ISSN 2077-8708

Проблемы физики, математики и техники

№3 (56) 2023

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

«ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ»

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины
ул. Советская, 104,
246028, г. Гомель, Беларусь
Тел. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Интернет-адрес: http://pfmt.gsu.by

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

«PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS»

EDITION ADDRESS:
Francisk Skorina Gomel State University
Sovetskaya Str., 104,
246028, Gomel, Republic of Belarus
Ph. +375(232)51-00-77
+375(232)51-03-21
E-mail: pfmt@gsu.by
Website: http://pfmt.gsu.by

ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ, МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИКИ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с декабря 2009 г.

Выходит 4 раза в год

№ 3 (56) 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

ТЕХНИКА

ИНФОРМАТИКА

Учредитель – Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Журнал зарегистрирован в Министерстве информации Республики Беларусь
(свидетельство о регистрации № 492 от 15 июня 2009 г.)

Журнал включен в Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований по следующим отраслям науки:
– технические;
– физико-математические.

Приказ Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 4 июля 2005 г. № 101 (в редакции приказа Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 2 февраля 2011 г. № 26), решение коллегии Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 8 июля 2011 г. № 13/1, приказ Председателя Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 1 февраля 2012 г. № 21. Приказы Высшей аттестационной комиссии Республики Беларусь от 31.12.2020 № 338, № 339.

Журнал «Проблемы физики, математики и техники» реферируется в Реферативном журнале и Базах данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) Российской Академии наук (Москва) и в реферативном математическом журнале «Zentralblatt MATH» (Берлин, Германия).

Ежегодно ВИНИТИ РАН подает сведения в мировую справочную систему периодических изданий «Ulrich's Periodical Directory» о реферировании журнала «Проблемы физики, математики и техники» в Реферативном журнале ВИНИТИ РАН.

Журнал включен в Общероссийский математический портал Math-Net.Ru и Научную электронную библиотеку eLIBRARY.RU.

Технический редактор *Е.А. Ружицкая*
Корректоры *И.А. Хорсун*, *Т.А. Фицнер*
Дизайн обложки *А.В. Ермаков*

Подписано в печать 12.09.23. Формат 60×84 $1/8$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 12,56. Уч.-изд. л. 10,94. Тираж 17 экз. Заказ № 442.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013
ул. Советская, 104, 246028, Гомель

PROBLEMS OF PHYSICS, MATHEMATICS AND TECHNICS

SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

Published since December 2009

Released quarterly

№ 3 (56) 2023

CONTENTS

PHYSICS

MATHEMATICS

TECHNICS

INFORMATION SCIENCE

Founder – Francisk Skorina Gomel State University

The journal is registered in the Ministry of information of Belarus
(registration certificate № 492 from June, 15th, 2009)

The journal is included in the List of scientific editions of Belarus for publication of dissertational researches results on the following branches of science:

– Technics;

– Physics and Mathematics.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is reviewed in Abstract journal and Databases of the All-Russia Institute of Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences (Moscow) and in abstract mathematical journal «Zentralblatt MATH» (Berlin, Germany).

Annually the VINITI of the Russian Academy of Sciences submits data review of the journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» in Abstract journal VINITI of the Russian Academy of Sciences to the world Help of periodicals «Ulrich's Periodical Directory».

The Journal is included in all-Russian Mathematical Portal Math-Net.Ru and Scientific Electronic Library eLIBRARY.RU.

УДК 535.42 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_7
EDN: AEFCIV

ВЕКТОРНЫЕ ЦИРКУЛЯРНЫЕ ПАРАКСИАЛЬНЫЕ ПУЧКИ КУММЕРА – ГАУССА. ПОЛЯРИЗАЦИЯ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

VECTOR CIRCULAR PARAXIAL KUMMER – GAUSS BEAMS. POLARIZATION AND POWER PROPERTIES

S.S. Girgel

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Предложены и исследуются аналитические выражения в замкнутой форме для векторных циркулярных 3D световых пучков Куммера – Гаусса с однородной и неоднородной поляризациями. Сформулированы ограничения на свободные параметры, чтобы такие пучки Куммера – Гаусса переносили конечную мощность. Вычислены и графически исследуются поляризационные свойства, продольный и поперечные потоки энергии таких пучков.

Ключевые слова: *параксиальные пучки*, *векторные циркулярные пучки*, *пучки Куммера – Гаусса*, *потоки энергии.*

Для цитирования: *Гиргель*, *С.С.* Векторные циркулярные параксиальные пучки Куммера – Гаусса. Поляризация и энергетические свойства / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 7–11. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_7. – EDN: AEFCIV

Abstract. Analytical expressions in the closed form for vector circular 3D light of Kummer – Gauss beams from a uniform and non-uniform polarizations are offered and are investigated. Restrictions on free parameters that such of Kummer – Gauss beams transferred final power are formulated. Polarizing properties, longitudinal and crossflows of energy of such beams are calculated and are graphically investigated.

Keywords: *paraxial beams*, *vector circular beams*, *Kummer – Gauss beams*, *streams of energy.*

For citation: *Girgel*, *S.S.* Vector circular paraxial Kummer – Gauss beams. Polarization and power properties / S.S. Girgel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 3 (56). – P. 7–11. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_7 (in Russian). – EDN: AEFCIV

Введение

В работе [1] нами исследовались скалярные параксиальные циркулярные пучки Куммера – Гаусса, а в [2], [3] – векторные параксиальные циркулярные пучки Куммера с однородной и неоднородной по сечению пучка поляризацией (энергетические и поляризационные свойства).

В настоящей работе обсуждаются энергетические и поляризационные свойства векторных параксиальных циркулярных пучков Куммера – Гаусса с однородной и неоднородной поляризациями. Получены явные выражения, описывающие векторные циркулярные световые пучки Куммера – Гаусса с однородной и неоднородной поляризациями. Исследованы поляризационные свойства, продольные и поперечные потоки энергии таких световых пучков.

1 Векторные циркулярные световые пучки Куммера – Гаусса с однородной поляризацией.

Для монохроматических волн вида

$$f(\mathbf{r},t) = f\ \exp(ikz - i\omega t)$$

скалярное параболическое уравнение в цилиндрической системе координат имеет решение [1] (см. также [4])

$$f = Exp\left[\frac{I R^2}{Q}\right]\left(\frac{P}{P_0''}\right)^{\nu}\left(\frac{Q}{Q_0''}\right)^{-\nu-m-1}\times$$

$$\times M\left(-\nu, m+1;\, U\right) R^m \exp(im\varphi) = f_1 f_2(\varphi).$$

Аргументы функций Куммера M равны $U = iR^2\left(1/P - 1/Q\right)$. Комплексные параметры пучка $Q = Z - iQ_0''$ и $P = Z - iP_0''$. ешение f обладает цилиндрической (циркулярной) симметрией. Здесь, как и ранее [2], [3], используются все величины в безразмерной форме. Безразмерные переменные

$$X = x/x_0,\ \ Y = y/x_0,\ Z = z/z_0,\ \ R = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Оператор набла в безразмерных циркулярных (цилиндрических) координатах имеет вид

$$\nabla = \mathbf{e}_R\partial_R + (1/R)\mathbf{e}_\varphi\partial_\varphi + \mathbf{e}_Z\partial_Z = \nabla_\perp + \mathbf{e}_Z\partial_Z.$$

Следуя разработанному нами формализму [1]–[3], электрическое поле векторных параксиальных циркулярных пучков Куммера – Гаусса с однородной поляризацией запишем, как

$\mathbf{E} = \mathbf{e}_\perp f + \theta \nabla \mathbf{e}_\perp f \cdot \mathbf{e}_z$. Комплексный постоянный нормированный ($|\mathbf{e}_\perp|^2 = 1$) вектор поляризации $\mathbf{e}_\perp$ однозначно определяет поляризационные характеристики пучка $\mathbf{e}_\perp = (\eta_\rho \mathbf{e}_\rho + \eta_\varphi \mathbf{e}_\varphi)$. Введем параметр поляризации $\eta_c = \eta_\varphi / \eta_\rho = \mathrm{tg}(\psi'_c + i\psi''_c)$. Индекс c указывает, что вычисления проводятся в циркулярном (circular) базисе. Тогда азимут главной оси эллипса поляризации световой волны относительно оси OZ равен $(\varphi + \psi'_c)$, а ее эллиптичность γ будет $\gamma = \mathrm{th}\,\psi''_c$. Здесь $\varphi = \mathrm{arctg}(y/x)$. Так как $\mathbf{e}_\perp = \mathrm{const}$, то поляризация является однородной по всему сечению пучка.

Для расчета энергетических характеристик пучка Куммера – Гаусса с однородной поляризацией целесообразно ввести энергетический вектор $\mathbf{b} = \dfrac{\nabla f}{f}$. Обозначения $(b_R, b_\varphi, b_Z, b_X, b_Y)$ – компоненты вектора $\mathbf{b}$ в циркулярном и декартовом базисах соответственно. Теперь усредненные по времени плотности энергии w, продольного S_z и поперечного $\mathbf{S}_\perp$ потоков энергии электромагнитного поля для параксиальных векторных пучков с однородной поляризацией можно представить как [2]:

$$w = \frac{\varepsilon |f|^2}{8\pi}; \;\; S_z = \frac{c}{n} w; \;\; \mathbf{S}_\perp = \mathbf{S}_o + \mathbf{S}_s,$$

$$\mathbf{S}_o = \theta\, S_z \cdot \left(\mathbf{e}_R Im(b_R) + \frac{m}{R} \mathbf{e}_\varphi \right),$$

$$\mathbf{S}_s = -\theta\, S_z \cdot \mathrm{th}\, 2\psi''_c \,\mathrm{Re}(b_R)\, \mathbf{e}_\varphi.$$

Здесь безразмерный параметр параксиальности пучка $\theta = 1/K \cong 10^{-4}$. Нормированное волновое число $K = kx_0$. В выражении для $\mathbf{S}_\perp$ выделены явно, следуя формализму [5]-[7], плотность орбитального $\mathbf{S}_o$ и спинового $\mathbf{S}_s$ потоков энергии. Видим, что для азимутальной зависимости $f_2(\varphi) = \exp(im\varphi)$ спиновый поток энергии – строго азимутальный.

Вычисляя компоненты вектора $\mathbf{b}$, получаем

$$b_R = \frac{m}{R} + \frac{2iR}{Q} - \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q} \right) \frac{2i\nu R\, M(1-\nu, m+2;\, U)}{(m+1)\, M(-\nu, m+1; U)};$$

$b_\varphi = \dfrac{i\,m}{R}$. Здесь использованы известные [8] преобразования Куммера

$$\partial_u M(a,b,u) = \frac{a}{b} M(a+1, b+1, u).$$

Вблизи оси пучка поперечный поток энергии $\mathbf{S}_\perp$ – азимутальный. При возрастании R радиальная компонента становится преобладающей.

Чтобы векторные пучки Куммера – Гаусса с однородной поляризацией переносили конечную мощность, необходимо, чтобы для функции f выполнялись условия её квадратичной интегрируемости (КИ). В [1] были установлены условия КИ для скалярных пучков Куммера – Гаусса. Эти ограничения на свободные параметры пучка, как показывает анализ, справедливы также и для векторных пучков Куммера – Гаусса с однородной поляризацией.

2 Векторные циркулярные световые пучки Куммера – Гаусса с неоднородной поляризацией (ТМ-моды)

Векторные световые пучки с неоднородной поляризацией [9] исследовались слабо. Чтобы перейти к неоднородно поляризованным ТМ пучкам Куммера – Гаусса, достаточно выбрать поперечную часть $\mathbf{E}_\perp$ векторной амплитуды электрического поля светового пучка в виде

$$\mathbf{E}_\perp = \nabla_\perp f = \mathbf{b}_\perp f = \left(b_R \mathbf{e}_R + \frac{im}{R} \mathbf{e}_\varphi \right) f.$$

Тогда из уравнения непрерывности компонента $E_z = 4\theta b_Z f$, где

$$b_Z \equiv \frac{\partial_Z f}{f} = -\frac{iR^2 + Q}{Q^2} + \frac{\nu}{P} - \frac{\nu + m}{Q} +$$

$$+ \left(\frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2} \right) \frac{i\nu R^2\, M(1-\nu, m+2;\, U)}{(m+1)\, M(-\nu, m+1; U)}.$$

В декартовом базисе векторы электрического и магнитного полей векторных ТМ пучков Куммера – Гаусса равны:

$$E_X = b_X f; \;\; E_Y = b_Y f; \;\; E_Z = 4\theta b_Z f;$$

$$H_X = -n b_Y f; \;\; H_Y = n b_X f; \;\; H_Z = 0.$$

Анализ условий КИ для векторных пучков Куммера – Гаусса с неоднородной поляризацией (ТМ-мод) показал, что эти условия отличаются от условий КИ для пучков Куммера – Гаусса с однородной поляризацией. Результаты этого исследования представлены в таблице 2.1.

Поляризация векторных циркулярных ТМ-мод Куммера – Гаусса определяется комплексным параметром

$$\eta = E_\varphi / E_R = \mathrm{tg}(\psi' + i\psi'') = \frac{i\,m}{R\, b_R},$$

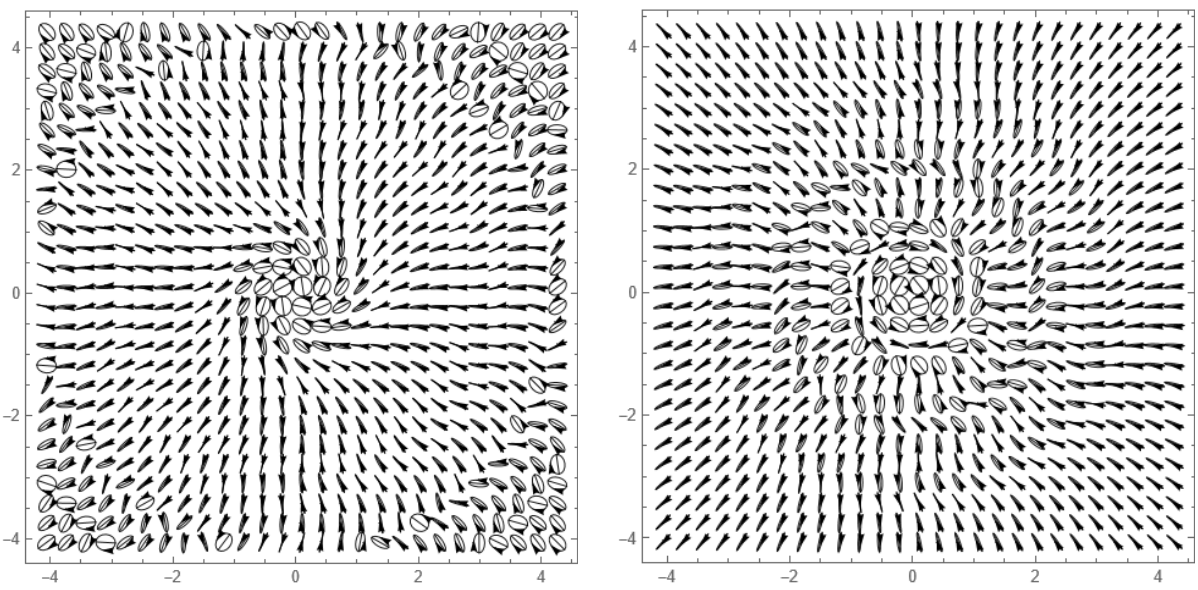
азимут главной оси эллипса поляризации светового поля относительно радиального направления $\mathbf{e}_R$ равен ψ', а отношение полуосей эллипса γ будет $\gamma = \mathrm{th}\,\psi''$.

На рисунке 2.1 графически изображены эллипсы поляризации циркулярных ТМ-мод Куммера – Гаусса.

Как видно из рисунка 2.1, соответствующего набору свободных параметров строки 4.4 (*а*) и строки 2 (*б*) таблицы 2.1, характер поляризации зависит от радиальных расстояний R от оси пучка и не зависит от азимутального угла φ. Вблизи оси пучка поляризация круговая, затем, с увеличением расстояния R, периодически постепенно изменяется от круговой до линейной. После этого возникают эллипсы с противоположным направлением вращения и т. д. Главные оси эллипсов образуют спирали, которые постепенно раскручиваются. Постепенно, по мере увеличения R эллипсы поляризации вырождаются в линии, а поляризация стремится к линейной, радиальной. Это видно также из формулы для векторной амплитуды $\mathbf{E}_{\perp}$.

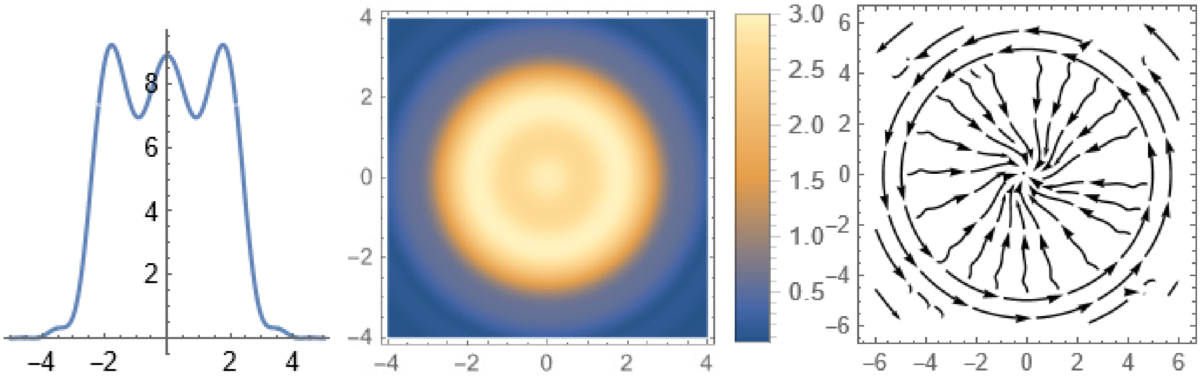
Таблица 2.1 – Условия КИ для векторных циркулярных ТМ световых пучков Куммера – Гаусса с непрерывным угловым индексом m и комплексным параметром $\nu = \nu' + i\nu''$

№	Ограничения на параметры Q_0''	Ограничения на параметры P_0''	Ограничения на индекс $\nu = \nu' + i\nu''$ ($m \geq 0$; $\mathbb{N} = 1, 2, 3, ...$)	Предел $\lvert\psi\rvert$ при $R \to \infty$	Выполнение условий КИ
1	$Q_0'' > 0$	$P_0'' > 0$	нет	$\lvert\psi\rvert \to 0$	да
2	$Q_0'' > 0$	$P_0'' < 0$	$\nu = \mathbb{N} - 1$	$\lvert\psi\rvert \to 0$	да
3	$Q_0'' < 0$	$P_0'' > 0$	$\nu = -m - N$	$\lvert\psi\rvert \to 0$	да
4.1	$Q_0'' > 0$	$\lvert P_0''\rvert \to \infty$	$\nu' < -\dfrac{3+m}{2}$	$\lvert\psi\rvert \to \infty$	нет
4.2	$Q_0'' > 0$	$\lvert P_0''\rvert \to \infty$	$\nu' = -\dfrac{3+m}{2}$	$\lvert\psi\rvert \to const$	нет
4.3	$Q_0'' > 0$	$\lvert P_0''\rvert \to \infty$	$\nu' \in \left(-\dfrac{3+m}{2}, -\dfrac{m+2}{2}\right]$	$\lvert\psi\rvert \to 0$	нет
4.4	$Q_0'' > 0$	$\lvert P_0''\rvert \to \infty$	$\nu' > -\dfrac{m+2}{2}$	$\lvert\psi\rvert \to 0$	да
5.1	$\lvert Q_0''\rvert \to \infty$	$P_0'' > 0$	$\nu' > \dfrac{1-m}{2}$	$\lvert\psi\rvert \to \infty$	нет
5.2	$\lvert Q_0''\rvert \to \infty$	$P_0'' > 0$	$\nu' = \dfrac{1-m}{2}$	$\lvert\psi\rvert \to const$	нет
5.3	$\lvert Q_0''\rvert \to \infty$	$P_0'' > 0$	$\nu' \in \left[-\dfrac{m}{2}, \dfrac{1-m}{2}\right)$	$\lvert\psi\rvert \to 0$	нет
5.4	$\lvert Q_0''\rvert \to \infty$	$P_0'' > 0$	$\nu' < -\dfrac{m}{2}$	$\lvert\psi\rvert \to 0$	да



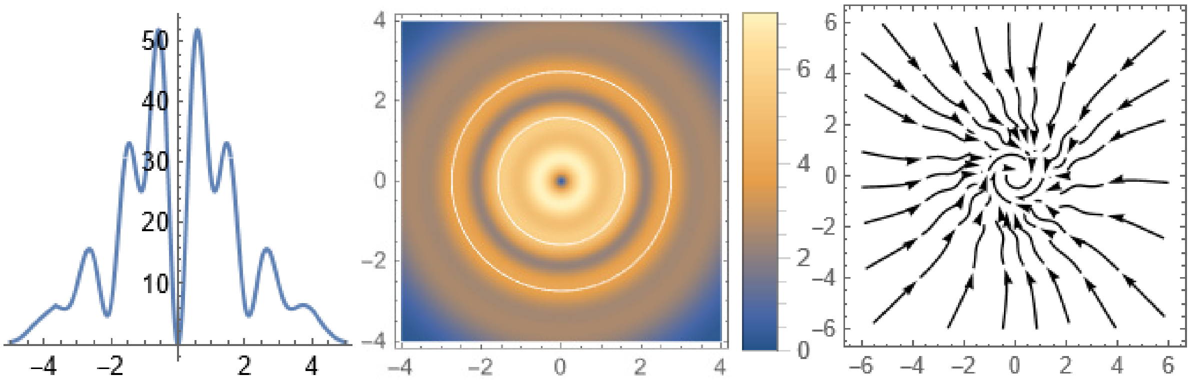
а) *б*)

Рисунок 2.1 – Эллипсы поляризации векторных ТМ-мод Куммера – Гаусса. Параметры пучка: *а*) $\nu = -0,7$; $m = 1$; $Q_0 = 0,38$; $P_0 \to \infty$; $Z = 1,2$; *б*) $\nu' = -1,5$; $\nu'' = 0$; $m = 1$; $Q_0 = 1$; $Z = 1$



а) б) в)

Рисунок 2.2 – Интенсивность и поперечный поток энергии векторных циркулярных пучков Куммера (ТМ-моды) с зависимостью $f_2 = \exp(i(m\varphi))$: а) интенсивность в продольном сечении пучка; б) интенсивность в поперечном сечении пучка; *в*) линии поперечного потока энергии. Используемые параметры: $\nu = -0,7;\ m = 1;\ Q_0 = 0,38;\ P_0 \to \infty;\ Z = 1,2$



а) *б*) *в*)

Рисунок 2.3 – Интенсивность и поперечный поток энергии векторных циркулярных пучков Куммера (ТМ-моды) с зависимостью $f_2 = \exp(i(m\varphi))$: *а*) интенсивность в продольном сечении *XOZ*; *б*) интенсивность в поперечном сечении *XOY*; *в*) линии поперечного потока энергии. Используемые параметры: $\nu = 2;\ m = 2;\ Q_0 = 2;\ P_0 = -2;\ Z = 1$

Обсудим теперь энергетические свойства векторных ТМ пучков Куммера – Гаусса. Плотности энергии w и продольного S_z потоков энергии светового поля для векторных ТМ пучков Куммера – Гаусса можно представить, как [8]:

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi}\left(\left|b_R\right|^2 + \frac{m^2}{R^2}\right)\left|f_1\right|^2;\quad S_z = \frac{c}{n}w.$$

Плотность поперечного потока энергии для ТМ-мод можно записать в виде [9]

$$\mathbf{S}_\perp = -\frac{c\,\varepsilon}{8\,\pi\,n}\mathrm{Re}\left(\mathbf{E}_\perp^* \cdot E_z\right).$$

Вычисляя, находим, что в циркулярном базисе

$$\mathbf{S}_\perp = \frac{c\varepsilon}{2\pi n}\theta\left|f_1\right|^2\left(\mathrm{Re}(b_R b_Z)\cdot\mathbf{e}_R + \frac{m}{R}\mathrm{Im}(b_Z)\cdot\mathbf{e}_\varphi\right).$$

В декартовой системе координат плотности энергии w и поперечного $\mathbf{S}_\perp$ потоков энергии представляются в симметричных формах:

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi}\left(\left|b_X\right|^2 + \left|b_Y\right|^2\right)\left|f_1\right|^2;$$

$$\mathbf{S}_\perp = \frac{c\varepsilon}{2\pi n}\theta\left|f_1\right|^2\left(\mathrm{Re}(b_X^* b_Z)\cdot\mathbf{e}_X + \mathrm{Im}(b_Y^* b_Z)\cdot\mathbf{e}_Y\right).$$

На рисунках 2.2 и 2.3, соответствующих набору свободных параметров строки 4.4 и строки 2 таблицы 2.1, представлены некоторые характерные результаты графического моделирования интенсивности и поперечных потоков энергии для векторных ТМ пучков Куммера – Гаусса. Картины интенсивности в поперечном сечении исследуемых световых пучков представляют собой кольца. Обычно видно одно или несколько колец. Остальные кольца не видны из-за их слабой интенсивности. Продольные потоки энергии пропорциональны интенсивности пучка и значительно меньше поперечных потоков. Вблизи оси пучка азимутальные компоненты значительно превосходят радиальные. По мере возрастания радиального расстояния R от оси пучка, в конечном итоге, радиальные потоки становятся преобладающими. Поперечные потоки энергии представляют собой постепенно раскручивающиеся спирали. Азимутальные и радиальные компоненты поперечного потока энергии осциллируют с возрастанием радиального расстояния. Таким образом, линии полных потоков энергии ТМ пучков Куммера – Гаусса представляют собой сложные спиралевидные линии вокруг оси пучка OZ.

Заключение

В данной работе выведены выражения, описывающие практически не изучавшиеся типы пучков – векторные параксиальные циркулярные световые пучки Куммера – Гаусса с однородной и неоднородной поляризациями, переносящие конечную мощность и поэтому физически реализуемые. Они характеризуются пятью свободными параметрами: четырьмя вещественными – (K, Q_0'', P_0'', m) и одним комплексным параметром $\nu = \nu' + i\nu''$.

Сформулированы условия физической реализуемости однородно и неоднородно поляризованных циркулярных векторных пучков Куммера – Гаусса с переносимой конечной мощностью во всем пространстве. Вычислены явные выражения для плотностей продольного и поперечного потоков энергии для однородно и неоднородно поляризованных пучков Куммера – Гаусса. Выполнено графическое моделирование их поперечных потоков энергии и интенсивности. Проведен соответствующий анализ. Установлено, что выбор различных свободных параметров пучка приводит к качественно различным физическим картинам.

Хотя иллюстративное графическое моделирование выполнено для целочисленных значений m и вещественных значений свободного параметра ν, найденные условия КИ пригодны также для непрерывных значений m и комплексных значений ν.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гиргель, С.С.* Циркулярные 3D световые пучки Куммера-Гаусса с непрерывным угловым спектром / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – № 1 (38). – С. 16–20.

2. *Гиргель, С.С.* Энергетические характеристики векторных циркулярных пучков Куммера с переносимой конечной мощностью / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2022. – № 4 (54). – С. 16–20.

3. *Гиргель, С.С.* Энергетические характеристики векторных циркулярных пучков Куммера конечной мощности. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (55). – С. 1–5.

4. *Bandres, M.A.* Circular beams / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2008. – Vol. 33, № 2. – P. 177–179.

5. *Berry, M.V.* Optical currents / M.V. Berry // Journal of Optics *A:* Pure and Applied Optics. – 2009. – Vol. 11 (9). – P. 094001.

6. *Bekshaev, A.Y.* Transverse energy flows in vectorial fields of paraxial beams with singularities / A.Y. Bekshaev, M.S. Soskin // Optics Communications. – 2007. – Vol. 271. – P. 332–348.

7. *Bekshaev, A.* Internal flows and energy circulation in light beams / A. Bekshaev, K. Bliokh, M. Soskin // Journal of Optics. – 2011. – Vol. 13 (5). – P. 053001.

8. *Справочник по специальным функциям*; под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 830 с.

9. *Bandres, M.A.* Vector Helmholtz – Gauss and vector Laplace – Gauss beams / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2005. – Vol. 30, № 16. – P. 2155–2057.

Поступила в редакцию 31.03.2023.

Информация об авторах

Гиргель Сергей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор

УДК 539.12.01 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_12
EDN: ANAMGY

ПРИБЛИЖЁННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОГО КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОТЕНЦИАЛОМ $\left(\rho^2+\rho_0^2\right)^{-1}$ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Ю.А. Гришечкин, А.В. Бужан, В.Н. Капшай

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTION OF THE ONE-DIMENSIONAL QUASIPOTENTIAL EQUATION WITH THE POTENTIAL $\left(\rho^2+\rho_0^2\right)^{-1}$ IN THE RELATIVISTIC CONFIGURATIONAL REPRESENTATION

Yu.A. Grishechkin, A.V. Buzhan, V.N. Kapshai

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Найдены приближённые аналитические решения одномерного уравнения Логунова – Тавхелидзе в интегральной форме, описывающего связанные состояния, с модельным потенциалом вида $\left(\rho^2+\rho_0^2\right)^{-1}$ в релятивистском конфигурационном представлении. Для решения задачи выполнено приближённое преобразование релятивистского интегрального уравнения в импульсном представлении к задаче Штурма – Лиувилля для уравнения Шрёдингера с потенциалом в виде модифицированной потенциальной ямы Пешля – Теллера.

Ключевые слова: *уравнение Логунова – Тавхелидзе*, *модельный потенциал*, *релятивистское конфигурационное представление*, *импульсное представление*, *задача Штурма – Лиувилля*, *приближённое аналитическое решение*, *уравнение Шрёдингера*, *модифицированный потенциал Пешля – Теллера*, *гипергеометрический ряд*, *условие квантования энергии.*

Для цитирования: *Гришечкин*, *Ю.А.* Приближённое аналитическое решение одномерного квазипотенциального уравнения с потенциалом $\left(\rho^2+\rho_0^2\right)^{-1}$ в релятивистском конфигурационном представлении / Ю.А. Гришечкин, А.В. Бужан, В.Н. Капшай // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 12–15. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_12. – EDN: ANAMGY

Abstract. The approximate analytical solutions of the one-dimensional Logunov-Tavkhelidze equation in integral form, that describes bound states, with a model potential of the form $\left(\rho^2+\rho_0^2\right)^{-1}$ in the relativistic configuration representation are found. To solve the problem an approximate transformation of the relativistic integral equation in the momentum representation to the Sturm – Liouville problem for the Schrödinger equation with a potential in the form of the modified Pöschl – Teller potential well is performed.

Keywords: *Logunov – Tavkhelidze equation*, *model potential*, *relativistic configurational representation*, *momentum representation*, *Sturm – Liouville problem*, *approximate analytical solution*, *Schrödinger equation*, *modified Pöschl – Teller potential*, *hypergeometric series*, *energy quantization condition.*

For citation: *Grishechkin*, *Yu.A*. Approximate analytical solution of the one-dimensional quasipotential equation with the potential $\left(\rho^2+\rho_0^2\right)^{-1}$ in the relativistic configurational representation / Yu.A. Grishechkin, A.V. Buzhan, V.N. Kapshai // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 3 (56). – P. 12–15. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_12 (in Russian). – EDN: ANAMGY

Введение

Одномерное уравнение Логунова – Тавхелидзе для волновой функции $\psi(2E,\rho)$, описывающей связанные состояния системы двух частиц одинаковой массы *m*, в релятивистском конфигурационном представлении (РКП) имеет вид [1], [2]

$$\psi(2E,\rho)=\int_{-\infty}^{\infty} G(E,\rho-\rho')V(\rho')\psi(2E,\rho')d\rho',$$

$$-\infty<\rho<\infty, \qquad (0.1)$$

где величина $2E$ – энергия системы двух частиц в системе центра масс $(0<2E<2m)$, ρ – координата в РКП, $V(\rho)$ − потенциал, $G(E,\rho-\rho')$ – функция Грина, имеющая следующую форму [1], [2]:

$$G(E,\rho-\rho')=\frac{-1}{m\sin 2w}\frac{\operatorname{sh}\left[\left(\pi/2-w\right)m(\rho-\rho')\right]}{\operatorname{sh}\left[\pi m(\rho-\rho')/2\right]}. \qquad (0.2)$$

Величина $0<w<\pi/2$ в (0.2) связана с энергией $2E$ по формуле $2E=2m\cos w$.

В данной работе мы рассматриваем нахождение приближённых аналитических решений уравнения (0.1) с модельным потенциалом в РКП следующего вида:

$$V(\rho)=\frac{-V_0}{\rho^2+\rho_0^2}, \quad (0.3)$$

где $V_0>0$, $\rho_0>0$ – константы. Отметим, что решение задачи в случае аналогичного трёхмерного потенциала было выполнено в работе [3]: точно – в случаях, когда $2E=0$ и $2E=2m$, численно – в случае, когда $0<2E<2m$.

1 Приближённое аналитическое решение

Для решения поставленной задачи сформулируем уравнение (0.1) в импульсном представлении [4]

$$\phi(2E,\chi_p)=-\frac{m}{2\pi}G(E,\chi_p)\int_{-\infty}^{+\infty}V(\chi_p-\chi_k)\phi(2E,\chi_k)d\chi_k,$$
$$-\infty<\chi_p<\infty, \quad (1.1)$$

где $\phi(2E,\chi_p)$ – волновая функция, χ_p – быстрота, связанная с относительным импульсом p в системе центра масс по формуле $p=m\,\mathrm{sh}\,\chi_p$, $V(\chi_p-\chi_k)$ – потенциал, $G(E,\chi_p)$ – функция Грина, имеющая вид

$$G(E,\chi_p)=\frac{1}{m^2\,\mathrm{ch}^2\,\chi_p-E^2}. \quad (1.2)$$

Входящие в уравнение (1.1) величины связаны с соответствующими величинами в РКП интегральными соотношениями [1], [2]

$$\psi(2E,\rho)=\frac{m}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(i\chi_p m\rho)\phi(2E,\chi_p)d\chi_p,$$

$$G(E,\rho-\rho')=-\frac{m}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(i\chi_p m(\rho-\rho'))G(E,\chi_p)d\chi_p,$$

$$V(\chi_p-\chi_k)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-i(\chi_p-\chi_k)m\rho)V(\rho)d\rho. \quad (1.3)$$

Подстановка выражения для потенциала в РКП (0.3) в формулу (1.3) и последующее вычисление интеграла приводит к следующему выражению для потенциала в импульсном представлении:

$$V(\chi_p-\chi_k)=-V_0\pi/\rho_0\exp(-|\chi_p-\chi_k|m\rho_0). \quad (1.4)$$

Интегральное уравнение (1.1) с потенциалом (1.4) эквивалентно задаче Штурма – Лиувилля (ЗШЛ) [3]

$$\left[\frac{d^2}{d\chi_p^2}-(m\rho_0)^2\right]G^{-1}(E,\chi_p)\phi(2E,\chi_p)=$$
$$=-m^2V_0\phi(2E,\chi_p),\ -\infty<\chi_p<\infty,$$
$$\left.\left\{\frac{d}{d\chi_p}\left[G^{-1}(E,\chi_p)\phi(2E,\chi_p)\right]\right\}\right|_{\chi_p\to\pm\infty}\cong 0.$$

После подстановки

$$G^{-1}(E,\chi_p)\phi(2E,\chi_p)=\Phi(2E,\chi_p)$$

и учёта явного вида функции Грина (1.2) представим ЗШЛ в следующей форме:

$$\left[\frac{d^2}{d\chi_p^2}-(m\rho_0)^2\right]\Phi(2E,\chi_p)=$$
$$=-\frac{V_0}{\mathrm{ch}^2\,\chi_p-\left(E/m\right)^2}\Phi(2E,\chi_p),\ -\infty<\chi_p<\infty, \quad (1.5)$$
$$\left.\frac{d}{d\chi_p}\Phi(2E,\chi_p)\right|_{\chi_p\to\pm\infty}\cong 0.$$

Задача (1.5) не имеет точных решений. Найдём её решения приближённо аналитически. Для этого выполним приближение множителя в правой части уравнения

$$-\frac{V_0}{\mathrm{ch}^2\,\chi_p-\left(E/m\right)^2}\approx-\frac{V_0}{\mathrm{ch}^2\,\alpha\chi_p\left[1-\left(E/m\right)^2\right]}, \quad (1.6)$$

где $\alpha>0$ – параметр, выбор значения которого определяет точность данного равенства и зависит от параметра E/m. Представим ЗШЛ (1.5) с учётом приближения (1.6) в виде

$$\left[\frac{d^2}{d\chi_p^2}-(m\rho_0)^2\right]\Phi(2E,\chi_p)=-\frac{g^2}{\mathrm{ch}^2\,\alpha\chi_p}\Phi(2E,\chi_p),$$
$$-\infty<\chi_p<\infty, \quad (1.7)$$
$$\left.\frac{d}{d\chi_p}\Phi(2E,\chi_p)\right|_{\chi_p\to\pm\infty}\cong 0,$$

где введено обозначение $g^2=V_0\left[1-\left(E/m\right)^2\right]^{-1}$.

Уравнение в (1.7) аналогично одномерному уравнению Шрёдингера в случае модифицированного потенциала Пешля – Теллера [5], [6]. Как известно, в случае такого взаимодействия нерелятивистская задача имеет точные решения. Приведём кратко процедуру нахождения решений полученной нами релятивистской задачи (с совершенно другими граничными условиями). Для этого выполним в (1.7) замену переменной $x=\mathrm{th}\,\alpha\chi_p$ и переобозначение

$$\Phi(2E,\chi_p)\Rightarrow W(x).$$

После указанных преобразований представим (1.7) в форме

$$\left[\hat{L}^2-(m\rho_0/\alpha)^2+(g/\alpha)^2(1-x^2)\right]W(x)=0,$$
$$-1\le x\le 1, \quad (1.8)$$
$$\left.\hat{L}W(x)\right|_{x\to\pm1}\cong 0, \quad (1.9)$$

где мы ввели обозначение для оператора $\hat{L}=(1-x^2)\dfrac{d}{dx}$. В уравнении (1.8) сделаем подстановку $W(x)=(1-x^2)^{\mu}U(x)$, где $U(x)$ – неизвестная функция, $\mu=m\rho_0/(2\alpha)$. В результате получим дифференциальное уравнение для функции $U(x)$:

$$\left[(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}-(2+4\mu)x\frac{d}{dx}+\left(g/\alpha\right)^2-4\mu^2-2\mu\right]\times \times U(x)=0. \quad (1.10)$$

Заменой переменной $y=(1-x)/2$ преобразуем уравнение (1.10) к гипергеометрическому [7]

$$\left[y(1-y)\frac{d^2}{dy^2}+\left((1+2\mu)-(2+4\mu)y\right)\frac{d}{dy}+ +\left(g/\alpha\right)^2-4\mu^2-2\mu\right]U(y)=0,\ \ 0\le y\le 1,$$

общее решение которого имеет вид

$$U(y)=A\,{}_2F_1(a,b;c;y)+ +By^{1-c}{}_2F_1(a+1-c,b+1-c;2-c;y), \quad (1.11)$$

где ${}_2F_1$ – гипергеометрические ряды, A, B – неопределённые константы, a, b, c – параметры следующего вида:

$$a=1/2+2\mu-\left[1/4+\left(g/\alpha\right)^2\right]^{1/2};$$

$$b=1/2+2\mu+\left[1/4+\left(g/\alpha\right)^2\right]^{1/2};\ \ c=1+2\mu.$$

Возвращая в (1.11) переменную x и подставляя эту функцию в формулу для $W(x)$, получим следующее выражение:

$$W(x)=A(1-x^2)^{\mu}\,{}_2F_1(a,b;c;(1-x)/2)+ \quad (1.12)$$
$$+B(1-x^2)^{\mu}\left((1-x)/2\right)^{1-c}\times$$
$$\times{}_2F_1(a+1-c,b+1-c;2-c;(1-x)/2).$$

Выражение (1.12) удовлетворяет граничному условию (1.9) при $x\to 1$, если $B=0$. Граничное условие при $x\to -1$ выполняется только когда ${}_2F_1(a,b;c;(1-x)/2)$ является полиномом, т. е. должно выполнятся равенство

$$a=-n,\ \ n=0,1,2,... \quad (1.13)$$

Учтём в (1.13) явный вид величины a, а также величин μ, g и выразим из него энергию

$$2E_n=2m\left[1-\frac{V_0}{(m\rho_0+\alpha n)(m\rho_0+\alpha+\alpha n)}\right]^{1/2}. \quad (1.14)$$

Выражение (1.14) является условием квантования энергии. Из равенства (1.13) следует, что $a\le 0$. С учётом явного вида величины a получим условие, которому должны удовлетворять параметры V_0, α, $m\rho_0$: $V_0\ge m\rho_0(1+m\rho_0/\alpha)$.

Формула для волновой функции, соответствующей собственному значению энергии $2E_n$, имеет следующий вид:

$$\phi(2E_n,\chi_p)=\frac{A_n}{\left[m^2\operatorname{ch}^2\chi_p-E_n^2\right]\operatorname{ch}^{m\rho_0/\alpha}\alpha\chi_p}\times$$
$$\times{}_2F_1\left(-n,1+2m\rho_0/\alpha+n;1+m\rho_0/\alpha;(1-\operatorname{th}\alpha\chi_p)/2\right),$$

где константа A_n – всё ещё не определена.

2 Анализ полученных результатов

Исследуем найденные приближённые решения. Из выражения (1.14) следует, что параметр n может принимать любые целые неотрицательные значения, не меньшие, чем

$$\left(1/4+V_0/\alpha^2\right)^{1/2}-1/2-m\rho_0/\alpha.$$

С целью выяснения точности собственных значений выполним сравнение получаемых по формуле результатов с соответствующими величинами, полученными численным решением интегрального уравнения (0.1) с потенциалом (0.3):

$$\psi(2E,\rho)=\frac{V_0}{2m\sin w}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\left[(\pi/2-w)m(\rho-\rho')\right]}{\operatorname{sh}\left[\pi m(\rho-\rho')/2\right]}\frac{1}{\rho'^2+\rho_0^2}\psi(2E,\rho')d\rho'. \quad (2.1)$$

Для этого удобно выразить из формулы (1.14) величину V_0 и считать, что условие квантования выполняется для неё, а величину $2E$ рассматривать как параметр. Такое условие квантования имеет вид

$$V_{0(n)}=\left(1-\left(E/m\right)^2\right)(m\rho_0+\alpha n)(m\rho_0+\alpha+\alpha n),$$
$$n=0,1,2,... \quad (2.2)$$

В таблице 2.1 приведены величины параметра α, соответствующие различным значениям обезразмеренной энергии $2E/m$.

Таблица 2.1 – Значения параметра аппроксимации α

$2E/m$	α	$2E/m$	α
0,3	1,01	1,2	1,18
0,6	1,03	1,5	1,36
0,9	1,08	1,8	1,90

Данные в таблице 2.1 величины α – это значения, при которых интегральная функция

$$\varepsilon(\alpha)= =\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\operatorname{ch}^2\chi_p-\left(E/m\right)^2}-\frac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha\chi_p\left[1-\left(E/m\right)^2\right]}\right]^2d\chi_p$$

принимает минимальное значение для фиксированной величины $2E/m$.

В таблице 2.2 приведены значения величин $V_{0(n)}$, найденных при численном решении интегрального уравнения (2.1) (numerically) и определённых по формуле (2.2) (approximately) для разных значений величин $m\rho_0$, $2\varepsilon=2E/m$, n. Величины $V_{0(n)}^{num}$ найдены с точностью до 4 знаков после запятой и выше. Насколько полученные значения оказываются близкими к точным можно судить по приведенным в таблице величинам $\Delta_{(n)}=\left|V_{0(n)}^{num}-V_{0(n)}^{appr}\right|$.

Таблица 2.2 – Значения константы связи $V_{0(n)}$

2ε	$V_{0(0)}^{num}$	$V_{0(0)}^{appr}$	$\Delta_{(0)}$	$V_{0(1)}^{num}$	$V_{0(1)}^{appr}$	$\Delta_{(1)}$	$V_{0(2)}^{num}$	$V_{0(2)}^{appr}$	$\Delta_{(2)}$
$m\rho_0=0,25$									
0,3	0,3075	0,3079	0,0004	2,7836	2,7959	0,0123	7,2322	7,2781	0,0459
0,6	0,2922	0,2912	0,0010	2,6955	2,6907	0,0048	6,9871	7,0210	0,0339
0,9	0,2662	0,2652	0,0010	2,5429	2,5562	0,0133	6,5623	6,7077	0,1454
1,2	0,2283	0,2288	0,0005	2,3148	2,3887	0,0739	5,9257	6,3308	0,4051
1,5	0,1760	0,1761	0,0001	1,9858	2,0920	0,1062	5,0039	5,6263	0,6224
1,8	0,1019	0,1021	0,0002	1,4756	1,6544	0,1788	3,5658	4,5785	1,0127
$m\rho_0=1,00$									
0,3	1,9639	1,9648	0,0009	5,9226	5,9336	0,0110	11,8555	11,8968	0,0413
0,6	1,8551	1,8473	0,0078	5,6875	5,6527	0,0348	11,4151	11,3890	0,0261
0,9	1,6710	1,6588	0,0122	5,2844	5,2418	0,0426	10,6562	10,6852	0,0290
1,2	1,4066	1,3952	0,0114	4,6911	4,6879	0,0032	9,5286	9,7628	0,2342
1,5	1,0505	1,0325	0,0180	3,8576	3,8409	0,0167	7,9194	8,2677	0,3483
1,8	0,5685	0,5510	0,0175	2,6269	2,6448	0,0179	5,4710	6,1104	0,6394
$m\rho_0=4,00$									
0,3	19,5907	19,5891	0,0016	29,4800	29,4816	0,0016	41,3457	41,3684	0,0227
0,6	18,3595	18,3092	0,0503	27,9101	27,7384	0,1717	39,3652	39,0985	0,2667
0,9	16,2960	16,2052	0,0908	25,2570	24,9560	0,3010	35,9991	35,5672	0,4319
1,2	13,3771	13,2608	0,1163	21,4480	21,0847	0,3633	31,1174	30,6908	0,4266
1,5	9,5516	9,3800	0,1716	16,3196	15,7584	0,5612	24,4268	23,7552	0,6716
1,8	4,6630	4,4840	0,1790	9,3670	8,7438	0,6232	15,0115	14,3754	0,6361

Как видно из таблицы 2.2, с ростом величины $m\rho_0$ точность значений константы связи, найденных по формуле (2.2), снижается. Также точность снижается с ростом номера состояния n для каждого фиксированного значения $m\rho_0$.

Заключение

Таким образом, в данной работе получены приближённые аналитические решения одномерного уравнения Логунова – Тавхелидзе с потенциалом $(\rho^2+\rho_0^2)^{-1}$ в релятивистском конфигурационном представлении. Решения получены преобразованием интегрального уравнения в релятивистском конфигурационном представлении к задаче Штурма – Лиувилля в импульсном представлении с последующей заменой обыкновенного дифференциального уравнения аналогом уравнения Шрёдингера с модифицированным потенциалом Пешля – Теллера, для которого известны точные решения. Сравнение полученных данным методом собственных значений с соответствующими величинами, найденными при численном решении уравнения Логунова – Тавхелидзе, показало эффективность предложенного метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kapshai*, *V.N.* Relativistic two-particle one-dimensional scattering problem for superposition of δ-potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // J. Phys. A. – 1999. – Vol. 32. – P. 5329–5342.

2. *Kapshai*, *V.N.* One-dimensional relativistic problems on bound states and scattering for a superposition of two δ-potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // Russian Physics Journal. – 2002. – Vol. 45. – P. 1–9.

3. *Капшай*, *В.Н.* Решения релятивистских двухчастичных уравнений с произвольным орбитальным моментом / В.Н. Капшай, С.И. Фиалка // Известия ВУЗов. Физика. – 2017. – Т. 60, № 1. – С. 34–43.

4. *Капшай*, *В.Н.* Точные решения квазипотенциальных уравнений для кулоновского и линейного запирающего потенциалов / В.Н. Капшай, Н.Б. Скачков // ТМФ. – 1983. – Т. 55, № 2. – С. 236–245.

5. *Флюгге*, *З.* Задачи по квантовой механике: в 2 т. / З. Флюгге. – 3-е изд. – Москва: ЛКИ, 2010. – Т. 1. – 344 с.

6. *Теоретическая физика*: в 10 т. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – 5-е изд. – Москва: Физматлит, 2002. – Т. 3: Квантовая механика: нерелятивистская теория. – 808 с.

7. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами*; под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 830 с.

Поступила в редакцию 14.08.2023.

Информация об авторах

Гришечкин Юрий Алексеевич – к.ф.-м.н., доцент
Бужан Андрей Вадимович – аспирант
Капшай Валерий Николаевич – к.ф.-м.н., доцент

ФИЗИКА

УДК 534.535

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_16
EDN: ASYHAV

АКУСТООПТИЧЕСКАЯ МОДУЛЯЦИЯ БЕССЕЛЕВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В КРИСТАЛЛАХ ПАРАТЕЛЛУРИТА

Г.В. Кулак[1], Т.В. Николаенко[1], П.И. Ропот[2], О.В. Шакин[3]

[1]*Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина*
[2]*Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск*
[3]*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения*

ACOUSTO-OPTICAL MODULATION OF BESSEL LIGHT BEAMS IN PARATELLURITE CRYSTALS

G.V. Kulak[1], T.V. Nikolaenko[1], P.I. Ropot[2], O.V. Shakin[3]

[1]*I.P. Shamyakin Mozyr State Pedagogical University*
[2]*B.I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk*
[3]*Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation*

Аннотация. Теоретически исследована акустооптическая модуляция бесселевых световых пучков на ультразвуке в одноосных гиротропных кристаллах парателлурита. Установлено, что эффективность анизотропной брэгговской дифракции бесселевых световых пучков нулевого порядка выше, чем азимутально-неоднородных пучков первого порядка. Показано, что наибольшая эффективность дифракции для бесселевого пучка первого порядка достигается для акустооптического преобразования лево-эллиптически поляризованной световой волны в право-эллиптически поляризованную. Ширина полосы пропускания устройства остается неизменной при оптимальных условиях стопроцентной эффективности дифракции для бесселевых пучков различных порядков и уменьшается при увеличении длины акустооптического взаимодействия.

Ключевые слова: *акустооптическое взаимодействие*, *гиротропный одноосный кристалл*, *бесселев световой пучок*, *модуляция света*.

Для цитирования: *Акустооптическая модуляция бесселевых световых пучков в кристаллах парателлурита* / Г.В. Кулак, Т.В. Николаенко, П.И. Ропот, О.В. Шакин // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 16–20. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_16. – EDN: ASYHAV

Abstract. Acousto-optical modulation of Bessel light beams on ultrasound in uniaxial gyrotropic crystals of paratellurite has been theoretically investigated. It is established that the efficiency of anisotropic Bragg diffraction of zero-order Bessel light beams is higher than that of first-order asimutally inhomogeneous beams. It is shown that the highest diffraction efficiency for a first-order Bessel beam is achieved for the acousto-optical transformation of a left-elliptically polarized light wave into a right-elliptically polarized one. The bandwidth of the device remains unchanged under optimal conditions of one hundred percent diffraction efficiency for Bessel beams of various orders and decreases with increasing acousto-optic interaction length.

Keywords: *acousto-optical interaction*, *gyrotropic uniaxial crystal*, *Bessel light beam*, *light modulation*.

For citation: *Acousto-optical modulation of Bessel light beams in paratellurite crystals* / G.V. Kulak, T.V. Nikolaenko, P.I. Ropot, O.V. Shakin // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 3 (56). – P. 16–20. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_16 (in Russian). – EDN: ASYHAV

Введение

Акустооптическая (АО) дифракция световых волн в плосковолновом приближении или гауссовых световых пучков довольно хорошо изучена [1]. В настоящее время имеется мало работ по АО модуляции бесселевых световых пучков (БСП) высших порядков [2]–[4]. В работе [4] исследованы особенности АО преобразований при коллинеарном распространении ультразвука и дифрагированных световых пучков. Влияние оптичской активности на брэгговскую АО дифракцию в кристаллах парателлурита исследовано в работе [5]. Показано, что для световых волн с длиной волны 0,6328 мкм достижима ширина полосы модуляции 25 МГц при акустической мощности 0,035 Вт и длине АО взаимодействия 12 мм. Вследствие узкой дифракционной структуры БСП высших порядков и узкого темного центрального пятна, бесселевы пучки высокого порядка могут быть использованы для управления атомами на больших расстояниях, например, фокусирования холодных атомов [6].

В настоящей работе с использованием метода интегралов перекрытия рассмотрено неколлинеарное АО взаимодействие бесселевых световых пучков высоких порядков при попутном распространении в окрестности оптической оси в кристаллах парателлурита. При этом в качестве примера рассмотрена АО модуляция БСП нулевого порядка ($m = 0$) и первого порядка ($m = 1$) в кристаллах парателлурита при дифракции на медленной сдвиговой ультразвуковой (УЗ) волне, распространяющейся вдоль оси [110] и поляризовинной вдоль оси $[\bar{1}10]$.

1 Теоретические результаты и обсуждение

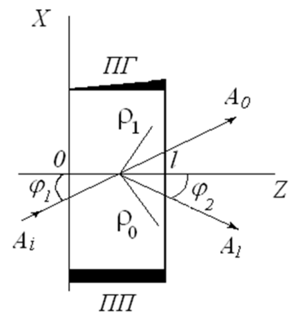
Кроме обычного продольного фазового согласования БСП должны удовлетворять условиям поперечного фазового согласования. Такое согласование связано с тем, что бесселевы световые пучки с различными углами конусности имеют различную пространственную структуру и, как следствие, различные величины интегралов перекрытия дифрагированных пучков. Вычисление интегралов перекрытия позволяет найти их максимальные значения (g_m) в условиях поперечного синхронизма.

Для взаимодействия волн с одинаковыми поляризациями, когда имеет место изотропная дифракция эллиптически поляризованных волн, условия Брэгга выполняются одновременно при одном и том же угле падения

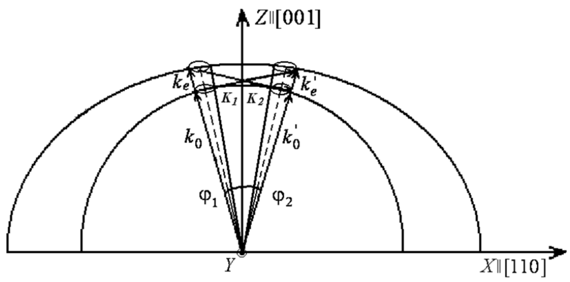
$$\varphi_Б = \arcsin(\lambda_0 / 2n\Lambda),$$

где λ_0 и Λ – длина световой и ультразвуковой волн соответственно; n – средний показатель преломления кристалла. В случае взаимодействия волн с различными поляризациями (анизотропная дифракция эллиптически поляризованных волн) углы Брэгга отличаются от $\varphi_Б$ на величину $\delta\varphi = \pm 2\alpha / (n \sin 2\varphi_Б)$, где α – параметр гиротропии [7]. При соблюдении условия $\alpha >> \Delta n_a$ (Δn_a – глубина модуляции показателя преломления акустической волной) возможно независимое рассмотрение всех четырех дифракционных процессов изотропной и анизотропной дифракции в гиротропных средах. Предполагается, что на границе области АО взаимодействия формируются избирательно БСП с правой или левой эллиптической поляризацией. В таком случае варьированием частоты ультразвука возможно достижение различных типов преобразования эллиптически-поляризованных волн. На рисунке 1.1 представлена геометрия анизотропной брэгговской дифракции эллиптически поляризованных БСП.

Рассмотрим геометрию АО взаимодействия (рисунок 1.1), для которой УЗ волна распространяется в кристалле парателлурита под малым углом δ к оси X и занимает пространство между плоскостями $z = 0$ и $z = l$. Ось падающего БСП расположена в плоскости XZ под углом φ_1 к фронту УЗ волны. Сечение поверхности волновых векторов плоскостью дифракции XZ и расположение плосковолновых компонент падающего (k_o и k_e) и плосковолновых компонент дифрагированного (k'_o и k'_e) бесселевых пучков показано на рисунке 1.1, *б*. При этом предполагается, что в условиях опыта возможно раздельное наблюдение двух возможных дифракционных процессов: $\vec{k}_o + \vec{K}_1 = \vec{k}'_e$, $\vec{k}_e + \vec{K}_2 = \vec{k}'_o$, где $\vec{K}_1, \vec{K}_2$ – плосковолновые компоненты акустического пучка.



а)



б)

Рисунок 1.1 – *а*) Схема АО взаимодействия БСП и УЗ волны (ПП – пьезопреобразователь, ПГ – поглотитель ультразвука, φ_1 и φ_2 – угол падения и дифракции соответственно); *б*) геометрия расположения преломленной и дифрагированной плосковолновых компонент БСП в плоскости дифракции на медленной сдвиговой УЗ волне в кристалле TeO_2 ($\vec{K}_{1,2}$ – волновые векторы ультразвука, $\vec{k}_{o,e}$, $\vec{k}'_{o,e}$ – волновые векторы преломленной и дифрагированной волн)

Система уравнений связанных волн для комплексных амплитуд дифрагированных волн ($A_{0\pm}, A_{1\pm}$) имеет вид:

$$\frac{dA_{0\pm}}{dz} = -i \frac{k_0^2 \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R_B} (\vec{e}_\pm^{\,*} \Delta\hat{\varepsilon} \vec{e}_\mp) \rho d\varphi d\rho}{2k_{z\pm} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R_B} |\vec{e}_\pm^{\,*}|^2 \rho d\varphi d\rho} A_{1\mp} e^{-i\Delta kz},$$

$$\frac{dA_{1\mp}}{dz} = -i \frac{k_0^2 \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R_B} (\vec{e}_\mp^{\,*} \Delta\hat{\varepsilon} \vec{e}_\pm) \rho d\varphi d\rho}{2ik_{z\mp} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R_B} |\vec{e}_\mp|^2 \rho d\varphi d\rho} A_{0\pm} e^{i\Delta kz}, \quad (1.1)$$

где $\Delta k \sim \Delta f$ – расстройка фазового синхронизма, между падающей и дифрагированной волной (продольное фазовое рассогласование, Δf – рассогласование УЗ частоты); векторы поляризации находим из соотношений [8]:

$$\vec{e}_+ = e_{\rho+}\vec{e}_\rho + e_{\varphi+}\vec{e}_\varphi,\ \ \vec{e}_- = e_{\rho-}\vec{e}_\rho + e_{\varphi-}\vec{e}_\varphi,$$

$$e_{\rho+} = i\left[\frac{m}{q\rho}J_m(q\rho)(1+\cos\gamma_+) - J_{m+1}(q\rho)\cos\gamma_+\right],$$

$$e_{\varphi+} = \left[J_{m+1}(q\rho) - \frac{m}{q\rho}J_m(q\rho)(1+\cos\gamma_+)\right],$$

$$e_{\rho-} = -i\left[\frac{m}{q\rho}J_m(q\rho)(1-\cos\gamma_-) + J_{m+1}(q\rho)\cos\gamma_-\right],$$

$$e_{\varphi-} = \left[-J_{m+1}(q\rho) + \frac{m}{q\rho}J_m(q\rho)(1-\cos\gamma_-)\right].$$

Здесь введены следующие обозначения: $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ – единичные векторы в цилиндрической системе координат ρ, φ, z; волновое число дифрагированной волны $k_\pm = k \pm \beta$, причем $\beta = \alpha k_0 / \cos(\gamma_0)$ – удельное вращение кристалла, $\gamma_\pm$ – параметр конусности преломленного светового пучка без учета гиротропии и линейной анизотропии, $\alpha = \alpha_{ij} n_i^0 n_j^0$ – параметр гиротропии в направлении распространения дифрагированной волны (k_0 – волновое число света в вакууме, α_{ij} – тензор гирации, n_i^0 – компоненты единичного вектора волновой нормали дифрагированной волны), m – целое число; параметры $\gamma_\pm$ находятся из соотношений:

$$\cos(\gamma_\pm) = \cos(\gamma_0)\left[1 \pm (\alpha/\sqrt{\varepsilon})\,\mathrm{tg}(\gamma_0)\right],$$

где $\varepsilon = \varepsilon_{ij} n_i^0 n_j^0$ (ε_{ij} – компоненты тензора диэлектрической проницаемости одноосного кристалла); $\Delta\hat{\varepsilon}$ – изменение тензора диэлектрической проницаемости, индуцированное УЗ волной, γ_0 – угол конусности БСП в отсутствие гиротропии.

Решение системы уравнений связанных волн (1.1) ищем с использованием следующих граничных условий: $A_{0\pm}(0) = A$, $A_{1\pm}(0) = 0$. Тогда решение имеет вид:

$$\eta = \frac{(\chi g_{\pm,\mp})\sin^2\left[l_d\sqrt{(\chi g_{\pm,\mp})^2 + (\Delta k)^2}\right]}{(\chi g_{\pm,\mp})^2 + (\Delta k)^2}, \quad (1.2)$$

где постоянную связи дифрагированных волн находим из соотношения:

$$\chi = \frac{\pi n_o^4 p_{эф}}{2n\lambda_0\cos\varphi_1\cos\varphi_2}\sqrt{\frac{2P_a}{l_1 l_2 \sigma \upsilon^3}};$$

длина АО взаимодействия с учетом угла (Δ) сноса групповой скорости УЗ волны относительно фазовой дается соотношением [9]:

$$l_d = l_1\left[1 - \cos(\Delta)/\cos(\Delta + \varphi_1)\right],$$

где $\Delta = arctg\left\{\frac{\left[c_{44} - (c_{11} - c_{12})/2\right]\sin\alpha\cos\alpha}{\left[(c_{11} - c_{12})/2\right]\cos^2\alpha + c_{44}\sin^2\alpha}\right\}$,

причем c_{11}, c_{12}, c_{44} – упругие модули кристалла; эффективная фотоупругая постоянная

$$p_{эф} = \left[(p_{12} - p_{11}) - p_{44}\sin(2\alpha)/8\right]$$

(p_{11}, p_{12}, p_{44} – фотоупругие постоянные, σ – плотность кристалла, υ – фазовая скорость УЗ волны, λ_0 – длина световой волны в вакууме; $n = (n_o + n_e)/2$, где n_o (n_e) – обыкновенный (необыкновенный) показатель преломления кристалла; P_a – мощность УЗ волны, l_1 – длина пьезопреобразователя вдоль оси X||[110], l_2 – ширина пьезопреобразователя, σ – плотность кристалла, υ – фазовая скорость УЗ волны).

2 Случаи анизотропной АО дифракции эллиптически поляризованных световых волн

Рассмотрим различные случаи анизотропной АО дифракции эллиптически поляризованных световых волн и соответствующие им интегралы перекрытия, имеющие следующий вид:

$$g_{\pm,\mp} = \frac{\left|\int\limits_0^{R_B}\left[\left(\hat{e}^*_{\rho\pm}e_{\rho\mp}\right) + \left(\hat{e}^*_{\phi\pm}e_{\phi\mp}\right)\right]\rho d\rho\right|}{\sqrt{\int\limits_0^{R_B}\left(|\hat{e}_{\rho\pm}|^2 + |\hat{e}_{\phi\pm}|^2\right)\rho d\rho}}\times$$

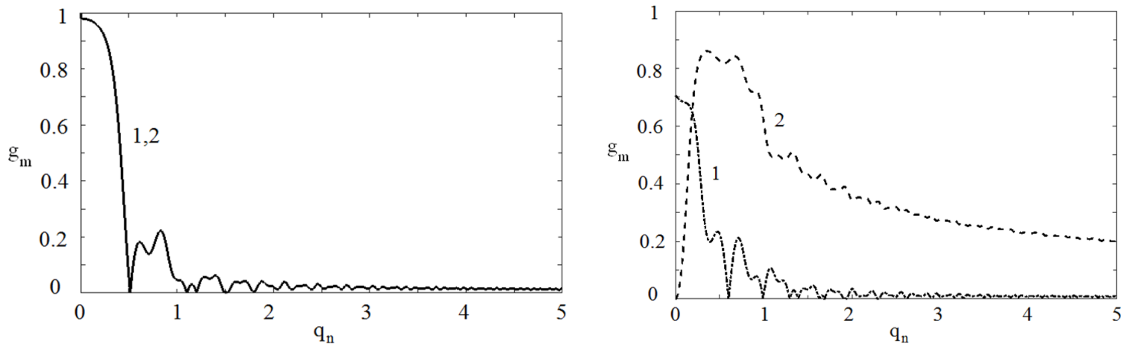
$$\times\frac{1}{\sqrt{\int\limits_0^{R_B}\left(|e_{\rho\mp}|^2 + |e_{\phi\mp}|^2\right)\rho d\rho}}.$$

В приведенных выше формулах символ «$\hat{e}$ -бар» означает, что символ q, соответствующий поперечному волновому числу дифрагированной световой волны, следует заменить на символ q_0 для падающей; R_B – радиус БСП.

На рисунке 2.1 представлена зависимость интеграла перекрытия g_m от параметра $q_n = q / q_0$ – отношение расходимостей дифрагированного и падающего БСП для дифракции БСП нулевого порядка (*а*) и первого порядка (*б*).

Из рисунка 2.1, *а*) следует, что интегралы перекрытия БСП нулевого порядка ($m = 0$) при анизотропной дифракции достигают максимального значения при выполнении условия поперечного фазового синхронизма, то есть при $q_n = 0$. В случае азимутально-неоднородных БСП с азимутальным числом $m = 1$ (рисунок 2.1, *б*), эффективности анизотропной дифракции для двух (кривые 1, 2) возможных видов АО преобразования отличаются по величине, причем для дифракции правополяризованной волны в левополяризованную (кривая 1) максимум $g_m = 0{,}72$ при $q_n = 0$; при дифракции левополяризованной в правополяризованную (кривая 2) максимум $g_m = 0{,}87$ при $q_n = 0{,}5$.

На рисунке 2.2 представлена зависимость эффективности дифракции η от мощности ультразвука P_a для анизотропной брэгговской



а) *б*)

Рисунок 2.1 – Зависимость интеграла перекрытия $g_{\pm,\pm} \equiv g_m$ от параметра $q_n = q / q_0$ для дифракции бесселевого пучка нулевого порядка (*а*) и первого порядка (*б*); анизотропная дифракция (кривая 1, 2-правополяризованная в левополяризованную (и наоборот) максимум $g_m = 0{,}98$ для $m = 0$); (*б*) дифракция правополяризованной волны в левополяризованную (кривая 1) максимум $g_m = 0{,}72$ для $m = 1$; дифракция левополяризованной в правополяризованную (кривая 2) максимум $g_m = 0{,}87$ для $m = 1$ (кристалл TeO_2; медленная сдвиговая УЗ волна распространяется под малым углом δ к оси X||[110]; $\gamma_\pm = 0{,}5^0$, β = 83 град/мм, R_B = 1 мм, λ_0 = 0,63 мкм)

дифракции БСП нулевого порядка с азимутально-однородным распределением ($m = 0$, кривая 1) и азимутально-неоднородного ($m = 1$, кривая 2), которая соответствует дифракции левополяризованной волны в правополяризованную; кривая 3 соответствует анизотропной дифракции правополяризованной световой волны в левополяризованную).

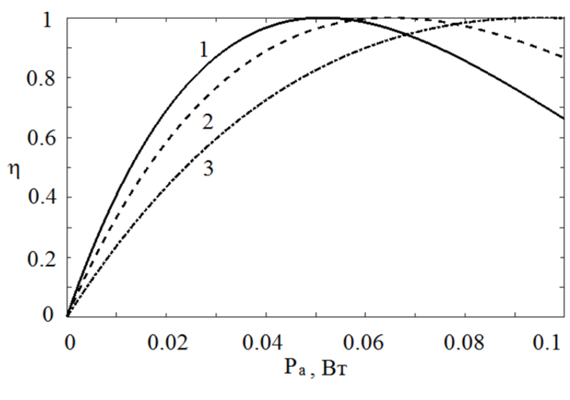


Рисунок 2.2 – Зависимость эффективности дифракции η от мощности ультразвука P_a для дифракции азимутально-однородного БСП ($m = 0$, кривая 1) и азимутально-неоднородного ($m = 1$, кривая 2 (3), когда левополяризованная волна преобразуется в правополяризванную (и наоборот) (кристалл TeO_2; медленная сдвиговая УЗ волна распространяется под малым углом δ к оси X||[110]; $\gamma_\pm = 0{,}5^0$, β = 83 град/мм, R_B = 1 мм, λ_0 = 0,63 мкм, $l_1 = l_2$ = 4 мм, $\varphi_1 = 0{,}7^0$, $\varphi_2 = 0{,}4^0$, f = 30 МГц, υ = 617 м/с, $\delta = 0{,}1^0$)

Из рисунка 2.2 следует, что наиболее эффективное преобразование падающей световой волны в дифрагированную достигается для азимутально-однороднго БСП нулевого порядка. Для азимутально-неоднородного БСП первого порядка при полной перекачке световой мощности из нулевого дифракционного порядка в первый требуются различные акустические мощности.

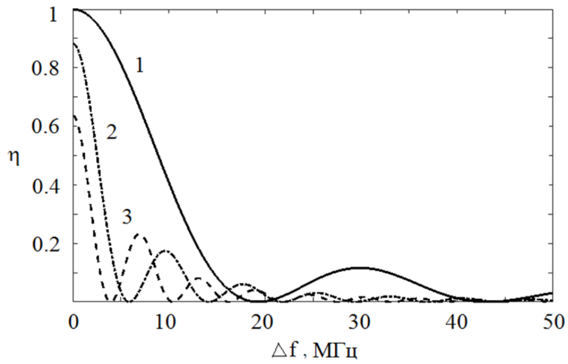


Рисунок 2.3 – Зависимость эффективности дифракции η от отстройки частоты ультразвука Δf от брэгговской для падающего БСП нулевого и первого порядка (1–3) при анизотропной дифракции и различных длинах АО взаимодействия l_1: 4 (1), 6 (2), 8 мм (3) (кристалл TeO_2; медленная сдвиговая УЗ волна распространяется под малым углом δ к оси X||[110]; $\gamma_\pm = 0{,}5^0$, β = 87 град/мм, R_B = 1 мм, (кривые 1–3, P_a = 0,05, g_m = 0,98 Вт, $m = 0$), (кривые 1–3, P_a = 0,065, g_m = 0,87 Вт, $m = 1$, причем правополяризованная волна дифрагирует в левополяризованную; кривые 1–3, P_a = 0,09, g_m = 0,72 Вт, $m = 1$, причем левополяризованная дифрагирует в правополяризованную) λ_0 = 0,63 мкм, $\varphi_1 = 0{,}7^0$, $\varphi_2 = 0{,}4^0$, l_2 = 4 мм, f = 30 МГц, υ = 617 м/с, $\delta = 0{,}1^0$)

На рисунке 2.3 представлена зависимость эффективности АО дифракции η от отстройки частоты ультразвука от брэгговской Δf для БСП нулевого порядка (кривые 1–3) при различных длинах АО взаимодействия и при оптимальных условиях стопроцентной эффективности дифракции, когда мощность ультразвука $P_a = 0{,}05$ Вт и максимальное значение интеграла перекрытия $g_{\mathrm{m}} = 0{,}98$. При этом максимальной эффективности дифракции на рисунке 2.3 соответствует длина АО взаимодействия $l_1 = 4$ мм; для БСП первого порядка имеют место такие же зависимости, причем для дифракции левополяризованной волны в правополяризованную следует полагать $P_a = 0{,}065$ Вт, $g_m = 0{,}87$ и при дифракции правополяризованной в левополяризованную полагалось: $P_a = 0{,}09$ Вт, $g_m = 0{,}72$.

Из рисунка 2.3 следует, что ширина полосы пропускания модулятора при анизотропной АО дифракции БСП нулевого и первого порядка составляет $\Delta f_{1/2} = 20$ МГц. При увеличении длины АО взаимодействия, то есть при отклонении от оптимальных условий преобразования падающей волны в дифрагированную ($l_2 = 4$ мм), полоса пропускания модулятора уменьшается и составляет $\Delta f_{1/2} = 8$ МГц при $l_2 = 6$ мм и $\Delta f_{1/2} = 4$ МГц при $l_2 = 8$ мм.

Заключение

Таким образом, при дифракции БСП нулевого и первого порядка на медленной сдвиговой УЗ волне, распространяющейся вдоль оси [110] имеет место эффективная модуляция БСП с частотной полосой пропускания по уровню 3дБ составляющей ~20 МГц при длине АО взаимодействия 4 мм и мощности ультразвука 0,05 Вт для световой волны с длиной 0,6328 мкм и ширине пьезопреобразователя 4 мм. Ширина полосы пропускания устройства остается неизменной при оптимальных условиях стопроцентной эффективности дифракции для БСП различных порядков (m) и уменьшается при увеличении длины взаимодействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Балакший*, *В.Н.* Физические основы акустооптики / В.Н. Балакший, В.Н. Парыгин, Л.Е. Чирков. – Москва: Радио и связь, 1985. – 280 с.

2. *Поляризационно-независимая акустооптическая модуляция бесселевых световых пучков* / В.Н. Белый, Г.В. Кулак, Г.В. Крох, О.В. Шакин // Журнал прикладной спектроскопии. – 2014. – № 1. – С. 75–81.

3. *Noncollinear Bragg diffraction of Bessel light beams by Ultrasound in uniaxial gyrotropic crystals* / V.N. Belyi, S.V. Kulakov, G.V. Kulak, O.V. Shakin // Wave Electronics and Its Applications in the Information and Telecommunication Systems: XVIII International Conference for Young Researchers, Saint-Petersburg, 1–5 June 2015. – Saint-Petersburg, 2015. – P. 39.

4. *Peculiarities of Acoustooptic Transformation of Bessel Light Beams in gurotropic Crystals* / V.N. Belyi, N.S. Kazak, P.A. Khilo, E.S. Petrova, N.A. Khilo // Universal Journal of Physics and Application. – 2015. – Vol. 9 (5). – P. 220–224.

5. *Warner*, *A.W.* Acousto-optical light deflectors using optical activity in paratellnrite / A.W. Warner, D.L. White, W.A. Booner // J. Appl. Phys. – 1972. – Vol. 43, № 11. – P. 4489–4495.

6. *Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a selffreconstructing light beam* / V. Chavez Garcess, D. McGloin, H. Melville, W. Sibbett, K. Dholakia // Nature. – 2002. – Vol. 419. – P. 145–147.

7. *Белый*, *В.Н.* Дифракция света на ультразвуке в гиротропных кубических кристаллах в режиме Брэгга / В.Н. Белый, Г.В.Кулак // Журнал прикладной спектроскопии. – 1991. – Т. 54, № 1. – С. 803–808.

8. *Peculiarities of Acoustooptic Transformation of Bessel Light Beams in gurotropic Crystals* / V.N. Belyi, N.S. Kazak P.A. Khilo, E.S. Petrova, N.A. Khilo // Universal Journal of Physics and Application. – 2015. – Vol. 9 (5). – P. 220–224.

9. *Зубринов*, *И.И.* Широкополосный акустооптический фильтр / И.И. Зубринов, В.К. Сапожников, Д.В. Шелопут // ЖТФ. – 1997. – Т. 67, № 6. – С. 50–53.

Поступила в редакцию 01.06.2023.

Информация об авторах

Кулак Геннадий Владимирович – д.ф.-м.н., профессор
Николаенко Татьяна Викторовна – к.ф.-м.н., доцент
Ропот Петр Иосифович – к.ф.-м.н., доцент
Шакин Олег Васильевич – д.т.н., профессор

УДК 539.3 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_21
EDN: BTLCZN

ВЛИЯНИЕ СХЕМ АРМИРОВАНИЯ ТРУБЫ ИЗ КОМПОЗИТА НА СКОРОСТЬ ВОЛНЫ ПРИ ГИДРАВЛИЧЕСКОМ УДАРЕ

В.В. Можаровский, С.В. Киргинцева

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

INFLUENCE OF COMPOSITE PIPE REINFORCEMENT SCHEMES ON THE WAVE SPEED IN CASE OF WATER HAMMER

V.V. Mozharovsky, S.V. Kirhintsava

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Приводятся исследования скорости волны при гидроударе для однослойных труб из композита с различными схемами армирования и с протекающей внутри жидкостью. Для разработки математических моделей расчета скорости волны используется математическая теория упругости анизотропной среды, на основе концепций макромеханики. На примере расчета трубы из полиэтилена, усиленной обмоткой стальных волокон, сделан анализ результатов о влиянии процентного содержания волокна в матрице композиционного материала на скорость волны при гидроударе. Показано, что полученные результаты хорошо согласуется с другими экспериментальными и теоретическими данными.

Ключевые слова: *труба из композита*, *ортотропия*, *волокна*, *матрица*, *скорость волны*, *гидравлический удар*.

Для цитирования: *Можаровский*, *В.В*. Влияние схем армирования трубы из композита на скорость волны при гидравлическом ударе / В.В. Можаровский, С.В. Киргинцева // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 21–25. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_21. – EDN: BTLCZN

Abstract. The studies of the wave velocity during water hammer for single-layer pipes made of a composite with a liquid flowing inside with various reinforcement schemes are presented. To develop mathematical models for calculating the wave speed, the mathematical theory of elasticity of an anisotropic medium is used, based on the concepts of macromechanics. Using the example of calculating a polyethylene pipe reinforced with a winding of steel fibers, an analysis was made of the results on the effect of the percentage of fiber in the matrix of a composite material on the wave velocity during hydraulic shock. It is shown that the results obtained are in good agreement with the other experimental and theoretical data.

Keywords: *composite pipe*, *orthotropy*, *fibers*, *matrix*, *wave velocity*, *water hammer*.

For citation: *Mozharovsky*, *V.V.* Influence of composite pipe reinforcement schemes on the wave speed in case of water hammer / V.V. Mozharovsky, S.V. Kirhintsava // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 3 (56). – P. 21–25. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_21 (in Russian). – EDN: BTLCZN

Введение

В современной практике машиностроения и теплоэнергетики одной из актуальных задач является создание и применение труб из композитов, которые отличаются своей легкостью и износостойкостью и, как следствие, долговечностью в использовании, что, в свою очередь, влияет на экономическую составляющую изготовления элементов конструкций.

Следует отметить, что в настоящее время недостаточно внимания уделяется разработке современных математических моделей расчета деформированного и напряженного состояний слоистых труб из композитов в динамике, а именно определения скорости волны при гидроударе при транспортировке жидкости, которые адекватно отражали бы экспериментальные исследования. Одной из задач математического моделирования является численная реализация расчета напряженно-деформированного состояния слоистых труб из композитов в динамике и определение скорости волны при гидроударе для различных схем армирования. Так, основные подходы и элементы армирования, теоретические положения, касающиеся расчета, также заложены в работах [1]–[3]. В статье [3] представлена определенная методика расчета параметров гидроудара для армированной полиэтиленовой трубы, а также приводятся экспериментальные результаты, которые дают возможность адекватно оценивать полученные теоретические исследования.

Для разработки математических моделей используется математическая теория упругости анизотропной среды на основе концепций макромеханики. При этом необходимо при определении параметров трубы из композита использовать характеристики материалов: объемное содержание волокна в матрице, модули упругости, коэффициент Пуассона и пределы прочности в разных направлениях. Для определения механических характеристик в телах сопряжения из волокнистых композиционных материалов применяется теория как изотропного и трансверсально-изотропного, так и ортотропного тела. Теорию трансверсально-изотропного тела, в случае плоской деформации, можно применить, например, для расчета слоистого композита с армирующими волокнами, расположенными хаотически в плоскости, для которой имеет место изотропия. В данном случае различие упругих свойств проявляется при переходе от слоя к слою, т. е. можно сказать, что упругие свойства меняются в направлении наслаивания. Упругие свойства такого композита характеризуют четыре независимые постоянные, а через них достаточно просто могут быть вычислены остальные постоянные. Для приближенного анализа в расчете модулей упругости, например, армированной трубы, в работе [3] используется определенный подход, применительно к композитным материалам. В представленной же работе исследования проводились по алгоритму построения математической модели и расчета трубы на основании теории упругости ортотропного тела в случае плоского напряженного состояния, который легко можно преобразовать для плоской деформации.

1 Постановка задачи

В данной статье рассматривается явление гидроудара для труб из волокнистых композитов с целью оценки схем армирования и механических свойств материалов на скорость волны, что непосредственно вызывает резкое повышение напряжений в трубе. Такое явление возникает при транспортировке жидкости в экстремальных условиях (резкое и сильное повышение давления в трубопроводе при внезапном торможении двигающегося по нему потока жидкости, перекрытия трубы, включение насосов подкачки и др.). Исторически известно, что явление гидравлического удара было впервые обосновано выдающимся российским учёным – Н. Е. Жуковским (1898 г.), установившим основные зависимости расчета предельно возможного значения напора при гидравлическом ударе (прямой удар) [1]. В настоящей работе приводятся исследования скорости волны при гидроударе для однослойных труб из композита с различными схемами армирования, длиной L и диаметром D с протекающей внутри жидкостью плотностью ρ. Так, на рисунках в таблице 3.1 показаны схемы *а*), *б*), *в*) для построения моделей армирования однослойных труб из композитов с описанием ортотропии механических свойств для применяемых материалов. Решается задача компьютерной реализации определения скорости волны и максимального давления при гидравлическом ударе для выше указанных труб из композитов.

2 Методика определения скорости волны и максимального давления при гидравлическом ударе

Принимаем при расчете формулу Н.Е. Жуковского для предельно возможного значения напора при гидравлическом ударе (прямой удар):

$$\Delta P = \rho c \Delta \upsilon, \qquad (2.1)$$

где ΔP – ударное повышение давления,

$$P = \rho g (H - Z),$$

ρ – плотность перекачиваемой жидкости, c – скорость ударной волны, $\Delta\upsilon$ – изменение скорости потока жидкости, Z – высота центральной линии трубы от заданной точки отсчета, H – пьезометрический напор.

Анализируя известную классическую зависимость для определения распространения скорости ударной волны в однородных изотропных трубах

$$c = 1 / \sqrt{\frac{\rho}{K} + \rho \cdot \frac{D}{E\delta}}, \qquad (2.2)$$

можно сделать вывод о снижении скорости волны при увеличении диаметра трубы, уменьшении толщины её стенок и коэффициента упругости материала труб (K – модуль объемной упругости жидкости, E – модуль упругости материала трубы; D – диаметр трубопровода, δ – толщина стенки трубопровода).

Формула (2.2) определяет скорость волны для однослойных изотропных труб. В работе [2] выведены формулы, определяющие скорость волны при гидроударе для различных комбинаций слоистых упругих ортотропных свойств трубы и футеровки.

Максимальное давление, возникающее внутри трубы, определяется по известным зависимостям (2.3) (например, см.[4]):

$$H_{\max} = H_0 + Dh_{hammer} + Dh_{friction}, \qquad (2.3)$$

где $Dh_{friction} = I\dfrac{LV^2}{2Dg}$, $Dh_{hammer} = \dfrac{cV}{g}$, I – коэффициент трения трубы; V– средняя скорость воды в трубе, ($V = Q/S$, где H – значение напора в м, вод. ст., Q – общий расход жидкости, S – площадь поперечного сечения трубы); g – ускорение свободного падения, $g = 9{,}81$ м/с^2.

3 Расчет скорости волны в трубе из композита при гидравлическом ударе

Разработана программа в среде Delphi для расчета скорости волны и максимальных давлений внутри труб для различных конструкций и механических характеристик: однослойных и двуслойных, изотропных и ортотропных. Для анализа влияния схем армирования трубы на скорость волны при гидравлическом ударе рассмотрим однослойные ортотропные трубы [2], [3]. Скорость волны для всех труб определяется по формуле

$$c = \sqrt{\frac{K/\rho}{1+K\Omega}}, \tag{3.1}$$

здесь K – объемный модуль упругости для жидкости, r_c и r_a – внешний и внутренний радиусы трубы соответственно. Параметр Ω определяется по методике изложенной в работах [2], [6] в зависимости от принятой модели трубы.

Упругие постоянные и геометрические параметры будут [2]

$$A_{11} = \frac{E_r}{1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}},\ A_{12} = \frac{\nu_{r\theta}E_\theta}{1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}},\ A_{22} = \frac{E_\theta}{1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}},$$

$$\Omega = \frac{-2}{1-(r_c/r_a)^{2k}}\left(\frac{1}{A_{11}k + A_{12}} + \frac{(r_c/r_a)^{2k}}{A_{11}k - A_{12}}\right),$$

$$k = \sqrt{m} = \sqrt{A_{22}/A_{11}}.$$

Так как материал трубы имеет волокнистую структуру, состоящую из матрицы и волокна, то применяем правило «смесей» для оценки влияния объемного содержания волокна на изменения модулей упругости и коэффициента Пуассона. Соответственно, меняется скорость волны гидроудара и происходит изменение ударного давления.

Если же использовать формулы, определяющие радиальное перемещение кольца (трубы) из ортотропного материала при действующем давлении внутри трубы (см., например, [5]), после несложных преобразований найдем деформацию

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}\bigg|_{r=r_a} = \frac{P}{E_\theta}\left(\nu_{\theta r} - k_1\frac{1+(r_c/r_a)^{2k_1}}{1-(r_c/r_a)^{2k_1}}\right)$$

а затем, учитывая, что $\Omega = 2\varepsilon_\theta / P$ [2], где

$$k_1 = \sqrt{E_\theta / E_r},$$

получим выражение для Ω в формуле (3.1):

$$\Omega = \frac{2}{E_\theta}\left(\nu_{\theta r} - k_1\frac{1+(r_c/r_a)^{2k_1}}{1-(r_c/r_a)^{2k_1}}\right), \tag{3.2}$$

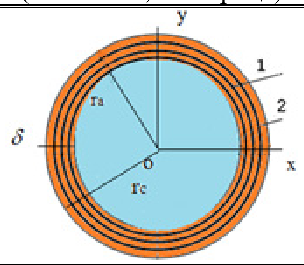
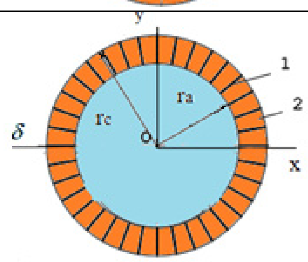
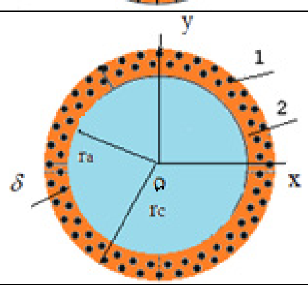
которое совпадает с формулой, предложенной в [6] для изотропного случая, когда $k_1 = 1$.

Если же рассматривать расчет трубы из ортотропного материала в случае плоской деформации, то достаточно заменить k_1,

$$k_1 = \sqrt{\frac{E_\theta(1-\nu_{rz}\nu_{zr})}{E_r(1-\nu_{z\theta}\nu_{\theta z})}},$$

где $\nu_{z\theta}$, $\nu_{\theta z}$ и ν_{rz}, ν_{zr} – коэффициенты Пуассона, связанные с направлением оси Z.

Таблица 3.1 – Зависимости для определения модулей упругости E_θ, E_r и коэффициентов Пуассона $\nu_{\theta r}$, $\nu_{r\theta}$ (механических свойств) волокнистых материалов при различных способах расположения волокон

Вид расположения волокон	Расчетная схема (1-волокно, 2-матрица)	Механические свойства
а) перпендикулярное расположение волокон по отношению к оси Z		$E_r = E_m\dfrac{1+\eta V}{1-\eta V}$, $\eta = \dfrac{E_f - E_m}{E_f + E_m}$, $E_\theta = VE_f + (1-V)E_m$, $\nu_{r\theta} = V\nu_f + (1-V)\nu_m$, $\nu_{\theta r} = \dfrac{E_\theta}{E_r}\nu_{r\theta}$.
б) радиальное расположение волокон по отношению к оси Z		$E_r = VE_f + (1-V)E_m$, $E_\theta = E_m\dfrac{1+\eta V}{1-\eta V}$, $\eta = \dfrac{E_f - E_m}{E_f + E_m}$, $\nu_{r\theta} = \dfrac{E_r}{E_\theta}\nu_{\theta r}$, $\nu_{\theta r} = V\nu_f + (1-V)\nu_m$.
в) параллельное расположение волокон по отношению к оси Z		$E_r = VE_f + (1-V)E_m$, $E_\theta = E_r$, $\nu_{r\theta} = \nu_{\theta r}$, $\nu_{\theta r} = V\nu_f + (1-V)\nu_m$.

4 Пример расчета и анализ результатов

Рассмотрим трубу из полиэтилена (модули упругости и коэффиценты Пуассона матрицы равны $E_m = 1{,}43$ ГПа, $\nu_m = 0{,}4$, а волокна соответственно равны – $E_f = 207$ ГПа, $\nu_f = 0{,}3$, [3]) с радиусом $r_a = 0{,}232$ м и толщиной стенки $\delta = 0{,}018$ м, усиленную обмоткой стальных волокон. По предложенной методике был произведен расчет и сделан анализ о влиянии процентного содержания волокна в матрице композиционного материала на скорость волны при гидроударе, результаты вычислений показаны на рисунке 4.1, что хорошо согласуются с экспериментальными и теоретическими данными работы [3] при перпендикулярном расположении волокон. Так, например, в [3] при объемном содержании волокна $V = 1{,}48\%$ скорость волны c составляет 385 м/с, по экспериментальным данным равна – 379,8 м/с [3], а по предложенной методике в данной работе, скорость волны равна 377 м/с, исходя из рассчитанных модулей упругости по правилу «смесей» $E_r = 1{,}47$ ГПа и $E_\theta = 4{,}47$ ГПа.

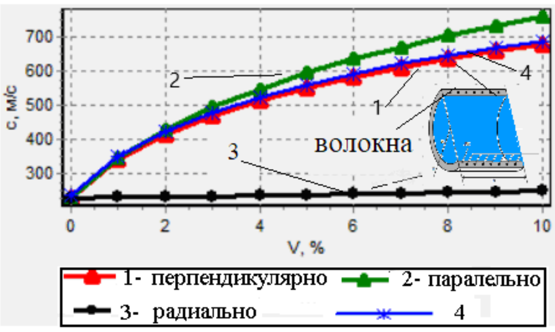
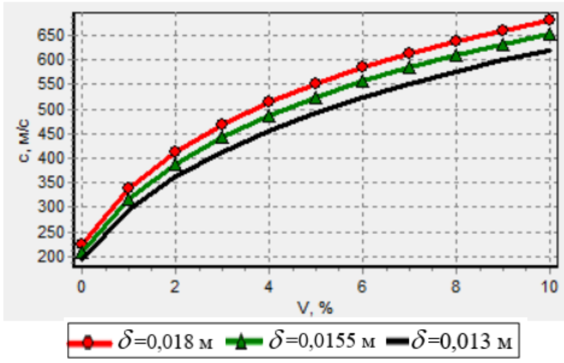


Рисунок 4.1 – График зависимости скорости волны от объёмного содержания волокон в матрице композиционного материала (обозначение 4 на графике – данные из работы [3])

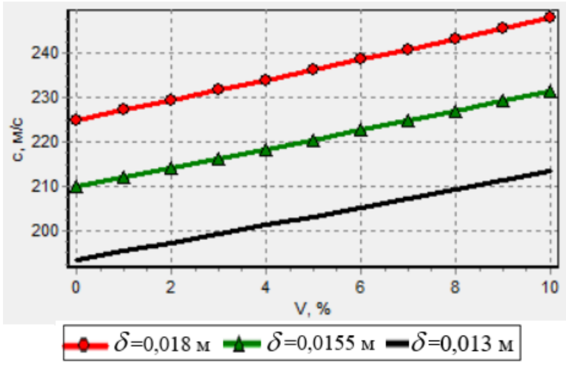
На рисунке 4.2 показаны графики изменения скорости волны от объемного содержания волокон в матрице композиционного материала для различных толщин трубы при перпендикулярном (*а*), радиальном (*б*) и параллельном (*в*) расположении волокон по отношению к оси z.

На рисунке 4.3 показаны графики зависимости скорости волны от объемного содержания волокон в матрице композиционного материала для толщины трубы $\delta = 0{,}018$ м при перпендикулярном, радиальном и параллельном расположении волокон по отношению к оси Z.

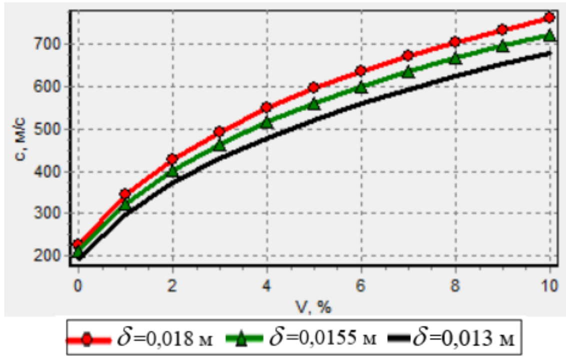
Характер изменения кривых с изменением объемного содержания волокон для случая перпендикулярного и параллельного расположения имеет идентичную корреляцию (рисунок 4.2, *а*, рисунок 4.2, *в*, рисунок 4.1, рисунок 4.3) и с увеличением толщины скорость волны увеличивается. Можно заметить из анализа кривой 3 на рисунке 4.3 (радиальное расположение), что для малых величин объемного содержания волокон скорость волны изменяется незначительно, но резко возрастает при большом содержании волокон, примерно от 80% до 100% и достигает скорости 1291 м/с. Используя предложенные графики, легко можно определить скорость волны при гидроударе при различном объемном содержании волокон и для других толщин труб из композитов. Для этого разработан алгоритм расчета скорости волны и программа реализации этого расчета с графиками, представленными на рисунках в зависимости от входящих параметров.



а)



б)



в)

Рисунок 4.2 – График зависимости скорости волны от объёмного содержания волокон в матрице композиционного материала для различных толщин трубы при перпендикулярном (*а*), радиальном (*б*) и параллельном (*в*) расположении волокон по отношению к оси *Z*

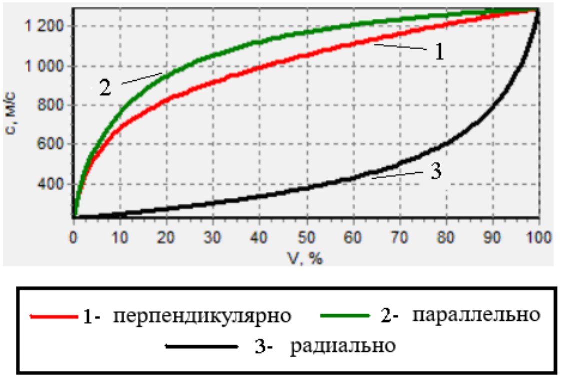


Рисунок 4.3 – График зависимости скорости волны от объёмного содержания волокон в матрице композиционного материала и расположения волокон для толщины трубы $\delta = 0{,}018$ м

Заключение

В статье предложена методика расчета скорости волны при движении жидкостей в трубе из композитов с разным расположением волокон в матрице композиционного материала при условии, что оси анизотропии совпадают с направлением волокон. Теоретические результаты, которые представлены в данной работе, построены в случае расчета трубы, используя плоско-напряженное состояние, и, как показывают экспериментальные и другие теоретические исследования, адекватно отражают происходящее явление при гидроударе. На основании выведенных теоретических подходов для определения скорости движения волны при гидроударе для трубы из композита, используя теорию упругости анизотропного тела, можно построить методику для случая армирования трубы с волокнами, которые расположены под некоторым углом к основным осям материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуковский, Н.Е.* О гидравлическом ударе в водопроводных трубах / Н.Е. Жуковский. – М.Д.: Гостехтеоретлитиздат, 1949. – 104 с.
2. *Можаровский, В.В.* Скорость волны при гидроударе и напряженно-деформированное состояние слоистых футерованных труб из ортотропных материалов / В.В. Можаровский, С.В. Киргинцева // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 44–51.
3. *Wuyi Wan.* Shock wave speed and transient response of PE pipe with steel-mesh reinforcement / Wuyi Wan, Xinwei Mao // Hindawi Publishing Corporation Shock and Vibration. – Vol. 2016. – Article ID 8705031. – 10 p.
4. *Maximum pressure surge generated by water hammer* [Electronic resource]. – Mode of access: https://webstatsdomain.org/d/excelcalculations.blogspot.com. – Date of access: 10.03.2023.
5. *Справочник по строительной механике корабля в 3 т.*: т. 2 / Г.В. Бойцов, О.М. Палий, В.А. Постнов [и др.]. – Л.: Судостроение, 1982. – 462 с.
6. *Wave celerity in hydraulic transients computation for cipp-rehabilitated pipes* / F. Evangelista [et al.] // Int. J. Comp. Meth. and Exp. Meas. – 2020. – Vol. 8, № 4. – P. 326–340.

Поступила в редакцию 01.06.2023.

Информация об авторах

Можаровский Валентин Васильевич – д.т.н., профессор

Киргинцева Светлана Викторовна – старший преподаватель

УДК 539.3:621.373.8
DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_26
EDN: BXVAMJ

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ЛАЗЕРНОЙ РЕЗКИ КВАРЦЕВОГО СТЕКЛА С ПРИМЕНЕНИЕМ НЕЙРОСЕТЕВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

Ю.В. Никитюк, В.А. Прохоренко, А.И. Кулыба

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

MULTI-CRITERIA OPTIMIZATION OF QUARTZ GLASS LASER CUTTING PARAMETERS USING NEURAL NETWORK SIMULATION AND GENETIC ALGORITHM

Y.V. Nikitjuk, V.A. Prokhorenko, A.I. Kulyba

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. При помощи нейросетевого моделирования и с использованием генетического алгоритма определены значения технологических параметров, обеспечивающие эффективную лазерную резку кварцевого стекла при воздействии на обрабатываемое изделие лазерного пучка с длиной волны, равной 10,6 мкм, и хладагента. Выполнена многокритериальная оптимизация лазерной резки кварцевых пластин по критериям максимума растягивающих напряжений и максимума скорости обработки. Описаны алгоритмы выбора оптимальной архитектуры нейронных сетей.

Ключевые слова: *нейросетевое моделирование*, *лазерная резка*, *генетический алгоритм*, *оптимизация параметров*.

Для цитирования: *Никитюк*, *Ю.В*. Многокритериальная оптимизация параметров лазерной резки кварцевого стекла с применением нейросетевого моделирования и генетического алгоритма / Ю.В. Никитюк, В.А. Прохоренко, А.И. Кулыба // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 26–31. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_26. – EDN: BXVAMJ

Abstract. Using neural network modeling and a genetic algorithm, the values of technological parameters were determined that ensure efficient laser cutting of quartz glass when the workpiece is exposed to a laser beam with a wavelength of 10,6 μm and a coolant. The multi-criteria optimization of laser cutting of quartz plates was performed according to the criteria of maximum tensile stresses and maximum processing speed. The algorithms for choosing the optimal architecture of neural networks are described.

Keywords: *neural network modeling*, *laser cutting*, *genetic algorithm*, *parameter optimization.*

For citation: *Nikitjuk*, *Y.V.* Multi-criteria optimization of quartz glass laser cutting parameters using neural network simulation and genetic algorithm / Y.V. Nikitjuk, V.A. Prokhorenko, A.I. Kulyba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 3 (56). – P. 26–31. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_26 (in Russian). – EDN: BXVAMJ

Введение

Среди основных методов разделения хрупких неметаллических материалов, таких как кварцевые стекла, выделяются резка при помощи алмазных дисков, механическое и лазерное скрайбирование. При этом управляемое лазерное раскалывание является наиболее эффективным способом резки таких материалов. Применение этой технологии основано на создании определенного распределения термоупругих напряжений внутри материала, что обеспечивает формирование лазерно-индуцированных трещин с заданными параметрами. Преимуществами данной технологии являются высокая точность и скорость нанесения лазерных разрезов [1]–[3].

В настоящее время исследования по моделированию лазерной обработки материалов успешно применяют искусственные нейронные сети [4]–[6]. Для повышения эффективности лазерных технологий важно оптимизировать соответствующие технологические параметры, примеры такого использования генетических алгоритмов представлены в работах [7]–[9]. Генетические алгоритмы представляют собой одну из форм эволюционных методов, основанных на коллективном обучении внутри популяции и имитации естественного отбора. Они обеспечивают поиск оптимальных решений путем наследования и усиления полезных свойств множества объектов в процессе имитации эволюции [10], [11].

В данной работе была выполнена многокритериальная оптимизация процесса лазерной резки кварцевых пластин методом управляемого раскалывания с использованием нейросетевого моделирования и авторской версии модифицированного генетического алгоритма (МГА) [10].

1 Построение нейросетевых аппроксиматоров

Факторами в рассматриваемой задаче являлись: V – скорость резки, A и B – полуоси эллиптического лазерного пучка, P – мощность лазерного излучения. При этом определялись следующие отклики: σ_{yy} – максимальные напряжения растяжения, T – максимальная температура в зоне лазерного воздействия. В работе применялось нейросетевое моделирование откликов σ_{yy} и T.

Для формирования массива данных и данных для тестирования нейронных сетей были использованы расчеты температурных полей и полей термоупругих напряжений, полученные в работе [6]. Все данные были нормализованы и приведены к диапазону [0, 1]. Нейронные сети, алгоритмы их обучения и кросс-валидации реализованы с использованием библиотеки Keras на языке Python.

При решении задач средствами нейросетевого моделирования важной проблемой является выбор оптимальной архитектуры нейронной сети. Задача выбора структуры нейронной сети является сложной. Простейшим подходом к решению этой проблемы является реализация схем перебора архитектур-кандидатов с их последующей кросс-валидацией (рисунок 1.1).

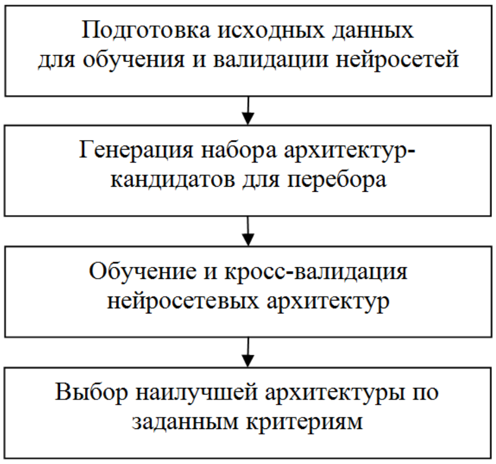


Рисунок 1.1 – Схема алгоритма выбора оптимальной архитектуры нейронной сети с применением метода перебора

При выборе оптимальных архитектур нейросетей для аппроксимации откликов σ_{yy} и T сравнивались трехслойные персептроны различных конфигураций. Количество нейронов в первом и втором скрытых слоях перебиралось в диапазоне от 8 до 96 с шагом 4. Для каждой архитектуры-кандидата был осуществлен пятикратный процесс кросс-валидации с разделением исходных данных на пять частей и предварительным случайным перемешиванием данных. Метрики MSE (среднеквадратичная ошибка), MAE (средняя абсолютная ошибка), R^2 (коэффициент детерминации) усреднялись по всем экспериментам.

На рисунках 1.2 и 1.3 показаны тепловые карты распределений MSE и R^2 для аппроксиматоров откликов σ_{yy} и T.

В таблице 1.1 приведены значения метрик для наилучших архитектур аппроксиматора отклика T.

Таблица 1.1 – Значения метрик MSE, MAE и R^2 для наилучших архитектур-кандидатов аппроксиматора максимальной температуры T.

Архитектура нейросети	MSE	MAE	R^2	Количество эпох обучения
88-84-1	$4{,}103\cdot10^{-5}$	0,002674	0,9969	608
88-88-1	$4{,}137\cdot10^{-5}$	0,002663	0,9968	595
96-76-1	$4{,}490\cdot10^{-5}$	0,002874	0,9960	559
88-80-1	$4{,}507\cdot10^{-5}$	0,003218	0,9959	580
96-56-1	$4{,}674\cdot10^{-5}$	0,0030257	0,9965	625

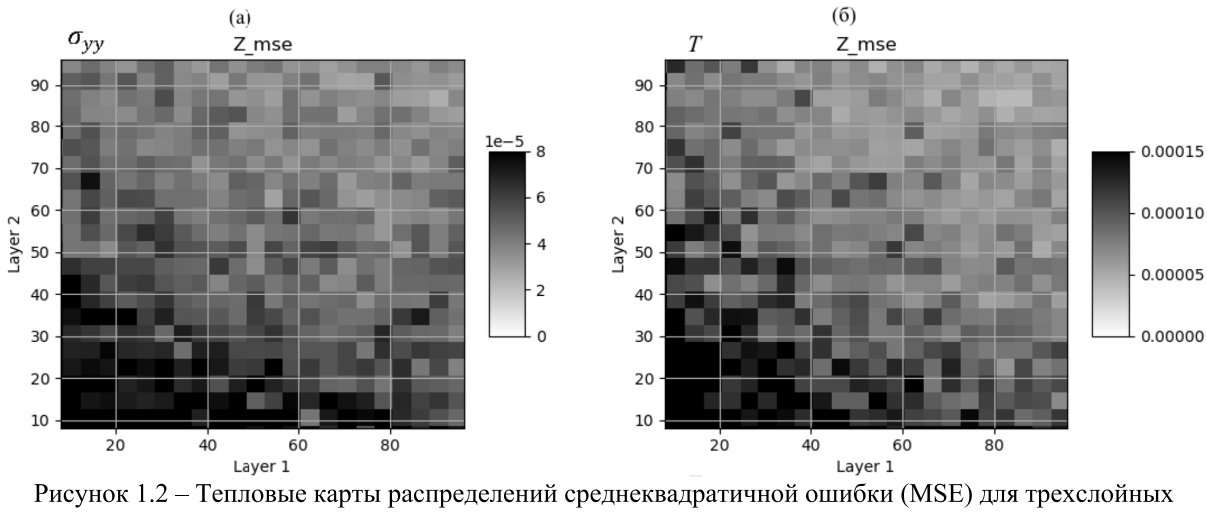


Рисунок 1.2 – Тепловые карты распределений среднеквадратичной ошибки (MSE) для трехслойных архитектур-кандидатов нейросетевых аппроксиматоров откликов σ_{yy} (*а*) и T (*б*)

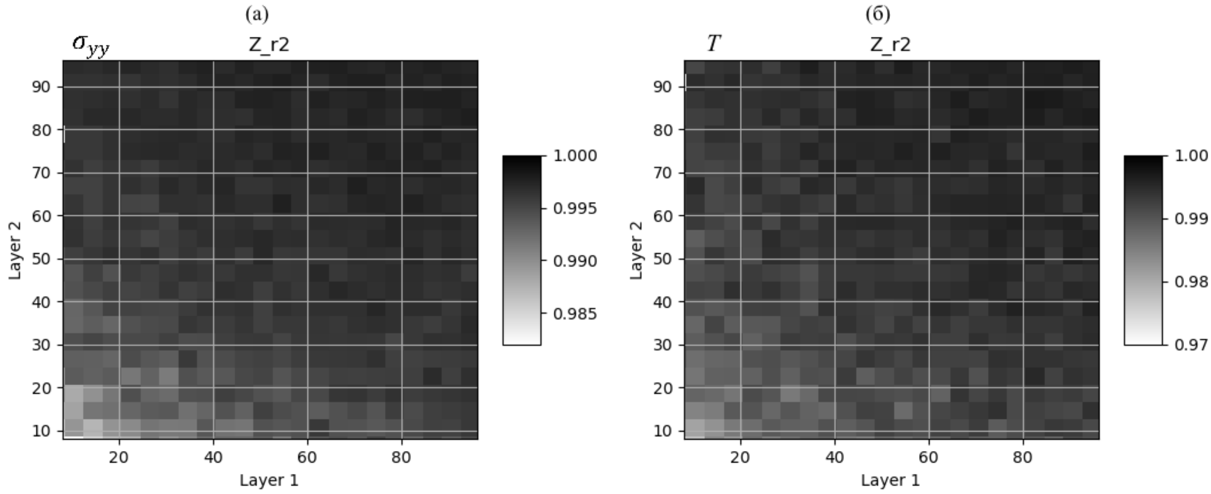


Рисунок 1.3 – Тепловые карты распределений коэффициента детерминации (R^2) для трехслойных архитектур-кандидатов нейросетевых аппроксиматоров откликов σ_{yy} (*а*) и T (*б*)

В ходе численных экспериментов было установлено, что лучшие результаты при аппроксимации σ_{yy} показывает искусственная нейронная сеть с архитектурой [64-56-1], а при аппроксимации температуры T – искусственная нейронная сеть с архитектурой [88-84-1].

Следует, однако, отметить, что в случае глубоких нейронных сетей имплементация алгоритмов, основанных на переборе, становится проблематичной в силу большой размерности пространства поиска и отсутствия очевидных критериев перебора архитектур. Использование эволюционных подходов и генетических алгоритмов может частично автоматизировать задачу поиска оптимальной архитектуры.

В данной работе использован эволюционный алгоритм подбора нейросетевых архитектур для решения задачи выбора оптимальной архитектуры аппроксиматора σ_{yy}. Схема алгоритма показана на рисунке 1.4.

В использованном в данной работе алгоритме применена схема кодирования архитектур, мутаций и скрещиваний геномов, основанная на алгоритме NEAT [11]. В отличие от NEAT, предложенный алгоритм не выполняет оптимизацию эволюционными методами весов связей в нейросети и оперирует не единичными нейронами в качестве узлов, а модулями, которые могут представлять собой произвольно заданный набор слоёв. В данной работе использованы модули, представляющие собой полносвязные слои с количеством нейронов от 4 до 16 и функцией активации ReLu. Применялись мутации двух типов: добавление узла и добавление связи между узлами. В качестве процедуры оценки качества генома в контексте решаемой задачи была использована кросс-валидация с разделением данных на три части и вычислением усредненной среднеквадратичной ошибки MSE для всех членов популяции. При этом 20% лучших членов популяции переходили в следующее поколение, остальные геномы генерировались путем скрещивания лучших геномов и применения случайных мутаций с вероятностью $p = 0,5$.

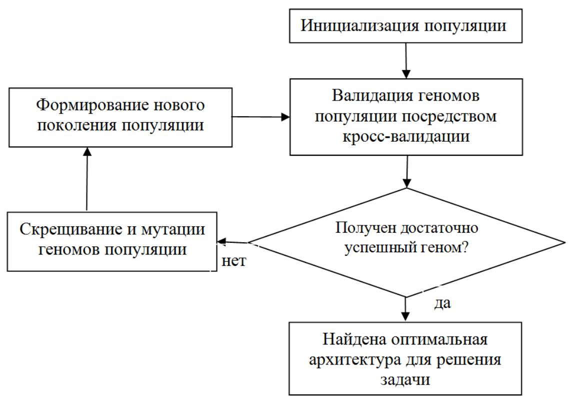


Рисунок 1.4 – Схема эволюционного алгоритма выбора оптимальной архитектуры нейросети

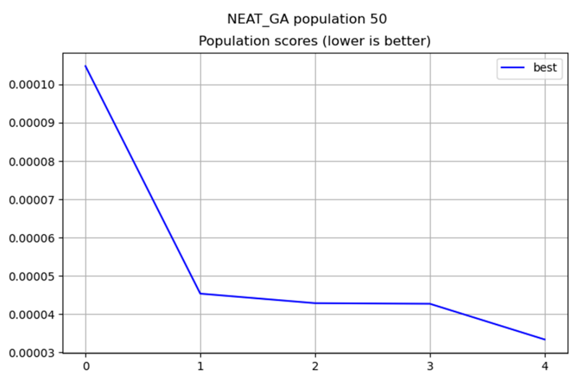


Рисунок 1.5 – Уменьшение MSE для лучшего генома популяции при использовании эволюционного алгоритма поиска оптимальной архитектуры нейросети

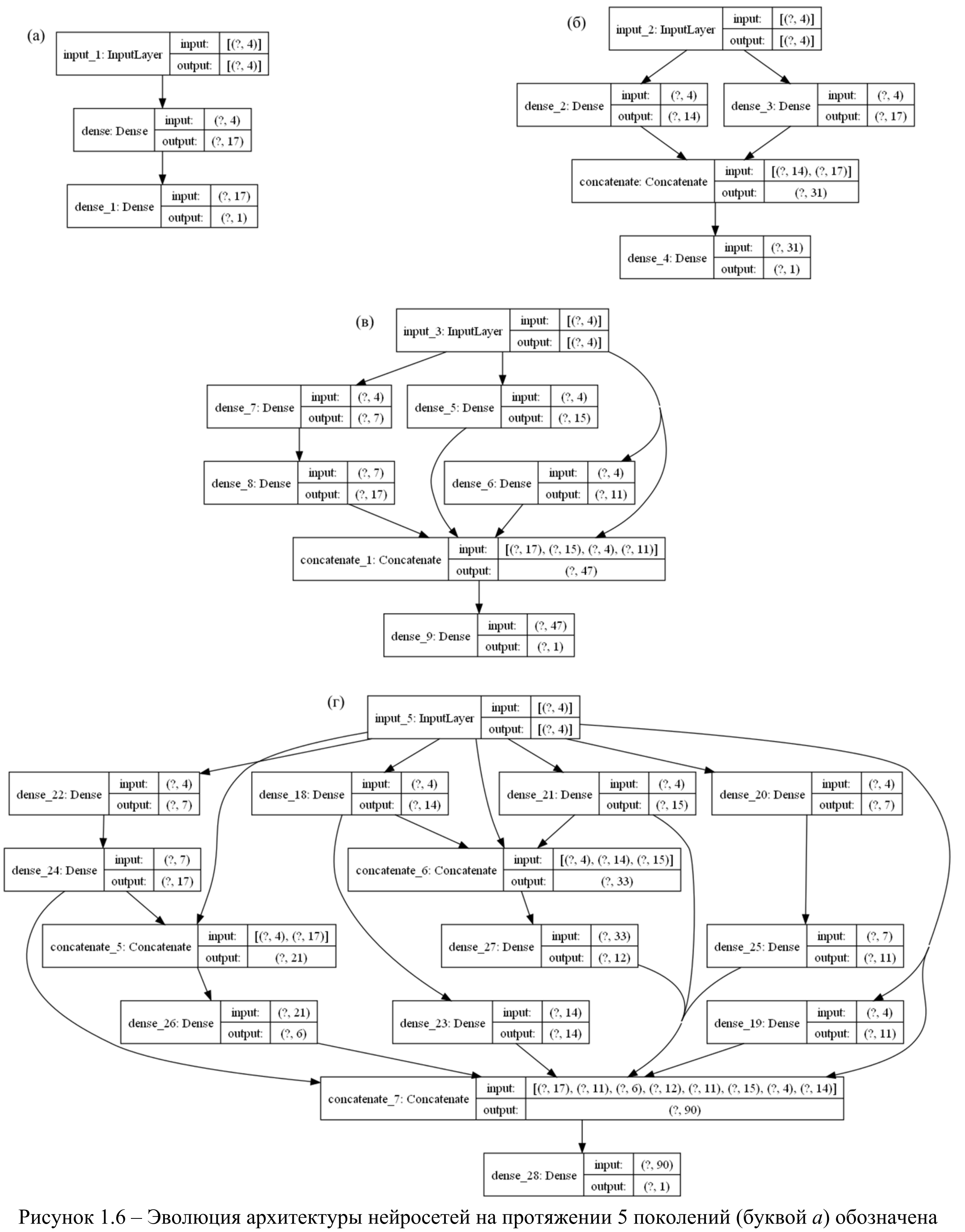


Рисунок 1.6 – Эволюция архитектуры нейросетей на протяжении 5 поколений (буквой *а*) обозначена исходная архитектура нейронной сети, буквами *б*), *в*), *г*) обозначены архитектуры лучших нейросетей для 2, 4 и 5 поколений

На рисунке 1.5 показана динамика изменения среднего значения MSE для 5 поколений в популяции размером 50 геномов. На рисунке 1.6 показана эволюция нейросетевой архитектуры на протяжении 5 поколений.

Полученная в процессе реализации эволюционного алгоритма архитектура нейросети по результатам кросс-валидации демонстрирует значения усредненных метрик оценки качества, сравнимые со значениями архитектур, отобранных с помощью алгоритма перебора (MSE = $3{,}827 \cdot 10^{-5}$; MAE = $3{,}861 \cdot 10^{-3}$; $R^2 = 0{,}996$).

2 Определение оптимальных параметров процесса лазерной резки кварцевых пластин

С использованием нейронных сетей с архитектурами [64-56-1] для аппроксимации σ_{yy} и [88-84-1] для аппроксимации Т был осуществлен поиск значений факторов, обеспечивающих максимальные значения напряжений σ_{yy} при условии $V \to \max$ и ограничения на значение температуры $T < 1473\ K$. Также были введены ограничения на выход значений факторов за пределы диапазонов в обучающей выборке нейросетевых аппроксиматоров.

На языке Python была создана авторская версия модифицированного генетического алгоритма (МГА) [10]. В основе процесса генерации новых поколений популяции лежал метод скрещивания геномов, представленный в [10], при этом дополнительно была реализована мутация геномов путем внесения случайных изменений в факторы в пределах диапазона [0.0001,0.1] с вероятностью $p = 0{,}5$.

Целевая функция включала в себя значения предсказанных нейросетевыми аппроксиматорами оценок σ_{yy} и T и фактора V, а также штрафы за выход за пределы допустимых диапазонов значений факторов и значений максимальных температур:

$$L(A,B,V,P) = -\left(\alpha_1\sigma_{yy} + \alpha_2 V\right) + \\ + \beta_1 E_1 + \beta_2 E_2 + \beta_3 E_4 + \beta_4 E_4 + \beta_5 E_5,$$

$$E_1 = \begin{cases} 1, & A \notin [0,1], \\ 0, & A \in [0,1]; \end{cases} \quad E_2 = \begin{cases} 1, & B \notin [0,1], \\ 0, & B \in [0,1]; \end{cases}$$

$$E_3 = \begin{cases} 1, & V \notin [0,1], \\ 0, & V \in [0,1]; \end{cases} \quad E_4 = \begin{cases} 1, & P \notin [0,1], \\ 0, & P \in [0,1]; \end{cases}$$

$$E_5 = \begin{cases} 1, & T \geq 1473K, \\ 0, & T < 1473K; \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}5;\ \beta_i = 1{,}0,\ i = \overline{1{,}5}.$$

Рассмотрена также альтернативная целевая функция:

$$L(A,B,V,P) = -\sqrt{\left(\alpha_2\sigma_{yy}\right)^2 + \left(\alpha_2 V\right)^2} + \\ + \beta_1 E_1 + \beta_2 E_2 + \beta_3 E_4 + \beta_4 E_4 + \beta_5 E_5,$$

$$E_1 = \begin{cases} 1, & A \notin [0,1], \\ 0, & A \in [0,1]; \end{cases} \quad E_2 = \begin{cases} 1, & B \notin [0,1], \\ 0, & B \in [0,1]; \end{cases}$$

$$E_3 = \begin{cases} 1, & V \notin [0,1], \\ 0, & V \in [0,1]; \end{cases} \quad E_4 = \begin{cases} 1, & P \notin [0,1], \\ 0, & P \in [0,1]; \end{cases}$$

$$E_5 = \begin{cases} 1, & T \geq 1473K, \\ 0, & T < 1473K; \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}5;\ \beta_i = 1{,}0,\ i = \overline{1{,}5}.$$

Процесс многокритериальной оптимизации с применением авторского генетического алгоритма представлен на рисунке 7. На обоих графиках видно монотонное уменьшение значений целевой функции (сплошная линия) для лучшего генома популяции (точки (A, B, V, P)). Увеличение среднего значения целевой функции по популяции (пунктирная линия) в конце работы алгоритма объясняется приближением геномов к заданным границам (в частности, по температуре) и, соответственно, штрафами за выход $\beta_i E_i$. Существенной разницы в скорости сходимости и качестве алгоритмов при сравнении приведенных целевых функций не обнаружено.

В результате применения генетического алгоритма найдены оптимальные значения факторов, приведенные в таблице 2.1. В скобках приведены значения параметров, полученные в результате конечно-элементного расчета процесса лазерной резки кварцевой пластины с оптимальными значениями факторов, определенными в результате применения МГА. Показано, что установленные аппроксиматорами и МГА значения напряжения σ_{yy} и температуры T, определены с погрешностями 0,1% и 2,5% соответственно.

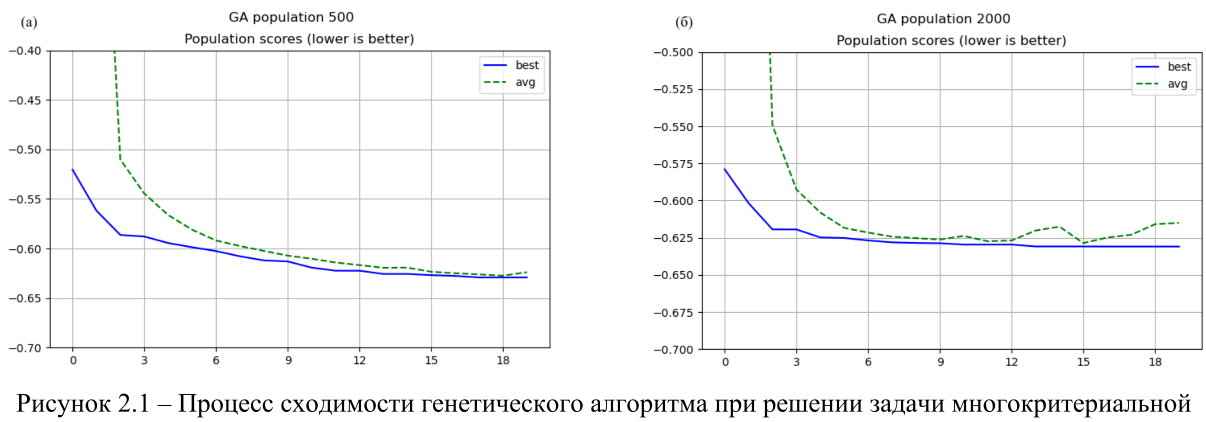


Рисунок 2.1 – Процесс сходимости генетического алгоритма при решении задачи многокритериальной оптимизации параметров раскалывания кварцевых пластин с размером популяции 500 (*а*) и размером популяции 2000 (*б*)

Таблица 2.1 – Результаты многокритериальной оптимизации

V, мм/с	A, мм	B, мм	P, Вт	T, К	σ_{yy}, МПа
69,9	0,00135	0,00080	299,9	1472,45 (1435,31)	7,24 (7,23)

Заключение

В работе выполнена многокритериальная оптимизация откликов процесса лазерной резки кварцевых пластин с применением нейросетевого моделирования. Определены оптимальные значения факторов лазерной резки кварцевых пластин и установлено соответствие между построенной моделью и результатами конечно-элементного анализа. Описаны алгоритмы выбора оптимальной архитектуры нейронной сети методом перебора и на базе эволюционных методов. Определены оптимальные архитектуры нейронных сетей для аппроксимации максимума растягивающих напряжений и максимума температуры при выполнении лазерной резки кварцевых пластин.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Two-beam laser thermal cleavage of brittle nonmetallic materials* / S.V. Shalupaev, E.B. Shershnev, Y.V. Nikityuk, A.A. Sereda // Journal of Optical Technology. – 2006. – Vol. 73, № 5. – P. 356–359. – DOI: 10.1364/JOT.73.000356

2. *Features of controlled laser thermal cleavage of crystalline silicon* / A.N. Serdyukov, S.V. Shalupaev, Y.V. Nikityuk // Crystallography Reports. – 2010. – Vol. 55, № 6. – P. 933–937. – DOI: 10.1134/S1063774510060064

3. *Features of controlled laser thermal cleavage of crystal quartz* / A.N. Serdyukov, E.B. Shershnev, Y.V. Nikityuk [et al.] // Crystallography Reports. – 2012. – Vol. 57, № 6. – P. 792–797. – DOI: 10.1134/S1063774512060120.

4. *Determination of the parameters of two-beam laser splitting of silicate glasses using regression and neural network models* / Y.V. Nikitjuk, A.N. Serdyukov, I.Y. Aushev // Journal of the Belarusian State University. Physics. – 2022. – № 1. – P. 35–43. – DOI: 10.33581/2520-2243-2022-1-35-43.

5. *Characterization of Laser Welding of Steel* 30ХГСН2А *by Combining Artificial Neural Networks and Finite Element Method* / Y. Nikitjuk, G. Bayevich, V. Myshkovets [et al.] // Lecture Notes in Networks and Systems. – 2022. – Vol. 422. – P. 273–279. – DOI: 10.1007/978-981-19-0379-3_28.

6. *Применение искусственных нейронных сетей и метода конечных элементов для определения параметров обработки кварцевых золь-гель стекол эллиптическими лазерными пучками* / Ю.В. Никитюк, А.Н. Сердюков, В.А. Прохоренко, И.Ю. Аушев // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 3 (48). – С. 30–36.

7. *Nikityuk*, *Y.V.* Optimization of two-beam laser cleavage of silicate glass / Y.V. Nikityuk, A.N. Serdyukov, I.Y. Aushev // Journal of Optical Technology. – 2022. – Vol. 89, № 2. – P. 121–125. – DOI: 10.1364/JOT.89.000121.

8. *Оптимизация параметров двухлучевого ассиметричного лазерного раскалывания силикатного стекла* / Ю.В. Никитюк, А.А. Середа, А.Н. Сердюков [и др.] // Оптический журнал. 2023. – Т. 90, № 6. – С. 15–24. – DOI: http://doi.org/10.17586/1023- 5086-2023-90-06-15-24.

9. *Красновская*, *С.В.* Обзор возможностей оптимизационных алгоритмов при моделировании конструкций компрессорно-конденсаторных агрегатов методом конечных элементов / С.В. Красновская, В.В. Напрасников // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-тэхнічных навук. – 2016. – № 2. – С. 92–98.

10. *Очков*, *В.Ф.* Mathcad 14 для студентов и инженеров: русская версия / В.Ф. Очков. – БХВ-Петербург, 2009. – 512 с.

11. *Stanley*, *K.O.* Evolving Neural Networks Through Augmenting Topologies / K.O. Stanley, R. Miikkulainen // Evolutionary Computation. – 2002. – № 10 (2). – P. 99–127.

Поступила в редакцию 14.06.2023.

Информация об авторах

Никитюк Юрий Валерьевич – к.ф.-м.н., доцент
Прохоренко Владислав Александрович – старший преподаватель
Кулыба Антон Игоревич – аспирант

ФИЗИКА

УДК 537.876
DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_32
EDN: CCFYWF

ТЕРМИЧЕСКИ УПРАВЛЯЕМАЯ ТЕРАГЕРЦОВАЯ ГИПЕРЛИНЗА

И.А. Фаняев[1], Д.В. Слепенков[1], А.Ю. Кравченко[1], И.В. Семченко[2], Д. Ли[3], С.А. Хахомов[1]

[1]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*
[2]*ГНПО «Оптика, оптоэлектроника и лазерная техника», Минск*
[3]*Научная школа, Университет Цзяннань*

THE THERMALLY CONTROLLED TERAHERTZ HYPERLENS

I.A. Fanyaev[1], D.V. Slepiankou[1], A.Y. Kravchenko[1], I.V. Semchenko[2], J. Li[3], S.A. Khakhomov[1]

[1]*Francisk Skorina Gomel State University*
[2]*SNPO "Optics, Optoelectronics, and Laser Technology", Minsk*
[3]*School of Science, Jiangnan University*

Аннотация. Предложена усовершенствованная конструкция управляемой цилиндрической гиперлинзы, созданной на базе чередующихся слоев антимонида индия и кремния. Эта конструкция предназначена для получения изображений с субволновым разрешением в терагерцовом диапазоне. С использованием численного моделирования продемонстрирована способность динамической перестройки гиперлинзы в широком диапазоне частот при изменении температуры. Основными характеристиками этой структуры являются небольшие размеры, низкие потери в диэлектрике и способность формирования изображений сверхвысокого разрешения. Это исследование может способствовать улучшению разрешения систем визуализации в терагерцовом диапазоне, а также содействовать развитию систем визуализации изображений и зондирования со сверхвысоким разрешением, работающих в этом диапазоне.

Ключевые слова: *гиперлинза*, *температура*, *численное моделирование*, *ТГц диапазон.*

Для цитирования: *Термически управляемая терагерцовая гиперлинза* / И.А. Фаняев, Д.В. Слепенков, А.Ю. Кравченко, И.В. Семченко, Д. Ли, С.А. Хахомов // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 32–37. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_32. – EDN: CCFYWF

Abstract. The presented article proposes an improved design of a controllable cylindrical hyperlens based on alternating layers of indium antimonide and silicon. This design is intended for obtaining sub-wavelength resolution images in the terahertz range. Using numerical simulation, the ability of dynamic tuning of the hyperlens over a wide frequency range by varying the temperature is demonstrated. The key characteristics of this structure include small dimensions, low losses in the dielectric, and the ability to form images with super-high resolution. This research can contribute to enhancing the resolution of visualization systems in the terahertz range, as well as promoting the development of ultra-high resolution imaging and probing systems operating in this range.

Keywords: *hyperlens*, *temperature*, *numerical simulation*, *THz range*.

For citation: *The thermally controlled terahertz hyperlens* / I.A. Fanyaev, D.V. Slepiankou, A.Y. Krav-chenko, I.V. Semchenko, J. Li, S.A. Khakhomov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 3 (56). – P. 32–37. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_32 (in Russian). – EDN: CCFYWF

Введение

В настоящий момент создаются разнообразные устройства, способные генерировать и обнаруживать ТГц излучение, однако возможности для управления этим излучением остаются ограниченными. Это затрудняет развитие многих перспективных применений в области электроники и фотоники. В отличие от многих других диапазонов частот, терагерцовые волны способны проникать в различные непроводящие материалы и позволяют анализировать молекулярную структуру естественных веществ, облегчая идентификацию различных соединений [1]. Это позволяет применять современные методы терагерцовой спектроскопии и визуализации для решения широкого спектра фундаментальных и прикладных задач в различных областях исследования [2]–[7]. Интерес к электромагнитным волнам в ТГц диапазоне обусловлен их потенциалом для эффективного использования в новаторских приложениях, таких как системы терагерцового изображения, медицинские сканеры, системы безопасности и контроля, мониторинг атмосферных условий, космические коммуникационные системы и т. д. [1], [8], [9].

В большинстве разных систем ученые стремятся получить высококачественное визуальное представление объектов, подлежащих изучению.

При получении терагерцовых изображений основной трудностью является ограниченное разрешение, связанное со значительно большей длиной волны по сравнению с видимым светом. Для преодоления дифракционных ограничений используются разнообразные методы, например, сканирующая оптическая микроскопия ближнего поля, микроскопия со стохастической оптической реконструкцией, микроскопия с использованием насыщенного структурированного освещения и другие [10]. Однако основным ограничением таких подходов является применение высокоинтенсивного света и пошаговое сканирование поверхности образца, что приводит к замедлению сканирования и не позволяет получать полноценные изображения в реальном времени, особенно для динамических биологических объектов.

Один из перспективных методов получения субволновых изображений в терагерцовом диапазоне связан с разработкой и изготовлением гиперлинз на базе гиперболических метаматериалов [11]–[18], композитов, в которых поперечная и продольная составляющие тензора диэлектрической и/или магнитной проницаемостей имеют противоположные знаки.

Метаматериалы – композиционные материалы, свойства которых обусловлены в первую очередь резонансными свойствами составляющих их элементов, а не периодической структурой как в фотонных кристаллах, интенсивно исследовались на протяжении последних 25 лет [19]–[24].

Множество гиперболических метаматериалов с субволновым разрешением, как правило, имеют статичную природу, что ограничивает их применение. При реализации активных гиперболических метаматериалов, для их перестройки используются следующие методы: изменение температуры, управление оптическим излучением, регулировка электрического или магнитного поля [1].

Существует ограниченное число материалов, которые могут быть использованы в гиперболических структурах в низкотерагерцовом диапазоне, а также позволяют осуществлять динамическую перестройку своих свойств. К таким материалам можно отнести антимонид индия и графен. Практическая реализация динамических структур метаматериала с использованием графена сталкивается с определенными трудностями из-за необходимости применения системы очень тонких электродов для регулировки химического потенциала через подачу электрического потенциала. Это также требует точного контроля и согласования между слоями и может вызвать проблемы при интеграции графена с другими материалами. В работе [13] для металлической составляющей использован антимонид индия вместе со слоями полиэтилена высокой плотности (HDPE). Коэффициент поглощения у HDPE существенно возрастает с увеличением частоты [25]. Также в работе [13] отсутствуют результаты, которые бы подтверждали получение изображений со сверхвысоким разрешением в дальней зоне.

В данном исследовании предлагается улучшенный дизайн активной цилиндрической гиперлинзы, состоящей из чередующихся слоев антимонида индия и кремния. Этот дизайн направлен на получение изображения с субволновым разрешением в терагерцовом диапазоне частот. Использование антимонида индия позволяет динамически настраивать его дисперсионные свойства путем небольших изменений температуры, в то время как кремний, действуя как диэлектрик, обладает высоким показателем преломления и низким коэффициентом поглощения в исследуемом ТГц диапазоне. Эти характеристики позволяют создать гиперболическую структуру с небольшой толщиной и минимальными потерями. Представленная в данной работе гиперлинза обеспечивает гибкость настройки характеристик сверхвысокого разрешения. Это достигается благодаря правильному выбору геометрических параметров. При этом она остается относительно простой по конструкции и экономичной. Данная работа может способствовать улучшению систем визуализации и зондирования со сверхвысоким разрешением в терагерцовом диапазоне в режиме реального времени.

1 Теоретические сведения

Одним из стандартных вариантов реализации гиперболических метаматериалов является плоская структура, состоящая из чередующихся тонких слоев металла и диэлектрика. Плоская структура метаматериала с гиперболической дисперсией может передавать изображение в зоне ближнего поля без увеличения. Более интересные явления возникают, когда поверхность гиперболического метаматериала искривлена, например, в форме цилиндра или сферы. В этом случае волны, распространяющиеся в такой линзе, не только передают изначально эванесцентные волны с большей поперечной компонентой волнового числа, но и преобразуют их в распространяющиеся волны, которые можно обнаружить обычным микроскопом. Степень увеличения изображения определяется отношением радиусов на двух границах линзы. Такие увеличивающие гиперлинзы позволяют получать поля с субволновой детализацией в масштабах, превышающих длину волны, что упрощает дальнейшую обработку средствами обычной дифракционной оптики.

В качестве металла использовался InSb, диэлектрическая проницаемость которого в ТГц диапазоне может быть описана с помощью модели Друде [26]. При выборе материала для диэлектрического слоя гиперлинзы мы руководствовались требованием к низким потерям и высокому коэффициенту преломления. Это позволит использовать более тонкие слои и, при необходимости, увеличить их количество. К примеру, в работе [13] был использован полиэтилен высокой плотности (HDPE), однако у него низкий показатель преломления и коэффициент поглощения значительно увеличивается с частотой (при 2 ТГц ~ 1 $см^{-1}$). Среди кристаллических материалов с низкими потерями наиболее подходящими являются Si и SiO_2. Однако кремний с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_{Si} = 11,69$ предпочтительнее из-за его высокого показателя преломления ($n_{Si} = 3,42$) и низкого коэффициента поглощения (0,1 $см^{-1}$) в широком диапазоне частот.

Для анализа гиперболической дисперсии предлагаемой гиперлинзы, то есть зависимости её диэлектрической проницаемости от диэлектрических проницаемостей слоёв, мы использовали следующие уравнения для эффективной среды в случае анизотропной многослойной структуры InSb / Si [27]:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_{InSb}\varepsilon_{Si}}{(1-p)\varepsilon_{InSb} + p\varepsilon_{Si}}, \qquad (1.1)$$

$$\varepsilon_\theta = p\varepsilon_{InSb} + (1-p)\varepsilon_{Si}, \qquad (1.2)$$

где ε_r – эффективная диэлектрическая проницаемость в направлении r, а ε_θ – эффективная диэлектрическая проницаемость в плоскости θ (в цилиндрических координатах), $p = t_{InSb} / (t_{InSb} + t_{Si})$ – коэффициент заполнения металла (отношение заполнения), где t_{InSb} и t_{Si} – толщины слоев InSb и Si.

2 Компьютерная модель

В современных условиях математическое моделирование активно применяется как важный инструмент научных исследований. Оно приходит на смену экспериментальным исследованиям и становится неотъемлемой частью научного процесса, особенно в случаях, когда проведение экспериментов или полный теоретический анализ всех аспектов изучаемого явления представляют сложности [28]. В настоящее время в лабораториях, посвященных изучению метаматериалов, для проведения численных экспериментов наиболее часто используется коммерческое программное обеспечение, основанное на методе конечных элементов.

На рисунке 2.1 показано схематическое изображение предлагаемой активной цилиндрической гиперлинзы со структурными параметрами и материалами, использованными при моделировании. Предлагаемый гиперболический метаматериал представляет собой полуцилиндр с внутренним радиусом $r = 50$ мкм и толщиной $t = 50$ мкм и состоит из 10 пар слоев InSb / Si с оптимизированным коэффициентом заполнения $p = 0,65$. Трехмерная модель гиперлинзы имеет прорези шириной 10 мкм в металлической оболочке в виде букв GSU (Gomel State University) в вертикальной ориентации. Гиперлинза возбуждается линейной x-поляризованной (LP_x), y-поляризованной (LP_y), круговой правой (RCP) и круговой левой (LCP) электромагнитной волной.

Гиперлинза расположена на кремниевой подложке толщиной L = 200 мкм. Вся структура покрыта пленкой золота (Au) толщиной t_{Au} = 4 мкм. Вся модель окружена идеальным поглощающим слоем для предотвращения нежелательных отражений от границ гиперлинзы.

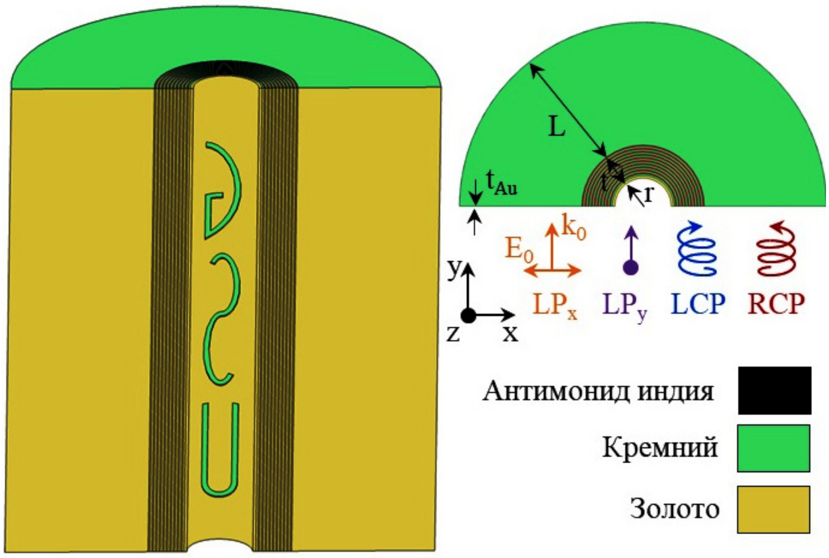


Рисунок 2.1 – Схематическое изображение цилиндрической трехмерной гиперлинзы, используемой в моделировании

3 Результаты компьютерного моделирования

В качестве металла мы используем InSb с диэлектрической проницаемостью, описанной уравнением (1.1) из [26]. Данный материал характеризуется тем, что имеет подходящую плотность носителей, чтобы его плазменная частота находилась в терагерцовом диапазоне, и поэтому InSb можно использовать вместо металла в гиперболических структурах.

Были проведены численные исследования эффективных параметров многослойной структуры металл / диэлектрик, которые описываются выражениями (1.1) и (1.2). На рисунке 3.1, *а* и *б* показаны зависимости радиальной и азимутальной диэлектрической проницаемости в диапазоне частот от 1,5 до 4,5 ТГц при изменении температуры. Сплошная линия относится к действительной части, а штрихпунктирная к мнимой части диэлектрической проницаемости. Следует отметить широкие пределы принимаемых значений действительной части диэлектрической проницаемости при небольших изменениях температуры. Это дает возможность осуществлять динамическую перестройку дисперсионных свойств гиперболического метаматериала в исследуемом частотном диапазоне.

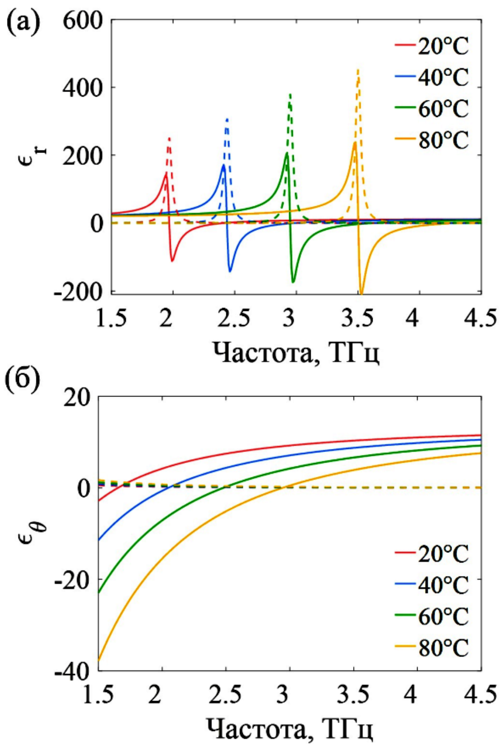


Рисунок 3.1 – Радиальная ε_r (*а*) и азимутальная ε_θ (*б*) диэлектрическая проницаемость гиперлинзы при разных температурах

Из рисунка 3.1, можно выделить частотные области, где гиперболическая среда обладает свойствами среды первого или второго типа. Второй тип среды является более предпочтительным для гиперлинзы, поскольку имеет большее значение волнового вектора. Заметим, что с понижением температуры рабочая область гиперболической среды второго типа смещается в область низких частот. Изменение температуры в небольших пределах от 20 до 80º С существенно изменяет рабочую частоту.

С помощью математического моделирования была произведена оптимизация основных параметров и рассчитана напряженность электрического поля в ближней зоне (рисунок 3.2) от гиперлинзы на частоте 2,25 ТГц при разных вариантах возбуждения и разных значениях температуры.

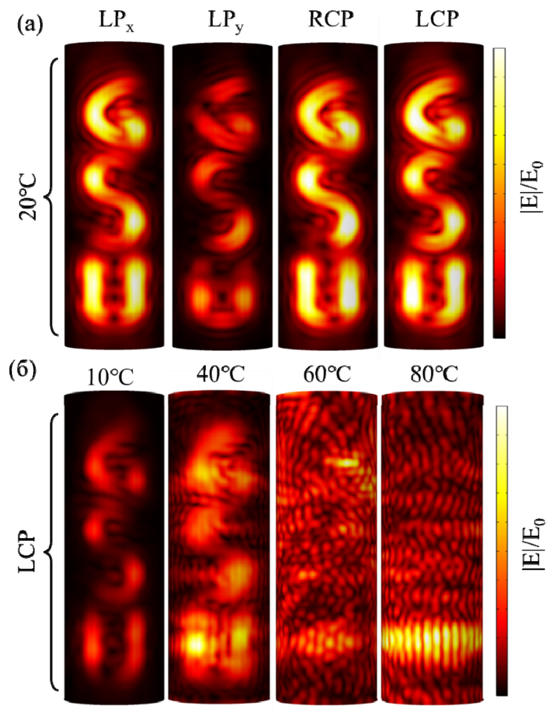


Рисунок 3.2 – Результаты моделирования напряженности электрического поля в ближней зоне при различной поляризации падающей волны (*а*) и распределение поля при различных температурах (*б*)

Анализируя полученные распределения напряженности электрического поля (рисунок 3.2, *а*) при различной поляризации падающего поля и установленной, комнатной температуре можно утверждать, что наиболее четкое изображение получается при левой круговой поляризации волны (LCP). Ввиду того, что размеры прорези и расстояние между буквами значительно меньшие по сравнению с длиной волны ($\lambda = 133$ мкм), можно утверждать, что изображение формируется с субволновым разрешением (порядка $\lambda / 3$). Без гиперлинзы изображение не формируется. Хорошее изображение надписи GSU, но с чуть меньшей интенсивностью, также получается и при линейной x-поляризованной (LP_x) волне, прошедшей через гиперлинзу. При других значениях температуры (рисунок 3.2, *б*) происходит расфокусировка надписи и снижение интенсивности поля.

Из этого можно сделать вывод, что гиперлинза на заданной частоте формирует субволновое изображение только при определенной температуре. Изменяя температуру гиперболической структуры, мы можем реализовать субдифракционную визуализацию полей, излучаемых (рассеиваемых) исследуемыми объектами.

Покажем, что предлагаемая цилиндрическая гиперлинза является перестраиваемой и формирует субволновое изображение в терагерцовом диапазоне при другой температуре. На рисунке 3.3 показаны распределения напряженности электрического поля в структуре при различной температуре и частоте.

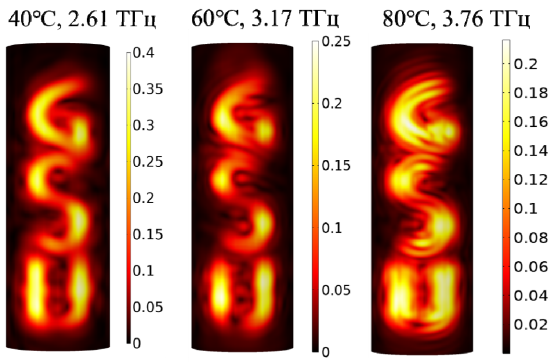


Рисунок 3.3 – Распределение напряженности электрического поля в структуре при различной температуре и частоте

Надписи получены при LCP падающей волне, выбранной температуре, на строго определенной частоте. Анализ многократно повторяемых численных экспериментов показал, что при выбранной требуемой температуре и оптимизации коэффициента заполнения металла можно четко сформировать субволновое изображение в терагерцовом диапазоне. Однако стоит отметить, что прослеживается уменьшение интенсивности поля при увеличении температуры.

Подводя итоги исследований, можно сделать вывод, что предлагаемая модель цилиндрической гиперлинзы реализует в ближней зоне субдифракционное формирование полей, излучаемых (рассеиваемых) исследуемыми объектами в широком ТГц диапазоне. Динамическая перестройка работы гиперлинзы по частоте производится за счет изменения температуры. Используемый принцип управления технологически осуществляется гораздо проще по сравнению с оптическим управлением или изменением напряженности приложенного электрического либо магнитного поля.

Заключение

В данной статье предложена динамически управляемая цилиндрическая гиперлинза на основе чередующихся InSb / Si слоев для получения изображений с субволновым разрешением на терагерцовых частотах. С помощью численного моделирования продемонстрирована возможность перестройки гиперлинзы в частотном диапазоне от 1,5 до 4,5 ТГц при изменении температуры от 20 до 80º C. Используемый принцип управления отличается простотой по сравнению с другими способами. На основании предложенной компьютерной модели может быть изготовлена цилиндрическая гиперлинза с использованием стандартных методов напыления или электронно-лучевого испарения. Эта работа может способствовать улучшению систем визуализации изображений и зондирования со сверхвысоким разрешением для терагерцового диапазона в режиме реального времени [29]–[31].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Электромагнитное излучение терагерцового диапазона: способы управления и возможные области применения* / И.Б. Вендик [и др.] // Электроника и микроэлектроника СВЧ. – 2016. – Т. 1. – С. 101–105.

2. *Graphene conductance uniformity mapping* / J.D. Buron [et al.] // Nano letters. – 2012. – Vol. 12, № 10. – P. 5074–5081.

3. *Terahertz pulsed spectroscopy and imaging in the pharmaceutical setting-a review* / J.A. Zeitler [et al.] // Journal of Pharmacy and Pharmacology. – 2007. – Vol. 59, № 2. – P. 209–223.

4. *Non-destructive evaluation of polymer composite materials at the manufacturing stage using terahertz pulsed spectroscopy* / E.V. Yakovlev [et al.] // IEEE Transactions on Terahertz science and Technology. – 2015. – Vol. 5, № 5. – P. 810–816.

5. *Backside observation of large-scale integrated circuits with multilayered interconnections using laser terahertz emission microscope* / M. Yamashita [et al.] // Applied Physics Letters. – 2009. – Vol. 94, № 19. – P. 1–8.

6. *Terahertz near-field nanoscopy of mobile carriers in single semiconductor nanodevices* / A.J. Huber [et al.] // Nano letters. – 2008. – Т. 8, № 11. – P. 3766–3770.

7. *Terahertz biophotonics as a tool for studies of dielectric and spectral properties of biological tissues and liquids* / O.A. Smolyanskaya [et al.] // Progress in Quantum Electronics. – 2018. – Vol. 62. – P. 1–77.

8. *Chan*, *W.L.* Imaging with terahertz radiation / W.L. Chan, J. Deibel, D.M. Mittleman // Reports on progress in physics. – 2007. – Vol. 70, № 8. – P. 1325.

9. *De Maagt*, *P.* Terahertz technology for space and earth applications / P. De Maagt // 2007 International workshop on Antenna Technology: Small and

Smart Antennas Metamaterials and Applications. – IEEE, 2007. – P. 111–115.

10. *Scanning near-field optical microscopy with aperture probes: Fundamentals and applications* / B. Hecht [et al.] // The Journal of Chemical Physics. – 2000. – Vol. 112, № 18. – P. 7761–7774.

11. *Hyperbolic metamaterials and metasurfaces: fundamentals and applications* / P. Huo [et al.] // Advanced Optical Materials. – 2019. – Vol. 7, № 14. – P. 1801616.

12. *Spherical hyperlens for two-dimensional sub-diffractional imaging at visible frequencies* / J. Rho [et al.] // Nature communications. – 2010. – Vol. 1, № 1. – P. 143.

13. *Zhang*, *H.* Tunable terahertz hyperbolic metamaterial slabs and super-resolving hyperlenses / H. Zhang, Z. Jiao, E. Mcleod // Applied Optics. – 2020. – Vol. 59, № 22. – P. G64–G70.

14. *Tunable hyperbolic metamaterials based on self-assembled carbon nanotubes* / J.A. Roberts [et al.] // Nano Letters. – 2019. – Vol. 19, № 5. – P. 3131–3137.

15. *Metal-free oxide-nitride heterostructure as a tunable hyperbolic metamaterial platform* / X. Wang [et al.] // Nano Letters. – 2020. – Vol. 20, № 9. – P. 6614–6622.

16. *Tunable* VO_2 / Au *hyperbolic metamaterial* / S. Prayakarao [et al.] // Applied Physics Letters. – 2016. – Vol. 109, № 6. – P. 061105.

17. *Sub-diffraction demagnification imaging lithography by hyperlens with plasmonic reflector layer* / L. Liu [et al.] // RSC advances. – 2016. – Vol. 6, № 98. – P. 95973–95978.

18. *Металинзы для получения изображений с субволновым разрешением* / К.В. Барышникова [и др.] // Успехи физических наук. – 2022. – Т. 192 (4). – С. 386–412.

19. *Семченко*, *И.В.* Электромагнитные волны в метаматериалах и спиральных структурах / И.В. Семченко, С.А. Хахомов. – Минск: Беларуская навук, 2019. – 280 с.

20. *Investigation of electromagnetic properties of a high absorptive, weakly reflective metamaterial–substrate system with compensated chirality* / I.V. Semchenko [et al.] // Journal of Applied Physics. – 2017. – Vol. 121 (1). – P. 015108.

21. *Radiation of circularly polarized microwaves by a plane periodic structure of Ω elements* / I.V. Semchenko [et al.] // J. Commun. Technol. Electron. – 2007. – Vol. 52. – P. 1002–1005.

22. *Semchenko*, *I.V.* Artificial Uniaxial Bianisotropic Media at Oblique Incidence of Electromagnetic Waves / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov // Electromagnetics. – 2002. – Vol. 22 (1). – P. 71–84.

23. *Electromagnetic Waves in Artificial Chiral Structures with Dielectric and Magnetic Properties* / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, S.A. Tretyakov, A.H. Sihvola // Electromagnetics. – 2001. – Vol. 21 (5). – P. 401–414.

24. *Electromagnetics of bi-anisotropic materials: Theory and applications* / A. Serdyukov [et al.]. – Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 2001. – 337 p.

25. *Naftaly*, *M.* THz transmission in polymer materials – a data library / M. Naftaly, R.E. Miles, P.J. Greenslade // 2007 Joint 32nd International Conference on Infrared and Millimeter Waves and the 15th International Conference on Terahertz Electronics. – IEEE, 2007. – P. 819–820.

26. *Фаняев*, *И.А.* Параметрический анализ цилиндрической гиперлинзы с субволновым разрешением для ТГц волн / Ив.А. Фаняев, Иг.А. Фаняев, С.А. Хахомов // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 3 (52). – С. 48–55.

27. *Agranovich*, *V.M.* Notes on crystal optics of superlattices / V.M. Agranovich, V.E. Kravtsov // Solid State Communications. – 1985. – Vol. 55. – P. 85–90.

28. *Прокопьева*, *Л.Ю.* Моделирование анизотропных метаматериалов с помощью параллельной реализации метода конечных объемов для решения нестационарных уравнений Максвелла / Л.Ю. Прокопьева // Вычислительные технологии. – 2009. – Т. 14, № 3. – С. 58–68.

29. *Hyperbolic metamaterial structures based on graphene for THz super-resolution imaging applications* / S. Hao [et al.] // Optical Materials Express. – 2023. – Vol. 13, № 1. – P. 247–262.

30. *Fanyaev*, *I.A.* Switchable Cylindrical Hyperlens for THz Band / I.A. Fanyaev, I.A. Faniayeu, S.A. Khakhomov // IEEE Conference Proceedings. – 2022. – P. 1–3.

31. *Subwavelength imaging amplification via electro-thermally tunable InSb-graphene-based hyperlens in terahertz frequency* / I. Fanyaev, I. Faniayeu, J. Li, S. Khakhomov // Results in Physics. – 2023. – Vol. 52. – P. 106917.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, проекты Ф22КИ-016, Ф22КИТГ-021.

Поступила в редакцию 15.08.2023.

Информация об авторах

Фаняев Иван Александрович – к.т.н., доцент
Слепенков Дмитрий Владимирович
Кравченко Александр Юрьевич
Семченко Игорь Валентинович – д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. АН Беларуси
Ли Дживен – профессор Университета Цзяннань
Хахомов Сергей Анатольевич – д.ф.-м.н., доцент

МАТЕМАТИКА

УДК 512.548

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_38
EDN: EQNIHG

СТЕПЕНИ ЭЛЕМЕНТОВ В *l*-АРНЫХ ГРУППАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. II

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, *Могилёв*

POWERS IN *l*-ARY GROUPS OF SPECIAL FORM. II

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, *Mogilev*

Аннотация. В статье продолжается изучение степеней элементов в полиадических группах специального вида.

Ключевые слова: *полиадическая операция*, *n-арная группа*, *степень элемента.*

Для цитирования: *Гальмак*, *А.М.* Степени элементов в *l*-арных группах специального вида. II / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 38–43. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_38. – EDN: EQNIHG

Abstract. The study on the powers in polyadic groups of special form is carried on.

Keywords: *polyadic operation*, *n-ary group*, *power*.

For citation: *Gal'mak*, *A.M.* Powers in *l*-ary groups of special form. II / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 3 (56). – P. 38–43. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_38 (in Russian). – EDN: EQNIHG

Введение

Данная статья, посвящённая изучению степеней элементов в полиадических группах специального вида, является продолжением статьи [1] и составляет с ней единое целое, что отражено в названиях обеих статей. В связи с этим нумерация разделов в настоящей статье продолжает нумерацию разделов в [1]. Сохраняется преемственность в отношении соглашений, определений и обозначений из [1], все они остаются в силе и в данной статье. В ней ссылки на результаты из работы [1] даются без указания на эту работу. Например, ссылка на теорему 2.1 означает, что имеется в виду теорема 2.1 из раздела 2 в [1].

Всю необходимую информацию из теории полиадических групп можно найти в [2]–[6].

3 Главная теорема

Вначале покажем, что, если в теореме 2.2 подстановка σ оставляет неподвижным некоторый символ, то компонента элемента $\mathbf{a}^{[\nu]}$ ($\nu < 0$), индекс которой совпадает с этим символом, имеет вид, указанный в следующем предложении.

***Предложение* 3.1.** *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная группа* ($n \geq 3$), *подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$ *и оставляет неподвижным символ* m, $\nu < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент l-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$. *Тогда m-я компонента* b_m *элемента* $\mathbf{a}^{[\nu]} = (b_1, \ldots, b_k)$ *имеет вид*

$$b_m = \eta(\underbrace{a_m \quad \ldots \quad a_m}_{(n-3)(-\nu(l-1)-1)} \underbrace{\overline{a_m} \ldots \overline{a_m}}_{-\nu(l-1)-1}).$$

Доказательство. Так как подстановка σ оставляет неподвижным символ m, то

$$a_{\sigma^r(m)} = a_m, \quad \overline{a_{\sigma^r(m)}} = \overline{a},$$

$$\underbrace{a_{\sigma^r(m)} \ldots a_{\sigma^r(m)}}_{n-3} = \underbrace{a_m \ldots a_m}_{n-3}$$

для любого $r = 0, 1, \ldots, l-2$. Далее, учитывая, перестановочность в n-арной группе $< A, \eta >$ любого её элемента a со своим косым элементом $\overline{a}$, находим u_m и b_m из формулировки теоремы 2.2:

$$u_m = \underbrace{\underbrace{a_m \ldots a_m}_{n-3} \overline{a_m} \ldots \underbrace{a_m \ldots a_m}_{n-3} \overline{a_m}}_{l-2} =$$

$$= \eta(\underbrace{a_m \quad \ldots \quad a_m}_{(n-3)(l-2)} \underbrace{\overline{a_m} \ldots \overline{a_m}}_{l-2}),$$

$$b_m = \eta(\underbrace{u_m \ldots u_m}_{-\nu} \underbrace{a_m \quad \ldots \quad a_m}_{(n-3)(-\nu-1)} \underbrace{\overline{a_m} \ldots \overline{a_m}}_{-\nu-1}) =$$

$$= \eta(\underbrace{a_m \quad \ldots \quad a_m}_{-\nu(n-3)(l-2)} \underbrace{\overline{a_m} \ldots \overline{a_m}}_{-\nu(l-2)} \underbrace{a_m \quad \ldots \quad a_m}_{(n-3)(-\nu-1)} \underbrace{\overline{a_m} \ldots \overline{a_m}}_{-\nu-1}) =$$

$$= \eta(\underbrace{a_m \quad \ldots \quad a_m}_{(n-3)(-\nu(l-1)-1)} \underbrace{\overline{a_m} \ldots \overline{a_m}}_{-\nu(l-1)-1}). \qquad \square$$

***Следствие* 3.1.** *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа, подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *оставляет неподвижным символ* m, $\nu < 0$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s+1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$. *Тогда m-я компонента* b_m *элемента* $\mathbf{a}^{[\nu]} = (b_1, \ldots, b_k)$ *имеет вид*

$$b_m = \eta(\underbrace{\overline{a_m} \ldots \overline{a_m}}_{-2\nu s-1}).$$

В следующей теореме, в отличие от теоремы 2.1, более детально описаны компоненты полиадических степеней элементов l-арной группы $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

***Теорема* 3.1.** *Пусть* $< A, \eta >$ *–* n*-арная группа, порядок подстановки* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *делит натуральное* d, $l = td + 1$ *для некоторого натурального* t, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* l*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)},\ j = 1, \ldots, k, \qquad (3.1)$$

a_j^{-1} *и* α_j^{-1} *– любые обратные последовательности в* $< A, \eta >$ *для элемента* a_j *и последовательности* α_j *соответственно. Тогда*:

$\mathbf{a}^{[\nu]} = \mathbf{a}$, *если* $\nu = 0$;

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(a_1 \underbrace{\alpha_1 a_1 \ldots \alpha_1 a_1}_{t\nu}), \ldots, \eta(a_k \underbrace{\alpha_k a_k \ldots \alpha_k a_k}_{t\nu})), \qquad (3.2)$$

если $\nu > 0$;

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\alpha_1^{-1} \underbrace{a_1^{-1}\alpha_1^{-1} \ldots a_1^{-1}\alpha_1^{-1}}_{-t\nu-1}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\alpha_k^{-1} \underbrace{a_k^{-1}\alpha_k^{-1} \ldots a_k^{-1}\alpha_k^{-1}}_{-t\nu-1})), \qquad (3.3)$$

если $\nu < -1$ *или* $\nu = -1$, $t \neq 1$.

Доказательство. Так как порядок подстановки σ делит d, то из условия $l = td + 1$ следует, что порядок подстановки σ делит $l - 1$. Следовательно, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Таким образом, выполнены условия теоремы 1.1, согласно которой $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – l-арная группа.

По условию подстановка σ^d является тождественной и $l = td + 1$. Поэтому

$$a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} =$$

$$= \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)} a_j \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)} a_j}_{t-1} a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)}$$

или, учитывая равенство (3.1),

$$a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} = \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t-1} \alpha_j. \qquad (3.4)$$

Для $\nu = 0$ доказывать нечего.

Если $\nu > 0$, то положим

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathbf{a} \ \ldots \ \mathbf{a}}_{\nu(l-1)+1}) = (b_1, \ldots, b_k).$$

Из этого равенства, принимая во внимание определение l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ и тождественность подстановки σ^{l-1}, получим

$$b_j = \eta(a_j a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)}$$

$$\underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)} \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)}}_{\nu-1}) =$$

$$= \eta(a_j a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j$$

$$\underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j}_{\nu-1}) =$$

$$= \eta(a_j \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j}_{\nu}),$$

то есть

$$b_j = \eta(a_j \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j}_{\nu}).$$

Из полученного равенства и равенства (3.4) вытекает

$$b_j = \eta(a_j \underbrace{\underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t-1} \alpha_j a_j \ldots \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t-1} \alpha_j a_j}_{\nu}) =$$

$$= \eta(a_j \underbrace{\underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t} \ldots \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t}}_{\nu}) =$$

$$= \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t\nu}),$$

то есть

$$b_j = \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t\nu})$$

для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$. Следовательно, верно (3.2)

Пусть теперь $\nu < -1$ или $\nu = -1$, $t \neq 1$ и положим

$$b_j = \eta(\alpha_j^{-1} \underbrace{a_j^{-1}\alpha_j^{-1} \ldots a_j^{-1}\alpha_j^{-1}}_{-t\nu-1}),\ j \in \{1, \ldots, k\}, \qquad (3.5)$$

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathbf{a} \ldots \mathbf{a}}_{-\nu(l-1)}(b_1, \ldots, b_k)) = (c_1, \ldots, c_k). \qquad (3.6)$$

Из последнего равенства, принимая во внимание определение l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ и тождественность подстановки σ^{l-1}, получим

$$c_j = \eta(a_j \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)} \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)}}_{-\nu-1}$$

$$a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} b_{\sigma^{l-1}(j)}) =$$

$$= \eta(a_j \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j}_{-\nu-1}$$

$$a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} b_j),$$

то есть

$$c_j = \eta(a_j \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j}_{-\nu-1}$$

$$a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} b_j).$$

Полученное равенство, учитывая равенство (3.4), можно переписать следующим образом

$$c_j = \eta(a_j \underbrace{\underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t-1} \alpha_j a_j \ldots \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t-1} \alpha_j a_j}_{-\nu-1}$$

$$\underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t-1} \alpha_j b_j),$$

откуда следует

$$c_j = \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{t(-\nu-1)+t-1} \alpha_j b_j) = \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{-t\nu-1} \alpha_j b_j),$$

то есть

$$c_j = \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{-t\nu-1} \alpha_j b_j).$$

Подставляя в это равенство вместо b_j правую часть из (3.5) и используя нейтральность соответствующих последовательностей, получим

$$c_j=\eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{-t\nu-1} \alpha_j \eta(\alpha_j^{-1} \underbrace{a_j^{-1}\alpha_j^{-1}\ldots a_j^{-1}\alpha_j^{-1}}_{-t\nu-1}))=a_j,$$

то есть $c_j = a_j$ для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$, откуда и из (3.6) вытекает

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathrm{a} \ldots \mathrm{a}}_{-\nu(l-1)} (b_1, \ldots, b_k)) = \mathbf{a}.$$

Следовательно, $(b_1, \ldots, b_k) = \mathrm{a}^{[\nu]}$ и верно (3.3). □

***Замечание* 3.1.** Если в теореме 3.1 $d = l - 1$, то $t = 1$ и получается теорема 2.1, являющаяся таким образом следствием теоремы 3.1.

***Замечание* 3.2.** Пустую последовательность можно рассматривать как нейтральную последовательность. Поэтому будем считать $\eta(a) = a$ для любого элемента a n-арной группы $< A, \eta >$.

***Замечание* 3.3.** Так как при $t = 1$, $\nu = -1$ последовательность

$$\underbrace{a_j^{-1}\alpha_j^{-1} \ldots a_j^{-1}\alpha_j^{-1}}_{-t\nu-1}$$

пустая, то правая часть в (3.3) не имеет смысла. С другой стороны, если $t = 1$, то $d = l - 1 = s(n - 1)$. Это означает, что в качестве обратной последовательности в $< A, \eta >$ для последовательности α_j длины $d - 1 = s(n - 1) - 1$ можно использовать одноэлементную обратную последовательность α_j^{-1}. Поэтому, если в теореме 3.1 $t = 1$, $\nu = -1$, то, как и в теореме 2.1,

$$\mathbf{a}^{[-1]} = (\alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_k^{-1}).$$

Если принять во внимание замечание 3.2, то последнее равенство можно считать содержащимся в равенстве (3.3), которое, таким образом, верно для $\nu < 0$. Будем иметь это в виду при формулировке следствий из теоремы 3.1 и других результатов, полученных с её помощью.

***Замечание* 3.4.** Покажем, что число элементов под знаком n-арной операции в каждой компоненте правой части (3.3) равно $r(n - 1) + 1$ для некоторого натурального r, то есть равенство (3.3) корректно.

Так как

$$s(n - 1) = l - 1 = td = (t - 1)d + 1 + d - 1,$$

то обратный элемент α_j^{-1} в $< A, \eta >$ для последовательности α_j длины $d - 1$ эквивалентен в смысле Поста последовательности длины $(t - 1)d + 1$. Кроме того, любая обратная последовательность a_j^{-1} для элемента a_j эквивалентна в $< A, \eta >$ последовательности длины $n - 2$. В этом случае число элементов под знаком n-арной операции в правой части (3.3) равно

$$\begin{aligned}
&(t - 1)d + 1 + (n - 2 + (t - 1)d + 1)(-\nu t - 1) = \\
&= td - d + 1 + (n - 2 + td - d + 1)(-\nu t - 1) = \\
&= l - 1 - d + 1 + (n - 2 + l - 1 - d + 1)(-\nu t - 1) = \\
&= l - d + (n - 2 + l - d)(-\nu t - 1) = \\
&= l - d - \nu t(n - 2) - \nu tl + \nu td - (n - 2) - l + d = \\
&= -\nu t(n - 2) - \nu tl + \nu td - (n - 2) = \\
&= (-\nu t(n - 2) - \nu tl) + \nu(l - 1) - (n - 1) + 1 = \\
&= -\nu t(l + n - 2) + (\nu s(n - 1) - (n - 1)) + 1 = \\
&= -\nu t(s(n - 1) + 1 + n - 2) + (\nu s - 1)(n - 1) + 1 = \\
&= -\nu t(s(n - 1) + n - 1) + (\nu s - 1)(n - 1) + 1 = \\
&= -\nu t(s + 1)(n - 1) + (\nu s - 1)(n - 1) + 1 = \\
&= (-\nu t(s + 1) + \nu s - 1))(n - 1) + 1 = \\
&= (-\nu(ts + t - s) - 1)(n - 1) + 1 = \\
&= r(n - 1) + 1,
\end{aligned}$$

где $r = -\nu(ts + t - s) - 1$.

***Замечание* 3.5.** Если в теореме 3.1 $n \geq 3$, то в качестве обратной последовательности a_j^{-1} в n-арной группе $< A, \eta >$ для её элемента a_j можно взять последовательность

$$a_j^{-1} = \overline{a}_j \underbrace{a_j \ldots a_j}_{n-3}.$$

Кроме того, в силу леммы 2.1, обратная последовательность α_j^{-1} в $< A, \eta >$ для последовательности α_j из теоремы 3.1 имеет вид

$$\alpha_j^{-1} = \underbrace{a_{\sigma^{d-1}(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma^{d-1}(j)}} \ldots$$

$$\ldots \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma(j)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma(j)}}. \qquad (3.7)$$

Соответственно теорема 3.1 примет следующий вид.

***Теорема* 3.2.** *Пусть $< A, \eta >$ – n-арная группа ($n \geq 3$), порядок подстановки σ из $\mathbf{S}_k$ делит натуральное d, $l = td + 1$ для некоторого натурального t, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – произвольный элемент l-арной группы $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$,*

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)}, \ j = 1, \ldots, k,$$

α_j^{-1} – последовательность (3.7) *или любая другая обратная последовательность в $< A, \eta >$ для последовательности α_j. Тогда*:

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = \mathbf{a}, \text{ если } \nu = 0;$$

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(a_1 \underbrace{\alpha_1 a_1 \ldots \alpha_1 a_1}_{t\nu}), \ldots, \eta(a_k \underbrace{\alpha_k a_k \ldots \alpha_k a_k}_{t\nu})),$$

если $\nu > 0$;

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\alpha_1^{-1} \underbrace{\overline{a}_1 \underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3} \alpha_1^{-1} \ldots \overline{a}_1 \underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3}}_{-t\nu-1} \alpha_1^{-1}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\alpha_k^{-1} \underbrace{\overline{a}_k \underbrace{a_k \ldots a_k}_{n-3} \alpha_k^{-1} \ldots \overline{a}_k \underbrace{a_k \ldots a_k}_{n-3}}_{-t\nu-1} \alpha_k^{-1})),$$

если $\nu < 0$.

***Замечание* 3.6.** В теоремах 3.1 и 3.2 в качестве подстановки σ можно взять подстановку порядка d. Если же в качестве подстановки σ в этих теоремах взять подстановку порядка $d = l - 1$, то $t = 1$ в формулах (3.2) и (3.3) из теоремы 3.1 и в соответствующих формулах из теоремы 3.2.

Ввиду равенства $\mathrm{a}^{[-1]} = \overline{\mathrm{a}}$, из теорем 3.1 и 3.2 при $\nu = -1$ вытекают соответствующие результаты о косых элементах из [7, теоремы 2.1 и 2.2].

***Замечание* 3.7.** Если $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – l-арная группа, σ – тождественная подстановка,

$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in A^k$, то согласно определению полиадической степени для $\nu > 0$ имеем

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = \eta(\underbrace{\mathrm{a} \ \ldots \ \mathrm{a}}_{\nu(l-1)+1}) = \eta(\underbrace{(a_1 \ldots a_k) \ldots (a_1 \ldots a_k)}_{\nu(l-1)+1}) =$$

$$= (\eta(\underbrace{a_1 \ \ldots \ a_1}_{\nu(l-1)+1}), \ldots, \eta(\underbrace{a_k \ \ldots \ a_k}_{\nu(l-1)+1})). \quad (3.8).$$

Для $\nu < 0$ имеем

$$\eta(\mathrm{a}^{[\nu]} \underbrace{\mathrm{a} \ \ldots \ \mathrm{a}}_{-\nu(l-1)}) = \mathbf{a},$$

то есть

$$\eta(\mathbf{a}^{[\nu]} \underbrace{(a_1 \ldots a_k) \ldots (a_1 \ldots a_k)}_{-\nu(l-1)}) = (a_1, \ldots, a_k).$$

Если $\mathbf{a}^{[\nu]} = (b_1, \ldots, b_k)$, то из последнего равенства следует

$$(\eta(b_1 \underbrace{a_1 \ \ldots \ a_1}_{-\nu(l-1)}), \ldots, \eta(b_k \underbrace{a_k \ \ldots \ a_k}_{-\nu(l-1)})) = (a_1, \ldots, a_k),$$

то есть

$$\eta(b_j \underbrace{a_j \ \ldots \ a_j}_{-\nu(l-1)}) = a_j, j = 1, \ldots, k, \quad (3.9)$$

откуда

$$b_j = \eta(a_j \underbrace{a_j^{-1} \ \ldots \ a_j^{-1}}_{-\nu(l-1)}) = \eta(\underbrace{a_j^{-1} \ \ldots \ a_j^{-1}}_{-\nu(l-1)-1}). \quad (3.10)$$

Если теперь в теореме 3.1 $d = 1$, то есть σ – тождественная подстановка, то $t = l - 1$, а последовательность (3.1) – пустая. В этом случае равенства (3.2) и (3.3) принимают соответственно вид (3.8) и (3.10). Следовательно, случай тождественной подстановки содержится в теореме 3.1 при $d = 1$. Это же верно и для теоремы 3.2.

Для тождественной подстановки имеет место предложение, устанавливающее связь между степенями элементов в l-арной группе $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ и степенями компонент этих элементов в n-арной группе $< A, \eta >$.

***Предложение* 3.2.** *Пусть* $< A, \eta >$ *–* n*-арная группа,* σ *– тождественная подстановка из* $\mathbf{S}_k$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* l*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$. *Тогда для любого целого* ν *верно равенство* $\mathbf{a}^{[\nu]} = (a_1^{[s\nu]}, \ldots, a_k^{[s\nu]})$.

Доказательство. Ясно, что для $\nu = 0$ равенство из формулировки теоремы верно.

Положим $\mathbf{a}^{[\nu]} = (b_1, \ldots, b_k)$. Если $\nu > 0$, то, согласно (3.8),

$$b_j = \eta(\underbrace{a_j \ \ldots \ a_j}_{\nu(l-1)+1}).$$

А так как $l - 1 = s(n - 1)$, то

$$b_j = \eta(\underbrace{a_j \ \ldots \ a_j}_{\nu s(n-1)+1}) = a_j^{[s\nu]}, \ \nu > 0.$$

Если $\nu < 0$, то верно (3.9) и, кроме того,

$$\eta(b_j \underbrace{a_j \ \ldots \ a_j}_{-\nu(l-1)}) = \eta(b_j \underbrace{a_j \ \ldots \ a_j}_{-\nu s(n-1)}), \ \nu < 0.$$

Следовательно, $b_j = a_j^{[s\nu]}$. Таким образом, формула из условия предложения верна для любого целого ν. □

Тернарный случай. Если в теореме 3.1 положить $n = 3$, то в качестве обратной последовательности a_j^{-1} в тернарной группе $< A, \eta >$ для её элемента a_j можно взять его косой элемент $\overline{a_j}$. В результате получим следствие для $\nu < 0$.

***Следствие* 3.2**. *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа, порядок подстановки* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *делит натуральное* d, $2s = td$ *для некоторого натурального* t, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, $\nu < 0$,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots \ a_{\sigma^{d-1}(j)}, j = 1, \ldots, k,$$

α_j^{-1} *– любая обратная последовательность в* $< A, \eta >$ *для последовательности* α_j. *Тогда*

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\alpha_1^{-1} \underbrace{\overline{a_1}\alpha_1^{-1} \ldots \overline{a_1}\alpha_1^{-1}}_{-t\nu-1}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\alpha_k^{-1} \underbrace{\overline{a_k}\alpha_k^{-1} \ldots \overline{a_k}\alpha_k^{-1}}_{-t\nu-1})).$$

***Замечание* 3.8.** Если d – чётное, то последовательность α_j в следствии 3.2 эквивалентна в смысле Поста элементу $\eta(a_{\sigma(j)} \ldots \ a_{\sigma^{d-1}(j)})$. Поэтому можно считать

$$\alpha_j = \eta(a_{\sigma(j)} \ldots \ a_{\sigma^{d-1}(j)}),$$

соответственно

$$\alpha_j^{-1} = \overline{\alpha_j} = \overline{\eta(a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)})}.$$

Если $d = 2$, то α_j – элемент тернарной группы $< A, \eta >$, и в силу замечания 3.2, считаем $\alpha_j = \eta(\alpha_j)$.

Имея в виду замечание 3.8, следствие 3.2 можно переформулировать следующим образом.

***Следствие* 3.3**. *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа, порядок подстановки* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *делит чётное* d, $2s = td$ *для некоторого натурального* t, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, $\nu < 0$,

$$\alpha_j = \eta(a_{\sigma(j)} \ldots \ a_{\sigma^{d-1}(j)}), j = 1, \ldots, k.$$

Тогда

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\overline{\alpha_1} \ \underbrace{\overline{a_1} \ \overline{\alpha_1} \ldots \overline{a_1} \ \overline{\alpha_1}}_{-t\nu-1}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\overline{\alpha_k} \ \underbrace{\overline{a_k} \ \overline{\alpha_k} \ldots \overline{a_k} \ \overline{\alpha_k}}_{-t\nu-1})).$$

Если в следствии 3.2 положить $d = 2$, то $t = s$, $\alpha_j = a_{\sigma(j)}$, $\alpha_j^{-1} = a_{\sigma(j)}^{-1} = \overline{a_{\sigma(j)}}, j = 1, \ldots, k$ и получим

***Следствие* 3.4**. *Пусть* $< A, \eta >$ *– тернарная группа,* σ *– подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *порядка* 2, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент* $(2s + 1)$*-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, $\nu < 0$. *Тогда*

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\overline{a_{\sigma(1)}} \ \underbrace{\overline{a_1} \ \overline{a_{\sigma(1)}} \ldots \overline{a_1} \ \overline{a_{\sigma(1)}}}_{-s\nu-1}), \ldots,$$

$$\ldots \eta(\overline{a_{\sigma(k)}} \ \underbrace{\overline{a_k} \ \overline{a_{\sigma(k)}} \ldots \overline{a_k} \ \overline{a_{\sigma(k)}}}_{-s\nu-1})).$$

Из следствия 3.4 при $\nu = -1$ вытекает результат о косых элементах из [7, следствие 2.2].

Бинарный случай. Сформулируем бинарное ($n = 2$) следствие из теоремы 3.1 только для случая $\nu < 0$, так как для $\nu \geq 0$ степень $\mathbf{a}^{[\nu]}$ определяется одними и теми же формулами и в теореме 3.1 и в следствии.

***Следствие* 3.5**. *Пусть A – группа, порядок подстановки σ из $\mathbf{S}_k$ делит натуральное d, $s = td$ для некоторого натурального t, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – произвольный элемент $(s + 1)$-арной группы $< A^k, [\ ]_{s+1, \sigma, k} >$, $\nu < 0$,*

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)}, j = 1, \ldots, k,$$

a_j^{-1} и α_j^{-1} – обратные элементы в группе A для элементов a_j и α_j соответственно. Тогда

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\alpha_1^{-1} \underbrace{a_1^{-1}\alpha_1^{-1} \ldots a_1^{-1}\alpha_1^{-1}}_{-t\nu-1}, \ldots$$

$$\ldots, \alpha_k^{-1} \underbrace{a_k^{-1}\alpha_k^{-1} \ldots a_k^{-1}\alpha_k^{-1}}_{-t\nu-1}).$$

Если в следствии 3.5 положить $d = 2$, то получим

***Следствие* 3.6**. *Пусть A – группа, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$ порядка 2, $s = 2t$ для некоторого натурального t, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – произвольный элемент $(s + 1)$-арной группы $< A^k, [\ ]_{s+1, \sigma, k} >$, $\nu < 0$. Тогда*

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (a_{\sigma(1)}^{-1} \underbrace{a_1^{-1}a_{\sigma(1)}^{-1} \ldots a_1^{-1}a_{\sigma(1)}^{-1}}_{-t\nu-1}, \ldots$$

$$\ldots, a_{\sigma(k)}^{-1} \underbrace{a_k^{-1}a_{\sigma(k)}^{-1} \ldots a_k^{-1}a_{\sigma(k)}^{-1}}_{-t\nu-1}).$$

В следствиях 3.2, 3.3 и 3.5 в качестве подстановки σ можно взять подстановку порядка $n - 1$.

4 Порядок подстановки делит $n - 1$

Если в теоремах 3.1 и 3.2 $d = n - 1$, то $l - 1 = t(n - 1)$, откуда и из $l - 1 = s(n - 1)$ следует $t = s$. Поэтому теоремы 3.1 и 3.2 позволяют сформулировать следующие две теоремы.

***Теорема* 4.1.** *Пусть $< A, \eta >$ – n-арная группа, порядок подстановки σ из $\mathbf{S}_k$ делит $n - 1$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – произвольный элемент l-арной группы $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$,*

$$\beta_j = a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{n-2}(j)}, j = 1, \ldots, k,$$

a_j^{-1} и β_j^{-1} – любые обратные последовательности в $< A, \eta >$ для элемента a_j и последовательности β_j соответственно. Тогда:

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = \mathbf{a}, \text{ если } \nu = 0;$$

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(a_1 \underbrace{\beta_1 a_1 \ldots \beta_1 a_1}_{s\nu}), \ldots, \eta(a_k \underbrace{\beta_k a_k \ldots \beta_k a_k}_{s\nu})),$$

если $\nu > 0$;

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\beta_1^{-1} \underbrace{a_1^{-1}\beta_1^{-1} \ldots a_1^{-1}\beta_1^{-1}}_{-s\nu-1}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\beta_k^{-1} \underbrace{a_k^{-1}\beta_k^{-1} \ldots a_k^{-1}\beta_k^{-1}}_{-s\nu-1})),$$

если $\nu < 0$.

***Теорема* 4.2** *Пусть $< A, \eta >$ – n-арная группа ($n \geq 3$), порядок подстановки σ из $\mathbf{S}_k$ делит $n - 1$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – произвольный элемент l-арной группы $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$, $\beta_j = a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{n-2}(j)}$, $j = 1, \ldots, k$,*

β_j^{-1} – любая обратная последовательность в $< A, \eta >$ для последовательности β_j, в частности

$$\beta_j^{-1} = \underbrace{a_{\sigma^{n-2}(j)} \ldots a_{\sigma^{n-2}(j)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma^{n-2}(j)}} \ldots \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma(j)}}_{n-3} \overline{a_{\sigma(j)}}.$$

Тогда:

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = \mathbf{a}, \text{ если } \nu = 0;$$

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(a_1 \underbrace{\beta_1 a_1 \ldots \beta_1 a_1}_{s\nu}), \ldots, \eta(a_k \underbrace{\beta_k a_k \ldots \beta_k a_k}_{s\nu})),$$

если $\nu > 0$;

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\beta_1^{-1} \underbrace{\overline{a_1} \underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3} \beta_1^{-1} \ldots \overline{a_1} \underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3} \beta_1^{-1}}_{-s\nu-1}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\beta_k^{-1} \underbrace{\overline{a_k} \underbrace{a_k \ldots a_k}_{n-3} \beta_k^{-1} \ldots \overline{a_k} \underbrace{a_k \ldots a_k}_{n-3} \beta_k^{-1}}_{-s\nu-1})),$$

если $\nu < 0$.

Если как и в теоремах 4.1 и 4.2 порядок d подстановки σ делит $n - 1$, то есть $n = rd + 1$ для некоторого натурального r, то d делит $l - 1$, так как из $l = s(n - 1) + 1$ следует $l = td + 1$, где $t = sr$. Поэтому, если в теоремах 3.1 и 3.2 в качестве подстановки σ взять подстановку порядка d, то можно сформулировать ещё две теоремы.

***Теорема* 4.3.** *Пусть $< A, \eta >$ – n-арная группа, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$ порядка d, $n = rd + 1$ для некоторого натурального r, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – произвольный элемент l-арной группы $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$,*

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)}, j = 1, \ldots, k,$$

a_j^{-1} и α_j^{-1} – любые обратные последовательности в $< A, \eta >$ для элемента a_j и последовательности α_j соответственно. Тогда:

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = \mathbf{a}, \text{ если } \nu = 0;$$

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(a_1 \underbrace{\alpha_1 a_1 \ldots \alpha_1 a_1}_{sr\nu}), \ldots, \eta(a_k \underbrace{\alpha_k a_k \ldots \alpha_k a_k}_{sr\nu})),$$

если $\nu > 0$;

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\alpha_1^{-1} \underbrace{a_1^{-1}\alpha_1^{-1} \ldots a_1^{-1}\alpha_1^{-1}}_{-sr\nu-1}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\alpha_k^{-1} \underbrace{a_k^{-1}\alpha_k^{-1} \ldots a_k^{-1}\alpha_k^{-1}}_{-sr\nu-1})),$$

если $\nu < 0$.

***Теорема* 4.4.** *Пусть $< A, \eta >$ – n-арная группа ($n \geq 3$), σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$ порядка d, $n = rd + 1$ для некоторого натурального r, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – произвольный элемент l-арной группы $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$,*

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{d-1}(j)}, j = 1, \ldots, k,$$

α_j^{-1} – последовательность (3.7) *или любая другая обратная последовательность в $< A, \eta >$ для последовательности α_j. Тогда*:

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = \mathbf{a}, \text{ если } \nu = 0;$$

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(a_1 \underbrace{\alpha_1 a_1 \ldots \alpha_1 a_1}_{sr\nu}), \ldots, \eta(a_k \underbrace{\alpha_k a_k \ldots \alpha_k a_k}_{sr\nu})),$$

если $\nu > 0$;

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\alpha_1^{-1} \underbrace{\overline{a_1} \underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3} \alpha_1^{-1} \ldots \overline{a_1} \underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3} \alpha_1^{-1}}_{-sr\nu-1}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\alpha_k^{-1} \underbrace{\overline{a_k} \underbrace{a_k \ldots a_k}_{n-3} \alpha_k^{-1} \ldots \overline{a_k} \underbrace{a_k \ldots a_k}_{n-3} \alpha_k^{-1}}_{-sr\nu-1})),$$

если $\nu < 0$.

Из теорем 4.1 и 4.2 при $\nu = -1$ вытекают соответствующие результаты о косых элементах из [7, теоремы 2.3 и 2.4].

***Замечание* 4.1.** Если в теореме 4.2 положить $r = 1$, $d = 2$, то $n = 3$. В этом случае из теоремы 4.2 при $\nu < 0$ вытекает следствие 3.4.

***Замечание* 4.2.** Можно показать, что теоремы 4.3 и 4.4 извлекаются соответственно из теорем 4.1 и 4.2 и наоборот. Так как последовательности β_j и α_j из теорем 4.1 и 4.3 связаны равенством

$$\beta_j = \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{r-1} \alpha_j.$$

то для $\nu > 0$ имеем

$$\eta(a_j \underbrace{\beta_j a_j \ldots \beta_j a_j}_{s\nu})) =$$

$$= \eta(a_j \underbrace{\underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{r-1} \alpha_j a_j \ldots \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{r-1} \alpha_j a_j}_{s\nu}) =$$

$$= \eta(a_j \underbrace{\underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{r} \ldots \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{r}}_{s\nu}) =$$

$$= \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{sr\nu}).$$

Аналогично для $\nu < 0$ доказывается равенство

$$\eta(\beta_j^{-1} \underbrace{a_j^{-1} \beta_j^{-1} \ldots a_j^{-1} \beta_j^{-1}}_{-s\nu-1})) =$$

$$= \eta(\alpha_j^{-1} \underbrace{a_j^{-1} \alpha_j^{-1} \ldots a_j^{-1} \alpha_j^{-1}}_{-sr\nu-1})).$$

Таким образом, теоремы 4.1 и 4.3 могут быть извлечены одна из другой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гальмак*, *А.М.* Степени элементов в *l*-арных группах специального вида. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 47–51.
2. *Post*, *E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
3. *Русаков*, *С.А.* Алгебраические *n*-арные системы / С.А. Русаков. – Мінск: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
4. *Гальмак*, *А.М.* *n*-Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.
5. *Гальмак*, *А.М.* *n*-Арные группы. Часть 2 / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2007. – 324 с.
6. *Щучкин*, *Н.А.* Введение в теорию *n*-групп / Н.А. Щучкин. – Волгоград: Принт, 2019. – 236 с.
7. *Гальмак*, *А.М.* О косых элементах в полиадических группах специального вида / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 2 (43). – С. 64–68.

Поступила в редакцию 15.08.2023.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_44
EDN: GKWXXU

О *p*-ДЛИНЕ КОНЕЧНОЙ ФАКТОРИЗУЕМОЙ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ ПОДГРУПП ИЗ СОМНОЖИТЕЛЕЙ

Е.В. Зубей, А.А. Трофимук

Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина

ON THE *p*-LENGTH OF A FINITE FACTORIZABLE GROUP WITH GIVEN PERMUTABILITY CONDITIONS FOR SUBGROUPS OF FACTORS

E.V. Zubei, A.A. Trofimuk

Brest State A.S. Pushkin University

Аннотация. Подгруппа A группы G называется *tcc-подгруппой* в G, если существует подгруппа T группы G такая, что $G=AT$ и для любого $X \le A$ и для любого $Y \le T$ существует элемент $u \in \langle X, Y\rangle$ такой, что $XY^u \le G$. Предположим, что $G = AB$ – произведение двух p-разрешимых tcc-подгрупп A и B. Получена зависимость оценки p-длины группы G от ступени нильпотентности и числа образующих подгрупп A_p и B_p, где A_p и B_p – силовские p-подгруппы подгрупп A и B соответственно.

Ключевые слова: *конечная группа*, *p-разрешимая группа*, *tcc-подгруппа*, *p-длина*.

Для цитирования: *Зубей*, *Е.В.* О p-длине конечной факторизуемой группы с заданными условиями перестановочности подгрупп из сомножителей / Е.В. Зубей, А.А. Трофимук // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 44–47. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_44. – EDN: GKWXXU

Abstract. A subgroup A of a group G is called *tcc*-subgroup in G, if there is a subgroup T of G such that $G=AT$ and for any $X \le A$ and for any $Y \le T$ there exists an element $u \in \langle X, Y\rangle$ such that $XY^u \le G$. Suppose that $G = AB$ is a product of two p-soluble *tcc*-subgroups A and B. We give a bound of the p-length of G from the nilpotent class and the number of generators of A_p and B_p, where A_p and B_p are the Sylow subgroups of A and B respectively.

Keywords: *finite group*, *p-solvable group*, *tcc-subgroup*, *p-length*.

For citation: *Zubei*, *E.V.* On the p-length of a finite factorizable group with given permutability conditions for subgroups of factors / E.V. Zubei, A.A. Trofimuk // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 3 (56). – P. 44–47. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_44 (in Russian). – EDN: GKWXXU

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используемые обозначения и определения стандартны, их можно найти в [1].

Пусть G – p-разрешимая группа. Это означает, что она обладает нормальным рядом

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_n = G,$$

в котором каждая фактор-группа G_{i+1} / G_i является либо p-группой, либо p'-группой. Поэтому для такой группы можно определить (p', p)-ряд:

$$1 = P_0 \subseteq N_0 \subseteq P_1 \subseteq N_1 \subseteq P_2 \subseteq \ldots \subseteq P_l \subseteq N_l = G,$$

где $N_i / P_i = O_{p'}(G / P_i)$ – наибольшая нормальная p'-подгруппа в G / P_i, а $P_{i+1} / N_i = O_p(G / N_i)$ – наибольшая нормальная p-подгруппа в G / N_i. Наименьшее натуральное число l такое, что $N_l = G$, называют *p-длиной* группы G и обозначают через $l_p(G)$.

Большое значение для теории p-разрешимых групп имеет статья Ф. Холла и Г. Хигмена [2], в которой введено понятие p-длины p-разрешимой группы и установлена связь между ее оценками и некоторыми характеристиками ее силовской p-подгруппы. В частности, доказано, что *p-длина p-разрешимой группы G не превышает ступени нильпотентности* $c(G_p)$ *и числа образующих* $g(G_p)$ *силовской p-подгруппы* G_p *группы G*.

Эта тематика нашла свое развитие в работах А.Х. Журтова, В.Д. Мазурова и С.А. Сыскина [3], [4]. Одним из результатов этих работ является следующее утверждение: *если G – p-разрешимая группа с силовской p-подгруппой*, *изоморфной силовской подгруппе группы Шмидта*, *то p-длина не превышает* 1. Отсюда, в частности, следует, что *разрешимая группа*, *представимая в виде произведения двух подгрупп Шмидта взаимно простых порядков*, *имеет p-длину*, *не* *превышающую* 1 *для всех* $p \in \pi(G)$ [5]. В.Н. Княгина и В.С. Монахов [6] рассмотрели более общую ситуацию: *если A и B – подгруппы Шмидта конечной p-разрешимой группы G и* $G = AB$, *то p-длина группы G не превышает* 2.

В последние десятилетия большой популярностью пользуется направление исследований, связанное с изучением строения групп $G = AB$, у которых некоторые системы подгрупп из сомножителей *A* и *B* перестановочны, см. [7]. Напомним, что подгруппы *A* и *B* группы *G* называются *перестановочными*, если $AB = BA$. Заметим, что равенство $AB = BA$ равносильно тому, что $AB \le G$. Среди множества результатов этой тематики отдельное место занимают работы, которые посвящены нахождению зависимости между числовыми инвариантами (нильпотентая длина, *p*-длина и др.) факторизуемых групп и числовыми инвариантами их сомножителей, связанных между собой заданными условиями перестановочности, см. [8]–[10].

В работе [11] было введено следующее

Определение. Подгруппа *A* группы *G* называется *tcc*-подгруппой в *G*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) в *G* существует подгруппа *T* такая, что $G = AT$;

2) для любого $X \le A$ и для любого $Y \le T$ существует элемент $u \in \langle X, Y\rangle$ такой, что $XY^u \le G$.

Подгруппу *T* в дальнейшем будем называть *tcc-добавлением* к подгруппе *A* в группе *G*.

В работе [12] были исследованы производная и нильпотентная длины группы $G = AB$, где *A* и *B* – разрешимые *tcc*-подгруппы группы *G*. Кроме того, для *p*-разрешимых подгрупп *A* и *B* доказано, что *G p*-разрешима и

$$l_p(G) \le 1 + \max\{l_p(A), l_p(B)\}. \qquad (0.1)$$

Так как $l_p(G) \le c(G_p)$ и $l_p(G) \le g(G_p)$, то из (0.1) следует, что

$$l_p(G) \le 1 + \max\{c(A_p), c(B_p)\}$$

и

$$l_p(G) \le 1 + \max\{g(A_p), g(B_p)\}. \qquad (0.2)$$

Оценки (0.2) уточнены в следующей теореме.

Теорема. *Пусть* $G = AB$ *– произведение tcc-подгрупп A и B. Если A и B p-разрешимы, то G p-разрешима и справедливы следующие утверждения*:

(1) $l_p(G) \le \max\{c(A_p), c(B_p)\}$;

(2) $l_p(G) \le \max\{g(A_p), g(B_p)\}$.

1 Вспомогательные результаты

Запись $H \le G$ означает, что *H* – подгруппа группы *G*. Подгруппы Фраттини и Фиттинга группы *G* обозначаются через $\Phi(G)$ и $F(G)$. Запись $G = A \rtimes B$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой *A*.

Группа *G* называется примитивной, если в *G* существует максимальная подгруппа *M* с единичным ядром $M_G = \cap_{x \in G} M^x = 1$. В этом случае подгруппа *M* называется примитиватором группы *G*.

Произведение $G = AB$ называется *tcc-перестановочным* [13], если для любых $X \le A$ и $Y \le B$ существует элемент $u \in \langle X, Y\rangle$ такой, что $XY^u \le G$.

***Лемма* 1.1** [теорема 1, предложения 1-2]. *Пусть* $G = AB$ *– tcc-перестановочное произведение подгрупп A и B. Предположим, что N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) $\{A \cap N, B \cap N\} \subseteq \{1, N\}$;

(2) *если* $N \le A \cap B$ *или* $A \cap N = B \cap N = 1$, *то* $|N| = p$, *где p – простое число*.

Напомним, что $F_p(G)$ – это наибольшая нормальная *p*-нильпотентная подгруппа группы *G*, равная произведению всех *p*-нильпотентных нормальных подгрупп группы *G*.

Если в группе G имеется нормальная подгруппа $G_{p'}$ такая, что $G = G_{p'} \rtimes G_p$, то группа G называется *p*-нильпотентной.

***Лемма* 1.2** [14, II.3.2]. *Пусть G – p-разрешимая группа такая, что* $l_p(G/K) \le k$ *для всех неединичных нормальных подгрупп K группы G, но* $l_p(G) > k$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) $\Phi(G) = 1$;

(2) $F_p(G)$ *– элементарная абелева p-группа*;

(3) $F_p(G)$ *– единственная минимальная подгруппа группы G и* $G = F_p(G) \rtimes M$, *где M – примитиватор группы G*;

(4) $C_G(F_p(G)) = F_p(G)$.

***Лемма* 1.3** [12, лемма 2.6]. *Пусть A – собственная неединичная tcc-подгруппа примитивной группы G и Y – tcc-добавление к A в G. Предположим, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Если* $N \cap A = 1$ *и* $N \le Y$, *то A – циклическая группа порядка, делящего* $p - 1$.

***Лемма* 1.4.** *Пусть p – p-группа и N – нормальная в p подгруппа. Тогда*

$$g(P/N) \le g(P) - 1, \qquad (1.1)$$

если $N \not\le \Phi(P)$.

Доказательство. Из [1, теорема 3.22] следует, что $\Phi(P)N/N \le \Phi(P/N)$. Так как *P* – *p*-подгруппа, то $P/\Phi(P)$ – элементарная абелева *p*-подгруппа и

$$(P/N)/(\Phi(P)N/N) \simeq$$
$$\simeq P/\Phi(P)N \simeq (P/\Phi(P))/(\Phi(P)N/\Phi(P)) -$$

элементарная абелева *p*-подгруппа.

Тогда из [1, теорема 3.25 (3)] следует, что $\Phi(P/N) \le \Phi(P)N/N$. Поэтому

$$\Phi(P/N) = \Phi(P)N/N.$$

Пусть $g(P) = m$ и $g(P/N) = k$. Тогда по [1, теорема 3.25 (4)] $|P/\Phi(P)| = p^m$ и

$$p^k = |(P/N)/\Phi(P/N)| =$$

$$= |P/\Phi(P)N| = \frac{|P/\Phi(P)|}{|\Phi(P)N/\Phi(P)|} =$$

$$= \frac{p^m}{|\Phi(P)N/\Phi(P)|} = \frac{p^m}{|N/\Phi(P)\cap N|} < p^m,$$

так как $N \nleq \Phi(P)$ и $N \cap \Phi(P) < N$.

Таким образом, $k < m$. Поэтому $g(P/N) < g(P)$ или $g(P/N) \le g(P) - 1$. □

2 Доказательство теоремы

По [12, теорема] группа G p-разрешима.

Пусть

$$\max\{c(A_p), c(B_p)\} = k_c \text{ и } \max\{g(A_p), g(B_p)\} = k_g.$$

Покажем, что $l_p(G) \le k_c$ и $l_p(G) \le k_g$. Предположим, что теорема неверна и G – контрпример наименьшего порядка. Пусть N – неединичная минимальная нормальная подгруппа. Тогда AN/N и BN/N p-разрешимы и являются *tcc*-подгруппами в G/N. Тогда по выбору группы G

$$l_p(G/N) \le \max\{c(A_pN/N), c(B_pN/N)\}$$

и $l_p(G/N) \le \max\{g(A_pN/N), g(B_pN/N)\}$.

Так как

$$c(A_pN/N) \le c(A_p) \text{ и } c(B_pN/N) \le c(B_p),$$

а также

$$g(A_pN/N) \le g(A_p) \text{ и } g(B_pN/N) \le g(B_p),$$

то $l_p(G/N) \le k_c$ и $l_p(G/N) \le k_g$.

Очевидно, что $O_{p'}(G) = 1$. По лемме 1.2 $\Phi(G) = 1$ и группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N такую, что $N = C_G(N) = F(G) = O_p(G)$ и $G = N \rtimes M$ – примитивная группа с примитиватором M.

Пусть Y – *tcc*-добавление к подгруппе A в группе G. По лемме 1.1 либо $|N| = p$, либо $N \le A$ и $N \cap Y = 1$, либо $N \cap A = 1$ и $N \le Y$. Анналогично и для подгруппы B и ее *tcc*-добавления X в G: либо $|N| = p$, либо $N \le B$ и $N \cap X = 1$, либо $N \cap B = 1$ и $N \le X$.

Если $|N| = p$, то G/N изоморфна циклической группе автоморфизмов группы N. Следовательно, G сверхразрешима и $l_p(G) \le 1$. Значит $l_p(G) \le k_c$ и $l_p(G) \le k_g$, противоречие.

Если $N \cap A = 1 = N \cap B$, то по лемме 1.3 A и B циклические. Тогда G сверхразрешима, противоречие.

Пусть $N \le A \cap B$. Поэтому $N \le A_p$. Тогда

$$Z(A_p) = C_{A_p}(N) \le C_A(N) =$$

$$= C_G(N) \cap A = N \cap B = N.$$

Следовательно, $c(A_p/N) = c(A_p) - 1$. Аналогично $c(B_p/N) = c(B_p) - 1$.

Таким образом,

$$l_p(G/N) \le \max\{c(A_p/N), c(B_p/N)\} \le$$

$$\le \max\{c(A_p), c(B_p)\} - 1.$$

Тогда

$$l_p(G) \le l_p(G/N) + l_p(N) \le$$

$$\le \max\{c(A_p), c(B_p)\} - 1 + 1 = \max\{c(A_p), c(B_p)\}.$$

Поскольку $G = N \rtimes M$ и $N \le A_p$, то $A_p = N \rtimes (A_p \cap M)$ и $N \nleq \Phi(A_p)$. По лемме 1.4 $g(A_p/N) \le g(A_p) - 1$. Аналогично

$$g(B_p/N) \le g(B_p) - 1.$$

Таким образом,

$$l_p(G/N) \le \max\{g(A_p/N), g(B_p/N)\} \le$$

$$\le \max\{g(A_p), g(B_p)\} - 1.$$

Тогда $l_p(G) \le \max\{g(A_p), g(B_p)\}$.

Пусть $N \cap Y = N \cap B = 1$ и $N \le A \cap X$. По лемме 1.3 подгруппа B циклическая, порядка делящего $p-1$. Поэтому $B_p = 1$ и $c(B_p) = 0$ $(g(B_p) = 0)$.

Таким образом,

$$l_p(G/N) \le \max\{c(A_p/N), c(B_pN/N)\} \le$$

$$\le \max\{c(A_p) - 1, 0\} \le$$

$$\le c(A_p) - 1 \le \max\{c(A_p), c(B_p)\} - 1.$$

Аналогично

$$l_p(G/N) \le \max\{g(A_p/N), g(B_pN/N)\} \le$$

$$\le \max\{g(A_p) - 1, 0\} \le$$

$$\le g(A_p) - 1 \le \max\{g(A_p), g(B_p)\} - 1.$$

Тогда $l_p(G) \le k_c$ и $l_p(G) \le k_g$, противоречие.

Аналогичные рассуждения справедливы для случая $N \cap X = N \cap A = 1$ и $N \le B \cap Y$. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монахов*, *В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

2. *Hall*, *P.* The p-lengh of a p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem / P. Hall, G. Higman // Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 3, № 7. – P. 1–42.

3. *Мазуров*, *В.Д.* О конечных группах с специальными силовскими 2-подгруппами / В.Д. Мазуров, С.А. Сыскин // Математические заметки. – 1973. – Т. 14, № 2. – С. 217–222.

4. *Журтов*, *А.Х.* О группах Шмидта / А.Х. Журтов, С.А. Сыскин // Сибирский математический журнал. – 1987. – Т. 28, № 2. – С. 74–78.

5. *Монахов*, *В.С.* Произведение конечных групп, близких к нильпотентным / В.С. Монахов. В сб.: Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1975. – С. 70–100.

6. *Княгина*, *В.Н.* О *p*-длине произведения двух групп Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Сибирский математический журнал. – 2004. – Т. 45, № 2. – С. 329–333.

7. *Монахов*, *В.С.* Произведение двух групп Шмидта / В.С. Монахов // ДАН БССР. – 1975. – Т. 19, № 1. – С. 8–11.

8. *Cossey*, *J.* On the *p*-length of the mutually permutable product of two *p*-soluble groups / J. Cossey, Y. Li // Arch. Math. – 2018. – Vol. 110. – P. 533–537.

9. *Jabara*, *E.* The Fitting length of a product of mutually permutable finite groups / E. Jabara // Acta Math. Hungar. – 2019. – Vol. 159. – P. 206–210.

10. *Murashka*, *V.I.* On the lengths of mutually permutable products of finite groups / V.I. Murashka, A.F. Vasil'ev // Acta Math. Hungar. – 2023. – DOI: https://doi.org/10.1007/s10474-023-01346-2.

11. *Trofimuk*, *A.A.* On the supersolubility of a group with some tcc-subgroups / A.A. Trofimuk // J. Algebra Appl. – 2021. – Vol. 20, № 2. – P. 2150020-1–2150020-18.

12. *Trofimuk*, *A.A.* On numerical invariants of a finite group factorized by tcc-subgroups / A.A. Trofimuk // Quaest. Math. – 2023. – DOI: https://doi.org/ 10.2989/16073606.2023.2176796.

13. *Arroyo-Jorda*, *M.* Conditional permutability of subgroups and certain classes of groups / M. Arroyo-Jorda, P. Arroyo-Jorda // J. Algebra. – 2017. – Vol. 476. – P. 395–414.

14. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York, 1967. – 796 p.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (*ГПНИ* «*Конвергенция-2025*», № *гос. рег.* 20211467).

Поступила в редакцию 21.07.2023.

Информация об авторах

Зубей Екатерина Владимировна – к.ф.-м.н., доцент
Трофимук Александр Александрович – д.ф.-м.н., доцент

МАТЕМАТИКА

УДК 519.872
DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_48
EDN: JQKVQE

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ G-СЕТИ С МНОГОЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ С КОНТРОЛЬНЫМИ И КАРАНТИННЫМИ ОЧЕРЕДЯМИ

Д.Я. Копать

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF G-NETWORK WITH MANY-LINES SYSTEMS WITH CONTROL AND QUARANTINE QUEUES

D.Y. Kopats

Yanka Kupala State University of Grodno

Аннотация. Предложен метод нахождения средних характеристик и их дисперсий для G-сети с системами с контрольными и карантинными очередями в случае большого, но ограниченного числа функционирующих в ней заявок. Данная сеть является математической моделью информационно-телекоммуникационных систем и сетей, состоящей из многопроцессорных устройств с установленным на каждом из них антивирусным программным обеспечением в случае большой нагрузки сети.

Ключевые слова: G-*сеть*, *контрольная и карантинные очереди*, *асимптотический анализ*, *антивирусное программное обеспечение.*

Для цитирования: *Копать*, *Д.Я.* Асимптотический анализ G-сети с многолинейными системами с контрольными и карантинными очередями / Д.Я. Копать // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 48–55. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_48. – EDN: JQKVQE

Abstract. A method for finding average characteristics and their variances for a G-network in systems with control and quarantine queues in case of a big but limited number of customers in network is proposed. This network is a mathematical model of informational systems and networks, which consists of multiprocessor devices with antivirus software installed on each of them in case of heavy load in the network.

Keywords: *G-network*, *control and quarantine queues*, *asymptotic analysis*, *antivirus software.*

For citation: *Kopats*, *D.Y.* Asymptotic analysis of G-network with many-lines systems with control and quarantine queues / D.Y. Kopats // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 3 (56). – P. 48–55. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_48 (in Russian). – EDN: JQKVQE

Введение

Несмотря на тот факт, что модель функционирования информационно-телекоммуникационной сети (ИТС) с возможностью попадания на каждое устройство которой компьютерных вирусов исследовалась в работе [1], первая стохастическая модель функционирования ИТС, с установленным антивирусным программным обеспечением (АПО), рассматривалась в работе [2] спустя около 20 лет после опубликования работы [1]. В работах [3]–[4] состоялось объединение этих сетей с возможностью нахождения заявки в карантине в каждой системе сети массового обслуживания (СМО) без выделения для этих целей отдельной СМО. В работе [3] данная сеть исследовалась методом многомерных производящих функций, а в работе [4] методом последовательных приближений, совмещенного с методом рядов. В работе [5] данная модель обобщилась на случай, когда вирус, уничтожив один пользовательский запрос, мог переходить в другие системы до тех пор, пока не был обнаружен АПО. Но в данных работах не учитывался тот факт, что большинство современных устройств являются многопроцессорными и в них может параллельно происходить обработка нескольких пользовательских запросов. В данной работе будет происходить обобщение моделей, предложенных в работе [5] на случай наличия в ИТС многопроцессорных устройств.

1 Описание сети

Рассмотрим G-сеть [1], состоящую их n СМО, в каждой из которых функционируют $m_i+2,\ i=\overline{1,n}$ линий обслуживания (ЛО). Поступающие в каждую СМО потоки положительных (неопасный запрос) и отрицательных заявок (вредоносный запрос) являются простейшими с интенсивностями соответственно $\lambda_{0i}^{+},\lambda_{0i}^{-},\ i=\overline{1,n}.$ Для предотвращения заражения ИТС поступившая в i-ю СМО заявка первоначально становится в контрольную очередь, которая физически представляет собой место RAM, отведенное для антивирусного ПО, где проверяется на стандартность, т. е. на наличие вируса в течении времени, имеющего показательное распределение с параметром $\mu_i^{(v)}, i=\overline{1,n}.$ Количество ЛО в контрольной очереди равно единице. Пусть вероятность успешной проверки на стандартность положительной заявки равна p_i^+ и тогда она поступает в очередь на обслуживание в этой СМО, а с противоположной вероятностью $1-p_i^+$ будет признана отрицательной и отправится в карантин на лечение. Вероятность успешного опознания отрицательной заявки в контрольной очереди СМО S_i равна p_i^-. Тогда отрицательная заявка и переходит в карантинную очередь на лечение, а с вероятностью $1-p_i^-$ может она ошибочно быть признана положительной из-за технических сложностей, таких как не обновления антивирусных БД. Тогда она поступит в очередь на обработку, где она немедленно уничтожает 1 положительную заявку в непустой системе, после чего с вероятностью n_{i0} покидает сеть или с вероятностью n_{ij} переходит в контрольную очередь j-й СМО, $\sum_{j=0}^{n} n_{ij}=1, i=\overline{1,n}.$ В пустой системе отрицательная заявка не производит никакого воздействия. Пусть длительности обслуживания положительных заявок в СМО S_i одной ЛО имеют экспоненциальную ф.р. с параметром μ_i, $i=\overline{1,\ n}$, по завершении которого с вероятностью p_{ij}^+ переходит в контрольную очередь СМО S_j как положительная заявка, с вероятностью p_{ij}^- – как отрицательная, зараженный во время обслуживания резидентными вирусами и с вероятностью $p_{i0}=1-\sum_{j=1}^{n}\left(p_{ij}^+ + p_{ij}^-\right)$ покидает сеть, $i,j=\overline{1,\ n}.$ В карантине, которая в ИТС является папкой файлов, помещенных на карантин, заявки, признанные нестандартными, становятся в очередь на лечение. Предположим, что длительность лечения заявки в i-м узле имеет экспоненциальную ф.р. с параметром $\mu_i^{(c)}, i=\overline{1,\ n}$. Если лечение успешное, то заявка с вероятностью $p_i^{(s)}, i=\overline{1,n}$ переходит в очередь на обработку в i-й СМО, в противном случае с вероятностью $1-p_i^{(s)}$ зараженная заявка оказывается вирусом и удаляется, т. е. покидает сеть. В этом описании карантина мы предполагаем, что вирус не может обмануть его при его лечении.

Состояние сети описывается вектором:

$$\left(\vec{k},\vec{l},t\right)=\left(\vec{k}_1,\vec{k}_2,...,\vec{k}_n,\vec{l}_1,\vec{l}_2,...,\vec{l}_n;t\right), \qquad (1.1)$$

где $\left(\vec{k}_i,\vec{l}_i,t\right)=\left(k_i^{(p)};k_i^{(s)};l_i^{(n)};l_i^{(c)};t\right)$, $k_i^{(p)};l_i^{(n)}$ – соответственно число положительных и отрицательных заявок, находящихся в контрольной очереди; $k_i^{(s)}$ – количество положительных заявок на обслуживании; $l_i^{(c)}$ – количество заявок на карантине. Пусть заявки выбираются на проверку на стандартность из очереди случайным образом. Тогда вероятность того, что будет проверена на стандартность положительная заявка в режиме насыщения равна

$$q_i^+=\left(\lambda_{0i}^+ +\sum_{j=1}^{n}\mu_j p_{ji}^+\right)\left(\lambda_{0i}^+ +\lambda_{0i}^- +\sum_{j=1}^{n}\mu_j\left(p_{ji}^+ + p_{ji}^-\right)\right)^{-1}.$$

В [6] данный коэффициент представлен в стационарном режиме.

Пусть вектор $\tilde{I}_\alpha$ – вектор размерности $2n$, состоящий из нулей, за исключением компоненты с номером α, которая равна 1. Возможны следующие переходы нашего случайного марковского процесса в состояние $\left(\vec{k},\vec{l},t+\Delta t\right)$ за время Δt:

1) из состояния $\left(\vec{k}-\tilde{I}_{2i-1},\vec{l},t\right)$ с вероятностью $\lambda_{0i}^+ u\left(k_i^{(p)}\right)\Delta t+o(\Delta t)$ в контрольную очередь i-й СМО извне за время Δt поступит положительная заявка $i=\overline{1,n}$;

2) из состояния $\left(\vec{k},\vec{l}-\tilde{I}_{2i-1},t\right)$ в контрольную очередь i-й СМО за время Δt извне поступит отрицательная заявка с вероятностью $\lambda_{0i}^- u\left(l_i^{(n)}\right)\Delta t+o(\Delta t)$, $i=\overline{1,n}$;

3) из состояния $\left(\vec{k}+\tilde{I}_{2i-1}-\tilde{I}_{2i},\vec{l},t\right)$ с вероятностью $\mu_i^{(v)}q_i^+p_i^+u\left(k_i^{(s)}\right)\Delta t+o(\Delta t)$, $i=\overline{1,n}$ положительная заявка после проверки на стандартность в i-й СМО будет признана таковой и перейдет в очередь для обслуживания;

4) из состояния $\left(\vec{k}+\tilde{I}_{2i-1},\vec{l}-\tilde{I}_{2i},\vec{l},t\right)$, $i=\overline{1,n}$ с вероятностью $\mu_i^{(v)}q_i^+\left(1-p_i^+\right)u\left(l_i^{(c)}\right)\Delta t+o(\Delta t)$ положительная заявка после проверки на стандартность в i-й СМО будет признана отрицательной и перейдет в карантин для лечения;

5) из состояния $\left(\vec{k},\vec{l}+\tilde{I}_{2i-1}-\tilde{I}_{2i},t\right)$ с вероятностью $\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)p_i^- u\left(l_i^{(c)}\right)\Delta t+o(\Delta t), i=\overline{1,n}$ отрицательная заявка после проверки на стандартность в i-й СМО будет признана отрицательной и перейдет в карантин для лечения;

6) из состояния $\left(\vec{k}+\tilde{I}_{2i},\vec{l}+\tilde{I}_{2i-1},t\right)$ с вероятностью $\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)u\left(k_i^{(s)}\right)n_{i0}\Delta t+o(\Delta t)$, $i=\overline{1,n}$ отрицательная заявка после проверки на стандартность в i-той СМО будет признана положительной, перейдет в очередь на обслуживание и удалит 1 положительную заявку, уйдя из сети;

7) из состояния $\left(\vec{k},\vec{l}+\tilde{I}_{2i-1},t\right)$, $i=\overline{1,n}$ $\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)\left(1-u\left(k_i^{(s)}\right)\right)n_{i0}\Delta t+o\left(\Delta t\right)$ отрицательная заявка после проверки на стандартность в i-ой СМО будет признана положительной, перейдет в очередь на обслуживание, но застанет систему пустой и уйдет из сети;

8) из состояния $\left(\vec{k}+\tilde{I}_{2i},\vec{l}+\tilde{I}_{2i-1}-\tilde{I}_{2j-1},t\right)$ с вероятностью

$$\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)u\left(k_i^{(s)}\right)n_{ij}u\left(l_j^{(n)}\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right),$$

$i=\overline{1,n}$ отрицательная заявка после проверки на стандартность в i-ой СМО будет признана положительной, перейдет в очередь на обслуживание и удалит 1 положительную заявку, перейдя в контрольную очередь j-й СМО;

9) из состояния $\left(\vec{k},\vec{l}+\tilde{I}_{2i-1}-\tilde{I}_{2j-1},t\right)$, $i=\overline{1,n}$ $\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)\left(1-u\left(k_i^{(s)}\right)\right)n_{ij}u\left(l_j^{(n)}\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right)$ отрицательная заявка после проверки на стандартность в i-ой СМО будет признана положительной, перейдет в очередь на обслуживание, но застанет систему пустой и перейдет в контрольную очередь j-ой СМО;

10) из состояния $\left(\vec{k}-\tilde{I}_{2i},\vec{l}+I_{2i},t\right)$ с вероятностью $\mu_i^{(c)}p_i^{(s)}u\left(k_i^{(s)}\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right)$, $i=\overline{1,n}$ карантинному узлу i-ой СМО удастся вылечить зараженную заявку и она отправляется в очередь на обслуживание в i-ую СМО;

11) из состояния $\left(\vec{k},\vec{l}+\tilde{I}_{2i},t\right)$ с вероятностью $\mu_i^{(c)}\left(1-p_i^{(s)}\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right)$, $i=\overline{1,n}$ карантинному узлу не удастся вылечить зараженную заявку и он покидает сеть, не принеся ей вреда;

12) из состояния $\left(\vec{k}+\tilde{I}_{2i}-\tilde{I}_{2j-1},\vec{l},t\right)$ с вероятностью $\mu_i\min\left(k_i+1,m_i\right)p_{ij}^+u\left(k_j^{(p)}\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right)$, $i,j=\overline{1,n}$ время обслуживания заявки в i-й СМО закончилось и он направится в контрольную очередь j-ой СМО снова как положительная заявка;

13) из состояния $\left(\vec{k}+\tilde{I}_{2i},\vec{l}-\tilde{I}_{2j-1},t\right)$ с вероятностью $\mu_i\min\left(k_i+1,m_i\right)p_{ij}^-u\left(l_j^{(n)}\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right)$, $i,j=\overline{1,n}$ время обслуживания заявки в i-ой СМО закончилось и она направляется в контрольную очередь j-ой СМО как отрицательная заявка;

14) из состояния $\left(\vec{k}+\tilde{I}_{2i},\vec{l},t\right)$ с вероятностью $\mu_i\min\left(k_i+1,m_i\right)p_{i0}\Delta t+o\left(\Delta t\right)$, $i=\overline{1,n}$; время обслуживания файла в i-ой СМО закончилось, она и уходит из сети;

15) из состояния $\left(\vec{k},\vec{l},t\right)$ с вероятностью

$$1-\sum_{i=1}^{n}\Bigg[\lambda_{0i}^+u\left(k_i^{(p)}\right)+\lambda_{0i}^-u\left(l_i^{(n)}\right)+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)n_{i0}+$$
$$+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)\sum_{j=1}^{n}n_{ij}u\left(l_j^{(n)}\right)+\mu_i^{(v)}q_i^+p_i^+u\left(k_i^{(s)}\right)+$$
$$+\mu_i^{(v)}\left(q_i^+\left(1-p_i^+\right)+\left(1-q_i^+\right)p_i^-\right)u\left(l_i^{(c)}\right)+$$
$$+\mu_i^{(c)}\left(p_i^{(s)}u\left(k_i^{(s)}\right)+\left(1-p_i^{(s)}\right)\right)+\mu_i\min\left(k_i+1,m_i\right)\times$$
$$\times\left(1-\sum_{j=1}^{n}p_{ij}^+\left(1-u\left(k_j^{(p)}\right)\right)+p_{ij}^-\left(1-u\left(l_j^{(n)}\right)\right)\right)\Bigg]\Delta t+o\left(\Delta t\right).$$

С помощью формулы полной вероятности, в которой, перейдя к пределу при $\Delta t\to 0$, можно показать, что нестационарные вероятности состояний удовлетворяют следующей системе РДУ:

$$\frac{dP\left(\vec{k},\vec{l},t\right)}{dt}=-\sum_{i=1}^{n}\Bigg\{\lambda_{0i}^+u\left(k_i^{(p)}\right)+\lambda_{0i}^-u\left(l_i^{(n)}\right)+$$
$$+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)n_{i0}+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)\times$$
$$\times\sum_{j=1}^{n}n_{ij}u\left(l_j^{(n)}\right)+\mu_i^{(v)}\left(q_i^+\left(1-p_i^+\right)+\left(1-q_i^+\right)p_i^-\right)u\left(l_i^{(c)}\right)+$$
$$+\mu_i^{(c)}\left(p_i^{(s)}u\left(k_i^{(s)}\right)+\left(1-p_i^{(s)}\right)\right)+\mu_i^{(v)}q_i^+p_i^+u\left(k_i^{(s)}\right)+$$
$$+\mu_i\left(1-\sum_{j=1}^{n}p_{ij}^+\left(1-u\left(k_j^{(p)}\right)\right)+p_{ij}^-\left(1-u\left(l_j^{(n)}\right)\right)\right)\Bigg\}P\left(\vec{k},\vec{l},t\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\Bigg[\lambda_{0i}^+u\left(k_i^{(p)}\right)P\left(\vec{k}-\tilde{I}_{2i-1};\vec{l};t\right)+$$
$$+\lambda_{0i}^-u\left(l_i^{(n)}\right)P\left(\vec{k};\vec{l}-\tilde{I}_{2i-1};t\right)+$$
$$+\left(\mu_i^{(v)}q_i^+p_i^+u\left(k_i^{(s)}\right)\right)P\left(\vec{k}+\tilde{I}_{2i-1}-\tilde{I}_{2i};\vec{l};t\right)+$$
$$+\mu_i^{(c)}p_i^{(s)}u\left(k_i^{(s)}\right)P\left(\vec{k}-\tilde{I}_{2i};\vec{l}+\tilde{I}_{2i};t\right)+$$
$$+\mu_i^{(v)}q_i^+\left(1-p_i^+\right)u\left(l_i^{(c)}\right)P\left(\vec{k}+\tilde{I}_{2i-1};\ \vec{l}-\tilde{I}_{2i};t\right)+$$
$$+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)p_i^-u\left(l_i^{(c)}\right)P\left(\vec{k};\vec{l}+\tilde{I}_{2i-1}-\tilde{I}_{2i};t\right)+$$
$$+\left(\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)n_{i0}u\left(k_i^{(s)}\right)P\left(\vec{k}+\tilde{I}_{2i};\vec{l}+\tilde{I}_{2i-1};t\right)\right)+$$
$$+\left(\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)n_{i0}\left(1-u\left(k_i^{(s)}\right)\right)P\left(\vec{k};\vec{l}+\tilde{I}_{2i-1};t\right)\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\Bigg\{\left(\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)u\left(k_i^{(s)}\right)n_{ij}\times\right.$$
$$\left.\times P\left(\vec{k}+\tilde{I}_{2i};\vec{l}+\tilde{I}_{2i-1}-\tilde{I}_{2j-1};t\right)\right)+$$
$$+\left(\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)\left(1-u\left(k_i^{(s)}\right)\right)n_{ij}\times\right.$$
$$\left.\times P\left(\vec{k};\vec{l}+\tilde{I}_{2i-1}-\tilde{I}_{2j-1};t\right)\right)\Bigg\}+$$
$$+\left(\mu_i^{(c)}\left(1-p_i^{(s)}\right)\right)P\left(\vec{k};\vec{l}+\tilde{I}_{2i};t\right)\Bigg]+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i\min\left(k_i+1,m_i\right)\Big[p_{i0}P\left(\vec{k}+\tilde{I}_{2i};\vec{l};t\right)+$$

$$
\begin{aligned}
&+p_{ij}^{+}u\left(k_j^{(p)}\right)P\left(\vec{k}+\tilde{I}_{2i}-\tilde{I}_{2j-1};\vec{l};t\right)+\\
&+p_{ij}^{-}u\left(l_j^{(n)}\right)P\left(\vec{k}+\tilde{I}_{2i};\vec{l}-\tilde{I}_{2j-1};t\right)\Big].
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

2 Уравнение Колмогорова – Фоккера – Планка

Решение РДУ Колмогорова (1.2) будем искать в случае, когда число линий обслуживания, общее количество положительных заявок в контрольной, карантинных и обслуживающих очередях не превосходит величины $K>>1$. Пусть $x_i^{(p)}=k_i^{(p)}K^{-1}$, $x_i^{(s)}=k_i^{(s)}K^{-1}$, $z_i^{(n)}=l_i^{(n)}K^{-1}$, $z_i^{(c)}=l_i^{(c)}K^{-1}$. Введём в рассмотрение вектор относительных переменных $\left(\vec{x},\vec{z}^-,t\right)=\left(x_1^{(p)},x_1^{(s)},...,x_n^{(p)},x_n^{(s)},z_1^{(n)},z_1^{(c)},...,\mathrm{z}_n^{(n)},\mathrm{z}_n^{(c)},t\right)$. В этом случае возможные значения этого вектора при фиксированном t принадлежат ограниченному замкнутому множеству

$$
G=\Bigg\{\left(\vec{x},\vec{z}^-\right):\left(x_1^{(p)},x_1^{(s)},...,x_n^{(p)},x_n^{(s)},z_1^{(n)},z_1^{(c)},...,\mathrm{z}_n^{(n)},\mathrm{z}_n^{(c)}\right),\ x_i^{(p)},x_i^{(s)},\mathrm{z}_i^{(n)},z_i^{(c)}\geq 0,\ i=\overline{1,n},\ \sum_{i=1}^{n}x_i^{(p)}\leq 1,\sum_{i=1}^{n}x_i^{(s)}\leq 1,\sum_{i=1}^{n}z_i^{(n)}\leq 1,\sum_{i=1}^{n}z_i^{(c)}\leq 1\Bigg\},
$$

в котором они располагаются в узлах $4n$–мерной решетки на расстоянии $\varepsilon=K^{-1}$ друг от друга. При увеличении K «плотность заполнения» множества G возможными компонентами вектора $(x,\ \vec{z}^-,t)$ увеличивается, и становится возможным считать, что он имеет непрерывное распределение с плотностью вероятностей $p\left(\vec{x},\vec{z}^-,t\right)$, причем $K^{4n}P\left(\vec{k},\vec{l},t\right)\xrightarrow[K\to\infty]{}p\left(\vec{x},\vec{z}^-,t\right)$. Поэтому можно воспользоваться аппроксимацией функции $P\left(\vec{k},\vec{l},t\right)$, применив соотношение $K^{4n}P\left(\vec{k},\vec{l},t\right)=K^{4n}P\left(\vec{y}K,\vec{x}K,\vec{z}^-K,t\right)=p\left(\vec{y},\vec{x},\vec{z}^-,t\right)$, $\left(\vec{x},\vec{z},t\right)\in G$. Обозначим $\tilde{e}_i=\varepsilon\tilde{I}_i,\ i=\overline{1,2n}$. Полагая, что $p\left(\vec{y},\vec{x},\vec{z}^-,t\right)$ является однородными функциями первого порядка и дважды непрерывно дифференцируемы по своим аргументам, исходя из (1.2) получаем уравнения для плотности распределения вероятностей состояний

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial p\left(\vec{x},\vec{z}^-,t\right)}{\partial t}=&-\sum_{i=1}^{n}\Big\{\lambda_{0i}^{+}u\left(x_i^{(p)}\right)+\lambda_{0i}^{-}u\left(l_i^{(n)}\right)+\\
&+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)\left(1-p_i^{-}\right)n_{i0}+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)\left(1-p_i^{-}\right)\times\\
&\times\sum_{j=1}^{n}n_{ij}u\left(z_j^{(n)}\right)+\mu_i^{(v)}\left(q_i^{+}\left(1-p_i^{+}\right)+\left(1-q_i^{+}\right)p_i^{-}\right)u\left(l_i^{(c)}\right)+\\
&+\mu_i^{(c)}\left(p_i^{(s)}u\left(x_i^{(s)}\right)+\left(1-p_i^{(s)}\right)\right)+\\
&+\mu_i^{(v)}q_i^{+}p_i^{+}u\left(x_i^{(s)}\right)+\\
&+\mu_i\left(1-\sum_{j=1}^{n}p_{ij}^{+}\left(1-u\left(x_j^{(p)}\right)\right)+p_{ij}^{-}\left(1-u\left(z_j^{(n)}\right)\right)\right)\Big\}\times\\
&\times p\left(\vec{x},\vec{z}^-,t\right)+\\
&+\sum_{i=1}^{n}\Big[\lambda_{0i}^{+}u\left(x_i^{(p)}\right)p\left(\vec{x}-\tilde{e}_{2i-1};\ \vec{z}^-\ ;t\right)+\\
&+\lambda_{0i}^{-}u\left(z_i^{(n)}\right)p\left(\vec{x};\vec{z}^--\tilde{e}_{2i-1}\ ;t\right)+\\
&+\left(\mu_i^{(v)}q_i^{+}p_i^{+}u\left(x_i^{(s)}\right)\right)p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i-1}-\tilde{e}_{2i};\ \vec{z}^-;t\right)+\\
&+\mu_i^{(c)}p_i^{(s)}u\left(x_i^{(s)}\right)p\left(\vec{x}-\tilde{e}_{2i};\ \vec{z}^-+\tilde{e}_{2i};t\right)+\\
&+\mu_i^{(v)}q_i^{+}\left(1-p_i^{+}\right)u\left(z_i^{(c)}\right)p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i-1};\ \vec{z}^--\tilde{e}_{2i};t\right)+\\
&+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)p_i^{-}u\left(z_i^{(c)}\right)p\left(\vec{x};\ \vec{z}^-+\tilde{e}_{2i-1}-\tilde{e}_{2i};t\right)+\\
&+\left(\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)\left(1-p_i^{-}\right)n_{i0}u\left(x_i^{(s)}\right)p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i};\vec{z}^-+\tilde{e}_{2i-1};t\right)\right)+\\
&+\left(\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)\left(1-p_i^{-}\right)n_{i0}\left(1-u\left(x_i^{(s)}\right)\right)p\left(\vec{x};\vec{z}^-+\tilde{e}_{2i-1};t\right)\right)+\\
&+\sum_{j=1}^{n}\Big\{\left(\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)\left(1-p_i^{-}\right)u\left(x_i^{(s)}\right)n_{ij}\times\right.\\
&\left.\times p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i};\ \vec{z}^-+\tilde{e}_{2i-1}-\tilde{e}_{2j-1};t\right)\right)+\\
&+\left(\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)\left(1-p_i^{-}\right)\left(1-u\left(x_i^{(s)}\right)\right)n_{ij}\times\right.\\
&\left.\times p\left(\vec{x};\ \vec{z}^-+\tilde{e}_{2i-1}-\tilde{e}_{2j-1};t\right)\right)\Big\}+\\
&+\left(\mu_i^{(c)}\left(1-p_i^{(s)}\right)\right)p\left(\vec{x};\ \vec{z}^-+\tilde{e}_{2i};t\right)\Big]+\\
&+K\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i\min\left(x_i,l_i\right)\Big[p_{i0}p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i};\ \vec{z}^-;t\right)+\\
&+p_{ij}^{+}u\left(x_j^{(p)}\right)p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i}-\tilde{e}_{2j-1};\ \vec{z}^-;t\right)+\\
&+p_{ij}^{-}p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i};\ \vec{z}^--\tilde{e}_{2j-1};t\right)\Big].
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Полагая, что $p\left(\vec{x},\vec{z}^-,t\right)$ дифференцируема по t и дважды кусочно-непрерывно дифференцируема по $x_i,\ z_i,\ i=\overline{1,4n}$, разложим функции

$$
\begin{gathered}
p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i}-\tilde{e}_{2j-1};\vec{z}^-;t\right),\\
p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i};\ \vec{z}^--\tilde{e}_{2j-1};t\right),\ p\left(\vec{x};\ \vec{z}^-+\tilde{e}_{2i};t\right),\\
p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i};\ \vec{z}^-;t\right),\ p\left(\vec{x};\ \vec{z}^-+\tilde{e}_{2i-1}-\tilde{e}_{2j-1};t\right),\\
p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i};\ \vec{z}^-+\tilde{e}_{2i-1}-\tilde{e}_{2j-1};t\right),\\
p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i};\ \vec{z}^-+\tilde{e}_{2i-1};t\right),\ p\left(\vec{x};\ \vec{z}^-+\tilde{e}_{2i-1};t\right),\\
p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i-1}-\tilde{e}_{2i};\ \vec{z}^-;t\right),\ p\left(\vec{x}-\tilde{e}_{2i};\ \vec{z}^-+\tilde{e}_{2i};t\right),\\
p\left(\vec{x};\ \vec{z}^-+\tilde{e}_{2i-1}-\tilde{e}_{2i};t\right),\ \ p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i-1};\ \vec{z}^--\tilde{e}_{2i};t\right)\\
p\left(\vec{x}-\tilde{e}_{2i-1};\ \vec{z}^-\ ;t\right),\quad p\left(\vec{x};\ \vec{z}^--\tilde{e}_{2i-1}\ ;t\right)
\end{gathered}
$$

в ряд Тейлора в окрестности точки $\left(\vec{x},\vec{z}^-,t\right)$, используя члены до второго порядка включительно:

$$p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i}-\tilde{e}_{2j-1};\vec{z}^-;t\right)=$$
$$=p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)+\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2j-1}}\right)+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}^2}-2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}\partial x_{2j-1}}+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2j-1}^2}\right)+$$
$$+o\left(\varepsilon^2\right),$$

$$p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i};\vec{z}^--\tilde{e}_{2j-1};t\right)=$$
$$=p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)+\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2j-1}}\right)+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}^2}-2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}\partial z_{2j-1}}+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2j-1}^2}\right)+$$
$$+o\left(\varepsilon^2\right),$$

$$p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i};\vec{z}^-;t\right)=p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)+$$
$$+\varepsilon\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}^2}+o\left(\varepsilon^2\right),$$

$$p\left(\vec{x};\vec{z}^-+\tilde{e}_{2i};t\right)=p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)+$$
$$+\varepsilon\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i}}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i}^2}+o\left(\varepsilon^2\right),$$

$$p\left(\vec{x};\vec{z}^-+\tilde{e}_{2i-1}-\tilde{e}_{2j-1};t\right)=p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)+$$
$$+\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2j-1}}\right)+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i}^2}-2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i}\partial z_{2j-1}}+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2j-1}^2}\right)+$$
$$+o\left(\varepsilon^2\right),$$

$$p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i};\vec{z}^-+\tilde{e}_{2i-1}-\tilde{e}_{2j-1};t\right)=$$
$$=\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}}+\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i-1}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2j-1}}\right)+$$
$$+p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i-1}^2}-2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i-1}\partial z_{2j-1}}+\right.$$
$$+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2j-1}^2}+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}^2}+$$
$$\left.+2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i-1}\partial x_{2i}}-2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}\partial z_{2j-1}}\right)+o\left(\varepsilon^2\right).$$

$$p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i};\vec{z}^-+\tilde{e}_{2i-1};t\right)=$$
$$=p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)+\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}}+\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i-1}}\right)+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i}^2}+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i-1}^2}+2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i}\partial x_{2i-1}}\right)+$$
$$+o\left(\varepsilon^2\right).$$

$$p\left(\vec{x};\vec{z}^-+\tilde{e}_{2i-1};t\right)=p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)+$$
$$+\varepsilon\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i-1}}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i-1}^2}.$$

$$p\left(\vec{x};\vec{z}^-+\tilde{e}_{2i-1}-\tilde{e}_{2i};t\right)=p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)+$$
$$+\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i-1}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i}}\right)+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i}^2}+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i-1}^2}-2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i}\partial z_{2i-1}}\right)+$$
$$+o\left(\varepsilon^2\right).$$

$$p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i-1};\vec{z}^--\tilde{e}_{2i};t\right)=p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)+$$
$$+\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i-1}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i}}\right)+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i}^2}+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i-1}^2}-2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i}\partial x_{2i-1}}\right)+$$
$$+o\left(\varepsilon^2\right).$$

$$p\left(\vec{x}+\tilde{e}_{2i-1}-\tilde{e}_{2i};\vec{z}^-;t\right)=p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)+$$
$$+\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i-1}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}}\right)+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}^2}+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i-1}^2}-2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}\partial x_{2i-1}}\right)+$$
$$+o\left(\varepsilon^2\right).$$

$$p\left(\vec{x}-\tilde{e}_{2i};\vec{z}^-+\tilde{e}_{2i};t\right)=p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)+$$
$$+\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}}\right)+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}^2}+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i}^2}-2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i}\partial z_{2i}}\right)+$$
$$+o\left(\varepsilon^2\right).$$

$$p\left(\vec{x}-\tilde{e}_{2i-1};\vec{z}^-;t\right)=p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)-$$
$$-\varepsilon\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i-1}}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial x_{2i-1}^2}+o\left(\varepsilon^2\right).$$

$$p\left(\vec{x};\vec{z}^--\tilde{e}_{2i-1};t\right)=p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)-$$
$$-\varepsilon\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i-1}}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^-;t\right)}{\partial z_{2i-1}^2}+o\left(\varepsilon^2\right).$$

Учитывая данные соотношения, уравнение (2.1) представимо в виде:

$$\frac{\partial p\left(\vec{x},\vec{z}^{-},t\right)}{\partial t}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_{0i}^{+}u\left(x_i^{(p)}\right)\left(-\varepsilon\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i-1}}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i-1}^2}\right)+\right.$$

$$+\lambda_{0i}^{-}u\left(l_i^{(n)}\right)\left(-\varepsilon\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i-1}}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i-1}^2}\right)+$$

$$+\mu_i^{(v)}q_i^{+}p_i^{+}u\left(x_i^{(s)}\right)\left(\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i-1}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}^2}+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i-1}^2}-2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}\partial x_{2i-1}}\right)\right)+$$

$$+\mu_i^{(c)}p_i^{(s)}u\left(x_i^{(s)}\right)\left(\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i}^2}+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}^2}-2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i}\partial x_{2i}}\right)\right)+$$

$$+\mu_i^{(v)}q_i^{+}\left(1-p_i^{+}\right)u\left(z_i^{(c)}\right)\left(\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i-1}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i}^2}+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i-1}^2}-2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i}\partial x_{2i-1}}\right)\right)+$$

$$+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)p_i^{-}u\left(z_i^{(c)}\right)\left(\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i-1}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i}^2}-2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i}\partial z_{2j-1}}+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2j-1}^2}\right)\right)+$$

$$+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)\left(1-p_i^{-}\right)n_{i0}u\left(x_i^{(s)}\right)\times$$

$$\times\left(\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}}+\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i-1}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}^2}+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i-1}^2}+2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}\partial z_{2i-1}}\right)\right)+$$

$$+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)\left(1-p_i^{-}\right)n_{i0}\left(1-u\left(x_i^{(s)}\right)\right)\times$$

$$\left.\times\left(\varepsilon\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i-1}}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i-1}^2}\right)\right]+$$

$$+\sum_{i,\,j=1}^{n}\left[\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)\left(1-p_i^{-}\right)u\left(x_i^{(s)}\right)n_{ij}\times\right.$$

$$\times\left(\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}}+\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i-1}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2j-1}}\right)+\right.$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i-1}^2}-2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i-1}\partial z_{2j-1}}+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2j-1}^2}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}^2}+2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i-1}\partial x_{2i}}-2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}\partial z_{2j-1}}\right)\right)+$$

$$+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)\left(1-p_i^{-}\right)\left(1-u\left(x_i^{(s)}\right)\right)n_{ij}\times$$

$$\times\left(\varepsilon\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i-1}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2j-1}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i-1}^2}-2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i-1}\partial x_{2j-1}}+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2j-1}^2}\right)\right)+$$

$$+\mu_i^{(c)}\left(1-p_i^{(s)}\right)\left(\varepsilon\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i-1}}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2i-1}^2}\right)+$$

$$+\mu_i\min\left(x_i,l_i\right)p_{i0}\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}^2}\right)+$$

$$+\mu_i\min\left(x_i,l_i\right)\times$$

$$\times\sum_{i,\,j=1}^{n}\left[p_{ij}^{+}u\left(x_j^{(p)}\right)\left(\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2j-1}}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}^2}-2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}\partial x_{2j-1}}+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2j-1}^2}\right)\right)+$$

$$+p_{ij}^{-}\left(\left(\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}}-\frac{\partial p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2j-1}}\right)+\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}^2}-2\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial x_{2i}\partial z_{2j-1}}+\frac{\partial^2 p\left(\vec{x};\vec{z}^{-};t\right)}{\partial z_{2j-1}^2}\right)\right)\right]\right].$$

***Теорема* 2.1.** *В асимптотическом случае при достаточно больших K плотность распределения $p\left(\vec{x},\vec{z}^{-},t\right)$ вектора относительных переменных $\left(\vec{x},\vec{z}^{-},t\right)=\left(x_1^{(p)},\dots,x_n^{(p)},\ x_1^{(s)},\dots,x_n^{(s)},\ z_1^{(n)},\dots,z_n^{(n)},z_1^{(c)},\dots,z_n^{(c)},t\right)$ удовлетворяет с точностью до $O\left(\varepsilon^2\right)$, где $\varepsilon=K^{-1}$, уравнению Колмогорова – Фоккера – Планка*

$$\frac{\partial p\left(\vec{x},\vec{z}^{-},t\right)}{\partial t}=-\sum_{i=0}^{2n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_i^{(1)}\left(\vec{x},\vec{z}^{-}\right)p\left(\vec{x},\vec{z}^{-},t\right)\right)-$$

$$-\sum_{i=0}^{2n}\frac{\partial}{\partial z_i}\left(A_i^{(2)}\left(\vec{x},\vec{z}^{-}\right)p\left(\vec{x},\vec{z}^{-},t\right)\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=0}^{2n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(B_{ij}^{(1)}\left(\vec{x},\vec{z}^{-}\right)p\left(\vec{x},\vec{z}^{-},t\right)\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n}\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial x_j}\left(B_{ij}^{(2)}\left(\vec{x},\vec{z}^{-}\right)p\left(\vec{x},\vec{z}^{-},t\right)\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i,j=0}^{2n}\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial z_j}\left(B_{ij}^{(3)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)p\left(\vec{x},\vec{z}^-,t\right)\right), \quad (2.2)$$

где

$$A_i^{(1)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)=\lambda_{0i}^+\varepsilon u\left(x_i^{(p)}\right)-$$
$$-\mu_i^{(v)}\varepsilon q_i^+p_i^+u\left(x_i^{(s)}\right)-\mu_i^{(v)}\varepsilon q_i^+\left(1-p_i^+\right)u\left(z_i^{(c)}\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\mu_j\min\left(x_j,l_j\right)p_{ji}^+u\left(x_i^{(p)}\right),\ i=2k-1,\ k=\overline{1,n},$$
$$A_i^{(1)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)=\mu_i^{(v)}\varepsilon q_i^+p_i^+u\left(x_i^{(s)}\right)+\mu_i^{(c)}\varepsilon p_i^{(s)}u\left(x_i^{(s)}\right)-$$
$$-\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)n_{i0}\varepsilon u\left(x_i^{(s)}\right)-\mu_i\min\left(x_i,l_i\right)p_{i0}-$$
$$-\sum_{j=1}^{n}\Big[\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)u\left(x_i^{(s)}\right)n_{ij}-$$
$$-\mu_i\min\left(x_i,l_i\right)\left(p_{ij}^+u\left(x_j^{(p)}\right)+p_{ij}^-\right)\Big],\ i=2k,\ k=\overline{1,n}.$$
$$A_i^{(2)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)=\lambda_{0i}^-\varepsilon u\left(l_i^{(n)}\right)-\mu_i^{(v)}\varepsilon\left(1-q_i^+\right)p_i^-u\left(z_i^{(c)}\right)-$$
$$-\mu_i^{(v)}\varepsilon\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)n_{i0}u\left(x_i^{(s)}\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\Big[-\mu_i^{(v)}\varepsilon\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)u\left(x_i^{(s)}\right)n_{ij}+$$
$$+\mu_j^{(v)}\varepsilon\left(1-q_j^+\right)\left(1-p_j^-\right)n_{ji}+\mu_j\min\left(x_j,l_j\right)p_{ji}^-\Big],$$
$$i=2k-1,\ k=\overline{1,n},$$
$$A_i^{(2)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)=\mu_i^{(v)}\varepsilon\left(q_i^+\left(1-p_i^+\right)u\left(z_i^{(c)}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(1-q_i^+\right)p_i^-u\left(z_i^{(c)}\right)\right)-\mu_i^{(c)}\varepsilon p_i^{(s)}u\left(x_i^{(s)}\right)-$$
$$-\left(\mu_i^{(c)}\varepsilon\left(1-p_i^{(s)}\right)\right),\ i=2k,\ k=\overline{1,n}.$$
$$B_{ij}^{(1)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)=-n^{-1}\left(\lambda_{0i}^+\varepsilon u\left(x_i^{(p)}\right)+\right.$$
$$\left.+\mu_i^{(v)}\varepsilon q_i^+p_i^+u\left(x_i^{(s)}\right)+\mu_i^{(v)}\varepsilon q_i^+\left(1-p_i^+\right)u\left(z_i^{(c)}\right)\right)-$$
$$-\mu_j\min\left(x_j,l_j\right)p_{ji}^+u\left(x_i^{(p)}\right),\ i=j=2k-1,$$
$$k=\overline{1,n},\ B_{ij}^{(l)}\left(\vec{y},\vec{x},\vec{z}\right)=0,\ i\neq j,\ l=\overline{1,3}.$$
$$B_{ij}^{(1)}\left(\vec{x},\vec{z}\right)=$$
$$=n^{-1}\left(-\mu_i^{(v)}\varepsilon q_i^+p_i^+u\left(x_i^{(s)}\right)-\mu_i^{(c)}\varepsilon p_i^{(s)}u\left(x_i^{(s)}\right)+\right.$$
$$+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)u\left(x_i^{(s)}\right)n_{ij}+$$
$$+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)n_{i0}\varepsilon u\left(x_i^{(s)}\right)+\mu_i\min\left(x_i,l_i\right)p_{i0}+$$
$$+\mu_i\min\left(x_i,l_i\right)\left(p_{ij}^+u\left(x_j^{(p)}\right)+p_{ij}^-\right),\ i=j=2k,\ k=\overline{1,n}.$$
$$B_{ij}^{(1)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)=-n^{-1}\mu_i^{(v)}q_i^+p_i^+u\left(x_i^{(s)}\right)-\mu_i\min\left(x_i,l_i\right)p_{ij}^+,$$
$$i=2k,\ j=2l+1,\ k,l=\overline{1,n},$$
$$B_{ii}^{(2)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)=n^{-1}\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)\left(1-u\left(x_i^{(s)}\right)\right)n_{ii},$$
$$i,j=2k-1,\ k=\overline{1,n}.$$
$$B_{ij}^{(2)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)=n^{-1}\mu_i^{(v)}q_i^+\left(1-p_i^+\right)u\left(z_i^{(c)}\right),$$
$$i=2k,\ j=2l-1,\ k,l=\overline{1,n}.$$
$$B_{ij}^{(2)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)=\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)u\left(x_i^{(s)}\right)n_{ij}+$$
$$+\mu_i\min\left(x_i,l_i\right)p_{ij}^++n^{-1}\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)n_{i0}u\left(x_i^{(s)}\right),$$
$$i=2k-1,\ j=2l,\ k,l=\overline{1,n}.$$
$$B_{ij}^{(2)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)=n^{-1}\mu_i^{(c)}p_i^{(s)}u\left(x_i^{(s)}\right),$$
$$i=2k,\ j=2l,\ k,l=\overline{1,n}.$$
$$B_{ij}^{(3)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)=$$
$$=n^{-1}\left(-\lambda_{0i}^-\varepsilon u\left(l_i^{(n)}\right)+\mu_i^{(v)}\varepsilon\left(1-q_i^+\right)p_i^-u\left(z_i^{(c)}\right)+\right.$$
$$\left.+\mu_i^{(v)}\varepsilon\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)n_{i0}u\left(x_i^{(s)}\right)\right)+$$
$$+\mu_i^{(v)}\varepsilon\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)u\left(x_i^{(s)}\right)n_{ij}-$$
$$-\mu_j^{(v)}\varepsilon\left(1-q_j^+\right)\left(1-p_j^-\right)n_{ji}-\mu_j\min\left(x_j,l_j\right)p_{ji}^-,$$
$$i=2k-1,\ k=\overline{1,n},$$
$$B_{ij}^{(3)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)=n^{-1}\left(\mu_i^{(v)}\varepsilon\left(q_i^+\left(1-p_i^+\right)u\left(z_i^{(c)}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(1-q_i^+\right)p_i^-u\left(z_i^{(c)}\right)\right)-\mu_i^{(c)}\varepsilon p_i^{(s)}u\left(x_i^{(s)}\right)\right),$$
$$B_{ij}^{(3)}\left(\vec{x},\vec{z}^-\right)=-n^{-1}\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)p_i^-u\left(z_i^{(c)}\right),$$
$$i=2k,\ j=2l-1,\ k,l=\overline{1,n}. \quad (2.3)$$

Пусть

$$N_i^{(p)}(t)=M\left\{k_i^{(p)}(t)\right\},\ L_i^{(c)}(t)=M\left\{l_i^{(c)}(t)\right\},$$
$$N_i^{(s)}(t)=M\left\{k_i^{(s)}(t)\right\},\quad L_i^{(n)}(t)=M\left\{l_i^{(n)}(t)\right\}$$

и введем средние относительные характеристики

$$n_i^{(p)}(t)=N_i^{(p)}(t)K^{-1},\quad Z_i^{(c)}(t)=L_i^{(c)}(t)K^{-1},$$
$$n_i^{(s)}(t)=N_i^{(s)}(t)K^{-1},\quad Z_i^{(n)}(t)=L_i^{(n)}(t)K^{-1}.$$

Составим вектора из данных характеристик

$$\vec{n}(t)=\left(n_1^{(p)}(t),n_1^{(s)}(t),\ldots,n_n^{(p)}(t),n_n^{(s)}(t)\right),$$
$$\vec{Z}(t)=\left(z_1^{(n)}(t),z_1^{(c)}(t),\ldots,z_n^{(n)}(t),z_n^{(c)}(t)\right).$$

В [6] показано, что средние относительные числа положительных заявок в контрольной и обслуживающих очередях, а также средние относительные числа отрицательных заявок в контрольной и карантинной очередях находятся из дифференциальных уравнений

$$\frac{dn_i^{(p)}(t)}{dt}=A_i^{(1)}\left(\vec{n},\vec{Z}\right),\ i=2k-1,\ k=\overline{1,n};$$
$$\frac{dn_i^{(s)}(t)}{dt}=A_i^{(1)}\left(\vec{n},\vec{Z}\right),\ i=2k,\ k=\overline{1,n};$$
$$\frac{dZ_i^{(n)}(t)}{dt}=A_i^{(2)}\left(\vec{n},\vec{Z}\right),\ i=2k-1,\ k=\overline{1,n};$$
$$\frac{dZ_i^{(c)}(t)}{dt}=A_i^{(2)}\left(\vec{n},\vec{Z}\right),\ i=2k,\ k=\overline{1,n}. \quad (2.4)$$

При функционировании сети в режиме насыщения, т. е.

$$\forall t\ k_i^{(p)} > 0, k_i^{(s)} > 0,\ \ l_i^{(n)} > 0, l_i^{(c)} > 0,\ i = \overline{1, n}$$

решение системы (2.4) имеет вид:

$$N_i^{(p)}(t) = \left(\lambda_{0i}^{+} - \mu_i^{(v)} q_i^{+} + \sum_{j=1}^{n} \mu_j m_j p_{ji}^{+}\right) t + N_i^{(p)}(0);$$

$$N_i^{(s)}(t) = \left(\mu_i^{(v)} q_i^{+} p_i^{+} + \mu_i^{(c)} p_i^{(s)} - \right.$$

$$\left. - \mu_i^{(v)}\left(1 - q_i^{+}\right)\left(1 - p_i^{-}\right) - \mu_i m_i\right) t + N_i^{(s)}(0);$$

$$L_i^{(n)}(t) = \left(\lambda_{0i}^{-} - \mu_i^{(v)}\left(1 - q_i^{+}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n}\left[\mu_j^{(v)}\left(1 - q_j^{+}\right)\left(1 - p_j^{-}\right) n_{ji} + \mu_j\, \mathrm{m}_j\, p_{ji}^{-}\right]\right) t + L_i^{(n)}(0);$$

$$L_i^{(c)}(t) = \left(\mu_i^{(v)}\left(q_i^{+}\left(1 - p_i^{+}\right) + \left(1 - q_i^{+}\right) p_i^{-}\right) - \mu_i^{(c)}\right) t +$$

$$+ L_i^{(c)}(0).$$

В статье [7] показаны методы нахождения дисперсии числа заявок в данной сети.

Заключение

В статье выведено уравнение Колмогорова – Фоккера – Планка для G-сети с системами с контрольными и карантинными очередями в случае большого количества находящихся в системах сети запросов. Данная сеть является стохастической моделью компьютерной сети с установленным на каждом компьютере сети антивирусного программного обеспечения. С его помощью можно находить любые характеристики для данной сети.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gelenbe*, *E.* Product form queueing networks with negative and positive customers / E. Gelenbe // Journal of Applied Probability. – 1991. – Vol. 28. – P. 656–663.

2. *Летунович*, *Ю.Е.* Открытые марковские сети массового обслуживания с контрольными очередями и карантинным узлом / Ю.Е. Летунович, О.В. Якубович // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2017. – № 41. – С. 32–38.

3. *Kosarava*, *K.U.* Application of a queuing network with positive and negative arrivals for modeling a computer network with antivirus software / K.U. Kosarava, D. Y. Kopats // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление вычисление, связь (DCCN-2021): материалы XXIV Междунар. науч. конф., Москва, 20-24 сент. 2021 г. – Москва: ИПУ РАН, 2021. – С. 108–113.

4. *Kosarava*, *K.U.* Analysis of the Probabilistic and Cost Characteristics of the Queueing Network with a Control Queue and Quarantine in Systems and Negative Requests by Means of Successive Approximations / K.U. Kosarava, D.Y. Kopats // Communications in Computer and Information Science (CCIS). Vol. 1552: Distributed Computer and Communication Networks (DCCN 2021): International Conference, Moscow, September 20-24, 2021. – Moscow: Springer Nature Switzerland AG, 2022. – С. 259–271.

5. *Копать*, *Д.Я.* Нахождение ожидаемых доходов систем в G-сети с контрольной и карантинной очередями и перемещениями отрицательных заявок между системами сети / Д.Я. Копать // Информационно-коммуникационные технологии: достижения, проблемы, инновации (ИКТ-2022): сб. материалов II Междунар. науч.-практ. конф., Полоцк, 30-31 марта 2022 г. – Новополоцк: Полоцкий государственный университет им. Евфросинии Полоцкой, 2022. – С. 23–28.

6. Назаров, А.А. Теория массового обслуживания: учебное пособие / А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов; 2-е изд., испр. – Томск: Изд-во НТЛ, 2010. – 228 с.

7. *Русилко*, *Т.В.* Дифференциальные уравнения для моментов вектора состояния замкнутой по структуре сети массового обслуживания с нетерпеливыми заявками / Т.В. Русилко, Д.Я. Копать // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1. Естественные науки. – 2021. – Т. 36, № 2. – С. 20–30.

Поступила в редакцию 03.03.2023.

Информация об авторах

Копать Дмитрий Ярославович – к.ф.-м.н.

УДК 615.47:612.746.4
DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_56
EDN: MXDOUE

ПОРТАТИВНОЕ УСТРОЙСТВО ДЛЯ КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ТРЕМОРА

Т.С. Боброва, М.В. Давыдов

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, *Минск*

PORTABLE DEVICE FOR QUANTITATIVE TREMOR PARAMETERS

T.S. Babrova, M.V. Davydov

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, *Minsk*

Аннотация. Представлено разработанное портативное устройство для обнаружения тремора рук из нескольких акселерометрических датчиков, интегрированных на плате Arduino с микроконтроллером ATmega32u4. Также предложен вариант использования данного портативного устройства в составе аппаратно-программного комплекса для оценки параметров тремора при ранней диагностике и лечении заболеваний центральной нервной системы.

Ключевые слова: *тремор*, *диагностика тремора*, *акселерометрический датчик*, *портативное устройство*, *аппаратно-программный комплекс.*

Для цитирования: *Боброва*, *Т.С.* Портативное устройство для количественной оценки параметров тремора / Т.С. Боброва, М.В. Давыдов // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 56–59. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_56. – EDN: MXDOUE

Abstract. The paper presents a developed portable device for detecting hand tremors from several accelerometer sensors integrated on an Arduino board with an ATmega32u4 microcontroller. A variant of using this portable device as part of a hardware-software complex for assessing tremor parameters in the early diagnosis and treatment of diseases of the central nervous system is also proposed.

Keywords: *tremor*, *tremor diagnostics*, *accelerometer sensor*, *portable device*, *hardware and software complex.*

For citation: *Babrova*, *T.S.* Portable device for quantitative tremor parameters / T.S. Babrova, M.V. Davydov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 3 (56). – P. 56–59. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_56 (in Russian). – EDN: MXDOUE

Введение

Феномен глобального старения увеличил число людей с возрастными неврологическими расстройствами, включая болезнь Паркинсона и эссенцильный тремор. Патологический тремор, который считается одним из наиболее частых двигательных симптомов таких расстройств, может серьезно повлиять на независимость и качество жизни пациентов.

Для дифференциальной диагностики паталогического тремора, разработки передовых реабилитационных и вспомогательных технологий необходимы значительные по объему наборы данных, методы оценки количественных параметров тремора, обладающие достаточной точностью, обобщающие методы моделирования, которые позволят спрогнозировать спектрально-временные характеристики патологического тремора при различных неврологических заболеваниях и заболеваниях центральной нервной системы.

На сегодняшний день существуют различные технологии, которые позволяют количественно оценить тремор и поставить предположительный диагноз. Например, были произведены многократные попытки различить разные типы тремора с использованием умных часов. Также проводились эксперименты по оценке возможности использования смартфона для регистрации и оценки количественных параметров тремора. Обе упомянутые выше методики требуют более длительного времени тестирования и более дорогого оборудования по сравнению с используемым акселерометром MPU6050.

Для контроля двигательных симптомов и клинической оценки эффективности лекарств врачи и пациенты все чаще используют постоянно носимые портативные устройстве (миографы и акселерометры), которые для удобства пациента выполняются в виде колец, браслетов, умных часов и перчаток.

Следовательно, возникает потребность в создании безболезненного, доступного, быстрого, удобного и эффективного устройства, которое может определять частоты и амплитуды тремора на основе различных параметров полученного сигнала для лучшей диагностической оценки. Целью исследования является создание устройства диагностики тремора с использованием акселерометра, платы Arduino и пакета прикладных программ MATLAB для обработки и анализа полученных данных.

1 Теоретический анализ

Тремор (от лат. Tremor – дрожание) – дрожательный гиперкинез, часто встречающееся двигательное расстройство, представляющее собой ритмичные непроизвольные колебания какой-либо части тела. Наиболее часто дрожание отмечается при болезни Паркинсона, эссенциальном треморе (болезнь Минора), психогенном треморе и др.

Различают физиологический и паталогический тремор. Патологический тремор рук является частым моторным симптомом некоторых возрастных неврологических двигательных нарушений и описывается как непроизвольные и псевдоритмические движения, влияющие на координацию, точность и скорость предполагаемых движений. В отличие от физиологического тремора, который определяется низкоамплитудными вибрациями в спектральном диапазоне от 8 до 12 Гц, патологический тремор представляет собой движение с более высокой амплитудой, происходящее в более широком диапазоне частот 3–8 Гц и включает следующие виды тремора: тремор покоя (3–6 Гц), возникающий, когда конечность расслаблена и на что-нибудь опирается (обычно наблюдается при БП); тремор действия, возникающий во время произвольного сокращения мышц; интенционный тремор, возникающий при нарушении функции мозжечка (например, вследствие инсульта, травмы, или при рассеянном склерозе).

Тремор действия также имеет несколько видов: постуральный, кинетический и изометрический. Постуральный и кинетический тремор обычно наблюдается у пациентов с ЭТ. Постуральный тремор (5–8 Гц) наиболее максимален, когда конечность удерживается в фиксированном положении против действия силы тяжести (например, при вытянутых руках), кинетический тремор возникает в заключительной части произвольного движения небольшой амплитуды. Подвидом кинетического тремора является интенционный тремор (3–10 Гц), возникающий при целенаправленном движении, его амплитуда высокая, а частота низкая в течение всего движения, но после достижения цели тремор усиливается (например, при пальценосовой пробе). Изометрический тремор действия возникает во время сокращения мышц против жесткого неподвижного объекта, например, при захвате твердого объекта, который блокирует движение конечности и изменяет длину мышц [1].

Проблема анализа патологического тремора заключается в разнообразии его видов, субъективной окраске, а также отсутствии значительных объемов экспериментальных данных и общих методов анализа, которые могли бы в полной мере предоставить спектрально-временные характеристики сигнала движения конечности.

Стандартный неврологический осмотр позволяет лишь дать описательные характеристики тремора (дрожания): данные о его локализации (голова, рука или нога), степени выраженности (низкая, средняя или высокая), отношении к силе притяжения (покой или постуральный). Инструментальные методы позволяют оценить такие параметры тремора как частота и амплитуда, мощность и т. д.

Для инструментальной диагностики тремора используются следующие методы:

– электромиография (регистрируются электрические потенциалы, генерируемые мышечными волокнами в процессе сокращения);

– акселерометрия (измеряется ускорение движения конечностей);

– гироскопия (измеряются угловые скорости движения конечностей);

– видеорегистрация;

– тензометрия (регистрируется непосредственный тактильный контакт с тензометрическим датчиком) и другие [2].

Акселерометрический метод относится к кинематическим методам, основной чертой которых является непосредственная регистрация колебательных движений с помощью миниатюрных сенсоров (датчиков). Суть метода заключается в измерении ускорения (проекции ускорения) вдоль осей чувствительности x, y и z датчика. Тогда величина общего ускорения рассчитывается по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \tag{1.1}$$

где a_x, a_y, a_z – значения проекций ускорения по трем осям x, y, z соответственно.

Данный метод является простым в использовании, недорогим и информативным для диагностики паталогического тремора, а также создания систем диагностики на его основе. Однако недостатком акселерометрического метода является сложность выделения составляющей тремора из общего сигнала движения. Поэтому для более точной диагностики возможно комбинированное использование нескольких методов, например, электромиография и акселерометрия.

2 Разработка прототипа портативного устройства

Разработанный прототип портативного устройства для оценки параметров тремора состоит из стандартных акселерометрических датчиков, интегрированных на плате Arduino с микроконтроллером ATmega32u4, имеющим встроенную поддержку USB. В качестве акселерометрического датчика используется модуль GY-521, состоящий из 3-осевого гироскопа и 3-осевого акселерометра. Совместное использование акселерометра и гироскопа позволяет определить движение тела в трехмерном пространстве.

Принцип работы портативного устройства заключается в следующем. Портативное устройство на основе микроконтроллера получает данные с датчиков (значения проекций ускорения по трем осям a_x, a_y и a_z) и сохраняет их на карту памяти в виде текстового файла с расширением txt посредством подключенного к плате Arduino SD модуля. Для обработки данных в реальном времени портативное устройство подключается к персональному компьютеру с помощью кабеля USB. В качестве элемента питания используется аккумуляторная батарея.

Программное обеспечение для портативного устройства создано в Arduino IDE, которое с помощью несколько библиотек реализует алгоритмы для чтения и обработки данных с датчика.

Программное обеспечение, с помощью которого проводиться количественная оценка параметров сигнала тремора, реализовано при помощи пакета прикладных программ MATLAB. Предварительная обработка полученных данных включает фильтрацию, так как полезный сигнал является низкочастотным (чаще всего 3–12 Гц, в зависимости от вида тремора), также необходимо убрать шумы и наводки. Затем проводиться частотно-временной анализ на основании быстрого преобразования Фурье, в результате которого вычисляется амплитуда и частота, строиться амплитудный спектр сигнала.

На схеме (рисунок 2.1) представлен аппаратно-программный комплекс для исследования параметров тремора, который включает в себя разработанное портативное устройство, несколько акселерометрических датчиков, а также программный комплекс для обработки, анализа полученных данных с визуализацией результатов на базе персонального компьютера.

Наличие автономного режима работы у портативного устройства позволяет проводить мониторинг движения конечностей при ведении пациентом обычного образа жизни, что является важным для диагностики заболеваний центральной нервной системы на ранних стадиях, когда тремор слабо выражен или появляется время от времени.

Длительная регистрация помогает решить проблему получения типичных фрагментов (паттернов) анализируемого тремора. Такой режим позволит выявить и эссенциальный тремор, который появляется при движении конечностей. При этом могут фиксироваться: частота появления тремора (пропорция времени, в течение которого регистрируется ритмическая активность внутри определенного периода), средняя мощность и частота тремора в пределах конкретного временного интервала и т. д.

3 Методики исследования и полученные результаты

Для проведения экспериментальной апробации разработанного прототипа портативного устройства для оценки параметров тремора использовался стандартный протокол записи треморограмм [1]. Длительность записи каждой пробы составила 20 секунд. Данные с акселерометрических датчиков считывались с частотой дискретизации 62 Гц.

После записи треморограмм с помощью прототипа портативного устройства полученные данные были обработаны с помощью пакета прикладных программ MATLAB 2020 (вычислены амплитудно-частотные параметры тремора, а также построены спектрограммы и рассчитана спектральная мощность сигнала). Для преобразования временного сигнала в отдельные спектральные компоненты использовалось быстрое преобразование Фурье (БПФ).

Результаты проводимого анализа треморограмм представлены на рисунке 3.1.

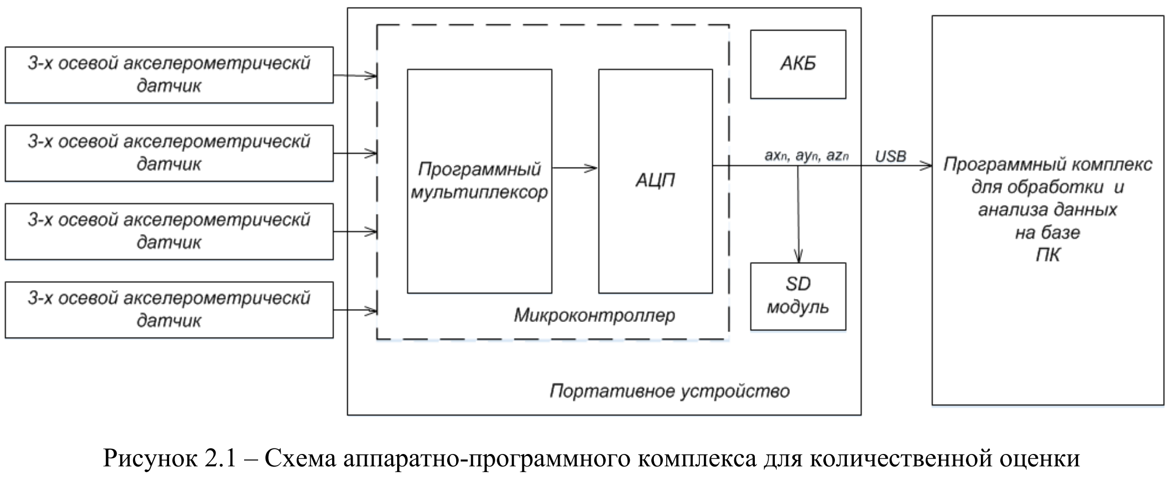


Рисунок 2.1 – Схема аппаратно-программного комплекса для количественной оценки параметров тремора

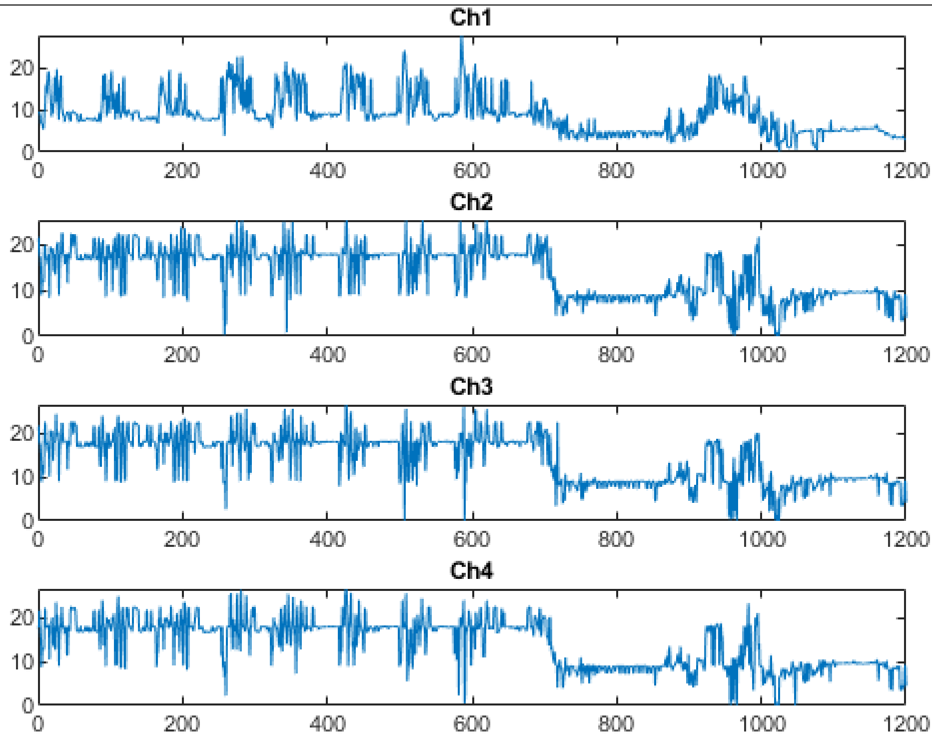


Рисунок 3.1 – Графики значения ускорения по каналам

Заключение

В ходе исследования проведен анализ существующих технических устройств и методов их использования для количественной оценки параметров тремора. Определено, что широкое распространение имеет акселерометрический метод, который в свою очередь является недорогим и достаточно информативным. Разработано портативное многоканальное устройство, реализующее данный метод. Проведенные эксперименты доказали возможность применения данного устройства для регистрации тремора, в том числе и в составе аппаратно-программного комплекса для его дальнейшей количественной оценки.

Некоторые результаты доложены на международных научно-практических конференциях [3], [4].

Перспективой развития данного аппаратно-программного комплекса является создание программного обеспечения, реализующего нейронную сеть для дифференциальной диагностики различных видов паталогического тремора при заболеваниях центральной нервной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Говорова*, *Т.Г.* Треморография в клинической практике / Т.Г. Говорова, Т.Е. Попова, А.А. Таппахов // Нервно-мышечные болезни. – 2019. – № 9 (4). – С. 61–72.

2. *Иванова-Смоленская*, *И.А.* Современные инструментальные методы регистрации тремора / И.А. Иванова-Смоленская, А.В. Карабанов, А.В. Червяков // Новые технологии. – 2011. – № 2. – С. 17–23.

3. *Боброва*, *Т.С.* Использование моделей реккурентных нейронных сетей для анализа патологического тремора / Т.С. Боброва, В.И. Ярмолик, Е.В. Протченко // Информационные технологии и системы 2022: материалы Международной научной конференции, Минск, 23 ноября 2022. – Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники. – Минск: БГУИР, 2022. – С. 131–132.

4. *Боброва*, *Т.С.* Устройство для оценки параметров патологического тремора при заболеваниях центральной нервной системы / Т.С. Боброва, М.В. Давыдов, С.А. Кореневский // Медэлектроника – 2022. Средства медицинской электроники и новые медицинские технологии: сборник научных статей XIII Международной научно-технической конференции, Минск, 8-9 декабря 2022 г. – Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники. – Минск: БГУИР, 2022. – С. 199–202.

Поступила в редакцию 14.07.2023.

Информация об авторах

Боброва Татьяна Сергеевна – ст. преподавватель
Давыдов Максим Викторович – к.т.н., доцент

УДК 621.382

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_60
EDN: PTZREH

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАЗМОХИМИЧЕСКОГО ТРАВЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО СЛОЯ НИТРИДА КРЕМНИЯ НА ПОДСЛОЕ ДИОКСИДА КРЕМНИЯ В ТЕХНОЛОГИЯХ МИКРОЭЛЕКТРОНИКИ

В.В. Емельянов[1], А.Н. Купо[2], В.А. Емельянов[3]

[1]*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники*, *Минск*
[2]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*
[3]*ОАО* «*Интеграл*», *Минск*

MODELING OF PLASMA-CHEMICAL ETCHING OF SILICON NITRIDE FUNCTIONAL LAYER ON SILICON DIOXIDE SUBLAYER IN MICROELECTRONICS TECHNOLOGIES

V.V. Emelyanov[1], A.N. Kupo[2], V.A. Emelyanov[3]

[1]*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics*, *Minsk*
[2]*Francisk Skorina Gomel State University*
[3]*JSC* "*INTEGRAL*", *Minsk*

Аннотация. Проведено математическое моделирование плазмохимического травления (ПХТ) пленки нитрида кремния в плазме газовой смеси, содержащей в качестве фторсодержащего газа гексафторид серы в количестве 70–91 об. % и кислород в количестве 30–9 об. %, при плотности мощности плазмы I = 0,2–0,4 Вт/см^2 и рабочем давлении P = 4–8 Па.

Ключевые слова: *плазмохимическое травление*, *нитрид кремния*, *математическое моделирование*.

Для цитирования: *Емельянов*, В.В. Моделирование плазмохимического травления функционального слоя нитрида кремния на подслое диоксида кремния в технологиях микроэлектроники / В.В. Емельянов, А.Н. Купо, В.А. Емельянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 60–63. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_60. – EDN: PTZREH

Abstract. Mathematical modeling of plasma-chemical etching of a silicon nitride film in the plasma of a gas mixture containing sulfur hexafluoride as a fluorine-containing gas in an amount of 70–91 vol. % and oxygen in the amount of 30–9 vol. %, at plasma power density I = 0,2–0,4 W/cm^2 and operating pressure P = 4–8 Pa.

Keywords: *plasma-chemical etching, silicon nitride, mathematical modeling.*

For citation: *Emelyanov*, *V.V.* Modeling of plasma-chemical etching of silicon nitride functional layer on silicon dioxide sublayer in microelectronics technologies / V.V. Emelyanov, A.N. Kupo, V.A. Emelyanov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 3 (56). – P. 60–63. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_60 (in Russian). – EDN: PTZREH

Введение

Плазмохимические покрытия нитрида кремния (Si_3N_4) в настоящее время применяются в технологии изготовления интегральных схем в качестве диэлектрических и маскирующих слоев. С целью реализации необходимой поверхностной микрогеометрии их травление осуществляют во фторсодержащей плазме за счет образования летучего тетрафторида кремния. Плазмохимические покрытия Si_3N_4 содержат значительное количество водорода, поэтому их скорость травления заметно выше, чем пленок, полученных путем химического осаждения. В [1] отмечается, что селективность плазмохимического травления покрытий нитрида кремния, полученных путем химического осаждения из паровой фазы, по отношению к кремнию составляет примерно 8:1 (т. е. сопоставима со скоростью травления SiO_2), а скорость травления плазменного Si_3N_4 примерно такая же, как и кремния.

В качестве подслоя (ПС) в таких технологиях, как правило, используют покрытия из диоксида кремния (SiO_2), толщина которых составляет 50–25 нм, при характерной толщине функционального слоя (ФС) Si_3N_4 100–200 нм. При этом неравномерность толщины пленки Si_3N_4 и скорости ее травления по площади пластины требует при формировании рисунка некоторого «перетрава». С учетом невысокой селективности травления по отношению к SiO_2 и малой толщины этого оксида операция формирования рисунка в пленке Si_3N_4 становится критической [2].

В данной работе проведено моделирования способа ПХТ, реализованного при изготовлении интегральных схем типа IZ33567B, который заключается в следующем: на пластинах 150

КДБ-12 (100) стандартными методами химической обработки, окисления, термообработки, ионного легирования, диффузии, фотолитографии, травления формировали области кармана. Затем на поверхности полученных структур формировали методом термического окисления поднитридный диоксид кремния толщиной 25 нм. Пленку нитрида кремния толщиной 200 нм осаждали из парогазовой фазы при температуре 780° С за счет реакции моносилана с аммиаком. Путём стандартной фотолитографии на поверхности полученных структур формировали маску фоторезиста, после чего структуры подвергали плазмохимическому травлению, режимы которого указаны в [3]. Травление осуществляли на установке ПХТ GIR 260S компании Alcatel [3].

1 Оценка скорости ПХТ

В рамках кинетической модели для описания скорости V (м/с) ПХТ наиболее приемлемо аналитическое выражение вида [4,5]:

$$V = \frac{0,233 S_{\text{рас}} M \sqrt{\frac{kT}{m}}}{\rho N_A} N_{sum}, \qquad (1.1)$$

где M – молярная масса материала, подвергаемого ПХТ, кг/моль; ρ – плотность материала подложки, кг/м^3; N_A – число Авогадро, моль$^{-1}$; k – постоянная Больцмана, Дж/К; N_{sum} – концентрация химически активных частиц (ХАЧ), участвующих в химических реакциях, 1/м^3, m – масса ХАЧ, кг; T – термодинамическая температура; К; $S_{\text{рас}}$ – коэффициент распыления, атом/ион.

Принципиально важной величиной в выражении (1.1) является концентрация ХАЧ, участвующих в травлении. В представленной модели травлению подвергается нитрид кремния Si_3N_4, а источником ХАЧ является гексафторид серы SF_6 (элегаз – безуглеродный источник фтора в плазме), концентрацию которого непосредственно вблизи зоны травления поверхности Si_3N_4 обозначим через N.

ПХТ нитрида кремния (1.2) и оксида кремния (1.3) осуществляется за счет следующих химических механизмов [3]:

$$Si_3N_4 + SF_6 + O_2 \rightarrow SiF_4\uparrow + N_2\uparrow + SO_2\uparrow \qquad (1.2)$$

$$SiO_2 + SF_6 + O_2 \rightarrow SiF_4\uparrow + SO_2\uparrow \qquad (1.3)$$

Продукты реакции в обоих случаях летучи и откачиваются из реактора. Однако скорости реакций (1.2) и (1.3) в зависимости от условий эксперимента отличаются ориентировочно в 2,5–3 раза. Это связано как с тем, что энергия связи Si – N меньше энергии связи Si – O, так и с тем, что во втором случае реакция взаимодействия SiO_2 с радикалами фтора конкурирует с реакцией повторного восстановления образовавшихся связей Si – F в Si – O за счет взаимодействия с радикалами кислорода O_2^*, которые обладают большей массой по сравнению с радикалами F^* и большей энергией. В случае нитрида аналогичный процесс также имеет место, однако атом кремния в Si_3N_4 окружен четырьмя атомами азота, которые при бомбардировке радикалами O_2^* переходят в газовую фазу и препятствуют закреплению атома кремния в пленке [3].

Таким образом, результаты учёта селективности (относительной скорости) травления нитрида кремния по отношению к диоксиду кремния, в условиях представленного техпроцесса, исходя из результатов моделирования, могут указать на наличие дефектов (например, микротренчей) [1], [3] уже в готовых изделиях.

Скорость диссоциации dN/dt соединения SF_6, которое является источником ХАЧ, может быть определена из соотношения [6]:

$$\frac{dN}{dt} = 1,4 \cdot 10^{22} N_i \sigma_d \frac{p}{\sqrt{MT}} \exp\left(\frac{E}{kT}\right), \qquad (1.4)$$

где N_i – поток ионов на поверхность подложки, ион/(м^{2}с); σ_d – поперечное сечение диссоциации молекулы, м^2; E – энергия активации реакции адсорбции [7], Дж; $M_{\text{ХАЧ}}$ – молярная масса ХАЧ, кг/моль.

Величину N_i можно варьировать, исходя из значения плотности мощности (энергии) плазмы, величина σ_d – определяет эффективность ПХТ в определённых условиях, поэтому может быть определена из конкретного эксперимента, при этом составляет величину порядка 10^{-18} м^2 [6].

Решение дифференциального уравнения (1.4) при условиях: $N(0) = 0$ и $N(t) = \text{const}$ имеет вид:

$$N(t) = N_i \gamma \left(1 - \exp(-\gamma t)\right), \qquad (1.5)$$

где $\gamma = 1,4 \cdot 10^{22} \sigma_d \frac{p}{\sqrt{MT}} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$, t – время травления.

Однако непосредственно в процессе ПХТ примут участие не все из частиц N, так как часть из них может «отразится» от поверхности. Таким образом, количество ХАЧ, реализующих плазмохимическую реакцию с нитридом кремния при первом взаимодействии, можно описать равенством:

$$N(t) = N_i \gamma \left(1 - \exp(-\gamma t)\right) \alpha, \qquad (1.6)$$

где α – коэффициент «прилипания», а количество отразившихся ХАЧ N_1 в этом случае описываться выражением:

$$N_1(t) = N_i \gamma \left(1 - \exp(-\gamma t)\right)\left(1 - \alpha\right). \qquad (1.7)$$

При взаимодействии ХАЧ с поверхностью зоны травления, их часть, обладающая достаточной энергией, отражается и могжет снова оказаться в данной зоне, то есть способны вторично учувствовать в ПХТ. Этот процесс аналогичен образованию дополнительной концентрации частиц. Данные частицы могут существенным образом влиять на процесс ПХТ, поэтому необходимо их учитывать при расчете скорости травления в плазме SF_6.

Для относительно малых величин энергий радикалов, используемых в ПХТ, в большинстве практических случаев используется косинусоидальный закон отражения ХАЧ. В этом случае при заданных энергиях частиц плотность вероятности θ повторного попадания в рабочую зону травления можно описать выражением [5]:

$$\theta = \frac{\cos\beta\cos\delta}{r^2}, \qquad (1.8)$$

где r – расстояние между точками отражения и химического взаимодействия ХАЧ (характерный масштаб зоны травления), м; β – угол вылета ХАЧ из точки отражения; δ – угол падения ХАЧ в точку рабочей зоны. Расстояние r, выбирается исходя размеров и формы рабочей зоны, т. е. «окна» формируемого фоторезистивной маской (рисунок 1.1).

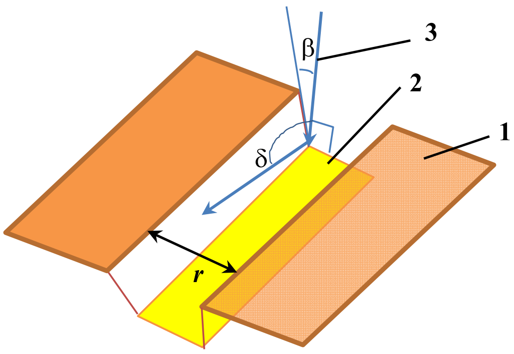


Рисунок 1.1 – Схема травления: 1 – фоторезист; 2 – зона травления Si_3N_4; 3 – траектория иона ХАЧ

В таком случае вычисление указанного количества ХАЧ сводится к расчёту по формуле:

$$N_2(t) = N_i\gamma\left(1-\exp(-\gamma t)\right)\left(1-\alpha\right)\theta. \qquad (1.9)$$

Таким образом, итоговое количество ХАЧ, пригодное для использования в формуле (1.1), является результатом сложения: $N_{sum} = N(t) + N_2(t)$.

Используя соотношения (1.1), (1.3)–(1.9), можно провести моделирования процесса ПХТ, протекающего по механизму (1.2), с учётом значений существенных параметров: $M_1(Si_3N_4) = 140{,}286\cdot10^{-3}$ кг/моль, $M_2(SiO_2) = 56{,}172\cdot10^{-3}$ кг/моль, $k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К, $T = 400$ К, $m = 24{,}3\cdot10^{-26}$ кг, $\rho_1(Si_3N_4) = 3\,170$ кг/м^3, $\rho_2(SiO_2) = 2\,650$ кг/м^3; $N_A = 6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$, $p = 5$ Па, $M_{ХАЧ}(F^*) = 18{,}99\cdot10^{-3}$ кг/моль.

Исходя из геометрии зоны травления (рисунок 1.1), параметр составляет величину $r \le 2$ мкм, при характерных значениях углов $\beta \approx 80$–$85°$ и $\delta \approx 30$–$60°$ – обусловленных степенью анизотропии травления в условиях техпроцесса, описанного в [3].

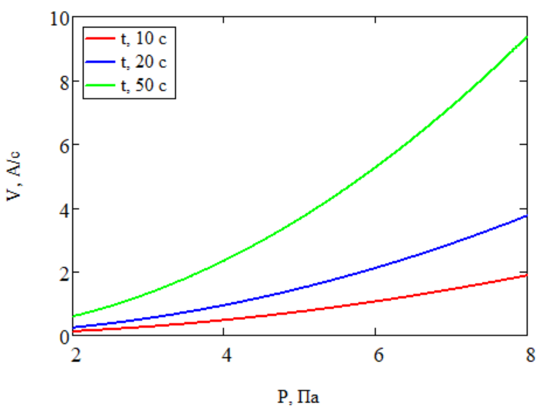
Для нахождения величин N и N_2 также необходимо оценить значение коэффициента α, который, согласно [6], при ионно-плазменном осаждении или травлении полагают равным 0,1. Учитывая, что энергия активации процесса адсорбции E ПХТ изменяется в пределах до 1эВ [7] и коэффициент распыления $S_{рас} = 0{,}25$ [5] можно рассчитать скорости травления Si_3N_4 и SiO_2 в зависимости от параметров эксперимента, а также оценить селективность травления функционального слоя (нитрид кремния) по отношению к подслою (диоксид кремния).

2 Результаты моделирования и корреляция с экспериментом

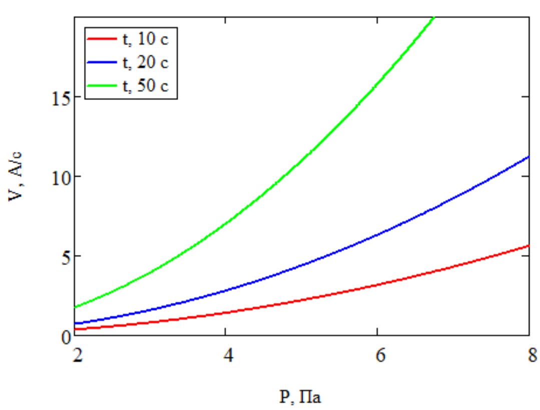
С использованием соотношений (1.1), (1.6) и (1.9) можно оценить зависимость скоростей травления (V, Å/с) функционального слоя (ФС) и подслоя (ПС) от давления смеси рабочих газов (P, Па) (рисунок 2.1) в различные моменты времени экспозиции.

Из представленных графиков видно, что с ростом давления смеси рабочих газов скорости ПХТ увеличиваются как для материала ФС, так и для материала ПС, что коррелирует с экспериментальными данными, полученными в том же диапазоне (см. например [3], [8]). Селективность травления (относительная скорость травления ФС по отношению к ПС) также увеличивается в пределах 1,2–2,3 отн. ед.

В исследуемой системе будем полагать, что концентрация ХАЧ (N_{sum}) пропорциональная плотности мощности плазмы (W), которую можно изменять при заданных значениях давления смеси рабочих газов. В работах [3], [8], [9] этот параметр варьируется в пределах 0,15–0,45 Вт/см^2, что может соответствовать увеличению концентрации ХАЧ частиц не более чем в 3 раза.

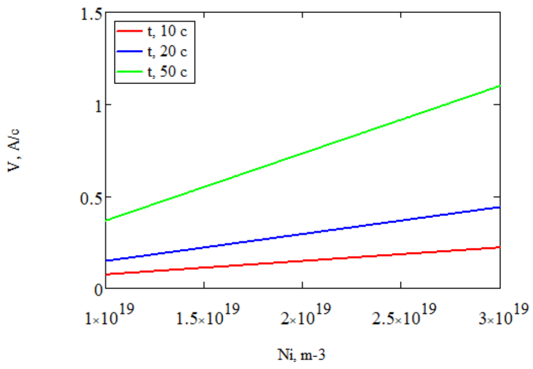


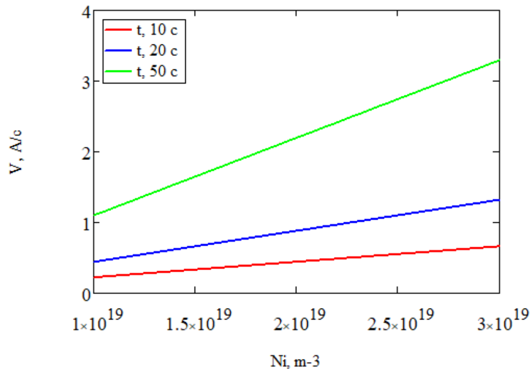
а) расчёт скорости травления ФС (Si_3N_4)



б) расчёт скорости травления ПС (SiO_2)

Рисунок 2.1 – Зависимость скорости травления ФС и ПС от давления смеси рабочих газов





а) расчёт скорости травления ФС (Si_3N_4) *б*) расчёт скорости травления ПС (SiO_2)

Рисунок 2.2 – Зависимость скорости травления ФС и ПС от мощности ВЧ генератора

В нашем случае, с учётом оценок, представленных в работе [7], а также предварительного анализа настоящей модели можно полагать, что поток ионов N_i будет изменяться в пределах $(1-3)10^{19}$ ион/(м^{2}с) при неизменном поперечном сечении диссоциации молекулы $\sigma_d = 10^{-18}$ м^2. Зависимости скорости травления ФС и ПС от плотности мощности плазмы (плотности потока ионов ХАЧ) при значении давления смеси рабочих газов $P = 5$ Па представлены на рисунке 2.2.

Как видно из графиков, представленных на рисунке 2.2, зависимость скорости ПХТ как для материала ФС, так и для материала ПС в условиях экспериментов, описанных в [3], [8], [9], составляет величину 0,5–2 Å/с. При этом представляет собой монотонно возрастающую функцию и может быть хорошо аппроксимирована линейной зависимостью, что с погрешностью, не превышающей 9%, соответствует результатам эксперимента, представленными в тех же работах.

Кроме того, представленная в данной работе модель позволяет оценить зависимость скорости травления от времени экспозиции и температуры подложки. При этом полученные функциональные зависимости в общем виде соответствуют результатам, представленным работах [4]–[6]. Учёт физико-химических свойств материалов ФС, ПС, энергии и химической природы ХАЧ, а так же энергии активации исследуемых процессов позволяет обобщить использование полученных аналитических соотношений на другие подобные процессы.

Заключение

Представленная в работе математическая модель ПХТ нитрида кремния в плазме газовой смеси, состоящей из элегаза (70–91 об.%) и кислорода (30–9 об.%), позволяет рассчитать с погрешностью, не превышающей 9% скорости травления ФС и ПС в диапазонах давлений и плотностей мощности плазмы, соответствующих используемым в настоящее время техпроцессам. На основании выводов о снижении селективности травления, можно, в частности, предсказать появление дефектов в готовых изделиях в виде микротренчей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Технология СБИС*: в 2-х кн. Книга 2; под ред. С. Зи. – Москва: Мир, 1986. – 52 с.

2. *Технология СБИС*: в 2-х кн. Книга 1; под ред. С. Зи. – Москва: Мир, 1986. – 161 с.

3. *Способ плазмохимического травления пленки нитрида кремния*: пат. BY 23595 / В.В. Емельянов, В.А. Емельянов, С.А. Плешевеня, С.Ф. Сенько, А.А. Цивако; дата публ.: 30.10.2021.

4. *Багрий*, *И.П.* Моделирование процессов плазмохимического травления в технологии производства ИС / И.П. Багрий, Г.А. Чечко. – Киев, 1989. – 21 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т кибернетики им. М.М. Глушкова; 89-46).

5. *Волков*, *А.В.* Расчет скорости плазмохимического травления кварца / А.В. Волков, Н.Л. Казанский, В.А. Колпаков // Компьютерная оптика. – 2001. – Вып. 21. – С. 121–125.

6. *Ивановский*, *Г.Ф.* Ионно-плазменная обработка материалов / Г.Ф. Ивановский, В.И. Петров. – Москва: Радио и связь, 1986. – 232 с.

7. *Волькенштейн*, *Ф.Ф.* Электронные процессы на поверхности полупроводников при хемосорбции / Ф.Ф. Волькенштейн. – Москва: Наука, 1987. – 431 с.

8. *Емельянов*, *В.В.* Селективное плазмохимическое травление нитрида кремния к диоксиду кремния / В.В. Емельянов // Материалы 55-й юбилейной конференции аспирантов, магистрантов и студентов БГУИР, Минск, 2019 г. – БГУИР. – Минск, 2019. – С. 293–294.

9. *Емельянов*, *В.В.* Формирование функциональных слоев нитрида кремния селективным плазмохимическим травлением / В.В. Емельянов // Доклады БГУИР. – 2022. – Т. 20 (1). – С. 48–54.

Поступила в редакцию 16.08.2023.

Информация об авторах

Емельянов Виктор Викторович – аспирант
Купо Александр Николаевич – к.т.н., доцент
Емельянов Виктор Андреевич – д.т.н., профессор

УДК 621.382 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_64
EDN: RUIKVY

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ИНФРАКРАСНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ФАЗОВЫЙ СОСТАВ ПОКРЫТИЙ ДИОКСИДА КРЕМНИЯ

А.Н. Купо[1], В.В. Емельянов[2], В.А. Емельянов[3]

[1]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*
[2]*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники*, *Минск*
[3]*ОАО «Интеграл»*, *Минск*

MODELING OF IR RADIATION INFLUENCE ON THE PHASE COMPOSITION OF SILICON DIOXIDE COATINGS

A.N. Kupo[1], V.V. Emelyanov[2], V.A. Emelyanov[3]

[1]*Francisk Skorina Gomel State University*
[2]*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics*, *Minsk*
[3]*JSC "INTEGRAL"*, *Minsk*

Аннотация. Проведено математическое моделирование взаимодействия излучения ближнего инфракрасного (ИК) диапазона с покрытием диоксида кремния при длительности импульса $\tau = 0{,}05–0{,}5$ секунды и экспозиции $E = 0{,}1–1{,}0$ Дж/см^2. Дана оценка снижения скорости плазмохимического травления (ПХТ) SiO_2 покрытия за счёт повышения средней энергии связи в кристаллической решётке вследствие термической модификации фазового состава указанного покрытия.

Ключевые слова: *плазмохимическое травление*, *диоксид кремния*, *инфракрасное излучение*, *математическое моделирование*.

Для цитирования: *Купо*, *А.Н.* Моделирование влияния инфракрасного излучения на фазовый состав покрытий диоксида кремния / А.Н. Купо, В.В. Емельянов, В.А. Емельянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 64–68. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_64. – EDN: RUIKVY

Abstract. Mathematical modeling of the interaction of radiation in the near infrared range with a coating of silicon dioxide was carried out at a pulse duration $\tau = 0{,}05–0{,}5$ seconds and exposure $E = 0{,}1$ to $1{,}0$ J/cm^2. An estimate is made of the decrease in the rate of plasma-chemical etching of a SiO_2 coating due to an increase in the average binding energy in the crystal lattice due to thermal modification of the phase composition of the specified coating.

Keywords: *plasma-chemical etching, silicon dioxide, infrared radiation, mathematical modeling.*

For citation: *Kupo*, *A.N.* Modeling of IR radiation influence on the phase composition of silicon dioxide coatings / A.N. Kupo, V.V. Emelyanov, V.A. Emelyanov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 3 (56). – P. 64–68. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_64 (in Russian). – EDN: RUIKVY

Введение

Покрытия диоксида кремния используются в современных технологиях микроэлектроники при изготовлении кристаллов интегральных схем различного типа, например: биполярных интегральных схем, «металл – оксид – проводник» и др. При этом, в качестве функционального слоя (ФС) чаще всего выступают плазмохимические покрытия нитрида кремния (Si_3N_4), а покрытия из диоксида кремния (SiO_2), толщина которых составляет 50–25 нм, используются в качестве подслоя (ПС) на кремниевой подложке [1].

При последующем ПХТ указанных двухслойных структур принципиальную сложность представляет невысокая селективностью травления Si_3N_4 по отношению к нижележащему слою SiO_2, используемому для предотвращения возникновения дефектов в полупроводниковой подложке. Необходимость ПС связана с тем, что нитрид кремния характеризуется наличием в них высоких растягивающих напряжений – до 100 ГПа [2], обусловленных процессами формирования пленки. Несмотря на небольшое различие в значении коэффициента линейного термического расширения Si_3N_4 и кремния ($3{,}4 \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$ для Si_3N_4 [3] и $3{,}72 \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$ для Si [4]), использование высоких температур при изготовлении полупроводниковых приборов и отсутствие полиморфных превращений Si_3N_4 приводит к возникновению высоких механических напряжений на границе раздела Si – Si_3N_4. Границы элементов топологического рисунка характеризуются скачкообразным изменением значения и знака механических напряжений, что приводит к образованию на этих границах дислокаций в кремнии. Диоксид кремния характеризуется большим количеством полиморфных превращений в широком интервале температур и играет роль демпфера, благодаря чему возникающие в структуре механические напряжения релаксируют и дефекты в подложке не образуются [5].

Таким образом, основной задачей в представленном техпроцессе является повышение селективности травления нитрида кремния, полученного химическим осаждением из парогазовой фазы, по отношению к термическому диоксиду кремния.

Поставленная задача решается тем, что в известном способе формирования микротопологии, описанном в [6], после формирования пленки нитрида кремния химическим осаждением из парогазовой фазы проводят обработку полученной пленки 1 – 5 импульсами ближнего инфракрасного излучения $\lambda \approx 0{,}8$–$2{,}0$ мкм, длительностью от $\tau = 0{,}05$–$0{,}5$ с при плотности энергии (экспозиции) $E = 0{,}1$–$1{,}0$ Дж/см^2.

Введение дополнительной операции ИК облучения формируемой структуры в соответствии с указанными параметрами обеспечивает нагрев поверхностной области на глубину, соизмеримую с длиной волны используемого ИК излучения, до температур порядка 700–1800° С. Это приводит к релаксации механических напряжений и полиморфным превращениям в структуре поднитридного диоксида кремния с повышением энергии химической связи.

1 Термодинамика фазовых переходов в покрытии SiO_2

Диоксид кремния SiO_2 является однокомпонентной системой со сложным полиморфизмом. В природе встречается одиннадцать кристаллических полиморфных модификаций и две стеклообразные формы кварца. Три главные полиморфные модификации диоксида кремния (модификации первого порядка) кварц, тридимит и кристобалит существенно различаются между собой по структуре и физико-химическими свойствам и, к тому же имеют низко- и высокотемпературные модификации.

Температурные границы фазовых переходов диоксида кремния впервые были установлены К.Н. Феннером (см. рисунок 1) [7]–[9]. Известно, что относительная скорость фазовых превращений для различных модификаций диоксида кремния может существенно меняться. Фазовые переходы между главными модификациями кварца (α-кварц ↔ α-тридимит, α-тридимит ↔ α-кристобалит), связанные с глубокой перестройкой кристаллической решетки, протекают очень медленно. Превращения между модификациями второго порядка (α-кварц ↔ β-кварц, α-тридимит ↔ β-тридимит ↔ γ-тридимит), протекают с большими скоростями [10].

Скорость травления диоксида кремния во фторсодержащей плазме зависит от энергии связи Si – O, которая, в свою очередь, зависит от кристаллографической структуры SiO_2, т. е. его полиморфной модификации.

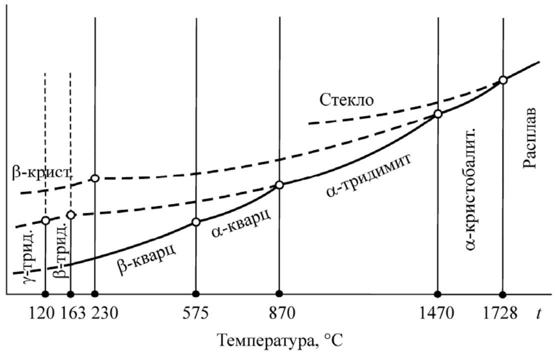


Рисунок 1.1 – Диаграмма Феннера состояния диоксида кремния [7], [9]

Наличие высоких растягивающих напряжений в ФС нитрида кремния компенсируется высокими сжимающими напряжениями в ПС диоксида. В результате такой суперпозиции, обычно наблюдаемые полиморфные модификадии диоксида, такие как кристобалит и тридимит, превращаются в наиболее плотный стишовит. Для образования стишовита требуются высокие температуры и давления порядка 16–18 ГПа, что существенно меньше фактической величины механических напряжений в пленке нитрида кремния. Кристобалит и тридимит также присутствуют в ПС SiO_2, однако они располагаются преимущественно вблизи границы с кремнием и составляют лишь небольшую часть (до 3%) объема ПС. Некоторую долю объема занимает также высокобарическая модификация коэсит, который, однако, по плотности ближе к тридимиту, нежели к стишовиту. Стишовит вследствие большей плотности по сравнению с другими полиморфными модификациями диоксида более устойчив к воздействию плавиковой кислоты, однако в то же время он характеризуется заметно меньшей энергией связи Si – O, что делает его менее устойчивым к воздействию фторсодержащей плазмы в процессе ПХТ. Так, молярная энтальпия ΔH_0 химической связи Si – O в ряду кристобалит – тридимит – коэсит – стишовит принимает следующие значения: 908,0 – 905,2 – 905,9 – 861,5 кДж/моль [11]. В то же время величина энтальпии (энергии связи) ΔH_0 Si_3N_4 составляет 787,8 кДж/моль [3]. Т. е. энергия связи Si – O в стишовите является промежуточной величиной между энергией связи Si – O в тридимите и энергией связи Si – N в нитриде. А поскольку приграничная с нитридом область диоксида кремния представлена в основном стишовитом, то очевидным направлением повышения селективности травления нитрида кремния по отношению к его диоксиду является обеспечение условий для полиморфного превращения стишовита в другие модификации с большей энергией связи.

2 Обоснование технологических режимов и разработка модели

Исходный монокристаллический кремний является прозрачным в ИК диапазоне. Термообработанный кремний содержит большое количество точечных дефектов, являющихся центрами поглощения. Поэтому кремниевые пластины, на которых сформированы топологические элементы с использованием термообработки, практически непрозрачны. Энергия ИК излучения формирует тепловой источник на поверхности. При использовании излучения большей длины волны кремниевая подложка соответственно прогревается на бо́льшую глубину. В этом случае для достижения сравнимого положительного эффекта требуется пропорциональное увеличение мощности излучателей, что экономически нецелесообразно [5], [6].

Источники ближнего ИК излучения широко распространены и используются в технологиях микроэлектроники. К ним, в частности, относятся галогенные кварцевые лампы, дающие максимум излучения на длине волны порядка 1,1 мкм. Невысокая глубина поглощающей области приводит к концентрации поглощенной энергии в активной области полупроводниковой структуры, не затрагивая объем кремниевой пластины. Однако в связи с высокой теплопроводностью кремния эта поглощенная энергия довольно быстро распределяется по всему объему, приводя к быстрому охлаждению поверхностного слоя. Поэтому импульс ИК излучения должен быть достаточно мощным для достижения требуемого эффекта в активной области и достаточно коротким, чтобы предотвратить нагрев всего объема пластины. Только в этом случае достигается эффект релаксации напряжений с соответствующими структурно-фазовыми изменениями и эффект «закалки» генерируемых и высвобождаемых точечных дефектов, стабилизирующих достигнутое состояние.

Оценку необходимых режимов ИК предобработки можно осуществить методами математического моделирования. Для этого решается нестационарная нелинейная задача теплопроводности в трехслойной системе «$Si_3N_4 - SiO_2 - Si$», которая представлена системой дифференциальных уравнений:

$$c_1(T_1)\rho(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial x}\right); \qquad (2.1)$$

$$c_2(T_2)\rho(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial x}\right); \qquad (2.2)$$

$$c_3(T_3)\rho(T_3)\frac{\partial T_3}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_3(T_3)\frac{\partial T_3}{\partial x}\right). \qquad (2.3)$$

В формулах: индекс «1» – для Si_3N_4, «2» – для SiO_2, «3» – кремниевая подложка; c, ρ и λ – теплоёмкость, плотность и теплопроводность материалов, зависящие от температуры T. Теплообмен по механизму теплопроводности происходит вдоль координаты x вглубь трёхслойной системы, как это показано на рисунке 2.1.

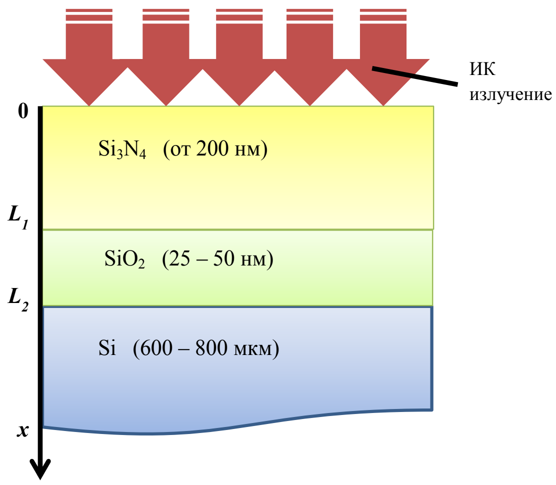


Рисунок 2.1 – Схема математической модели воздействия ИК излучения на трёхслойную систему «$Si_3N_4 - SiO_2 - Si$»

При этом на границах раздела фаз «0» и «L_3» реализованы граничные условия II и I рода:

$$x = 0: \ -\lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial x} = q; \qquad (2.4)$$

$$x = L_3: \ T_3(L_3) = T_0, \qquad (2.5)$$

где L_3 – координата граница раздела «Si – низкий вакуум», на рисунке 2.1 не обозначена, т. к. кремниевую подложку можно считать полубесконечной; $q = E / \tau$ – плотность мощности теплового источника, на поверхности нитрида кремния ИК излучением. Уравнение (2.5) отвечает условию теплоизоляции нижней границы системы.

На границах раздела фаз «$Si_3N_4 - SiO_2$» ($x = L_1$) и «SiO_2 – Si» ($x = L_2$) реализованы граничные условия IV рода, отвечающие требованию неразрывности теплового потока и равенству температур по обе стороны указанной границы:

$$x = L_1: \ \lambda_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial x} = \lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial x}, \quad T_1(L_1) = T_2(L_1), \qquad (2.6)$$

$$x = L_2: \ \lambda_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial x} = \lambda_3(T_3)\frac{\partial T_3}{\partial x}, \quad T_2(L_3) = T_3(L_2). \qquad (2.7)$$

3 Анализ результатов моделирования

Представленную систему дифференциальных уравнений (2.1)–(2.3) с граничными условиями (2.4)–(2.7) можно аппроксимировать конечно-разностной схемой, выполненной с первым порядком точности по времени t и вторым по координатам x. При этом была выбрана неявная разностная схема, поскольку она является наиболее устойчивой при уменьшении разностного шага по времени [12].

Учёт зависимостей теплофизических параметров тонких слоёв нитрида и диоксида кремния от термодинамической температуры реализован в линейном приближении с учётом результатов полученных в [13] и [14]. А именно:

$\lambda\_Si_3N_4 = 7{,}9 + 0{,}0148 \cdot T$ Вт/(м·К),

$\rho\_Si_3N_4 = 1534 + 0{,}218 \cdot T$ кг/м^3,

$\lambda\_SiO_2 = 1{,}087 + 0{,}0003 \cdot T$ Вт/(м·К),

$\rho\_\ SiO_2 = 1935 + 0{,}15 \cdot T$ кг/м^3.

В среде Mathcad были разработаны файлы-сценарии для динамического моделирования температурного поля в представленной трёхслойной системе (рисунок 2.1). Это позволяет получать данные о термодинамической температуре в произвольной точке системы, а значит, в частности, указывать вероятность фазового перехода в диоксиде кремния. Таким образом прогнозировать скорости его последующего травления во фторсодержащей плазме. В представленной модели можно варьировать следующие основные параметры: плотность энергии в импульсе E, длительность τ и количество импульсов ИК излучения, толщину каждого из слоёв.

На рисунке 3.1 представлено расчётное распределение температуры по глубине слоёв нитрида и диоксида кремния для различных длительностей экспозиции τ.

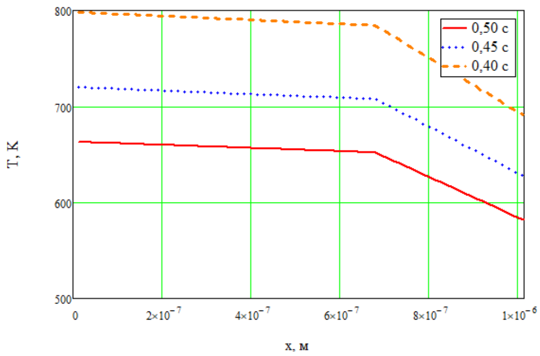


Рисунок 3.1 – Распределение температуры по глубине слоёв Si_3N_4 и SiO_2 для плотности энергии

Как видно из рисунка 3.1 изменение температуры ΔT по толщине слоя SiO_2 составляет порядка 45–50 К, в отличие от слоя Si_3N_4 где изменение температуры незначительно (не превышает 9%). Это говорит о том, что воздействие ИК излучения на ПС более эффективно, чем на ФС, а, значит, способно инициировать фазовые превращения именно в SiO_2, существенно не влияя на свойства ФС.

На рисунке 3.2 представлена зависимость двухслойной системы ФС и ПС от плотности энергии в импульсе E при фиксированной длительности импульса $\tau = 0{,}5$ с.

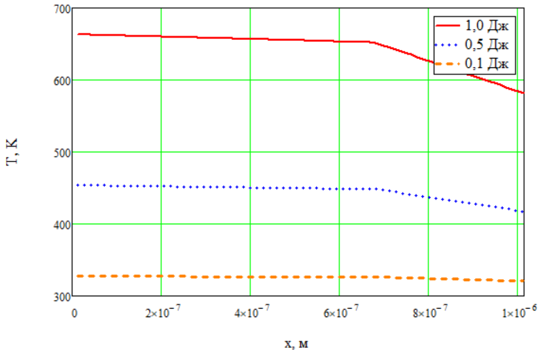


Рисунок 3.2 – Распределение температуры по глубине слоёв Si_3N_4 и SiO_2 для длительности импульса $\tau = 0{,}5$ с и плотностей энергии в импульсе E в диапазоне 0,1–1,0 Дж/см^2

Анализируя результаты моделирования, представленные, например, на рисунках 3.1 и 3.2 можно утверждать, что вариация таких параметров ИК излучения как плотность энергии в импульсе E и длительность импульса τ позволяет эффективно влиять на фазовые переходы в ПС SiO_2. В частности показано, что для достижения в ПС температур порядка 1500 К, характерных для фазового перехода стишовита в кристобалит, необходимы плотности энергии $E = 0{,}80$–$0{,}85$ Дж/см^2 при длительности импульса излучения $\tau = 0{,}25$–$0{,}20$ с.

Заключение

Представленная в работе математическая модель температурного поля, сформированного под действием ИК излучения, позволяет установить необходимые значения технологических параметров, таких как плотность энергии в импульсе E и длительность импульса τ для формирования заданного фазового состава в подслое SiO_2 и последующей оптимизации процессов плазмохимического травления в технологиях микроэлектроники.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Технология СБИС*: в 2-х кн. Книга 2; под ред. С. Зи. – Москва: Мир, 1986. – 52 с.

2. *Технология СБИС*: в 2-х кн. Книга 1; под ред. С. Зи. – Москва: Мир, 1986. – 161 с.

3. *Кислый*, *П.С.* Кремния нитрид / П.С. Кислый // Химическая энциклопедия. – Москва: «Советская энциклопедия», 1990. – Т. 2. – С. 519.

4. *Мильвидский*, *М.Г.* Кремний. / М.Г. Мильвидский // Химическая энциклопедия. – Москва: «Советская энциклопедия», 1990. – Т. 2. – С. 508–509.

5. *Емельянов*, *В.В.* Селективное плазмохимическое травление нитрида кремния к диоксиду кремния / В.В. Емельянов // Материалы 55-й

юбилейной конференции аспирантов, магистрантов и студентов БГУИР, Минск, 2019 г. – Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники. – Минск, 2019. – С. 293–294.

6. *Способ плазмохимического травления пленки нитрида кремния*: пат. BY 23595 / В.В. Емельянов, В.А. Емельянов, С.А. Плешевеня, С.Ф. Сенько, А.А. Цивако; дата публ.: 30.10.2021.

7. *Бобкова*, *Н.М.* Физическая химия тугоплавких неметаллических и силикатных материалов: учебник / Н.М. Бобкова. – Минск: Высшая школа, 2007. – 301 с.

8. *Будников*, *П.П.* Кварцевая керамика / П.П. Будников, Ю.Е. Пивинский // Успехи химии. – 1967. – Т. 36, № 3. – С. 511–542.

9. *Влияние термической обработки на фазовый состав диоксида кремния* / А.С. Будина, К.И. Гагарина, А.Л. Габов, А.А. Миронова // Прикладная фотоника. – 2018. – Т. 5, № 1–2. – С. 22–31

10. *Физическая химия*. Глава 15. Термодинамика фазовых равновесий [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://bookonlime.ru/node/872#_idTextAnchor005. – Дата доступа: 21.07.2023.

11. *Сахаров*, *В.В.* Кремния диоксид / В.В. Сахаров // Химическая энциклопедия. – 1990. – Москва: «Советская энциклопедия», 1990. – Т. 2. – С. 517–518.

12. *Кузнецов*, *Г.В.* Разностные методы решения задач теплопроводности: учебное пособие / Г.В. Кузнецов, М.А. Шеремет. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 172 с.

13. *Теплофизические свойства керамик на основе нитрида кремния при высоких температурах* / А.В. Смотрицкий, В.Е. Зиновьев, А.А. Старостин, И.Г. Коршунов, В.Я. Петровский // Теплофизика высоких температур. – 1996. – Т. 34, № 4. – С. 546–550.

14. *Исследование теплофизических свойств керамических материалов на основе оксида кремния* / Е.Ю. Подшибякина, А.И. Новиков, А.А. Черкашин, Д.С. Медушевский, О.А. Суханова // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. – 2017. – Т. 2. – С. 820–822.

Поступила в редакцию 16.08.2023.

Информация об авторах

Купо Александр Николаевич – к.т.н., доцент
Емельянов Виктор Викторович – аспирант
Емельянов Виктор Андреевич – д.т.н., профессор

ТЕХНИКА

УДК 59.03 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_69
EDN: TIQLKT

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ СПЕКТРАЛЬНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ КАВИТАЦИОННОГО ШУМА

В.С. Минчук, А.Ю. Перхунова, В.С. Гаврилюк, Н.В. Дежкунов

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, *Минск*

INVESTIGATION OF THE CROSS-CORRELATION OF SPECTRAL COMPONENTS OF CAVITATION NOISE

V.S. Minchuk, A.Yu. Perkhunova, V.S. Gavrilyuk, N.V. Dezhkunov

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, *Minsk*

Аннотация. Приводятся результаты исследования взаимной корреляции спектральных компонент кавитационного шума (КШ), в частности, основной частоты, т. е. частоты f_0 УЗ поля, субгармоники, гармоник основной частоты, непрерывной составляющей КШ и ряда других. Установлено, что основная частота слабо коррелирует с другими компонентами КШ, т. е. связь f_0 с другими частотами характеризуется низким коэффициентом корреляции. Обнаружена линейная связь между гармониками основной частоты, непрерывной составляющей спектра и интегральной мощностью кавитационного шума.

Ключевые слова: *кавитация*, *кавитационный шум*, *спектральные компоненты*, *корреляция*.

Для цитирования: *Исследование взаимной корреляции спектральных составляющих кавитационного шума* / В.С. Минчук, А.Ю. Перхунова, В.С. Гаврилюк, Н.В. Дежкунов // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 69–74. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_69. – EDN: TIQLKT

Abstract. The results of the study of the cross-correlation of the spectral components of cavitation noise (CN), in particular, the fundamental frequency, i. e. frequency f_0 of the ultrasonic field, subharmonics, harmonics of the fundamental frequency, the continuous component of the CN, and a number of others are proposed. It has been established that the fundamental frequency correlates weakly with other NC components, i. e. the relationship f_0 with the other frequencies is characterized by a low correlation coefficient. A linear relationship has been found between the harmonics of the fundamental frequency, the continuous component of the spectrum, and the integral power of cavitation noise.

Keywords: *cavitation*, *cavitation noise*, *spectral components*, *correlation.*

For citation: *Investigation of the cross-correlation of spectral components of cavitation noise* / V.S. Minchuk, A.Yu. Perkhunova, V.S. Gavrilyuk, N.V. Dezhkunov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 3 (56). – P. 69–74. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_69 (in Russian). – EDN: TIQLKT

Введение

Интенсификация ультразвуком (УЗ) физико-химических процессов в жидкостях, как известно [1]–[3], имеет кавитационную природу, т. е. связана с явлением образования, пульсаций и захлопывания микропузырьков газа в поле переменного давления. В последнее время интенсивно расширяются возможности применения УЗ колебаний в медицине и биологии в кавитационном режиме [4]–[8].

При пульсациях и захлопывании пузырьков в кавитационной области генерируется сложный акустический сигнал с интенсивной шумоподобной компонентой – так называемый кавитационный шум (КШ). Поскольку кавитационный шум излучается пузырьками при их движении, то, как обоснованно считают многие авторы [9]–[16], он содержит информацию о динамическом поведении пузырьков. В ряде работ предлагалось использовать различные спектральные составляющие КШ для оценки уровня активности кавитации.

Авторы [9], [14], [15] использовали субгармонику $f_0 / 2$ основной частоты f_0 в качестве индикатора возникновения кавитации и для оценки уровня ее активности. В работе [10] исследовалась интенсивность полного сигнала КШ в диапазоне частот от 0 до 250 кГц при частоте поля $f_0 = 36$ кГц в сравнении с химической активностью кавитации. В [11] предлагалось использовать интенсивность непрерывной составляющей КШ на частоте 2,25 f_0, т. е. фактически – между второй и третьей гармониками основной частоты. Авторами [12], [13] отмечено наличие корреляции интенсивности широкополосной составляющей КШ и активности кавитации, оцениваемой по интенсивности звуколюминесценции. Предлагалось также использовать полный сигнал КШ, не выделяя какие – либо спектральные компоненты [15].

Отметим, что механизмы генерирования компонент КШ не выяснены однозначно. Это в значительной мере затрудняет разработку методов исследования кавитации с использованием спектрального анализа КШ.

В данной работе ставилась задача выявить спектральные компоненты кавитационного шума, коррелирующие между собой.

1 Методика и установка

Схема установки для проведения экспериментов представлена на рисунке 1.1. Объект исследования – кавитация в ультразвуковой ванне с размерами 155×140×100 мм. Частота УЗ поля в ванне f_0 = 35,2 кГц.

Для регистрации кавитационного шума и его спектральных характеристик использовался кавитометр *ICA* – 3*DM* (БГУИР, г. Минск) с волноводным датчиком. Диаметр приемного элемента датчика равен 3 мм. Прибор позволяет регистрировать мощность полного выходного сигнала датчика H в диапазоне частот от 10 кГц до 10 МГц и интегральную мощность кавитационного шума A_{k1} в диапазоне частот от 300 кГц до 10 МГц, т. е. при вычислении A_{k1} не учитывается основная частота, субгармоника, несколько первых гармоник и непрерывная составляющая в диапазоне частот 10…300 кГц.

Встроенная в кавитометре программа позволяет реализовать спектральный анализ КШ в диапазоне частот от 0 до 500 кГц с использованием быстрого преобразования Фурье. Результаты обработки спектров сохраняются в виде изображений и текстовых файлов.

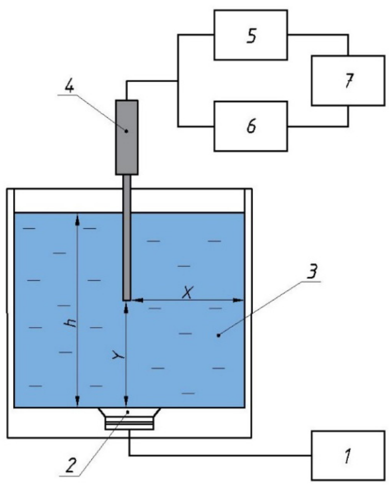
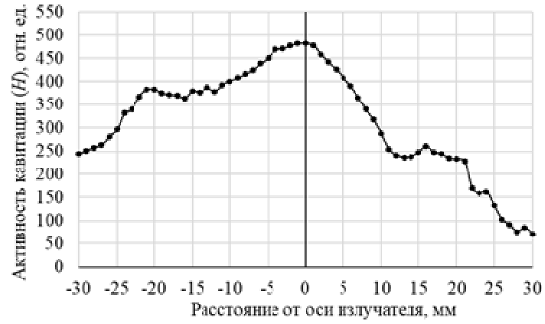


Рисунок 1.1 – Схема установки для проведения эксперимента:
1 – ультразвуковой генератор;
2 – пьезокерамический излучатель;
3 – жидкость;
4 – датчик кавитации;
5 – кавитометр;
6 – анализатор спектра;
7 – компьютер

Распределение кавитации в ванне неоднородно. Из-за наличия компоненты стоячей волны в вертикальной плоскости оно включает квазипериодические максимумы и минимумы (рисунок 1.2, *а*). В горизонтальной плоскости поле значительно ослабевает при удалении от центра ванны (рисунок 1.2, *б*).

а)



б)

Рисунок 1.2 – Распределение активности кавитации в ультразвуковой ванне:
а – в вертикальной плоскости (по оси излучателя);
б – в горизонтальной плоскости
(21 мм от излучателя)

Активность кавитации и ее распределение в объеме ванны сильно зависят от уровня жидкости в ванне h, температуры жидкости, газосодержания и др. Поэтому, изменяя уровень жидкости и/или положение (X, Y, Z) датчика в ванне, можно варьировать состояние кавитационной области вблизи датчика в широком диапазоне. Соответственно, будут варьироваться и спектры КШ.

Для исследования корреляции спектральных компонент КШ использована следующая методика. Исходя из данных рисунка 1.2 выбрано 15 положений датчика в областях, различающихся по величине активности кавитации. В каждом положении датчика регистрировались спектр КШ в диапазоне от 0 до 500 кГц и величин H и A_{k1}. Каждый из спектров представляет собой усредненный результат 20 последовательных измерений.

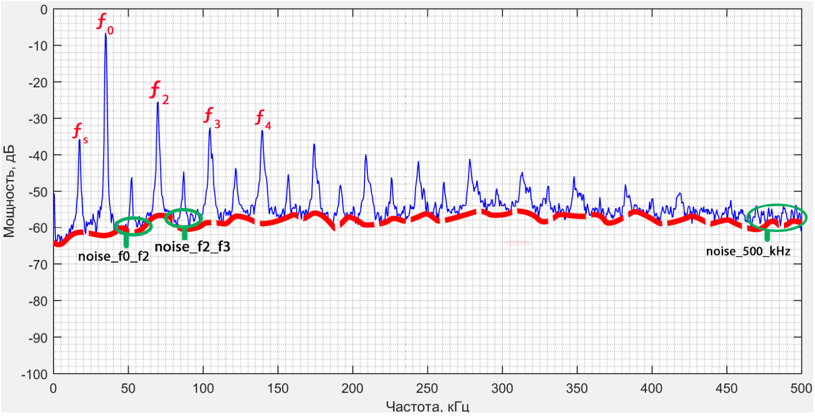
По каждому из 15 спектров извлекалась информация о следующих составляющих: амплитуда основной гармоники f_0; амплитуда 2-й, 3-й и 4-й гармоник $f_n = nf_0$, где $n \in [2, 4]$; амплитуда субгармоники $f_s = f_0 / 2$; уровень непрерывной составляющей между f_0 и f_2, между f_2 и f_3 и на частоте 500 кГц.

2 Результаты и обсуждение

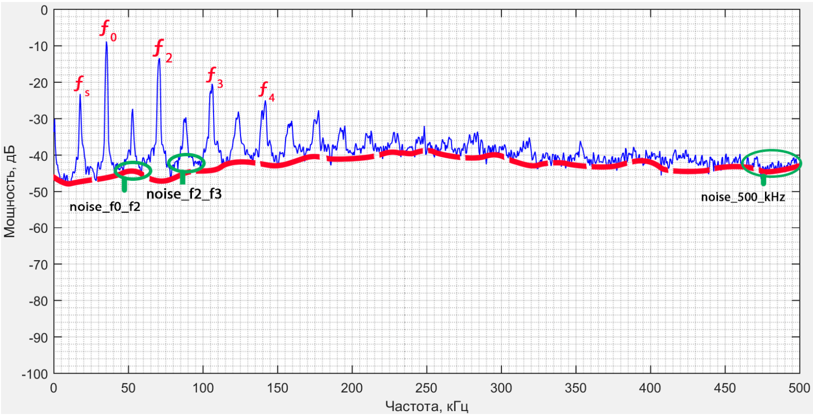
На рисунке 2.1 в качестве примера представлено два из 15 полученных спектров в логарифмическом масштабе. Спектры включают основную частоту f_0, гармоники nf_0.

Видно, что они значительно различаются. Непрерывная составляющая (штриховая линия) на первом спектре (рисунок 2.1, *а*) находится в диапазоне [–64; –56] дБ, на втором (рисунок 2.1, *б*) – в пределах [–46; –38] дБ.

В таблице 2.1 и 2.2 представлены по 5 записей с наименьшей и наибольшей шириной диапазона вариаций мощности ΔW. Приведены также минимальное и максимальное значение мощности КШ на каждой представленной частоте.



а)



б)

Рисунок 2.1 – Примеры полученных спектров кавитационного шума

Таблица 2.1 – Частоты наблюдения минимального изменения мощности КШ

частота, кГц	спектр №1, дБ	спектр №2, дБ	…	спектр №15, дБ	*min_value*, дБ	*max_value*, дБ	ΔW, дБ
407,226	–51,517	–51,123	…	–49,514	–60,476	–45,588	14,888
435,546	–51,598	–50,855	…	–48,102	–58,297	–42,935	15,362
425,780	–49,187	–49,013	…	–46,237	–58,131	–42,165	15,966
469,237	–48,242	–51,488	…	–49,620	–59,417	–43,317	16,100
474,120	–49,349	–50,692	…	–48,895	–62,965	–46,579	16,386

Таблица 2.2 – Частоты наблюдения максимального изменения мощности КШ

частота, кГц	спектр №1, дБ	спектр №2, дБ	…	спектр №15, дБ	*min_value*, дБ	*max_value*, дБ	ΔW, дБ
18,066	–37,848	–50,153	…	–43,749	–68,433	–23,203	45,231
0,488	–62,268	–64,111	…	–55,310	–69,420	–25,329	44,090
0,977	–59,119	–59,359	…	–50,652	–67,188	–24,024	43,164
18,555	–43,219	–51,807	…	–48,950	–69,729	–27,519	42,210
17,578	–38,464	–50,575	…	–41,947	–69,602	–28,191	41,411

На рисунке 2.2 представлен график зависимости диапазона вариаций мощности ΔW в спектре КШ от частоты. При увеличении частоты, начиная примерно с 200 кГц, ΔW плавно уменьшается и достигает минимального значения (14,8–16,4 дБ) в высокочастотной части спектра, т.е. для частот выше 400 кГц.

Наибольшие значения ΔW (41,4–45,2 дБ) наблюдаются на частотах, лежащих вблизи субгармоники f_s = 17,5 кГц. Значения на граничных частотах 0,49 и 0,98 кГц не принимаются во внимание, т. к. частоты ниже 10 кГц находятся вне рабочего диапазона использовавшегося прибора.

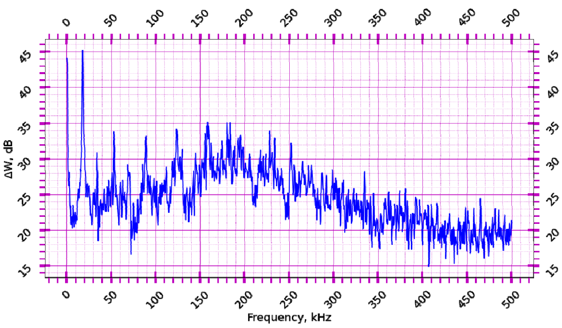


Рисунок 2.2 – Частотная зависимость ширины диапазона изменения мощности ΔW КШ

Таким образом, максимальное значение ΔW наблюдается на частоте 17,6 кГц, что соответствует частоте субгармоники. На графике наблюдаются периодические пики на частотах вблизи 18, 53, 89, 123, 158 и 228 кГц. Эти частоты с некоторым приближением кратны субгармонике, но при этом не кратны основной частоте. Т. е. их можно описать уравнением вида

$$f_{peak} = (2n+1)f_s = \frac{(2n+1)f_0}{2},$$

где f_{peak} – частоты, соответствующие пиковым значениям ширины диапазона вариаций мощности КШ; f_s – частота субгармоники; f_0 – основная частота (частота генератора); n – целое число.

Данной формулой не описывается пик на частоте 34,2 кГц, что несколько меньше основной частоты, для уточнения результата требуется большее число опытов. Имеется также небольшой максимум средней величины разброса для диапазона частот от 150 до 250 кГц. В целом, в низкочастотной области от 50 до 250 кГц наблюдаются более интенсивные вариации мощности сигнала по сравнению с высокочастотными составляющими, что указывает на перспективность использования данного диапазона для оценки активности кавитации.

На рисунке 2.2 заметны также провалы на частотах в районе 35, 71, 101, 141, 211 и 248 кГц, которые кратны основной частоте ультразвукового поля f_0, т. е. их можно с некоторым приближением описать уравнением вида

$$f_{\min} = nf_0,$$

где $f_{\min}$ – частота, которой соответствует уменьшение ширины диапазона вариаций мощности КШ; f_0 – основная частота (частота генератора); n – целое число.

Для проведения корреляционного анализа использовались значения мощности следующих величин:

– гармоники f_0, f_2, f_3, f_4;

– субгармоника f_s;

– *noise_f0_f2* – мощность непрерывной составляющей спектра между основной и 2-й гармоникой (рисунок 2.1);

– *noise_f2_f3* – мощность непрерывной составляющей спектра между 2-й и 3-й гармоникой (рисунок 2.1);

– *noise*_500*kHz* – мощность непрерывной составляющей спектра на частоте 500 кГц (рисунок 2.1);

– величина H – мощность полного выходного сигнала датчика в диапазоне частот от 10 кГц до 10 МГц;

– величина $r1$ – интегральная мощность кавитационного шума в диапазоне частот от 300 кГц до 10 МГц

На рисунке 2.3 представлена корреляционная матрица данных величин. На пересечениях столбцов и строк приведены коэффициенты корреляции Пирсона соответствующих величин.

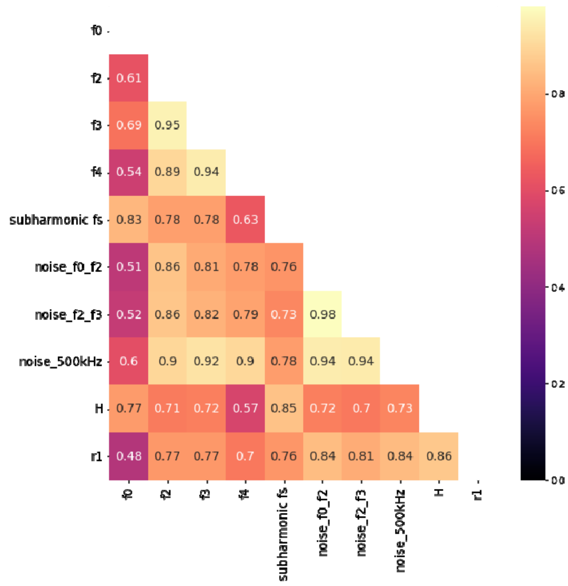


Рисунок 2.3 – Корреляция между составляющими спектра КШ

Как видно, для большинства пар характерна сильная положительная корреляция. Наиболее сильная линейная связь наблюдается попарно между непрерывными составляющими спектра *noise_f0_f2*, *noise_f2_f3*, *noise*_500*kHz*; между 2-й, 3-й и 4-й гармониками; между гармониками и непрерывной составляющей спектра.

Отдельно стоит обратить внимание на основную частоту f_0: за исключением субгармоники и полного сигнала *H* она слабо коррелирует с анализируемыми составляющими спектра КШ. Причина отсутствия связи (или слабая связь) между этими компонентами с частотой УЗ поля, вероятно, в том, что они не являются прямыми производными частоты поля, а генерируются пузырьками, динамика которых не связана линейно с вариациями давления в поле.

На рисунке 2.4 приведены примеры попарных распределений величин с высоким (рисунок 2.4, *а*, *б*) и низким (рисунок 2.4, *в*, *г*) коэффициентом корреляции. Первые два распределения хорошо аппроксимируются линейной зависимостью. Связь основной гармоники и величины непрерывной составляющей между основной и 2-й гармоникой довольно слаба ($r = 0{,}51$). Несмотря на относительно небольшой коэффициент корреляции зависимость на рисунке 2.4, в может быть описана прямой линией при удалении некоторых крайних точек. Для уточнения характера зависимости необходимо провести дополнительные исследования.

Наличие взаимной корреляции исследовавшихся спектральных составляющих кавитационного шума позволяет сделать вывод, что каждая из оставляющих может использоваться для детектирования кавитации и, возможно, для оценки активности кавитации.

Заключение

Установлено, что вариации активности кавитации, воздействующей на датчик при изменении его положения случайным образом в УЗ ванне, вызывают наибольшие изменения мощности кавитационного шума (КШ) на частоте субгармоники. В целом, в низкочастотной области при $f < 200$ кГц наблюдаются более интенсивные вариации мощности сигнала по сравнению с высокочастотными составляющими $f > 200$ кГц, что указывает на перспективность использования данного диапазона для оценки активности кавитации.

На частотах, кратных субгармонике (или близких кратным субгармонике), но не кратных основной частоте, наблюдаются пики вариаций мощности. На частотах, кратных основной частоте, наоборот, имеют место провалы вариаций мощности.

Обнаружена линейная связь между гармониками основной частоты, непрерывной составляющей спектра и интегральной мощностью кавитационного шума.

Корреляция основной частоты, т. е. частоты ультразвукового поля с большинством составляющих спектра выражена довольно слабо. Отсутствие связи (или слабая связь) этих компонент с частотой УЗ поля обусловлено, скорее всего тем, что эти составляющие не являются прямыми производными частоты поля, т. е. не возникают, например, вследствие нелинейных искажений волны, а генерируются пузырьками, динамика которых не связана линейно с вариациями давления в поле.

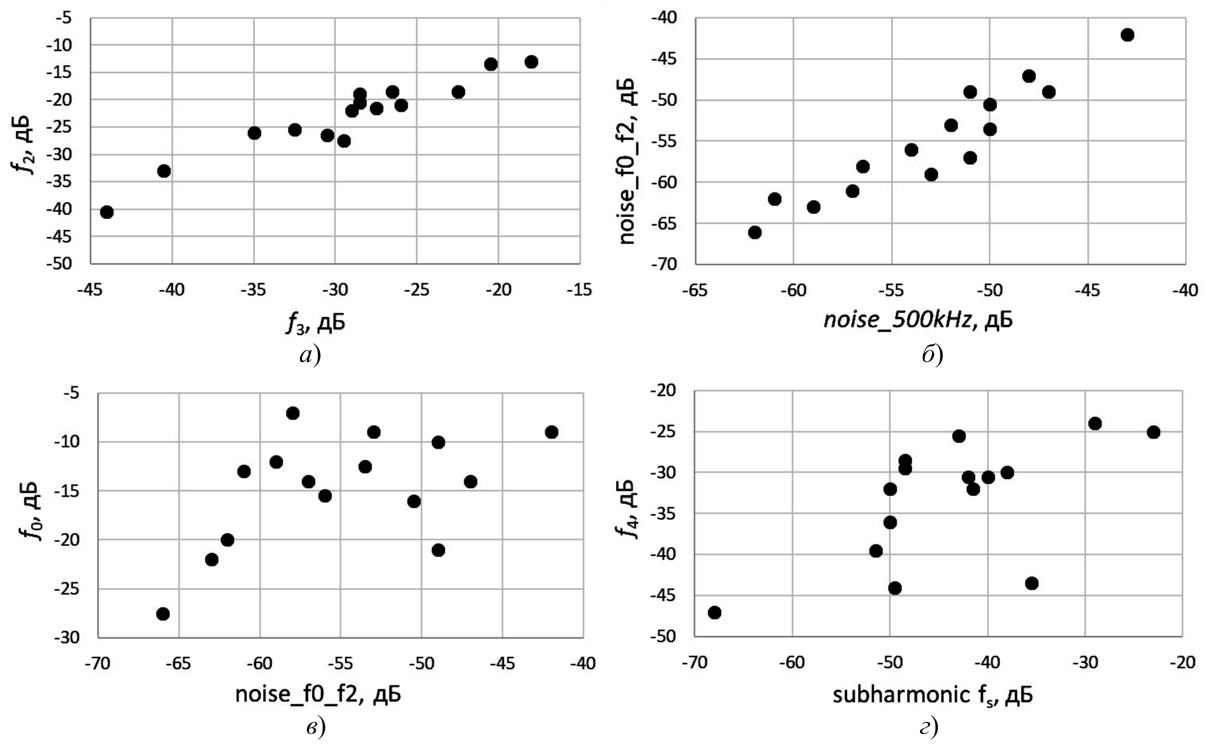


Рисунок 2.4 – Попарные распределения между составляющими спектра КШ:
а – коэффициент корреляции $R^2 = 0{,}95$; *б* – коэффициент корреляции $R^2 = 0{,}94$;
в – коэффициент корреляции $R^2 = 0{,}51$; *г* – коэффициент корреляции $R^2 = 0{,}63$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сиротюк, М.Г.* Акустическая кавитация / М.Г. Сиротюк; отв. ред.: В.А. Акуличев, Л.Р. Гаврилов; Российская акад. наук, Дальневосточное отделение, Тихоокеанский технологический ин-т им В.И. Ильичева – Москва: Наука, 2008. – 270 с.

2. *Применение ультразвука высокой интенсивности в промышленности* / В.Н. Хмелев [и др.]. – Бийск: Изд-во АлГТУ им. И.И. Ползунова, 2010. – 250 с.

3. *A volume in Woodhead Publishing Series in Electronic and Optical Materials* / ed. J. A. Gallego-Jarez, K.F. Graff and M. Lucas // Power Ultrasonics: Applications of High-Intensity Ultrasound. Book – 2-nd Edition, 2023. – 921 p. – DOI: https://doi.org/10.1016/C2019-0-00783-2.

4. *Ellens, N.P.K.* High-intensity focused ultrasound for medical therapy / N.P.K. Ellens, K. Hynynen // Power Ultrasonics: Applications of High-Intensity Ultrasound. Book; ed. J.A. Gallego-Jarez, K.F. Graff. – 2-nd Edition, 2023. – P. 661–693. – DOI: https://doi.org/10.1016/B978-1-78242-028-6.00022-3.

5. *Физический механизм терапевтического эффекта ультразвука* (Обзор) / М.Р. Бэйли [и др.] // Акустический журнал. – 2003. – № 4. – С. 437.

6. *Применение твердофазных неоднородностей для повышения эффективности ультразвуковой терапии онкологических заболеваний* / А.Л. Николаев [и др.] // Акустический журнал. – 2009. – Т. 55. – № 4-5. – С. 565–574.

7. *Direct evidence of multi-bubble sonoluminescence using therapeutic ultrasound and microbubbles* / E. Beguin, S. Shrivastava, N. Dezhkunov [et al.] // ACS Applied Materials and Interfaces. – 2019. – Vol. 11 (12). – P. 19913–19919.

8. *Гаврилов, Л.Р.* Фокусировнный ультразвук высокой интенсивности в медицине / Л.Р. Гаврилов; науч. ред. академик РАН В.А. Акуличев. – Москва: ФАЗИС, 2013. – 656 с.

9. *Subharmonic emission as an indicator of ultrasonically-induced biological damage* / K.I. Morton, G.R. ter Haar, I.J. Stratford, C.R. Hill // Ultrasound in Med. and Biol. – 1983. – Vol. 9. – № 6. – P. 629–633.

10. *Acoustic emission spectra and sonochemical activity in a* 36 *kHz sonoreactor* / Younggyu Son, Myunghee Lim, Jeehyeong Khim, Muthupandian Ashokkumar // Ultrasonics Sonochemistry. – 2012. – Vol. 19. – P. 16–21.

11. *Measurement of cavitation noise in ultrasonic baths and ultrasonic reactors* / Technical Specification IEC TS 63001. – 1-st Edition. – 2019. – 28 p.

12. *Sonoluminescence and acoustic emission spectra at different stages of cavitation zone development* / N.V. Dezhkunov, A. Francescutto, L. Serpe, R. Canaparo, G. Cravotto // Ultrasonics Sonochemistry. – 2018. – Vol. 40, № 1. – P. 104–109.

13. *Исследование корреляции звуколюминесценции и кавитационного шума в поле фокусирующего излучателя* / А.В. Котухов [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 4 (45). – С. 32–36.

14. *Кавитационная прочность водных суспензий пористых кремниевых наночастиц с различной степенью гидрофобности поверхности* / В.Д. Егошина [и др.] // Акустический журнал. – 2023. – Т. 69, №1. – С. 92–100.

15. *Acoustic characterization of cavitation intensity: A review* / Pengfei Wu, Xiuming Wang, Weijun Lin, Lixin Bai // Journal of Ultrasonics Sonochemistry. – Jan. 2022. – Vol. 82. – P. 105878. – DOI: https://doi.org/10.1016/j.ultsonch.2021.105878.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, проект № Т23М-026.

Поступила в редакцию 13.07.2023.

Информация об авторах

Минчук Вячеслав Сергеевич – инженер-электроник
Перхунова Александра Юрьевна – стажер мл.н.сотр.
Гаврилюк Виталий Степанович – инженер-программист
Дежкунов Николай Васильевич – к.т.н., доцент

ТЕХНИКА

УДК 621.382.049.77 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_75
EDN: XCTKQN

НЕЛИНЕЙНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В ТЕХНОЛОГИЯХ ТЕРМОХИМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ АЛМАЗА

Е.Б. Шершнев

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

NONLINEAR MATHEMATICAL MODEL OF THE HEAT AND MASS TRANSFER PROCESS IN DIAMOND THERMOCHEMICAL PROCESSING TECHNOLOGIES

E.B. Shershnev

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Разработана нестационарная нелинейная осесимметричная модель процесса лазерной термохимической обработки алмаза. Рассчитаны значения температуры и диффузионных коэффициентов в трёхфазной системе «водород – металл – алмаз». Определены значения диффузионных коэффициентов и проведена оценка скорости удаления алмаза в диапазоне плотностей мощности теплового источника $q = 10^4 – 10^7$ Вт/м^2 и толщин металлического покрытия h = 10 нм до 1 мкм.

Ключевые слова: *лазерная обработка*, *алмаз*, *диффузия*, *углерод*.

Для цитирования: *Шершнев*, *Е.Б.* Нелинейная математическая модель процесса тепломассопереноса в технологиях термохимической обработки алмаза / Е.Б. Шершнев // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 75–80. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_75. – EDN: XCTKQN

Abstract. A non-stationary nonlinear axisymmetric model of the process of laser thermochemical processing of diamond has been developed. The values of temperature and diffusion coefficients in the three-phase system “hydrogen – metal – diamond” are calculated. The diffusion coefficients are determined and the diamond removal rate is estimated in the range of heat source power densities $q = 10^4 – 10^7$ W/m^2 and metal coating thicknesses h = 10 nm to 1 μm.

Keywords: *laser processing*, *diamond*, *diffusion*, *carbon*.

For citation: *Shershnev*, *E.B*. Nonlinear mathematical model of the heat and mass transfer process in diamond thermochemical processing technologies / E.B. Shershnev // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 3 (56). – P. 75–80. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_75 (in Russian). – EDN: XCTKQN

Введение

В настоящее время обработка алмазов (природных и синтетических) в технологиях микро- и наноэлектроники осуществляется как механическим способом, так и с использованием лазерного излучения. При традиционном применении лазерного излучения (лазерная резка, гравировка и т. п.) происходит графитизация обрабатываемой поверхности с последующим удалением материала по заданной траектории обработки [1]. При этом перспективным представляется термохимический способ обработки алмаза. Основная идея этого способа – использование химических свойств алмаза [2]. А именно: алмаз приводят в контакт с металлом, который способен растворять в себе углерод (например, с молибденом), а для обеспечения непрерывности протекания процесса его проводят в атмосфере газа, который взаимодействует с растворенным в металле углеродом, но не реагирующим непосредственно с алмазом. В качестве такого газа может быть использован водород, способный создавать с атомами углерода летучие соединения [3].

1 Постановка задачи

В основе термохимического способа обработки алмаза лежит процесс каталитического взаимодействия углерода, входящего в состав алмаза с водородом или смесями водорода с водяным паром и углекислым газом [4].

Для выбора оптимальных режимов указанного способа обработки необходимо исследовать физико-химические механизмы протекающих тепловых и диффузионных процессов. Для локализации теплового источника на поверхности металла используется лазерное излучение. Упрощённая схема термохимической обработки представлена на рисунке 1.1 [4].

Поскольку лазерное излучение формирует осесимметричный тепловой источник [5], то следует решать трехмерную задачу в цилиндрической системе координат, что сводит её к двухмерной, но усложняет форму оператора Лапласа [6].

Таким образом, рассматривается нестационарная нелинейная задача тепломассопереноса в трехслойной системе «водород – металл – алмаз».

При этом будем полагать, что конвективный теплообмен с газовой фазой отсутствует, поскольку тепловой поток за счет конвекции по сравнению с радиационным составляет не более 3 %, и газ поддерживается при постоянной температуре T_0. Начальные температуры алмаза и металлического покрытия так же равны T_0. В целом рассматриваемую систему можно считать теплоизолированной. Лазерное излучение воздействует на поверхность металла, формируя при этом поверхностный тепловой источник с плотностью мощности q, равномерно распределённой по сечению лазерного пятна. Это обеспечивает нагрев металлического слоя и его насыщение углеродом, а также активирует диффузионные процессы на обеих границах фаз: «металл – алмаз» и «водород – металл».

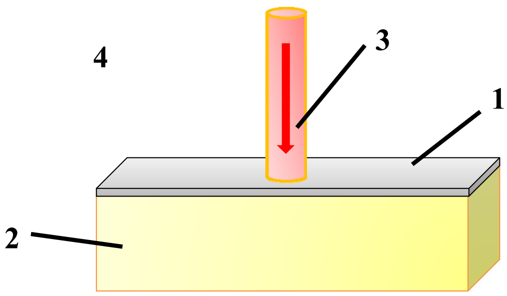


Рисунок 1.1 – Схема лазерной термохимической обработки алмаза
1 – металл,
2 – алмаз,
3 – лазерное излучение,
4 – газовая среда

Кроме того, при постановке задачи приняты следующие разумные допущения:

– диапазон температур, при которых проводится лазерная обработка, ограничен температурой плавления металла при нормальных условиях;

– давление в газовой фазе соизмеримо с нормальным атмосферным и не превышает его.

В общем случае решение задачи тепломассопереноса в описанной системе сводится к решению системы дифференциальных уравнений, включающих уравнения теплопроводности со смешанными граничными условиями, а также уравнения диффузии в трёх средах.

$$c_1(T_1)\rho(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial \tau} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda_1(T_1) r\frac{\partial T_1}{\partial \tau}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial x}\right); \quad (1.1)$$

$$c_2(T_2)\rho(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial \tau} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda_2(T_2) r\frac{\partial T_2}{\partial \tau}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial x}\right). \quad (1.2)$$

В формулах: индекс «1» – для металла, «2» – для алмаза соответственно; c, ρ и λ – теплоёмкость, плотность и теплопроводность материалов, зависящие от температуры T.

При этом на границах «водород – металл» и «водород – алмаз» реализованы граничные условия II-го рода.

$$x = 0: \begin{cases} -\lambda_1(T_1)\dfrac{\partial T_1}{\partial x} = q, & 0 \le r \le R_0; \\ \lambda_1(T_1)\dfrac{\partial T_1}{\partial x} = 0, & r \ge R_0; \end{cases} \quad (1.3)$$

$$x = L_2: \lambda_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial x} = 0, \quad (1.4)$$

где R_0 – радиус лазерного пятна на поверхности металла, L_2 – координата нижней границы раздела «алмаз – водород», q – плотность мощности теплового источника.

На границе раздела «металл – алмаз», координата которой $x = L_1$, реализованы граничные условия IV-го рода в форме (1.5):

$$x = L_1: \lambda_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial x} = \lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial x}. \quad (1.5)$$

Система (1.1)–(1.5) решается совместно с уравнениями диффузии для всех трёх сред, представленными в форме (1.6):

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(T)\frac{\partial C}{\partial x}\right), \quad (1.6)$$

где C – массовая концентрация углерода каждой из трёх рассматриваемых фаз, при этом коэффициенты диффузии D принимаются зависящими от температуры (уравнение Аррениуса):

$$D(T) = D_0 \exp\left(-\frac{E}{kT}\right), \quad (1.7)$$

где D_0 – фактор диффузии, E – соответствующая энергия активации реакции диссоциации (ассоциации) углерода, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.

При задании начальных условий считается, что температура системы в начальный момент времени постоянна во всех точках:

$$\tau = 0: \ T_1 = T_2 = T_3 = T_0. \quad (1.8)$$

Также в начальный момент времени заданы значения массовых концентраций углерода во всех фазах:

$$\tau = 0: \ C_1 = C_{01};\ C_2 = C_{02};\ C_3 = C_{03}. \quad (1.9)$$

При этом на границах фаз $x = 0$ и $x = L_1$ должны быть реализованы условия неразрывности потока массы:

$$D(T)_i \frac{\partial C_i}{\partial x} = D(T)_j \frac{\partial C_j}{\partial x}. \quad (1.10)$$

2 Моделирование и область применения модели

Представленную дифференциальную задачу (1.1)–(1.5) можно аппроксимировать конечно-разностной схемой, выполненной с первым порядком точности по времени t и вторым по пространственным координатам x и r. При этом была выбрана неявная разностная схема, поскольку она является наиболее устойчивой [7], т. е. позволяет проводить интегрирование краевой задачи с любым малым разностным шагом по времени.

Поскольку теплофизические свойства алмаза существенно изменяются в исследуемых температурных режимах, то это было учтено в линейном приближении следующим образом: коэффициент теплопроводности $\lambda(T) = 628 - 0{,}148 \cdot T$ Вт/(м·К) и удельная теплоёмкость $c = 344 + 1{,}445 \cdot T$ Дж/(кг·К) [8].

В среде Mathcad были разработаны файлы-сценарии для динамического моделирования температурного поля представленной двумерной осесимметричной задачи. Это позволило, варьируя существенные параметры в широком диапазоне, получать мгновенные значения диффузионных коэффициентов в любых точках рассматриваемой трёхфазной системы, в том числе и на границах раздела фаз. Фрагмент файла-сценария представлен на рисунке 2.1.

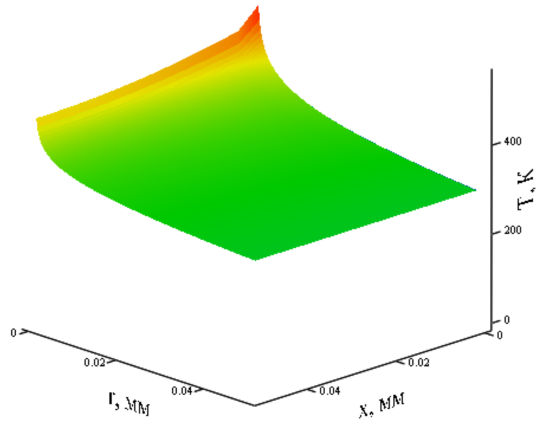
$$
\begin{aligned}
T :=\ & time \leftarrow 0 \\
& \text{while } time < t\_end \\
& \quad time \leftarrow time + \tau \\
& \quad \alpha_1 \leftarrow \frac{2 \cdot a1 \cdot \tau}{2 \cdot a1 \cdot \tau + h^2} \\
& \quad \beta_1 \leftarrow \frac{h^2 \cdot T_1 + 2 \cdot a1 \cdot \tau \cdot h \cdot \frac{q}{\lambda 1}}{2 \cdot a1 \cdot \tau + h^2} \\
& \quad \text{for } i \in 2..N1 \\
& \quad\quad ai \leftarrow \frac{\lambda 1}{h^2}, bi \leftarrow \frac{2 \cdot \lambda 1}{h^2} + \frac{\rho 1 \cdot c1}{\tau}, ci \leftarrow \frac{\lambda 1}{h^2}, fi \leftarrow \frac{-\rho 1 \cdot c1 \cdot T_i}{\tau} \\
& \quad\quad \alpha_i \leftarrow \frac{ai}{\left(bi - ci \cdot \alpha_{i-1}\right)}, \beta_i \leftarrow \frac{ci \cdot \beta_{i-1} - fi}{bi - ci \cdot \alpha_{i-1}} \\
& \quad \lambda 2 \leftarrow \lambda\left(T_i\right), c2 \leftarrow c\left(T_i\right) \\
& \quad \alpha_{N1+1} \leftarrow \frac{2 \cdot a1 \cdot a2 \cdot \tau \cdot \lambda 2}{2 \cdot a1 \cdot a2 \cdot \tau \cdot \left[\lambda 2 + \lambda 1 \cdot \left(1 - \alpha_{N1}\right)\right] + h^2 \cdot (a1 \cdot \lambda 2 + a2 \cdot \lambda 1)} \\
& \quad \beta_{N1+1} \leftarrow \frac{2 \cdot a1 \cdot a2 \cdot \tau \cdot \lambda 1 \cdot \beta_{N1} + h^2 \cdot (a1 \cdot \lambda 2 + a2 \cdot \lambda 1) \cdot T_{N1+1}}{2 \cdot a1 \cdot a2 \cdot \tau \cdot \left[\lambda 2 + \lambda 1 \cdot \left(1 - \alpha_{N1}\right)\right] + h^2 \cdot (a1 \cdot \lambda 2 + a2 \cdot \lambda 1)} \\
& \quad \text{for } i \in N1 + 2..N - 1 \\
& \quad\quad ai \leftarrow \frac{\lambda 2}{h^2}, bi \leftarrow \frac{2 \cdot \lambda 2}{h^2} + \frac{\rho 2 \cdot c2}{\tau}, ci \leftarrow \frac{\lambda 2}{h^2}, fi \leftarrow \frac{-\rho 2 \cdot c2 \cdot T_i}{\tau} \\
& \quad\quad \alpha_i \leftarrow \frac{ai}{\left(bi - ci \cdot \alpha_{i-1}\right)}, \beta_i \leftarrow \frac{ci \cdot \beta_{i-1} - fi}{bi - ci \cdot \alpha_{i-1}} \\
& \quad T_N \leftarrow \frac{\lambda 2 \cdot h^2 \cdot T_N + 2 \cdot a2 \cdot \tau \cdot \left(\lambda 2 \cdot \beta_{N-1} + \kappa \cdot h \cdot Te\right)}{\lambda 2 \cdot h^2 + 2 \cdot a2 \cdot \tau \cdot \left[\lambda 2 \cdot \left(1 - \alpha_{N-1}\right) + \kappa \cdot h\right]} \\
& \quad \text{for } i \in N - 1, N - 2..1 \\
& \quad\quad T_i \leftarrow \alpha_i \cdot T_{i+1} + \beta_i \\
& T
\end{aligned}
$$

Рисунок 2.1 – Фрагмент файла-сценария для динамического моделирования температуры средствами Mathcad

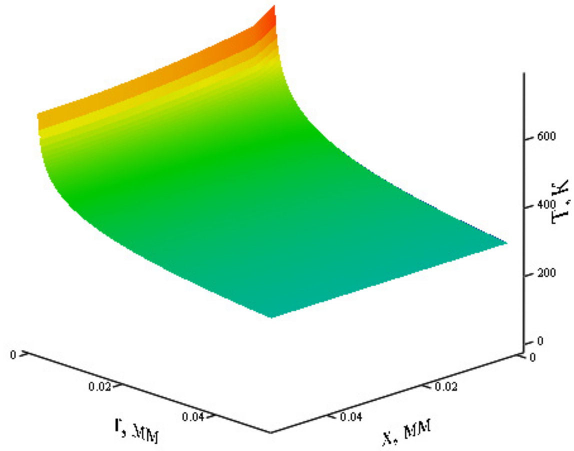
Разработанная модель позволяет определять осесимметричное распределение температуры в двухслойной системе («металл» – «алмаз») в любой момент времени в широком диапазоне интенсивностей лазерного излучения для произвольных зависимостей теплофизических параметров от температуры, а также для различных типов металлического покрытия.

На рисунке 2.2 представлены поля температур в координатах: x – глубина, r – радиус, для плотности мощности теплового источника $q = 10^6$ Вт/м^2 в различные моменты времени воздействия лазерного излучения.

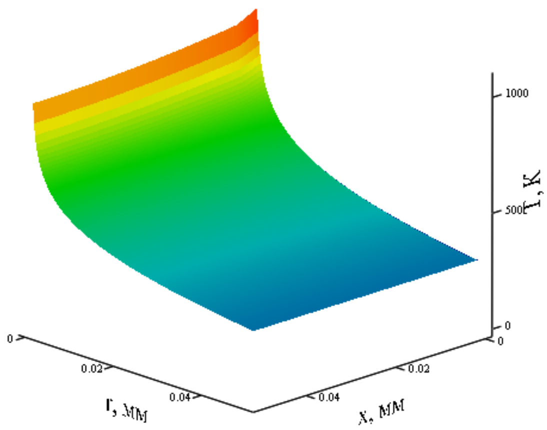
Полученные значения температуры позволяют на основании соотношений (7–10) оценить коэффициенты диффузии в любой точке исследуемой двухслойной системы в произвольный момент времени, а также оценить скорость диффузионных процессов в любой области системы.



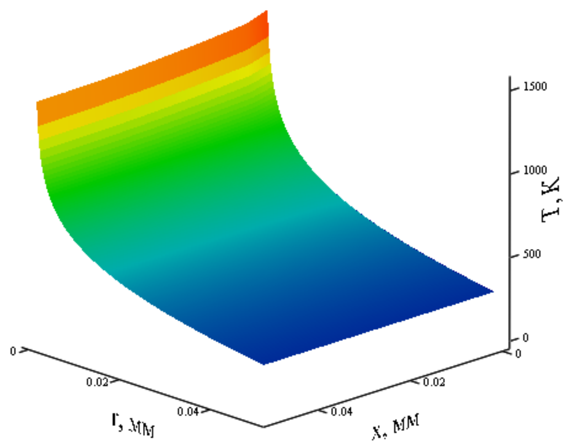
20 секунд воздействия



50 секунд воздействия



100 секунд воздействия



200 секунд воздействия

Рисунок 2.2 – Распределения температуры T (К) по объёму двухслойной системы «металл – алмаз» в различные моменты времени воздействия лазерного излучения

На рисунке 2.3 представлено распределение значений диффузионных коэффициентов D в различные моменты времени для плотности мощности теплового источника $q = 10^6$ Вт/м^2.

Представленная модель позволят также оценить зависимость диффузионных коэффициентов от толщины металлического покрытия кристаллов алмаза как непосредственно в самом покрытии, так и на границе раздела фаз «металл – алмаз». Что позволит сделать выводы об эффективности удаления алмаза методом лазерной термохимической обработки в зависимости от теплофизических и геометрических параметров металлического слоя.

На рисунке 2.4 представлена зависимость значений диффузионных коэффициентов на границе раздела фаз «металл – алмаз» от расстояния r до центра лазерного пятна на поверхности при различных значениях толщины h металлического покрытия при плотностях мощности поверхностного теплового источника $q = 10^6$ Вт/м^2 и $q = 10^5$ Вт/м^2, радиусе лазерного пятна на поверхности $r_0 = 100$ мкм.

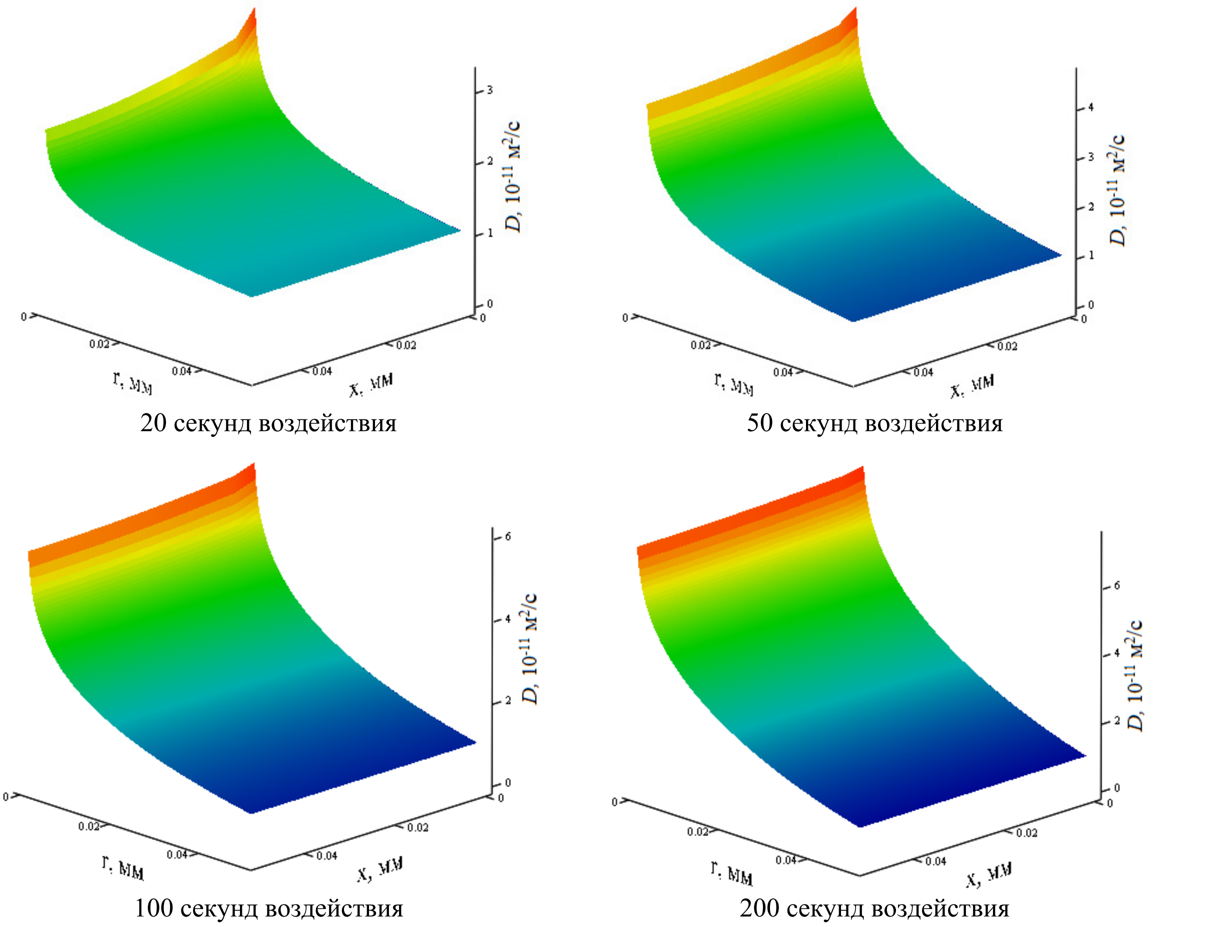
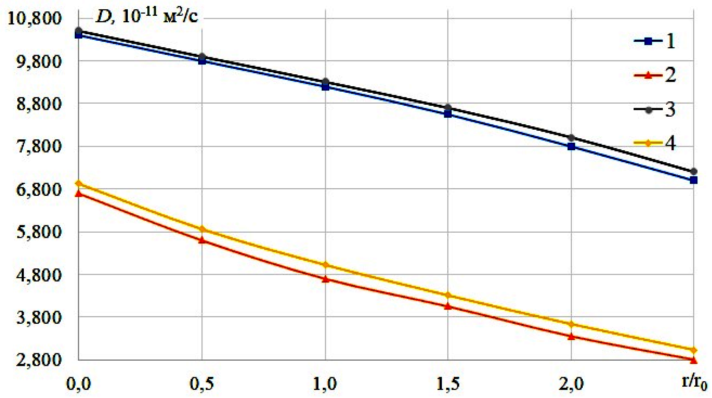


Рисунок 2.3 – Поле коэффициентов диффузии D (10^{-11} м^2/с) двухслойной системы «металл – алмаз» в различные моменты времени воздействия лазерного излучения



(1) $q = 10^6$ Вт/м^2, $h = 20$ нм; (2) – $q = 10^5$ Вт/м^2, $h = 50$ нм;
(3) $q = 10^6$ Вт/м^2, $h = 300$ нм; (4) – $q = 10^5$ Вт/м^2, $h = 500$ нм

Рисунок 2.4 – Зависимость значений диффузионных коэффициентов от толщины металлического покрытия h и плотности мощности теплового источника, сформированного лазерным излучением q

Результаты моделирования показали, при фиксированной плотности мощности лазерного теплового источника и изменении толщины металлического покрытия в 8–10 раз, изменение диффузионного коэффициента отличаются лишь на 2–3%. При этом показано, что при уменьшении плотности мощности теплового источника в пределах одного порядка диффузионные коэффициенты так же уменьшаются по абсолютному значению на 35–40% в пределах всей зоны термического влияния лазерного излучения. Этот факт, очевидно, свидетельствует о снижении интенсивности диффузионных процессов, а значит и уменьшении скорости удаления алмаза в целом.

3 Результаты и выводы

Разработана нестационарная двухмерная осесимметричная нелинейная математическая модель тепломассопереноса в системе водород – металл – алмаз, в которой учтены температурные зависимости теплофизических свойств и коэффициентов диффузии при нагреве поверхности металла лазерным излучением. Анализ результатов моделирования (в частности, значений диффузионных коэффициентов и соответствующей им интенсивности диффузионных процессов) в диапазоне плотностей мощности теплового источника $q = 10^4 – 10^7$ Вт/м^2 и толщин металлического покрытия $h = 10$ нм до 1 мкм позволяет установить наиболее эффективные режимы термохимической обработки и обеспечить скорость удаления алмаза $(1{,}2–1{,}8)\cdot10^{-10}$ кг/(м^2·с), минуя стадию графитизации при точности обработки $(10–30)\cdot10^{-6}$ м.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Митягин*, *А.Ю.* Технология и оборудование для обработки алмазных материалов современной техники / А.Ю. Митягин, А.А. Алтухов, А.Б. Митягина // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. – 2009. – № 1. – С. 53–58.

2. *Григорьев*, *А.П.* Механизм гидрирования углерода в присутствии никеля, железа и платины / А.П. Григорьев, С.У. Лифшиц, П.П. Шамаев // Кинетика и катализ. – 1977. – Т. 18, № 4. – С. 948–952.

3. *Изучение влияния параметров обработки на протекание поверхностных нанопроцессов при формообразовании синтетических алмазов* / В.А. Емельянов [и др.] // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2021. – № 6 (129). – С. 159–163.

4. *Термохимическая лазерная обработка монокристаллов алмаза* / В.А. Емельянов, Е.Б. Шершнев, А.Н Купо, С.И. Соколов // Квантовая электроника: материалы XIII Междунар. науч.-техн. конференции, Минск, 22–26 ноября 2021 г. / БГУ, НИИ прикладных физических проблем им. А.Н. Севченко БГУ, Ин-т физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Белорусский республиканский фонд фундаментальных исследований; [редкол.: М.М. Кугейко (отв. ред.), А.А. Афоненко, А.В. Баркова]. – Минск: БГУ, 2021. – С. 382–385.

5. *Взаимодействие лазерного излучения с металлами* / А.М. Прохоров [и др.]. – Бухарест: Academiei; Москва: Наука, 1988. – 537 с.

6. *Козлов*, *В.П.* Двумерные осесимметричные нестационарные задачи теплопроводности / В.П. Козлов; под ред. А.Г. Шашкова. – Минск: Наука и техника, 1986. – 392 с.

7. *Кузнецов*, *Г.В.* Разностные методы решения задач теплопроводности: учебное пособие / Г.В. Кузнецов, М.А. Шеремет. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 172 с.

8. *Физические свойства алмаза.* Справочник; под ред. академика АН УССР Н.В. Новикова. – «Навукова думка», 1987. – 188 с.

Поступила в редакцию 29.06.2023.

Информация об авторах

Шершнев Евгений Борисович – к.т.н., доцент

ТЕХНИКА

УДК 621.371:550.837.6 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_81
EDN: XIXGXE

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СВОЙСТВ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ НАД УГЛЕВОДОРОДНЫМИ ЗАЛЕЖАМИ В РЕЖИМЕ АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

В.Ф. Янушкевич[1], С.В. Калинцев[1], И.В. Судько[1], В.А. Богуш[2]

[1]*Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой*
[2]*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники*, *Минск*

DETERMINATION OF THE PROPERTIES OF THE ANISOTROPIC MEDIUM OVER HYDROCARBON RESERVES IN THE MODE OF AMPLITUDE-MODULATED SIGNALS

V.F. Yanushkevich[1], S.V. Kalintsev[1], I.V. Sudzko[1], V.A. Bogush[2]

[1]*Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk*
[2]*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics*, *Minsk*

Аннотация. Рассмотрен анализ воздействия амплитудно-модулированных сигналов на характеристики анизотропной среды над залежами нефти и газа на основе квазигидродинамического подхода. Исследованы компоненты поверхностного импеданса диэлектрической проницаемости среды, образующейся над углеводородными залежами. Проведено моделирование характеристик среды над скоплениями углеводородов для электромагнитных волн от частоты несущего колебания, коэффициента амплитудной модуляции, частоты модуляции и проводимости диэлектрического наполнителя. Рекомендованы режимы зондирований анизотропных сред над углеводородами на основе изменения абсолютной и фазовой составляющих компонент поверхностного импеданса подстилающей поверхности. Предложено внедрение различных методов и аппаратуры для повышения точности определения границ залежей углеводородов. Результаты исследований могут быть применены в поисковой геофизике.

Ключевые слова: *углеводородная залежь*, *электромагнитная волна*, *амплитудно-модулированный сигнал*.

Для цитирования: *Определение свойств анизотропной среды над углеводородными залежами в режиме амплитудно-модулированных сигналов* / В.Ф. Янушкевич, С.В. Калинцев, И.В. Судько, В.А. Богуш // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 81–87. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_81. – EDN: XIXGXE

Abstract. The analysis of the effect of amplitude-modulated signals on the characteristics of an anisotropic medium over oil and gas deposits based on a quasi-hydrodynamic approach is considered. The components of the surface impedance of the dielectric constant of the medium formed over the hydrocarbon deposits are investigated. The modeling of the characteristics of the medium above the accumulations of hydrocarbons for electromagnetic waves from the frequency of the carrier vibration, the amplitude modulation coefficient, the modulation frequency and the conductivity of the dielectric filler has been carried out. The modes of sounding of anisotropic media over hydrocarbons based on the changes in the absolute and phase components of the surface impedance of the underlying surface are recommended. The introduction of various methods and equipment is proposed to improve the accuracy of determining the boundaries of hydrocarbon deposits. The research results can be applied in exploration geophysics.

Keywords: *hydrocarbon reservoir*, *electromagnetic wave*, *amplitude-modulated signal.*

For citation: *Determination of the properties of the anisotropic medium over hydrocarbon reserves in the mode of amplitude-modulated signals* / V.F. Yanushkevich, S.V. Kalintsev, I.V. Sudzko, V.A. Bogush // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 3 (56). – P. 81–87. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_81 (in Russian). – EDN: XIXGXE

Введение

Актуальность усовершенствования электромагнитных методов (ЭММ) георазведки основывается на повышении точности и производительности разрабатываемых методов выделения углеводородов за счет расширения функциональной зависимости компонентов диэлектрической проницаемости среды над залежами от режимов зондирования [1], [2]. Разработка и модификация современных методов поиска и оконтуривания месторождений нефти и газа вызвана требованиями улучшения выделения границ и уровня идентификации месторождений углеводородных залежей (УВЗ) [3], [4]. Современное состояние науки и техники позволяет производить оценку возможностей использования высокоэффективных технологий поиска полезных ископаемых при освоении площадей с наличием углеводородных ресурсов. Достижение высоких показателей точности и идентификации возможно при поиске, оконтуривании залежей нефти и газа с помощью радиокомплексирования

ЭММ георазведки, где применена аналогия исследуемой среды над залежью нефти и газа с плазмоподобным образованием с использованием для изучения взаимодействия электромагнитных волн (ЭМВ) с УВЗ существующих решений при изучении плазмы и плазмоподобных сред. Установлено, что окружающее углеводороды пространство содержит твердый кристаллический скелет, пронизанный электролитом и проводящими включениями за счет минералов с электронной проводимостью, и находится в физическом и химическом равновесии с окружающей средой [5]. Направление тенденций развития поисковой геофизики акцентировано на решение задач внедрения эффективных методов георазведки с высоким уровнем точности и достоверности выделения месторождений УВЗ с использованием методов широкого спектра [6].

Дифференциация анизотропных сред может быть осуществлена на основе применения для обнаружения УВЗ методов 3D-электроразведки с становлением полей в исследуемой среде [7]. Выбор методов ЭММ и построение электродинамических моделей сред, образующихся над скоплениями нефти и газа, реализуется в различных модифицированных способах и средствах для реализации вертикального зондирования при поиске углеводородов [8]. Определение аномалий поля в анизотропной среде находит широкое использование для установления и дифференциации свойств геологического профиля местности [9].

Исследование влияния высокой температуры и пластовых давлений над УВЗ на электрохимические и электрофизические процессы и образование на границе с воздушным пространством промежуточной области с избытком свободных электронов, оказывающих воздействие на электродинамический отклик анизотропной среды, определяет методику проведения экспериментальных испытаний при радиоволновом зондировании [10]. Использование сложных амплитудно-частотно-модулированных сигналов и модификации способов поиска УВЗ на их базе построены на обнаружении месторождений углеводородов по регистрации амплитудных и фазовых компонент ЭМВ для исследуемого геологического участка местности [11]. Осуществление мониторинга коллекторов и геотермальных исследований среды на основе универсальных способов применяется в поисковой геофизике для решения поставленных задач электроразведки [12]. Высокие показатели и совместное применение морских магнитотеллурических и гравиметрических данных измерений с учетом сейсмических ограничений актуальны в современных системах поиска полезных ископаемых [13]. Активное внедрение различных методов и аппаратурных средств для обнаружения углеводородов основано на решении данных задач с достаточно хорошими характеристиками и оценке возможностей использования дистанционных технологий поиска полезных ископаемых при освоении углеводородных ресурсов на шельфах [14]. Применение квазигидродинамического подхода и исследование компонентов составляющих поверхностного импеданса анизотропной среды над УВЗ с учетом влияния на самый верхний слой от всех ниже расположенных слоев проведено в работе [15]. Активное внедрение методов исследования поверхностного импеданса и аппаратурных средств для обнаружения углеводородов основано на решении данных задач с высокой точностью обнаружения [16]. Внедряются различные методы и аппаратурные средства для обнаружения углеводородов на решении данных задач с достаточно хорошими характеристиками [17], [18].

1 Анализ взаимодействия амплитудно-модулированных сигналов с анизотропной средой над УВЗ

Взаимодействие амплитудно-модулированных (АМ) сигналов с анизотропным наполнителем над скоплением углеводородов рассмотрено в работе [4]. Для реализации новых методов электроразведки представляют интерес процессы взаимодействия АМ сигналов на основе получения дополнительных режимов взаимодействия.

Рассмотрим воздействие на анизотропную среду АМ радиосигнала следующего вида:

$$e(t) = E(1 + k_m \cos \Omega t) \cos \omega t, \tag{1.1}$$

где E – амплитуда несущего колебания; k_m – коэффициент амплитудной модуляции; $\Omega = 2\pi F$, $\omega = 2\pi f$ – соответственно модулирующая и несущая частоты. Компоненты тензора диэлектрической проницаемости среды для такого режима имеют вид [4]:

$$\begin{gathered}
\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_r + \sum_{i=1}^{2} \left\{ \omega_{\Pi i}^2 \frac{\omega_{\Gamma i}^2 - \omega^2 - \nu_i^{\,2}}{(\nu_i^{\,2} + \omega_{\Gamma i}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \nu_i^{\,2}} + \right. \\
+ j \left[\frac{\varepsilon_r k_m \Omega \sin \Omega t}{\omega \left(1 + k_m \cos \Omega t\right)} - \frac{\sigma_r}{\omega \varepsilon_0} - \right. \\
\left. \left. - \frac{\omega_{\Pi i}^2 \nu_i}{\omega} \frac{\omega^2 + \nu_i^{\,2} + \omega_{\Gamma i}^2}{(\nu_i^{\,2} + \omega_{\Gamma i}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \nu_i^{\,2}} \right] \right\}, \\
\dot{\varepsilon}_2 = \sum_{i=1}^{2} \left\{ \frac{\omega_{\Pi i}^2 \omega_{\Gamma i}}{\omega} \frac{\omega_{\Gamma i}^2 - \omega^2 + \nu_i^{\,2}}{(\nu_i^{\,2} + \omega_{\Gamma i}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \nu_i^{\,2}} - \right. \\
\left. - \frac{2 j \nu_i \, \omega_{\Pi i}^2 \omega_{\Gamma i}}{(\nu_i^{\,2} + \omega_{\Gamma i}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \nu_i^{\,2}} \right\}, \\
\dot{\varepsilon}_3 = \varepsilon_r + \sum_{i=1}^{2} \left\{ \omega_{\Pi i}^2 \frac{1}{\nu_i^{\,2} + \omega^2} + \right.
\end{gathered} \tag{1.2}$$

$$+j\left[\frac{\varepsilon_r k_m \Omega \sin\Omega t}{\omega(1+k_m\cos\Omega t)}-\frac{\sigma_r}{\omega\varepsilon_0}-\frac{\omega_{\Pi i}^2 \nu_i}{\omega}\frac{1}{\omega^2+\nu_i^2}\right]\Bigg\}.$$

В выражениях (1.2) фигурируют компоненты тензора диэлектрической проницаемости среды над УВЗ $\dot{\varepsilon}_1$, $\dot{\varepsilon}_2$, $\dot{\varepsilon}_3$ плазменная частота $\omega_{\Pi i}$; гиротропная частота $\omega_{\Gamma i}$; частота столкновения частиц ν_i; относительная диэлектрическая проницаемость среды ε_r; проводимость среды σ_r; диэлектрическая постоянная ε_0.

Методика исследований заключается в определении компонентов поверхностного импеданса среды над УВЗ по формулам:

$$\dot{Z}=\begin{bmatrix}\dot{Z}_{11} & \dot{Z}_{12}\\ \dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22}\end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Составляющие матрицы (1.3) рассчитываются по формулам:

$$\dot{Z}_{11}=\dot{Z}_{22}=-\frac{1}{2j\sqrt{\dot{\varepsilon}_R\dot{\varepsilon}_L}}\left(\sqrt{\dot{\varepsilon}_R}-\sqrt{\dot{\varepsilon}_L}\right),$$

$$\dot{Z}_{12}=\dot{Z}_{21}=\frac{1}{2\sqrt{\dot{\varepsilon}_R\dot{\varepsilon}_L}}\left(\sqrt{\dot{\varepsilon}_R}+\sqrt{\dot{\varepsilon}_L}\right), \tag{1.4}$$

где

$$\dot{\varepsilon}_R=\dot{\varepsilon}_1+\dot{\varepsilon}_2=\operatorname{Re}\varepsilon_R+j\operatorname{Im}\varepsilon_R$$
$$\dot{\varepsilon}_L=\dot{\varepsilon}_1-\dot{\varepsilon}_2=\operatorname{Re}\varepsilon_L+j\operatorname{Im}\varepsilon_L. \tag{1.5}$$

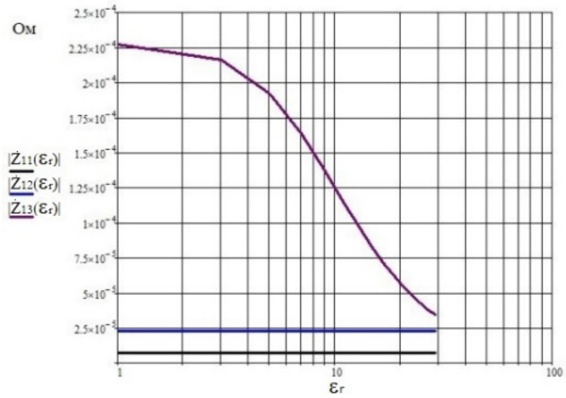
Проводился анализ составляющих поверхностного импеданса среды над УВЗ для параметров среды над залежами углеводородов [1]: значения диэлектрической проницаемости вмещающих пород $\dot{\varepsilon}_R=1-30$ и электрической проводимости $\sigma_r=10^{-5}-1$ См/м; концентрации частиц $N_e=N_u=10^{16}$ – 10^{18} м$^{-3}$, частота столкновения частиц $\nu=2\pi\cdot10^9$ рад/с.

2 Результаты исследований

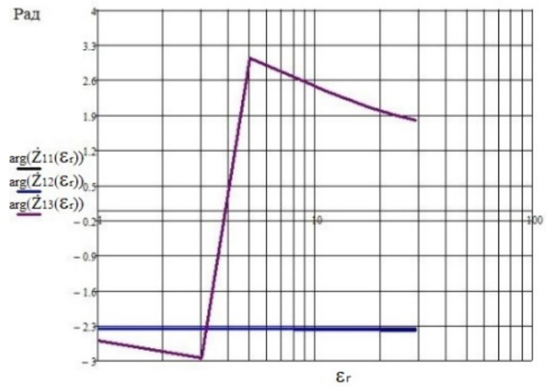
Проведен анализ выражений (1.4) для компонентов поверхностного импеданса среды над УВЗ. Зависимости абсолютной и фазовой составляющей компонент поверхностного импеданса приведены на рисунке 2.1 (*а* – абсолютная часть поверхностного импеданса, *б* – фазовая часть поверхностного импеданса). Как видно из рисунка, абсолютная составляющая поверхностного импеданса не подвержена влиянию низких частот зондирования. На частоте несущего колебания $f=10^8$ Гц с ростом диэлектрической проницаемости наполнителя происходит уменьшение рассматриваемой составляющей сопротивления анизотропной среды.

Как видно из рисунка, фазовая составляющая $\dot{Z}_{11}$ не изменяется при низких частотах несущего колебания, а с ростом частоты несущего колебания возрастает от отрицательных значений и имеет точку перехода через нуль при диэлектрической проницаемости, равной 4.

Зависимости абсолютной и фазовой составляющей компонент поверхностного импеданса $\dot{Z}_{21}$ приведены на рисунке 2.2. Как видно из рисунка, абсолютная составляющая $\dot{Z}_{21}$ поверхностного импеданса монотонна при низких частотах зондирования. На частоте несущего колебания $f=10^8$ Гц с ростом диэлектрической проницаемости наполнителя происходит уменьшение рассматриваемой составляющей сопротивления анизотропной среды, аналогично, как и для предыдущего случая. Как видно из рисунка, фазовая составляющая $\dot{Z}_{21}$ не изменяется при низких частотах несущего колебания, а с ростом частоты несущего колебания уменьшается с ростом диэлектрической проницаемости анизотропной среды над УВЗ.



а)



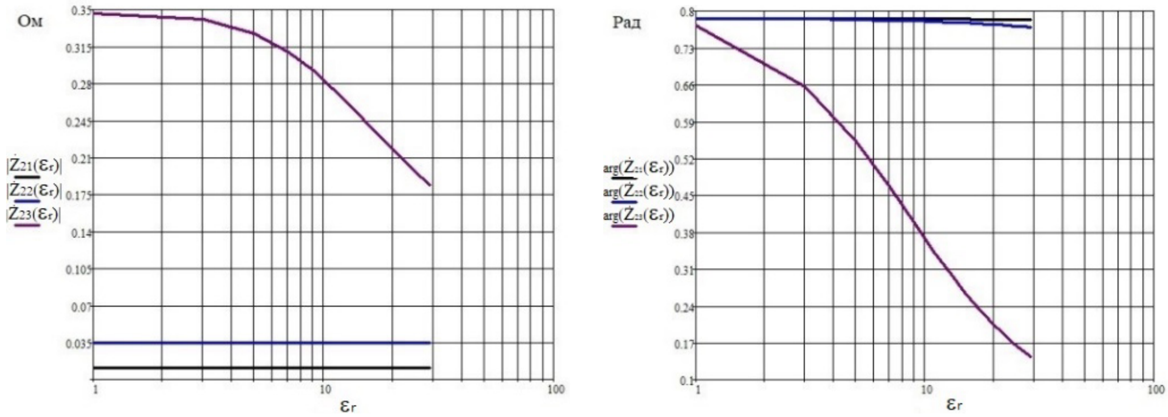
б)

Рисунок 2.1 – Зависимости абсолютной и фазовой составляющей компонент поверхностного импеданса: *а*) абсолютная часть поверхностного импеданса, *б*) фазовая часть поверхностного импеданса

$\left|\dot{Z}_{11}(\varepsilon_r)\right|$, $\arg\left(\dot{Z}_{11}(\varepsilon_r)\right)$ – для K_m = 0,5, $F=10^4$ Гц, $f=10^5$ Гц;

$\left|\dot{Z}_{12}(\varepsilon_r)\right|$, $\arg\left(\dot{Z}_{12}(\varepsilon_r)\right)$ – для K_m = 0,5, $F=10^4$ Гц, $f=10^6$ Гц;

$\left|\dot{Z}_{13}(\varepsilon_r)\right|$, $\arg\left(\dot{Z}_{13}(\varepsilon_r)\right)$ – для K_m = 0,5, $F=10^4$ Гц, $f=10^8$ Гц



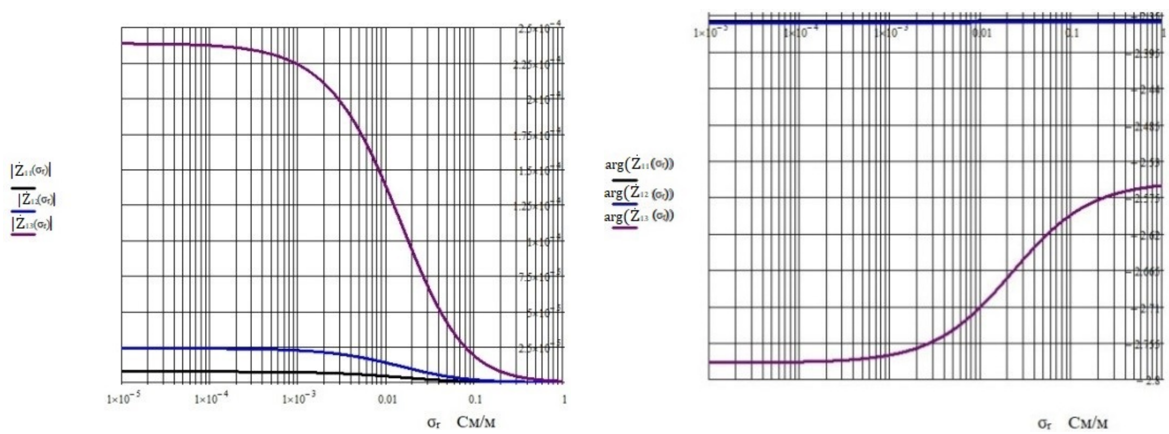
а) *б*)

Рисунок 2.2 – Зависимости абсолютной и фазовой составляющей компонент поверхностного импеданса: *а*) абсолютная часть поверхностного импеданса, *б*) фазовая часть поверхностного импеданса

$$\left|\dot{Z}_{21}(\varepsilon_r)\right|,\ \arg\left(\dot{Z}_{21}(\varepsilon_r)\right) \text{ – для } K_m = 0{,}5,\ F = 10^4 \text{ Гц},\ f = 10^5 \text{ Гц};$$

$$\left|\dot{Z}_{22}(\varepsilon_r)\right|,\ \arg\left(\dot{Z}_{22}(\varepsilon_r)\right) \text{ – для } K_m = 0{,}5,\ F = 10^4 \text{ Гц},\ f = 10^6 \text{ Гц};$$

$$\left|\dot{Z}_{23}(\varepsilon_r)\right|,\ \arg\left(\dot{Z}_{23}(\varepsilon_r)\right) \text{ – для } K_m = 0{,}5,\ F = 10^4 \text{ Гц},\ f = 10^8 \text{ Гц}$$



а) *б*)

Рисунок 2.3 – Зависимости абсолютной и фазовой составляющей компонент поверхностного импеданса: *а*) абсолютная часть поверхностного импеданса, *б*) фазовая часть поверхностного импеданса

$$\left|\dot{Z}_{11}(\sigma_r)\right|,\ \arg\left(\dot{Z}_{11}(\sigma_r)\right) \text{ – для } K_m = 0{,}5,\ F = 10^4 \text{ Гц},\ f = 10^5 \text{ Гц};$$

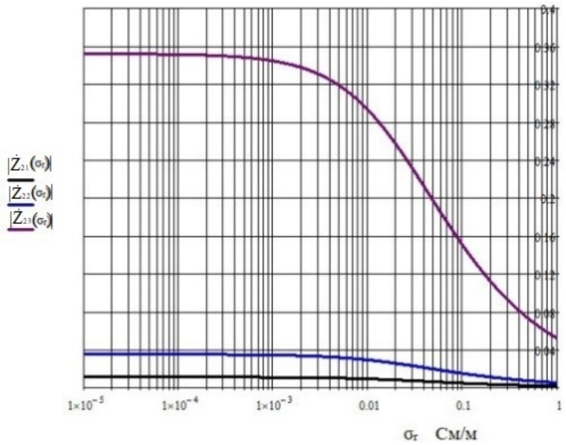
$$\left|\dot{Z}_{12}(\sigma_r)\right|,\ \arg\left(\dot{Z}_{12}(\sigma_r)\right) \text{ – для } K_m = 0{,}5,\ F = 10^4 \text{ Гц},\ f = 10^6 \text{ Гц};$$

$$\left|\dot{Z}_{13}(\sigma_r)\right|,\ \arg\left(\dot{Z}_{13}(\sigma_r)\right) \text{ – для } K_m = 0{,}5,\ F = 10^4 \text{ Гц},\ f = 10^8 \text{ Гц}$$

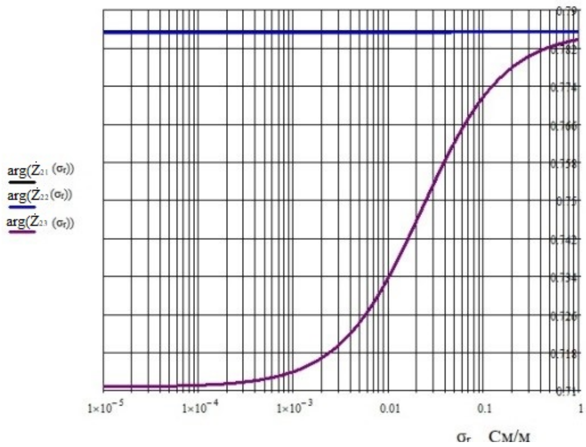
Проведено моделирование зависимостей абсолютной и фазовой составляющей компонент поверхностного импеданса (рисунок 2.3) от проводимости анизотропной среды над УВЗ. Установлено, что низкие значения частоты несущего колебания не влияют ни на амплитудную, ни на фазовые компоненты рассматриваемой составляющей.

Применение частоты несущего колебания $f = 10^8$ Гц расширяет информативность результатов моделирования. Изменения происходят на отрезке (0,001 – 1) См/м, что и актуально для исследования характера проводимости окружающего углеводороды пространства.

Процедура диагностики среды над УВЗ осуществляется по методике решения обратной задачи за счет набора конкретных значений расстояний и конкретизации электродинамических моделей УВЗ с учетом влажности слоев, климатических факторов и особенностей измерений сезонного характера. Было установлено, что вариации частоты несущей АМ колебания не влияет ни на амплитудные, ни на фазовые составляющие поверхностного импеданса (согласно рисунков 2.5, 2.6).



а)



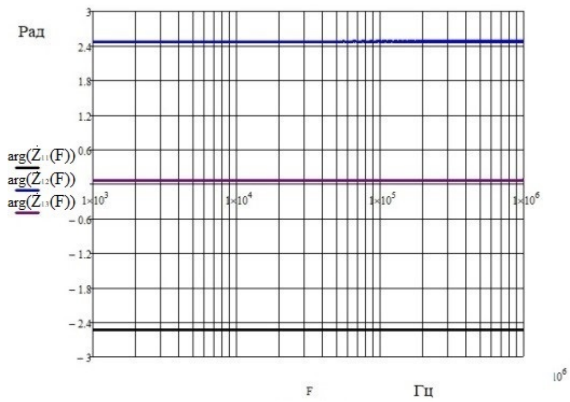
б)

Рисунок 2.4 – Зависимости абсолютной и фазовой составляющей компонент поверхностного импеданса: *а*) абсолютная часть поверхностного импеданса, *б*) фазовая часть поверхностного импеданса

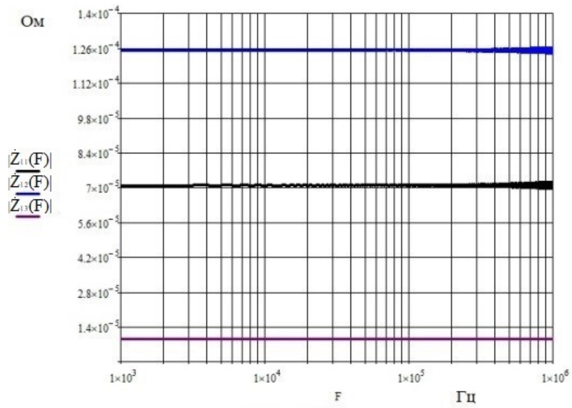
$$\left|\dot{Z}_{21}(\sigma_r)\right|,\ \arg\left(\dot{Z}_{21}(\sigma_r)\right) \text{ – для } K_m = 0{,}5,\ F = 10^4 \text{ Гц}, f = 10^5 \text{ Гц};$$

$$\left|\dot{Z}_{22}(\sigma_r)\right|,\ \arg\left(\dot{Z}_{22}(\sigma_r)\right) \text{ – для } K_m = 0{,}5,\ F = 10^4 \text{ Гц}, f = 10^6 \text{ Гц};$$

$$\left|\dot{Z}_{23}(\sigma_r)\right|,\ \arg\left(\dot{Z}_{23}(\sigma_r)\right) \text{ – для } K_m = 0{,}5,\ F = 10^4 \text{ Гц}, f = 10^8 \text{ Гц}$$



а)



б)

Рисунок 2.5 – Зависимости абсолютной и фазовой составляющей компонент поверхностного импеданса: *а*) абсолютная часть поверхностного импеданса, *б*) фазовая часть поверхностного импеданса

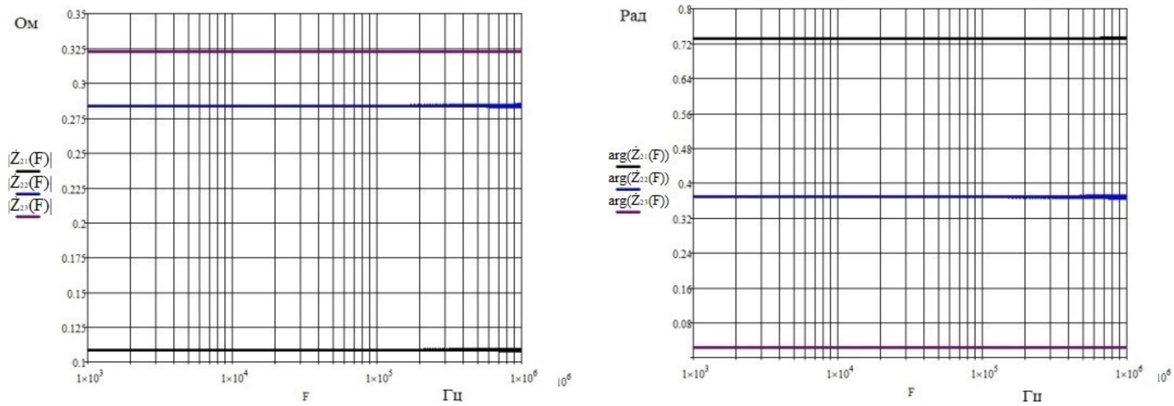
$$\left|\dot{Z}_{11}(F)\right|,\ \arg\left(\dot{Z}_{11}(F)\right) \text{ – для } K_m = 0{,}5,\ \varepsilon_r = 10, f = 10^7 \text{ Гц};$$

$$\left|\dot{Z}_{12}(F)\right|,\ \arg\left(\dot{Z}_{12}(F)\right) \text{ – для } K_m = 0{,}5,\ \varepsilon_r = 10, f = 10^8 \text{ Гц};$$

$$\left|\dot{Z}_{13}(F)\right|,\ \arg\left(\dot{Z}_{13}(F)\right) \text{ – для } K_m = 0{,}5,\ \varepsilon_r = 10, f = 10^9 \text{ Гц}$$

Поверхностный импеданс содержит различные структуры кристаллического скелета. Возможен учет влияния электролитов, пронизывающих скелет и проводящих включений за счет минералов с электронной проводимостью. Также было установлено, что коэффициент АМ не влияет на характеристики поверхностного импеданса, за исключением вариации несущего колебания, когда такое влияние имеется. Импедансные характеристики среды над УВЗ дают качественную и количественную оценку электродинамических параметров сред за счет выделения аномальных эффектов при распространении ЭМВ над данной средой. Анализ взаимодействия АМ сигналов показал, что режимы модуляции вызывают в компонентах тензоров диэлектрической проницаемости дополнительные составляющие, которые зависят от параметров сигналов (только в режиме изменения несущего колебания). Все это приводит к расширению функциональных зависимостей компонентов тензоров от режимов модуляции, позволяя тем самым повысить информативность разрабатываемых методов поиска УВЗ.

На основе проведённых исследований взаимодействия ЭМВ и АС предложены новые методы электроразведки, позволяющие повысить уровень достоверности поиска и выделения УВЗ.



а) *б*)

Рисунок 2.6 – Зависимости абсолютной и фазовой составляющей компонент поверхностного импеданса: *а*) абсолютная часть поверхностного импеданса, *б*) фазовая часть поверхностного импеданса

$$\left|\dot{Z}_{21}(F)\right|,\ \arg\left(\dot{Z}_{21}(F)\right) \text{ – для } K_m = 0{,}5,\ \varepsilon_r = 10, f = 10^7 \text{ Гц};$$

$$\left|\dot{Z}_{22}(F)\right|,\ \arg\left(\dot{Z}_{22}(F)\right) \text{ – для } K_m = 0{,}5,\ \varepsilon_r = 10, f = 10^8 \text{ Гц};$$

$$\left|\dot{Z}_{23}(F)\right|,\ \arg\left(\dot{Z}_{23}(F)\right) \text{ – для } K_m = 0{,}5,\ \varepsilon_r = 10, f = 10^9 \text{ Гц}$$

Заключение

Проведенный анализ распространения ЭМВ в среде над углеводородами в режиме АМ сигналов показал, что:

1. На частоте несущего колебания $f = 10^8$ Гц происходит изменение абсолютной и фазовой составляющих компонент поверхностного импеданса анизотропной среды над углеводородами.

2. Импедансные характеристики среды над УВЗ дают качественную и количественную оценку при значениях проводимости диэлектрического наполнителя на отрезке (0,001 – 1) См/м.

3. Вариации частоты модуляции, коэффициента АМ колебаний не влияет ни на амплитудные, ни на фазовые составляющие поверхностного импеданса, за исключением режима изменения несущей частоты колебания, когда такая зависимость имеется.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Moskvichew*, *V.N.* Interraction of electromagnetic waves (EMW) with anisotropic inclusion in communication line / V.N. Moskvichew // 9-th Microw. Conf. NICON – 91, Rydzyna, May 20-22. – 1991. – Vol. 1. – P. 240–244.

2. *Бурцев*, *М.И.* Поиски и разведка месторождений нефти и газа / М.И. Бурцев. – Москва: Издательство Российского университета дружбы народов, 2006. – 264 с.

3. *Гололобов*, *Д.В.* Взаимодействие электромагнитных волн и углеводородных залежей / Д.В. Гололобов. – Минск: Бестпринт, 2009. – 185 с.

4. *Янушкевич*, *В.Ф.* Электромагнитные методы поиска и идентификации углеводородных залежей / В.Ф. Янушкевич. – Новополоцк: ПГУ, 2017. – 232с.

5. *Гололобов*, *Д.В.* Радиокомплексирование методов электромагнитной разведки при поиске залежей углеводородов / Д.В. Гололобов // Доклады БГУИР. – 2008. – № 8 (38). – С. 30–36.

6. *Subsalt imaging in Northern Germany using multi-physics* (*magnetotellurics*, *gravity*, *and seismic*) / C.H. Henke, M. Krieger, K. Strack, A. Zerilli // Interpretatio. – 2020. – Vol. 8, № 4. – P. 15–24.

7. *Anderson*, *C.* An integrated approach to marine electromagnetic surveying using a towed streamer and source / C. Anderson, J. Mattsson // First Break. – 2010. – First Break. – Vol. 28, iss.5. – P. 71–75.

8. *Helwig*, *S.L.* Vertical-vertical controlled-source electromagnetic instrumentation and acquisition / S.L. Helwig, W. Wood, B.Gloux // Geophysical Prospecting. – 2019. – Vol. 67, № 6. – P. 1582–1594.

9. *Frasheri*, *A.* Self-potential anomaleies as possible indicators in search for oil and gas reservoirs / A. Fresheri // 57th EAGE Conf. and Tech. Exib., Glasgow, 29 May – 2 June 1995. – Glasgow, UK. – P. 8.

10. *Гололобов*, *Д.В.* Поиски, разведка и мониторинг залежей нефти, газа и угля радиоволновым методом / Д.В. Гололобов, А.А. Кураев, Ю.Н. Стадник // Геологической службе России 300 лет: тез. докл. междунар. геофиз. конф.; гл. ред. А.А. Петров [и др.]. – Санкт-Петербург, 2005 г. – ВИРГ – Рудгеофизика, 2000. – С. 171.

11. *Степуленок*, *С.В.* Взаимодействие амплитудно-частотно-модулированных сигналов со средой над углеводородными залежами / С.В. Степуленок, В.Ф. Янушкевич // Вестник ПГУ. Серия С. Фундаментальные науки. Физика. – 2009. – № 9. – С. 103–108.

12. *Geldmacher*, *I.A*. Fit-for-purpose electromagnetic System for Reservoir Monitoring and Geothermal Exploration / I.A. Geldmacher, K. Strack // GRC Transactions. – 2017. – Vol. 41. – P. 1649–1658.

13. *Совместная инверсия морских магнитотеллурических и гравиметрических данных с учетом сейсмических ограничений - предварительные результаты построения изображений суббазальтов у Фарерского шельфа* / М. Джеген, Р.В. Хобс, П. Тариц, А. Чаве // Планета Земля Sci Lett. – 2009. – С. 47–55.

14. *Оценка возможностей использования дистанционных технологий поиска полезных ископаемых при освоении углеводородных ресурсов на шельфах. Оптика атмосферы и океана* / Н.И. Ковалев, Т.А. Филимонова, В.А. Гох [и др.] // Материалы III Всерос. конф. «Добыча, подготовка, транспортировка нефти и газа». – Томск, 20–24 сент. 2004 г. – Томск: Ин-т оптики атмосферы СО РАН, 2004. – С. 67–70.

15. *Adamovskiy*, *E*. Simulation of electromagnetic waves interaction with hydrocarbon deposits / E. Adamovskiy, V. Yanushkevich // 8 Junior researchers conference European and national dimension in research. In 3 Parts. – Part 3. Technology. – PSU, Novopolotsk, 2016. – P. 179–183.

16. *Гололобов*, *Д.В*. Импедансные граничные условия анизотропной среды для амплитудно-модулированного сигнала / Д.В. Гололобов, В.Ф. Янушкевич, С.В. Калинцев // Доклады БГУИР. – 2010. – № 6 (52). – С. 13–17.

17. *Time lapse CSEM reservoir monitoring of the Norne field with vertical dipoles* / T. Holten, X. Luo, G. Naevdal, S.L. Helwig // SEG Technical Program Expanded Abstracts. – 2016. – Vol. 35. – P. 971–975.

18. *Констебл*, *С*. Десять лет морской CSEM для разведки углеводородов / С. Констебл // Геофизика. – 2010. – Т. 75. – № 5.

Поступила в редакцию 26.06.2023.

Информация об авторах

Янушкевич Виктор Францевич – к.т.н., доцент
Калинцев Сергей Викторович – ст. преподаватель
Судько Илья Вячеславович – студент
Богуш Вадим Анатольевич – д.ф.-м.н., профессор

ИНФОРМАТИКА

УДК 004.67

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_88
EDN: XKUAHU

ТЕХНОЛОГИЯ СМЕШАННОГО ОБУЧЕНИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ОПИСАТЕЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СТАТИСТИЧЕСКОЙ ВЫБОРКИ

О.М. Демиденко[1], **А.И. Якимов**[2], **Е.А. Якимов**[2], **К.Г. Тищенко**[2]

[1]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*
[2]*Белорусско-Российский университет*, *Могилёв*

BLENDED LEARNING TECHNOLOGY IN THE STUDY OF DESCRIPTIVE CHARACTERISTICS OF A STATISTICAL SAMPLE

O.M. Demidenko[1], **A.I. Yakimov**[2], **Y.A. Yakimov**[2], **K.G. Tishchenko**[2]

[1]*Francisk Skorina Gomel State University*
[2]*Belarusian-Russian University*, *Mogilev*

Аннотация. Представлено содержательное описание смешанного обучения, отмечены основные элементы смешанной модели обучения и методики: ротация, перевёрнутый класс, индивидуальный план, гибкая модель. Выполнен анализ информационно-коммуникационных технологий и интернет-ресурсов с наборами данных для решения задачи статистической обработки данных. На примере решения задачи определения описательных характеристик статистической выборки применяется язык программирования R с набором библиотек: WDI, xtable, openxlsx, psych, sm, ggplot2, tidyverse, dunn.test, rstatix, ggpubr. Показана реализация парсинга данных с интернет-ресурса открытых данных Всемирного банка (data.worldbank.org). Разработан скрипт на языке программирования R для нахождения описательных характеристик статистической выборки. Предложена технология применения информационно-коммуникационных технологий для образовательного процесса при изучении статистических методов обработки данных.

Ключевые слова: *смешанное обучение*, *информационно-коммуникационные технологии*, *парсинг*, *язык программирования R*, *описательные характеристики выборки данных.*

Для цитирования: *Технология смешанного обучения при изучении описательных характеристик статистической выборки* / О.М. Демиденко, А.И. Якимов, Е.А. Якимов, К.Г. Тищенко // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 88–94. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_88. – EDN: XKUAHU

Abstract. A substantive description of blended learning is presented, the main elements of the blended learning model and methodology are noted: rotation, flipped class, individual plan, flexible model. The analysis of information and communication technologies and Internet resources with data sets for solving the problem of statistical data processing is performed. On an example of solving the problem of determining the descriptive characteristics of the statistical sample there is used programming language R with a set of libraries: WDI, xtable, openxlsx, psych, sm, ggplot2, tidyverse, dunn.test, rstatix, ggpubr. The implementation of parsing data from the World Bank's open data web resource (data.worldbank.org) is shown. The script in the programming language R for finding descriptive characteristics of the statistical sample is developed. The technology of using information and communication technology for the educational process in the study of statistical methods of data processing is proposed.

Keywords: *blended learning*, *information and communication technology*, *parsing*, *R programming language*, *descriptive data sampling characteristics.*

For citation: *Blended learning technology in the study of descriptive characteristics of a statistical sample* / O.M. Demidenko, A.I. Yakimov, Y.A. Yakimov, K.G. Tishchenko // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 3 (56). – P. 88–94. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_88 (in Russian). – EDN: XKUAHU

Введение

Использование информационно-коммуникационных технологий (ИКТ) в образовании позволяет развивать интеллектуальные и творческие способности студентов и помогает им формировать умения самостоятельно приобретать новые знания. Для этого используются различные инструменты, такие как виртуальная реальность, интеллектуальные агенты, учебные игры, машинное обучение и искусственный интеллект. Также используются цифровые технологии и инструменты, такие как глобальная сеть Интернет, электронные учебные пособия, репозитории, платформы и каталоги. Все эти инструменты помогают преподавателям более эффективно организовывать и проводить занятия, создавать разнообразные интерактивные уроки и предоставлять мотивацию обучаемым [1].

Смешанное обучение (англ. Blended Learning) – это образовательная концепция, в рамках которой студент получает знания и самостоятельно онлайн, и очно с преподавателем. Среди преимуществ смешанного обучения подчеркивается следующее: встраивание технологии асинхронной интернет-коммуникации в образовательные курсы способствует получению одновременно независимого и совместного учебного опыта. Замечено, что использование информационных и коммуникационных технологий улучшает отношение к получению знаний, а также качество коммуникации между студентами и преподавателями [2].

Целями данной статьи являются обзор моделей смешанного обучения и разработка на их основе методики применения информационно-коммуникационных технологий для повышения эффективности изучения статистических методов обработки данных.

1 Модели смешанного обучения

На сегодняшний день существует около сорока моделей смешанного обучения. В вузах чаще всего используют следующие методики и их подвиды: ротация; перевёрнутый класс; индивидуальный план; гибкая модель.

Основными компонентами смешанной модели обучения являются [3]:

1. Лекционные занятия: материалы лекций оформлены в виде презентаций и/или онлайн курса.

2. Семинарские занятия (face-to-face sessions): занятия могут быть объединены с лекционными, при этом обсуждаются наиболее важные темы дисциплины, а также отрабатываются практические навыки.

3. Учебные материалы дисциплин (учебники и методические пособия): материалы представлены в печатном и в электронном виде, используются различные мультимедийные приложения.

4. Онлайн-общение с преподавателями и студентами.

5. Индивидуальные и групповые онлайн-проекты (collaboration): развитие навыков работы в интернете, анализа информации из различных источников, работы вместе с группой, распределения обязанностей и ответственности за выполнение работы.

6. Виртуальная классная комната: общение студентов с преподавателем с помощью различных средств интернет-коммуникаций.

7. Аудио и видеолекции, анимации и симуляции.

Контент для организации самостоятельной работы обучаемых в электронной среде включает: дидактические ресурсы – электронный учебник, презентации преподавателя, тематики контрольных, самостоятельных, курсовых работ, виртуальных семинаров, ссылки на интернет-ресурсы, список литературы и другие материалы; знания, создаваемые в процессе обучения и доступные для других участников учебного процесса; результаты выполненных заданий, групповые работы, презентации, доклады [2].

Исследования показывают, что студенты с высокими и средними показателями склонны увеличивать использование виртуальной обучающей среды (англ. Virtual Learning Environment), чтобы компенсировать недостаток преподавания, в то время как студенты с низкими показателями сокращают свой доступ, возможно, из-за более низкого уровня самоэффективности и саморегуляции. Эти результаты показывают, что преподавателям необходимо рассмотреть вопрос о разработке обучающих методик для поддержки студентов, когда обучение должно осуществляться через асинхронную онлайн-среду обучения. Например, преподавателям следует предоставлять четкое руководство по структурированию учебной деятельности [4].

Принятую модель смешанного обучения по эффективности классифицируют как малоэффективную, среднеэффективную и высокоэффективную в зависимости от значимости последующих изменений в программе преподавания и результатов обучения студентов. На эффективность модели смешанного обучения влияет опыт преподавателя и его знания в области информационно-коммуникационных технологий [5], [6].

В работе использована модель *ES* смешанного обучения: *ES* = <*S*, *T*, *M*, *R*, *C*> (рисунок 1.1).

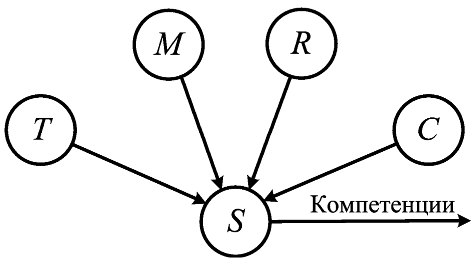


Рисунок 1.1 – Модель смешанного обучения

В модели ES (рисунок 1.1) основными компонентами являются: *S* – студент, *T* – преподаватель, *M* – мультимедийные средства, *R* – язык программирования *R*, *C* – облако данных.

2 Обзор и анализ информационных технологий

Облако данных в модели *ES* (рисунок 1.1) реализуется через сервисы Всемирного банка, который уже много лет собирает по каждой стране большие объемы статистической информации о структуре их экономики, показатели для оценки уровня экономического развития и многое другое. Кроме того, это одна из крупнейших мировых международных финансовых организаций, которая финансирует десятки проектов по всему миру. В начале 2010 года Всемирным банком был создан и открыт в интернете портал Data.worldbank.org. Этот сайт является центром открытой информации в машиночитаемом виде и предоставляет данные по следующим показателям: Сельское хозяйство и развитие сельских районов (Agriculture & Rural Development), Эффективность помощи (Aid Effectiveness), Изменение климата (Climate Change), Экономика и рост (Economy & Growth), Образование (Education), Энергетика и горнодобывающая промышленность (Energy & Mining), Окружающая среда (Environment), Внешний долг (External Debt), Финансовый сектор (Financial Sector), Гендер (Gender), Здоровье (Health), Инфраструктура (Infrastructure), Бедность (Poverty), Частный сектор (Private Sector), Государственный сектор (Public Sector), Наука и технологии (Science & Technology), Социальное развитие (*Social Development*), Социальная защита и труд (Social Protection & Labor), Торговля (Trade), Городское развитие (Urban Development).

Каждый из показателей имеет свои значения. Например, значения показателя *Social Development*: Коэффициент подростковой рождаемости (рождений на 1000 женщин в возрасте 15–19 лет) (Adolescent fertility rate (births per 1,000 women ages 15–19)), Дети в сфере занятости, женщины (% детей женского пола в возрасте 7–14 лет) (Children in employment, female (% of female children ages 7–14)), Дети в сфере занятости, мужчины (% детей мужского пола в возрасте 7–14 лет) (Children in employment, male (% of male children ages 7–14)), Дети в сфере занятости, всего (% детей в возрасте 7–14 лет) (Children in employment, total (% of children ages 7–14)), Уровень участия в рабочей силе, женщины (% женского населения в возрасте 15+) (смоделированная оценка МОТ) (Labor force participation rate, female (% of female population ages 15+) (modeled ILO estimate)), Уровень участия в рабочей силе, мужчины (% мужского населения в возрасте 15+) (смоделированная оценка МОТ) (Labor force participation rate, male (% of male population ages 15+) (modeled ILO estimate)), Ожидаемая продолжительность жизни при рождении, женщины (лет) (Life expectancy at birth, female (years)), Ожидаемая продолжительность жизни при рождении, мужчины (лет) (*Life expectancy at birth, male (years)*), Распространенность ВИЧ, женщины (% в возрасте 15–24) (Prevalence of HIV, female (% ages 15–24)), Распространенность ВИЧ, мужчины (% в возрасте 15–24) (Prevalence of HIV, male (% ages 15–24)) и др.

R – язык программирования, созданный для статистической обработки и анализа данных. Он поддерживает многочисленные методы анализа, содержит статистические тесты и технологии для формирования графиков. Функционал применяется для сравнения выборок, обнаружения причинно-следственных связей, визуализации данных в виде графиков и отчетов, работы с таблицами. Кроме того, R имеет большое сообщество пользователей и разработчиков, которые создают и поддерживают пакеты и библиотеки для решения различных задач [7].

Перечень пользовательских R-библиотек для получения и обработки данных [8]: WDI – библиотека, предоставляющая доступ к данным World Development Indicators; xtable – предоставляет функции для экспорта данных в виде таблиц HTML, LaTeX и Text; openxlsx – содержит функции для чтения, записи и форматирования файлов Excel; psych – функции для психологических и психометрических исследований; sm – функции для сглаживания и построения графиков данных; ggplot2 – мощная и гибкая библиотека построения графиков; tidyverse – набор инструментов для манипулирования данными, исследования и визуализации; dunn.test – функции для тестов множественного сравнения Данна (Тест Данна используется для детального исследования различий между медианами групп. Он проверяет, какие из групп действительно отличаются друг от друга, и позволяет установить причину этих различий. Тест Данна может быть использован для анализа данных, полученных из нескольких независимых групп); rstatix – функции для манипулирования данными, статистических тестов и построения графиков; ggpubr – функции для создания графиков, готовых к публикации.

Парсинг данных – это автоматизированный сбор и систематизация информации из открытых источников с помощью скриптов. Он может использоваться для анализа текста, изображений, веб-страниц и других данных. Например, можно использовать парсинг данных для извлечения информации из сайта и использования ее для создания аналитической модели. Существуют программы для парсинга: Scraper API, iDatica, Octoparse, ParseHub, Scrapy, Diffbot, Cheerio и др.

Для извлечения данных (парсинга) с портала Data.worldbank.org используется прямое обращение к R-библиотеке WDI (рисунок 2.1).

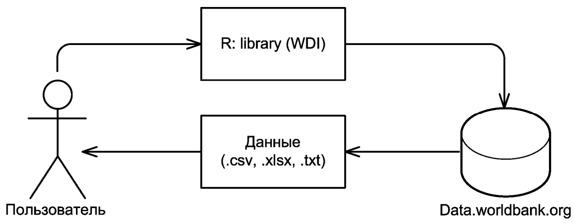


Рисунок 2.1 – Парсинг данных с применением библиотеки WDI

Для библиотеки WDI передаются соответствующие параметры: indicator – показатель, по которому осуществляется выборка данных; country – страны, по которым выполняется выборка; start и end – годы начала и конца периода, по которым выбираются данные; extra – при установке значения TRUE возвращает дополнительную информацию, такую как регион, уровень дохода и др. [8].

3 Технология определения описательных характеристик статистической выборки

Описательные характеристики статистической выборки делят на две основные группы: меры центральной тенденции и характеристики вариации. Центральную тенденцию выборки позволяют оценить среднее арифметическое значение, мода, медиана. К характеристикам вариации исследуемых данных относят размах варьирования, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации, стандартную ошибку средней арифметической.

В соответствии с моделью смешанного обучения для определения описательных характеристик в образовательном процессе используются информационно-коммуникационные технологии: интернет-данные, парсинг данных, библиотеки языка программирования R.

Методика получения данных по заданному параметру и выбранному значению.

Шаг 1. Загрузить и подключить пользовательские R-библиотеки:

```
library(WDI)
library(xtable)
library(openxlsx)
library(psych)
library(sm)
library(ggplot2)
library(tidyverse)
library(dunn.test)
library(rstatix)
library(ggpubr).
```

Шаг 2. Создаётся выборка по данным портала Data.worldbank.org, например, с именем collection:

```
collection <-WDI(indicator = "SP.DYN.LE00.MA.IN",
country ="all", start=2015, end=2020, extra=TRUE)
```

где indicator = "SP.DYN.LE00. MA.IN" – код значения Ожидаемая продолжительность жизни при рождении, мужчины (лет) (*Life expectancy at birth, male (years)*) показателя Социальное развитие (*Social Development*);

country ="all" – выбраны все страны;

start = 2015 – выбираются данные с 2015 года;

end = 2020 – выбираются данные по 2020 год;

extra = TRUE – выбираются дополнительные данные.

Шаг 3. На основе подготовленной выборки для каждого года ставится задача провести статистический анализ с помощью R:

– привести описательную статистику.

– построить гистограмму распределения, подобрав соответствующее число интервалов разбиения;

– проверить гипотезу о принадлежности нормальному закону распределения.

Шаг 3.1. Определяем описательные характеристики выборки collection.

Пусть, например, требуется провести анализ данных по состоянию на 2020 год.

Разобьём всю выборку collection на подмножества в зависимости от уровня дохода в странах и определим дополнительные переменные для анализа данных: collection_INCOME1 – страны с высоким доходом, collection_INCOME2 – страны с низким доходом, collection_INCOME3 – страны с доходом ниже среднего, collection_INCOME4 – страны с доходом выше среднего):

```
collection_INCOME1<-subset
(collection,income=="High income"&year==2020)
collection_INCOME2<-subset
(collection,income=="Low income"&year==2020)
collection_INCOME3<-subset
(collection,income=="Lower middle
income"&year==2020)
collection_INCOME4<-subset
(collection,income=="Upper middle
income"&year==2020)
collection_INCOME<-subset
(collection,year==2020&income!="Aggregates").
```

После выполнения операции создания переменных в области Environment в R studio отобразятся дополнительные переменные (рисунок 3.1).

collection	1596 obs. of 13 variables
collection_INCOME	216 obs. of 13 variables
collection_INCOME1	79 obs. of 13 variables
collection_INCOME2	28 obs. of 13 variables
collection_INCOME3	54 obs. of 13 variables
collection_INCOME4	54 obs. of 13 variables

Рисунок 3.1 – Выборки с именами collection, collection_INCOME (INCOME1, …, INCOME4)

Можно отметить наличие несовпадения в количестве стран относительно объема выборок collection_INCOME1 – collection_IN-COME4 и выборки collection_INCOME. Это обусловлено тем, что у Венесуэлы нет данных по уровню дохода за 2020 год и она не была отнесена ни к одной выборке по уровню дохода.

Расчет арифметической средней, медианы, дисперсии, стандартного отклонения, а также минимального и максимального значений в R выполняют функции mean(), median(), var(), sd(), min() и max() соответственно. В системе R имеется возможность и более быстрого расчета основных параметров описательной статистики. Для этого, в частности, служит функция общего назначения summary():

summary(collection_INCOME1$SP.DYN.LE00.MA.IN)
summary(collection_INCOME2$SP.DYN.LE00.MA.IN)
summary(collection_INCOME3$SP.DYN.LE00.MA.IN)
summary(collection_INCOME4$SP.DYN.LE00.MA.IN).

Одной строки кода достаточно для получения минимального (Min) и максимального (Max) значений collection_INCOME1 – collection_INCOME4, медианы (Median), арифметической средней (Mean), первого (1st Qu.) и третьего (3rd Qu.) квартилей, а также для определения количества отсутствующих значений (NA's) (рисунок 3.2).

```
> summary(collection_INCOME1$SP.DYN.LE00.MA.IN)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.    NA's 
  69.10   73.78   78.26   77.10   80.03   82.90       9 
> summary(collection_INCOME2$SP.DYN.LE00.MA.IN)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max. 
  51.22   57.81   59.75   59.90   61.86   70.79 
> summary(collection_INCOME3$SP.DYN.LE00.MA.IN)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max. 
  51.96   62.03   66.63   65.65   69.04   75.64 
> summary(collection_INCOME4$SP.DYN.LE00.MA.IN)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.    NA's 
  58.81   66.61   69.81   69.35   72.72   78.85       4 
```

Рисунок 3.2 – Описательные характеристики выборок collection_(INCOME1, ..., INCOME4)

Шаг 3.2. Выполним построение гистограмм распределения исследуемых выборок.

Вызываем функцию hist, параметром которой является переменная с кодом значения показателя, в данном случае код значения Ожидаемая продолжительность жизни при рождении, мужчины (лет) (*Life expectancy at birth, male (years)*) – SP.DYN.LE00.MA.IN:

hist(collection_INCOME1$SP.DYN.LE00.MA.IN)
hist(collection_INCOME2$SP.DYN.LE00.MA.IN)
hist(collection_INCOME3$SP.DYN.LE00.MA.IN)
hist(collection_INCOME4$SP.DYN.LE00.MA.IN)

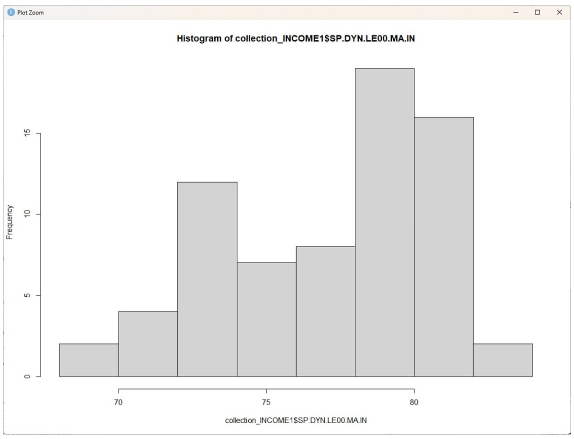
Гистограммы распределения исследуемых выборок представлены на рисунке 3.3.

Шаг 3.3. Проверим гипотезу принадлежности полученных распределений нормальному закону распределения.

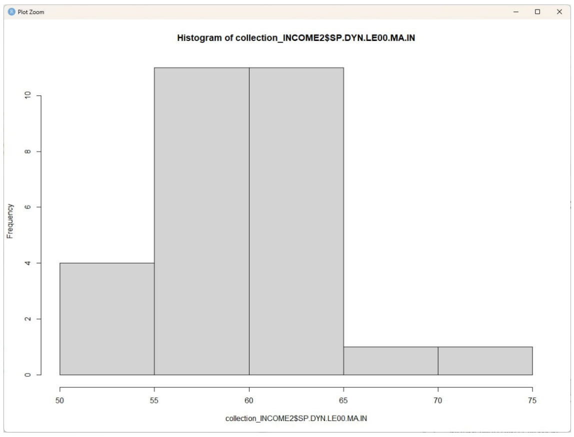
Для проверки гипотезы о принадлежности нормальному закону распределения используется тест Шапиро-Уилка, который реализуется в R через функцию shapiro.test():

shapiro.test(collection_INCOME1$SP.DYN.LE00.MA.IN)
shapiro.test(collection_INCOME2$SP.DYN.LE00.MA.IN)
shapiro.test(collection_INCOME3$SP.DYN.LE00.MA.IN)
shapiro.test(collection_INCOME4$SP.DYN.LE00.MA.IN)

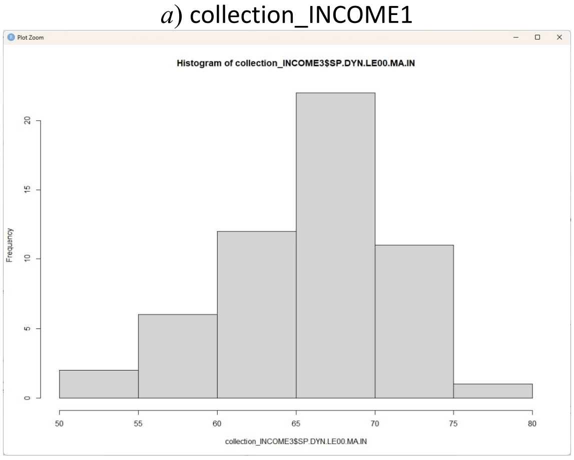
Для проверки случайной величины на нормальность распределения, нулевая H0 и альтернативная H1 гипотезы формулируются следующим образом:



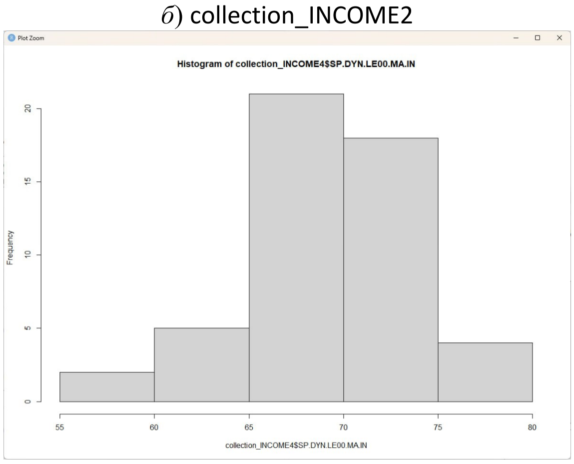
а) collection_INCOME1



б) collection_INCOME2



в) collection_INCOME3



г) collection_INCOME4

Рисунок 3.3 – Гистограммы распределения исследуемых выборок collection_(INCOME1, ..., INCOME4)

H0: Случайная величина распределена по нормальному закону;

H1: Случайная величина не распределена по нормальному закону.

Функция shapiro.test(x) принимает на вход выборку объема не меньше 3 и не больше 5000, возвращает список со следующими компонентами: statistic – значение статистики теста, которую принято обозначать символом W; p.value – апроксимация p-value для полученного значения статистики; method – строка с названием теста; data.name – имя переменной, содержащей выборку, которая была передана функции shapiro.test в качестве аргумента (рисунок 3.4).

```
> shapiro.test(collection_INCOME1$SP.DYN.LE00.MA.IN)
        Shapiro-Wilk normality test
data:  collection_INCOME1$SP.DYN.LE00.MA.IN
W = 0.93376, p-value = 0.001121
> shapiro.test(collection_INCOME2$SP.DYN.LE00.MA.IN)
        Shapiro-Wilk normality test
data:  collection_INCOME2$SP.DYN.LE00.MA.IN
W = 0.95868, p-value = 0.3243
> shapiro.test(collection_INCOME3$SP.DYN.LE00.MA.IN)
        Shapiro-Wilk normality test
data:  collection_INCOME3$SP.DYN.LE00.MA.IN
W = 0.96528, p-value = 0.1188
> shapiro.test(collection_INCOME4$SP.DYN.LE00.MA.IN)
        Shapiro-Wilk normality test
data:  collection_INCOME4$SP.DYN.LE00.MA.IN
W = 0.98149, p-value = 0.6163
```

Рисунок 3.4 – Результаты оценивания выборок по критерию Шапиро – Уилка

В данном случае (рисунок 3.4) при уровне значимости, например, $\alpha = 0{,}05$ для выборки collection_INCOME1 гипотезу H0 следует отклонить (так как p – value < α), а для остальных H0 должна быть принята.

4 Результаты и их обсуждение

Разработанные R-скрипты для получения описательных характеристик статистических выборок применены при анализе данных, полученных с портала Data.worldbank.org.

Для расчета арифметической средней, медианы, дисперсии, стандартного отклонения, а также минимального и максимального значений в R служат функции mean(), median(), var(), sd(), min() и max() соответственно.

Специальной функции для расчета стандартной ошибки средней в R нет, однако для этого вполне подойдут уже имеющиеся функции. Как известно, стандартная ошибка средней рассчитывается как отношение стандартного отклонения к квадратному корню из объема выборки.

Квантили рассчитываются в R при помощи функции quantile(). При настройках, заданных по умолчанию, выполнение указанной команды приведет к расчету минимального и максимального значений, а также трех квартилей, т. е. значений, которые делят выборку на четыре равные части. Функция quantile() позволяет рассчитать и другие квантили. Например, децили, т. е. значения, делящие выборку на десять частей.

Рассмотренные выше функции позволяют получить достаточно полное представление об анализируемых выборках. Однако специальные функции для расчета некоторых параметров описательной статистики не входят в базовую версию R, например, коэффициенты эксцесса (англ. kurtosis) и асимметрии (skewness) – параметры, характеризующие форму распределения. Можно рассчитать эти величины по соответствующим формулам или воспользоваться имеющимися дополнительными пакетами для R, например, пакетом moments.

Кроме базовой функции shapiro.test(), при помощи которой можно выполнить широко используемый тест Шапиро – Уилка, в R реализованы практически все имеющиеся тесты на нормальность [9] – либо в виде стандарных функций, либо в виде функций, входящих в состав отдельных пакетов. Например, функции из пакета nortest реализуют следующие распространенные тесты на нормальность (установить этот пакет можно командой install.packages("nortest")):

ad.test() – тест Андерсона – Дарлинга;

cvm.test() – тест Крамера-фон Мизеса;

lillie.test() – тест Колмогорова – Смирнова в модификации Лиллие-форса;

pearson.test() – критерий хи-квадрат Пирсона;

sf.test() – тест Шапиро – Франсия.

Заключение

Смешанное обучение комбинирует в себе элементы традиционного присутственного обучения и онлайн-обучения, что может иметь множество преимуществ при изучении статистических методов обработки данных.

Модель *ES* смешанного обучения реализована при изучении статистических методов обработки данных с использованием R-скриптов и парсинга данных портала Data.worldbank.org при изучении описательных характеристик исследуемых выборок.

Применение смешанного обучения позволяет студентам развивать навыки самостоятельной работы, практику работы с языками программирования и информационно-коммуникационными технологиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мендель, В.В.* Аспекты использования информационно-компьютерных технологий в образовательном процессе / В.В. Мендель, О.А. Тринадцатко // Современные проблемы науки и образования. – 2020. – № 2. – Режим доступа: https://science-education.ru/ru/article/view?id=29755. – Дата доступа: 02.03.2023.

2. *Фомина*, *А.С.* Смешанное обучение в вузе: институциональный, организационно-технологический и педагогический аспекты / А.С. Фомина // Теория и практика общественного развития. – 2014. – № 21. – С. 272–279.

3. *Нагаева*, *И.А.* Смешанное обучение в современном образовательном процессе: необходимость и возможности / И.А. Нагаева // Отечественная и зарубежная педагогика. – 2016. – № 6. – С. 56–67.

4. *Hands*, *C.* How Does Student Access to a Virtual Learning Environment (VLE) Change During Periods of Disruption? / C. Hands, M. Limniou // Journal of Higher Education. Theory and Practice. – 2023. – № 23 (2). – P. 18–34.

5. *Alammary*, *A.* Blended learning in higher education: Three different design approaches / A. Alammary, J. Shepard, A. Carbone // Australasian Journal of Educational Technology. – 2014. – № 30 (4). – P. 440–454.

6. *Broadbent*, *J.* Comparing online and blended learner's self-regulated learning strategies and academic performance / J. Broadbent // The Internet and Higher Education. – 2017. – № 33. – P. 24–32. – DOI: 10.1016/j.iheduc. 2017.01.004.

7. *Venables*, *W.N.* An introduction to R. Notes on R: A Programming Environment for Data Analysis and Graphics / W.N. Venables, D.M. Smith, R Core Team. – CRAN, 2020. – 105 p.

8. *Лонг*, *Дж.Д.R.* Книга рецептов: проверенные рецепты для статистики, анализа и визуализации данных / Дж.Д. Лонг, Пол Титор: пер. с англ. Д.А. Беликова. – Москва: ДМК Пресс, 2020. – 510 с.

9. *Thode*, *H.C.* Testing For Normality / H.C. Thode. – New York: Taylor & Francis Limited. – 2019. – 368 p.

Поступила в редакцию 10.06.2023.

Информация об авторах

Демиденко Олег Михайлович – д.т.н., профессор
Якимов Анатолий Иванович – д.т.н., доцент
Якимов Евгений Анатольевич – к.т.н.
Тищенко Кристина Геннадьевна – магистрантка

УДК 004.942 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_95
EDN: YPKQTQ

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ АДЕКВАТНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИЗОБРАЖЕНИЯ

А.В. Сергеенко, А.Ю. Липлянин, А.В. Хижняк

Военная академия Республики Беларусь, *Минск*

METHOD FOR CALCULATING THE ADEQUACY PARAMETERS OF IMAGE MATHEMATICAL MODEL

A.V. Sergeyenko, A.Y. Liplyanin, A.V. Khijnyak

Military Academy of Belarus, *Minsk*

Аннотация. Представлена структура искусственной нейронной сети оценки сходства двух изображений, сравнение качества ее работы с другими критериями сходства изображений. На основе предложенной искусственной нейронной сети разработана методика оценки адекватности математических моделей изображения путем оценки их сходства с реальными изображениями. Проведено сравнение оценки адекватности математической модели изображений классическим методом и с использованием предложенной методики на примере Гауссовской математической модели изображения.

Ключевые слова: *моделирование изображений*, *оценка адекватности модели*, *искусственные нейронные сети*, *оценка сходства.*

Для цитирования: *Сергеенко*, *А.В.* Методика расчета параметров адекватности математической модели изображения / А.В. Сергеенко, А.Ю Липлянин, А.В. Хижняк // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 95–99. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_95. – EDN: YPKQTQ

Abstract. A structure of an artificial neural network for assessing the similarity of a pair of images, comparing the quality of its work with other criteria for image similarity are presented. Based on the proposed artificial neural network, a methodology for estimating the adequacy of mathematical image model by the estimation of its similarity to real images has been developed. A comparison of the estimation of the adequacy of the mathematical image model by the classical method and using the proposed methodology on the example of a Gaussian mathematical image model has ben conducted.

Keywords: *image modeling*, *model adequacy estimate*, *artificial neural networks*, *similarity estimate*.

For citation: *Sergeyenko*, *A.V.* Method for calculating the adequacy parameters of image mathematical model / A.V. Sergeyenko, A.Y. Liplyanin, A.V. Khijnyak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 3 (56). – P. 95–99. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_95 (in Russian). – EDN: YPKQTQ

Введение

Отсутствие универсальных алгоритмов обработки изображений вынуждает для каждой разрабатываемой (модернизируемой) оптико-электронной системы адаптировать существующие или синтезировать новые алгоритмы обработки изображений, исходя из задач и условий работы системы. Для экономии временных и материальных ресурсов при первичном анализе алгоритмов обработки изображений используется математическое моделирование работы системы в заданных условиях [1]. Для получения результатов близких к реальным требуется, чтобы математическая модель была адекватна условиям работы системы. Для оценки адекватности математической модели производится сравнение показателей качества работы алгоритмов обработки изображений на реальной системе и на экспериментальной модели. Считается, что если расхождение между показателями, полученными на реальных данных и на моделируемых не превышает 10–15 %, то модель можно считать адекватной [2, с. 18].

Однако в ряде случаев такой подход к оценке адекватности не представляется возможным в связи с отсутствием требуемых алгоритмов обработки изображений. Например, на сегодняшний день отсутствуют алгоритмы обнаружения (малоразмерных, малоконтрастных) объектов на гиперспектральных изображениях при съемке с наземного или низколетящего носителя. Это обусловлено тем, что гиперспектральные изображения, как правило, используют при анализе поверхности на больших удалениях, например, из космоса.

В связи с этим возникает необходимость оценить адекватность разрабатываемой математической модели изображения в условиях отсутствия целевых алгоритмов его обработки. Решению данной задачи и будет посвящена эта статья.

1 Критерии сходства изображений

Предположим, что адекватной математической моделью изображений является та, в которой сформированное изображение максимально схоже с реальным по заданным критериям качества и результат обработки сгенерированного изображения схож с результатом обработки реального изображения. Критерии качества выбираются, исходя из решаемой задачи. Классические критерии качества изображения и их применимость описаны в [3]–[5]. К ним относят: среднеквадратическая ошибка (*MSE*); пиковое отношение сигнала к шуму (*PSNR*); норма Минковского (*L2*) и индекс структурного сходства (*SSIM*).

В практических задачах поиска похожих изображений широко распространены критерии, сравнивающие значение хэш-функции от изображений (*mediumHash* и *pHash*) [6]. Перспективными критериями сходства считают [7]: искусственные нейронные сети (далее – ИНС); классификаторы на основе машинного обучения, такие как машина опорных векторов (*SVM*), ближайшие соседи (*kNN*) и др.

Ввиду того, что готовые критерии сходства на основе ИНС либо имеют закрытый исходный код и не дают возможность провести обучение ИНС на собственном наборе данных, или имеют сложную структуру, которую нельзя обучить на имеющемся в нашем распоряжении наборе данных, разработаем критерий самостоятельно.

2 Структура нейронной сети оценки сходства двух изображений

Структурная схема предлагаемой ИНС оценки сходства двух изображений представлена на рисунке 2.1.

Из рисунка 2.1 видно, что ИНС можно условно разделить на две части:

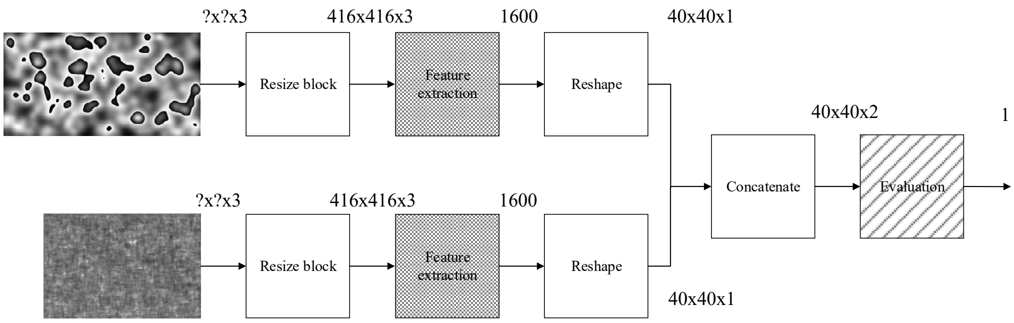
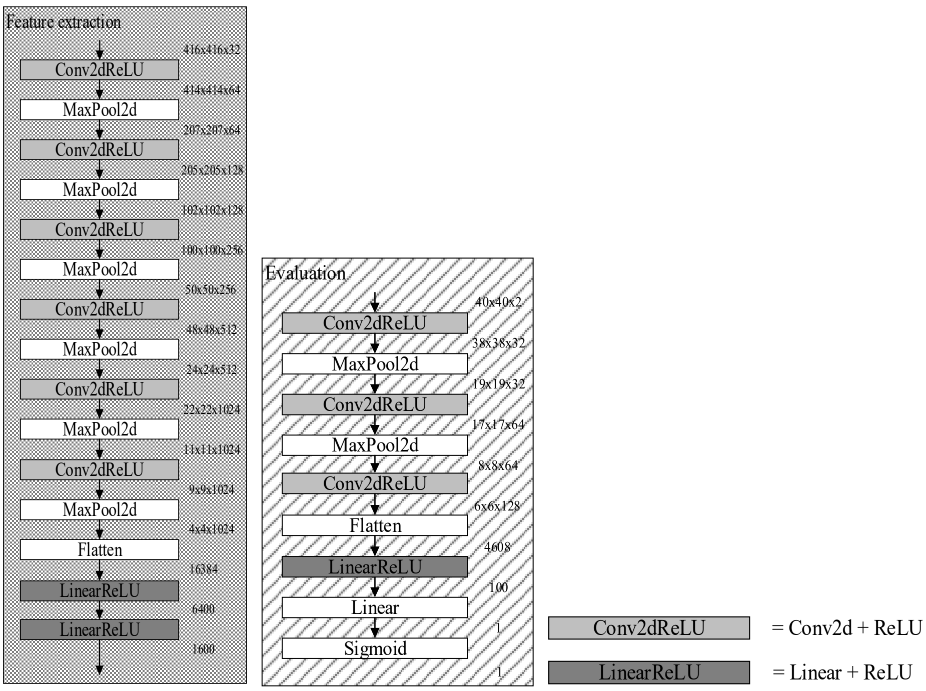


Рисунок 2.1 – Структурная схема ИНС оценки сходства двух изображений



а) *б*) *в*)

Рисунок 2.2 – Структурная схема блоков ИНС: извлечения признаков (*а*), оценки сходства признаков (*б*), составных частей модулей извлечения признаков и оценки их сходства (*в*)

– первая часть – сиамская сеть для извлечения информационных признаков изображения, включающая в себя приведение исходных изображений к единому размеру (Resize block), непосредственно извлечение информационных признаков (Feature extraction) и изменение размерности (Reshape);

– вторая часть – классификатор, оценивающий сходства, включающий блок конкатенации карт признаков от двух изображений и блок оценки сходства.

Структурные схемы блоков извлечения признаков, оценки их сходства представлены на рисунках 2.2, *а* и *б* соответственно. На рисунке 2.2, *в* представлены структуры составных частей блоков извлечения признаков и оценки их сходства. Подробное описание используемых слоев приведено в [8].

Функционирование представленной ИНС также можно представить в виде двух этапов. На первом этапе на вход подается 2 трехканальных *RGB*-изображения. Далее оба изображения приводятся к единому размеру – 416×416 пикселей, после чего изображения поступают на блок извлечения признаков, выходом блока является одномерный вектор, включающий 1600 признаков изображения. После одномерный вектор преобразуется в двумерную матрицу размерностью 40×40. На этом завершается работа сиамской ИНС.

На втором этапе полученные две двухмерные матрицы признаков изображений объединяются в один трехмерный тензор – 40×40×2. Далее полученный тензор подается на вход блока оценки сходства выходом которого является число находящиеся в диапазоне от 0 до 1. Чем ближе результат к единице, тем более схожими являются изображения, при этом необходимо отметить, что если результат равен 1, то это не означает, что входные изображения являются идентичными.

3 Оценка критериев сходства изображений

Оценим применимость показателей схожести изображения. Для этого применим следующие показатели качества [1]:

– точность определения схожих изображений – отношение числа пар изображений, верно детектированных как схожие к общему числу пар изображений, детектированных как схожие;

– полнота определения схожих изображений – отношение числа пар изображений, верно детектированных как схожие к числу пар схожих изображений;

– точность определения различных изображений – отношение числа пар изображений, верно детектированных как различные к общему числу пар изображений, детектированных как различные;

– полнота определения различных изображений – отношение числа пар изображений, верно детектированных как различные к числу пар различных изображений.

В качестве тестовых данных будут использоваться пары изображений из набора данных, состоящего из изображений 6-ти классов, каждый класс представлен 360-ю изображениями. Сами классы представлены распространенными математическими моделями изображений: Гауссова модель изображений, Марковские случайные поля, случайные поля Гибса, дваждыстахостическая модель, дваждыстахостическая модель с квантованием по уровню, волновая модель [1], [9, с. 43], [10, с. 20].

Для начала работы тестовую выборку необходимо разбить на пары таким образом, что пары с четными номерами являются изображениями одного класса – схожие изображения, а пары с нечетными номерами – изображениями разных классов – различные изображения. Далее пары изображений поступают на вход проверяемого критерия, по результатам оценки которого рассчитываются метрики качества.

Результаты оценки критериев сходства изображений на тестовом наборе данных представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Результаты оценки критериев сходства изображений на тестовом наборе данных

Критерий сходства	Точность определения схожих изображений	Полнота определения схожих изображений	Точность определения различных изображений	Полнота определения различных изображений
MSE	0,55	0,91	0,73	0,23
PSNR	0,7	0,73	0,7	0,68
L2	0,68	0,51	0,6	0,76
SSIM	0,5	0,97	0,5	0,03
medium-Hash	0,52	0,16	0,5	0,85
pHash	0,4	0,13	0,47	0,8
ИНС	0,94	0,93	0,89	0,9

Как видно из таблицы 3.1 лучшие результаты были получены при использовании критерия на основе ИНС, в связи с чем в основе методики оценки адекватности математической модели будет применятся именно ИНС оценки сходства двух изображений. Поскольку нельзя принять решение об адекватности математической модели по результатам одного сравнения, разработаем методику, выполняющую сравнение серии изображений.

4 Методика оценки адекватности математической модели изображения

В основе методики используется *k*-кратная перекрестная проверка для ИНС оценки сходства двух изображений [11]. На рисунке 4.1 представлен алгоритм методика оценки адекватности математической модели изображения с реальными изображениями.

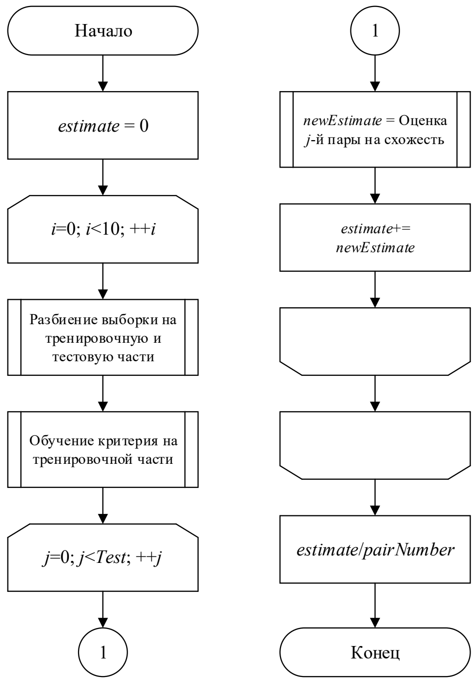


Рисунок 4.1 – Методика оценки адекватности математической модели изображения с реальными изображениями

В соответствии с рисунком 4.1 для оценки адекватности математической модели изображения требуется:

1) выделить переменную *estimate*, которая необходима для хранения текущей суммы оценок сходства двух изображений;

2) выполнить разбиение набора данных на 10 равных частей таким образом, чтобы в каждой части было равное число реальных изображений и изображений проверяемой математической модели;

3) выделить 1-ю часть набора как тестовую, а 2 – 10-ю как тренировочную;

4) провести обучение ИНС на тренировочной части набора данных. При этом изображения разбиваются на пары так, чтобы пары с четными номерами являлись изображениями одного класса, а пары с нечетными номерами – изображениями разных классов;

5) провести проверку обученной ИНС, при этом результат оценки каждой пары суммируется к переменной *estimate*. При этом изображения разбиваются на пары таким образом, чтобы каждая пара являлась изображениями разных классов;

6) выполнить пункты 3 – 5 для оставшихся частей набора данных;

7) разделить итоговую сумму оценки сходства *estimate* на общее число пар изображений.

Если итоговая оценка адекватности математической модели находится в интервале от 0,0 до 0,5 – это означает, что математическая модель значительно отличается от описываемой сцены, чем ближе оценка к 0,0, тем сходство меньше. Большинство пар изображений были правильно идентифицированы как различные, т. е. математическая модель неадекватно описывает заданные условия. Если же итоговая оценка адекватности находится в интервале от 0,5 до 1,0 – означает, что математическая модель слабо отличается от описываемой сцены, чем ближе к 1,0, тем сходство больше. При этом большинство пар изображений не были идентифицированы как различные, т. е. математическая модель адекватно описывает заданные условия. В целом, математическую модель можно считать адекватной для проведения на ней оценки качества работы разрабатываемых алгоритмов обработки изображений при итоговой оценке адекватности больше или равной 0,5.

Необходимо отметить, что при размере набора данных менее 1000 пар изображений лучше использовать уже обученную ИНС на другом большом наборе данных (более 1000 пар). Так же оценку адекватности модели больше 0,5 можно получить только при использовании уже обученной ИНС.

5 Верификация методики

Для того чтобы проверить выдвинутое предположение оценим адекватность Гауссовой модели изображения двумя способами:

1) сравнив качество работы гистограммного алгоритма обнаружения на Гауссовой модели изображения и на реальных видеопоследовательностях двух типов: первый тип – видеопоследовательность с летательным аппаратом на фоне чистого неба, второй тип – видеопоследовательность с автомобилем на фоне леса;

2) сравнив Гауссову модели изображения с кадрами реальных видеопоследовательностей двух типов: первый тип – чистое неба, второй тип – лес.

Для оценки адекватности первым способом воспользуемся исследовательским инструментарием описанным в [1]. Результаты качества работы гистограммного алгоритма обнаружения на трех типах видеопоследовательностей представлены в таблице 5.1.

Таблица 5.1 – Результаты качества работы гистограммного алгоритма обнаружения на трех типах видеопоследовательностей

Тип видеопоследовательности	Точность обнаружения	Полнота обнаружения	Пересечение над объединением
Гауссова модель изображения	1	1	0,55
Реальная видеопоследовательность с летательным аппаратом на фоне чистого неба	0,96	0,92	0,57
Реальная видеопоследовательность с автомобилем на фоне леса	0,01	0,42	0,22

Для оценки адекватности вторым способом используется обученная ИНС, в качестве обучающей выборки использовался набор данных аналогичный набору, применяемому для оценки критериев сходства, за исключением того, что была исключена Гауссова модели изображения и число изображений для каждого класса было увеличено до 1080. Результаты оценки адекватности Гауссовой модели изображения для двух типов видеопоследовательностей приведены в таблице 5.2.

Таблица 5.2 – Результаты оценки адекватности Гауссовой модели изображения для двух типов видеопоследовательностей

Тип видеопоследовательности	Оценка адекватности
Реальная видеопоследовательность чистого неба	0,64
Реальная видеопоследовательность с лесом	0,01

По полученным результатам из таблицы 5.1 можно сделать вывод, что Гауссова модель адекватно описывает изображения, соответствующие чистому небу (отклонения метрик качества работы алгоритма обнаружения на реальной и смоделированной видеопоследовательностях составили менее 10%). Однако при этом модель не адекватно описывает изображения, соответствующие лесу (отклонения метрик качества работы алгоритма обнаружения на реальной и смоделированной видеопоследовательностях составили более 10%). При этом из таблицы 5.2 можно сделать аналогичный вывод: Гауссова модель изображения адекватно описывает изображения, соответствующие чистому небу, и неадекватно описывает изображения, соответствующие лесу.

Таким образом, выдвинутое предположение можно считать подтвержденным.

Заключение

Для оценки сходства изображений актуальными являются критерии на основе ИНС. В частности, в статье предложена структура ИНС, позволяющая рассчитывать показатель сходства пары изображений. Предложенная структура ИНС позволила повысить точность обнаружения схожих и различных изображений до 2-х раз в сравнении с классическими и применяемыми на практике критериями оценки сходства изображений.

Для оценки степени адекватности математической модели изображения была предложена методика, использующая k-кратную перекрестную проверку ИНС на наборе данных, состоящем исключительно из реальных изображений целевой обстановки и изображений, полученных с помощью оцениваемой математической модели. Корректность оценки адекватности математической модели изображения была продемонстрирована на простейшем примере Гауссовой модели. При оценке адекватности было установлено, что Гауссова математическая модель изображения подходит для описания лишь простой фоновой обстановки, а для моделирования сложной фоновой обстановки оказывается неадекватной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сергеенко*, *А.В*. Универсальный инструментарий для исследования работы алгоритмов обнаружения в оптическом диапазоне / А.В. Сергеенко, А.Ю. Липлянин, А.В. Хижняк // Вестник ПГУ. – 2020. – № 12. – С. 36–43.
2. *Максимова*, *Н.Н*. Математическое моделирование: учеб.-метод. пособие / Н.Н. Максимова. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2019. – 88 с.
3. *Обоснование критерия оценки качества восстановления искаженных изображений для итерационного алгоритма в системах корреляционного обнаружения* / А.Ю. Липлянин [и др.] // Доклады БГУИР. – 2019. – № 4. – С. 64–72.
4. *Сравнение объективных методов оценки качества цифровых изображений* [Электронный ресурс] / А.В. Кокошкин [и др.] // Журнал радиоэлектроники. – 2015. – № 6. – Режим доступа: http://jre.cplire.ru/jre/jun15/15/text.pdf. – Дата доступа: 20.01.2023.
5. *Image Quality Assessment*: *From Error Visibility to Structural Similarity* [Electronic resource] / Z. Wang [et al.] // IEEE Transactions on Image Processing. – 2004. – Vol. 13, №. 4. – Mode of access: https://www.researchgate.net/publication/3327793Image_Quaity_Assessment_From_Error_Visibility_to_Structural_Similarity. – Date of access: 25.01.2023.
6. *Ализар*, *А*. «Выглядит похоже». Как работает перцептивный хэш [Электронный ресурс] / А. Ализар // Хабр. – Режим доступа: https://habr.com/ru/articles/120562/. – Дата доступа: 21.01.2023.
7. *Learning Fine-Grained Image Similarity with Deep Ranking* [Electronic resource] / J. Wang [et al.] // 2014 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. – 2014. – Mode of access: https://arxiv.org/pdf/1404.4661.pdf. – Date of access: 22.01.2023.
8. *TORCH.NN* [Electronic resource] // PyTorch. – Mode of access: https://pytorch.org/docs/stable/nn.html. – Date of access: 23.02.2023.
9. *Имитационное моделирование в задачах оптического дистанционного зондирования* / Г.М. Креков [и др.]. – Новосибирск: Наука, 1988. – 165 с.
10. *Андриянов*, *Н.А*. Дважды стохастические авторегрессионные модели изображений: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.18 / Н.А. Андриянов. – Ульяновск, 2017. – 186 л.
11. *Перекрестная проверка: оценка производительности* [Электронный ресурс] // Scikit-learn. – Режим доступа: https://scikit-learn.ru/3-1-cross-validation-evaluating-estimator-performance/. – Дата доступа: 24.02.2023.

Поступила в редакцию 05.05.2023.

Информация об авторах

Сергеенко Андрей Владимирович – магистр технических наук
Липлянин Антон Юрьевич – к.т.н.
Хижняк Александр Вячеславович – к.т.н.

ИНФОРМАТИКА

УДК 004.5 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_100
EDN: YVTACB

СУБЪЕКТИВНЫЕ АСПЕКТЫ ВОСПРИЯТИЯ ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Ю. Чжан

Белорусский национальный технический университет, *Минск*

SUBJECTIVE ASPECTS OF DIGITAL IMAGES PERCEPTIONS

Y. Zhang

Belarusian National Technical University, *Minsk*

Аннотация. Приведены результаты исследования субъективных восприятий цифровых изображений. Предложена модель цифрового изображения на макро-, микро- и информационном уровнях, а также дано описание опросника для изучения психофизиологических эффектов восприятий цифровых изображени и другие факторы, влияющие на субъективное восприятие.

Ключевые слова: *цифровые изображения*, *психофизиологическое воздействие*, *анкетирование*.

Для цитирования: *Чжан*, *Ю.* Субъективные аспекты восприятия цифровых изображений / Ю. Чжан // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 100–104. – DOI: https://doi.org/10.54341/ 20778708_2023_3_56_100. – EDN: YVTACB

Abstract. The subjective perception of digital images were investigated. A digital image model at the macro, micro and information levels was proposed, and a description of the questionnaire for the study of the psychophysiological effects of digital images was given. In addition, other factors that affect subjective perceptions were also introduced in this paper.

Keywords: *digital images*, *psychophysiological impact*, *questionnaire.*

For citation: *Zhang*, *Y.* Subjective aspects of digital images perceptions / Y. Zhang // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 3 (56). – P. 100–104. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_3_56_100. – EDN: YVTACB

Introduction

Due to the development of microelectronics and computer technology, digital images have entered our daily life from aerospace, medical and other fields. Big data research shows that more than 50% of the information people receive in daily life comes from digital images, such as screens, TVs, computers and smart phones, which affect people's physiology and psychology while transmitting information.

A digital image is an information model described according to ISO/IEC 19794-5 [1] by a two-dimensional representation of the brightness and texture of an object under certain lighting conditions, a discrete-continuous structure consisting of a finite number of elements (pixels) each of which has a geometric reference to the displayed object and its state in time. Digital images display symbols, graphics, coordinates, static and dynamic, primary and secondary, protected and unprotected information, categorized by features such as number of degrees of freedom, color depth, graphic type, information provided, playback mode, number of layers, etc. At the macro level, the digital image has a non-point primary emitter, which is potentially dangerous in terms of unwanted visual effects, such as "flashes" with hazardous class of A, AA, AAA, areas of uncomfortable brightness, etc. At the microscopic level, a digital image is a discrete continuous object with an ordered structure of a finite number of elements, each of which is independently assigned color, intensity, and other characteristics; and according to GOST R 52872-2019, this is "content brought to the user through his senses using a user application, often not requiring compliance with the standard." At the information level, a digital image is a content that carries a semantic and psycho-emotional load, described through an ensemble of states in the space of random events by families of orthogonal matrices and undirected graphs through data arrays and real functions *img* $I(x,y)$ [2]:

$$img = I(x,y) = \begin{bmatrix} I(0,0) & \dots & I(0,W-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ I(H-1,0) & \dots & I(H-1,W-1) \end{bmatrix},$$

where W and H are the width and height of the image.

As people spend a lot of time interacting with digital images on computers, smartphones and televisions, their subjective perception issues are affected by the World Health Organization (WHO), International Standardization Organization (ISO), International Telecommunication Union (ITU), International Color Union (ICC), etc. At the same time, the developed normative documents are based on the results of psychophysical experiments aimed at understanding the aspects of safety and ergonomics in terms of the preferred dynamic range of brightness, viewing conditions and time.

Recommendations on viewing conditions and viewing environments are given by ITU [3], and specifications by ICC [4].

1 Experimental method – Questionnaire

In October 2021, the authors compiled a questionnaire in Russian, English and Chinese to study the psychophysiological perceptions of digital images. The purpose of the study is the formation of biological reference intervals used in the future to design a favorable light environment. The questionnaire is hosted on the cloud https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSd8R5J5JsTak-KbYOBJA53-pz3IHBIfpbQUz_sTJYLJZT_pVfA/viewform and includes the registration area indicating age, gender, geographic region, profession, which are used as factors of biological reference intervals.

The questionnaire contains 35 questions, for example, "What devices do you interact with most during the day?" , "How often do you have problems with insomnia?", "What content do you prefer to use during your free time while at home?", "How much time do you usually spend interacting with the TV while at home?", "How often do you wake up at night for no apparent reason and have difficulty falling asleep?", "Do you take normal breaks when interacting with a computer?", "In what kind of light environment do you work at a computer?", "Do you have complaints about poor health?", " How often do you notice numbness and pain in the hand, back pain, dry eyes, headaches; neglect of personal hygiene, eating near a computer?", "Does working with a computer cause eye irritation (itching, burning, feeling of sand under the eyelids?", "Do you have visual impairment (nearsightedness, farsightedness, astigmatism)?", "How do you prefer to communicate with close people or friends?", "How often is there an actualization or threat of loss of friendships and / or family relations, academic success due to frequent work at the computer (staying online)?", "How often do you neglect family, social responsibilities and studies due to frequent work at the computer (being online)?", "Do you feel the need to return to the computer to improve your mood or avoid life problems?", etc.

2 Results and discussion

2.1 *Results of questionnaire survey*

The proportion of men and women participating in this questionnaire is similar, and the age span is wide, ranging from 15 to 63 years old, from different countries or regions, different occupations (mainly students).

Through the questionnaire survey, the following conclusions can be drawn:

1. Smartphones are the most-used electronic devices of the day; next is laptops, then TVs. (From questions 2-7, Figyure 2.1, 2.2)/

2. Computers make up a large proportion of people's daily lives (17), while TV is no longer a necessity and most people do not even watch it (16), as shown in Figure 1.3.

3. People prefer dynamic content (12, 14), as shown in Figure 1.4, but for possible visual and mental fatigue, the form of digital images has less influence and the content has more influence (35), in Figure 1.5.

4. People prefer to work in bright environments (20), as shown in Figure 1.6.

5. Communication with relatives and friends is mostly face-to-face, and normal and frequent using of computer may lead to irregular work or breaks, but currently does not cause social problems (26–29), as shown in Figure 1.7.

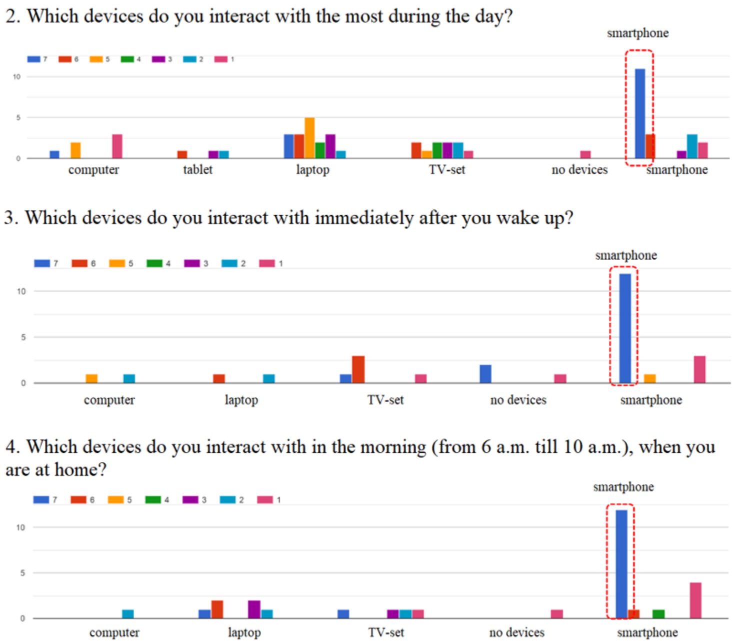


Figure 2.1 – The results of questions 2–4 in questionnaire survey

Figure 2.2 – The results of questions 5–7 in questionnaire survey

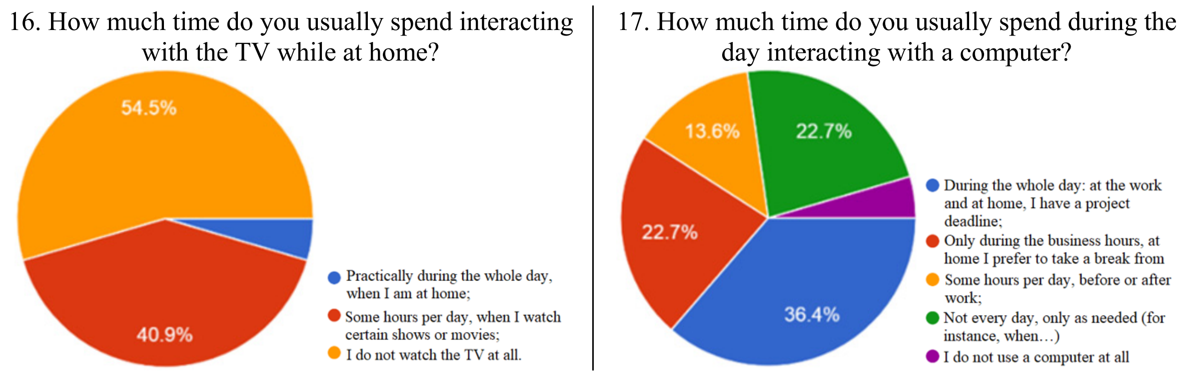


Figure 2.3 – The results of question 16 (spend interacting with th TV) and 17 (interacting with a computer) in questionnaire survey

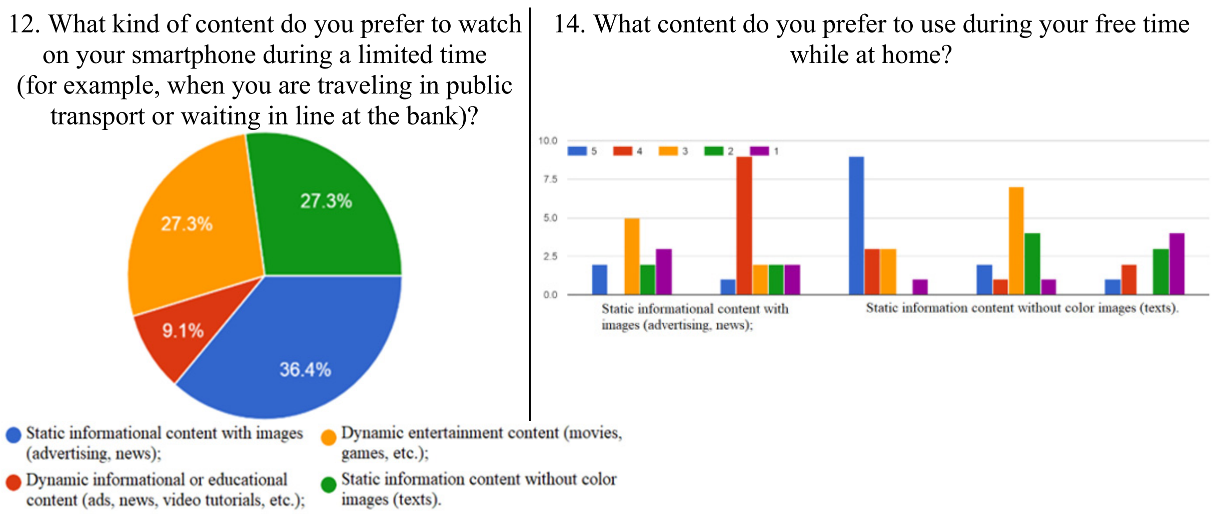


Figure 2.4 – The results of question 12 and 14 in questionnaire survey

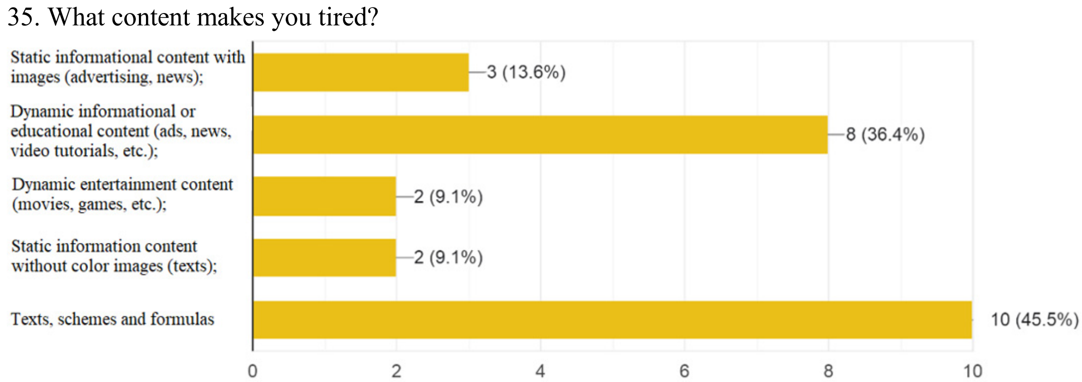


Figure 2.5 – The result of question 35 in questionnaire survey

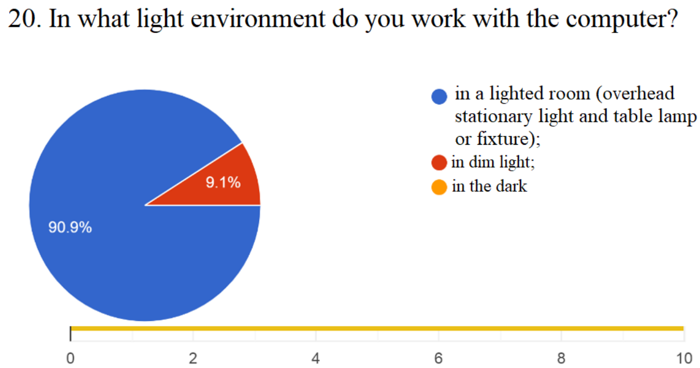


Figure 2.6 – The result of question 20 in questionnaire survey

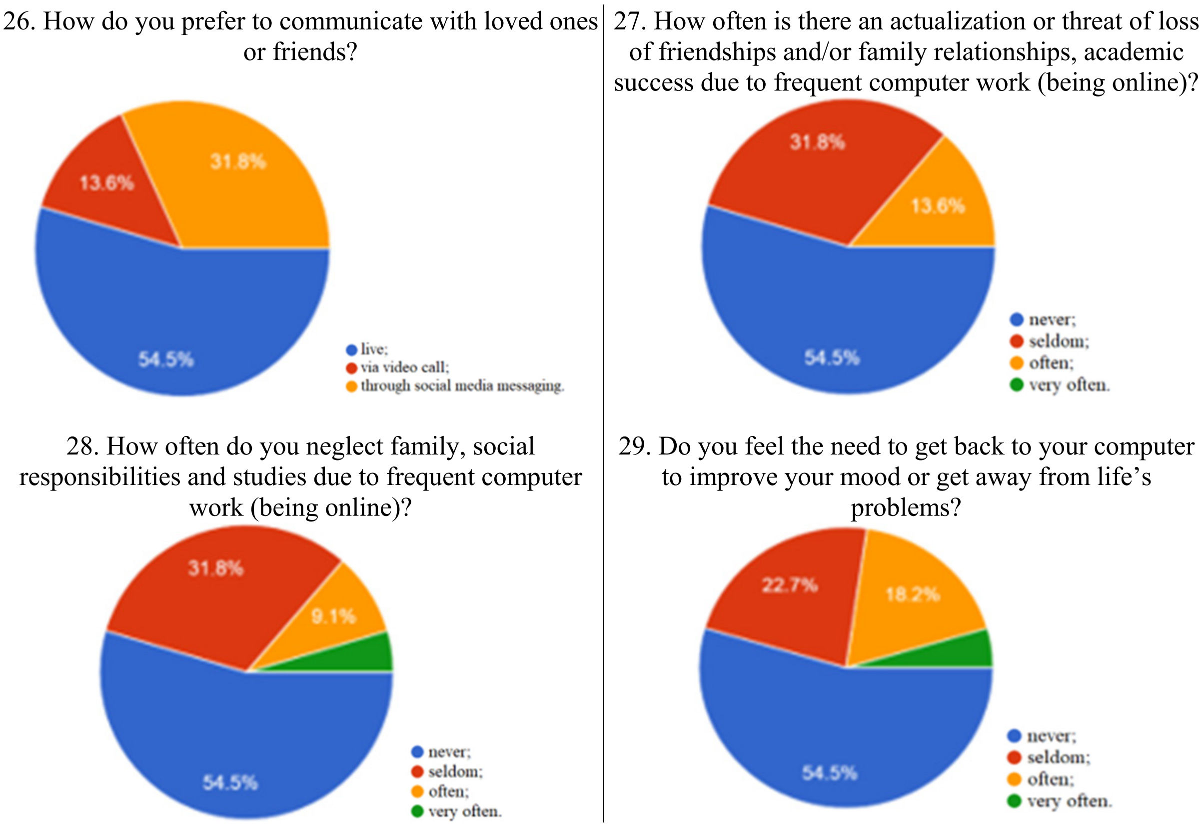


Figure 2.7 – The results of questions 26–29 in questionnaire survey

2.2 *Further discussion*

Other factors affecting subjective perception mainly include lens transmission spectra, spectral response curves, and photobiological rhythm factors.

The light transmission characteristics of eyes are mainly determined by the lens, and the difference in the transmission spectrum of eyes at different ages is also determined by the lens [5], [6]. It can be seen that with the increase of age, the transmission spectrum of the lens decreases continuously, and the blue light part decreases more than the red light. This is due to the fact that the anterior capsule of the lens continues to thicken with age, its mass and density continue to increase [7], and its optical path becomes longer and longer.

The photopic spectral response curve V(λ) adopts the data given by CIE in 1924, and its peak wavelength is at 555 nm. The circadian rhythm response function C(λ) adopts the data given by Gall et al., Germany, which is adopted by the German standard DIN V031-100: 2009 [8], and its peak wavelength is around 450 nm. Gall et al. [9] proposed the concept of photobiological rhythm factor to quantitatively evaluate the non-visual biological effects of light on the human body.

The impact of digital images on the human body is not only the adaptation or perception of vision, but also the impact on human circadian rhythms, including sleep, wake cycles, body temperature rhythms and hormone secretion rhythms. Currently, medical aspects related to the position of a person's head and neck when viewing content are relevant. The digitization of global society is causing the study of the impact of digital images to become multidisciplinary, bringing together the scientific community, manufacturers and regulators.

REFERENCES

1. ISO/IEC 19794-5:2011 Information technology. – Biometric data interchange formats. – Part 5: Face image data.

2. *Штанчаев*, *Х.Б.* Математическая модель представления изображения в системах распознавания образов / Х.Б. Штанчаев // Мир науки. – 2015. – Выпуск 2. – Педагогика и психология, (2), 29TMN215.

3. *Recommendation* ITU-R BT.2022. General viewing conditions for subjective assessment of quality of SDTV and HDTV television pictures on flat panel displays.

4. *International Color Consortium*. Specification ICC.1:2022. Image technology colour management – Architecture, profile format, and data structure.

5. *Block*, *J.* The IESNA Lighting Handbook / J. Block; 9th Edition. – New York: IESNA (Illuminating Engineers Society of North America). – 2000, 184 p.

6. *Age-related changes in the transmission properties of the human lens and their relevance to circadian entrainment* / L. Kessel [et al.] // Journal of Cataract Refractive Surgery. – 2010, № 36 (2). – P. 308–312.

7. *Spectral transmission of the human crystalline lens in adult and elderly persons: color and total transmission of visible light* / J.M. Artgas [et al.] // Investigative Ophthalmolgy & Visual Science. – 2012. – № 53 (7). – P. 4076–4084.

8. *Deutsches Institutfür Normung*. DIN V 5031-100 Optical Radiation Physics and Illuminating Engineering – Part 100: Nonvisual Effects of Ocular Light on Human Beings – Quantities, Symbols and Action Spectra. – Berlin: Deutsches Institut für Normung, 2009.

9. *Gall*, *D.* Definition and measurement of circadian radiometric quantities / D. Gall // Proceedings of 2004 CIE Symposium on Light and Health. – Bieske K. – Vienna. – 2004. – P. 129–132.

The article was submitted 16.06.2023.

Information about the authors

Zhang Y. – student

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Статья, направляемая в редакцию журнала «Проблемы физики, математики и техники», должна:

– соответствовать профилю журнала;

– являться оригинальным произведением, которое не предоставлялось на рассмотрение и не публиковалось ранее в объеме более 25% в других печатных и (или) электронных изданиях, кроме публикации препринта (рукописи) статьи авторов (соавторов) на собственном сайте;

– содержать все предусмотренные действующим законодательством ссылки на цитируемых авторов и источники опубликования заимствованных материалов, автором (соавторами) должны быть получены все необходимые разрешения на использование в статье материалов, правообладателем (лями) которых автор (соавторы) не является (ются).

Статья не должна содержать материалы, не подлежащие опубликованию в открытой печати, в соответствии с действующими законодательными актами Республики Беларусь.

Статья представляется на русском, белорусском или английском языках в двух экземплярах на белой бумаге формата А4 с пронумерованными страницами. Одновременно в редакцию направляется электронный вариант статьи на CD, или по электронной почте (e-mail: pfmt@gsu.by).

Для подготовки статьи можно использовать редактор MS Word for Windows (2000/2003), шрифт – Times New Roman, 14 pt, все поля – 2 см, или систему LaTeX с опцией 12 pt в стандартном стиле article без переопределения стандартных стилей LaTeX'а и введения собственных команд (все поля – 2 см).

В левом верхнем углу первой страницы статьи ставится индекс УДК, ниже по центру на русском и английском языках: название статьи прописными буквами, инициалы и фамилия автора (авторов), название организации, в которой он (они) работает, аннотация (до 10 строк) и перечень ключевых слов.

Статья, как правило, должна содержать: введение, основную часть, заключение и литературу.

Название статьи должно отражать основную идею исследования, быть кратким.

Во введении дается краткий обзор литературы, обосновывается цель работы и, если необходимо, отражается связь с научными и практическими направлениями. Обязательными являются ссылки на работы других авторов, публикации последних лет в области исследования, включая зарубежные.

Основная часть должна содержать описание методики, объектов исследования с точки зрения их научной новизны. Она может делиться на подразделы (с разъясняющими заголовками) и содержать анализ публикаций, относящихся к содержанию данных подразделов.

Формулы, рисунки, таблицы нумеруются в пределах раздела, например: (1.1), (2.3), рисунок 1.1, таблица 2.1. Нумерации подлежат только те формулы, на которые имеются ссылки. Номер формулы прижимается к правому краю страницы, а сама формула центрируется. Рисунки и таблицы располагаются непосредственно в тексте. Размер рисунков и графиков не должен превышать 10×15 см. Полутоновые фотографии должны иметь контрастное изображение. Повторение одних и тех же данных в таблицах и рисунках не допускается.

Каждая таблица должна иметь заголовок, в ней обязательно указываются единицы измерения рассматриваемых величин. Размерность всех величин должна соответствовать Международной системе единиц измерений (СИ). Не допускается сокращение слов, кроме общепринятых (т. е., и т. д., и т. п.).

В заключении в сжатом виде формулируются полученные результаты, их новизна, преимущества и возможности практического использования.

Список литературы должен содержать полные библиографические данные. Он составляется в порядке упоминания ссылок в тексте. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Ссылки даются в оригинальной транслитерации. Порядковые номера ссылок по тексту указываются в квадратных скобках (например, [1], [2]).

Статья подписывается всеми авторами. К статье прилагаются:

– сопроводительное письмо организации, в которой выполнена работа с просьбой об опубликовании;

– сведения об авторах;

– экспертное заключение о возможности опубликования статьи в открытой печати;

– договор о передаче авторского права (в двух экземплярах).

Сведения об авторах представляются на отдельной странице и содержат: фамилию, имя, отчество автора (авторов), ученую степень, звание, место работы и занимаемую должность, специалистом в какой области является автор, почтовый индекс и точный адрес для переписки, телефоны (служебный или домашний), адрес электронной почты. Следует указать автора, с которым нужно вести переписку и направление, к которому относится представленная работа (физика, математика, техника).

Поступившая в редакцию статья направляется на рецензирование. В случае её отклонения редакция сообщает автору решение редколлегии и заключение рецензента, рукопись автору не возвращается. Решение о доработке статьи не означает, что она принята к печати. После доработки статья вновь рассматривается рецензентом и редакционной коллегией.

Редакция оставляет за собой право производить редакционные изменения и сокращения, не искажающие основное содержание статьи.

Статьи, не отвечающие перечисленным требованиям, к рассмотрению не принимаются и возвращаются авторам. Датой получения рукописи считается день получения редакцией окончательного варианта.

Авторы несут ответственность за направление в редакцию уже ранее опубликованных статей или статей, принятых к печати другими изданиями.

Редакция предоставляет право первоочередного опубликования статей лицам, осуществляющим послевузовское обучение (аспирантура, докторантура, соискательство) в год завершения обучения. Плата за опубликование статей не взимается.

Всю корреспонденцию следует направлять простыми или заказными письмами (бандеролями) на адрес редакции.

Образец оформления статьи, сведений об авторах, экспертного заключения и текст договора о передаче авторского права размещены на сайте журнала по адресу http://pfmt.gsu.by.

Журнал включен в каталог печатных средств массовой информации Республики Беларусь. Индекс журнала: 01395 (для индивидуальных подписчиков), 013952 (для предприятий и организаций).

GUIDELINES FOR AUTHORS

In order for papers submitted to be published in the journal "Problems of Physics, Mathematics and Technics" the following rules should be taken into account:

– the paper should be in agreement with the type of the journal;

– the paper should be an original work, it should not have been submitted for consideration or previously published in the bulk over 25% in another scientific edition and (or) electronic publications with the exception of preprint publication (manuscript) of the paper of the authors (coauthors) on their own website;

– the paper should contain all statutory references to the cited authors and published sources of the borrowed material. The author (coauthors) must obtain all the necessary permissions for the use of materials in the article, in the event that he is (they are) not their right holder (right holders).

The paper should not contain the materials suppressed for publication in the press in accordance with the laws of the Republic of Belarus.

Contents of a paper should be written in line with the scope of the journal. The paper should be written in Russian, Belarusian and English, edited thoroughly and submitted in two copies to the Editorial Office. The manuscript should be printed on A4 white paper with all pages numbered. In addition, the authors must submit the electronic version of their manuscript either on a CD or by e-mail (e-mail: pfmt@gsu.by).

To prepare a paper it is possible to use MS Word for Windows (2000/2003), Times New Roman type, 14 pt. All margins are 2 cm. The author may also use 12 pt LaTeX in standard style article without redefinition of the margins and introduction of the author's commands.

Index UDC is sited in the left corner of the first page. The title of the paper in capital letters is followed by the name(s) of the author(s), authors' affiliations and full postal addresses next to which are an abstract of no more than ten lines and keywords. Relevant keywords should be placed just after the Abstract.

A paper, as a rule, should include Introduction, Body Text, Conclusion and Literature. The title of the paper must be concise. It describes the main idea of your research.

In the Introduction the author gives a brief review of literature, his grounds and specific objectives, he describes links with scientific and practical branches. All background information such as reference to the papers of others authors and some previous publications (including foreign ones) in the field of investigation is necessary.

The main part should contain description of the techniques used and objects of investigation within a large scientific framework. This part may be divided into subsection (with explanatory headings). It provides the readers with the analysis of the publications on the problem described in these subsections.

Formulas, figures and tables should be sequentially numbered in the framework of the section, for example: (1.1), (2.3), figure 1.1, table 2.1. The author should number only the formulas with appropriate references. The formula number is placed on the right side of the page and the formula itself is centred.

Figures and tables should be put into a contextual framework. The size of figures and charts does not exceed 10x15 cm. Halftone photos should be glossy and contrast. Do not repeat extensively in the text the data you have presented in tables and figures.

Each table should have the heading, in which units of measure describe the values under consideration. All measurements and data should be given in SI units, or if SI units do not exist, in an international accepted unit. The authors are advised to avoid abbreviations except for generally accepted ones (i. e., etc.). Define all abbreviations the first time they are used.

In the Conclusion the received data are described in concise form. The novelty of these results, advantages and possibility of practical use are presented.

Publications cited in the text should be presented in a list of references following the text of the manuscript. References should be given in their original spelling, numbered in the order they appear in the text and contain full bibliography. Please, do not cite unpublished papers. The numbers of references are sited in square brackets (e. g. [1], [2]).

The paper should be signed by all authors.

The following documents should be attached to the article:

– covering letter of the organization in which the work was done with a request for publication;

– information about the authors;

– expert opinion on the possibility of publishing an article in the press;

– treaty on the transfer of the copyright (two copies).

The authors should provide the following information on a separate sheet: surname, first name, patronymic, science degree, rank and correct postal address for correspondence, organization or company name and position, title, research field, home or office phone numbers, and e-mail address.

Then the paper is sent to the Editorial Board to be reviewed. The Editorial Office informs the authors of paper denial and the reviewer's conclusion without returning the manuscript. A request to revise the manuscript does not imply that the paper is accepted for publication since it will be re-reviewed and considered by the Editorial Board. The authors of the rejected paper have the right to apply for its reconsideration.

The Editorial Board has the right to edit the manuscript and abridge it without misrepresenting the paper contents.

Papers not meeting the above requirements are denied and returned to the authors. The date of receipt of the final version by the Editorial Office is considered as the submission date.

Authors are responsible for the submission of their publication because submission is a representation that the paper has not been previously published and is not currently under consideration for publication elsewhere. The Editorial Board charters top-priority for postgraduate students (postgraduate course, persons working for doctor's degree, competitors for scientific degree) during the current year of the completion of a course. Publication of the paper is free of charge.

Samples of the preparation of an article, information about the authors, expert opinion and the text of the treaty on the transfer of the copyright are placed on the site http://pfmt.gsu.by.

The journal «Problems of Physics, Mathematics and Technics» is included in the mass media catalogue of the Republic of Belarus. Index: 01395 (for personal subscribers), 013952 (for enterprises and organizations).