$$H \cap G_i = H \cap A \cap G_i = K \cap A \cap G_i = K \cap G_i.$$

Тогда H/K изоморфен главному фактору

$$H(A \cap G_i)/A \cap G_i / K(A \cap G_i)/A \cap G_i$$

группы $A/A \cap G_i \in \mathfrak{Y}$. Отсюда и из теоремы 2.2 следует, что $A \in \mathfrak{Y}$. $\square$

3 Связь приведенных теорем с известными результатами

Приведенные теоремы включают известные результаты.

Следствие 3.1 [6, теорема 5.3.10]. Каждая максимальная подгруппа группы G модулярна в G тогда и только тогда, когда G сверхразрешима и $\text{Aut}_G(H/K)$ есть либо единичная группа, либо циклическая группа простого порядка для каждого дополняемого главного фактора H/K из G .

Доказательство следует из теоремы 2.1, так как для $n = k = 1$ максимальная подгруппа, которая является в G n -модулярно вложенной, есть модулярная подгруппа.

Решетка подгрупп группы G называется нижней полумодулярной, если для каждой пары подгрупп A, B из G такой, что A максимальна в

$\langle A, B \rangle$, подгруппа $A \cap B$ максимальна в B . Группа G называется ЛМ-группой [5, с. 130], если ее решетка подгрупп является нижней полумодулярной. Такие группы были охарактеризованы Ито в [7] (см. также [5]). Для $n = k = 1$ теорема 2.2 включает

Следствие 3.2 [5, гл. 4, теорема 4.4]. *Группа G является ЛМ-группой тогда и только тогда, когда G сверхразрешима и $\text{Aut}_G(H/K)$ есть либо единичная группа, либо циклическая группа простого порядка для каждого главного фактора H/K из G .*

Отметим, что если максимальная подгруппа M группы G является n -модулярно вложенной в G , то в G она является K - $\mathbb{P}$ -субнормальной и $\mathbb{P}$ -субнормальной в смысле следующих определений из [8] и [9]. Подгруппа H группы G называется:

K - $\mathbb{P}$ -субнормальной в G [8], если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_{n-1} \leq H_n = G \quad (3.1)$$

такая, что либо $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, либо $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $i = 1, \dots, n$;

$\mathbb{P}$ -субнормальной в G [9], если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп (3.1), в которой $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $i = 1, \dots, n$.

В [10] через $\mathfrak{U}_k$ обозначен класс всех сверхразрешимых групп экспоненты, свободной от $(k+1)$ -ых степеней простых чисел, k – натуральное число, и установлено, что $\mathfrak{U}_k$ – наследственная формация. Отметим, если максимальная подгруппа M группы G является k -модулярно вложенной в G , то $M \in \mathfrak{U}_k$ -субнормальна в G .

Напомним [4], для непустого класса групп $\mathfrak{F}$ подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$ -субнормальной в G , если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп (3.1) такая, что $H_i / (H_{i-1})_{H_i} \in \mathfrak{F}$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$. Однако, если максимальная подгруппа $\mathfrak{U}_k$ -субнормальна в группе G , то она не всегда k -модулярно вложена в G . Это следует из примера 2.1, где для $k = 1$ в $AD = \langle a \rangle \rtimes \langle g \rangle$ максимальная подгруппа

$D \in \mathfrak{U}_k$ -субнормальна, но не k -модулярно вложена в AD .

ЛИТЕРАТУРА

1. Huppert, B. Endliche Gruppen. I. / B. Huppert. – Berlin: Springer, 1967. – 795 s.
2. Schmidt, R. Modulare Untergruppen endlicher Gruppen / R. Schmidt // J. Ill. Math. – 1969. – Vol. 13. – P. 358–377.
3. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
4. Ballester-Bolinches, A. Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Springer-Verlag, 2006. – 385 p.
5. Between Nilpotent and Solvable / H.G. Bray [and others]; edited by M. Weinstein. – Passaic: Polugonal Publishing House, 1982. – 240 p.
6. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin etc: Walter de Gruyter, 1994. – 572 p.
7. Ito, N. Note on (LM)-groups of finite order / N. Ito // Kodai Math. Sem. Reports. – 1951. – P. 1–6.
8. Васильев, А.Ф. О K - $\mathbb{P}$ -субнормальных подгруппах конечных групп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Мат. заметки. – 2014. – Т. 95, № 4. – С. 517–528.
9. Васильев, А.Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.
10. Monakhov, V.S. Finite groups with formational subnormal primary subgroups of bounded exponent / V.S. Monakhov, I.L. Sokhor // Сиб. электрон. матем. изв. – 2023. – Т. 20, № 2. – С. 785–796.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования Республики Беларусь (грант № 20211750 «Конвергенция – 2025»).

Поступила в редакцию 04.04.2024.

Информация об авторах

Васильева Татьяна Ивановна – к.ф.-м.н., доцент

ИССЛЕДОВАНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ В МОЛЕКУЛЯРНОМ ГЕНЕРАТОРЕ КАК АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ МЕТОДОМ КАНОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

С.П. Жогаль, С.И. Жогаль, В.В. Орлов

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

INVESTIGATION OF FLUCTUATIONS IN MOLECULAR GENERATOR AS SELF-OSCILLATORY SYSTEM BY METHOD OF CANONICAL REPRESENTATIONS

S.P. Zhogal, S.I. Zhogal, V.V. Orlov

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Методом канонических разложений исследованы установившиеся случайные колебания в такой автоколебательной системе с двумя с половиной степенями свободы, как молекулярный генератор. Найдены соотношения для нахождения наиболее вероятных значений характеристик стационарного режима колебаний молекулярного генератора с учетом тепловых шумов резонатора и спонтанного излучения пучка активных молекул.

Ключевые слова: автоколебательная система, случайные колебания, метод канонических разложений, амплитуда стационарных случайных колебаний, молекулярный генератор.

Для цитирования: Жогаль, С.П. Исследование флуктуаций в молекулярном генераторе как автоколебательной системе методом канонических разложений / С.П. Жогаль, С.И. Жогаль, В.В. Орлов // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (59). – С. 70–72. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_70. – EDN: NIDZVS

Abstract. Steady-state random oscillations in a self-oscillatory system with two and a half degrees of freedom, such as a molecular generator, have been studied using the method of canonical representations. The relationships have been found for finding the most probable values of the characteristics of the stationary mode of oscillations of a molecular oscillator, taking into account the thermal noise of the resonator and the spontaneous emission of a beam of active molecules.

Keywords: self-oscillatory system, stochastic oscillations, method of canonical representations, amplitude of stationary stochastic oscillations, molecular generator.

For citation: Zhogal, S.P. Investigation of fluctuations in molecular generator as self-oscillatory system by method of canonical representations / S.P. Zhogal, S.I. Zhogal, V.V. Orlov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 2 (59). – P. 70–72. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_70 (in Russian). – EDN: NIDZVS

Введение

В работе [1] рассмотрено применение метода канонических разложений в задачах исследования установившихся случайных колебаний автоколебательных систем с одной степенью свободы. Обобщение применения метода канонических разложений на системы с конечным числом степеней свободы дано в [2]. Рассмотрим применение метода канонических разложений при нахождении наиболее вероятных значений «выходных» характеристик установившегося колебательного процесса в такой сложной автоколебательной системе, как молекулярный генератор.

1 Математическая модель молекулярного генератора как стохастической автоколебательной системы с двумя с половиной степенями свободы

В качестве математической модели, описывающей стохастические колебательные процессы

в молекулярных генераторах, мазерах и лазерах, может быть выбрана следующая система стохастических дифференциальных уравнений [3], [4]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E}{dt^2} + \frac{\omega_1}{Q_1} \frac{dE}{dt} + \omega_1^2 E &= -4\pi \frac{d^2 P}{dt^2} + \sqrt{\varepsilon} \sigma_1 \xi_1(t), \\ \frac{d^2 P}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{dP}{dt} + \omega_2^2 P &= -2\omega_2 \frac{|\mu|^2}{\hbar} NE + \sqrt{\eta} \sigma_2 \xi_2(t), \\ \frac{dN}{dt} + \frac{1}{\tau} (N - N_0) &= \frac{2}{\hbar \omega_2} \frac{dP}{dt} E + \sqrt{\eta} \sigma_2 \xi_2(t), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $E(t)$ – электрическая компонента электромагнитного поля резонатора, Q_1 – добротность резонатора, ω_1 – собственная частота резонатора, $P(t)$ – поляризация в пучке частиц активной среды, усредненная по скоростям частиц и по времени пролета частиц через резонатор, τ – среднее время пролета активной частицы через резонатор (среднее время жизни активной частицы,

среднее время взаимодействия частицы с полем), ω_2 – частота перехода между рабочими уровнями частиц, μ – матричный элемент дипольного момента частицы, $\hbar$ – постоянная Планка, $N(t)$ – разность населенностей верхнего и нижнего уровней в активной среде, усредненная по времени пролета частиц, N_0 – уровень накачки активной среды, $\varepsilon > 0, \eta > 0, \eta \approx \varepsilon^2$ – малые положительные параметры, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – положительные постоянные, члены $\sigma_1 \xi_1(t), \sigma_2 \xi_2(t), \sigma_3 \xi_3(t)$ характеризуют наличие в генераторе теплового шума резонатора, спонтанного излучения пучка частиц активной среды и флуктуаций числа активных частиц в пучке соответственно, $\xi_i(t)$ – стационарные широкополосные случайные процессы.

Уравнения системы (1.1) являются квазилинейными, поскольку Q_1^{-1} при высокой добротности резонатора – величина малая, а поляризация $P(t)$ – на порядок меньше, чем $E(t)$. Поскольку добротность пучка частиц активной среды

$$Q_2 = \frac{\omega_2 \tau}{2}$$

на порядок выше добротности резонатора, то величина $2/\tau = \omega_2/Q_2$ также мала и имеет порядок малости $\omega_2 \eta$. Таким образом, порядки малостей нелинейных частей уравнений системы (1.1) равны соответственно $\omega_1^2 \varepsilon, \omega_2 \eta, \omega_2 \eta$. Введя расстройку γ между собственной частотой резонатора ω_1 и частотой перехода частиц ω_2

$$\gamma = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2}$$

и, полагая ее малой: $\gamma \approx \varepsilon$, получаем следующие стохастические дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E}{dt^2} + \omega_2^2 E &= \gamma \omega_2^2 E - \frac{\omega_1}{Q_1} \frac{dE}{dt} - 4\pi \frac{d^2 P}{dt^2} + \sqrt{\varepsilon} \sigma_1 \xi_1(t), \\ \frac{d^2 P}{dt^2} + \omega_2^2 P &= -\frac{2}{\tau} \frac{dP}{dt} - 2\omega_2 \frac{|\mu|^2}{\hbar} NE + \sqrt{\eta} \sigma_2 \xi_2(t), \\ \frac{dN}{dt} &= \frac{2}{\hbar \omega_2} \frac{dP}{dt} E - \frac{1}{\tau} (N - N_0) + \sqrt{\eta} \sigma_3 \xi_3(t). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Таким образом, получена система стохастических дифференциальных уравнений (1.2), которая описывает динамику процессов в молекулярном генераторе как в автоколебательной системе с двумя с половиной степенями свободы с учетом флуктуационных явлений.

2 Применение метода канонических разложений при исследовании флуктуаций в молекулярном генераторе

Будем искать решение первых двух уравнений системы (1.2) в виде:

$$E(t) = a(t) \cos(\omega_2 t + \theta(t)) = a(t) \cos \psi_1(t),$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\omega_2 a(t) \sin(\omega_2 t + \theta(t)) = -\omega_2 a(t) \sin \psi_1(t),$$

$$P(t) = b(t) \cos(\omega_2 t + \psi(t)) = b(t) \cos \psi_2(t), \quad (2.1)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = -\omega_2 b(t) \sin(\omega_2 t + \psi(t)) = -\omega_2 b(t) \sin \psi_2(t),$$

где $a(t), b(t), \theta(t), \psi(t)$ – также как и $N(t)$ – медленно меняющиеся функции времени.

Используя полученные в [2] соотношения

$$a_k M_t \left[f_k(t, a_1, a_2, \dots, a_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \sin \psi_k \right] = \frac{\sigma_k^2}{4\omega_k},$$

$$M_t \left[f_k(t, a_1, a_2, \dots, a_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \cos \psi_k \right] = 0, \quad (2.2)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n),$$

после подстановки (2.1) вместо $E(t), P(t)$ и их производных из уравнений (1.2) для наиболее вероятных значений a, b, θ, ψ и N , соответствующих установившемуся режиму колебаний в системе (1.1), имеем:

$$\begin{aligned} a M_t \left\{ \left[\gamma \omega_2^2 a \cos \psi_1 + \frac{\omega_1}{Q_1} \omega_2 a \sin \psi_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + 4\pi \omega_2^2 b \cos \psi_2 \right] \sin \psi_1 \right\} &= \frac{\varepsilon \sigma_1^2}{4\omega_2}, \\ M_t \left\{ \left[\gamma \omega_2^2 a \cos \psi_1 + \frac{\omega_1}{Q_1} \omega_2 a \sin \psi_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + 4\pi \omega_2^2 b \cos \psi_2 \right] \cos \psi_1 \right\} &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$b M_t \left\{ \left[\frac{2}{\tau} \omega_2 b \sin \psi_2 - 2\omega_2 \frac{|\mu|^2}{\hbar} Na \cos \psi_1 \right] \sin \psi_2 \right\} = \frac{\eta \sigma_2^2}{4\omega_2},$$

$$M_t \left\{ \left[\frac{2}{\tau} \omega_2 b \sin \psi_2 - 2\omega_2 \frac{|\mu|^2}{\hbar} Na \cos \psi_1 \right] \cos \psi_2 \right\} = 0,$$

$$M_t \left\{ -\frac{2}{\hbar} b \sin \psi_2 a \cos \psi_1 - \frac{1}{\tau} (N - N_0) \right\} = 0.$$

После проведения усреднения из (2.3) получаем уравнения

$$\frac{\omega_1 \omega_2}{2Q_1} a^2 + 2\pi \omega_2^2 ab \sin(\theta - \psi) = \frac{\varepsilon \sigma_1^2}{4\omega_2},$$

$$\frac{1}{2} \gamma \omega_2^2 a + 2\pi \omega_2^2 b \cos(\theta - \psi) = 0,$$

$$\frac{1}{\tau} \omega_2 b^2 - \omega_2 \frac{|\mu|^2}{\hbar} Nab \sin(\psi - \theta) = \frac{\eta \sigma_2^2}{4\omega_2}, \quad (2.4)$$

$$\omega_2 \frac{|\mu|^2}{\hbar} Na \cos(\psi - \theta) = 0,$$

$$\frac{1}{\hbar} ba \sin(\psi - \theta) + \frac{1}{\tau} (N - N_0) = 0.$$

Из последних двух уравнений системы (2.4) для разности населенностей верхнего и нижнего

уровней активной среды имеем:

$$N = N_0 - \frac{\tau}{\hbar} ab. \quad (2.5)$$

Подставляя полученное соотношение (2.5) в уравнения (2.4), для амплитуд колебаний a и b получаем уравнения:

$$\left[\frac{\omega_1 \omega_2}{2Q_1} a^2 - \frac{\varepsilon \sigma_1^2}{4\omega_2} \right]^2 + \frac{1}{4} \gamma^2 \omega_2^4 a^4 = 4\pi^2 \omega_2^4 a^2 b^2, \quad (2.6)$$

$$\left[\frac{\omega_2}{\tau} b^2 - \frac{\eta \sigma_2^2}{4\omega_2} \right]^2 = \frac{\omega_2^2}{\hbar^2} |\mu|^4 \left(N_0 - \frac{\tau}{\hbar} ab \right)^2 a^2 b^2.$$

В случае нулевой расстройки

$$\gamma = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2} = 0$$

получаем следующие уравнения для нахождения a , b и N :

$$\frac{\omega^2}{2Q_1} a^2 - \frac{\varepsilon \sigma_1^2}{4\omega} = 2\pi \omega^2 ab, \quad (2.7)$$

$$\frac{\omega}{\tau} b^2 - \frac{\eta \sigma_2^2}{4\omega} = \frac{\omega}{\hbar} |\mu|^2 N ab, \quad N = N_0 - \frac{\tau}{\hbar} ab,$$

где $\omega = \omega_1 = \omega_2$.

Если пренебречь влиянием флуктуаций ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$), то из (2.7) получаем, что в детерминированном случае для амплитуд установившегося режима колебаний $E(t)$ и $P(t)$, а также разности населенностей верхнего и нижнего уровней N имеют место соотношения:

$$a^2 = \frac{4\pi Q_1 \hbar}{\tau} N_0 - \left(\frac{\hbar}{|\mu| \tau} \right)^2, \quad (2.8)$$

$$b^2 = \frac{\hbar}{4\pi Q_1 \tau} N_0 - \left(\frac{\hbar}{4\pi Q_1 |\mu| \tau} \right)^2, \quad N = \frac{\hbar}{4\pi Q_1 |\mu|^2 \tau}.$$

Соотношения (2.8) вполне согласуются с результатами работы [4]. Из (2.8) следует, что для возбуждения колебаний в молекулярном генераторе необходимо, чтобы уровень накачки активной среды был достаточно высок, а конкретно N_0 должно удовлетворять соотношению

$$N_0 > \frac{\hbar}{4\pi Q_1 |\mu|^2 \tau}.$$

Система (2.7) позволяет находить наиболее вероятные значения таких «выходных» характеристик установившегося колебательного процесса в молекулярном генераторе, как амплитуды электрического поля резонатора $E(t)$ и поляризации пучка молекул $P(t)$. Эти характеристики с учетом влияния флуктуаций следующим образом выражаются через N и N_0 :

$$a^2 = \frac{4\pi Q_1 \hbar}{\tau} (N_0 - N) + \frac{\varepsilon \sigma_1^2 Q_1}{2\omega^3}, \quad (2.9)$$

$$b^2 = |\mu|^2 N (N_0 - N) + \frac{\eta \sigma_2^2 \tau}{4\omega^2}.$$

Как видно из соотношений (2.9), тепловые шумы резонатора приводят к возрастанию амплитуды a электрического поля генератора $E(t)$, аналогичное влияние оказывает и спонтанное излучение молекул активной среды на амплитуду b поляризации $P(t)$.

Получение аналитического решения полной системы (2.7) весьма трудоемкая задача, но система (2.7) применима в численных расчетах при исследовании конкретных квантовых генераторов.

Заключение

На основе метода канонических разложений и методики его применения к системам с конечным числом степеней свободы, изложенной в [2], получены соотношения для нахождения наиболее вероятных значений характеристик стационарного режима колебаний в молекулярном генераторе с учетом тепловых шумов резонатора и спонтанного излучения пучка активных молекул, которые уточняют и обобщают результаты работ [4], [5] при учете флуктуационных явлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жогаль, С.П. Исследование случайных автоколебательных систем с одной степенью свободы методом канонических разложений / С.П. Жогаль, С.И. Жогаль, А.В. Клименко // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 37–41.
2. Жогаль, С.П. О наиболее вероятных характеристиках установившихся процессов в стохастических автоколебательных системах / С.П. Жогаль, С.И. Жогаль // XIX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2019): материалы Международной научной конференции. Могилёв, 14–17 мая 2019 г. – Ч. 2. – Минск: Институт математики НАН Беларуси. – 2019. – С. 74–76.
3. Ораевский, А.Н. Особенности динамики лазеров с насыщающимся поглотителем / А.Н. Ораевский // Квантовая электроника. – 2003. – Т. 33, № 10. – С. 849–855.
4. Малахов, А.Н. Флуктуации в автоколебательных системах / А.Н. Малахов. – Москва: Наука, 1968. – 660 с.
5. Основы теории колебаний / В.В. Мигулин, В.И. Медведев, Е.Р. Мустель, В.Н. Парыгин. – Москва: Наука, 1988. – 384 с.

Поступила в редакцию 29.01.2024.

Информация об авторах

Жогаль Сергей Петрович – к.ф.-м.н., доцент
Жогаль Светлана Ивановна – к.т.н., доцент
Орлов Владимир Васильевич – к.т.н., доцент

ОБ ОТСУТСТВИИ, НЕЕДИНСТВЕННОСТИ И РАЗРУШЕНИИ КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

В.И. Корзюк^{1,2}, Я.В. Рудзько²

¹Белорусский государственный университет, Минск

²Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск

ON THE ABSENCE, NON-UNIQUENESS, AND BLOW-UP OF CLASSICAL SOLUTIONS OF MIXED PROBLEMS FOR THE TELEGRAPH EQUATION WITH A NONLINEAR POTENTIAL

V.I. Korzyuk^{1,2}, J.V. Rudzko²

¹Belarusian State University, Minsk

²Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk

Аннотация. Для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом, заданным в первом квадранте, рассматриваются первая и вторая смешанные задачи, для которых исследуются вопросы, связанные с отсутствием, неединственностью и разрушением классических решений.

Ключевые слова: полулинейное волновое уравнение, смешанная задача, классическое решение, отсутствие решения, неединственность решения, разрушение решения, метод характеристик, энергетические методы, условия сопряжения.

Для цитирования: Корзюк, В.И. Об отсутствии, неединственности и разрушении классических решений смешанных задач для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом / В.И. Корзюк, Я.В. Рудзько // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (59). – С. 73–78. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_73. – EDN: LGNECC

Abstract. For the telegraph equation with a nonlinear potential given in the first quadrant, we consider the first and the second mixed problem, for which we study issues related to the absence, non-uniqueness, and blow-up of classical solutions.

Keywords: semilinear wave equation, mixed problem, classical solution, absence of solution, non-uniqueness of solution, blow-up of solution, method of characteristics, energy methods, matching conditions.

For citation: Korzyuk, V.I. On the absence, non-uniqueness, and blow-up of classical solutions of mixed problems for the telegraph equation with a nonlinear potential / V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 2 (59). – P. 73–78. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_73 (in Russian). – EDN: LGNECC

Introduction

Continuous media are described mainly by nonlinear partial differential equations. The choice of linear or nonlinear equations for describing a medium depends on the role played by nonlinear effects and is determined by the specific physical situation. For example, when describing the propagation of laser pulses, it is necessary to take into account the dependence of the refractive index of the medium on the electromagnetic field intensity. The linearization of nonlinear equations of mathematical physics does not always lead to meaningful results. It may turn out that the linearized equations apply to the physical process in question only for some finite time. Moreover, from the viewpoint of physics, it is often “essentially nonlinear” solutions, qualitatively different from the solutions of linear equations, that are extremely important for nonlinear equations of mathematical physics. These can be stationary solutions of the soliton type, localized in one or several dimensions, or solutions of the wave collapse type,

which describe the spontaneous concentration of energy in small regions of space. Stationary solutions of hydrodynamic equations are also essentially nonlinear [1].

Nonlinear partial differential equations are difficult to study: almost no general techniques exist that work for all such equations, and usually each individual equation has to be studied as a separate problem. A fundamental question for any partial differential equation is the existence and uniqueness of a solution for given boundary conditions. For nonlinear equations these questions are in general very hard [2].

For the existence and uniqueness of global classical solutions of mixed problems for *linear* hyperbolic¹ PDEs, it is necessary and sufficient to satisfy: 1) the smoothness conditions; 2) the matching conditions.

¹ For non-hyperbolic equations, as a rule, it is necessary to specify additional growth conditions on the initial data, e.g., see [5].

However, this is not enough for *non-linear* hyperbolic PDEs. As a rule, we should impose additional conditions on the nonlinearity to establish the existence and uniqueness of global classical solutions for non-linear PDEs. For example, we can take one of the following conditions:

1. Constraint on the growth of the nonlinearity. It includes the Lipschitz condition, the Carathéodory condition, and other similar conditions [6, 7].
2. Sign condition, e.g., [13, p. 670–671].
3. Matching of nonlinearities and initial data, i.e., some classes of nonlinearities require small initial data, e.g., [26–30].

We also note that a global classical solution can exist even if the nonlinearity is a non-differentiable function. In addition, the problem of the existence and uniqueness of global classical solutions is more complicated than for weak ones because, in particular, classical solutions do not admit singularities.

This paper deals with the question of the absence, non-uniqueness, and blow-up of global and local classical solutions of the telegraph equation with a nonlinear potential. This article contains our preliminarily announced results [3], [4].

1 Statement of the problem

In the domain $Q = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ of two independent variables $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$, consider the one-dimensional nonlinear equation

$$(\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)u(t, x) - f(t, x, u(t, x)) = F(t, x), \quad (1.1)$$

$$(t, x) \in Q,$$

where $a \in (0, \infty)$, F is a function given on the set $\bar{Q}$, and f is a function given on the set $\bar{Q} \times \mathbb{R}$. Equation (1.1) is equipped with the initial condition

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0, x) = \psi(x), \quad x \in [0, \infty), \quad (1.2)$$

and the boundary condition

$$B[u](t, 0) = \mu(t), \quad t \in [0, \infty). \quad (1.3)$$

where φ , ψ , and μ are functions given on the half-line $(0, \infty)$ and B is some operator (it can have various forms, but in the present work we assume that $B = I$ or $B = \partial_x$, where I is the identity operator).

2 Nonexistence of solutions

2.1 Inhomogeneous matching conditions

Assertion 2.1. Assume $B = I$. If the homogeneous matching conditions

$$\mu(0) = \varphi(0), \quad \mu'(0) = \psi(0),$$

$$\mu''(0) = \frac{1}{2} \left(f(0, 0, \varphi(0)) + f(0, 0, \mu(0)) \right) +$$

$$+ F(0, 0) + a^2 \varphi(0),$$

fail for given functions f , φ , ψ , μ , and F , then, for any smoothness of these functions, the first mixed problem (1.1)–(1.3) does not have a classical solution defined on $\bar{Q}$.

The **proof** follows from Theorem 1 from [6], [7].

Assertion 2.2. Assume $B = \partial_x$. If the homogeneous matching conditions

$$\mu(0) = \varphi'(0), \quad \mu'(0) = \psi'(0),$$

fail for given functions f , φ , ψ , μ , and F , then, for any smoothness of these functions, the second mixed problem (1.1)–(1.3) does not have a classical solution defined on $\bar{Q}$.

The **proof** can be carried out by the method of characteristics by analogy with that of the preceding assertion.

Remark 2.1. Violation of the matching conditions specified in Assertions 1, 2 is not critical, since in this case we can consider the problem with the conjugation conditions on the characteristic $x - at = 0$ and seek its classical solutions. This question is discussed in more detail in [8]–[11] (for linear equations) and [6], [7] (for nonlinear equations).

2.2 Negative energy

In this subsection we will use the energy method to show some conditions under which the mixed problem (1.1)–(1.3) does not have a global classical solution. This approach was developed by H. Levine, who used it to study a wide class of initial value problems for second-order nonlinear wave equations [12]. This method introduces appropriate integral quantities depending on the time variable t , for which we can then derive differential inequalities, involving convexity, that lead to contradictions [13]. The general idea of the energy method is that the initial data with negative energy means that there is no global solution. For some classes of problems, the negative energy actually means that the initial data are quite “large” [14].

However, this method does not cover all possible cases of the mixed problem (1.1)–(1.3); this approach requires, for example, compactly supported initial data. So, we impose the following restrictions on the nonlinearity, the right side of the equation, the initial data, and the boundary data of the problems.

Condition 2.1. The functions F and μ are identically equal to zero, the function f has the form $f(t, x, z) = -g(z)$, where $g(0) = 0$, and the smoothness conditions $\varphi \in C_c^2([0, \infty))$, $\psi \in C_c^2([0, \infty))$, and $g \in C^1(\mathbb{R})$, are satisfied.

Under condition 1, we introduce the notation

$$G(z) = \int_0^z g(\xi) d\xi, \quad z \in \mathbb{R}.$$

and define the energy of a solution u of the problem (1.1)–(1.3)

$$E : [0, \infty) \ni t \mapsto E(t) =$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)^2 \right) dx$$

$$+ G(u(t, x)) \Big|_{x=0} dx \in \mathbb{R}.$$

Lemma 2.1. Assume that Condition 2.1 holds. Then classical solution u of the problem (1.1)–(1.3) has compact support in space for each time t , i. e., the function $x \mapsto u(t, x)$ has compact support in space for each $t \in [0, \infty)$.

Proof. Let x^* be a real number such that $\text{supp}(\varphi) \cup \text{supp}(\psi) \subseteq [0, x^*]$. It means that for any real number $x > x^*$ the equality $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ holds. For real numbers t_0 and x_0 such that $x_0 - at_0 > x^*$, define

$$e(t) = \int_{x_0 - a(t_0 - t)}^{x_0 + a(t_0 - t)} \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)^2 + (u(t, x))^2 \right) \right) dx, \quad t \in [0, t_0].$$

Then

$$\begin{aligned} e'(t) &= \int_{x_0 - a(t_0 - t)}^{x_0 + a(t_0 - t)} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)(t, x) + \right. \\ &\quad \left. + u(t, x) \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right) dx - \\ &= -a\mathcal{L}(t, x_0 + a(t_0 - t)) - a\mathcal{L}(t, x_0 - a(t_0 - t)) = \\ &= \int_{x_0 - a(t_0 - t)}^{x_0 + a(t_0 - t)} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + u(t, x) \right) \right) dx - \\ &= -a\mathcal{L}(t, x_0 + a(t_0 - t)) - a\mathcal{L}(t, x_0 - a(t_0 - t)) + \\ &\quad + a^2 \mathcal{B}(t, x_0 + a(t_0 - t)) - a^2 \mathcal{B}(t, x_0 - a(t_0 - t)), \quad t \in [0, t_0]. \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t, x) &:= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)^2 \right) + \\ &\quad + (u(t, x))^2, \\ \mathcal{B}(t, x) &:= \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \frac{\partial u}{\partial t}(t, x). \end{aligned}$$

By virtue of the Cauchy – Bunyakovsky – Schwarz inequality

$$\pm \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right)(t, x) \leq \frac{a}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)^2 + \frac{1}{2a} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right)^2,$$

we have

$$e'(t) \leq \int_{x_0 - a(t_0 - t)}^{x_0 + a(t_0 - t)} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) (u(t, x) - g(u(t, x))) \right) dx, \quad t \in [0, t_0].$$

Since $g(0) = 0$ and $u \in C^2(\Omega)$, where

$$\Omega = \text{Conv}\{(t_0, x_0), (0, x_0 - at_0), (0, x_0 + at_0)\},$$

$$g(u(t, x)) \leq C|u(t, x)|, \quad (t, x) \in \Omega$$

for some constant C depending upon $\|u\|_{L^p(\Omega)}$. By analogy with [13, p. 662], we conclude

$e'(t) \leq Ce(t)$. As $e(0) = 0$, Grönwall's inequality [13, p. 708] implies $e \equiv 0$. Therefore $u \equiv 0$ within the set Ω . By virtue of the arbitrariness of t_0 and x_0 such that $x_0 - at_0 > x^*$, $u(t, x) = 0$ for any $x > x^* + at$ and $t \in [0, \infty)$. The proof of the lemma is complete.

Lemma 2.2 (Conservation of energy). Assume that Condition 2.1 holds and u is a classical solution of the problem (1.1)–(1.3). Then $t \mapsto E(t)$ is constant.

Proof. We calculate

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_0^\infty \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right)(t, x) + \right. \\ &\quad \left. + g(u(t, x)) \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right) dx = \\ &= a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(t, x=0)}^{(t, x=\infty)} + \int_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + g(u(t, x)) \right) \right) dx = 0. \end{aligned}$$

The integration by parts in this proof is valid, since u has compact support in space for each time, according to Lemma 2.1.

Assertion 2.3. Assume that Condition 2.1 holds, for some constant $\lambda > 2$ we have the inequality

$$zg(z) \leq \lambda G(z), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Suppose also that the energy is negative

$$\begin{aligned} E(0) &= \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} \left((\varphi'(x))^2 + a^2 (\psi(x))^2 \right) + G(\varphi(x)) \right) dx < 0. \end{aligned}$$

Then the problem (1.1)–(1.3) does not have a classical solution defined on $\bar{Q}$.

The **proof** repeats word for word the proof of Theorem 1 in [13, §12.5.1].

Note that similar results have been obtained for slightly other equations [23]–[25].

3 Nonuniqueness of solutions

In this section, we consider the second mixed problem (1.1)–(1.3) in the following case

$$\begin{aligned} f(t, x, z) &:= z^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad F(t, x) = 0, \\ \varphi &= \psi = \mu \equiv 0, \quad B = \partial_x. \end{aligned} \quad (3.1)$$

It is easy to see that the mixed problem (1.1)–(1.3) has the trivial solution $u \equiv 0$. To find non-trivial solutions of the problem (1.1)–(1.3), consider the ansatz

$$u(t, x) = u(t) = \beta t^\gamma, \quad (t, x) \in \bar{Q}, \quad (3.2)$$

where β and γ are some real numbers. Substituting ansatz (3.2) into Eq. (1.1), we obtain the relation

$$\beta(\gamma - 1)\gamma t^{\gamma-2} = \beta^\alpha t^{\alpha\gamma},$$

which leads to the system of equations

$$\gamma - 2 = \gamma\alpha, \quad \beta(\gamma - 1)\gamma = \beta^\alpha,$$

which has the solution

$$\beta = 2^{1/(\alpha-1)} (\alpha - 3 + 4/(\alpha+1))^{1/(1-\alpha)}, \quad (3.3)$$

$$\gamma = 2/(1-\alpha).$$

Substituting (3.3) into (3.2), we get the function

$$u_p(t, x) = 2^{\frac{1}{\alpha-1}} \left(\frac{\alpha+1}{\alpha^2 - 2\alpha + 1} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} t^{\frac{2}{1-\alpha}}. \quad (3.4)$$

It is easy to see that the function (3.4) satisfies the initial (1.2) and boundary conditions (1.3). Thus, we have constructed one nontrivial solution of the problem (1.1)–(1.3), (3.1), which is determined by the formula (3.4). Moreover, it can be easily shown that the ‘glued’ [15] solution

$$u_{p;s}(t, x) = \begin{cases} 0, & t \in [0, s), \\ u_p(t-s, x), & t \in [s, +\infty), \end{cases}$$

with parameter $s > 0$ also satisfies the problem (1.1)–(1.3), (3.1). Thus, we have constructed the infinite set of nontrivial classical solutions of the problem (1.1)–(1.3), (3.1).

We note that in the problem (1.1)–(1.3), (3.1) the nonlinearity $u \mapsto -u^\alpha$ is not a differentiable function on the set $\mathbb{R}$. It is the fact that makes the construction of a unique local classical solution of the problem (1.1)–(1.3), (3.1) impossible, because in the case of continuously differentiable nonlinearity, we can build a local classical solution (but the matching conditions have to be satisfied). We can do this using the methods proposed in the works [6], [7], [13], [16], [17]. We state the result as the following assertion.

Assertion 3.1. The second mixed problem (1.1)–(1.3) has an infinite number of global classical solutions defined on $\bar{Q}$ and no unique local classical solution.

The **proof** follows from the above argument.

We can use this approach to prove the non-uniqueness of the classical solution of other problems [18], [19].

4 Blow-up of solutions

4.1 Positive nonlinearities

We consider the second mixed problem (1.1)–(1.3) in the following case

$$f(t, x, z) := g(z), \quad g \geq 0, \quad F(t, x) = 0, \quad (4.1)$$

$$\varphi = \psi = \mu \equiv 0, \quad B = \partial_x.$$

To find non-trivial solutions of the problem (1.1)–(1.3), (4.1), consider the ansatz

$$u(t, x) = u(t), \quad (t, x) \in \bar{Q}. \quad (4.2)$$

It leads to the Cauchy problem for an ODE

$$u''(t) = g(u(t)), \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0,$$

which can have the blow-up of non-trivial solutions [20].

For example, we can set

$$g(z) = z^2 + 1, \quad z \in \mathbb{R}, \quad (4.3)$$

and check the conditions specified in the paper [20]. It gives a result that a classical solution of the problem (1.1)–(1.3), (4.1), (4.3) has blow-up in a finite time. We formulate the result of this section as the

following statement.

Assertion 4.1. Assume $g \in C^2([0, \infty))$, $g(x) \geq 0$ for all $x \geq 0$, and the integral $\int_0^\infty \left(\int_0^\xi g(s) ds \right)^{-1/2} d\xi$ converges. The second mixed problem (1.1)–(1.3), (3.1) has a nontrivial solution, which blow-ups in a finite time, i. e., there exists $0 < T_* < +\infty$ such that $\lim_{t \rightarrow T_*-0} u(t, x) = +\infty$.

The **proof** follows from the paper [20] and the above argument.

4.2 Power law nonlinearities

We consider the second mixed problem (1.1)–(1.3) in the following case

$$f(t, x, z) := \lambda |z|^\alpha, \quad \lambda > 0, \quad \alpha > 1, \quad F(t, x) = 0, \quad (4.4)$$

$$\varphi \equiv \varphi_0 > 0, \quad \psi \equiv \psi_0 > 0, \quad \mu \equiv 0, \quad B = \partial_x.$$

To find non-trivial solutions of the problem (1.1)–(1.3), (4.4), again consider the ansatz (4.2). It leads to the Cauchy problem for an ODE

$$u''(t) = \lambda |u(t)|^\alpha, \quad u(0) = \varphi_0, \quad u'(0) = \psi_0. \quad (4.5)$$

According to the Peano existence theorem there exists at least one solution to the problem (4.5) on the interval $[0, T)$. On the other hand, the problem (4.5) satisfies conditions (F1)–(F4) of Theorem 1.1 of the paper [21]. Therefore, the right maximum existence interval $[0, T^*)$ of the solution u of the problem (4.5) is finite (i. e., $T^* < +\infty$), and

$$\lim_{t \rightarrow T_*-0} u(t, x) := \lim_{t \rightarrow T_*-0} u(t) = +\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow T_*-0} \partial_t u(t, x) := \lim_{t \rightarrow T_*-0} u'(t) = +\infty.$$

We can say the same for the nonlinearity of the form $f(t, x, z) := \lambda z |z|^{\alpha-1}$, where $\lambda > 0$ and $\alpha > 1$. We can formulate a more general statement.

Assertion 4.1. Assume the function $h: \mathbb{R}^2 \ni (t, z) \mapsto h(t, z) \in \mathbb{R}$ satisfies the following conditions:

1) For any bounded subset $\Omega \subset \mathbb{R}$ the function $h|_{\mathbb{R} \times \Omega}$ is bounded.

2) There exist $\beta > 1$, $c_0 > 0$, and $c_1 > 0$ such that $h(t, z) \geq c_0 z^\beta - c_1$ for all $t \in \mathbb{R}$ and $z \geq 0$.

Let M_0 be a number such that $h(t, z) \geq \varepsilon_0 > 0$ for all $t \in \mathbb{R}$ and $z \geq M_0$. The second mixed problem (1.1)–(1.3) has a solution that blows up in a finite time (i. e., there exists $0 < T_* < +\infty$ such that $\lim_{t \rightarrow T_*-0} \partial_t u(t, x) = +\infty$), if the following conditions are satisfied:

$$F(t, x) = 0, \quad B = \partial_x, \quad \varphi \equiv \varphi_0 = \text{const} \geq M_0,$$

$$\psi \equiv \psi_0 = \text{const} > 0, \quad \mu \equiv 0, \quad f(t, x, u) = h(t, u).$$

Additionally, if there exists a continuous nondecreasing function $\alpha: [0, +\infty) \mapsto [0, +\infty)$ such that

$h(t, z) \leq \alpha(|z|)$ for all $t \in \mathbb{R}$ and $z \in \mathbb{R}$, then we have $\lim_{t \rightarrow T_*, -0} u(t, x) = +\infty$.

Proof. We will look for a solution u having the form (9). It leads to the following Cauchy problem:

$$u''(t) = h(t, u(t)), \quad u(0) = \varphi_0, \quad u'(0) = \psi_0.$$

Using [21, Theorem 1.1] we conclude that there exists $0 < T_* < +\infty$ such that $\lim_{t \rightarrow T_*, -0} u'(t) = +\infty$, i. e.,

$\lim_{t \rightarrow T_*, -0} \partial_t u(t, x) := \lim_{t \rightarrow T_*, -0} u'(t) = +\infty$. From [21, Theorem 1.1] it also follows $\lim_{t \rightarrow T_*, -0} u'(t) = +\infty$, i. e.,

$\lim_{t \rightarrow T_*, -0} u(t, x) = \lim_{t \rightarrow T_*, -0} u(t) = +\infty$, if there exists a non-

decreasing function $\alpha \in C([0, +\infty))$ such that

$$h(t, z) \leq \alpha(|z|) \text{ for all } (t, z) \in \mathbb{R}^2.$$

To construct an explicit example, consider the following case of the second mixed problem:

$$f(t, x, z) := 2z^3, \quad F \equiv 0, \quad \varphi \equiv 1, \quad \psi \equiv -1, \text{ and } \mu \equiv 0.$$

In which the problem has an explicit classical solution $u_*^1(t, x) = (1-t)^{-1}$ on the set $[0, 1) \times [0, \infty)$ (we can strictly justify this by direct verification). We have

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} u_*^1(t, x) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow 1-0} \partial_t u_*^1(t, x) = +\infty,$$

$$u_*^1 \in C^2([0, 1) \times [0, \infty)).$$

However, this solution can be analytically extended to the entire complex plane (with respect to the argument t), except for the line $t = 1$, where there will be a first-order pole.

Conclusions

In this article, we have shown that the fulfillment of the smoothness conditions and the matching conditions is not enough for the existence of a global classical solution of boundary value problems for the telegraph equation with a nonlinear potential, unlike the linear telegraph equation. Also, these conditions do not lead to the uniqueness of solutions. For the existence and uniqueness of a global classical solution, the nonlinearity of the equation has to satisfy some additional conditions, e. g., the Lipschitz condition. But on the other hand, the Lipschitz condition is not necessary for the existence of a unique global classical solution [22].

REFERENCES

1. *Encyclopedia of Physics: in 5 vol.* / A.M. Prokhorov [et al.], eds. – Moscow, 1992, Vol. 3. – 642 p. (in Russian).
2. *Nonlinear Partial Differential Equation* [Electronic resource]. – Wikipedia. – Mode of access: https://en.wikipedia.org/wiki/Nonlinear_partial_differential_equation. – Date of access: 17 March 2023.
3. Korzyuk, V.I. On the Absence and Non-Uniqueness of Classical Solutions of Mixed Problems for the Telegraph Equation with a Nonlinear

Potential / V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko. – arXiv: 2303.17483.

4. Korzyuk, V.I. On the Non-Uniqueness of Classical Solutions of the Second Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential / V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko // Transformation of the Mechanical-Mathematical and It-Education in the Context of Digitalization: Proceedings of the International Scientific and Practical Conference, Minsk, April 26–27, 2023. – Minsk. – 2023. – Part 1. – P. 29–32.

5. Gelfand, I.M. Generalized Functions: Volume 3. Theory of Differential Equations / I.M. Gelfand, G.E. Shilov. – Academic Press Inc.: New-York, 1967.

6. Korzyuk, V.I. Classical Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential / V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko // Differential Equations. – 2022. – Vol. 58, № 2. – P. 175–186.

7. Korzyuk, V.I. Classical and Mild Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential / V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. – 2023. – Vol. 43, № 1. – P. 48–63.

8. Korzyuk, V.I. Classical Solution of the First Mixed Problem for Second-Order Hyperbolic Equation in Curvilinear Half-Strip with Variable Coefficients / V.I. Korzyuk, I.I. Stolyarchuk // Differential Equations. – 2017. – Vol. 53, № 1. – P. 74–85.

9. Moiseev, E.I. Classical Solution of a Problem with an Integral Condition for the One-Dimensional Wave Equation / E.I. Moiseev, V.I. Korzyuk, I.S. Kozlovskaya // Differential Equations. – 2014. – Vol. 50, № 10. – P. 1364–1377.

10. Korzyuk, V.I. Mixed Problem for a One-Dimensional Wave Equation with Conjugation Conditions and Second-Order Derivatives in Boundary Conditions / V.I. Korzyuk, S.N. Naumavets, V.P. Serikov // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series. – 2020. – Vol. 56, № 3. – P. 287–297.

11. Korzyuk, V.I. Classical Solution to The First Mixed Problem for the One-Dimensional Wave Equation with the Cauchy-Type Conditions / V.I. Korzyuk, I.S. Kozlovskaya, S.N. Naumavets // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series. – 2015. – Vol. 56, № 1. – P. 7–21.

12. Levine, H.A. Instability and Nonexistence of Global Solutions to Nonlinear Wave Equations of the Form $Pu_{tt} = -Au + \mathcal{F}(u)$ / H.A. Levine // Trans. Am. Math. Soc. – 1974. – Vol. 190. – P. 1–21.

13. Evans, L.C. Partial Differential Equations / L.C. Evans. – 2nd ed. Providence, Am. Math. Soc., 2010.

14. Mitidieri, E. A Priori Estimates and Blow-Up of Solutions to Nonlinear Partial Differential Equations and Inequalities / E. Mitidieri,

S.I. Pokhozhaev // Proc. Steklov Inst. Math. – 2001. – Vol. 234. – P. 1–362.

15. Amel'kin, V.V. Differential Equations / V.V. Amel'kin. – Minsk, BSU, 2012. – 288 p. (in Russian).

16. Korzyuk, V.I. Classical Solution of the Initial-Value Problem for a One-Dimensional Quasilinear Wave Equation / V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko // Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus. – 2023. – Vol. 67, № 1. – P. 14–19.

17. Korzyuk, V. Local Classical Solution of the Cauchy problem for a Semilinear Hyperbolic Equation in the Case of Two Independent Variables / V. Korzyuk, J. Rudzko // International Scientific Conference “Ufa Autumn Mathematics School – 2022”: Proceedings of the International Scientific Conference, Ufa, September 28 – October 01, 2022. Ufa, 2022. – Vol. 2. – P. 48–50 (in Russian).

18. Jokhadze, O.M. Global Cauchy Problem for Wave Equations with a Nonlinear Damping Term / O.M. Jokhadze // Differential Equations. – 2014. – Vol. 50, № 1. – P. 57–65.

19. Jokhadze, O.M. On Existence and Nonexistence of Global Solutions of Cauchy – Goursat Problem for Nonlinear Wave Equation / O.M. Jokhadze // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – Vol. 340, № 2. – P. 1033–1045.

20. Mydlarczyk, W. A singular initial value problem for the equation $u^{(n)}(x) = g(u(x))$ / W. Mydlarczyk // Annales Polonici Mathematici. – 1998. – Vol. 68. – P. 177–189.

21. Li, D. Blow-up phenomena of second-order nonlinear differential equations / D. Li, H. Huang // J. Math. Anal. Appl. – 2002. – Vol. 276, № 1. – P. 184–195.

22. Kharibegashvili, S.S. Cauchy Problem for a Generalized Nonlinear Liouville Equation / S.S. Kharibegashvili, O.M. Jokhadze // Differential Equations. – 2011. – Vol. 47, № 12. – P. 1741–1753.

23. Existence and Non-Existence of Solutions for Timoshenko-Type Equations with Variable Exponents / S.N. Antontsev, J. Ferreira, E. Pişkin, S.M.S. Cordeiro // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2021. – Vol. 63. – Article ID: 103341.

24. Yuan, J. Nonexistence of Global Solution to Chern-Simons-Higgs System / J. Yuan // J. Math. Phys. – 2013. – Vol. 54, № 12. – Article ID: 121506.

25. Messaoudi, S.A. Global Nonexistence in a Nonlinearly Damped Wave Equation / S.A. Messaoudi // Applicable Analysis. – 2001. – Vol. 80. – P. 269–277.

26. Jorjadze, G.P. General Solutions of the Cauchy Problem for the Liouville Equation $\varphi_{tt}(t, x) - \varphi_{xx}(t, x) = 1/2m \exp \varphi(t, x)$ / G.P. Jorjadze, A.K. Pogrebkov, M.K. Polivanov // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1978. – Vol. 243, № 2. – P. 318–320.

27. Dzhordzhadze, G.P. Regular Solutions of the Liouville Equation / G.P. Dzhordzhadze // Theor. Math. Phys. – 1979. – Vol. 41. – P. 867–871.

28. Georgiev, V. Existence of Global Solution of a Nonlinear Wave Equation with Short-Range Potential / V. Georgiev, K. Ianakiev // Banach Center Publications. – 1992. – Vol. 27, № 1. – P. 163–167.

29. Yang, S. Global Solutions of Nonlinear Wave Equations with Large Data / S. Yang // Sel. Math. New Ser. – 2015. – Vol. 21. – P. 1405–1427.

30. Miao, S. On Classical Global Solutions of Nonlinear Wave Equations with Large Data / S. Miao, P. Long, P. Yu // International Mathematics Research Notices. – 2019. – Vol. 2019, № 19. – P. 5859–5913.

The article was submitted 20.12.2023.

Информация об авторах

Корзюк Виктор Иванович – д.ф.-м.н., профессор
Рудько Ян Вячеславович – аспирант

УДК 512.542

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_79

EDN: AVUDCG

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С СИСТЕМАМИ N -КВАЗИНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

Н.С. Косенок, И.В. Блинец, И.А. Соболев, Я.А. Купцова

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

FINITE GROUPS WITH SYSTEMS OF N -QUASINORMAL SUBGROUPS

N.S. Kosenok, I.V. Blisnetz, I.A. Sobol, Ya.A. Kuptsova

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу. Подгруппа A группы G называется *квазинормальной* в G , если $AH = HA$ для всех подгрупп H группы G . Если A – подгруппа в G , то A_{qG} – подгруппа в A , порожденная всеми теми ее подгруппами, которые квазинормальны в G . Мы говорим, что подгруппа A является N -квазинормальной в G ($N \leq G$), если для некоторой квазинормальной подгруппы подгруппы T группы G , содержащей A , N *изолирует пару* (T, A_{qG}) , т. е. $N \cap T = N \cap A_{qG}$. Используя эти понятия, мы даем новые характеристики разрешимых и сверхразрешимых конечных групп.

Ключевые слова: конечная группа, разрешимая группа, сверхразрешимая группа, решетка подгрупп, квазинормальная подгруппа, модулярная решетка.

Для цитирования: Конечные группы с системами N -квазинормальных подгрупп / Н.С. Косенок, И.В. Блинец, И.А. Соболев, Я.А. Купцова // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (59). – С. 79–83. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_79. – EDN: AVUDCG

Abstract. Throughout the article, all groups are finite and G always denotes a finite group. A subgroup A of a group G is called *quasinormal* in G if $AH = HA$ for all subgroups H of G . If A is a subgroup of G , then A_{qG} is the subgroup of A generated by all those subgroups of A that are quasinormal in G . We say that the subgroup A is N -quasinormal in G ($N \leq G$), if for some quasinormal subgroup T of G , containing A , N *avoids the pair* (T, A_{qG}) , i. e. $N \cap T = N \cap A_{qG}$. Using these concepts, we give new characterizations of soluble and supersoluble finite groups.

Keywords: finite group, soluble group, supersoluble group, subgroup lattice, quasinormal subgroup, modular lattice.

For citation: Finite groups with systems of N -quasinormal subgroups / N.S. Kosenok, I.V. Blisnetz, I.A. Sobol, Ya.A. Kuptsova // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 2 (59). – P. 79–83. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_79 (in Russian). – EDN: AVUDCG

Введение

Все рассматриваемые в работе группы конечны и G всегда обозначает группу; $\mathcal{L}(G)$ – решетка всех подгрупп группы G . Если $K \leq H \leq G$, то $[H/K]$ обозначает [1] подрешетку в $\mathcal{L}(G)$, состоящую из всех подгрупп $V \leq G$ с условием $K \leq V \leq H$.

Подгруппа A группы G называется *квазинормальной* в G , если $AH = HA$ для всех подгрупп H группы G .

Если A – подгруппа в G , то A_{qG} – подгруппа в A , порожденная всеми теми ее подгруппами, которые квазинормальны в G .

Мы говорим, что подгруппа A является N -квазинормальной в G (Оре [2]), если для некоторой квазинормальной подгруппы подгруппы T группы G , содержащей A , N *изолирует пару* (T, A_{qG}) , т. е. $N \cap T = N \cap A_{qG}$.

Если A – подгруппа в G , то через A_{qG} мы обозначаем подгруппу в A , порожденную всеми теми ее подгруппами, которые квазинормальны в G .

Определение 0.1. Пусть A и N – подгруппы в G . Тогда мы говорим, следуя [3], [4], что A является N -квазинормальной в G , если для некоторой квазинормальной подгруппы T группы G , содержащей A , подгруппа N *изолирует пару* (T, A_{qG}) , т. е. $N \cap T = N \cap A_{qG}$.

Пример 0.2. (i) Всякая нормальная подгруппа является квазинормальной.

(ii) Если подгруппа A квазинормальна в G , то $A_{qG} = A$ и поэтому полагая $T = A$ видим, что A является N -квазинормальной в G для любой подгруппы $N \leq G$.

(iii) p, q, r – попарно различные простые числа, где r делит $q-1$. Пусть $L = C_q \rtimes C_r$ – неабелева группа порядка qr .

Пусть $N = P \rtimes Q_8$, где Q_8 – группа кватернионов порядка 8 и P – простой $\mathbb{F}_p Q_8$ -модуль, точный для Q_8 . Пусть $S = PV$, где V – некоторая квазинормальная подгруппа группы Q_8 , не являющаяся нормальной в Q_8 . Тогда V является квазинормальной в G .

Пусть $G = N \times L = N \times (C_q \rtimes C_r)$ и $A = SC_r$. Тогда подгруппа C_r не является квазинормальной в L ввиду леммы 1.6 ниже и поэтому C_r не является квазинормальной в G . Следовательно, $A_{qG} = S$ и поэтому $N \cap AL = S = N \cap A_{qG} = S$, где подгруппа AL квазинормальна в G леммы 1.1 (4) ниже. Значит, A N -квазинормальна в G , и A не является квазинормальной в G .

Основной целью данной работы является доказательство следующих двух теорем.

Теорема 0.3. *Группа G разрешима в том и только в том случае, когда выполняются следующие два условия:*

(i) G имеет нормальную подгруппу N с разрешимым фактором G/N и

(ii) в G имеется цепь подгрупп

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_t = G,$$

где подгруппа G_i N -квазинормальна в G и решетка $[G_{i+1} / G_i]$ модулярна для всех $i = 0, \dots, t-1$.

Теорема 0.4. *Группа G сверхразрешима в том и только в том случае, когда выполняются следующие два условия:*

(i) G имеет нормальную подгруппу N с сверхразрешимым фактором G/N и

(ii) в G имеется цепь подгрупп

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_t = G,$$

где подгруппа G_i N -квазинормальна в G и решетка $[G_{i+1} / G_i]$ дистрибутивна для всех $i = 0, \dots, t-1$.

1 Некоторые предварительные результаты

Лемма 1.1. Пусть R, A, E – подгруппы в G , где $R \trianglelefteq G$ и A квазинормальна в G . Тогда верны следующие утверждения.

(1) AR/R квазинормальна в G/R .

(2) Если U/R – квазинормальная подгруппа в G/R , то U – квазинормальная подгруппа в G .

(3) $A \cap E$ – квазинормальная подгруппа в E .

(4) Если E – квазинормальная подгруппа в G , то $\langle A, E \rangle$ – квазинормальная подгруппа в G .

(5) Если H/K – главный фактор G и $A_G \leq K < H \leq A^G$, то $H/K \leq Z(G/K)$.

(6) Решетки $[\langle A, E \rangle / A]$ и $[E / (E \cap A)]$ изоморфны.

Доказательство. (1) Пусть H/R – подгруппа в G/R . Тогда H – подгруппа в G и поэтому $AH = HA$, что влечет

$$AH/R = (AR/R)(H/R) = (AR/R)(H/R) = HA/R$$

и поэтому AR/R квазинормальна в G/R .

(2) Пусть H – подгруппа в G . Тогда HR/R – подгруппа в G/R и поэтому

$$UH/R = UHR/R = (U/R)(HR/R) =$$

$$= (HR/R)(U/R) = HUR/R = HU/R,$$

что влечет $HU = UH$ и поэтому U – квазинормальная подгруппа в G .

(3) Пусть H – подгруппа в E . Тогда $HA = AH$ – подгруппа в G и поэтому $E \cap HA = H(A \cap E)$ – подгруппа в E , что влечет $H(A \cap E) = (A \cap E)H$ и поэтому $A \cap E$ – квазинормальная подгруппа в E .

(4) Пусть H – подгруппа в G . Тогда из $HA = AH$ и $HE = EH$ следует, что

$$H\langle A, E \rangle = \langle A, E \rangle H$$

ввиду [5, гл. А, лемма 1.6 (а)]. Следовательно, $\langle A, E \rangle$ – квазинормальная подгруппа в G .

(5) Это утверждение вытекает из теоремы 5.2.3 книги [5].

(6) Это утверждение вытекает из теорем 2.1.5 и 2.1.6 книги [1], поскольку каждая квазинормальная подгруппа является модулярной в этой группе ввиду теоремы 2.1.3 книги [1]. $\square$

Лемма 1.2. Пусть $R \leq A \leq E \leq G$ и $R \trianglelefteq G$. Тогда верны следующие утверждения.

(1) A_{qG} квазинормальна в G .

(2) $A_{qG} \leq E_{qE}$.

(3) $(A/R)_{q(G/R)} = A_{qG}/R$.

Доказательство. (1) Это утверждение является следствием леммы 1.1 (4).

(2) Это утверждение является следствием свойства (1) и леммы 1.1 (3).

(3) Ввиду свойства (1) и леммы 1.1(1), $A_{qG}/R \leq (A/R)_{q(G/R)}$. Пусть теперь $U/R \leq A/R$, где U/R квазинормальна в G/R . Тогда $U \leq A$ и U – квазинормальная подгруппа в G по лемме 1.1 (2). Это означает, что $U \leq A_{qG}$ и, следовательно, $(A/R)_{q(G/R)} \leq A_{qG}/R \leq (A/R)_{q(G/R)}$, что влечет $(A/R)_{q(G/R)} = A_{qG}/R$. $\square$

Лемма 1.3. Пусть A и N – подгруппы в G и для нормальной подгруппы R группы G мы имеем либо $R \leq N$, либо $R \leq A$. Если A N -квазинормальна в G , то AR/R является (NR/R) -квазинормальной в G/R .

Доказательство. Пусть $A \leq T \leq G$, где T квазинормальна в G и $N \cap T = N \cap A_{mG}$. Тогда $AR/R \leq TR/R$, где TR/R квазинормальна в G/R ввиду леммы 1.1 (1). Покажем, что

$$NR/R \cap TR/R = NR/R \cap (AR/R)_{q(G/R)}.$$

Предположим, что $R \leq N$. Тогда

$$(NR/R) \cap (TR/R) = (N/R) \cap (TR/R) =$$

$$= (N \cap TR)/R = R(N \cap T)/R = R(N \cap A_{qG})/R.$$

С другой стороны,

$$R(N \cap A_{qG}) / R \leq RA_{qG} / R \leq (RA)_{qG} / R = \\ = (RA / R)_{q(G/R)}$$

по лемме 1.2 (3). Это означает, что

$$N / R \cap TR / R \leq N / R \cap (AR / R)_{q(G/R)} \leq \\ \leq N / R \cap TR / R$$

и, следовательно,

$$NR / R \cap TR / R = NR / R \cap (AR / R)_{q(G/R)}.$$

Аналогично можно доказать, что

$$NR / R \cap TR / R = NR / R \cap (AR / R)_{q(G/R)}$$

и в случае, когда $R \leq N$. Таким образом, подгруппа AR / R является (NR / R) -квазинормальной в G / R . $\square$

Лемма 1.4. Пусть $A \leq E$ и $L \leq N \leq G$. Если A N -квазинормальна в G , то A L -квазинормальна в G и A $(N \cap E)$ -квазинормальна в E .

Доказательство. Пусть $A \leq T \leq G$, где T квазинормальна в G и $N \cap T = N \cap A_{qG}$. Тогда

$$L \cap T = L \cap N \cap T = L \cap N \cap A_{qG} = L \cap A_{qG},$$

т. е. A L -квазинормальна в G . Кроме того, $A \leq T \cap E$ и $T \cap E$ квазинормальна в E по лемме 1.1 (3). Покажем, что

$$(N \cap E) \cap (T \cap E) = (N \cap E) \cap A_{qE}.$$

Действительно, из

$$N \cap T = N \cap A_{qG}$$

следует, что

$$(N \cap E) \cap (T \cap E) = (N \cap E) \cap A_{qG},$$

где $(N \cap E) \cap A_{qG} \leq (N \cap E) \cap A_{qE}$ по лемме 1.2 (2)

и, следовательно,

$$(N \cap E) \cap (T \cap E) \leq (N \cap E) \cap A_{qE} \leq \\ \leq (N \cap E) \cap (T \cap E).$$

Итак,

$$(N \cap E) \cap (T \cap E) = (N \cap E) \cap A_{qE}.$$

Следовательно, A $(N \cap E)$ -квазинормальна в E . $\square$

Напомним, что подгруппа A группы G называется $\mathcal{U}$ -нормальной в G [6], если каждый главный фактор G между A^G и A_G циклический.

Следующая лемма является следствием теорем 1.3 и 1.4 из [6].

Лемма 1.5. Если A и B – $\mathcal{U}$ -нормальные подгруппы группы G , то пересечение $A \cap B$ также $\mathcal{U}$ -нормально в G .

Подгруппа M группы G называется модулярной в G , если M – модулярный элемент (в смысле Куроши [1, стр. 43]) решетки $\mathcal{L}(G)$, т. е.

(1) $\langle X, M \cap Z \rangle = \langle X, M \rangle \cap Z$ для всех $X \leq G, Z \leq G$ таких, что $X \leq Z$, и

(2) $\langle M, Y \cap Z \rangle = \langle M, Y \rangle \cap Z$ для всех $Y \leq G, Z \leq G$ таких, что $M \leq Z$.

Лемма 1.6 [1, Теорема 5.1.1]. Подгруппа A квазинормальна в G тогда и только тогда, когда A модулярна и субнормальна в G .

2 Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 0.3. Если

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_t = G$$

– главный ряд разрешимой группы G , то условия (i) и (ii), очевидно, выполнены для G_i и $[G_{i+1} / G_i]$.

Покажем теперь, что если условия (i) и (ii) выполнены в G , то G является разрешимой группой. Предположим, что не так и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда мы можем считать, не теряя общности, что

$$1 = G_0 < G_1 < \dots < G_t = G.$$

(1) Если R – минимальная нормальная подгруппа в G и $R \leq N$, то G / R разрешима.

В G / R рассмотрим ряд

$$G_0 R / R \leq G_1 R / R \leq \dots \leq G_t R / R = G / R.$$

Прежде заметим, что $G_i R / R$ является N / R -квазинормальной в G / R для всех $i = 0, \dots, t-1$ ввиду леммы 1.3, где $(G / R) / (N / R) \cong G / N$ разрешима.

Подгруппа R , очевидно, является квазинормальной в G (см. пример 0.2 (i)) и поэтому решетки $[G_{i+1} / G_i]$ и $[(G_{i+1} R / R) / (G_i R / R)]$ изоморфны ввиду леммы 1.1 (6). Таким образом, решетка $[(G_{i+1} R / R) / (G_i R / R)]$ является модулярной для всех $i = 0, \dots, t-1$. Следовательно, условия (i) и (ii) выполнены в G / R и поэтому G / R является разрешимой группой по выбору G .

(2) G_{t-1} разрешима.

Ввиду леммы 1.4, подгруппа G_i является $(N \cap G_{i-1})$ -квазинормальной в G_{i-1} , где

$$G_{i-1} / (N \cap G_{i-1}) \cong NG_{i-1} / N \leq G / N$$

разрешима. Таким образом, условия (i) и (ii) выполнены для G_{i-1} и поэтому G_{i-1} разрешима ввиду выбора G .

(3) R является неабелевой группой и $R \not\leq G_{t-1}$ (Это вытекает из утверждений (1) и (2) и выбора группы G).

(4) Если V – $\mathcal{U}$ -нормальная подгруппа в G и $V \leq R$, то либо $V = 1$, либо $V = R$.

Предположим, что $1 < V < R$. Тогда $V_G = 1$ и $V^G = R$ ввиду минимальности R . Следовательно, R – циклическая группа, что противоречит утверждению (3). Таким образом, имеет место (4).

(5) Если T – квазинормальная подгруппа в G , содержащая G_{t-1} , и $N \cap T = N \cap (G_{t-1})_{qG}$, то $R \cap T = R \cap (G_{t-1})_{qG} = 1$. В частности, $R \cap G_{t-1} = 1$.

Из $N \cap T = N \cap (G_{t-1})_{qG}$ вытекает, что $R \cap T = R \cap (G_{t-1})_{qG}$ по лемме 1.4. Предположим, что $V := R \cap (G_{t-1})_{qG} \neq 1$. Ввиду лемм 1.1 (5) и 1.2 (1), $(G_{t-1})_{qG}$ – $\mathcal{U}$ -нормальная подгруппа в G . Следовательно, V – $\mathcal{U}$ -нормальная подгруппа в

G по лемме 1.5. Но тогда $V=R$ ввиду утверждения (4) поскольку $V \neq 1$. Следовательно, $R \leq (G_{t-1})_{qG} \leq G_{t-1}$, что противоречит утверждению (3). Таким образом, мы имеем (5).

(6) $G = R \rtimes G_{t-1}$.

Покажем, что условия (i) и (ii) выполнены для $E := R \rtimes G_{t-1}$. Рассмотрим ряд

$$1 = G_0 < G_1 < \dots < G_{t-1} < E.$$

Ввиду леммы 1.4, все подгруппы G_i являются $(N \cap E)$ -квазинормальными в E , где фактор

$$E / (N \cap E) \cong NE / N \leq G / N$$

разрешим. Кроме того, решетка $[E / G_{t-1}]$ является подрешеткой в $[G_t / G_{t-1}]$ и поэтому она модулярна поскольку модулярна решетка $[G_t / G_{t-1}]$. Следовательно, условия (i) и (ii) выполнены для E . Если $E < G$, то E разрешима ввиду выбора G и тогда R – абелева группа, что противоречит утверждению (3). Значит, $G = R \rtimes G_{t-1}$.

Заключительное противоречие. Из утверждений (5) и (6) вытекает, что

$$T = T \cap (R \rtimes G_{t-1}) = G_{t-1}(T \cap R) = G_{t-1}$$

– квазинормальная в G подгруппа и $R \not\leq (G_{t-1})_G$. Значит, G_{t-1} $\mathfrak{U}$ -нормальна в G по лемме 1.1 (5). Предположим, что $R \leq (G_{t-1})^G$. Тогда из G -изоморфизма

$$R/1 = (G_{t-1})_G R / (G_{t-1})_G$$

вытекает, что R – циклическая группа. Это противоречие показывает, что $R \not\leq (G_{t-1})^G$, и тогда из утверждений (1) и (6) и выбора группы G вытекает, что $G_{t-1} = (G_{t-1})^G$ – нормальная подгруппа в $G = R \rtimes G_{t-1}$ и модулярная решетка $[G_t / G_{t-1}]$ изоморфна решетке всех подгрупп $\mathcal{L}(G / G_{t-1})$ фактор группы G / G_{t-1} . Таким образом, G / G_{t-1} – разрешимая группа по теореме 2.4.4 книги [1]. Но

$$R \cong RG_{t-1} / G_{t-1} \leq G / G_{t-1}$$

и поэтому R – абелева группа, что невозможно ввиду утверждения (3). $\square$

Доказательство теоремы 0.4. Если

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_t = G$$

– главный ряд сверхразрешимой группы G , то условия (i) и (ii), очевидно, выполнены для G_i и $[G_{i+1} / G_i]$.

Покажем теперь, что если условия (i) и (ii) выполнены в G , то G является сверхразрешимой группой. Предположим, что это не так, и пусть G – контрпример минимального порядка. Тогда $N \neq 1$. Пусть R – минимальная подгруппа G , содержащаяся в N . Тогда для некоторого i имеет место $R \not\leq G_i$ и $R \leq G_{i+1}$.

(1) G / R сверхразрешима и подгруппа R не является циклической.

В G / R рассмотрим ряд

$$G_0 R / R \leq G_1 R / R \leq \dots \leq G_t R / R = G / R.$$

Прежде заметим, что $G_j R / R$ является N / R -квазинормальной в G / R для всех $j = 0, \dots, t-1$ ввиду леммы 1.3, где

$$(G / R) / (N / R) \cong G / N$$

сверхразрешима. Решетка $[G_{j+1} / G_j]$ является дистрибутивной по условию.

Подгруппа R , очевидно, является квазинормальной в G (см. пример 0.2 (i)) и поэтому решетки $[G_{j+1} / G_j]$ и $[(G_{j+1} R / R) / (G_j R / R)]$ изоморфны ввиду леммы 1.1 (6). Таким образом, решетка $[(G_{j+1} R / R) / (G_j R / R)]$ является дистрибутивной для всех $j = 0, \dots, t-1$. Следовательно, условия (i) и (ii) выполнены в G / R и поэтому G / R является сверхразрешимой группой по выбору G . Более того, выбор G означает, подгруппа R не является циклической.

(2) Если V – $\mathfrak{U}$ -нормальная подгруппа в G и $V \leq R$, то либо $V = 1$, либо $V = R$.

Предположим, что $1 < V < R$. Тогда $V_G = 1$ и $V^G = R$ ввиду минимальности R . Следовательно, R – циклическая группа, что противоречит утверждению (1). Таким образом, имеет место (2).

(3) G_j R -квазинормальна в G для всех j (поскольку $R \leq N$, то это вытекает из леммы 1.4).

Заключительное противоречие. Пусть $G_i \leq T$, где T – квазинормальная в G подгруппа и

$$R \cap T = R \cap (G_i)_{qG}.$$

Предположим, что

$$V := R \cap (G_i)_{qG} \neq 1.$$

Ввиду лемм 1.1 (5) и 1.2 (1), $(G_i)_{qG}$ – $\mathfrak{U}$ -нормальная подгруппа в G . Следовательно, V – $\mathfrak{U}$ -нормальная подгруппа в G по лемме 1.5. Но тогда $V=R$ ввиду утверждения (2), поскольку $V \neq 1$. Следовательно, $R \leq (G_i)_{qG} \leq G_i$, что противоречит определению индекса i . Таким образом, $V = 1$ и поэтому

$$R \cap G_i \leq R \cap T = R \cap (G_i)_{qG} = 1.$$

Значит, решетки $[R/1 = R / (R \cap G_i)]$ и $[G_i R / G_i]$ изоморфны ввиду леммы 1.1 (6), поскольку каждая нормальная подгруппа является в группе ввиду примера 0.2(i). Понятно также, что $[G_i R / G_i]$ является подрешеткой в $[G_{i+1} / G_i]$.

Таким образом, решетка $[G_{i+1} / G_i]$ дистрибутивна и поэтому дистрибутивна решетка $[R/1]$, что влечет цикличность группы R по теореме 1.2.3 книги [1]. И в этом случае группа G сверхразрешима, снова ввиду утверждения (1), что противоречит выбору группы G . $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Walter de Gruyter, Berlin, 1994.
2. Ore, O. Contributions in the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math J. – 1939. – Vol. 5. – P. 431–460.
3. A characterization of soluble PST-groups / Zh. Wang, A-Ming Liu, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Bull. Austral. Math. Soc. – In Press.
4. Characterization of σ -soluble PST-groups / A-Ming Liu, Zh. Wang, V.G. Safonov, A.N. Skiba // J. Group Theory. – In Press.
5. Doerk, K. Finite Soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes // Walter de Gruyter, Berlin. – New York, 1992.
6. Skiba, A.N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2020. – Vol. 181. – P. 69–85.

Исследования четвертого автора выполнены при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф24КИ-021).

Поступила в редакцию 12.02.2024.

Информация об авторах

Косенок Николай Сергеевич – к.ф.-м.н., доцент
Близнец Игорь Васильевич – к.ф.-м.н., доцент
Соболь Ирина Александровна – ст. преподаватель
Купцова Яна Александровна – студентка

К НЕОБХОДИМЫМ УСЛОВИЯМ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ ДВУХСТУПЕНЧАТОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

К.Б. Мансимов^{1,2}, А.Ф. Мансимзаде¹

¹Бакинский государственный университет

²Институт Систем управления Министерства Науки и Образования Азербайджана, Баку

TO THE NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS IN ONE TWO-STAGE CONTROL PROBLEM FOR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF VOLTERRA TYPE

K.B. Mansimov^{1,2}, A.F. Mansimzade¹

¹Baku State University

²Institute of Control Systems of the Ministry of Science and Education of Azerbaijan, Baku

Аннотация. Рассматривается одна двухэтапная задача оптимального управления, описываемая на различных отрезках времени различными системами интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. При различных предположениях на данные задачи построены два типа формул приращения функционала качества. Исследуя их на специальных вариациях управления, доказаны аналоги принципа максимума Л.С. Понтрягина и линеаризованного условия максимума.

Ключевые слова: двухэтапная задача оптимального управления, интегро-дифференциальное уравнение, формула приращения, допустимое управление, необходимое условие оптимальности, оптимальное управление.

Для цитирования: Мансимов, К.Б. К необходимым условиям оптимальности в одной двухступенчатой задаче управления интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра / К.Б. Мансимов, А.Ф. Мансимзаде // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (59). – С. 84–89. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_84. – EDN: BMLYHS

Abstract. The paper considers one two-stage optimal control problem, described at different time intervals by various integro-differential equations of the Volterra type. Under different assumptions two types of formulas for the increment of the quality functional are constructed for these problems. Studying them on various control variations, the analogues of the maximum principle of L.S. Pontryagin and the linearized maximum condition are proved.

Keywords: two-stage control problem, integro-differential equation, increment formula, admissible control, necessary optimality condition, optimal control.

For citation: Mansimov, K.B. To the necessary optimality conditions in one two-stage control problem for integro-differential equations of Volterra type / K.B. Mansimov, A.F. Mansimzade // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 2 (59). – P. 84–89. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_84 (in Russian). – EDN: BMLYHS

Введение

В работах [1]–[5] и др. исследованы многоэтапные (ступенчатые) задачи оптимального управления, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями и установлены ряд необходимых условий оптимальности.

В предлагаемой работе ставится и рассматривается одна двухэтапная (ступенчатая) задача оптимального управления, описываемая интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра.

Получены необходимые условия оптимальности первого порядка.

1 Постановка задачи

Пусть $T_1 = [t_0, t_1]$, $T_2 = [t_1, t_2]$ – заданные отрезки, $U_1 \subset R^r$, $U_2 \subset R^q$ – заданные непустые и ограниченные множества.

Предположим, что двухэтапный (ступенчатый) процесс описывается системами интегро-дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1(t), u_1(t)) + \int_{t_0}^t K_1(t, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau)) d\tau, \quad t \in T_1, \quad (1.1)$$

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad (1.2)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(t, x_2(t), u_2(t)) + \int_{t_1}^t K_2(t, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau)) d\tau, \quad t \in T_2. \quad (1.3)$$

$$x_2(t_1) = G(x_1(t_1)). \quad (1.4)$$

Здесь $f_i(t, x_i, u_i)$, $K_i(t, \tau, x_i, u_i)$, $i = 1, 2$ – заданные n -мерные вектор-функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными

производными по $x_i, i=1,2$ соответственно, $G(x_1)$ – заданная непрерывно-дифференцируемая n -мерная вектор-функция, x_{10} – заданный постоянный вектор, $u_1(t)(u_2(t))$ – кусочно-непрерывный (с конечным числом точек разрыва первого рода) $r(q)$ -мерный вектор управляющих воздействий со значениями из множества $U_1(U_2)$, т. е.

$$\begin{aligned} u_1(t) &\in U_1 \subset R^n, \quad t \in T_1, \\ u_2(t) &\in U_2 \subset R^q, \quad t \in T_2. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Пару $(u_1(t), u_2(t))$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $(u_1(t), u_2(t))$ соответствует единственное кусочно-гладкое (в смысле, например [6], [7]) решение $(x_1(t), x_2(t))$ задачи (1.1)–(1.4).

На решениях задачи (1.1)–(1.4), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим функционал

$$\begin{aligned} J(u_1, u_2) &= \varphi_1(x_1(t_1)) + \varphi_2(x_2(t_2)) + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^t F_1(t, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau)) d\tau dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^t F_2(t, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau)) d\tau dt. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь $\varphi_i(x_i), i=1,2$ – заданные непрерывно-дифференцируемые скалярные функции, $F_i(t, \tau, x_i, u_i), i=1,2$ – заданные скалярные функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по $x_i, i=1,2$ соответственно.

Допустимое управление $(u_1(t), u_2(t))$, доставляющее минимальное значение функционалу (1.6) при ограничениях (1.1)–(1.4), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u_1(t), u_2(t), x_1(t), x_2(t))$ – оптимальным процессом.

2 Формула приращения функционала качества

Пусть $(u_1(t), u_2(t), x_1(t), x_2(t))$ и

$$(\bar{u}_1(t) = u_1(t) + \Delta u_1(t), \bar{u}_2(t) = u_2(t) + \Delta u_2(t),$$

$$\bar{x}_1(t) = x_1(t) + \Delta x_1(t), \bar{x}_2(t) = x_2(t) + \Delta x_2(t))$$

– некоторые допустимые процессы.

Запишем приращение минимизируемого функционала:

$$\begin{aligned} \Delta J(u_1, u_2) &= J(\bar{u}_1, \bar{u}_2) - J(u_1, u_2) = \\ &= \varphi_1(\bar{x}_1(t_1)) - \varphi_1(x_1(t_1)) + \varphi_2(\bar{x}_2(t_2)) - \varphi_2(x_2(t_2)) + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^t (F_1(t, \tau, \bar{x}_1(\tau), \bar{u}_1(\tau)) - F_1(t, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau))) d\tau dt + \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^t (F_2(t, \tau, \bar{x}_2(\tau), \bar{u}_2(\tau)) - F_2(t, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau))) d\tau dt.$$

Из введенных обозначений ясно, что приращение $(\Delta x_1(t), \Delta x_2(t))$ траектории $(x_1(t), x_2(t))$ является решением задачи

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_i(t) &= [f_i(t, \bar{x}_i(t), \bar{u}_i(t)) - f_i(t, x_i(t), u_i(t))] + \\ &+ \int_{t_{i-1}}^t [K_i(t, \tau, \bar{x}_i(\tau), \bar{u}_i(\tau)) - \\ &- K_i(t, \tau, x_i(\tau), u_i(\tau))] d\tau, \quad i=1,2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\Delta x_1(t_0) = 0, \quad \Delta x_2(t_1) = G(\bar{x}_1(t_1)) - G(x_1(t_1)). \quad (2.3)$$

Пусть $\psi_i(t), i=1,2$ – пока неизвестные n -мерные вектор-функции. Учитывая это предположение, из соотношений (2.2) получим, что

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi'_i(t) \Delta \dot{x}_i(t) dt &= \\ &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi'_i(t) [f_i(t, \bar{x}_i(t), \bar{u}_i(t)) - f_i(t, x_i(t), u_i(t))] dt + \\ &+ \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi'_i(t) \left(\int_{t_{i-1}}^t [K_i(t, \tau, \bar{x}_i(\tau), \bar{u}_i(\tau)) - \right. \\ &\left. - K_i(t, \tau, x_i(\tau), u_i(\tau))] d\tau \right) dt, \quad i=1,2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Применяя формулу дифференцирования по частям в определенном интеграле и учитывая начальные условия (2.3), получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \psi'_1(t) \Delta \dot{x}_1(t) dt &= \\ &= \psi'_1(t_1) \Delta x_1(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}'_1(t) \Delta x_1(t) dt, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \psi'_2(t) \Delta \dot{x}_2(t) dt &= \psi'_2(t_2) \Delta x_2(t_2) - \\ &- \psi'_2(t_1) (G(\bar{x}_1(t_1)) - G(x_1(t_1))) - \int_{t_1}^{t_2} \dot{\psi}'_2(t) \Delta x_2(t) dt. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Далее, применяя формулу Дирихле (см. например, [8]) доказывается справедливость тождеств

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi'_i(t) \left(\int_{t_{i-1}}^t [K_i(t, \tau, \bar{x}_i(\tau), \bar{u}_i(\tau)) - \right. \\ &\left. - K_i(t, \tau, x_i(\tau), u_i(\tau))] d\tau \right) dt = \\ &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_t^{t_i} \psi'_i(\tau) [K_i(\tau, t, \bar{x}_i(t), \bar{u}_i(t)) - \right. \\ &\left. - K_i(\tau, t, x_i(t), u_i(t))] d\tau \right) dt, \quad i=1,2, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^t [F_i(t, \tau, \bar{x}_i(\tau), \bar{u}_i(\tau)) - F_i(t, \tau, x_i(\tau), u_i(\tau))] d\tau \right) dt = \\ &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_t^{t_i} [F_i(\tau, t, \bar{x}_i(t), \bar{u}_i(t)) - \right. \\ &\left. - F_i(\tau, t, x_i(t), u_i(t))] d\tau \right) dt, \quad i=1,2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Введем аналоги функции Гамильтона – Понтрягина в виде

$$H_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t)) = \psi'_i(t) f_i(t, x_i(t), u_i(t)) + \\ + \int_t^{t_i} \psi'_i(\tau) K_i(\tau, t, x_i(t), u_i(t)) d\tau - \\ - \int_t^{t_i} F_i(\tau, t, x_i(t), u_i(t)) d\tau, \quad i = 1, 2.$$

Учитывая введенные обозначения и тождества (2.5)–(2.8) приращение (2.1) функционала (1.6) записывается в виде

$$\Delta J(u_1, u_2) = \varphi_1(\bar{x}_1(t_1)) - \varphi_1(x_1(t_1)) + \\ + \varphi_2(\bar{x}_2(t_2)) - \varphi_2(x_2(t_2)) - \\ - \int_{t_0}^{t_1} [H_1(t, \bar{x}_1(t), \bar{u}_1(t), \psi_1(t)) - \\ - H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))] dt + \\ - \int_{t_1}^{t_2} [H_2(t, \bar{x}_2(t), \bar{u}_2(t), \psi_2(t)) - \\ - H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))] dt + \\ + \psi'_1(t_1) \Delta x_1(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}'_1(t) \Delta x_1(t) dt + \\ + \psi'_2(t_2) \Delta x_2(t_2) - \int_{t_1}^{t_2} \dot{\psi}'_2(t) \Delta x_2(t) dt \\ - \psi'_2(t_1) (G(\bar{x}_1(t_1)) - G(x_1(t_1))). \quad (2.9)$$

Займемся преобразованием отдельных слагаемых в формуле приращения (2.9). Имеем

$$H_i(t, \bar{x}_i(t), \bar{u}_i(t), \psi_i(t)) - H_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t)) = \\ = H_i(t, x_i(t), \bar{u}_i(t), \psi_i(t)) - H_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t)) + \\ + \frac{\partial H'_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t))}{\partial x_i} \Delta x_i(t) + \\ + \left[\frac{\partial H_i(t, x_i(t), \bar{u}_i(t), \psi_i(t))}{\partial x_i} - \right. \\ \left. - \frac{\partial H_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t))}{\partial x_i} \right] \Delta x_i(t) + \\ + o_i(\|\Delta x_i(t)\|), \quad i = 1, 2,$$

$$\varphi_i(\bar{x}_i(t_i)) - \varphi_i(x_i(t_i)) = \frac{\partial \varphi'_i(x_i(t_i))}{\partial x_i} \Delta x_i(t_i) + \\ + o_{i+2}(\|\Delta x_i(t_i)\|), \quad i = 1, 2, \quad (2.11)$$

$$\psi'_2(t_1) G(\bar{x}_1(t_1)) - G(x_1(t_1)) = \quad (2.12)$$

$$= \psi'_2(t_1) \frac{\partial G(x_1(t_1))}{\partial x_1} \Delta x_1(t_1) + o_3(\|\Delta x_1(t_1)\|).$$

Здесь $\|\alpha\|$ норма вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)'$, определяемая формулой $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$, а $o(\alpha)$ – величина более высокого порядка малости, чем α , т. е. $\frac{o(\alpha)}{\alpha} \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$.

Принимая во внимания разложения (2.10)–(2.12) в формуле приращения (2.9) функционала (1.6), будем иметь

$$\Delta J(u_1, u_2) = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \varphi'_i(x_i(t_i))}{\partial x_i} \Delta x_i(t_i) - \\ - \sum_{i=1}^2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\psi}'_i(t) \Delta x_i(t) dt + \psi'_1(t_1) \Delta x_1(t_1) + \\ + \psi'_2(t_2) \Delta x_2(t_2) - \psi'_2(t_1) \frac{\partial G(x_1(t_1))}{\partial x_1} \Delta x_1(t_1) - \\ - \sum_{i=1}^2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} [H_i(t, x_i(t), \bar{u}_i(t), \psi_i(t)) - \\ - H_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t))] dt - \\ - \sum_{i=1}^2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{\partial H'_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t))}{\partial x_i} \Delta x_i(t) dt - \\ - \sum_{i=1}^2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\frac{\partial H'_i(t, x_i(t), \bar{u}_i(t), \psi_i(t))}{\partial x_i} - \right. \\ \left. - \frac{\partial H'_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t))}{\partial x_i} \right] \Delta x_i(t) dt + \\ + \int_{t_0}^{t_1} o_1(\|\Delta x_1(t)\|) dt - \int_{t_1}^{t_2} o_2(\|\Delta x_2(t)\|) dt + \\ + o_3(\|\Delta x_1(t_1)\|) + o_4(\|\Delta x_2(t_2)\|) - o_5(\|\Delta x_1(t_1)\|). \quad (2.13)$$

Предположим, что вектор-функции $\psi_i(t)$, $i = 1, 2$ удовлетворяют соотношениям

$$\dot{\psi}_i(t) = - \frac{\partial H_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t))}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \quad (2.14)$$

$$\psi_1(t_1) = - \frac{\partial \varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1} + \frac{\partial G'(x_1(t_1))}{\partial x_1} \psi_2(t_1),$$

$$\psi_2(t_2) = - \frac{\partial \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2}. \quad (2.15)$$

Задачу (2.14)–(2.15) назовем сопряженной системой для рассматриваемой задачи оптимального управления.

При выполнении соотношений (2.14)–(2.15) формула приращения (2.13) принимает вид

$$\Delta J(u_1, u_2) = - \sum_{i=1}^2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} [H_i(t, x_i(t), \bar{u}_i(t), \psi_i(t)) - \\ - H_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t))] dt - \\ - \sum_{i=1}^2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\frac{\partial H'_i(t, x_i(t), \bar{u}_i(t), \psi_i(t))}{\partial x_i} - \right. \\ \left. - \frac{\partial H'_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi_i(t))}{\partial x_i} \right] \Delta x_i(t) dt - \\ - \int_{t_0}^{t_1} o_1(\|\Delta x_1(t)\|) dt - \int_{t_1}^{t_2} o_2(\|\Delta x_2(t)\|) dt + \\ + o_3(\|\Delta x_1(t_1)\|) + o_4(\|\Delta x_2(t_2)\|) - o_5(\|\Delta x_1(t_1)\|). \quad (2.16)$$

Полученная формула приращения (2.16) позволяет доказать необходимое условие опти-

мальности в форме принципа максимума Л.С. Понтрягина.

Сначала получим оценку приращение траектории $(x_1(t), x_2(t))$.

3 Оценка приращения траектории

Предположим, что $\Delta u_2(t) = 0$.

Тогда из тождеств (2.2)–(2.3) переходя к эквивалентным интегральным соотношениям, получим, что

$$\begin{aligned} \Delta x_1(t) = & \int_{t_0}^t [f_1(\tau, \bar{x}_1(\tau), \bar{u}_1(\tau)) - f_1(\tau, x_1(\tau), u_1(\tau))] d\tau + \\ & + \int_{t_0}^t \left[\int_{\tau}^t [K_1(s, \tau, \bar{x}_1(\tau), \bar{u}_1(\tau)) - \right. \\ & \left. - K_1(s, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau))] ds \right] d\tau, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \Delta x_2(t) = & \int_{t_1}^t [f_2(\tau, \bar{x}_1(\tau), u_2(\tau)) - f_2(\tau, x_2(\tau), u_2(\tau))] d\tau + \\ & + \int_{t_1}^t \left[\int_{\tau}^t [K_2(s, \tau, \bar{x}_2(\tau), u_2(\tau)) - \right. \\ & \left. - K_2(s, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau))] ds \right] d\tau + G(\bar{x}_1(t_1)) - G(x_1(t_1)). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из соотношений (3.1) и (3.2) переходя к норме, используя условие Липшица, и применяя лемму Гронуолла – Вендроффа (см. например, [9]) получим, что

$$\begin{aligned} & \|\Delta x_1(t)\| \leq \\ & \leq L_1 \left[\int_{t_0}^t \|f_1(\tau, x_1(\tau), \bar{u}_1(\tau)) - f_1(\tau, x_1(\tau), u_1(\tau))\| d\tau + \right. \\ & \left. + \int_{t_0}^t \left[\int_{\tau}^t \|K_1(s, \tau, x_1(\tau), \bar{u}_1(\tau)) - \right. \right. \\ & \left. \left. - K_1(s, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau))\| ds \right] d\tau, \right. \\ & \left. \|\Delta x_2(t)\| = L_2, \|\Delta x_1(t_1)\|. \right. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь $L_i = \text{const} > 0$, $i = 1, 2$ – некоторые постоянные.

Теперь пусть в рассматриваемой задаче $\Delta u_2(t) \neq 0$, а $\Delta u_1(t) = 0$.

Тогда из соотношений (2.2)–(2.3) следует, что $\Delta x_1(t) = 0$, а $\Delta x_2(t)$ определяется из соотношения

$$\begin{aligned} \Delta x_2(t) = & \int_{t_1}^t [f_2(\tau, \bar{x}_1(\tau), \bar{u}_2(\tau)) - f_2(\tau, x_2(\tau), u_2(\tau))] d\tau + \\ & + \int_{t_1}^t \left[\int_{\tau}^t [K_2(s, \tau, \bar{x}_2(\tau), \bar{u}_2(\tau)) - \right. \\ & \left. - K_2(s, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau))] ds \right] d\tau. \end{aligned}$$

Учитывая это тождество и используя лемму Гронуолла – Вендроффа получим, что

$$\begin{aligned} \Delta x_2(t) = & L_3 \left[\int_{t_1}^t \left[\|f_2(\tau, x_1(\tau), \bar{u}_2(\tau)) - \right. \right. \\ & \left. - f_2(\tau, x_2(\tau), u_2(\tau))\| + \right. \\ & \left. + \int_{\tau}^t \|K_2(s, \tau, x_2(\tau), \bar{u}_2(\tau)) - \right. \\ & \left. - K_2(s, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau))\| ds \right] d\tau \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

($L_3 = \text{const} > 0$ некоторая постоянная).

4 Аналог принципа максимума Л.С. Понтрягина

Пусть $\theta \in [t_0, t_1)$ произвольная точка непрерывности управления $u_1(t)$, $v_1 \in U_1$ – произвольный вектор, а $\varepsilon > 0$ произвольное малое число, такое, что $\theta + \varepsilon < t_1$.

Тогда специальное (игольчатое) приращение управляющей функции $u_1(t)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_1(t; \varepsilon) = \begin{cases} v_1 - u_1(t), & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \\ 0, & t \in T_1 \setminus [\theta, \theta + \varepsilon). \end{cases} \quad (4.1)$$

Пусть $(\Delta x_1(t; \varepsilon), \Delta x_2(t; \varepsilon))$ специальное приращение траектории $(x_1(t), x_2(t))$.

Из оценок (3.3) и (3.4) следует, что

$$\begin{aligned} \|\Delta x_1(t; \varepsilon)\| & \leq L_4 \varepsilon, \quad t \in T_1, \\ \|\Delta x_2(t; \varepsilon)\| & \leq L_5 \varepsilon, \quad t \in T_2, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $L_i = \text{const} > 0$, $i = 1, 2$ некоторые постоянные.

Учитывая формулы (4.1) и (4.2) из формулы приращения (2.16) получаем, что

$$\begin{aligned} J(u_1(t) + \Delta u_1(t; \varepsilon), u_2(t)) - J(u_1(t), u_2(t)) = \\ = -\varepsilon (H_1(\theta, z(\theta), v_1, \psi_1(\theta)) - \\ - H_1(\theta, z(\theta), u_1(\theta), \psi_1(\theta))) + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Пусть теперь $v_2 \in U_2$ – произвольный вектор, $\theta \in [t_1, t_2)$ – произвольная точка непрерывности управляющей функции $u_2(t)$, а $\mu > 0$ произвольное малое число, такое, что $\theta + \mu < t_2$.

Специальное приращение управляющей функции $u_2(t)$ определим по формуле

$$\Delta u_2(t; \mu) = \begin{cases} v_2 - u_2(t), & t \in [\theta, \theta + \mu), \\ 0, & t \in T_2 \setminus [\theta, \theta + \mu). \end{cases} \quad (4.4)$$

С учетом (4.4) из оценки (3.5) следует, что

$$\|\Delta x_2(t; \mu)\| \leq L_6 \mu, \quad t \in T_2. \quad (4.5)$$

Принимая во внимания формулы (4.4) и (4.5), из формулы приращения (2.16) получаем, что

$$\begin{aligned} J(u_1(t), u_2(t) + \Delta u_2(t; \mu)) - J(u_1(t), u_2(t)) = \\ = -\mu [H_2(\theta, y(\theta), v_2, \psi_2(\theta)) - \\ - H_2(\theta, y(\theta), u_2(\theta), \psi_2(\theta))] + o(\mu). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Из разложений (4.3) и (4.6) следует

Теорема 4.1. При сделанных предположениях для оптимальности допустимого управления $(u_1(t), u_2(t))$ необходимо, чтобы неравенства $H_1(\theta, z(\theta), v_1, \psi_1(\theta)) - H_1(\theta, z(\theta), u_1(\theta), \psi_1(\theta)) \leq 0$, $H_2(\theta, y(\theta), v_2, \psi_2(\theta)) - H_2(\theta, y(\theta), u_2(\theta), \psi_2(\theta)) \leq 0$ выполнялись для всех $v_1 \in U_1$, $\theta \in [t_0, t_1)$ и $v_2 \in U_2$, $\theta \in [t_1, t_2)$ соответственно.

5 Аналог линеаризованного условия максимума

Предположим, что в рассматриваемой задаче множества $U_i, i = 1, 2$ – выпуклы, $f_i(t, x_i, u_i)$, $K_i(t, \tau, x_i, u_i)$, $F_i(t, \tau, x_i, u_i)$, $i = 1, 2$ – непрерывно дифференцируемы также по u_i , $i = 1, 2$.

При сделанных предположениях полное приращение функционала качества может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \Delta J(u_1, u_2) = & - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H_1'(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1} \Delta u_1(t) dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H_2'(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2} \Delta u_2(t) dt + \\ & + o_3(\|\Delta x_1(t_1)\|) + o_4(\|\Delta x_2(t_2)\|) - o_5(\|\Delta x_1(t_1)\|) - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} o_1(\|\Delta x_1(t)\| + \|\Delta u_1(t)\|) dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} o_2(\|\Delta x_2(t)\| + \|\Delta u_2(t)\|) dt. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Далее при сделанных предположениях гладкости, по аналогии с доказательством неравенств (3.3)–(3.5), доказывается, что при $\Delta u_1(t) = 0$

$$\|\Delta x_1(t)\| \leq L_7 \int_{t_0}^{t_1} \|\Delta u_1(\tau)\| d\tau, \quad t \in T_1, \quad (5.2)$$

$$\|\Delta x_2(t)\| \leq L_8 \int_{t_0}^{t_1} \|\Delta u_1(\tau)\| d\tau, \quad t \in T_2, \quad (5.3)$$

а при $\Delta u_1(t) = 0$

$$\Delta x_1(t) = 0, \quad t \in T_1, \quad (5.4)$$

$$\|\Delta x_2(t)\| \leq L_9 \int_{t_1}^{t_2} \|\Delta u_2(\tau)\| d\tau, \quad t \in T_2. \quad (5.5)$$

Здесь $L_{i+6} = \text{const} > 0$, $i = 1, 3$ некоторые постоянные.

Пусть $\varepsilon \in [0, 1]$ произвольное положительное число, а $v_1(t)$ – произвольное допустимое управление.

Специальное приращение управления $u_1(t)$ определим по формуле

$$\Delta u_1(t; \varepsilon) = \varepsilon(v_1(t) - u_1(t)), \quad t \in T_1. \quad (5.6)$$

Учитывая формулу (5.6) и оценки (5.2), (5.3), из формулы приращения (5.1) функционала (1.6) получаем справедливость разложения

$$\begin{aligned} J(u_1(t) + \Delta u_1(t; \varepsilon), u_2(t)) - J(u_1(t), u_2(t)) = \\ = - \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H_1'(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1} \times \\ \times (v_1(t) - u_1(t)) dt + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Теперь определим специальное приращение управления $u_2(t)$ по формуле

$$\Delta u_2(t; \mu) = \mu(v_2(t) - u_2(t)), \quad t \in T_2. \quad (5.8)$$

Здесь $\mu \in [0, 1]$ произвольное положительное число, а $v_2(t)$ – произвольное допустимое управление.

Учитывая оценку (5.5) и формулу (5.8), из формулы приращения (5.1) функционала (1.6) получаем справедливость разложения

$$\begin{aligned} J(u_1(t), u_2(t) + \Delta u_2(t; \mu)) - J(u_1(t), u_2(t)) = \\ = - \mu \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H_2'(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2} \times \\ \times (v_2(t) - u_2(t)) dt + o(\mu). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Из разложений (5.7) и (5.9) приходим к следующему утверждению.

Теорема 5.1. Если множества $U_i, i = 1, 2$ – выпуклы, то для оптимальности допустимого управления $(u_1(t), u_2(t))$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы неравенства

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H_1'(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1} (v_1(t) - u_1(t)) dt \leq 0, \\ \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H_2'(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2} (v_2(t) - u_2(t)) dt \leq 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

выполнялись для всех допустимых управляющих функций $v_1(t)$ и $v_2(t)$.

Доказанная теорема является аналогом линеаризованного интегрального принципа максимума.

Из него можно получить аналог дифференциального (см. например, [7]) принципа максимума (поточечное необходимое условие оптимальности) используя произвольность допустимых управлений $v_i(t)$, $i = 1, 2$.

Теорема 5.2. Для оптимальности допустимого управления $(u_1(t), u_2(t))$ необходимо, чтобы неравенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1'(\theta, x_1(\theta), u_1(\theta), \psi_1(\theta))}{\partial u_1} (w_1 - u_1(\theta)) \leq 0, \\ \frac{\partial H_2'(\theta, x_2(\theta), u_2(\theta), \psi_2(\theta))}{\partial u_2} (w_2 - u_2(\theta)) \leq 0, \end{aligned} \quad (5.11)$$

выполнялись для всех $w_1 \in U_1$, $\theta \in [t_0, t_1)$ и $w_2 \in U_2$, $\theta \in [t_1, t_2)$ соответственно.

Нетрудно доказать, что необходимые условия оптимальности (5.10) и (5.11) эквивалентны.

Заключение

В работе впервые для двухэтапной задачи оптимального управления, описываемой двумя системами нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра получены аналоги принципа максимума Л.С. Понтрягина и линеаризованного условия максимума.

Полученные результаты в дальнейшем могут быть использованы при численном решении соответствующих ступенчатых задач оптимального управления, методом последовательных приближений и методом градиентного типа.

С помощью схем предложенных в работах [3], [6], могут быть исследованы случаи вырождения (особый случай [10]) установленных необходимых условий оптимальности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ащепков, Л.Т.* Оптимальное управление разрывными системами / Л.Т. Ащепков. – Москва: Наука, 1987. – 226 с.
2. *Захаров, Г.К.* Оптимизация ступенчатых систем управления / Г.К. Захаров // Автоматика и телемеханика. – 1981. – № 8. – С. 3–9.
3. *Исмаилов, Р.Р.* Об условиях оптимальности в одной ступенчатой задаче управления / Р.Р. Исмаилов, К.Б. Мансимов // Журн. Выч. мат. и мат. физики. – 2006. – № 10. – С. 1758–1770.
4. *Розова, В.Н.* Оптимальное управление ступенчатыми системами с неинтегральным функционалом / В.Н. Розова // Вестник РУДН.

Серия Прикладная математика и компьютерная математика. – 2002. – № 1 (1). – С. 131–136.

5. *Никольский, М.С.* Об одной вариационной задаче с переменной структурой / М.С. Никольский // Вестник МГУ. Серия Вычислительная математика и кибернетика. – 1987. – № 2. – С. 36–41.

6. *Калинин, А.И.* К теории необходимых условий оптимальности второго порядка / А.И. Калинин // Доклады АН БССР. – 1982. – № 8. – С. 677–680.

7. *Методы оптимизации* / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, В.В. Альсевич [и др.]. – Минск. Изд-во «Четыре четверти», 2011. – 472 с.

8. *Алексеев, В.М.* Оптимальное управление / В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин. – Москва: Физматлит, 2005. – 432 с.

9. *Новожинов, М.М.* Методы оптимального управления системами математической физики / М.М. Новожинов, В.И. Сумин, М.И. Сумин. – Горький: Изд-во ГГУ, 1986. – 87 с.

10. *Габасов, Р.* Особые оптимальные управления / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. – Москва: Либроком, 2011. – 256 с.

Поступила в редакцию 28.12.2023.

Информация об авторах

Мансимов Камилъ Байрамали оглы – д.ф.-м.н., профессор
Мансимзаде Айгюль Фазил кызы – аспирантка

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КАЧМАЖА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА МАГНИТНО-АБРАЗИВНОЙ ФИНИШНОЙ ОБРАБОТКИ ПЛОСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Д.А. Степаненко, Е.С. Еромин

Белорусский национальный технический университет, Минск

APPLICATION OF KACZMARZ METHOD FOR SOLVING INVERSE MODELLING PROBLEMS OF MAGNETIC-ABRASIVE FINISHING PROCESS OF PLANAR SURFACES

D.A. Stepanenko, E.S. Eromin

Belarusian National Technical University, Minsk

Аннотация. Рассматривается методика решения обратных задач моделирования процесса магнитно-абразивной финишной обработки плоских поверхностей. Решение задачи позволяет определять закон управления давлением на заготовку, обеспечивающий съем припуска в соответствии с заданной функцией. Задача формулируется в матричном виде на основе уравнения Престона, а соответствующая система линейных уравнений решается итерационным методом Качмажа. На основе анализа численных примеров показано, что управление давлением при обработке позволяет с достаточно высокой точностью (отклонение не более 2,2%) реализовать заданную функцию съема припуска, в частности, практически равномерную функцию съема, а также функцию съема, обеспечивающую компенсацию начальных погрешностей формы заготовки.

Ключевые слова: магнитно-абразивная финишная обработка, равномерность съема припуска, уравнение Престона, обратные задачи, метод Качмажа.

Для цитирования: Степаненко, Д.А. Применение метода Качмажа для решения обратных задач моделирования процесса магнитно-абразивной финишной обработки плоских поверхностей / Д.А. Степаненко, Е.С. Еромин // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (59). – С. 90–98. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_90. – EDN: KOFBHW

Abstract. The article considers the solution technique for inverse modelling problems of magnetic-abrasive finishing of planar surfaces. The solution of the problem enables the determination of control law of the pressure exerted onto the workpiece needed for realization of material removal according to the prescribed function. The problem is posed in matrix form on the basis of Preston's equation, and the corresponding linear system of equations is solved using iterative Kaczmarz method. On the basis of numerical examples it is shown that pressure control during machining enables sufficiently precise (with deviation no more than 2.2%) realization of the prescribed material removal function, particularly, a nearly uniform removal function as well as the removal function providing compensation of initial shape errors of the workpiece.

Keywords: magnetic-abrasive finishing, uniformity of material removal, Preston's equation, inverse problems, Kaczmarz method.

For citation: Stepanenko, D.A. Application of Kaczmarz method for solving inverse modelling problems of magnetic-abrasive finishing process of planar surfaces / D.A. Stepanenko, E.S. Eromin // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2024. – № 2 (59). – P. 90–98. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2024_2_59_90 (in Russian). – EDN: KOFBHW

Введение

В настоящее время создание многих оптических, электронных и оптико-электронных устройств требует применения сверхплоских поверхностей с чрезвычайно высокими требованиями к шероховатости и глубине дефектного слоя. Примерами являются зеркала для сверхжесткого (экстремального) ультрафиолетового излучения, зеркала лазерных резонаторов, подложки для микро- и наноэлектроники [1]. Для оптических зеркал отклонение от плоскостности не должно превышать $\lambda / 10$, где λ – длина волны светового излучения, что соответствует значениям

менее 80 нм для видимого света и еще более низким значениям для ультрафиолетового излучения, а для полупроводниковых подложек нормируется параметр TTV (Total Thickness Variation), представляющий собой общее изменение (отклонение) толщины по пластине. Требования к параметру TTV ужесточаются по мере увеличения степени интеграции электронных микросхем, миниатюризация элементов которых требует применения проекционных фотолитографических систем с большими числовыми апертурами [2]. В настоящее время технология магнито-реологической финишной обработки (МРФО)

позволяет достигнуть значений TTV до 40 нм для подложек диаметром 300 мм [2]. Традиционно финишная обработка полупроводниковых подложек производится методом химико-механического полирования, однако разрабатываются альтернативные методы обработки, такие как МРФО, магнитно-абразивная финишная обработка (МАФО), плазменная, ионно-лучевая и лазерная обработка [3], [4]. МАФО является перспективным методом обработки полупроводниковых подложек, так как позволяет обеспечить требуемые для них значения шероховатости (Ra 0,7..2 нм) и минимальную глубину дефектного слоя [5, с. 192]. Однако недостаточно исследованными являются проблема обеспечения равномерности съема припуска при МАФО и более общая проблема обеспечения съема припуска по заданному закону (корректирующей обработки поверхности, имеющей отклонения формы). Моделирование процесса МАФО включает в себя две задачи: прямую, состоящую в расчете функции съема припуска при заданных параметрах процесса обработки, и обратную, заключающуюся в определении параметров процесса МАФО, обеспечивающих съем припуска по заданному закону [6]. Упомянутые выше проблемы относятся к классу обратных задач. Прямые задачи моделирования процесса МАФО ранее рассматривались в работах [6], [7], а обратные задачи – в работе [6], где описаны матричная формулировка обратной задачи и методика ее решения с помощью псевдообратной матрицы Мура – Пенроуза с использованием регуляризации по Тихонову, а также в работе [8], где описаны формулировка и решение обратной задачи для случая обработки с простой кинематикой. В данной статье описываются альтернативный подход к решению обратных задач моделирования процесса МАФО, основанный на применении метода Качмажа, и его преимущества по сравнению с методикой, предложенной ранее.

1 Постановка и методика решения задачи

Схема, иллюстрирующая кинематику процесса МАФО, приведена на рисунке 1.1.

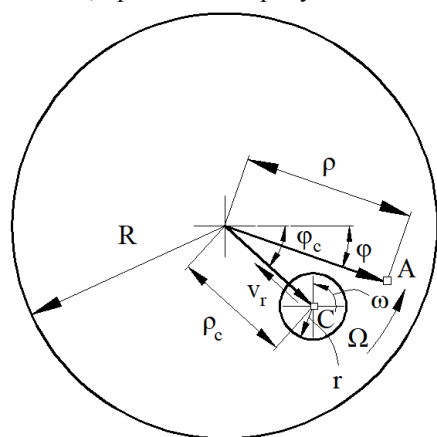


Рисунок 1.1 – Кинематика процесса МАФО

На рисунке использованы следующие обозначения: R – радиус обрабатываемой заготовки; r – радиус зоны обработки (радиус полюсного наконечника магнитной системы станка); Ω – угловая скорость вращения заготовки; ω – угловая скорость вращения полюсного наконечника; v_r – линейная скорость радиального перемещения полюсного наконечника; (ρ, φ) – полярные координаты точки A поверхности заготовки с радиус-вектором $\mathbf{p}$; (ρ_c, φ_c) – полярные координаты центра C зоны обработки, имеющего радиус-вектор $\mathbf{p}_c$.

Линейная скорость съема припуска RR (скорость изменения толщины заготовки dH/dt) может быть определена из уравнения Престона [9, с. 18]

$$RR(\rho, \varphi, t) = K_p p(\rho, \varphi, \rho_c(t), \varphi_c(t)) v(\rho, \varphi, \rho_c(t), \varphi_c(t)), \quad (1.1)$$

где K_p – коэффициент Престона, зависящий от условий обработки; $p(\rho, \varphi, \rho_c(t), \varphi_c(t))$ – давление на поверхность заготовки в точке с координатами (ρ, φ) в момент времени t , соответствующий расположению центра зоны обработки в точке с координатами $(\rho_c(t), \varphi_c(t))$; $v(\rho, \varphi, \rho_c(t), \varphi_c(t))$ – скорость движения точки поверхности заготовки с координатами (ρ, φ) относительно полюсного наконечника.

Функция съема припуска рассчитывается путем интегрирования уравнения (1.1):

$$h(\rho, \varphi) = \int_0^T RR(\rho, \varphi, t) dt, \quad (1.2)$$

где T – продолжительность процесса обработки.

Обратная задача моделирования процесса МАФО состоит в определении закона управления параметрами обработки (давлением p и/или скоростью v), обеспечивающего требуемое распределение съема припуска $h_{\text{зад}}(\rho, \varphi)$. Предпочтительным является управление давлением p , так как оно влияет на скорость съема припуска линейным образом, а скорость v связана с кинематическими параметрами процесса обработки (Ω , ω и v_r) нелинейной зависимостью. Управление скоростью v рационально использовать для процессов обработки, характеризующихся простой кинематикой, например, линейным перемещением инструмента относительно неподвижной заготовки [8]. С точки зрения технической реализации возможны следующие варианты управления давлением при обработке:

1. Регулирование индукции магнитного поля путем изменения силы тока, протекающего через обмотку электромагнитного индуктора станка.
2. Регулирование воздушного зазора между полюсным наконечником станка и поверхностью заготовки.
3. Регулирование скважности импульсов магнитного поля при фиксированной частоте повторения (широотно-импульсная модуляция).

Давление может регулироваться за счет изменения параметров магнитного поля, так как давление при МАФО определяется величиной сил, действующих со стороны магнитного поля на частицы ферроабразивного порошка [10].

Так как в дальнейшем будет рассматриваться только качественная картина распределения съема припуска, то для упрощения расчетов можно положить в уравнении (1.1) $K_p = 1$. Примем также предположение о равномерном распределении давления в зоне обработки:

$$p(\rho, \varphi, \rho_c(t), \varphi_c(t)) = \begin{cases} w(t)p_0 & \text{при } |\rho - \rho_c(t)| \leq r, \\ 0 & \text{при } |\rho - \rho_c(t)| > r, \end{cases}$$

где p_0 – начальное давление, для которого путем решения прямой задачи при $w(t) = 1$ или экспериментальным путем при неизменном давлении на заготовку определяется функция съема припуска $h_{\text{баз}}(\rho, \varphi)$ (базовая функция съема припуска); $w(t)$ – безразмерная весовая функция, описывающая закон управления давлением при обработке, обеспечивающий съем припуска в соответствии с заданной функцией $h_{\text{зад}}(\rho, \varphi)$.

При необходимости реальная функция распределения давления может быть определена экспериментальным или расчетным путем и без труда введена в рассматриваемую модель.

Если разбить интервал времени $t \in [0; T]$ на N_t подинтервалов вида $t \in [t_k; t_{k+1}]$, где $t_k = 2\pi(k-1)/\Omega$ при $k \in \{1, 2, \dots, N_t\}$, $t_{N_t+1} = T$, $N_t = \lfloor \Omega T / 2\pi \rfloor$ – число оборотов заготовки за время обработки T (N_t -й оборот в общем случае является неполным), $\lfloor \cdot \rfloor$ – операция округления до ближайшего большего целого значения, и считать, что весовая функция $w(t)$ является кусочно-постоянной, принимая значение $w(t) = w_k$ при $t \in [t_k; t_{k+1}]$, то уравнение (1.2) примет вид

$$h_{\text{зад}}(\rho, \varphi) = \sum_{k=1}^{N_t} w_k h_{\text{баз}}^{(k)}(\rho, \varphi), \quad (1.3)$$

где

$$h_{\text{баз}}^{(k)}(\rho, \varphi) = p_0 \int_{t_k}^{t_{k+1}} v(\rho, \varphi, \rho_c(t), \varphi_c(t)) \Phi(r - |\rho - \rho_c(t)|) dt$$

– базовая функция съема припуска для k -го оборота заготовки, $\Phi(\cdot)$ – единичная функция Хевисайда.

Если считать, что функции $h_{\text{баз}}^{(k)}(\rho, \varphi)$ и $h_{\text{зад}}(\rho, \varphi)$ являются осесимметричными (радиальными), то уравнение (1.3) можно записать в одномерной форме (зависящей только от радиальной координаты ρ):

$$\tilde{h}_{\text{зад}}(\rho) = \sum_{k=1}^{N_t} w_k \tilde{h}_{\text{баз}}^{(k)}(\rho), \quad (1.4)$$

где $\tilde{h}_{\text{зад}}(\rho) = h_{\text{зад}}(\rho, 0)$, $\tilde{h}_{\text{баз}}^{(k)}(\rho) = h_{\text{баз}}^{(k)}(\rho, 0)$.

Принятое допущение об осесимметричности функций $h_{\text{баз}}^{(k)}(\rho, \varphi)$ является справедливым при малых относительных радиальных подачах $s_r/r = 2\pi v_r / \Omega r \ll 1$. Функция $h_{\text{зад}}(\rho, \varphi)$ является радиальной при осесимметричности начального распределения отклонений формы заготовки. При больших относительных радиальных подачах и/или неосесимметричности начального распределения отклонений формы заготовки уравнение (1.3) должно решаться в двумерной форме с более высокой частотой дискретизации по времени, позволяющей регулировать давление в пределах одного оборота заготовки, что необходимо для коррекции локальных азимутальных изменений профиля заготовки.

Если дискретизировать уравнение (1.4) по радиальной координате ($\rho_i = iR/N_r$, $i \in \{1, 2, \dots, N_r - 1\}$), то его можно будет представить в матричной форме:

$$\{\tilde{\mathbf{h}}_{\text{баз}}\} \mathbf{w} = \tilde{\mathbf{h}}_{\text{зад}}, \quad (1.5)$$

где $\tilde{h}_{\text{баз } i, k} = \tilde{h}_{\text{баз}}^{(k)}(\rho_i)$, $\tilde{h}_{\text{зад } i} = \tilde{h}_{\text{зад}}(\rho_i)$.

Точки с координатами $\rho = 0$ и $\rho = R$ не включаются в совокупность точек дискретизации, так как в дальнейшем рассматривается случай $\rho_c(0) = R - r$, $\rho_c(T) = r$, для которого $\tilde{h}_{\text{баз}}^{(k)}(0) = \tilde{h}_{\text{баз}}^{(k)}(R) = 0$ (так называемый «краевой эффект», состоящий в снижении съема припуска до нуля на краях заготовки, не пересекаемых инструментом при обработке). При необходимости рассмотрения более общего случая $\rho_c(0) > R - r$, $\rho_c(T) < r$ дискретизация должна выполняться по схеме $\rho_i = (i-1)R/N_r$, $i \in \{1, 2, \dots, N_r + 1\}$.

Уравнение (1.5) может быть решено с помощью псевдообратной матрицы Мура – Пенроуза [6], однако представляют интерес и альтернативные подходы к его решению. В частности, при решении уравнения (1.3) в двумерной постановке оно сводится к уравнению вида (1.5) с большим числом неизвестных, для которого псевдоинверсия матрицы является чрезвычайно затратной для вычислений. Поэтому целесообразно на примере одномерной задачи рассмотреть в качестве тестового примера специальные приемы, применяемые для решения линейных систем уравнений с большим числом неизвестных. Такие линейные системы возникают, например, в обратных задачах компьютерной томографии при восстановлении изображений по их проекциям и решаются с помощью итеративных методов алгебраической реконструкции, примером которых является метод ART (Algebraic Reconstruction Technique) [11, с. 47]. В задачах компьютерной томографии возникают системы вида $\{\mathbf{A}\} \mathbf{x} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{x}$ – подлежащий определению вектор

свойств объекта, например, линейного коэффициента ослабления излучения в рентгеновской томографии; $\mathbf{b}$ – вектор проекционных данных; $\{\mathbf{A}\}$ – матричная форма оператора проецирования (в рентгеновской томографии представляет собой оператор интегрирования вдоль проекционных лучей) [12]. Общими свойствами рассматриваемых обратных задач компьютерной томографии и моделирования процесса МАФО являются неотрицательность элементов матрицы, положительность вектора правой части и разреженность матрицы. Решение обоих типов задач должно удовлетворять требованию неотрицательности. Важным свойством итеративных методов алгебраической реконструкции является построчный характер вычислений, то есть при выполнении итераций одновременно используется только одно из уравнений системы. Это позволяет уменьшить загрузку оперативной памяти, так как не требуется хранение в оперативной памяти всей матрицы $\{\mathbf{A}\}$.

С математической точки зрения метод ART эквивалентен методу Качмажа, широко используемому для решения переопределенных систем линейных уравнений с большим числом неизвестных [13]. В общем случае алгоритм Качмажа формулируется следующим образом:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \lambda_k \frac{b_i - (\{\mathbf{A}\}^T)^{<i> \cdot \mathbf{x}^{(k)}}}{\|(\{\mathbf{A}\}^T)^{<i>^2} (\{\mathbf{A}\}^T)^{<i>,}$$

$$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{x}^{(k)}$ – k -е приближение решения; $i = \text{mod}(k, N) + 1$ – номер уравнения системы, используемого при выполнении текущего шага алгоритма; N – количество уравнений системы; $\text{mod}(k, N)$ – остаток от деления числа k на число N ; λ_k – релаксационный параметр; $(\{\mathbf{A}\}^T)^{<i> – i$ -й столбец транспонированной матрицы $\{\mathbf{A}\}$; точка обозначает скалярное произведение векторов; $\|\cdot\|$ – евклидова (ℓ_2) норма.

Формула $i = \text{mod}(k, N) + 1$ обеспечивает приведение значений i к диапазону от 1 до N , когда номер шага k превышает количество N уравнений системы (периодический возврат к началу уравнению системы после выполнения итераций на всех уравнениях системы).

Релаксационный параметр λ_k может приниматься равным единице, однако его правильный выбор позволяет ускорить сходимость алгоритма. Простейшим вариантом удовлетворения требованию неотрицательности решений является присвоение нулевых значений отрицательным элементам вектора $\mathbf{x}^{(k+1)}$ [14], однако в рассматриваемых далее численных примерах требование неотрицательности удовлетворяется автоматически. Матрица $\{\mathbf{A}\}$ является плохо обусловленной для многих обратных задач. Улучшению обусловленности задачи способствует ее регуляризация,

в результате которой также может повышаться гладкость решения [6; 15, с. 49]. Метод Качмажа обладает регуляризационными свойствами, если рассматривать в качестве параметра регуляризации количество шагов k [16]. При использовании регуляризации по Тихонову выбор оптимальных значений параметра регуляризации является более сложной задачей. В дальнейшем на основе анализа численных примеров будет показано, что увеличение числа шагов k приводит к повышению точности решения, однако при этом ухудшается гладкость решения. В связи с этим выбор значения параметра регуляризации является компромиссной задачей, требующей соблюдения оптимального баланса между точностью и гладкостью решения.

2 Результаты и их обсуждение

Расчеты производились с помощью программы Mathcad при следующих значениях исходных данных: радиус заготовки $R = 150$ мм, радиус полюсного наконечника $r = 10$ мм, угловая скорость вращения заготовки $\Omega = 2\pi$ рад/с, угловая скорость вращения полюсного наконечника $\omega = 10\Omega$, линейная скорость радиального перемещения полюсного наконечника $v_r = 1$ мм/с, $N_r = 150$, начальное положение центра зоны обработки $\rho_c(0) = R - r$, конечное положение центра зоны обработки $\rho_c(T) = r$, продолжительность обработки $T = 130$ с, $N_t = 130$.

Пример 1: задача о равномерном съеме припуска с краевым эффектом. Требуемый закон съема припуска задавался в виде трапециoidalной функции (рисунок 2.1, а, кривая 1), что соответствует равномерному съему припуска в зоне $2r \leq \rho \leq R - 2r$ и учитывает возникновение зон краевого эффекта.

Расчет функций $\tilde{h}_{\text{баз}}(\rho) = h_{\text{баз}}(\rho, 0)$ и $\tilde{h}_{\text{баз}}^{(k)}(\rho)$ производился с помощью ранее описанной методики решения прямых задач [6]. Величина съема припуска выражалась в относительных единицах путем деления расчетного значения величины съема на максимальное значение базовой функции $\tilde{h}_{\text{баз}}(\rho)$, график которой представлен на рисунке 2.1, б.

В качестве критерия остановки итераций в методе Качмажа использовалось условие

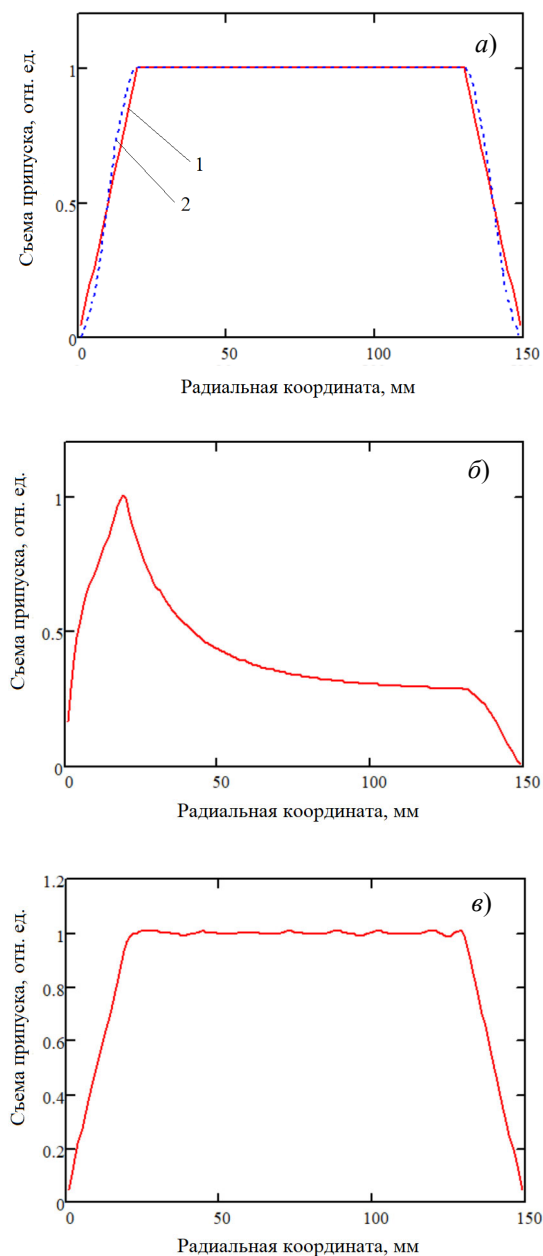
$$\frac{\|\mathbf{w}^{((k+1)N)} - \mathbf{w}^{(kN)}\|}{\|\mathbf{w}^{((k+1)N)}\|} < 0,05, \quad (2.1)$$

где $k \in \{0, 1, \dots\}$, $<\cdot>$ – среднее значение, N – количество уравнений системы (1.5).

Условие (2.1) удовлетворялось при $k = 38$, что соответствует 39 полным циклам итераций на всех уравнениях системы.

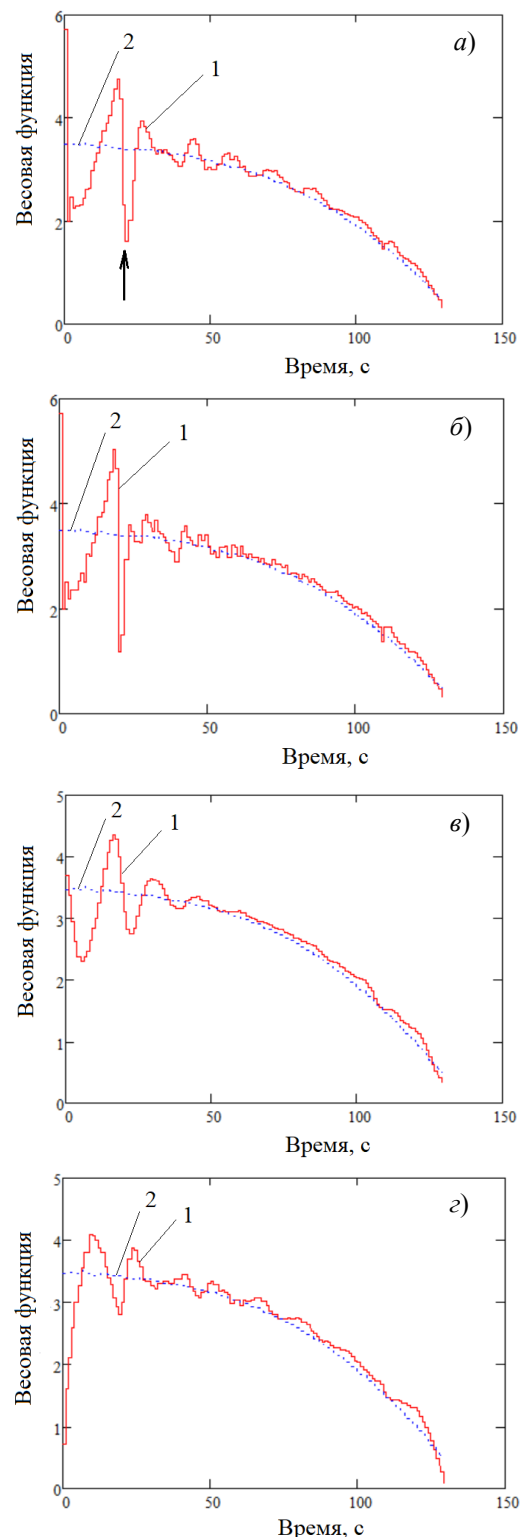
Расчетное распределение съема припуска, полученное на основе решения обратной задачи,

представлено на рисунке 2.1, в. Как следует из анализа графика, в зоне равномерного съема припуска отклонение от равномерности съема припуска не превышает 2,2%. На рисунке 2.2 а, б представлены расчетные графики изменения весовой функции $w(t)$, полученные методом Качмажа при различных значениях количества итераций.



1 – трапецидальная функция съема;
2 – сглаженная функция съема

Рисунок 2.1 – Графики съема припуска:
а) график требуемого распределения съема припуска;
б) график базовой функции съема;
в) график, полученный на основе решения обратной задачи



1 – кривые, полученные путем решения обратной задачи; 2 – кривые, полученные на основе приближенных формул

Рисунок 2.2 – Графики изменения весовой функции:
а) расчет методом Качмажа, 39 итераций;
б) расчет методом Качмажа, 128 итераций;
в) расчет с помощью матрицы Мура – Пенроуза;
г) расчет методом Качмажа для сглаженной функции $\tilde{h}_{зад}(\rho)$, 39 итераций

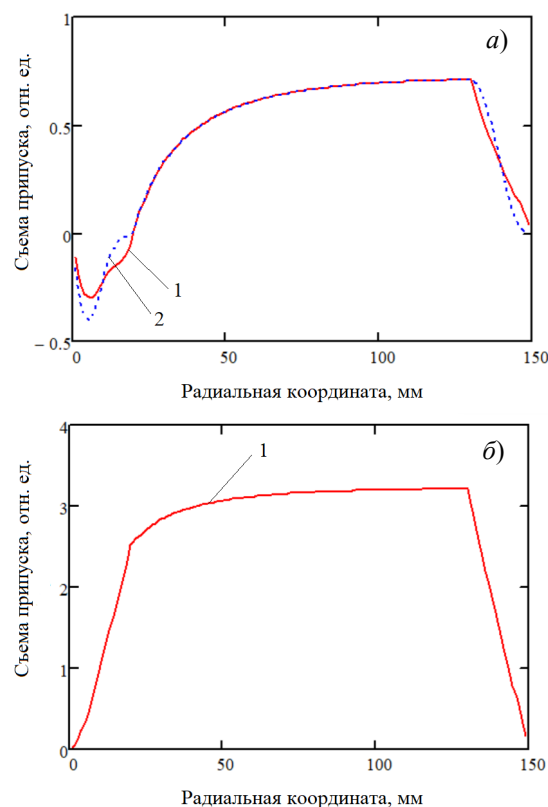
Для сравнения на этом же рисунке приведены графики изменения весовой функции $w(t)$, рассчитанные путем решения обратной задачи с помощью матрицы Мура – Пенроуза с использованием регуляризации по Тихонову [6] (рисунок 2.2, в) и на основе приближенных формул, первоначально предложенных (без строгого математического обоснования) применительно к задаче о нанесении равномерных по толщине покрытий [6], [17]. Как видно из графиков, с увеличением количества итераций наблюдается снижение гладкости весовой функции, что усложняет техническую реализацию соответствующего закона управления давлением при обработке. Выигрыш в точности решения оказывается при этом несущественным: отклонение от равномерности съема припуска в зоне равномерного съема составляет около 1,6% при расчете весовой функции по 128 итерациям против 2,2% при расчете по 39 итерациям. Весовые функции, рассчитанные путем решения обратной задачи, совершают колебания относительно значений, рассчитанных по приближенным формулам, с сохранением общего тренда изменения. Общий характер изменения весовых функций, рассчитанных методом Качмажа, близок к характеру изменения функции, рассчитанной с помощью матрицы Мура – Пенроуза. Для весовых функций, рассчитанных методом Качмажа, в момент времени, соответствующий прохождению центра зоны обработки через границу $\rho = R - 2r$ зоны краевого эффекта, наблюдается разрыв первого рода (отмечен стрелкой на рисунке 2.2 а), что может быть объяснено разрывностью первой производной функции $\tilde{h}_{\text{зад}}(\rho)$ в точке $\rho = R - 2r$ и может затруднять управление давлением при обработке. При использовании сглаженной функции $\tilde{h}_{\text{зад}}(\rho)$, для которой съем припуска в зонах краевого эффекта описывается косинусоидальными функциями (рисунок 2.1, а, кривая 2), получается кривая изменения весовой функции, не имеющая разрывов первого рода и представленная на рисунке 2.2, з.

Пример 2: задача определения параметров корректирующей обработки. Предположим, что заготовка имеет погрешности формы, вызванные обработкой при постоянном давлении, съем припуска при которой описывается базовой функцией съема $\tilde{h}_{\text{баз}}(\rho)$ (рисунок 2.1, б). Для устранения погрешностей формы при корректирующей обработке естественно определить функцию требуемого распределения съема припуска как

$$\tilde{h}_{\text{корр}}(\rho) = \tilde{h}_{\text{зад } 0}(\rho) - \tilde{h}_{\text{баз}}(\rho), \quad (2.2)$$

где $\tilde{h}_{\text{зад } 0}(\rho)$ – функция требуемого распределения съема припуска, используемая в задаче о равномерном съеме припуска (рисунок 2.1, а).

Так как величина съема припуска должна удовлетворять ограничению $\tilde{h}_{\text{корр}}(\rho) \geq 0$, то определение вида (2.2) можно использовать только при условии $\tilde{h}_{\text{зад } 0}(\rho) \geq \tilde{h}_{\text{баз}}(\rho)$, однако данное условие может не выполняться в зоне краевого эффекта, что иллюстрируется рисунком 2.3, а.



1 – кривые, полученные для трапецеидальной функции $\tilde{h}_{\text{зад } 0}(\rho)$; 2 – кривые, полученные для сглаженной функции $\tilde{h}_{\text{зад } 0}(\rho)$

Рисунок 2.3 – Графики функции требуемого распределения съема припуска:

а) расчет по формуле (2.2);

б) расчет по формуле (2.3)

Как показывает рисунок 2.3, б, добиться выполнения условия $\tilde{h}_{\text{корр}}(\rho) \geq 0$ можно путем введения в уравнение (2.2) коэффициента $K_h > 1$, характеризующего повышение максимального значения суммарного съема припуска $\tilde{h}_{\text{корр}}(\rho) + \tilde{h}_{\text{баз}}(\rho)$ по сравнению с максимальным значением съема при базовой обработке:

$$\tilde{h}_{\text{корр}}(\rho) = K_h \tilde{h}_{\text{зад } 0}(\rho) - \tilde{h}_{\text{баз}}(\rho). \quad (2.3)$$

Для трапецеидальной функции $\tilde{h}_{\text{зад } 0}(\rho)$ минимальное значение коэффициента K_h составило 3,3, а для сглаженной функции $\tilde{h}_{\text{зад } 0}(\rho)$ – 26,8. При расчете было принято значение $K_h = 3,5$ для трапецеидальной функции.

На рисунке 2.4 представлены расчетный график изменения весовой функции $w(t)$, полученный методом Качмажа для 39 итераций, и расчетное распределение суммарного съема припуска $\tilde{h}_{\text{корр}}(\rho) + \tilde{h}_{\text{баз}}(\rho)$, полученные для трапецидальной функции $\tilde{h}_{\text{зад}0}(\rho)$.

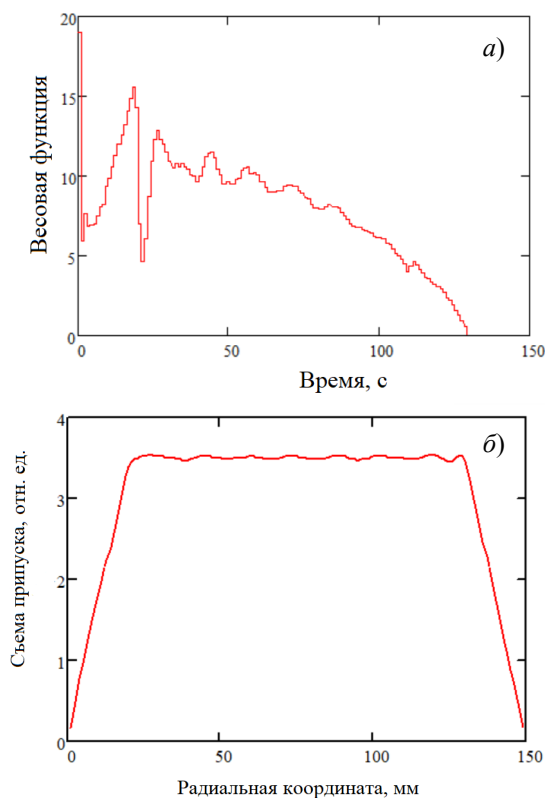


Рисунок 2.4 – Результаты решения обратной задачи для корректирующей обработки:
а) график изменения весовой функции;
б) распределение суммарного съема припуска

Отклонение от равномерности съема припуска в зоне равномерного съема составляет около 2,2%.

Рассмотренная задача может быть решена другим, более простым способом, так как нам была доступна априорная информация об условиях формирования исходных погрешностей формы (было сделано предположение, что они вызваны обработкой при постоянном давлении). Так как съем припуска линейно зависит от величины давления на заготовку, то при обработке заготовки в несколько этапов (начальная обработка с последующей корректирующей обработкой) эквивалентная весовая функция (весовая функция, соответствующая съему суммарного припуска за один этап) равна сумме весовых функций для каждого из этапов:

$$w_{\text{экв}}(t) = w_{\text{нач}}(t) + w_{\text{корр}}(t).$$

Так как нами было принято предположение о постоянстве давления на первом (начальном)

этапе обработки, то весовая функция для первого этапа $w_{\text{нач}}(t) = 1$. Эквивалентная весовая функция должна иметь вид $w_{\text{экв}}(t) = K_w w_0(t)$, где $w_0(t)$ – весовая функция, полученная путем решения задачи о равномерном съеме припуска, $K_w > 1$ – масштабный коэффициент. Таким образом, весовая функция для второго (корректирующего) этапа обработки будет иметь вид

$$w_{\text{корр}}(t) = w_{\text{экв}}(t) - w_{\text{нач}}(t) = K_w w_0(t) - 1.$$

Введение масштабного коэффициента необходимо для удовлетворения ограничения $w_{\text{корр}}(t) \geq 0$: минимальное значение масштабного множителя определяется по формуле

$$K_{w \min} = 1/\min(w_0(t)) = 3,449.$$

Так как масштабирование весовой функции сопровождается пропорциональным изменением величины съема припуска, то коэффициенты K_w и K_h эквивалентны, что подтверждается близостью их расчетных минимальных значений. В справедливости равенства $w_{\text{корр}}(t) = K_w w_0(t) - 1$ можно убедиться путем сравнения рисунков 2.2, а и 2.4, а: они изображают одну и ту же функцию с точностью до масштабирования и параллельного переноса. Так как при расчете было принято значение $K_h = 3,5$, близкое к минимальному значению 3,449, то при $t \rightarrow T$ весовая функция, представленная на рисунке 2.4, а, стремится к нулю.

При отсутствии априорной информации об условиях формирования исходных погрешностей формы соответствующая начальному этапу обработки весовая функция $w_{\text{нач}}(t)$ может быть определена путем решения обратной задачи, в которой $\tilde{h}_{\text{зад}}(\rho) = \tilde{h}_{\text{нач}}(\rho)$, где $\tilde{h}_{\text{нач}}(\rho)$ – функция съема припуска при начальной обработке. Весовая функция для корректирующего этапа обработки будет рассчитываться по формуле

$$w_{\text{корр}}(t) = K_w w_0(t) - w_{\text{нач}}(t).$$

Пример 3: задача о равномерном съеме припуска без краевого эффекта. Требуемый закон съема припуска задавался в виде функции $\tilde{h}_{\text{зад}}(\rho) = 1$. Технически устранение краевого эффекта может быть достигнуто за счет пересечения полюсным кончиком края заготовки $\rho = R$ и ее центра $\rho = 0$ [6]: при расчете функции $\tilde{h}_{\text{баз}}(\rho)$, график которой представлен на рисунке 2.5, а, были приняты значения $\rho_c(0) = R + r$ и $\rho_c(T) = 0$.

В результате расчета была определена весовая функция, график которой представлен на рисунке 2.5, б. Соответствующее ей распределение съема припуска представлено на рисунке 2.5, в и характеризуется отклонением от равномерности около 1,5%.

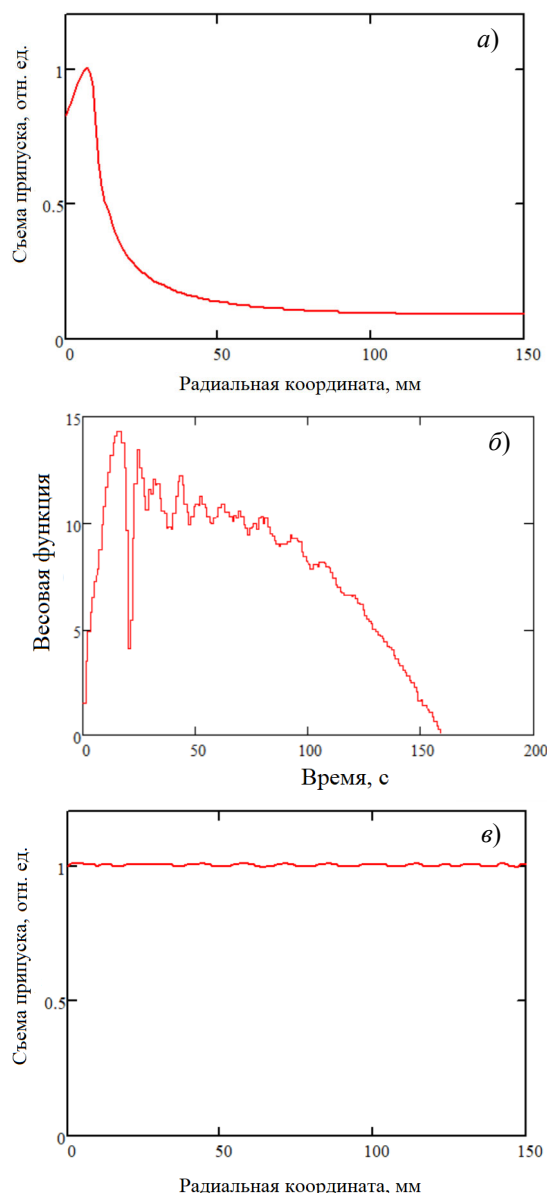


Рисунок 2.5 – Результаты расчетов для задачи о равномерном сьеме припуска без краевого эффекта:

- а) график базовой функции сьема;
- б) график изменения весовой функции;
- в) график расчетного сьема припуска, 58 итераций

Заключение

1. Разработана методика решения обратных задач моделирования процесса МАФО плоских поверхностей, основанная на применении метода Качмажа и позволяющая определять закон управления давлением на заготовку при обработке, обеспечивающий сьем припуска в соответствии с заданной функцией.

2. На основе анализа численных примеров показано, что управление давлением при обработке позволяет с достаточно высокой точностью (отклонение не более 2,2%) реализовать

заданную функцию сьема припуска, в частности, производить сьем припуска, близкий к равномерному, а также сьем припуска в соответствии с функцией, обеспечивающую компенсацию начальных погрешностей формы заготовки (корректирующая обработка).

3. Показаны преимущества метода Качмажа по сравнению с другими методами решения обратной задачи, в частности, методом, основанном на применении псевдообратной матрицы Мура – Пенроуза и регуляризации по Тихонову.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Challenges in realizing ultraflat materials surfaces* / T. Yatsui [et al.] // Beilstein Journal of Nanotechnology. – 2013. – Vol. 4. – P. 875–885.
2. *Manufacture and metrology of 300 mm silicon wafers with ultra-low thickness variation* / U. Griesmann [et al.] // AIP Conference Proceedings. – 2007. – Vol. 931. – P. 105–110.
3. *Review on the various strategies adopted for the polishing of silicon wafer – A chemical perspective* / M. Srivastava [et al.] // Materials Today: Proceedings. – 2022. – Vol. 63. – P. 62–68.
4. *Polishing approaches at atomic and close-to-atomic scale* / Z. Geng [et al.] // Micromachines. – 2023. – Vol. 14. – Article 343.
5. Хомич, Н.С. Магнитно-абразивная обработка изделий / Н.С. Хомич. – Минск: БНТУ, 2006. – 217 с.
6. Степаненко, Д.А. Обеспечение равномерности сьема припуска при магнитно-абразивной финишной обработке полупроводниковых пластин за счет управления режимами процесса обработки / Д.А. Степаненко, Е.С. Еромин // Наука и техника. – 2023. – № 6. – С. 477–486.
7. *Моделирование кинематики процесса магнитно-абразивного полирования кремниевых пластин* / Н.С. Хомич [и др.] // Вестник БНТУ. – 2009. – № 1. – С. 32–38.
8. Zhang, Y. Study on corrective abrasive finishing for workpiece surface by using magnetic abrasive finishing processes / Y. Zhang, Y. Zou // Machines. – 2022. – Vol. 10. – Article 98.
9. Luo, J. Integrated Modeling of Chemical Mechanical Planarization for Sub-Micron IC Fabrication / J. Luo, D. Dornfeld. – Berlin: Springer, 2004. – 311 p.
10. *Modeling of material removal in magnetic finishing based on Maxwell's stress tensor theory and its experimental validation* / X. He [et al.] // Journal of Materials Processing Technology. – 2023. – Vol. 312. – Article 117808.
11. Byrne, C.L. Iterative Algorithms in Inverse Problems / C.L. Byrne. – N.Y.: Chapman & Hall / CRC, 2014. – 300 p.
12. Older, J.K. Matrix formulation of computed tomogram reconstruction / J.K. Older, P.C. Johns // Physics in Medicine and Biology. – 1993. – Vol. 38. – P. 1051–1064.

13. *Sznajder, R.* Kaczmarz algorithm revisited / R. Sznajder // *Czasopismo Techniczne. Nauki Podstawowe*. – 2015. – № 2-NP. – P. 247–254.

14. *Popa, C.* Constrained Kaczmarz extended algorithm for image reconstruction / C. Popa // *Linear Algebra and its Applications*. – 2008. – Vol. 429. – P. 2247–2267.

15. *Bouvier, C.* Investigation of polishing algorithms and removal processes for a deterministic subaperture polisher: PhD thesis / C. Bouvier. – University of Rochester, 2007. – 272 p.

16. *Semi-convergence properties of Kaczmarz's method* / T. Elfving [et al.] // *Inverse Problems*. – 2014 – Vol. 30. – Article 055007.

17. *Stepanenko, D.A.* Modeling of spraying with time-dependent material feed rate / D.A. Stepanenko // *Applied Mathematical Modelling*. – 2007. – Vol. 31. – P. 2564–2576.

Поступила в редакцию 29.01.2024.

Информация об авторах

Степаненко Дмитрий Александрович – д.т.н., профессор

Еромин Егор Сергеевич – аспирант

СЕРГЕЙ СЕРГЕЕВИЧ ГИРГЕЛЬ

(к 80-летию со дня рождения)



12 февраля 2024 г. исполнилось 80 лет со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Сергея Сергеевича Гиргеля – известного специалиста в области физической оптики и физики кристаллов.

Сергей Сергеевич родился в деревне Тимошково Миорского района Витебской области.

С 1961 по 1968 г. обучался на физическом факультете Витебского государственного педагогического института имени С.М. Кирова. С 1968 г. по ноябрь 1969 г. работал учителем в школе. С ноября 1969 г. – старший лаборант кафедры физики Витебского государственного института легкой промышленности – до поступления в аспирантуру. С ноября 1972 г. по декабрь 1973 г. проводил свои первые научные исследования в лаборатории кристаллооптики Института физики (ИФ) АН БССР под руководством доктора физико-математических наук Б.В. Бокутя, а затем продолжил свои исследования в Гомельском государственном университете.

Вся дальнейшая жизнь С.С. Гиргеля связана с Гомельским государственным университетом: с июня 1980 г. – доцент, с сентября 1993 г. до ноября 1998 г. – заведующий кафедрой и с ноября 1998 г. – профессор кафедры оптики.

С.С. Гиргель получил важные результаты в теории оптических свойств магнитоупорядоченных кристаллов, имеющие значение для устройств оптической обработки информации. С.С. Гиргель теоретически обосновал новые оптические явления, связанные с наличием магнитной структуры в кристалле: четный и поперечный эффекты Фарадея.

29 марта 1979 г. С.С. Гиргель защитил кандидатскую диссертацию «Электромагнитные волны в магнитоупорядоченных кристаллах».

19 февраля 1992 г. в Институте кристаллографии РАН состоялась успешная защита докторской диссертации «Кристаллооптика магнитоупорядоченных сред».

С.С. Гиргелем предложена уточненная формулировка принципа Онзагера применительно к линейным материальным уравнениям электродинамики, сформулированы законы сохранения энергии и импульса для диспергирующих магнитных сред.

С.С. Гиргелем теоретически доказано существование новых типов сингулярных оптических направлений (линейных и эллиптических осей), предложена классификация кристаллов ромбической сингонии по числу и характеру сингулярных осей, исследовано изменение поляризации при распространении света вдоль таких направлений.

С.С. Гиргель ввел две новых симметричных операции и предложил простой алгоритм получения явных феноменологических выражений для описания инвариантов, магнитооптических и иных свойств многоподрешеточных магнетиков.

С.С. Гиргелем предложен метод определения параметров гироанизотропных поглощающих кристаллов, основанный на измерении матриц Джонса, соответствующих трем отражающим поверхностям; он является соавтором изобретения – устройства для поворота плоскости поляризации ультразвуковой волны. Сергеем Сергеевичем развита также термодинамическая теория оптических свойств кристаллов.

С октября 1995 г. Сергей Сергеевич является членом совета по защите диссертаций, созданного в Гомельском государственном университете. Подготовил одного кандидата наук.

С последнего десятилетия XX века С.С. Гиргель изучает бездифракционное распространение световых пучков со специальным распределением энергии в их поперечном сечении.

С.С. Гиргель является авторитетным в мире ученым в области оптики кристаллов и оптики световых пучков, предсказавшим шесть новых оптических явлений, подтвержденных экспериментально, автором около 200 опубликованных научных и научно-методических работ, в том числе монографии «Основы теоретической кристаллооптики магнитоупорядоченных сред» и четырех учебных пособий.

Желаем юбиляру здоровья, новых идей и творческих достижений во всех областях его деятельности!

АНАТОЛИЙ НИКОЛАЕВИЧ СЕРДЮКОВ

(к 80-летию со дня рождения)



15 мая 2024 года исполнилось 80 лет со дня рождения члена-корреспондента НАН Беларуси, доктора физико-математических наук, профессора Анатолия Николаевича Сердюкова.

А.Н. Сердюков родился 15 мая 1944 г. в поселке Герой Буда-Кошелевского района. В 1960 г. с золотой медалью окончил Дудичскую среднюю школу Чечерского района. В 1960–1965 г. – студент физико-математического факультета Гомельского государственного педагогического института имени В. П. Чкалова.

В 1965 г. А.Н. Сердюков поступил в аспирантуру при Институте физики (ИФ) АН БССР, и его проводником в мир науки стал основатель белорусской школы физиков-теоретиков Ф.И. Федоров. По окончании аспирантуры (1968 г.) А.Н. Сердюков распределен в ИФ АН БССР.

В марте 1971 г. защитил диссертацию «Некоторые вопросы электродинамики оптически активных и нелинейных сред». В диссертации содержались результаты исследований, в которых были построены основы корректной феноменологической электродинамики оптически активных сред, свободной от противоречий, свойственных прежним теориям естественной гиротропии. Полученные результаты обусловили постановку новых теоретических и экспериментальных работ в ведущих научных центрах СССР. В 1971 г. за исследования по естественной оптической активности и нелинейной оптике А.Н. Сердюкову присуждена Первая премия ИФ АН БССР.

В 1973 г. А.Н. Сердюков был приглашен на работу в Гомельский государственный университет. На кафедру оптики А.Н. Сердюков переведен с сентября 1974 г. где и работал доцентом.

С февраля 1979 г. он возглавил кафедру, и заведовал ею до назначения проректором по научной работе – в январе 1990 г. В октябре 1976 г. А.Н. Сердюкову присвоено ученое звание доцента.

А.Н. Сердюков (совместно с Н.В. Максименко и Л.Г. Морозом) высказал идею о существовании у элементарных частиц нового свойства – магнитоэлектрической поляризуемости, или гирации. В 1977 г. он развил теорию упругих волн в средах с пространственной дисперсией, в которой впервые предсказано существование акустического кругового дихроизма. В 1981 г. А.Н. Сердюковым установлены дисперсионные правила сумм в электродинамике естественно гиротропных сред и доказана их универсальность для сред любой природы. В 1987 г. А.Н. Сердюков защитил докторскую диссертацию «Волновые процессы в гиротропных средах», а в сентябре 1988 г. ему присвоено ученое звание профессора.

В 1990–1997 г. А.Н. Сердюков работал в должности проректора по научной работе ГГУ им. Ф. Скорины. В 1996 г. профессор А.Н. Сердюков избран членом-корреспондентом АН Республики Беларусь по Отделению физики, математики и информатики.

А.Н. Сердюковым предложена альтернативная теория тяготения – релятивистская калибровочно-инвариантная модель гравитационного поля со скалярным потенциалом, разработанная в рамках классической теоретико-полевой концепции. Результаты исследований по этому направлению обобщены им в единолично написанной монографии «Калибровочная теория скалярного гравитационного поля» (2003 г.). В настоящее время А.Н. Сердюков на основе предложенной им скалярной теории массивного гравитационного поля разрабатывает циклическую модель однородной Вселенной, альтернативную космологии Большого взрыва.

А.Н. Сердюков автор более 250 научных работ, в их числе учебное пособие «Основы теоретической кристаллооптики» (в соавторстве с Б.В. Бокутем, 1987 г.), 2 монографии, в том числе «Электродинамика бианизотропных материалов. Теория и применения» (2001 г.), 9 изобретений.

Среди учеников А.Н. Сердюкова 5 докторов, 15 кандидатов наук, академик и член-корреспондент НАН Беларуси. По инициативе А.Н. Сердюкова в 1995 г. в ГГУ им. Ф. Скорины создан совет по защите диссертаций, который он и возглавляет.

Поздравляем члена редакционной коллегии журнала «Проблемы физики, математики и техники» и желаем Анатолию Николаевичу крепкого здоровья, неиссякаемой энергии, творческих идей и успехов во всех сферах его деятельности!

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

- соответствовать профилю журнала;
- являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;
- содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfint@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'a и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

- сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;
- сведения об авторах;
- экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;
- договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу <http://pfint.gsu.by>.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

- the paper should be in agreement with the type of the journal;
- the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;
- the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides

the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e. g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

- covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;
- information about the authors;
- expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;
- treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charts top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year

of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site <http://pfmt.gsu.by>.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).